ФИГУРАТИВНИ ПОЛИГОНИ

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА

И ЊИХОВА ВЕЗА СА ОСОБИНАМА ИНТЕГРАЛА

ТЕЗА

МЛАДЕНА Т. БЕРИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА

ДОКТОРСКИ ИСПИТ

НА СЕДНИЦИ

ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ОД 11. МАЈА 1912. ГОДИНЕ ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА

Г. Г. Д-РА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА РЕД. ПРОФ. УНИВЕР.
Д-РА МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА ВАНР. ПРОФ. УНИВЕР.

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1913.

ФИГУРАТИВНИ ПОЛИГОНИ

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА

И ЊИХОВА ВЕЗА СА ОСОБИНАМА ИНТЕГРАЛА

ТЕЗА

МЛАДЕНА Т. БЕРИЋА

ПРИМЉЕНА ЗА

ДОКТОРСКИ ИСПИТ

НА СЕДНИЦИ

ФИЛОЗОФСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

ОД 11. МАЈА 1912. ГОДИНЕ ПРЕМА РЕФЕРАТУ ЧЛАНОВА ИСПИТНОГ ОДБОРА

Г. Г. Д-РА МИХАИЛА ПЕТРОВИЋА РЕД. ПРОФ. УНИВЕР.
Д-РА МИЛУТИНА МИЛАНКОВИЋА ВАНР. ПРОФ. УНИВЕР.

У БЕОГРАДУ
ШТАМПАНО У ДРЖАВНОЈ ШТАМПАРИЈИ КРАЉЕВИНЕ СРБИЈЕ
1913.

Своме учитељу

Господину Михаилу Петровићу

Захвални ученик

УВОД

Од постанка диференцијалних једначина, постављен је проблем њиховог решења. У деветнаестом веку напушта се првобитни проблем решења: *наћи функцију дефинисану датом диференцијалном једначином*, и поставља нов: *наћи особине те функције, која је дефинисана датом диференцијалном једначином, и ако се не зна сама та функција.* Нови проблем морао се поставити, јер је доказано да има и таквих диференцијалних једначина (а такве су скоро *све*) чије решење није никаква комбинација до сад познатих функција у коначном броју, већ нека до сад непозната функција. Нови проблем, и ако је привидно тежи, да̂ се раставити на много мањих под-проблема, међу којима има и таквих, који су лакши но првобитни проблем.

Међу тим под-проблемима налазе се неки чије је решење везано за извесне геометриске слике, које припадају датој диференцијалној једначини. До сад употребљене геометриске слике су извесни полигони, звани *фигуративни полигони.*

Први фугуративни полигон употребио је *Newton*,[1]) да би раздвојио гране функције, која је дефинисана

---

[1]) Библиографију видети у: Encyclopédie des siences mathematiques (éd. fr.) tome I, volume II. p. 124. note 397.

алгебарском једначином (која се може сматрати као диференцијална једначина нултог реда).

Briot и *Bouquet*[1]) употребљавали су фигуративни полигон да одреде инфинитезимални ред грана функције, која је дефинисана диференцијалним једначина првог реда и првог степена по изводу а тако исто и холоморфност тих грана.

Fine[2]) је употребио фигуративни полигон за решење истог проблема као и Briot и Bouqnet, али за једначине, које су полином по изводу.

М. Петровић[3]) је употребио фигуративни полигон за одредбу покретности или непокретности нула и бесконачница, и одредбу њиховог реда.

Нека је

$$(1) \qquad \Sigma A z^{\alpha} u^{\beta_0} (u')^{\beta_1} = 0$$

дата диференцијална једначина. Ако је $\beta_1 = 0$, то је алгебарска једначина; Newton за конструкцију узима само α и β_0, као две координате једне тачке. Ако је $\beta_1 = 0$ и $\beta_1 = 1$; Briot и Bouquet комбинују α и β_0 са β_1 и добијају по две координате једне тачке. Исто тако ради и Fine. М. Петровић прави две комбинације само од β_0 и β_1 и добија две координате једне тачке. Те тачке се обавијају изломљеном линијом и добија се полигон.

Проблеми, које сам ја имао у виду, тражили су нов полигон. Тај нови полигон има једну значајну особину: да потпуно замењује дату диференцијалну

---

[1] Briot et Bonquet: Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles (Journal de l'Ecole Polythechnique, tomme XXI, 1856).

[2]) Fine: On the Functions Defined, by Differential Equations, with an Extension of the Puiseux Polygon Construction to these Equations (Amer Journal of Math., 1889).

[3]) Michel Petrovitch: Sur les Zeros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques (Thèse, Paris 1894, G. V).

једначину, т. ј. да се са њега може поново написати дата диференцијална једначина. Такви полигони могу се конструисати за диференцијалне једначине маког реда.

Нека је

$$\sum A\, z^{\alpha}\, u^{\beta_0}\left(\frac{du}{dz}\right)^{\beta_1} \frac{d^2u}{dz^2}\Big)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{d^nu}{dz^n}\right)^{\beta_n} = 0 \tag{2}$$

диференцијална једначина реда n. Да бих конструисао фигуративни полигон једначине (2) узео сам неколико *листића* и на њима нацртао по неколико тачака као Newton за алгебарске једначине. Затим сам по неколико од тих листића сложио на известан начин и добио *сложене листиће првога реда.* Затим сам на известан начин сложио те сложене листове првог реда и добио *сложене листове другог реда.* И тако најзад слагањем сложених листова $(n-1)^{\text{ог}}$ реда добио сам *сложене листове* $n^{\text{тог}}$ *реда.* Поједине тачке на тим листовима зову се *фигуративне тачке.* Свака тачка одговара једном члану и обрнуто свакој тачки одговара један члан. Свака тачка носи известан коефициенат, коефициенат тачке, а то је коефициенат члана коме одговара та тачка. Скуп свих фигуративних тачака зове се *скуп фигуративних тачака.*

Диференцијалној једначини реда n одговара сложен лист реда n. Алгебарској једначини одговара прост лист (алгебарска једначина је диференцијална једначина реда 0, прост лист је сложен лист реда 0). Како се из простих листова добија сложен лист реда 1, исто тако у принципу добија се од листова реда k лист реда $k+1$. Отуд се види, да су диференцијалне једначине реда $k+1$ онолико компликованије но једначине реда k, колико су диференцијалне једначине реда *1* компликованије но једначине реда *0*, т. ј. но алгебарске једначине.

Посматрањем скупа фигуративних тачака могу се изучавати разноврсне особине решења диференцијалне једначине, која одговара том скупу. Решења има две врсте: једна се зову *интеграли*, ако независно промењљива може варирати у бескрајно малом кругу око извесне тачке; ако је пак решење такво, да остаје решење само докле независно промењљива варира у извесном углу чије је теме посматрана тачка, а престаје бити решење, кад она изађе из тог угла, такво решење се зове *карактеристика*.

У овом раду циљ ми је био да развијем у ред интеграле диференцијалних једначина првог реда, остављајући карактеристике тих једначина, као и интеграле и карактеристике диференцијалних једначина вишег реда за доцније. Сем тога сам хтео да униформишем неке раније нађене теореме о једначинама првог реда, као теореме *Painlevé*-а о непокретности есенцијалних сингуларитета, *Fuchs*-а о покретности алгебарских критичних тачака, *Painlevé*-а о покретности алгебарских критичних тачака и *М. Петровића* о непокретности и покретности нула и бесконачница.

Овај рад подељен је на четири главе.

Прва глава садржи дефиницију фигуративних тачака и фигуративног полигона, као и других израза везаних за полигон. Како свакој трансформацији дате једначине одговара извесна трансформација полигона, изнете су ту и потребне трансформације. Ту је показан и однос овог фигуративног полигона са осталим фигуративним полигонима (3° и 12°).

Друга глава садржи дефиницију асимптота појединих грана функције која је дефинисана датом диференцијалном једначином у близини дате тачке.

Асимптота има разних редова. Затим се показује како се налазе асимптоте првог реда.

Трећа глава показује како се добијају асимптоте другог, трећег и т. д. реда, и како се из њих добија ред, који преставља тражено решење, односно грану тога решења, коју смо изабрали за развијање у ред. На крају се налази практично упуство за развијање гране у ред и иза њега примери.

Четврта глава садржи примену на неколико проблема аналитичне теорије диференцијалних једначина првог реда. Прво се испитује аналитично продужење редова добијених у трећој глави.

После тога посматра се варијација интеграционе константе, па се добијају разне теореме о покретности и непокретиости сингуларитета, као теорема *Painlevé*-а о непокретности есенцијалних сингуларитета. Теорема *М. Петровића* о покретности и непокретности нула и бесконачница, теорема *Fuchs*-а о непокретности алгебарских критичних тачака и теорема *Painléve*-а о покретности алгебарских критичних тачака.

ПРВА ГЛАВА

ФИГУРАТИВНИ ПОЛИГОН

— ДЕФИНИЦИЈЕ И ТРАНСФОРМАЦИЈЕ —

I. Дефиниције

1°. Нека је

$$F\left(Z, U, \frac{dU}{dZ}\right) = 0 \tag{1}$$

диференцијална једначина коју хоћемо да испитамо. Претпоставићемо да једначина (1) задовољава ове услове:

први услов: лева страна једначине (1) је полином по изводу $\frac{dU}{dZ}$, рецимо реда n, т. ј. облика:

$$\Sigma_{0}^{n}{}_{\beta_1} f_{\beta_1}(Z, U) \quad \left(\frac{dU}{dZ}\right)^{\beta_1} \quad (\beta_1 = 0, 1, 2, \cdots n)$$

други услов: коефициенат $f_{\beta_1}(Z, U)$ за све вредности β_1 од 0 до n су функције које се могу развити у ред уређен по степенима од $Z—Z_0$, $U—U_0$ у близини тачке (Z_0, U_0) где су им изложитељи ма какви бројеви: позитивни, негативни, цели, рационални, ирационални, реални или комплексни; под условом да је модуо изложитеља, који садржи у себи бар један број негативан, мањи од извесног одређеног броја, који теориски може бити колико хоћемо велики, а практично који мора бити такав да главни део фигуративног полигона буде могуће нацртати.

Према томе могуће је написати једначину (1) у облику:

$$(2) \qquad \sum_{M}^{\infty}{}_{\alpha} \sum_{N}^{\infty}{}_{\beta_0} \sum_{0}^{\infty}{}_{\beta_1} A\, Z^{\alpha}\, U^{\beta_0}\, U'^{\beta_1} = 0 \quad \text{са } U' = \frac{dU}{dZ}.$$

(индекс α, β_0, β_1 који треба писати поред A нећемо писати ради упрошћавања; тако исто у место $\Sigma\,\Sigma$ писаћемо само Σ; границе, између којих треба узети збир, писаћемо само онда кад оне нису оне које се обично узимају). M, N су два броја мало пре дефинисана, n је из обрасца (1). Коефициенти A су функције облика једначине (1) њених коефицинената и бројева Z_0 и U_0, т. ј. тачке (Z_0, U_0).

Напомена. Бројеви α и β_0 су у пракси реални бројеви; али при трансформацијама једначине, број α може постати комплексан број.

2°. Сменимо у (2).

$Z—Z_0$ са z, $U--U_0$ са u, U' са $u' = \frac{du}{dz}$ једначина (2) постаће

$$(3) \qquad \Sigma\, A z^{\alpha}\, u^{\beta_0}\, u'^{\beta_1} = 0$$

Уочимо сад ма који од чланова леве стране једначине (3):

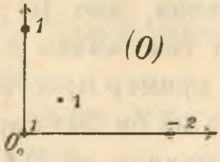
$$(4) \qquad A\, z^{\alpha}\, u^{\beta_0}\, u'^{\beta_1}$$

и n листова који носе индексе: $0, 1, 2, \cdots n$. На сваком листу нацртајмо по координатни систем нпр. правоугли са почетком у тачки $0_0, 0_1, \cdots 0_n$. На листу индекса β_1 нацртајмо тачку чије су координате (α, β_0), поред те тачке напишимо коефициенат A. Та тачка (α, β_0) коефициента A, на листу индекса β_1 представља нам члан (4). Једном члану (4) одговара једна једина тако дефинисана тачка, и једној тако дефинисаној тачка одговара један једини члан (4). Тако дефинисана тачка зове се *фигуративна тачка*. Она потпуно преставља члан и замењује га, као и обрнуто, с тога ће се у идућим одељцима често рећи тачка, па тим разумемо члан (4).

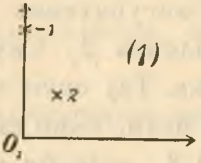
Тако на пример члановима једначине

$$(4z^2 + u)\, u'^2 + (2zu - u^3)\, u' + (u^3 + zu - 2z^4 + 1) =$$

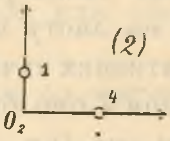
одговараће тачке на три листа, чији су индекси: *0*, *1*, *2*. (Види слике 1, 2, 3).



Сл. 1.

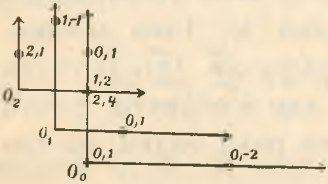


Сл. 2.



Сл. 3.

Замислимо сад да су сви листови индекса: 1, 2,...n провидни и метимо их на лист индекса *0* тако, да почетак листа индекса β_1 буде у тачки $(-\beta_1, +\beta_1)$ листа индекса *0*, или у тачки $(-(\beta_1 - k), +(\beta_1 - k))$ листа индекса k; и да су позитивни правци апсцисних оса свију листова паралелни у истом смислу. Све фигуративне тачке једначине (3) т. ј. фигуративне тачке свију чланова (4) једначине (3) видеће се кроз лист индекса n као да су на листу индекса *0*. Тај скуп фигуративних тачака чланова (4) једначине (3) зове се *скуп фигуративних тачака* једначине (3). Да би разликовали ком листу припада која од фигуративних тачака, могу се тачке означити различито, као на три листа у ранијем примеру, или се може испред коефициента тачке написати индекс листа. Тада се могу све тачке нацртати на једном листу. Тако малопређашњем примеру одговарала би слика 4.



Сл. 4.

Тачке које су биле означене знацима: o, ×, . носе испред коефициената бројеве: *2*, *1*, *0*.

Скуп фигуративних тачака може се нацртати и одмах на једном листу, за то нам служи ово

Упуство за цртање скупа фигуративних тачака: Узме се правоугли координатни систем са почетком O_0, и нацрта тачка $(\alpha-\beta_1, \beta_0+\beta_1)$, поред те тачке напише се индекс β_1 и коефицienат члана A. Тако добијена тачка је фигуративна тачка, ако је замислимо на листу индекса β_1. Скуп тих тачака је скуп фигуративних тачака. Тај скуп за пример престављен на слици 4 био би исти, само што не би било других оса сем оса $O_0\alpha$, $O_0\beta_0$, које би означили са OA, OB.

Координате тачке у односу на координатни систем (OA, OB) зову се *апсолутне координате* фигуративне тачке. Као што се из самог примера види, две тачке могу имати исте апсолутне координате (у примеру тачка чије су апсолутне координате *0*, *2*). Такве тачке чине једну *многоструку тачку*. Поједине тачке, које састављају исту многоструку тачку, нису на истом листу, јер пошто је

$$(5) \qquad \begin{aligned} A &= \alpha-\beta_1 & B &= \beta_0+\beta_1 \\ A' &= \alpha'-\beta'_1 & B' &= \beta'_0+\beta'_1 \end{aligned}$$

кад би било

$$\beta_1 = \beta'_1$$

пошто мора бити

$$A = A', \qquad B = B'$$

изашло би да је

$$\alpha = \alpha', \quad \beta_0 = \beta'_0$$

два члана који одговарају тој тачки били би у ствари један члан.

Највећи индекс листа, на коме се налази многострука тачка, зове се *реални степен* многоструке тачке. Разлика највећег и најмањег индекса листова, на којима се налази многострука тачка, зове се *привидни степен* многоструке тачке. *Простом* тачком зваће се она, чији је степен нула (реално и привидно проста тачка).

3°. Конструишимо полигон, који има ове две особине:

1° свако теме полигона је нека од фигуративних тачака.

2° ниједна фигуративна тачка није ван полигона. Тај полигон се зове: *фигуративни полигон диференцијалне једначине* (3).

Ако је $n = 0$ једначина (3) је алгебарска једначина. Ако су α и β_0 реални цели и позитивни бројеви, цео скуп фигуративних тачака и полигон су на једном листу индекса 0, дакле све су тачке и реално и привидно просте тачке; део овог фигуративног полигона са леве и у исто доба доње стране је *Newton*-ов полигон или по кашто назван *Puiseux*-ов.[1]

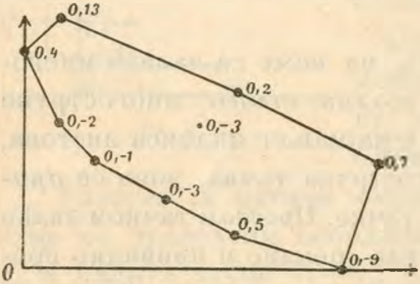
---

[1] Puiseux: Memoire sur les fonctions algébriques (Journal de Mathématiques pures et appliquées t XV; 1850).

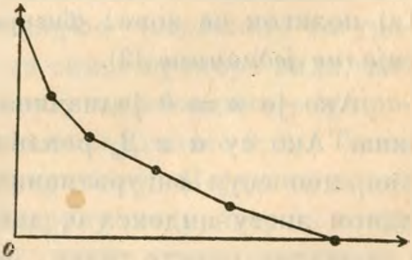
Слика *5* преставља фигуративни полигон горе дефинисан за једначину

$$4u^6 — 2zu^4 + 13zu^7 — z^2 u^3 — 3z^4 u^2 + 5z^6 u — z^9 + \\ + 7z^{10} u^3 + 2z^6 u^5 — 3z^5 u^4 = 0,$$

а слика *6* преставља *Newton*-ов (*Puiseux*-ов) полигон за исту једначину. Ако је $n = 1$, и ако се не пишу поред тачака индекс листа ни коефициенат члана, и ако се све апсцисе повећавају за *1* (т. ј. цела слика помакне у десно за 1) и ако се конструише само онај део који и код *Newton*-овог полигона, добиће се *Briot Bouquet*-ов полигон. (Многоструке тачке овде изгледају да су просте тачке).



Сл. 5.



Сл. 6.

4°. За сваку страну фигуративног полигона, и у опште за сваку праву која пролази кроз две фигуративне тачке, везан је извесан број, који се зове *коефициенат праве* (стране). Тај се коефициенат овако дефинише:

Нека је P_0 раван нормална на листу, на коме се налази скуп фигуративних тачака, и која сече лист индекса *0* дуж апсцисне осе. Нека је та раван раван комплексне променљиве μ, тачка $\mu = 0$ нека је координатни почетак 0_0, а реална оса нека је апсцисна оса. Нека је M_0 тачка ($A = 0, B = 1$), повуцимо из M_0 праву паралелну правој чији се коефициенат тражи, та права сећи ће раван P_0 у извесној тачки $\mu = \mu_0$; тај комплексни број μ_0 зове се коефициенат праве.

Ако права пролази кроз две тачке (A_0, B_0) и (A_1, B_1) њен ће коефициенат бити дат једначином

$$A_0 + \mu B_0 = A_1 + \mu B_1 \tag{6}$$

одакле се добија

$$\mu = \frac{A_1 - A_0}{B_0 - B_1} \tag{6'}$$

Стране полигона се деле на леве и десне. Леве су стране главни део фигуративног полигона. Десне пак стране могу бити бескрајно далеко, ако је изложитељ од z неограничен са горње стране.

Према реалном делу коефициента стране, стране се деле на горње, ако им је тај реални део коефициента негативан (ако су леве) или позитиван (ако су десне) и доње ако је он позитиван (ако су леве) или негативан (ако су десне).

Уочимо теме полигона, из њега полазе две стране коефициената, μ_-, μ_+, $(\mu_- < \mu_+)$. Размак (μ_-, μ_+) зове се *област* (domaine) *темена*. Област може бити нула, ако је теме привидно, она не постоји за тачку у полигону.

Теме, чија једна страна има реални део коефициента позитиван (ако је лева) а друга нема такав коефициенат, зове се *доње теме* $\bar{\omega}$; теме, чија једна страна има реални део коефициента негативан (ако је лева) а друга нема такав коефициенат, зове се *горње теме* $\bar{\omega}$. Ако су стране десне треба разменити речи позитиван и негативан. Кад су изложитељи реални, између два лева темена $\bar{\omega}$ могу бити само привидна темена; али кад је α комплексан број (што наступа при извесним трансформацијама), између два темена $\bar{\omega}$ може бити и правих темена.

5°. Фигуративни полигон описан у чл. 3. је полигон који припада једначини (*3*). Међутим једначина (3) је једначина (*1*) развијена у облик (3) у близини тачке (Z_0, U_0). Због тога се тако добијени полигон једначине (3) зове: *фигуративни полигон диференцијалне једначине (1) у близини тачке* (Z_0, U_0). Тај пологон варира од тачке до тачке, за то што варира и облик једначине (3) а и коефициенти A који су функције тачке (Z_0, U_0).

Напомене. 1°. Ако би неки члан садржао и логаритамских функција независно промењивих, те логаритамске функције се мећу у коефициенат. Тако у члану $11 z^5 u^3 u'^2 (log\, z^2)^7$ коефициенат тачне $(5-2, 3+2)$ је $11\ (log\ z^2)^7$.

2°. Ако је α комплексан број (што бива при извесним трансформацијама), $\boldsymbol{A}$ ће бити тако исто. У том случају ако ставимо $\alpha = p + qi$, биће $\boldsymbol{A} = (p-\beta_1) + qi$, $\boldsymbol{B} = \beta_0 + \beta_1$, а фигуративна тачка биће тачка у простору $(p-\beta_1, \beta_0 + \beta_1, q)$ полигон ће бити замењен омотачем призме, која је нормална на листовима.

II. Трансформације једначине оличене у трансформацијама полигона.

6°. Трансформовањем диференцијалне једначине трансформује се и фигуративни полигон те једначине. Но како су промене на полигону уочљивије него промене једначине, довољно је уочити промене полигона па да се виде и промене једначине. Шта више довољно је вршити промене самог полигона и не водећи рачуна о једначини, из особина полигона добијаће се и особине једначине и њених решења. У томе и јесте важност фигуративног полигона и његових трансформација.

Ми ћемо уочити овде само оне трансформације које ће требати у следећим главама, а то су:

трансформација (T_1):

$$[z, u, u';\ z, vz^{\mu},\ z^{\mu-1}(zv' + \mu v)]\,^{1)}$$

трансформација (T_2):

$$[z, u, u';\ z, v + Cz^{\mu},\ v' + C\mu\, z^{\mu-1}]$$

трансформација $(T_2\ bis)$:

$$[z, u, u';\ z, v + \varphi_{\mu}(z),\ v + \varphi^{\mu'}(z)]$$

функција φ биће дефинисана у чл. 9.

трансформација (T_3)

$$[z, u, u';\ z, v^p,\ pv^{p-1}\,v']$$

трансформација (T_4):

$$\left[z, u, u';\ \xi^q, u, \frac{u}{q\xi^{q-1}}\right]$$

трансформација (T_5):

$$[z, u, u';\ z + a,\ u, u']$$

трансформација (T_6):

$$\left[z, u, u';\ u, z, \frac{1}{z'}\right]$$

---

[1] Jordan-ов знак

$$[a, b, c, \cdot\ \cdot\ \cdot\ ; m, n, p, \cdot\ \cdot\ \cdot\ ]$$

значи да треба ставити m место a, n место b, p место c и т. д.

Бројеви μ, p, q зову се *коефицијенти трансформације*; a и C су константе.

Трансформација (T_1)

7°. Трансформација (T_1) коефицијента μ_0 мења коефицијенат сваке праве која пролази кроз две фигуративне тачке диференцијалне једначине, смањујући тај коефицијенат праве за μ_0. Пројекција на ординатној оси одстојања тих двеју тачака не мења се.

Уочимо два члана (4) једначине (1) или (3), (ради разликовања додаћемо изложитељима α, β_0 β_1 и коефицијенту A, индекс *0* у првом и *1* у другом члану):

$$A_0\, z^{\alpha_0}\, u^{\beta_{0,0}}\, u'^{\beta_{1,0}}\,, \qquad A_1\, z^{\alpha_1}\, u^{\beta_{0,1}}\, u'^{\beta_{1,1}}$$

њима одговарају тачке чије су апсолутне координате:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_0 &= \alpha_0 - \beta_{1,0} & \qquad \boldsymbol{B}_0 &= \beta_{0,0} + \beta_{1,0} \\ \boldsymbol{A}_1 &= \alpha_1 - \beta_{1,1} & \qquad \boldsymbol{B}_1 &= \beta_{0,1} + \beta_{1,1}. \end{aligned}$$

Трансформација (T_1) коефицијента μ_0 мења та два члана у:

$$A_0\, z^{\alpha_0}\, (vz^{\mu_0})^{\beta_{0,0}}\, [z^{\mu_0 - 1}\, (zv' + \mu v)]^{\beta_{1,0}}$$
$$A_1\, z^{\alpha_1}\, (vz^{\mu_0})^{\beta_{0,1}}\, [z^{\mu_0 - 1}\, (zv' + \mu v)]^{\beta_{1,1}}$$

Развив у ред израз $[\ ]^{\beta_1}$, добија се $\beta_1 + 1$ сабирак, а члан добија облик

$$A_0\, z^{\alpha_0 + \mu_0 \beta_{0,0} + (\mu_0 -- 1)\, \beta_{1,0}}\, v^{\beta_{0,0}} \sum_{0}^{\beta_{0,0}}{}_{k} \binom{\beta_{1,0}}{k} \mu^k\, v^k\, z^{\beta_{1,0} - k}\, v'^{\beta_{1,0} - k}$$

$$A_1\, z^{\alpha_1 + \mu_0 \beta_{0,1} + (\mu_0 - 1)\, \beta_{1,1}}\, v^{\beta_{0,1}} \sum_{0}^{\beta_{0,1}}{}_{k} \binom{\beta_{1,1}}{k} \mu^k\, v^k\, z^{\beta_{1,1} - k}\, v'^{\beta_{1,1} - k}$$

Сваком од $\beta_1 + 1$ чланова одговара по једна тачка чије су апсолутне координате:

$$\boldsymbol{A}'_0 = [\alpha + \mu_0 \beta_{0,0} + (\mu_0 - 1)\beta_{1,0} + (\beta_{1,0} - k)] - [\beta_{1,0} - k]$$

$$\boldsymbol{B}'_0 = [\beta_{0,0} + k] + [\beta_{1,0} - k]$$

где је $\beta_{1,0} - k$ индекс листа на коме се налази тачка добијена трансформацијом тачке на листу индекса $\beta_{1,0}$. Последњи обрасци дају се дописати у облику

$$\boldsymbol{A}'_0 = \boldsymbol{A}_0 + \mu_0 \boldsymbol{B}_0, \quad \boldsymbol{B}'_0 = \boldsymbol{B}_0.$$

На исти начин добија се из другог члана:

$$\boldsymbol{A}'_1 = \boldsymbol{A}_1 + \mu_0 \boldsymbol{B}_1, \quad \boldsymbol{B}'_1 = \boldsymbol{B}_1.$$

Како у обрасцуза $\boldsymbol{A}'_1$, $\boldsymbol{B}'_0$ и $\boldsymbol{A}'_1$, $\boldsymbol{B}'_1$ не фигурише k, види се, да све добијене тачке припадају једној истој многострукој тачки.

Трансформација (T_1) привидно просту тачку степена β_1 претвара у реално многоструку тачку истог степена.

Коефициенат тачке на листу индекса k биће

$$A \binom{\beta_1}{k} \mu_0^{\beta_1 - k}$$

Нека је μ_1 коефициенат посматране праве; он ће бити дат обрасцем

$$\mu_1 = \frac{\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_0}{\boldsymbol{B}_0 - {}_1\boldsymbol{B}}$$

коефициенат праве добијене из прве трансформацијом (T_1) биће

$$\mu_2 = \frac{\boldsymbol{A}'_1 - \boldsymbol{A}'_0}{\boldsymbol{B}'_0 - \boldsymbol{B}'_1}$$

Заменом израчунатих вредности за A'_0, B'_0, A'_1 и B'_1 добија се:

$$\mu_2 = \frac{(A_1 + \mu_0 B_1) - (A_0 + \mu_0 B_0)}{B^0 - B_1} = \frac{A_1 - A_0}{B_0 - B_1} - \mu_0 \frac{B_0 - B_1}{B_0 - B_1} =$$

$$= \mu_1 - \mu_0$$

Пројекција на ординатној оси је $(B_1 - B_0)$. Пројекција трансформоване праве је $(B'_1 - B'_0)$. Дакле:

$$(B'_1 - B'_0) = (B_1 - B_0).$$

т. ј. д.[1])

Из овога излазе ове две последице

1°. Трансформација (T_1) коефициента μ_0 трансформује стране фигуративног полигона у стране, задржавши им пројекције на ординатној оси и умањивши им коефициенте за μ_0.

2°. Страна чији је коефициенат $\pm \infty$ не мења свој коефициенат. Она је паралелна апсцисној оси, њена пројекција на ординатној оси је нула, а та се пројекција не мења.

Напомена. Ако се на Њутновом полигону изврши трансформација (T_1) коефициента μ_0; све стране чији су коефициенти мањи од μ_0 добиће негативне коефициенте и исчезнуће са слике (јер тамо постоје само леве стране чији су коефициенти позитивни), страна чији је коефициенат μ_0 претвара се у страну чији је коефициенат *0*, и она изчезава са слике; дакле слика је упрошћена. Отуд употреба ове трансформације код *Puiseux*-а и других.

Трансформација (T_2).

8°. Трансформација (T_2) коефициента μ_0 замењује тачку низом тачака на правој коефициента μ_0 која пролази кроз тачку која се трансформује.

---

[1]) Значи: тим је доказано.

Уочимо један од чланова (4)

$$Az^{a}\, u^{\beta_0}\, u'^{\beta_1},$$

коме одговара тачка, чије су апсолутне координате

$$A = \alpha - \beta_1,\quad B = \beta_0 + \beta_1$$

Трансформација (T_2) коефициерта μ_0 мења тај члан у

$$A\, z^{a}\, (v + C\, z^{\mu_0})^{\beta_0}\, (v' + C\, \mu_0\, z^{\mu_0 - 1})^{\beta_1}$$

Развив у ред изразе $(\cdot\cdot\cdot)^{\beta_0}$ и $(\cdot\cdot\cdot)^{\beta_1}$ добија се збир

$$A\, z^{a_1} \sum_{0}^{\beta_0}{}_{g} \sum_{0}^{\beta_1}{}_{h} \binom{\beta_0}{g} \binom{\beta_1}{h}\, v^{g}\, v'^{h}\, C^{\beta_0 - g}\, (C_{\mu_0})^{\beta_1 - h}$$

где је

$$\alpha_1 = \alpha + \mu_0\,(\beta_0 - g) + (\mu_0 - 1)\,(\beta_1 - h) = \alpha - \beta_1 + h +$$
$$+ \mu_0\,[\,(\beta_0 + \beta_1) - (g + h)\,] = A + \mu_0\, B + h - \mu_0\,(g + h)$$

Уочимо једну тачку, која одговара бројевима g и h, њене апсолутне координате ће бити

$$A(g, h) = \alpha_1 - h = A + \mu_0\, B - \mu_0\,(g + h)$$
$$B\,(g, h) = g + h.$$

Ако образујемо израз

$$A\,(g, h) + \mu_0\, B\,(g, h)$$

добићемо једначину

$$A\,(g, h) + \mu_0\, B\,(g, h) = A + \mu_0\, B = \text{константи},$$

па ма какво било g и h. Та једначина показује да тачка која одговара бројевима g и h лежи на правој коефицијента μ_0, која пролази кроз тачку коју трансформујемо. т. ј. д.

Број h је индекс листа, на коме се налази тачка добијена трансформацијом дате тачке. На том листу има више тачака јер је g неодређено. Означимо са $\boldsymbol{B}'$ збир бројева h и g, па ћемо добити неједначину

$$0 \leq \boldsymbol{B}' \leq \boldsymbol{B}$$

пошто је

$$0 \leq g \leq \beta_0, \qquad 0 \leq h \leq \beta_1$$

према томе тачку добијену трансформацијом можемо утврдити и бројевима h и $\boldsymbol{B}'$. (h је индекс листа, на коме се налази тачка, $\boldsymbol{B}'$ је апсолутна ордината те тачке. Тих тачака има $(\beta_0 + 1)$ $(\beta_1 + 1)$, које све чине $\boldsymbol{B}' + 1$ многоструку тачку.

Коефиценат тачке, која је дата бројевима h и $\boldsymbol{B}'$ биће

$$(8) \qquad A_{h,Б'} = A \binom{\beta_0}{Б - h} \binom{\beta_1}{h} \mu_0^{\beta_1 - h}\, C^{\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}'}$$

ставиће $h = \beta_1$, $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}$ добија се

$$A_{\beta_1, Б} = A,$$

т. ј. једна од добијених тачака је и тачка коју трансформујемо. Ставив $h = 0$ $\boldsymbol{B}' = 0$ добијамо

$$(8') \qquad A_{0,0} = A\, \mu_0^{\beta_1} C^{B}$$

Привидно проста тачка даје трансформацијом (T_2) тачке на правој коефицијента μ_0, две граничне тачке су: са̂ма дата тачка и тачка на апсцисној оси.

Свака тачка, саставни део многоструке тачке, даје тачке на истој линији. Како њихови коефицијенти могу бити унапред дати, коефициенти добијених тачака које се поклапају на пр. на апсцисној оси, могу бити такви, да њихов збир буде нула т. ј. да тачка не постоји, јер кад је коефициенат неког члана нула, тај члан не постоји за израз у коме се налази.

Ако је пак $\mu_0 = 0$ види се из обрасца за $A(h, g)$, да је коефициенат нула за све вредности h изузев за $h = \beta_1$, т. ј. доња граница тачака, чији су коефициенти различити од нуле, је тачка чија је апсолутна ордината једнака индексу листа на коме је тачка која се трансформује.

Из овога излазе ове последице:

Страна полигона чији је коефициенат мањи од μ_0 [μ_0 је коефициенат трансформације (T_2)], ако је та страна лева, не мења се, исто тако десна страна чији је коефициенат већи од μ_0.

Остале стране замењене су *обично* странама чији је коефицненат μ_0; али може бити и страна левих чији је коефициенат већи од μ_0 и десних чији је коефициенат мањи од μ_0.

Трансформација $(T_2\ bis)$.

9.° Ова је трансформација (коефициента μ_0) слична трансформацији (T_2) истог коефициента. Њена је особина иста, али нема изузетка, као код трансформације (T_2), т. ј. она замењује једну тачку низом тачака, које се све налазе на правој коефициента μ_0, две граничне тачке су: тачка која се трансформује и тачка на апсцисној оси.

Функција $\varphi_{\mu_0}(z)$ је функција.

$$z^{\mu_0}\,\psi\,(\log C\, z^D)$$

где је $\psi(t)$ каква алгебарска функција t, D дата кон станта, C неодређена константа.

Члан (4)

$$A\, z^{a}\, u^{\beta_0}\, u'^{\beta_1}$$

који преставља тачку

$$\boldsymbol{A} = \alpha - \beta_1, \ \boldsymbol{B} = \beta_0 + \beta_1$$

трансформацијом $(T_2\,\overline{bis})$ коефициента μ_0 се мења у

$$A\, z^{a} \sum_{0}^{\beta_0}{}_{g} \sum_{0}^{\beta_0}{}_{h} \binom{\beta_0}{g} \binom{\beta_1}{h} v^{g}\, v'^{h}\, \varphi^{\beta_0 - g}\, \varphi'^{p_1 - h}$$

где је

$$\varphi_{\mu_0} = z^{\mu_0}\, \psi, \ \varphi'_{\mu_0} = z^{\mu_0 - 1}\, (\mu_0\, \psi + D\, \psi')$$

$\psi' = \dfrac{d}{dt}\, \psi\,(t)$ сменив у резултату t са $log\ Cz^{D}$ тај збир је збир чланова облика

$$A\, z^{a_1} \binom{\beta_0}{g} \binom{\beta_1}{h} v^{g}\, v'^{h}\, \psi^{\beta_0 - g}\, (\mu_0\, \psi + D\, \psi')^{\beta_1 - h}$$

где је

$$\alpha = \boldsymbol{A} + \mu_0\, \boldsymbol{B} - \mu_0\,(g + h) + h$$

и у опште обрасци су исти као и у (T_2) само што је

$$C^{\beta_0 - g}\ (C\mu_0)^{\beta_1 - h}$$

заменимо са

$$\psi^{\beta_0 - g}\ (\mu_0\, \psi + D\psi')^{\beta_1 - h}$$

коефициенат тачке је различит, он је овде функција логаритма.

Ако се стави

$$\psi = C_1, \ \varphi' = 0$$

добија се трансформација (T_2).

Коефициенат тачке на листу индекса h, чија је ордината $\boldsymbol{B'}$ дат је обрасцем

$$A_{h,B'} = A \binom{\beta_0}{g} \left. \begin{matrix} \beta_1 \\ h \end{matrix} \right) \psi^{\beta_0 - g} \left(\mu_0 \psi + D \psi' \right)^{\beta_1 - h} \quad (\boldsymbol{B'} = g + h)$$

за $\mu = 0$ добија се

$$A_{h,B'} = A \binom{\beta_0}{g} \binom{\beta_1}{h} \psi^{\beta_0 - g} \left(D \psi' \right)^{\beta_1 - h}$$

а тај коефициенат није нула кад је $\beta_1 \neq h$.

т. ј. д.

Трансформација (T_3).

10. Ова трансформација коефициента p_0 неће служити много у примени; али је треба поменути због њене аналогије са трансформацијом (T_4). Њена је особина, да коефициенат праве, која пролази кроз две тачке, подели са p_0; али пројекција на апсцисној оси се не мења.

Уочимо две тачке

$$A_0 \, z^{\alpha_0} \; u^{\beta_{0,0}} \; u'^{\beta_{1,0}}, \quad A_1 \, z^{\alpha_1} \; u^{\beta_{0,1}} \; u'^{\beta_{1,1}}$$

трансформација (T_3) коефициента p_0 мења сваки члан у

$$A \, z^{\alpha} \left(v^{p_0} \right)^{\beta_0} \left(p_0 \, v^{p_0 - 1} \, v' \right)^{\beta_1}$$

или

$$A \, z^{\alpha} \, v^{p_0 \beta_0 + (p_0 - 1) \beta_1} \, v'^{\beta_1} \cdot p_0^{\beta_1}$$

апсолутне координате те тачке биће

$$\boldsymbol{A'} = \alpha - \beta_1 = \boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{B'} = p_0 \beta_0 + (p_0 - 1) \beta_1 = p_0 \boldsymbol{B}$$

Коефициенат праве која пролази кроз дате тачке је

$$\mu_1 = \frac{\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_0}{\boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{B}_1}$$

а коефициенат праве која пролази кроз трансформоване тачке биће

$$\mu_2 = \frac{A'_1 - A_0}{B'_0 - B'_1}$$

Заменити A' и B' из израчунатих орразаца (додајући им индексе 0 и 1) добија се

$$\mu_2 = \frac{A_1 - A_0}{p_0 B_0 - p_0 B_1} = \frac{1}{p_0} \mu_1$$

т. ј. д.

Привидно проста тачка мења се у привидно просту тачку на истом листу, а њен коефициенат постаје

(10) $$A\, p_0^{\beta_1}.$$

Трансформација (T_4).

11°. Трансформација (T_4) коефициента q_0 мења коефициенат праве, која пролази кроз две тачке, множећи га са q_0; пројекција на ординатној оси се не мења као код трансформације (T_1).

Члан

$$A\, z^{\alpha}\, u^{\beta_0}\, u'^{\beta_1}$$

мења се у:

$$A\, (\xi^{q_0})^{\alpha}\, u^{\beta_0} \left[\frac{u'}{q_0\, \xi^{q_0 - 1}}\right]^{\beta_1}, \left(u' = \frac{du}{d\xi}\right)$$

или

$$A \left(\frac{1}{q_0}\right)^{\beta_1} \xi^{\alpha q_0 - (q_0 - 1)\beta_1}\, u^{\beta_0}\, u'^{\beta_1}$$

привидно проста тачка мења се у привидно просту на истом листу; апсолутне су јој координате

$$A' = \alpha q_0 - (q_0 - 1)\, \beta_1 - \beta_1 = q_0\, A$$
$$B' = \beta_0 + \beta_1 = B_0$$

Нови коефициенти биће

$$\mu_2 = \frac{A'_1 - A'_0}{B'_0 - B'_1} = \frac{q_0 A_1 - q_0 A_0}{B_0 - B_1} = q_0 \mu_1$$

т. ј. д.

Коефициенат се мења у

(11) $$A\left(\frac{1}{q_0}\right)^{\beta_1}$$

Трансформација (T_3) и (T_4) мењају стране полигона у стране као и (T_1). Прва не мења пројекције на апсцисној, а друга на ординатној оси. Трансформацијом (T_4) могу се коефициенти страна претворити у целе бројеве; а трансформацијама (T_3) и (T_4) могу се претворити у целе релативно просте бројеве.

Трансформација (T_5)

12.° Трансформација (T_5) замењује тачку низом тачака на истом листу. Она тим потсећа на трансформацију (T_2) коефициента ∞, само што тачке не иду до апцисне осе.

Члан

$$A\, z^{\alpha}\, u^{\alpha_0}\, (u')^{\beta_1}$$

мења се у

$$A\,(z + a)^{\alpha}\, u^{\beta_0}\, (u')^{\beta_1}$$

или

$$A\, u^{\beta_0}\, (u')^{\beta_1} \sum_{0}^{\alpha}{}_{k} \binom{k}{\alpha} z^{\alpha - k}\, a^{k}$$

једна тачка је замењена са $\alpha + 1$ тачком, које су све на истом листу и на истој паралелној са апцисном осом. За $k = o$ добија се члан

$$A\, u^{\beta_0}\, (u')^{\beta_1}\, z^{\alpha}$$

т. ј. међу добијеним тачкама налази се и тачка која се трансформује.

Коефициенат тачке на одстојању к на лево од тачке која се трансформује је

$$A \binom{a}{k} a^k \tag{12.}$$

Састављањем трансформације (T_2) коефициента O и трансформације (T_5) добија се трансформација $(T_2{}^0 + T_5)$, која трансформује једну тачку у тачку на истом листу. Нека су (α, β_0) координате првобитне тачке; $(\alpha', \beta_0{}')$ координате нове тачке (координате у листу индекса $\boldsymbol{\beta}_1$), коефициенат тачке $(\alpha', \boldsymbol{\beta}'_0)$ биће:

$$\frac{1}{(\alpha')!\,(\boldsymbol{\beta}'_0)!} \frac{\partial^{\alpha' + \beta_0'}}{\partial\, a^{\alpha'}\ \partial C^{\beta'_0}} A_0$$

где је

$$A_0 = A\, a^{\alpha}\, C^{\beta_0}$$

Ставимо $k = \alpha$, добићемо члан

$$A\, a^{\alpha} \cdot u^{\beta_0}\, (u')^{\beta_1}$$

координате тачке зависе само од два броја $\boldsymbol{\beta}_0$ и β_1; ако ставимо

$$\beta_0 = m_i,\ \beta_1 = n_i$$

ако обрнемо цео фигуративни полигон за $\frac{\pi}{2}$ у негативном смислу (геометрија) око апсолутног почетка, део полигона изнад хоризонталне осе је *полигон М. Петровића.*[1]

Трансформација (T_6)

13. Трансформација (T_6) обрне полигон око праве $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = - n$ за π; једну тачку мења у тачку симе-

---

[1] У поменутом делу стр. 6 и следеће,

тричну првој у односу на праву $A - B = -n$, преносећи је са листа индекса k на лист индекса $n-k$, (n је степен по u').

Члан

$$A z^{\alpha} u^{\beta_0} (u')^{\beta_1}$$

се мења у

$$A u^{\alpha} z^{\beta_0} \left(\frac{1}{z'} \right)^{\beta_1}$$

множећи целу једначину са $(z')^n$, овај члан биће:

$$A u^{\alpha} z^{\beta_0} (z')^{n-\beta_1}$$

координате ове тачке биће:

$$A' = \beta_0 - (n - \beta_1) = B - n$$
$$B' = \alpha + (n - \beta_1) = n + A$$

дакле

$$A' + B' = A + B$$

права која пролази кроз тачке (A, B) и (A', B') је коефицијента 1, према томе нормална на правој $A - B = -n$. Одстојања тачака (A, B) и (A', B') од праве $A - B = -n$ су дата обрасцима

$$d = A - B + n, d' = A' - B' + n = (B - n) - (A + n) +$$
$$+ n = -(A - B) + n)$$

дакле $d = -d'$, т.ј. тачке (A, B) и (A', B') су на истом одстојању од праве $A - B = -n$, а како је права која их спаја нормална на тој правој излази да су те две тачке симетричне у односу на праву $A - Б = -n$.

Индекс листа на коме се налази трансформована тачка је, као што се види $n - \beta_1$. т. ј. д.

Коефицијенти се не мењају трансформацијом (T_6).

ДРУГА ГЛАВА

РАЗДВАЈАЊЕ ГРАНА.

— АСИМПТОТЕ —

14°. Нека нам је дата каква диференцијална једначина која задовољава услове дате у чл. *1°*, на пр: једначина (*1*) или (*3*) из чл. *1°*. Конструишимо фигуративни полигон те једначине у близини тачке (Z_0, U_0) Тај фигуративни полигон служиће за раздвајање грана функције која је престављена том диференцијалном једначином или тим самим фигуративним полигоном, исто онако како је *Newton*-ов полигон служио за растављање грана функције престављене алгебарском једначином. Из фигуративног полигона у близини тачке (Z_0, U_0) добиће се све гране у близини тачке (Z_0, U_0) или боље рећи све гране у облику, у коме се добијају кад се интеграционој константи (Z_0, U_0) да вредност (Z_0, U_0) у посматраној тачци.

15°. Извесна функција $\Phi(z)$, која ће се према потреби означити неки пут са $\Phi^{\mu_c}(z)$, назива се *асимптотом* у близини тачке (Z_0, U_0) функције дефинисане фигуративним полигоном, или тачније речено скупом фигуративних тачака у близини тачке (Z_0, U_0) или диференцијалном једначином (2) или (3), ако задовољава ове услове:

A°) Скуп фигуративних тачака да се поделити на две врсте S_1 и S_2, које се зову: врста S_1 и врста S_2, и које су такве да:

а^0) Количник добијен, кад се један ма који члан врсте S_1 подели ма којим другим чланом врсте S_1, и кад се u замени са $\Phi(z)$, тај количник је каква коначна количина различита од нуле за $z = 0$ (или ∞).

б^0) Количник добијен, кад се један ма који члан врсте S_2 подели ма којим чланом врсте S_1, и кад се u замени са $\Phi(z)$, тај количник тежи нули кад z тежи нули (или ∞).

Функција $\Phi(z)$ задовољава идентички једначину која се добија кад се (из дате једначине) групишу само чланови врсте S_1.

Б^0) Ставив у једначини (1) односно (3)

$$u = \Phi(z) + v$$

нова функција v тежи нули брже но функција u, или ка бескрајности спорије но u, кад z тежи нули (или ка бескрајности). То се каже v је вишег реда за $z = 0$, а нижег за $z = \infty$ но u.

Ови услови ради краткоће означују се знаком: услови (*А*: *а*, *б*; *Б*).

Део услова (*А*: *а*, *б*) може се заменити овим другим који му је еквивалентан:

А'^{0}) Скуп фигуративних тачака да се поделити на две врсте S_1 и S_2 и може се наћи такав број β (одређен) да израз

$$(\beta) \qquad A\, z^{\alpha} \left[\Phi(z)\right]^{\beta_0} \left[\Phi'(z)\right]^{\beta_1} \cdot z^{\beta}$$

а') тежи каквом броју одређеном различитом од нуле, за сваки члан врсте S_1, кад z тежи нули (или ка бескрајности)

б') тежи нули за сваки члан врсте S_2, кад z тежи нули (или ка бескрајности)

Φ задовољава идентички једначину састављену од чланова врсте S_1.

Са условом *Б*, добија се услов: (*A'* : а', *б'*; *Б*).

16. Знајући услове које треба да задовољи нека функција $\Phi(z)$, да би била асимптота у близини тачке (Z_0, U_0), ми можемо тражити те функције. Тражење се састоји у овоме:

Пошто $\Phi(z)$ задовољава једначину образовану од чланова врсте S_1, ми ћемо претпоставити, да су чланови врсте S_1 чланови (тачке) које

1° образују једну тачку

2° леже на правој коефициента одређеног (коначног).

3° леже на правој коефициента бескрајног

4° » у равни нормалној на листу.

5° не задовољавају услове 1°—4°.

Све остале тачке биће тачке врсте S_2.

Уочимо скуп свих тачака из 1° или 2°, или 3°, 4°, 5°, неке су од њих тачке врсте S_1, а неке врсте S_2. Покушајмо да нађемо Φ, ако нађемо Φ видећемо да ли задовољава услове (*A* : *а*, *б*; *Б*) или (*A'* : *а'*, *б'*; *Б*). Ако не добијемо одмах функцију Φ, ми ћемо помоћу извесне смене, (видети члан 22 и следеће) добити нов полигон фигуративни, и помоћу њега добити разне врсте S_1.

Овај други случај наступа и онда кад нађемо функцију $\Phi(z)$ одмах, али она не задовољава услове (*A* : *а*, *б*).

Напомена. На примеру се неће вршити ова дискусија, из ове дискусије добиће се практично упутство које ће одмах дати све функције $\Phi(z)$, т.ј: све асимптоте у близини тачке (Z_0, U_0). [в. чл. *34*].

I. Тачке врсте S, чине једну многоструку тачку.

17. Скуп чланова врсте S_1 (можда има и чланова врсте S_2) даје једначину:

$$\Sigma A z^{\alpha} u^{\beta_0} (u')^{\beta_1} = 0 \tag{I}$$

Нека су $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ координате те тачке. Из

$$\boldsymbol{A} = \alpha - \beta_1, \ \boldsymbol{B} = \beta_0 + \beta_1$$

добија се

$$\alpha = \boldsymbol{A} + \beta_1, \ \beta_0 = \boldsymbol{B} - \beta_1$$

једначина (I) постаје

$$\Sigma A z^{A + \beta_1} u^{B - \beta_1} (u')^{\beta_1} = 0$$

или

$$z^A u^B \Sigma A \left(\frac{z u'}{u} \right)^{\beta_1} = 0 \tag{II}$$

једначина (I) биће задовољена, ако је задовољена једначина (II), а ова је задовољена за ма какво z и u, ако је

$$\boldsymbol{\Sigma} A \left(\frac{z u'}{u} \right)^{\beta_1} = 0 \tag{III}$$

Једначина (III) зове се *карактеристична једначина* многоструке тачке, која се пише у облику

$$\Sigma A B^{\beta_1} = 0 \tag{13}$$

Из једначине (III) добија се

$$\frac{z u'}{u} = B_e$$

B_e је корен карактеристичне једначине (13); а одатле се добија

(14) $\Phi(z) = u = C z^{B_e}$. (C константа, параметар)

Степен карактеристичне једначине многоструке тачке је реални степен те тачке. Она има онолико корена, колики јој је реални степен; али има само онолико корена различних од нуле, колики јој је привидни степен.

Уочимо прост корен једначине (13) различит од нуле. Услов (A : a) је

$$\text{(IV)} \qquad \frac{A' z^{\alpha'} u^{\beta'_0} (u')^{\beta'_1}}{A z^{\alpha} u^{\beta_0} (u')^{\beta_1}}$$

бројитељ и именитељ су чланови врсте S_1. Заменити u његовом вредношћу (14) добија се

$$\text{(V)} \quad \frac{A'}{A} C^{(\beta'_0-\beta_0)+(\beta'_1-\beta_1)} B^{\beta'_1-\beta_1} z^{\alpha'-\alpha+(\beta'_0-\beta_0)B+(\beta'_1-\beta_1)B-1)}$$

A', A, C, B су константе различите од 0 и ∞, сачинитељ члана (V) је константа различита од 0 и ∞. Изложитељ од z може се написати у облику

$$(\alpha' - \beta'_1) - (\alpha - \beta_1) + B\,[\,(B_0 + B'_0) - (\beta_0 + \beta_1)\,]$$

или уневши апсолутне координате двеју тачака: ($\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$) и ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$):

$$\text{(VI)} \quad \mathbf{A}' - \mathbf{A} + B\,[\mathbf{B}' - \mathbf{B}] = (\mathbf{A}' + B\mathbf{B}') - (\mathbf{A} + B\mathbf{B})$$

ако обе тачке леже на линији коефицента B израз (VI) је идентички једнак нули према обрасцу (6); ако тачка ($\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$) припада многострукој тачки, она лежи на линији ма ког коефицијента која пролази кроз тачку ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$); израз (VI) је идентички једнак нули. Према томе израз (V) је одређен број различит од 0 и ∞, т.ј. количник (IV) два члана врсте S_1 је одређен број различит од 0 и ∞. Функција $\Phi(z)$ задовољава услов (A : a).

Ако је корен једначине (13) многострук, овај услов биће опет задовољан.

Како се пређашње резоновање примењује ма на која два члана, који припадају многострукој тачки, излази да сви ти чланови су чланови врсте S_1, али како су по претпоставци овог члана само они могли бити, излази да су сви чланови који припадају многострукој тачки чланови врсте S_1 и само они; сви остали чланови су чланови врсте S_2.

Уочимо количник (IV) где је бројитељ ма који члан врсте S_2, а именитељ ма који члан врсте S_1. Заменом u са његовом вредношћу из (14) добићемо израз (V) чији је коефициенат опет одређен и различит од 0 и ∞. Изложитељ од z имаће облик (VI) где је ($\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$) тачка врсте S_2, а ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) тачка врсте S_1.

Те две дачке ($\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$) и ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$) или леже на правој коефицијента B или не леже на њој. Први случај би дао резоновање малопређашње, т. ј. да тачка (A', $Б'$) припада врсти S_1, т.ј. да тачке које леже на извесној правој припадају врсти S_1, то смо оставили за чл. 22. Према претпоставци овог члана, да су тачке врсте S_1 само тачке које припадају многострукој тачки, тај први случај треба оставити: т.ј. многострука тачка, чија карактеристична једначина (13) да такав корен, да права, која пролази кроз многоструку тачку и има за коефицијенат тај корен пролази још кроз коју тачку у скупу фигуративних тачака; та многострука тачка не припада овом члану већ неком од следећих.

Остаје дакле друга претпоставка: тачка ($\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$) није на правој коефицијента B, која полази из тачке ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$). У том случају израз (VI) је различит од нуле. Он је или позитиван или негативан.

Ако права која пролази из (A, B) и има коефициенат B пролази кроз полигон, он ће делити тачке врсте S_2 на две под-врсте: S_2' и S_2''. За прве S_2' нека је израз (VI) негативан а за друге S_2'' нека је он позитиван. Посматрана права има једне од њих са исте стране са које и координатни почетак, а друге са супротне стране.

Ако z тежи нули израз (V) т. ј. количник (IV) тежиће нули за све тачке врсте S_2'', али ће тежити ка бескрајности за све тачке S_2'. Обрнуто: ако z тежи ка бескрајности израз ће (V) тежити нули за све тачке врсте S_2', а ка бескрајности за све тачке врсте S_2''.

Да би био задовољен услов $(A : б)$ потребно је и довољно, да све тачке врсте S_2 буду или тачке врсте S_2' или S_2'', кад z тежи ка 0 или ка ∞ на *ма каквом путу*; т. ј. потребно је и довољно да права, која је мало пре делила скуп фигуративних тачака S_2 на две под-врсте, буде ван скупа, т. ј. да буде тангента полигона у посматраном темену, а то ће бити ако њен коефициент припада *области* многоструке тачке кроз коју пролази. Ако је та тангента лева, све тачке врсте S_2 су тачке под-врсте S_2''; количник (IV) тежи нули кад z тежи 0. Ако је та тангента десна, све тачке врсте S_2 су тачке под-врсте S_2'; количник (IV) тежи нули кад z тежи ка ∞.

Исто резоновање вреди и за многоструки корен.

Нађена функција Φ задовољава услов: $(A : а, б)$.

18°. Да би видели, да ли нађена функција Φ задовољава услов $(Б)$ извршимо смену:

$$u = v + \Phi(z) = v + Cz^B \tag{VII}$$

одакле се добија, ако се зна u, да је

$$v = u - C z^B \tag{VIII}$$

Нека су

$$u_1, u_1 \cdots\cdots u_p, \cdots$$

гране функције u у близини тачке (Z_0, U_0), чији је број ма колики. Уочимо једну од тих грана, на пр.: μ_p $(p = 1, 2, \cdots\cdot)$ та грана кад Z тежи нули (или на бескрајности) или тежи извесној граници.

$$\lim_{z = o} U_p = P_p(z), \quad \lim_{z = \infty} U_p = Q_p(Z)$$

или не тежи никаквој граници, или осцилује између извесних граница.

[Ми ћемо оставити на страну случај $z = \infty$ и испитиваћемо само случај $z = 0$, јер се из првог добија други сменом:

(о, леви, десни, мањи, већи; ∞, десни, леви, већи, мањи)].

Претпоставимо први случај, U_p тежи ка $\mathbf{P}_p$ (z) за $z = o$ ми можемо ставити

$$P_p\ z) = Dz^e$$

где је e степен функције P, $z = o$ (претпоставили смо да u_p тежи извесној граници за $z = o$), према томе функција u_p је облика

$$u_p = Dz^e + W_p$$

W_p функција која је вишег реда но e за $z = o$.

Нова функција V биће облика

$$V = Dz^e - Cz^B + W_p$$

разликоваћемо три случаја

1°. $e < B$

Cz^D улази у став функције W_p и даје W_p'

$$V = Dz^e + W_p'$$

W'_p функција вишег реда од e.

2°. $$e \geqslant \boldsymbol{B}$$

Dz^e улази у став функције W_p и даје W_p''.

$$V = C'z^\beta + W_p''$$

$C' = -C$, W_p'' функција чији је ред виши но $\boldsymbol{B}$.

3°. $$e = B$$

$$v = (D - C)z^e + W_p$$

ако је $D = C$,

$$V = W_p$$

W_p функција чији је ред виши од e или B $(e = B)$.

Дакле: грана, чији је ред нижи од B не мења свој ред; грана чији је ред виши од B, постаје реда B; грана чији је ред једнак са B или остаје истог реда, ако је $C \neq B$, или постаје вишег реда од B, ако је $C = D$.

Применимо извршену трансформацију на гранама u, на фигуративни полигон. То је трансформација.

$$u = v + Cz^B$$

т.ј. трансформација (T_2) коефицијента B.

Трансформација (T_2) коефицијента μ_0, кад је μ_0 различито од нуле, мења фигуратинни полигон. Стране леве коефициента мањег од μ_0 остају стране полигона; стране коефициента μ_0 или коефициента већег од μ_0 замењују се странама коефициента μ_0 — аналого трансформацији (VII), док је C ма какво. Али ако је C такво да коефиценат члана на апцисној оси буде нула, појавиће се једна или више страна коефициента већег од μ_0. Тај коефиценат према обрасцу (8') је за сваку тачку

$$\Sigma A\mu_0^{\beta^1} C^B = C^B \Sigma A\mu_0^{\beta_1}$$

отуд једначина

$$(13') \qquad \Sigma\, A\, \mu_0^{\beta_1} = o$$

а то није ништа друго него карактеристична једначина (13) посматране многоструке тачке. Кад је $\mu_0 = B$, једначина је задовољена, и функција

$$\Phi\,(z) = Cz^B = Cz^{\mu_0}$$

је асимптота у близини тачке (Z_0, U_0) па ма какво било C; C је овде *параметар*.

19°. Нека је μ_0 или B корен једначине (13') реда $\varkappa$, то значи:

$$\Sigma\;A\,\mu_0^{\beta_2} = o$$

$$\frac{d}{d\mu}\;\Sigma\,A\mu_0^{\beta_1} = o$$

$$\frac{d^{\varkappa\text{-}1}}{d\mu^{\varkappa\text{-}1}}\;\Sigma\,A\mu_0^{\beta_1} = o$$

$$\frac{d^{\varkappa}}{d\mu^{\varkappa}}\;\Sigma\,A\mu_0^{\beta_1} \neq o$$

Уочимо коефициенат ма које тачке чија је ордината $\varkappa$; он ће бити скуп коефицијената:

$$A\binom{\beta_0}{B'-\varkappa}\;\binom{\beta_2}{h}\;\mu_0^{\beta_1-\varkappa}\;C^{B-B'}$$

т. ј.

$$\Sigma\,\mathrm{A}\binom{\beta_0}{B'-h}\binom{\beta_1}{h}\;\mu_0^{\;\beta_1-h}\;C^{B_1-B'}$$

за једну тачку добијену [трансформацијом (T_2)] h, B' и $B'-h$ су константа, B је константа за све тачке које се трансформују.

Узев $Б' = h = \varkappa$ коефициенат постаје

$$C^{B-\varkappa}\,\Sigma\mathrm{A}\binom{\beta_1}{\varkappa}\mu_0^{\;\beta_2-\varkappa} = C^{B-\varkappa}\,\frac{1}{\varkappa!}\,\frac{d^{\varkappa}}{d\mu^{\varkappa}}\;\sum A\mu_0^{\beta_1}$$

тај коефициенат је различит од нуле — дакле: пројекција нове стране или збир пројекција нових страна на ординатној оси, чији је коефициенат већи од μ_0 (т.ј. B) је највише једнак са $\varkappa$ или мањи од $\varkappa$. За $\varkappa = 1$ (кад је дакле прост корен) нова страна коефициента већег од μ_0 има за пројекцију на ординатној оси највише 1 (т. ј. пројекција јој је 1 или O). За $h < \varkappa$, сви су коефициенти нуле.

Узев $Б \neq h$ може се доказати да ће сви коефициенти за $h > \varkappa$ бити нуле. Доказ се састоји у овом: Знамо да је

$$\boldsymbol{A}_{0,0} = o, \boldsymbol{A}_{1,1} = o, \boldsymbol{A}_{2,2} = o \cdots \boldsymbol{A}_{h,h} = o \text{ за } h < \varkappa.$$

Из једначине

$$A_{1,1} \mu + A_{10} = \boldsymbol{B} A_{0,0}$$

добија се $A_{1,0} = o$. Затим се утврди да је и $A_{2,1} = o$ па после да је и $A_{2,0} = o$ и т. д. (из једначине

$$A_{2,2} \mu^2 + \tfrac{1}{2} A_{2,1} \mu + A_{2,0} = БA_{0,0})$$

Тако се постепено може доказати да не постоји ни једна тачка чија је ордината мања од $\varkappa$. Према томе и према оном што је речено напред излази: Ако је B корен једначине реда $\varkappa$ карактеристичне једначине (13) посматране многоструке тачке (која је теме) збир пројекција страна новог полигона, чији је коефициенат већи од B, је управо једнак реду тога корена (B претпоставив да на апсцисној оси постоји бар једна тачка); претпоставив да је $B \neq o$.

20° Ако је пак корен $B = o$, резултат ће бити друкчији.

Услов (A: а, б) није задовољен јер коефицинат од (V) постаје нула или бескрајан, кад год је $\beta'_1 - \beta_1 \neq o$. Како пак две тачке, које припадају истој многострукој тачки, не могу лежати на истом листу, овај израз $\beta'_1 - \beta_1$ није никад нула; дакле коефициенат израза (V) је или нула или бескрајан.

Да би тај коефициенат био нула, треба да буде $\beta'_1 - \beta_1 > o$, дакле члан врсте S_1 је члан, који лежи на листу чији је индекс најмањи; један једини члан врсте S_1. Једначина која даје Φ биће облика:

$$A \; z^{\alpha} \; u^{\beta} \; u'^{\beta_1} = o$$

одакле се добија

$\Phi(z) = C$, $\Phi(z) = o$ (спец. случај прве).

Функција $\Phi = C$ испуњава услов (A : а).

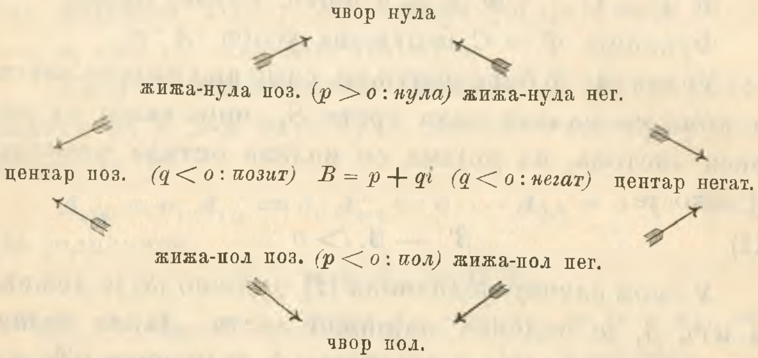
Услов (A : *б*) биће испуњен, само ако индекс листа, на коме се налази члан врсте S_1, није виши од индекса листова, на којима се налазе остали чланови, т.ј. ако је

(XI) $$\beta'_1 - \beta_1 > o$$

У овом случају једначина (*1*) односно (*3*) је дељива са u'^{β_1}, β_1 је индекса најнижег листа. Дакле једначина је производ двеју једначина; једначине $u'^{\beta_1} = o$ и друге која неће дати за B вредност o.

Ако пак услов (IX) није задовољан, услов (A : *б*) није задовољан, функција $\Phi(z)$ не постоји за корен који је једнак нули.

20°. У целој овој дискусији није прављена разлика између корена карактеристичне једначине, кад су они различити од нуле. Међутим функција $\Phi(z)$ зависи од вредности корена. Ако је корен реалан и позитиван, свакој вредности C одговара по једна функција Φ, све те функције пролазе кроз тачку (Z_0, U_0), та је тачка *чвор (noeud)* за функцију $\Phi(z)$; ако је тај корен негативан, та је тачка пол и назваћемо је *чвор-пол*, а прву *чвор-нула*. Ако је тај корен комплексан, тачка се зове *жижа (foyer)*, која може бити *нула* или *пол*, према томе да ли је реални део позитиван или негативан; *позитивна* или *негативна* према томе да ли је имагинарни део позитиван или негативан. Ако је тај корен чисто имагинаран ни једна функција $\Phi(z)$ не пролази кроз тачку (Z_0, U_0) то је *центар (centre)*, који може бити позитиван или негативан. Може се рећи да је основни сингуларитет функције $\Phi(z)$ *жижа*, која дегенерише у чвор или центар, као што показује ова звезда.



II. Тачка врсте S_1 лежи на правој чији коефициенат нија бескрајан.

22° Ми можемо, извршивши трансформацију (T_s) коефициента $+\mu_0$, претворити праву коефицента μ_0 у праву коефициента нула. Према томе претпоставимо, да је посматрана права, права коефициента нула.

Тачке врсте S_1 леже на тој правој (по претпоставци) али има можда и тачака врсте S_2 које су на истој правој.

Једначина образована од свију тачака на тој правој може се написати у облику:

$$\Sigma\, A\, u^{\beta_0}\, (uz')^{\beta_1} = 0. \tag{I.}$$

Извршимо смену

$$zu' = w$$

конструишимо фигуративни полигон добијене алгебарске једначине

(II) $$\Sigma_1 A\ u^{\beta_0} w^{\beta_1} = 0.$$

Разликоваћемо два случаја:

A^0) Површина S фигуративног полигона једначине (II) је нула.

B^0) Површина S фигуративног полигона једначине (II) није нула

A⁰) S = 0

23⁰ Све тачке фигуративног полигона једначине (II) су на правој линији (једна тачка не постоји, пошто је свега један лист и све тачке просте тачке; а како једначина (II) има бар два члана, њен полигон има бар две тачке), нека је коефициенат праве d. Три подслучаја:

а) $d = \infty$

б) $1 \neq d \neq \infty$

в) $d = 1$

a) d = ∞

Све тачке су на правој паралелној апцисној оси, једначина (II) постаје:

$$w^{\beta_1}\ \Sigma A\ \mu^{\beta_0} = 0.$$

два решења:

(III) $w = 0$ дакле $u = C$ ма колико
$\Sigma A D^{\beta_0} = 0$ $u = D$, D задовољава једначину

Све тачке на посматраној правој су тачке врсте S_1. Тражена функција Φ [ако још буде задовољила услове: (A : а, б ; Б)] биће облика:

$$\Phi\ (z) = C \text{ или } \Phi\ (z(= D.$$

Ова је случај исти као случај из чл. 17 кад је корен карактеристичне једначине био нула; услови

(A : а, $б$) нису задовољени сем ако је $\beta_2 = 0$. Претпоставимо да су ти услови задовољени, т.ј. да је $\beta_1 = 0$.

Извршимо трансформацију

(IVI) $$u = v + C \text{ или } u = v + D$$

Однос између грана функције u и v је исти; само је овде $B = 0$. Ако трансформацију (IV) извршимо на полигону коефициенат тачке на апсцисној оси биће

$$\Sigma\, AC^{\beta_0} \text{ или } \Sigma\, AD^{\beta_0}$$

Док су C и D ма какви бројеви, овај је коефициенат различит од нуле. Али ако су бројеви C и D корени једначине (III), овај коефициенат биће нула — појавиће се бар једна нова страна полигона чији је коефициенат већи од нуле.

Тамошњи услов да права коефициента B $(= 0)$ буде тангента претвара се у услов да та права буде страна нолигона.

Ако је C и D многоструки корен једначине (III) може се доказати, да је збир пројекција страна коефициента већег од нуле, највише једнак реду многоструког корена; али тај максимум не мора бити достигнут.

Дакле функција

(15) $$\Phi(z(= C,$$

C задовољава једначину: *карактеристичну једначину стране:*

(16) $$\Sigma\, A\, C^{\beta_0} = 0 \text{ или } \Sigma\, A\, D^{\beta_0} = 0,$$

задовољава услове: (A : а, $б$; $Б$)

б)° ∞ ± d ± 1.

Ставив

(V) $$W = D\, u^{d}$$

добија се једначина

$$\Sigma\, A\, u^{\beta_0}\, (Du^{d})^{\beta_1} = 0$$

али како је према полигону једначине (II)

$$\text{(VI)} \qquad \beta_0 + d\,\beta_1 = \beta_0' + d\,\beta_1' ;$$

(јер је

$$\boldsymbol{A} = \beta_0 \ \ \boldsymbol{B} = \beta_1 \ , \ \mu = \boldsymbol{d}$$

а једначина (VI) исказује, да су тачке $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ и $\boldsymbol{A},' \boldsymbol{B}')$ на правој коефициента μ према обрасцу (6); та једначина постаје:

$$U^{\beta_0 + d\beta_1}\ \Sigma\, A\, D^{\beta_1} = 0$$

та једначина је задовољена, ако је

$$\Sigma\, A\, D^{\beta_1} = 0$$

а то је једначина (16), т. ј. карактеристична једначина праве.

Из једначини (V) добија се

$$\text{(17)} \qquad \Phi\,(z) = u = \left[log \left(C\, Z^{D(1-d)} \right) \right]^{\frac{1}{1-d}}$$

Добијена функција $\Phi\,(z)$ је, у односу на z реда 0, јер

$$\Phi\,(z) \cdot z^{k}$$

тежи нули, док је $к > 0$, па ма како било мало $к$. Логаритам је

$$\lim\limits_{\varepsilon = 0} \left(\frac{X^{\varepsilon}}{\varepsilon} \right) = log\, x$$

Уочимо количник два члана:

$$\frac{A'}{A} \left[log \left(C\, Z^{D(1-d)} \right) \right]^{\frac{1}{1-d}\,[(\beta_0' - \beta_0) + d(\beta_1' - \beta_1)]}$$

$$Z^{\alpha' - \alpha - (\beta_1' - \beta_1)}\ [D\,(1-d)]^{\beta'_1 - \beta_1}$$

Сви чланови на посматраној правој су чланови врстеS_1 Количник таква два члана је одређена количина различита од нуле за $z = 0$ (или $z = \infty$).

Према једначини (VI) изложитељ логаритма је нула за ма какво z, дакле степен логаритма је различит од нуле. Изложитељ од z је

$$(\alpha' - \beta_1') - (\alpha - \beta_1) = A' - A$$

овај је израз нула за све тачке врсте S_2 Дакле услов је $(A : a)$ задовољен.

Количник једног члана врсте S_2 и једног члана врсте S_1 имаће за изложитељ логаритма број различит од нуле. Изложиељ од z биће позитиван или негативан према томе дали је тачка врсте S_2 десно или лево од посматране праве; да би тај количник тежио нули потребно је да посматрана права буде страна лева за $z = 0$, десна за $z = \infty$. Кад је та права страна, лева или десна услов $(A : б)$ је задовољен.

Трансформација

$$u = V + \left[log \left(CZ^{D(1-d)}\right)\right]^{\frac{1}{1-d}}$$

је трансформација $(T_2{}^{bis})$ коефициента 0.

Коефициенат тачке на апсцисној оси према обрасцу (8) биће

$$(\Sigma\, A\, D^{\beta_0}) \cdot [log\, (CZ^{D(1-d)})]^{\beta_0 + d\beta_1}\text{:}$$

тај коефициенат је нула, кад D задовољава једначину (16).

И у овом случају вреди примедба из (а⁰) о многоструким коренима.

Дакле фунција

$$\Phi\,(z) = \left[log\ CZ^{D(1-d)}\right]^{\frac{1}{1-d}}$$

задовољава услове $(A : a, б; Б)$, онда је дакле асимптота у близини тачке (Z_0, U_0) · D је одређена константа, корен карактеристичне једначине стране. C је параметар. Тачка (Z_0, U_0) је логаритамски сингуларитет фунције $\Phi(z)$.

в°) d = 1.

У овом случају

$$\beta_0 + \beta_1 = \beta'_0 + \beta'_1 = \cdots\cdots = Б$$

права коефициента нула, чија је пројекција на ординатној оси нула, многострука тачка, коју смо испитали у чл. *17*.

Б°) S ≠ 0

24°. Међу тачкама на посматраној правој која припада скупу фигуративних тачака дате диференцијалне једначине има их врсте S_1, али и врсте S_2. Ми ћемо претпоставити да тачке врсте S_1 су све на једној правој која припада скупу фигуративних тачака алгебарске једначине (II), а све остале тачке: како тачке које припадају скупу једначине (II) а нису на посматраној правој у томе скупу, тако и тачке у скупу фигуративних тачака диференцијалне једначине које нису на правој коефицента нула коју посматрамо у овоме члану; све те тачке да припадају врсти S_2. Нека је d коефицие́нат те праве у скупу фигуративних тачака једначине (II) која даје тачке врсте S_1. Разликоваћемо три под случаја као и у случају $S = 0$.

а°) d = ∞

Функција $\Phi(z)$ је иста, као и у A^0) за $d = \infty$. Услови су да посматрана права коефициента d буде страна полигона, тако исто и права коефицента 0 и да страна коефициента $d = \infty$ буде део апсцисне осе.

$б^0)\quad 1 \neq d \neq \infty$

Функција $\Phi(z)$ је иста као и у $A^0)$ за $1 \neq d \neq \infty$. Услови су: 1^0 посматрана права коефициента d је страна полигона (u, w), 2^0 исто тако и права коефицијента 0 у полигону (z, u).

$d < 1$ $(1 - d > 0)$ страна коефициента d треба да буде у полигону (u, w) са супротне стране страни на којој се у полигону (z, u) налази страна коефициента 0.

Ако су ова три услова испуњена услови $(A : a, б\,;\, Б)$ су испуњени, и нађена функција $\Phi(z)$ из обрасца (17) је асимптота у близини тачка (Z_0, U_0)

$в^0)\quad d = 1.$

Полигон (u, w) може имати највише две стране коефициента $d = 1$, оне одговарају реалним теменима полигона — два темена, две многоструке тачке.

Ако су оба крајња темена многоструке тачке највишег реда могућег, полигон (u, w) има свега 4 стране: две коецифиента 1, једну коецифиента ∞ и једну коецифиента 0. Али ако нека од карактеристичних једначина има бар један корен који је нула, појавиће се нова страна, ако је са десне, њен ће коецифиент бити мањи од 1, даће дакле за $z = o$, пошто задовољава услов 3^0 из $б^0$, фунцију дату обрасцем (17).

Дакле корен карактеристичне једначине многоструке тачке која је теме, различит од нуле даје функције $\Phi(z)$ дефинисане обрасцем (14) а корен једнак нули даје функције $\Phi(z)$ дефинисане обрасцем (17).

25^0. Ако сад извршимо трансформацију (T_1) коефицианта $- \mu_0$; страна коефицента коју смо проучавали претвориће се у страну коефициента μ_0. Корен карактеристичне једначине повећаће се за μ_0, и корен који је био нула постаће μ_0. Из малопређашњег посматрања изводи се ово: Ако ниједан корен карактеристичних једначина реалних темена стране, није једнак коефициенту стране, асимптоте ће бити облика

$$\Phi_{\mu_0}(z) = Z^{\mu^0} \cdot C \tag{15'}$$

C задовољава једначину

$$\Sigma A \mu_0{}^{\beta^1} C^B = 0 \tag{15'}$$

ако пак има корена једнаких коефициенту, онда ћемо извршити трансформацију (T_1) и наћи као мало пре функцију Φ (обр. 17), одакле се добија

$$\Phi_{\mu_0}(z) = z^{\mu_0} [log\ C z^{D\ (1\ -\ d)}] \frac{1}{1-d} \tag{17'}$$

III. Тачке врсте S_1 леже на правој чији је коефициенат бескрајан

26°. Извршив трансформацију (T_6) праве чији је коефициенат бескрајан, претварају се у праве, чији је коефициенат нула, т.ј. у праве посматране у одељку (II). Према томе да би таква права могла дати асимптоту, потребно је да буде страна полигона (z, u). Таквих страна може бити највише две: једна доња и друга доња, обе паралелне апциеној оси. Трансформација (T_6) претвара доњу у леву а горњу у десну, доња дакле може важити само ако је $u = o$, а горња ако је $u = \infty$.

Нека је $\Psi(u)$ асимптота z у близини тачке (Z_0, U_0), где је $\Psi(u)$ функција дефинисана обрасцем (15) или

(17) кад се у њему стави u место z. Тада ће z бити у близини тачке (Z, U_0) облика

$$z = \Psi(u) + \Psi_1(u) \tag{I}$$

где је $\Psi_1(u)$ каква функција вишег реда но Ψ за $u = o$, или за $u = \infty$ нижег реда но Ψ.

Из једначине (I) добија се да је u извесна функција од z.

Нека је $u = 0$, т.ј. доња страна.

Та страна сматрана као лева је реда $+\infty$, сматрана као десна она је реда $-\infty$; таква функција не може постојати.

Нека је $u = \infty$, т.ј. горња страна.

Та страна сматрана као лева је реда $-\infty$, сматрана као десна она је реда $+\infty$; такве су гункције могуће. Таква је функција на пр.

$$e^{\frac{1}{z}} + z$$

развијена у ред за $z = 0$ она је реда $-\infty$, за $z = \infty$ она је реда $+\infty$.

Разликујемо два случаја:

а°) Ψ је дато обрасцем (14), т.ј. Ψ је константа образац (I) постаје

$$z = C + \Psi_1(u)$$

$\Psi(u)$ је функција нижег реда но C т.ј. негативног реда ако се Ψ^{-1} означимо инверсну функцију од Ψ_1, биће

$$u = \Psi^{-1}(z - C) \tag{18}$$

C задовољава карактеристичну једначину посматране стране:

$$\Sigma A\ C^{u-\beta_1} = 0$$

n је степен посматране једначине по u'.

б^0) Ψ је дато обрасцем (17), образац (I) је:

$$z = \left[\log C u^{D(1-d)} \right]^{\frac{1}{1-d}} + \Psi_1 (u)$$

$\Psi (u)$ је опет негативног реда. Из те једначине добија се

$$(19) \qquad u = E\, e^{\frac{z^{1-d}}{D(1-d)}} + \Psi_1 (z)$$

E је константа произвољна, $\Psi_1 (z)$ реда нижег но $e^{z^{1-d}}$

Ако је $z = 0$, ред u треба да буде $-\infty$, дакле изложитељ од z треба да буде нетиван, т.ј.:

$1 - d < 0$, или $d > 1$, страна полигона (z, w) треба да буде десна.

Ако је $z = \infty$, ред u треба да буде $+\infty$, дакле изложитељ од z треба да буде позитиван, т.ј.:

$$1 - d > 0 \text{ или } d < 1,$$

Страна полигона (z, w) треба да буде лева.

IV. Тачке врста S_1 налазе се у равни нормалној на листовима, који носе скуп фигуративних тачака.

27^0 Овај случај постоји:

1^0. ако се претпостави да су изложитељи z комплесни бројеви, као што је речено у чл. 4,

2^0. ако се изврши трансформација (T_1) или (T_2) или $(T_2{}^{bis})$ са комплексним коефициентом μ. Потреба се појављује кад је на пример неки корен карактеристичне једначине многоструке тачке, која је теме, комплексан број. Трансформација (T_2) је тада комплексног сачинитеља; права која пролази кроз посматрану тачку и има комплексни коефициенат, излази изравни у којој се налази скуп фигуративних тачака.

Уочимо призму нормалну на равни скупа фигуративних тачака, коју ћемо бележити са раван Q, такву, да јој свака ивица пролази кроз ма једну фигуративну тачку, било у равни Q било ван ње; и која (призма) не оставља на пољу ни једну фигуративну тачку. Уочимо једну страну R те призме, или ма какву раван нормалну на Q, која пролази кроз бар две фигуративне тачке, која сече раван Q дуж праве коефициента r. све тачке у тој равни имају као координате $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ $\mathbf{A}$ је комплексан број: $a + bi$, $\mathbf{B}$ је реалан број; они задовољавају једначину:

$$a + r\mathbf{B} = a' + r\mathbf{B}'$$

Уочимо какву праву која пролази кроз две тачке те равни R; њен ће коефициенат бити

$$r + Si \qquad (S \text{ функција } a, d, \mathbf{B}, a', b', \mathbf{B}')$$

Ако у тој равни нема више него једна права коефициента $r + Si$, применићемо на њу посматрања из одељка (II), [извршивши, ако затреба, трансформацију (T_1) коефициента $\mu = + (r + Si)$, што значи претворити посматрану праву у праву коефициента 0].

28^0 Овде као у одељку II, прећутно је остао случај: многострука тачка има као корен своје карактеристичне једначине комплексан број, који није једнак са коефициентом стране, али су једнаки: реални део коефициента и реални део тога корена.

Уочимо такав корен, т.ј. претпоставимо да карактеристична једначина има као корен

$$r + ti, \qquad t \neq 0 \text{ односно } t \neq S$$

Трансформација (T_2) коефициента $r + ti$ даје на апцискоj равни, т.j. на равни P_0 дефинисаноj у члану 4· једну тачку чији је коефициерат лева страна карактеристичне једначине, та тачка је пројекција тачке чију карактеристичну једначину посматрамо. Уочимо све тачке на равни R која сече раван Q дуж праве коефициента r и која пролази кроз посматрану многоструку тачку. Све те тачке трансформацијом (T_2) коефициента $r + ti$ пројектују се у тачке на линији која је пресек равни R и P_0. Све те тачке имају ординату нулу, а апсцису комплексан број, али су сви реални делови једнаки.

Како избором вредности $r + ti$ један коефициенат постаје нула, у осталим коефициентима, којих има бар један још (иначе би цела посматрана страна била дужине нула т.j. не би била страна) фигурише као неодређена количина C. (не увек) C се неки пут може изабрати тако да још један коефициенат нестане. Ако има још коефициената различитих од нуле види се да услов $(Б)$ није задовољен — асимтота не постоји.

Да би пак услов $(A : б)$ био задовољен, пошто се појављује у изложитељу z (одељак I образац V) имагинарна количина, види се да z несме тежити вредности 0 или ∞ путем који бескрајно пута обилази око тачке $z = 0$ или $z = \infty$, у извесном правцу. Према обрасцу (VI) (из I) који постаје:

$$[\boldsymbol{A}' + (r + ti)\, \boldsymbol{B}'] - [\boldsymbol{A} + (r + ti)\, \boldsymbol{B}]$$

или

$$[(\boldsymbol{A}' + r\boldsymbol{B}') - (\boldsymbol{A} + r\boldsymbol{B})] + i(\boldsymbol{B}'f - t\boldsymbol{B})$$

како је први сабирак нула за тачку на посматраној линији, остаје као изложитељ од Z израз $it(\boldsymbol{B}' - \boldsymbol{B})$, да би количник тежио нули потребно је и довољно да Z тежи нули (или ка ∞) спиралом (*б*) која би учинила да израз

$$\theta t\,(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}')$$

тежи ка вредности $-\infty$ А то је могуће само, ако је посматрана многострука тачка право теме, иначе $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}'$ мења знак, t и θ задржавају исти, кад један израз тежи ка $-\infty$ други ће тежити ка $+\infty$.

У осталом овај случај улази у чл. *29*.

29. Ако пак на равни R има више тачака, које нису на једној правој лмнији, сваке две тачке које не леже једна изнад друге, дају по једну линију према томе по једну трансформацију. Да би били задовољени услови (*А*: а, *б*; *Б*) потребно је, да кад се изврше све те трансформације, сви коефициенти тачака у пресеку равни R и P_0 буду нуле, затим да се може наћи такав пут за Z, да количници (*v*) не теже нули за тачке прве врсте остајући одређени, а да теже нули за тачке друге врсте (количник $\frac{S_2}{S_1}$). То је могуће на пр. у овом случају: све су тачке на правој у пресеку равни R и P_0, а само једна ван те праве, (случај, на који се наилази у пракси) функција $\Phi(z)$ је облика

$$\Phi(z) = z^r(C_1 z^{it_1} + C_2 z^{it_2} + \cdots) \tag{20}$$

све те тачке су врсте S_1; функција Φ задовољава услове (*А* = а, *б*; *Б*).

V. Тачке врсте S_1 су из неког од одељака I, II или IV; али су им коефициенти функције логаритама.

30°. Овај случај може се десити:

1°. ако у функцији на левој страни једначина (1) има и таква тачка (Z_0 U_0) која је логаритамски сингуларитет, као на пр.: $log\ (Z - Z_0)$ у близини тачке (Z_0).

2°. После извршене трансформације $(T_2 bis)$

Добијаће се обрасци слични обрасцима у I, II и IV, само што ће коефициенти, који су били константе бити замењени функцијама логаритама.

Или се може, ставивши

$$logZ = t \text{ или } t^h,$$

и по неки пут одредити h такво, да нестане логаритма, и да негативни степени t не иду до $-\infty$ — на тај начин добијају се случаји I, II или IV.

Тако се у случају многоструке тачке налази:

$$\Phi(z) = e^{\int \varphi dt} \quad , \quad t = log\, z. \tag{21}$$

где φ задовољава карактеристичну једначину.

$$\Sigma A(t)\, \varphi^{\beta i} = 0. \tag{22}$$

A су константе или функције од t. Кад су A константе, функција φ своди се на облик (14), а једначина (22) на карактеристичну једначину (13).

У случају стране коефицента o, сменом

$$u = \Theta(t), \qquad t = log\, z$$

добија се једначина:

$$\Sigma A\, \Theta^{\beta_2}\, (\Theta')^{\beta_1} = 0 \tag{23}$$

у којој више нема логаритама. A су функције t или константе. Кад су A константе једначина (2) је једначина (II) из одељка II у којој је место w стављено Θ'.

VI. Тачке врста S_1 нису у равни R нормалној на равни Q, скупа фигуративних тачака.

31°. Могу се замислити разне комбинације тачака које припадају врсти S_1, и добити разноврсне функције $\Phi(z)$. Међутим, ако је тако добијена слика у полигону, услов (*Б*) не може да се испуни; ако је пак та слика на обиму полигона, она се може раставити на функције $\Phi(z)$ које су већ нађене у одељцима *I*—*V*; тако да ово проучавање не даје реалних резултата, који би били нови.

Напомена. Резултат целе ове главе, изведен као практично упуство, налази се у почетку треће главе чл. 34.

ТРЕЋА ГЛАВА

РАЗВИЈАЊЕ ГРАНА У РЕДОВЕ

— ПРАКТИЧНО УПУСТВО И ПРИМЕРИ —

I. Практично упуство за развијање грана у редове.

32°. Видели смо у другој глави, како се налазе асимптоте у близини тачке (Z_0, U_0). Те асимптоте зваћемо *асимптоте првог реда.* Извршивши смену

$$(I) \qquad u = \Phi(z) + v$$

видели смо да грани, чија је асимптота $\Phi(z)$, одговара бар једна страна, том трансформацијом добијеног фигуративног полигона, чији је коефициенат већи од степена функције $\Phi(z)$. Нова функција v, дефинисана том трансформацијом добијеним фигуративним полигоном, имаће бар једну грану вишег степена но $\Phi(z)$. Та грана додата на $\Phi(z)$ даје грану функције u дефинисане првобитним, не трансформованим фигуративним полигоном.

Уочимо асимптоте грана функције v. Бар једна асимптота биће вишег степена но $\Phi(z)$. Свака асимптота функције v, дефинисане новим полигоном, чији је степен виши но степен асимптоте првог реда, зове се *асимптота другог реда.* Извршивши смену

$$(I^{bis}) \qquad v = \Psi(z) + w,$$

грани, чија је асимптота $\Psi(z)$, одговараће бар једна страна, (том трансформацијом (I^{bis}) добијеног фигуративног полигона из полигона који је добијен мало пре трансформацијом (I)), чији је коефициенат виши но степен функције $\Psi(z)$. Нова функција w, дефинисана најновијим фигуративним полигоном, имаће бар једну грану вишег степена но $\Psi(z)$. Та грана додата на $\Psi(z)$ по дефиницији функције $\Psi(z)$ даје грану функције v, дефинисане малопређашњим полигоном. А та функција v додата асимптоти првог реда $\Phi(z)$ даје грану функције u дефинисане првобитним полигоном.

Уочимо асимптоте грана функције w. Бар једна асимптота биће вишег степена но $\Psi(z)$. Свака асимптота функције w, чији је степен виши но степен асимптоте другог реда зове се *асимптота трећег реда.*

На исти начин, означивши са $\Theta(z)$ асимптоту реда $n - 1$ функције t, и извршив смену

$$(I^{ter}) \qquad t = \Theta(z) + s$$

грани, чија је асимптота $\Theta(z)$ одговараће бар једна страна (том трансформацијом I^{ter} добијеног фигуративног помпона из полигона који је дао асимптоту $\Theta(z)$) чији је коефициенат већи но степен функције $\Theta(z)$. Нова функција s, дефинисана најновијим фигуративним полигоном, имаће бар једну грану вишег степена но $\Theta(z)$. Та грана додата на $\Theta(z)$ даје грану функције t; та грана функције t додата на асимптоту реда $n - 2$, даје грану функције, чија је то асимптота; ит.д.; најзад додата на асимптоту трећег реда, даје грану функције w; додата на асимптоту другог реда, даје грану функције v; додата на асимптоту првог реда, даје грану функције u.

Уочимо асимптоте грана функције s. Бар једна асимптота биће вишег степена но $\Theta(z)$. Свака асимптота функције s, чији је степен виши но степен асимптоте реда $n - 1$, зове се *асимптота реда n*.

Напомена. Ако је $z = \infty$, речи : виши и нижи разменити.

33°. Према свему томе посматрана грана функције u, може се написати у облику:

$$(II) \qquad u = \Phi(z) + \Psi(z) + \cdots + \Theta(z) + \cdots$$

т. ј.

$$(III) \qquad u = \sum_{1}^{\text{к}} \text{(асимптота реда к)}.$$

Образац (III) је основни образац и једини, који служи за развијање гране функције u дефинисане скупом фигуративних тачака.

Два случаја могу наступити у раду:

1° После извесне асимптоте извесног реда скуп фигуративних тачака нема ни једне тачке на апсцисној оси. Развијање је свршио, ред није бескрајан.

2° Случај 1° не наступа, ред је бескрајан.

34°. Из свега довде реченога излази, с обзиром на другу главу, ово

практично упуство за развијање грана у близини тачке (Z_0, U_0).

Тачка 1°.

Нека је дат скуп фигуративних тачака у близини тачке (Z_0, U_0). Конструишимо фигуративни полигон.

Тачка 2°.

A°. Уочимо ма које теме фигуративног полигона у које долази бар једна лева страна, и образујмо његову карактеристичну једначину

(IV) [образац (13)] $\qquad \Sigma AB^{\beta_1} = 0.$

а) Уочимо корен те једначине, чији реални део лежи у област посматраног темена (μ_-, μ_+).

$\alpha)$ нека је тај корен B различит од нуле, њему одговара асимптота

(V) [образац (14)]. $$\Phi(z) = Cz^B \qquad (C \text{ параметар})$$

$\beta^0)$ нека је тај корен нула, — нема асимптате.

б) Уочимо корен те једначине, чији реални део лежи на граници области, али он није ни μ_- ни μ_+; асимптати ће бити:

α^0 облика (V), али z мора да тежи ка $z = o$ путем спирала σ [чл. 28], ако је то теме право, иначе асимотота не постоји [чл. 28].

β^0 облика

(VI) [образац (20)] $$\Phi(z) = z^r (C_1 z^{it_1} + C_2 z^{it_2} + \cdot \cdot)$$

z тежи ка нули путем коначне дужине [чл. 29].

в) Уочимо корен те једначине, који је једнак са једном од граница области μ_- или μ_+. Тада морамо водити рачуна о страни, чијем је коефициенту једнак тај корен; т.ј. случај *Б*^{0}.

г) Уочимо корен те једначине, који лежи ван области посматраног темена — нема осимптота. Овај корен може доцније применом тачке 3 ући у област, или доћи на границу. (случаји *а* и *б*).

Б^0) Уочимо ма коју леву страну фигуративног полигона.

I^0 Нека коефициенат $(\mu_0$ те стране није бескрајан, т.ј. страна није паралелна апсцисној оси. Издвојмо у засебну једначину чланове који леже на тој страни (преписав једначину изостављајући све чланове, који не леже на тој страни). У тако добијеној једначини ставимо

(VII) $$zu' = w$$

и конструишимо скуп фигуративних тачака (u,w) тако добијене алгебарске једначине [глава II, одељак II, образац II] и најзад конструишимо фигуративни полигон (u, w) те алгебарске једначине. Нека је S површина тога полигона.

а^0) Нека је $S = o$, и нека је d коефицненат стране, асимптома ће бити

α^0) ако је $d = \infty$

(V') [образац (15')] $\Phi(z) = Cz^{\mu_0}$

C је корен једначине — карактеристичне једначине стране —

(VIII) [образац (16')] $\Sigma\, A\, \mu_0{}^{\beta^1}\ C^B = o$

где је A коефициенат једначине при трансформацији (T^1); или корен једначине

(VIII') [образац (19)] $\Sigma\, A'\, C^{\beta_0} = o$

где је A' коефициенат једначине после трансформације (T_1) и (VII); посматрана страна треба да буде део апсцисне осе (полигона u, w); Ако та страна није део апсцисне осе, грана се налази помоћу члана 51.

β^0) $1 \neq d \neq \infty$

(IX) [образац (17)] $\Phi\,(z) = z^{\mu_0}\ [log\ C\ z^{D\,(1-d)}]^{\frac{1}{1-d}}$

D задовољава једначину

X) [образац (16)] $\Sigma\, A'\, D^{\beta_0} = o$

A' коефициенат после трансформације (T_1) и (VII).

γ^0) $d = 1$

то је случај A^0)

б) Нека је $S \neq o$. Уочимо ма коју страну тога полигона (u, w), нека јој је коефициенат d.

α^0) $d = \infty$

образац (V') из (а^0, α^0).

$$\beta^0)\quad 1 \neq d \neq \infty$$

образац (IX) ако је,

кад је $d < 1$, та страна десна,
кад је $d > 1$, та страна лева;

а асимптота не постоји,

ако је та страна лева, кад је $d < 1$
ако је та страна десна, кад је $q > 1$

$$\gamma^0)\quad d = 1$$

то је случај A^0.

II. Уочимо горњу страну паралелну са апсцисном осом. Извршивши трансформацију (T_6) добија се z као функција од u. Кад нађемо z према овом упуству (јер овај случај не наступа у исто доба и за z), инверсијом наћи ћемо ред који преставља u.

Тачка 3°.

Кад смо нашли асимптоту првог реда, извршићемо трансформацију (T_2) или (T_2^{bis}) према томе да ли је та асимптота дата обрасцем (V) или обрасцем (IX) и уочићемо једну ма коју нову страну, чији је коефициенат већи од коефициента трансформације, или ма које ново теме (за ново теме сматра се теме, у које долази бар једна нова страна) и примениће се тачка 2° овог упуства.

Али може наступити неки нов случај, који није постојао у тачки 2°, то су случаји из IV и V одељка друге главе (чл. 27 и следећи)

A^0) ако се у равни R (чл. 27) налази само једна права, може се опет применити тачка 2°.

$Б^0$) ако се у тој равни R налази више страна, примениће се чл. 29.

$В^0$) ако буде било логаритама, примениће се члан *30*.

Тачка 4°.

Затим се поново примени тачка 3° овог упуства.

Напомена. После нађене асимптате првог реда, може бити неколико асимптата другог реда. Број асимптата другог реда је највише једнак реду корена карактеристичне једначине темена или стране. Свакој асимптоти другог реда одговара једна или више асимптота трећег реда ит.д. Како се увек степен карактеристичне једначине снижава до јединице, корени морају постати прости; тада ће асимптота извесног реда *к*, одговарати само једна асимптота реда $к + 1$.

Како једној асимптоти првог реда могу одговарати две и више асимптота другог реда, те две или више грана функције *u*, дефинисане скупом фигуративних тачака, имају први члан заједнички.

Раздвајање грана тек је онда извршено, кад се дошло до асимптоте извесног реда, која није заједничка у двема гранама, у којима су заједничке и све претходне асимптоте.

После извесног броја трансформација појавиће се теме, чија се једна гранична страна не мења, а друга непрестано мења, тако да област тога темена непрестано расте. Корен карактеристичне једначине тога темена, ако у почетку није у области тога темена, може тек после извесне трансформације да дође на границу те области, или да уђе у област. Тек се тада може узети у рачун тај корен.

Из примера који следују видеће се, како се примењује горње практично упуство.

II. Примери.

I^ви^ пример

35°. *Развити у ред гране функције U у близини тачке (Z_0, U_0), кад је функција U дефинисана једначином*

$$U' + \sin Z = 0. \qquad (\alpha)$$

У близини тачке (Z_0, U_0) једначина (α), сменив $U - U_0$ са u, $Z - Z_0$ са z, написаће се у облику

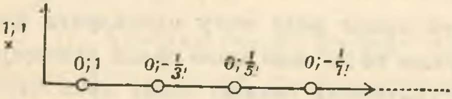
$$u' + z - \frac{1}{3'.} z^3 + \frac{1}{5'.} z^5 - \frac{1}{7'.} z^7 + \cdots\cdots = 0,$$

скуп фигуративних тачака биће образован од тачака

1° на листу индекса 1 тачка $(0,0)$ $[A = -1,\ \mathbf{B} = 1]$

2° » » » 0 тачке: $(1,0)$, $(3,0)$, $(5,0)$, $(7,0)$,...

скуп је престављен сликом 7.



Сл. 7.

Само једно теме није на апсцисној оси, његова карактеристична једначина је

$$\beta) \qquad \mu + 0 = 0$$

одакле $\mu = 0$. Област тога темена $(-\infty, 2)$; корен нула који није на граници [тачка 2^0 A^0 a^0 примедба] не даје функцију $\Phi(z)$.

Само је једна лева страна, њен је коефицијенат 2, он није корен карактеристичне једначине (β) темена, кроз које пролази та страна. Карактеристична једначина те стране [образац (VIII)] је

$$1 \cdot 2^1 \cdot C^1 + 1 \cdot 2^0 \cdot C^0 = 0 \qquad (\text{т.ј. } 2C + 1 = 0)$$

одакле је

$$C = -\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2!}\right)$$

Асимптота ће бити [образац (V')]

$$\Phi_2(z) = -\frac{1}{2!} z^2$$

Трансформација (T_2) коефицијента 2 (тачка 3^0) пројектује тачку $(-1, 1)$ у тачку $(1, 0)$. Све остале тачке остају непромењене. Скуп је као и мало пре, само му не достаје тачка $(1, 0)$, чији је коефициенат постао 0.

Нова лева страна је коефициента 4, који није корен карактеристичне једначине (β) темена, кроз које пролази та страна. Карактеристична једначина те стране је

$$1 \cdot 4^2\, C^2 - \frac{1}{3\,!}\, 4^0\, C^0 = 0 \qquad (\text{т.ј. } 4\,C - \frac{1}{3\,!} = 0)$$

одакле је

$$C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3\,!} = \frac{1}{4\,!}$$

асимптота другог реда је

$$\Phi_4\,(z) = \frac{1}{4\,!}\, z^4$$

Применивши поново тачку 3^0, ит.д., исти полигон само му не достаје тачка $(3,0)$ [за тим $(5,0), \ldots (2n-3,0)$] нова страна је коефициента 6, $[8, \ldots 2n]$, налази се, да је карактеристична једначина стране, чији је коефициенат $2n$;

$$1 \cdot (2n)^1\, C^1 + (-1)^{n-1}\, \frac{1}{(2n-1)\,!}\, (2n)^0\, C^0 = 0,$$

одакле је

$$C = (-1)^n\, \frac{1}{(2n)\,!}$$

асимптота реда n је

$$\Phi_{2n}\,(z) = (-1)^n\, \frac{1}{(2n)\,!}\, z^{2n}$$

Према обрасцу (III) једна једина грана биће:

$$u = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, (-1)^n\, \frac{1}{(2n)\,!}\, z^{2n} = \cos z - 1$$

сменив u и z њиковим вредностима добија се функција U у близини тачке (Z_0, U_0) у облику:

$$U - U_0 = \sum_{1}^{\infty}{}_n (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (Z - Z_0)^{2n} = cos\,(Z - Z_0) - 1.$$

II$^{\text{ги}}$ пример

36°. *Развити у ред гране функције U у близини тачке $(Z_0 = 0,\ U_0 = 0)$, кад је функција престављена једначином*

$$Z^2\, U' - \kappa Z\, U + 1 + 2Z^2 + 3Z^3 = 0.$$ (κ произвољан број).

У близини посматране тачке (Z_0, U_0) та једначина написаће се у облику (сменив $U - U_0$ са u, $Z - Z_0$ са z)

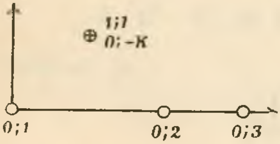
$$(\alpha) \qquad z^2\, u' - \kappa\, z\, u + 1 + 2z^2 + 3z^3 = 0.$$

Скуп фигуративних тачака биће образован од тачака:

1° на листу индекса 1, тачка $(2, 0)$ $[A = 1,\ \boldsymbol{B} = 1]$

2° » » » 0 тачке: $(1,1)$, $(0,0)$, $(2,0)$ и $(3,0)$

скуп је преставлљен сликом 8.



Сл. 8.

Само је једно теме, које није на апсцисној оси, његова је карактеристична једначина

$$(\beta) \qquad \mu - \kappa = 0$$

одакле $\mu = \kappa$. Област тога темена је $(-\infty,\ -1)$.

Како је κ произвољан број, можемо вршити разне претпоставке.

1° реални део $\kappa < -1$

2° реални део $\kappa = -1$, $\kappa \neq -1$

3° $\kappa = -1$

4° реални део $\kappa > -1$.

У случају 1^0 према тачки $2^0 A^0 a^0$ корену $\mu = к$ одговара асимптота облика [образац (V)]

$$\Phi_к(z) = C z^к \quad , \quad C \text{ је параметар.}$$

Извршивши трансформацију (T_2) коефициента $к$ (тачка 3) добија се нова тачка $(к, 0)$, али чији је коефицијенат нула, дакле тачка исчезава а слика остаје иста, само се сад мора узети страна коефициента већег од $к$, т.ј. страна коефициента -1. Како је њен коефицијенат -1 различит од корена карактеристичне једначине (β) темена кроз које пролази та страна, добиће се асимптота

$$\Phi_{-2}(z) = \frac{C}{z}$$

C је корен карактеристичне једначине те стране [образац (VIII)]

$$1 \cdot (-1)^1 C + (-к)(-1)^0 C + 1(-1)^0 C^0 = 0.$$

одакле се добија

$$C = \frac{1}{1 + к}$$

дакле асимптота је

$$\Phi_{-1}(z) = \frac{1}{1 + к} \frac{1}{z}$$

Извршив трансформацију (T_2) коефициенти -1 (тачка 4), добија се на исти начин

$$\Phi_{+1}(z) = \frac{2}{1 - к} z$$

затим на исти начин

$$\Phi_2(z) = \frac{3}{2 - к} z^2$$

Извршив најзад трансформацију (T_2) коефициента 2 (тачка 4), скуп се своди на једну једину тачку ван апсцисне осе. Развијање је свршено, та је грана облика

$$(у)\ U = CZ^{к} + \frac{1}{1+к}\,\frac{1}{z} + \frac{2}{1-к}\,Z + \frac{3}{2-к}\,Z^2,\ C \text{ параметар}$$

у близини тачке $Z_0 = 0$, $U_0 = 0$). Тачка $(0, 0)$ је *жижа-пол*, а ако је $к$ реалан број, онда је та тачка *чвор-пол.*

У случају 4^0 почиње се прво са страном и нађе се $Ф_{-1}$, па после, ако је реални део од $к$ мањи од $+1$, долази $Ф_к$, па $Ф_1$ и најзад $Ф_2$; а ако је пак тај реални део од $к$ већи од $+1$ доћи ће $Ф_{-1}$ па $Ф_{+1}$, па после $Ф_к$ или $Ф_2$, према томе да ли је реални део од $к$ мањи или већи од 2.

У опште, ако реални део $к$ није ни -1, ни $+1$ ни $+2$, грана ће бити облика (у).

У случају 2^0 који обично наступа тек у тачки 3 имамо случај члана 29. Из тачке $(1, 1)$ полазе две праве у равни R, једна коефициента -1, а друга коефициента $+к$ (реални део $к$ је -1). $Ф$ је облика

$$Ф'_{-1} = C'z^{-1} + Cz^{к} \qquad C' = \frac{1}{1+к},\ C \text{ параметар}$$

али z мора тежити путем коначне дужине ка тачки $z = 0$. Трансформација (T_2) даје скуп фигуративних тачака сем тачака $(0, 0, 0)$ и $(0, 0,$ сачинитељ од i у $к)$. Затим се налази $Ф_1$ и $Ф_2$. На исти начин би се радило, ако би реални део $к$ био $+1$ или $+1$. У опште образац (у) важи и кад је реални део $к$ један од бројева -1, $+1$ и 2, али $к$ није реалан број. Само z мора тежити нули путем коначне душе.

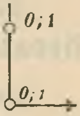
Уочимо најзад случај 3^0 т.ј. $к = -1$. Коефицијенат стране је корен карактеристичне једначине (β). Посматрајмо страну коефициента -1 (тачка 2, $A^0\, b^0$). Извршимо трансформацију (T_1) коефициента -1, (тачка 2, $Б^0$). Тачка $(0, 0)$ остаје непромењена са истим коефициентом 1. Многострука тачка састојаће се из двеју тачака:

1^0 на листу индекса 1, тачка коефициента

$$1\binom{1}{1}(-1)^{1-1}=1$$

2^0 на листу индекса 0 тачка коефициента

$$1\binom{1}{0}(-1)^{1-0}+\kappa\binom{0}{0}(-1)^{0-0}=0$$



Сл. 9.

Једначина образована од чланова на посматраној правој биће

$$z\,v'+1=0$$

сменом (VII) добија се једначина чији је полигон (v, w) сл. 9. Тај полигон има једну страну, површина му S је 0, коефициенат стране је 0, (тачка 2, $Б$, а^0 β^0) асимптота ће бити [образац (IX)]

$$\Phi''_{-1}=z^{-1}\Big[\log C z^{D}\Big]^{\frac{1}{1}}=z^{-1}\log\frac{C}{z}$$

јер D задовољава једначину

$$D+1=0 \quad \text{т.ј.} \quad D=-1.$$

Трансформација (T_2 *bis*) коефициента -1 (тачка 3) даје случај раније посматран у 1^0, 2^0 и 4^0 (добија се као раније Φ_1 и Φ_2).

Ако би пак било $\kappa=1$ или $\kappa=2$ добило би се

$$\Phi''_1=z\Big[\log C\frac{1}{z^2}\Big]\quad,\qquad \Phi''_2=z_2\Big[\log C\frac{1}{z^3}\Big]$$

Дакле дата једначина (α) има у близини тачке $(Z_0=0,\ U_0=0)$ интеграл у једном од 4 облика, C параметар, :

$$\text{I}\quad U=CZ^{\kappa}+\frac{1}{1+\kappa}\frac{1}{Z}+\frac{2}{1-\kappa}Z+\frac{3}{2-\kappa}Z^2\quad \kappa\neq-1,+1,+2$$

$$\text{II}\quad U=\qquad\frac{1}{Z}\log\frac{C}{Z}+\frac{2}{1-\kappa}Z+\frac{3}{2-\kappa}Z^2\quad \kappa=-1$$

$$\text{III}\quad U = \frac{1}{1+\kappa}\,\frac{1}{Z} + Z \log \frac{C}{Z^2} + \frac{3}{2-\kappa}\,Z^2 \qquad \kappa = +1$$

$$\text{IV}\quad U = \frac{1}{1=\kappa}\,\frac{1}{Z} + \frac{2}{1-\kappa}\,Z + Z^2 \log \frac{C}{Z^3} \qquad \kappa = +2$$

III^ħи пример.

37. *Развити у ред гране функције U дефанисане* **Riccati**-*евом једначином, у близини тачке* $Z_0 = 0, U_0 = 0$).

Зна се, да се *Riccati*-ева једначина (сменив $U - U_0$ са u, $Z - Z_0$ са z) може написати у облику

$$(\alpha) \qquad u' + u^2 + f(z) = 0.$$

Према претпоставци учињеној у чл. *1*, тачка $z = 0$ није есенцијални сингуларитет функције $f(z)$. $f(z)$ се може написати у облику

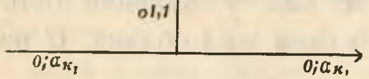
$$f(z) = \Sigma_i\, a_{ki}\, z^{ki}$$

бројеви ki су ма какви реални бројеви, ограничени са доње стране. Нека је најмањи међу њима κ_0.

Скуп фигуративних тачака биће састављен од тачака :

1° на листу индекса *1*, тачка $0, 0$ [$\boldsymbol{A} = -1$, $\boldsymbol{B} = 1$]

2° на листу индекса *0* тачка $(0, 2)$



Сл. 10.

затим низ тачака $(\kappa_i, 0)$ сл. 10. Тачка $(\kappa_0, 0)$ зависи од κ_0 (због тога на слици тај положај није утврђен). Мора се одмах направити неколико претпоставки, према вредности κ.

1° $\kappa_0 < -2$

2° $\kappa_0 = -2$

3° $-1 > \kappa_0 > -2$

4° $\qquad\qquad - 1 = \kappa_0$
5° $\qquad\qquad - 1 < \kappa_0$

Случај 1° $\kappa_0 < -2$.

Само је једна лева страна, која пролази кроз две реално просте тачке [тачка $(-1,1)$ је у полигону], карактеристична једначина те стране, коефициента $\frac{\kappa_0}{2}$, је

$$C^2\left(\frac{\kappa_0}{2}\right)^0 + a_{\kappa_0} = 0;$$

њена два корена су

$$C_{\kappa_0} = +\sqrt{-a_{\kappa_0}}, \qquad C'_{\kappa_0} = -\sqrt{-a_{\kappa_0}}$$

дакле две асимптоте првог реда:

$$\Phi_{\kappa_0}(z) = +\sqrt{-a_{\kappa_0}}\, z^{\frac{\kappa_0}{2}}, \quad \Phi'_{\kappa_0}(z) = +\sqrt{-a_{\kappa_0}}\, z^{\frac{\kappa_0}{2}}$$

Обе асимптоте дате су једначином

$$[\Phi_{\kappa_0}(z)]^2 + a_{\kappa_0} z^{\kappa_0} = 0.$$

Ако је $\kappa_0 = -\frac{p}{q}$, $(p > 0,\ q > 0)$, биће $2q$ грана, које имају тачку $z = 0$ као пол реда $+\frac{p}{2q}$; те гране ће се пермутовати све међусобом, кад z обиђе око тачке $z = 0$, ако је p парни број, гране ће се поделити на две групе по q, и пермутоваће се међу собом гране сваке групе за себе.

Извршимо сад трансформацију (T_2) коефициента $\frac{\kappa_0}{2}$, та ће трансформација дати нову тачку $\left(\frac{\kappa_0}{2},\ 1\right)$ на листу индекса 0 и тачку $\left(\frac{\kappa_0}{2} - 1,\ 0\right)$. Тачка $(\kappa_0,\ 0)$ исчезнуће. Коефициенат тачке $\left(\frac{\kappa_0}{2},\ 1\right)$ биће

$$\pm 2\sqrt{-a_{\kappa_0}} \qquad (+ \text{ за } \Phi, \quad - \text{ за } \Phi')$$

коефициенат нове стране (већи од $\frac{\kappa_0}{2}$) зависиће од κ_1.

Ако је $\kappa_1 < \frac{\kappa_0}{2} - 1$ добиће се нова асистема

$$\Phi_{\kappa_1}(z) = -\frac{a_{\kappa_1}}{2\sqrt{-a_{\kappa_0}}} z^{\kappa_1 - \frac{\kappa_0}{2}}, \quad \Phi'_{\kappa_1} = -\Phi_{\kappa_1}$$

ако је $\kappa_1 \geqslant \frac{\kappa_0}{2} - 1$ коефициенат нове стране биће -1, асимптота ће се наћи по упуству. Тачка $\left(\frac{\kappa_0}{2}, 1\right)$ остаће и даље, она је реална проста тачка, развијање ће се увек вршити на исти начин.

Случај 2°, $\kappa_0 = -2$.

Тачка $(-1, 1)$ је привидно теме полигона, његова карактеристична једначина даје корен $\mu = 0$, који није једнак са коефициентом -1 стране која пролази кроз њега. Карактеристична једначина те стране је

$$C^2 (-1)^0 + C^1 (-1)^1 + C^0 a_{-2} = 0, \qquad (\kappa_0 = -2)$$

одавде се добијају две вредности за C

$$C = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4a_{-2}}$$

Овај случај се дели на два подслучаја, према томе да ли су оба корена једнака или не.

$$A^0) \qquad 1 + 4a_{-2} \neq 0.$$

Две различите вредности за C, према томе и две асимптоме првог реда

$$\Phi_{-1}(z) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4a_{-2}}\right] z^{-1};$$

$$\Phi'_{-1}(z) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\,a_{-2}}\right] z^{-1}$$

тачка $z = 0$ је за асимптоту првог реда пол.

Извршимо трансформацију (T_2) коефициента — 1. Тачка (— $2, 0$) исчезава; али се појављује тачка (— $1, 1$) на листу индекса нула и са ранијом тачком гради многоструку тачку, чија је карактеристична једначина

$$\mu = -1 - \sqrt{1 - 4\,a_{-2}}, \quad \mu' = -1 + \sqrt{1 - 4\,a_{-2}}$$

[μ после Φ, μ' после Φ'].

а). Нека је $1 - 4\,a_{-2} < 0$; μ и μ' су комплексне количине, реални им је део -1; али ако ми требамо према упуству (тачка 3) да узмемо у рачун ону страну или ону татенту чији је коефиценат већи од коефициента трансформације, ове тангенте не могу дати асимптоту. Зато треба узети у продужењу само страну полигона, и продужење ће се извршити имајући увек обрасце сличне горњим за Φ и Φ'.

[Узев те корене у рачун са другом страном, која лежи између тачака (0, 2) и (— 1, 1) коефиценат Φ биће нула).

б). Нека је $1 - 4\,a_{-2} > 0$; μ и μ' су реалне количине: $\mu < -1$, $\mu' > -1$. Права коефициента μ није тангента, трема томе

α^0) грана, чија је прва асимптота била Φ, добиће се као и у случају а.

β^0) гране пак, чија је прва асимптота била Φ', разликује се од претходне α^0). Права коефициента μ', повучена крэз тачку (— 1 1) сећи ће апсцисну осу десно од тачке (— 2, 0). На том месту може се десити нека од фигуративних тачака $_1$ или не. Ако се не деси ни једна тачка, развијање ће се вршити до те тачке као и у α^0. Та права постаје тангента, и њој ће ооговорити асимптота

$\Phi (z) = C' z^{\mu'}$. C' је параметар, после тога опет ће се вршити трансформације (T_2), грана ће бити облика

$$\Psi (z) + C' \Theta (z).$$

Ако се пак дели на том месту нека тачка, радиће се као и раније, док се не дође до те тачке. Дошав до те тачке, наилази се на страну, чији је коефициенас корен карактеристичне једначине темена кроз које пролази. Асимптота ће у том случају бити облика

$\Phi' = z^{\mu'} \log C' z^{D}$. C' је параметар, где је $- D$ коефициенас тачке на том месту. После тога долази трансформација $(T_2 \; bis)$, појавиће се затим тачке чији су коефициенти логаритали (функције од $\log C' z^{D}$), грана ће бити облика

$$\Psi_1 (z) + \Theta_1 (z, \log C' z^{D}).$$

$$Б^0) \qquad 1 - 4\, a_{-2} = 0.$$

Обе вредности за C оу једнаке, обе асимпготе постају једнаке; дакле једна асимптота.

$$\Phi = \Phi' = \frac{1}{2} \frac{1}{z}.$$

Нова двојна тачка имаће карактеристичну једначину, чији је корен $- 1$, тај корен не може дати асимптоту. Овде се добија свега једна друга асимптота. Ако се у првом случају A^0 узме $1 - 4\, a_{-2}$ врло мало, рецимe $1 - 4\, a_{-2} = h$, па се развију гране обе и стави $h = 0$, добиће се обе гране једнаке, т.ј. једна двојна грана, која је управо, грана добијена директно.

Случај 3° $\qquad - 2 < \kappa_0 < - 1$.

Полигон има две леве стране, које се секу у тачки $(-1, 1)$, чија је карактеристична једначина као и у 2^0, а њен корен 0. Границе области те тачке су -1, $\kappa_1 - 1$.

A^0) Уочимо страну коефицента -1. Она даје асимптоту

$$\Phi = \frac{1}{z} \quad [C^2 (-1)^0 + C (-1)^1 = 1, C = 1]$$

Трансформација (T_2) коефицента -1 прави тачку $(-1, 1)$ двојном тачком, корен карактеристичне једначине те тачке је $\mu = -2$, права коефицента -2, која пролази кроз ту тачку није тангента и не даје асимптоту. Нова страна коефицента већег од -1 биће она друга страна, чији је коефицienат $\kappa_1 = 1$ (који није корен карактеристичне једначине темена). Рад ће се довршити трансформацијама (T_2) као у случају (2^0 A^0 $б^0$ α^0). Ово важи за горњу грану и у случајима 4^0 и 5^0.

$Б^0$. Узмимо грану, чији је коефициенат већи од -1. Пошто је $-1 > \kappa^0 > -2$, биће $0 > \kappa_0 - 1 > -1$, коефициенат стране је већи од корена карактеристичне једначине. Асимптота ће бити

$$\Phi = - \frac{a_{\kappa_0}}{1 + \kappa_0} - \frac{1}{z^{1 - \kappa_0}}.$$

После трансформације (T_2) добиће се нов полигон, који ће имати на апсцисној оси нову тачку $(2 (\kappa_0 - 1), 0)$. Ако на овом месту има фигуративна тачка, продужиће се као у случају 4^0, а ако нема, онда ће се продужити као у случају 5^0.

Случај 4^0 $\qquad \kappa_0 = -1$.

Једна страна, коефицента -1, даје грану као у 3^0 A^0.

Страна чији је коефициенат *0*, корен карактеристичне једначине даће асимптоту

$$\Phi_0 = log\, C z^{-a_1}$$

Трансформација (T_2 *bis*) даће нове тачке (*0*, *0*) и (*0*, *1*) чији ће коефициенти бити функција логаритама. Затим се добија страна, чији ће коефициенат бити позитиван. Тачке на апсцисној оси поделиће се у две групе: једне ће имати за коефициенат константу, друге ће имати за коефициенат функцију логаритма. Прве ће дати асимптоте чији су коефициенти константе, друге ће дати асимптоте чији су коефициенти функције логаритама.

Случај 5° $\kappa_0 > -1$.

Прва грана, која долази од стране коефициента -1, као и у случају *3*° *A*°.

Корен карактеристичне једначине нула — не даје асимптоту.

Друга страна има коефициенат позитиван, даје асимптоту као у случају 2_0 A^0 a°.

IV-ти пример.

38°. *Развити у ред у близини тачке* ($z_0 = 0$, $U_0 = 0$) *гране функције U дефинисане диференцијалном једначином.*

$$(\alpha) \qquad z^n u'^m + P(z, u) = 0$$

где је P полином по z и *u*. (Смењено је $U - U_0$ са *u*, $Z - Z_0$ са *z*).

Скуп фигуративних тачака је:

1° тачка (*n*, *0*) на листу индекса *m* [$\boldsymbol{A} = n - m$, $\boldsymbol{B} = m$].

2^0 тачка (α, β) на листу индекса 0. $0 \leqslant \alpha \leqslant \boldsymbol{M}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \boldsymbol{N}$. $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ су највиши степени полинома P по z и u.

Конструишимо скуп Σ фигуративних тачака које одговарају полиному $P(z, u)$ и полигон $\boldsymbol{\Pi'}$ који одговара том скупу. Фигуративни полигон једначине (α) назовимо $\boldsymbol{\Pi}$.

Могу наступити три случаја, према томе да ли је тачка $\boldsymbol{M}$ $(n - m, m)$ у, на или ван $\boldsymbol{\Pi'}$.

1^0. Тачка $\boldsymbol{M}$ у $\boldsymbol{\Pi'}$.

Полигон $\boldsymbol{\Pi}$ и $\boldsymbol{\Pi'}$ су исти [скупови се разликују, јер скуп, који одговара полигону $\boldsymbol{\Pi}$, има једну тачку (тачиу $\boldsymbol{M}$) више но скуп, који одговара полигону $\boldsymbol{\Pi'}$]. Стране пролазе кроз реално просте тачке, увек асимптоте и трансформације као у I-вом примеру, па и кад је коефициенат стране нула, јер је цела страна у листу индекса 0.

За случај $z_0 = \infty$, $U_0 = \infty$ важи исто.

Дакле функција U има N грана, које су у близини $z = 0$, $z = \infty$ сличне гранама алгебарске функције

$$(\beta) \qquad P(z, u) = 0.$$

Али између $z = 0$ и $z = \infty$ гране се разликују, разлика је у толико већа у колико се тачка $\boldsymbol{M}$ приближује обиму полигона $\boldsymbol{\Pi'}$. (Прве су асимптоте исте, али друге могу већ бити различне). Отуд излази ова теорема:

Теорема: *Кад је тачка* $\boldsymbol{M}$ *у полигону* $\boldsymbol{\Pi'}$, *гране алгебарске функције* v, *дефинисане једначином*

$$P(z, v) = 0,$$

су асимптоте у тачки $z = 0$ *и* $z = \infty$ *грана функције* u *дефинисане диференцијалном једначином*

$$z^n u'^m + P(z, u) = 0.$$

(реч асимптота је употребљена у обичном смислу криволиниских асимптота.

2°. Тачка **М** је на обиму полигона **П**.

Могу сә разликовати два случаја.

A^0. Тачка **М** се поклапа са неком тачком скупа фигуративних тачака Σ'. Нека је a коефициенат те тачке. Та тачка са тачком **М** чини многоструку тачку, чија је карактеристична једначина

$$(y) \qquad \mu^m + a = 0.$$

Једначина (y) има m корена. Уочимо нормалну пројекцију M_n тачке **М** на апсцисној оси, и раван P_0 дефинисану при дефиницији коефициента праве (чл. 5), на тој равни P_0 из тачке M_n опишимо круг полупречника $\sqrt[m]{a}$, и на њему узмимо m тачака тако да је свака подједнако удаљена од суседних тачака, (ако је m непаран број, једна ће бити на апсцисној оси, а ако је m паран број, две ће бити, ако је $a < 0$, ниједна ако је $a > 0$).

Вежимо свих m тачака са тачком M.

Ако је нека од пројекција ових m правих, лева тангента полигона **П**, добиће се асимптота

$$\Phi = C_i z^{\mu i} \quad , \qquad C_i \text{ параметар};$$

ако је нека од тих пројекција лева страна, добиће се асимптота

$$\Phi' = C z^p + D z^{p+qi} \quad , \; D \text{ параметар},$$

С је дато, зависи од те стране полигона **П**, $p + qi = \mu_0$; ако ни једна пројекцеја није ни лева тагента ни лева страна, одговараће асимптота алгебарске једначине (β). Али ако би нека од тих правих била лева страна полигона *П'*, асимптота ће бити

$$\Phi'' = z^{\mu} [\log C \, z^{D(1-d)}]^{\frac{1}{1-d}}$$

Извршив трансформацију (T_2) или (T_2^{bis}) добијају се случаји већ посматрани раније (у ранијим примерима).

Б° тачка *М* се не поклапа са неком тачком скупа Σ' фигуративних тачака. Овај случај се своди на пређашњи, где је $a = o$. Све се тачке поклапају, добија се једна једина тачка и једна једина права, која као лева тангента не даје асимптоту, а као лева страна даје асимптоту облика Φ'' са $\mu = o$.

3°. Тачка *М* је ван полигона *П'*.

Повуцимо из *М* две таигенте на *П'*. (У специјалном случају могу се обе таигенте поклопити).

Стране полигона *П'* које су у исто време стране и полигона *П* (незаклоњене тангентама из *М*) дају прве асимптоте као у случају 1°.

Лева тангента, ако није коефициента *o* (пошто је корен карактеристичне једначине темена *М* једнак нули) даће асимптоту за неколико грана, асимптоту облика

$$\Phi = Cz^{\mu} \quad , \quad C \text{ дато}$$

Лева тангента коефициента нула даће асимптоте облика Φ'' са $\mu = o$.

Ако би нека тангента била паралелна апсцисној оси, треба извршити трансформацију (T_6) (тачка 2 *Б*° II), наћи z, па инверсијом наћи u.

V$^{\text{ти}}$ пример

39°. Развити у ред гране функције U *у близини тачке* $Z_0 = o$, $U_0 = o$, U *функција дефинисана* *диференцијалном једначином* [сменив $U - U_0$ са u, $Z - Z_0$ са z]

(α) $$Q\ (z,\ u)\ u' + P(z,\ u) = o.$$

где је

$$Q = \Sigma\, q_{i\varkappa}\ z^i\ u^\varkappa \quad , \quad P = \Sigma p_{jh}\ z^j\ u^h.$$

Нека је Σ_p скуп фигуративних тачака (на листу индекса o), које одговарају једначини

(β) $$P(z, \chi) = o,$$

Σ_q нека је скуп фигуративних тачака (на листу индекса *1*), које одговарају једначини

(8) $$Q\ (z, w) = o$$

Π_p и Π_q нека су фигуративни полигони скупова Σ_p и Σ_q, а Π фигуративни полигон једначине (α).

Ако се страна полигона Π поклапа са страном полигона Π_p, а на њој нема ни једне тачке скупа Σ_q, грани функције u биће асимптота грана алгебарске функције v. Ако се страна полигона Π поклапа се страном полигона Π_q, а на њој нема ни једне тачке скупа Σ_p, и ако та страна није коефициента нула; функција u имаће за асимптоту функцију w. Ако је пак та страна коефициента o, грана функције u добиће се помоћу чл. *50*. Ако је нека страна полигона Π састављена од тачака и скупа Σ_p и скупа Σ_q, појављују се многоструке тачке, и разноврсни сингуларитети.

Да би испитали гране функције u у близини тачке $z = o$, треба правити разне претпоставке о вредностима коефициента q_{ix}, $p_{j,\varkappa}$.

1°. $$Q_{00} \neq o$$

Полигон Π има једну једину леву доњу страну састављену од тачака и полигона Π_q $(-1,\ 1)$ и полигона Π_p (тачка на апсцисној оси). Коефициенат те стране, није корен карактеристичне једначине темена $(-1, 1)$, асимптота је $C z^{\mu}$, где је C дато. Остане стране не дају ни једну грану која за $z = 0$ постоје 0.

$$2^{\circ}. \qquad q_{0,0} = 0, \quad p_{0,0} \neq 0.$$

Ако на ординатној оси листа индекса 1 постоји бар једна тачка, нека је q најмања ордината такве тачке, полигона Π имаће једну једину леву, доњу страну чије две тачке припадају скуповима Σ_p и Σ_q. Коефициенат те стране биће $\frac{1}{1+q}$, дакле грана облика $Cz^{\frac{1}{1+q}}$ т.ј. *$q + 1$ грана пермутује се око тачке $z = 0$.* То је теорема коју су утврдили *Broit* и *Bouquet*. Ако на тој ординатној оси нема ни једне тачке, посматраћемо апсолутну ординатну осу. Ако на њој има бар једна тачка сем тачке $(0, 0)$, та оса биће страна полигона, која је састављена или само из тачака скупа Σ_p или и из тачака скупа Σ_q. Но та страна, неће дати функцију која тежи нули кад z тежи нули. Ако ни на тој оси нема ни једне тачке сем $(0, 0)$ стране ће бити леве горње, за које је тачка $z = 0$ пол.

$$3^{\circ}. \qquad q_{0,0} = 0, \quad p_{0,0} = 0$$

Разноврсни случајеви према вредностима q и p, за које је збир индекса 1. Претпоставимо

$$q_{0,1} \neq 0, \; q_{1,0} \neq 0, \; p_{0,1} \neq 0, \; p_{1,0} \neq 0$$

Једна једина страна (лева, доња) састављена је од тачака оба скупа Σ_p и Σ_q. Њен је коефициенат 1, она пролази кроз двојну тачку $(0, 1)$, чија карактеристична једначина има корен $\mu = -\frac{p_{0,1}}{q_{1,0}}$. Пошто та тачка није право теме, она не мења природу асимптота — има их две. Извршив трансформацију (T_2) добиће се нова двојна тачка, карактеристична једначина двојне тачке измениће се, а та двојна тачка постаје право теме. Ако је корен те једначине мањи од 1, нема асимптоте, ако је пак већи од 1 даће асимптоту, која садржи параметар, ако је он већи од коефицијента нове стране (чији је коефициенат већи од 1) нова асимптота биће Cz^μ; после трансформације (T_2) ит.д..

$$4^0.\ q_{0,0} = 0,\ p_{0,0} = 0\ q_{0,1} = 0,\ q_{1,0} \neq 0,\ p_{1,0} \neq 0\ p_{0,2} = 0.$$

Тачка (0,1) је право теме, корен њене карактеристичне једначине може дати асимптоту, која садржи параметар. Страна коефицијента 1 даће асимптоту, која не садржи параметар. Нека је q најмања ордината тачке на ординатној оси листа индекса 1, једна је страна коефицијента $\frac{1}{q}$, њој одговара q грана облика Cz^μ, (С корен карактеристичне једначине те стране), $\mu = \frac{1}{q}$. А ако је корен карактеристичне једначине $\frac{1}{q}$, биће опет q грана истог облика, само ће C бити замењено функцијом логаритма.

и т. д.

VI-ти пример.

Посматрати гране функције U у близини тачке ($Z_0 = o$, $U_0 = o$), функција U дата диференцијалном једначином (сменив $U - U_0$ са и, $Z - Z_0$ са z)

$$u'^n\ T + u'^{n-1}\ S + \cdots\ +\ u'\ Q + P = o$$

где је

$$T = \Sigma\ t_{ij}\ z^i\ u^j, \cdots\cdots, \boldsymbol{P} = \Sigma\ p_{h\varkappa}\ z^h\ u^\varkappa$$

Ако је $t_{0,0} \neq 0$, $p_{0,0} \neq 0$ функција u имаће n грана облика $C z$, C је корен карактеристичне једначине стране коефицента 1.

Ако је $t_{0,0} = 0$, $s_{0,0} \neq 0, \cdots p_{0,0} \neq 0$ и ако је q најмања ордината тачке на ординатној оси листа индекса n, биће $n - 1$ грана као мало пре (облика $C z$) и $q + 1$ грана облика $C z^{\frac{1}{q+1}}$, C је опет корен карактеристичне једначине.

Нека q остане, и нека буде $s_{0,0} = 0, \cdots q_{0,0} = 0$, али $p_{0,0} \neq 0$ биће опет бар $n + q$ грана.

Више грана од $n + q$ биће, ако се појави какво многоструко теме, чија ће карактеристична једначина имати бар један корен у области тога темена. По колико ће се грана пермутовати зависи од вредности коефиценкта $s, \cdots, q$.

Ако су сви коефициенти $t_{g,h}$, $s_{g,h}, \cdots p_{g,h}$ једнаки нули за $g + h < q$, а $t_{0,q} \neq 0$, $p_{q,0} \neq 0$, функција ће имати опет $n + q$ грана облика $C z$, где је C корен карактеристичне једначине стране коефицента 1. Биће само $n + q$ грана, ако, кад се изврши смена (T_2) коефициента 1, добијено теме буде имао карактеристичну једначину, чији ни један корен није већи од 1, нити његов реални део. Таква је једначина на пример једначина

$$t_{0,q} \; u_q \; u'^n + p_{q,0} \; z^q = 0.$$

Она има $n + q$ грана

$$u = Z \sqrt[q+n]{-\frac{p_{q,0}}{t_{0,q}}}$$

Ове су асимптоте у овом случају и гране, јер после трансформације (T_2) исчезава тачка на апсцисној оси, а нема ниједне друге.

Нека је $t_{0,q} = o$, $t_{0,q+\varrho-1} = o$, $t_{0,q+\varrho} \neq o$, $s_{0,q} \neq o$, остало као у претходном случају, постојаће $n + q - s$ асимптота као и мало пре и $\varrho + 1$ асимптота облика $C\, z^{\frac{1}{\varrho+1}}$, свега $n + q + \varrho$ грана асимптоте; под условом да многострука тачка $(-n + 1, n + q - 1)$, која је теме, нема карактеристичну једначину чији је корен мањи од $\frac{1}{\varrho + 1}$. Такав је пример једначина

$$t_{0,q+\varrho}\, u^{q+\varrho}\, u'^{n} + s_{0,q}\, u^{q}\, u'^{n-1} + p_{q,0}\, z^{q} = o$$

која има

1_0 $n + q - 1$ грану, чија је прва асимптота

$$\Phi = \sqrt[n+q-1]{-\frac{p_{q,0}}{S_{0,q}}}.\ Z$$

2^0 $\varrho + 1$ грану, чија је прва асимптота

$$\Phi = \sqrt[\varrho+1]{-\frac{S_{0,q}}{t_{0,q+\varrho}}}.\ Z^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

Овај пример је у супротности са теоремом *H.* **Dulac**-а.[1])

* * *

---

[1]) *H. Dulac:* Recherches sur les points singuliairs des équations différentielles. (thése) Paris 1903. стр. 6.

ЧЕТВРТА ГЛАВА

ПРИМЕНА НА НЕКОЛИКО ПРОБЛЕМА АНАЛИТИЧНЕ ТЕОРИЈЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ПРВОГ РЕДА.

I. Аналитично продужење редова у које су развијене функције дефинисане диференцијалном једначином првог реда.

41°. Кад нам је дата каква диференцијална једначина (*1*) [I-ва глава], знамо наћи редове који престављају поједине гране у близини тачке (Z_0, U_0), кад та тачка није есенциални сингуларитет коефициената полинома по $\frac{dU}{dZ}$ · Нашавши ред у близини тачке (Z_0, U_0), поставља се питање: »Докле важи нађени ред?«, и »Да ли је нађени ред конвергентан?«.

На први поглед изгледа да за сваку тачку (Z_0, U_0) треба вршити ова испитивања, да би се нашли редови грана и познала природа сингуларитета. Ми смо у претходним главама били на »локалном гледишту,« као *Broit* и *Bouquet* у свом славном мемоару из 1856 године. У овој глави прећи ћемо на »опште гледиште,« на које је дошао прво *Painlevé*.

У овој глави ће се прећи на „опште гледиште,“ а затим уочити неке теореме и неке специјалне диференцијалне једначине првог реда.

42°. Нека је (Z_0, U_0) *интеграциона константа* у смислу *Painlevé*-а, т.ј. за $Z = Z_0$, функција U добија вредност U_0, тим се условом одређује интеграциона константа; отуд се *тачка* (Z_0, U_0) *зове интеграциона константа.*

Узмимо једначину (*1*) напишимо је у облику (*3*), али не прецизирајући интеграциону константу. Скуп фигуративним тачака зависи од те интеграционе константе. Он зависи од ње на два начина:

1° мењањем константе мења се коефиценат сваке фигуративне тачке, док фигуративни полигон остаје.

2° мењање константе могу неке тачке исчезнути или неке нове постати, тим се мења и фигуративни и полигон.

Пошто и скуп фигуративних тачака и фигуративни полигон зависе од интеграционе константе и потпуно су одређени тек онда, кад је та интеграциона константа одређена, рећи ћемо да су тај скуп и тај полигон: *скуп фигуративних тачака и фигуративни полигон за интеграциону константу* (Z_0, U_0).

43°. Уочимо сад диференцијалну једначину (1) и издвојмо оне константе, ако их има, које су есенцијални сингуларитети за скуп фигуративних тачака, т.ј. за коефициента саме једначине (*1*). Од сингуларитета остају још полови, алгебарске и логаритамске критичне тачке. Ако логаритми садрже само независно промењиву, они су коефициенти фигуративних тачака, а ако садрже обе промењиве или само непознату функцију, издвојмо скуп специјалних вредности интеграционе константе за које се појављују ти логаритми [т.ј. скупове, који су логаритамске тачке на пр. у $log\,(U+Z)$, логаритамска је тачка скуп вредности за које је $U_0+Z_0=0$]. Затим уочимо скуп вредности за које се појављују алгебарске критичне тачке. Скуп свију тих вредности интеграционе константе назовимо *скуп* (E). Полови се уклањају множењем; додајмо скупу (E) скуп вредности за које се појављују полови, па ћемо добити *скуп* (E'). Трансформације (T_3) и (T_4) могу уклонити алгебарске критичне тачке.

Датој диференцијалној једначини, док је интеграциона константа ма каква, не припада скупу (E), одговора известан скуп фигуративних тачака, чији су коефицијенти функције интеграционе константе.

Корени карактеристичних једначина страна и темена фигуративног полигона тако исто су функције интеграционе константе. И цео фигуративни полигон је функција интеграционе константе. Али док су коефицијенти тачака и корени карактеристичних једначина непрекидне функције интеграционе константе изузев скуп вредност (E), дотле су коефиценти страна и границе области темена прекидне функције интеграционе константе. Интеграциона константа (Z_0, U_0) може варирати у извесној области [под том облашћу разуме се скуп двеју површина, једна у равна Z_0, друга у равни U_0 (Z_0 и U_0 су комплексне количине]], па да коефицијенат стране остане непромењен; он се не мења све дотле, докле интеграциона константа не буде решење неких једначина, или док не припадне скупу (E'), докле интеграциона константа, као тачка, не буде на једној од извесних линија.

Нека су

$$K_\lambda\,(Z_0, U_0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

коефицијенти правих темена,

$$L_\lambda\ (Z_0, U_0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

коефициенти привидних темена (чија је област 0)

$$M_\lambda\ (Z_0, U_0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

коефициенти тачака у полигону, које би постале темена, кад би неко право теме исчезло.

$$(Z_0, U_0)$$

Све тачке, које не припадају скупу (E), могу се поделити на три класе:

1^0 тачке *прве класе* (или *опште тачке*), кад тачка (Z_0, U_0) не уништава ни један коефициенат K_λ.

2_0 тачке *друге класе* (или *тачке на линији*), кад тачка (Z_0, U_0) лежи на *једној* од линија

$$K_\lambda\ (Z_0, U_0) = 0.$$

[Ако се нека друга линија делом поклапа са овом, она може и на њој лежати]

3^0 тачке *треће класе* (или специјалне тачке), кад тачка (Z_0, U_0) која припада другој класи, лежи на још једној линији

$$L_\lambda = 0 \text{ или } M_\lambda = 0$$

која сече прву линију, а не поклапа се са њом на извесној дужини; тачке чији су коефициенти L односно M морају постати права темена чим ова тачка треће класе буде постала друге класе.

Да би дискутовали једначину (1) треба прво да посматрамо тачке ових трију класа, па затим тачке које припадају скупу (E) у колико је то могуће [могуће је посматрати оне скупове скупа (E), који су алгебарске критичне тачке једначине (1)].

A^0 Тачка (Z_0 U_0 је тачка прве класе

44^0 Нека је n степен једначине (1) по $\dfrac{dU}{dZ}$, m степен по U коефициента од $\left(\frac{dU}{dZ}\right)^n$, N максимум апсолутне ординате у скупу фигуративних тачака.

Леву страну фигуративног полигона састављаће:

1° једна страна коефициента *1*, чија је пројекција на ординатној оси n).

2° једна страна коефициента *0* (на листу индекса n), чија је пројекција на ординатној оси m).

3° ако је $N > n + m$, једна или више страна коефициента негативног, збир пројекција свију тих страна на ординатној оси биће $N - (n + m)$.

Отуд ове теореме:

I. *Функција U има n грана, које за $Z = Z_0$ добијају вредност U_0 и само n грана; док је (Z_0, U_0) општа тачка*; гране прве категорије.

То је теорема *Cauchy*-ева,

II. *Функција U има m грана, које за $Z_0 = Z_0$ добијају вредност $U_1, U_2, \cdots U_m$ различите од U_0, те вредности су корени једначине*

$$\Sigma A_k\ (Z_0, U_0)\ U_\xi^k = 0$$

Доказ ове теореме, који не излази из досадањих посматрања, наићиће се у чл. *51*; гране друге категорије.

III. *Функција U има $N - (m + n)$ грана, за које ће тачка $Z = Z_0$ пол; за нека од тих грана тачка $Z = Z_0$ може бити у исто време и алгебарска критична тачка, те се гране пермутују око те тачке*; гране треће категорије.

Општа теорема: *Док је, дакле, (Z_0, U_0) општа тачка, једначине има свега N грана; тачка $Z = Z_0$ је нула за n, обична тачка за m, а за остале пол (или и алгебарска критична тачка).*

$Б^0$. Тачка Z_0, U_0 је тачка друге класе.

45^0 Коефициенат K_λ је коефициенат једне од ових тачака.

1^0 O_0 координатни почетак, коефициенат K_0.

2^0 O_n, где се завршује страна коефициента *1* доње теме $\bar{\omega}$, коефициенат K_n,

3^0 O_{n+m}, где се завршује страна коефициента *0*, горње теме $\bar{\omega}$, коефициенат K_{n+m},

4^0 O_-, горња лева темена, коефициенат K_-.

5^0 O_N, тачка прва с лева, чија је ордината N, коефициенат K_N.

1^0. Тачка (Z_0, U_0) на линији $K_0 = 0$. Раставимо K_0 на чинитеље. Сваки чинитељ у равни Z_0, U_0 представља извесну линију S[1]. [Ако би чинитељ био $Z_0 - a$, линија нормална на апсцисној оси; а ако би он био $U_0 - b$, линија паралелна са апсцисном осом[.

Уочимо тачку (Z_0, U_0) на једној од линија S. Коефициенат тачке 0_0 је нула, тачка 0_0 не постоји више за фигуративни полигон. Појављује се бар једна нова страна (лева — доња) фигуративног полигона.

Доказаћемо да је свако ново право теме привидно проста тачка, корени његове карактеристичне једначине су нуле, и различити су од коефицијената страна.

Нека је S чинитељ коефициената L и M, који постају темена, кад исечене 0_0. Мораће постојати

---

[1] У ствари раван Z_0, U_0 је поље четвородимензионалне геометрије. Једначина (коефициенат једнак нули)

$$\varphi\ (Z_0, U_0) = \varphi\ (\xi + \tau\iota,\ \xi + \eta\iota) = 0,$$

одакле се добија

$$\psi\ (\xi, \eta, \xi, \tau) + \iota\ \ \Theta\ (\xi, \eta. \xi, \tau) = 0$$

или

$$\psi\ (\xi, \eta. \xi, \tau) = 0,\quad \Theta\ (\xi, \eta, \xi, \tau) = 0$$

је у ствари површина. Али како се, кад су Z и U реалне количине добијају називи: раван и линија, ти су називи задржани.

бар једна тачка, која нема S као чинитељ, иначе ће $S = 0$ бити једно решење дате диференцијалне једначине.

Издвојимо скуп (E'), скуп фигуративних тачака може се сматрати као да је добијен из једног одређеног скупа фигуративних тачака, који одговара тачки (Z_0, U_0) прве класе, трансформацијом $(T_2^0 + T_5)$. Уочимо коефициенат тачке у координатном почетку листа индекса $к$, нека је тај коефициенат (који спада у групу L)

$$L_k = S^h \cdot T,$$

повуцимо из тачке $(0,h)$ у том листу праву коефицијената 1, она ће делити све тачке тога листа на две врсте:

1^0 тачке између те линије и координатног почетка, њихов коефициенат је нула,

2^0 тачке остале, њихов коефициенат није нула; то долази из особине трансформације $(T_2^0 + T_5)$, јер је коефициенат тачке, чији је збир координата g, извод, реда g коефициента тачке у почетку.

Како коефициенат нове стране мора бити већи од n та ће страна пролазити кроз најнижу тачку на листу извесног индекса. Та тачка биће проста тачка. Ако не би била проста, морала би бити са њом бар још једна тачка, али та друга морала би бити на листу чији је индекс мањи но индекс првог листа. Али кад на том листу има једна тачка, на правој коефициента 1 мора бити још тачака, па бар једна још нижа, коју ћемо узети за мало пре посматрану тачку. Кад пак та права коефициента већег од 1 пролази кроз тачку највишу на правој коефициента 1, наступа исто, само се реч нижи замењује речју виши. Увек ће права темена бити једна тачка, на једном простом листу, привидно просте тачке. Може се десити да коефицпенат нове стране буде и јединица, опет ће права темена бити привидно проста тачка.

Дакле у близини тачке друге класе, нове стране имају коефициенте позитивне, једнаке јединици или различите (ово је општи случај), ти су коефициенти по неки пут рационални бројеви, тада су тачке друге класе, тачке око којих се пермутују извесне гране, оне су алгебарске критичне тачке; иначе обичне тачке.

2° Тачка (Z_0, U_0) на линији $K_n = 0$. Исти случај, као и у случају *1°*; само је тачка друге класе увек алгебарска критична тачка јер има страна увек чији је коефициенат већи од нуле а мањи од *1*.

3° Тачка (Z_0, U_0) на линији $K_{n+m} = 0$. K_{n+m} је или константа, или функција само од Z_0. Резултат ће бити сличан. — Нове гране су негативног коефициента, права темена су сва просте тачке.

4° Тачка (Z_0, U_0) на линији $K_{-} = 0$. Случај као и случај *3°*.

5. Тачка (Z_0, U_0) на линији $K_N = 0$. Ако је N једина ордината, K_N је константа. Ако их има више тачка може бити многострука; али је тачка $Z_0 = \mathrm{Const}$ непомична, а гране имају ту тачку за пол.

46° Овим тачкама се могу додати тачке на линијама које припадају скупу (E'). Уочимо једну од тих линија.

Нека је $S = 0$ линија скупа (E') која је пол за неки од коефициената. Множећи целу једначину са S^h (h је ред тога пола), тачка на линији S неће више бити пол за тај коефициенат. Посматрање опште тачке је као и мало пре, а линија $S = 0$ је чинитељ неког од коефицпената, случај чл. 45.

Нека је $S = 0$ линија алгебарских критичних тачака, од трансформације (T_3) и (T_4) уклониће те алгебарске критичне тачке; те ће тачке бити у опште алгебарске критичне тачке и за саму функцију, као и за диференцијалну једначину, која дефинише ту функцију.

Ако је $S = 0$ линија логаритамских или есенцијалних тачака, те ће тачке бити у опште логаритамске и есенцијалне тачке и функције. Скуп тих тачака зваћемо скуп (S).

47°. Дакле све тачке друге класе, покретне у равни Z_0 [тачка из случаја 5_0 је непокретна у равни Z_0] су или обичне, или алгебарске критичне тачке или полови. Изузимају се тачке скупа (S). Алгебарске диференцијалне јединачне немају скупа (S), отуд ова *теорема*.

Ни једна тачка (Z_0, U_0) *покретна у равни* Z_0 *није есенцијални сингуларитет алгебарске диференцијалне једначине.*

То је теорема *Painlevé*-а о непокретности есенцијалних сингуларитета диференцијалних једначина првог реда.

В°. Тачка (Z_0, U_0) је тачка треће класе.

48°. Таква тачка може бити и есенцијални сингуларитет. Те су тачке по дефиницији непокретне тачке.

Између осталих тачака ове класе, понајважније су ове:

1° тачке у којима се секу две линије:

а°) $K_0 = 0$

б°) дискриминанта једначине по U'

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} A_i\ (Z_0, U_0)\ U'^n = 0$$

једнака нули;

Око тих тачака се пермутују гране прве категорије:

2° тачке у којима се секу две линије

а°) $K_n = 0$

б°) дискриминанта једначине по U

$$\sum_{1}^{m}{}_{k} A (Z_0, U_0)\, U^{k} = 0$$

једнака нули.

Око тих тачака се пермутују гране друге категорије међу собом и са гранама прве.

и т. д.

49°. Уочимо још неке специјалне тачке

$(Z_0 = \infty,\ U_0$ ма какво), (Z_0 ма какво, $U_0 = \infty)$

и $(Z_0 = \infty,\ U_0 = \infty)$.

Трансформација T_4 коефицента -1 претвара тачку ($Z_0 = \infty$, U_0 ма какво) у тачку ($Z_0 = 0$, U_0 ма какво). Трансформација (T_3) коефицента -1 претвара тачку (Z_0 ма какво, $U_0 = \infty$) у тачку (Z_0 ма какво, $U_0 = 0$). Трансформација (T_3) коефицента -1, па за тим трансформација (T_4) коефицента -1 (или обрнуто) претвара тачку ($Z_0 = \infty$, $U_0 = \infty$) у тачку ($Z_0 = 0$, $U_0 = 0$).

50. Да би одговорили на постављена питања у чл. 41°, уочимо једну грану и њен ред. Нека је (Z_0, U_0) ма која тачка у равни Z_0, U_0.

Уочимо за тим све тачке друге и треће класе и све тачке скупа (E'), скуп свих тих тачака зваћемо скуп (T).

Повуцимо у равни Z_0 какву линију L од тачке $Z_0 = a$ до тачке $Z_0 = A$. У тачки ($Z_0 = a$, $U_0 = b$) имамо ред посматране гране. Узев на линији L_0 неку тачку $Z = a_1$ близу тачке a_0 такву да нова вредност функције U на пр. b_1, буде таква да тачка (a_1, b_1), док Z варира од a_0 до a_1, не прође ни кроз једну тачку скупа T; ред у тој тачки (a_1, b_1) добија се обичним аналитичним продужењем; ред је у тој тачки истог облика, само су му коефициенти измењени. Пустимо тачку (a_1, b_1) да иде све даље (т. ј. нека се a_1 по линији L све више удаљује од a_0) докле тачка (a_1, b_1) не постане тачка скупа (T). Нека је то тачка $(Z_т, U_т)$.

Ако је тачка $(Z_т, U_т)$ тачка у чијој близини не познајемо гране [такве су тачке скупа (S)] из те тачке повућићемо расек (coupure), који ће овде бити раван (јер је поље Z, U четвородимензионално).

Ако се познају гране у близини тачке $(Z_т U_т)$, уочићемо гране функције U у близини тачке $(Z_т, U_т)$ и издвојити оне гране, које, кад Z варира од $Z_т$ до Z_0 путем L, у тачки $Z_0 = a$ добијају вредност $U_0 = b$. Све те гране, које добијају вредност $U = b$ за $Z = a$, су продужење посматране гране иза тачке $Z_т$ на путу L. Од тачке $Z_г$ слободни смо изабрати коју хоћемо од тих грана, та је тачка критична тачка за посматрану грану. Ако је само једна таква грана, та је тачка тада пол или какав други сингуларитет, али не критична тачка.

51°. У скупу (T) има неких нарочито важних линија и тачака, то су линије и тачке око којих се пермутују гране прве са гранама друге категорије. То̂ су линије дефинисане једначином

$$K_n(Z_0, U_0) = 0.$$

Ова једначина m тог степена по U_0 (ако се претпостави, као раније, да је коефициенат од $\frac{dU}{dZ}$ степена m по U) има m корена, дакле има m линија.

Пошавши са извесном граном, која за $Z = Z_0$ добија вредност U_0, и обишавши око једне од ових m линија па вративши се у тачку Z_0, не обилазећи ни око једне друге, доћићемо у Z_0 са неком другом вредношћу U_i. Како таквих линија има m, доћићемо са m разних вредности (у опште) m грана друге категорије:

$$U_1, \ U_2, \cdots \quad U_m.$$

Али ако уочимо какву другу грану, која у тачки Z_0 добија вредност U_0, и како има тачака које пермутују међу собом гране прве категорије, ми можемо пермутовати ту другу грану са првом, па ову с неком од грана друге категорије, дакле и друга (па и трећа и свака) грана прве категорије пермутује се са гранама друге категорије.

52°. Ред који представља неку грану, по самој дефиницији треба да буде конвергентан. Нека је $N(z)$ асимптота реда n, n је такав број, да $N(z)$ тежи нули кад z тежи нули. По самој дефиницији асимптоте, ако је $N(z)$ асимптота првог реда функције s (види чл. 32), и ако ставимо

$$s = N(z) + \xi$$

ξ треба да буде вишег реда но N [услов $Б^0$ чл. 15] т.ј. пошто N, по претпоставци тежи нули, мора и ξ тежити нули кад z тежи нули, т.ј. кад тачка Z тежи тачки Z_0.

Како је (чл. 33°)

$$u = \Phi(z) + \Psi(z) + - - \quad + \Theta(z) + N(z) + \xi$$

ред за u т.ј. $U - U_0$ биће конвергентан у близини тачке $z = 0$ т.ј. у близини тачке Z_0.

Други доказ могао би се добити помоћу *горње функције* (fonction majorante). После извесног броја трансформација добија се једна једина асимптота, која одговара једној јединој страни полигона, чија је пројекција на ординатној оси *1*. Претпоставићемо да је коефициенат те стране цео број и да је скуп фигуративних тачака трансформацијама (T_3) и (T_4) претворен у скуп, чије су координате цели бројеви. Помножимо једначину извесним степеном од z, т.ј. померимо цео полигон у десно тако, да та страна, која излази на апсцисну осу, пролази кроз извесну тачку F. Одредимо тачку F' десно од почетка, тако [ако треба послужити се и трансформацијама (T_3) и (T_4)] да посматрана страна продужена пролази кроз координатни почетак листа чији је индекс највиши. Затим из тачака тога листа $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$ . . . . . повуцимо праве паралелне посматраној страни. Те ће праве изделити скуп фигуративних тачака на неколико зона. Зону κ чине све фигуративне тачке које леже на правој која пролази кроз тачку $(0, \kappa)$ и све лево од ње које не припадају којој другој зони. Збир модула коефициената свих фигуративних тачака зоне κ, узмимо за коефициенат тачке $(0, \kappa)$ на листу највишег индекса. У тачки $(0, 0)$ тог листа узмимо онај коефициенат који ће трансформацијом (T_2) коефициента једнаког коефициенту посматране стране, дати другој тачки те стране њен коефициенат. Скуп тих тачака на месту највишег индекса и тачка F дефинисаће нову функцију $\mathfrak{z}$, која ће бити горња функција функције ξ. Том скупу одговараће диференцијална једначина

$$\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dz}\right)^n \Sigma_\kappa\, A_\kappa\, \mathfrak{z}^\kappa + B\, z^l = 0$$

одакле се добија

$$d\mathfrak{z}\,\sqrt[n]{\Sigma_\kappa\, A_\kappa\, \mathfrak{z}^\kappa} = dz\,\sqrt[n]{-B\, z^l}$$

једно решење $\mathfrak{z}$ је холоморфна функција у близини тачке $z = 0$ и тежи нули ($f > 0$ по услову за F).

Дакле ξ је холоморфна функција у близини тачке $Z = Z_0$, према томе јер ред за u т.ј. $U - U_0$ конвергентан у близи тачке Z_0.

II. Покретност и непокретност нула и бесконачница (теорема М. Петровића).

53°. Посматрања трију класа тачака (Z_0, U_0) доводи до следећих шест теорема, о покретности нула и бесконачница.

1°. *Бесконачнице функције* (полови и алгебарске критичне тачке у којима је функција бескрајна) *дефинисане диференцијалном једначином првог реда могу бити покретне, само ако има левих горњих страна* (а то је случај кад је $N > n + m$, чл. 44°).

2°. *Ред покретне бесконачнице је коефициенат леве — горње стране умножен са — 1.*

3°. *Непокретна бесконачница* (која није бескрајно далеко од z_0) *је корен једначина*

$$K_{n+m} = 0, \quad K_{-} = 0 \text{ и } K_N = 0.$$

4°. *Нуле функције дефинисане диференцијалном једначином првог реда могу бити покретне, само ако има левих — доњих страна.*

5°. *Ред покретне нуле је коефициенат леве — доње стране.*

6°. *Непокретне нуле* (које нису у бескрајности) *су корен једначина*

$$K_n = 0, \; L = 0, \text{ и } M = 0$$

(L и M су коефициенти тачака, које постају темена за специјалну вредност $U_0 = 0$).

Све ове теореме добио је М. Петровић.[1]) Однос између фигуративног полигона М. Петровића и овога у овом делу налази се у чл. 12.

III. Покретност и непокретност алгебарских критичних тачака.

(Теорема L. Fuchs-а и P. Painlevé-а).

54⁰. Даље последице посматрања трију класа тачака су ове две теореме о непокретности и покретности алгебарских критичних тачака:

1⁰. *Да би диференцијална једначина првог реда имала непокретне алгебарске критичне тачке потребно је и довољно, да ни за једну тачку прве или друге класе, нема ни једну леву страну, чији коефициенат не би био цео број, позитиван или негативан* (т.ј. сви коефициенти левих страна треба да су цели бројеви).

2⁰. *Да би пак диференцијална једначина првог реда имала покретних алгебарских критичних тачака, око којих се пермутује q грана, потребно је и довољно да полигон има (било за тачке прве било за тачке друге класе) бар једну страну чији је коефициенат рационалан број* $\frac{p}{q}$ (q и p релативно прости бројеви).

L. Fuchs[2] је 1884 године дао једну теорему која се зове *Fuchs*-ова теорема о непокретности алгебарских критичних тачака. Та теорема гласи:

Диференцијална једначина првог реда

$$(F) \qquad u'^m + A_{m-1}\, u'^{m-1} + \cdots + A_1 u' + A_0 = \\ = F\,(u', u, z) = o$$

---

[1]) В. белешку на стр., 2. р. 20—25.

[2]) Fuchs: Über Differentialgleichungen deren integrale feste Verzveigungspunkte besitzen. (Sitzungblerichte der Akademie zu Berlin, 1884. S 690/710).

(A су полиноми по u и z.) имаће непокретне алгебарске критичне тачке ако су задовољени услови:

$$1^0 \qquad A_{m-1},\ A_{m-2}, \cdots\ A_2,\ A_1,\ A_0$$

су полиноми по u степена.

$$2\ ,\ \ 4, \cdots 2m - 4,\ 2m - 2,\ 2m.$$

2° Ако је $D(u, z)$ дискриминанта једначине (F) по u'; $u = g(z)$ корен једначине

$$D(u,z) = o$$

треба $u = g(z)$ да буде сингуларни интеграл једначине (F).

3° Кад год v од m листова *Rîemann*-ове површине (u', u) једначине (F) имају заједничку рачвалицу, треба да корен $u = g(z)$ једначине

$$F(g'(z),\ u,\ z) = o$$

буде бар реда $v - 1$.

Овај последњи услов заменио је *H. Poincaré*[1]) другим, а *P. Painlevé*[2]) новим још згоднијим за употребу тај услов гласи:

Ако се v грана u пермутују око $u - g(z)$ треба да разлика $u' - g'(z)$ за те гране буде бар реда $v - 1$, у односу на $[u - g(z)]^{\frac{1}{v}}$.

Први услов *Fuchs*-ов исказује да коефициенти левих — горњих страна треба да буду цели бројеви. Други и трећи услов исказују да и коефициенти левих — доњих страна за тачке прве класе, као и за тачке

---

[1]) H. Poincaré: Sur un théorème de M^r. *Fuchs* (Acta Mathematica, t. VII, p. 1—32); у овом раду је Poincaré доказао да се једначине, које задовољавају горње услове, могу или свести на *Riccati*-еву једначину или интегралити.

[2]) P. Painlevé: Leçons de Stockholm p. 58—60.

друге класе, (дискриминанта једнака нули даје тачке друге класе) буду тако исто цели бројеви.

И ако диференцијалне једначине првог реда са непокретним алгебарским критичним тачкама нису садржале ни једну једначину, која не би била или сводљива на *Riccati*-еву једначину или интеграљива, ипак је овај рад отворио читаво поље рада.

P. Painlevé је прихватио тај рад и продужио га на једначинама вишег реда[1]) а за њим читава школа млађих.

Али је *P. Paulevé* и генералисао питање које је постовио *L. Fuchs*. Он је поставио питање о покретности алгебарских критичних тачака и добио теореме,[2]) које одговарају другој теореми.

* * *

---

[1]) P. Painlevé: Sur les équations différentielles, du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme (Acta Mathematica· t. 25, 1902 p. 1—85; Bul. de la Soc. math. de France t. 28, 1900, p. 201/61.

[2]) Painlevé: Leçons de Stockholm: Introduction § 7, 8 et 9; Leçons VI à X, p. 82—172.

ИСПРАВКЕ

Сем ситнијих грешака, које сам читалац може исправити има и крупнијих, као:

стр.	23, 37 и 38	у	обрасцима	место	$Б$	треба	да	стоји	$\boldsymbol{B}$
«	36 и 37	«	«	«	$\boldsymbol{A}$	«	«	«	A
«	45	«	2 реду оздо	«	θ	«	«	«	O полигона (z, u)
«	53	«	обрасцу (22)	«	βi	«	«	«	β_1
«	«	«	« (23)	«	β_2	«	«	«	β_0
«	78	«	10 реду оздо	«	50	«	«	«	51
«	95	«	7 « «	«	месту	«	«	»	листу

Затим треба *додати*:

стр. 46 у 5 реду озго после (z, u): 3^0 према степену обрасца (17) ако је:

$d > 1$, $(1-d < 0)$ страна коефициента d треба да буде у полигону (u, w) са исте стране са које се у полигону (z, u) налази страна коефициента 0.

стр. 94 на крају члана 51.:

Претварањем посматраног скупа фигуративних тачака у други трансформацијом (T_1) коефицијента μ, посматране гране друге категорије постају гране:

прве категорије ако је $\mu < 0$

треће категорије ако је $\mu > 0$

Ово је други начин за изналажење грана друге категорије.