УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

УЧИТЕЉСКИ ФАКУЛТЕТ

Оливера Ј. Ђокић

РЕАЛНО ОКРУЖЕЊЕ У ПОЧЕТНОЈ НАСТАВИ ГЕОМЕТРИЈЕ

докторска дисертација

Београд, 2013

UNIVERZITET U BEOGRADU

UČITELJSKI FAKULTET

Olivera J. Đokić

REALNO OKRUŽENJE U POČETNOJ NASTAVI GEOMETRIJE

doktorska disertacija

Beograd, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE

TEACHERS' TRAINING FACULTY

Olivera J. Đokić

REALISTIC MATHEMATICS IN TEACHING AND LEARNING ELEMENTARY GEOMETRY

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013

Ментор

Проф. др Мирко Дејић, редовни професор
Учитељски факултет у Београду

Чланови Комисије

Проф. др Војислав Петровић, редовни професор
Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику, Нови Сад

Проф. др Вељко Банђур, редовни професор
Учитељски факултет у Београду

Проф. др Јасмина Милинковић, ванредни професор
Учитељски факултет у Београду

Датум одбране
____

Реално окружење у почетној настави геометрије

Резиме

Основни циљ почетне наставе математике је да ученике математички описменимо, а заступници смо гледишта да су циљеви, поред наведеног, и стварање стања упитаности, тежња ка стварању истраживачког духа ученика, као и осећаја за успостављање веза формалне математике са једне стране са појавама из реалног окружења са друге. Ово нас је довело до реалног окружења као једног од могућих наставних приступа који успоставља такве везе.

Рад се састоји од четири основна поглавља са више подпоглавља. Бавили смо се теоријским и експерименталним испитивањем и проучавањем ефеката наставног приступа реално окружење у почетној настави геометрије базираног на теорији реалистичног математичког образовања подржан пропратним иновативним моделом уџбеника.

Издвојили смо три циља рада. Први се односио на проучавање теоријских основа (геометријских и дидактичко-методичких) употребом методе теоријске анализе. Указали смо на неке међународне и домаће пројекте које у својим концепцијама математичког образовања за основно полазиште користе реално окружење. Други циљ односио се на представљање резултата експерименталног дела нашег истраживања којим смо испитали на који начин реално окружење у геометријским садржајима IV разреда почетне наставе математике утиче на постигнућа ученика (по нивоима знања) и резоновање, као и ученичку мотивацију за учење. Овде смо употребили експерименталну методу. И, коначно, трећи циљ односио се на представљање иновативног модела уџбеника као практичне имплементације који подржава конструктивистички приступ настави у реалном окружењу, а указали смо и на кључне резултате и њихове методичке импликације на почетну наставу математике добијене на основу експерименталног истраживања.

Наше истраживање било је усмерено на откривање пута шта води ученике до појмова са значењем од, са једне стране, визуелних представа до, са друге стране, вербалних уопштавања и анализа, наглашавајући повезаност визуелног и вербалног процеса као значајне у ученичком раду и изграђивању математичких појмова у математичкој свести ученика. На тој основи следили смо идеје изграђивања и елаборирања постојеће интуиције о простору, развијајући безусловно и геометријску интуицију. Додајући овоме и конструктивистички поглед, у истраживању смо се бавили развојем геометријских појмова и геометријског мишљења у реалистичном окружењу у коме се учи. Испитивали смо развој ученичких знања у реалистичном окружењу, као и како учитељи ово користе за учење и како се одвија тај процес.

Наводимо резултате истраживања уз битна образложења и закључке. Иновативним моделом уџбеника који подржава реалистичан приступ, моделима и поступцима тежили смо да наставу учинимо што ефикаснијом и унапредимо нивое постигнућа ученика. Резултати потврђују општу хипотезу да увођење реалног окружења и пропратног иновативног уџбеника позитивно утиче на постигнућа и мотивацији ученика IV разреда у геометрији чиме је потврђен ефекат наставног приступа реално окружење. Ученици који су учили по експерименталном програму успешнији су у задацима чињеница од ученика контролне групе, али су остали на истом нивоу у задацима примене знања док су

ученици контролне групе показали значајно лошије резултате и тиме делимично потврдили једну од постављених помоћних хипотеза. Ученици експерименталне групе у задацима примене знања имају значајно боље резултате у математичком контексту, али не и у реалном. Али је зато примена одабраног приступа створила већу мотивисаност ученика за учење геометријских садржаја у почетној настави чиме је потврђена једна од помоћних хипотеза. Мишљење и учитеља и ученика о изабраном наставном приступу је позитивно, а сам уџбеник ученици су препознали као подстицајан за учење при чему је створио пријатну атмосферу и пробудио повећану мотивисаност и спремност за израду тежих проблемских задатака чиме су потврђене неке од помоћних хипотеза. Мишљења смо да би ово у неком дугорочнијем приступу показало већи ефекат експерименталног програма.

Експлицитно и систематско вођење разговора карактеристика је будућности у стварању културне и друштвене конструкције знања које обезбеђује активну примену знања. У учионици, експеримент подстиче рану геометризацију симулирајући стварни окружујући свет. Овај процес илуструје практично знање које ствара потребу за замишљеним сликама и резултира стварањем геометријског алата. За развој важног когнитивног процеса интуиције, хипотетичког резоновања и рада са више различитих хипотеза и стратегија ученици бивају систематски укључени у ‘реалистичне активности’. Отуда је оправдано унети измене у постојећи математички курикулум, а у учионичкој пракси неговати наставни приступ у реалном окружењу (као један од више могућих) подржан квалитетним иновативним уџбеником. Са посматраних часова стекли смо јасну слику да је учитеље потребно оспособити за системско вођење разговора и учионички дискурс, те понудити методички добро осмишљене и разрађене програмске активности.

Отворили смо и питања за даља истраживања у настави геометрије која је све више усмерена на развој способности просторног резоновања и унапређивању искустава при мерењу дужине, површине и запремине, посебно у почетној настави.

Кључне речи: простор, просторно резоновање, уџбеник почетне наставе математике, нивои знања, мотивација за учење, реалистично математичко образовање, реалистична геометрија, учење поновним откривањем.

Научна област: Дидактичко-методичке науке

Ужа научна област: Методика наставе математике

UDK 371.3::514

37.016:514-028.31

Realistic Mathematics In Teaching And Learning Elementary Geometry

Abstract

The main aim of teaching elementary mathematics is to make students mathematically literate. This is why we advocate the view that aims, apart from the stated ones, are, as well, creating the states of curiosity, tendency towards crating researching minds of students and the sense for creating connections between formal Mathematics on one side and appearances from real environment on the other side. This has led us to realistic mathematics as one of the possible teaching approaches towards creating such a connection.

There are four basic chapters and many sub-chapters. We have done both theoretical and experimental research and studying effects of the teaching approach to realistic mathematics in teaching elementary geometry based on the theory of realistic mathematical education supported by the additional innovative model of the course book.

We have selected three aims of the paper. The first refers to studying theoretical bases (geometrical and didactic-methodological) by using the method of theoretical analysis. We have pointed at some international and domestic projects, which in their concepts of mathematical education, use realistic mathematics for their starting point. The second aim refers to presenting results of the experimental part of our research which is aimed at the examining ways in which realistic mathematics in geometry contents of the fourth grade of teaching elementary Mathematics influences the students' achievements (according to the levels of knowledge) and reasoning, as well as students' motivation for learning. We have used the experiential method here. Finally, the third aim refers to referring the innovative model of the textbook as practical implementation, which supports constructivist approach in teaching realistic mathematics, and we pointed at key results and their methodological implications on teaching elementary Mathematics gained according to experiential research.

Our research is directed to revealing to the way, which leads the students to terms with meaning, from, on one side, visual concepts to, on the other hand verbal generalizations and analyses, stressing the connection between visual and verbal process as an important issue in mathematical mind of students. On this basis, we followed the ideas of building up and elaborating the existing intuition about space, developing, unconditionally geometrical intuition. Adding constructivist approach, in the research we have dealt with development of geometrical terms and geometrical thinking in realistic mathematics in which students learn. We have studies development of students' knowledge in realistic mathematics, as well as how teachers use this from learning and how this process occurs.

We are stating results of the research with significant explanations and conclusions. Innovative model of a textbook, which supports realistic mathematics approach, by models and actions, we have tended to make teaching more efficient and to improve the levels of students' achievements. Results confirm the general hypothesis that introducing the realistic mathematics, additional innovative textbook, positively influences achievements, and motivation of students of the 4th grade in Geometry and in this way, we confirm the effect of teaching approach into realistic mathematics. Students who learned according to the experimental programme are more successful in factual tasks from the control group students, but these are at the same level in the tasks of knowledge application, and the students of the control group showed much worse

results and in this way partially confirmed one of the stated additional hypotheses. Students of the experimental group, in the tasks of knowledge application, have significantly better results in mathematical context, but this is not the case in the realistic one. However, application of the chosen approach created better motivation of students for learning geometrical contents in elementary teaching and one of the additional hypotheses was approved. Attitudes of both teachers and students about the chosen teaching approach is positive, and students recognized the very textbook as an encouraging tool for learning and created pleasant atmosphere and provoked better motivation and readiness for doing problem solving tasks and some additional hypotheses were approved. Our belief is that in a long-term approach, this will prove a greater effect of experimental programme.

Explicit and systematically leading the conversation is the characteristic of future in creating cultural and social construction of knowledge, which enables active application of knowledge. In the classroom, the experiment encourages early adoption of geometrical skills, creating simulation of the real world. This process illustrates practical knowledge, which creates the need for imaginative pictures and results crating geometrical tools. Developing significant cognitive process of intuition, hypothetical reasoning and work with different hypotheses and strategies, students become involved into ‘realistic activities’. This is why it is justifiable to introduce changes into the existing mathematical curriculum, in the teaching praxis to support the teaching process in realistic mathematics (as one of the several possible ones), supported by the quality innovative textbook. The observed lessons have given us a clear picture that teachers should be trained for systematically leading a conversation and classroom discourse, and offer methodologically well created and activated programmed activities.

We have opened some issues for further research in teaching geometry, which more directed to development of abilities and special reasoning and improving experience when measuring length, area and volume, particularly in elementary teaching.

Key words: space, space reasoning, textbook for elementary Mathematics, levels of knowledge, motivation for learning, realistic mathematics education, realistic geometry, guided reinvention.

Academic Expertise: Didactical-methodological Sciences

Field of Academic Expertise: Teaching Methods in Mathematics

UDK 371.3::514

37.016:514-028.31

Садржај

Нисам ни знао да је геометрија тако забавна!
Лука К., IV разред

ОШ „Милан Ђ. Милићевић“ у Београду

I УВОД

Приликом разматрања перспектива наставе геометрије за XXI век у оквиру ICMI студије (*International Commission on Mathematical Instruction*), јасно се издваја став да основношколска настава геометрије не би требало да је сведена само на увођење појмова / термина (Villani 1998: 321). Уместо тога пожељно би било да помогне ученицима у побољшавању:

1. способности *просторног резоновања* и
2. унапређивању искустава при *мерењу дужине, површине и запремине*, посебно у почетној настави.

Вежбе употребом лењира, шестара и угломера увек су пожељне, упркос могућем коришћењу компјутерских помагала.

Велики руски математичар Лобачевски (Н. И. Лобаче́вский 1792–1856) наглашавао је важну улогу методике наставе математике (Manturov i dr. 1969). Централно место важних тема у настави математике средње школе дато је у девет тачака, а ми наводимо оне које се директно односе на наше истраживање. Први је појам граничне вредности на основу којег се гради појам извода, интеграла и мерења геометријских величина – *дужине, површине* и *запремине* и други је развијање *способности просторног представљања* и *апстрактног мишљења* код ученика. Ако се хоће створити добра основа за кретање по спиралном курикулуму за два наведена појма, онда је битно упориште за ове појмове у оквиру основне школе, па и уже – у почетној настави.

Настава геометрије не би требало да се бави само дводимензионим облицима. Штавише, она не би требало да се бави само 'микропростором' на страни радне свеске или уџбеника. Баш супротно, и посебно током почетних разреда, оно чиме би настава геометрије требало да се бави јесте пажљиво посматрање тродимензионе окружујуће реалности. Пажња усмерена на тродимензионе ситуације, употпуњена (и тиме обогаћена) требало би да се настави и током старијег узраста, заједно са фокусом на однос између тродимензионог простора и његове дводимензионе раванске репрезентације –

објекти такви какви јесу и тако како се појављују (на ретини наших очију[1], на листу папира, на екрану компјутера или ТВ-а). У овом контексту неприродно је да се бавимо искључиво метричким аспектом геометрије, већ и афиним својствима равни, као и паралелном пројекцијом простора. Неки ученици могу да се баве, бар у почетној форми, централном пројекцијом[2] (Ibid).

Наведимо наше разлоге опредељења за одабрану тему дисертације.

Истакнимо важан став о настави геометрије. Настава геометрије има за циљ развој способности интерпретације фигуралних информација и визуелног процесовања и осећаја о просторним облицима, својствима и њиховим међусобним односима. Идентификују се два основна елемента у геометрији (Bishop 1980, Harris 1981, McGee 1979, према Clements & Battista 1992: 444). Први, просторна *оријентација* омогућава нам уочавање позиције једног објекта у односу на друге. На пример, проналажење нечијег пута у згради. Други, просторна *визуелизација* / *сагледавање* је разумевање и визуелно представљање последица промена односно (замишљених) покрета објеката из дво– и тро– димензионог простора. Оно подразумева разумевање, интерпретацију и вербални опис визуелне фигуралне репрезентације. Многи истраживачи дебатовали су о ова два елемента (Clements 1979, Eliot 1987, према Clements & Battista 1992: 444). Тако Бишоп предлаже две просторне компоненте за које он верује да су посебно релевантне за наставу математике (Ibid). Прва је способност интерпретације фигуралних информација и она укључује разумевање визуелне репрезентације и речника који се формира. Друга је способност визуелног процесовања, укључујући манипулацију и транслацију визуелних репрезентација и слика и транслацију апстрактних односа у визуелну репрезентацију. Искуства све већег броја математичких курикулума усмерена су на развој осећаја о простору – термин којим ћемо се ми служити, јер се у литератури чешће сусреће, је *просторно резоновање* – и то путем геометријских инструкција подржаних

[1] Баш како је писао један од највећих научника математичар Поенкаре (H. Poincaré 1854 – 1912) у свом делу *Наука и хипотеза*. Бавећи се појмом простора (визуелни, тактилни и моторички ентитети), Поенкаре разматра формирање слике објекта из реалног окружења (на ретини наших очију), о чему ћемо касније детаљније писати.

[2] Такве задатке смо се усудили увести у експериментални део нашег истраживања, у оквиру теста геометријских способности ученика 4. разреда основне школе.

уџбеником математике (Del Grande 1990, Del Grande & Morrow 1993, Hoffer 1977, Yaminskaya 1978, de Moor 1997, Niss 1996, према Fauzan 2002: 24). Зато је за нас *прво* важно питање **појам простора и просторно резоновање**.

Једно од кључних питања дидактичке теорије математике и њој припадајуће наставне праксе јесте успешност организације и извођења наставе математике. У обзир се узимају многобројни фактори, а неки од најчешће помињаних (и анализираних) су методе и облици рада, организација наставе, личност наставника. Овим питањима смо се већ раније бавили, указујући на још два суштински значајна елемента: први је настави програм, а други уџбеник (Милинковић, Ђокић и Дејић 2008, Milinković i Đokić 2009a, Ђокић и Дејић 2008). Колико је значајан наставни програм говори и чињеница да се реформисање у образовању генерално и најчешће своди на позив за реформисање наставних програма. Наше интересовање усмерено је на други елемент – често запостављен – то је **уџбеник**. Овде пре свега мислимо на дидактичко-методичко упутство наставног програма и његову имплементацију кроз уџбеник тј. свеобухватно мислимо на програмске активности. Може се рећи да је „раширено (имплицитно присутно) гледиште да *квалитетан* уџбеник може и мора да буде одговарајућа подршка у наставном поступку без обзира на одабрани приступ настави математике" (Милинковић, Ђокић и Дејић 2008). У раду ћемо се бавити одређеним наставним приступом – *реалним окружењем* у уџбенику почетне наставе математике.

У дидактичкој теорији уџбеник спада у основно наставно средство. У монографијима посвећеним савременом уџбенику полазиште је да је он „основна, главна и обавезна школска књига" (Требјешанин и Лазаревић ур. 2001). Уџбеник, стога, има огроман потенцијал утицаја на учениково сазнање и развој. Од уџбеника се очекује да буде потпора у процесу постизања образовних, развојних и социјализацијских циљева формалног образовања и наставе. У земљама које се налазе у врху према међународним тестирањима у математичком образовању уџбеник јесте један од битних носилаца реформи, а примењени наставни приступ је реално окружење (Heuvel-Panhuizen 2001).

За уџбеничке иновативне моделе у многим земљама постоје иницијативе вредне пажње (Villani 1998). Али оно што је уочено јесу превише честе курикуларне иновације постављене тако да се надовезују на претходне традиционалне теме и стога генеришу понављања и недостатак обухватне повезаности. Као смернице за ауторе уџбеника наводи се избегавање путева акумулације у изради текстова и више селекције у избору делова који се повезују и који се тако постављају да буду јасно разумљиви и учитељима и ученицима. На крају, за већину иновативних тема, са старом дидактичком традицијом, препоручује се одговарајућа стручна литература у виду приручника за учитеље (што је већ искуство у неким земљама) и посебних публикација намењених студентима / будућим учитељима за оспособљавање током студирања кроз методику предмета (истиче се велика улога факултета у професионалном обучавању).

Сагледавали смо значај уџбеника са аспекта развоја мишљења. На IV конгресу европског удружења истраживача математичког образовања са становишта истраживања геометријског мишљења наглашен је значај уџбеника као „круцијалног инструмента у учењу и подучавању … значајно оруђе чак и у ери нових технологија“ (Gutierrez et al. 2005: 726). Отуда ће за нас бити важно питање како уџбеником подстаћи развој геометријског мишљења тј. како формирати дечју ‘навика ума’ на геометријско резоновање које иде ка системском мишљењу (Hershkowitz 1998, Steen 1999, Prenger 2005, Diezmann et al. 2002).

Образовни систем, као велики систем, инертан је и као такав тешко се мења и изводи из затеченог стања. Мера неуређености једног система је ентропија, а у образовном систему она је присутна. Средство које може битно да утиче на промену таквог стања система јесте уџбеник. Зато је за нас *друго* важно питање **уџбеник у почетној настави математике.**

Да би се учење ‘десило’ потребно је пробудити (интелектуално активирати) ученика, пробудити његову радозналост стварајући сазнајни конфликт – ученику је јасно где јесте и где жели да буде (Woolfolk 1998). На овај начин омогућавамо да се ученикова спонтана знања употпуне, коригују, повежу и надограде, подигну на виши ниво апстрактних и умрежених научних знања.

Мотивацију за учење математике, спољашњу и унутрашњу, прихватамо као значајне компоненте у достизању циља *учења* и *обучавања с разумевањем*, што је идеја коју пратимо по Р. Скемпу (Skemp 1986). Озбиљно је питање како код већине ученика развити интересовање за геометрију и постићи бољи успех из ове области математике. Најважнији од њих по Глејзеру је промена водећих циљева наставе геометрије у школи (Глејзер 1997). Какви год да се циљеви декларишу у наставном програму, школски уџбеник и традиција у настави доводе до представе да је основни циљ наставе геометрије, па и почетне наставе геометрије, развијање логичког мишљења код ученика. Тај циљ се претвара у задатак недостижан на раном степену образовања.

Како учење путем (поновног) откривања одговара природи процеса учења, као и природи науке (није просто преношење и усвајање готових знања, већ активно учешће ученика у стицању знања заснованих на решавању проблема), то је за наше истраживање занимљиво сагледати како учење откривањем развија интересовање за учење геометријских садржаја. Зато је за нас *треће* важно питање **мотивација за учење**.

А какво је стање у нашим уџбеницима? У спроведеној анализи нових уџбеника који су се појавили за прва три разреда почетне наставе математике (чије ћемо извештаје у нашој анализи користити) у периоду од 2003. до 2006. године као доминантан тип интелектуалног активирања ученика уочено је *меморисање* (Плут ур. 2007). Оно се негује на различите начине, а најчешће присутни и издвојени су: а) увођење нових појмова у 'готовом' облику и б) дуготрајно инсистирање на примени шаблона у решавању задатака (механичко решавање задатака без увида у математички поступак/процедуру/појам). Уколико ова два начина активирања ученика заузимају већи део наставе, онда за процес овладавања све вишим нивоима знања – који би требало да буде постепен и захтева време – нема места или је веома мало присутан у настави.

Уочен је и другачији модел наставе у којима се нови појмови уводе преко проблемске ситуације. *Проблематизација* је један од начина усвајања нових знања или унапређивања постојећих на сложенији ниво који омогућава ученицима да самостално долазе до сазнања вођени од стране учитеља (Ibid). Ово би значило да ученици разумеју математички поступак.

Често су присутни садржаји који се *повезују* са искуством детета, са појмовима и садржајима из других предмета или се користе као контекст (оквир) у који се смештају математички захтеви. Видљив је напор да се што више задатака смести у реалан животни контекст. Међутим, дешава се да су покушаји неуспешни. Проблем је, наиме, у избору ситуација из свакодневног живота (оквир задатка) које дају повод да се реагује математичким језиком и записом симболима. Овај аспект наставе математике је у новијим уџбеницима све више присутан, али код нас недовољно испитан.

Процењивање ученичких постигнућа се у последње две деценије изводи у два смера (Кузмановић и Павловић-Бабић 2011). Један је формативно процењивање, процењивање у функцији учења, а друго је стандардизовани тестови знања чији је циљ добијање података који ће послужити образовним властима приликом планирања образовне политике. Стога се изводе национална тестирања (испитује се степен остварености образовних стандарда ученичких постигнућа; Министарство просвете 2006, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања 2011) и међународна тестирања (процењује се успешност образовних система; TIMSS, PISA и др.).

Приступи учењу развијани средином XX века поунудили су концептуални оквир за развијање нових начина (модела) процењивања образовних постигнућа ученика (Ibid). Тако према когнитивној теорији, учење је сложена когнитивна активност, а стицање знања „никако се не може свести на акумулирање чињеничних информација и рутинских процедура, већ подразумева способност интеграције различитих знања, вештина и процедура на начине који омогућавају ефикасно решавање проблема“ (Ibid: 76). У раду ћемо се бавити једним од главних принципа когнитивне теорије о ученичком активном конструисању знања и то разумевањем и повезивањем нових информација са претходно стеченим знањима. Фокус је на типовима или врстама знања, а смисао оцењивања је не само да се утврди шта ученик зна, већ и да се процени како и под којим условима он може и уме да примени своја знања. Тако Фајгељ интерпретирајући Ресника наводи да би уместо о мерењу требало говорити о извођењу закључака на основу онога што опажамо (Fajgelj 2003, према Кузмановић и Павловић-Бабић 2011: 77). У овој промени парадигме у мерењу образовних постигнућа ученика говори се о процењивању као о систему са међусобно повезаним елементима когниције (теорија о томе шта ученици знају и како изграђују компетенције у појединим доменима), опсервације (задаци или ситуације посредством којих се прикупљају подаци о постигнућима) и интерпретације (метод за извођење закључака из опсервација) (Pelligrino et al. 2001, према Кузмановић и Павловић-Бабић 2011: 77).

Математичка знања постају незаменљив део савременог институционализованог образовања сваког појединца, без обзира на ниво и врсту образовања које појединац стиче. Све више се говори о непосредној или посредној *примени математичких знања*, и то у различитим областима људског живота. Све више се говори и о примени методологије математике, математичком начину мишљења и различитим облицима сазнавања из области математике који се примењују у свакодневном животу. Математичка знања и умења користе се у многобројним конкретним ситуацијама, у ситуацијама из свакодневног живота и изузетно су важна у интелектуалном развоју сваког појединца, с једне стране, а значајна су и за технолошки развој савременог друштва, с друге стране. У документу Европске комисије као један од важних задатака у актуелној реформи образовних система наводи се повећање интересовања за математику и постигнућа у математици (Европска комисија 2005). Да би се омогућиле што боље припреме и извођење одговарајућих промена унутар система васпитања и образовања, значајно место заузимају међународна истраживања образовних постигнућа ученика. Одлука да се у оквиру међународних истраживања TIMSS 2007[3] и PISA 2006[4] посвети велики простор математици, потврда је значаја

[3] Истраживање TIMSS 2007 (Trends in International Mathematics and Science Study), као и претходна три циклуса овог истраживања 1995, 1999 и 2003, осмислило је и реализује Међународно удружење за евалуацију образовних постигнућа (International Association for the Evaluation of Educational Achievement – IEA), из Амстердама, заједно са Међународним центром за TIMSS и PIRLS истраживања при Бостонском колеџу (TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College). Србија је први пут учествовала у овом истраживању у циклусу 2003, а учествује и у актуелном циклусу истраживања 2012.

[4] Истраживање PISA 2006 (Program for International Student Assessment), као и претходни циклуси 2000 и 2003, реализовани су и реализоваће се као пројекти Организације за економску сарадњу и развој (OECD – Organization for Economic Co-operation and Development). Србија се први пут укључила у други циклус 2003, и наставила са истраживањем у циклусу 2006, 2009, 2012.

наставе математике за свако друштво и појединца у њему. Њихова улога је све значајнија и све је већи број земаља учесница у оваквим истраживањима[5]. То је разлог наше опредељености да се упознамо и анализирамо званичне извештаје ових истраживања о постигнућу ученика из математике за Србију са математичког и методичког аспекта (Антонијевић и Вељковић 2005, Пантић и Ђокић 2005, Антонијевић 2007, Божић 2012, Министарство просвете 2006, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања 2011). Она спадају у ред међународних студија са вишеструким значајем, како на националном тако и на међународном плану[6].

Наша намера је да из извештаја поменутих међународних и домаћих истраживања препознамо и издвојимо, те опишемо и методички анализирамо наставне приступе који се користе, а за које је уочено да остварују боље ефекте у погледу математичких постигнућа и бољу мотивацију за учење и подучавање у настави геометрије.

Важно полазиште рада јесте **наставни приступ** у почетној настави геометрије заснован на реалном окружењу и Фројденталовој (F. Freudenthal 1905–1990) дидактичкој феноменологији и концепцији математичког образовања. Реално окружење као извор математичких појмова основно је полазиште *Реалистичног математичког образовања – РМО* покренутог у Холандији на Институту у Утрехту 1970-тих година када се Фројдентал заложио за повезивање математике са реалним ситуацијама блиским деци и релевантним за друштво (Freudenthal 1968).

Процес учења математике требало би да буде *вођени процес* (*поновног) открића* математичких идеја са основним циљем разумевања поступка математизације уместо овладавања затвореним системом чињеница. Математизацију посматрамо као вертикалну и хоризонталну (Freudenthal 1968,

---

[5] У текућем истраживању учествују 74 државе.

[6] Република Србија учествује у текућим истраживањима, а планирано је учешће и у наредним циклусима (у циљу континуираног спровођења међународних испитивања постигнућа ученика као показатеља циљева на нивоу образовног система у организацији *Завода за вредновање квалитета образовања и васпитања Републике Србије*, „Стратешки план 2006-2010", стр. 18. Више о *Заводовим* стратешким циљевима и задацима видети у поменутом документу на адреси: http://www.ceo.edu.rs/dokumenti/strategija%202006-2010_final.pdf.

Treffers 1987). У хоризонталној математизацији присутан је прелазак из реалног света у свет математичких симбола преко математичког апарата који омогућава решавање проблема. Вертикална математизација подразумева кретање унутар света математичких симбола и подразумева реорганизацију математичких знања утврђивањем веза између математичких појмова и поступака. У основи математизације лежи идеја проналаска проблема и путева њиховог решавања који би били налик (поновном) открићу математичких идеја. Реалистично математичко образовање као полазиште користи реалистичне, свакодневне нестрандардне ситуације као *мотивацију* за учење математичких садржаја који су основа за *вођено откриће математичких појмова или поступака* (Heuvel-Panhuizen 2001). Под *проблемима у контексту* подразумевају се они проблеми код којих проблемска ситуација делује искуствено могућа за дете (које деца доживљавају као ‘блиске’) (Gravemeijer 1994, Heuvel-Panhuizen 2001). Образовни процес са оваквим приступом супротност је механицистичком приступу настави (подстиче се учење са разумевањем). Модели у настави математике играју значајну улогу, а за *РМО* они су посебно значајни и улога им је другачија. У настави математике модел представља конкретизацију математичког појма. Насупрот овоме у *РМО* се креће од модела као апроксимације апстрактне појаве до модела као средства за решавање проблем (он, стога, може да буде и формално математички запис) (Streefland 1991, Treffers 1991, Gravemeijer 1994, Van den Heuvel-Panhuizen 1995). У настави *РМО* задаци у контексту се користе да би се превасходно дошло до нових сазнања – *на други начин стечених знања* – у процесу достизања формалних знања, као и да би се уочила могућност *примене знања* (Милинковић 2007а). Кроз решавање проблема ученици развијају математички апарат и разумевање математичких појмова и поступака насупрот механичког приступа који су усмерени на увежбавање процедура. У *РМО* се инсистира на комплексној смисленој концептуализацији учења. Уместо примаоца информација ученици активно учествују у наставном процесу откривајући математичке идеје. Основне карактеристике *РМО* су: коришћење контекста, коришћење модела, активно учешће ученика у процесу учења, интерактивна природа наставе, комбиновање различитих метода учења. Различите активности обезбеђују деци прилику да успоставе *везе између посматраних објеката и догађаја и апстрактних идеја које* *објашњавају односе између тих објеката и догађаја*. Снага овог приступа учењу су активности настале из дечје потребе – интересовање за одређену појаву – а не споља наметнути изоловани задаци (House & Coxford Ed. 1995).

Овим питањима су се бавили и други истраживачи. Указаћемо на неке међународне и домаће *пројекте* који у својим концепцијама математичког образовања за основно полазиште користе реално окружење, и са чијим радом смо упознали научну и стручну јавност (Милинковић, Ђокић и Дејић 2008). Истакнимо неке њихове карактеристике (погледати у Прилозима табелу 1.). Одабрани пројекти започети су 1990-тих година, а већина њих, као један од исхода, предлаже курикулуме усклађене са филозофском и педагошко-психолошком оријентацијом пројеката. Одабрани пројекти се ослањају на конструктивистичке теорије психичког развоја деце (теорија Пијажеа и теорија Виготског). Полазе од ученичке интуиције и предзнања, кроз постепено формирање апстрактних појмова и доласка до симболичког начина изражавања. Заједничка карактеристика пројеката је коришћење реалног окружења као контекста за формирање појмова – од примера до примера, у вођеном разговору у ситуацијама блиским дечјем искуству до уопштавања и апстраховања. Истакнимо да су ови пројекти препознати по: 1) добром методичком приступу у учењу математичких садржаја (што показују резултати међународног тестирања TIMSS 2003) и 2) високој успешности решавања математичких проблема деце која су учила по њима (што показују резултати међународног тестирања PISA 2001). TIMSS резултати показују да су земље учеснице са врха листе земље у којима се негује приступ учењу математике у реалном контексту (Heuvel-Panhuizen 1996, 2001). Као резултат ових пројеката настајали су уџбеници. Наше истраживање у овом делу рада биће усмерено на анализу извештаја поменутих истраживачких пројеката, њихових математичких курикулума и наставних приступа у уџбеницима. Зато је за нас *четврто* важно питање **реално окружење као извор геометријских појмова и места примене знања**.

Наш рад инспирисан је излагањем једног од водећих дидактичара математике XX века Х. Фројдентала на Четвртом интернационалном конгресу математичког образовања који је изнео низ проблема са којима се сусрећу истраживачи математичког образовања (Freudenthal 1983). Међу тринаест разматраних питања, истичемо она којима смо се и ми бавили, а чије смо полазне основе пронашли у Фројденталовом инспиративном излагању (под редним бројем три, пет, шест, седам, осам, девет и дванаест):

1) Како користити прогресивне схематизације и формализације у подучавању ученика о неком математичком појму[7]?
2) Како код ученика развити заинтересованост за математику?
3) Како је математичко подучавање структурисано по нивоима и како те структуре користити за диференцирану наставу?
4) Како подстицати размишљања о нечијим сопственим физичким, менталним и математичким активностима?
5) Како креирати подесан контекст у циљу подучавања математизацији контекстуалних проблема?
6) Можемо ли неког подучавати геометрију ослањајући се на његове личне рефлексије и њему својствено интуитивно схватање простора?
7) Фокус на уџбеник и уџбенички материјал и наставна средства.

По питању контекстуалне заснованости Фројдентал говори о смеру прво од реалног окружења, а онда ка математизацији, никако обрнуто. Ако се упитамо шта је реално, у настави математике оно представља смештање проблема чије се решење тражи у контекст који ће за ученике добити значење, укључујући и саме математичке проблеме. Појам ‘са значењем’ односи се на оног који учи. Препорука је да се и најапстрактнији математички објекти уведу преко контекстуално заснованих проблема. Што се тиче питања уџбеника, учитељев рад умногоме зависи од њих. Зато је важно размотрити и њихову улогу.

Фројдентал пред нас поставља задатке за унапређивање наставног процеса у области наставе математике уважавањем свих карактеристика ученика (оних узрасних и њихових претходних знања). Сами задаци односе се на усвајање

[7] Овде се у ширем смислу може користити термин објекат, односно математички објекат. Реч је о апстрактном објекту који математика проучава. Нпр. у контексту апстрактне алгебре математички објекат је алгебарска структура као што је група, прстен итд. Или, нпр. дискретна математика проучава природне, целе и рационалне бројеве, дискретне (коначне или највише пребројиве) скупове, релације и функције дефинисане на њима итд. Другим речима, дискретна математика се бави (дискретним) објектима, њиховим својствима и односима.

добрих метода (начина рада онога који подучава). Бројне су препоруке за начине извођења наставе и начине учења.

У нашем раду посветићемо пажњу *учењу и обучавању са разумевањем* по Хиберту и Карпентеру (Hiebert & Carpenter 1992). Један од могућих облика учења у настави тако да оно буде учење и обучавање са разумевањем је *учење откривањем* (путем открића). Према педагошко-психолошким теоријама ради се о облику учења у којем ученици кроз самосталне активности откривају основна правила и принципе и разумеју њихов пут настанка. Наше истраживање обухватиће Брунерове ставове (Bruner 1966) и разматрање његовог става да се модификује овај начин учења у тзв. *вођено учење откривањем* у којем наставник даје упутства, интервенише у поступку учења. Разматраћемо и појам *учења путем откривања* у настави математике према Реснику и Форду (Resnick & Ford 1981), В. Мићићу (Mićić 1999, Мићић 2005) и др. Бавићемо се и односом учења са разумевањем и учења путем открића. Зато је за нас *пето* важно питање **учење путем (поновног) открића**.

Оригинална идеја нашег истраживања фокусирана је на наставни приступ у почетној настави математике, који код нас није довољно испитан а реч је о реалном окружењу. То нас је довело до експерименталног дела истраживања – **реално окружење као наставни приступ подржан одговарајућим моделом уџбеника почетне наставе математике и ефекти на постигнућа ученика и мотивацију за учење.** Ученици I, II и III разреда нису обухваћени истраживањем, јер класичан наставни приступ не искључује реално окружење. Напротив, оно га садржи као основни извор математичких појмова у поступку њиховог формирања. Како се узраст повећава, ученици су све ‘навикнутији’ на свет апстрактних идеја и ‘удаљенији’ од реалног окружења као извора појмова као наставног приступа (Ђокић 2007). Нас је занимало какве ће ефекте по наставу имати ‘враћање’ реалном окружењу.

Из свега наведеног произашла је следећа структура нашег истраживања:

I Увод

II Теоријске основе

6. Узорак у истраживању

7. Ниво и начин статистичке обраде података

Организација и извођење истраживања

8. Опис школа, одељења, наставног приступа и уџбеника, учитеља

9. Експериментална настава

9.1. Структура и садржај експерименталних часова

9.2. Опште карактеристике наставног приступа

9.3. Геометријске активности

9.4. Припреме учитеља за часове

10. Тестови

10.1. Тест геометријских способности

10.2. Тестови знања из геометрије – претест и ретест

11. Анкете учитеља

12. Анкете ученика

Анализа и интерпретација резултата истраживања

13. Кратка запажања са одржаних часова

14. Статистичка анализа резултата теста геометријских способности и тумачење

14.1. Уједначеност група према тесту геометријских способности

14.2. Поређење дечака и девојчица по скору на тесту геометријских способности

14.3. Факторска структура теста геометријских способности и корелације

14.4. Корелације између теста геометријских способности и напредовања на тестовима знања

15. Статистичка анализа резултата анкетирања и тумачење са дискусијом

15.1. Поређење експерименталне и контролне групе с обзиром на укупно постигнуће на два теста – претест и ретест

15.2. Ефекти за све задатке типа 1

15.3. Ефекти за све задатке типа 2

15.4. Резултати по питањима – типови задатака

16. О утисцима учитеља (резултати анкетирања)

II ТЕОРИЈСКЕ ОСНОВЕ

ГЕОМЕТРИЈСКЕ ОСНОВЕ

1. Из историје геометрије

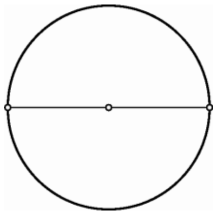
У намери да се расветли пут развоја геометрије, позабавимо се неким њеним специфичностима. Математика, као школски предмет, поред аритметике обухвата и основе геометрије. Раније су основе представљале упрошћене верзије аксиоматизованих и логички сређених Еуклидових (Euclid 330–275 пре Христа) *Елемената*, а у савременом добу враћа им се интуитивна основа изгубљена у *Елементима*. Марјановић за почетну наставу геометрије и каже да је трагање за изгубљеним значењима, иначе бива чистим формализмом (Marjanović 2007: 13).

У раду се ослањамо на три стуба: историју математике, математику као основну дисциплину и психологију (развојну и педагошку). Сагледајмо геометрију у њеној историјској ретроспективи, њеној повезаности са интуитивном основом, те логичким сређивањем и структурисањем.

Наше опредељење приликом састављања наставног материјала у оквиру експерименталног дела истраживања рада јесте приступ геометријском штиву који би ученицима омогућио да, на сличан начин како су се откривале идеје кроз историју геометрије, дођу до геометријског сазнања у настави. Позабавимо се историјским прегледом и то прво од најстаријих геометријских тврђења, раста геометријског знања у раном периоду, преко идеја Еуклида и његових следбеника, Хилбертових (D. Hilbert 1862–1943) основа геометрије, па све до идеје хиперболичке геометрије.

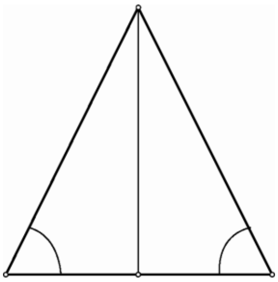
Према предању које преноси Прокло (Proclus Lycaeus 412–485 после Христа), позивајући се на Еудема (Eudemus of Rhodes 370–300 пре Христа), Талес (Thales of Miletus 624–546 пре Христа) је први умео да докаже следеће геометријске ставове (Прокло, према Lučić 2009: 16):

I Пречник полови круг.



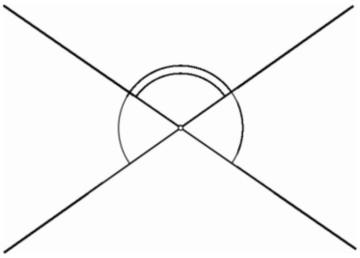
Слика 1. Пречник полови круг

II На основици једнакокраког троугла углови су једнаки.



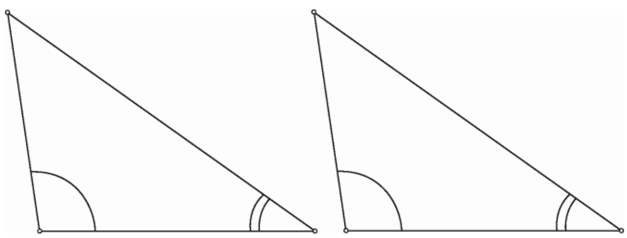
Слика 2. На основици једнакокраког троугла углови су једнаки

III Унакрсни углови међусобно су једнаки.



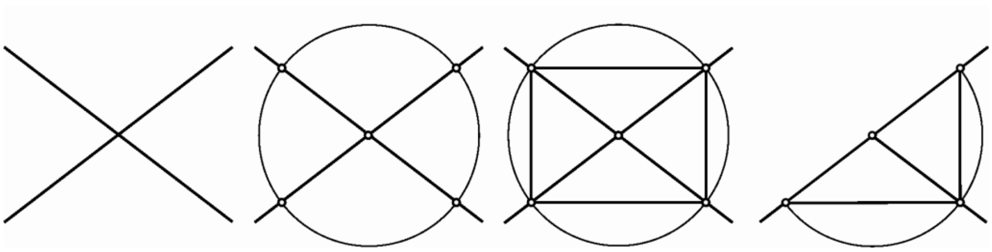
Слика 3. Унаксни углови једнаки су један другом

IV Троуглови су подударни ако су страница и на њој налегли углови једног од њих подударни одговарајућој страници и угловима другог.



Слика 4. Подударни троуглови

V Угао над пречником је прав.



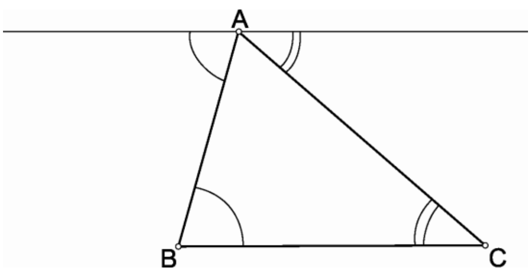
Слика 5. Угао над пречником је прав

Међутим, ни Прокло ни Диоген не казују како су могли да изгледају Талесови докази ових ставова. Стога Лучић поставља два питања: 1) да ли се претходних пет ставова може сматрати првим ставовима у историји математике и 2) да ли су њихови евентуални докази најстарији докази уопште (Ibid). Из историјских списа да се закључити да су Грци имали шта да науче и пренесу од математичких знања из развијених цивилизација Египта и Месопотамије, као и из древних култура Кине и Индије. Лучић износи да би одговор на прво постављено питање морао бити одречан. Талес ставове није доказивао дедукујући их један из другога или из неких других геометријских чињеница. Лучић износи да је, ослањајући се на уверљивост слика којима их је илустровао, Талес „само приметио да они важе“ (Ibid: 17). Одговор и на друго питање морао би бити одречан.

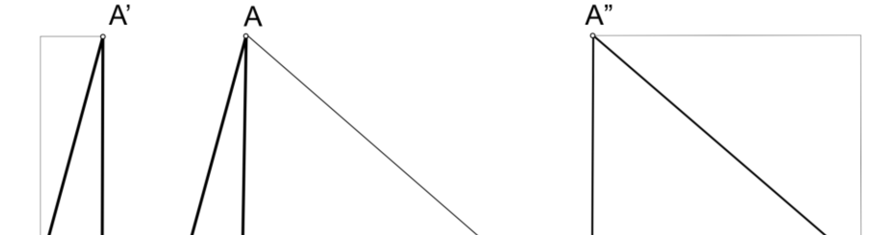
Сама реч теорема (θεώςημα) изведена је из грчке речи (θεώςηιυ; theorein) што значи гледати, те Лучић закључује да је у почетку за Грке то био синоним за уочавање (Ibid). Ако се погледају Талесови геометријски ставови, примећује се једноставност за разумевање и то управо разумевање слике.

Можемо се задржати више на V ставу, будући да су прва четири очигледна и да им се доказ своди на јасноћу и уверљивост слике. Зашто је занимљив V став? Не може се једним погледом утврдити да овај став важи, као код претходна четири, већ се са коначно много погледа долази до уверења да је и он истинит тј. да је угао над пречником прав. Нека су задате две праве које се секу. Њихови унакрсни углови су једнаки (из става III). Пресецимо задате праве кругом чије је средиште у њиховом пресеку. Пресек чине четири тачке које су темена четвороугла који се састоји из два пара унакрсних троуглова. Троуглови су једанкокраки, па ће углови на њиховим основицама бити међусобно једнаки (из става II). Стога ће и наспрамни троуглови бити међусобно једнаки (из става IV), па ће и сви углови четвороугла бити међусобно једнаки, а његове наспрамне странице подударне. Добили смо правоугаоник око кога је описан круг. Ако обришемо пола правоугаоника са исте стране једне његове дијагонале, видимо да је угао над пречником прав (Ibid). Лучић истиче да се и овај став може сврстати у оне код којих се до доказа долази уочавањем, али је у ‘доказу’ потребно приметити да важи више очигледних истина и прављењем коначног низа корака којима се долази до уверења о истинитости тврдње да је угао над пречником прав.

А како је расло геометријско знање у раном периоду? Лучић примећује да слика уз понуђени доказ Талесовог става, према којем је угао над пречником прав, сугерише да је збир унутрашњих углова правоуглог троугла једнак збиру двају правих углова (Ibid). Према слици се види да је правоугли троугао пола правоугаоника, па је збир унутрашњих углова правоуглог троугла једнак половини збира унутрашњих углова правоугаоника. Како је сваки угао правоугаоника прав, збир унутрашњих углова правоуглог троугла (половине тог правоугаоника) биће једнак збиру двају правих углова. Овај доказ, као и доказ преко висине која разлаже троугао на два правоугла троугла, илуструје се сликама које су лако разумљиве.



Слика 6. Збир углова у троуглу једнак је збиру двају правих углова



Слика 7. Збир углова у троуглу једнак је збиру двају правих углова

Да се закључити да размишљање које је водило ка уверењу да важе неке геометријске тврдње, морало је у почетку ићи овим путем и добро изабраном сликом (као четири Талесова тврђења која помиње Прокло), а „потом је једна слика била недовољна“ (Ibid: 27). Како је време протицало, било је све више тврђења која су се доказивала путем слике, и то заиста јесу били докази утемељени на низу слика који су га илустровали, а са дедукцијама које су логички биле исправне.

Шта је потресло грчку геометрију – математику уопште? Било је то питагорејско откриће о постојању *несамерљивих дужи*. Око 500. године старе ере дошло се до открића да постоје дужи чији однос није однос двају позитивних целих бројева. Доказ геометријске истине више није могао да буде утемељен на основу уверљивости слике. У самом доказу није било довољно позвати се на јасност процедуре коју илуструје коначно много слика, већ је било неопходно бесконачно много пута поновити исту мисаону схему или начинити индиректан доказ (овде се мисли на несамерљивост дијагонале и странице квадрата или оном што ми данас зовемо ирационалан број $\sqrt{2}$).

Лучић износи оправданост постављања питања да ли је уопште било правог математичког доказивања пре пуког позивања на очигледност и слику или се потреба за таквим доказивањем јавила тек када је требало разумети нешто што је било изван слике (Ibid). И пре открића несамерљивости дужи било је доказа, али ово откриће изазвало је велике потресе у геометрији (и не само њој, уопште у математици) и створило основу за систематизовањем математичких знања и њиховим дедуктивним уређењем.

За наш рад свакако је било важно сагледати историјски ток доказивања путем слике, са намером симулације такве идеје у почетној настави (деца ће да ‘мисле’ на сличан начин као математичари у Старој Грчкој). Постојање несамерљивих дужи изазвало је пометњу не само у питагорејској математици, већ и у филозофији. За Грке је број могао бити само позитиван цео број, те је постојање несамерљивих дужи (немогућност да се однос двеју дужи прикаже односом двају позитивних целих бројева) доказивало да постоје ентитети који се не могу изразити као однос бројева. Питагорејци овај проблем разрешавају развојем геометријске алгебре, у којој се проблеми алгебре померају у геометрију (однос дужи показао се општијим од односа бројева). Овим је геометрија постала најсигурнијим извором егзактног знања и стекла је углед који је вековима после овога држала.

Будући да је наш рад доста ослоњен на примену знања, рецимо нешто о практичној употребљивости геометријских знања онако како је о њој мислио и сам Еуклид. Она је код Еуклида наилази на презир (Ibid). Сведочанство овоме је анегдота коју преноси Прокло а која је Еуклидов одговор Птоломају о краљевском путу у геометрију, као и анегдота из Стобејевог дела о Еуклиду и дечаку који је научивши прву теорему хтео да сазна која је корист од тога. Какав је наш однос према овоме? Да ли је наш приступ у основи практична употребљивост знања или нешто друго? Нас занима пут који симулира развој геометријских идеја, од практичне употребљивости, преко раста геометријског знања – баш онако како је текао кроз историју у раном периоду, па све до погледа ка систематизованим знањима каква сусрећемо у геометријском свету апстрактних идеја.

Основне ставове геометрије Еуклид је поделио на аксиоме и постулате. Наведимо постулате како је то учињено у *Елементима* (Lučić 2009: 43). Нека се претпостави:

1. Да се може повући од сваке тачке ка свакој другој тачки права линија.
2. И да ограничена права може бити продужена у свом правцу непрекидно.
3. И да се може описати од сваког средишта сваким растојањем круг.
4. И да су сви прави углови једнаки међусобно.
5. И да ће се, ако једна права у пресеку са другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бескрајно продужене, сећи и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права[8].

[8] Погледајмо како Хилберт формулише аксиому паралелности еуклидске геометрије: „Нека је *a* произвољна права и А тачка ван *a*; тада постоји у равни, одређеној правом *a* и тачком А, највише једна права која пролази кроз А и не пресеца *a*." (Hilbert 1957, према Lučić 2009: 64). Ова аксиома коју Хилберт назива *Еуклидовом*, најчешће се назива *Плејферовом аксиомом паралелности* (John Playfair 1748-1819). Џон Плејфер није први формулисао аксиому будући да се може наћи већ у Прокловом коментару Еуклидовог става и представља један од еквивалената петог постулата (реч

Прва три постулата конструктивног су карактера и на њима је вековима почивала теорија геометријских конструкција. Лучић примећује да се четвртим постулатом истиче да је у свим тачкама простора прав угао исти, чиме се сугерише да је простор хомоген. Пети постулат, својом сложеношћу, одудара од осталих и кроз историју геометрије највеће расправе експлицитно су биле везане за њега сматрајући да га, због своје неелементарности, треба дедуковати из осталих аксиома геометрије и никако не пристати да то да буде један од основних ставова[9].

Прокоментаришимо нешто и о геометријском простору онако како га је Еуклид разумевао. Лучић примећује да Еуклид у својих пет чувених постулата покушава да „обухвати геометријска својства која су пресудна за разумевање геометријског простора" (Ibid: 44).

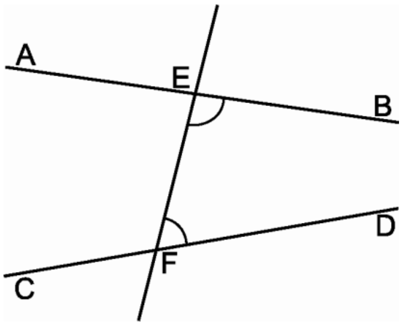
Њима се исказују геометријске особине које карактеришу простор:

- Повезивост било којих двају тачака простора правом која је потенцијално бесконачна.
- Могућност конструкције круга са задатим средиштем, произвољно великог или произвољно малог полупречника.
- Хомогеност простора која је сугерисана подударношћу правих углова где год да су они.

И, на крају, у петом постулату, описује се особина простора која је у основи једноставна и лако разумљива као и претходне – ако су две паралелне праве пресечене трећом, и ако само један од углова које она захвата са једном од њих (ма колико мало) смањимо, онда ће се ове две праве пресећи.

је аксиому који је добио име по Плејферу – еквиваленту Еуклидовог V постулата и једном од више еквивалената).

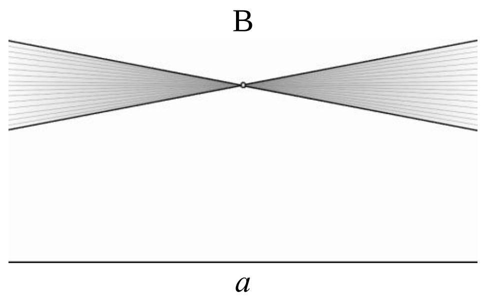
[9] Лучић износи да је и сам Еуклид у првој књизи *Елемената* „исказао резерву према прихватању ове тврдње за једну од претпоставки геометрије, тиме што је првих 28 ставова доказао не позивајући се на пети постулат, а тек у 29. ставу први пут га је употребио" (Lučić 2009: 44).



Слика 8. Пети Еуклидов постулат

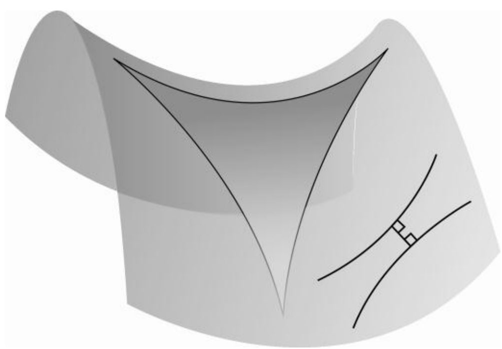
Сагледајмо збивања у геометрији и после Еуклида. Још од Еуклида геометријска истраживања развијала су се у два сасвим супротстављена смера. Са једне стране била је аксиоматика, допуњавана и проширивана да би се из основних ставова могла дедуковати сва геометријска тврђења, а са друге дуготрајни и напорни покушаји да се Еуклидова аксиоматика редукује изостављањем петог Еуклидовог постулата из списка основних ставова. После бројних индиректних покушаја више од две хиљаде година, тек је у XIX веку ово питање било решено. Било је доказано да је Еуклидов пети постулат независан од осталих аксиома геометрије и да се из њих не може извести. Било је то у радовима Лобачевског и Бољаја (J. Bolyai 1802–1860), чиме је створен сасвим нови геометријски свет, и био формиран поглед на логичке принципе заснивања геометрије. Следећи идеје Пеана (G. Peano 1858–1932), Паша (M. Pasch 1843–1930) и Веронезеа (G. Veronese 1854–1917) с краја XIX века Д. Хилберт је у свом делу *Основе геометрије* из 1899. године геометрију засновао на непротивречном, независном и потпуном систему аксиома, а то су: I 1–8. аксиоме везе, II 1–4. аксиоме распореда, III 1–5. аксиоме подударности, IV аксиома паралелности и V 1–2. аксиоме непрекидности. И данас, век од појаве *Основа геометрије*, геометрија почива на принципима које је утемељио Хилберт.

У трећој деценији XIX века Лобачевски и Бољај предлажу, независно један од другог, да се утемељи нова теорија на аксиоми која негира пети Еуклидов постулат. „Немајући пред собом очигледне слике које би подупрле њихов поглед на основе геометрије… изграђена је теорија исто онолико логички исправна колико и еуклидска геометрија“ истиче Лучић (Ibid: 68). Први пут је заснована теорија која се „не позива на очигледност, геометрија у којој за сваку праву *a* и тачку B која јој не припада, у њима одређеној равни постоји неограничено много правих које садрже тачку B, а са правом *a* немају заједничких тачака“ (Ibid).



Слика 9. Праве које садрже тачку *B* , а не секу праву *a* (Лучић 2009)

Лобачевском је првом пало на ум да претпостави да геометрија свемира није еуклидска. Да би показао да је његова ‘имагинарна геометрија’ непротивречна, као и еуклидска, Лобачевски је истакао да она почива на формулама које се односе на метричке особине троуглова које прелазе у познате формуле сферне геометрије (када се вредности a, b, c дужина страница троугла замене са ia, ib, ic). После две хиљаде година сумњи схваћено је да аксиома паралелности не зависи од осталих ставова геометрије Еуклидових *Елемената*.



Слика 10. Троугао и две паралелне праве на седластој равни
(хиперболички параболоид)

Изведимо један општи закључак, на основу историјског пресека. Наведено ‘немање’ очигледних слика у поступку доказивања оно је до чега се долази и у настави геометрије, можда не баш елементарне, али свакако је пут који креће од модела и слика, преко геометријског простора, његових објеката и поимања њихових међусобних односа. Следимо пут од опажајне геометрије до геометријских дедукција кроз форму историјско-искуствене равни детета.

А шта је са уџбеницима математике гледајући кроз историју? Каква је њихова улога? Уџбеници математике одувек су играли значајну улогу у историји математике (Corry 2009: 565). У њима се сумира и представља слика савремених токова дисциплине. Само писање уџбеника више је од једноставног набрајања претходно раширених идеја и резултата. Оно захтева избор тема и проблема, и њихово организовање на кохерентан и систематичан начин, фаворизујући одређене технике, приступе и номенклатуру. Стога уџбеник математике настаје као „истраживачки рад, обезбеђујући добро дефинисање структуре дисциплине“ (Ibid). Уопштено, структура није изнуђена на један начин, већ аутори праве изборе са значењима који при томе формирају карактеристичне слике дисциплине. Ако се испостави да је уџбеник успешан и утицајан, он ће ширити такву слику као приоритетну за ону дисциплину за коју је написан. Најбољи пример таквог уџбеника су Еуклидови *Елементи* као парадигма уџбеника који је био компилација постојећих знања и који је промовисао изузетно утицајну слику дисциплине, недвосмислено обликујући математику миленијумима (па и више од тога). Други пример су Гаусова *Аритметичка истраживања*, понекад по значају поређена са *Елементима*, иако више јасно описана у свом циљу. Савремени пројекат „Никола Бурбаки *Елементи математике*“ оличавају сличну намену са јединственим покушајем остваривања фундаменталне улоге у математици савременог света, као и дугорочне амбиције утицаја на дисциплину.

2. Припрема за предеуклидску геометрију

У настави геометрије следимо идеје које теже развоју интуиције, просторном и логичком мишљењу, способности за конструктивно-геометријске активности и владање симболичким језиком геометрије (макар у минималном обиму) (Глејзер 1997: 2). Поставља се и питање система геометријског образовања у савременој школи који би обезбедио потребни ниво геометријског знања ученика. Изградњу геометријског образовања Глејзер види у принципу који назива природна сврсисходност. Суштина тог принципа је да ученик у процесу учења геометрије пролази у кондензованом облику *основне етапе развоја геометријске науке*, а то су:

1. догрчка (геометрија као емпиријска наука),
2. грчка (прелаз од практичне ка теоријској) и
3. савремена (разрада аксиоматске методе) (Ibid).

У складу са овим основним етапама развоја геометрије, систем школског геометријског образовања чинила би три или четири курса:

1. сликовита геометрија,
2. практична геометрија,
3. систематски курс геометрије и
4. геометрија намењана изучавању ученика са повећаним интересовањима (Ibid).

Да би се досегло опште разумевање основних геометријских чињеница, појмова, процедура, стратегија, неопходно је враћати се истим темама изнова и изнова крећући се по спиралној линији наставног програма. „Према Хекеловом закону рекапитулације (онтогенеза понавља филогенезу) педагогија мора да тежи да изнова ствара основна искуства која развијају математичке ентитете" примећује Том (Thom 1973[10], према Villani 1998: 320). Вилани Томово тврђење тумачи на следећи начин – ако је учење/подучавање процес који би требало да има значење за ученике, онда он не може да прескочи ни један део стазе која постепено води од конкретног и интуитивног аспекта до апстрактне, дедуктивне геометрије. Слично пројектовање историјске перспективе проналазимо и код Марјановића (Marjanović 2007: 13). Он разматра следеће нивое кроз које пролази школска геометрија:

1. *интуитивна геометрија*,
2. геометрија у духу Талеса и Питагоре (Pythagoras of Samos 582–496 пре Христа) – *предеуклидска геометрија* и
3. *еуклидска геометрија*.

[10] Више о овоме у: Thom, R. (1973): „Developments in Mathematics Education", in: *Proccedings of the Second International Congress on Mathematical Education ICME*, Howson, A. G. Ed., Cambridge Univ. Press.

Садржаји интуитивне геометрије покривају програм узраста којим се и ми бавимо – млађи разреди основне школе. Овим начином реализације школске геометрије био би обезбеђен природни процес развоја који би у обзир узимао многовековна историјска искуства човечанства и ослањао се на њих. Марјановић истиче да је геометрија у млађим разредима основне школе *интуитивна геометрија* која је припрема за следећи ниво – ниво *предеуклидске геометрије*. То би значило да деца треба да усвоје интуитивна значења свих основних појмова предеуклидске геометрије и оспособе се за њихово представљање геометријским цртежима. Овај део елементарне геометрије „мора да буде добро организован, јасно заснован и прецизно изложен“ (Ibid). Свет геометрије је апстрактан, а људи креирају геометријске идеје у својој свести бивајући стално у контакту са окружујућом реалношћу. Учење геометрије у оквиру наставе је процес који мора да буде пажљиво руковођен, комбинован од опажања и иконичког (сликовног) представљања опаженог, као и вербалног изражавања обеју ових активности. Суштина овог процеса учења је „разумевање начина на који геометријски појмови настају и представљају се у човековој свести“ (Ibid: 15). Нешто више о самом предлогу заснивању курса геометрије за учитеље који се образују за извођење почетне наставе може се наћи у инспиративним чланцима Глејзера (Глейзер 1991) и Марјановића (Marjanović 2005).

Још је почетком ’80-тих код нас видљива одлика приступа настави геометрије од 1. разреда основне школе – повезаност геометрије као апстрактне науке са стварношћу. Ова чињеница се користи тако што у настави почињемо емпиријском геометријом, а онда се преко експериментално-интуитивних приступа приближавамо нешто строжијем излагању геометрије са краћим логичким корацима и дедуктивним закључивањем везаним за одређене проблеме (Илић-Дајовић 1980: 27). Ту се губи веза наставе геометрије са реалношћу изградњом апстрактног света геометријских идеја, уместо да је његова одлика управо повезаност са конкретном реалношћу. Требало би имати у виду да већина геометријских појмова има, посредно или непосредно, своје далеко генетичко језгро у реалности и да је геометрија, као математичка теорија простора у којем живимо, у конкретној реалности налазила и налази подстицај за свој развој, а истовремено другим дисциплинама пружајући своје чињенице и методе (Ibid). Зато питање повезаности наставе геометрије са реалношћу (као и са низом примена) одавно је већ код нас постало важно и отворено питање за истраживања.

Геометрија је значајна компонента математичког курикулума у многим земљама широм света, иако је састављање геометријског курикулума увек представљао и представља тежак задатак (Clausen-May, Jones, McLean and Rollands 2000, према Fujita and Jones 2002: 79). У овим радовима говори се и о геометријском резоновању у уџбеницима за старије основношколце у процесу учења и подучавања. Тако се у уџбеницима у Великој Британији иде од конкретног, на пример од поступка мерења, цртања итд. који су повезани са минимумом могућности за стварање претпоставки и индуктивно резоновање, док је у уџбеницима у Јапану геометрија базирана на доказима кроз експлицитно дедуктивно резоновање. Новија компаративна истраживања проналазе варијације у приступима у састављању школског геометријског курикулума (Hoyles, Foxman and Küchemann 2002, према Fujita and Jones 2002: 80). На пример, реалистичан приступ појављује се у Холандији[11] док је теоријски приступ у Француској и Јапану. Већина земаља, иако не све, укључују елементе доказа и доказивања у спецификацији курикулума. И ту такође има варијација. Тако неке земље подстичу приступ конгруенцији као центалном елементу док неке друге подстичу сличност и трансформације. У Русији садржаји који се односе на интуитивну геометрију заступљени су са око 20% математичког програма за узраст од 1. до 5. разреда основне школе (што се одражава и на уџбенике) (Yakimanskaya 1991: ix). Из прегледа истраживања увиђамо да постоје евидентна померања – већина земаља иде ка променама и измењеним геометријским курикулумима[12].

Један вид информисања о променама јесте евалуација различитих курикуларних модела (шта ученици знају после подучавања по одређеним иновативним моделима). Уопштено, курикуларни модел који се прихвата ученици

---

[11] Објашњење можемо потражити у духу практичног протестантског човека.

[12] У овом смислу корисно је пратити нпр. прегледе *NCRMSE (National Center for Research in Mathematical Sciences Education) Research Review*. За 1994. годину у Vol. 3, No.1 говори се о променама у геометријском курикулуму, потреби повећања геометријских садржаја и просторног резоновања на узрасту од предшколског до универзитетског нивоа, позивајући се на документа: NCTM Standards (National Council of Teachers of Mathematics Standards) (1989), MSEB (1989), MSEB (1990) итд.

осећају пролазећи кроз уџбенике које користе у настави. Уџбеници и приручници имају важан утицај на учење, нпр. TIMSS, док по другим истраживањима то баш и није тако (Foxman 1999, према Fujita and Jones 2002: 80).

Даља истраживања требало би да буду усмерена на откривање пута шта води ученике до појмова са значењем од, са једне стране, дијаграма и визуелних представа до, са друге стране, вербалних уопштавња и анализа, наглашавајући повезаност визуелног и вербалног процеса. Ово би могло да помогне и у изграђивању и елаборирању постојеће интуиције о простору, развијајући безусловно и геометријску интуицију (Clements and Battista 1992: 457).

Додајући и конструктивистички поглед, истраживања би се бавила развојем геометријских појмова и геометријског мишљења у различитим окружењима у којима се учи (Ibid). Наглашена је потреба испитивања развоја ученичких знања у различитим окружењима, као и откривање како учитељи могу да искористе окружења у којима се учење одвија и како се одвија сам процес учења. Ово су битне смернице да даља истраживања, а дало је оквир и нашем истраживању у реалистичном контексту.

У настави математике трагамо за уџбеницима који подржавају различите приступе, моделе и поступке који ће је учини што ефикаснијом и унапредити нивое постигнућа ученика. Наш рад настаје у периоду док траје екперимент са школским уџбеницима започет 2003/2004. школске године (и траје већ целу деценију, са изменама које су наступиле 2007/2008. године о којима ћемо нешто касније говорити).

3. Простор и геометрија

3.1. Геометријски и физички простор по А. Поенкареу

Филозофско разматрање великог класика А. Поенкареа, која се односе на човеково искуство и заснивање геометрије, има суштинске импликације и на наше истраживање. Следићемо његове идеје и принципе (Poincaré 1905, према Ђокић 2007: 39). Напоменимо да су појмови на узрасту којим се бавимо (млађи школски узраст) *опажајни*. Наиме, сви примери који се односе на појам су уочљиви феномени који постоје у стварном свету.

Још у античким временима, са појавом Еуклидових *Елемената*, геометрија је добила своју строгу логичку форму. Историјски овоме је претходила геометрија окренута практичним питањима, као у Египту. Као једна од седам класичних вештина геометрија је била присутна и у средњовековној школи. Писане су упрошћене верзије *Елемената* које су биле први школски уџбеници геометрије. И поред оваквих покушаја, геометрија је остала удаљена од почетне наставе математике све до почетка XX века. Двадесетих година XX века Т. А. Еренфест (Т. А. Афана́сьева 1876–1964) и П. Еренфест (P. Ehrenfest 1880–1933) су свој став да је геометрија наука о материјалном свету настојали да уграде у почетну наставу геометрије, враћајући тако њеним апстракцијама изгубљено интуитивно значење. Коришћени су и конкретни материјали, подстичући децу да са њима експериментишу. Од тада, постепено, неки геометријски садржаји почињу да се јављају и у програмима почетне наставе. Х. Фројдентал инсистира на тесној повезаности математике са реалним окружењем и истиче да настава геометрије може бити значајна само ако налази подстицаје у везама између реалног простора и апстрактних геометријских објеката. Истовремено, средином XX века, Ж. Пијаже (J. Piaget 1896–1980), а затим и П. ван Хиле (P. M. Van Hiele 1909–2010) предузимају значајне кораке у процесу исправног формирања геометријских појмова примереног узрасту детета.

Рад два велика научника даје темељни оквир нашем истраживању. Из света математике то је А. Поенкаре и из света развојне психологије то је Ж. Пијаже. Поенкаре се бавио појмовима простора и геометрије, те увођењем експеримента који игра значајну улогу у њеном заснивању. Велики значај у области наставе, а за наш рад значајно са становишта наставе геометрије, учинио је Пијаже. Он се бавио формирањем просторних и геометријских појмова код деце предшколског и школског узраста. Његова истраживања показаће да дете на основу својих визуелних опажаја спонатано развија неке геометријске представе и то прво оне тополошке, затим готово истовремено пројективне и метричке.

А. Поенкаре се бавио појмовима *простора* и *геометрије*. У свом значајном делу *Наука и хипотеза* поставиће низ питања која су предмет и нашег рада: „Да ли је простор у коме живимо откривен помоћу наших чула и нашег искуства? Да ли је геометрија изведена из таквог искуства?“ (Poincaré 1905, према Ђокић 2007: 39). Поенкаре тврди да је простор, откривен помоћу наших чула, потпуно другачији од геометријског простора.

Када Поенкаре говори о геометријском простору он истиче његове битне одлике – ради се о *константном*, *бесконачном*, *хомогеном* (све његове тачке су идентичне једна другој) и *изотропном* простору (једнака физичка својства у свим правцима) који има *три димензије*.

Упоредимо ове одлике са одликама простора сазданог од представа формираних помоћу наших чула. Поенкаре говори о таквом простору као *визуелном*, *тактилном* и *моторичком*. Када говори о визуелном простору, он разматра формирање слике објекта из реалног окружења. Слика објекта формирана на полеђини ретине има својство непрекинутости и представљена је у *две димензије*, што је већ разлика у односу на геометријски простор. С друге стране, слика има свој гранични оквир. Све тачке на ретини немају исту улогу у формирању слике. Жута мрља не може ни на који начин да буде идентична са тачкама на ивици ретине (у пределу жуте мрље слика је нешто светлија). У визуелном простору, дакле, нису све тачке идентичне једна другој и он, стога, *није хомоген*. Међутим, посматрајући објекат око уважава раздаљину и захваљујући томе опажамо и трећу димензију (ствара се осећај дубине). То постижемо мишићним осећајима који се разликују од визуелних (они стварају дводимензиону слику посматраног објекта). Трећа димензија не игра исту улогу као прве две, зато Поенкаре и тврди да комплетан визуелни простор *није* ни *изотропан*. Тактилни простор је сложенији од визуелног, и још више се разликује од геометријског. Мишићни осећаји су ти који удружују све наше покрете и одговарајући оквир за њих је простор кога називамо моторички. Осећај за правац је његов основни појам. Простор, саздан чулима, у својој трострукој форми – визуелној, тактилној и моторичкој – суштински се разликује од геометријског простора. Он нити је хомоген, нити изотропан, па чак не можемо рећи ни да је састављен из три димензије.

Често се каже да ми у геометријски простор ‘пројектујемо’ наше спољашње перцепције. Тиме их ‘локализујемо’. Да ли то има икакво значење, и ако има које је? Да ли то значи да ми спољашње објекте представљамо у геометријском простору? Поенкаре тврди да су наше представе само репродукција наших сазнања путем чула, и, стога, оне не могу бити уређене у истом оквиру – у простору сазданом нашим чулима. Колико је немогуће за сликара да наслика на равној површи објекте из три димензије, толико је немогуће и да представимо спољашње објекте у геометријском простору. Простор формиран помоћу наших чула је само слика геометријског простора, слика подвргнута врсти перспективе, а представљање објеката у њему је могуће тако што се они подвргавају законитостима перспектива. Произилази да *не представљамо* спољашња тела у геометријском простору, већ *расуђујемо* о овим телима као да су она смештена у геометријски простор. С друге стране, када се каже да 'локализујемо' такве објекте у тачкама простора, можемо да се запитамо шта то може да значи? „То једноставно значи да ми представљамо кретања која се морају извршити како би се допрло до објекта" наглашава Поенкаре (Poincaré 1905, према Ђокић 2007: 40). Када кажемо да представљамо покрете, једино мислимо на представљање мишићних осећаја који су здружени са њима.

Како је онда настао геометријски простор? Поенкаре каже да „ниједно од наших чулних сазнања, ако су изолована, не би могла да формирају појам простора; њега досежемо једино проучавајући законитости помоћу којих сазнања следе једна друга" (Ibid: 58).

Кроз историју геометрије највеће расправе експлицитно су биле везане за име Еуклида и његове постулате. Средином XIX века Лобачевски је доказао да се може изградити геометрија у којој ће *Еуклидов пети постулат* бити замењен аксиомом да је кроз дату тачку ван праве могуће повући бар две њој паралелне праве (које са датом леже у истој равни и ту праву не секу), и тако дошао до нееуклидске геометрије. Лобачевски је створио једну од нееуклидских геометрија и тиме показао да су принципи геометрије ствар договора али не и произвољности.

Поенкаре долази до закључка да експерименти играју значајну улогу у заснивању геометрије, али је погрешно закључити да је геометрија, чак и један њен део, експериментална наука. Да је експериментална, била би апроксимативна и условна. Геометрија би се у том случају свела једино на проучавање кретања чврстих тела. Али, у стварности, истиче Поенкаре, не разматрају се природна тела – објекти геометријског простора су извесна идеална тела, апсолутно инваријантна, веома упрошћена која представљају слике природних тела. Појам ових идеалних тела је апстрактан. Он се формира у свести као ментални објекат, слика. Експеримент је прилика која нам омогућава да досегнемо ту идеју. Када кажемо геометрија, пре свега мислимо на Еуклидску метричку геометрију. При томе се више ослањамо на Еуклидску и то не због тога што је Еуклидска више истинита од других, него је подеснија. А зашто је она подеснија од других? Прво, зато што је најједноставнија, не само због наших менталних навика или зато што је она ближа нашој интуицији; Еуклидска метричка геометрија је једноставна сама по себи. Друго, особине геометријских тела прилично се подударају са особинама природних тела која можемо да поредимо и меримо. У математичком свету има довољно простора за разноврсне геометрије, и то је значајно откриће из друге половине XIX века (једна од њих је горе наведена геометрија Лобачевског), а ми се више ослањамо на саму Еуклидску.

Поенкаре закључује да нас експерименти у геометрији уче међусобним релацијама међу телима. Они, без обзира колико бројни били, односе се једино *на релације једних тела према другима* и ништа нам не говоре о међусобним релацијама различитих делова простора. Експерименти упућују не на простор, него на тела и њихове релације са суседним телима.

Из овога можемо да закључимо да је геометријски простор, по својим одликама, потпуно другачији од простора сазданог нашим чулима. Његови објекти нису природна тела, већ њихове слике. Да би људски ум досегао идеје и формирао појам (физичког) простора, створен је геометријски простор. До поменутих идеја долази се експериментима – помоћу чврстих тела и проучавањем односа једних према другима. Поенкаре и каже „да није чврстих тела у природи, не би постојала ни геометрија" (Poincaré 1905, према Ђокић 2007: 42).

3.2. Однос геометријског и физичког простора

Дискутујмо о односу математичког (геометријског) и физичког простора онако како су то разматрали Курант и Робинс (Courant i Robbins 1973) и Божић

(Божић 2010). Курант и Робинс говоре о Клајновом моделу који показује да је хиперболичка геометрија као формални дедуктивни систем исто толико непротивречна колико и сама класична еуклидска геометрија (Courant i Robbins 1973: 182). Они постављају питање која од њих две боље описује геометрију физичког света. Експериментом се не може утврдити да ли постоји само једна или бесконачно много правих линија које пролазе кроз тачку, а паралелне су датој прави. У еуклидској геометрији збир углова у троуглу износи 180°, а у хиперболичкој он је мањи[13]. Још је Гаус (J. C. F. Gauss 1777–1855) покушао да реши ово питање путем експеримента, али није дошао до решења, јер за мале дистанце (чак и до неколико милиона километара) еуклидска и хиперболичка геометрија, које се иначе јако разликују у великом, толико блиско поклапају за релативно мале ликове да су оне експериментално еквивалентне. Докле год се бавимо чисто локалним особинама простора, „избор између ове две геометрије треба учинити само на основу једноставности и подесности“ (Ibid: 182). Еуклидски систем је простији за оперисање, па га стога и користимо, али само за релативно мала растојања (не и за описивање универзума). Слична ситуација је у физици са системом Њутна (I. Newton 1643–1727) и Ајнштајна (A. Einstein 1879–1955) који дају исте резултате за мала растојања и брзине, али се оне знатно разликују када се односе на велике количине. Револуционаран значај открића нееуклидске геометрије према Куранту и Робинсу лежи у чињеници да је тиме уништен појам Еуклидових аксиома као непогрешивог математичког оквира у који може да се смести све наше експериментално знање о физичкој реалности.

Улога нееуклидских геометрија, теорија релативности и новије теорије дају нам разумевање простора у њиховој вези. Кад год се отвори питање односа математике и физике неумољиво се умеша филозофија примећује Божић (Божић 2010). До XVII века није било никаквих спорова. Математичка и физичка слика простора биле су идентичне. Развој дифернцијалног и интегралног рачуна и механике почиње да отвара разна питања. Проналазак закона гравитације, као првог математички озбиљно обрађеног дејства на даљину, надаље компликује

[13] Важи следеће: ”Збир унутрашњих углова троугла може бити било који реалан број из отвореног интервала $(0°,180°)$.” Тако постоји троугао са збиром унутрашњих углова $10^{-10°}$, али и троугао са збиром $180° - 10^{-10°}$.

слику света, па и простора. Број питања расте као и број одговора. Декарт говори о простору као флуиду, састављеном од сићушних честица који делују једни на друге, преносећи дејство на даљину (реч је о сили). Њутн говори о простору као апсолутном – постоји стално и независно од присуства материје. Лајбниц говори о простору као о укупности односа међу објектима. Очигледно је да је еуклидска парадигма непотпуна, а апсолутност простора неспорна. Задатак математике је да опише физички простор. Уследила је права револуција радом Лобачевског и Бољаја који су 'напали' Еуклидов пети постулат. Значајне доприносе дали су на овом пољу Клајн (F. C. Klein 1849–1925), Белтрами (E. Beltrami 1835–1900) и Поенкаре. Њихови резултати могли би се свести на следеће – постојање 'равноправно непротивречних' геометрија. Истраживање Гауса у Гетингену путем оптичког експеримента о утврђивању збира углова уздрмана је кантијанска парадигма. Оно показују да су еуклидска и хиперболичка геометрија еквиконзистентне. Нешто слично ће показати и Риман својим хабилатационим радом. Тиме је ударен темељ о постојању много геометрија и чињеници да је „математика равнодушна према стварности" (Божић 2010). Шта је простор до terminus technicus запажа Божић (Ibid). За било коју математичку структуру, он има одређена својства. Физика је према овоме индиферента. Ајнштајн формулише уопштење Њутнове теорије гравитације користећи Риманову (G. F. B. Riemann 1826–1866) геометрију као погодан амбијент. Васиону, дакле, заиста не можемо описати путем еуклидовог једноставног равног простора. Има, дакле, онолико простора колико геометрија, а геометрија много. Геометрије настају као апстракције. Један је физички простор. Из овога изводимо закључак да геометријски простор није исто што и физички у ширем смислу те речи.

И код Лучића наилазимо на слична објашњења (Lučić 2009: 69). Еуклидов ауторитет био је толико изражен током више од два миленијума да се није могло ни замислити да би геометрија опажајног простора могла да буде било која друга до еуклидска. Ово мишљење је оправдано будући да се геометрија Еуклидових *Елемената* добро слаже са својствима чврстих тела. Емпиријски је утврђено да се простор величине молекула (приближно величина ангстрема) заиста понаша као еуклидски. Кристалографско ограничење еквивалентно је тврђењу да је простор у ком постоје кристали еуклидски простор. Али, геометрија простора унутар атома није еуклидска, колико је познато до сад, или боље речено нееуклидска геометрија једноставније описује својства субатомског простора. Слично овоме за изражавање односа тела у космичком простору погодније је користити геометрију са променљивом закривљеношћу, која није еуклидска. Лучић објашњава да је то другим речима претпоставка да је геометрија васионе сложенија од еуклидске и да се она мења у зависности од близине неке масе и њене количине.

А како се однос простора и геометрије проучава у другим дисциплинама? И зашто нам је то уопште занимљиво? Навешћемо један пример из области уметности. Суштинску и готово физичку повезаност нпр. уметничке слике и реалности живота разматрао је П. Кле (P. Klee 1879–1940)[14]. Његова замисао простора за нас је интересантна. Кле каже да је простор „психо-физички амбијент егзистенције блиско везан за личности и ствари, супростављен геометријском простору рационалне архитектуре: шта је друго геометрија, шта је друго перспектива, до крхка ментална структура која се уткива у простор искуства или живота?" (Ibid: 51). Овде је реч о истом феномену који је Поенкаре изучавао на формално математичком нивоу, само речено из пера уметника о односу (физичког) и геометријског простора. Ово је место наше упитаности о препознавању истих феномена у различитим дисциплинама (окружењима) које би учитељи могли да примењују у настави математике, помоћу инструкција које произилазе из математичког курикулума који би неговао интегративни приступ у настави математике (и проистеклу методичку интерпретацију).

3.3. Геометрија и просторно резоновање

Бавили смо се и питањем просторне способности. Гусев се бавио *математичким способностима* као конкретним обликом специјалних способности (Гусев 2003а: 215). Из обимног рада издвајамо онај део који се односи на просторну визуелизацију. Шварцбурд издвајајући компоненте математичког развоја наводи између осталих и развој просторне визуелизације

---

[14] Сликар и следбеник В. Кандинског у покрету *Плави јахач – Der blaue Reiter* из 1911. године и наставник и теоретичар Баухаус школе, у оквиру које Кле своју поетику претвара у теорију, а теорију у дидактички метод. (Argan, Đ. K. i Oliva, A. B. (2005): *Moderna umetnost 1770-1970-2000, II deo*, Clio, Beograd, str. 51.)

(Шварцбурд 1964, Гусев 2003а: 221). Најзначајније истраживање у вези овог проблема обавио је Крутецки (Крутецкий 1968, Гусев 2003а: 221). Уопштено говорећи интересовање Гусева ка специјалним способностима ученика, па и просторној визуелизацији, заправо је усмерено на то: 1) како развој математичких способности доприноси свестраном развоју личности сваког ученика, 2) како се код свих ученика може покренути развој математичких способности, 3) какве су могућности продубљеног специјалног развоја математичких способности ученика који имају склоности за активности, повезане са математичким начином мишљења (Гусев 2003а: 222).

Гарднер износи да је просторна способност једна од неколико ‘релативно аутономних људских интелектуалних способности’ која се именује као ‘људска интелигенција’ (Gardner 1983, према Clements & Battista 1992: 442). Просторно мишљење издваја се као основа научне мисли. У функцији је формирања представа и манипулисања информацијама у процесу учења и решавања проблема. Реч је о „метафоричној способности која распознаје сличности у различитим пољима и разлике у многим областима појављивања просторне интелигенције“ (Ibid). Већина техничких и научних позива захтева ову врсту способности (конструктори, архитекте, инжењери, хемичари, физичари, математичари и др.) (Harris 1981, према Clements & Battista 1992: 442).

Размотримо питање односа просторног мишљења и математике. Поменимо на овом месту како је Ајнштајн видео овај однос. Врло је занимљиво његово становиште о деловима мисли које нису речи, већ извесни знаци и мање-више јасне слике које могу добровољно да се репродукују и комбинују. Бројни истраживачи виде просторну способност и визуелну имагинацију као битне за математичко мишљење (Lean & Clements 1981, Wheatley 1990, према Clements & Battista 1992: 443). У основи овога лежи препознавање различитих модова мисли које се употребљавају у математици.

Крутецки упућује на два модела мисли: вербално-логичке и визуелно-сликовне (Krutetskii 1976, према Clements & Battista 1992: 443). Баланс између њих чини различите ‘математичке моделе ума’ који одређују како појединац оперише математичким идејама. Крутецки прави разлику и даје следећу класификацију:

- *аналитични* су они ученици који преферирају вербално-логичке моделе ума у математичком решавању проблема, чак и за оне проблеме који леже у релативно једноставном визуелном простору;
- *геометријски* су они ученици који преферирају визуелно-сликовне схеме, чак и у проблемима који су лакше решиви аналитичком апаратуром;
- *хармонијски* су они ученици који немају специфична преферирања ни на вербално-логичко ни на визуелно-сликовно мишљење.

Између математичких постигнућа и просторних способности пронађена је позитивна корелација на свим разредним нивоима (Fennema & Sherman 1977, Fennema & Sherman 1978, Guay & McDaniel 1977, према Clements & Battista 1992: 443). Није тешко увидети да овај однос постоји за бројне појмове у математици који имају визуелни аспект. Клементс и Батиста наводе пример ‘изграђивања блокова когниције’ по Дејвису (Davis 1986, према Clements & Battista 1992: 443) када се одређује површ ротирајућег квадрата на геоплочи. У смислу представа квадрата и троулова описују се менталне репрезентације ротирања и транслације троуглова, склапања фигура при формирању других облика у односу на првобитне (квадрати чији делови сада чине троугао). И совјетски истраживачи наглашавају значај просторног мишљења у геометрији. Визуелизација је основа асимиловања апстрактног (геометријског) значења и посебних појмова (Yakimanskaya 1971, према Clements & Battista 1992: 443). Тако разумевање појма правоугаоника и његова својства захтева да ученик анализира просторне релације страница правоугаоника – да разуме шта су ‘наспрамне’ странице и да их разликују од ‘суседних’. Учитељ би требало да обезбеди такве активности којима ће развијати просторне имагинације ученика, иначе би асимилација била ‘формалистички’ здружена са вербалним информацијама о својствима фигура.

Херкович наглашава улогу визуелизације у развоју ученикове концептуализације геометријских појмова и повезује их са ван Хилеовим нивоима (Hershkowitz 1989, према Clements & Battista 1992: 443). Прво, као референца се узима прототип примера са којим се могући примери визуелно пореде (први ниво по ван Хилу). Друго, прототип визуелног примера користи се да раздвоји битна својства појма (померање са првог на други ниво), који се затим примењује у процењивању других фигура. На крају, важна својства појмова користе се за процену која од фигура је пример појма (други ниво).

Визуелно мишљење многи ученици користе у репрезентовању појмова који не садрже просторне аспекте (Krutetskii 1976, Lean & Clements 1981, према Clements & Battista 1992: 443). На пример, Клементс и Делкампо наводе пример разломака и операција са разломцима, које ученици виде као визуелне изразе (Clements & DelCampo 1989, према Clements & Battista 1992: 443). Заправо, за основношколски узраст Штиглер наводи да је поприлично ослањање математичких појмова на визуелне репрезентације (Stigler et al 1990, према Clements & Battista 1992: 443). Тако Кошлин открива да се деца млађег узраста много више ослањају на слике него што то чине одрасли (Kosslyn 1983, према Clements & Battista 1992: 443).

Џонсон расправља о имагинацији и шта нам омогућава наше телесно искуство према структури свих мисли, не само математичких (Johnson 1987, према Clements & Battista 1992: 443). Постоје два механизма према којима се овај процес одвија. Први је слика схема – враћање динамичких схема наших перцептуалних интеракција и моторичких активности који дају кохерентност и структуру нашем искуству. На пример, вертикална схема је апстракт когнитивне структуре која се појављује из наше природне тенденције за ангажовањем оријентације горе-доле у структурисању нашег искуства. На њу наилазимо стално, као што опажамо објекте и маневришемо светом. Други појам користан за разумевање улоге телесног искуства у мишљењу је метафора. Према Џонсону метафора је начин разумевања пројекције схеме из једног домена искуства да би структурисали други домен друге врсте. То је један од примарних когнитивних механизама помоћу кога структуришемо и чинимо смисленим наше искуство. Будући да је физичко искуство основа интелектуалног развоја, слике схеме постају примарни извор метафора. Кроз метафоре ми откривамо схеме које користимо и које почивају на нашем физичком искуству у организацији нашег апстрактног разумевања.

Коришћење имагинације у математичком мишљењу може да изазове и потешкоће. Херкович тврди да уколико је један појам уско повезан за једну слику, важна својства могу да не буду препозната или коришћена као појам у решавању проблемских ситуација, јер су ограничена због ослањања на слику. Ово је јасно изражено у Фишбајновој теорији фигуралних појмова (Fischbein 1993) и може да буде веома значајно за наставу математике.

Разматрали смо и природу просторних способности. Гарднер тврди да „централно место за просторну интелигенцију јесте капацитет опажања исправне визуелне речи, представљајући трансформације и модификације нечијом иницијалном перцепцијом, као и способност за поновно стварање визуелног искуства, чак и у одсуству релевантног физичког стимула“ (Gardner 1983, према Clements & Battista 1992: 444). Идентификоване су две основне компоненте или чињенице просторних задатака (Bishop 1980, Harris 1981, McGee 1979, према Clements & Battista 1992: 444). То су просторна:

1. *оријентација* – разумевање и оперисање односима између позиције објекта у простору према нечијем положају; на пример, проналажење нечијег пута у згради и
2. *визуелизација* – разумевање и представљање замишљених покрета објеката из дво- и тро- димензионалног простора.

Многи истраживачи дебатују о ова два фактора (Clements 1979, Eliot 1987, према Clements & Battista 1992: 444). Тако Бишоп предлаже две просторне компоненте за које он верује да су посебно релевантне за учење математике. Прва је способност интерпретације фигуралних информација и она укључује разумевање визуелне репрезентације и речника. Друга је способност визуелног процесовања, укључујући манипулацију и транслацију визуелних репрезентација и слика и транслацију апстрактних односа у визуелну репрезензтацију. Гуај и сарадници (Guay et al 1978, према Clements & Battista 1992: 444) виде праве просторне способности у формирању и трансформацији визуелних слика као организацији целине.

Неколико истраживача предложило је најзначајније детерминанте способности просторне визуелизације и то одржавање и манипулацију високог квалитета слика стимулуса, док други, на пример Елиот аргументују да се резултати тестова просторних способности најбоље разумеју не у смислу замишљања, већ у смислу резоновања и решавања проблема (Eliot 1987, према Clements & Battista 1992: 444). Клементс износи да многе анализе показују да би „особе са добро развијеним просторним способностима требало да буду способне у *замишљању* просторних уређења објеката из различитих тачака посматрања и за манипулацију визуелним сликама" (Klements 1979, према Clements & Battista 1992: 444). Стога појам слике игра централну улогу у студији о просторним способностима (Clements & Battista 1992: 444).

Слике се опажају на унутрашњем плану и оне су холистичке репрезентације објеката или сцена које су изоморфне према свом референтном објекту. Оне се мењају на менталном плану током континуираних трансформација кореспондирајући са физичким трансформацијама. Кошлин дефинише четири класе процесуирања слике: 1) стварање слике, 2) преглед слике у одговорима на постављена питања о њој, 3) трансформације и операције на слици и 4) одржавање слике у смислу неких других менталних операција.

Према Елиоту постоји консензус међу истраживачима о простору око следеће четири тачке:

1. Ментални процеси који леже у искуству са сликом слични су према онима који леже у опажању објеката или слика пиктограма[15].
2. Слика је кохерентна, обједињујућа репрезентација објекта са посебне тачке гледишта и перцептивно је отворена као процес скенирања.
3. Слика може да буде субјекат према видљивим менталним трансформацијама, таквим као што је ротација, у којима посредничке тврдње кореспондирају посредничким погледима правих објеката који иду у сусрет кореспондирајућим физичким трансформацијама.

[15] Пиктограф/Пиктограм (лат. pictus – нацртан) је идеограф/идеограм односно графички сликовни приказ објекта или појаве који преноси значење визуелном сличношћу са оригиналом. У настави математике пиктограм је врста сликовне репрезентације (*Лексикон образовних термина*, Учитељски факултет, Београд, 2013).

4. Слике представљају не само објекте, већ и односе између компонентних делова објеката и других објеката. Реч је о „функционалном односу између објеката као замишљених који мора у неком степену одражавати функционалне односе међу оним објектима који се заправо опажају (Shepard 1978, према Clements & Battista 1992: 445).

Закључујемо да је веома важно проучавање појма просторне геометрије. Тродимензионални објекти део су свакодневног живота, али у настави геометрије њих најчешће представљамо помоћу дводимензионалних слика. Наше разумевање тродимензионалне геометрије у тесној је вези са разумевањем геометрије која је дводимензионална. Из наведених радова да се закључити да корен дубоког неразумевања простора може да буде неусаглашеност између познавања геометријског простора и интуитивног поимања простора (Романо 2009b: 7).

4. Улога дечјег просторног поимања у почетној настави геометрије

Један од најзначајнијих изазова XXI века јесте да сваки појединац у друштву влада оним нивоом знања из геометрије који би могао да се пореди бар са нивоом знања из геометрије ученика завршене обавезне основне школе. Стога је од интереса да се расветле основне тешкоће са којима се учитељи и ученици суочавају у настави ове области. Истраживање Берхелота и Салина ослања се на учење и подучавање у почетној настави геометрије, посебно просторног поимања и геометрије раванских фигура (Berhelot & Salin 1998).

Подучавање геометрије заузима по Берхелоту и Салину два циља у математичком образовању и то математика као основни предмет и математика која је сама себи циљ. Математика се бави (Еуклидским) геометријским простором као (основном) теоријом простора. Математички курикулум за основну школу формиран је ако настава геометрије, са математичке тачке гледишта, може сама од себе да разреши све просторне проблеме помоћу просторних репрезентација.

Истраживања дидактичких феномена у процесу учења и подучавања геометрије, нпр. у последњих 20 година у Француској, показују експлицитне потешкоће са којима се сусрећу ученици након завршеног основног образовања, посебно док траје процес учења. Поштујући наставни процес поступак развоја просторне способности један је од главних извора потешкоћа ученика, као и главни недостатак просторних репрезентација за свакодневни живот.

Дајемо преглед неких истраживања и резултате са предлозима до којих су дошли Берхелот и Салин, на које се ослања и наш рад:

- Знање о простору структурисано је у три основне репрезентације према величини простора у којима свакодневни живот узима места: микропростор (кореспондира уобичајеним опажајним релацијама), мезопростор (кореспондира уобичајеним домаћим просторним релацијама) и макропростор (кореспондира са непознатим градовима, просторима у градским или сеоским срединама итд.). Ово за последицу има репрезентације простора као уобичајена ванучионичка/ваншколска искуства која природно нису хомогена и сасвим су различита од почетне наставе геометрије.

- У традиционалном подучавању геометрије ученичке активности захтевају многе вештине из уобичајених микропросторних, који постају основом у процесу подучавања.
- У почетној настави геометрије ученици на папиру представљају геометријске цртеже, користећи репрезентације микропростора уместо геометријског знања. Ово би за учитеље био сигнал при увођењу геометријских појмова као што су углови, простор као скуп тачака, извесне конфигурације које су последице геометријских теорема итд.
- Промишљајући о ученицима старијим од 12 година, очекује се да је један од основних извора потешкоћа у почетној настави геометрије представљање геометријских фигура (на папиру). Проблем јесу раванске фигуре које се разматрају као реални објекти. Учитељи би са ученицима у овом смислу могли да разговарају при цртању фигура, показујући очигледно разумевање у смислу геометријских појмова, а касније и у смислу објеката.
- Постоје ваљани разлози да се не очекује да се геометријска знања не трансферишу спонтано у разрешавању просторних проблема. Овај недостатак генерише дефекте у контроли просторних способности, чак и на нижем степену професионалних активности.
- Откривене су неке препреке у настави које би могле да се превазилазе помоћу визуелног знања о микропростору.

Теоријске анализе Берхелота и Салина показују да постоји опасност да просторне способности ученика буду везане за основне промене које се дешавају у простору ограничене ученичким задацима. Ово је занимљиво запажање Берхелота и Салина. У нашем истраживању се нешто слично догодило. Наиме, ученици су решавајући финални тест знања тешко решавали сложен проблемски задатак. Ученици као да су били ограничени дотадашњим устаљеним процедурама решавања. Берхелот и Салин наводе да ће процес подучавања који циљано води до побољшања ученичких просторних знања опстати ако експлицитно буде део геометријског курикулума.

Истраживање Берхелота и Салина имало је за циљ истраживање ефеката учења и подучавања у геометрији, те просторног знања неопходног за интеракције у свакодневном животу. Теоријски оквир базиран је на дидактичкој и епистемолошкој основи Бросоа и методологији теорије дидактичких ситуација (Brousseau 1983, према Berthelot & Salin 1998: 73). Захваљујући овој методологији и раду Галвеза спецификовани су и проширени Акредолови појмови ‘мале и велике просторне скале’ који су довели до нових појмова микропростора, мезопростора и макропростора (Acredolo 1981, Galvez 1985, према Berthelot & Salin 1998: 73). Анализирана су и нека специфична ограничења инхерентна геометрији, која остварују и специфичан дидактички контакт у учионици, а која су довела до промена у курикулуму у последњих 50 година. Дидактички инжењеринг важан је елемент методологије Опсервационог центра у Бордоу (COREM) на који се позивају Берхелот и Салин, проучавајући појам кружног исечка са ученицима узраста 12 година. Потешкоће које су се испољиле интерпретиране су као дидактичке препреке које настају и из традиционалног приступа подучавања и под утицајем микропросторних репрезентација. Нов приступ који су Берхелот и Салин развили својим теоријским оквиром онемогућио је ученике да користе микропросторне репрезентације. Резултати истраживања показују да су потешкоће које су се раније испољавале сада нестале.

Рецимо нешто и о примеру оскудног знања о простору у свакодневним ситуацијама када се налазимо у простору читајући планове и мапе. Резултати Галвеза упућују на једну макропросторну концепцију која се артикулише на специфичан начин како би се знања користила у сусрету са непознатим великим просторима (на пример, читајући карте крупних размера). Истраживања Берхелота и Салина проширују се са просторних на геометријске појмове.

Већина учитеља подучава ученике како да користе планове, формирајући везу између реалног простора са његовом папирном репрезентацијом, унутар учионице. Код ученика ментална репрезентација у познатом простору омогућава да они разумеју податке са мапе, да их процесуирају у смислу деловања у простору и да је формирана веза између папира и менталне репрезентације мезопростора као једноставна и имплицитно формирана. Али, сасвим је другачије у непознтој ситуацији, јер ученици немају претходно формирану менталну репрезентацију. Да би се снашли на мапи, мора да се направи веза између оријентације сопственог тела, те плана и реалног простора, а понекад и оријентације друге особе.

У курсевима геометрије у основној школи не побољшава се способност оријентације тврде Берхелот и Салин. Проучавајући геометријски курикулум, они показују да једина способност која се данас подучава јесте она која је саставни део аритметике. Тако ће већина ученика изучавати скале на мапама, удаљеност мерењем на мапама и стварну удаљеност. У оквиру математичког подучавања у свакој учионици просторне репрезентације веома су често ограничене интеракцијама са реалним простором при интеракцији цртања на папиру. У прегледу последњих 50 година математичког курикулума у Француској показује се да се подучавање просторног знања може лако изразити Еуклидском елементарном геометријом, прогресивно искљученој из разних курикулума како наводе Берхелот и Салин. Ни у нашем случају није много боља, јер се готово при свакој промени националног курикулума измене врше тако што се изостављају делови курикулума елементарне геометрије.

Берхелот и Салин постављају и питање да ли је могуће побољшати ученичку оријентацију за сналажење на мапама и плановима подучавањем у оквиру курса основношколске наставе геометрије. Током 1991. године изведен је експеримент са ученицима узраста осам и девет година (у COREM циклусу CE2 у Француској школи). Годину дана касније вршена су поређења успеха са истом групом ученика сада узраста девет и 10 година (у циклусу CM1), као и поређење резултата експерименталне према контролној групи, према поменутој врсти способности. Статистички је показана значајна разлика у корист експерименталне групе, а при мерењу годину дана касније постигнути су и бољи резултати у експерименталној групи. Нешто више од 50% ученика у овој групи успешно је решило тест. Овим се показује да се оријентација може унапредити подучавањем, с тим да задатак није ни мало лак.

Истраживање Парсиза 3D геометрије показује да ученици тешко успевају да узму у обзир да фигуре у равни 2D репрезентују 3D ситуације (ученици узимају у обзир само неке парцијалне информације) (Parzysz 1991, према Berthelot & Salin 1998: 76). Независно од ових истраживања, до сличних резултата дошли смо и ми (Ђокић 2007). Поставља се питање са којом просторном способношћу и концептуалним знањем ученицима обезбеђујемо подучавање/учење геометрије на папиру.

Истраживања Берхелота и Салина имала су за циљ да примене стечена геометријска знања и трансферишу их у реалан простор (са великим скалама).

Један експеримент изведен је са 100 ученика узраста 10 и 11 година који су радили у пару и школском клупом смештеном у углу једне учионице. Ученички задатак био је да замишљену путању померања клупе представе маркирањем кредом на поду тако што би ученици замислили померање клупе и довели је у позицију у наспрамни угао учионице. Могао се користити било који геометријски алат (шестар, правоугли лењир, …) и радити све акције осим померања клупе у задату крајњу позицију пре него што се задатак реши. Потом су ученици позвани да то учине ради провере нађеног решења и да одговоре на питање шта би урадили да су имали још један покушај померања клупе. Експеримент је показао да је само 50% ученика било способно да објасни како је успело да уради захтев користећи десни угао при контроли оријентације и служећи се мерама дужи како би предвидели позиције четири ногаре школске клупе. Други ученици су размишљали само о дужинама (и паралелности). У својим одговорима изнели су став да је задатак тежак.

Други експеримент који је уследио на узорку од 35 ученика узраста девет и 10 година је са захтевом за самосталан рад са струњачом у сали за физичку културу. Сличан захтев постављен је као за школску клупу – ученици су имали задатак да помоћу лепљивих чавлића означе место на поду где би струњача била померена на одређени захтев. И овде су резултати били слаби као и у експерименту са школском клупом, јер већина ученика није могла да замисли и користи за контролу десни угао, чак и после померања струњаче у одређену позицију. Ученици су при решавању задатка користили само дужине.

Ученике учимо да на папиру цртају правоугаонике и да знају њихове особине. Али, они заправо готово никада не користе геометријска својства углова. Берхелот и Салин с правом питају зашто је то тако. За контролу настајања цртежа ученици користе друга својства. Контролишу облик помоћу перцептивног значења који је веома ефектан у таквом микропростору. Да би решили проблем, ученици би требало да се изместе из обичног простора на папиру – симболички простор геометрије – у простор у коме они не могу да контролишу облик на први поглед, нити одједном могу да га модификују. Ученици морају да реконструишу цео геометријски модел: дуж спаја две тачке (позиција крака или углова) и контролишу релативне позиције дужи према угловима. Такође се контролише веза између простора и модела. Ученици нису способни или то тешко самостално чине истичу Берхелот и Салин.

5. Развој просторног мишљења деце и апстракције

Велики број истраживања о комплексној природи просторног мишљења деце, о томе како га разматрати и како унапредити дати су у публикацијама совјетске психологије у другој половини XX века (Yakimanskaya 1991). У овом поглављу бавићемо се дискусијом о овим истраживањима, просторном мишљењу деце и његовом развоју.

Издвојићемо фундаменталне идеје које се јављају и код других истраживача, а које обједињују слику која разматра изабрани проблем (Wilson and Davis, према Yakimanskaya 1991: xiii-xiv). Реч је о следећим идејама:

1. Просторно мишљење развија се путем активности.
2. Индивидуа мора да створи слику пре него се она употреби при просторном мишљењу. (Међутим, активност просторног мишљења пре манипулише просторним сликама него што их ствара.)
3. Репрезентације и системи репрезентација су неопходна, али и комплексна компонента просторног мишљења.
4. Уочено је да код појединаца постоји много разлика.

5. Просторно мишљење је динамичан процес који захтева континуитет у регистровању слика. Сликама се манипулише, долази се до нових којима се, такође, манипулише.

Наведене тврдње намењене су истраживачима и свим оним који се баве образовањем, са циљем да се обратити пажња на развој вештина просторног мишљења ученика. Наведена студија Јакиманскаје даје преглед бројних примера. Иако се наводи јак утилитарни аргумент, сличан аргумент који унапређује просторно мишљење унапређује и способност операсања апстрактним идејама које се, такође, развијају.

Јакиманскаја тврди да ученике можемо да подучавамо просторном мишљењу још на раном основношколском узрасту (истраживања су рађена са децом од 4. до 8. разреда, мада су препоруке и пре). Деци су дати задаци дводимензионих репрезентација тродимензионих објеката са различитим позицијама оног који посматра, нпр. 'поглед одозго' и 'поглед са стране'. Реч је о експерименталној студији која је укључила и кванитативне и квалитативне податке.

Један од основних циљева које је ова студија поставила био је одређивање нивоа просторног мишљења. Јакиманскаја је посебно водила рачуна о индивидуалним карактеристикама ученика и њиховим способностима за ментално манипулисање објектима (издвојила је три нивоа). Иако се они разликују од нивоа разумевања геометрије по Ван Хилеу и Пијажеових развојних фаза, сврха класификације им је веома слична. Формирани су да опишу ученичко мишљење и да нас информишу како да осмишљавамо и изводимо подучавање. Јакиманскаја тврди да „развојне разлике у основи зависе од техника подучавања" (Ibid: xv). Она показује да ослањање на конкретну визуелну помоћ није резултат развоја, већ производ техника које се користе у поступку подучавања и које се ослањају на конкретне материјале. Одређена техника подучавања подстаћи ће ученике при стварању менталне слике и омогућиће ученицима да њима манипулишу.

Способност стварања и коришћења просторних слика може да буде оцењена ученичким успехом у извршавању захтева при графичком, уметничком, конструкцијском и техничком изражавању и решавању задатака, где наведена способност установљује независне елементе. На пример, примена просторних односа који се откривају међу објектима при стварању слика док се ученици подстичу у процесу поучавања у настави геометрије (Yakimanskaya 1959, Krutetskii 1968, према Yakimanskaya 1991: 13), техничком цртању (Lomov 1959, Linkova 1971, Gurova 1976, према Yakimanskaya 1991: 13), уметности (Galkina 1955, Kireenko, 1959, Ignatev 1961, према Yakimanskaya 1991: 13) и географији (Shemyakin 1953, Kabanova-Meller 1956, Gamezo 1977, према Yakimanskaya 1991: 13).

Јакиманскаја се бавила и функцијама просторног мишљења деце. Тако наводи да се просторна својства и односи обухватно проучавају у математици (Yakimanskaya 1991: 17). Први геометријски појмови настају као последица апстраховања својстава и односа (искључујући релативну позицију и величину) реалног простора. На пример, појам геометријског тела прво долази као последица апстраховања реалног објекта. Заправо, предмет сваке науке увек је издвојена апстракција из специјалних веза и односа.

Будући да индивидуе могу да препознају својства реалних објеката на основу искуства, погодно је изоловати просторно мишњење као специјалну форму мишљења и именовати је посебним изразом. Епистемолошка функција ’просторног мишљења’ заснована је као помоћ у препознавању просторних својстава и односа и њиховом коришћењу у току решавања проблема који су у вези са реалним (физичким) и теоријским (геометријским) простором. Просторно мишљење настаје из дубоке практичне потребе за оријентацијом у реалном простору и са реалним објектима. У онтогенетском смислу просторно мишљење је изоловано као независна форма менталне активности индивидуе.

У својој добро развијеној форми, просторно мишљење користи слике чији је садржај репродукција и модификација просторних својстава и односа објеката, укључујући њихов облик и величину и релативну позицију његових делова. Ми разумевамо просторне односе са значењем односа између објеката у простору или између просторних својстава тих објеката. Ови односи одражавају појмове као што су смерови кретања (напред-назад, горе-доле, налево-надесно), положаја (између), величину објеката у простору (мањи-већи, краћи-дужи) и сл.

Утврђивање просторне расподеле или релативне позиције објеката захтева систем или оквир карактеристика. Почетна позиција оног који посматра често се узима као референта тачка, док промена често изискује поновно уређење целог система просторних односа. На пример, за описивање учионичке унутрашњости, било да се она опажа или представља, не само што морамо да репродукујемо структуру или особине објеката из учионице, већ морамо да знамо и како да их погодно уредимо у простору. Опис специфичне унутрашњости може суштински да варира, у зависности од изабраних тачака посматрања. Просторна расподела објеката остаје практично неизмењена, али се мења ментална рефлексија слике за сваку промену референтне тачке.

Просторна слика створена на овај начин је динамична, будући да је ментално распоређивање објеката у простору релативно према задатој равни посматрања или према тачки која може да се мења. Избор те тачке може да буде одређен од стране индивидуе или задат у оквиру услова проблема који се решава. Поредити идеју релативне позиције неке индивидуе у просторији можемо када он нпр. стоји на улазу са позицијом насупрот улаза или са позицијом леђима окренут прозору супротно од улаза. Уређеност објеката остаје иста, али се мења релативна позиција оног који посматра, и ово води до стварања различитих слика простора.

Цртежом се одражава релативна позиција оног који посматра објекат. У смислу структуре (облика или међуодноса делова) објекат се не мења, али у зависности из које позиције се објекат посматра (нпр. поглед спреда) слике његових пројекција у равни, међу моделима који се пројектују, се мењају.

Вођен ‘сликом тела’ индивидуа се у простору оријентише релативно према лоцираним објектима. Ми препознајемо просторне односе уважавајући сопствену позицију (ближе-даље, надесно-налево, испред-иза, изнад-испод). Именујмо овај тип односа као однос ‘субјект-објект’ (С-О).

У многим случајевима, објекти у реалном простору утичу једни на друге. У овом случају, морамо да узмемо у обзир просторне односе између самих објеката, без улоге оног који их посматра. Овај тип односа именује се као однос ‘објекат-објекат’ (О-О).

Особа не мења само просторну позицију мењајући позицију посматрања. Како је у међудејству са објектима, она објекте може мењати и вршити пресудан утицај на просторне односе међу објектима. Стога су просторна својства и односи изразито променљиви, супротно објективним односима. Они могу означавати сложен динамичан међуоднос између објеката и индивидуа, представљен схемом 1.

```
O-C-O
  |   |
  O=O
```

Схема 1. Међуоднос између објеката и индивидуа (Yakimanskaya 1991)

Посматрајући објекте у међуодносу, индивидуа може да рефлектује њихове просторне везе и односе. Међутим, она једноставно не размишља о тим односима, заправо постаје одређен део система односа, утичући на њих мењајући их. Репродукујући систем односа, индивидуа формира своја сопствена понашања.

Психолошке студије показују да људи активно препознају и ментално конструишу сазнање о односима просторних објеката према постављеним циљевима активности. Експерименти Јакиманскаје показују како ученици док уче виде различите правилне полигоне на истом цртежу, у зависности од метода којим се елементи слике просторно трансформишу (Yakimanskaya 1958, 1959, према Yakimanskaya 1991: 19).

Испитивање извесних епистемолошких аспеката просторне мисли може да нам помогне као приступ у разумевању његове психолошке природе и законитости, управљајући његовим формирањем и развојем. Просторно мишљење је психолошки конструкт створен и у практичним и у теоријским активностима. Његов развој подстакнут је креативним формама активности: изграђивањем, цртањем, научним или техничким радом и сл. Како ученици уче у сусрету са овим активностима, они свесно усвајају способност репрезентовања резултата тих акција у простору и представљају их сликом, цртежом, конструкцијом итд. Способност њиховог менталног мењања и стварања нових верзија према посебним сликама (схемама), стечена је способност. Друге стечене способности укључују предвиђање резултата неке активности.

Не само цели објекти, већ и њихове конвенционалне семиотичке замене у форми различитих графичких модела (нпр. слика, цртежа, дијаграма и схема) могу да послуже као просторни објекти који се анализирају. Ова особина чини разноврсност садржаја и форми просторног мишљења и усложњава његове функције у различитим формама активности.

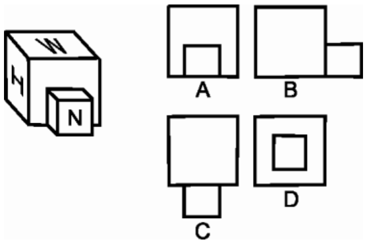
Померање од репрезентација реалног простора ка систему конвенционалних графичких замена изискује развој одговарајућих техника и метода које су у функцији стварања конвенциналних слика и њиховог коришћења. Овај прелаз се не дешава аутоматски, већ ученици у поступку подучавања изграђују специјалну појмовну апаратуру и користе различите референтне оквире и методе репрезентације.

Говорећи о природи просторног мишљења Јакиманскаја се бави и појмом простора и тесне повезаности ова два појма. ‘Простор’ у науци има два значења – реалан простор и апстрактни, математички простор. Модерна математика препознаје бесконачно много различитих математичких простора, а слике формиране у оваквим системима изразито су специфичне. Њих проучавају математичари, логичари, психолози (Shteinman 1962, Grunebaum 1969, Piaget 1960, 1969, Janmer 1964, Sperry 1976 и др., према Yakimanskaya 1991: 23).

Школска математика се бави дво- и тродимензионим Еуклидским простором. Појмови Еуклидске геометрије се у школи проучавају тражећи ослонац у појмовима реалног, физичког простора и као такви нису контрадикторни нашим уобичајеним ставовима. Као резултат овога стварају се услови који одређују линију развоја разумевања простора и истраживање механизама који леже на прелазу од реалног ка математичком простору.

Јакиманскаја је понудила методе дијагностиковања нивоа развоја просторног мишљења. Ми се нећемо њима бавити, већ ћемо навести један пример којим се сагледава једна од могућих техника дијагностиковања. Овим илуструјемо о чему смо водили рачуна приликом структурисања иновативног модела уџбеника математике чији је геометријски садржај конципиран *на простору као моделу* основношколске наставе геометрије.

Захтев који се упућује ученицима односи се на препознавање слике која репрезентује модел (две коцке смештене једна поред друге) гледајући из одређене позиције (видети слику 11.) (Yakimanskaya 1991: 156).



Слика 11. Поређење репрезентација менталном ротацијом (Yakimanskaya 1991)

Ученик треба да замисли модел и направи парове тако да слика (A, B, C, D) одговара погледу оног који посматра на модел (W, N, H). Нпр. један одговарајући пар је N-A.

Анализом решења Јакиманскаја увиђа да се проблем своди на тродимензионални објекат и дијаграм истог објекта тако да се изврши избор тачне репрезентације путем слике. Наведене су три тачне пројекције објекта допуњене једном нетачном. Решавање проблема не своди се само на реконструкцију слике, већ и ротацију која се обавља ван равни и повезивање слике са датом репрезентацијом. Експеримент је показао да ученици различитих узраста могу да га решавају (већ од 4. разреда основне школе; 60 ученика је радило задатак, а потребно време за решавање у просеку је износило 4 min 18 s).

Истраживања Јакиманскаје разматрала су однос између процеса подучавања и развоја просторног мишљења код деце. Резултати показују да подучавање може да помогне и унапреди ментални развој само тамо где се ментална активност директно подражава, мењајући је и водећи у изабраном смеру.

6. Уџбеник почетне наставе математике

Министарство просвете и спорта Републике Србије[16] је 2003/2004. школске године покренуло два пројекта значајна са становишта уџбеника за наставу у основној школи: 1) дефинисање стандарда квалитета основношколских уџбеника (на основу којих се могу процењивати различити аспекти квалитета уџбеника) и

[16] Данас је то Министарство просвете, науке и технолошког развоја.

2) оглед о уџбеницима (са циљем да се помогне процес настајања генерације нових уџбеника).[17] Јавила се, дакле, потреба да се квалитет уџбеника континуирано прати у условима отвореног тржишта уџбеника (Плут ур. 2007: 7).

Колики је значај нове генерације уџбеника код нас говори и податак да је 2010. године одржана *Прва међународна конференција: модерна схватања образовања и нова генерација уџбеника*. Педагошко друштво Србије у сарадњи са Удружењем издавача уџбеника, учила и наставних средстава Србије учествује у организовању ове међународне конференције[18]. Представници просветних власти и издавачи представили су моделе добре праксе у издавању уџбеника у Европи[19].

За нас ће бити занимљива дискусија о настави математике у финским школама и уџбеницима који се користе у наставној пракси. Реч је о земљи која је

[17] Публикације којима смо се служили: а) *Правилник о стандардима квалитета уџбеника и упутство о њиховој употреби*, Просветни гласник Републике Србије, Година LIX, Број 1, 10. март 2010.

б) Завод за уџбенике (2007): „Уџбеник и савремена настава“, *Зборник радова поводом 50 година рада Завода за уџбенике*, Марковић, Б. (пр.), Београд.

в) Ивић, И., Пешикан, А. и Антић, С. (2008): *Водич за добар уџбеник – општи стандарди квалитета уџбеника*, Платонеум, Нови Сад.

г) Кораћ, Н., Крњаић, З., Крстић, К., Лазаревић, Д., Левков, Љ., Лужанин,З., Мадарас, Р., Матовић, Н., Миљковић, В., Митровић, М., Московљевић, Ј., Мркаљ, З., Павловић-Бабић, Д., Петров, Б., Пешић, Ј., Плут, Д. и Требјешанин., Б. (2007): *Квалитет уџбеника за млађи школски узраст*, Психолошка монографија бр. 12, Плут, Д. (ур.), Институт за психологију Филозофског факултета у Београду.

д) Објављена документа *Одбора за образовање* Председништва Српске академије наука и уметности. Доступно 25. марта 2013. на: http://www.sanu.ac.rs/Odbor-obrazovanje/Index.aspx

ђ) Дебате о уџбеницима, Демократски политички форум – Пројекат Фонда *Центра за демократију* из Београда, 2008-2012.

[18] Без организованог присуства универзитетских наставника који се баве уџбеницима са аспекта различитих парадигми, теорија учења и образовања, те наставних приступа.

[19] 1) Из *Програма Конференције*: „Образовно издаваштво у Норвешкој – конкуренција и политика школа“, Паул Хедлунд (Paul Hedlund), Gyldendal Academic Publishing, Oslo. 2) „Зашто ‘лаптоп’ школе још увек користе штампане материјале за учење: дискусија о теорији и пракси“, Мартин Валке (Martin Valcke), Ghent University, Ghent. 3) „Ко одлучује о финансирању и одобравању уџбеника у Немачкој“, Кристоф Блези (Christoph Blaasi), Institut fur Buchwissenschaft, Johannes Gutenberg – Universitat Mainz. 4) „Кад се политика меша у дидактику“, Vasja Kožuh, Založba Rokus, Ljubljana. Добитник награде за најбољи европски уџбеник. 5) „Издавачи и уџбеници, статистика и трендови у европским државама, истраживање 2010.“, Пребен Шпет (Preben Spaeth), European Educational Publishers Group. 6) „Уџбеничка иницијатива у Аустрији“, Соња Хинтерегер Ојлер (Sonja Hinteregger-Euller), Bundesministerium fur Unterricht, Kunst und Kultur, Wien. 7) „Аустријски уџбенички модел – ситуација у којој сви побеђују“, Манфред Меранер (Manfred Meraner), Veritas Verlag GmbH, Linz.

у самом врху према резултатима PISA тестирања[20], поред Кине, Сингапура, Хонг Конга и Јужне Кореје.

Разматрајући концепцијску заснованост образовања и наставе, дајемо преглед две опште теоријске концепције уџбеника и на њима засноване две праксе које су постојале кроз историју европског васпитања (образовања) (Суходолски 1974, према Хавелка 2001: 31). Свака од две теоријске концепције полази од постављених циљева и обликовања праксе – једна је фокусирана на формирање личности, а друга на припремање за живот. Ова прва у основи има концепт особе-личности са идејом пуног персоналног развоја, а друга има концепт појединца-члана заједнице са приоритетом животних вештина (практичних компетенција). Трагајући за новим концепцијама са отварањем других теоријских и практичних питања развоја јединке, трага се заправо за концепцијама иновативних решења у теорији и пракси образовања које се директно пресликавају и на конципирање уџбеника у образовању и настави. Размотримо питање различитих концепција образовања.

Полазећи од циљева који се постављају и начина њихове операционализације, Хавелка наводи четири опште категорије концепција образовања и наставе, које означава као *конгнитивистичке*, *персоналистичке*, *технологистичке и социјално-интеракционистичке* (Ibid: 33). У свакој од наведених категорија постоји више варијаната, а свака од њих укључује више конкретних наставних модела[21].

Когнитивистичка концепција настаје под утицајем идеја Коменског, класичара Хербарта и његових следбеника, затим идеја просветитеља и уобличава се као концепција која за „главни циљ образовања има систематско и координисано развијање сазнајне и делатне компетентности особе“ (Ibid: 34). У савременим интерпретацијама наведеног циља виде се два приступа: традиционалистички и реформистички. У оквиру традиционалистичког приступа

[20] У циклусу 2003. године првопласирана земља, а и у свим другим циклусима тестирања при самом врху табеле.

[21] Овде се под *концепцијом* подразумева општа замисао о образовању или основни пројекат система образовања, односно наставе као главне образовне делатности, док се под *моделом* подразумева детаљно разрађен пројекат или нацрт организовања наставе у конкретној образовној области.

лежи идеја свестраног академског образовања са фокусом на наставни план и програм и његове темељне обраде и усвајање од стране ученика. У реформистичком приступу средиште је на наставној активности која је основа континуираног ангажовања ученика и систематског развијања његових способности. Идеја водиља у уџбенику је самосталност ученика која води ка развијању културе коришћења разних извора информација или знања. Хавелка истиче да је реч о „настави која ангажује опште и посебне интелектуалне способности ученика и кроз то ангажовање поступно развија и повезује интелектaлне и мотивационе диспозиције, оформљује широк репертоар образаца интелектуалног и практичног понашања, систематски подстиче испољавање интересовања, култивише и усмерава аспирације ученика“ (Ibid: 35). Познати модели наставе и учења развијени у овом приступу су проблемска настава, учење путем открића, истраживачка настава и сл. Постоје и покушаји да се традиционалистички и реформистички приступ обједине у један. Сумирајући можемо рећи да когнитивистичка концепција има доста важну улогу у профилисању уџбеника који су израз академског погледа на науку и људску праксу. Она наглашава садржинску страну образовања, а сам уџбеник дефинише програмску структуру образовања са улогом преношења знања као извор садржаја свих наставних и самосталних активности ученика. “Уџбеник има статус основне и обавезне школске књиге” истиче Хавелка (Ibid: 36). Когнитивистичка концепција има за примарни циљ развој способности ученика, а не усвајање готових знања, па је тако и уџбеник доживео значајну трансформацију и добио „статус агенса – водећег чиниоца у моделовању и наставног процеса и структурисању реалних активности ученика“ (Ibid: 37).

Персоналистичке концепције своје утемељење проналазе у Русоовој филозофији, развијају се у педоцентричним теоријским и практичним системима, а затим и у хуманистичкој психологији XX века (Ibid). Фокус образовања померен је са наставних програма на дете. Школски уџбеник је део школског амбијента и постаје једно од средстава које може бити употребљено као један од извора информација, сагласно потребама детета (ученика).

Технологистичке концепције настају из експерименталних лабораторијских истраживања бихевиористичке теорије учења (Ibid). Најпознатија концепција наставе настала у таквим условима је програмирана настава заснована на разним технолошким решењима за програмирано учење, а главно средство су програмирани наставни материјали и програмирани уџбеници. У овој концепцији уџбеник је доживео потпуну трансформацију готово уједињујући домен наставе и домен рада ученика на уџбенику. Уџбеник добија „статус агенса који ... моделује ток и динамику наставе... који постаје актер са којим ученик ступа у интеракцију“ (Ibid: 42). Реч је о интерактивном уџбенику или пакету специјално структурисаних текстова.

Социјално-интеракционистичке концепције своје почетне идеје развијају још од Песталоција, а посебно се уобличавају у XX веку у раду Виготског и њехових следбеник. У први план ставља се образовање као ‘социјална појава’, а школска настава је „социјални интерактивни процес који се одвија у социјално обликованим ситуацијама“ (Ibid: 43). Постоји образовање усредсређено на наставни програм, образовање усредсређено на ученика, па и образовање усредсређено на друштвену заједницу (Wilcox 1969, према Хавелка 2001: 44). За ову концепцију уџбеник је значајно наставно средство. Наставник обликује наставне ситуације, бави се организовањем и праћењем интеракцијски разуђених облика рада, па се у излагању садржаја доста ослања на помоћ која му долази од уџбеника, мада он није и једини извор поузданих информација (Ibid).

Свака од поменутих концепција своје утемељење има у научним истраживањима и све подразумевају прилагођеност узрасту и врсти образовања. У раду са истим ученицима могу се паралелно примењивати различите концепције у различитим наставним областима, као што се могу и комбиновати у истој наставној области (Ibid). Наставни модели у пракси веома често су комбинација елемената из више концепција као одраз сложености васпитно-образовног процеса. „Уџбеник је израз образовне концепције, али је, заједно са организацијом живота и рада школе, њен главни ослонац и најпоузданији пропагатор у образовној пракси. Питање односа уџбеника и наставе, уџбеника и ученичке активности, уџбеника и образовних ефеката, постављају све концепције, а одговоре на њих даје тек образовна пракса“ (Хавелка 2001: 46). У свим концепцијама уџбеник је *системска подршка* наставним, али и свим другим образовним активностима. Он је медиј који повезује свет науке са образовном ситуацијом и њеним активностима. Колики ће значај поједине концепције образовања дати уџбенику, различит је. Тако когнитивистичек и технологистичке концепције уџбенику дају велики значај видећи у њему 'конституенту образовања', док је за социјално-интеракционистичке концепције уџбеник централни, а за персоналистичке периферни 'сегмент школског амбијента' (Ibid).

У нашој школи присутни су елементи различитих концепција образовања, али један општи тон даје традиционална когнитивистичка концепција са академским програмирањем наставе, разредно-предметно-часовне организације наставе и централизовано управљање образовним системом (Ibid). Наше истраживање усмерено је на обликовање и испитивање ефеката иновативног приступа и уџбеника у настави математике заснованог у реалистичном математичком образовању, који се ослања на традиционалне квалитете наше основне школе.

Позабавимо се кратко питањем типа уџбеника с обзиром на концепције образовања и наставе. На основу доминантне функције или комбинације различитих функција које му даје једна или више концепција образовања, Хавелка наводи следеће типове уџбеника:

1) Академски уџбеник – синтеза и систематика знања акумулираних у одређеној области,
2) Акциони уџбеник – организатор сазнајних и практичних активности ученика[22],
3) Посреднички уџбеник – представник/тумач/интерпретатор знања,
4) Интерактивни уџбеник – аутономни технички модератор процеса учења,
5) Референтни уџбеник – приручник за разне животне ситуације,
6) Кумулативни уџбеник – продукт учениковог ангажовања у настави и
7) Изворни материјали у функцији уџбеника (Ibid).

Модел који смо изградили има за носиоца тип уџбеника који у први план ставља сазнајни и делатни развој ученика, а основу за активности узима репрезентативне

[22] Ова врста уџбеника је занимљива за наше истраживање.

проблеме у оквиру реалистичног математичког образовања. Осмишљени уџбенички модел има најавише одлике акционог уџбеника који је усредсређен на ангажовање мисаоних операција и практичних активности ученика који функционише као:

- ослонац у артикулисању наставног процеса; уџбеник повезује наставника и ученика са циљевима, садржајима и методама;
- организатор активности усмерених на разна питања, проблеме, изворе;
- демонстратор различитих модела интелектуалних операција и логичких процедура; примењен је на садржаје различитог степена апстрактности, на искуствено блиске и удаљеније проблемске ситуације;
- водич који ученике поуздано оријентише кроз образовни миље школе и социо-културно окружење;
- увек доступан информатор који садржи релевантне информације, али упућује и на друге изворе знања;
- агенс који поступно али прогресивно смањује асиметрију у знањима, умењима, ставовима наставника и ученика; ученик постепено осваја аутономију у процесу учења (Ibid: 52).

Бавили смо се питањем уџбеника математике и његовим местом у наставној пракси код нас. Говорећи о настави и уџбеницима математике у основној школи и о апстрактности и општости у математици, која се служи концизним математичким текстом, Живковић истиче неопходност надоградње уџбеника уколико хоћемо да он добије адекватно место у ученичком сазнајном процесу (Живковић 1980: 129). Ученик тешко самостално прати уџбеник, јер је математички текст, с једне стране, логички и садржајно густ, а с друге семантички сиромашан (посебно у алгебри, геометрији и сл.), па је текст теже усвајати у настави математике него у настави неких других дисциплина на овом узрасту. Зато би уџбеник математике требало тако дидактички обликовати и формирати навику и код учитеља и код ученика о његовој употреби. Независно од наставног приступа за који се учитељ определује, можемо се сложити са мишљењем француског математичара Лереја који истиче да „настава треба да формира информишући, да учини да се истина открива, а не да се предаје“ (Leray, према

Живковић 1980: 131). У нашој основној школи учињен је известан напредак у активном односу ученика и његовом раду са уџбеником. Када говоримо о уџбеницима, Пенавин истиче да је један од разлога игнорисања уџбеника неразрађена теорија математичког уџбеника у методичкој науци (Пенавин, према Живковић 1980: 131). Желимо ли доћи до уџбеника који информишу и усмеравају, који ученике подстичу на саморадњу, активности и откривање математичких истина, онда се ту има шта истраживати, а то је управо оно чиме се ми бавимо. Уџбеник би олакшао саморадњу ученика, а наставник би могао, приликом припремања часа, више пажње посветити питању усмеравања и вођења ако би уџбеничке јединице одговарале, по структури, школском часу. У њима би се јасно разазнавале фазе понављања потребног градива, мотивисања за рад (увођењем задатака проблема), давањем новог градива, систематизацијом и утврђивањем градива. Укратко, говори се о основном концепту ових фаза са становишта откривајуће методе обучавања ученика (Ibid). Где год је могуће и смислено математичке садржаје би требало уводити и у настави и у уџбенику као математичке моделе практичних проблема. Педагошко-психолошка и методичка вредност наставног приступа путем проблемских ситуација чини да ученик математичке појмове и односе претходно доживи интуитивно, јер му то олакшава њихово поимање. Увођење математичог градива на овај начин ученику се указује на чврсту везу математике са животом, што спонтано утиче на формирање научног погледа ученика на свет. Сама проблемска ситуација утиче на ученике мотивационо, јер оправдава потребу проучавања одговарајућег математичког садржаја, осмишљава га и развија интересовање код ученика за његовим проучавањем (Ibid). У почетној фази обраде новог градива треба да преовлађују информације, али на такав начин да неке једноставне импликације из тих информација открију сами ученици уз одговарајуће учитељево вођење (Ibid). Ово неће прихватити сви ученици, па је на погодном месту у уџбенику (мада се може рећи у настави са оваквим приступом) пожељно формирати таква места на која се ученик може враћати, а који су нека врста сугестија, наговештаја, имплицитног откривања математичких истина. Овде је реч о објектима који су еквиваленти *моделима* у реалистичном математичком образовању. У завршном делу увођења новог градива у уџбеник је пожељно унети делимично урађене вежбе које се уклапају у концепт постепеног развијања самосталности откривања и закључивања. Делимична обрада вођеног вежбања има усмеравајућу функцију ученика у процесу сазнања. Брижљиво осмишљена вежбања требало би комбиновати са вежбама која сумње или незнање ученик може у даљем вежбању исправити и отклонити. Затим се даје кратка систематизација пређеног градива (резиме), који не би требало предвиђати по сваку цену (то зависи од пређеног градива). Задаци за утврђивање градива на школском часу последња су материја коју ученици треба да усвоје пре самосталног решавања задатака (код куће). Ови задаци непосредно прате обрађено градиво, типични су по садржају и методологији решавања, па се може рећи да су нека врста задатака узора (Ibid).

Наведимо кључне тачке инспиративног излагања о настави математике у финским школама, ког смо имали прилику да слушамо. У дискусији о настави математике у задњих 50 година, фински академик и математичар Оли Мартио (Martio 2009a и 2009б) разматрао је интернационалне трендове који су извршили утицај на наставу математике у Финској:

1) *New Math* (1960 – 1970) (изазвао доста полемика, мало је извршио утицаја);
2) *Back to Basics* (1968 – 80) и
3) *Problem Solving* (1978 –) – (извршио велики утицај).

Нас највише занима трећи поменути, јер се њиме бавимо у нашем раду. Мартио уочава и јасно издваја промене које су проистекле као последица утицаја поменутих трендова и ефеката који су се испољили на математички курикулум у Финској:

1) школска математика постала је више дескриптивна – изостављају се тачне дефиниције и докази,
2) геометрија се доста занемарује и
3) рачунања се све више изводе помоћу калкулатора[23].

[23] Општи тренд у предметној настави не само у Финској већ у већини земаља, што није случај у почетној настави где се стварају основе логичког мишљења кроз процедуре/алгоритме извођења операција (сабирања, одузимања, множења и дељења) помоћу оловке и папира.

Ученици посебно имају потешкоћа када прелазе са једног нивоа образовања на други, на пример из почетне наставе на предметну наставу, а онда из предметне наставе основне школе на средњошколску наставу. Мало се чини да се превазиђу ове потешкоће.

После приказа и поређења резултата са матурског теста у Финској из 1981. и нешто више од две деценије касније, 2003. године, уочен је пад успеха ученика у елементарном рачунању – операције са природним, целим и рационалним бројевима. Тиме се показује да математички курикулум у Финској у довољној мери не обезбеђује развој способности ученика потребних за оно што их очекује у даљем формалном школовању[24]. Решавање проблемских ситуација (problem solving) се пренаглашава, будући да су математичка знања која показују ученици на матурским испитима све слабија (Martio 2009б: 52). Разлог овоме може да лежи у чињеници што PISA тест није *тест математичких знања*, већ *тест математичке писмености*[25] и, стога, има шире значење – подразумева примену знања кроз решавање проблемских ситуација (па чак и пренаглашавање). Резултати се јасно виде у извођењу основних операција које се углавном своде на употребу калкулатора (пракса која се примећује не само у Финској, већ и у другим земљама OECD-а) или у елементарној геометрији, на пример у тражењу одговора зашто је збир углова у троуглу 180° (ако права сече две паралелне праве, она гради унутрашње наизменичне углове једнаке, спољашњи угао једнак одговарајућем унутрашњем углу и два унутрашња угла са исте стране једнака двама правим угловима). Настава је таква да се са осетним падом декларишу основни математички принципи, бар на основном курсу, и замењује се листом математичких чињеница без математичког резоновања. Многи наставници се задовољавају демонстрирајући, на пример, наведено својство троугла помоћу папира и маказа (Ibid).

[24] Матурски тест у Финској има више варијанти у зависности од опредељења за даље формално образовање: за упис на универзитет и у професиналне школе (нпр. за инжењере и сл.). Резултати матурских тестова далеко су лошији на основном тесту тј. код оне групе ученика који настављају школовање у професионалним школама и који треба да покажу знања из елементарне математике (што је забрињавајуће за нпр. будуће инжењере).

[25] За разлику од TIMSS теста који јесте тест знања. Иако су резултати финских ученика на TIMSS тесу изнад просека земаља учесница, они су доста лошији од резултата са PISA теста.

Пренаглашеност присуства свакодневне математике увођењем проблемских ситуација у наставу довеле су финске математичаре[26] у отворену дискусију о њима, јер су промене математичког курикулума ишле у смеру да помогну употребу математике у свакодневном животу, али десило се сасвим супротно. Проблеми који се срећу и решавају у школској математици нису проблеми са којима ће се сусрести касније ти исти ученици. У Финској купац од месара би требало да затражи не ¾ kg меса, већ 750g (само ова вредност се може унети у калкулатор/компјутер, а мало њих је спремно да изврши претварање једних јединица у друге). Месару (оном који претвара јединице) није познато значење појма ¾ (одређивање дела целине на елементарном нивоу; одређивање ¾ неке целине у нашем наставном плану и програму ради се у 4. разреду основне школе, а од 5. разреда могуће је решење потражити у скупу рационалних бројева, када се уводе и операције). Показатељи слабог знања из елементарне математике на матурским испитима алармантни су по Мартију, а наведени пример то илуструје, као и други примери који се наводе. Ово највише осећају наставници математике у професионалним школама (нпр. у школама који школују будуће инжењере), дакле на каснијим нивоима формалног образовања.

Математика се не тиче само професионалних математичара. Математика се све више и више користи у разним професијама. Проблеми који се јављају у PISA тестирањима су различити од проблема са којима се људи из различитих професија сусрећу у свакодневном обављању посла. Из наведених разлога потребно је преиспитати постојеће математичке курикулуме који обезбеђују потребно формирање појмова и развој способности, посебно посебних вештина које захтева друштво. У смислу промена Финска није једина земља (Ibid). Добро место да се запитамо шта је нама чинити. Да ли су задаци који се јављају на PISA тестовима усаглашени са нашим математичким курикулумом? Зар курикулум (наставни план и програм) не би требало да наткриљује наставне активности (Пантић и Ђокић 2005). Захтеви наших математичара и методичара јасно су изражени ка променама (Пантић и Ђокић 2005, Божић 2012). Тако М. Божић наводи да је „неопходна елементарна ревизија планова и програма како би се

[26] Мада Мартио позива стручну јавност и других земаља да дискутује о овим питањима.

прилагодили новим, примењеним областима математике, попут problem solving-а…“ (Божић 2012: 11).

Када се говори *о уџбеницима* све више се заправо говори о отвореном тржишту и могућностима да школе и учитељи самостално праве изборе уџбеника. Мартио поставља питање да ли је можда приступ увођења математичких појмова путем проблемских ситуација, у наставном приступу и уџбеницима који подржавају изабрани приступ, разлог високом скору финских ученика на PISA тестирању, иако знамо да се математика знатно више изучава у земљама које су оствариле мањи скор (на пример Француска) (Martio 2009a).

Мартио износи став да приступ проблемској настави у математици није ни добро схваћен и не употребљава се ваљано, јер његова суштина лежи у разумевању математичких појмова, њихових значења. Наше виђење овога могло би се илустровати следећим једноставним примером. Могуће је поћи од проблемских ситуација где се разломак види као део неке целине (делови чоколаде, шаховске табле, поља у игри „Потапање подморнице“ и сл.), али је у једном моменту потребно ученике довести до појма разломка са значењем рационаланог броја као односа два цела броја $\frac{a}{b}$, где је $b \neq 0$. У скупу целих бројева једначина $a \cdot x = b$ нема решења за произвољне $a, b \in Z$. Постављамо слично питање као и код сабирања у скупу природних бројева – да ли је могуће проширити скуп целих бројева тако да се наведена једначина може решити за сваки избор из новог скупа. Приступ који Мартио описује се чак преиспитује и у холандском курикулуму (Ibid).

Тренд у Европи је различитост у школским курикулумима и отворено тржиште уџбеника са све више аутора. Уџбеници су доста слични, а разлике се уочавају тек у предметној настави. Истиче се значај *избора уџбеника* као кључно питање (Ibid). Питање избора уџбеника све више се намеће (Милинковић, Ђокић и Дејић 2008, Ђокић и Дејић 2008, Milinković i Đokić 2009, Đokić 2011). Дилеме учитеља или студената будућих учитеља везано за уџбенике јесте који од уџбеника математике за млађи школски узраст одабрати за рад у учионици од онога што им је понуђено. Једно од важнијих питања јесте концепт уџбеника који је подржан одређеним наставним приступом са упориштем у одређеној теорији образовања. Методичар аутор уџбеника размишља о следећем: у којој од теорија образовања налази упориште, према одабраној бира наставни приступ и према томе формира одређени концепт уџбеника. Можемо да кажемо да постоје веома различити наставни приступи, и према томе различити концепти уџбеника. Дилема није да ли мања или већа разноликост уџбеника ако знамо да се наш школски систем определио за овакву идеју још 2003. године. Намеће се питање да ли су уџбеници који су на располагању учитељима за рад заиста различити по својим концептима?! Учитељи су у свакодневној пракси доста упућени на уџбенике. Они одлучују шта ће из њих подучавати, како то изводити, које врсте вежбања треба применити. Процес учења увелико је одређен садржајем уџбеника (Robitaille and Travers 1992: 706).

Да ли можемо променити неке од структурних елемената математичког курикулума или је довољно изменити наставне приступе подржане одређеним концептом уџбеника и тако одговорити савременим захтевима наставе математике? Један од могућих наставних приступа је *РМО* којим се у раду бавимо.

Из интернационалних студија може се јасно уочити проблемска настава (учење путем решавања проблема) подржана у многим уџбеницима и као тренд у наставној пракси. Тако Сугијама износи анализу уџбеника од 1. до 8. разреда основног образовања у Јапану и САД-у који негују наставни приступ подржан проблемском наставом (Sugiyama 1987, према Robitaille and Travers 1992: 706).

Анализе интернационалних студија[27] дају смернице за наставу математике – шта учити – и крећу се у два нивоа. Први суштински ниво битно утиче на побољшање подучавања и учења, док други даје методолошке смернице како би требало обликовати будуће математичке курикулуме (Ibid).

[27] Из различитих компаративних студија интернационалних тестирања можемо да добијемо информације о учењу и условима у којима се оно изводи (PISA - Programme for International Student Assessment, TIMSS - Trends in International Mathematics and Science Study, PIRLS - Progress in International Reading Literacy Study, TALIS - Teaching And Learning International Survey и др.). На пример, према објављеним резултатима PISA тестирања из 2009. године наши ученици су из математичке писмености постигли 442 поена (ОЕЦД просек је био око 500; у задњем циклусу износио је 493). Између два тестирања Србија је направила корак напред у математичкој писмености и забележила пораст од седам поена (напредак је обично између седам и осам). Иако је опао број функционално недовољно писмених ученика (за скоро 20%) и даље остаје проблем који у области математичке писмености износи чак 40% и сл.

Информације о промени ученичких постигнућа и њихов однос са наставном праксом коју изводе учитељи, имају одлучујућу улогу за разумевање онога шта се заправо дешава у учионици док се изводи настава математике. Ово разумевање основна је прекретница успешном обликовању и примени измењеног курикулума или одабраним наставним приступима (Ibid). Осим квантитативних података, који се добијају из компаративних студија, за нас су од заначаја и они квалитативни. Занима нас како ученици приступају задатом проблему. Из учионичких ситуација посебно нас занима шта раде учитељи, а не само шта казују да раде.

Са једне стране пратимо ток савремених истраживања у теоријама образовања, а са друге чврсто смо у коренима идеја великих умова XX века – А. Поенкареа и М. Миланковића (1879–1958) – у трагању за решењем које је прихватљиво нашем културном миљеу. У том смислу суштински се ослањамо на идеје којима смо били надахнути читајући изабрана дела М. Миланковића. Једна од њих проистиче из самих зачетака геометрије. Посредством Питагоре и његове школе, надахнуте генијем грчког духа, из египатске примитивне, практичне геометрије никла је и развила се грчка геометрија, основа наших егзатних наука[28]. Миланковић каже „Увидео сам да се свака појединачна наука може схватити и прозрети до дна само онда ако се упозна и њен постанак и постепени развитак до њеног савременог стања. У уџбеницима, какви се употребљавају у школској настави, о томе њеном постанку и узрасту се обично и не говори... Када га проучих, осетих како стојим на чврстом тлу, а духовни поглед ми се разбистрио и раширио."[29]

Наведимо резултате једне интернационалне студије која се бави развојем математичких курикулума, препознати као успешни, те имликацијама на уџбеник математике. Учење путем решавања проблема препознаје се као важна вештина, укључујући процесе анализовања, интерпретације, резоновања, предвиђања,

[28] Миланковић, М. (2008): *Изабрана дела*, Књига 4, Завод за уџбенике, Београд, стр. 285.

[29] Ibid, стр. 287.

евалуације и рефлексије (Anderson 2009: 1). Реч је о свеобухватном циљу или основној компоненти школског математичког курикулума у многим земљама. Развој ученика који успешно уче путем решавања проблема је комплексан задатак који подразумева широку лепезу вештина (Stacey 2005, према Anderson 2009: 1). Андерсон наводи да је математичко знање ученика који уче на овај начин са дубоким разумевањем и општим резоновањем, као и усвојеним хеуристичким стратегијама које се користе за решавање нерутинских и нестандардних проблема. За ученике је потребно да стекну и уверења и способности за организацију и руковођење, а за све наведено морали би да имају развијене способности комуникације и учења и рада у групи.

Учитељи могу разним начинима да стекну своје знање како би се припремили за учење и подучавање у настави математике путем решавања проблема (Cai 2003, према Anderson 2005: 1). Један од начина је у току самог формалног школовања, а други је обука којој се приступа у току рада, како би се традиционални приступ путем измењених метода преобразио (решавајући нерутинске проблеме и проблемске задатке) (Anderson & Bobis 2005, према Anderson 2009: 1). Издвајамо запажања истраживача о математичком курикулуму који наводе важна ограничења са којима се сусрећу у пракси. Ради се о: 1) типовима питања који су саставни делови тестова при провери знања ученика и 2) питањима који су саставни делови уџбеника (Doorman et al. 2007, Kaur & Yeap 2009, Vincent & Stacey 2008, према Anderson 2009: 2). Настојања истраживача усмерена су на развој националног курикулума у Аустралији који негује добар приступ учењу путем решавања проблема и подстицање учитеља за примену. Интернациналне студије показују да је оваква врста учења саставни део курикулума: 1) са реалистичним приступом (нпр. Холандија) и 2) који смањују садржаје остављајући, на тај начин, учитељима више времена за учење и подучавање путем решавања проблема (нпр. Сингапур). Опишимо их.

Курикуларна документа могу да се представе као: 1) листа тема математичких садржаја, нпр. типични садржаји укључују фундаменталне математичке идеје, историјски груписне по темама – број, алгебра, мерење, геометрија и подаци и 2) скуп процеса (токова развитка) – реч је о акцијама у којима се примењују математичке процедуре за решавање рутинских или нерутинских проблема. Честа је пракса ових других, груписаних и обједињених у једну целину (Clarke, Goos & Morony 2007, према Anderson 2009: 2). Наведена студија разматрала је курикулуме Сингапура, Хонг Конга, Енглеске, Холандије и Аустралије, са примером њихових приступа и примена.

- *Сингапур*

Резултати ранијих извештаја TIMSS тестирања из математике довели су до низа курикуларних промена у Сингапуру. Садржај је редукован за око 30% (Kaur 2001, према Anderson 2009: 2), а учење путем решавања проблема постао је главни циљ учења математике (како то схема 2. приказује).

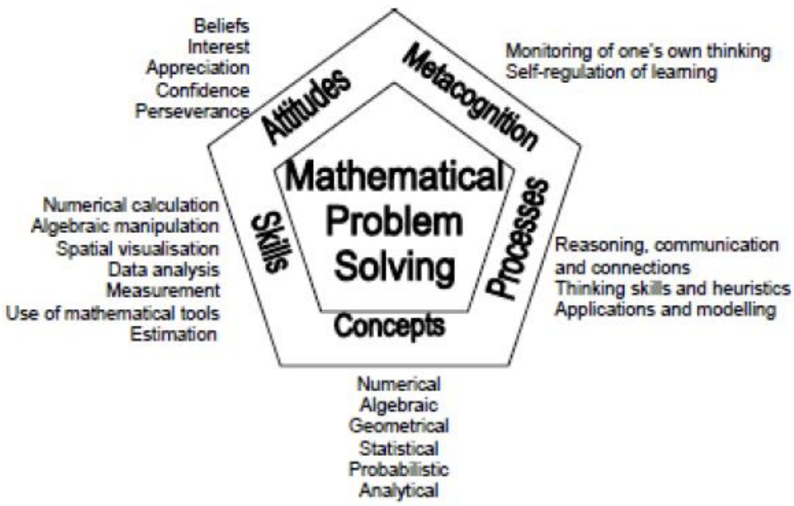


Схема 2. Оквир математичког курикулума у Сингапуру
(Министарство образовања 2006. године)

Из ње се јасно препознаје шта је оквир математичког курикулума и његова оријентисаност на учење путем решавања проблема, у коме су смештене међусобно повезане компоненте: садржај представљен кроз 1) вештине (нумеричког рачуна, алгебарске манипулације, просторне визуелизације, анализе података, мерења, употребе математичког алата, процене и резоновања, комуникације и повезивања, способности мишљења и хеуристичког закључивања и математичко моделовање) и 2) процесе (укључују стицање математичких знања и њихову примену); затим 3) појмови (нумерички, алгебарски, геометријски, статистички, вероватни и аналитички), 4) ставови (репрезентују афективне димензије учења) и 5) метакогниција (наглашава значај праћења сопствених мисли ученика и њихову саморегулацију).

Иако је курикулум у средишту реформи још од 1992. године (Kaur and Yeap 2009, према Anderson 2009: 2), извештаји показују ограничену имплементацију у уџбеницима и учионичкој пракси, која и даље садржи типично затворене, рутинске проблеме и захтеве. Реформе које су настављене и даље се односе на могућност смањења садржаја, али превасходно на промену стручне оспособљености учитеља у смислу више ангажовања ученика у решавању проблема у настави математике (Kaur & Yeap 2009, према Anderson 2009: 2). За професионалну оспособљеност учитеља побринуло се ресорно министарство које пред учитеља поставља задатак даљег професионалног развоја и стручног оспособљавања кроз похађање 100 сати наставе годишње (Kaur 2001, према Anderson 2009: 2).

- *Хонг Конг*

Значајни кораци започети су још 2000. године (схема 3. приказује у ком смеру се промене крећу). Оквир курикулума у Хонг Конгу дат је кроз три повезане компоненте: 1) области које се издвајају као кључне за учење, 2) основне вештине и 3) вредности и ставови. Математика се препознаје и наводи као кључна област за учење и развој основних вештина код ученика.

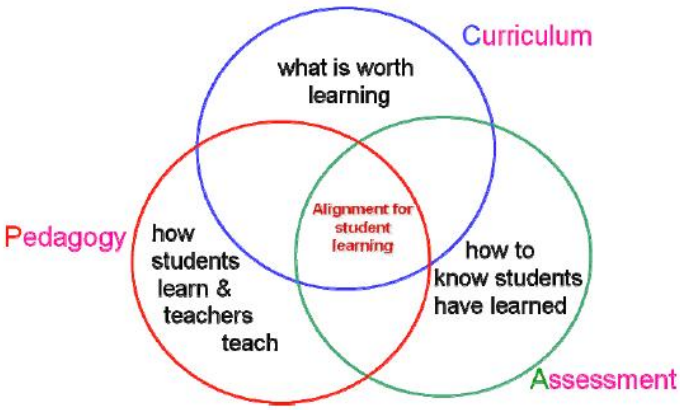


Схема 3. Однос курикулума, педагогије и вредновања у Хонг Конгу (према Националном курикулуму из 2008. године)

Изводи се закључак да Хонг Конг има кохерентан курикулум са постављеним високим очекивањима који вреднује основне вештине. Учитељи имају добро педагошко знање, као и знања из одговарајућих области. Али, ученичка ефикасност и њихови слаби ставови заокупљују пажњу истраживача, посебно изражено у настави математике. Тенденција је јасно уочљива ка тестирањима ученичких знања, математички курикулум је збијен, а учење и подучавање као процеси изводе се у великој журби да би се постигли постављени исходи.

Учитељи су у настави математике свесни потребе за учењем и подучавањем путем решавања проблема, али не постоје довољно поуздани докази о њиховој примени. Покушава се што веће укључивање ученика у дискусију, математичко резоновање и решавање проблема, али пракса показује тенденцију вођења ка решењу предодређеним путевима, без приступа више отвореним математичким идејама (Mok, Cai & Fung 2005, према Anderson 2009: 4).

- *Енглеска*

И овде је видљива тенденција ка учењу путем решавања проблема које се описује како „лежи у срцу математике“ (DCSF 2008a, према Anderson 2009: 4). Реч је о процесу унутар саме математике и одређеном контексту који укључује репрезентацију, анализу, интерпретацију, евалуацију, те комуникацију и рефлексију (представљено на схеми 4.).

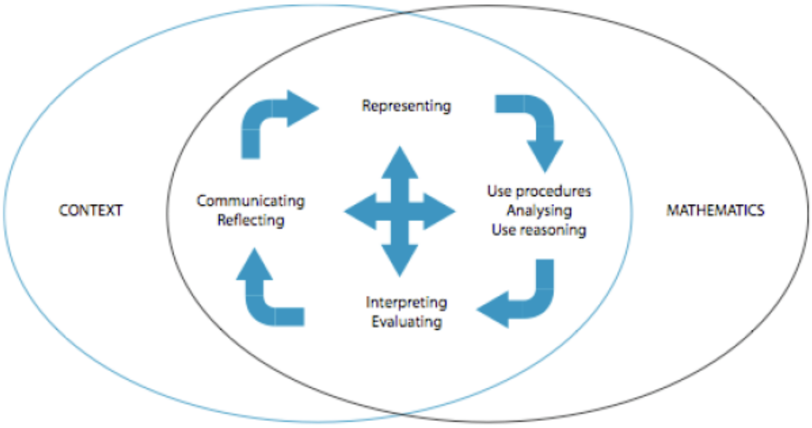


Схема 4. Процес решавања проблема у настави математике
(Департман за образовање, Велика Британија 2008.)

Слика приказује двојну природу математике: а) она је алат за решавање проблема у широком спектру контекста и б) дисциплина која има особену и ригорозну структуру. Оно што је значајно за овај национални курикулум су припремљени бројни материјали намењени учитељима као подршка у настави.

- *Холандија*

О самом приступу *РМО* овде нећемо писати (већ смо то раније учинили), али ћемо истаћи неке битне компоненте математичког курикулума. Теоријски приступ оригинално развијен у Холандији прихваћен је у још седам земаља, укључујући САД-е и Енглеску (Romberg 2001, према Anderson 2009: 6).

Учитељи имају велику слободу у формирању курикулума, мада уџбеници представљају основни водич који следи постављене кључне циљеве. Занимљиво је запазити да учење путем решавања проблема није екцлицитно постављен циљ. Учитељима се оставља велика флексибилност (Heuvel-Panhuizen 2000, према Anderson 2009: 6). Неке врсте помоћи учитељима дају се као смернице за учење конкретних садржаја, али то свакако нису 'рецепти' шта и како подучавати. Иако је *РМО* усмерена на подршку имплементације проблемски оријентисаног курикулума, постоји мало доказа о учењу путем решавања нерутинских проблема у холандским школама (Doorman et al. 2007, према Anderson 2009: 6). Недостатак таквих проблема у уџбеницима и тестовима наводи се као главни разлог ограничене имплементације.

- *Аустралија*

Измењен математички курикулум из 2009. године има следећу структуру: 1) број и алгебра, 2) мерење и геометрија и 3) статистика и вероватноћа, као и четири облика оспособљености ученика за – разумевање, флуентност, решавање проблема и резоновање (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, према Anderson 2009: 6). Решавање проблема се описује као „способност за доношења одлука, интерпретирање, формулисање, моделовање и истраживање проблемских ситуација и ефектно комуницирање које води ка решењима проблема" (National Curriculum Board 2009, према Anderson 2009: 6). Наводи се да је за учитеље потребно направити што већи број модела за праксу и на тај начин подржати имплементацију курикулума.

Килпатрик и сарадници наводе и *продуктивни ученицима својствени квалитет ума* као пети облик способности који се описује као „уобичајено ослањање да се математика види као корисна и вредна, повезана са уверењем приљежности и ефикасности“ (Kilpatrick, Swafford & Findell 2001, према Anderson 2009: 6). Овај облик способности не наводи се као део курикулума, мада истраживачи о њему озбиљно промишљају. Он то није, јер се претпоставља да разлог лежи у чињеници што је тешко успоставити стандард постигнућа који му одговара. Па ипак, Килпатрик и сарадници примећују да се пет облика способности ученика „међусобно комбинују и зависе једни од других“ (Ibid: 6) и да они омогућавају да се стандарди постигнућа ученика одвојено дефинишу за сваку од наведених способности.

Разматрање математичких курикулума и учења путем решавања проблема у Сингапуру, Хонг Конгу, Енглеској, Холандији и Аустралији открива неке сличности али и разлике. Тако Сингапур прави измене у математичком курикулуму редукујући математички садржај, у Холандији се математички појмови формирају на основу релевантних контекстуално заснованих проблема у *РМО* приступу, у Енглеској се математички курикулум заснива на обезбеђивању велике флексибилности и богатим примерима проблемских задатака, Хонг Конг се залаже за развој подршке учитељима, а у Аустралији се значај придаје способностима ученика за разумевање, флуентност, решавање проблема и резоновање. Сви препознају да је за учитеље важно да у наставни процес више укључе решавање проблемских задатака, уџбенике који би садржавали више примера проблема и тестирање ученика која укључују и оцењивање проблемских задатака.

На основу описане студије Ву и Занг примећују да је увећан фокус на учење путем решавања проблема и математичко моделовање, како у земљама на Истоку, тако и у земљама на Западу (Wu and Zhang 2006, према Anderson 2009: 7). За развој курикулума искуство у решавању проблема се препознаје и наводи као важан моменат, под претпоставком да су ученици оспособљени да примењују математичка знања. Решавајући проблемске задатке ученици развијају дубље разумевање математичких идеја, бивају више ангажовани и мотивисани за решавање оваквих задатака, уважавајући значај и корисност математике.

Уочено је да се већина разматраних курикулума определила да учење путем решавања проблема укључи као саставну важну компоненту, али је примећена и њена ограничена пракса. Наглашава се значај обезбеђивања извора за учење и рад, више времена у настави, али и могућности да учење путем решавања проблема буде препознато као вредно да би било саставни део курикулума (Ibid). Учитељима је потребно обезбедити примере решавања нерутинских проблема, посебно путем уџбеника.

Бавили смо се и питањем проблематизације градива у уџбеницима математике. Идеја проблематизације градива и принципа когнитивног конфликта у школском учењу потичу од Пијажеовог схватања сазнања и когнитивног развоја, а заступљене су и у неовиготскијанском приступу настави и учењу, и сходно томе у уџбеницима. Овај део рада управо говори о разлозима зашто је важно проблематизовати дискурс уџбеника, те размотрити начине на које се то може остварити (Pešić 1998, 2005).

У педагошкој психологији дуго се истражује проблем односа дедуктивног или директног и индуктивног подучавања. Први је карактеристичан за рецептивно учење, а други за различите варијанте учења путем открића. Уопштавања истраживања показују да нема поуздане потврде о супериорности једне опште методе учења (Ausubel 1968, Cronbach 1977, према Pešić 1998: 149), као и да обе наведене методе имају своје место у педагошкој пракси чија вредност зависи од доста чинилаца и то: постављеног образовног циља, природе дисциплине која се дидактичко-методички обликује у школски предмет, садржаја који се уче, узраста ученика, њихових способности итд. Пешић наводи да је „право питање како у настави остварити најбољу комбинацију ове две методе, пошто се не ради о међусобно искључивим“ (Pešić 1998: 149).

Ово је прихватљиво становиште и за уџбеник. Ако замислимо уџбеник који би почивао само на учењу путем открића, онда би он личио на збирку почетних проблемских ситуација којима би се ученици подстицали на самосталан рад и били ништа више од полазне основе за њихове активности (Ивић 1988, према Pešić 2005: 230). Али, с друге стране, уџбеник не би требало ни да презентује готова знања или да основна стратегија у обликовању градива буде вођење сазнајне активности ученика помоћу питања и задатака, па се за остваривање образовне и развојне функције препоручује да садржи интелектуалне проблеме и задатке различите по садржају и по природи интелектуалне делатности коју захтевају, с обзиром на интелектуалне способности ученика млађег основношколског узраста и особеност науке чији се садржаји дидактичко-методички обликују. Ово би значило да уџбеник повремено укључује делове који се заснивају на учењу путем открића или решавању проблема и делове који се реализују доминантно кроз питања и налоге (Pešić 2005: 231).

О важном и ефектном начину проблематизације уџбеника Пешић говори у смислу проблема који се уграђују у сам начин излагања градива „кроз интелектуално провокативан текст који садржи јасне и добро постављене проблеме везане за базична знања дате области" (Pešić 2005: 231). Тако су проблеми постављени у целом уџбенику, ученици се воде програмираним садржајем и одговарајућим питањима. Делови текста могу да буду слични научном дискурсу са дефинисаним проблемом који се анализира, са обрасцем проблем-решење-евалуација, са дијалошким обрасцем питање-одговор и сл.

Пешић предлаже нека конструкцијска решења за уџбеник: 1) *активирање постојећег знања и искуства ученика*, 2) *проблематизацију градива,* 3) *увид у настанак и развој знања* и 4) *укључивање когнитивног конфликта и проблематизацију градива у питањима и задацима* (Pešić 1998: 150-153).

Ученици се у активирању постојећег знања и искуства суочавају са непотпуношћу постојећег знања и немогућности да разреше задати проблем. Овим се постиже бољи ефекат него само презентацијом нових чињеница/принципа/поступака. Посебно је занимљива улога спонтаних појмова изграђених у свакодневним ситуацијама. Спонтано се увек активира и учествује у школском учењу, било да га учитељ препознаје или не (Ausubel 1968, према Pešić 1998: 151). Спонтаним знањима из свакодневног искуства требало би посветити посебну пажњу, јер представљају интуитивно, дубоко укорењено поимање стварности. Важно је постојећа знања активирати и увести у интеракцију са научним знањима, те их тиме модификовати, употпунити и подићи на виши ниво. Постојеће знање и искуство у вези са оним што је предмет проучавања активирамо *питањима* и *увођењем проблема или задатака* којима се отвара нека дилема, ствара когнитивни конфликт, демонстрира неки научни принцип и сл. Питања се састављају тако да, у контексту одабране проблемске ситуације и примерено узрасту деце, активирају управо оне аспекте знања који су непотпуни а који чине основу за модификовање у праве научне појмове и приципе.

Проблематизација градива омогућава учениково активно учешће у процесу учења, у повезивању, упоређивању и интегрисању информација, апстракцији, генерализацији, формулисању принципа итд. Својим питањима и информацијама ученике води у разговору, у дефинисању проблема, тражењу додатних објашњења и сл., па све ово уџбенички текст чини провокативнијим и занимљивијим. Проблеми у уџбенику требало би да су разноврсни и по садржају и по логичко-психолошкој природи тј. по *типу интелектуалне делатности* коју захтевају. То су проблеми дефинисања (разликовање битних и небитних својстава појмова), уочавања различитих релација међу појмовима, проблеми који захтевају упоређивање, апстраховање, генерализацију, анализу и синтезу, аргументацију и доказивање, као и проблеми везани за дивергентну продукцију (Ивић 1988, према Pešić 1998: 152). Уџбеник би требало да обезбеди завршни корак у виду јасне, прецизне и потпуне формулације принципа или дефиниције појма, као и релација међу њима.

Плут наглашава потребу да одабрана проблематизација буде аутентична насупрот псеудопроблематизацији (Плут 2003). Први предуслов је да одабрани проблеми буду смислени како из угла научне дисциплине, тако и развојно релеватни за ученика, његове потребе и интересовања. Други предуслов је се не ради о квазипроблемима, већ да је реч о проблематизацији која носи озбиљност, утемељеност и интелектуално поштење у разматрању одабраних проблема.

И још неколико речи о изазовима проблематизације градива и увођењу проблемског дискурса уџбеника. Проблематизација уџбеничког дискурса подразумева општу стратегију у дидактичко-методичком обликовању садржаја. Исказано речником теорије уџбеника ово значи да проблематизација мора бити остварена „баш у основном тексту“ (Pešić 2005: 233) тј. у самом начину изалагања градива. Проблематизација градива јесте важна структурна компонента уџбеника, али поштујући дух, а не слово проблематизације (Ibid). Све активности у савремено дизајнираном уџбенику треба да буду функционалне и са јасном везом активности и садржаја који се уче, чиме он постаје адекватна подршка учењу (Budianski 2001, према Pešić 2005: 234). На овом месту можемо се запитати и о границама проблематизације, имајући на уму да осим стицања знања и решавања проблема ученици трагају за тачним одговором, сигурним и провереним репрезентативним знањем. Дискурс уџбеника за који се залажемо је онај који преиспитује паралелна тумачења истог феномена и отворено указује на дилеме и проблеме који немају један потпуно тачан одговор.

Ученицима је потребно омогућити увид у настанак и развој знања. Наставним приступом и уџбеником било би пожељно приказати и процес стицања знања, а не само завршне резултате тог процеса, што ће указати и на тражење *пута* онако како се десио у историји науке, као и отвореност питања и проблема (Ивић 1988, према Pešić 2005: 230). Пешић наводи да би се ово најбоље могло постићи *укључивањем ученика у смислене задатке и проблеме* чије решавање захтева оне интелектуалне активности које се дешавају у процесу стицања и развоја знања (Pešić 1998: 153). Може се приказати конкретан пут до неког научног достигнућа, познат из историје науке – уочавање проблема, постављање хипотеза, тражење/лутање/открића решења, проверавање и супротна гледишта на проблем, све до уобличавања научних знања. На овај начин ученици би схватили да су знања резултат великог рада, развијања и мењања, али и осећаја задовољства у просецу сазнања.

Питања и задаци у уџбеницима треба да укључе уочавање когнитивног конфликта, те да буду непосредно укључени у формулисање и решавање различитих проблема, иако се проблематизација остварује пре свега кроз сам начин излагања градива. Пожељно је да питања буду што разноврснија и да у што већој мери интелектуално активирају ученике како би развили њихове интелектуалне вештине и стратегије (Pešić 1998, 2005). Посебно су корисни задаци у виду *самосталних пројеката* који разликују постављање, организовање и решавање неког проблема.

6.1. Нивои знања у уџбенику математике

Наше интересовање усмерено је на то какво знање очекујемо да ученици покажу учећи из савремено обликованог основношколског уџбеника, с обзиром на његову епистемолошку и логичку природу.

За систематизацију и класификацију образовних захтева или нивоа знања и интелектуалних вештина ученика најчешће се користи Блумова класификација као најразрађенија, па се у раду и ослањамо на ову таксономију образовних циљева (Bloom 1981[30]). Како би постављене циљеве образовања досегли, одређени квалитети би требало да буду уграђени у наставни програм, у наставни процес, у уџбеник, као и у саму евалуацију знања. Стога је битно да Блумова таксономија образовних циљева буде размотрена и примењена ради што бољих решења за уџбеник.

Таксономија садржи шест главних категорија васпитно-образовних циљева, односно знања и интелектуалних способности и вештина које су хијерархијски организоване. Реч је о: 1) *усвајању знања*, 2) *схватању*, 3) *примени знања*, 4) *анализи*, 5) *синтези* и 6) *евалуацији*. Главне категорије операционализоване су кроз конкретне задатке којима је могуће испитати интелектуална понашања ученика и утврдити којој од наведених класа она припадају (Pešić 1998: 68). Емпиријски је потврђено да оваква хијерархијска организација понашања одговара и реалном поретку тежине (Блум 1981, према Pešić 1998: 68). Као претходна истраживања од значаја за наш рад могу се навести истраживања Редфилда и Росеја који кроз 14 емпиријских студија потврђују да се настава у којој се реализују образовни захтеви вишег нивоа доводи до знатно бољих постигнућа ученика (Redfield and Rosseay, према Pešić 1998: 68). Показало се и да рад са учитељима који раде на побољшању таквих наставних активности доводи до значајног развоја ових интелектуалних способности и вишег нивоа знања код ученика (Sanders 1965, према Pešić 1998: 68).

---

[30] Bloom, B. S. (1981): *Taksonomija ili klasifikacija obrazovnih i odgojnih ciljeva – knjiga I, Kognitivno područje*, Republički zavod za unapređivanje vaspitanja i obrazovanja, Beograd.

Напомена: Од помоћи су и интерпретације Блумове таксономије у радовима наведеним у литератури: Zech 1998, Pešić 1998, Требјешанин 2001, Плут 2003.

Евалуација знања ученика и анализа уџбеничких задатака показују да је далеко највише образовних захтева који се односе на најнижи ниво знања, иако се декларативно тражи и високо вреднују интелектуалне способности и вештине. Уџбеничка питања и задаци који се формулишу требало би да ангажују знања ученика и све описане интелектуалне способности и то тако да активности из којих проистичу буду обавезан део уџбеника.

Смер који пратимо иде од постављених циљева наставе математике ка њиховој операционализацији и интерпретацији у уџбенику. Један од општих циљева наставе математике јесте способност математизирања (једноставнијих) ситуација из наше околине. Под тим се подразумева „способност ученика да препозна математичке односе у свакодневним ситуацијама и да их изрази математичким језиком" (Zech 1998: 60). Општи циљеви само су груба упоришта одговарајућих садржаја наставе математике, па се Цех бавио њиховим конкретизацијама у разрађеном математичком наставном плану и програму (курикулуму). Реформе наставних планова и програма 1970-тих година наглашавале су нове садржаје и форме представљања, те израду нових материјала као што је уџбеник, занемарујући наставне методе и поступке сагласне педагошко-психолошким сазнањима. После овог таласа реформи уследили су они који наглашавају наставне поступке, процес учења и поучавања, наставни стил, наставну комуникације и примене (Winter 1987, према Zech 1998: 63).

Једна од могућности да се појасне и операционализују циљеви наставе јесте класификација. Ми ћемо се служити оном коју смо већ поменули са одликама хијерархијски изграђене схеме у којој свака следећа категорија претпоставља савладаност оне претходне (иде се од једноставнијих ка сложенијим формама).

Преносимо Блумову класификацију примењену на задатке.

Задаци којима се испитује знање:

1. конкретних информација (терминологије, специфичних чињеница), процедура и општих појмова или унивезалија (знање принципа и генерализација);

Задаци којима се испитују интелектуалне способности и вештине:

2. провере схватања (разумевања) кроз: превођење из једног симболичког облика у други, испитивање тумачења (интерпретације) и уопштавање;
3. способности примене наученог у одговарајућим ситуацијама – употреба општих правила и поступака (и у конкретним и у апстрактним ситуацијама);
4. задаци који захтевају анализу почетних задатих услова и грађе у целини кроз анализу елемената, односа и организационих начела;
5. задаци који захтевају испољавање способности синтезе кроз израду самосталног саопштења, стварање плана рада на неком проблему и израда система апстрактних односа;
6. задаци који захтевају испољавање способности евалуације.

Плут наводи да је у Блумовој класификација дато све или скоро све што се може добити у школи, али не и стицање интелектуалних умења као важне функције уџбеника која се развија кроз цео његов текст (Плут 2003).

У уџбеник се могу уградити решења којима би се помогло достизање сваког предвиђеног нивоа знања (Требјешанин 2001: 77). Питања и задаци који се постављају ученицима треба да ангажују све описане интелектуалне способности и ту је примена Блумове таксономије најочигледнија и најлакша (Pešić 1998: 69).

Активности са различитим решењима који ће подстицати схватање, анализу, примену знања или евалуацију потребно је уградити у уџбеник као његов обавезан део. Тако за садржаје које је потребно дословно запамтити, у уџбеник се могу уградити различити графички ослонци за памћење. Уџбеник може да помогне схватање:

- Логично структурираним излагањем,
- Истицањем (сигнализирањем) структуре,
- Примерима,
- Резимирањем,
- Систематизацијама,
- Представљањем различитим средствима (сликовно, вербално),

- Аналогијама,
- Питањима и задацима који укључују изражавање садржаја у другом облику, на другачији начин и другачијим средствима, тумачење идеја, њихових односа и извођење закључака и предвиђања који нису непосредно (експлицитно) дата у тексту (али логично следе) итд.

Подршка коју уџбеник може да пружи за овладавање применом састоји се од укључивања задатака и питања којима се подстиче примена знања и могућности примене, навођењем примера примене и сл. Овладавање анализом уџбеник може да допринесе добрим структурираним излагањем са јасним током мишљења, развојем теме и идеја (Pešić 1998). Неопходно је увести и захтеве који ће усмерити пажњу ученика на елементе постојеће структуре излагања. Уџбеник би требало сам да нуди модел одговарајуће евалуације, истичући значај евалуације и критичности у мишљењу за стицање знања.

Требјешанин истиче значај подржавања свих нивоа знања прилагођених узрасту у току читавог основног школовања (Требјешанин 2001). У млађим разредима сразмерно више простора треба да добију нижи нивои знања, па онда постепено све више знања са виших нивоа, с обзиром на предзнања и способности ученика. У уџбеницима се могу подржати виши нивои знања у виду додатних садржаја намењени знатижељним ученицима, а са порастом узраста све их више укључивати и у обавезне садржаје. Ово је дало смернице за наш иновативни модел уџбеника.

6.2. Уџбеник математике и задаци

Значајност улоге уџбеника у наставном процесу постаје све више нашироко истраживана. Тако неке међународне студије, као нпр. TIMSS, анализирају однос математичког образовања и улоге курикулума и уџбеника у преко 50 земаља, као и постигнућа која ученици остварују. Квалитет уџбеника и њихов убедљив утицај који постижу Робитејл и Треверс објашњавају садржајима и начинима на који се они дидактичко-методички обликују (Robitaille and Travers 1992: 687). Валверде и сарадници наглашавају да је уџбеник један од главних извора садржаја и да због такве улоге одређује и педагошки стил учитеља у учионици (Valverde et al. 2002, према према Pepin 2008: 1).

У последњих неколико деценија научни дискурс усмерен је на учениково појмовно разумевање, математичко мишљење, резоновање и учење путем открића (Hiebert and Carpenter 1992: 65). Циљ је побољшати учениково разумевање математике и помоћи му да развија своје капацитете померањем процедуралног знања ка математичком начину мишљења. Хиберт и Карпентер (Ibid) показују да у учионици у којој се подстиче математичко разумевање постоје неке битне заједничке карактеристике. Њихов оквир се састоји од пет димензија. Све оне заједно суделују у обликовању рада у учионици у једну посебну врсту окружења за учење. Реч је о:

1. природи задатака,
2. улози учитеља,
3. социјалном окружењу у учионици,
4. математичком алату који је доступан и
5. приступачности математике сваком ученику.

Нас ће у овом поглављу највише занимати наведена прва димензија.

Веома је важно да ученици буду ангажовани у математичким активностима заснованим на математичким задацима са одређеном специфичношћу (Henningsen & Stein 1997, према Pepin 2008: 2). Ово чини основну компоненту ученичког разумевања у поступку повезивања математичких садржаја (Hiebert et al. 1997, према Pepin 2008: 2). Стога је у фокусу нашег разматрања сам појам *математичког задатка*.

Фокус интернационалних истраживања је на уџбенику. Осим курикулума, интернационалне студије указују да велики ефекат у математичким постигнућима ученика има управо уџбеник (TIMSS 1999, Valverde et al. 2002, Schmidt et al. 1997, Mayer, Sims and Tajika 1995, према Pepin 2008: 2).

Ако погледамо подручје САД-а, од бројих издвајају се истраживања Ромберга и Карпентера који уџбеник виде као ауторитет у преношења знања и као водич у процесу учења, док сами учитељи своју улогу виде у превођењу текста

(Romberg and Carpenter 1986, према Pepin 2008: 2). Европски континент не заостаје у истраживањима по овом питању. Тако се енглески, француски и немачки истраживачи осим теоријских истраживања баве и практичном употребом уџбеника (Pepin and Haggarty 2001, Haggarty and Pepin 2002, Pepin 1997, 1999, 2002, према Pepin 2008: 2). Наведена истраживања показују да уџбеници могу да понуде добре моделе намењене образовној пракси. Шоенфелд показује слично. Добра настава не може да компензује неадекватан текст уџбеника (Schoenfeld 1988, према Pepin 2008: 2). Јасно је да су уџбеници важан артефакат у учионици и да снажно одређују шта се у њој дешава. Реч је о медијаторима између садржаја курикуларне политике са једне стране и инструкција у настави које се догађају у учионици са друге.

А какав је однос уџбеника и значај математичких задатака? Уџбеници презентују садржај предмета за који су намењени обликујући искуство ученика у процесу откривања математичких идеја. Они ученицима пружају прилику да из њих уче и то тако да уче оно што се сматра важним у образовној политици државе. Наставници посредују у овом контакту утичући на избор задатака по којима ученици раде, осмишљавајући и структурирајући ученички рад.

Уџбеници се нашироко користе при одабиру задатака за рад у наставном процесу (Kuhs and Freeman 1979, Luke et al. 1989, Pepin an Haggarty 2001, према Pepin 2008: 3). Улога им је и већа, сматрају неки истраживачи. Дојл каже да уџбеници служе не само за развој мишљења ученика док учење траје, већ он оставља дугорочније последице (Doyle 1988, према Pepin 2008: 3). Ово би значило да задаци из уџбеника по којима се учење одвија утичу на шири опсег од онога како се мислило, а то је како ученици уопште мисле и разумеју значења математичких појмова. Круцијални значај задатака у овом смислу истичу у својим радовима Хенингсен и Штајн (Henningsen & Stein 1997, према Pepin 2008: 3) и Хиберт и сарадници (Hiebert et al. 1997, према Pepin 2008: 3).

За анализу задатака потребно је да испитамо сам појам задатка, а затим да издвојимо шта је то релевантно у процесу учења помоћу изабраног уџбеника.

Наведимо анализу задатака како је предлажу наведени истраживачи.

Опште карактеристике математичких задатака које побољшавају квалитет учења

Килпатрик и сарадници дају свеобухватан преглед оног што сматрају успешним математичким учењем (Kilpatrick et al. 2001, према Pepin 2008: 4). Њихова кованица да је ученик 'математички вичан' заправо значи да је то било који ученик који учи математику са успехом. Она има пет нити од којих је испреплетена:

1. *појмовно разумевање* – обухватни математички појмови, операције и релације,
2. *процедурално знање* – способност извођења флексибилних, прецизних, делотворних и одговарајућих процедура,
3. *стратегијске способности* – способност формулисања, репрезентовања и решавања математичких проблема,
4. *прилагодљиво резоновање* – способност логичке мисли, рефлексије, објашњења и доказивања и
5. *продуктивно руковођење* – уобичајено виђење математике као корисне и вредне.

Запазимо да су наведене категорије ништа друго него: чињенице, способности, појмовне структуре, опште стратегије и личне особине.

Килпатрик и сарадници (Ibid) објашњавају да квалитет инструкција зависи од избора задатака и когнитивних захтева. Учитељева очекивања о успеху појединих ученика снажно одређују и утичу на избор задатака које наставник поставља ученицима, као и питања, и то је прилика и мотивација за учење. Истраживање Хагарта и Пепина (Ibid) у енглеским, француским и немачким учионицама ово потврђују.

Когнитивни захтеви математичких задатака

У смислу когнитивних захтева Кратволово истраживање се ослања на Блумову таксономију (Bloom 1956, према Pepin 2008: 5) као оквир за класификацију исказа за које се очекује или се намерава да ученици науче као последица инструкција (Krathwohl 2001, према Pepin 2008: 5). Блумов когнитивни домен организован је у 6 хијерархиских категорија: знање, разумевање, примена, анализа, синтеза и евалуација. У уџбеницима се дају као инструкције за препознавање:

1. знања – напиши, наброј, именуј;
2. разумевања – опиши, укратко изложи (резимирај);
3. примене – употреби, реши, примени;
4. анализе – упореди/супротстави, анализирај;
5. синтезе – направи план, откриј, изгради и
6. евалуације – критикуј, докажи.

Кратвол истиче да верујемо у релевантност Блумове таксономије (иако постоје критике и оспоравања којима се ми овде нећемо бавити) и у извесном степену је упоредива са претходно наведеним Килпатриковим моделом математичког учења од којих су прва четири од укупно пет слична Блумовим нивоима знања (Ibid).

Контекст задатака и сврха

Истраживања показују пораст утицаја математике на свакодневне активности (Carraher et al. 1985, 1987, Lave 1988, према Pepin 2008: 6). Претпостављено је да оно што прожима математику уклопљено у свакодневне активности и мотивацију која стимулише да се нешто изведе. Важна питања за анализу задатака уџбеника су у ком обиму и на који начин је искуство из реалног окружења уклопљено у њих. Смисао стицања математичког знања и разумевања математичких идеја лежи у повезаности између појмова ваншколског искуства и унутаршколског математичког. Ученицима треба да се представи учење путем решавања проблема и то у више различитих окружења. Сковсмос (Skovsmose 2002, према Pepin 2008: 6) говори о ‘миљеу за учење’ разликујући три парадигме вежбања:

1. *чисто математичка* (ван контекста);
2. *семи-реална* (полуреалне) (контекстуално засновани задаци чак и ако је умањено реалан контекст) и

3. *реално* везана.

За први и трећи нећемо наводити примере (јер нам је познато о чему је реч), али погледајмо један пример семи-реалног типа вежбања који предлаже Доулинг (Dowlling 1998, према Pepin 2008: 6).

„У продавници А продавац прода робу за 85 p по килограму. У продавници B продавац прода исту робу масе 1,2 kg за 1 ₤. (a) Која продавница продаје робу јефтиније?(б) Која је разлика у плаћању ако оба продавца продају по 15 kg робе?“

Иако се овакви задаци веома често виђају у уџбеницима математике, Сковсмос (Ibid) указује да су такви задаци и ситуације вештачке које воде ученике до свесности када математички доносе одлуке и врше процењивања (Cobb and Yackel 1998, према Pepin 2008: 6).

У реалној парадигми и њој припадајућим вежбањима све процене су реално засноване, што обезбеђује различите услове за комуникацију између учитеља и ученика, јер има смисла питати и допуњавати информацију дату у вежбању.

Детаљније ћемо се бавити овим појмом у оквиру реалистичног математичког окружења. На овом месту само издвајамо чињеницу да математичке процедуре које ученици изводе и представљају могу умногоме да буду одређене посебним контекстом задатка тако да ученици бивају у интеракцији са контекстом задатка на различите начине и неочекиване путеве и ова је интеракција, по својој природи, индивидуална (Boaler 1993, према Pepin 2008: 7).

Повезаност и математичка знања

Хиберт и Карпентер (Ibid) тврде да би код појединца развили математичко разумевање, основа је у повезивању математичких идеја. Разумевање се дефинише као начин на који је информација репрезентована и структурирана. Математичка идеја или чињеница разуме се ако је ментална репрезентација део мреже (система) репрезентација. Степен разумевања одређен је бројем и јачином веза. По Хиберту и Карпентеру оно што је есенцијално у олакшаном разумевању јесте укључивање бројних принципа, међу њима и то да разумевање може да буде окарактерисано као врста релације или везе која је конструисана између идеја, чињеница, процедура. Они описују разумевање као начин индивидуалних унутрашњих репрезентација које су структурисане и повезане, као и како су те унутрашње репрезентације структурисане и повезане са спољашњим репрезентацијама. Оне укључују говорни језик, писане симболе, аналогије. Па ипак, математичке идеје, процедуре или чињенице се разумеју ако су повезане са постојећом мрежом јаким и бројним везама. Ово значи да разумевање није феномен све или ништа. Такође је наглашен значај претходног искуства у интерпретацији и разумевању новог. Ма истиче да када су математичка знања добро развијена и имају унутрашња повезивања, она образују чврсто повезану мрежу са структуром објеката (Ма 1999, према Pepin 2008: 7).

Хиберт и Карпентер (Ibid) надаље показују да уколико је математички задатак превише рестриктиван, ученикове унутрашње репрезентације строго су ограничене и мреже које се граде ограничене су њима. Вероватноћа трансфера између различитих окружења постаје проблематична. Ученици не повезују своју математичку способност са симболима и правилима које уче у школи. Хиберт наглашава да одсуство повезивања води уместо од интуитивног до приступа учења са разумевањем у проблемској настави ка оном који је механички и без значења.

Ово је место да се подсетимо Скемпових идеја инструменталног и релационог разумевања при чему се инструментално разумевање односи на правила без резоновања, а које ми овде разумемо као правила без повезивања (Skemp 1976, према Pepin 2008: 7). Купер објашњава да ученик преузимајући инструментална веровања о математици пропушта да развије разумевање – повезивања једноставно нема да би се то остварило (Cooper 1989, према Pepin 2008: 7).

Аскев и сарадници обелодањују да учитељи који остварују резултате обраћају пажњу на следећа повезивања (Askew et al. 1997, према Pepin 2008: 7-8):

- *између различитих математичких аспеката*; на пример сабирања и одузимања разломака, децималаног записа броја и процента;

- *између различитих математичких репрезентација*; на пример симбола, речи, дијаграма и објеката;
- *са дечјим методама*; вредновање истих и заинтересованост не само за дечје мишљење, већ и суделовање у дечјим методама.

Иако се може полемисати о посредовању учитеља и текста уџбеника на такав начин да они подстичу ученике у математичким повезивањима, исто тако нема сумње да они то неће како кажу Шоенфелд (Ibid) и Хагарт и Пепин (Ibid) или, заправо, да не могу. Тако у интернационалној компаративној студији Ма (Ibid) пореди Кину и САД и долази до следећег сазнања – кинески учитељи опажају математичке појмове као повезане, а насупрот овоме амерички учитељи као произвољне колекције математичких чињеница и правила. Тако је настао појам „дубоко разумевање фундаменталне математике“ као аргумент за структурирано, повезано и кохерентно знање (Ball et al. 2001, према Pepin 2008: 8) које је по Ма „дубоко, широко и потпуно“ и види се као разлог повећане вредности математичког успеха.

Истраживање на пољу репрезентација и резоновања показују да кључну улогу имају активности и аналогије у подстицању ученика за развој способности решавања проблемских задатака (Mayer 1987, према Pepin 2008: 8). Активности помажу да се моделује процес решавања проблема, а конкретне аналогије стварају значења у повезивању процедура са познатим искуством (Mayer 1987, Mayer et al 1995, према Pepin 2008: 8). Мајер у својим истраживањима наводи да је важно стварати везе између различитих репрезентација, те ће тако у проблемски оријентисаној настави бити укључене и симболичке и вербалне и визуелне репрезетације чији је садржај уклопљен у познате ситуације тако да су оне међусобно повезане. У њиховој студији о уџбеницима у Јапану и САД-у показују се да у јапанским уџбеницима чак 81% садржаја је посвећено објашањавању тражења решења у процедурама у поређењу са 36% у уџбеницима САД-а. Њихов закључак је да је когнитивно моделовање процеса проблемски оријентисане наставе подржано ставом да је учење конструкција знања.

Мајер и сарадници препоручују да уџбеници следе или став да је учење стицање знања помоћу производа проблемски оријентисане наставе или да је учење изграђивање знања помоћу процеса проблемски оријентисане наставе. Уџбеници би у тим случајевима имали делове на странама посвећене необјашњеним вежбама које би укључивале употребу симбола, а нешто касније и делове страна који би били посвећени презентовању и повезивању више различитих репрезентација корак по корак у процесу проблемске наставе кроз активности.

Керол (Carroll 1992, према Pepin 2008: 8) каже да би радни примери требало да служе учитељу као проширења, обезбеђујући му на тај начин грађење док активности трају, а и Ренкл и сарадници (Renkl et al. 2000, према Pepin 2008: 8) сугеришу да би у померању од учења кроз активности до проблемског решавања без помоћи морало постепено да се смањују и да нестају кораци за решавање који пружају помоћ.

Из свега наведеног јасно је опредељење за стварање прилика у којима би ученици градили везе између математичких идеја у смислу њиховог разумевања.

Пепин износи закључке и смернице за даље истраживања, наводећи да би у уџбеницима требало уграђивати оне елементе који би обезбеђивали одговарајуће прилике за учење. Тако ако су уџбеници рестриктивни у погледу онога што нуде, унутрашње репрезентације ученика су у опасности да остану ограничене, а ученичко разумевање оскудно.

Наше истраживање усмерено је на задатке у уџбеницима уклопљене у контекст који обезбеђује повезаност са реалним окружењем, водећи рачуна о свим аспектима наведене анализе задатака. Реч је о **задацима у којима су заступљени**:

(1) **Чињенице и информације**:

а. препознавање и репродукција знања;

б. разумевање.

(2) **Примена** – критичка и стваралачка трансформација и примена наученог:

а. у математичком контексту;

б. у реалном контексту:

1. семи-реалном;

2. чисто реалном (прави проблемски задаци).

6.2.1. Задаци оријентисани на примену знања – од (новог) наставног програма до (нових) уџбеника почетне наставе математике

Резултати међународних и националних тестирања ученичких постигнућа показују да је потребно преиспитати којим нивоом знања из математике већина наших ученика би требало да влада. Тестирања показују да имамо слабе резултате у примени стеченог знања (Антонијевић и Вељковић 2005, Пантић и Ђокић 2005, Антонијевић 2007, Божић 2012, Министарство просвете 2006, Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања 2011). У овом делу рада бавимо се анализом (новог) националног наставног програма и (нових) уџбеника почетне наставе математике кроз аспект примене знања, како би сагледали да ли и колико често учитеља стављају у позицију да промишља и припрема ученике за овај ниво. Наше истраживање је усмерено на део почетне наставе геометрије (Ђокић 2008). Бавили смо се садржајима који се односе на тему *Геометрија* (не узимајући у обзир тему *Мерење и мере*, осим где су појмови повезани). У теми *Мерење и мере* можемо са великом сигурношћу тврдити да је значајан број захтева и задатака усмерен на примену знања (нарочито аспект примењивости математике у свакодневном животу). Наведимо редом геометријске садржаје по разредима који се односе на геометрију облика: Предмети у простору и односи међу њима; Линија и област; Класификација предмета према својствима (I разред); Геометријски облици (II разред); Геометријски објекти и њихови међусобни односи (III разред); Површине (IV разред). Циљ рада је био да испита циљеве и задатке (новог) програма наставе математике и (нове) уџбенике почетне наставе математике (од 1. до 4. разреда основне школе) кроз захтеве и задатке примене знања.

Бавили смо се улогом коју остварују наставни програм и уџбеници. Успешност организације и извођења наставе математике има два суштински значајна елемента: први је *наставни програм математике*, а други *уџбеник*. Званични наставни програм је, уопштено говорећи, документ који има велики утицај на ефекте наставе и школског учења, јер обавезује наставнике у реализацији наставе и ауторе уџбеника у њиховом настајању (Требјешанин 2007). Учитељи су у настави математике у великој мери упућени на уџбеник. Шта од садржаја подучавати, како подучавати и које врсте вежбања наменити ученицима – све је то у великој мери условљено садржајима уџбеника (Robitaille and Travers 1992). Нема сумње да је уџбеник математике, као основна књига из које ученици уче, значајан фактор у учењу и у значајној мери детерминисању постигнућа ученика. У земљама која се налазе у врху међународних тестирања из математике уџбеник се сматра једним од битних носилаца реформи (Милинковић, Ђокић и Дејић 2008).

Следећи аспект којим смо се бавили јесу постигнућа ученика из математике. Код нас се реализују међународни пројекти евалуације знања TIMSS и PISA, као и национални пројекат. Они се ослањају на концепције о нивоима знања и процеса учења. У оквиру њих проверава се овладаност математичким садржајима, као и овладаност одговарајућим когнитивним функцијама (Антонијевић и Вељковић 2005, Пантић и Ђокић 2005, Требјешанин 2007). Тако у оквиру TIMSS 2007 истраживања издвајају се три когнитивна домена којима се утврђује развијеност способности и вештина ученика. То су: (1) *знање*, (2) ***примена знања*** и (3) *резоновање* (Антонијевић 2007). Когнитивни домени су организовани у поретку који подразумева пораст нивоа комплексности сваког следећег у низу дефинисаног домена. У оквиру PISA 2006 истраживања домен математичке писмености дефинисан је као способност ученика да ефикасно анализира, резонује и комуницира идејама, док поставља, формулише, решава и интерпретира решења математичких проблема у различитим ситуацијама. У оквиру циклуса TIMSS 2007 и PISA 2006 истраживања нагласак се ставља на однос између постигнућа ученика и услова наставе и учења у којима постигнуће настаје (нпр. наставни програм). Резултати на тестовима су информација за изучавање разних приступа у образовној пракси у циљу поправљања ефеката наставе математике у основној школи, и основа за стална разматрања о правцима развоја наставног програма математике и методике наставе математике[31] (Ibid). И TIMSS и PISA истраживања су за нас значајна утолико што је Србија земља-учесница у већ три циклуса оба истаживања (а планира се и даље учешће). За почетну наставу математике нешто су наглашенија усмерења на резултате TIMSS тестирања, јер се оно изводи у IV разреду (као и у VIII) основне школе (док се PISA тестови раде са 15-огодишњацима).

Министарство просвете и спорта Републике Србије донело је одлуку да реализује и национални пројекат „Праћење ученичких постигнућа" (поред спровођења међународних тестирања) (Министарство просвете 2006). Овај пројекат се односи на припрему и реализацију националног тестирања ученика на крају првог циклуса обавезног образовања. На основу резултата овог националног тестирања добијају се валидни подаци о усвојеним знањима и вештинама на крају првог циклуса обавезног образовања. Поред увида у остварени ниво ученичких постигнућа, резултати тестирања служе за доношење низа стратешких одлука у образовању (Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања 2011).

А какво је стање у нашим уџбеницима математике? У спроведеној анализи (нових) уџбеника за прва три разреда почетне наставе математике у периоду од 2003. до 2006. године као доминантан тип интелектуалног активирања ученика уочено је *меморисање* (Плут, ур. 2007). Оно се негује на различите начине, а најчешће присутни и издвојени су: а) увођење нових појмова у 'готовом' облику и б) дуготрајно инсистирање на примени шаблона у решавању задатака (механичко решавање задатака без увида у математички поступак/процедуру/појам). Уколико ова два начина активирања ученика заузимају већи део наставе, онда за процес

[31] Наведимо један пример озбиљног разматрања циља и задатака постојећег математичког курикулума у основној школи и његове имплементације кроз уџбенике. Током циклуса TIMSS 2003 истраживања четири земље учеснице - Данска, Енглеска, Немачка и Холандија – чији су ученици показали сличне резултате на тестирању, покренуле су API пројекат (Applying Mathematics International). Резултати ученичких постигнућа из математике ових земаља нису били у самом врху што је њихову стручну и научну јавност покренуло у истраживање. Циљ овог заједничког пројекта био је испитивање примене знања у настави математике као важног циља математичког образовања. Наведене земље су анализом извештаја TIMSS истраживања уочиле да се недовољно инсистира на примени знања у њиховим националним математичким курикулумима и уџбеницима. Више о овом пројекту погледати на следећој адреси: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/_personelles/selter/forschung/dateien/AMI.pdf или Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001): „Realistic Mathematics Education as work in progress", In: F.L. Lin (Ed.) *Common Sense in Mathematics Education – Proceedings of 2001 the Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan, pp.1-40.

овладавања све вишим нивоима знања - који би требало да буде постепен и захтева време - нема места или је веома мало присутан.

Често се у задацима садржаји *повезују* са искуством детета, са појмовима из других предмета или се користе као контекст (оквир) у који се смештају математички захтеви. Видљив је напор да се што више задатака смести у реалан животни контекст и реалне ситуације, као и да се повежу математички садржаји са садржајима других предмета (Ibid). Међутим, дешава се да су покушаји неуспешни. Проблем је, наиме, у избору ситуације који је оквир за математички задатак тј. који даје повод да реагујемо математичким симболима представљајући математичке објекте. Овај аспект наставе математике је у новијим уџбеницима све више присутан, али код нас недовољно испитан (Ibid). Овај део нашег рад бави се управо аспектом примене математике.

Подсетимо се идеје о учењу геометрије као процесу који треба да буде: 1) пажљиво руковођен, 2) комбинован од опажања и иконичког (сликовног) представљања опаженог и 3) вербалног изражавања обеју ових активности (Marjanović 2007). Успостављање веза геометријских појмова са реалним окружењем и његовим објектима могуће је и пожељно у почетној настави геометрије, али их није увек једноставно препознавати (детаљно у анализи уџбеника која следи).

Најчешћа типологија задатака према врсти интелектуалног ангажмана јесте типологија коју је дао Блум. Ми је нећемо овде целу наводити, већ ћемо само навести трећи од шест типова задатака којима се испитује знање – реч је о задацима којима се испитују способност примене наученога, како у апстрактним тако и у конкретним ситуацијама. Овај тип задатака Блум наводи након задатака којима се испитује знање и задатака којима се проверава схватање.

Због широког поља увежбавања математичких појмова / поступака / процедура истичемо да је увежбавање и примена наученог дуг процес учења који захтева место у наставном програму и уџбеницима. Разликујемо више облика вежбања које имају различите дидактичке функције. Тако се од неколико могућих облика вежбања издваја и *вежбање оријентисано на примену* (Zech 1998). Слична разликовања облика вежбања појављују се и у радовима Радаца и Шипера (Radatz

& Schipper 1983, према Zech 1998) и Вагемана (Wagemann 1984, према Zech 1998).

Вежбање оријентисано на примену посматра се у ширем смислу – не мисли се само на спољноматематичке реалне примене, већ и на унутарматематичке примене са циљем даље употребе наученог у школској математици. У оба случаја ради се о широкој примени наученог у новим питањима и ситуацијама. Разликујемо, дакле, два вида примена:

1) *спољноматематичке* и
2) *унутарматематичке* (Zech 1998).

Код *спољноматематичких* примена ради се о примерима задатака у којима се јављају честе реалне или 'стандардне ситуације' у којима се научено примењује. Нпр. ако је уведен појам обима фигуре, примери спољноматематичких примена односиће се на израчунавање дужине рама слике, дужине ограде којом ограђујемо школско двориште итд. Код *унутарматематичких* примена ради се о примени у математичком контексту. Мисли се на повезивање раније научених и нових појмова и примену наученога у апстрактном свету математичких објеката. Задатак у математичком контексту се решава примењујући друге познате математичке појмове и поступке. Пре свега ради се о стварању рутине за увежбавање новог математичког поступка / процедуре / појма и то су случајеви који се, у математици, чешће појављују (у одређеним околностима су то делимични кораци у задацима спољноматематичких примена). Нпр. када се израчунава површина сложене геометријске фигуре, примењује се научено унутар саме математике – до површине те сложене фигуре долазимо преко збира површина простих фигура од којих је сложена фигура састављена, а онда се научено примењује у реалним ситуацијама - код израчунавања нпр. површине школског дворишта састављеног од неколико игралишта, површине стана који има више различитих просторија (све су то сложене геометријске фигуре, посматрајући математички контекст, састављене од више фигура правоугаоног или квадратног облика) итд. Одавде видимо колико су за спољноматематичке примене битне унутарматематичке – без њих је тешко или готово немогуће остварити нове, за ученике непознате спољноматематичке (овом питању ћемо више пажње посветити у анализи конкретних примера у настави).

Представимо методолошки оквир истраживања. У контексту резултата постигнућа ученика из математике дефинисали смо *предмет* истраживања. Он се односи на захтеве и задатке примене знања у (новим) наставним програмима и (новим) уџбеницима математике.

Циљ истраживања је да испита заступљеност захтева и задатака примене знања у: а) циљу и задацима Програма математике и б) актуелним уџбеницима.

Задаци истраживања су да:

- утврдитимо да ли је циљ Програма математике усмерен на аспект примене знања ученика,
- испитамо да ли су задаци Програма изражени кроз захтеве да се знања примењују како унутар саме математике тако и у свакодневним ситуацијама,
- утврдимо присуство задатака примене у уџбеницима почетне наставе математике кроз геометријске садржаје.

У истраживању смо користили *метод* анализе садржаја. Квантитативним поступцима утврдили смо присуство и учесталост задатака примене знања у уџбеничким комплетима. Тако добијене податке смо квалитативно анализирали.

Узорак истраживања чине: а) **наставни програми** предмета Математика за први, други, трећи и четврти разред (комплетна листа наставних програма по разредима дата у Библиографији) и б) **уџбеници** предмета Математика[32] за први, други, трећи и четврти разред шест издавача: *Завод за уџбенике*, *Креативни центар*, *Клет*, *Народна књига*, *Бигз* и *Едука* (комплетна листа анализираних уџбеничких комплета, која подразумева уџбеник и радну свеску/лист, дата је у Библиографији). Истраживање је спроведено на намерном узорку издавачких кућа. Одабрали смо оне издавачке куће и њихове уџбеничке комплете који су у

[32] *Напомена*: Наша намера је била да узорак уџбеника чине по разредима два најчешће коришћена на територији Републике Србије у школској 2004/2005., 2005/2006., 2006/2007. и 2007/2008. години (цео циклус). Како до податка нисмо могли да дођемо, јер званичан податак нигде не постоји, определили смо се за поменути узорак.

понуди за школе имали уџбенике математике за све разреде од 1. до 4. разреда (за цео први циклус образовања у прве четири школске године, почетак континуитета нове генерације уџбеника). Добијени узорак чини укупно двадесет и седам уџбеника (издавачи *Завод за уџбенике* и *Народна књига* имали су у понуди више уџбеника за један разред; у првом разреду *Завод* је пласирао два уџбеника, а *Народна књига* два у другом и два у четвртом разреду).

Подаци су разврстани и затим табелирани и графички представљени. За квантитативну и квалитативну обраду података коришћен је проценат.

Изнећемо резултате истраживања и дати њихову интерпретацију. Прво саопштимо шта су циљ и задаци Програма математике анализирајући актуелни програм математике за прва четири разреда основне школе уочили смо да се у циљу наставе математике експлицитно наводи и примена знања: „Циљ наставе математике у основној школи је ... да оспособи ученике за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе“ (*Правилник о наставном плану и програму* 2004, 2005. и 2006). Један од задатака наставе математике је „...да ученици стичу основну математичку културу потребну за откривање улоге и примене математике у различитим подручјима човекове делатности“ (Ibid). Из овога следи да постављени задатак наставе математике није довољно операционализован нити дидактичко-методички објашњен. Он недовољно говори о примени знања, а не говори ни о распону нивоа који програм подржава (Требјешанин 2007).

Дајемо преглед анализе задатака из уџбеника. У табели 4. (видети у Прилозима табелу 2.) која следи изнели смо нумеричке показатеље заступљености задатака примене у уџбеничким комплетима. На основу изнетих резултата видимо да је заступљеност задатака примене, како унутарматематичке тако и спољноматематичке, појединачно по комплету за један разред најмања 0 % (*Народна књига I*[33], II разред), а највећа 77,78 % (*Народна књига I*, IV разред).

[33] Будући да су неки издавачи понудили више уџбеника за један разред, увели смо следеће ознаке: I разред: *Завод за уџбенике I* је ознака за уџбеник аутора Марјановић, М. и др., а *Завод за уџбенике II* аутора Шимић, Г. и др.; II разред: *Народна књига I* је ознака за уџбеник аутора Анокић, П. и др., а *Народна књига II* аутора Малешевић, Д. и др.; IV разред: *Народна књига I* је

Занимљиво је запазити да се ради о истом издавачу. Одсуство задатака примене издвајамо као велику мањкавост у поменутом уџбенику за II разред. Можда се овај скок у заступљености задатака примене може донекле оправдати садржајима који се обрађују у та два разреда.

Наиме, у II разреду ради се о теми *Геометријски облици* (појмови дуж, права, полуправа; цртање правоугаоника и квадрата итд.), док су садржаји у IV разреду из теме *Површине* (правоугаоника и квадрата; квадра и коцке). У овој теми повезују се геометрија облика са геометријом мерења. Где год имамо мерења веће је присуство задатака примене у свакодневним ситуацијама (реалан контекст). Више се инсистира на спољноматематичким применама, занемарујући унутарматематичке. То је нарочито видљиво у IV разреду. Неки од разлога великог присуства задатака примене у овом разреду су: а) пораст нивоа знања и б) садржаји који се обрађују.

Истражили смо заступљеност задатака примене по разредима и резултати су следећи: I разред – најмања заступљеност је код *Бигз*-а (15,45 %), а највећа код *Завода за уџбенике I* (25,17 %); II разред – најмања заступљеност је код *Народне књиге I* (0 %), а највећа код *Едуке* (43,61 %) (примећујемо велики распон код поменута два издавача и у њиховим приступима у уџбеницима); III разред – најмања заступљеност је код *Народне књиге I* (14,81 %), а највећа код *Клета* (36,19 %); IV разред – најмања заступљеност је код *Бигз*-а (45,87 %), а највећа код *Народне књиге I* (77,78 %).

На основу резултата изнетих у табели 4. и на графикону 1. који следи можемо да видимо колика је заступљеност задатака примене по издавачима. Када посматрамо цео комплет уџбеника за сва четири разреда онда је најмања заступљеност код *Народне књиге* (20,39 %), а највећа код *Клета* (46,95 %). У групи која је између најмање и највеће вредности су *Бигз* и *Едука* (25,85 % и 28,72 %), а затим *Завод за уџбенике* и *Креативни центар* (редом 32,04 % и 36,28 %). И овде примећујемо велики распон – од 20,39 % до 46,95 %. Неким дубљим анализама уџбеника ово могу да буду смернице.

ознака за уџбеник аутора Анокић, П. и др., а *Народна књига III* је ознака за уџбеник аутора Тодоровић, О. и др.

Графикон 1. Заступљеност задатака примене у комплетима уџбеника наведених изадавача

Издвојићемо неке карактеристике издавача који имају најмање и највише заступљене задатке примене, као и неке специфичности код осталих издавача.

Издавач *Народна књига* има најамање заступљене задатке примене и поприлична одступања по разредима. Иде се од геометријских садржаја који имају мале захтеве у погледу примене знања или их уопште немају у I тј. II разреду до садржаја III разреда где је примећен нагли скок у истим захтевима. Чим су се везали геометрија и број (геометрија мерења – обим геометријских фигура) задаци примене су присутни у великом проценту и то спољноматематичке. Уочили смо и да се на такве задатке пребрзо прешло, без потребног увежбавања математичких процедура. Сами уџбеници више личе на радне свеске или збирке задатака и немају методичку разраду вођених корака и осамостаљивање ученика у применама. Ово долази до изражаја у IV разреду са готово искључиво спољноматематичким применама.

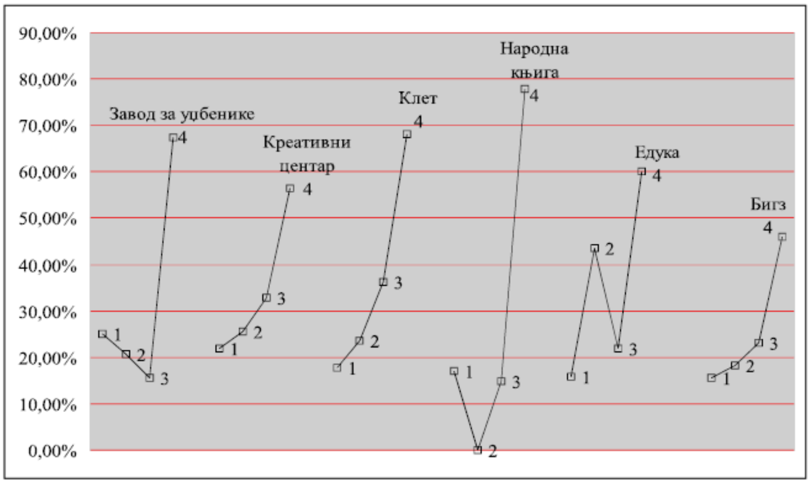
Уочили смо да сличан приступ у IV разреду имају и издавачи *Едука* и *Бигз*. Контекст који се бира за спољноматематичке примене је искључиво контекст школског дворишта, баште / воћњака и сл. и поприлично незанимљив за децу овог узраста. Ово свакако може да утиче на мотивацију ученика и њихова искуства која стичу у настави математике.

Издавач *Клет* има највише задатака примене у односу на остале издаваче. Уџбеници *Клета* имају методичке разраде вођених корака (успешније у III и IV разреду) што води ка постепеном осамостаљивању ученика у примени знања.

Запазили смо и да је код *Завода за уџбенике* много више задатака унутарматематичке примене. Сами математички (па тиме и геометријски) садржаји дају суштински оквир за унутарматематичке и / или спољноматематичке примене. Питање није само колико су задаци примене заступљени, већ и како су методички обликовани. Свакако је важно да у уџбеницима обавезно има и једних и других, о чему програм математике недовољно говори.

Графикон 2. даје упоредну заступљеност задатака примене по издавачима и за сва четири разреда. Рекли смо да увежбавање математичких појмова / поступака / процедура захтева поступност и време, као и простор и у наставним програмима и у уџбеницима. Ако добро погледамо поменути график уочавамо да се такав принцип следи код *Креативног центра*, као и код *Клета* и *Бигз*-а (на графикону 2. изломљени линијски графици означени бројевима 2, 3 и 6), а извесна одступања видимо код *Завода за уџбенике* и *Народне књиге* (на графикону 2. више изломљени линијски графици означени бројевима 1 и 4), док су највећа одступања код издавача *Едука* (на графикону 2. скоковито изломљен линијски график означен бројем 5).

Графикон 2. Упоредни график заступљености задатака примене за све разреде издавача



Навешћемо и неке специфичности уочене у анализираним уџбеницима почетне наставе математике.

У задацима спољноматематичких примена присутне су *везе са животом и практичним проблемима*. То је оно што и сам програм математике тражи. Међутим, уочили смо да су често такви задаци лоше задати, јер није једноставно препознати ситуације које дају повод за реаговање математичким симболима и језиком. Посматрамо и како је успостављена *веза и примена математике са другим предметима*.

Пример 1: У уџбеничкој јединици „Површина правоугаоника и квадрата“ повезују се садржаји математике са садржајима ликовне културе (дати су тачни подаци о дужинама и ширинама слика познатих уметника) (IV разред, *Креативни центар*).


27. Налазиш се у галерији слика. Њихове димензије дате су на слици.

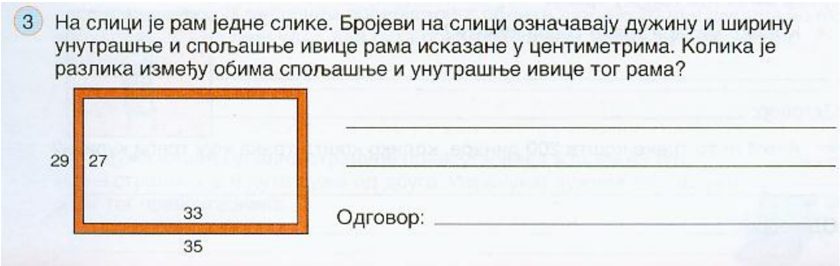
а) Колика је површина платна употребљена за сваку од ове три слике?

б) За коју слику можеш да направиш рам од украсне лајсне дужине 2 m?

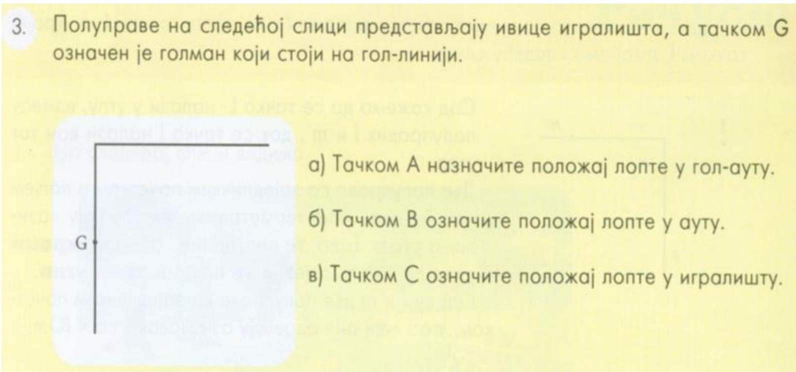
Одговор:

Уочили смо да су грешке које се јављају чешће присутне у задацима примене у реалном контексту (спољноматематичке примене) него у математичком контексту (унутарматематичке примене). Понекад су прерано дати у уџбенику, одмах по увођењу појма, језик им је некоректан или непримерен деци тог узраста итд. Навешћемо неколико типичних примера групишући их по одређеном критеријуму.

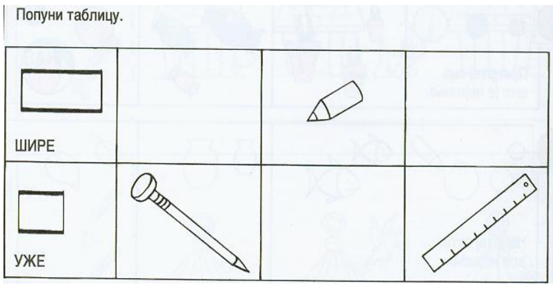
Пример 2: У уџбеничкој јединици „Обим правоугаоника“ ученик примењује знања у реалној ситуацији одмах по самом увођењу појма (трећи задатак у уџбенику). Захтев задатка је доста сложен будући да је појам обима правоугаоника тек уведен (тражи се рачунање разлике дужина две полигоналне линије) (III разред, *Едука*).



Пример 3: У уџбеничкој јединици „Угао, врсте углова“ ученик примењује знања у реалној ситуацији одмах по самом увођењу појма угла (трећи задатак у уџбенику). Користе се речи које нису фонд речника већине ученика (гол-линија, аут и гол-аут), те се може рећи да одабрани пример није адекватан (за изабрану позицију у уџбенику) (III разред, *Завод за уџбенике*).



Пример 4: Оловка и ексер су тела облика ваљка и као таква поредимо их по дебљини, а не по ширини (могуће их је поредити и по дужини). Лењир правоугаоног облика поредимо по дужини и(ли) ширини. Запазимо и да дата



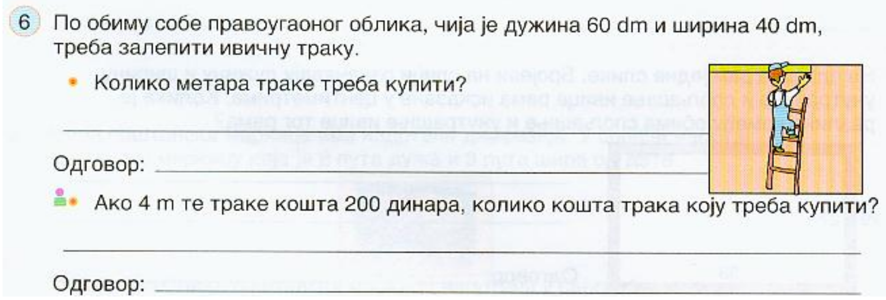
инструкција није ваљана – она би требало да се односи на поређења по дужини (слика нас на то упућује), а не ширини (I разред, *Народна књига*).

Пример 5: У примеру који је у уџбеничкој јединици дат на самом почетку (сложена проблемска ситуација), слика (икона) није одговарајућа репрезентација која прати решавање задатог проблема. Геометријска слика упућује на идеју 'поплочавања' фигуре и нема добро одабрану проблемску ситуацију у реалном окружењу. Није ни добро вербално вођена (појмови и речи које стоје иза тих појмова припадају два различита окружења – математичком и реалном, а овде се 'мешају'). Потешкоћа је, свакако, што се јављају и појмови: а) пропорције и(ли) б) константне брзине (појам из физике) (IV разред, *Народна књига I*).


4. Да би покосио ливаду облика квадрата, странице 20 m, човеку је потребно 4 сата. За које време ће покосити ливаду, такође облика квадрата, али странице 5 m? Израчунај обим и површину обе ливаде.

До решења се у математици често долази уз помоћ цртежа или скице.

Пример 6: У примеру се 'мешају' речи које припадају различитим окружењима.


6 По обиму собе правоугаоног облика, чија је дужина 60 dm и ширина 40 dm, треба залепити ивичну траку.

- Колико метара траке треба купити?

Одговор:

- Ако 4 m те траке кошта 200 динара, колико кошта трака коју треба купити?

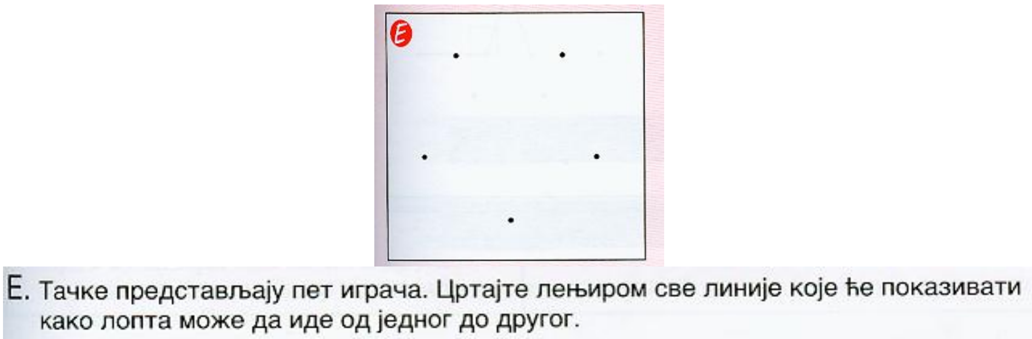
Одговор:

Дужини траке коју лепимо по дужини и ширини целе собе **РЕАЛАН КОНТЕКСТ**	**ОДГОВАРА** у математичкој процедури решавања задатка	обим фигуре истог правоугаоног облика. **МАТЕМАТИЧКИ КОНТЕКСТ**

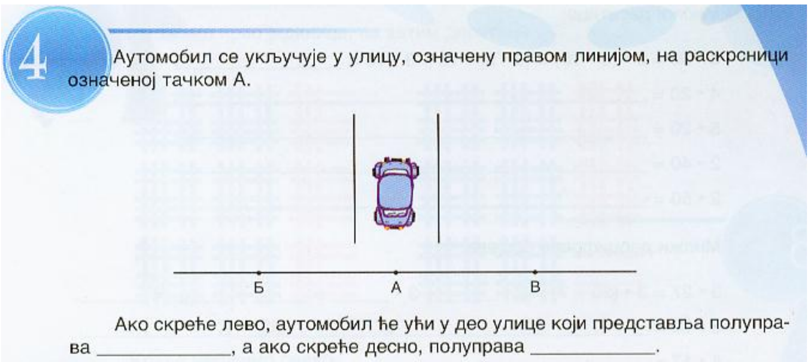
Задатак је потребно сместити у реалан контекст употребом речи које му припадају, а решавати га тако да се *препознају* еквивалентни појмови и математички објекти и речи у математичком контексту (III разред, *Едука*).

Постоји и група задатака која подстиче ученике да замисле геометријски простор и реше задати проблем само математичком процедуром или прво представљајући математичке објекте и(ли) објекте из свакодневног живота сликом.

Пример 7: Пример из радних листова када су ученици већ добро овладали појмовима тачка и дуж. Овај пример примене ‘замисли и реши задатак’ илуструје колико је важно повезивати апстрактни свет геометријских објеката са свакодневним дечјим искуством заснован на ученичкој интуицији (I разред, *Завод за уџбенике I*).

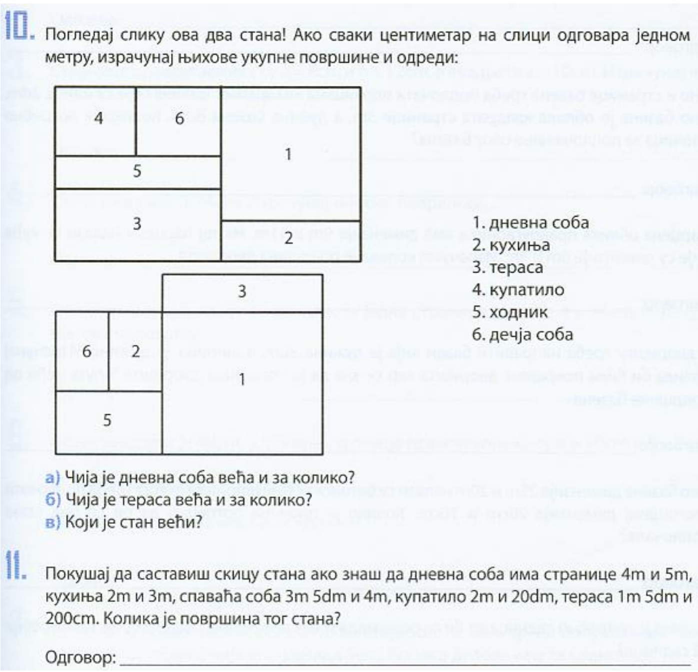


Пример 8: Ево још једног добро осмишљеног примера примене ‘замисли и реши задатак’ у коме се јавља појам полуправе. Напоменимо да би задатак био боље



вођен да је сада контрапозиција у односу на претходни пример истог издавача – замисли геометријске објекте и одговори на постављена питања на основу слике свакодневне ситуације, на којој се виде само објекти из реалног окружења (II разред, *Завод за уџбенике*).

Пример 9: Оба примера из уџбеника су добро осмишљени и вођени примери примене знања. Други пример је пример 'замисли и реши задатак' – потребно је искористити претходну ситуацију и саставити скицу стана са задатим димензијама. Задатак је могуће решити на више начина (потребно је скицирати фигуре различитих облика које нису подударне). У свим различитим скицама стана ради се о површима чије су површине једнаке (IV разред, *Клет*).


10. Погледај слику ова два стана! Ако сваки центиметар на слици одговара једном метру, израчунај њихове укупне површине и одреди:

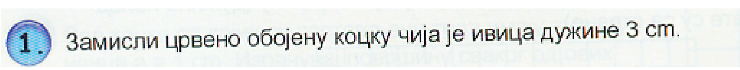
1. дневна соба
2. кухиња
3. тераса
4. купатило
5. ходник
6. дечја соба

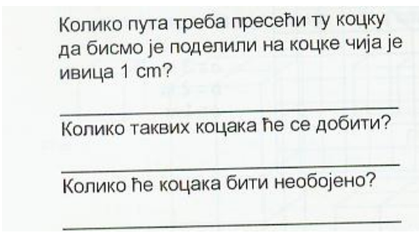
а) Чија је дневна соба већа и за колико?
б) Чија је тераса већа и за колико?
в) Који је стан већи?

11. Покушај да саставиш скицу стана ако знаш да дневна соба има странице 4m и 5m, кухиња 2m и 3m, спаваћа соба 3m 5dm и 4m, купатило 2m и 20dm, тераса 1m 5dm и 200cm. Колика је површина тог стана?

Одговор: __________

Пример 10: Пример 'замисли и реши задатак' који је тешко, готово немогуће на


1. Замисли црвено обојену коцку чија је ивица дужине 3 cm.


Колико пута треба пресећи ту коцку да бисмо је поделили на коцке чија је ивица 1 cm?

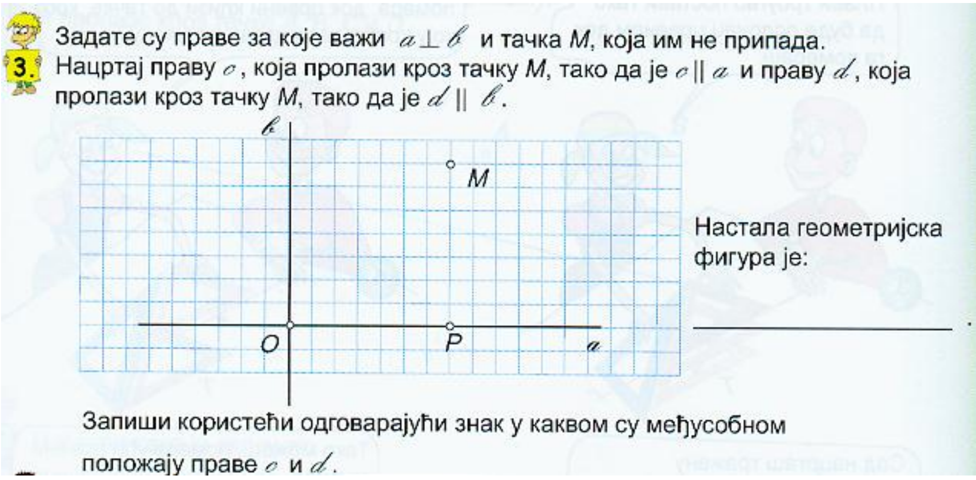
Колико таквих коцака ће се добити?

Колико ће коцака бити необојено?

овом узрасту, решити без слике (дат је у радној свесци као први задатак) (IV разред, *Бигз*).

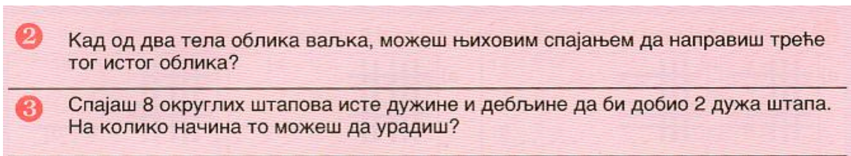
Наводимо и неколико примера унутарматематичке примене са одређеним специфичностима.

Пример 11: Решавање задатка се своди на повезивање тек уведеног појма цртања правоугаоника (квадрата) са раније овладаним процедурама цртања правих – да би нацртали правоугаоник (квадрат) на квадратној мрежи то можемо да изведемо примењујући већ научено о особинама правоугаоника (квадрата) и цртању нормалних и паралелних правих помоћу квадратне мреже (III разред, *Бигз*).



Понекад су захтеви врло тешки и немогуће их је решити.

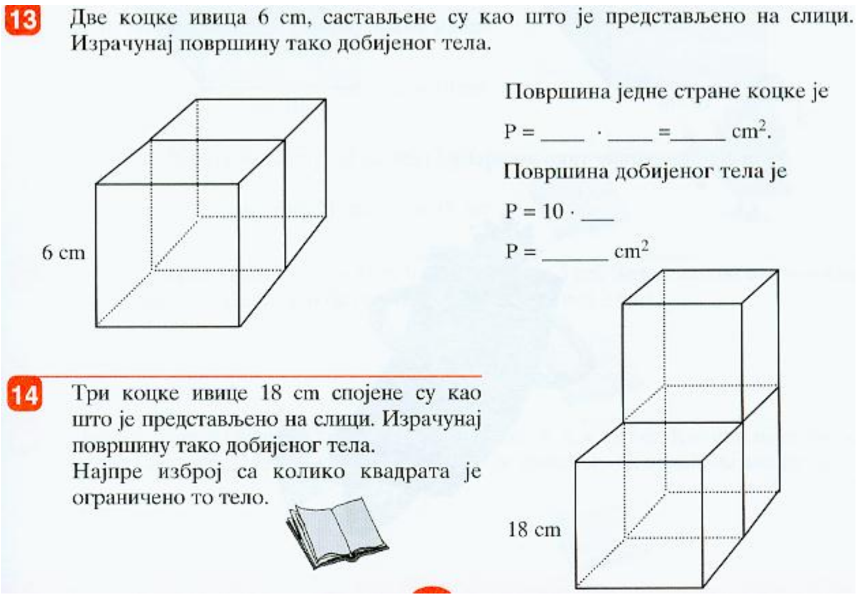
Пример 12: Први пример ‘замисли и реши задатак’ је добар пример, али задатак који одмах следи је тешко, готово немогуће на овом узрасту, решити без објекта или слике објакта. Реч је о комбинаторном проблему. Занимљиво је запазити


2 Кад од два тела облика ваљка, можеш њиховим спајањем да направиш треће тог истог облика?

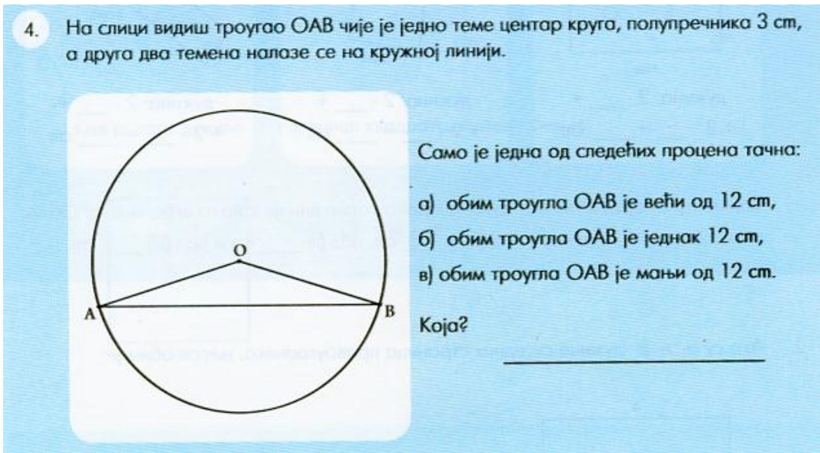
3 Спајаш 8 округлих штапова исте дужине и дебљине да би добио 2 дужа штапа. На колико начина то можеш да урадиш?

недоследност – исти издавач у II разеду у истом типу задатка нуди слике објеката и тиме упућује на њихово коришћење у комбинаторном решавању проблема (акционо или иконички) (I разред, *Завод за уџбенике I*).

Пример 13: Примери примене у математичком контексту из радних листова. Први пример има добро осмишљене и вођене кораке од слике преко математичке процедуре рачунања површине новонасталог геометријског тела састављеног спајањем две коцке. Други пример би ученици могли самостално да реше, скицирајући слику након претходно урађеног примера и као последњи пример у овој уџбеничкој теми (IV разред, *Завод за уџбенике*).



Навешћемо и један пример прераног увођења унутарматематичке примене.



Пример 14: У уџбеничкој јединици „Обим троугла“ примењује се знање у математичком контексту одмах по самом увођењу појма (четврти задатак у уџбеничкој јединици). Од ученика се очекује да повеже знања о обиму троугла са претходно стеченим знањем о кругу и особинама троугла: троугао АОВ у кругу је једнакокраки - краци ОА и ОВ (ОА=ОВ) су полупречници круга са центром у тачи О. Трећа страница АВ троугла АОВ је краћа од збира кракова ОА и ОВ (дужина АВ је мања од 3cm + 3cm = 6cm), па је и обим троугла АОВ (збир дужина свих страница) мањи од 12cm. Напоменимо да су задаци који следе у радној свесци истог издавача примеренији и са вођеним корацима у осамостаљивању ученика и примени наученог градива (III разред, *Завод за уџбенике*).

Дошли смо до следећих сазнања: а) захтеви за примену знања недовољно операционализовани кроз задатке Програма математике и дидактичко-методичка објашњења (упутства за примену програма су уопштена) и б) задаци примене знања присутни у великом проценту, али недовољно ‘фино’ разрађени са методичког аспекта (нису код свих издавача подједнако присутни, а и одступања су велика). Честе су грешке у спољноматематичким применама. Поставља се питање да ли ученике суштински припремамо за примену знања, јер их програм нејасно и непрецизно дефинише.

Процес овладавања релативно све вишим нивоима знања у настави математике постепен је процес који захтева место и време у наставном програму и уџбеницима.

Можемо слободно рећи да су уочавање и издвајање битног од небитног, способност употребе информација, повезивање знања и примена знања у уџбеницима математике важне одреднице интелектуалног ангажмана. Али, да би се развиле интелектуалне способности и умења ученика све поменуте одреднице требало би да су и присутне и ваљано ‘смештене’ у целом тексту и захтевима уџбеника и ‘фино’ методички разрађене, као и учитељево вођење којем је уџбеник водиља.

Све су то разлози зашто би требало утицати на измену наставног програма математике и дидактичко-методичка објашњења која га прате, па тиме директно и уџбеника. Неопходно је залагати се за програм и уџбенике који би битно подстицали и стварали ситуације различитих ученичких искустава у оквирима наставе математике и вођеног школског учења и тако ученике припремали како за даље формално, тако и за неформално образовање.

7. Мотивација за учење

Мотивација за школско учење комплексан је и вишеструко условљен феномен. Она зависи од:

- ученика – нивоа аспирација, способности и интересовања, мотивационог склопа,
- учитеља – личности, стручности, мотивисаности у раду,
- наставе – примењених наставних метода, употребе наставних средстава,
- уже и шире социјалне средине (деловање на наставни процес) и
- уџбеника – његових психолошких, педагошких, дидактичко-методичких карактеристика.

Говорећи о мотивацији за учење математике, Дејић и Егерић наводе како се развија интересовање ученика. Ради се о следећим компонентама: занимљива математика, примена математике, математика у другим предметима, елементи историје математике, истицање циљева изучавања математике итд. (Дејић и Егерић 2007: 268). Анализирајмо које су то структурне компоненте помоћу којих се остварује мотивациона функција уџбеника и какво мотивационо дејство он може да оствари.

7.1. Уџбеник почетне наставе математике и мотивација за учење

Пешић на високом првом месту ставља *мотивациону вредност основног текста уџбеника* чије су одлике смислености и разумљивости примарни извори мотивације. Упориште Пешић проналази у Бруnеровом ставу да „чинећи текст смисленим и разумљивим, уједно га чинимо и интересантним“ (Брунер 1960, према Pešić 1998: 159). Уџбенички текст постаје интелектуално занимљивији ако је заснован на проблематизацији градива, јер подстиче унутрашњу мотивацију код ученика и интелектуалну радозналост. Уколико су примери илустровани ситуацијама актуелним из живота ученика, онда уџбеник постаје и афективно провокативан. У овом смислу Пешић се ослања на Бахтинову концепцију ‘активног узвратног става’ по којој сваки текст изазива повратну реакцију, не само у смислу разумевања и учења, већ и активирања одређених питања, дилема, афективних реакција оног који учи (Бахтин 1980, према Pešić 1998: 160). Још једну важну мотивациону вредност основног текста Пешић наводи, то је по Кронбаху његов стил или ‘читљивост’ (Cronbach 1977, према Pešić 1998: 160). Уџбенички текст би по овом аспекту, наспрам научног, морао бити лексички и граматички прилагођен узрасту ученика. По Зујеву он би требало да је и стилски елегантан и занимљив (Зујев 1988, према Pešić 1998: 161). На другом месту издвајају се *питања и задаци у уџбенику*. Поред других функција које испуњавају, имају и мотивациону вредност при интелектуалном активирању ученика. Она је посебно изражена код задатака примене знања, повезивањем учења са свакодневним ситуацијама и наглашавањем примењивости знања, и у неким облицима дивергентне продукције (Pešić 1998: 163).

За конструкцију уџбеника и питање мотивације сматрају се битним следећа два питања: 1) Како осигурати неопходну мотивацију ученика за интеракцију са уџбеником и рецепцију његових садржаја? и 2) Шта се посредством уџбеника може учинити на подстицању развоја мотивације ученика? (Требјешанин 2001: 125). Једна од првих претпоставки јесте да ученик радо узима књигу из које учи, а да би то осигурали битна је перцептивна атрактивност. Осим ње је и интелектуална провокативност садржаја веома битна, усклађена са сазнајним могућностима детета и његовим предзнањима. Нека од решења за то могу бити проблематизовано излагање садржаја, стварање когнитивног конфликта, повезивање са животним проблемима и интересовањима деце одређеног узраста, бирани контекст близак деци, упућивање или давање занимљивих информација, додатни садржаји у виду применљивих знања као и подстицаји за њихову примену, питања, задаци и захтеви који ће ученике стављати у ситуацију да неизоставно буду мисаоно активни (формулисање проблемских задатака или задатака занимљивих по форми, захтева који имају елементе игровности итд.).

Привлачан је онај уџбеник који задовољава постојеће потребе ученика, као нпр. интелектуалне (радозналост за нове садржаје), потреба за активношћу, посебно оних у којима су ангажоване функције чији се развој управо одвија, потреба за потврђивањем сопствене компетентности итд. Уџбеник може да утиче и на развој нових интелектуалних и културних интересовања и потреба тако што сугерише или иницира неке активности које су присутни ван уџбеника и школских ситуација. Уџбеник може да помогне детету да постане свесно својих потреба, циљева и амбиција, као и подстицаја и самоподстицаја, да их препознаје, открива, размишља о њима. Уџбеник може да понуди диференциране садржаје за које ученици могу да се опредељују према индивидуалним склоностима и способобностима.

На питање како развити добар систем мотивисања у уџбеницима Плут наглашава важност потреба и то „којим потребама уџбеник мора да изађе у сусрет да би могао да покрене мотивацију детета за рад на њему, мотивацију за … размишљање пре свега“ (Плут 2003: 173). Потребе на којима се темељи мотивациони потенцијал уџбеника према Плут су следећи:

- Потреба за когнитивном равнотежом и неравнотежом,
- Потреба за потврђивањем властитих компетенција,
- Потреба за аутономијом,
- Емоционално-социјалне потребе,
- Естетске потребе,
- Потреба за осмишљавањем онога што радимо.

За потребе нашег рада расветлимо нека питања са претходне листе потреба. Осубел наводи да је развој мотивационог аспекта учења заправо развој његовог когнитивног аспекта (Ausubel 1963, према Плут 2003: 174). Мотивација долази као последица добро постављеног когнитивног изазова.

Да би потврдили властите компетенције код ученика, Плут наводи да је потребно да:

- Јасно поставимо циљ учења,
- Пратимо процес учења олакшавајући га и пружајући садржајне и благовремене повратне информације,

- Омогућимо активно учешће деце,
- Изделимо градиво на лако савладиве сегменте,
- Понудимо помоћна средства, интелектуална оруђа за савладавање проблема,
- Метакогнитивно снажимо уџбеник,
- Подржимо напредовање деце различитих способности и интересовања,
- Олакшамо читљивост текста.

Плут поставља питање могућности уџбеника да уважи потребу за аутономијом ученика и наводи два начина за постизање истог: први је онај који стимулише почетне спољашње мотивације и њихово преобликовање у унутрашње, а уџбеник то може кроз интелектуално активирање ученика и садржаје који су интелектуално провокативни и атрактивни, док је други оспособљеност ученика да самостално прати и евалуира своје напредовање, што се може постићи кроз јасне критеријуме шта је стандард који треба достићи и шта је циљ коме тежимо. Шта уџбеник може није могуће при првом сусрету са учеником, али он може оно спољашње да претвори у аутентичну унутрашњу потребу и за тако нешто уџбеник има могућности (Ibid).

Плут наводи још неке облике осмишљавања учења у уџбенику који имају моћно мотивационо дејство на учење. То су:

- практична примена знања,
- умрежавање знања – или употреба у систему знања,
- развој знања и
- вредносни став према учењу као важној делатности.

Важно је да све ово покаже уџбеник емитујући поруку значаја учења.

Многе теорије развоја интелигенције, пре свих Пијажеова, заснивају се на интризичком (унутрашњем) мотивационом механизму познатом под именом *сазнајни конфликт*. Он представља основни покретач интелектуалног развоја индивидуе.

Уопште, у оквиру теорије унутрашње мотивације могуће је сагледати импликације за разред у више различитих области:

- *наставном курикулуму* – одабир и аранжирање садржаја, наставне методе и облици рада, задаци и мотивација за учење,
- *начину педагошког усмеравања* – педагошки стил (поступак) наставника и мотивација за учење и
- *међусобним психо-социјалним односима* – међусобни однос наставника и ученика и унутрашња мотивација за учење.

Нас занимају све три, а посебно питање односа задатака и мотивације за учење, као и односа наставног поступка и мотивације за учење (један из области наставног курикулума, а други из педагошког усмеравања). Опишимо их.

7.1.1. Задаци и мотивација за учење

У настави математике задаци заузимају врло важан део, па самим тим важан део и у уџбенику. Резултати истраживања анализа уџбеничких *задатака* од значаја су за наш рад (Pepin 2008, Плут 2000). Задаци у уџбеницима заправо су „стандарди и оријентири шта је важно, а шта не, и то не само за ученике већ и за наставнике“ истиче Плут (Плут 2003: 141). А шта је важно?

Задаци су нека врста ‘модела’ за разна вежбања, па би њима уџбеник требало да понуди разноврсне идеје, кроз обавезне и факултативне услед разлике у интересовањима ученика. Место задатака је важна одредница. У уџбенику који жели да активира ученика задаци би требало да су проткани кроз цео уџбенички текст, успостављајући на тај начин „вид дијалошког комуницирања“ (Ibid: 142). О самој природи задатака и томе шта би требало вежбати, зависи од много чинилаца. У овом раду наша пажња биће фокусирана на типологију задатака према врсти интелектуалног ангажмана који захтевају, па ћемо се из практичних разлога служити Блумовом класификацијом (таксономијом) примењеном на задатке.

Дуга је традиција интересовања за задатке који се ученицима постављају, и веома развијена у савременим истраживањима, са становишта учења са разумевањем, као и са становишта мотивације за учење. Класични мислиоци и истраживачи когнитивистичког усмерења за предмет интересовања имали су карактеристике самог задатка које могу да имају мотивациону вредност. У новијим истраживањима већи је утицај социјално-културолошког приступа тумачења мотивације за учење, са помереном пажњом ка начину на који је организовано решавање задатка у наставном процесу и ка интеракцији наставника и ученика у току његовог решавања (Требјешанин 2009: 74). Мотивациона вредност задатка произлази из динамичне интеракције између ученика, задатка и наставника у процесу решавања задатка.

За наш рад занимљиве су импликације когнитивно-информационог процесирања по Дојлу (Doyle 1983, према Требјешанин 2009: 75). Реч је о класификацији задатака с обзиром на ниво когнитивних захтева и ниво ризика који укључују. С обзиром на ангажоване когнитивне операције, разликујемо задатке који захтевају:

- меморисање,
- рутинску примену процедура,
- схватање и
- формулисање сопственог мишљења (става).

С друге стране, неки задаци укључују малу могућност грешке тј. за ученика мали ризик да се покаже некомпетентним, док други укључују већи ризик. Меморисање краћих и једноставнијих информација, као и примена одређених процедура мање сложености, укључује мали ризик, док задаци који захтевају меморисање обимнијег и комплекснијег садржаја, примену сложенијих процедура, захтевају схватање и тумачење градива, заузимање одређеног когнитивног или емоционалног односа према садржају, укључују већи ризик – шанса да се погреши може да буде већа, може да буде мање јасно или мање извесно шта је тачан одговор и сл.

Могло би се очекивати да рутински задаци изазивају досаду код ученика и тиме демотивишу ученике, а да изазовни задаци који активирају потребу за компетенцијом имају већи мотивациони потенцијал. Резултати истраживања показују да постоје два стила (или обрасца) које ученици развијају у односу на изазовне задатке (Ibid). Један је означен као адаптивни и односи се на усмереност ученика ка савладавању и тражењу изазова, те велику истрајност на путу ка постизању циља. Други је маладаптивни који се односи на сасвим супротан однос према изазовним задацима. Очито је да саме карактеристике задатка нису од пресудног утицаја на њихов мотивациони капацитет, већ он зависи од учениковог доживљаја потенцијално мотивишућег задатка. Вулфолк каже да они једноставнији, рутински задаци могу да буду подстицајнији на краћи рок због осећања успеха које се брже постиже (Woolfolk 1998, према Требјешанин 2009: 76).

Наведимо још једну класификацију задатака с обзиром на ниво когнитивних захтева, широко распрострањену (Stein, Smith, Henningsen & Silver 2000). Штајн, Смит, Хенингсен и Силвер предлажу праћење когнитивних захтева кроз задатке, наводећи да у задацима можемо да постављамо захтеве:

1. ниског нивоа, и то:
   1.1. меморисања (запамћивања),
   1.2. извођења процедура без веза са значењем.
2. високог нивоа, и то:
   2.1. извођења процедура са везама са значењем,
   2.2. извођењем математичких радњи (захтеви сложеног и неалгоритамског начина размишљања где ученици истражују и разумеју природу математичких појмова, процеса и односа).

Штајн, Смит, Хенингсен и Силвер наводе да ће различити задаци 'позивати на' различите нивое и врсте размишљања ученика (Ibid: 4).

Истраживања новије генерације у оквиру социо-културолошке оријентације бацају додатно светло на мотивациону вредност изазовних школских задатака. Реч је о експериментима у разреду са атмосфером коју је креирао наставник и са задацима сложених структура и отворених решења какви су, на пример, истраживачки задаци са реалним проблемима. Рад на овим задацима организован је тако да ученици у сарадњи са наставником редефинишу задатак прилагођавајући ниво изазова својим потребама и идејама, са добијањем специфичне помоћи од стране наставника у погледу избора и примене стратегија за решавање задатка, у размени искуства и знања са другим ученицима. „Начин на који је организован рад на задатку, а не саме карактеристике задатка, довели су до тога да изазовни сложени задаци са отвореним исходом, постану подстицајни и за ученике са слабијим успехом, као и за оне који би, плашећи се могућег неуспеха, избегавали сложене задатке“ истиче Требјешанин (Требјешанин 2009: 77). Али, када потпоре наставника нема, као ни вршњака, ученици су испољавали знаке збуњености и са знатно смањеном продуктивности, па и одустајању у решавању задатка (Miller & Meece 1997, Perry 1998, Blumenfeld, Krajcik, Marx & Soloway 1994, према Требјешанин 2009: 77). Из овога произилази да изазовни и смислени задаци, са начелно већим мотивационим потенцијалом у односу на једноставне и рутинске, постају делотворни тек у условима корегулације ученикове активности и са социјалном подршком компетентнијих, а у супротном могу да буду контрапродуктивни.

Осим што је ученику пожељно давати подршку у решавању таквих задатака, корисном се показала инструктивна помоћ наставника у планирању активности, избору приступа и прилагођавању захтева учениковим специфичним потребама, у усмеравању њихових идеја и проширивању стратегија за решавање задатака, те доношењу одлука које су од значаја за даљи рад и у праћењу и процени успешности изведених активности. Описане помоћ и подршка као мотивационо делотворне су „прилагођена подршка, подупирање и потпомагање ученикових покушаја решавања задатака комплементарна његовим покушајима“ (Требјешанин 2009: 78). Ови облици и оснажују ученикову мотивацију, али и доприносе унапређењу ученикових компетенција за учење и решавање проблема, као и за развој трајне мотивације за учење, за решавање али и откривање изазовних проблема. Упозорава се и на опрез приликом прилагођавања изазова учениковим могућностима, како се изазован задатак не би претворио у једноставан, рутински или процедурални, свођењем захтева на минимум, давањем детаљних упутстава за рад и стриктним дефинисањем карактеристика крајњег резултата тј. како Вулфолк каже могућег учениковог сазнавања са што лакшим долажењем до решења, уместо развојем унутрашње мотивације за учење (Woolfolk 1998, према Требјешанин 2009: 78).

Посебни проблеми које Требјешанин износи јесу време и обимни програми, па је зато „тешко подржавати истрајно трагање за решењем сложеног истраживачког или практично релевантног сложеног задатка, у условима када звоно прекида започету активност можда баш у тренутку највеће удубљености у задатак, а следећи час намеће нове задатке и нове активности, или кад се од свих ученика очекује да у истом временском интервалу заврше са решавањем задатка“ (Ibid: 79).

7.1.2 Поступак (педагошки стил) наставника и мотивација за учење

Са становишта развоја унутрашње мотивације за учење, у литератури се као посебно значајно појављује стварање разредне климе усмерене ка учењу са разумевањем, улагању напора, препознавању отворених питања и проблема и сл.

Новија истраживања засنована на социо-културолошком приступу наглашавају да је поред тога за шта се наставник залаже, значајно и на који начин то чини (Требјешанин 2009: 80). Тако у резултатима истраживања Тарнерове и сарадника показан је значај наставниковог дискурса који изражава подршку, потпомагање и охрабрење, и то како на когнитивном плану, тако и на мотивационом (Turner et al. 1998, према Требјешанин 2009: 80). Уопштено дискурс се односи на језик и ефекте које употреба језика има на свет који нас окружује. Дискурс је термин којим означавамо употребу језика као друштвене праксе, а анализа дискурса јесте анализа како текст функционише у оквиру социокултурне праксе. Подржавајући инструктивни дискурс који укључује помоћ ученицима да схвате градиво, ученици се подстичу да сами објасне оно што су научили, да постављају питања ако нешто нису разумели, да анализирају грешке како би их превазишли, да сами процењују шта јесу а шта нису схватили, за разлику од неподржавајућег и непотпомажућег у којем се инсистира на тачном одговору задатка. Подржавајући мотивациони дискурс укључује наставниково вредновање учениковог напредовања, подстицање позитивних емоција у наставним ситуацијама, те препознавање и отклањање негативних, унапређење сарадње у разреду, подстицање ученика који се разликују од других по свом начину или темпу рада, док неподржавајући подразумева усредсређеност на ученикове грешке, изазивање непријатних емоција у наставним ситуацијама и подстицање међусобног поређења ученика.

Нека истраживања показала су да мотивациони ефекат подржавајућег дискурса зависи од интеракције са учеником, односно од његових карактеристика и његовог доживљаја овог дискурса (Järvelä 1995, према Требјешанин 2009: 81). Исти наставни приступ различити ученици доживљавају на различит начин, те су и ефекти у области мотивације за учење различити. Резултати истраживања показују да је претпоставка за развој унутрашње и аутономне мотивације контекст који подржава ученикову аутономију (Deci et al. 1994, према Требјешанин 2009: 81). Наставник у процесу учења има разумевања за ученикова гледишта, пружајући му подршку за самоиницијативу и избор, дајући разумно образложење за обавезе, уздржавајући се од притисака и условљавања како би мотивисао ученике и пружајући правовремену повратну информацију са нагласком на успешно овладавање знањем, повећање компетенција и лични напредак ученика. Насупрот овоме је атмосфера за коју је карактеристичан притисак на ученике да мисле и понашају се на начин који је дефинисао наставник.

Према резултатима неких истраживања атмосфера коју је креирао наставник који подржава ученичку аутономију повезан је са већим интересовањем ученика за градиво, са њиховим осећањем компетенције, самопоуздањем, креативношћу, преферирањем изазова и учењем са разумевањем и то на различитим узрастима, почев од почетних разреда до средње школе (Ryan & Grollnick 1986, Williams, Wiener, Markakis, Reeve & Deci 1993, према Требјешанин 2009: 82). У таквој атмосфери ученици су спремнији и да доживе школске активности као значајне чак и кад им нису забавне. Дотле контролишућа средина показује тенденцију да унапреди рад само на рутинским и задацима меморисања.

8. Теоријска заснованост наставног приступа реалистично математичко образовање

Осврнимо се прво на изучавање теорија математичког образовања. Међународна математичка заједница и међународна заједница истраживача математичког образовања презентују значајна питања, а једно од њих је егистенција и сврсисходност више (дивергентних) теорија математичког образовања (учења и подучавања) (Romano 2009a). Једно од објашњења постојања више теорија математичког образовања лежи у дивергентним епистемолошким стајалиштима о томе шта представља математичко знање. Осим овог објашњења, постоји и објашњење да математичко образовање, иако не личи на ‘чисту’ дисциплину у науци, под снажним је културолошким, социјалним и политичким утицајима (D’Ambrosio 1999, Secada 1995, Skovsmose & Valero 2002, према Romano 2009a: 8). Тако Мура износи да су у многим радовима канадских истраживача математичког образовања честа позивања на истраживања Жана Пијажеа, Золтана Дајенса и Џерома Брунера (Mura 1998, према Romano 2009a: 8). Ако погледамо чланак Артиугуа и његов преглед радова француских математичара и методичара наставе математике од пре десетак година, видимо позивање на рад Пијажеа и конструктивистичку фазу из 1980-тих у истраживањима математичког образовања (Artigue 1999, према Romano 2009a: 8). Овде је уочена једна нова перспектива у подучавању математике, али и чињеница да је подучавање несводљиво на просту и једносмерну трансмисију информација. Међутим, конструктивистички модел подучавања критикован је због уважавања социјалне и културолошке димензије. Узимајући у обзир истраживања Бросоа и Шеваларда Артиугуа је наводио мањкавости многих теорија (Ibid). Према Лерману социјална димензија у истраживањима математичког образовања уочава се крајем 1980-тих година када се на математичко образовање почело гледати као на хуманистичку делатност (Lerman 2000, према Romano 2009a: 8). Из радова Виготског и Витгенштејна проистекао је *социјални конструктивизам* и од тада он постаје доминантна истраживачка парадигма (Romano 2009a: 8). У научним круговима постоје различита испитивања да ли је социјални конструктивизам базиран на когнитивним позицијама или на методолошким или, пак, на обе

(Noddings 1990, Ernest 1991, према Romano 2009a: 8). С друге стране, у когнитивно оријентисаним теоријама менталне структуре резултат су подучавања. Те теорије објашњавају како се менталне структуре развијају, те како школски курикулуми математике треба да садрже есенцију математике (Stevens 2000, према Romano 2009a: 8). Актуелна 'алтернативна' позиција о природи математике јесте да је „математика заснована на разуму" (Lakoff & Nunez 2000, према Romano 2009a: 8). Она говори о математици као продукту који је формиран људским умом, али под снажним упливом друштва и друштвене културе. Појам 'наслеђеног мишљења' Лакофа и Нунеза заснива се на схватању човека не само у стицању искуства, већ и изграђивању нове искуствене структуре и појмовних система (Ibid). Лакоф и Нунез истичу да ће се кроз наставу математика учинити приступачнијом и разумљивијом за учење под условом да се подучавање фундаменталним математичким идејама остварује на сличан начин како су се оне појављивале у науци. Социјални конструктивизам налази се на становишту да је социјална интеракција један од потребних услова у овом концепту наставе математике.

Од '80-тих година XX века у курикулумима се све више наглашава значај процедуралног овладавања и појмовног разумевања математичких садржаја. Томсон и Сенк примећују да је ово посебно наглашено у:

1. реалистичном математичком образовању у Холандији (Gravemeijer 1994, према Thompson and Senk 2008: 1);
2. математичким курикулумима аустралијско-азијске регије (Seah & Bishop 2000, према Thompson and Senk 2008: 1);
3. математичком курикулуму у Јапану (Watanabe 2001, према Thompson and Senk 2008: 1);
4. математичком курикулуму Универзитета у Чикагу (UCSMP) (Usiskin 2003, према Thompson and Senk 2008: 1).

Теорија математичког образовања *РМО* је теорија у којој је процес учења заснован на идеји математике као вођеног процеса (поновног) открића математичких идеја са основним циљем разумевања поступка математизације (Gravemeijer 1994, Heuvel-Panhuizen 2001, Милинковић 2007a, Милинковић, Ђокић и Дејић 2008, Romano 2009c, *ЛОТ*). У основи лежи идеја препознавања проблема (модел задатка) у реалним ситуацијама и путеви њиховог решавања. На пример, до појма променљиве ученици долазе бавећи се читањем података о висини чланова породице и на овај начин спонтано долазе до потребе увођења обједињујућег (апстрактног) математичког појма. Ова теорија заснована је на Фројденталовој интерпретацији математике са реалистичним приступом математичком образовању.

RME (Realistic Mathematics Education) – *РМО* (Реалистично математичко образовање) настаје као реакција дидактичара математике из Холандије на реформе започете почетком 1970-тих (покрети *New Math* и *Mathématiques Modernes*). Вискобас пројекат (*Wiskobas project*) развија теорију наставе коју назива реалистично математичко образовање (Freudenthal 1973, 1991, Heuvel-Panhuizen 1996, Gravemeijer 1994, Streefland 1991, Treffers 1987, 1991). Холандски приступ математичком образовању, раније често именован као ‘механичко математичко образовање’, доживео је велике промене (Heuvel-Panhuizen 2001: 1). Свака од реформи математичког курикулума и ефекти који су њихова директна последица захтевају извесно време, често и деценије. Тако Хеувел-Панхуизен наводи да иако *РМО* у Холандији има стаж дуг око четири деценије, ипак се ради о „пројекат који је у развијању“ (Ibid). Ми ово разумемо као теорију која се развија, и која има различите ефекте на наставу примерено националним курикулумима и из њих проистеклим уџбеницима.

У *РМО* полазимо од реалних ситуација. *Реалне ситуације* представљају стварне, свакодневне ситуације. Поштујући принцип очигледности у почетној настави математике полази се од једноставних реалних ситуација и иде се до сложених ситуација блиских дечјем сагледавању света, тј. ситуација искуствено могућих у учениковом окружењу, укључујући и оно што је деци замисливо или блиско (свет маште) (*ЛОТ*). Пример једноставне реалне ситуације може да буде пребројавање слика у албуму, а *Пут око света за 80 дана* може да буде извор сложене реалне ситуације. Организацијом чулног искуства из реалне ситуације граде се интуитивне основе за математичке појмове и њихово формирање, те стварање когнитивне схеме за математичке садржаје који се затим обрађују. На предшколском и млађем школском узрасту деца се налазе на нивоу конкретних операција, те сазнање о неком математичком појму започиње посматрањем примера у реалним ситуацијама, везаним за тај појам (Ginsburg and Baron 1993: 5, Дејић и Егерић 2007:46). Сазнање се непосредно заснива на опажању (чулном сазнању), на основу кога се стиче представа (ментална слика) о појму. Даље се мисаоним операцијама чулно-искуствених сазнања долази до појма, а цео овај процес прати и његово именовање. Пут формирања појма креће од уочавања одговарајућих предмета (објеката) у реалној ситуацији и издвајања заједничких својстава свих појединачних примера (занемарујући небитна у виду ‘шума’ и стицањем представе – унутрашње менталне слике), праћен именовањем појма који се формира. Овде се укључује и симболичко записивање, односно ознака (реч / цртеж / објекат) која стоји уместо нечег другог (ствари, бића, ситуација итд.). Код решавања проблема у реалној ситуацији важну улогу има математичко моделовање – из реалне ситуације одговарајућим моделовањем требало би прећи у математички домен, где се уочени проблем може решити преведен на математички језик, а после се математичко решење тумачи језиком реалне ситуације. Решавање проблема у реалној ситуацији изводи се математизацијом нематематичке ситуације моделовањем и то: а) формирањем математичког модела у односу на одговарајућу реалну ситуацију, б) решавањем математичког проблема који смо изградили и в) решење математичког проблема које одговара математичком моделу сада враћамо у реалну ситуацију. Том приликом изводи се математичко закључивање, које ученике стимулише да даље препознају и користе релевантну математичку апаратуру при решавању проблема у реалној ситуацији, да успостављају математичке схеме, да развијају моделе при формирању математичких појмова, при чему се инсистира на сложеној смисленој концептуализацији учења и успостављању веза између посматраних објеката и догађаја у реалној ситуацији с једне стране и математичких појмова и процедура које објашњавају односе између тих објеката и догађаја с друге стране.

8.1. Приступи математичком образовању

Постоје следећи приступи математичком образовању:

1) механицистички (или ‘традиционални’) – карактеристично је меморисање процедура и ниједан облик математизације;

2) емпиријски – карактеристична је употреба материјала и искуства из реалног живота, присуство хоризонталне математизације; ученици нису подстакнути да прошире ситуацију, у циљу да дођу до формула или модела, тј. остају без њих и тиме не долазе до математичког знања;

3) структуралистички (‘нови математички приступ’) – нема готово ништа заједничко са ученичким животом, присуство вертикалне математизације и

4) реалистични – реалне ситуације узимају се као полазна тачка подучавања и учења математике где су присутне и хоризонтална и вертикална математизација) (погледати табелу 3.) (Freudenthal 1991 и Treffers 1991, према према Romano 2009c: 13).

У последњем типу, на коме се заснива и *РМО*, реалне ситуације се узимају као полазна тачка за подучавање и учење математике и хоризонтална математизација, при чему ученик препознаје математички аспект при решавању контекстуалних проблема, открива правилности и релације и формира математички појам вертикалном математизацијом, насупрот механицистичког приступа који је усмерен на увежбавање процедура.

Табела 3. Четири приступа математичком образовању према Фројденталу

Тип приступа	Хоризонтална математизација	Вертикална математизација
Механицистички	–	–
Емпиријски	+	–
Структуралистички	–	+
Реалистични	+	+

8.2. Реалистично математичко образовање РМО

У овој теорији образовања *математизација* је један од кључних појмова. Реч је о врсти организованог процеса учења у којој се елементи реалног контекста мењају у математичке објекте[34] и релације. Полази се од проблема у реалним ситуацијама смештеним у одређени контекст. Речи *контекст*[35] приписује се латинска реч која значи ширу целину – оно са чим посматрана појава чини целину. О овоме ћемо нешто више речи касније у поглављу о геометрији у контексту.

РМО има следеће елементе: 1) појмовна (или концептуална), 2) прогресивна, 3) хоризонтална и вертикална и 4) примењена математизација. Кључне за *РМО* су вертикална и хоризонтална математизација. У хоризонталној присутан је прелазак из реалне ситуације у свет математичких објеката (појмова, симбола итд.), преко математичког апарата који ученицима омогућава решавање проблема. Примери хоризонталне математизације су схематизација, формулација и визуелизација проблема са различитих аспеката, откривање правилности, препознавање изоморфних аспеката у различитим проблемима, трансформација реалног проблема у математички проблем, као и трансформација реалног проблема у познати математички проблем (Romano 2009c: 13). Вертикална подразумева кретање унутар света математичких објеката (појмова, симбола итд.) и реорганизацију математичких знања утврђивањем веза између математичких појмова и поступака. Примери вертикалне математизације су представљање релација формулама, срећивање модела, коришћење различитих модела, комбиновање и интеграција модела, формулисање математичког модела, генерализација (Ibid). Фројдентал тврди да разлику између ова два типа математизација није увек лако уочити (Freudenthal 1991, према Romano 2009c: 13). Илустрација која следи приказује да обе математизације у процесу (поновног) открића математичких идеја у настави узимају учешће у развоју основних математичких појмова или формалног математичког језика (Gravemeijer 1994, према Romano 2009c: 13).

---

[34] Већ смо у *Уводу* нагласили шта је матеметички објекат.

[35] *Речник српскога језика* (2007): Матица српска, Нови Сад.

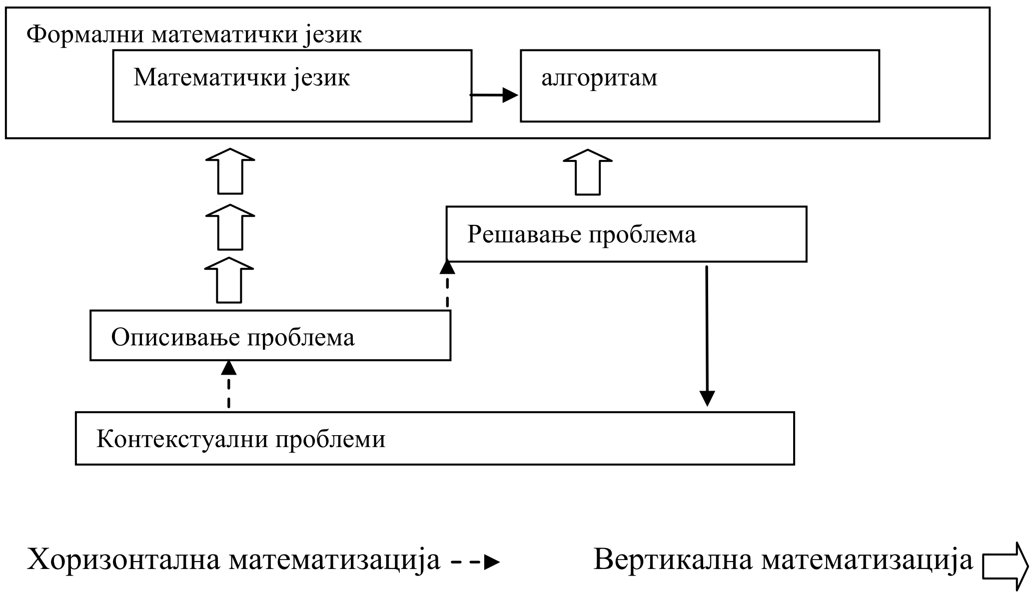


Схема 5: Модел за (поновно) откриће по Гравемејеру

Погледамо ли схему 5. видимо да процес учења почиње контекстуалним проблемима. Кроз активности хоризонталне математизације ученик добија један неформални или формални математички модел. Путем решавања, упоређивања, сагледавања комплексности постављеног проблема ученик, у складу са вертикалном математизацијом, долази до математичког решења. Ученик, заправо, интерпретира решење, као и стратегије које је користио у неким (сличним) контекстуалним проблемима, а затим располаже одређеним математичким знањем.

8.2.1. Основне карактеристике, основни принципи и принципи учења и подучавања у *РМО*

Издвојмо *основне карактеристике РМО* – принципе учења и подучавања. Историјски, карактеристике *РМО* теорије у вези су са ван Хилеовим нивоима разумевања геометрије, о којима ћемо више говорити. Де Ланж објашњава да процес учења према ван Хилеовим нивоима пролази кроз три фазе и то: 1) ученик достиже до првог нивоа мишљења чим може манипулисати познатим карактеристикама схема, 2) досезање до другог нивоа постиже се када ученик стиче могућност да манипулише међуодносима каратеристика схема и 3) када је ученик у могућности да манипулише суштинским карактеристикама међуodноса посматране схеме он је доспео до трећег нивоа мишљења (de Lange 1996, према Romano 2009c: 14). Традиционални начин подучавања полази од претпоставке да ученици располажу способностима којима се идентификује други или чак трећи ниво мишљења, док реалистични приступ полази од претпоставке о достизању тек првог нивоа мишљења. Стартујући од првог нивоа, а у намери да се досегне други, полази се од феномена који су блиски ученицима. Следећи претпоставке Фројденталове дидактичке феноменологије, подучавање треба да започне контекстуалним проблемима. Процес се даље наставља поступком (поновног) откривања математичких идеја и процесима прогресивне математизације под вођством учитеља и преласком са првог на други ниво, овладавајући способностима којима се идентификује други виши ниво.

Основни принципи у *РМО* теорији су*:* 1) три ван Хилова нивоа, 2) Фројденталова дидактичка феноменологија и 3) Треферсова прогресивна математизација. Они уобличавају *принципе учења и подучавања* у *РМО* као пет основних карактеристика и то:

1) феноменолошко истраживање или употреба контекста,
2) употреба модела и/или премоштавање вертикалних инструмената,
3) ученички рад и изграђивање математичких појмова (ученички рад и конструкција математичког знања[36]),
4) интерактивни карактер процеса наставе и
5) међусобно прожимање више поступака учења и/или тема (наставних јединица) (Romano 2009c, *ЛОТ*).

Опишимо сваки посебно.

[36] Често се у психолошкој литератури наилази на термин *конструкт знања ученика*. Према конструктивистима, конструисање знања представља учениково бављење сопственим мисаоним процесима у виду откривања најбољих стратегија за решавање проблема на које се наилази, док са̂мо откривање знања и истраживање суштине захтева значајно више времена у процесу сазнавања. Овде се мисли на откривање суштинских својстава предмета сазнавања, а знања о суштинским својствима јављају се као елемент повезивања (конструисања) знања код ученика. (Антонијевић, Р. (2006): *Систем знања у настави*, Институт за педагошка истраживања, Београд, стр. 216).

1) Процес учења у *РМО* започиње реалним ситуацијама тј. контекстуалним проблемима – оно што је за ученике искуствено могуће, укључујући и саму математику (када ученици једном овладају одређеним математичким апаратом, математика сама постаје реални контекст). Процес доношења закључака из реалних ситуација означава се као ʻконцептуална математизацијаʼ по де Ланжу (видети схему 6.) (de Lange 1987, према Romano 2009c: 15). Реч је о процесу који би требало да стимулише ученике који проналазе и идентификују релевантну математичку апаратуру, успостављају схеме, развијају модел као резултат активности. Процесима рефлексије и генерализације развија се сложенији математички појам. А потом могу да се примењују математички појмови на нова подручја реалног света, снажећи њихово разумевање. Реч је о процесу примењене математизације.

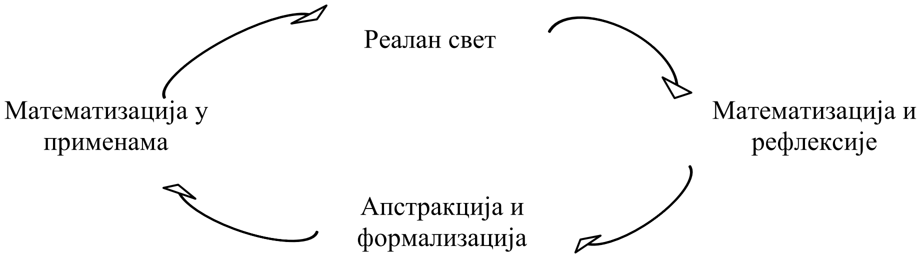


Схема 6. Појам и примена математизације по де Ланжу

2) Ученици развијају моделе у поступку решавања проблема. Сам термин ʻмоделʼ покрива појам ситуационог модела са којим су ученици блиски (познати су им). Хоризонталном математизацијом – математичким моделовањем добија се модел (Stillman 2007, English and Watters 2004, Romano 2009c, *ЛОТ*). Анализом математичког модела (сагледавање, упоређивање, решавање) успостављају се везе између посматраних објеката и догађаја из окружења и математичких појмова и идеја које објашњавају односе између тих објеката и догађаја, при чему долази до реорганизације знања ученика. Постоје четири нивоа модела у *РМО* и то: 1. ситуациони, 2. референтни, 3. општи и 4. ниво формалне математике (Gravenmeijer 1994, према Romano 2009c: 15). Ситуациони ниво подразумева познавање ситуације и конкретну стратегију која се користи у контексту

решавања дате ситуације. Референтни ниво је онај при ком се модели и стратегије односе на ситуацију описану у датом проблему. У општем нивоу стратегија је на математичком фокусу и она је доминантнија од оних у контексту. Када се конвенционално усвоје појмови и процедуре, реч је о нивоу формалне математике.

3) Ученик вертикалном математизацијом долази до решења. За *РМО* значајна је улога модела као апроксимација апстрактне појаве, који постаје модел средство за решавање проблема. Ученици се стављају у позиције у којима уочавају, посматрају и решавају математички проблем у реалистичном контексту и истражују инваријантност математичких објеката и релација. Де Ланж износи мишљење да учитељ подстиче ученичку властиту рефлексију на његов захтев за ‘слободном продукцијом’, стимулативно утичући на процес учења и настављајући са тражењем одговора ученика (de Lange 1987, према Romano 2009c: 16). Учитељева улога фацилитатора-усмеривача и слободно изношење ставова ученика чини суштински важан део за њихову процену успешности. Од ученика се може тражити да нпр. напишу есеј, изведу експеримент, да прикупе неке податке и на основу њих покушају да изведу (неке) закључке, да подстакну и друге ученике у том поступку.

4) Интеракција између ученика и између ученика и учитеља један је од важнијих аспеката *РМО* теорије (de Lange 1996, Gravenmeijer 1994, према Romano 2009c: 16). Конкретни разговори, учитељеве интервенције, сарадња есенцијални су елементи у конструкцији процеса учења. При овоме, ученици користе нестандардне методе и подстичу се да објашњавају, процењују, одлучују, износећи своје рефлексије на ток и резултате рада.

5) За *РМО* карактеристичан је *холистички приступ* који подразумева међусобно прожимање више поступака учења и обједињавање више наставних јединица (па и наставних тема). Тиме се постиже вредан циљ наставе, посебно за решавање проблема (Ibid). О овом питању писала је Хаувел-Панхуизен (Heuvel-Panhuizen 1995, 2001) која наводи као основи разлог посвећеност хоризонталној математизацији и занемаривању вертикалне, као и наши аутори који процењују да је разлог зашто ученици са потешкоћама примењују стечена знања заправо процес учења математике ‘вертикално’, и то учећи сепаратно о бројним математичким

објектима и занемарујући њихово међусобно прожимање (Црвенковић, Праштало и Романо 2007, према Romano 2009c: 16). Способност примене стечених знања и вештина у геометрији потребнија је него знање саме геометрије (Романо 2009b) (исто важи и за алгебру).

Математичко моделовање укључује аутентичне ситуације које би требало интерпретирати и описати на математички начин (Lesh & Harel 2003, према English and Watters 2004: 61). То је процес у који могу да буду укључени ученици свих узраста који описују и анализирају реалну ситуацију и обезбеђују решење постављеног проблема, где се реалан контекст узима као значајан (Stillman 2007). Реч је о сложеном поступку којим се уочени феномен или проблем преводи у математичку форму (*ЛОТ*). На сличан начин о моделовању, уопштавању и доказивању своје идеје износе Карпентер и Ромберг разматрајући их као експлицитан фокус у подучавању у ком они могу да помогну да велике математичке идеје буду доступне свим ученицима и на свим узрастима (Carpenter & Romberg 2004, према English and Watters 2004: 59). У последње време у истраживањима се јавља померање са старијих разреда основне школе (Stillman 2007) на млађе разреде (период почетне наставе како је ми именујуемо) (Carpenter & Romberg 2004, Jones, Langrall, Thornton & Nisbet 2002, Lehrer & Schauble 2003, NCTM 2000, према English and Watters 2004: 60). Резулатат математичког моделовања је стварање математичког модела или репрезентације феномена или проблема који довољно верно одсликава карактеристике и релације оригиналног феномена са одговарајућег аспекта. Математички модел укључује процес математизације (раније описан) у којој се ствара математичка репрезентација а којом се изражава оригинална структура проучаваног феномена или проблема (на пример, схеме, интеракције, односи између елемената) пре него спољашње карактеристике (на пример, биолошка, физичка и сл. својства) (Lesh & Harel 2003, према English and Watters 2004: 59). Циљ математичког моделовања је да се изгради модел чијим проучавањем ће се омогућити уочавање правилности и односа који важе на моделу, а тиме и код оригиналног феномена. Математичко моделовање се заснива на аналогији као облику закључивања у поступку одређивања међусобних односа објеката и истицање њихових карактеристика (сличност, истоветност, сагласност у особинама) (Дејић и Егерић 2007: 52). Може да буде материјални модел (на пример жичани модел коцке), реални, апстрактни итд. (*ЛОТ*). Вештине и математичке методе које се при том користе су анализа података, уочавање веза, прављење избора погодне репрезентације између алтернативних реперезентација или препознавање исте структуре и др. Математичко моделовање је цикличан процес који се састоји из више фаза: 1) анализа проблема, 2) креирање реперезентације (модела), 3) манипулација и 4) тумачење (Ibid). Циклус моделовања полази од проблемске ситуације постављањем питања. Кроз избор погодне репрезентације процесом математизације долази се до математичког модела са одговарајућим бројем променљивих. Математичком манипулацијом долази се до резулатата у нумеричкој, графичкој или симболичкој форми (зато и кажемо да је математички модел формално математички запис) која се преводи у одговарајућу реалистичну слику проблемске ситуације. Анализом постигнутог утврђује се да ли је могуће разрешење ситуације или пролазак кроз нови циклус моделовања (Ibid). Слично се може видети и на схеми 7. коју преносимо из рада Стилман (Stillman 2007).

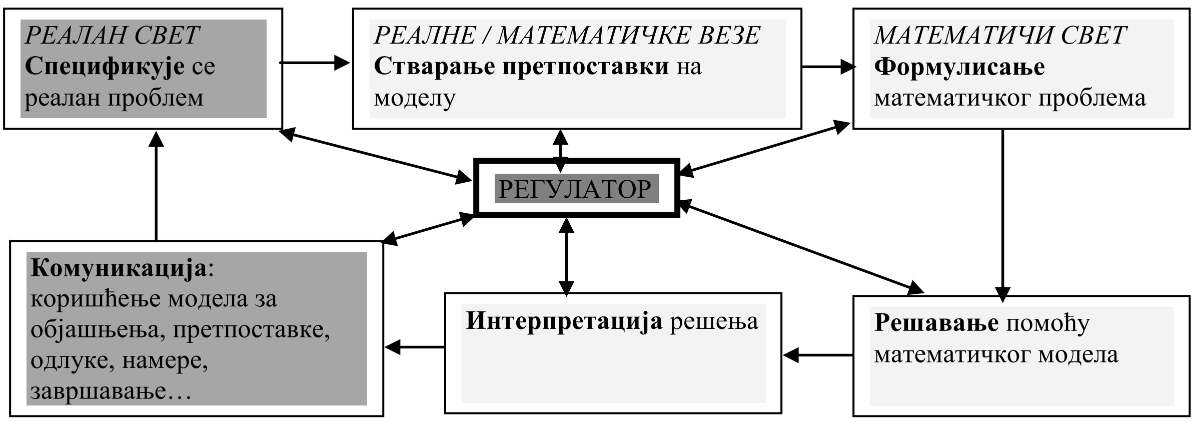


Схема 7. Математизација према Стилман (Stillman 2007)

Иако Стилман говори о старијим разредима основне школе, елементи њеног рада могу нам бити упоришта. Оно што Стилман посебно истиче јесте упитаност које врсте ситуација би биле погодне за математичко моделовање (Ibid). Оно о чему би још требало водити рачуна јесте и следеће:

- Формулација питања на која се даје математички одговор;
- Препознавање битних променљивих или фактора;
- Спецификација претпоставки;
- Моделовање различитих аспеката објеката;
- Уочавање односа;
- Пажљив избор међу њима – Који од уочених односа могу да буду релевантни за различите случајеве које разматрамо?
- Процењивање – Које податке имамо? Шта можемо да сакупимо од података или из којих извора? За које квантитете је смислено да правимо процене?
- Решавање помоћу модела;
- Интерпретација резултата;
- Евентуална дорада на моделу која математичку идеју чини још чистијом (овде уочавамо да је реч о евентуално новом циклусу моделовања);
- Интерпретација резултата;
- Валидација резултата;
- Евалуација модела и рефлексија – Да ли је наш модел одговорио на питање? Да ли то решење можемо да користимо и у другим ситуацијама? Да ли модел може тако да се уобличи да буде флексибилан и одговори и на друге проблемске ситуације?
- Формулација специфичних питања на које се дају одговори у виду математичких реченица.

О границама узраста за увођење математичког моделовања полемисали су Инглиш и Вотерс (English and Watters 2004: 59). У њиховом раду јасно се износи теза по којој би са математичким моделовањем требало кренути у млађим разредима када се код деце овог узраста формирају способности на основу којих се моделовање касније може развијати (Carpenter & Romberg 2004, Diezmann, Watters & English 2002, Lehrer & Schauble 2003, NCTM 2000, Perry & Dockett 2002, према English and Watters 2004: 60). И заиста, резултати истраживања Карпентера и Ромберга иду томе у прилог, као и истраживања Инглиша и Вотерса, а видећемо и разултате нашег истраживања. Ученици млађег школског узраста могу да моделују, уопштавају и доказују чиме им се „омогућава ранији приступ научном и математичком резоновању“ (English and Watters 2004: 60). Активности математичког моделовања разликују се од уобичајених проблемских ситуација на које ученици наилазе у настави. Њихово решавање често је на овом узрасту ограничено примерима у којима се примењују станадардне процедуре решавања или се следе прецизно дефинисани кораци акција (често се решење тј. пут доласка до решења интерпретира на један и само један начин, што значи да се процес интерпретације минимализује или готово елиминише). Не би требало занемаривати ни утицај који математичко моделовање има на математичко знање, флуентност у успостављању алтернативних реперезентација, социјалне способности које се развијају као пожељне и потребне (Carpenter & Romberg 2004, English 2002, Steen 2001, према English and Watters 2004: 61). У последње време се у истраживањима наглашава и значај дечјег аргументовања у математичком развоју (Perry & Dockett 2002, Yackel & Cobb 1996, према English and Watters 2004: 61). Још је Пијаже тврдио да је способност аргментованог логичког тврђења на овом узрасту изван дечјих реалних могућности (Inhelder & Piaget 1955-1958, према English and Watters 2004: 61), али истраживања показују супротно (Docket & Perry 2001, према English and Watters 2004: 61). У раду Перија и Докета истиче се значај формалног увођења и развоја ране аргументације, посебно због чињенице да то чини основу математичког доказа у каснијим разредима (Docket & Perry 2002, према English and Watters 2004: 61). Активности математичког моделовања обезбеђују солидну основу за развој аргументације млађих ученика, јер проистичу из својеврсне социјалне интеракције и искуства (Zawojewski, Lesh & English 2003, према English and Watters 2004: 61) и подстичу ефективну комуникацију, тимски рад и рефлексију. У активностима моделовања ученици размењују идеје и описују их, дају објашњења, доказују итд. употребљавајући различите конкретизације математичких појмова или структура (различите репрезентације).

Можемо говорити о реалистичном, контекстуалном, образовном, епистемолошком итд. моделовању. У савременој настави се, између осталог, користи у циљу упознавања примењивости математичких теорија (што је случај у нашем раду). Можемо га сагледавати и са аспекта моделовања сазнајних процеса и развоја математичког мишљења (*ЛОТ*). Осим когнитивних аспеката развоја, учитељ треба да досегне и циљеве наставе математике везане за развој интелектуалних вештина и способности ученика, и да припремајући основне ситуације из оквира савремених теорија математичког образовања (као што је овде случај са теоријом реалистичног математичког образовања) реализује задатке наставе математике посредством којих би требало да се код ученика „развију специфични алати математичког мишљења“ (Romano 2012: 67[37]).

Инглиш и Вотерс (English and Watters 2004: 72) износе и закључке истраживања о математичком моделовању у млађим разредима основне школе које подстиче ученике у развоју важних математичких идеја које се не сусрећу у традиционалном основношколском курикулуму. Математичке идеје уграђене су у, са значењем за ученике, реалном контексту и они их откривају решавајући проблемске ситуације. Посматрана су узајамна дејства неформалног знања ученика и знања која су ученици усвајали при решавању проблема (као кључних информација). Знања која су ученици усвајали при решавању проблема некада су примењивана са мање успеха у објашњавању проблемске ситуације. У другим ситуацијама неформална знања ученика помагала су за довођење у везу и препознавање значајних информација о проблему. Понекад се препознавало да неформална дечја знања не воде разрешавању проблема, и враћали су пажњу ученика на специфичне информације у задатку. Хипотеза истраживача[38] је да деца показују могућност препознавања, презентовања и организовања података задатог проблема. Истраживање је разматрало метакогнитивне и способности критичког мишљења које ученици користе за разликовање неформалног и знања стеченог при решавању задатака и способност да знају када и како да их примене у резултатима при решавању проблемских ситуација. Главна улога у развоју ових

[37] Romano, D. A. (2012): „Priroda matematičkog znanja koje nastavnici konstruišu u učionici“, у: *Методички аспекти наставе математике II*, Факултет педагошких наука, Јагодина, стр. 67-79.

[38] Коришћена је етнометодолошка интерпретативна пракса (за опис, анализу и интерпретацију догађаја) (Erickson 1998, Holstein & Gubrium 1994, према English and Watters 2004: 64). Овај методолошки приступ омогућава да се опише социјални свет учионице фокусирајући се на оно што су ученици говорили и радили, пре него примењујући претпоставке и очекивања истраживача (критерији за *фокус групе* биле су вербалне изјаве ученика док су радили задатке, као и прикупљени подаци у виду записа истраживача, аудио и видео-снимака, ученички радови итд.).

способности приписује се учитељу[39] (Lehrer & Schauble 2002, према English and Watters 2004: 72). Посебно се истиче значај представљања информација у различитим формама, нпр. табеле, као и допринос активностима моделовања који код ученика развија способност математичких описа, објашњавања, доказивања и аргументовања. Проблеми од којих се полази су социјалне активности. Ученици су ангажовани бројним питањима, претпоставкама, аргументима, сазнајним конфликтима и разрешењима док се откривају коначна решења проблема. А када се решења саопште, ученици су изложени питањима и критичким ставовима других ученика и учитеља. Овде је учитељева улога од изузетног значаја, посебно у повезивању дискурзивног продукта тј. производа који је резултат разговора (Ibid).

Погледајмо један једноставан пример[40] којим се може започети математичко моделовање код осмогодишњака (слика 12.). У 2. разреду проширују

Слика 12. Колачи у излогу

<table>
<tr><td colspan="2">52</td></tr>
<tr><td>?</td><td>16</td></tr>
</table>

Схема 8. Бројност колача у излогу

[39] Наш рад заснован је на идеји једне врсте симулације настанка и развоја идеје у науци, стављајући је у контекст наставе под руководством учитеља, те отуда важност учитељеве улоге у целом поступку. На уму смо имали и неке од филозофских идеја, нпр. Хегелова идеја науке. ‘Наука’ је могућа једино као систем, а први део система представља ‘феноменологија духа’. Наука почиње чистом непосредношћу (развијањем конкретног садржаја), односно развијањем иманентних одредби науке из којих се онда састоји њен појам. Цели овај посао обавља ‘логика’. Системска веза која се формира између феноменологије духа и логике јесте да прва ствара претпоставке за другу. Овде ћемо рећи да не мислимо да уведемо науку у почетну наставу, али принципе настанка и развоја неких идеја и пут ка логичком мишљењу јесте нам био на уму.

[40] Час је реализован у школи-вежбаоници под нашим руковођењем у академском раду са студентима на предмету *Методика наставе математике 2* Учитељског факултета у Београду.

се математичка знања о вези сабирања и одузимања, како се проширује блок бројева до 100. Започиње се занимљивом причом о колачима у излогу посластичарнице и постављањем питања. Приказ је дат реалистичном сликом која може да се трансформише у алтернативну репрезентацију – схему (идеограф) (схема 8.), са јасно назначеним бројевима: укупан број колача (52), не знамо колико их је продато (?), знамо колико их је остало (16). Хоризонталном математитизацијом (кретањем из реалне ситуације у свет математичких симбола, преко математичког апарата) долазимо до математичког модела. Ученици израчунавају број продатих колача помоћу математичке једнакости 52 – 16 = 36 и проверавају решење помоћу једнакости 36 + 16 = 52, јасно успостављајући односе између реалних и математичких објеката (математичком манипулацијом долазе до резултата у нумеричкој форми).

Након тога, ученици самостално раде задатке који следе и одговарају на постављена питања.

1. а) Израчунај:

1) 23 + 18 =__ 2) 74 + 12 = __ 3) 62 – 23= __

б) На основу једнакости под а), без рачунања упиши бројеве на линије или састави нове једнакости тако да оне буду тачне.

1) 18 + 23 = __	2) 12 + __ = 86	3) __ – __ = 23
41 – 18 = __	__ – __ = 12	__ + __ = __
41 –__= 18	__ – __ = __	___________

2. Користећи сва три броја из једнакости 67 + 8 = 75 састави нову једнакост са сабирањем и две једнакости са одузимањем.

3. Напиши две једнакости са сабирањем и две са одузимањем користећи следеће бројеве: 55, 12 и 43.

4. Миша је имао 25 кликера. Од тате је добио 16. а) Израчунај колико Миша има укупно кликера. б) Затим од бројева из те једнакости састави две нове једнакости са одузимањем, користећи сва три броја.

5. Тара је имала 47 салвета. Мари је поклонила 17. а) Израчунај колико Тара сада има салвета. б) Затим од бројева из те једнакости састави једну једнакост са сабирањем и једну са одузимањем.

Запазимо да се од ученика тражи да у задацима 4. и 5. који су дати у реалном контексту (прва три дата су у математичком) врши трансформација у математички, али се захтевом у задатку (инструкцијом) не тражи да на основу састављених математичких једнакости поставе проблем (слику) и питања враћањем у реалан контекст. На пример, задатак „Миша је имао 25 кликера. Од тате је добио 16. Израчунај колико Миша има укупно кликера.“ ученик решава помоћу једнакости 25 + 16 = 41, а затим на основу захтева задатка саставља једнакост 41 – 25 = 16 помоћу које би могао да поставља проблем/слику и питање „Миша је имао 41 кликер. Брату је дао 25. Колико кликера је Миши остало?“ итд. Тек тада би ученик био способан за препознавање и превођење математичке у одговарајућу реалистичну структуру и постепено припреман за далеко сложеније математичке садржаје.

Било би пожељно да се учитељ бави и вертикалном математизацијом, кроз задатке којима би се вршило кретање унутар света математичких објеката и вршила реорганизација математичких знања утврђивањем веза између математичких појмова и поступака. На пример, за наведени час то може да буде математичка игра коју у наставку приказујемо, у којој учитељ запише једнакости, подели картоне са бројевима из задатих једнакости и на постављена питања ученици као одговор подижу картончић/картончиће са бројевима.

I Једнакост: 28 + 51 = 79

Питања:

„Када би од прве једнакости саставили једнакост са одузимањем, који број би могао да буде на месту умањеника?“ (79); „Који број би могао да буде на месту умањиоца?“ (51, 28); „Који број би могао да буде на месту разлике?“ (28, 51).

II Једнакост: 97 – 39 = 58

Питања:

„Када би од друге једнакости саставили једнакост са сабирањем, који бројеви би могли да буду на месту сабирака?“ (39, 58); „Који број би могао да буде на месту збира?“ (97).

Наведени пример илуструје шта се у нашој наставној пракси може видети као рефлексија наставног приступа који следи савремене теорије математичког образовања (и чести су примери баш у аритметици/алгебри), али несистемски уобличени. У нашем раду бавићемо се геометријским садржајима који су довољно усложњени у 4. разреду, за које се учитељи, чак и студенти у академском раду, ретко опредељују, у намери да се наш рад уобличи као један од могућих модела системског решења у нашим условима – од наставног приступа до уџбеника математике (подржана потпора приступу) као примена *РМО* (теорија математичког образовања).

А каква је веза између теорије математичког образовања *РМО* и конструктивизма? Романо истиче да је значајан број сличности *РМО* теорије и конструктивизма као теорије математичког образовања (Romano 2009c: 17). Под конструктивизмом у образовању подразумева се подучавање које почиње филозофијом која ученицима даје слободу коришћења властитих конструкција и/или реконструкција. Три типа конструктивизма позната су у математичком образовању: а) радикални, б) социјални и в) социо-конструктивизам. У радикалном ученици стичу знања и способности, те овладавају вештинама у зависности од цивилизацијских, културолошких и политичких опредељења социјалног миљеа. Знање се активно гради у дечјем уму и није готов производ (Glasersfeld 1992, према Romano 2009c: 17). Социјални конструктивизам по Ернесту гледа на математику као социјалну конструкцију, у оквиру које ученици конструишу своја знања утопљена у текуће социјалне процесе (Ernest 1991, према Romano 2009c: 17). Социо-конструктивизам је један од математичких образовних система, сличан *РМО*. Ова теорија сугерише да би математику требало учити и подучавати тако да ученици буду у интеракцији при решавању проблема и задатака, како са учитељем, тако и са осталим ученицима. Ово се постиже стимулисањем ученика према постављеним циљевима који представљају основу развоја ученичких статегија (Cobb, Yackel & Wood 1992, према Romano 2009c: 17).

Укажимо на неке сличности и разлике између *социо-конструктивизма* и *РМО* теорије. На сличности су указивали Гравенмејер (Gravenmeijer 1994, према Romano 2009c: 17) и де Ланж (de Lange, према Romano 2009c: 17). Тако де Ланж указује на два важна момента. Први, обе теорије, и *РМО* теорија и теорија социо-конструктивизма, развијене су независно од самог конструктивизма. Друго, у оба приступа ученици користе погодности што своја искуства могу да поделе са другим ученицима. Заправо, де Ланж тврди да је компатибилан већи део истих или сличних погледа социо-конструктивизма и *РМО* теорије на карактеристике како саме математике, тако и математичког образовања (подучавања и учења), а огледа се у следећем: 1) обе говоре о идеји математике као активности, 2) математичко учење се дешава када ученици проналазе и развијају ефективне путеве решавања проблема и задатака (Streefland 1991, Treffers 1987, према Romano 2009c: 18) и 3) обе имају за циљ да математичко деловање обезбеди формирање математичких објеката (Freudenthal 1991, према Romano 2009c: 18).

Основну разлику између *РМО* теорије и конструктивистичког приступа наводи де Ланж. *РМО* теорија је развијена само са циљем да се примењује на математичко образовање, док је конструктивизам општа теорија образовања и може се користити у многим ситуацијама. Гравенмејер наводи још једну битну разлику, а то је поступак (поновног) откривања. Док је овај поступак значајан за *РМО* теорију, у социо-конструктивистичком приступу учитељ не мора користити поступак хеуристичког вођења, већ раније стечено ученичко искуство и истраживачке путеве при решавању проблема.

8.2.2. Истраживачки трендови засновани на *РМО* – пројекти и проистекли уџбеници

У овом поглављу дискутоваћемо о истраживачким трендовима и теоријама математичког образовања, чији је преглед дао Фаузан (Fauzan 2002: 53). *РМО* је теорија која се тиче математичког образовања бавећи се следећим питањима:

- Који су то садржаји којима би ученике требало подучавати, заједно са рационалним питањем зашто су ти садржаји значајни?
- Како ученици уче математику и како би ученике требало подучавати математици (ово доводи до питања о методама које би учитељи требало да примењују у настави).

Прва тачка веома је значајна за *РМО*, док друге теорије у математичком образовању не посвећују много пажње овом питању. За сада и теорије и истраживачи у пољу математичког образовања више пажње посвећују методама учења и подучавања, док се истраживање *којим садржајима у математици подучавати ученике* види као одговорност твораца математичког курикулума.

Иако се теорија *РМО* почела развијати пре свега 30-так година, њен теоријски развој скоријег је датума. Према Квону „фундаментални предмет дебате који разликује *РМО* од других истраживачких приступа је начин на који се узима у обзир и збирни математички развој заједнице у учионици и индивидуално учење математике од стране ученика који учествују у њему… реалистично математичко образовање наглашава социјално и културно засновану природу математичке активности.“. (Kwon 2002, према Fauzan 2002: 53).

У *РМО* ученици уче математику засновану на активностима које су искусили у свакодневном животу. Ученици имају могућности да (поново) откривају математичке појмове и конструишу своја знања. Наведени услови слични су оним код конструктивистичких теорија (Cobb 1994, Cobb & Yackel 1995, von Glaserveld 1996, Simon 1995, према Fauzan 2002: 54). Гравемејер наводи да је теорија *РМО* компатибилна са конструктивистичким теоријама (Gravemeijer 1994, према Fauzan 2002: 54). Оно што де Мор каже за реалистичну геометрију наговештава да је теорија *РМО* слична кооперативном и сарадничком учењу (Arends 1997, Daniels 1994, Slavin 1983, 1995, 1997 и Strijbos & Martens 2001, према Fauzan 2002: 54). Реалистична геометрија не указује на рад заснован искључиво помоћу папира и оловке, као што није ни учитељ онај који објашњава и ученици који имитирају ту учитељеву активност. Инструкције у реалистичној геометрији позивају на рад у групи, путем истраживања, експериментисања, дискутовања и на тај начин одражавајући срж просеца учења и подучавања.

Идеје које се развијају у *РМО* сагласне су са отвореним приступом развојне методе у Јапану (Nohda 2000, према Fauzan 2002: 54), а такође их проналазимо и у другим истраживачким пројектима као што је *Математика у контексту* (Mathematics in Context - MiC, National Science Foundation – NSF USA 1997), *Свакодневна математика* (Everyday Mathematics), *Математика која повезује* (Connected Mathematics Projects – CMP USA), а наводи се и у *Стандардима Националног савета за наставу математике* (National Councils of Teaching Mathematics standards - NCTM USA 1989). Стандарди постављају нове задатке ученицима у процесу учења математике именоване као *учење за вредновање математике, свесност нечијих способности за решавањем математичких проблема, учење да се математички комуницира* и *учење да се математички резонује.* Ово су уједно и основни циљеви *РМО* до којих се досеже путем три кључна хеуристичка принципа и пет принципа учења и подучавања које смо већ описали.

Пројектима заснованим на *РМО* баве се истраживачи математичког образовања 1990-тих и 2000-тих који су за резултат имали: 1) обједињено све курикулуме од 5. до 9. разреда основне школе засноване на *РМО*, на пример *Mathematics in Context* (*MiC*) и 2) математичке курикулуме за поједине разреде и циклусе, нпр. *Core-Plus Mathematics Project* (*CPMP*), *Connected Mathematics* итд. Из неких пројеката заснованим на *РМО* теорији и приступу проистекли су и уџбеници. Тако, на пример, после примене уџбеника према *Математици у контексту* извештаји на националним тестирањима показују да је ученичка успешност порасла (Romberg & de Lange 1998, према Romano 2009c: 14), а индикатори успешне примене *РМО* у Холандији виде се према резултатима TIMSS-a (Mullis, Martin, Beaton, Gonzalez, Kelly & Smith 1997, према Romano 2009c: 14). Основни фокус је припрема за више формалну математику.

8.2.3. Компоненте за припремање наставе засноване на *РМО*

Када говоримо о припремању наставе по *РМО* теорији (када је реч о основном школском нивоу, мада то могу да буду и академски и теоријски ниво), компоненте плана би требало идентификовати и повезати са карактеристикама *РМО* приступа, при чему говоримо о циљевима, садржајима, методологији и пожељним исходима. Рецимо нешто о овоме на основу разматрања де Ланжа, Гравемејера и Хаувел-Панхуизен (Romano 2009c: 19).

- *Циљеви*

Де Ланж карактерише три нивоа циљева у математичком образовању: ниске, средње и више. У традиционалном програму циљеви су мање-више јасни. Међутим, већина циљева је класификована као циљеви нижег нивоа и могу се идентификовати као вештине меморисања формула и једноставних алгоритама, те способност исправног дефинисања. У *РМО* приступу циљеви се класификују као средњи и виши. На средњем требало би да су изграђене везе између различитих алата нижег нивоа и појма, и интегрисане у једну целину, са стицањем вештине решавања једноставних проблема, чак и без јединствених стратегија. Нови циљеви у први план истичу вештине резоновања, комуникације, развој критичког становишта које се назива вештина мишљења вишег реда. Настава заснована на *РМО* приступу мора да укључи ова два типа циља. Ово би на известан начин одговарало нашим стандардима постигнућа израженим кроз три нивоа: основни, средњи и напредни ниво (Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања 2011).

- *Материјали*

Де Ланж је указао на потребу обезбеђивања материјала који треба да буду асоцирани помоћу активности из реалног живота тако да се ситуациона знања и стратегије користе у оквирима ситуационог контекста. Наводи се да *РМО* развија потребу проналаска контекстуалних проблема који омогућавају широк спектар процедура решавања, погодних за реализацију наставног процеса посредством прогресивне математизације.

- *Активности*

Када говоре о улози учитеља у *РМО* приступу, де Ланж и Гравемејер јасно наглашавају његову улога фацилитатора, организатора, вође и евалуатора. Учитељ припрема и даје ученицима контекстуални проблем који је у вези са обрадом наставне јединице, даје ученицима путоказе, инструкције, записе на табли, стимулише ученике да кроз контролисану комуникацију упоређују своје резултате, подстиче на дискусију у циљу интерпретације ситуационих приступа датог контекстуалног проблема, уз фокусирање на адекватност и ефикасност понуђених различитих процедура решавања проблема. Када ученици реше проблем, то значи да су слободни да обаве истраживање на властитом нивоу, изграђујући на тај начин своје властито искуствено знање и налазећи пут, на сопствени начин. Другим речима, улога ученика у тако организованом наставном процесу углавном је њихов индивидуални рад или рад у групама. Од ученика се очекује да слободно прикажу своја решења за задати проблем или задатак, без устаљених процедура решавања проблема.

- *Процењивање успешности*

У холандској наставној пракси одавно се врше истраживања о успешности *РМО* приступа (Heuvel-Panhuizen 1996, према Romano 2009c: 20). Сам наставник може да тражи од ученика да нпр. напише есеј, изведе експеримент, сумира податке, формира сам неку вежбу и сл. Све се то може користити при тестирањима, али и у проценама успешности задавањем и контролом домаћих задатака. У зависности од националних стандардизованих тестова, процене успешности би требало да се рефлектују на циљеве наставе математике, мењајући и сам математички курикулум. У вези са проценама успешности наставне праксе, де Ланж формулише следеће принципе који могу да послуже као водич за процењивање:

1. примарна сврха тестирања јесте подизање квалитета подучавања и учења, што значи да мерење успешности и учитеља и ученика треба вршити током наставног процеса, и третирати их као један од обавезних елемената планирања,
2. методе би требало да омогућавају да ученици покажу шта знају више од оног шта мање знају или не знају, а изводи се посредством решавања проблема и задатака који имају више од једног решења и који се могу извести различитим стратегијама,
3. процењивање би требало операционализовати кроз све циљеве наставе математике, на свим нивоима образовања,
4. квалитет математичке успешности није одређен посредством доступних објективних показатеља, њихов циљ је сакупљање показатеља посредством којих можемо стварно да видимо да ли ученици разумеју решавање проблема,
5. алати би требало да су практични, примењиви у школи, те доступни спољним изворима.

Разлике између традиционалног и *РМО* приступа у структури наставног часа Романо тумачи и илуструје табелом 4. (Romano 2009c: 17).

Када говоримо о *дневном (месечном, годишњем) планирању наставе* заснованом на РМО приступу, Милинковић (Milinković 2012: 47) истиче да нам наставни план и програм дају оквир (који је из овог разлога подложан променама према нашем мишљењу), као и стандарди постигнућа ученика (можемо рећи слично као и за наставни план и програм подложан променама према нашем мишљењу). Основу и приоритет у почетку чине реалне ситуације и хоризонтална математизација, која током времена наглашава потребну реорганизацију путем вертикалне математизације. Један ‘обичан’ час по *РМО* приступу започиње конкретним проблемом који је занимљив за ученике. Ученици траже решење постављеног проблема путем математичког моделовања. Проблем је контекстуално заснован и постављен за учење. У мање или више сложеном проблему садржана је једна или више математичких идеја (нпр. Милинковић математичку идеју збира дужина две странице троугла који је увек већи од дужине треће странице). Све је праћено активностима које је учитељ испланирао погодним за дати узраст деце. Учитељ планира активности засноване на почетним ситуацијама као што су истраживачке активности у различитим контекстима, играма и сл. Како учитељ процењује шта ученици науче на часу по *РМО* приступу? Учитељи би требало да користе више извора информација како би ученицима омогућили што боље разумевање математичких идеја и њихово

Табела 4. Разлике између традиционалног и *РМО* приступа у структури наставног часа

	Уводни део часа	**Постављање проблема**	**Решавање**	**Завршни део часа**
Традиционални наставни приступ	Увод у наставну јединицу Прегледање домаћег задатка	Учитељ уводи терминологију, те наставља рад са два-три проблема, позивајући све ученике да реше проблеме	Ученици покушавају да реше постављене проблеме (задатке) преузете из основне књиге (уџбеника), користећи научену терминологију	Учитељ истиче неколико проблема из основног уџбеника и тражи да ученици раде задатке из уџбеника
	Уводни део часа	**Ученички рад**	**Дискусија**	**Завршни део часа**
РМО приступ	Увод у наставну јединицу	Ученици раде индивидуално и у групама, елаборирају властита решења проблема	Учитељ представља нови контекстуални проблем, ученици раде у групама, учитељ организује разговор о теми која је покривена проблемима	Учитељ представља закључке на постављена питања, учитељ и ученици разговарају о закључцима

представљање. Сврха процене јесте да се дође до информације о „развоју структуре математичког знања“ (Milinković 2012: 48). Значајан елемент овог процеса јесте планирање и прикупљање информација о ученичким математичким способностима и стварање слике о ученичком напредовању, те поређење са резултатима претходног нивоа знања ученика, према постављеним циљевима које даје учитељ и према постављеним стандардима постигнућа. Слика ученика би требало да садржи следеће информације:

1) како ученик решава математички проблем,
2) како ученици разговарају и дискутују на часу о идејама,
3) како резонују математички,
4) да ли успоствљају везе математичких појмова са појмовима из других области, као и у свакодневним ситуацијама и
5) ученичко разумевање математичких појмова и поступака, као и њихово интересовања за математику, креативност, увереност у математичке ставове (Ibid).

8.3. Реалистична геометрија

У овом поглављу бавимо се *реалистичном геометријом* која је укључена у *РМО* теорију онако како је Гравемејер интерпретира (Gravemeijer 1990, према Fauzan 2002: 46). Разматраћемо основни фокус реалистичне геометрије који није само помоћ ученицима у схватању простора, као јасно издвојени циљ геометрије, већ и припрема ученика за више формалну геометрију.

Постоји шест важних аспеката реалистичне геометрије за ученике узраста од четири до 14 година. То су:

- посматрање и пројектовање,
- оријентација и локација,
- просторно резоновање,
- трансформације,
- цртање и конструкције и
- мерење и израчунавање (de Moor 1991, према Fauzan 2002: 46).

Дајемо кратак опис сваке од њих, преузете од де Мора.

- *Посматрање и пројектовање*

Овај аспект укључује неке од активности у основној теми ‘гледања у’ (посматрања, опажања, представљања и објашњавања просторних објеката и просторних феномена). Да би представили ове активности, укључени су основни појмови као што су: тачка, права, правац простирања, угао, дужина, паралелност, пресецање или мимоилажење правих у простору, равни итд. и релације међу њима. Бројна свакодневна искуства и једноставни експерименти могу да буду извор активности посматрања и пројектовања, јер се могу видети у неким једноставним примерима које је де Мор предложио:

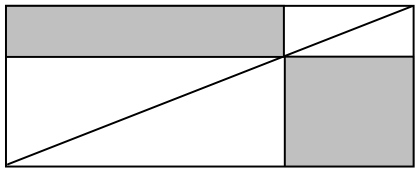
- експерименти као што су ‘сакриј-пронађи’ или ‘топло-хладно’ (за децу узраста од четири до шест година старости);
- држи палац испред очију и наизменично затвори једно, па друго око, зашто палац ‘поскакује’ с десна на лево и обратно (за децу узраста од шест до 10 година);
- када се шеташ по сунцу, сенка увек има исту дужину, питамо се зашто је то тако (за децу узраста од шест до 10 година).

- *Оријентација и локација*

Према де Мору оријентација у свакодневним активностима једноставно значи да субјект зна да одреди своју позицију у простору и како да стигне од једне тачке до друге. Деца имају могућност да развијају појмове као што су испред/иза, горе/доле, ближе/даље итд. Одређивање положаја означава (релативну) позицију објеката у простору, а саме активности укључују цртање, маршруте, карте, схематски план, графике и просторне моделе.

- *Просторно резоновање*

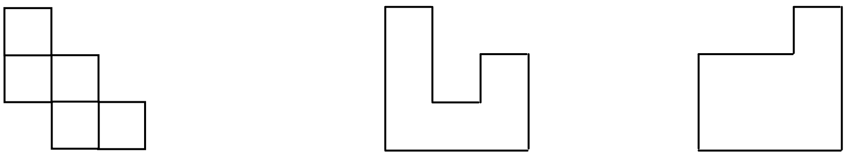
Просторно резоновање утиче на формирање не само појма (геометријског) простора, већ и на логичко закључивање. Де Мор илуструје примере на слици 13. и далеко сложенију ситуацију представљену на слици 14.



Слика 13. Слика правоугаоника

Задатак: Зашто су површине два осенчена дела на правоугаоној фигури једнаке? (de Moor 1991, према Fauzan 2002)

Употребом конструкција путем блокова можемо да тражимо од ученика да одреде тачну композицију конструкције дату као поглед на њу одозго, спреда и са стране.

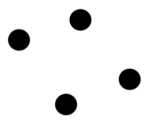


Слика 14. Поглед на тело одозго спреда са стране

Задатак: Од колико блокова је састављено тело представљено сликом? (de Moor 1991, према Fauzan 2002)

- *Трансформације*

Транслација, ротација и симетрија као примери изометријских пресликавања, као и њихове композиције, значајне су геометријске теме (de Moor 1991, према Fauzan 2002: 48, Марјановић 1996: 16). Међутим, њихово увођење и дефинисање у формалној геометрији строго је дедуктивно тако да се оне појављују тек на нивоу средње школе и касније. У реалистичној геометрији ове трансформације могу да се уводе ученицима већ у основној школи и то не директно са експлицитним дефинисањем, већ на неформалан начин – избором адекватног контекста, при чему се тежи да геометријске активности за ученике имају значења (de Moor 1991, према Fauzan 2002: 48). Нпр. активност у којој се употребљава огледало у подстицању ученичког разумевања геометријских трансформација као што су симетрија, преклапање, транслација и увећања и умањења при хомотетији. Слика 15. приказује један такав пример.



Слика 15. Активност са огледалом

Задатак: Користи огледало и подеси га тако да редом укупно видиш: 1) осам, 2) седам и 3) шест тачака. (de Moor 1991, према Fauzan 2002)

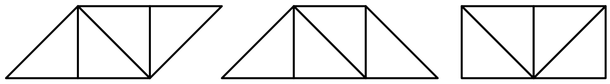
- *Конструкције и цртање*

У еуклидској геометрији конструкције означавају цртање фигура само помоћу лењира (без дужинске скале) и шестара (Ibid). У реалистичној геометрији значење конструкција има шири контекст – уклапање дво- или тро-димензионих фигура под извесним условима. Ово може да буде реализовано представљањем таквих активности као што су конструкције блоковима, вежбе са резањем и склапањем делова, древна кинеска игра „танграм“. Аспект цртања овде заправо заузима место цртању помоћу лењира, цртању тродимензионих фигура итд.

- *Мерење и израчунавање*

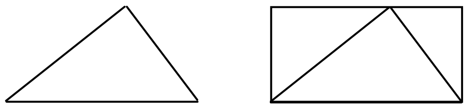
Аспект мерења постоји још од самог зачетка геометрије (сам термин геометрија грчког је порекла са значењем земљомерства). Основни фокус су практична мерења дужине, површине и запремине. У реалистичној геометрији тема *мерење* презентује се на неформалан начин, а формуле за мерење дужине, површине и запремине нису основни приоритет (Gravemeijer 1990, према Fauzan 2002: 49). Следећи принцип који је де Мор увео (de Moor 1991, према Fauzan 2002: 49) за тему *мерење површине* показује неке значајне аспекте мерења која се не помињу у традиционалном приступу настави геометрије. Наведимо их.

- Способност поновног склапања фигура у смислу да деца постају свесна идеје конзервације површине.



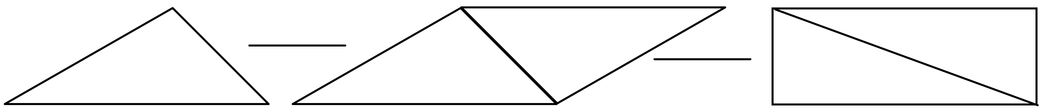
Слика 16. Конзервација површине (de Moor 1991, према Fauzan 2002)

- Замена постојеће фигуре фигуром чија се површина увећава два, три... пута у односу на првобитну (рачунања са површином);
- Допуњавање раванске фигуре до фигуре правоугаоног облика.



Слика 17. Допуњавање фигуре (de Moor 1991, према Fauzan 2002)

- Веза површине троугла са површином правоугаоника или паралелограма и обрнуто.



Слика 18. Троугао се види као половина паралелограма (правоугаоника) (de Moor 1991, према Fauzan 2002)

Према овоме де Мор истиче следеће битне идеје водиље кроз математички курикулум (Ibid):

- Аспекти реалистичне геометрије не би требало да се разматрају одвојено и стога да се подучавају као изоловане теме. Различити аспекти уско су повезани и могу да буду обједињени у целину, помоћу реалистичне геометрије.
- Реалистична интерпретација геометрије именована као проучавање простора у ком живимо и феномена који се појављују у њему чини могућим да уопштавамо, поредећи га са традиционално формалним погледом. Тако реалистична геометрија не садржи активности засноване само на папиру и оловци, нити је то учитељево излагање градива кроз објашњења док га ученици имитирају у тој активности.

- Инструкције у реалистичној геометрији позивају на радњу која се одвија кроз групни облик рада, где су истраживања, експериментисања, дискусије и рефлексије срж просеца учења и подучавања.

8.3.1. Геометрија у контексту и решавање проблема

Контекстуални проблеми суштински су део *РМО*-а. Пре него што будемо расправљали о улози контекстуалних проблема, представићемо значење самог појма контекста. Затим ћемо размотрити и разлике између традиционалних и контекстуалних проблемских ситуација. Термин *проблемске ситуације* овде се користи према раду Фигуереда и означава све врсте математичких проблемских ситуација смештених у неки контекст (причу) (Figueiredo 1999, према Fauzan 2002: 50).

Рот помиње три различита предмета дебате када говори о *контексту* (Roth 1996, према Fauzan 2002: 50). Прво, контекст може да се односи на додатно знање ученика које је неопходно за разумевање математичке проблемске приче. Контекст може да буде прича која је уклопљена у проблем. Друго, контекст се односи на феномене из реалног окружења који могу да буду математички моделовани. На пример, куповина одеће као физички контекст за линеарну једначину (De Lange 1987, према Fauzan 2002: 50). Треће, контекст се односи на околину и ситуације. Околина се односи на различите физичке аспекте активности, чак је и ситуација све то што ‘окружује’ активност и стога карактерише социјалне, физичке, историјске и временске аспекте. Фигуередо каже да контекст јесте контекстуално заснован проблем који се односи на први или други појам контекста зато што се трећи више односи на социјални контекст активности решавања контекстуално заснованих проблемских ситуација. Пре него што будемо расправљали о контекстуалним проблемима у *РМО*, погледајмо шта означава контекст у традиционалном приступу настави математике.

Контекст у традиционалним проблемским причама може да буде без значења. Ово стање код ученика ствара низ уверења, сумњи и стратегија у решавању проблемских прича и то:

- Ученици претпостављају да је сваки проблем смислен;

- Ученици не постављају питања о тачности проблема;
- Ученици претпостављају да постоји само један ‘тачан’ одговор на сваки проблем;
- Ученици користе све бројеве као податке који су дати у проблемској ситуацији;
- Ученици верују да су на правом путу за проналажење решења проблема уколико при извршавању математичке операције нема остатка или разлике;
- Када не разуме проблем, ученик тражи кључне речи или проналази и препознаје стари проблем који ће му помоћи да реши нови.

Оно што Фигуередо претходно наводи јавља се у неколико различитих студија (Freudenthal 1991, Reusser 1988, Schoendfeld 1989, према Fauzan 2002: 51). Резултати ових студија показују да основношколски и средњошколски ученици често занемарују неке аспекте реалности, шта је то смислено и примењиво од ученичких знања и свакодневно искуство при решавању проблемских прича. У прилог томе Виндам и Саљо истичу да, при решавању проблемских прича, ученици следе правила и користе симболе без размишљања о специфичном контексту који се примењује (Wyndhamn and Säljö 1997, према Fauzan 2002: 51). Такође постоји само један фокус на нивоу синтаксе, без посвећивања много пажње о чему је заправо реч у проблему.

Шоенфелд у свом раду разматра природу школске математике и природу саме математике (Schoendfeld 1989: 82). Школско математичко учење види као низ симултаних активности које удружују културолошке и когнитивне феномене (нису раздвојеног деловања), а изводити математичке активности јесте и треба да буде чин учења са разумевањем, па и више од тога – „чињенице и процедуре које ученици уче при извршавању математичких инструкција требало би да буду средство, а не саме себи циљ“ (Ibid). За филозофски и феноменолошки ниво објашњења шта ученици заиста науче на часу математике, и како и зашто користе (или не користе) оно што су научили ван учионице – потребна су нам теоријска и методолошка тумачења која обухватају културолошке и когнитивне феномене и њихов дијалектички однос. Овде се намеће питање како можемо да формирамо учионичко окружење у ком се јављају ‘правилни’ начини интеракција, а у којима би ученици развијали осећај шта је математика, као и да овладају формалном математиком.

Контекст понекад нема значења у традиционалним проблемским причама и ученици решавају проблеме без њиховог разумевања, чак и онда када су нерешиве проблемске приче (Reusser 1988, према Schoendfeld 1989: 82). Тако Русер наводи следећи пример:

„У стаду има 125 оваца и пет паса. Колико је стар чувар стада?“ Неки од ученичких одговора били су: „125+5=130 ... ово је превише година, 125–5=120 је и даље превише ... док 125:5=25 ... ово би могло да буде решење... Мислим да је чувар стада оваца стар 25 година.“

Русер уочава да неке услове, који се односе на традиционалне проблемске приче које је Фигуередо поменуо, проналазимо у поменутим ученичким одговорима. Ученик у наведеном примеру претпоставља да је проблем смислен и користи све бројеве који се помињу без преиспитивања њихове смислености (ми додајемо па и тачности). Или, пример који наводи Карпентер (Carpenter et al. 1983, према Schoendfeld 1989: 84).

„Војни аутобус може да превезе 36 војника. Ако је 1 128 војника превезено, колико је аутобуса било потребно?“ Неки од ученика дали су одговор: „31 аутобус и остатак 12 војника.“ (уместо 32 аутобуса)

Свакако да би могли да наведемо још много оваквих примера, али то нам није циљ. Шоенфелд наводи да је значајно опажање на основу наведених примера о смислености као контекстуално заснованим и културолошки дефинисаним микрокосмосом који се одвија кроз праксу микрокултуре. Извана посматрајући јасно се да увидети да примена одређених процедура на низ проблема, без дубљег улажења у сваки појединачни, нема баш много смисла. Оно што јесте важно је поглед изнутра. У овом посебном микрокосмосу наведене процедуре описују проблеме са конзистентно добрим резултатима који имају смисла. И стога се те процедуре и користе.

Шоенфелд истиче аргумент о културолошком пореклу когнитивних структура. Он наводи: а) епистемолошку претпоставку о знању које је ‘локално’ и контекстуално засновано, где је већи део стицања тог знања у тесној повезаности са контекстом у ком се учење одвија и б) теорију праксе која наглашава развој разумевања одређених домена под утицајем њихове практичне делатности (Schoendfeld 1989: 86).

Купер и Херис су отишли даље у својим истраживањима (Cooper and Harries 2002: 6). Ослањајући се на британско тестирање из математике и сличне резултате (School Examinations And Assessment Council SEAC – Mathematics test 1992, University of London), Купер и Херис су поставили пред 11- и 12-годишње ученике нешто измењен захтев реалистичног проблема са поменутог британског тестирања. Наиме, у истраживању су били обезбеђени погодни реалистични проблеми при чијем су решавању многи ученици показали вољу и способност да одговоре на математичке задатке смештене у контекст. Добијени су резулати какви се нису могли очекивати у односу на резултате претходог тестирања.

Погледајмо шта је тражено у оригиналном задатку са SEAC британског тестирања из математике.

„Погледај натпис који се налази у лифту.

Носивост лифта је 14 особа.

Једно јутро 269 особа требало је лифтом превести. Колико пута је тог јутра лифт кориштен за превоз? “

Ученици су најчешће наводили погрешан одговор 19,21429 пута или неки други, уместо *најмање 20 пута*. Онај ко је формирао тест и овакав задатак чини се као да је желео да представи посебан реалистичан проблем а не реалистично разматрање уопштено (Cooper 1992, према Cooper and Harries 2002: 6).

У истраживању Купера и Хериса оригиналном задатку придодата су четири замишљена ученичка одговора чији је текст могао да подстакне на реалистичне одговоре. Било је потребно препознати који од њих је тачан, уз дату мању помоћ и захтев за кратако образложење одговора. Наводимо задатак.

„Погледај натпис који се налази у лифту.

Носивост лифта је 14 особа.

Једно јутро 269 особа требало је лифтом превести. Колико пута је тог јутра лифт кориштен за превоз?

Овде су неки од понуђених одговора. Обележи тачан. Добро размисли шта је могуће да се деси.

(А) Џо је одговорио 19,21429 пута.

Размисли како је Џо могао да дође до овог одговора. Може ли 19,21429 пута да буде тачан одговор? (обележи у квадратић)

Да ☐ Не ☐

Објасни зашто.

____

____

(даље се задатак наставља под б), в) и г) са понуђеним одговорима редом 20, 25 и 15 пута).“

Резултати су били неупоредиво бољи у односу на оригинално тестирање. Ми се овде нећемо бавити изношењем бројчаних података[41]. Укратко наводимо закључке до којих се дошло, а који нама дају оквир за експериментални програм и наставу математике, те вођење ученика у постављању и решавању реалистичних проблемских ситуација.

Купер и Херис говоре о озбиљној посвећености подстицању деце да користе математику при решавању проблема у свакодневном животу (без обзира да ли су то текстуално представљени проблеми и тестови или их, пак, деца заиста доживљавају у свакодневном животу ван школе). Подстицање би требало да иде више у смеру повезивања свакодневног дечјег знања и искуства и чисто математичког знања. Упркос тешкоћама, истраживање Купера и Хериса нам дају добру идеју о томе шта деца могу да постигну у решавању проблема ако су им редовно изложени у наставном процесу. Истраживање Купера и Дунеа (Cooper and Dunne 2000a, према Cooper and Harries 2002: 21) показује да се деца, која се

[41] Погледати табеле у наведеном раду на стр. 11 и 12. поредећи их са табелом на стр. 8.

при процењивању знања нпр. на тестовима сусрећу са приступом решавању математичких проблема и математичких операција смештених у текстуално представљен ‘реалан’ контекст, често као последица нађу у неповољном положају.

Рецимо нешто о смисленом учењу које се дешава (или не дешава) у настави математике. Један од класично навођених аргумената који иде у прилог подучавању математици по Шоенфелду јесте да „математика помаже да мислимо“ (Schoendfeld 1989: 86). У техничком смислу овај аргумент је погрешан (нетачан). Претходна разматрања показују да ученици могу да овладају формалним математичким процедурама али могу и да их погрешно употребљавају. Овладавање формалним математичким процедурама веома је удаљено од учења математике и Шоенфелд учење разматра у светлу како заправо математички мислити.

За антропологе аксиомски је одређено да чланови различитих култура уочавају и разумеју једну те исту појаву на различите начине, формирајући гледишта под утицајем тих култура (Greetz 1983, према Schoendfeld 1989: 86). Исто је и са подручјима субкултура, посебно за субкултуру математичара. Постоји културна компонента како учити да се математички мисли. Постати математичар повлачи за собом процес акултурације, у ком почетник постаје члан одређене заједнице и прихвата њене вредности. Велики део онога што ученик који учи математику прихвата, у смислу формалних математичких способности, је оно што се може именовати као математичка естетика.

Математичари проведу доста времена промишљајући, развијајући (или интернализујући) математичку естетику, те наклоност за анализу и резумевање, опажајући структуру и структурне односе, уочавајући како делови функционишу у целини. Развијање естетике је фундаментални аспект учења да се математички мисли. И тако Шоенфелд наводи да се стиже до сржи проблема, а то је култура. Не развија се естетика једноставно овладавајући формалним процедурама или саопштавајући идеје. Потребно их је интернализовати, бивајући у култури у којој се одговарајуће вредности рефлектују из свакодневне праксе.

Учење да се математички мисли обухвата два аспекта: 1) овладавање математичким ‘алатом струке’ и развојем осећаја за дисциплину – видети математику као смислену активност, те 2) формирати навике да се математика примењује. Помоћ ученицима у овладавању ‘алатом струке’ – различитим математичким чињеницама и процедурама – без сумње је једноставна. Постаје још лакша када се продубљује разумевање структуре математичког сазнања. Помоћи ученицима да развију одговарајући смисао дисциплине је нешто сасвим друго. Да би ученици видели математику као смислену активност, морају да је интернализују, односно морају да уче математику у учионици која је микрокосмос математичке културе, у учионици у којој су вредности математике као смислене активности рефлектоване из свакодневне праксе. Шоенфелд наводи да је питање оног ко се бави математичким образовањем заправо културолошко – *како можемо формирати учионичко окружење које постаје микрокосмосом математичке културе*. На постављено питање нема једноставног одговора, али истраживањем трагамо за њим.

Из неколико примера које Шоенфелд наводи јасно се изводи следећи закључак – јако је важна структура дискусије која се изводи у математичкој учионици. Говорећи о природи доказа, још је Фосет посебно наводио уздржавање од задавања тврдњи ученицима које је потребно доказати (Fawcett 1938, према Schoendfeld 1989: 89). На пример, доказивање да се дијагонале паралелограма међусобно полове. Или, да су оне међусобно нормалне. Уместо тога, Фосет предлаже да тврдње буду преточене у проблемске ситуације. Тако две наведене теореме о паралелограмима Фосет формулише на следећи начин:

1. Замисли паралелограм ABCD са дијагоналама AC и BD. Наведи (формулиши) сва својства фигуре за које се слажеш да је описују.
2. Претпостави да је AB=CD, тако да је ABCD ромб. Наведи (формулиши) сва додатна својства фигуре за које се слажеш да је описују.

Задајући овакве задатке Фосет заправо од ученика тражи да наведу листу тврдњи. Неке од њих ће бити тачне, неке не. Наводећи целу листу, организује се дискусија са ученицима у одељењу – наводећи са листе оне који се чине веродостојни, оне који имају бројне примере, наводећи зашто би резултат требало прихватити ако ученици верују да је тачан итд. На овај начин цело одељење формира доказе које су и прихватили тј. са којима се слажу. Тако одељење изводи различите геометријске конструкције (и показује вредности).

Сумирајући, Шоенфелд истиче да се Фосет фокусирао на то како ученици изграђују математичке појмове тако да математичке идеје / појмови / поступци за њих имају значење. Ученици доказују своје сопствене теореме. Они не само што су имали обезбеђену когнитивну структурну подршку потребну за припрему извођења геометријских доказа, као и трансфер логичког резоновања изван формалне математике, већ и много више. У оваквој учионичкој атмосфери од значаја су математичке вредности, уверења, наклоности које су подстакнуте свакодневном праксом у коју се ученици стављају. Окружење у учионици је заправо култура разумевања математике. Атмосфера је такође важна и подстицајна. Формирање претпоставки се подстиче, а да би искази били прихваћени као оправдани, одељење пролази кроз процес резоновања (расуђивања) у поступку доказивања. Стандарди јесу високо постављени, али нису споља наметнути, већ су предмет расправе међу ученицима. Цело одељење изводи закључке, радећи на њима, све док прецизне тврдње не добију значење (у старијим разредима док се не овлада теоремама), док искази не постану јасни, а докази убедљиви. Постављање питања није само адекватно, већ се тиме подстиче и награђује ученик од других чланова заједнице. Ученици, заправо, практикују математику.

Све наведене примере јесу радили ученици старијих разреда, али има примера и са млађим ученицима. То показује неколико новијих истраживања Балачефа, Ламперта и Шоенфелда (Balacheff 1987, Lampert 1989, Shoenfeld 1985 и 1987, према Schoendfeld 1989: 91). Три наведене студије показују да је могуће формирати учионичко окружење у ком ученици уче математику са разумевањем. Вредности за истраживања јесу разумевање и апстраховање заједничких именитеља у изолованим примерима, те промишљање како формирати учионичко окружење у ком се математички мисли.

Изнесимо зашажања и о контексту у контекстуално заснованим проблемима у *РМО*. Насупрот традиционалног приступа, контекст у контекстуално заснованим проблемима игра веома значајну улогу. Према де Ланжу улога контекста у реалистичном математичком образовању је двострука (de Lange 1987, према Fauzan 2002: 52). Као прво, било која наставна тема започиње реалним свакодневним ситуацијама које нису искључиве према физичком или социјалном свету (Gravemeijer 1999, према Fauzan 2002: 52). 'Унутрашњи' свет математике у реалном контексту или реалан свет ученичке имагинације обезбеђује стварање извора на ком почиње развој математичких појмова. Друга улога јесу примене – он открива реалност и као извор и као места примене. Другим речима де Ланж помиње да је улога контекста у *РМО* не само као извора појмовне математиксиоматизације, већ и као поља математичких појмова. Говорећи о значајној улози контекста и како би ученике ангажовали у решавању проблемских прича са више значења, Фигуередо помиње да природа контекста и како се она употребљава треба да буде различита (Figueiredo 1999 према Fauzan 2002: 52). За ову намену Фигуередо помиње да би контекст у *РМО* требало да буде:

- лако замислив и препознат, и да ситуације буду тако одабране да привлаче ученичку пажњу;
- ученицима познат;
- такав да проблем сам по себи може да доведе до описа ситуације;
- захтева математичку организацију (прогресивна математизација);
- не буде одвојен од процеса решавања проблема, већ би требало да води ученике да дођу до решења.

На основу овога, контекстуално засновани проблеми у *РМО* испуњавају бројне функције (Figueiredo 1999, Treffers & Goffree 1985, према Fauzan 2002: 52):

- помажу ученицима у брзом разумевању сврхе проблема;
- снабдевају ученике стратегијама решавања проблема заснованим на личном искуству и њиховом неформалном знању;
- нуде ученицима више могућности у откривању њихових способности;
- позивају ученике да решавају проблеме – изражен мотивациони фактор.

Размотримо истраживање приказано у оквиру ICMI студије *Перспективе наставе геометрије за XXI век* (*Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* 1998), које ће дати још један додатни оквир нашем истраживању и геометрији у контексту.

Одредница 'реалан' контекст у процесу учења геометрије (и уопштено математике) била је и још увек је широко распростањена међу методичарима математике (Bartolini & Boero 1998: 52). Постоји неколико битних разлога који потврђују овај избор, на пример мотивација ученика за учење геометрије, потреба да се успостави веза између школског и свакодневног учења, концептуализација геометрије као „језика којим се описује и објашњава реалност" или као „структура која организује реалност" (Ibid).

Све су ово педагошки, социолошки и филозофски разлози. С друге стране, уважавајући резултате истраживања, Бартолини и Боеро тврде да нити једно од њих не даје алат за истраживање:

- могућности и ограничења 'реалног' контекста у учењу геометрије и
- односа између геометријских активности у 'реалном' контексту и школској математици.

Бавећи се овим проблемима, Бартолини и Боеро нуде теоријски оквир који укључује културна и когнитивна питања учења геометрије у контексту и одговарајуће класификације контекста и геометријских активности које су у таквим контекстима развијане. Дате су и скице учења геометрије у контексту које је развијено у истраживањима у Ђенови и Модени за различите школске нивое (разреде) (основне и средње школе). Основни примери односе се на: сенке, репрезентацију видљивог света у смислу цртежа перспективе, математичку апаратуру (на пример верижна и кинематичка геометрија за старије разреде).

У теоријском оквиру Бартолини и Боеро наводе израз 'геометрија' који се односи на: 1) уобичајене геометријске садржаје у уџбеницима свих нивоа (од основног до универзитетског образовања) и 2) геометријске појмове математичких активности, мислећи на геометријску концептуализацију (на различитим степенима експлицитности и свесности).

Уважавајући општекогнитивна и образовна питања Бартолини и Боеро ослањају се на рад Виготског о релацији између учења и развоја, учитељеве улоге медијатора и когнитивне функције семиотичког медијаторског алата.

Разматрају се ‘дидактичка’ питања, усвајају се неки појмови које је развила француска школа дидактике математике, на пример ‘објекти дијалектике’ од Доуадија и ‘дидактичка транспозиција’ од Шеваларда (Douady 1984, Chevallard 1991, према Bartolini and Boero 1998: 53). Нешто детаљније објашњен је појам ‘поље искуства’. Боеро у овом смислу говори о појмовном унифицирању односа између геометрије и културе образовања путем учења геометрије. Разматра се и ‘поље’ познато за ученике путем њиховог језика, њихових образаца понашања и њиховог ‘културног идентитета’.

Сам појам ‘поље искуства’ односи се на комплекс односа који се развијају у школи између учениковог унутрашњег контекста (на пример искуства, начина мишљења и понашања који се односе на задато поље искуства). Појам ‘поље искуства’ требало би да је погодан за бављење на јединствен начин и у ваншколском социјалном контексту (на пример практична мерења) или физичком контексту (на пример сунчане сенке) или контекст у школској математици (на пример у самој геометрији) или чак и у контексту где су горе наведени аспекти стриктно повезани (на пример у картографији).

Проблем еволуције ученикових унутрашњих контекста разматрали су Бартолини и Боеро кроз активности организоване и вођене од стране учитеља у одговарајућем ‘пољу искуства’. У неким реалним пољима искуства ученик може усвојити геометријски алат и размишљати о стратегијама које ће применити како ту, тако и у другим пољима искуства, укључујући геометријска (кроз обавезну учитељеву медијацију).

Анализирајмо релације између учења геометрије и поља искуства према Бартолинију и Боеру. Однос између учења геометрије и поља искуства може да буде анализиран из две комплементарне тачке и то:

1. Еволуција учениковог унутрашњег контекста, кроз активност која се развија у пољу искуства под вођством учитеља. Анализа се односи на прогресивни богат комплет геометријског алата који ученици користе у примењеном геометријском проблемском задатку и односи се на

промену која се дешава при концептуализацији ситуација и феномена који су унети у учионичку активност.

2. Квалитет геометријске активности у различитим пољима искуства, уважавајући културне и епистемолошки релевантне аспекте историјске еволуције геометрије.

Наведимо разматрања Бартолинија и Боера са примерима активности у пољима искуства према две наведене анализе.

Прва, која се односи на поља искуства и изграђивање геометријског знања, јесте *свакодневно геометријско искуство и школска геометрија*. Свакодневна култура укључује социјалне интеракције (искуства) (на пример мерење обичних физичких величина таквих као што је дужина, цртање и читање мапа, цртање скала итд.), где се користе значајни геометријски појмови, особине и стратегије (често као имплицитни оперативни алат). Постоји, такође, алат (који се односи на исте примере као што су наведени) чија употреба, према социјално условљеним правилима, јесте богат геометријски потенцијал.

Према овим пољима искуства, учитељ може да упозна ваншколску социјалну праксу у учионици коришћењем алата и језичким изражавањем који повезује школску активност са ученичким ваншколским искуством. Прецизно изабраним проблемским ситуацијама учитељ може да стимулише ученике да искусе и прођу кроз процес акултурације у специјалном школском окружењу, који се обично дешава ван школе (Bishop 1988, према Bartolini and Boero 1998: 55).

Студије показују да када су ученици систематски укључени и када се ‘реалистичне активности’ примењују у школским оквирима и датом пољу искуства, тада не само што је могуће изградити вештине решавања једноставних ‘практичних’ проблема, већ оне помажу и ‘теоремама у акцији’ (Vergnaud 1990, према Bartolini and Boero 1998: 55). Боеро наводи пример мерења и то код више дужина (сабирајући мерне бројеве) (Ibid). Такође га је могуће користити за развој важног когнитивног процеса интуиције, хипотетичког резоновања и у раду са више различитих хипотеза и стратегија (Boero 1990, Ferrari 1992, према Bartolini and Boero 1998: 55).

Како би вештине биле изграђене у ‘пољу искуства’ препознавањем и коришћењем за више систематично овладано поље искуства оног који ради и у смислу да их поново ангажује у другим пољима искуства, учитељ мора да води процес стварања експлицитног геометријског знања изграђеног као ‘алат’. Ово померање са имплицитног оперативног алата до експлицитног геометријског објекта показује неке потешкоће. Према мишљењу Бартолинија и Боера главни проблем лежи у препознавању и превазилажењу разлика између школског геометријског знања и геометријског знања које се односи на социјално искуство.

Друга, која се такође односи на поља искуства и изграђивање геометријског знања, јесте *геометријски и научни појмови природног феномена*. Заинтересованост Бартолинија и Боера изражена је и за улогу геометрије која научно објашњава природне и социјалне феномене образоване погледом постепеног грађења под утицајем модерне културе и школе. Са овим на уму учитељ може да предложи геометријско моделовање феномена (на пример сунчеве сенке) које су од изузетног значаја за историју културе. Насупрот претходном одељку, школско учење у овом случају не може да буде замењено ваншколским искуством, чак ни на имплицитном оперативном нивоу. Штавише, веома често учитељ мора да се стави насупрот ученичким појмовима који су откривени у његовом окружењу или личној животној причи.

Студије у интерпретацији Бартолинија и Боера (Boero 1992, Boero et al. 1995, Garuti and Boero 1992, 1994 и Scali 1996, према Bartolini and Boero 1998: 55) наглашавају значај:

- општих ‘принципа’ и специфичних ‘феномен-појмова’ међу изворима које ученици цртају (и као део њиховог начина мишљења);
- система знакова предложен од стране учитеља у смислу да стимулише и обезбеди померање од феномена до научног појма.

Истраживачки проблеми се тичу:

- природе и извора појмова и принципа приказаних од стране ученика;

- учитељевог односа са ученичким принципима и појмовима (како однос може да се развија);
- ситуација и начина које учитељ може да бира како би испосредовао геометријске знаке, без изградње стереотипних феномена замене.

У истом домену поља искуства и изграђивања геометријског знања Бартолини и Боеро се баве геометријом као *специјализованим и експлицитним културним искуством*. Бартолини и Боеро су се бавили и геометријом као делом формирања научне културе, као специјалне активности математичара и као компоненте основног културног окружења интелектуалне класе модерног друштва. Тако геометрија може да обезбеди онима који уче на традиционалан начин неке разумне обрасце (на пример математичку 'чврстину') и да обезбеди неке идеје које уоквирују интелектуална искуства (на пример појам 'бесконачности'). У смислу геометријског поља искуства које се развија у учионици, учитељ мора да уведе елементе цртежа из научне културе за све аспекте потребне 'културној специјализацији' (понекад узрокујући основне 'делове' у смислу свакодневне културе) (Balacheff 1988, према Bartolini and Boero 1998: 56).

Истраживачке студије (Boero and Garuti 1996, Bartolini 1996, према Bartolini and Boero 1998: 56) показују да:
- експлицитно формулисање проблема или утицај еминентних историјских личности омогућавају раздвајање ученика од њихових дотадашњих интелектуалних активности и опште и синтетичке формулације њихових резултата;
- сличности између текста на којима су ученици радили и стандардних геометријских текстова (на пример оних које можемо да нађемо у уџбеницима) многе ученике 'гурају' да преформулишу свој текст или део текста у смислу да има сличности једних са другима.

А наводе се и истраживачки проблеми о којима се може промишљати:

- колико далеко учитељ иде у подстицању ученичке конструктивне активности (личне и социјалне тј. друштвене) и када би требало да започне културни модел непознат разреду,
- шта су потенцијални и когнитивни механизми директно укључени коришћењем историјских извора,
- како културна подлога може да буде спремна (и како одговарајуће ситуације могу да буду створене) како би обезбедили епистемолошким потешкоћама да буду разрешене (Fischbein 1994, према Bartolini and Boero 1998: 56).

И даље остајемо у истом домену, износећи питање *везе између различитих аспеката поља искуства и изграђивања геометријског знања*. Бартолини и Боеро истичу да у развоју и функционисању израза различити типови односа, који могу да постоје између геометрије и културе у основној школи, могу да буду повезани једни с другима, у неким случајевима у истом пољу искуства. На пример у пољу искуства ‘сунчеве сенке’ многи ученици могу да реше њихове негеометријске појмове феномена сенке кроз геометријску схематизацију, што може да буде искоришћено у ‘конкретнијим’ проблемима у истом пољу искуства. На пример, одређивање висина које није могуће извршити директним мерењима (Garuti and Boero 1992, према Bartolini and Boero 1998: 57) и, у теоријском смислу, изграђивању поља искуства ‘рационалне геометрије’ (Boero and Garuti 1996, према Bartolini and Boero, 1998: 57).

Ево још једног примера у ‘пољу искуства’ репрезентације видљивог света. Од 1. до 3. разреда ученици уче да лоцирају посматрача у различитим тачкама стајања (стојиштима), да замисле гледање оног који посматра и да изврше геометријско моделовање реалности (ово ће се видети и у нашем истраживању, већ при сагледавању геометријских способности ученика 4. разреда). Ова активност отвара питања, наслућивања, верификовања, па чак и доказивања, теорема које се уводе од 4. и 5. разреда, као и оних које се касније уводе. Кроз одговарајуће дидактичко планирање, рад у пољу реалног искуства може да снабде појмове (обично као ‘алат’) и вештине, захтевајући рад у геометријском пољу искуства. С друге стране, активности у овом пољу искуства засноване су на формама резоновања које се појављују, и то и у нематематичком искуству и у ‘математизованом’ искуству. Посебно Боеро показује како нека стварна поља искуства обезбеђују ‘извор’ у ком се развија почетна ‘игра’ хипотезе која ученику постепено омогућава културно овладавање пољима (према интерпретативним моделима различитих наука), али омогућавају и да се бави више комплексним и захтевним хипотезама (наслућивања, интерпретација и сл.) у истом или другим пољима искустава (укључујући геометријско поље).

На исти начин, у пољу искуства репрезентације видљивог света (основна школа) и математичка апаратура (средња школа), посматра се како учитељ утиче на ученике да досегну невероватно дубоку вештину поља искуства у смислу прогресивне конструкције наслућивања и верификације (Bartolini 1996, Bartolini and Pergola 1996, према Bartolini and Boero 1998: 57). Увођење алата школске геометрије води различитом ‘конкретизовању’ резоновања и променама, променама ‘конкретног окружења’ за учење у геометријском контексту.

Бартолини и Боеро су се бавили геометријским активностима у пољу искуства и *историјском изграђивању свести*. Иако се овај део њиховог рада односи на старије разреде (основне, па чак и средње школе), ми ћемо га укратко изнети. Разлог наше опредељености је у погледу ‘одозго’ на геометријски курикулум, у намери да се размотре упоришне тачке у спиралном математичком курикулуму какав је и наш. Форме активности које могу да допринесу пољу искуства разнолике су. Бартолини и Боеро су размотрали поља искуства према врстама активности представљеним:

- свакодневном праксом која отелотворује геометријска знања,
- научним моделовањем феномена из природе, те специјализацију геометријских искустава.

Свакодневна активност захтева посредничку продукцију мреже креативних артефеката од рационализације практичног знања до специјализованог геометријског искуства, на пример геометријски алат који бива трансформисан у објекте геометрије. У новим пољима из унутрашње у спољашњу математику намењени објекти специјалног геометријског искуства стварају нови ниво културних артефеката.

Историја геометрије вођена до модерних намена поткрепљује постојање одговарајућег поља искуства, где се развија ученикова активност. Геометризација репрезентације простора (схваћена у линеарној перспективи за потребе уметника и технолошку сврху техничких цртежа) створила је геометријске објекте, такве као што су геометријске трансформације у пројективном простору.

Данашњи развој примењене математике показује занимљиве примене, нпр. перспектива се користи у приказивању компјутерских система (на пример програми обуке хирурга, програми дизајнирани за контролу авио-саобраћаја итд.) или ланчани низови у роботици.

Квалитет људске активности у стварању тавих културних артефеката који могу да буду пренети у учионицу кроз конструкцију два поља искуства су:

- репрезентација видљивог света у смислу цртања перспективе;
- математичка апаратура (на пример верижна и кинематичка геометрија у старијим разредима).

А какве су конкретизације математичких појмова или структура тј. какве су репрезентације *видљивог света у смислу цртања перспективе* као почеци историјске конструкције свести? Бартолини и Боеро наводе резултате експеримента који је био примењен у неколико одељења у трајању од три године почевши од 3. разреда (и проширен на неколико одељења 6. и 7. разреда). Поље искуства, препозната од стране ученика, окарактерисано је као систематско понашање у различитим врстама акција и то – замишљање слике, изражавање о цртању (усмено или писано), анализа слика, читање изабраних (историјских) извора, коришћење механичког или оптичког изума (на пример перспектограф или камера) и дискусија.

Експлицитно и систематско вођење разговора карактеристика је будућности у стварању културне и друштвене конструкције знања које обезбеђује активну примену знања. У учионици, експеримент подстиче рану геометризацију симулирајући стварни окружујући свет. Овај процес илуструје практично знање које ствара потребу за замишљеним сликама и резултира стварањем геометријског алата (Bartolini 1996, према Bartolini and Boero 1998: 58).

Бартолини и Боеро се баве формирањем *математичке апаратуре будућих учитеља.* Поље искуства односи се на узраст од 9. до 13. разреда као научно оријентисана виша средња школа, а експерименти су се изводили у служби обучавања учитеља и током јавног извођења модела, циљано за школску популаризацију математике. За експерименте који су изводили планирано је да буду део формалне обуке образовања, посебно универзитетске припреме учитеља (наставника) за предмет математика.

Поље искуства ових експеримената показује две специфичне особине (Bartolini and Pergola 1996, према Bartolini and Boero 1998: 59):

- Блискост историјских извора, под вођством учитеља;
- Учитељеву помоћ, као што је велики физички модел (статички или динамички), такозвана математичка апаратура, која даје име целом пројекту.

Ученици су користили моделе доступне у математичкој лабораторији све до формулисања теорема и развоја комплексних доказа у 3-димензионој геометрији. Помоћ учитеља допуштала је разматрање различитих аспеката који су се односили на различита историјска достигнућа, на пример рађање пројекције у 17. веку (поступак геометријских трансформација као математичких објеката) и рад на проучавању бирационалних трансформација у смислу верижних у 19. веку (конструкција проучавања геометријских трансформација у богато покривеној теорији).

Из ова два примера историјских анализа, која су експлицитно начињена за ученике, Бартолини и Боеро наводе да се дошло до вишеструке и недвосмислене интерпретације истих објеката и помогло да се лоцира у бујајућој константној активности људског рода, доживљавање геометрије као једног од његових конститутивних елемената.

Геометријске активности у пољу искуства кроз историјску конструкцију свести се планирају и осмишљавају у смеру *приступа самом доказу и доказивању*. Према дискусији Мариотија и др. посебно је истакнут још један значајан проблем учења геометрије, а то је сам приступ доказу (Mariotti et al. 1997, према Bartolini and Boero 1998: 59). Истраживања показују да су потенцијалне контекстуализирајуће геометријске активности у наслућивању и доказивању све до стварања геометријских доказа на раном школском узрасту. Између осталог, ово је Бартолинија и Боера одвело до разматрања историје геометрије као колекције механизама за израду решења комплексних проблема.

Први пример тицао се открића и доказивања особина репрезентације перспективе – центар правоугаоне горње површи стола смештен је у пресеку дијагонала слике. Под вођством учитеља, ученици су пролазили од емпиријских посматрања фото-слика до теоријског доказивања својстава, где је ‘права представљена као права линија’. Ова активност оживљавала је круцијални корак у развоју теорије перспективе, када емпиријска правила цртања из свакодневног живота бивају промењена у геометријску теорију линеарне перспективе (Bartolini 1996, према Bartolini and Boero 1998: 60).

Други пример тицао се дидактичке ситуације о сунчаним сенкама када се од ученика тражило наслућивање у следећем проблему (а онда се и доказивао): „Знамо да два велика штапића формирају паралелне сенке. Шта два штапића формирају, један вертикално а други не? Да ли су њихове сенке паралелне? Увек? Никад? Када?“ (Boero et al. 1996, према Bartolini and Boero 1998: 60). Због дугорочног искуства у посматрању и стварању сунчевих сенки, многи ученици успевају да развију различите стратегије, да замисле однос паралелности и открију услове под којима се тај однос успоставља. Резоновање је омогућавало стварање ‘аргумената’ за доказивања која их очекују (у следећим корацима). У овом случају ученици су реконструисали круцијални корак у извођењу ‘општих’ конфигурација – проблем који је разматрао Декарт (Descartes), Понселет (Poncelet) и касније Лебескје (Lebesgue) – у смислу динамичког коришћења проблема који открива специјалне случајеве паралелности.

Завршну дискусију можемо да сумирамо на следећи начин. Бартолини и Боеро наводе да један основни циљ школе јесте да се новим генерацијама пренесе културна баштина из прошлости. Данас (много више него пре 20-30 година) већина истраживача разматра геометрију као део овог наслеђа. Још увек стоје два питања које Бартолини и Боеро наводе и који се тичу следећег:

- Које садржаје, методе, геометријске вештине би требало бирати?
- Које врсте дидактичких транспозиција би требало спровести у примени изабраних геометријских знања?

У смислу доприноса Бартолини и Боеро су покушали да одговоре на оба питања:

- Бирају се садржаји, методе и геометријске вештине које функционишу као оперативна и културна вештина ‘поља искуства’ и према друштвеној реалности, према природи и према математици. Избор није међу многобројним могућностима, већ је одређен критеријумом интризичког и екстринзичког културног значаја. На пример, доказујући теореме у геометрији које су релевантне у неком делу математичког рада, моделовање визије или сунчане сенке постају релевантне у осећају искуства и у реконструкцији круцијалних корака историјског развоја геометрије.
- Учење геометрије у пољу искуства доводи до реконтекстуализације геометријског знања у мрежи алата, према историјском алату и когнитивној мотивацији. Реконтекстуализација геометријског знања подесна је у стварању мреже објеката у нарастајућем пољу искуства у геометрији, или примени у настајању нових културних објеката.

У овој дијалектици између ‘алата знања’ и ‘објеката знања’ Бартолини и Боеро наводе да ученици постепено постају упознати са неким својствима у геометрији (и општије математици). Посебно примери ‘теорема о перспективи’ и ‘теорема о сунцу’ показују да наслућивање и доказивање могу да се разматрају од стране ученика на ефектан начин, решавајући проблем из реалности са једне стране и изводећи специјализоване математичке активности са друге.

8.3.2. Изграђивање апстрактног математичког знања у контексту

Истраживали смо трендове у математици. Реч је о два – апстракција и математизација. Ако се жели утицати на математички курикулум у смислу праћења трендова матичне дисциплине, требало би их и сагледати. Тако нпр. Кјелдсен у *Оксфордском приручнику из историје математике* из 2009. године јасно издваја два тренда и то према: 1) апстракцијама и 2) математизацији која доводи до наглог пораста примењене математике, тренду убрзаном од II светског рата на овамо и праћеним открићем компјутера (Kjeldsen 2009: 756). Оба тренда воде до радикално нових интерпретација у оквиру целокупне дисциплине XX века, раније сматраних неважним, који сада постају централни. Овај феномен илустрован је: 1) појавом конвексних скупова и 2) стварањем математичког програмирања (Ibid). Први илуструје како математичари поимају теме које су доживеле фундаменталне промене у периоду 1870-1940, промене које су трансформисале математику од науке која се бави бројевима и геометријским објектима ка више апстрактним истраживањима структура. Осим модерне теорије конвексних скупова, Кјелдсен наводи и Бруново сагледавање математике као науке која истражује квази-емпиријске објекте, док Минковски проучава геометрију n-димензионог ентитета у математичком простору (Brunn 1887, 1913, Minkowski 1891a, 1891b, 1893, 1896, 1910 и 1973, према Kjeldsen 2009: 757). Као што је био Брун, тако је и Минковски инсприсан ‘просторном интуицијом’, а његов појам ‘верификационог тела’ и новог појма раздаљине настаје из емпиријског искуства физичког простора. Кјелдсен наводи да ови ентитети припадају модерној страни оног што Греј назива онтолошком револуцијом у геометрији (Gray 1992, према Kjeldsen 2009: 757). Рад Бруна и Минковског укорењен је на линији која раздваја апстрактну математику XX века од математике пре ње. Други тренд има карактеристику померања у широком спектру нефизичких наука. Појава нелинеарног програмирања била је резултат таквих интеракција која представља пример динамичних промена и онога што се дешавало између математике и примене њених нефизичких области. Обе студије случаја испитују нове дисциплине које се појављују и које су успостављене у оквиру нових тема и пример су велике експанзије математике, али илуструју и како поддисциплине математике акумулирају вредности у контексту и језику у ком се користе, као и њихова значења, вредности и примене.

Постављамо питање какве последице и импликације наведени трендови остављају на наставу математике. На последњем *12. Интернационалном конгресу за наставу математике* (*12th International Congress on Mathematical Education 2012*) Драјфус је представио теоријски оквир којим објашњава како се конструише апстрактно математичко знање у контексту (Dreyfus 2012). Оквир је настао и развија се од пре скоро 15 година у сарадњи са Херкович и Шварцом (Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus 2001, према Dreyfus 2012: 1). Проблем истраживања је објашњење конструисања знања, посебно апстрактног математичког знања као што су појмови и стратегије при учењу у учионичком окружењу. Циљ истраживања је опис процеса конструкције знања у смислу да се расветле и сами процеси и сами услови под којима се они дешавају или изостају. Задаци се односе на разумевање извођења процеса учења у смислу унапређивања активности и информисања о раду учитеља. Оквир обухвата својства контекста у коме се учење одвија, што значи ученичка претходна знања, окружење у коме се учење одвија, као и математички курикулум и социјалне компоненте. Реч је о тзв. теоријском оквиру названом *апстракција у контексту* или краће *AiC*. Он се директно ослања на рад Фројдентала и Давидова – настављача рада Виготског (Freudenthal 1991 и Davydov 1990, према Dreyfus 2012: 2).

Фројдентал је објаснио шта математичари имају на уму када мисле на апстракције. Уопште, Фројдентал је давао важне погледе на математичко образовање, посебно на математичке апстракције. То је водило стварању културног легата и његове сараднике и следбенике до идеје *вертикалне математизације* (Treffers & Goffree 1985, према Dreyfus 2012: 2). Она указује на процес типичан реорганизацији претходних математичких појмова који се изграђују у математичкој свести ученика, помоћу којих ученици изграђују нове апстрактне математичке појмове. У вертикалној реорганизацији претходно изграђени математички појмови служе даље у процесу за изграђивање нових математичких појмова. Често они нису само реогранизовани, већ и међусобно повезани, што даје посебну дубину ученичком знању и израз сложеној природи математике. Низови проблемских ситуација стварају изнова прилике за богаћење новоформираним математичким појмовима у свести ученика и чине основу за даље, где је са једне стране сваки конструкт укључивао ‘извор’ претходних конструката и са друге потенцијалним за нове. Овде примећујемо сличност са учењем путем открића, које ћемо детаљније приказати у Мићићевом тумачењу (Mićić 1999, Мићић 2005).

По Давидову научно знање није једноставна експанзија свакодневног људског искуства. Оно захтева обрађивање посебним начинима мишљења и богату реалност. Давидов објашњава да апстракција настаје од почетне, једноставне, неразвијене и магловите форме која често испољава недостатак постојаности. Развој апстракције од почетног стања анализе наставља се до синтезе. Завршава се тако што је више постојане и разрађене форме. Не наставља се увек од конкретног ка апстрактном, већ од неразвијених ка развијеним формама (Davydov 1990, према Dreyfus 2012: 2).

И теорија Фројдентала и теорија Давидова о математичким апстракцијама имплицирају њено постојање у оквирима курикулума. *AiC* је усвојио вертикалну математизацију и кретање од конкретног и на тој основи изграђивање и дефинисање апстракције као процеса вертикалног реорганизовања математичких појмова у учениковој свести који су претходно изграђени у математици и са математичким значењем, а који воде до за ученике нових појмова. Теоријска активност предлаже адекватан оквир у разматрању процеса који је у својој основи когнитивни, а у обзир узима математичке, историјске и социјалне компоненте и контекст за учење у ком се ови процеси дешавају. *AiC* следи рад Гиеста који разматра активност као теоријску основу засновану на филозофији конструктивизма, омогућавајући да се избегну бројни проблеми који иначе постоје у овој филозофији (Giest 2005, према Dreyfus 2012: 3).

Према теорији исходи претходних активности природно се обликују у артефакте за оне наредне, а њихово својство круцијално је за постанак и развој апстракције. Врсте акција које су релевантне за апстракције су епистемолошке акције – оне које се тичу учесника и које посматрају учесници и истраживачи.

Ово је добро објашњено у раду Кидрона и Монагана који се баве подстицањем ученика да се баве апстракцијама, потребом која настаје у погодном амбијенту и из почетних магловитих представа (Kidron and Monaghan 2009, према Dreyfus 2012: 3). Ево њиховог кратког објашњења. Потреба оног који учи за новим знањем нераздвојив је део постављеног захтева / задатка, али и битна фаза процеса апстракције која мора да претходи процесу изграђивања математичких појмова у свести ученика (конструкцији знања), односно вертикалној реорганизацији математичких појмова који су већ били изграђени. Ова потреба за новим ствара везу између претходног и будућег конструкта знања. Дијалектичка анализа процеса апстракције Давидова иде од почетне непрерађене форме до коначног кохерентног конструкта знања са двосмерном везом конкретног и апстрактног – онај који учи има потребу за знањем да би објаснио неразрешену проблемску ситуацију. У моменту када онај који учи схвати потребу за новим конструктом, он већ има почетну нејасну форму будућег конструкта као резултат претходног знања. Том приликом се доспева до друге фазе у којој се тај конструкт изграђује у конзистентну и разрађену вишу форму, нови конструкт, који ствара основу за (научно) објашњење окружујуће реалности.

На основу овога постављене су основе апстраховања које пролазе кроз три етапе: 1) потреба за новим конструктима, 2) појављивање нових конструката и 3) њихово утемељење.

Основна компонента *AiC*-а је теоријско-методолошки модел или *RBC модел* према ком се појављивање нових конструката описује и анализира у смислу три посматране епистемолошке акције: 1) препознавања (R), 2) изграђивања (B) и 3) конструисање знања (C).

Препознавање се односи на схватање оног који учи да је конструкт специфичног претходног знања битан за блиску ситуацију. Изграђивање укључује комбинацију препознавања констукта, у смислу постизања локализованог циља као што је актуелизована стратегија, доказивање или решавање проблема. Модел предлаже конструкцију као централну епистемолошку акцију математичке апстракције. Конструисање се састоји од склапања и повезивања претходних конструката вертикалном математизацијом при стварању новог конструкта. Односи се на прво изражавање или коришћење конструкта за оног који учи. Али, он није стечен једном и заувек. Понекад онај који учи није ни свестан новог конструкта, он је често крхких веза и контекстуално завистан, а само конструисање није независно и флексибилно за оног који учи. Када то постане, ради се о утемељењу. Само утемељење није процес који се завршава, већ процес у коме они који уче постају свесни својих конструката, њихово коришћење постаје непосредно и очигледно, ученичко самопоуздање у коришћењу конструката нараста, а сами ученици све више и више показују флексибилност у њиховом коришћењу (Dreyfus & Tsamir 2004, према Dreyfus 2012: 4). Утемељење конструкта се догађа кадгод се конструкт појави у некој активности повезаној са активностима које следе. Оне могу да воде до нових конструката и, стога, утемељење повезује процесе сукцесивних конструисања и тесно су повезане са формирањем низа активности.

У процесу апстраховања, епистемолошке акције се групишу. Акција конструисања знања (C) зависи од препознавања (R) и изграђивања (B); акције препознавања (R) и изграђивања (B) су основа за конструисање знања (C); истовремено, акције конструисања знања (C) представљају више него колекцију свих акција препознавања (R) и изграђивања (B) које чине акцију конструисања (C), и у том смислу се каже да је целина више него сума његових саставних делова. Акција конструисања знања (C) извлачи своју снагу из математичких веза које су градивне компоненте и чине целину. У том смислу се каже да су акција препознавања (R) и изграђивања (B) конститутивне и групишуће за акције конструисања знања (C). Слично, акције препознавања (R) се групишу у акције изграђивања (B), будући да је изграђивање претходних конструката потреба за препознавањем овог конструкта (R), бар имплицитно. Штавише, нижи нивои акција конструисања знања (C) могу да буду груписани на једном вишем нивоу ако је претходни формиран као циљ следећем. Карактер груписања се посматра у учионици, проучавајући апстраховање и потврђујући теоријске приципе према којима је курикулум непрекидна трансформација конструката. Придодајући му овакве карактеристике, именује се модел динамички груписаних епистемолошких акција моделовањем апстракција у контексту тј. *RBC модел* или *RBC+C модел* који користи секундарну акцију конструисања знања (C) како би нагласио значајну улогу утемељења. Реч је о моделу који је теоријски и микро-аналитички објектив помоћу ког се посматра и анализира динамично апстраховање у контексту.

AiC се односи на узраст од 9-те године па навише и показује своју двоструку улогу – као методолошки алат и као теорија у развоју чији је почетни импулс истраживањима дала Херкович и њени сарадници још почетком 2000-тих (Hershkowitz et al. 2001, према Dreyfus 2012: 14). Већ више од деценију и више од 50 публикованих радова даје јој концептуални оквир (Bikner-Ahsbahs et al. 2010, Weiss 2010, Wood, Williams & McNeal 2006, према Dreyfus 2012: 15). *RBC+C модел* представља модел који служи као оквир за описивање, анализирање и интерпретацију менталне активности ученика и истовремено истраживања о како индивидуланој тако и колективној менталној активности ученика. Тако Драјфус поставља следећа питања на које се траже одговори:

- Шта можемо да сазнамо из наведених истраживања о апстраховању, или општије о процесу учења и знањима конструисаним у учионичким условима?
- Шта можемо да кажемо о сваком појединцу који учествује у учионичкој комуникацији, али не само појединачно, већ као заједница која се састоји од свих појединаца?
- Постоји ли методолошки апарат помоћу кога можемо да изведемо истраживање које ће нам дати одговоре на постављена питања?

8.4. Теорије развоја геометријског мишљења

Када се *РМО* приступ математичког образовања пореди са традиционалним, одмах се увиђају бројне разлике, а ми овде наводимо оне које су важне за наш рад у погледу осмишљавања другачије организације наставе (Prenger 2005: 4, Fauzan et al. 2002: 1). У традиционалном приступу проблеми су дати као чисто математички. Од ученика се тражи да у бројним задацима примене знања у проблемима који су дати у контексту. У *РМО* математички проблеми смештени су у контекст од самог почетка. Контекстуални проблеми и свакодневне ситуације у *РМО* представљају извор за учење, они су полазиште за формирање математичких појмова, а не само поља за примену знања (Heuvel-Panhuizen 2001: 1). Ово свакако има за последицу суштински другачију ораганизацију наставе у *РМО*. У традиционалном приступу фокус је на самом поступку (процедури) задатка која се изводи – ученици индивидуално решавају проблеме. Значај *РМО* је у обезбеђивању више сложеног учења тј. учења са значењем. *РМО* приступ у учионици више значаја придаје интеракцијама. Учитељ подржава процес (поновног) открића кроз разговор са ученицима, постављајући питања шта ученици мисле и зашто баш на одређени начин, након чега образлажу своје одговоре – речима формулишу свој ток мисли (Simons & Lagerwerf 1995, према Prenger 2005: 5). Интеракције у *РМО* пратимо док ученици решавају проблемске задатке смештене у контекст при чему је значајна улога језика и математичког резоновања (расуђивања) (Prenger 2005: 5, Fauzan et al. 2002: 2). Заправо због измењене климе у учионици такве промене се дешавају.

Промишљања о резоновању у настави геометрије започињемо инспиративним радом Стина која поставља два важна питања: 1) зашто је резоновање интегрални део математичког курикулума[42] и 2) како математичко резоновање (расуђивање) унапређује постављене циљеве курикулума (Steen 1999). На прво питање одговор је очит и уобичајен – за развијање елементарних математичких способности, као помоћ при логичком мишљењу, у припреми ученика за свакодневни живот. Одговор на друго питање је далеко сложенији – изразито означава математичку методологију аксиоматског резоновања, логичку дедукцију и формално закључивање. Овде је реч о много широј квантитативној конструкцији која спаја анализу и интуицију са образложењем и посредношћу, и отвара бројна питања (Ibid).

У свом раду о математичком резоновању Стин поставља листу од двадесет питања. За нас су посебно занимљива два која овде наводимо: 1) да ли је математичко резоновање корисно и 2) да ли је контекст битан за математичко резоновање (Ibid). Прокоментаришимо оба. За већину проблема које проналазимо у уџбеницима математике, математичко резоновање је крајње корисно. Али, колико често срећемо проблеме из свакодневног живота у уџбенику? Често су фактори који нису резоновања у строгом смислу значајнији у свакодневним ситуацијама. У том смислу интуиција и инстинкт понекад обезбеђују боље вођење

[42] Мисли се на математички курикулум К-12 у САД-у.

у разрешавању проблема, или компјутерске симулације које су погодније или више поуздане итд. Оно што је потребно јесу процене.

У уобичајеним околностима, људи користе математику на два прилично различита начина: 1) примењујући познате формуле или поступке за решавање стандардних проблема или 2) суочавајући се са проблемима кроз типичне математичке стратегије (нпр. превођење на другу поставку, у потрази за обрасцима, резоновање по аналогији, уопштавања и поједностављивање, истражујући специфичне случајеве, апстрахујући и занемарујући неважне детаље).

Први начин ретко укључује строгу дедукцију или формалну математику. У свакодневном животу софистициране процедуре из више корака засноване на математици далеко су више својствене индивидуи него што су то низови логичког размишљања који доводе до математичких доказа (Forman & Steen 1995, према Steen 1999). Није методологија формалних дедукција оно што математику чини корисном за свакодневни живот, већ математичке навике за решавања проблема и способности које се при томе развијају (Packer 1997, према Steen 1999). Може ли се изводити математичка активност без резоновања? Многи користе рутинске методе укорењене у навикама. Да ли људи могу да резонују а да не користе математику? Очигледно да је тако, чак и у ситуацијама (нпр. инвестирање, игре на срећу) где би математичари суштински расуђивали математички (и за њих образложење може да буде несвесно или подређено другим средствима анализе). Али, колико је математичко резоновање заиста потребно за математику која се користи у свакодневном животу и раду? Да ли је једноставној математичкој пракси потребно доста математичког расуђивања?

Када говоримо о другом начину примене математике заправо мислимо на ‘ситуационо сазнавање’ или ‘учење у контексту’ за које се залажу истраживачи у области образовања и реформатори већ више од једне деценије (Ibid), а много дуже научници и инжењери (Rutherford 1997, према Steen 1999). Стручњаци из области образовања у великој мери се залажу за такву врсту учења, упорно је наводећи као недостатак у математичким курсевима и једну од основних препрека у учењу математике (Bailey 1997, Hoachlander 1997, према Steen 1999). Ипак, према неким извештајима[43] не постоји конзистентан доказ да се ефекат повећава када се учење одвија у амбијенту у коме ће вештине бити извођене (Bjork & Druckman 1994, према Steen 1999). Контекст може утицати на учење на два различита, чак супротна начина – генерално се повећава мотивација и дугорочно учење, али такође може да ограничи употребљивост онога што је научено. Знање често постаје контекстуално везано када се учи само у једном контексту. Свако ко је икада предавао математику чуо је притужбе од наставника у другим предметима / дисциплинама да ученици не знају неки математички појам / поступак / процедуру која је потребна за изучавање те дисциплине а коју су ученици требали да науче у оквиру курса математике. Проблем који је прожет подељеним знањем довео је многе едукаторе до претпоставке да је трансфер знања из једног предмета у други атипичан. У ствари, трансфер се догоди, али ни приближно систематски или предвидљиво као што би ми то желели. Колико је ситуационо математичко сазнање? Да ли настава у контексту олакшава учење математике? Да ли ограничава или повећава вероватноћу трансфера? Када се, ако се дешава, математичко образложење трансферише у друге дисциплине? Ова питања навела су нас на промишљање о математичком резоновању контекстуално заснованом и идеју да се њоме бавимо, чиме смо отворили бројна питања.

Истражили смо појам резоновања у настави геометрије у *РМО*. Приступи учењу геометрије који се јављају као трендови су конструктивистички (радикални конструктивизам у математичком образовању) (Von Glaserfeld 1988, према Hershkowitz 1998: 30) и социо-културни (Vygotsky 1978, према Hershkowitz 1998: 30). Они остварују значајан утицај у процесу резоновања у најширем смислу. Централно место у оваквом процесу подучавања и учења имају ученици, њихово разумевање и интеракције које се одвијају у учионици. Као последица процеса резоновања сматрају се различите акције у којима ученици учествују у процесу комуникације кроз објашњења, како другима тако и себи самима, шта виде, откривају, мисле и закључују.

Када је реч о учењу у окружењу, јављају се два тренда геометријског резоновања. Један је *динамична геометрија*, а други је *учење у контексту*. Према

[43] Стин наводи извештај Националног истраживачког савета САД-а.

овоме, геометријска знања могу и требало би да буду изграђена са значењем у контексту који може да послужи као ‘поље искуства’ (Bartolini & Boero 1998, према Hershkowitz 1998: 32). Контекст би требало да је ‘реалистичан’ за ученике, где је реалистичност узета у ширем смислу. Гравемејер је описао ‘реалистичне’ појмове у холандском курикулуму (што важи и за остале) тако да се „реалистично односи на оно што је за ученике искуствено могуће, укључујући и саму математику… једном када ученици овладају са нешто математике, математика сама постаје ‘реалистичан’ контекст“ (Gravemeijer 1994, према Hershkowitz 1998: 32).

Постоји велики број курикулума и истраживачких пројеката у којима реалистичан контекст има различита значења. Сваки у теорији, развоју и истраживању има своје специфичне особине. Бартолини и Боеро описују свој рад у Италији, где се ‘поље искустава’ заснива на „феномену који је значајан за историју културе“ (Ibid). Гравемејер и Херкович, Парзис и ван Дормолен расправљају о теорији и пракси у геометрији у оквиру холандског реалистичног математичког образовног програма (Gravemeijer 1998[44] и Hershkowitz, Parzysz & van Dormolen 1996, према Hershkowitz 1998: 32). Лехрер и Ромберг приказују примере развоја и истраживања геометрије у контексту у САД-у (Lehrer and Romberg 1998, према Hershkowitz 1998: 32). Постоји неколико важних карактеристика у свим овим приступима. Главна карактеристика је оно што Гравемејер назива ‘поновно откриће у прогресивној математизацији’. Ученици се конфронтирају у ситуацијама у којима посматрају и решавају проблеме у реалистичном геометријском контексту и истражују инваријантне геометријске фигуре и релације са реалистичним примерима. У овој интеракцији у контексту они математизују, што ће рећи они стварају више менталне акције. *Математизација* се види као активност, врста организованог процеса у којој се елементи контекста мењају у геометријске објекте и релације.

Посматрање је важан аспект математизације у којем онај који учи пролази кроз „трансформацију спољашње активности у унутрашњу“ (Wertsch & Stone

[44] Упућујемо на рад: Gravemeijer, K. P. (1998): „From a different perpective: buildig on students' infomal knowledge“, In: *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, Lehrer, R. and Chazan, D., Routledge, pp. 45-66. Also available on: http://books.google.com/books?id=hB1tz4RfaMgC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false

1989, према Hershkowitz 1998: 32). Бартолини и Боеро говоре о „еволуцији учениковог унутрашњег контекста кроз активност која се развија у пољу искуства“ (Bartolini & Boero 1998, према Hershkowitz 1998: 32). Они тврде да је геометријско знање стечено у овом померању створено као ‘алат’ у посебном пољу искуства. Реч је о постојању експлицитних геометријских објеката који могу да буду укључени у интеракцију са другим пољима искустава.

Математизација у геометрији захтева геометријско резоновање. Различити начини резоновања и објашњења, настајући из потребе математизирања у ‘различитим пољима искуства’, део су сличности и разлика међу тим геометријским окружењима. То је промена из ‘шта видим’ у ‘како видим’ усклађујући са променом оне позиције посматрача, описане по Гревемејеру, које позивају оног који учи да искористи геометријски алат поново откривен од стране ученика (на пример представе линија и углова).

Бартолини и Боеро описују како ученици истражују феномен сенки наслућујући према свом искуству и како ученицима наведено индуктивно резоновање обезбеђује ‘аргументе’ у доказима које затим следе. Проширени задатак, описан код Лехрера и Ромберга, објашњава примену математизације. Дечји неформални свет бива проширен, а проширења су за ученике ‘занимљива’, те долази до прогресивних промена изражених у равни математике. Потреба ученика другог разреда да објасне учитељу и његовим вршњацима шта раде и зашто, ставља их у позицију откривања система појмова, што им омогућава да, на каснијем степену, откривају и објашњавају бројне геометријске чињенице о композицији трансформација.

У процесу учења и овладавања садржајима геометрије у контексту наглашена је улога резоновања (расуђивања / закључивања), о чему ћемо нешто више у наредном поднаслову у ком се бавимо, између осталог, и Дуваловом теоријом учења геометрије (и три функције геометријског резоновања) (Duval 1998, према Hershkowitz 1998: 33). Као део математизације, ученик објашњава и резонује док изграђује и проширује своје геометријско знање. Тако ученике припремамо за више формална доказивања. На пример, Бартолини и Боеро тврде да резоновања која воде ка доказивањима обезбеђују ‘аргументе’ за извођење доказа који непосредне следе.

Бавили смо се и питањем *развоја геометријског мишљења*. Кроз историју геометрије постојала су два, на неки начин контрадикторна, тренда – један који копира ситуације из свакодневног реалног живота и други који је прототип логичко-математичког мишљења још од Еуклидових *Елемената* (Романо 2009b: 1). Сагледаћемо њихове основне идеје.

Дискусија Худемента и Кузниака (Houdement and Kuzniak 2003: 4) о три приступа разумевања геометрије – три парадигме – дају нам основу развоја геометријског мишљења. Парадигме се ослањају на Гонсетове облике знања о простору – интуиција, експеримент и дедукција (Gonseth 1945-1955, према Houdement and Kuzniak 2003: 4) и воде нас до различитих форми геометрије:

- *природна геометрија (геометрија I)* – реч је о реалном свету чији су објекти и осећаји извори сазнања; интуиција је често асимилована непосредно после перцепције; аргументи у тврђењима ове геометрије базирани су на експерименту и дедукцијама;
- *природно-аксиоматска (геометрија II)* – реч је о архетипу Еуклидске геометрије и дедуктивним законима аксиоматског система; изграђена је на моделу блиском реалности, а аксиоми су што је могуће ближи просторној интуицији;
- *формално-аксиоматска геометрија (геометрија III)* – чија су тврђења засновани на аскиоматском систему; мало је или скоро никако представљена у обавезном школовању; ради се о формалним и логичким закључивањима и готово да нема везе са реалним светом (Wittgenstein 1918, према Houdement and Kuzniak 2003: 4).

Осим што је погодна за класификацију геометријског мишљења, може да помогне у интерпретацији задатака датих ученицима, за класификацију резултата ученика, као оријентир наставнику у процесу учења и подучавања и др. (Романо 2009b: 2).

8.4.1. Ван Хилеова, Фишбајнова и Дувалова теорија учења геометрије и геометријско резоновање

Дајемо преглед три теоријска оквира (Geometry Working Group 1998: 29) и то:

1. Ван Хилеову теорију о нивоима разумевања геометрије,
2. Фишбајнову теорију фигуралних појмова и
3. Дувалов когнитивни модел геометријског резоновања.

Свака од наведених теорија обезбеђује основу за даља истраживања о геометријском резоновању ученика и аспектима визуелизације и конструкције који јој припадају. Како се геометрија развија обухватајући разумевање различитих визуелних феномена неопходно је разјаснити шта се подразумева под појмом геометријско резоновање (потребно за решавање геометријских проблема који укључују визуелне феномене) и како се такво резоновање одвија. Реч је о три прилично добро развијена теоријска оквира која описују и објашњавају развој геометријског резоновања и на тај начин обезбеђујући основе истраживачима, али и наглашавајући когнитивну комплексност геометрије.

1. Ван Хилеова теорија о нивоима разумевања геометрије

Ван Хилеов модел развоја геометријског мишљења пружа основу за разумевање дечијих развојних способности у геометрији. Он указује на пет нивоа геометријских знања који дете пролази од основног препознавања геометријских облика до дедуктивних доказа (van Hiele 1986: 53, *ЛОТ*). Ови нивои престављају хијерархијски уређен низ корака који могу да се достижу у скоковима и у највећој мери зависе од учења (а не од узраста или биолошке зрелости). Сваки ниво карактерише посебан језик, симболи и структура (Ibid).

1. Ниво 0 – ниво *визуелизације*: ученици на основу перцепције формирају мисли; препознају геометријске ликове, на пример троугао, четвороугао, круг итд., али их не користе за класификације;
2. Ниво 1 – ниво *описа и анализе*: индуктивно изођење закључака, на основу неколико примера; фокусирање детета на облик унутар класе, на

пример промишљају која својства има правоугаоник; ученици су способни да разговарају о односима између геометријских објеката и њихових особина, али када описују неки објекат, набрајају све његове особине и не могу да разграниче које од њих су потребне а које довољне да га опишу;

3. Ниво 2 – *апстрактни или релациони* ниво (ниво неформалне дедукције): подразумева развој способности уопштавања (дефиниције) које укључују навођење потребног и довољног услова, као и неки вид логичке аргументације; постоји могућност класификовања геометријских фигура на основу уочавања особина;
4. Ниво 3 – ниво *формалне дедукције*: ученици могу идентификовати особине геометријских објеката, изводити доказе користећи исказе, аксиоме и дефиниције; ученици употребљавају апстрактне појмове и изводе закључке засноване више на логици него на интуицији;
5. Ниво 4 – *ригидно-метаматематички* ниво: достиже се могућност резоновања базиран искључиво на аксиомама, дефиницијама и теоремама; разумевање геометријских система који није Еуклидски (на пример систем геометрије Лобачевског где су геометријски објекти смештени на сфери а не у равни као код Еуклидске геометрије).

Хијерархијски два највиша нивоа (четврти и пети) не достижу се у основној школи.

2. Фишбајнова теорија фигуралних појмова

Фишбајн разматра геометријску фигуру као што је нпр. квадрат. Описује његова унутрашња појмовна својства, наглашавајући да то није цео појам, већ њега чини и слика (тог квадрата) (Fischbein 1993, према Geometry Working Group 1998: 30). Квадрат поседује својства који обични појмови не поседују. Наиме, он укључује менталну репрезентацију својстава простора. Фишбајн тврди да све геометријске фигуре представљају менталне конструкције које, истовремено, поседују појмовна и фигурална својства. Према овоме геометријско резоновање карактерише се као *интеракција између два аспекта, сликовног и појмовног*.

Мароти дискутује о Фишбајновом ставу о фигуралним појмовима и истиче дијалектички однос између геометријске фигуре и геометријског појма (Marotti 1995, према Geometry Working Group 1998: 30). Она тврди да је геометрија поље у ком је неопходно да су слике и појмови у интеракцији, али гледајући из ученичке перспективе постоји једна врста тензије међу њима. Нешто више о дидактичким импликацијама Фишбајнове теорије на наставу математике изнећемо у следећем поглављу.

3. Дувалов когнитивни модел геометријског резоновања (закључивања)

Француски психолог Дувал приступа геометрији са когнитивне и перцептуалне тачке (Duval 1995, према Geometry Working Group 1998: 31). Тако Дувал обезбеђује аналитички извор за формирање детаљног оквира у анализи семиотике геометријских слика. У тим оквирима Дувал препознаје четири типа оног што именује као ‘когнитивно поимање / схватање’ (*cognitive apprehension*) и то:

1. *перцептуална* – она која се препознаје на први поглед; нпр. нека фигура може да буде небитна за конструкцију геометријске фигуре;
2. *секвенцијална* – она се користи приликом конструкције неке фигуре или при опису конструкције; у овом случају, фигурална јединица не зависи од перцепције, већ од математичких и техничких ограничења (у другом случају може то да буде лењир и шестар, или неки једноставнији компјутерски софтвер за цртање);
3. *дискурзивна* – перцептуално препознавање зависи од дискурзивних тврдњи, јер математичка својства представљена на слици не могу да буду одређена само путем перцептуалног схватања, прво нешто мора да се саопшти путем језика;
4. *оперативна* – укључује оперисање на самој фигури, ментално или физички, и може да допринесе решавању проблема.

Дувал објашњава да увек постоји потенцијални конфликт између перцептуалног схватања фигуре и перцепције фигуре као математичке. Потешкоће, при померању од сагледавања својстава фигура до математичких својстава и објеката представљених сликом, могу да заварају ученике и да ометају потребу за откривањем доказа.

Према Дувалу оперативно схватање не функционише независно од осталих, заправо дискурзивно и перцептуално схватање могу веома често да учине нејасним оперативно схватање. Са аспекта наставе и учења, Дувал износи мишљење да је потребно специјално и одвојено учење како при оперативном, тако и дискурзивном и секвенцијалном схватању. Математички начин гледања на фигуру једино настаје у координацији између одвојених процеса схватања и то у дужем временском периоду.

Дувал иде и даље у својим истраживањима и предлаже да геометријско резоновање укључује три врсте когнитивних процеса који испуњавају специфичне епистемолошке функције. То су процеси:

1. *визуализације* – нпр. визуелна репрезентација геометријског тврђења или хеуристичко истраживање сложене геометријске ситуације;
2. *конструкције* (користе се инструменти);
3. *резоновања* – посебан дискурзивни процес за проширење знања, за објашњења, за доказивања.

Дувал указује да ова три различита процеса могу да функционишу одвојено. Нпр. визуелизација не мора обавезно да зависи од конструкција. Слично, чак када конструкција води до визуелизације, процес конструкције заправо зависи само од веза важних математичких својстава и ограничен је инструментима који се користе. Слично, чак када је визуелизација помоћ у вођењу ка резоновању, нпр. помоћ у проналажењу доказа, у неким случајевима она може да буде варљива и да не води добром путу. Међутим, Дувал тврди да су ова три когнитвна процеса тесно повезана и њихова синергија је когнитивно неопходна за стицање вичности у геометрији. Њихова повезаност представљена је схемом 9. Погледајмо је.

Свака стерлица представља пут једне врсте когнитивног процеса који може да подржи другу врсту процеса у било којој геометријској активности. Стрелица 2 је испрекидана, јер визуелизација не помаже увек резоновању.

Стрелице 5(А) и 5(Б) показују да резоновање може да буде развијано на независан начин од процеса конструкције или визуелизације. У многим случајевима можемо имати дужи кружни пут. Нпр. 2-5(Б)-3 може да представља пут проналаска реда конструкције за дату фигуру или 4-2-5(А) или 5(Б) може да представља начине описа реда конструкције.

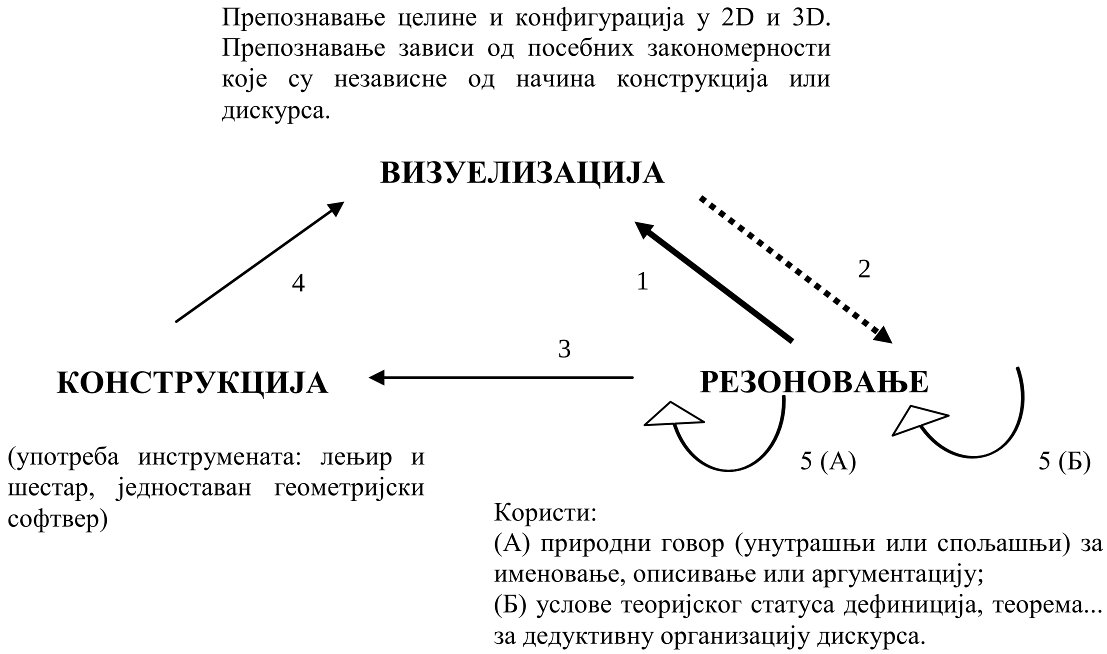


Схема 9. Когнитивне интеракције укључене у геометријску активност по Дувалу (Duval 1998)

Дувалов аргумент о когнитвним процесима који су сазнајно неопходни за стицање вичности у геометрији води до исхода у ком Дувал препознаје како ученике у школским условима довести до нивоа комуникације ова три процеса. У покушају развоја геометријског резоновања, његова истраживања показују следеће:

1. три врсте когнитивних процеса морају да буду развијане одвојено;
2. рад на диференцијацији процеса визуелизације и међу различитим процесима резоновања неопходни су као саставни делови математичког курикулума;
3. координација ова три процеса заиста може да се догоди, али само након поменутог рада на диференцијацији.

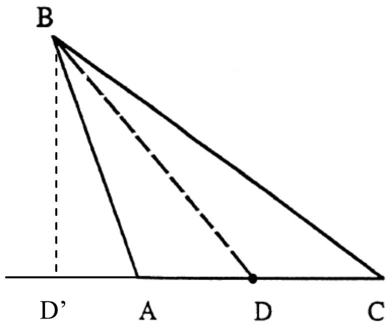
8.4.2. Методичке импликације на почетну наставу геометрије

Поменућемо неке од методичких импликација Фишбајнове теорије фигуралних појмова које су од значаја за наш рад, а затим и уопштене о фокусу на резоновање (закључивање) у *РМО*.

Основна теза Фишбајнове теорије фигуралних појмова је да се геометрија бави објектима у свести појединца (тзв. геометријским фигурама) које истовремено поседују и појмовни и фигурални (сликовни) карактер. На пример, геометријска сфера је идеалан апстрактан објекат, као и сваки прави појам, а која истовремено поседује и фигурална својства, пре свега одређени облик. Идеалан апсолутно савршен модел геометријске сфере не може се наћи у реалности. У овом споју између појма и облика, као што је познато за геометријске објекте, слика је она компонента која подстиче мисли, али постоје логичка, појмовна ограничења која контролишу формални, строг аспект. Фишбајн именује геометријске фигуре *фигуралним појмовима* због своје двоструке природе и анализира унутрашње тензије које могу да се појаве у фигуралним појмовима због ове двоструке природе, аспеката развоја и дидактичких импликација (Fischbein 1993: 139).

Бавили смо се односом слике и дефиниције према Фишбајну. Однос између посматраних објеката и дефиниција суштински се разликује у емпиријским наукама у односу на математику (Fischbein 1993: 154). У емпиријским је дефиниција крајње одређена својствима својих објеката, док је у математици дефиниција, која је постављена непосредно или помоћу дедукције, својство одговарајућих објеката. Наиме, интерпретација фигуралних компоненти геометријских фигура би требало да остане цела подвргнута формалним ограничењима. Ова идеја се не разуме увек и ученици је често занемарују. Фигуралне компоненте настоје да се ослободе формалне контроле и да се понашају аутоматски по гешталт обрасцу (нпр. откриће да многи ученици, након прихватања доказа теореме као апсолутног гаранта валидности теореме, захтевају додатне провере сваке посебне подкласе дате класе фигура). Потешкоћа у манипулисању фигуралним појмовима лежи у тенденцији занемаривања дефиниције под притиском фигуралних ограничења које представљају основну препреку при геометријском резоновању.

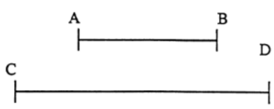
Са методичке тачке гледишта следи да би ученици требало да се посебно оспособљавају у савладавању овог типа конфликтних ситуација. Ученици можда неће правилно нацртати висину из темена B троугла ABC (слика 19.), већ ће уместо ње нацртати тежишну дуж, упркос чињеници да знају дефиницију висине троугла.



Слика 19. Проблем цртање висине троугла према Фишбајну

Ученици би требало да познају дефиницију и да реше задатак тачно према дефиницији, а не према ономе што им се чини према слици. Реч је о тривијалном примеру, али многи слични примери би требало да се систематично примењују у учионици, у намери да се нагласи доминација дефиниције над сликом у коришћењу и интерпретацији фигуралних појмова.

Ево још једног доброг примера за илустрацију проблема о коме говоримо. Пореде се скупови тачака дужи AB и CD и савладава се конфликт између две тврдње да CD има више тачака и тврдње да су два скупа тачака AB и CD међусобно еквивалентна (слика 20.).



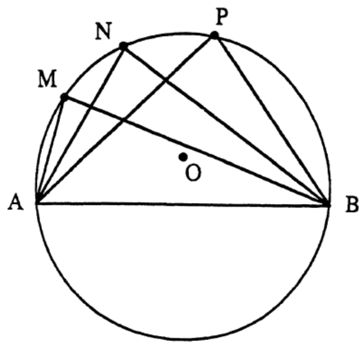
Слика 20. Поређење скупова тачака дужи и савладавање конфликта – јединство фигуре и појма при геометријском резоновању према Фишбајну

Исправна интерпретација појма тачке јесте *фигурални појам*. *Појмовно* говорећи, тачка је ентитет нулдимензије. *Фигурално (просторно)* говорећи тачка указује на позицију. Будући да позиција не може да буде представљена ван слике, тачкама се додељује димензија (дводимензиона репрезентација). Фигурални појам губи идеалну чистоћу и ово ствара конфликт. Када потврдимо да дуж садржи бесконачно много тачака, упућујемо на бесконачно много нулдимензионих ентитета. Израз 'бесконачно много нулдимензионих ентитета' има идеално значење – бави се чисто фигуралним појмовима. Истовремено, фигурална компонента (позиције) намерава аутоматски да добије извесну сликовну суштину која води ка прећутном веровању нееквивалентности два скупа тачака. Средњошколски ученици би требало да буду свесни конфликта и његовог извора како би нагласили потребу ослањања на математичко резоновање ка крајњим формалним ограничењима у својој менталној слици. Све ово Фишбајна води до закључка да „*процес изграђивања фигуралних појмова* у учениковој свести не би требало разматрати као спонтану последицу уобичајеног курса геометрије" (Fischbein 1993: 156). Интеграција појмовних и фигуралних својстава у јединственој менталној структури, са доминантним појмовним ограничењима над оним фигуралним, није природан процес. Он захтева формирање континуиране, систематичне и основне преокупације учитеља.

Овим је објашњено стварање адекватног јединства фигуре и појма при геометријском резоновању са доминантним формалним ограничењима и увиђање да би конфликтне ситуације требало да се користе тако да се ученици оспособе да пажљиво прате захтеве дефиниције, понекад видљиво супротно оном што слика наговештава (или намеће).

Други аспект коме Фишбајн посвећује пажњу у смислу јасности фигуралних појмова је различита удаљеност (Ibid). Позабавимо се овим појмом. Фишбајн наводи да се ради о случају примене дубоког и присног односа између логике и фигуралних аспеката. Фигура (линија или површ) код које све тачке имају одређено својство и које припадају фигури одређују појам раздаљине. На пример, да би говорили о кружној линији као фигуралном појму одређен је однос њених тачака и метрички или алгебарски дефинисан. *Све* тачке кружне линије су једнако удаљене (полупречник r) од тачке C (центар кружне линије) и све тачке једнако удаљене од C смештене су на кружној линији. Алгебарски то је изражено следећом формулом $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Није могуће открити својство кружне линије које није изведено из дефиниције. Иако је кружна линија *слика* (просторна репрезентација), своје постојање и својства сасвим су наметнута апстрактном, формалном дефиницијом. Ништа није фигурално истинито што није истинито *и* што се не може доказати појмовно, и обрнуто.

Кратко сумирајући, системско коришћење појма раздаљине формулише двојну природу по Фишбајну и представља важно дидактичко средство које продубљује разумевање природе фигуралних појмова.



Слика 21. Поређење углова непосредно фигурално према Фишбајну

Наведимо Фишбајнов пример кружне линије са центром у тачки O (слика 21.). Одаберимо две тачке на њој, тачке A и B, и нацртајмо неколико углова над тетивом AB са теменима M, N и P (формирају троуглове AMB, ANB и APB).

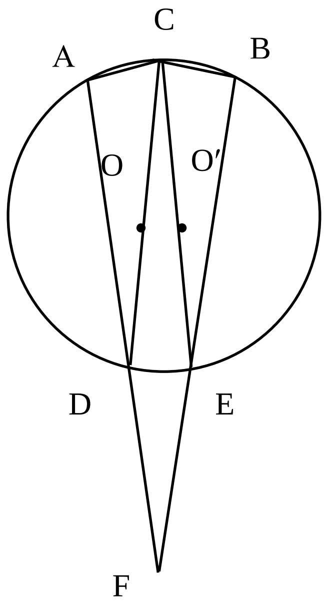
Тешко је углове поредити непосредно фигурално (путем слике). Чини се да су углови различити (али ми знамо теорему која каже да су сви периферијски углови над једном тетивом, са исте стране, међу собом једнаки). Стога су три угла са теменима у M, N и P једнака.

Бавимо се фигуралним појмовима где су сви делови слике (углови, краци, тачке, кружна линија, кужни лук) истовремено и слике и појмови (а слике су контролисане својим дефиницијама). Али, очито је да у процесу резоновања слика не може да одговори на постављено питање. Једнакост углова одређена је путем *теореме*. Стога се да закључити да слика може да вуче погрешном резоновању (закључивању).

Последично, сва темена углова, са крацима који пролазе кроз тачке на кружној линији (и које имају исту величину угла чија темена леже на кружној линији) смештена су на истој кружној линији. Фишбајново веровање у суочавању фигуралних импресија са формалним ограничењима помаже да се унапреди појмовна контрола и, истовремено, стимулише спој фигуралних и појмовних ограничења.

Логика и слика требало би да су нераздвојне у геометријском резоновању, што се лепо види у наведеном примеру појма раздаљине. Фигурални елементи постају саставни део процеса логичког резоновања као да ће они сами бити прави пример појма. Ако се и појави извесна противречност, то је обично зато што фигура не извршава захтев, под посебним логичким утицајем. Код нас се сличним питањем бавио велики математичар М. Петровић Алас (1868-1943) (Петровић 1949, према Дејић 2001: 618-619). Тако Дејић примећује да Петровић на неколико примера показује „како једна мала, на први поглед безначајна нетачност, коју је често немогуће и запазити при цртању, доводи до потпуно погрешних и нетачних геометријских закључака, иако се слика тумачи најтачније и најправилније“ (Ibid: 618).

Дејић интерпретира један Петровићев пример (видети слику 22.).



Слика 22. Непажљиво нацртана слика из које се изводе погрешни геометријски закључци (Петровић 1949)

Нека је AFB произвољан угао. Повуцимо из произвољних тачака A, B, које се налазе на крацима тог угла, нормале. Нека је тачка C њихов пресек. Кроз тачке A,B,C повуцимо круг. Нека су тачке D, E пресеци тог круга са крацима угла AFB. Како је угао DAC прав, дуж DC је један пречник круга, а средина O центар тог круга.

Слично, пошто је угао EBC прав угао то је EC један пречник круга, а средина O′ тог пречника такође средина истог круга. Излази да тај круг има више од једног средишта.

Види се да су закључци са нацртане слике тачни. Поставља се питање где је грешка?! Да је било тачног цртања, запазило би се да круг мора да прође кроз тачку F, а не кроз тачке D, E на крацима угла. У том случају тачке D, E се поклапају са тачком F, оба пречника са пречником CF, а оба средишта падају у једну тачку, у право средиште круга.

Дејић интерпретира Петровићеве закључке (Ibid). Први говори да је из нетачно нацртане слике правилним закључивањем добијен погрешан резултат. Из другог видимо да приликом цртања треба да водимо рачуна о прецизности, како се не би провукле озбиљне грешке. Добро цртање омогућава да се види нешто на шта се не обраћа пажња, као на пример пресецање правих линија или лукова у истој тачки.

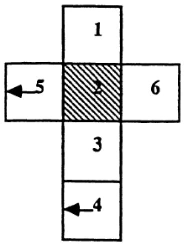
Размотримо неке Фишбајнове коментаре у вези са наведеним проблемима (Fischbein 1993: 156). Фишбајн разматра и могућност практиковања менталних акција ученика у којима сарадња између фигуре и појма захтева посебан подухват. У таквим активностима ученик мора да научи да ментално манипулише геометријским објектима, истовремено прибегавајући операцијама са фигурама и логичким условима и операцијама.

Таква врста активности се према Фишбајну састоји од захтева упућеног ученицима да:

1) *нацртају* слику која се добије размотавањем површи геометријског тела и добијањем мреже коцке (заправо доживљена или ментално представљена),
2) *препознају* геометријско тело које се може добитити замишљеним склапањем дводимензионе слике и

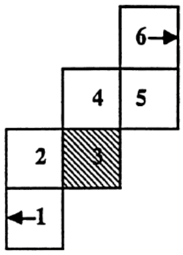
3) *кажу* које ивице коцке ће се спојити (слепити) када тродимензиони објекат буде реконструисан.

Неке од тих активности релативно су лаке, док су друге веома сложене. На пример, релативно је лако утврдити да слика 23. представља мрежу коцке. Симетрија слике је свакако корисна и склапање страна 1, 3, 4, 5, 6 ће се лако извести као ментална активност (са страном 2 која представља базу коцке). У овом случају, фигурална и појмовна компонента су природно добро интегрисане и сходно томе онај који манипулише, манипулише фигуралним појмом и његовим елементима. Спајање одговарајућих ивица такође није тежак задатак у случају суседних ивица (као на слици). Теже је то увидети (замислити) на обележеним ивицама (стране 4 и 5 обележене стрелицама) које се такође спајају при састављању коцке.



Слика 23. Један могући облик мреже коцке и замишљање спајања обележених ивица према Фишбајну

Још сложенији задатак био би да ученици препознају да слика 24. представља развијену мрежу коцке. Такође је веома тешко увидети да се обележене ивице (стране 1 и 6 обележене стрелицама) спајају при састављању коцке.



Слика 24. Још један могући облик мреже коцке и замишљање спајања обележених ивица према Фишбајну

При оваквим менталним активностима ученик не врши поунутарњење имитиране спољашње акције манипулације. То је ментална конструкција која захтева не само да се ’виде’ фигуре, већ да ученици промене своје становиште, да замисле своју измењену позицију, да замисле промену која се догађа када се споје суседне стране коцке. На пример, када се подигне квадрат 4, који постаје нормалан на квадрат 2 (са изабраном основом 3), а такође и 5 и 6. Квадрат 4 се усправља и 5 му је суседни итд. Узастопне трансформације би требало да се замисле и координишу све док се тело не састави (реконструкција коцке).

Фишбајн поставља питање доприноса фигуралних манипулација и логичких операција. Постојећа литература која се бави овим феноменом не даје одговор на ово фундаментално питање једноставно зато што се слике и појмови разматрају у основи као посебне категорије менталних активности. Када се истражују различите врсте менталних трансформација тродимензионих објеката (попут ротације или расклапања и склапања фигура), схвата се да се ученик бави таквим операцијама као да су оне чисто сликовне природе.

У ствари, није тако и не може да буде зато што се бавимо странама коцке (наведени пример), где су ивице једнаких дужина, где су све стране квадрати, где се бавимо правим угловима итд. Све ово је *прећутно* знање, које се подразумева при менталним операцијама. Без такве прећутне појмовне контроле цела операција постала би бесмислена.

Оно што Фишбајн тврди јесте да манипулација сликама и менталне логичке операције доприносе разумевању појма и представљају „одличну прилику за бављење фигуралним појмовима при геометријском резоновању“ (Ibid: 159). Такво би бављење према Фишбајну имало за циљ да побољша следеће способности:

1) конструктивну сарадњу фигуралних и појмовних аспеката у активностима геометријског решавања проблема;
2) координацију што више могућих фигурално-појмовних ставки;
3) организовање менталног процеса смисленим подјединицама како би смањили оптерећење меморије и

4) предвиђање и повезивање свих промена на путу ка решењу.

Уведени Фишбајнов термин *фигурални појам* треба да нагласи чињеницу да се ради о одређеној врсти менталног објеката који се не може редуковати, нити је то уобичејена слика, нити прави појам. Бавимо се *фигурама*, својствима која су потпуно одређена – директно или индиректно – дефиницијом у оквиру одређеног аксиоматског система. У Фишбајновом тумачењу, појмовна контрола, у идеалном случају, требало би да буде унутрашња и тако би слика и појам требало да се споје у јединствени ментални објекат. У математичком резоновању експлицитно користимо дефиниције и теореме, како би усмерили наше расуђивање или проверили наше претпоставке и закључке. Али, обично се *у процесу математичког открића* ученици труде, експериментишу, прибегавају аналогијама и индуктивном доказу, манипулишући не простим сликама или чистим, формалним аксиоматским ограничењима, већ *фигуралним појмовима, унутрашњим сликама које су контролисане помоћу појмова*. Фишбајн истиче да без фигуралних појмова процеси решавања проблема и открића у настави геометрије не могу се на задовољавајући начин описати и објаснити. Стога су они значајни за наш рад и идеју учења путем открића.

Фишбајн наглашава да је онај који учи у процесу открића у основи интуитивно подстакнут, а не аргументима експлицитних логичких ланаца. Сталним разматрањем аналитичких, формалних доказа теорема и дефиниција, проток продуктивних идеја бива поремећен, па чак и заустављен.

Многе грешке које ученици направе у геометријском резоновању могу се објаснити врстом расцепа (или недостатка подударности) између појмовног и фигуралног аспекта фигуралних појмова. Фигурална структура може доминирати динамиком резоновања уместо да буде под контролом одговарајућих формалних ограничења. Као последица овога, многи ученици не разумеју праву природу геометријског доказа и имају тенденцију да га допуне емпиријским проверама.

Слике и појмови утичу једни на друге у когнитивној активности (детета или одрасле особе), у неким ситуацијама сарађујући, а у другим конфронтирајући се. Али, развој фигуралних појмова уопштено говорећи према Фишбајну, није природан процес. Један од главних разлога зашто су геометријске теме тако тешке теме у школским програмима јесте што се фигурални појмови не развијају природно према својим идеалним облицима.

Стога Фишбајн истиче да је један од главних задатака математичког образовања (у домену геометрије којом се бавимо) стварање различитих типова дидактичких ситуација које би систематски тражиле строгу сарадњу два наведена аспекта, до њиховог спајања у јединствен ментални објекат. Већ су поменути неки типови активности: више нагласак на раздаљини и проблеми у којима се они користе и, супротно томе, проблеми у којима су схеме фигура природно склоне да не следе појмовна ограничења (што доводи до сукоба), или проблеми склапања и реконструкције у којима је сарадња логичких захтева и фигуралних представа веома отежана. Многе друге ситуације се могу разматрати, али још увек не постоји довољно експерименталних доказа који се односе на цео разматрани проблем.

Уопштено, епистемолошки закључивање је темељ математике и стога се сматра централним питањем у математици као дисциплини (Steen 1999: 270) и представља (структурну) подршку учењу у настави математике (Russelll 1999, према Diezmann et al. 2002: 289). Способност закључивања види се као основа за разумевање математике и као таква требало би да буде основни циљ математичког образовања кроз развијање идеја, истраживање феномена, доказивање решења коришћењем математичких претпоставки у свим областима, са различитим очекивањима софистицираности на различитим узрастима како би ученици увидели да математика има смисла (NCTM 2000[45]). Постоје различити ставови о томе када увести активности закључивања у наставу математике због узрасних ограничења тј. капацитета за закључивање којим располажу ученици млађег школског узраста (Piaget & Inhelder 1969[46]). Овом ставу супротстављају се Танг и Гинсбург наводећи да разлог образовног неуспеха не лежи у дечјој неспособности закључивања, већ скромном математичком презентовању (Tang and Ginsburg 1999, према Diezmann et al. 2002: 289). Ограничења се виде у: 1)

[45] Упућујемо на рад: National Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM.

[46] Piaget, J. & Inhelder, B. (1969): *The Psychology of the Child*, Routledge & Kegan Paul, London, UK.

ученичком знању – закључивање је изложено слабој основи знања ученика (Brown & Campione 1994, Metz 1997, према Diezmann et al. 2002: 289) и 2) компетенцијама (способностима) учитеља – ученичко закључивање може да буде кочено слабим компетенцијама учитеља (Brown & Campione 1994, према Diezmann et al. 2002: 289). Мец својим истраживањем потврђује да уколико ограничења ученичких знања и способности могу да буду разумно превазиђена, ученици ће бити у стању да апстрактно закључују (Metz 1997, према Diezmann et al. 2002: 289). Ова хипотеза поткрепљена је истраживањем Вотерса и Дизмана о дечјем закључивању у математици које укључује претпоставке, аргументације и вредновање поступка доказивања (Watters & Diezmann 1998, према Diezmann et al. 2002: 289). Тако учитељеве компетенције могу да буду главно ограничење ученичком закључивању, а истраживање је усмерено на понашање учитеља који подстиче и утиче на закључивање. Показује се да је оно у спрези са: 1) природом наставног задатка и 2) формираном атмосфером у одељењу (Diezmann et al. 2002: 289). Рецимо нешто о обе.

1) Подстицање кроз задатке – Учитељ игра главну улогу у развоју ученичког закључивања приликом избора и примене когнитивно подстицаних математичких задатака (Henningsen & Stein 1997, према Diezmann et al. 2002: 290). Хиберт и сарадници објашњавају да когнитивна вредност задатка лежи у чињеници да она ученицима обезбеђују основу за истраживање и решавање проблема (Hiebert et al. 1996, према Diezmann et al. 2002: 290). Учитељи треба да одрже когнитивно подстицање у задатку тако што ће подржавати ученичке когнитивне активности без непотребног редуковања сложености задатка (Henningsen & Stein 1997, према Diezmann et al. 2002: 290). Док одређени задаци обезбеђују мало или готово ограничавају закључивање, дотле су математичка истраживања која се јављају током решавања таквих задатака добар избор за когнитивно подстицање (Boldt & Levine 1999, Diezmann, Watters & English 2001, према Diezmann et al. 2002: 290). У задацима се јавља решавање тзв. проблема са отвореним питањима[47] у којима ученици формирају и проверавају претпоставке, логички мисле, трагају за образцима и релацијама и објашњавају другима своја гледишта и уверавају их у њихову тачност.

[47] Енг. solving open-ended problems.

2) Закључивање у учионици – Закључивање у учионици подстичу учитељи према формираним очекивањима, дискурсом који се изводи у учионици, приликама у којима се математика види као смислена кроз различите типове закључивања и више опште услове као што је подстицајна клима. Гравемејер и сарадници износе да је подстицајна она клима у којој ученици:

(1) објашњавају и доказују док учествују у дискусији целог одељења,
(2) пажљиво слушају друге ученике док исто то раде и
(3) указују када не разумеју објашњења других ученика и траже разјашњења (Gravemeijer, Cobb, Bowers and Whitenack 2000, према Diezmann et al. 2002: 290).

Наведена очекивања могу да подстакну ученике да учествују у раду и да разумевају математику. Такође се наглашава и значај продуктивног дискурса у оквиру ког ученици објашњавају своје идеје, настале на идејама других, и уопштавају их (Sherin, Mendez & Louis 2000, према Diezmann et al. 2002: 291). Математичка испитивања укључују истраживање специфичног правца мисли где ученици испитују постављене претпоставке и ангажују их при закључивању. Према Симону трансформација закључивања је динамички процес у оквиру ког се до закључака долази преко физичког експеримента или путем мисли (Simon 1996, према Diezmann et al. 2002: 291). Истраживања такође стварају прилике за индуктивна и дедуктивна закључивања при којима ученици уопштавају идеје као последице ексеримента или објашњавају свој ток мисли који их води до посебних закључака. Док је исправно закључивање ултимативни циљ, пример слабог закључивања је неизбежан у учионици где су ученици почетници у закључивању. Расел расправља о слабом закључивању које има двојну улогу у учионици (Russell 1999, према Diezmann et al. 2002: 291). Прво, ученици увежбавају различите компоненте закључивања (на пример формирање претпоставки). Такође су потребне и прилике у којима би ученици доказивали и критиковали своја и туђа закључивања и одговарали на изазове тог закључивања. Друго, слаба закључивања могу да нагласе математичке исходе који су релевантни за цело одељење, и којима би се требало посветити. Резулати до којих Дизман са сарадницима долази односе се на анализу понашања учитеља и откривају нам три могуће врсте интеракција које би могле да утичу на ученичко закључивање:

1. Обезбеђујући моделовање и благовремену интервенцију учитељи развијају перцепцију да закључивање укључује акције доказивања.
2. На овим перцепцијама учитељ подстиче ученике при ангажовању системског мишљења користећи се језиком, стратегијама повезаним са закључивањем.
3. Учитељи користе ситуације и разговор за стварање прилика за закључивањем (Diezmann et al. 2002: 292).

Укратко изнесимо резултате до којих Дизман и сарадници долазе:

1. Акције у почетној настави требало би да су по својој природи акције закључивања.
2. Потреба је да закључивање у почетној настави буде системско мишљење.
3. Јавља се потреба за формирањем аутентичних прилика за закључивањем.

Опишимо сваку од њих.

1. Акције закључивања и одговори

Учитељи развијају очекивања о математици која је смислена за ученике током формирања образаца којим ће се водити дискурс и смислено моделовање. Све ово укључује постављање питања у поступку доказивања, подстицање на коришћење речи ‘зато што’ када ученици размењују идеје са другим ученицима, мобилисање ученика да објасне нејасне или некомплетне одговоре, преформулисање нејасних ученичких речи у оне јасне, експлицитно повезивање идеја које потичу од различитих ученика, привлачење ученичке пажње на важне аспекте задатака, савладавање вођених корака при изради задатака који подстичу, и доказивање сопствених акција – уколико то мишљење дозвољава.

2. Закључивање као системско мишљење

Уопштено, ученицима је непозната култура закључивања. Учитељи би могли да је постигну развијајући праксу закључивања развојем релевантног речника, подржавајући формирање и проверавање претпоставки, фокусирање пажње ученика на доступне доказе, промовисање логичког мишљења, подстицање ученика у изношењу идеја у ланцу закључивања, истицање значаја аргументације као средства за евалуацију алтернативних закључака. Истиче се значај дискурса у развоју ученичког разумевања закључивања као системског мишљења. Учитељева интеракција и употреба математичког језика може да подстакне ученике да мисле о неочекиваним решењима. Или, учитељи могу погрешно да тумаче учеников лошу употребу свакодневног језика, што га може ограничавати за развој језика у којем је резоновање системско мишљење.

3. Аутентичне прилике за закључивањем

Употреба суштински занимљивих ситуација може да повећа мотивацију ученика млађег школског узраста и тиме створи посвећеност резоновању. Учитељ у том смислу може да подстиче или ограничи прилике у којима ученици закључују.

Овим се отварају нова поља за свеобухватни приступ учитељевом понашању који подстиче или кочи закључивање. Да би математичко закључивање постало ‘навика ума’ од најранијих дана формалног образовања деце, требало би обезбедити и током студија будућих учитеља и током професионалног обављања посла стицање одговарајућих (педагошких) знања (Ibid), а ми ћемо додати свакако и математичких и методичких.

8.5. Учење откривањем

Бројни истраживачи и у све већем броју се баве овим питањем. Тако се говори о измењеној улози учитеља, издвајању и дизајнирању проблема, сараднички рад и учење, проблематизација курикулума итд. (Cai 2003: 2). Цаи поставља четири важна питања у вези са учењем путем решавања проблема: 1) да ли су ученици овог узраста заиста способни да истражују проблеме и дођу до разумних решења, 2) како учитељ учи и бива оспособљен за рад, 3) каква су уверења ученика о оваквом учењу и 4) да ли оно иде на уштрб основних вештина које ученик треба да развије у настави математике.

Подучавање и учење путем решавања проблема започиње проблемом. Ученик учи и разумева битне аспекте математичког појма или идеје истражујући проблемску ситуацију. Одабрани проблеми имају отворени карактер који води кроз више приступа у решавању и ка више тачних одговора. Одабрани проблеми не формирају само организовани фокус и стимулус за учење, већ служе и као средство за математичка истраживања. Ученици имају веома активну улогу – истражују проблемску ситуацију вођени од стране учитеља и 'откривају' своје сопствене стратегије и решења. Заправо, ученичко истраживање проблема је кључна компонента у подучавању путем решавања проблема. Али, смислено јесте поставити питање (прво од четири наведена) која Цаи наводи да ли су ученици овог узраста заиста способни да истражују проблеме. Истражимо општије основе наведеног проблема.

8.5.1. Нови приступ учењу откривањем

Фројдентал је говорио о математизацији као кључном процесу математичког образовања и то из два разлога (Freudenthal 1991, према Fauzan 2002: 35). Као прво, математизација није основна активност само математичара, већ је блиска и ученицима у математичком приступу решавања свакодневних проблемских ситуација. На пример, у математичкој активности решавања контекстуално заснованих проблема долази се до математичког става, обухватајући могућности и границе математичког приступа, као и избор његове прикладности. Као друго, крајњи стадијум у математици јесте формализација путем аксиоматизације. Ова крајња тачка не би требало да буде почетна тачка када подучавамо математику. Фројдентал каже да почети са аксиомима представља антидидактичку инверзију, јер процес у коме математичари долазе до закључака супротан је. Он сугерише да математичко образовање буде организовано као процес *вођеног (поновног) открића* у оквиру ког ученици могу да искусе сличан процес оном у коме су математичари откривали математичке идеје. Позабавимо се конкретним објашњењима наведеног проблема.

Бавити се унапређењем наставног процеса у области наставе математике према Фројденталу значи, између осталог, запитати се „како подстицати размишљања о нечијим сопственим физичким, менталним и математичким активностима“ (Freudenthal 1983, према Мићић 2005: 13). Бројне су препоруке за извођење наставе и начина учења, а кад год се врши нека класификација начина учења и обучавања у области наставе математике све више су изражени као „учење и обучавање са разумевањем“ (Hiebert and Carpenter 1992, према Мићић 2005: 13).

У педагошко-психолошкој литератури у оквиру когнитивних модела као веома успешан начин за учење нових појмова у настави математике и другим предметима наводи се *учење откривањем*[48] (Resnick and Food 1981, Woolfolk 1995, према Мићић 2005: 13). Мићић полемише о наведеном приступу и бави се анализом нешто модификованог начина учења, у литератури познатог као *вођено учење откривањем*. За објашњење овог учења ослањамо се на рад веома утицајног Брунера (Bruner 1966, према Мићић 2005: 13). Реч је о начину учења у којем ученици самосталним активностима откривају основна правила и принципе. Брунер сматра да је учитељ (наставник) тај који треба да креира проблемску ситуацију која ће подстицати ученике у процесу учења да питају, истражују, експериментишу и тим путем дођу до открића. Његова модификација изражена је начином у ком учитељ (наставник) даје упутства, интервенише у поступку учења. Мићић наглашава да је и сам Брунер сматрао да овакав начин учења није увек подесан, јер је нерационалан и непрактичан. Разраду ових дефиниција Мићић проналази у раду Ресника и Форда у следећим облицима:

1. Учење откривањем је стратегија учења у оквиру које се ученицима обезбеђују и чине доступним сви релевантни материјали или предзнања у вези са новим појмом или проблемом и затим се они пусте да ‘лутају’ и тестирају идеје док самостално не открију (жељена или очекивана) правила или односе.
2. Вођено учење откривањем је стратегија учења у оквиру које наставник води ученике кроз све кораке или услове који воде до закључка, али их оставља да самостално дођу до актуелног (жељеног или очекиваног) правила (Resnick and Food 1981, према Мићић 2005: 14).

[48] Педагошки рад на ову тему на који се такође може полемисати је: Кркљуш, С. (1977): *Учење у настави откривањем* – откривајуће вођење у настави математике, Педагошка мисао и пракса, Нови Сад.

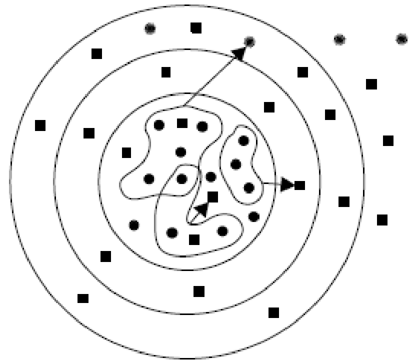
Наводи се да су ови начини учења корисни и ефикасни са усвојеним појмовима и стеченим знањем који имају карактер „солидно утемељених и трајно употребљивих активних компонената менталног склопа ученика“ (Мићић 2005: 14). Наводе се и њихови недостаци у виду могућих промашаја ученика, опширне припреме учитеља (наставника) за овакав начин раду у настави, значајан број ученика који због својих просечних способности неће стићи до циља (што може да делује обесхрабрујуће) итд. Све ово захтева пажљиво осмишљавање садржаја и услова који погодују примени наведеног начина рада.

Мићић наводи и да сам назив ‘откриће’ није у потпуности схваћен у настави математике, а нешто слично видећемо у наредном поглављу у полемици финског академика и математичара О. Мартија. У свакодневном говору та реч има ‘темељно искристалисано значење’ и Мићић се противи називању открићем сваког правила или својства до којег ученик, доведен од стране учитеља (наставника) у одговарајуће стање упитаности о томе, дође самостално или уз помоћ учитеља (наставника). Наставна пракса често показује да у области наставе математике ученици (па и учитељи или наставници) нису склони таквом придавању важности чињеницама до којих су дошли. На пример, ученици петог разреда користећи се претходним знањима о својству замене места сабирака у скупу природних бројева (комутативност операције сабирања у скупу природних бројева), дељењу збира, проширивању разломака и сабирању разломака, без тешкоћа показују да важи и својство комутативности операције сабирања у скупу позитивних разломака. Не можемо рећи да се овде ради о открићу. Ученик само потврђује да је тачно нешто што је и очекивао и реч је о само једном од корака у изградњи структуре позитивних разломака. Ово није откриће и учење у току којег је ученик у свој ментални свет трајно или за дуже време ‘ускладиштио’ правило (Ibid). Наведено учење ‘сабирање је комутативно у Q+’ није оправдано звати учење откривањем, иако Мићић наводи да се цео поступак може подвести под раније наведену дефиницију таквог учења.

Открића у природним наукама и математици су нпр. проналазак точка, Њутнова јабука, несамерљивост дијагонале и странице квадрата, нееуклидска геометрија Лобачевског итд. Сва ова открића, и то значајна, у развоју цивилизације представљају ‘камене међаше’ у односним областима и резултирају значајним помацима и процватима наука, дајући импулсе даљем развоју. Резултат су често дуготрајних, напорних трагања, понекад изненађења, „резултат дубоког разумевања појава и процеса који настају захваљујући обдареном појединцу, са заједничким својством праћеним емоцијама задовољства због открића“ (Ibid: 15).

А шта је онда откриће? Када говоримо о открићима у настави математике, Мићић предлаже да са као **откриће** прихвати „сазнање уз које се може ‘придружити’ нека од наведених карактеристика правих открића“ (Ibid). То би требало да су чињенице које, бар локално у оквиру математичке дисциплине, прихватамо „као међаше, важне истине, које имају значајне последице у даљем развоју те дисциплине или у дубљем сазнавању света, како света реалних објеката, тако и света апстрактних математичких објеката“ (Ibid). Да би имали јасно успостављен договор шта су међаши, важне истине, значајне последице, дубље сазнавање и сл. Мићић предлаже договор око неких елемената поменутог просуђивања када су у питању садржаји из одређеног наставног плана и програма математике.

На слици 25. коју Мићић предлаже, кружним линијама ограничени су садржаји узастопних разреда, кружићима су означене познате чињенице, а квадратићима и звездицама нове чињенице до којих ученик, који се налази у разреду означеним најмањим кругом, долази у процесу учења самостално или уз помоћ учитеља (наставника). Квадратићи представљају оне од таквих чињеница којима се не може придружити неки од раније поменутих атрибута како Мићић наводи, док су звездицама означене оне од њих којима то можемо.



Слика 25. Модел према Мићићу (Мићић 2005)

Са слике 25. види се да је звездица мало и смештене су у посматраном моделу ‘далеко’ од места (разреда) на којем се ученик налази. Сам појам ‘далеко’ тражи да се успостави договор да ли је реч о следећем разреду или још даље, и зашто се уопште определити за такво разликовање. Мићић слику и њено тумачење наводи са општим карактером која се односи не само на наставу математике.

Кроз пример обима троугла (присутан према нашем наставном плану и програму у трећем разреду основне школе) објашњава се наведени модел.

Задатак: „Дат је троугао чије су дужине страница мерених центриметрима 3, 5 и 6 (дакле 3 cm, 5 cm и 6 cm). Наћи обим троугла.“

Ученици знају да треба да саберу мерне бројеве 3, 5 и 6 и да нађени збир именују центриметрима. Наћи ће збир 14 и обим O = (3 + 5 + 5) cm = 14 cm.

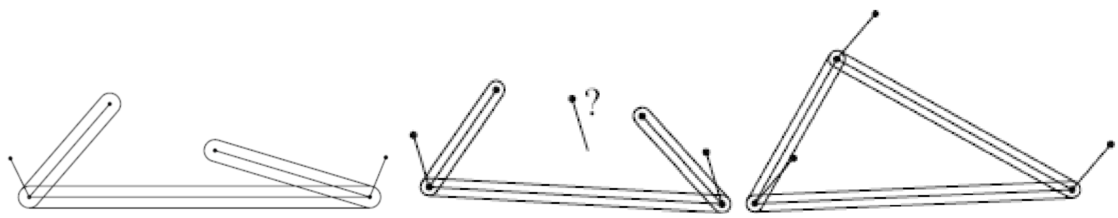
Мићић износи малу модификацију овог задатка коју Милинковић предлаже, чиме ће ученици бити доведени у сасвим другу ситуацију (Милинковић 1998, према Мићић 2005: 16).

Модификација задатка: „Дужине страница троугла, мерене центриметрима, изражавају се природним бројевима, а његов обим је једнак 14cm. Нађи бар два таква неподударна троугла.“

Ученицима је познат појам обима и закључиће да број 14 треба да представе као збир три природна броја. Затим ће конструисати троугао, ако је то могуће, чији ће мерни бројеви страница бити управо ти бројеви. Активност учитеља (наставника) своди се на општији задатак проналажења свих таквих троуглова и међу њима уочавања неподударних, односно подударних. Прво се користи метод набрајања, где се број 14 записује у облику збира три природна броја. Ми овде нећемо наводити цео поступак, већ се само позвати на рад и уопштити га. Од 78 наведених ‘разбијања’ (број комбинација друге класе од 13 елемената тј. $\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$) долази се до оних од којих се може конструисати троугао, узимајући у обзир да су мерни бројеви дужина страница природни бројеви, да дужина најдуже странице мора да буде мања од 7 cm (најдужа страница троугла мора да буде мања од половине обима тог троугла) и да је збир дужина било које две странице троугла већи од дужине треће странице. На основу овога долази се до 15 ‘разбијања’ и њима одговарајућих 15 уређених тројки (a, b, c) који ће одређивати троугао ABC, чије су дужине страница a cm, b cm и c cm. Тиме се добијају три класе једнакокраких троуглова (подударни и једнако оријентисани) и једна класа троуглова чије никоје две странице нису једнаких дужина. То су:

а)	(2, 6, 6)	(4, 4, 6)	(4, 5, 5)	и	б)(3, 5, 6)
	(6, 2, 6)	(4, 6, 4)	(5, 4, 5)		(3, 6, 5)
	(6, 6, 2)	(6, 4, 4)	(5, 5, 4)		(5, 3, 6)
					(5, 6, 3)
					(6, 3, 5)
					(6, 5, 3).

Мићић предлаже да се сада вратимо у одељење, нпр. 3. разреда основне школе (почетна настава) и то са ’мрдалицом’ као погодним дидактичким средством (слика 15.). Она је направљена од картона, једноставна као модел, са довољним бројем ‘дужи’ дужина 1 dm, 2 dm, 3 dm, … 12 dm (познато је да у настави често користимо дужине мерене дециметрима које замењују оне мерене центиметрима). Помоћу чиода и картонских ‘дужи’ спајају се модели троугла како то слика 26. показује.



Слика 26. Мићићеве ‘мрдалице’ као погодно наставно средство за учење путем (поновног) открића

Ученици би манипулисали оваквим ‘дужима’, спајали их и правили моделе троуглова. У таквом поступку ученици би долазили до следећег:

- постоје тројке ‘дужи’ од којих може да се формира ‘троугао’, нпр. тројке (2, 3, 4), (3, 5, 7), (5, 3, 6) итд.;

- постоје тројке ‘дужи’ од којих се не могу формирати ‘троуглови’, нпр. (1, 2, 5), (2, 8, 4) итд.

Мићић скреће пажњу да се оваквим експериментима „визуелно опажање употпуњава опажањем додиром и тиме доприноси дубљем разумевању и трајном усвајању уочених и додиром регистрованих чињеница“ (Ibid: 19). У овом смислу можемо говорити да се иде према открићима. Појавиће се ту нека од тројки (3, 5, 6) (или нека њена пермутација), бар нека од тројки (2, 6, 6), (4, 4, 6) или (4, 5, 5) (или нека од њихових цикличних пермутација). Неки од обдарених ученика упустиће се и у уопштавања и у креираном контексту (што представља допринос учитеља тј. наставника) ‘откриће’ нека важна правила и важне односе који се тичу посматраних (а и других наводи Мићић) математичких објеката. Наводе се и потенцијалне чињенице које се могу ‘открити’ (али и друге):

1. Дужина било које странице троугла мања је од половине његовог обима.
2. У датом задатку ниједна страница троугла није дужа од 6 cm.
3. Дужина сваке странице троугла је мања од збира дужина остале две странице тог троугла.

Мићић напомиње да је ово познати став и да је део наставног програма математике за шести разред, а на описани начин ће већ неки ученици трећег разреда успети да га наслуте. Ученици који на описани (или неки сличан) начин обогате свој ментални свет оваквим сазнањима, осетиће задовољство, баш онако како се дешава при открићима у науци. Знамо да је неједнакост троугла до које ученици долазе у описаном ‘учењу откривањем’ један од ‘локалних међаша’ у планиметрији.

8.5.2. Употреба манипулативног материјала и подстицање на манипулативно у уџбеницима математике

Рецимо прво нешто о геометријским репрезентацијама које представљају различите конкретизације математичког појма или структуре. Одговарајуће репрезентације омогућавају деци која уче геометрију правећи на тај начин екстерни запис, размишљајући о појави или региструјући процес решавања проблема (Милинковић и Мићић 2008: 39). Према Брунеру, постоје три начина на који људи представљају свет: 1) *акционо* (деловањем), 2) *иконички* (сликовно) и 3) *симболички* (Ibid). Акционо деловање подразумева инструменталну структуру са циљем и средствима. Реч је о планском сазнању, а не о случајним радњама које доводе до сазнања, и физичкој акцији са циљем решавања проблема. Прелаз од акционе ка симболичкој репрезентацији представљен је иконичком репрезентацијом / сликом. Она замењују објекат који се представља релативно верном али и селективном представом. Симболичка репрезентација подразумева апстрактне форме коришћења знакова који сами по себи не одсликавају више ‘директно’ објекат или појаву коју представљају и представља удаљавање од конкретног и арбитрарност. Реч не указује директно на означено нити визуелно подсећа на оно што означава. Може се уочити да су прва два вида репрезентације примарне сазнајне функције које су се директно развиле као реакција на еволуцијске захтеве, и у највећој мери су универзалне (Милинковић 2007b: 85). С друге стране, симболичке представе у великој мери јесу последица ‘културне компетенције’ и захтевају свестан напор за савлађивањем. Овај вид компетенције стиче се у највећој мери кроз школовање и друге видове усвајања културе. Настава геометрије у основној школи примарно је ослоњена на иконичке представе, акционе репрезентације се користе у ограниченом обиму, а симболички језик геометрије превасходно се учи и користи у даљим фазама школовања (Милинковић и Мићић 2008: 39).

Бавимо се фигуром у смислу најопштијег објекта геометрије (у 2D или 3D) која може да буде представљена на више начина (Романо 2009b: 4). Разликујемо главне групе репрезентација: 1) *материјалне* (фигуре изграђене од папира, пластелина, дрвета, картона), 2) *нацртне* (користи се папир и оловка, компјутерски софтвер) и 3) *дискурзивне* (репрезентације логичког закључивања које описују фигуре користећи и природни и формални језик математике). Свака од њих има своју интерну функцију, са мање или више експлицитним правилима, а ученици се пребацују из једног регистра у други (експлицитно или имлицитно, назад или напред). Нас ће овде занимати појам репрезентације у смислу когнитивних процеса и регистара семиотичких репрезентација по Дувалу (Duval

1995, према Романо 2009b: 4). Под семиотичком[49] репрезентацијом Дувал подразумева производ са обележјима која припадају систему репрезентација у оквиру којих постоје властита ограничења разумевања и функционисања. Реч је о репрезентацијама које су неопходне у математичким активностима, будући да се математички објекти не могу директно уочавати и, према томе, морају се представљати. Романо наглашава Дувалово тврђење да семиотичке репрезентације нису само испољавање менталних репрезентација у комуникацији, већ садрже и суштинска својства за когнитивне активности мишљења. У когнитивне активности спадају три типа активности: 1) формирање репрезентација (садржај датих регистара), 2) процесуирање и трансформација (унутар регистара у којима су креиране) и 3) конверзија (трансформација семиотичких репрезентација из једног регистра у други) (Ibid). Прве две активности укључене су у наставу математике, док се трећа углавном занемарује, а посебно је важна њена улога за описивање тако потребних прелаза у координацији регистара. Дувал је показао да многе ученичке потешкоће леже у њиховој неспособности да изведу конверзију између регистара семиотичких репрезентација што је суштински услов за поимање и промишљање.

Подсетимо се Дуваловог проучавања и разумевања фигура са следећим типовима: 1) перцептивно, 2) неинтуитивно, 3) секвенцијално (серијско) и 4) оперативно (Duval 1994, према Романо 2009b: 5). Перцептивно разумевање је најдиректније и оно допушта да се форме објеката одмах препознају према гешталтистичкој организацији закона. Неинтуитивно разумевање је у потпуности једноставно. Фигуре се виде кроз вербалан опис (јасно се описује нека особина нпр. нека је ABC троугао са правим углом код темена A итд.). Секвенцијално размишљање усклађује кораке и њихов поредак према томе која фигура треба да буде конструисана, ослањајући се на особине фигура и типове употребљених инструмената. Оперативно разумевање је најсложеније. Дувал, као и Пољa, предлаже двојно приказивање ‘идеја’ за решење проблема (Polya 1945, према

[49] Семиотика или семиологија грч. наука о уређеном систему знакова и симбола. Нас занима симболичка функција као специфична људска способност која помоћу симболичких средстава представља нешто друго што је различито од њих самих, што није непосредно/директно објекат или појава коју представљају. Симболичка репрезентација представља основну функцију свести. Реч је о општој способности стицања и кориштења знакова, семиотичких система и извођења семиотичких операција. (*Речник српскога језика* (2007): Матица српска, Нови Сад.)

Романо 2009b: 5). Упориште проналазе у могућности модификације фигура (различити делови могу се преуредити као слагалице, мењајући им величину, премештајући их у нове позиције).

Врло су различите улоге путем наведених разумевања фигура у учењу геометрије. Дидактичко-методичке потешкоће Дувал види у сва четири модела размишљања, посебно у задња три. Модели остају поприлично независни, а могућност њиховог премештања је ограничена. Разматрање питања о регистрима налазимо у многим радовима. Тако Бако и Кохен свој допринос дају у разматрањима о просторној репрезентацији, указујући на низ потешкоћа код ученика у разумевању визуелизације међусобног односа тачака, правих и равни. Њихов битан удео у разумевању геометријског мишљења је у представљању просторних објеката (Bako 2003, Cohen 2003, према Романо 2009b: 6).

Размотримо улогу акција у настави геометрије. Ментална акција се сматра значајном у учењу геометрије у свакој од теоријских основа. Ослањамо се на рад Пијажеа и Инхелдер који су тврдили да дечје репрезентације простора нису опажајно читање просторног окружења, већ резултат првобитног активног манипулисања тим окружењем. Други ниво у учењу по ван Хилеу заузима ученичко манипулисање објектима.

8.5.2.1. Манипулативни материјал као покретач у изграђивању геометријског знања

Већина студија верификује употребу манипулативног као покретаче у процесу конструкције знања и као једну могућу репрезентацију геометријског појма. Гребел показује да изложеност великој варијацији стимулуса позитивно утиче на постигнућа ученика у настави геометрије (Greabell 1978, према Clements & Battista 1992: 449). Герхард, као и Приџ, показују да тактилно-кинестетичко искуство као покретање тела и манипулисање геометријским телима помаже деци, посебно млађој, да овладавају геометријским појмовима (Gerhardt 1973, Prigge 1978, према Clements & Battista 1992: 449). Стивенсон и Мекби износе став да деца боље напредују у акцијама манипулисања телима (нпр. засецање) него учећи према штампаним материјалима, јер се на овај начин подстиче знатно више чула у процесу откривања и сазнавања (Stevenson & McBee 1958, према Clements & Battista 1992: 449).

Постоји емпиријска подршка у истраживањима Фајса о манипилисању као основном циљ у учењу геометрије, чак и за старије ученике, посебно оне на нижем степену ван Хилеове хијерархије (Fuys et al. 1988, према Clements & Battista 1992: 449). Изгледа да коришћење објеката за манипулисање обезбеђује ученицима да провере своје идеје, испитају их и размишљају о њима, те их модификују. Овај физички приступ наглашава ученичка интересовања, помаже им у уопштавањима и успостављању нових хипотеза и води формирању нових односа. Тако истраживање Леша и Џонсона показује да ученици четвртог разреда показују боље резултате када користе конкретне моделе у организованој настави геометрије у односу на апликације са компјутером, док ученици седмог разреда показују подједнак успех (млађи ученици су мање способни да описују релевантне односе) (Lesh & Johnson 1976, према Clements & Battista 1992: 449). Значајно за наш рад могло би да буде истраживање Дрискола, и нешто касније изведено истраживање Совела, о добробити манипулисања објектима које се 'чува' у једном разреду и у теми, дајући јој 'смисао' (Driscoll 1983, Sowell 1989, према Clements & Battista 1992: 449). Међутим, нека истраживања Фајса, па и Штиглера, показују да уџбеници у САД-у не тако често сугеришу употребу манипулативног материјала у геометрији, а када се то и чини она не наглашава да подстиче више нивое мишљења (Fuys et al. 1988, Stigler et al. 1990, према Clements & Battista 1992: 449). Насупрот томе, Штиглер показује да инструкције и материјали у уџбеницима у Јапану наглашавају већу употребу манипулативних материјала. Слично је открио и Мичелмор испитујући просторну способност ученика и тродимензионално цртање (Mitchelmore 1980, према Clements & Battista 1992: 449). Показало се да су ученици у Великој Британији у просеку три године изнад ученика у САД-у, а разлике се приписују различитим приступима у подучавању. Британски учитељи више негују неформални приступ настави геометрије и више користе манипулативне материјале на елементарном нивоу, као и више дијаграма на вишем нивоу. Свакако да је ово одређено и курикулумом у коме се наглашава употреба модела из простора. Дрискол показује да већина учитеља на узрасту од предшколског до предметне наставе користе манипулативне материјале мање од једанпут седмично или готово никако. Истраживање Совела показује да их је значајно користити током целе школске године, а не у кратком временском периоду, јер резултују значајним разликама у обликовању ширих размера. Употреба манипулативних материјала према Рафаелу и Вахлстрому није довољна и не може се говорити да је то гарант учењу са разумевањем (Raphael & Wahlstrom 1989, према Clements & Battista 1992: 449). Ученици морају да буду вођени у процесу учења при употреби манипулативног материјала, одређујући манипулативни модел према њиховим неформалним појмовима.

Климентс и Батиста нас стављају у позицију упитаности „ако је манипулативно значајно, шта је са сликама?“ (Clements & Battista 1992: 449). Слике су, такође, значајне за наставу геометрије, чак и за децу од пет и шест година, не и за млађу. Оне врло брзо могу да створе интуитивну представу извесног геометријског појма. Али, оне морају да буду вариране тако да ученици не буду вођени формирању погрешних појмова. Истраживачи наглашавају да је ретко да слике буду супериорније у односу на манипулативне материјале. Заправо, Совел показује да слике у неким ситуацијама не могу да створе ефектност у захтевима са симболима. Разлог не мора да лежи у ‘неконкретном’ колико у ‘неманипулишућем’.

Стога се наглашава значајност визуелног искуства и манипулација за разумевање геометријских садржаја и буђење интересовања у процесу учења. На ово указују многобројна истраживања у раду Клементса и Батисте (Clements & Batistta 1992). У настави геометрије у основној школи посебну улогу имају дидактичка средства која омогућавају различите репрезентације геометријских појмова.

У настави геометрије присутни су тродимензионални модели геометријских објеката и слике. Упознавање геометријских облика заснива се на чулном сазнању, и то визуелним опажајем и додиром у оквиру елементарне геометрије која је у основи интуитивна и базирана на већ упознатим објектима из околине у оквиру које се траже објекти из реалног окружења који могу да престављају моделе идеалних геометријских објеката. Али, традиционални приступ геометријским садржајима у основној школи подразумева „проучавање геометријских облика представљених цртежима геометријских фигура и (дрвеним, пластичним, картонским или металним) моделима геометријских тела, којима се умањује могућност шума“ (Милинковић и Мићић 2008: 40). Понекад се у почетку сликовним представама геометријских објеката на папиру у потпуности не успева створити јасна представа о елементима и односу елемената на објекту (Servais 1971, према Милинковић и Мићић 2008: 40). Стога је оправдано подстицање учитеља да користе манипулативна средства. Истраживања наведена у раду Клементса и Батисте указују да коришћење манипулативних дидактичких средстава има посебно позитиван утицај на сазнање. Код нас у раду Дејића и Егерић истиче се да мануелна[50] дидактичка средства представљају спољашње подстицаје развоја математичког мишљења и закључивања код ученика (Дејић и Егерић 2008: 399). Милинковић и Мићић истичу да се у нашим уџбеницима ипак ретко срећу примери у којима аутори предлажу активности са манипулативним дидактичким средствима. Тако је активност прављења модела квадра (коцке) коришћењем понуђене мреже једна је од чешће коришћених. Понегде се сусрећу предлози игара (са шибицама, где се ученици подстичу да анализирају задату слику и направе нову према датим условима или древна кинеска игра „танграм“, где ученици према датом моделу, користећи понуђене геометријске фигуре, формирају задати облик), али у њима нема нових открића тј. учење које се дешава није учење путем открића. Приказали смо могућност коришћења дидактичког материјала у виду мрдалица, једноставног али ефектног наставног средства где се може говорити о учењу путем открића (Мићић 2005: 18).

За наш рад од значаја су истраживања употребе дидактичког материјала у настави геометрије. У модерној математици 70-тих година 20. века доминантна је била улога Дајенсове парадигме о процесу учења апстрактних математичких појмова и структура на дечјем узрасту (Dienes 1970, према Романо 2009b: 7). Учење математике обједињено је у четири принципа (динамички, перцептивно-варијабилни, математички варијабилни и конструктивни) и шест етапа (слободно играње, играње по правилима, упоређивање, презентовање, симболизација, формализација). Према Дајенсу деца уче математику играјући се структуиране

[50] Исто значење као и манипулативна у овом контексту.

игре и користећи манипулативне алате као фундаменталне делове у прва два принципа и прве три етапе. Ван Хилови нивои разумевања геометрије наглашавају важност коришћења инструмената, у складу са моделом и с обзиром на дечје закључивање на првом, другом и трећем нивоу које захтева физичке објекте, инструменте или слике које им помажу да реше задатак и организују своје размишљање (van Hiele 1986, према Романо 2009b: 7). Романо дискутује о овом питању и у Кузниак-Худаментовој нотацији. Реч је о три парадигме разумевања геометрије као основама развоја геометријског мишљења кроз: 1) природну геометрију – деца уочавају геометријске објекте као физичке идентитете, па стога уче геометрију само у интеракцији са реалним објектима, сликама итд., 2) природно-аксиоматску – деца су способна да истражују и уопштавају особине помоћу индуктивног закључивања на основу опажаја на више примера, користећи инструменте и слике као основу за ток мишљења и 3) формално-аксиоматску геометрију – у оквиру које почиње да се ствара апстрактно дедуктивно закључивање, али уз конкретне репрезентације (компјутерско предочавање, слике, физички објекти) уз које је могуће организовати дедуктивне аргументе (Houdement and Kuzniak 2003, према Романо 2009b: 7). Подсетимо се да Дувал у свом раду говори о учењу и подучавању у геометрији која укључује три врсте когнитивних процеса са специфичним епистемолошким функцијама (Duval 1998: 38-39). Реч је о процесима:

1) *визуелизације* која се односи на *просторну репрезентацију* – подразумева репрезентације у дво- и тро- димензионалном простору;
2) *конструкције* помоћу алата – *модел* такав да се акције представљених и посматраних резултата односе на математичке објекте које оне представљају; геометријске структуре репрезентују се помоћу конструкција модела и
3) *резоновања* у смислу *дискурзивног процеса* – закључивање до кога ученици долазе засновано је на организованом опису или аргументованој расправи.

Ученици морају да манипулишу инструментима у прва два процеса, исцртавајући слике на папиру или помоћу компјутера. Али, када се говори о трећем процесу тј.

о типовима закључивања, они не морају у потпуности да буду апстрактни, јер ученици могу да доносе закључке на основу инструмената помоћу којих се ствара основа за закључивање.

А шта би требало да знају учитељи и наставници – предавачи геометрије? Бројна истраживања наведена у раду Клементса и Батисте, те Мићић и Милинковић, као и Романово, наводе да је коришћење дидактичких манипулативних средстава важан сегмент за наставу геометрије. Важан део обуке учитеља лежи у учење веза између апстрактних геометријских појмова и њихових конкретних репрезентација које ће ученике подстицати на откривање геометријских модела у свакодневном животу.

III МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

УВОД У ИСТРАЖИВАЊЕ

Наш мотив и идеја за наставни приступ реално окружење своје упориште проналазе у теорији реалистичног математичког образовања чија је практична имплементација иновативни модел уџбеника. Исходи процеса учења по реалистичном математичком образовању имају два аспекта. Реч је о:

1. **Когнитивним** – укључују ученичка *постигућа* и *резоновање* (расуђивање) и
2. **Афективним** – укључују ученичку *мотивацију* и *активацију*.

Наше истраживање усмерено је на постигнућа ученика (по нивоима знања). Реч је о ученицима који уче по уџбенику математике у ком су математички задаци уклопљени у контекст који обезбеђује повезаност са реалним окружењем. Реч је о математичким **задацима** у којима су заступљени:

1. **Чињенице и информације**:
   а. препознавање и репродукција знања;
   б. разумевање.
2. **Примена** наученог:
   а. у математичком контексту;
   б. у реалном контексту:
      1. семи-реалном;
      2. чисто реалном (прави проблемски задаци).

Стога је наше опредељење истраживање ефеката примене реалистичног математичког образовања на ученичка постигнућа и мотивацију, и то у области почетне наставе геометрије. Следећи претпоставке Фројденталове дидактичке феноменологије определили смо се за подучавање које започиње контекстуалним проблемима. Полазимо од феномена који су блиски ученицима. Процес даље настављамо поступком (поновног) откривања математичких идеја и процесима прогресивне математизације, под вођством учитеља, где ученици овладавају геометријским способностима.

Постоји неколико битних разлога који потврђују овај избор. На пример мотивација ученика за учење геометрије, потреба да се успостави веза између школског и свакодневног учења, концептуализација геометрије као „језика којим се описује и објашњава реалност" и као „структура која организује реалност" (Bartolini & Boero 1998: 52).

Наше истраживање усмерено је на откривање пута шта води ученике до појмова са значењем од, са једне стране, визуелних представа до, са друге стране, просторног резоновања, наглашавајући повезаност визуелног и вербалног процеса као суптилно уобличавање резоновања. Многи истраживачи сматрају да би ово могло да помогне у изграђивању и елаборирању постојеће интуиције о простору, развијајући безусловно и геометријску интуицију (Clements and Battista 1992).

Са социо-конструктивистичким погледом, истраживање се бави развојем геометријских појмова и геометријског мишљења у реалном окружењу ослањајући се на истраживачки рад Клементса и Батисте (Ibid). Испитујемо развој ученичких знања у окружењу које је другачије од уобичајеног у нашој наставној пракси, али откривамо и како учитељи могу да искористе окружење у којем се учење одвија и начин како се он одвија. Говоримо о: 1) идеја математике која се види као активност и 2) математичком учењу које се одвија на такав начин да ученици проналазе и развијају ефективне путеве решавања проблема и задатака (Streefland 1991, Treffers 1987, према Romano 2009c: 18), где је 3) циљ математичког деловања формирање математичких објеката (Freudenthal 1991, према Romano 2009c: 18). У оквиру овог следимо још један аспект карактеристичан за реалистично математичко образовање, реч је о поступку (поновног) откривања математичких идеја у настави (Gravemeijer 1994, Mićić 1999, Мићић 2005).

Разматрајући перспективе наставе геометрије, јасно се издвојио став да основношколска настава геометрије не би требало да је сведена само на увођење појмова/термина (Villani 1998), већ она треба да помогне ученицима у побољшавању:

1. способности *просторног резоновања* и
2. унапређивању искустава при *мерењу дужине, површине и запремине*, посебно у почетној настави.

Истраживања о геометријском мишљењу показују значај уџбеника као „круцијалног инструмента у учењу и подучавању“ (Gutierrez et al. 2005: 726). Отуда је за нас важан модел уџбеника којим се подстиче развој геометријског мишљења, односно формира дечја ‘навика ума’ на геометријско резоновање које води ка системском мишљењу (Hershkowitz 1998, Steen 1999, Prenger 2005, Diezmann et al. 2002).

Трагали смо за другачијим наставним приступом који подржава иновативни модел уџбеника, другачији од оних који су присутни у нашој наставној пракси, чији математички модели и поступци чине учење ефикаснијим унапређујући нивое постигнућа ученика. Наш рад настаје у периоду док траје експеримент са школским уџбеницима.

МЕДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

1. Предмет и циљ истраживања

Предмет рада је теоријско и експериментално испитивање и проучавање ефеката наставног приступа у почетној настави геометрије утемељеног у теорији реалистичног математичког окружења подржан пропратним иновативним уџбеником.

Циљ истраживања је испитати на који начин реално окружење у геометријским садржајима IV разреда почетне наставе математике утиче на:

1. постигнућа ученика (когнитивни аспект укључује ученичка *постигућа* и *резоновање*) и
2. мотивацију (афективни аспект укључује ученичку *мотивацију* и *активацију*).

2. Задаци истраживања

1. Испитати геометријске способности ученика IV разреда. Факторском анализом теста геометријских способности испитати које геометријске способности ученика мери.
2. Регресионом анализом испитати да ли скор на ретесту знања ученика зависи од скора са теста геометријских способности.
3. Пирсоновим коефицијентом корелације испитати корелације између теста геометријских способности са тестовима знања – претест и ретест.
4. Испитати и јачину веза између теста геометријских способности са тестовима знања – величине Пирсоновог коефицијента корелације и њихове коефицијенте детерминације.
5. Анализом варијансе утврдити да ли постоје разлике у постигнућу ученика IV разреда експерименталне групе, која учи по приступу *реално окружење* и иновативном моделу уџбеника који прати одабрани приступ, и контролне, која учи по традиционалном наставном приступу и уџбенику.
6. Испитати да ли се ученици експерименталне и контролне групе статистички значајно разликују по нивоима знања – 1. познавање чињеница и 2. примена знања, у пет типова задатака: 1.а. препознавање и репродукција знања и 1.б. разумевање; примена наученог у 2.а. математичком контексту и 2.б.1. семи-реалном и 2.б.2. реалном контексту. Методом анализе варијансе утврдити има ли статистички значајних разлика између било које две мере просека.
7. Анкетирати учитеље о предностима и недостацима два различита наставна приступа и могућностима препоруке за дидактичко-методичко обликовање геометријских садржаја, уџбеника и уопште програмских активности.
8. Анкетирати ученике обе групе о учењу на часовима и коришћеним уџбеницима и испитати т-тестом постоји ли статистички значајна разлика у одговорима две групе.
9. Испитати како примена наведеног приступа у почетној настави математике утиче на мотивисаност ученика за учење геометрије.

3. Варијабле

Код експерименталне групе смо, као независну варијаблу, увели реално окружење (наставни приступ подржан одговарајућим уџбеником). Зависна варијабла је успех ученика изражен кроз разлику постигнућа на тестовима знања претест и ретест, исказану по завршетку обраде уџбеничке теме „Квадар и коцка“.

4. Хипотезе у истраживању

Општа хипотеза

Реално окружење као наставни приступ и пропратни иновативни модел уџбеника почетне наставе математике позитивно утиче на постигнућа и мотивацију ученика IV разреда.

Помоћне хипотезе:

1. Тест геометријских способности мери геометријске способности ученика IV разреда.
2. Скор на ретесту знања ученика зависи од скора на тесту геометријских способности. Очекујемо да реално окружење као наставни приступ више погодује ученицима који имају боље геометријске способности.
3. Ученик који има виши скор на тесту геометријских способности више и напредује кроз експериментални програм.
4. Веза између ретеста и величине напретка кроз експериментални програм биће јака.
5. Увођење реалног окружења и пропратног иновативног модела уџбеника почетне наставе математике за IV разред позитивно ће утицати на постигнућа ученика.
6. Наставни приступ ‘реално окружење’ даје значајно бољи просек знања (у односу на наставни приступ који је традиционалан). Ученици Е-групе биће успешнији од ученика К-групе и у задацима чињеница, као и у задацима у којима се траже виши нивои знања – примене.

7. Мишљење учитеља о оваквом начину стицања знања биће позитивно са исказаним ставом о неопходности постојања уџбеника који прати наведени наставни приступ.
8. Већина одговора у анкети ученика Е-групе ће се стистички значајно разликовати од одговора К-групе. Мишљење ученика Е-групе о уџбенику који прати наставни приступ реално окружење биће позитивно.
9. Примена одабраног приступа ствара већу мотивисаност ученика за учење геометријских садржаја у почетној настави математике.

5. Методе, технике и инструменти истраживања

Испитујемо ефикасност реалног окружења као наставног приступа из теорије реалистичног математичког образовања и то као извора геометријских појмова и места примене знања ученика. Планирано је било да се обави применом експерименталне методе, рад са паралелним групама.

Од истраживачких техника коришћено је тестирање – за утврђивање геометријских способности ученика и успеха ученика у познавању садржаја обухваћених наставним темама из геометрије (претест и ретест), анкетирање – за испитивање мишљења учитеља који су наставу реализовали у експерименталном програму и мишљење ученика о наставном приступу и уџбенику, и у експерименталној и у контролној групи, и посматрање (часова експерименталне наставе).

Планирани инструменти истраживања су:

- тест геометријских способности,
- тестови знања из математике – претест и ретест;
- анкетни упитници за учитеље (пре и после експеримента);
- анкетни упитник за ученике (обе групе) и
- дневници посматрања.

5.1. *Метријске карактеристике тестова знања*

Будући да нисмо располагали погодним тестовима знања којим би мерили знања ученика четвртог разреда о геометријским појмовима и поступцима у теми „Квадар и коцка“, самостално смо конструисали адекватне мерне инструменте – тестове знања (претест и ретест, видети Прилог 4).

Валидност тестова

Тестове знања смо конструисали у сарадњи са учитељима одељења обухваћеним овим истраживањем (пилот и главним), те три методичара (професор и асистенти са предмета Методика наставе математике). Инструмент за претест од 14 питања настао је од претходног који је садржавао 18 и након неколико верзија и изведеним пилот-тестом, а инструмент за ретест од 11 питања настао је од претходног који је садржавао 21 и након неколико верзија и изведеним пилот-тестом. Један методичар и аутор су класификовали задатаке на оне који се односе на: 1. чињенице и информације – 1.а. препознавање и репродукција и 1.б. разумевање и 2. примене – 2.а. унутарматематичке (математички контекст) и 2.б. спољноматематичке (реалан контекст) са 2.б.1. семиреалним/полуреалним и 2.б.2. чисто реалним контекстом (окружењем) (видети табелу 1. која следи). Однос задатака чињеница и информација према задацима примене на претесту је износио 7:7 (укупно 14 задатака), док је на ретесту тај однос нешто измењен 6:5[51] (укупно 11 задатака). Примењене су логичка и садржајна валидација које се односе на утврђивање слагања тестова са захтевима наставног програма и садржајима на које се односе. Тест се сматра ваљаним ако мери знање из области на коју се односи, што је постигнуто овим истраживањем кроз претходно поменуту вишеструку валидацију.

Поузданост тестова

Тест је поуздан ако би након поновне примене регистовао исте или веома сличне резултате код испитаника. За утврђивање поузданости примењених тестова рађен је ширококоришћени Кронбахов алфа коефицијент (Cronbach's

[51] Задатака примене је било нешто мање, они се доста усложњавају како се математички (геометријски) садржаји усложњавају, а узраст деце повећава.

Табела 1. Класификација и број задатака према геометријским темама

	1. Чињенице и информације		2. Примене		
	1.а. препознавање и репродукција	1.б. разумевање	2.а. унутарматематичке (математички контекст)	2.б. спољноматематичке (реалан контекст)	
				2.б.1. семиреалан/ полуреалан	2.б.2. чисто реалан контекст
1) Претест					
МЕРЕЊЕ И МЕРЕ					
МЕРЕ ЗА ПОВРШИНУ					
Упоређивање површи			1		
Мерење површи. Површина фигура	2		1		
Јединице за површину	1	2		2	
ПОВРШИНЕ					
ПОВРШИНА ПРАВОУГАОНИКА И КВАДРАТА					
Израчунавање површине правоугаоника и квадрата	1	1	1	1	1
Укупно	4	3	3	3	1
14	**7**		**7**		
2) Ретест					
КВАДАР И КОЦКА					
Особине квадра и коцке	1	1	2		
Мрежа површи квадра и коцке		3	1	1	
Површина квадра и коцке		1			1
Укупно	1	5	3	1	1
11	**6**		**5**		
Укупно	5	8	6	4	2
25	**13**		**12**		

alpha). Кронбахов коефицијент износи Alpha=0,57. Његова вредност може да се креће од 0 до 1. Добијена вредност поузданости тестова знања у овом истраживању је средња[52].

Сличан податак добијамо ако израчунамо повезаност између скора на претесту и ретесту (видети табелу 2.)

Табела 2.

Correlations

		PRE_SUMA	RET_SUMA
PRE_SUMA	Pearson Correlation	1	,41(**)
	Sig. (2-tailed)	.	,00
	N	133	125
RET_SUMA	Pearson Correlation	,41(**)	1
	Sig. (2-tailed)	,00	.
	N	125	142

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Из табеле 2. видимо да је повезаност између два скора (Пирсонов коефицијент) 0,41 ($r=0,41$, $p<0,01$), што је статистичка значајност на нивоу 0,01, али је средња корелација. Ово је само други начин да се говори о поузданости тестова[53].

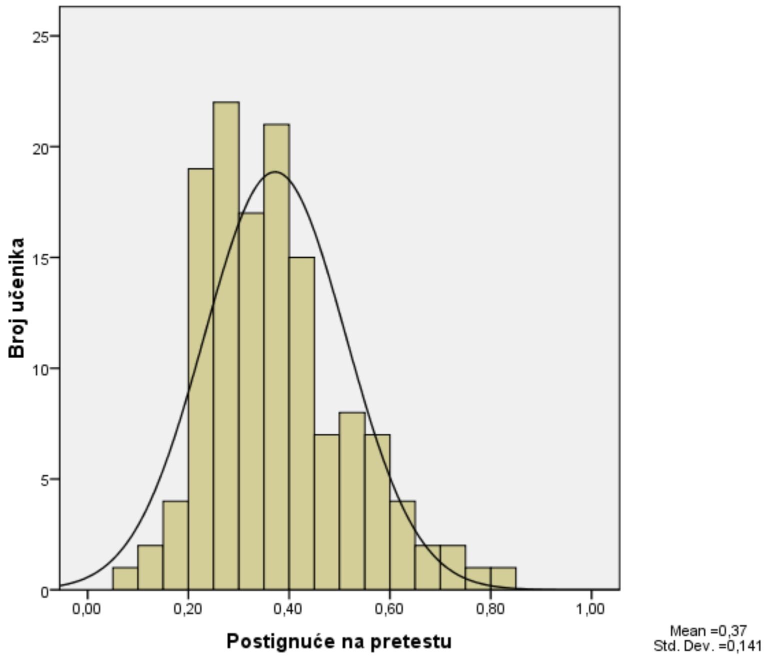
Дискриминативност (осетљивост) тестова

Осетљивост тестова постижемо када тестом можемо да утврдимо фине разлике код испитаника у ономе што меримо. Заправо проверавамо да ли помоћу тестова разликујемо испитанике по знању и проверавамо преко расподеле

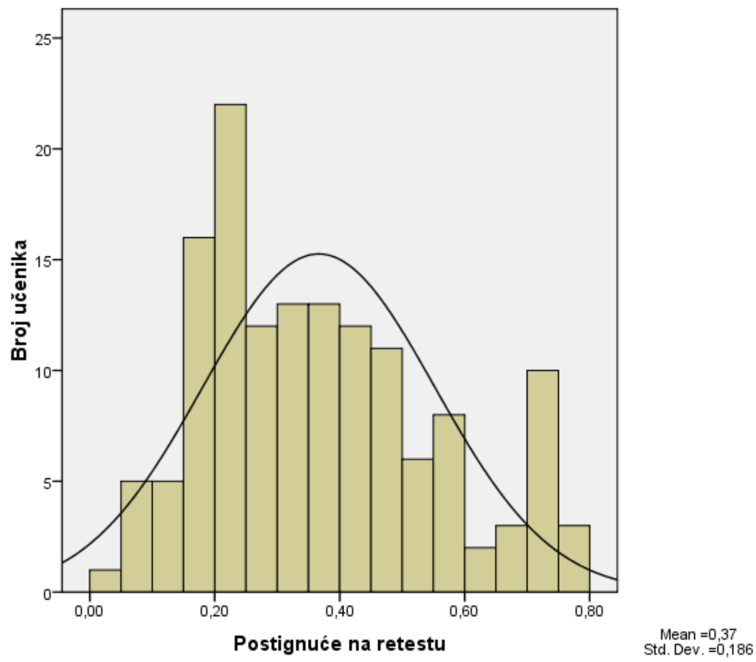
[52] Приликом тумачења коефицијента поузданости, треба рећи да је он увек неки коефицијент корелације. Статистичка дефиниција указује на то да грешка мерења расте уколико се његова вредност удаљава од вредности 1,00, и обратно, па нам једино преостаје да прихватљивост коефицијента поузданости посматрамо у том оквиру и настојимо да буде што је могуће виши. Да би се дошло до неких норми, ‘светски’ стандард познатијих тестова који имају врло високу поузданост треба да се креће изнад 0,90, а за тестове високе поузданости вредности од 0,80. Анализе указују на тенденцију постепеног опадања коефицијента поуданости (Nunnaly 1978, према Bukvić 1996: 129, Bukvić 1996: 129-130). Бројни истраживачи сматрају да су коефицијенти поузданости не мањи од 0,8 пожељни, а идеално задовољавајући су они изнад 0,7 (De Vellis 2003, Pallant 2009: 97, Pallant 2009: 100).

[53] Суштински нам говори исто што и Кромбахов алфа коефицијент.

учесталости скорова на тестовима знања с обзиром на то да ли та расподела значајно одступа од (теоријске) нормалне расподеле. Обе дистрибуције постигнућа (и на претесту и на ретесту) значајно одступају од нормалне



Слика 1.



Слика 2.

дистрибуције (табела 3.). Погледајмо следеће хистограме[54] где се виде обе дистрибуције постигнућа (слика 1. за претест и слика 2. за ретест).

Запазимо вредности скјуниса и куртозиса у табели 3. На вредности скјуниса видимо да су обе дистрибуције позитивно асиметричне (за претест 0,82, за ретест 0,62) што значи да су оба теста мало тежа него што би требало да буду (како би добили нормалну дистрибуцију, што се види на слици 1. и слици 2.). На вредности куртозиса видимо да је за претест дистрибуција позитивно спљоштена

Табела 3.

Descriptives

			Statistic	Std. Error
PRE_SUMA	Mean		,37	,01
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,34	
		Upper Bound	,39	
	5% Trimmed Mean		,36	
	Median		,34	
	Variance		,02	
	Std. Deviation		,14	
	Minimum		,09	
	Maximum		,82	
	Range		,73	
	Interquartile Range		,16	
	Skewness		,82	,22
	Kurtosis		,53	,43
RET_SUMA	Mean		,35	,02
	95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	,32	
		Upper Bound	,38	
	5% Trimmed Mean		,34	
	Median		,31	
	Variance		,04	
	Std. Deviation		,19	
	Minimum		,02	
	Maximum		,78	
	Range		,76	
	Interquartile Range		,25	
	Skewness		,62	,22
	Kurtosis		-,48	,43

[54] Препоручује се да се облик расподеле погледа на хистограму (Tabachnik and Fidell 2007, према Pallant 2009: 58).

(0,53) и расподела шиљатија од нормалне, а за ретест негативно спљоштена (-0,48) и расподела је пљоснатија од нормалне. Дакле, наши тестови су: а) претест – већина добијених резултата лево од средње вредности, међу мањим вредностима, и више нагомилани око центра расподеле и б) ретест – већина добијених резултата лево од средње вредности, међу мањим вредностима, и више случајева не у центру расподеле, него на ‘реповима’ (где су скорови највиши и најнижи).

За утврђивање одступања дате расподеле скорова од одговарајуће теоријске расподеле у испитивању дискриминативности користили смо Смирнов-Колмогорљев тест[55] (Kolmogorov-Smirnov Test) (табела 4.).

У табели 4. видимо да се обе дистрибуције статистички значајно разликују од нормалне (истакнуте су вредности значајности, за претест $p<0,05$ и за ретест $p<0,05$). Проверили смо још једним тестом статистичку значајност. Коришћењем Шапиро-Вилк теста (Shapiro-Wilk) добијено је да је за претест $p<0,05$, као и за ретест тј. још једном смо потврдили да постоје статистички значајне разлике и да ни један од тестова нема нормалну расподелу[56].

Табела 4.

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
PRE_SUMA	,10	125	,01	,95	125	,00
RET_SUMA	,11	125	,00	,94	125	,00

a Lilliefors Significance Correction

55 Критеријуми утврђивања статистичке значајности за два индекса скјуниса и куртозиса нису сасвим задовољавајући тако да се они углавном користе као дескриптивни статистички показатељи (Bukvić 1996: 90). Овде би осим Смирнов-Колмогорљевог теста погодно било користити и нпр. хи-квадрат тест као тест који је осетљивији (Bukvić 1996: 95).

56 Свесни смо чињенице да је нормална расподела у друштвеним наукама не тако честа тј. да су резултати често распоређени асиметрично (код нас асиметрично позитивне обе дистрибуције) и да проблем не мора да буде у мерној скали (он, заправо, показује стварну природу конструкта који се мери). Неки аутори предлажу статистичку ‘трансформацију’ (нпр. Pallant 2009: 62) или баждарење тестова (нпр. предлаже се претварање у перцентилне рангове, утврђивање перцентила тј. перцентилних тачака, извођење статистичком скалом која је направљена по угледу на нормалну криву, или сопственим моделом (Bukvić 1996: 230)). Ми смо израчунали асиметрију и спљоштеност (скјунис и куртозис), јер наш узорак чини нешто мање од 200 случајева, а то је препорука неких аутора (Pallant 2009: 58), а нацртали смо и хистограм како се препоручује да се види облик расподеле (Ibid).

Објективност тестова

Објективност коришћених тестова процењена је израчунавањем корелације између оцена два независна оцењивача (учитељ који је показао заинтересованост и аутор дисертације). У оба случаја (табела 5. за претест и табела 6. за ретест) видимо да је корелација две оцене изузетно висока (корелација између две оцене претеста износи 0,99; $p<0.01$; корелација између две оцене ретеста износи 1,00; $p<0.01$).

Табела 5.

Correlations

		objektivnost ocenjivanja, pretest, ocenjivac 1	objektivnost ocenjivanja, pretest, ocenjivac 2
objektivnost ocenjivanja, pretest, ocenjivac 1	Pearson Correlation	1	,99(**)
	Sig. (2-tailed)	.	,00
	N	30	30
objektivnost ocenjivanja, pretest, ocenjivac 2	Pearson Correlation	,99(**)	1
	Sig. (2-tailed)	,00	.
	N	30	30

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Табела 6.

Correlations

		objektivnost ocenjivanja, retest, ocenjivač 1	objektivnost ocenjivanja, retest, ocenjivač 2
objektivnost ocenjivanja, retest, ocenjivač 1	Pearson Correlation	1	1,00(**)
	Sig. (2-tailed)	.	,00
	N	28	28
objektivnost ocenjivanja, retest, ocenjivač 2	Pearson Correlation	1,00(**)	1
	Sig. (2-tailed)	,00	.
	N	28	28

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

На основу наведених метријских карактеристика тестова видимо да није лако конструисати мерне инструменте, он представља озбиљан захтев. Сматрамо да су наши тестови конструисани тако да се можемо поуздати у резултате добијене њиховом применом.

6. Узорак у истраживању

Узорак има карактер пригодног узорка. Истраживање је било планирно да се реализује у сарадњи са учитељима и школом који покажу спремност за учешће, а који реализују наставу математике у IV разреду основне школе по традиционалном наставном приступу и уџбенику. Истраживањем су била обухваћена сва одељења IV разреда изабране школе.

Снимак стања пилот-теста геометријских способности изведен је у ОШ „Јован Миодраговић“ у Београду. Изведен је у једном одељењу IV разреда и то индивидуалним тестирањем шест ученика (два изнадпросечна, два просечна и два исподпросечна ученика). Пилот-тестови знања (претест и ретест) изведени су у једном одељењу IV разреда од 26 ученика ОШ „Михаило Петровић Алас“ у Београду.

За потребе главног теста геометријских способности индивидуално је тестирано 148 ученика IV разреда ОШ „Милан Ђ. Милићевић“ из Београда, школа која је учествовала у експерименталном програму. Задржане су постојеће структуре одељења (73 у Е-групи и 75 у К-групи). Након изведеног тестирања геометријских способности и претеста, 6 ученика је било искључено у наредним фазама истраживања (N=67). На основу резултата на тесту геометријских способности и тесту знања (претест) за уједначавање група, отпочео је двонедељни експериментални програм.

У оквиру ретеста (након пилот-теста и две недеље након експерименталне фазе) испитаници су тестирани тестом који је представљао паралелну форму оној која је коришћена на претесту.

7. Ниво и начин статистичке обраде података

Резултати истраживања састоје се од две компоненте. Прва компонента је квантитативна (статистичка) анализа података која се ослања на резултате добијене коришћењем одговарајућих статистичких тестова. Друга компонента је квалитативна анализа посматрања експерименталних часова. Посебно се анализира мотивација ученика у току експерименталне наставе. Добијене податке статистички смо обрађивали употребом верзије 17 SPSS пакета.

8. Опис школа, одељења, наставног приступа и уџбеника, учитеља

Већ смо навели у којим школама се истраживање реализовало. Рецимо нешто о наставном приступу и уџбенику који се користе а које именујемо као традиционални. Реч је о настави у којој учитељ уводи појмове, демонстрира ученицима уведене појмове на неколико одабраних задатака, а затим позива ученике да решава нове постављене проблеме најчешће преузете из уџбеника као основне књиге за учење. Уџбеник који се користи има:

- наглашено репродуктивни карактер задатака;
- бројне задатке примене знања чији је контекст углавном спољноматематички, готово занемарен унутарматематички, поприлично незанимљив за децу овог узраста (што свакако утиче на мотивацију за учење) и
- велика одступања у захтевима према распону нивоа знања – сувише нагли скок од чињеница и информација до примене знања, недовољно методички разрађен (Ђокић 2008: 200-201).

Истраживање је реализовано у следећим корацима:

- осмишљавање материјала као уџбеничке теме за IV разред са одабраним наставним приступом реално окружење и писаних припрема за реализацију наставе по експерименталном програму;
- упознавање учитеља са осмишљеним материјалом, уџбеником и начином рада;
- пилот-тестирања (тест геометријских способности и тестови знања – претест и ретест);
- тестирања ученика – тест геометријских способности;
- реализација наставих часова према експерименталном програму;
- посматрање ученика на часовима;
- испитивање ефикасности примењеног материјала кроз:

- тестирања знања ученика (на почетку и на крају експерименталног програма),
- технику посматрања ученика,
- анкетирања учитеља о примењеном наставном приступу (на почетку и на крају експерименталног програма) и
- анкетирање ученика (обе групе).

У истраживању су учесвовали учитељи чије опште податке дајемо у табели 7.

Табела 7. Општи подаци о учитељима

Програм	*Број учитеља у програму*	*Године старости учитеља*	*Године стажа учитеља*	*Ниво образовања учитеља*
Експериментални	3	40,30	19	2 факултетске и 1 више школе
Традиционални	3	41,70	17	2 факултетске и 1 више школе

Састанак са учитељима (опис)

- два полудневна сусрета: први, за упознавање и давање материјала за учење са разрађеним дневним планом рада и кратким уводом у експеримент и други, након недељу дана, одговори на питања учитеља, дискусија и разрада идеја проблемских ситуација;
- на почетку и крају сваке седмице трајања експеримента краћи састанак, шта је урађено и шта следи;
- на почетку и крају сваког дана трајања експеримента краћи састанак, шта је урађено и шта следи;
- сваки од ових сусрета развио се у дискусију о примени стратегија за учење и подучавање.

Тест геометријских способности и почетни тест знања

Будући да су резултати теста геометријских способности и почетног теста знања ученика укључени у статистичку анализу и интерпретацију експерименталног програма, дајемо их у поглављу које следи, а које обухвата сам експериментални програм.

9. Експериментална настава

9.1. *Структура и садржај експерименталних часова*

У осмишљавању часова структурално и садржајно у основи се руководимо филозофским разматрањем великог класика А. Поенкареа и његовом идејом човековог искуства и заснивања геометрије (Poincaré 1905, према Ђокић 2007: 39). Да би формирали идеју простора, служимо се експериментима као приликама које нам омогућавају да досегнемо ту идеју. На тој основи развија се и способност просторног поимања. Бројни истраживачи виде просторну способност и визуелну имагинацију као битне за математичко (геометријско) мишљење (Lean & Clements 1981, Wheatley 1990, према Clements & Battista 1992: 443). Отуда се и крећемо у правцу развоја просторне способности и визуелне имагинације помоћу геометријских активности и задатака у уџбенику математике. Свесни да је реч о дугорочном процесу формирања навике дечјег ума да геометријски (математички) мисли и математизира окружујућу реалност, упустили смо се у истраживање. Мишљења смо да би истраживање и развој који произилазе требало да дају смернице курикуларном оквиру почетне наставе геометрије (па и шире математике).

9.2. *Опште карактеристике наставног приступа*

Имајући на уму опредељење за реално окружење као наставни приступ, опште карактеристике утемељење су у теорији реалистичног математичког образовања. Подсетимо се *основних принципа* у *РМО* теорији: 1) три ван Хилова нивоа, 2) Фројденталова дидактичка феноменологија и 3) Треферсова прогресивна математизација. Они уобличавају *принципе учења и подучавања* у *РМО* као пет основних карактеристика и то:

6) феноменолошко истраживање или употреба контекста,
7) употреба модела и/или премоштавање вертикалних инструмената,
8) ученички рад и изграђивање математичких појмова у математичкој свести ученика,
9) интерактивни карактер процеса наставе и
10) међусобно прожимање више поступака учења и/или тема (наставних јединица) (Romano 2009c, *ЛОТ*).

9.3. *Геометријске активности*

Бавећи се еуклидском геометријом, и то оним делом који се тиче мерења површи, позивамо се на четири важне теореме у Лучићевој интерпретацији (Lučić 1997: 235-240). Нека је ω (па и p, q, ω_1, ω_2 и ξ) било који лик који припада еуклидској равни π, а ω_0 квадратна површ чија су темена $A_0B_0C_0D_0$, при чему је лик ω унутар јединичног квадрата $A_0B_0C_0D_0$[57]. Разложимо сваку од страница квадрата чија су темена $A_0B_0C_0D_0$ на 10^k подударних дужи и у добијеним подеоним тачкама конструишимо праве паралелне страницама задатог квадрата. Конструисане праве разложиће квадратну површ ω_0 на 10^{2k} међусобно подударних квадратних површи. Поступак се даље наставља низом корака (које овде нећемо детаљно описивати) и доводи нас до два конвергентна низа и њихових граничних вредности ($\underline{S}$ и $\overline{S}$). Број $\underline{S}$ називамо унутрашњом, а $\overline{S}$ спољашњом мером лика ω. Ако су оне једнаке ($\underline{S}(\omega) = \overline{S}(\omega)$), ω лик је мерљив а број $S(\omega)$ који је истоветан и унутрашњој и спољашњој мери лика ω зваћемо *мером* или *површином* лика ω. Квадратну површ ω_0 зваћемо *јединичном* и претпоставићемо да су њене странице мере 1[58]. Важе следеће теореме (наводимо их без доказивања):

1. Унутрашњост сваког полигона је мерљива полигонска површ.

---

[57] Иначе би поступак ‘уситњавања’ изгубио смисао.

[58] Једино осетљиво питање овде јесте када су странице квадрата мерене ирационалним бројем.

2. Просто повезани лик ω у еуклидској равни је мерљив ако и само ако за сваки позитиван реалан број ε постоје полигони p и q такви да је

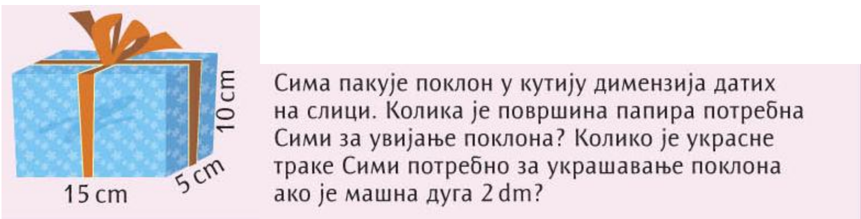
$$(p) \subset \omega \subset (q) \quad \text{и} \quad S[(q)] - S[(p)] < \varepsilon .$$

3. Ако су a и b дужине страница неке правоугаоне површи ω , тада је $S(\omega) = ab$.
4. Мера S дефинисана на скупу мерљивих скупова еуклидске равни је функција која има следећа својства:
   1) мера квадратне површи ω_0 је 1,
   2) за сваки мерљиви лик ω је $S(\omega) \geq 0$,
   3) ако је лик ω унија дисјунктних мерљивих ликова ω_1 и ω_2 , тада је и ω мерљив лик, и $S(\omega) = S(\omega_1) + S(\omega_2)$,
   4) ако је ω мерљив лик и ако је ξ њему подударан лик, тада је и ξ мерљив лик, и $S(\xi) = S(\omega)$.

Опишимо геометријске активности са експерименталних часова. Свака је детаљно приказана у материјалима за учитеље (Прилог 2).

Активност 1. – умотавање кутије облика квадра потребним папиром

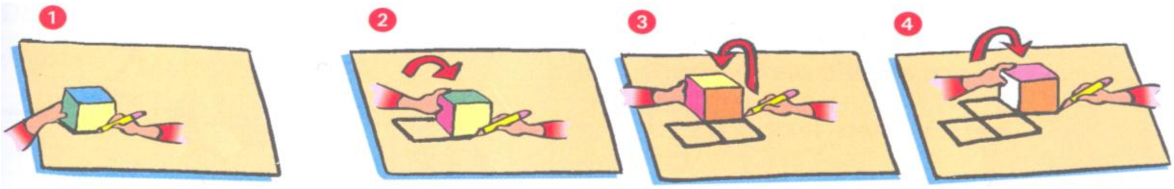
Реч је о почетној проблемској ситуацији којом је започета тема „Квадар и коцка“ и која је за циљ имала да ученике мотивише за нов појам, а служила је као модел задатак коме се повремено враћало.



Слика 3. Почетна проблемска ситуација паковања кутије

Ученици су били подстакнути да откривају математичке идеје помоћу манипулативног материјала, вођени од учитеља, чиме је „визуелно опажање употпуњено опажањем додиром и тиме допринело дубљем разумевању и трајном усвајању уочених и додиром регистрованих чињеница“ (Мићић 2005: 19). Дајемо преглед могућих смерница за вођени разговор у овој активности и могуће ученичко резоновање.

- Потребно је да ученици размисле како могу да открију колико им је папира за умотавање овог поклона потребно. Користе материјал који им стоји на располагању: пакет, папир и оловка. (Ученици нпр. преврћући модел по папиру као што то слика 4. показује цртају подударне правоугаонике. Прислањањем тела и његовим превртањем (манипулисањем) на папиру ученици би могли да ‘открију’ да им је потребна онолика površ papira колика је укупна површ свих правоугаоника тј. свих страна кутије (поклона) облика квадра.)



Слика 4. ‘Откривање’ колико је папира потребно за умотавање кутије

- Може се поставити питање колико су фигура нацртали; колики је број нацртаних фигура, а колики страна модела квадра; да ли су нацртане фигуре и стране модела међусобно подударне итд. (Нацртаће шест фигура, можда и мање али их је потребно водити до укупног броја, колико модел квадра има и страна, које им јесу подударне. Биће то раванско представљање целе мреже површи тела.)
- Ученици се могу постепено водити до идеје сложене фигуре и тражења њене површине – нацртати сложену фигуру састављену од простих итд. Овим се позивамо на поменуте теореме у Лучићевој интерпретацији и то директно на ону под редним бројем 4.

Вођене кораке за учење учитељ може постављати у виду питања уз употребу манипулативног материјала који има функцију да подстакне ученике да на познатим чињеницама ‘локално’ откривају нове. Ученици на овај начин бивају вођени у ‘открићу’. Питања се дају постепено и према решавању се од неких одустаје, а нека се дају као додатна, како би се на познатим чињеницима дошло до нових, било да се ради о „сазнањима уз које се може ‘придружити’ нека од карактеристика правих открића“ или не (Мићић 2005: 15). Овде је могуће говорити о правом ‘открићу’, јер ученик може да дође услед „интуитивне природе појма“ (Wubbels 1992, према Wubbels, Korthagen and Broekman 1997: 20) до исте оне чињенице о којој говори наведена теорема број 4. на Лучићевој листи о мерљивости лика који је унија дисјунктних мерљивих ликова (за ученика то је сложена геометријска фигура састављена од простих чију површ поредимо, а касније рачунамо и њену површину).

Није потребно задавати сва предложена питања ако учитељ ‘осети’ да ученици самостално долазе до идеја, али исто тако је важно постављати додатна уколико ученици ‘лутају’ у решењу.

Овде се можемо подсетити и Шоенфелдове интерпретације Фосетовог рада о начину на који ученици изграђују и развијају математику са значењем (Fawcett 1938, према Schoendfeld 1989: 89). „Ученици доказују своје сопствене теореме“ (Ibid). Ученици су имали обезбеђену когнитивну структурну подршку потребну за припрему извођења геометријских доказа, као и трансфер логичког резоновања изван формалне математике, па и много више. У формираној учионичкој атмосфери од значаја су математичке вредности, уверења, наклоности које су подстакнуте свакодневном праксом у коју се ученици стављају. Окружење у учионици је заправо култура разумевања математике. Атмосфера је такође важна и подстицајна. Формирање претпоставки се подстиче, а да би искази били прихваћени као оправдани, одељење пролази кроз процес резоновања (расуђивања) у поступку доказивања. Као што смо већ истакли стандарди можда јесу високо постављени, али нису споља наметнути, већ су предмет расправе међу ученицима. Цело одељење изводи закључке, радећи на њима, све док прецизне тврдње не добију значење. Постављање питања не би било само адекватно, већ би се тиме подстицао и награђивао ученик од других чланова заједнице. Ученици би, заправо, *практиковали математику*.

Добро је место да приметимо какав је одабрани контекст умотавање поклона кутије облика квадра украсним папиром: лако замислив и препознат, привлачи ученичку пажњу, може да доведе до описа ситуације, захтева математичку организацију (Figueiredo 1999, према Fauzan 2002: 52). Одабраним реалним контекстом створена је мотивација ученика за учење, потреба да се успостави веза између школског и свакодневног учења и иде се ка концептуализацији геометрије као „језика којим се описује и објашњава реалност“ или као „структура која организује реалност“ (Bartolini & Boero 1998: 52).

Активност 2. – прављење правилног паралелепипеда откривањем његових особина

Ученици добијају задатак да прављењем квадра (правилног паралелепипеда) откривају његова својства. Наводимо задатак са кратким вођеним корацима.

Направи модел квадра и коцке.

Потребан материјал
Да би направио ивице квадра и коцке, употреби пластичне сламчице у боји, а за темена искористи мало пластелина. Користи маказе, лењир и оловку.

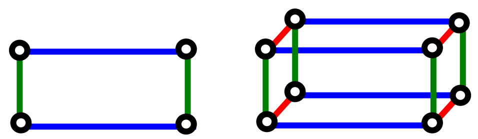
Упутство за прављење модела
1. размисли о томе колико ти је сламчица потребно за ивице, а колико лоптица пластелина за темена
2. размисли о дужинама сламчица
3. нека сламчице истих дужина буду исте боје
4. колико различитих боја ће ти бити потребно:
   а. за модел квадра?
   б. за модел коцке?

Ученици би испред себе имали дрвени модел квадра који им је дат и на основу посматрања и опипавања правили би модел од сламчица. Квадар према коме се прави квадар од сламчица није празан (пун је, без празнина). Приликом прављена модела од сламчица потребно је замислити његове стране. Могуће је до квадра доћи и без посматрања дрвеног квадра, замишљајући га.

Понуђен је материјал за учење. Дајемо могуће оквирне кораке за вођени разговор (који се не задају унапред нити се увек сви задају, већ онако како ученици ‘откривају’ идеје) и ученичко резоновање.

- Ученици могу да посматрају и опипавају дрвени модел квадра. Потребно је да одговарају на питања шта су његове стране и да направе такав један модел. На располагању су им 30 сламчица: по шест сламчица истих дужина и свака у пет боја и пластелин за прављење куглица за везивање сламчица.
- Потребно је да одговоре колико им је сламчица, а колико куглица пластелина потребно за прављење модела квадра.
- Потребно је да размисле о дужинама сламчица. Сламчице једнаких дужина треба да буду исте боје.
- Потребно је да одговоре колико сламчица везују за једну куглицу пластелина, колики је број сламчица, а колики број ивица на моделу квадра по коме праве свој модел.

- Можемо питати ученике како могу да ‘виде’ стране квадра и да га евентуално опишу, погледају место где се куглица пластелина везује са сламчицама, зашто оно изгледа као слово Y?
- Можемо их питати зашто нису употребили свих 30 сламчице или 30 лоптица од пластелина да би направили модел квадра.
- Потребно је да питамо ученике колико различитих боја сламчица им је потребно за прављење модела квадра? Затим их можемо питати колике су дужине сламчица једне боје, а колике су дужине све три боје? (Сламчице једне боје су истих дужина; сламчице различитих боја су различитих дужина.) Затим их питамо колико сламчица истих дужина (боја) користе за прављење модела квадра?
- Потребно је вођени разговор наставити са питањем да ли модел квадра може да има сламчице само у две дужине (боје)? (Идеја је да направе модел квадра чије су две стране квадрати, а четири правоугаоници тј. да направе модел од четири сламчице једне дужине (боје) и 8 сламчица друге дужине (боје)).
- И овде се може користити идеја превртања, као на претходном часу. (Потребно је усмерити пажњу на једну страну квадра и уочити елементе и особине квадра.)



Слика 5 . Прављење модела квадра помоћу сламчица

Пратити да ли су ученици конструисали модел квадра према некој од карактеристика: број темена, број ивица, шта су стране модела (правоугаоници или правоугаоници и квадрати). Поступак се може поновити за коцку (мада је могуће и уопштити као специјалан случај квадра).

Иначе, сламчице као материјал веома су погодне за употребу у почетној настави геометрије из више разлога: у функцији су истраживачког задатка, подстичу децу на експеримент и ‘локалне дедукције’ као манипулативни материјал који је покретач при конструкцији знања ученика и репрезентацији геометријских појмова, једноставне су за употребу и јефтине као материјал за рад у учионици.

Модел дрвеног квадра је у функцији помоћи ученицима у схватању, на основу просторне интуиције и перцепције, да он заузима део простора и да се на тој основи уочавају одређени елементи замишљеног геометријског тела (Ђокић 2007: 115) ослањајући се на Поенкареове идеје простора и просторних односа

(Poincaré 1905, према Ђокић 2007: 39-42). Подсетитмо се Поенкареове идеје да су објекти геометријског простора извесна идеална тела, апсолутно инваријантна, веома упрошћена која представљају слике природних тела. Појам ових идеалних тела је апстрактан. Он се формира у свести као ментални објекат, слика. Експеримент је прилика која нам омогућава да досегнемо ту идеју. На овој основи је и уобличен експеримент и прилика за формирање идеје геометријског простора и његових објеката.

Још једна од идеја извођења активности/експеримента прављења квадра од сламчица јесте и идеја замишљања и визуелне слике. Многе анализе су показале да би „особе са добро развијеним просторним способностима требало да буду способне у *замишљању* просторних уређења објеката из различитих тачака посматрања и за манипулацију визуелним сликама“ (Klements 1979, према Clements & Battista 1992: 444). Стога појам слике има централну улогу у развијању просторних способности. Слике се опажају на унутрашњем плану и представљају холистичке репрезентације објеката или сцена које су изоморфне према свом референтном објекту.

Оно што смо прихватили као идеју из рада Јакиманскаје (Yakimanskaya 1991: 149) јесте ослањање на конкретну визуелну помоћ која није резултат развоја, већ производ технике која се користи у поступку подучавања и која се ослања на конкретне материјале (у нашем случају за акције се користе сламчице). Ова техника подучавања подстакла је ученике при стварању менталне слике квадра и омогућила је ученицима да њиме манипулише. Менталну активност смо директно подражавали наведеном активности, водећи је у изабраном смеру.

Вођени смо и идејом три Дувалове функције изражене у учењу геометрије у контексту (процес визуелизације, процес конструкције и резоновање у односу на дискурзивни / појмовни процес) (Duval 1998, према Hershkowitz 1998: 33). Као део математизације, ученик резонује и објашњава док конструише и проширује своје геометријско знање. Математички начин гледања на фигуру једино настаје у координацији између наведених одвојених процеса и то у дужем временском периоду. Дувал указује да ова три различита процеса могу да функционишу одвојено (Duval 1995, према Geometry Working Group 1998: 31) тј. развијају се одвојено у школским условима а у намери да се развије комунакција међу њима и уз обавезну диференцијацију процеса визуелизације и међу различитим процесима резоновања који се подстичу и развијају у наставном приступу који негујемо.

Активност 3. – рачунамо површину сложене фигуре: увођење у појам мреже површи тела

Идеја ове активности јесте припрема за појам мреже површи која се остварује кроз математизацију нематематичке ситуације ‘шивење столњака’. Полази се од реалне ситуације која је створила потребу за математичком интерпретацијом помоћу дидактичког материјала. Наводимо задатак.

Дара и Стева шију столњак за сто чије су димензије 14 *dm* и 8 *dm*. Столњак прелази преко ивица стола по 1 *dm*.

Израчунај површину столњака који деца са слике шију.

Слика 6. ‘Шивење столњака’

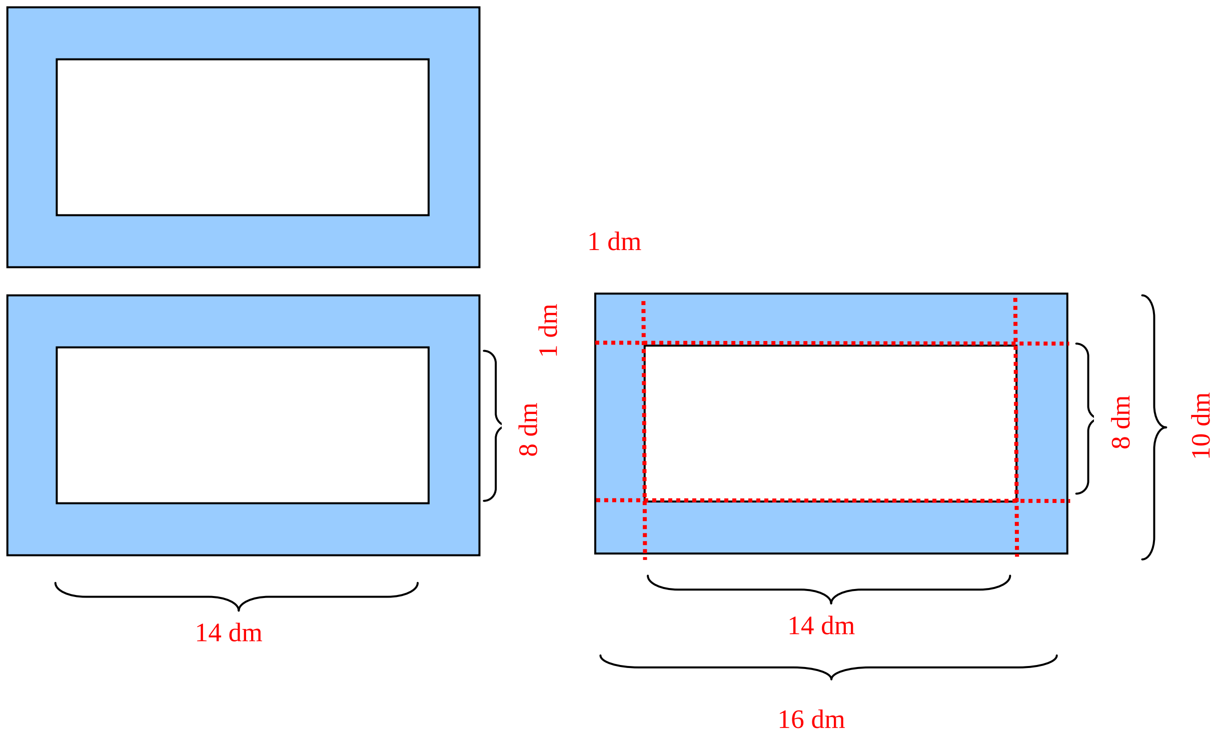
По потреби у вођеном разговору проблемску ситуацију учитељ може допунити следећом: „Деца су одлучила да плавом украсном траком опшију столњак. Колика је укупна површина столњака са траком?“

Ученицима понудити моделе правоугаоника у одговарајућим бојама, а у функцији решавања задатка путем преклапања фигура (проналажење више различитих решења). Ученици су добили материјал за рад – различито сечене картончиће. Требало их је преклапати по већ датом моделу правоугаоника који је представљао столњак (симулација шивења). Слика наговештава до чега је потребно доћи.

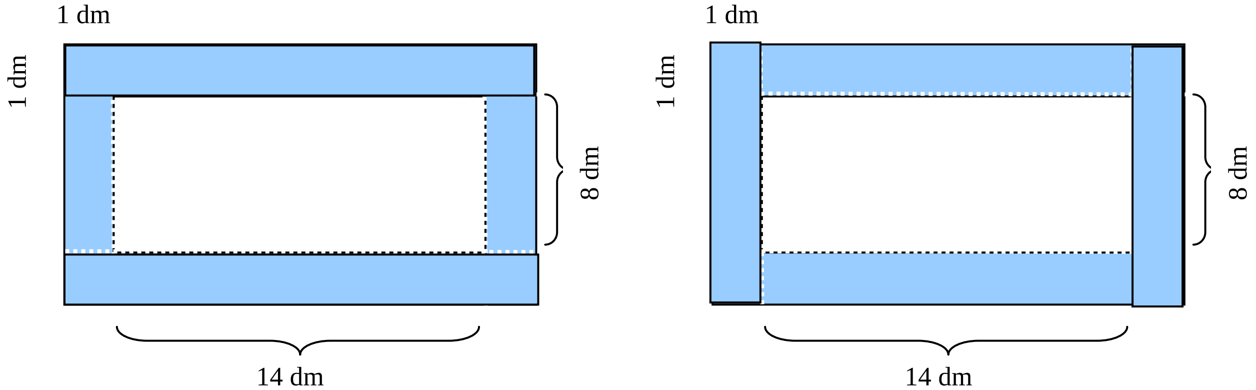
Учитељ води ученике у поступку решавања постављањем питања:

- Како рачунају површину столњака, да ли постоји више начина да се она израчуна, уз стално упућивање на дидактички материјал и делове из којих је фигура састављена. Ученици резонују – као једна већа и осам мањих делова фигура – како то слика 8. наговештава – итд. Ученици трагају за решењима преклапајући фигуре. Нпр. нека од могућих решења представљена су следећом сликом. (Рачунамо P = (14·8) dm^2 + 2·(16·1) dm^2 + 2·(8·1) dm^2 = 160 dm^2 или P = (14·8) dm^2 + 2·(14·1) dm^2 + 2·(1·10) dm^2 = 160 dm^2 итд.)

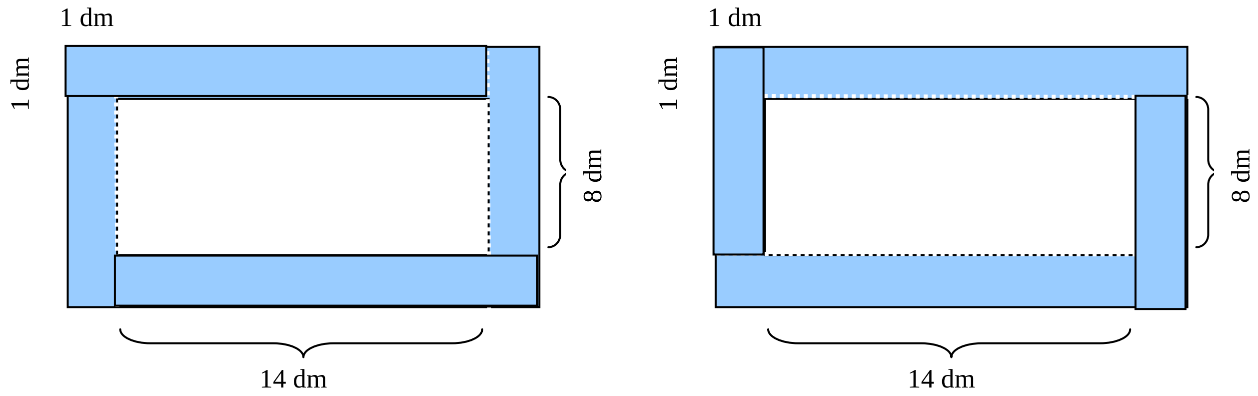
- Од ученика се очекује да нађу бар два различита решења. Математичким поступком можемо да нађемо сва могућа решења, било да је у питању фигура из једног, или једног и осам делова или једног и четири дела итд., намера је да се опишу оне које су реално смислене за ‘нашивање’. (У том смислу дискутују се решења представљена сликом 9. која следи а која су ‘непрактична’ у реалној ситуацији, али математички могућа.)



Слика 7. Математички модел ‘шивење стољњака’



Слика 8. Нека од могућих решења гледања на сложену фигуру



Слика 9. Још нека од могућих решења гледања на сложену фигуру

Решавање проблема у реалној ситуацији „шивење столњака“ изводи се математизацијом нематематичке ситуације моделовањем – уочавањем и израчунавањем површине сложене геометријске фигуре (на више начина). Моделовање се изводи: а) формирањем математичког модела у односу на одговарајућу реалну ситуацију – сложена геометријска фигура састављена из више простих, б) решавањем математичког проблема који смо изградили – формирање слике у математичком контексту (репрезентација прво иде акционо, преклапањем картона одређене боје и уочавањем односа делова) и в) решавање математичког проблема које одговара математичком моделу и који се враћа у реалну ситуацију – израчунавање површине сложене преко збира површина простих фирура. Том приликом изводи се математичко закључивање и ствара се основа за нов појма који се уводи – појам мреже површи, које ученике стимулише да даље препознају и користе релевантну математичку апаратуру при решавању проблема у реалној ситуацији – рачунање површине украсног папира којим се умотава кутија облика квадра. Осим овога успостављају се математичке схеме, развија модел при формирању математичог појма, при чему се инсистира на сложеној смисленој концептуализацији учења и успостављању веза између посматраних објеката и догађаја у реалној ситуацији с једне стране и математичких појмова и процедура које објашњавају односе између тих објеката и догађаја с друге стране.

Подсетимо се да се процес доношења закључака из реалних ситуација означава се као ‘концептуална математизација’ по де Ланжу (de Lange 1987, према

Romano 2009c: 15). Реч је о процесу који стимулише ученике да проналазе и идентификују релевантну математичку апаратуру, успостављају схеме, развијају модел као резултат математичког појма. Процесима рефлексије и генерализације развија се сложенији математички појам. А потом могу да се примењују математички појмови на нова подручја реалног света, снажећи њихово разумевање. Реч је о процесу примењене математизације по де Ланжу.

Можемо извести и анализу математичког модела (сагледавање, упоређивање, решавање) којом се успостављају везе између посматраних објеката и догађаја из окружења и математичких појмова и идеја које објашњавају односе између тих објеката и догађаја, при чему долази до реорганизације знања ученика. Интеракција између ученика и између ученика и учитеља један је од важнијих аспеката *РМО* теорије (de Lange 1996, Gravenmeijer 1994, према Romano 2009c: 16). Тако се овде инсистира на конкретним разговорима, учитељевој интервенцији, сарадњи као есенцијалним елементима у процесу учења. При овоме, ученици користе нестандардне (неформалне) методе и подстичу се да објашњавају, процењују, одлучују, износећи своје рефлексије на ток и резултате рада.

Слика стољњака састављена је из делова који се шију, али на крају хоћемо да се геометријска фигура која представља стољњак види као једна цела фигура и да се решење уопшти. Да би до овога дошли имали смо на уму Фишбајнову мисао слике и појма који треба да се споје у јединствени ментални објекат (Fischbein 1993: 156). У *процесу математичког открића* ученици се труде, експериментишу, прибегавају аналогијама и индуктивном доказу, манипулишући не простим сликама или чистим, формалним ограничењима, већ *фигуралним појмовима, унутрашњим сликама које су контролисане помоћу појмова*. Фишбајн истиче да без фигуралних појмова процеси решавања проблема и открића у настави геометрије не могу се на задовољавајући начин описати и објаснити. Стога су они значајни за наш рад и идеју учења путем открића. Многе грешке које ученици направе у геометријском резоновању могу се објаснити овом врстом расцепа (или недостатка подударности) између појмовног и фигуралног аспекта фигуралних појмова. Слике и појмови утичу једни на друге у когнитивној активности. Развој фигуралних појмова уопштено говорећи према Фишбајну, није природан процес, већ формални. Стога је један од главних задатака математичког образовања (у домену геометрије којом се бавимо) стварање различитих типова дидактичких ситуација, као што је осмишљена геометријска активност, које би систематски тражиле строгу сарадњу два наведена аспекта, до њиховог спајања у јединствен ментални објекат.

Каква је улога учитеља у овом поступку? Све ово Фишбајна води до закључка да „*процес изграђивања фигуралних појмова* у учениковој свести не би требало разматрати као спонтану последицу уобичајеног курса геометрије“ (Fischbein 1993: 156). Он захтева формирање континуиране, систематичне и основне преокупације учитеља. А каква је улога уџбеника? Фишбајн је разматрао и могућност практиковања менталних акција ученика у самим уџбеницима којима сарадња између фигуре и појма захтева посебан подухват. У таквим активностима ученик мора да научи да ментално манипулише геометријским објектима, истовремено прибегавајући операцијама са фигурама и логичким условима и операцијама. Таква врста активности се према Фишбајну састоји од захтева упућеног ученицима да:

4) *нацртају* слику која се добије размотавањем површи геометријског тела и добијањем мреже површи (заправо доживљена или ментално представљена),
5) *препознају* геометријско тело које се може добитити замишљеним склапањем дводимензионе слике и
6) *кажу* које ивице тела ће се спојити (слепити) када тродимензиони објекат буде реконструисан.

У наведеној активности ‘шивење столњака’ поменуто Фишбајново спајање под бројем 3) за предактивност има пресавијање столњака. Цртање, препознавање и спајање одређених ивица код тродимензионих објеката о чему Фишбајн говори реализовано је у следећој геометријској активности чиме је описана створила солидну основу.

Активност 4. – појмови мрежа површи квадра и коцке

Активност се своди на размотавање површи тела у мрежу која претходи цртању мреже. Појаснимо следеће у вези са мрежом тела. Она се не дефинише, већ се интуитивно прихвата да се састоји од једног комада који садржи све стране и из којег се вишеструким пресавијањем може добити тражено тело. У иновативном моделу уџбеника у првом примеру на страни 10. дат је и критеријум, опет интуитивни, да је реч о површи квадра која након разрезивања остаје у једном комаду коју именујемо као мрежа квадра (по аналогији мрежа коцке).

Употребљава се дидактички материјал – модел квадра којем смо се више пута враћали док је трајао експеримент. Наводимо вођена питања за дискусију.

- Потребно је да ученици разрежу модел квадра направљен од картона по његовим ивицама, пазећи да остане у једном комаду.
- Можемо их питати од којих фигура је она састављена. Подударне правоугаонике на мрежи могу да обоје истом бојом. Потребно их је питати колико различитих боја је потребно.
- Нека обоје истом бојом подударне странице правоугаоника (ивице квадра). Колико различитих боја им је потребно?
- Могу да пореде по облику своју мрежу површи квадра са мрежама других ученика у одељењу. Идеја је да се уоче различите мреже површи квадара што ће се сигурно десити, јер ће ученици разрезивати мреже по различитим ивицама.

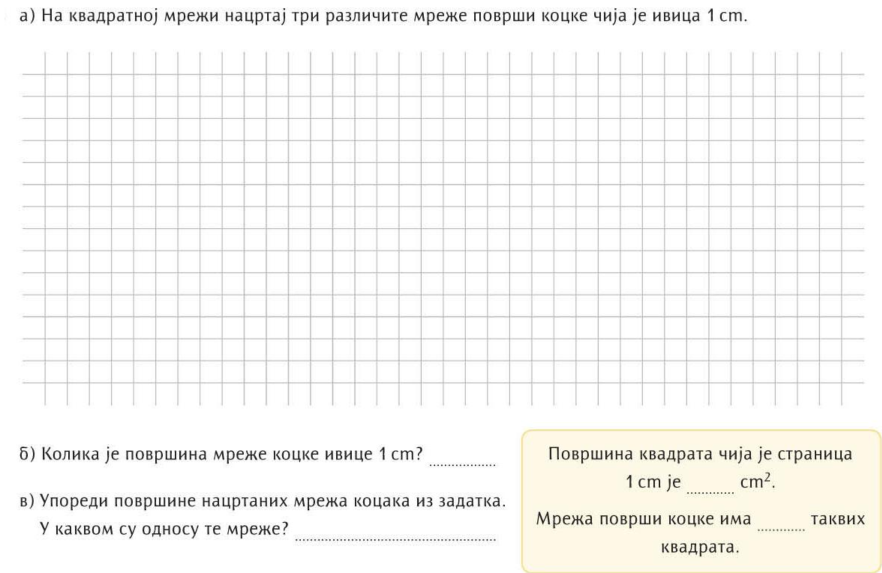
Урадити исто за коцку (или покушати уопштити).

Оваквим и сличним активностима развија се способност математичких описа, објашњавања, аргументовања. Ученици су ангажовани бројним питањима, сазнајним конфликтима и разрешењима док се откривају коначна решења проблема. А када се решења саопште, ученици су изложени питањима и критичким ставовима других ученика и учитеља. Овде је учитељева улога од изузетног значаја, посебно у повезивању дискурзивног продукта тј. производа који је резултат разговора у учионици.

Активност 5. – мрежа квадра и коцке: цртање

За цртање мреже квадра и коцке уводимо неколико секвенци које воде ученике ка самосталности.

Слика 10. Први захтев при цртању мреже коцке – допуњавање сенчењем до целе мреже



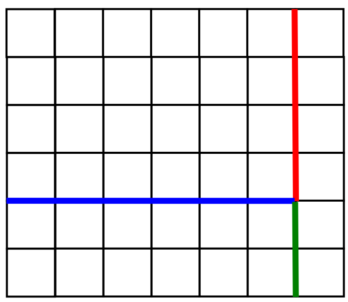
Слика 11 . Други захтев при цртању мреже коцке – самостално сенчење на квадратној мрежи

Слика 12 . Први захтев при цртању мреже квадра – започета мрежа која се довршава

Слика 13. Други захтев при цртању мреже квадра – самостално цртање мреже квадра датих димензија на квадратној мрежи

Ово је место да се подсетимо Ромбергових речи о томе да „учитељи морају не само да покривају садржаје уџбеника, већ да стварају основу инструкција на основу потреба својих ученика“ (Romberg 2003: 30). Ако учитељ познаје ниво мишљења и разумевања својих ученика, онда се погодне иструкције могу обликовати. Тако предлажемо једно могуће обликовање за цртање мреже површи. У овом задатку могуће је на мрежи започети цртање на начин задавањем дужине, ширине и висине са следећим вођеним корацима:

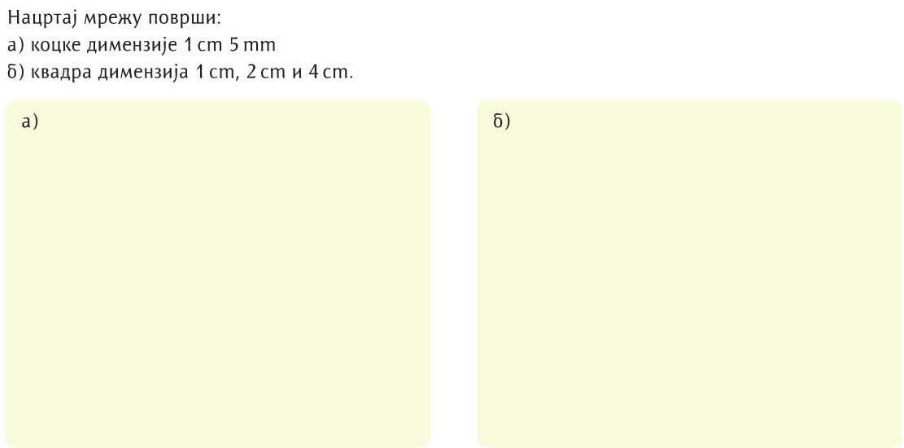
- прво цртати нпр. правоугаоник дужине странице 3 *cm* и његове ширине 1 *cm*,
- затим 2 *cm* и 3 *cm* и
- на крају 1 *cm* и 3 *cm*.



Слика 14 . Започети међукораци као помоћ у цртању мреже квадра на квадратној мрежи

- Поступак поновити за правоугаонике страница 3 *cm* и 1 *cm* , 2 *cm* и 3 *cm* и 1 *cm* и 3 *cm* (сваки од правоугаоника се јавља тачно два пута). Нацртано је свих шест правоугаоника који чине мрежу квадра (све стране квадра које чине површ квадра).

Након овога ученици треба самостално да цртају мреже површи квадра и коцке. Потребно је подстицати различита решења.



Слика 15. Трећи захтев при цртању мреже квадра – самостално цртање мреже квадра датих димензија, без икакве помоћи

Овде се подсећамо Фројденталове идеје апстракције и идеје *вертикалне математизације* (Treffers & Goffree 1985, према Dreyfus 2012: 2). Она указује на процес типичан реорганизацији претходних математичких појмова који се изграђују у математичкој свести ученика, помоћу којих ученици изграђују нове апстрактне математичке појмове. У вертикалној реорганизацији претходно изграђени математички појмови служе даље у процесу за изграђивање нових математичких појмова што се јасно илуструје наведеним цртањем мреже квадра. Математички појмови нису били само реогранизовани, већ и међусобно повезани, и тако остварили посебну дубину ученичком знању и израз сложеној природи математике. Низови проблемских ситуација створили су изнова прилике за богаћење новоформираним математичким појмовима у свести ученика и створили основу за даље, где је са једне стране сваки конструкт укључивао ‘извор’ претходних конструката и са друге потенцијалним за нове.

Апстракција у контексту (*AiC*) у основи има вертикалну математизацију где се кренуло од конкретног и на тој основи постепено изграђивало и на крају дефинисало у процесу вертикалног реорганизовања математичких појмова у учениковој свести који су претходно изграђени у математици и са математичким значењем, а који воде до за ученике нових појмова (Dreyfus 2012: 2).

Формирали смо основу појма мреже, цртали мрежу а сада се крећемо у правцу света математичких симбола и ка уопштавањима.

Активност 6. – подстицање на истраживачко: правимо тело облика квадра

Пре симболичког записа и уопштавања уводимо активност која ученике подстиче да размишљају о мрежи површи тела са циљем да се научено примени[59] (прављење кутије и размишљање о димензијама тела).

Истраживачки задатак

Од картона направи кутијицу без поклопца, у којој ћеш држати оловке. Пази да димензије буду тако одабране да у кутију можеш да сместиш оловке.

Колико твоја кутијица треба да има страна?
Прво направи мрежу површи квадра. Склапањем мреже добићеш кутијицу.

Од материјала користи: тањи картон, маказе, лењир и оловку. Након прављења кутијицу можеш да ојачаш селотејпом.

Активност 7. – формулско извођење: израчунавање површине квадра и коцке

Подсећање ученика на 1. задатак из теме – проблемску ситуацију паковања кутије и то други део (захтев). Наводимо задатак.

[59] Може да буде и такмичарског карактера. Док је трајао експериментални програм, организовали смо такмичење по два критеријума: 1) стабилности (чврстини) кутије која се прави од мреже квадра и 2) њеном лепом дизајну. Добили смо веома оригиналне идеје. Нпр. Нађа С. је направила кутију за одлагање дизајнирану умертничким фотографијама глумачке диве О. Хепберн из модног журнала где се руб при врху кутије украшава истом бојом као и боја која преовладава на хаљини или украсу цењене диве – дизајнерски веома елегантно решење и веома оригинално за 10-годишњу девојчицу која, очигледно, развија способност за примењени дизајн.

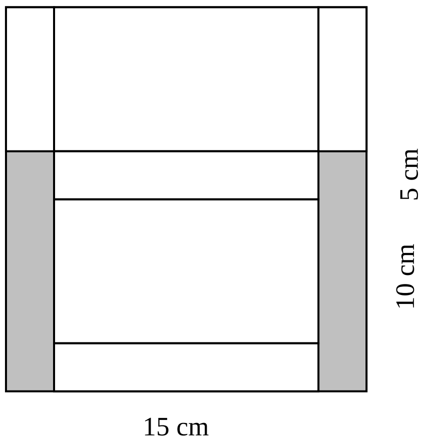
Сада се врати на задатак са 1. стране и помози Сими да израчуна колика му је површина папира потребна за увијање поклона. Потребна му је онолика површина папира колика је површина тог квадра димензија 15 cm, 5 cm и 10 cm.

$P = 2 \cdot (15 \cdot 10 + 15 \cdot 5 + 10 \cdot 5)\ cm^2 = 2 \cdot$ .... $cm^2 =$ .... $cm^2 =$ .... cm^2

Сима ће утрошити .... украсног папира за увијање поклона.

У овој активности ученици су након израчунавања површине папира која је потребна за умотавање квадра (550 cm^2 или приближно 600 cm^2) резоновали које су од наведених могуће димензије папира за умотавање: а) 60 *cm* и 10 *cm* и зашто, б) 25 *cm* и 30 *cm* и зашто и в) 1 *cm* и 60 *cm* и зашто.

Задатак је могуће решити и путем слике. Нпр. мрежа као на слици, где је потребна укупна дужина папира од $2 \cdot 5\ cm + 15\ cm = 25\ cm$ и ширина $2 \cdot 5\ cm + 2 \cdot 10\ cm = 30\ cm$, па су могуће димензије папира за умотавање нпр. 25 *cm* и 30 *cm*.



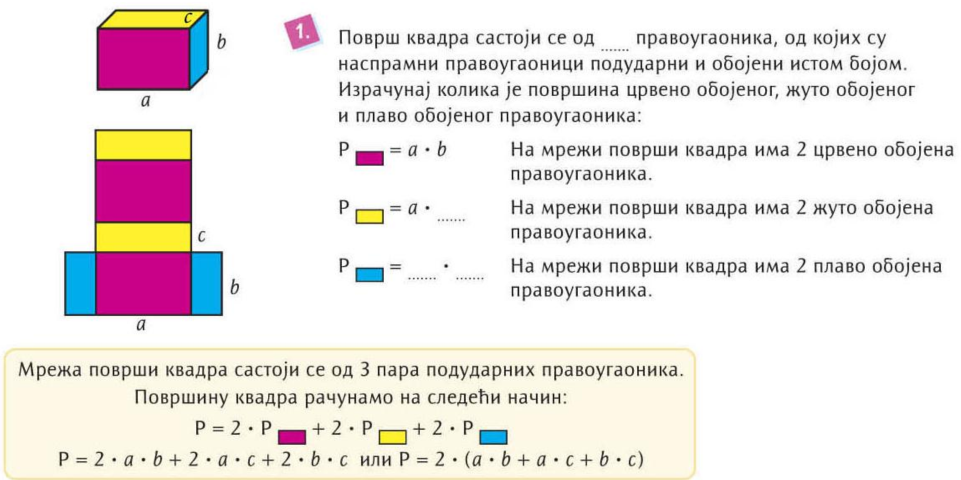
Слика 16. Могући облик мреже површи за умотавање кутије и украсни папир чије су димензије 25 *cm* и 30 *cm*

Овде се јасно уочава активност математичког моделовања која се разликују од уобичајених проблемских ситуација на које ученици наилазе у настави, где се не примењују станадардне процедуре решавања или се следе прецизно дефинисани кораци акција (решење тј. пут доласка до решења не интерпретира се на један и само један начин, односно процес интерпретације се богати).

Враћамо се на проблемску ситуацију размотавања мреже површи квадра. Дајемо могуће вођене кораке.

- Након бојења подударних правоугаоника од ученика тражити да размисле и напишу математичким симболима како би рачунали површину квадра. У овоме им може помоћи упућивање на слику.
- Подударни правоугаоници обојени су једном бојом. Потребно је да размисле и израчунају површину мреже квадра тј. површину целог квадра.
- Могу да се подсете како су рачунали површину једне сложене фигуре састављене из простих. Можемо их подсетити на проблемску ситуацију ‘шивење стољњака’ и/или задатак умотавања (паковања) поклона украсним папиром на почетку рада у овој геометријској теми. Можемо их питати шта смо и како радили. (По потреби се вратити на коришћен дидактички материјал. Све стране квадра положили смо у раван и цртали их на папиру – добили смо мрежу површи квадра.)
- Поред сваког обојеног правоугаоника на слици потребно је да ученици напишу како рачунају његову површину.
- Нека запишу једном јединственом формулом како рачунају површину целог квадра. (Тражити од ученика да се процедурално/реторички изражавају – рачунају површине правоугаоника појединачно и за целу мрежу површи, изражавајући се конкретним мерним бројевима и мерним јединицама и довођење до нивоа формулског изражавања.)

На слици је модел квадра. Замисли да маказама сечеш модел.
На тај начин добио би мрежу површи квадра дату на доњој слици.[60]



Овде пратимо историјску нит геометријске тврдње која је у почетку ишла путем добро изабране слике (и то јасне и уверљиве) (као четири Талесова

[60] Иако наведено сечење картонског модела маказама одудара од реалне ситуације (из практичних разлога обично се у таквим ситуацијама не користе маказе, већ неко друго сечиво), сматрамо оправданим формулацију у наведеном примеру као ‘замисливом’ за децу овог узраста, са идеалним ‘сазецима’ у геометријском простору.

тврђења) (Lučić 2009: 27). Лучић је приметио да је Еуклид својим постулатима покушавао да „обухвати геометријска својства која су пресудна за разумевање геометријског простора“ (Ibid: 44), што је и наша намера. Тиме се постепено следи пут од опажајне геометрије и геометријске индукције кроз форму *историјско-искуствене равни детета* и формирање појма простора кроз формални курс геометрије.

9.4. *Припреме учитеља за часове*

Припреме за часове садржавале су детаљно разрађене активности за реализацију наставе (погледати Прилог 2). Учитељима је детаљно описана свака од геометријских активности за експериментални програм који је трајао две седмице (10 школских часова) за тему „Квадар и коцка“. У припремама за часове дати су предлози за вођени разговор учитеља и ученика, проблемске ситуације за које се сматра да су погодне за математизацију нематематичких ситуација и мотивацију ученика за учење, математички модели за решавање проблема, идеје за учење путем открића, као и могућа ученичка резоновања (расуђивања) као помоћ учитељима у сусрету са наставним приступом реално окружење и иновативним уџбеником који га прати (погледати поглавље иновативног модела уџбеника у Прилогу 1).

10. Тестови

10.1. Тест геометријских способности

У сврху истраживања припремљен је тест геометријских способности за:

1) уједначавање група у експерименталном програму и
2) проверу интеракције експерименталног програма и групе.

Припремили смо га како би испитали ефекте наставног приступа у експерименталном програму за који се залажемо. Геометријске способности разматрамо као просторне способности, онако како их сагледавају Клементс и Батиста (Clements & Battista 1992).

Будући да код нас не постоје готови тестови геометријских способности намењени узрасту млађег школског узраста (9-11 година, популација укључена у експериментални програм), за састављање теста користили смо:

1. нову београдску ревизију Бине – Симонове скале и то:
   - бројање нацртаних коцки и
   - задатак памћења цртежа и
2. батерије:
   - теста визуелне спацијализације,
   - процене перцепције форме и
   - процене опште интелигенције и спацијалних способности (Wolf, Momirović i Džamonja 1992[61]).

Редоследом који смо навели структурисан је наш тест геометријских способности.

Такође смо консултовали тестове геометријских способности намењене старијим основцима (Spatial Test Battery 2010[62]), затим тест специјалних (геометријских) способности (Kvaščev, Đurić i Krkljuš 1989[63]) и Шепард-Метлзер тест (Shepard and Matzler 1971[64]).

Увидом у наведене тестове способности геометријског резоновања намењених нешто старијем узрасту ученика основне школе, издвојили смо пет субтестова. Пилот-тест геометријских способности од пет субтестова смо у

---

[61] Реч је о батеријама: C-1, IT-2 и GT-7. Примењени субтестови су из: 1) ревидиране серије BETA (Kellog, Morton, Linder & Gurvitz): а) BET–5 надопуњавања слика и б) BET–6 тест идентификације; 2) а) CF–2 тест скривених знака (Gotschaldt & Thurstone) и б) P–3 тест идентичних слика (Thurstone).

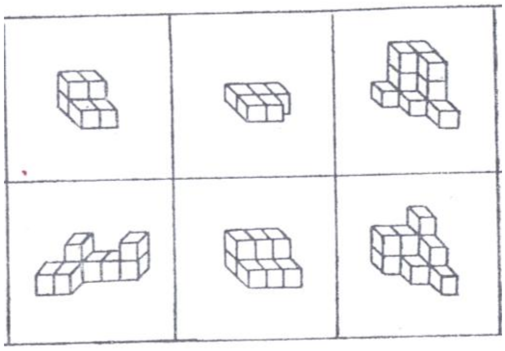
[62] Тест просторних способности – субтестови: 1) визуелно памћење, 2) мреже површи тела, 3) ротација сложених тела и 4) перспектива (*Spatial Test Battery* – subtests: 1) visual memory, 2) surface development, 3) block rotation and 4) perspectives).

[63] 1) TEST S-2 из батерије SVPN-2 Reuchlina & Valina – визуелна специјализација: опажање, замишљање, представљање простора и просторних односа (тест за перцептивно резоновање) и 2) TEST P-2 из батерије SVPN-2 – перцептивна способност на садржајима сложених геометријских структура.

[64] Shepard-Metzler Mental Rotation Test, in: Shepard, R. and Metzler. J. (1971): "Mental rotation of three dimensional objects", *Science*, 171(972):701-3.

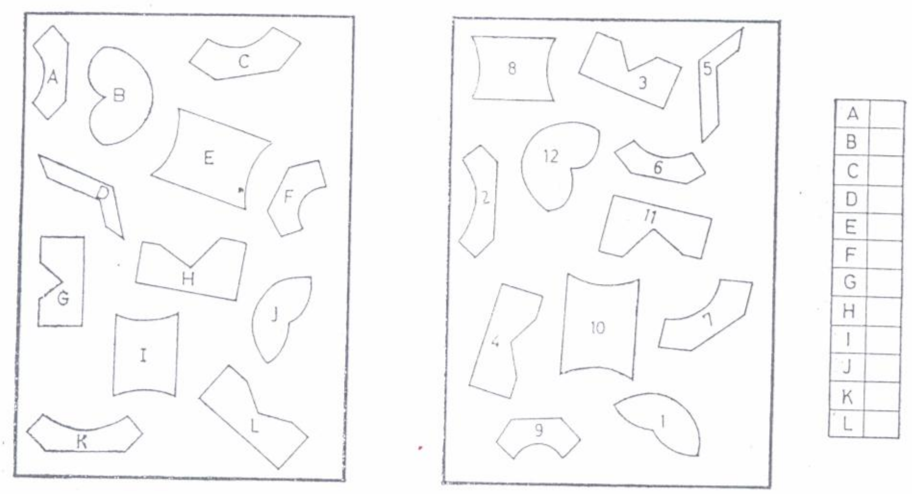
главном тестирању свели на четири са ограниченим временом израде процењеним у пилот-тесту (изостављен је задатак ДВА – памћење цртежа; реч је о задатку који су сви испитаници решавали веома брзо).

Дискутујмо о задацима из Теста. Први задатак (у Тесту означен као ЈЕДАН, видети у Прилогу 3) односи се на слику 17. и пребројавање коцки од којих су сложена тела састављена (овде дајемо само делове задатака, а цео Тест може се видети у наведеном прилогу). Нека од тела састављена су од коцки које не видимо, али можемо да их замислимо (способност визуелизације). Тела су постављена у перспективи, чиме се ствара осећај треће димензије.



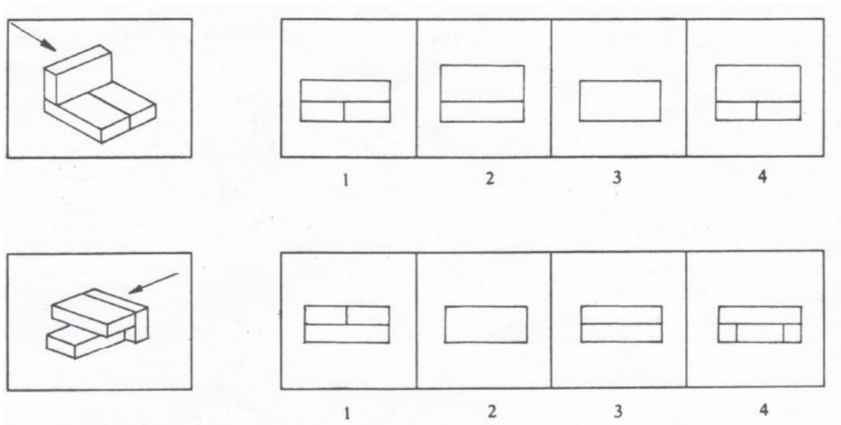
Слика 17.

Други задатак (у Тесту означен као ТРИ) односи се на слику 18. и препознавање ’подударних фигура’. Захтев задатка у оригиналу се односио на тражење ‘истих фигура’. Мора се, обавезно, направити суштинска разлика између појма ’фигуре истог облика’ и ’подударне фигуре’ (Courant i Robbins 1973: 133, Марјановић 1996, II део: 16, Marjanović 2001: 8). Наиме, често се у психолошкој литератури среће термин ‘исте фигуре’, што може да представља потешкоћу у решавању постављеног математичког захтева и тражењу одговарајућих парова фигура. Подударне фигуре су, наравно, истог облика, али обрнуто не мора да буде. Мали и велики круг су истог облика, али нису подударни. Такав је нпр. пар фигура на слици 18. C-7 и F-9.



Слика 18.

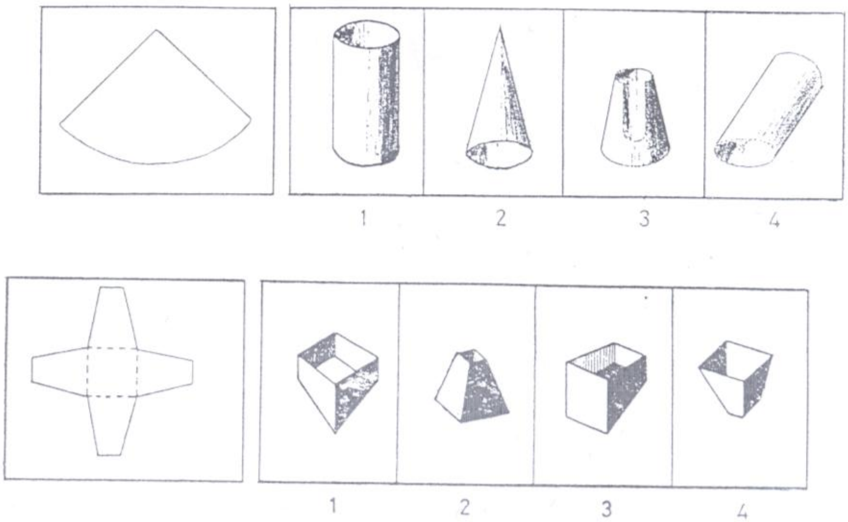
Трећи задатак (у Тесту означен као ЧЕТИРИ) односи се на сложено геометријско тело и гледање на тело из одређене позиције, како то слика 19. показује, те препознавање слике која представља гледање на тело. Питања су везана за паралелно пројектовање и то реално пројектовање (Courant i Robbins 1973: 136, Marjanović 2001: 14). Нисмо се усудили из објективних разлога[65], мада смо размишљали, да обогатимо садржај, где се заклоњени делови тела могу варирати без утицаја на пројекцију.



Слика 19.

[65] Разлог је дужина трајања експеримента и планиране редовне школске активности. Нека нова истраживања могу се планирати у овом смеру.

Четврти задатак (у Тесту означен као ПЕТ) односи се на слику 20. где је потребно повезати раванску фигуру и њој одговарајуће тело (слика тела). Ученик је требало да замисли састављање (склапање) мреже површи тела која формира тело одређеног облика. Поједностављени проблеми мрежа који су овде представљени своде се на препознавање мреже која одговара телу, без потребе увођења метричких карактеристика. Избор тела чије мреже треба препознати сматрамо подстицајаним, посебно пример са ‘отклопљеном зарубљеном пирамидом’. Сличним материјалом су ученици имали прилику да се баве у експерименталном програму.



Слика 20.

10.2. Тестови знања из геометрије – претест и ретест

Тестирање знања ученика било је изведено на почетку и на крају експерименталног програма, у виду претеста и ретеста (почетни и завршни тест, видети Прилог 4). Оба су рађена у трајању једног школског часа од 45 min. Тестови су тако осмишљени да се резултати ученика Е и К-групе могу поредити по успешности решавања (постигнућа ученика по нивоима знања) и структурирани са задацима типа 1 и 2, односно 1.а. и 1.б., те 2.а., 2.б.1. и 2.б.2. Њима се утврђује оствареност циља наставног приступа у реалном окружењу у настави геометрије у теми „Квадар и коцка“ и уџбенику који својим концептом прати изабрани приступ по коме су ученици Е-групе учили.

Задаци на тестовима различитог су типа:

1) вишеструких понуђених одговора,
2) алтернативног одговора,
3) задаци допуњавања,
4) задаци поређења,
5) задаци повезивања,
6) отвореног типа,
7) формирања слике,
8) конструкције,
9) проблемског карактера, отвореног типа.

Задаци типа 1 су задаци у којима су заступљени чињенице и информације. У овој групи задатака је:

- седам са претеста и то: 2., 3., 5., 6., 7., 10. и 11. и
- шест са ретеста и то: 1., 2., 5., 7., 9. и 10.

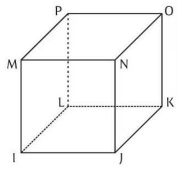
Задаци типа 2 су задаци у којима се знање примењује. У овој групи задатака је:

- седам са претеста и то: 1., 4., 8., 9., 12., 13. и 14. и
- пет са ретеста и то: 3., 4., 6., 8. и 11.

Издвојмо све поменуте задатке са ретеста који је значајан са аспекта изведеног експерименталног програма. Задацима типа 1.а. врши се препознавање и репродукција знања ученика.

2. На слици је представљено тело облика коцке. Замисли да је оно направљено од дрвета и постављено у положај који слика показује.

Допуни следеће реченице:
а) Од укупно ____ страна коцке, видим _____________ и то су: ________________
б) Од укупно ____ темена коцке, не видим __________ и то: ____________________
в) Од укупно ____ ивица коцке, не видим ____________ и то: ___________________



Пет наредних задатака типа 1.б. посвећено је провери разумевања научених чињеница и усвојених информација.

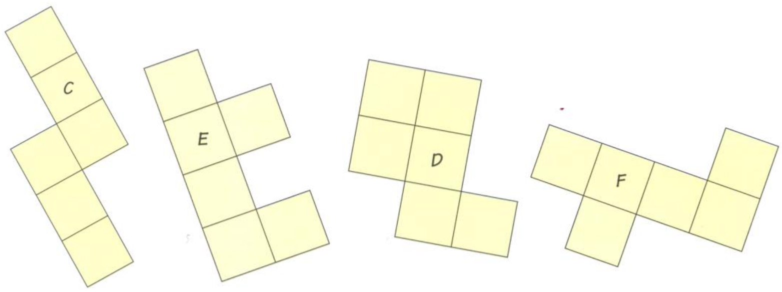
1. Нацртај слике модела: а) коцке и б) квадра.
а) б)

5. Заокружи једно или више слова испред тачних одговора.

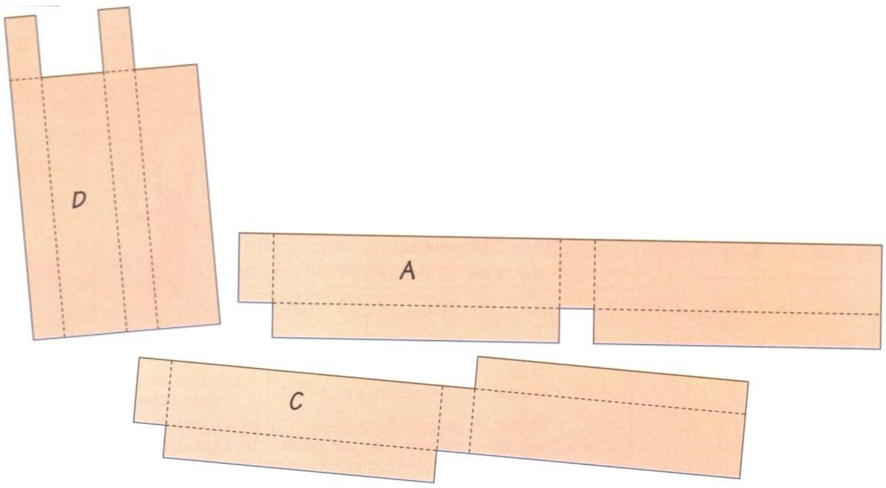
Ако је једна страна квадра квадрат, мрежа површи квадра <u>може да се састоји од</u>:
а) 6 квадрата,
б) 4 квадрата и 2 правоугаоника,
в) 2 квадрата и 4 правоугаоника.

7. Заокружи једно или више слова на мрежама површи:

а) коцки од којих можеш да саставиш моделе коцки.



б) квадара од којих можеш да саставиш моделе квадара.



9. Нацртај мреже површи:

а) квадра чије су ивице a=3 cm, b=2 cm и c=1 cm

и

б) коцке чија је ивица d=1 cm 5 mm

10. Заокружи реч тачно или нетачно према истинитости реченице. Ако је реченица нетачна, напиши је тако да она буде тачна.

Површину коцке рачунаш према формули Р = 4 · а · а.

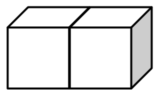
Тачно   Нетачно

Тачна форумула је ________________, јер
______________________________________.

Следећа група задатака посвећена је провери примене знања ученика и то три задатка типа 2.а. Реч је о примени знања ученика у строго математичком контексту.

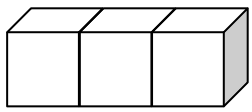
3. Допиши изостављено.

На слици је представљено тело чије су ивице: дужина 4 cm, ширина 2 cm и висина 2 cm. Ако то тело пресечеш на пола како је приказано, добићеш два тела облика ____________________ чије су ивице: дужина ____.



4. На слици су приказане три коцке. Слепљене су по једној или две стране како слика приказује и тако је настало ново тело.

Одговори на следећа питања о новом телу.
а) Ког облика је ново тело? _____________
б) Колико оно има страна? _____________
в) А колико темена? ________________
г) Обележи му она темена која видиш.
д) Колико оно има ивица? ___________



6. Допиши у реченицама оно што је изостављено.

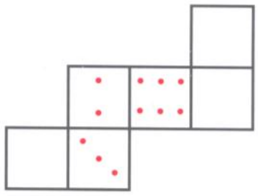
Ако испред себе имаш два модела правоугаоника чије су странице дужина 6 cm и ширина 2 cm и два модела правоуганика чије су странице дужина 8 cm и ширина 2 cm, да би од њих могао да саставиш модел квадра:

а) недостају ти још: ______________________________________,
б) чије су странице: дужина ________________________________.
в) Тај квадар би имао ивице: дужина ___, ширина ___ и висина ___.

Слика:
(уколико је потребно за решавање)

Следећа група задатака посвећена је провери примене знања ученика и то задаци типа 2.б.1. Реч је о примени знања ученика у семи-реалном контексту које води ученике до свесности када математички доносе одлуке и врше процењивања.

8. Замисли да од мреже површи коцке на слици саставиш модел коцке. Допуни доцртавање тачака на овој мрежи тако да важи правило: збир броја тачака на наспрамним странама коцке увек је једнак 7.



И на крају група задатака посвећена провери примене знања ученика и то задатак типа 2.б.2. Реч је о примени знања ученика у чисто реалном контексту који води ученике до решавања правих проблемских задатака.

11. Заокружи једно или више слова испред тачних одговора.

Потребно је да укоричиш једну књигу. Књига је дужине 26 cm, ширине 18 cm и дебљине 2 cm. Она може да се укоричи картоном чије су дужина и ширина:

а) 20 cm и 30 cm, б) 30 cm и 40 cm, в) 40 cm и 50 cm.

1) Решавање:

2) Слика:
(уколико је потребно за решавање)

3) Објасни одговор.

11. Анкете учитеља

Пре почетка експерименталног програма, у току почетног теста знања ученика, учитељи који су учествовали у експерименталном програму су анкетирани (видети Прилог 5., упитник бр.1). Циљ је био сазнати непосредне утиске и мишљења учитеља о предложеним идејама за рад, избору методе учења путем открића, мотивацији ученика, одабиру проблемских ситуација из реалног окружења за увођење појмова и места примене знања, очекивањима у погледу постигнућа ученика од познавања чињеница до примене наученог. У току завршног теста ученика учитељи су анкетирани о мотивацији ученика за учење, оствареној ученичкој самосталности, о вођеним разговорима за учење путем открића, о избору наставних средстава, обрађеном садржају у самом експерименталном програму, примењеном наставном приступу реално окружење и иновативном моделу уџбеника који га прати (видети Прилог 5, упитник бр.2). Резултате анкетирања дајемо у поглављу интерпретације истраживања.

12. Анкете ученика

После завршног теста знања анкетирани[66] су сви ученици (видети Прилог 6). Циљ је био сазнати непосредне утиске и мишљења ученика како су учили на часовима геометрије, како су радили домаће, а како теже задатке, како су разговарали о задацима на часу, да ли су им модели и слике помагали у учењу, како су решавали задатке практичне за живот и затражен је опис уџбеника по коме су учили. Резултате анкетирања дајемо у поглављу интерпретације истраживања.

АНАЛИЗА И ИНТЕРПРЕТАЦИЈА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

13. Кратка запажања са одржаних часова

Усмерићемо се на два аспекта важна за наше истраживање. Занимало нас је како ученици раде задатке у којима се тражи: 1) први ниво знања – *чињенице и информације* и 2) други ниво знања – *примена наученог*. Посебно нас је занимало шта учитељи раде док ученици резонују (расуђују) при тражењу решења.

Први ниво знања – чињенице и информације

Погледајмо пример из иновативног модела уџбеника рађен на часу.

Колико картона ти је потребно да би обложио отворену посуду облика коцке чија је ивица 53 cm? [67]

---

[66] Анкетирање је рађено као фокус-група. На основу постављених есеј питања у анкети, одговори ученика груписани су у одређене категорије, извучене су фреквенце и подаци су статистички обрађени.

[67] Увек се мисли на укупну површину употребљеног картона осим ако у тексту није другачије наведено.

На часу који је претходио изради овог задатка уведен је појам површине квадра и коцке. При изради овог задатка Миљана В. и Вигор В. (ученици из различитих одељења) симболички решавају задатак:

„Површину отворене посуде онда рачунам као 6 · a · a – a · a.“

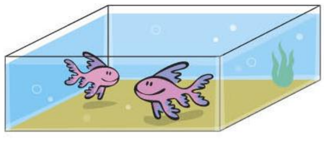
Зашто смо овај задатак издвојили?! Прво зато што га већина ученика ипак у почетку тешко ради или има потешкоћу да објасни своје решење. Други разлог је што и када га ученици решавају, учитељи сами не подстичу на дискусију. Тако смо у чак два од три одељења видели сличну ситуацију. Учитељи не само што нису подстицали на различите репрезентације проблема који се решава, већ нису ни одреаговали на веома успешна дечја уопштавања и изражавање путем симбола која смо навели.

Ученици имају потешкоће при изради задатака са чињеницама, јер им је тешко да замисле, представе у свести геометријске објекте. Овде се оправдано можемо запитати зашто онда толико инсистирати на примени знања а не и на самим задацима чињеница?! Мишљења смо да ово има озбиљне импликације у резултатима нашег истраживања.

Други ниво знања – примена

Погледајмо пример из иновативног модела уџбеника [68].

Горан је све ивице акваријума облика квадра, осим горњих, облепио заштитном траком. Колико му је траке било потребно ако је висина акваријума 15 cm, дужина 43 cm и ширина 30 cm?



[68] У одабраном примеру облагања ивица акваријума, осим горњих, занемарили смо ширину траке (иако је она правоугаоног облика). Узимамо да је ширина траке нешто што је задато (најчешће су ширине 12 *mm*, 25 *mm* итд.). Ученике можемо да учимо да врше процене у свакодневним ситуацијама прављењем избора погодне траке између понуђених трака (које би осигурале заштиту ивица акваријума), али не у почетним елементарним примерима.

Задаци овог типа при решавању захтевају коришћење модела тела и/или способност цртања и/или замишљања тела облика квадра. Уочили смо ученици имају потешкоћу при решавању и објашњењу одговора. Већина ученика ретко или готово никако користи модел или слику док резонује, а ни учитељи их не подстичу (што ће се касније видети и у интерпретацији резултата анкетирања и учитеља и ученика). У овом примеру било је нпр. згодно опцртати ивице акваријума и задатак решити сликом (уколико је било потешкоћа у решавању).

Ово је место да се подсетимо Фишбајновог предлога о могућности практиковања менталних акција ученика у којима се одвија сарадња између фигуре и појма (Fischbein 1993: 156). У таквој активности ученик учи да ментално манипулише геометријским објектом, истовремено прибегавајући операцији са фигуром, те условима и операцијама. Ученици би требало да: 1) цртају слику (доживљену или ментално представљену), 2) препознају тело које се може добити замишљањем слике и 3) саопште шта се дешава када објекат буде реконструисан. Реч је о могућности практиковања менталних акција на које подстиче сам уџбеник са својим захтевима и задацима. При оваквим менталним активностима ученик би вршио поунутарњење имитиране спољашње акције манипулације, а сама ментална конструкција би захтевала не само да се ‘виде’ фигуре, већ да ученици промене своје становиште, да замисле своју измењену позицију, да замисле промену која се догађа итд.

Геометријски простор, који је по својим одликама потпуно другачији од (физичког) простора тј. простора сазданог нашим чулима и чији објекти нису природна тела, већ њихове слике, створен је да би људски ум формирао појам (физичког) простора (Poincaré 1905, према Ђокић 2007: 39). До поменутих идеја долази се проучавањем односа тела једних према другима тј. проучавањем односа делова простора. Поенкаре и каже „да није чврстих тела у природи, не би постојала ни геометрија“ (Ibid: 42).

Стално имамо на уму геометријски простор и његово разумевање путем својстава која су јасна и очигледна помоћу слика. Тако је Лучић приметио да Еуклид у својих пет чувених постулата покушава да „обухвати геометријска својства пресудна за разумевање геометријског простора“ (Лучић 2009: 44). У почетку су геометријске тврдње ишле путем слика, а касније нису биле тако јасне и очигледне да би „подупрле поглед на основе геометрије“ (и на тој основи била је изграђена теорија лочички исправна колико и еуклидска, и то не једна већ више њих) (Ibid: 68).

Погледајмо пример из иновативног модела уџбеника. [69]

Ивице школског акваријума облика коцке су оштећене, па из њега истиче вода. Ученици су одлучили да ојачају ивице заштитном траком и облепе акваријум провидном фолијом. Утрошено је укупно 2 m 6 dm 4 cm траке. Израчунај површину фолије коју ће ученици утрошити за заштиту бочних страна.

О овом питању писали су Хаувел-Панхуизен (Heuvel-Panhuizen 1995, 2001) која наводи као основи разлог посвећеност хоризонталној математизацији и занемаривању вертикалне, као и наши аутори који процењују да је разлог зашто ученици са потешкоћама примењују стечена знања. Али, не ради се само о занемаривању ‘вертикалне’ математизације, већ се ради и о сепаратном учењу о бројним математичким објектима и занемаривању њиховог међусобног прожимања (Црвенковић, Праштало и Романо 2007, према Romano 2009c: 16). Ако смо претходно научили да се површина отворене посуде облика коцке рачуна формулски:

$$6 \cdot a \cdot a - a \cdot a,$$

онда се површина отворене посуде облика коцке без дна рачуна према следећој математичкој формули:

$$4 \cdot a \cdot a.$$

Погледајмо четврти издвојени пример из иновативног модела уџбеника. Ради се о задњем часу трајања експерименталног програма где се проширују знања о површини квадра и коцке.

Картонска кутија за стаклене чаше има димензије 22 cm, 15 cm и 10 cm. Колико се таквих кутија може направити од 10 m^2 картона ако укупни отпаци буду 6 dm^2?

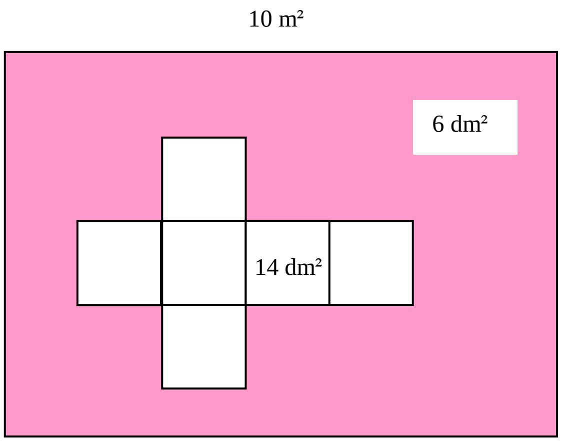
[69] Слично као у претходном примеру. Усложњавање је могуће извести и касније, будући да је наш курикулум спиралног карактера.

Задатак је рачунског карактера и не захтева извођење акције поменуте у тексту. Помоћ при решавању може да буде слика којом се предочава извођење акције и решавање задатог проблема. У задацима овог типа увек је могуће дискутовати о различитим решењима и примерено дечјим способностима. Нпр. скицирати целе мреже квадра (кутије за чаше), без исецања сваке стране независно једна од друге (иако се добијају различите мреже квадара) или са исецањем сваке. Дискутовати о погоднијем решењу према картону који чини отпатке и сл. Али, потребно је имати на уму да почетни задаци буду елементарног карактера и са постепеним усложњавањем. Нпр. ако се хоће дискутовати о различитим решењима, погодније би било да кутије прво буду облика коцке (због мрежа), а затим оне облика квадра (што је чешћа пракса у свакодневним ситуацијама због простора који заузимају тела при слагању итд.).

Иван Ш. (који је остварио 11 бодова више на ретесту у односу на претест) самостално решава задатак преко једначине и објашњава поступак решења:

$$„1\,400\ \text{cm}^2 \cdot x + 600\ \text{cm}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$$
$$x = 71\ (\text{кутија})“$$

Иван се позвао на цртеж којим се служимо још од почетне проблемске ситуације (на слици 21. обојени део папира представља део који иде на отпатке).



Слика 21. Решавање почетне проблемске ситуације – задатак модел

Подсетимо се истраживања Купера и Хариса (Cooper and Harries 2002: 6) и погодних реалистиних проблема при чијем су решавању многи ученици показали вољу и способност да одговоре на математичке задатке смештене у контекст. Добијени резулати су такви да се нису могли очекивати у односу на резултате SEAC британског тестирања из математике. Истраживање говори о озбиљној посвећености подстицања деце да користе математику при решавању проблема у свакодневном животу (без обзира да ли су то текстуално представљени проблеми и тестови или их, пак, деца заиста доживљавају у свакодневном животу ван школе). Подстицање би требало да иде више у смеру повезивања свакодневног дечјег знања и искуства и чисто математичког знања. Упркос тешкоћама, истраживање Купера и Хериса нам дају добру идеју о томе шта деца могу да постигну у решавању проблема ако су им редовно изложени у наставном процесу.

Овде је такав случај. Задатак је био модел још од прве проблемске ситуације за решавање и подстицање дечјег резоновања нпр. шта значи да нешто папира иде на отпатке и шта то означава у математичкој процедури решавања проблема, зашто је потребно поредити површи кутије коцке и површи папира за умотавање итд.

У раду Перија и Докета истиче се значај формалног увођења и развоја ране аргументације, посебно због чињенице да то чини основу математичког доказа у каснијим разредима (Docket & Perry 2002, према English and Watters 2004: 61). Активности математичког моделовања обезбеђују солидну основу за развој аргументације млађих ученика, јер проистичу из својеврсне социјалне интеракције и искуства (Zawojewski, Lesh & English 2003, према English and Watters 2004: 61) и подстичу ефективну комуникацију, тимски рад и рефлексију. У активностима моделовања ученици размењују идеје и описују их, дају објашњења, доказују итд. употребљавајући различите конкретизације математичких појмова или структура.

Погледајмо пети издвојени пример. Реч је о једном од задатака предложених као домаћи.

Задатак:

а) Попуни табелу ако су a, b и c ивице квадра, а P површина квадра са задатим ивицама a, b и c.

a	b	c	$a \cdot b$	$b \cdot c$	$a \cdot c$	P
13 cm	5 cm	4 cm				
10 m			40 m^2		50 m^2	

б) Попуни табелу ако је a ивица коцке, а P површина коцке са задатом ивицом a.

a	P
7 dm	
	600 cm^2

У дискусији при провери решења задатка јасно је било да ученици теже разумевају да су $a \cdot b$, $b \cdot c$ и $a \cdot c$ површине правоугаоника који су уједно и стране квадра чије су ивица a, b и c и то по једна страна квадра – од укупно три – а да ће у формули за цело P бити по две такве стране (као наспрамне стране квадра, што ученици знају од пре). Учитељи сами нису подстицали разумевање.

Подсетимо се и општег резултата Т. Ромберга који сматра да се *потцењује способност ученика за учење математике са разумевањем* (Romberg 2003: 30). Потребно је стварати такве прилике у истраживањима и истраживачким пројектима које би чиниле основу структурисаних математичких активности у којима би ученици учили математику са разумевањем, на било ком узрасту. Математика би требало да се види као активност – сазнавање како дата техника делује, откривање нових, оправдавање тврдњи итд. Ово би такође требало да се рефлектује на то како они који користе математику откривају проблемске ситуације, одлучују о варијаблама, одлучују како да користе математику у квантификовању и довођење у везу варијабли, извођењу рачунања, стварању претпоставки и верификовању корисности претпоставки. Учење са разумевањем се догађа када фокус постаје инструкција која се поставља, када ученици имају времена да развију односе и уче како да користе своја знања, када ученици рефлектују своја размишљања и изражавају своје идеје. Стога, радити математику из ове перспективе не може да буде виђено као механичко извођење или као активност која ангажује појединце следећи унапред одређена правила. „Учење са разумевањем укључује више од способности давања тачног одговора у рутинским задацима“ истиче Ромберг (Romberg 2003: 30).

Не можемо да се отргнемо од оппштег утиска занемаривања уопштавања (генерализација). Учитељи су веома слабо или готово никако уопштавали. Мишљења смо да ово увелико утиче на резултате истраживања.

14. Статистичка анализа резултата теста геометријских способности и тумачење

У табелама 8. и 9. дати су дескриптивни подаци по задацима (читамо аритметичке средине и стандардне девијације) о две групе када говоримо о тесту геометријских способности и то за Е-групу (M=39,96 и SD=6,88) и за К-групу (M=39,33 и SD=6,78). Уочавамо да је за Е-групу распон бодова 27, Min=24 и

Табела 8. Е-група

Descriptive Statistics

Задаци	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
1. ЈЕДАН	0	14	9,45	3,09
2. ТРИ	13	25	20,93	3,23
3. ЧЕТИРИ	0	8	5,73	2
4. ПЕТ	1	5	3,85	,91
Suma	24	51	39,96	6,88

Табела 9. К-група

Задаци	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
1. ЈЕДАН	3	14	9,79	2,80
2. ТРИ	13	25	20,00	2,94
3. ЧЕТИРИ	1	8	5,81	1,90
4. ПЕТ	0	5	3,73	1,06
Suma	21	51	39,33	6,78

Max=51, док је за К-групу распон бодова 30, Min=21 и Max=51.

Опажамо да је за тест геометријских способности распон бодова нешто већи за К-групу, 3 бода је већи. Када поредимо аритметичке средине видимо да су оне готово истоветне. Дакле, ученици обе групе показују веома сличан ниво постигнућа на тесту геометријских способности.

Ово нам указује да су групе уједначене према геометријским способностима. Проверили смо т-тестом да ли је то заиста тако.

14.1. Уједначеност група према тесту геометријских способности

У табели 10. дати су дескриптивни подаци о две групе када говоримо о тесту геометријских способности и то за Е-групу (M=9,99 и SD=1,72) и за К-групу (M=9,83 и SD=1,70).

Табела 10.

Group Statistics

	E=1; K=2	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
IQ_TOTAL	1	9,99	1,72	,20
	2	9,83	1,70	,20

Погледајмо табелу 11. са подацима. *Т-тест* је показао да не постоји статистички значајна разлика између експерименталне и контролне групе с обзиром на постигнуће на тесту геометријских способности, прихватамо нулту хипотезу тј. тврдимо да стварне разлике између група нема (t=0,56; df=146; p>0.05).

Табела 11.

Independent Samples Test

	t-test for Equality of Means		
	t	df	Sig. (2-tailed)
IQ_TOTAL	,56	146	,58

14.2. Поређење дечака и девојчица на тесту геометријских способности

У табели 12. дати су дескриптивни подаци за две групе на тесту геометријских способности и то за дечаке (M=10,09 и SD=1,77) и за девојчице (M=9,67 и SD=1,59).

Табела 12.

Group Statistics

	1=muški; 2=ženski	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
IQ_TOTAL	1	86	10,09	1,77	,19
	2	62	9,67	1,59	,20

Погледајмо табелу 13. са подацима. *Т-тест* је показао да нема статистички значајне разлике између дечака и девојчица с обзиром на постигнуће на тесту геометријских способности, прихватамо нулту хипотезу тј. тврдимо да стварне разлике између дечака и девојчица нема (t=1,49; df=146; p>0,05).

Табела 13.

Independent Samples Test

	t-test for Equality of Means		
	t	df	Sig. (2-tailed)
IQ_TOTAL	1,49	146	,14

14.3. Факторска структура теста геометријских способности и корелације

Радили смо регресиону и факторску анализу. Овде нам је циљ био проверити факторску структуру теста, тј. његову факторску ваљаност.

Регресиона анализа (*регресија*)

Реч је о анализи која нам говори да ли на основу скорова на тесту геометријских способности можемо да предвидимо колико ће ученици напредовати на ретесту, одвојено за контролну и за експерименталну групу.

У Е-групи имамо значајан коефицијент детерминације. Ако покушамо да предвидимо напредак на ретесту на основу скора са теста геометријских способности, добијамо значајну *предикцију*. Али, она је веома мала – коефицијент детерминације (r^2) је 0,10 (табела 14). Овај резултат значи да се са 10% може предвидети напредак, односно са 90% не може. Стога можемо да кажемо да напредак на ретесту није детерминисан само тестом геометријских способности, већ зависи и од других фактора.

Табела 14. Е-група

Model Summary(b)

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,31(a)	,10	,08	,17

a Predictors: (Constant), IQ_TOTAL
b E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

Табелом 15. успоставили смо *F однос* и тестирали нулту хипотезу ($F(1, 60)=6,46$, $p=0,01$). Долазимо до одлуке о статистичкој значајности ($p<0.05$)[70]. Закључујемо да постоји статистички значајна корелација (r) између независне и зависне варијабле тј. између скора са теста геометријских способности и ретеста. Закључујемо и да је статистички значајан проценат објашњене варијабилности зависне варијабле (r^2) . Другим речима, можемо закључити да зависна варијабла зависи од независне тј. ретест зависи од скора са теста геометријских способности. На основу независне (предикторске) варијабле можемо, са одређеним успехом, предвиђати вредности зависне (критеријумске) варијабле тј. на основу скора са теста геометријских способности можемо да предвидимо колико ће ученици Е-групе напредовати на ретесту.

[70] Одлука о статистичкој значајности изводи се поређењем добијене p-вредности са α-нивоом (најчешће 0,05) (Todorović 2008: 433).

Табела 15.

ANOVA(b,c)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	,18	1	,18	6,46	,01(a)
	Residual	1,64	60	,03		
	Total	1,82	61			

a Predictors: (Constant), IQ_TOTAL
b Dependent Variable: TEST_RAZ
c E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

У К-групи нема значајне предикције. Коефицијент детерминације (r^2) је 0,00 (табела 16).

Табела 16. К-група

Model Summary(b)

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,04(a)	,00	-,015	,15

a Predictors: (Constant), IQ_TOTAL
b E=1; K=2 = kontrolna grupa

Табелом 17. успоставили смо *F однос* и тестирали нулту хипотезу (F(1, 61)=0,11), p=0,74). Долазимо до одлуке о статистичкој значајности (p>0.05) тј. коефицијент корелације није статистички значајан[71]. Дакле, на основу независне варијабле не можемо успешно предвиђати вредности зависне варијабле зато што немамо довољно доказа да зависна варијабла зависи од независне у популацији тј. на основу скора са теста геометријских способности не можемо предвидети скор на ретесту за К-групу.

[71] Нема основа да верујемо да је његова вредност у популацији различита од 0 (Todorović 2008: 426). Или другачије речено, прихватамо нулту хипотезу, тврдимо да не постоји линеарна корелација између предикторске и критеријумске варијабле тј. не постоји линеарна корелација између теста геометријских способности и ретеста за К-групу. Предикторска варијабла на основу линеарне регресионе функције не успева да процени вредности критеријумске варијабле боље него што би то могао да учини сам просек критеријумске варијабле тј. тест геометријских способности на основу линеарне регресионе функције не успева да процени скор ретеста боље него што би то могао да учини сам просек ретеста.

Табела 17.

ANOVA(b,c)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	,00	1	,00	,11	,74(a)
	Residual	1,32	61	,02		
	Total	1,32	62			

a Predictors: (Constant), IQ_TOTAL
b Dependent Variable: TEST_RAZ
c E=1; K=2 = kontrolna grupa

Факторска анализа

Наш тест геометријских способности састоји се од четири субтеста (и исто толико варијабли). Факторска анализа нам сугерише да се четири субтеста могу посматрати као тест који испитује једну геометријску способност (подвукла О.Ђ.).

Добили смо податак о томе које варијабле се групишу у који фактор, па логичком анализом долазимо до способности (особине) која би могла да стоји у основи издвојеног фактора (имајући у виду задатке које смо користили)[72]. Тако долазимо до тога да би издвојени фактор могао да се зове просторне способности – све четири варијабле су се груписале заједно. Ниједна варијабла није одступала од јединственог фактора, што нам говори да у основи свих задатака стоји иста способност. Из табеле 18. видимо да су засићења првим издвојеним фактором висока – ова засићења фактора су заправо корелације скорова појединачних субтестова са издвојеним фактором[73]. Стога, наши подаци снажно указују на то да сви одабрани задаци мере једну способност.

Називи варијабли су ознаке које смо користили на тесту геометријских способности:

[72] Факторска анализа представља скуп статистичко-математичких поступака помоћу којих се анализирају интеркорелације између већег броја манифестних варијабли. Циљ је утврдити што мањи број латентних варијабли (тзв. фактора) помоћу којих се може објаснити коваријабилитет између што више манифестних варијабли (емпиријски добијених података), односно велики број манифестних варијабли заменити што мањим бројем латентних варијабли. Затим се одређује степен повезаности сваке манифестне варијабле с тим утврђеним заједничким факторима. Као основа за факторску анализу послужиле су међусобне корелације четири задатака који чине наш Тест.

[73] Видимо да су засићења до 1 (као и увек), што говори да то није 100% само једна способност, али генерално говорећи одступања нису системска и довољна да формирају други фактор. Показатељи дати у табели 18. имају вредност већу од 0,6, што се препоручује као најмањи износ прихватљив за добру факторску анализу (Tabachnick & Fidell 2007, према Pallant 2009: 183). Имамо четири емпиријске варијабле по фактору, што се сматра минималним бројем за поуздану анализу (Todorović 2008: 183).

ЈЕДАН – 1. задатак,

ТРИ – 2. задатак,

ЧЕТИРИ – 3. задатак и

ПЕТ – 4. задатак.

Табела 18.

Component Matrix(a)

	Component
	1
ЈЕДАН	,753
ТРИ	,707
ЧЕТИРИ	,821
ПЕТ	,670

Extraction Method: Principal Component Analysis.
a 1 components extracted.

Заправо, тражили смо корелације скорова појединачних субтестова са фактором, а табелом 18. представили смо засићење тог једног фактора свим варијаблама. Како су се све четири варијабле груписале у један фактор, на тест геометријских способности треба да гледамо као на јединствени тест – тест који мери једну способност[74]. Имамо, дакле, само један скор са овог теста (скроз на тесту геометријских способности).

[74] Пошто ниједан субтест није (високо) корелирао са другим фактором, нисмо радили додатну факторску анализу, нпр. ротацију фактора (што би нам обезбедило издвајање фактора). Наиме, могли смо очекивати да се субтестови групишу у (бар) два фактора где би у један фактор улазили субтестови који се односе на уочавање облика (фигурално резоновање нпр. ТРИ), а у други фактор улазили субтестови који се односе на просторне трансформације (просторно резоновање нпр. ЈЕДАН, ЧЕТИРИ, ПЕТ). Ово би значило да радимо све корелације теста геометријских способности са другим тестовима рачунајући три скора са овог теста – укупни скор геометријских способности, скор на фактору уочавања облика и скор на фактору просторних трансформација.

14.4. Корелације између теста геометријских способности и напредовања на тестовима знања

Испитивали смо и корелације између теста геометријских способности са тестовима знања (претест и ретест). У табелама 19. и 20. налазимо појединачне корелације између следећих варијабли:

1) IQ_TOTAL – укупан скор на тесту геометријских способности;
2) TEST_RAZ – разлика између скора на претесту и ретесту (указује нам на величину напретка);
3) PRE_SUMA – укупан скор на претесту и
4) RET_SUMA – укупан скор на ретесту.

Табеле 19. и 20.[75] организоване су тако да и у редовима и у колонама имамо исте ове варијабле. На пресеку две варијабле (једна у реду и једна у колони) можемо да видимо колика је корелација (повезаност) између њих (Пирсонов коефицијент корелације), а одмах испод видимо да ли је она значајна или није.

Рецимо нешто о *постојању корелације* и *њеном смеру*. Пирсонов коефицијент r може да прими вредности од -1 до +1[76]. Позитиван коефицијент корелације значи да када расте скор на једној варијабли, расте и скор на другој варијабли или ако један скор опада, опада и други. Нпр. позитиван коефицијент корелације између варијабли IQ_TOTAL и TEST_RAZ r=0,31 значи да што дете има виши скор на тесту геометријских способности више и напредује кроз експериментални програм. Израчуната је ниска позитивна корелација између теста геометријских способности и напредовања кроз експериментални програм ($r=0,31$, $N=62$ и $p<0.05$), при чему висок скор на тесту геометријских способности прати висок скор напредовања кроз експериментални програм.

[75] Иако је добро убацити дијаграме растурања, дакле визуелно представити корелације, ми смо одустали да то учинимо на овом месту, због великог броја података у методолошком делу рада. То нам остаје за касније објављивање у некој од научних публикација.

[76] Уколико је r=0 указује на одсуство корелације и прихватање нулте хипотезе да у популацији не постоји линеарна корелација. С друге стране ако је $r\neq0$ онда су промене једне варијабле праћене променама друге варијабле тј. постоји линеарна корелација (Todorović 2008: 408).

Табела 19. Е-група

Correlations(a)

		PRE_SUMA	RET_SUMA	IQ_TOTAL	TEST_RAZ
PRE_SUMA	Pearson Correlation	1	,44(**)	,25(*)	-,28(*)
	Sig. (2-tailed)	.	,00	,05	,03
	N	66	62	66	62
RET_SUMA	Pearson Correlation	,44(**)	1	,46(**)	,74(**)
	Sig. (2-tailed)	,00	.	,00	,00
	N	62	68	68	62
IQ_TOTAL	Pearson Correlation	,25(*)	,46(**)	1	,31(*)
	Sig. (2-tailed)	,05	,00	.	,01
	N	66	68	73	62
TEST_RAZ	Pearson Correlation	-,28(*)	,74(**)	,31(*)	1
	Sig. (2-tailed)	,03	,00	,01	.
	N	62	62	62	62

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).
* Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).
a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

Уколико имамо негативан скор, то значи да са порастом скора на једној варијабли, скор на другој варијабли опада. Нпр. негативан коефицијент корелације између варијабли PRE_SUMA и TEST_RAZ r=-0,28 значи да што дете има нижи скор на претесту више напредује кроз експериментални програм. Израчуната је ниска негативна корелација између претеста и напредовања кроз експериментални програм (r=-0,28, N=62 и p<0.05), при чему низак скор на претесту прати висок скор напредовања кроз експериментални програм.

Из табеле 19. за експерименталну групу можемо прочитати и статистичку значајност коефицијента корелације (ниво значајности 0,01 или 0,05) и утврдити да ли се корелације двеју група значајно разликују (да ли је та разлика случајна или не). Нпр. позитиван коефицијент корелације између варијабли IQ_TOTAL и TEST_RAZ (r=0,31, N=62 и p<0.05), стога је статистички значајна разлика на нивоу значајности 0,05. Позитивна повезаност између успеха (скора) на тесту геометријских способности и напретка кроз експериментални програм је, дакле, стварна, систематска, а не случајна, те са 95% вероватноће тврдимо да постоји стварна разлика. Међутим, она не показује јачину везе између две променљиве (њу показује r), него с колико поверења треба посматрати добијене резултате. На значајност добијеног износа коефицијента r јако утиче величина узорка. Свакако да је потребно да наведемо статистичку значајност коефицијента корелације, али ћемо се усредсредити на јачину везе и величину заједничке варијансе.

Утврдимо *јачину везе* (величина коефицијента корелације) који показује јачину везе између две целе групе промењљивих за експерименталну групу. Издвојили смо оне од коефицијената корелације који су по величини[77]:

1) Велики (висока корелација)
   - RET_SUMA и TEST_RAZ r=0,74 и
2) Средњи (умерена корелација)
   - RET_SUMA и IQ_TOTAL r=0,46,
   - PRE_SUMA и RET_SUMA r=0,44
     и
   - IQ_TOTAL и TEST_RAZ r=0,31[78].

Из овога следи да је јака веза између две целе групе промењљивих (изнад 0,50), што говори у прилог тврдњи да је у нашем истраживању <u>веза између ретеста и величине напретка кроз експериментални програм јака</u> (r=0,74) (подвукла О.Ђ.).

Средње јака веза је између две целе групе промењљивих (изнад 0,30), што говори у прилог тврдњи да је веза између ретеста и теста геометријских способности средње јака (r=0,46). Исто важи и за претест и ретест (r=0,44) тј. веза између претеста и ретеста средње је јака. Иако на граници наводимо и Пирсонов коефицијент (r=0,31) који говори у прилог тврдњи да је веза између теста геометријских способности и напредовања кроз експериментални програм средње јака.

Израчунајмо и њихове *коефицијенте детерминације* који показују колики је део варијансе две целе групе заједнички за експерименталну групу[79].

[77] Коефицијент корелације који има већу апсолутну вредност одражава јачу везу тј. тешњу везу између две варијабле, а онај који је ближе нули одражава слабију везу (Todorović 2008: 409). Разни аутори дају различита тумачења. Тако нпр. Кохен даје следеће смернице за величину корелације: мала r=0,10 do 0,29, средња r=0,30 do 0,49 и велика r=0,50 do 1,00 (Cohen 1988, према Pallant 2009: 135). Или, нпр. Банђур и Поткоњак наводе следећу скалу за коефицијент корелације r: незнатна корелација r од 0,00 до ± 0,20, ниска корелација r од ± 0,20 до ± 0,40, умерена корелација r од ± 0,40 до ± 0,70, висока корелација r од ± 0,70 до ± 0,90 и веома висока r од ± 0,90 до ± 1,0 (Банђур и Поткоњак 1999: 355). Сличну скалу наводи и Драгићевић (Dragićević 2009: 115).

[78] Скоро гранични случај.

Пирсонова корелација r=0,74 има коефицијент детерминације r^2=0,55 тј. 55% заједничке варијансе. <u>Напредак кроз експериментални програм у нашем истраживању објашњава 55% варијансе у одговорима испитаника на ретесту</u> (подвукла О.Ђ.).

Табела 20. К-група

Correlations(a)

		PRE_SUMA	RET_SUMA	IQ_TOTAL	TEST_RAZ
PRE_SUMA	Pearson Correlation	1	,50(**)	,40(**)	-,53(**)
	Sig. (2-tailed)	.	,00	,00	,00
	N	67	63	67	63
RET_SUMA	Pearson Correlation	,50(**)	1	,39(**)	,47(**)
	Sig. (2-tailed)	,00	.	,00	,00
	N	63	74	70	63
IQ_TOTAL	Pearson Correlation	,40(**)	,39(**)	1	-,04
	Sig. (2-tailed)	,00	,00	.	,74
	N	67	70	75	63
TEST_RAZ	Pearson Correlation	-,53(**)	,47(**)	-,04	1
	Sig. (2-tailed)	,00	,00	,74	.
	N	63	63	63	63

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).
a E=1; K=2 = kontrolna grupa

Пирсонова корелација r=0,46 има коефицијент детерминације r^2=0,21 тј. 21% заједничке варијансе. Тест геометријских способности објашњава 21% варијансе у одговорима испитаника на ретесту. Пирсонова корелација r=0,44 има коефицијент детерминације r^2=0,19 тј. 19% заједничке варијансе. Претест објашњава скоро 20% варијансе у одговорима испитаника на ретесту. Пирсонова корелација r=0,31 има коефицијент детерминације r^2=0,10 тј. 10% заједничке варијансе. Тест геометријских способности објашњава 10% варијансе у одговорима испитаника између претеста и ретеста у експерименталном програму.

Дата је иста табела за контролну групу (табела20.).

[79] Колики је део варијансе једне променљиве објашњен (или проузрокован) варијансом друге (Pallant 2009: 135-136). *Напомена*: Не можемо је поредити са другим истраживањима, јер нисмо дошли до таквих података за узраст којим се бавимо (како препоручују многи методолози, нпр. Pallant 2009: 136).

Позитиван коефицијент корелације између нпр. варијабли IQ_TOTAL и RET_SUMA r=0,39 значи да што дете има виши скор на тесту геометријских способности више и напредује на ретесту за контролну групу. Израчуната је средња позитивна корелација између теста геометријских способности и ретеста (r=0,39, N=70 и p<0.01), при чему висок скор на тесту геометријских способности прати висок скор на ретесту.

Негативан коефицијент корелације имамо између нпр. варијабли TEST_RAZ и PRE_SUMA r=-0,53 значи да што дете има виши скор на претесту мање напредује између претеста и ретеста за контролну групу (након обраде геометријске теме по традиционалном приступу). Израчуната је висока негативна корелација између претеста и напредовања између претеста и ретеста (r=-0,53, N=63 и p<0.01), при чему висок скор на претесту прати низак скор напредовања између претеста и ретеста.

Овде се могу *поредити коефицијенти корелација две групе*. Нпр. између PRE_SUMA и TEST_RAZ за Е и К-групу тј. између претеста и разлике скора између претеста и ретеста за две групе. Редом су дати подаци за Е-групу (r=-0,28 из табеле 19.) и за К-групу (r=-0,53 из табеле 20.). Иако се две корелације разликују за две групе, питамо се да ли је та разлика довољно велика да се може сматрати значајном, а не случајном. Ниво значајности читамо из наведених табела. За Е-групу (p=0,03 тј. p<0,05), стога је статистички значајна разлика на нивоу значајности 0,05. Негативна повезаност између успеха (скора) претеста и напредовања између претеста и ретеста је, дакле, стварна, систематска, а не случајна, те са 95% вероватноће тврдимо да постоји стварна разлика. За К-групу (p=0,00 тј. p<0,01), стога је статистички значајна разлика на нивоу значајности 0,01. Негативна повезаност између успеха (скора) претеста и разлике скора између претеста и ретеста је, дакле, стварна, систематска, а не случајна, те са 99% вероватноће тврдимо да постоји стварна разлика. Ево једног могућег начина провере статистичке значајности између два наведена коефицијента корелације. Након претварања одређених вредности[80], добијамо вредност -1,58. Будући да је израчуната вредност између -1,96 и +1,96 (-1,96<-1,58<1,96), добијамо да се

[80] Вредности r у вредности z, а затим помоћу једначине израчунати опажену вредност z итд. Тај број се оцењује на основу утврђених правила одлучивања и израчунавања вероватноће да је разлика у корелацији опажена између Е и К-групе последица случајности (Pallant 2009: 143).

коефицијенти корелације статистички не разликују значајно, прихватамо нулту хипотезу (нема разлике између Е и К-групе, добијена разлика је случајна). Тако и са осталим поређењима коефицијената корелација Е и К-групе.

Из табеле 20. можемо прочитати и статистичку значајност коефицијента корелације тј. ниво значајности (0,01 или 0,05). тј. утврдити да ли се корелације двеју група значајно разликују за контролну групу (да ли је та разлика случајна или не). Нпр. позитиван коефицијент корелације између варијабли IQ_TOTAL и RET_SUMA ($r=0{,}39$, $N=70$ и $p<0.01$) и добили смо статистички значајну разлику на нивоу значајности 0,01. Позитивна повезаност између успеха (скора) на тесту геометријских способности и напретка између претеста и ретеста је, дакле, стварна, систематска, а не случајна, те са 99% вероватноће тврдимо да постоји стварна разлика.

Утврдимо *јачину веза* за контролну групу. Издвојили смо оне од коефицијената корелације који су по величини:

1) Велики (висока корелација)
   - TEST_RAZ и PRE_SUMA r=-0,53 и
2) Средњи (умерена корелација)
   - RET_SUMA и PRE_SUMA r=0,50,
   - TEST_RAZ и RET_SUMA r=0,47,
   - IQ_TOTAL и PRE_SUMA r=0,40 и
   - IQ_TOTAL и RET_SUMA r=0,39.

Из овога следи да је јака веза између две целе групе промењљивих (изнад 0,50), што говори у прилог тврдњи да је у нашем истраживању <u>веза између претеста и разлике скора између претеста и ретеста јака за контролну групу</u> (r=-0,53) (подвукла О.Ђ.).

Средње јака веза је између две целе групе промењљивих (изнад 0,30), што говори у прилог тврдњи да је веза између претеста и ретеста на граници између јаке и средње јаке (r=0,50), а средње јаке везе су између разлике скора претеста и ретеста и ретеста (r=0,47), између теста геометријских способности и претеста (r=0,40) и теста геометријских способности и ретеста (r=0,39) у контролној групи.

Израчунајмо и њихове *коефицијенте детерминације*. Пирсонова корелација r=-0,53 има коефицијент детерминације r^2=0,28 тј. 28% заједничке варијансе. <u>Претест објашњава 28% варијансе у одговорима испитаника између претеста и ретеста за контролну групу у нашем истраживању</u> (подвукла О.Ђ.).

Пирсонова корелација r=0,50 има коефицијент детерминације r^2=0,25 тј. 25% заједничке варијансе. Претест објашњава 25% варијансе у одговорима испитаника на ретесту. Пирсонова корелација r=0,47 има коефицијент детерминације r^2=0,22 тј. 22% заједничке варијансе. Ретест објашњава 22% варијансе у одговорима испитаника у напретку између претеста и ретеста. Пирсонова корелација r=0,40 има коефицијент детерминације r^2=0,16 тј. 16% заједничке варијансе. Тест геометријских способности објашњава 16% варијансе у одговорима испитаника на претесту. Пирсонова корелација r=0,39 има коефицијент детерминације r^2=0,15 тј. 15% заједничке варијансе. Тест геометријских способности објашњава 15% варијансе у одговорима испитаника на ретесту.

Приметимо следеће за оне корелације које су од значаја за наш рад. За Е-групу веза између ретеста и величине напретка кроз експериментални програм је јака и позитивна (r=0,74). Што је већи скор на ретесту, то је и већа разлика у скору између ретеста и претеста – примећујемо напредак у експерименталном програму. За Е-групу веза између ретеста и теста геометријских способности је средње јака и позитивна (r=0,46) Што дете има већи скор на тесту геометријских способности, више и напредује кроз експериментални програм. Стога експериментални програм више погодује ученицима бољих геометријских способности.

За К-групу веза између претеста и разлике између претеста и ретеста је јака и негативна (r=-0,53). Што је већи скор на претесту, показао се мањи напредак ученика – скор разлике између претеста и ретеста. Примећујемо да су ученици К-групе показали ниво знања који је нижи на ретесту у односу на претест.

15. Статистичка анализа резултата тестова знања и тумачење

Дате су табеле 21. и 22. са дескриптивном статистиком за Е и К-групу по задацима за оба теста[81]. Погледајмо прво укупне резултате ученика на тестовима знања. Из табеле 21. читамо аритметичке средине и стандардне девијације за Е-групу претест (M=16,71 и SD=5,28) и ретест (M=22,78 и SD=6,26) и из табеле 22. за К-групу претест (M=16,69 и SD=6,28) и ретест (M=16,62 и SD=5,77). За претест за Е-групу распон бодова је 26, Min=5 и Max=31, док је за К-групу распон бодова 28, Min=4 и Max=32. За ретест за Е-групу распон бодова је 25, Min=9 и Max=34, док је за К-групу распон бодова 30, Min=2 и Max=32.

Табела 21. Е-група

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
PRE_SUMA	5,00	31,00	16,71	5,28
RET_SUMA	9,00	34,00	22,78	6,26

Табела 22. К-група

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
PRE_SUMA	4,00	32,00	16,69	6,28
RET_SUMA	2,00	32,00	16,62	5,77

Опажамо да је за претест распон бодова релативно сличан за две групе, док је за ретест већи распон бодова К-групе. Када поредимо аритметичке средине видимо да су оне на претесту релативно сличне, док је на ретесту за Е-групу она значајно већа. Дакле, <u>добили смо очекивани раст средње вредности постигнућа ученика који су учествовали у експерименталном програму</u>. Ова разлика указује да <u>постоји ефекат наставног приступа ‘реално окружење’ на постигнуће ученика из геометрије</u> (подвукла О.Ђ.).

[81] Целе табеле са свим вредностима и за сваки задатак појединачно дајемо у дескриптивној статистици у Прилогу 7.

У табелама 23. и 24. дати су дескриптивни подаци за обе групе по типовима задатака (1а, 1б, 2а, 2б1, 2б2). Наводимо аритметичке средине и стандардне девијације за Е-групу претест (M=0,37 и SD=0,13) и ретест (M=0,43 и SD=0,19), те за К-групу претест (M=0,38 и SD=0,15) и ретест (M=0,28 и SD=0,15).

Када упоредимо аритметичке средине упросечених резултата за претест по типовима задатака, видимо да су оне релативно сличне, док се за ретест разликују – за Е-групу аритметичка средина је значајно већа. Опажамо и да је аритметичка средина на ретесту упросечених резултата по типовима задатака за К-групу мања у односу на претест.

Табела 23. Е-група

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
PRE_SUMA	,09	,74	,37	,13
RET_SUMA	,09	,88	,43	,19

Табела 24. К-група

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
PRE_SUMA	,12	,82	,38	,15
RET_SUMA	,02	,74	,28	,15

15.1. *Поређење Е и К-групе с обзиром на укупно постигнуће на два теста – претест и ретест*

Утврђивали смо да ли постоје разлике између аритметичких средина које потичу из независних узорака (да ли је варијабилитет између група већи од варијабилитета унутар група) примењујући анализу варијансе. Значајност разлике проверавали смо F тестом.

У тражењу прикладне статистичке технике, могли смо се определити за t-тест (који се употребљава када имамо само две групе или две тачке у времену) или технику анализе варијансе (која се употребљава када имамо две или више група или тачака у времену). Наш избор је био анализа варијансе којом смо утврђивали да ли постоје значајне разлике између Е и К-групе. Накнадним поређењима желели смо да обавимо цео низ поређења. Анализа варијансе за поновљена мерења нам је то омогућила. Прво смо рачунали укупан F показатељ који нам је указао има ли значајних разлика између група у пројекту. Ако је укупан F показатељ значајан (што указује да постоји разлика између група), обавили смо додатне тестове за идентификацију тих разлика (Pallant 2009: 203, Банђур и Потконјак 1999: 432). Иначе, математички једноставан однос између вредности F-количника и t-количника (t-количник је једнак корену одговарајућег F-количника) нам указује да је одлука о статистичкој значајности за оба теста једнака тј. ако један тест утврди да је разлика статистички значајна, односно незначајна, и други тест ће то исто утврдити, па је свеједно који се од њих користи (Todorović 2008: 328-329).

У табели 25. дати су резултати *ANOVA анализе варијансе за поновљена мерења*. Она нам показује да постоји интеракција између фактора претест-ретест и група када посматрамо укупно постигнуће на целом тесту ($F(1,123)= 36,42$, $p<0,05$) [82].

Табела 25 .

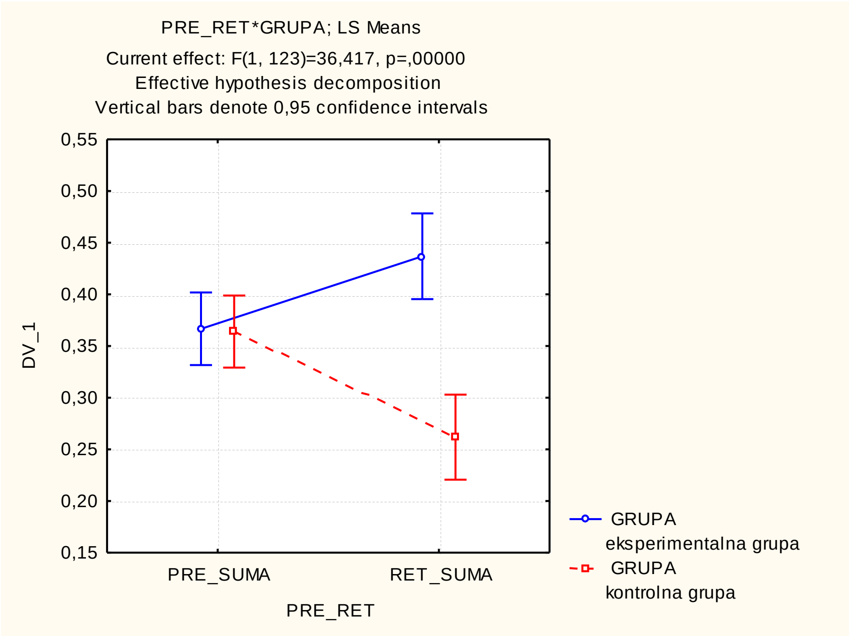
	SS	**Degr. of**	**MS**	**F**	**p**
Intercept	31,93	1	31,93	940,19	0,00
GRUPA	0,49	1	0,49	14,52	0,00
Error	4,18	123	0,03		
PRE_RET	0,02	1	0,02	1,26	0,26
PRE_RET*GRUPA	0,46	1	0,46	36,42	0,00
Error	1,57	123	0,01		

Разлика између претеста и ретеста Е и К-групе статистички је значајна, а не случајна, одбацујемо нулту хипотезу. Статистички се потврђује дејство независне варијабле реално окружење на зависну варијаблу постигнуће ученика.

Испод дајемо графикон 1. из исте анализе на основу ког видимо какав ефекат има наш експериментални програм.

[82] Важан нам је ред PRE_RET GRUPA (осенчено) и то подаци за степене слободе, вредности F и значајност разлике p које наводимо и описујемо.

Графикон 1 .



На основу графикона 1. видимо да је Е-група значајно напредовала, док су ученици из К-групе лошији на ретесту у односу на претест (подвукла О.Ђ.).

Како је F вредност статистички значајна, то значи да најмање једна од разлика између аритметичких средина, које су оствариле Е и К-група ученика на претесу и ретесту, мора бити статистички значајна. Табела 26. то и показује. Статистичку значајност разлика утврђујемо *анализом варијансе* представљену у поменутој табели.

Табела 26.

	GRUPA	PRE_RET	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	E-grupa	PRE_SUMA		0,01	1,00	0,00
{2}	E-grupa	RET_SUMA	0,01		0,07	0,00
{3}	K-grupa	PRE_SUMA	1,00	0,07		0,00
{4}	K-grupa	RET_SUMA	0,00	0,00	0,00	

Све што је осенчено је статистички значајно[83]. Од укупно шест могућих разлика ($\frac{4\cdot(4-1)}{1\cdot 2}=6$) између аритметичких средина група видимо да је њих

[83] Читамо p вредности из табеле 26. тј. статистички значајне разлике у два тестирања две групе (које се међусобно пореде).

четири значајно и то на нивоу 0,05, на овом нивоу одбацујемо нулту хипотезу тј. са сигурношћу од 95% можемо да тврдимо да међу разликама аритметичких средина мора бити бар једна значајна.

Значајне су следеће разлике између аритметичких средина: Е-групе претест и Е-групе ретест (0,01), К-групе ретест и Е-групе претест (0,00), К-групе ретест и Е-групе ретест (0,00), К-групе ретест и К-групе претест (0,00).

Дакле, постоји статистички значајна разлика између постигнућа експерименталне групе на претесту и ретесту, као и између постигнућа контролне групе на претесту и ретесту, с тим да је Е-група на ретесту боља него на претесту, а К-група је лошија него на претесту.

15.2. *Ефекти за све задатке типа 1 заједно (1а и 1б)*

Следе подаци за ефекте када се задаци из категорија 1а и 1б упросече.

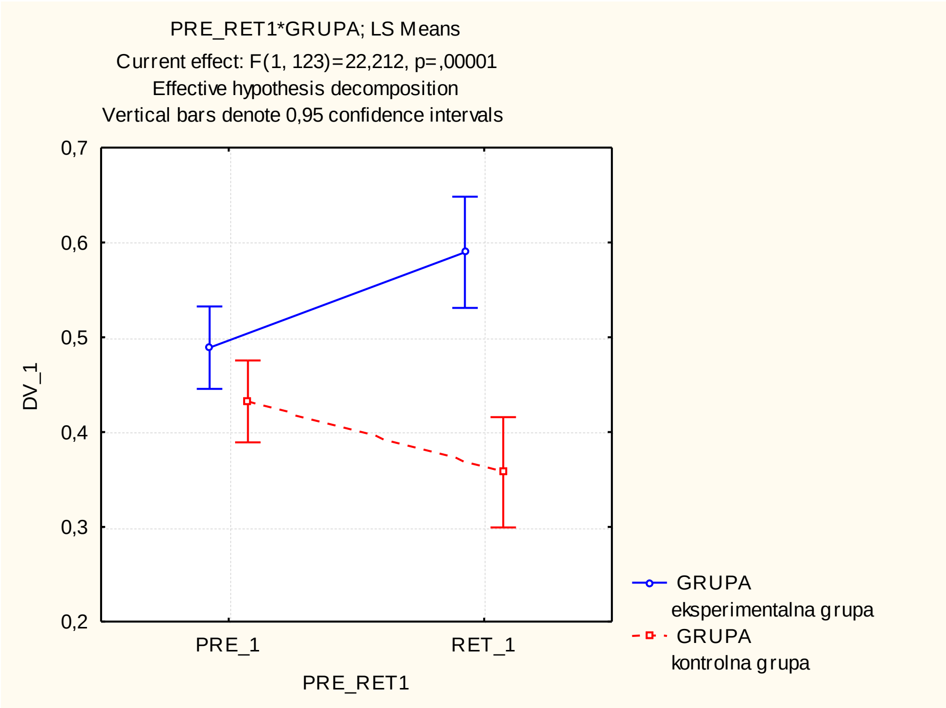
Из табеле 27. видимо да имамо интеракцију између фактора претест-ретест1 и група ($F(1,123)= 22,21$, $p<0,05$). Е и К-група се различито понашају на ретесту за задатке типа 1.

Табела 27.

	SS	Degr. of	MS	F	p
Intercept	54,56	1	54,56	869,04	0,00
GRUPA	1,30	1	1,30	20,76	0,00
Error	7,72	123	0,06		
PRE_RET1	0,01	1	0,01	0,48	0,49
PRE_RET1*GRUPA	0,48	1	0,48	22,21	0,00
Error	2,66	123	0,02		

Испод је графикон 2., а онда и накнадни тестови за утврђивање разлика у табели 28.

Графикон 2.



За тип задатка 1 (чињенице и информације – препознавање и репродукција и разумевање) <u>Е-група је значајно боља на ретесту у односу на претест, К-група је значајно лошија на ретесту</u> (подвукла О.Ђ.).

Табела 28.

	GRUPA	PRE_RET1	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	E-grupa	PRE_1		0,00	0,66	0,01
{2}	E-grupa	RET_1	0,00		0,00	0,00
{3}	K-grupa	PRE_1	0,66	0,00		0,05
{4}	K-grupa	RET_1	0,01	0,00	0,05	

Из табеле 28. читамо које су разлике између аритметичких средина значајне: Е-групе претест1 и Е-групе ретест1 (0,00), Е-групе претест1 и К-групе ретест1 (0,01), Е-група ретест1 и К-групе претест1 (0,00), Е-групе ретест1 и К-групе ретест1 (0,00) и К-групе претест1 и К-групе ретест1 (0,05).

Смислене и значајне за наш рад су разлике за тип задатка 1 Е-група за претест и ретест, те Е и К-група за ретест.

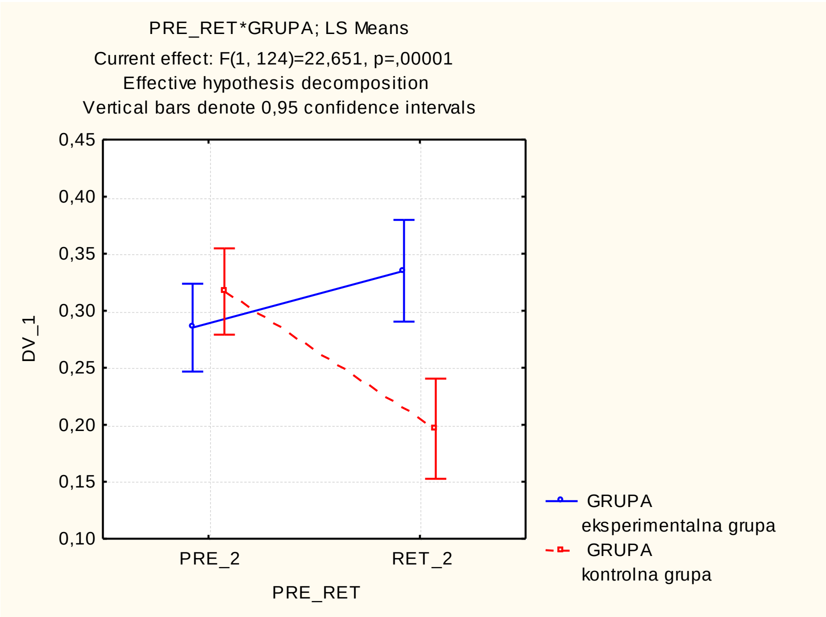
15.3. *Ефекти за све задатке типа 2 заједно (2а, 2б1 и 2б2)*

Из табеле 29. видимо да имамо интеракцију фактора претест-ретест2 и група ($F(1,124)=22{,}65$, $p<0{,}05$). Али, интеракција не потиче од побољшања постигнућа Е-групе на ретесту (они остају на истом нивоу), већ од лошијег постигнућа К-групе на ретесту у односу на претест за задатке типа 2 (примене – унутарматематичке и спољноматематичке) (подвукла О.Ђ.).

Табела 29.

	SS	Degr. of	MS	F	p
Intercept	20,23	1	20,23	581,64	0,00
GRUPA	0,18	1	0,18	5,17	0,03
Error	4,31	124	0,04		
PRE_RET	0,08	1	0,08	3,88	0,05
PRE_RET2*GRUPA	0,46	1	0,46	22,65	0,00
Error	2,50	124	0,02		

Графикон 3.



Табела 30.

	GRUPA	PRE_RET	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	E-grupa	PRE_2		0,29	0,82	0,03
{2}	E-grupa	RET_2	0,29		0,94	0,00
{3}	K-grupa	PRE_2	0,82	0,94		0,00
{4}	K-grupa	RET_2	0,03	0,00	0,00	

Из табеле 30. читамо значајне разлике између аритметичких средина и то: Е-групе претест2 и К-групе ретест2 (0,03), Е-групе ретест2 и К-групе ретест2 (0,00) и К-групе претест2 и К-групе ретест2 (0,00).

15.4. *Резултати по питањима – типови задатака*

Следе резултати по питањима – типовима задатака.

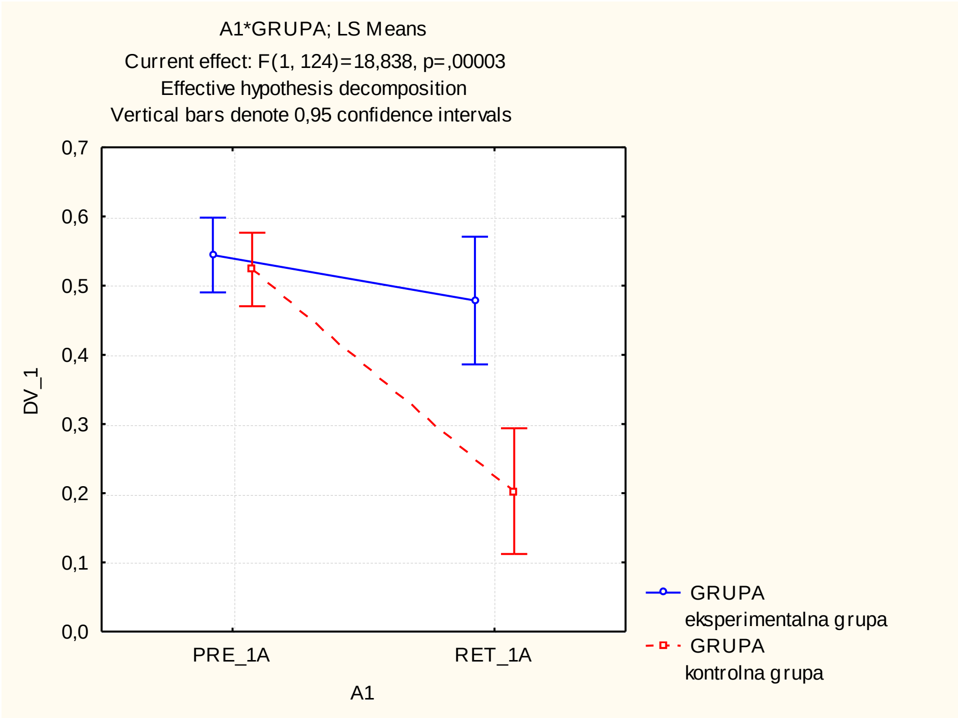
15.4.1. Задатак типа 1а

Из табеле 31. видимо да постоји интеракција између фактора група и постигнућа на задацима типа 1а на претесту и ретесту ($F(1,124)=18,84$, $p<0,05$).

Табела 31.

	SS	Degr. of	MS	F	p
Intercept	48,19	1	48,19	379,46	0,00
GRUPA	1,38	1	1,38	10,89	0,00
Error	15,75	124	0,13		
1A	2,35	1	2,35	43,39	0,00
1A *GRUPA	1,02	1	1,02	18,84	0,00
Error	6,71	124	0,05		

Графикон 4.



Са графикона 4. видимо да је <u>постигнуће Е-групе готово истовентно на претесту и ретесту, док се постигнуће К-групе разликује на два тестирања, значајно су лошији резултати на ретесту за задатке типа 1а (чињенице и информације – препознавање и репродукција)</u> (подвукла О.Ђ.).

Табела 32.

	GRUPA	A1	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	E-grupa	PRE_1A		0,48	0,99	0,00
{2}	E-grupa	RET_1A	0,48		0,87	0,00
{3}	K-grupa	PRE_1A	0,99	0,87		0,00
{4}	K-grupa	RET_1A	0,00	0,00	0,00	

Из табеле 32. видимо значајне следеће разлике између аритметичких средина: Е-групе претест1а и К-групе ретест1а (0,00), Е-групе ретест1а и К-групе ретест1а (0,00) и К-рупе претест1а и К-групе ретест1а (0,00).

У овом задатку се тражи познавање чињеница. Очекивали смо да ученици Е-групе напредују (мада када се резултати упросече за тип задатка 1 добије се ефекат програма према Е-групи). Проблем може да буде број задатака. Што је више задатака, мерење је тачније посматрано методолошки. Сматрали смо да знања ученика нарастају и да се више иде ка разумевању и применама, што је оправдано са образовног аспекта. Овде проблем може да буде и аспект *замишљања геометријских објеката и њихови односи*. То може још увек да ствара потешкоћу неким ученицима, стога је потребно да учитељи и уџбеници подстичу ученике у овом смеру и то у дужем временском периоду. Наш експериментални програм је, ипак, кратко трајао.

Погледајмо из дескриптивне статистике (Прилог 7) како су ученици решавали задатке типа 1а. На ретесту Е-група има упросечен резултат 0.46 и К-група 0.24 (могуће је било освојити по 1 бод). Ако погледамо по деловима задатака (а, б, в) просечни резултати изгледају овако: за Е-групу редом 0.53, 0.41 и 0.44 тј. најбоље се решава 2а, па 2в, те 2б, а за К-групу 0.27, 0.22 и 0.23 тј. најбоље се решава 2а, па 2в, те 2б (исто као за Е-групу). Ученици лако замишљају стране геометријског тела облика коцке, а имају проблем са ивицама и теменима. Будући да је максимално било могуће освојити по 1 бод (укупно 3), примећујемо да је за К-групу просек по задацима доста лош тј. задаци су лоше урађени.

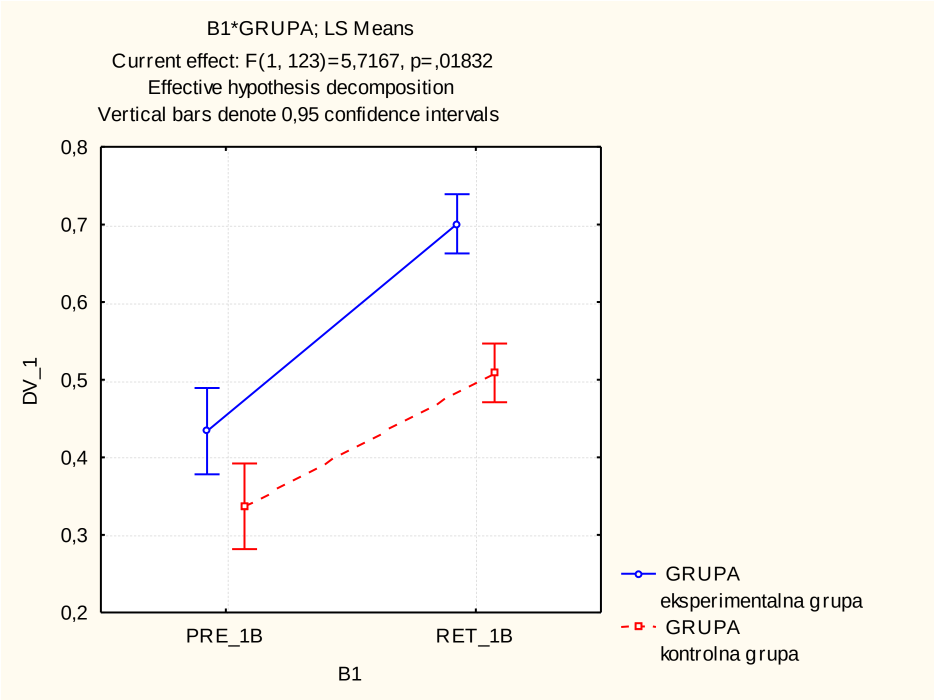
15.4.2. Задатак типа 1б

Из табеле 33. видимо да постоји интеракција између фактора група и постигнућа на задацима типа 1б на претесту и ретесту ($F(1,123)=5,72$, $p<0,05$).

Табела 33.

	SS	Degr. of	MS	F	p
Intercept	61,26	1	61,26	1298,57	0,00
GRUPA	1,30	1	1,30	27,65	0,00
Error	5,80	123	0,05		
1B	3,01	1	3,01	121,44	0,00
1B *GRUPA	0,14	1	0,14	5,72	0,02
Error	3,05	123	0,03		

Графикон 5.



Са графикона 5. се види да су обе групе постигле боље резултате на ретесту у односу на претест за задатке типа 1б (чињенице и информације – разумевање) (подвукла О.Ђ.).

Табела 34.

	GRUPA	B1	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	E-grupa	PRE_1B		0,00	0,11	0,18
{2}	E-grupa	RET_1B	0,00		0,00	0,00
{3}	K-grupa	PRE_1B	0,11	0,00		0,00
{4}	K-grupa	RET_1B	0,18	0,00	0,00	

Из табеле 34. читамо значајне следеће разлике између аритметичких средина: Е-групе претест1б и Е-групе ретест1б (0,00), Е-групе ретест1б и К-групе претест1б (0,00), Е-групе ретест1б и К-групе ретест1б (0,00) и К-групе претест1б и К-групе ретест1б (0,00). Видимо да се Е и К-група значајно разликују на ретесту за задатке типа чињенице и информације – разумевање. Ипак ученици Е-групе показују боље постигнуће (види се на графикону 5.)

Разлоге овоме можемо да потражимо у самом уџбенику, јер се доста инсистира на овом типу задатка.

Погледајмо из дескриптивне статистике (Прилог 7) како су ученици решавали задатке типа 1б. На ретесту Е-група има упросечен резултат 0.70 и К-група 0.52 (могуће је било освојити редом 0.90 тј. 0.85 бодова). Ако погледамо по задацима просечни резултати изгледају овако. За задатак:

1. за Е-групу редом 1.38 и 1.26 (могуће је било освојити по 2 бода) тј. боље се решава 1а, па 1б, а за К-групу 0.97 и 0.93 тј. боље се решава 1а, па 1б (исто као за Е-групу),

5. за Е-групу редом 0.28, 0.84 и 0.74 (могуће је било освојити по 1 бод) тј. најбоље се решава 5б, па 5в и на крају 5а, а за К-групу редом 0.31, 0.65 и 0.61 тј. најбоље се решава 5б, па 5в и на крају 5а (исто као за Е-групу),

7. за Е-групу редом 3.53 и 2.79 (могуће је било освојити 4 и 3 бода) тј. боље се решава 7а, па 7б, а за К-групу 2.76 и 2.20 тј. боље се решава 7а, па 7б (исто као за Е-групу),

9. за Е-групу редом 0.99 и 1.16 (могуће је било освојити по 2 бода) тј. боље се решава 9б, па 92, а за К-групу 0.41 и 0.68 тј. боље се решава 9б, па 9а (исто као за Е-групу),

10. за Е-групу 1.03 (могуће је било освојити 2 бода), а за К-групу 0.93.

Задатак 1 односи се на цртање квадра и коцке. Ученици обе групе су успешнији у цртању коцке.

Задатак 2 односи се на тачност одређених математичких тврдњи. Ученици се стављају у позицију да испитају њихову тачност. Реч је о квадру коме је једна страна квадрат. Ученике стављамо у позицију упитаности од којих фигура може да се састоји мрежа тог квадра (понуђене су три тврдње чија се истинитост проверава). Будући да су ученици учећи о појмовима квадра и коцке, те њиховим мрежама, имали прилику да се сусретну са два тј. са сва три квадра (6 правоугаоника; 4 правоугаоника и 2 квадрата; 6 квадрата, јер је коцка квадар), било је могуће саставити овакво тестовско питање које тражи разумевање наученог, формулисано речима. Ученици обе групе лоше су радили и имали су потешкоћу са тврдњом која се односила на квадар чије су све стране квадрати тј. чија је мрежа састављена од 6 квадрата.

Задатак 7 је тражио препознавање која од понуђених мрежа површи може да се састави и чини мрежу површи коцке, а затим и квадра. Ученици обе групе боље решавају задатак са мрежама површи коцке, а слабије са мрежама површи квадра.

Задатак 9 тражи цртање мрежа површи квадра и коцке задатих димензија. Ученици обе групе лакше цртају мрежу коцке. Овде примећујемо да ученици лоше раде задатак и имају тешкоћу са цртањем мрежа.

Задатак 10 тражио је утврђивање истинитости математичке тврдње за формулу којом се рачуна површина коцке. У случају утврђивање њене нетачности, тражио се правилан запис формуле. Ученици обе групе слабије решавају задатак (према максималном броју бодова гледамо упросечен резултат). Овде се поставља питање да ли су ученици слабије решавали задатак јер им није позната формула за израчунавање површине коцке или проблем ствара овакав тип питања.

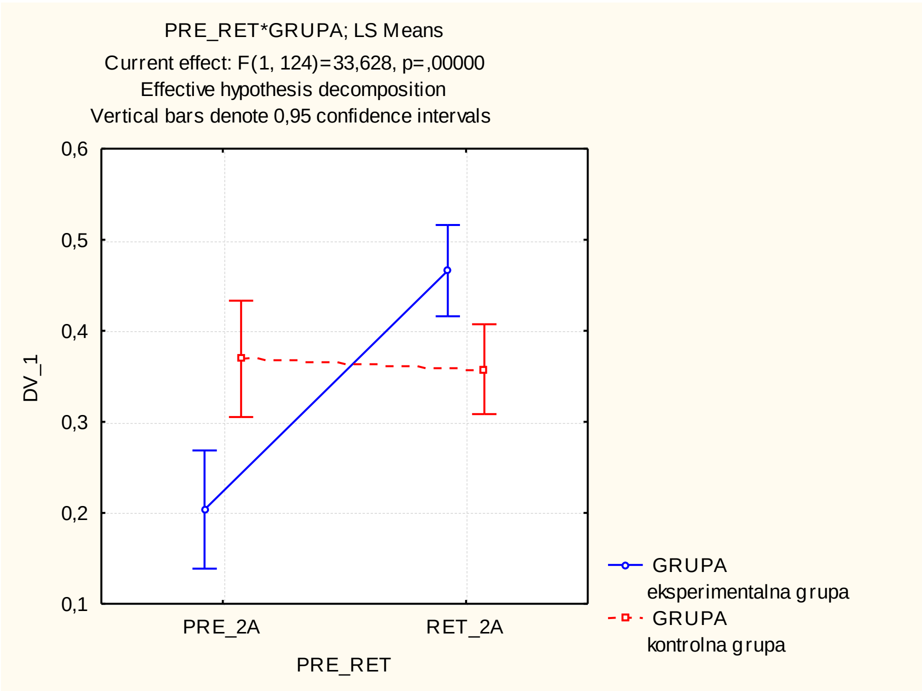
15.4.3. Задатак типа 2а

Из табеле 35. видимо значајну интеракцију фактора група и претест-ретест када је у питању постигнуће на задацима типа 2а ($F(1,124)=33,63$ и $p<0,05$).

Табела 35.

	SS	Degr. of	MS	F	p
Intercept	30,72	1	30,72	430,29	0,00
GRUPA	0,05	1	0,05	0,72	0,40
Error	8,85	124	0,07		
2A	0,99	1	0,99	28,29	0,00
2A*GRUPA	1,18	1	1,18	33,63	0,00
Error	4,35	124	0,04		

Графикон 6.



На графикону 6. се види да је <u>Е-група значајно боља на ретесту</u> (из табеле 36. видимо да је разлика у постигнућу на претесту и ретесту статистички значајна), <u>док К-група остаје на истом нивоу у два тестирања за задатке типа 2а (примене – унутарматематичке тј. примене у строго математичком контексту</u>) (подвукла О.Ђ.).

Из табеле 36. читамо значајне разлике између аритметичких средина: Е-групе претест2а и Е-групе ретест2а (0,00), Е-групе претест2а и К-групе претест2а (0,01) и Е-групе претест2а и К-групе ретест2а (0,00). Нема статистички значајне разлике између група на ретесту.

Табела 36.

	GRUPA	PRE_RET	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	E-grupa	PRE_2A		0,00	0,01	0,00
{2}	E-grupa	RET_2A	0,00		0,14	0,17
{3}	K-grupa	PRE_2A	0,01	0,14		0,99
{4}	K-grupa	RET_2A	0,00	0,17	0,99	

Погледајмо из дескриптивне статистике (Прилог 7) како су ученици решавали задатке типа 2а. На ретесту Е-група има упросечен резултат 0.47 и К-група 0.37 (могуће је било освојити 1 бод). Ако погледамо по задацима просечни резултати изгледају овако. За задатак:

3. за Е-групу 1.15 (могуће је било освојити 2 бода), а за К-групу 0.96,

4. за Е-групу (редом за а, б, в, г и д) 0.93, 0.74, 0.62, 0.27 и 0.59 (могуће је било освојити по 1 бод и укупно 5) тј. најбоље се решава 4а, па 4б, затим 4в, 4д и на крају 4г, а за К-групу редом 0.68, 0.61, 0.56, 0.16 и 0.47 тј. најбоље се решава 4а, па 4б, затим 4в, 4д и на крају 4г (исто као за Е-групу),

6. за Е-групу (редом а, б и в) 0.16, 0.06 и 0.15 (могуће је било освојити по 1 бод и укупно 3) тј. најбоље се решава 6а, па 6в и на крају 6б, а за К-групу 0.10, 0.07 и 0.07 тј. боље се решава 6а, а 6б и 6в имају једнак упросечен резултат.

Задатак 3 односи се на новонастала геометријска тела и препознавање њихових особина на основу опажања путем слике. Сложено геометријско тело облика квадра растављено је на коцке чије су особине ученицима познате. Задатак тражи, слично као задатак 2 (тип задатка 1а), да се замисле геометријски објекти и уоче њихове особине: стране, темена и ивице.

Задатак 4 односи се на новонастало сложено геометријско тело и препознавање његових особина на основу опажања путем слике. Сложено геометријско тело облика је квадра и састављено је од коцки. Задатак тражи, слично као задатак 2 (тип задатка 1а) и задатак 3 (тип задатка 2а), да се замисли геометријски објекат и уоче његове особине: стране, темена и ивице. При томе се неки од елемената не виде, потребно их је 'замислити'. Ученици обе групе имају потешкоће у обележавању темена и то оних која ученик види (препознајући и она која не види).

Задатак 6 односи се на мрежу површи квадра и неке њене делове који су на располагању, те препознавању који делови недостају да би цела мрежа квадра била састављена. Ученици су до одговора могли да дођу замишљањем или цртањем слике. Ученици обе групе имају бољи упросечен резултат при препознавању који делови мреже недостају, а слабији када је потребно одговорити које су дужине и ширине фигура које недостају, па и одговор које су димензије квадра који би могао да се састави од такве мреже површи. Ученици обе групе слабије решавају задатак (према максималном броју бодова гледамо упросечен резултат). Ученици Е-групе слабо или скоро никако се нису служили сликом као помоћ при решавању задатка (мада је инструкција јасно наговестила ту могућност као помоћ при решевању).

Реч је о задацима примене знања у строго математичком контексту. Поново се ученици подстичу на замишљање геометријских објеката, а тамо где је нужно проблем се може решити представљањем сликом. Доста се на овоме инсистирало у самом експерименталном програму и иновативном моделу уџбеника, а иначе се јако занемарује. То ће се видети и у одговорима са анкета и учитеља и ученика. Подсетимо се да наше истраживање о задацима примене показује да се овај тип задатка скоро занемарује у новим уџбеницима (Ђокић 2008: 200-202), што показују и резултати ученика К-групе који остају на истом нивоу постигнућа.

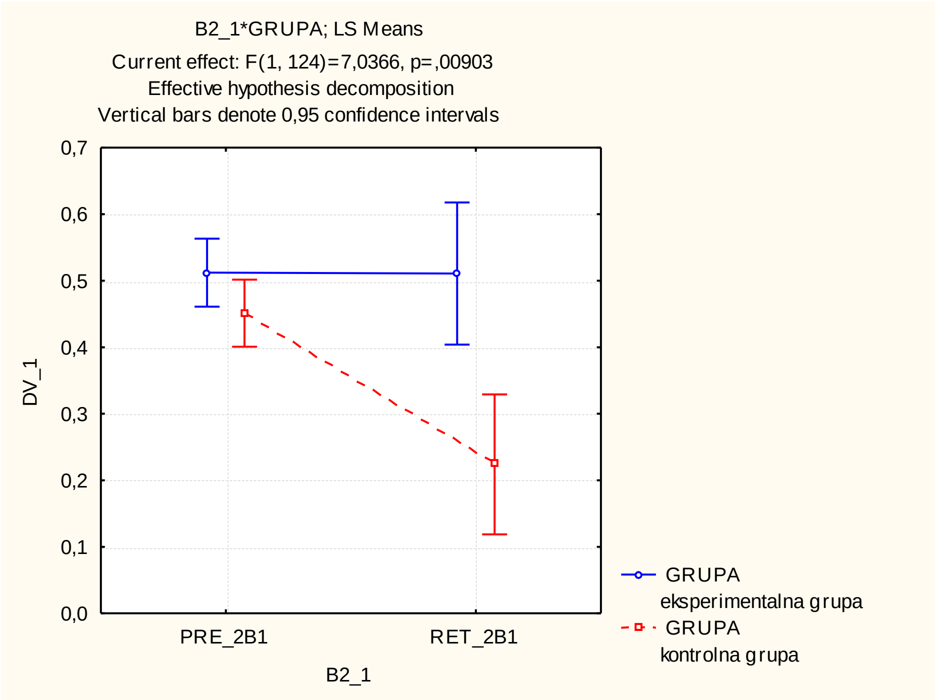
15.4.4. Тип задатка 2б1

Из табеле 37. видимо да постоји интеракција између фактора група и постигнућа на задацима типа 2б1 на претесту и ретесту ($F(1,124)=7{,}04$, $p<0{,}05$).

Табела 37.

	SS	Degr. of	MS	F	p
Intercept	45,40	1	45,40	420,95	0,00
GRUPA	1,90	1	1,90	17,65	0,00
Error	13,37	124	0,11		
2B_1	0,82	1	0,82	7,21	0,01
2B_1*GRUPA	0,80	1	0,80	7,04	0,01
Error	14,16	124	0,11		

Графикон 7.



Из табеле 38. видимо нема разлике у постигнућу Е-групе на два тестирања, остали су на истом нивоу, док постоји статистички значајна разлика у постигнућу К-групе у два тестирања за задатке типа 2б1 (примена наученог у семи-реалном контексту). На ретесту ученици К-групе значајно су лошији, што се види и на графикону 7.

Табела 38.

	GRUPA	B2_1	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	E-grupa	PRE_2B1		1,00	0,78	0,00
{2}	E-grupa	RET_2B1	1,00		0,80	0,00
{3}	K-grupa	PRE_2B1	0,78	0,80		0,00
{4}	K-grupa	RET_2B1	0,00	0,00	0,00	

Читамо из табеле 38. значајне следеће разлике између аритметичких средина: Е-групе претест2б1 и К-групе ретест2б1 (0,00), Е-групе ретест2б1 и К-групе ретест2б1 (0,00) и К-групе претест2б1 и К-групе ретест2б1 (0,00). Видимо да постоји значајна разлика између Е и К-групе на ретесту, где је К-група значајно лошија за тип задатке примене – спољноматематичке, семи-реалан контекст.

Погледајмо из дескриптивне статистике (Прилог 7) како су ученици решавали задатке типа 2б1. На ретесту Е-група има упросечен резултат 0.51 и К-група 0.25 (могуће је било освојити 1 бод). За задатак 8 за Е-групу просечан резултат је 1.52 (могуће је било освојити 3 бода), а за К-групу 0.74.

Резултати показују да ученици Е-групе напредују у примени знања у математичком контексту, али овде у семи-реалном остају на истом нивоу постигнућа. Разлог може да буде то што је програм кратко трајао, али је изазвао ефекте повећаног интересовања тј. мотивације за учење у геометрији почетне наставе (види се из резултата анкета ученика). Свакако да би мерење било тачније посматрано методолошки да је било више од једног задатка. Са образовног аспекта смо сматрали да задатак није ни мало лак, мада се јавља у иновативном моделу уџбеника. Реч је о типичном PISA задатку, о ком смо више говорили у Фишбајновој теорији фигуралних појмова и настојању да се појам и фигура сједине у јединствен ментални објекат (Fischbein 1993: 160).

Резултати ученика К-групе значајно су лошији на ретесту. Иако се доста инсистира на овом типу задатка у традиционалном приступу и уџбеницима који подржавају овакав приступ (па и у уџбенику који је коришћен за учење у К-групи), разлоге неуспеха можемо потражити у: а) ненавикнутости ученика на различите контексте при решавању проблема; у анализи уџбеника приметили смо да је мањи број и поприлично сведен избор контекста, чак и незанимљив за ученике узраста IV разреда (Ђокић 2008: 201); б) неподстицању ученика кроз текст уџбеника и захтеве задатака да ментално манипилушу геометријским објектима (Fischbein 1993: 157); в) неподстицању ученика на геометријско резоновање и уопште закључивање; г) ненавикнутости ученика на овакву форму тестовског питања итд.

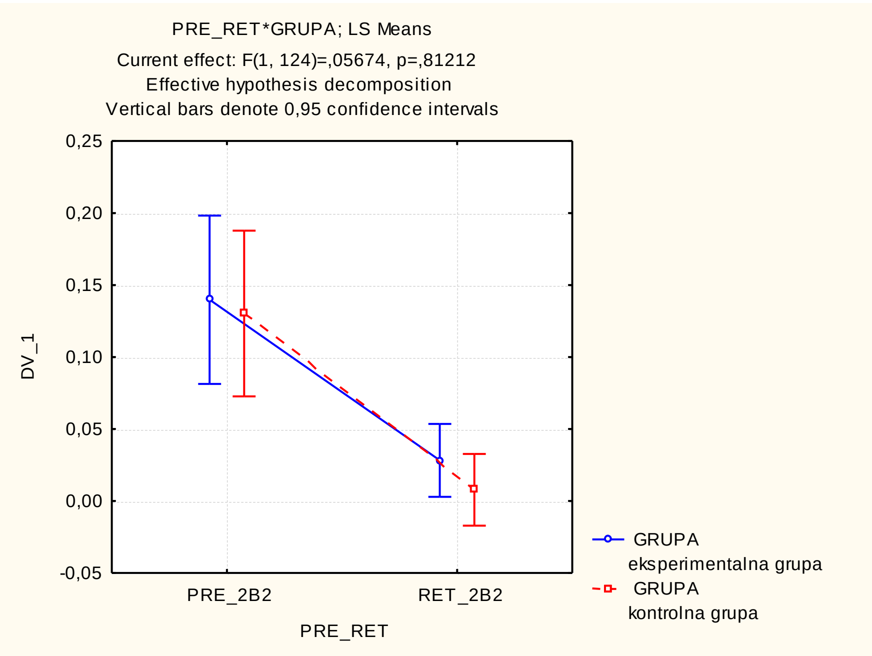
15.4.5. Задатак типа 2б2

Из табеле 39. видимо да <u>не постоји интеракција између фактора претест-ретест и група за тип задатка 2б2 (примена наученог у чисто реалном контексту, прави проблемски задаци)</u> ($F(1,124)=0,06$ и $p>0,05$). Али, имамо ефекат фактора претест-ретест, обе групе су значајно лошије на ретесту када су у питању задаци типа 2б2 (види се на графикону 8).

Табела 39.

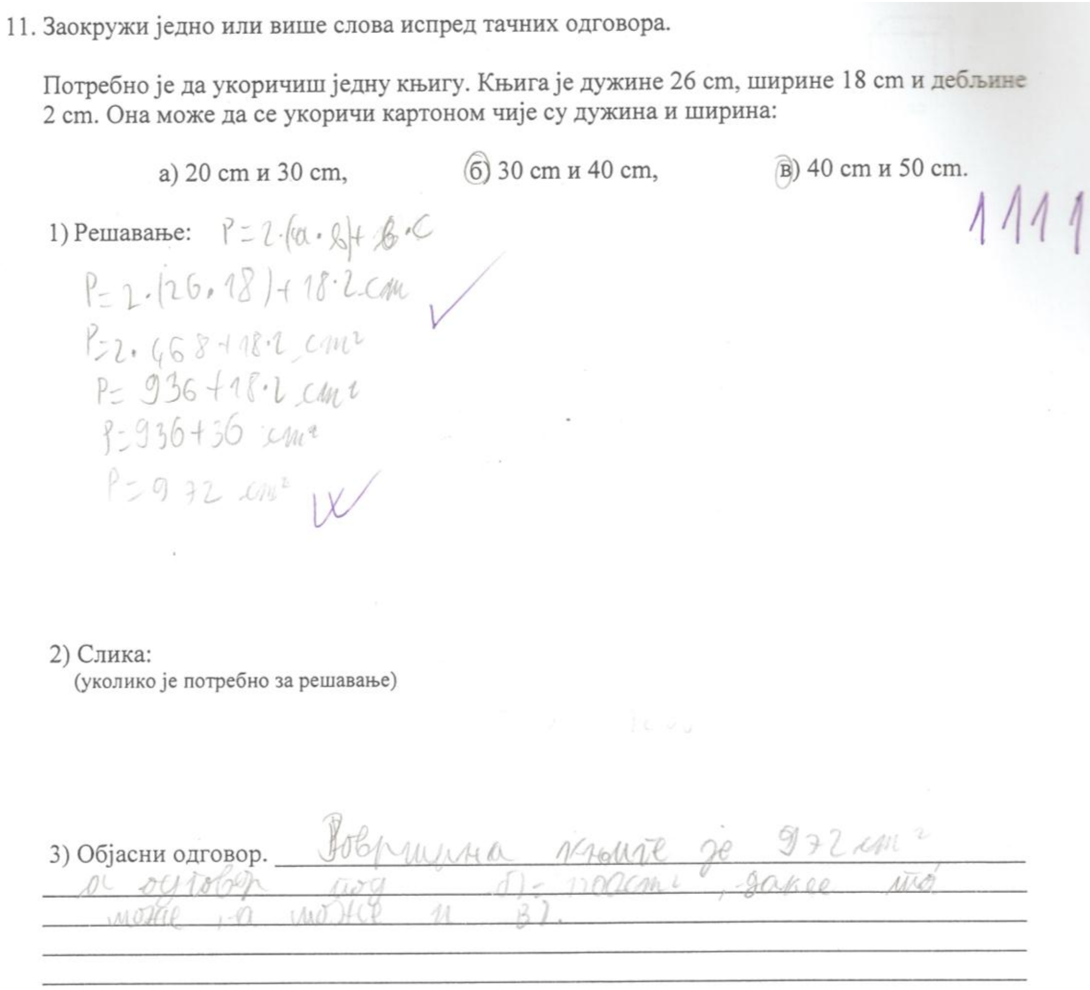
	SS	Degr. of	MS	F	p
Intercept	1,48	1	1,48	46,63	0,00
GRUPA	0,01	1	0,01	0,45	0,51
Error	3,92	124	0,03		
2B_2	0,86	1	0,86	26,45	0,00
2B_2*GRUPA	0,00	1	0,00	0,06	0,81
Error	4,04	124	0,03		

Графикон 8.



Погледајмо из дескриптивне статистике (Прилог 7) како су ученици решавали задатке типа 2б2. На ретесту Е-група има упросечен резултат 0.04 и К-група 0.01 (могуће је било освојити 1 тј. 0.25 бодова). За задатак 11 за Е-групу (редом за а, б, в и г) просечан резултат је 0.03, 0.03, 0.02 и 0.06 (могуће је било освојити по 1 бод и укупно 4) тј. најбоље се решава 11г, па 11а и 11б и на крају 11в, а за К-групу редом 0.00, 0.00, 0,00 и 0.03 (могуће је било освојити редом 0, 0, 0 и 1 бод тј. укупно 1) тј. најбоље се решава 11г. Ученици Е-групе лоше решавају тип задатка примене у реалном окружењу и то проблемски задатак, а ученици К-групе веома лоше га решавају, чак ни не покушавају.

Запазили смо да они ученици који су задатак решавали, решили су га у целини. Погледајмо један пример. Виктор Г. (7 бодова напредовао на ретесту) задатак решава, али примећујемо да је решен без ослањања на слику као помоћ.


11. Заокружи једно или више слова испред тачних одговора.

Потребно је да укоричиш једну књигу. Књига је дужине 26 cm, ширине 18 cm и дебљине 2 cm. Она може да се укоричи картоном чије су дужина и ширина:

а) 20 cm и 30 cm, б) 30 cm и 40 cm, в) 40 cm и 50 cm.

1111

1) Решавање: $P=2\cdot(a\cdot b)+b\cdot c$

$P=2\cdot(26\cdot 18)+18\cdot 2\,cm$

$P=2\cdot 468+18\cdot 2\,cm^2$

$P=936+18\cdot 2\,cm^2$

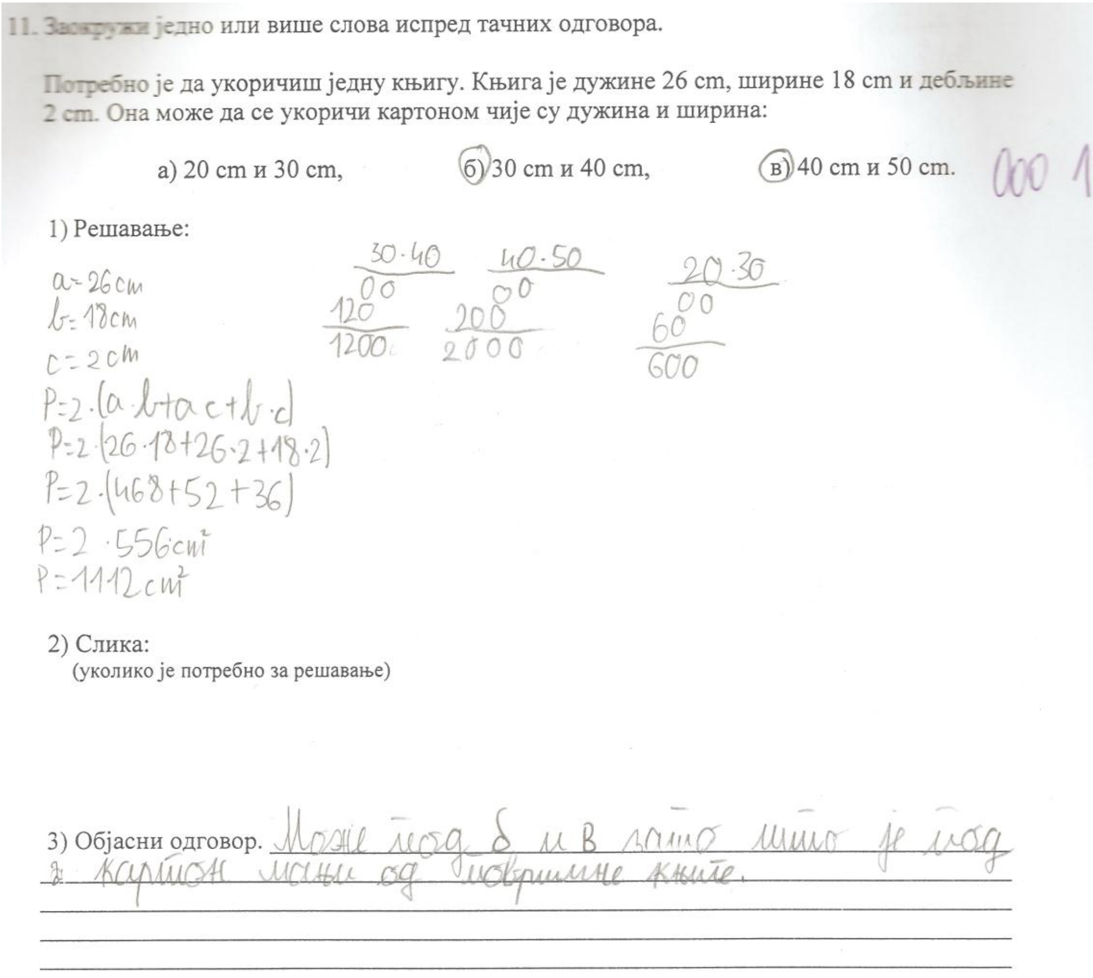
$P=936+36\,cm^2$

$P=972\,cm^2$

2) Слика:
(уколико је потребно за решавање)

3) Објасни одговор. Површина књиге је 972 cm² и одговор под б) = 1200cm², зато што може и мање и в).

Грешке које се јављају приликом решавања овог проблемског задатка углавном су у рачунском поступку где се израчунава: а) површина целог квадра (уместо његове три стране) или б) обележавајући три погрешне стране квадра које се облажу (стране књиге које се кориче). Нпр. Тамара Б. (6 бодова напредовала на ретесту) задатак решава на следећи начин.



11. Заокружи једно или више слова испред тачних одговора.

Потребно је да укоричиш једну књигу. Књига је дужине 26 cm, ширине 18 cm и дебљине 2 cm. Она може да се укоричи картоном чије су дужина и ширина:

а) 20 cm и 30 cm, б) 30 cm и 40 cm, в) 40 cm и 50 cm. 000 1

1) Решавање:

a=26cm
b=18cm
c=2cm
P=2·(a·b+a·c+b·c)
P=2·(26·18+26·2+18·2)
P=2·(468+52+36)
P=2·556cm²
P=1112cm²

30·40
00
120
1200

40·50
00
200
2000

20·30
00
60
600

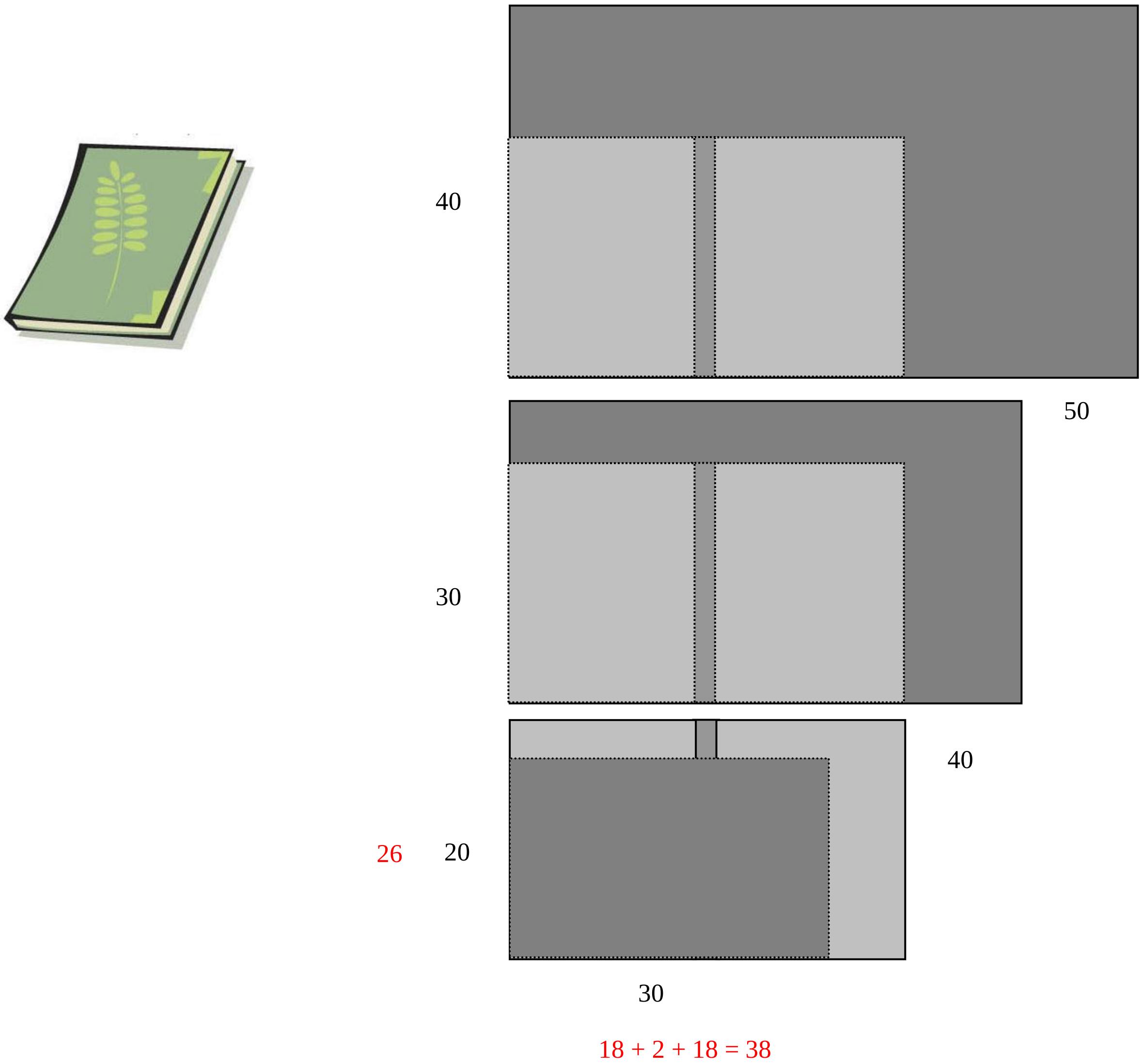
2) Слика:
(уколико је потребно за решавање)

3) Објасни одговор. Може под б и в зато што је под а картон мањи од површине књиге.

Овај тип задатка *примене – примена знања у реалном контексту* (прави проблемски задаци) спада у тип задатака ни мало једноставан за решавање. За ограничено време за тестирање од једног школског часа и два[84] тј. пет типова задатака који су обухваћени њима одмерено је да у овој категорији буде нешто мање задатака, јер процедура решавања није једноставна и захтева повезивање појмова унутар математике, као и ван математике, у реалном окружењу. Са образовног аспекта ово јесте оправдано, али са методолошког није. Било је потребно да програм траје дуже, што није било могуће, јер учитељи нису били спремни за то, и да се тестирање обави у трајању дуже од једног школског часа (нпр. у два дана по један школски час). Уопштено, школа и учитељи нису били спремни да се експеримент даље наставља и у оваквим околностима урађено је све што се могло урадити.

[84] Однос задатака у две категорије (1. чињенице и информације и 2. примена наученог) је 6:5.

Дискутујмо решавање задатка 11. Ученици који су га решавали углавном су то радили рачунски, мало сликом, а резоновања готово да нема. Очекивали смо да неки ученици реше задатак путем слике – преклапањем и поређењем површи, као што смо имали задатак у току трајања програма (задатак са паковањем кутије). На пример један могући начина решавања представљен је сликом 22.



Слика 22. Могуће решавање проблемског задатка путем слике

Отварамо питање дугорочније примене оваквог приступа, од бар једне године или још боље целог једног циклуса у трајању од четири године (од 1. до 4. разреда). На пример, Вуд и Селерс показују да ученици тек након двогодишњег програма, чија је основа проблемски оријентисан математички курикулум, показују већа постигнућа на стандардним тестовима и боља појмовна разумевања у односу на ученике који су учили према традиционално оријентисаном математичком курикулуму (Wood and Sellers 1997, према Cai 2003: 13). Слично показују радови Карпентера и сарадника, као и Хиберта и Вејна (Carpenter et al. 1998, Hiebert & Wearne 1993, према Cai 2003: 13).

Подсетимо се Ромбергових запажања. За формирање појмова и стицање вештина тражи се да „ученици буду ангажовани у богатој понуди структурисаних математичких активности током дужег времена" (Romberg 2003: 30). Математичка дисциплина укључује огроман скуп идеја у неколико садржајем повезаних домена. Да би дошао до математичке идеје, ученик мора имати прилику за истраживањем проблемске ситуације која подстиче математизацију. Такве ситуације укључују предмет мерења, квантификовања, који оличавају промену и варијацију мерљивости, који укључује специфичне неизвесности, који укључује наше место у простору и просторне карактеристике света који насељавамо и конструишемо, и који укључује симболичке алгоритме и више апстрактне структуре. Такве ситуације поспешују употребу језика изражавања, комуникације, резоновања, рачунања, апстраховања, уопштавања и формализације. Овај повезани систем знакова и симбола проширује ограничења људског ума у многим правцима, и на дуже стазе обезбеђује културни развој предмета расправе између генерација. И на крају, такве ситуације оличавају систематичне форме резоновања и аргументовања у успостављању сигурности, општости, конзистентности, поузданости математичких тврдњи. Јасно је да се *учење са разумевањем постепено стиче као последица активног ангажовања структурисаног активностима које помажу развој ученичког мишљења од неформалних до више формалних идеја и апстрактних начина репрезентовања и резоновања* у том домену.

Код лошијих резултата на ретесту у овом типу задатка потешкоћа може да буде и мерни инструмент који мери одређени феномен. Тако Ромберг и Шафер сугеришу да ученици који уче према проблемски оријентисаном курикулуму могу да очувају основне вештине док развијају оне вишег реда (Romberg and Shafer 2002, према Cai 2003: 14). Ово потврђују и наши резултати. Ученици Е-групе показују да су значајно бољи на ретесту у односу на претест, а К-група значајно лошија на ретесту. Дакле, чувају се основне вештине док се развијају оне вишег реда које иду ка применама. Ридгевеј и сарадници долазе до сличних резултата када пореде постигнућа ученика који уче према проблемски оријентисаном курикулуму у односу на оне који уче према традиционалном приступу (Ridgeway et al. 2002, према Cai 2003: 14). Ученичка постигнућа тестирана су на два различита теста. Први тест (Iowa Test of Basic Skills ITBS) односио се на процену основних вештина и други (Balanced Assessment Project) на процену математичког резоновања, комуникације, повезивања и решавања проблемских задатака. Ридгевеј долази до закључка да ученици који уче према проблемски оријентисаном курикулуму показују пораст знања у односу на ученике који уче према традиционалном приступу у математичком резоновању, комуникацији, повезивању и решавању проблемских задатака, док је пораст знања основних вештина две наведене групе ученика исти на првом тесту (Iowa Test of Basic Skills ITBS). Стога Цаи закључује да ученици који уче према проблемски оријентисаном курикулуму неће ‘жртвовати’ овладавање основним вештинама ако уче математику путем решавања проблема. Ми опажамо и додајемо да је битан инструмент којим се мерење врши. Отварамо питање поновљеног мерења и другог мерног инструмента којим се мерење врши, у дугорочнијем програму и иновативним моделима уџбеника за цео циклус почетне наставе математике.

16. О утисцима учитеља (резултати анкетирања)

16.1. Пре почетка експерименталног програма

На питање о предложеним идејама за рад након упознавања са циљем и начином рада, учитељи су износили опште утиске о занимљивим идејама, лако усвојивим за ученике, мотивишућим, чиме су потврдили и разлог свог избора учешћа у истраживању и опредељење за одабрани наставни приступ.

Избор методе учења путем вођеног открића према предзнању ученика окарактерисан је као метод са можда и превише очигледним примерима, док је према садржају његов приступ прихватљив и пожељан. Подсетимо се да традиционални начин подучавања полази од претпоставке да ученици располажу способностима којима се идентификује други или чак трећи ниво мишљења према ван Хилеу, док реалистични приступ полази од претпоставке о достизању тек првог нивоа мишљења (de Lange 1996, према Romano 2009c: 14). Овим се потврђује прихватање примењеног наставног приступа и уважавање његових основних карактеристика. Стартујући од првог нивоа полази се од феномена који су блиски ученицима. Учитељи ово препознају, сматрајући да су примери можда и сувише лаки према предзнању ученика, али прихватљиви и пожељни према садржају који се обрађује. Следећи претпоставке Фројденталове дидактичке феноменологије, подучавање започиње контекстуалним проблемима. Процес се даље наставља поступком (поновног) откривања математичких идеја и процесима прогресивне математизације под вођством учитеља и преласком са првог на други ниво, овладавајући геометријским способностима којима се идентификује виши ниво.

На питање о очекивањима учитеља о мотивацији ученика који уче увођењем проблемских ситуација из реалног окружења, њихова претпоставка је добра мотивисаност, наводећи да овакав начин рада посебно може да мотивише слабије ученике. То се и догодило до извесне границе. Отворено је питање дугорочније примене оваквог приступа од бар једне школске године (па и једног целог циклуса од четири године у почетној настави математике). На пример, Вуд и Селерс показују да ученици тек након двогодишњег програма, чија је основа проблемски оријентисан математички курикулум, показују већа постигнућа на стандардним тестовима и боља појмовна разумевања у односу на ученике који уче према традиционално оријентисаном математичком курикулуму (Wood and Sellers 1997, према Cai 2003: 13). Слично показују радови Карпентера и сарадника, као и Хиберта и Вејна (Carpenter et al. 1998 Hiebert & Wearne 1993, према Cai 2003: 13).

На питање избора проблемских ситуација у реалном окружењу из којих се формирају геометријски појмови, учитељи наводе могућу примењивост у настави. Мисле да су неке превише очигледне за поједине ученике или за овај узраст.

Проблемске ситуације које постају модел за учење путем аналогија и решавање нових проблемских ситуација учитељи прихватају и њихов избор сматрају погодним.

Очекивања учитеља у погледу постигнућа ученика након извођења експерименталног програма изражена су очекивањима већих постигнућа. Оно што је изненађење за нас јесу учитељева неразликовања или непримећивања задатака којима се испитују знања ученика по нивоима, од познавања чињеница до примене наученог, како у математичком, тако и у реалном окружењу (контексту) (подвукла О.Ђ.). Ово је створили нашу забринутост.

Учитељи наводе општи утисак о предложеном приступу претпостављајући да ће он омогућити лако усвајање нових појмова и поступака због реалистичног приступа и ситуација блиских дечјем разумевању, али наше је мишљење да овај приступ није ни мало ‘лак’.

16.2. После реализације експерименталног програма

На питање о утицају примењених математичких активности на мотивацију ученика истиче се велики значај, посебно где се садржаји везују за друге области, нпр. ликовну културу, док се за израду домаћих задатака и постепено вођење ученика ка самосталности уочава већа мотивисаност према одабраним диференцираним садржајима (подвукла О.Ђ.). Уочено је да учитељи имају изражен став о малом броју задатака током извођења експерименталног програма, не схватајући да је разлог овоме потреба да се у дискусији о решењима више пажње посвети математичком резоновању, посебно при решавању тежих проблемских задатака.

Учитељи од мотива за учење као веома важан издвајају доживљај нечег личног (што је значајно ученику да сазна, научи) и вербализовани аргументи (при извођењу одређене математичке активности). На део питања зашто је њихов избор такав, учитељи истичу прилику коју ученици добијају за такав начин учења. Међутим, осим мотивисаности у самој реализацији наставе, вербализовани аргументи често су занемаривани. Овде уочавамо сагласност са Ромберговом идејом учења које се посматра као „производ ситуативних учешћа у учионичкој култури“ (Romberg 2003: 30). Учење би према Ромбергу требало посматрати као производ интеракције рада учитеља и ученика у учионичком окружењу у континуитету, са подстицањем и вредновањем истраживања проблемских ситуација, моделовања, аргументовања. Али ми видимо да такво учење у пракси изостаје. Подсетимо се и идеје *интуитивне геометрије* као припреме за следећи ниво – ниво *предеуклидске геометрије*. Интуитивна геометрија означава да деца треба да усвоје интуитивна значења свих основних појмова предеуклидске геометрије и оспособе се за њихово представљање геометријским цртежима. Овај део елементарне геометрије „мора да буде добро организован, јасно заснован и прецизно изложен" наглашава Марјановић (Marjanović 2007: 13). Ми постављамо питање како ово извести у пракси ако се занемарују вербализовани аргументи и резоновање при извођењу геометријских активности (подвукла О.Ђ.).

Учитељи наводе да су ученици испољили радозналост и велику мотивисаност и пре почетка рада. Нови приступ код ученика је створио мотивацију и став да ће лакше усвајати ново градиво, што сматрамо добрим почетком.

Учитељи мисле да овакав начин рада омогућава ученицима да лакше препознају циљ учења, као и циљ самопровере (самоконтроле) кроз домаћи задатак и задатке намењене систематизацији наученог, са одређеном резервом да сви ученици можда ипак нису спремни да препознају циљ (задатке) потпуно самостално, што сматрамо оправданим. Али, у учионичком дискурсу и то ће се десити.

Став учитеља о учениковој комуникацији је да је она наглашеније подстицана вођеним разговором кроз учење путем открића. Изостају детаљнија објашњења, што се може поткрепити и према стилу рада учитеља са часова. Забринуло нас је што је комуникација на часовима била доста сведена. Веома често су учитељи занемаривали добре подстицаје и питања од стране ученика (подвукла О.Ђ.), ваљда у жељи да се предложено планирано градиво обради.

На питање о начину обраде садржаја јасно је изражен став о доброј и детаљној припреми коју су добили.

На питање избора наставних средстава учитељи наводе да је он одличан и веома погодан за учење у геометрији. Навели су да им понекад смета често позивање на сликовни приступ, уопште употребу наставних средстава. Наводе да то може и да 'омета' рад у учионици. Ово нас је забринуло, да не кажемо изненадило. Не можемо да кажемо ни да је оправдано, јер су препоручени кораци у самим припремама за часове дати као оквирни план рада за вођено учење путем открића. Довођење ученика до идеје геометријског простора, као и симболичког изражавања, није ни мало лак пут. <u>Учитељи нису склони користити слике које доводе до разумевања односа геометријских објеката, још мање су склони различитим репрезентацијама и конкретизацијама математичких појмова</u> (подвукла О.Ђ.).

Када говоре о начину рада који је утицао на препознавање практичног значаја градива за ученике, учитељи наводе да је то у потпуности изведено, ученици су лако изграђивали знања, градиво је блиско, препознатљиво и доступно ученику, садржаји градива одговарају постојећим или новонасталим потребама ученика и они су такви да су савладиви, очигледни, занимљиви за ученике. Иако све ово наводе, учитељи ипак истичу да је примењени приступ више одговарао једном броју бољих ученика, остали су га прихватали, јер је интересантан. Уочавамо одступање од става пре експеримента где је мишљење било да ће програм погодовати слабијим ученицима. Слабији ученици су били мотивисани за рад у почетку, али са когнитивног аспекта овај приступ више погодује бољим ученицима. Он погодује ученицима бољих геометријских способности што показују и резултати нашег истраживања, док су остали ученици добро мотивисани за учење, што сматрамо добром основом за даље истраживање.

На питање да се окарактерише одабрани наставни приступ када би он садржавао пратећу методичку разраду – материјале у виду приручника, припрема и др., учитељи наводе да би то онда имало извесну ноту полуаутоматског рада. Учитељи мисле да би се на овај начин губила њихова инвентивност, што овде није идеја већ добар одабир проблемских ситуација које би биле погодне за формирање математичких појмова / поступака и одговарајућу математичку апаратуру (што није ни мало лак захтев за учитеље). И овде се ослањамо на Ромберга. Његова идеја је да су *моделовање и аргументовање два значајна аспекта математичких инструкција која негују учење са разумевањем* (Romberg 2003: 30). Моделовање, или репрезентовање спољашњег феномена у смислу система теоријских специфичних објеката и релација, важан је за развој разумевања ове области. У учионици је важно разматрати моделовање као циклус укључујући модел конструкције, модел истраживања и модел провере. Како ученици стварају претпоставке, тако морају и да науче да доказују своје тврдње. Стога су аргументације и докази важни, са наглашеним промовисањем ученичких способности генерализације / уопштавања у настави математике. *Учитељи морају разумети структуру математичког домена*. Знање мреже односа у овој области битно је када се доносе одлуке о ученичком разумевању и у наредним корацима који следе при задавању инструкција (Romberg 2003: 30).

На питање да окарактеришу примењени уџбеник учитељи наводе да је његов концепт одличан, посебно истичући функцију илустрација (подвукла О.Ђ.) које су у функцији усвајања геометријских садржаја, а којих нема превише. Овде се ваљда мисли на функционалност слика при формирању геометријских појмова.

Учитељима су утисци са часова веома добри, а примењени приступ потпуно другачији од њима уобичајеног. Препознаје се потреба за другачијим концептом уџбеника. Став учитеља је да је примењени приступ заправо ‘тежак’, па уочавамо измењен став после реализације програма у односу на став пре почетка реализације. Запитали смо се да ли се он на овом месту заправо односи на избор теме из геометрије која је обрађена у експерименталном програму. Наставни приступ негује се за било коју област подржану и праћену одговарајућим уџбеником.

Општи утисак о истраживању за учитеље је позитиван и препорука је његова даља примена у наставној пракси.

Ово је добро место да опишемо резултате једног сличног истраживања. Програм математичког образовања будућих учитеља по Вубелсу, Кортагену и Брекмену изискује промене, посебно у правцу *више оријентисаних наставних приступа и ефикасног понашања учитеља у учионици* (Wubbels, Korthagen and Broekman 1997: 1). Тако су на основу спроведеног истраживања са студентима-учитељима који практичну наставу изводе по реалистичном приступу издвојене две фазе процеса учења. Већина студената-учитеља достиже до прве фазе у којој они схватају да ученици имају различите склоности за учење, те у складу са тим треба им понудити и могућа објашњења за проблеме тј. увидети потребу за коришћење различитих метода и развоја стратегија решавања проблема. Међутим, само мали број студената-учитеља достиже другу фазу у којој се прихватају принципи изграђивања знања ученика као важне карактеристике реалистичног математичког образовања. Вубелс наглашава откуд потешкоће код учитеља и теже прихватање реалистичног приступа – због „нерационалне, интуитивне и холистичке природе појмова“ (Wubbels 1992, према Wubbels, Korthagen and Broekman 1997: 20) која стоји насупрот рационалним и аналитичким начинима усвајања појмова (Korthagen 1993, према Wubbels, Korthagen and Broekman 1997: 20). Потребно је извршити <u>измене математичког програма будућих учитеља тако да он промовише промене у схватањима учитеља о учењу и подучавању у математици</u> (подвукла О.Ђ.).

Студенти-учитељи у наведеном истраживању радили су и предложену *текстуалну анализу уџбеника* математике као једно од средстава које им помаже у концептуализацији школског програма на начин који је у складу са принципима реалистичног математичког образовања. При анализи многи студенти-учитељи само су препознавали математички садржај (алгоритме, појмове, структуре) и нису показивали тежњу да опишу ‘вештину превођења’ која игра важну улогу у реалистичној математици. Дакле, предлог је текстуална анализа традиционалних и реалистичних уџбеника. Текстуална анализа може да се користи као стратегија да се помогне будућим учитељима да узимају у обзир више аспеката наставе и учења. Ово би за резултат имало помоћ за учење које може да се промени.

Текстуална анализа може да се концентрише на кључне тачке које су више прагматичне него филозофске. То су размишљања шта треба да се налази у школском уџбенику математике као што су:

- тачност садржаја;
- прилагођавање садржаја могућностима ученика и
- припрема ученика за текст уџбеника подсећајући их шта знају о неком математичком појму као припрема за оно што тек треба да науче.

Ово може створити добру основу како за припрему учитеља који су наставу реализовали по експерименталном програму, тако може да буде солидна основа за део програма којим се будући учитељи оспособљавају за наставу математике – основни методички курсеви (Dejić, Milinković & Đokić 2009) и предлог за изборни методички курс (Ђокић и Дејић 2008).

Важан аспект реалистичног математичког образовања јесте *разлика између проблематизације и математичког језгра* кога помиње ван Дормолен (van Dormolen 1986, према Wubbels, Korthagen and Broekman 1997: 22). Према ван Дормолену математика је активност, проблемска ситуација из које настају нова знања као што су правила, дефиниције итд. Природа делатности нпр. уопштавање, формализација, примена итд. зависе од природе проблемске ситуације која може бити математичка или нематематичка. У позадини ових идеја је ван Дормоленово убеђење да су процеси формирања математичких појмова и стицање компетенција садржајно веома специфични. А учитељ прво мора да одлучи шта је аспект језгра који може да буде препознат од стране ученика из текста уџбеника на основу анализе постојећих знања ученика. Онда учитељ одлучује шта додатно његови ученици морају да науче, поред онога што се стиче из текста уџбеника. Учитељ мора бити у стању да види шта су аспекти одређеног математичког језгра који недостају у тексту и мора да одлучи да ли овај недостатак треба отклонити и ако да, како то да изведе. Истовремено, учитељ мора да буде упознат са проблемима који могу да настану у посебном контексту. У закључку се наводи да текстуална анализа захтева и промовише развој многих компетенција које су од суштинског значаја у смислу ‘изграђивања знања ученика сопственим конструкцијама’. Као таква, текстуална анализа може помоћи да се премости јаз између концепција о настави математике, наставног програма и наставне праксе.

На крају завршимо Ромберговим речима о з*нању учитеља о дечјем мишљењу које има важан поглед* (Romberg 2003: 30). Учитељ мора да слуша и чује шта ученици говоре када стварају претпоставке и граде аргументе. Учитељи такође морају да испитају рад својих ученика и да процене квалитет њихових објашњења и уопштавања. *Професионални развој не може да се изгради у изолацији* и може се постићи само ако су учитељи укључени у систем професионалног развоја. Ми додајемо да се овде улога факултета који образују будуће учитеље јасно профилише.

17. О утисцима ученика (резултати анкетирања обе групе ученика)

17.1. Статистичка анализа резултата анкетирања и тумачење са дискусијом

Радили смо *t-тест*. На почетку у табели 40. дата је дескриптивна статистика – резултати који нам говоре на којим питањима се одговори испитаника из Е и К-групе значајно разликују (значајност разлика између две аритметичке средине). Подаци о статистичкој значајности дати су у табели 41. Обележене су вредности које говоре да постоји значајна разлика.

У првој колони табеле 41. дати су називи варијабли на основу којих сагледавамо шта је значајно. Ако је, нпр. *1.1. Како си учио на овим часовима? Опиши.* - *Атмосфера на часу* позитивне процене значајна, то значи да се две групе разликују према одговорима на питање 1, категорију 1, позитивне процене (присуство позитивних процена за категорију *атмосфера на часу*). Из табеле 40. видимо који је смер те разлике, тј. која група је дала више процене наведене категорије (у колони аритметичке средине за сваку варијаблу гледамо која група има већу вредност).

Радили смо и *регресиону анализу*. Корелациони аспект се састојао у утврђивању у којој мери постоји повезаност (корелација) између варијабли у нацрту истраживања тј. предикторских (независних) варијабли 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 2.1., 2.2., 3., 4., 5. и 6. и критеријумске (зависне) варијабле геометријске способности. Регресиони аспект се састојао у утврђивању у којој мери зависна варијабла геометријске способности може да се предвиди или процени или објасни на основу независних варијабли 1.1. – 6. (мултиваријантан нацрт), као и у постављању математичке формуле којом та зависност може да се изрази. Основна практична примена регресије је у предвиђању (прогнози, предикцији) највероватније вредности (или просечне вредности) коју испитаници могу добити у зависној варијабли геометријске способности, зависно од својих скорова у независним варијаблама 1.1. – 6. Резултате нисмо приказали, јер ни једна од варијабли са анкете није повезана са геометријском способношћу, тако да смо то изоставили из рада у потпуности.

Аритметичка средина у табели 40. означава колико често су ученици на постављено питање помињали неку од категорија, груписане као позитивне и негативне процене у категоријама 1.1., 1.2., 1.3., 1.4., 1.5., 2.1., 2.2., 3., 4., 5. и 6. (шест питања на анкети, видети у Прилогу 6).[85]

Табела 40.

Group Statistics[86]

	E=1; K=2	*Mean*	*Std. Deviation*
1.1. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Атмосфера на часу* позитивни	1	,22	,42
	2	,04	,20
негативни	1	,00	,00
	2	,03	,16
1.2. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Учење* позитивни	1	,70	,46
	2	,51	,50
негативни	1	,19	,40
	2	,41	,50
1.3. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Ученик и његов однос* позитивни	1	,16	,37
	2	,03	,16
негативни	1	,00	,00(a)
	2	,00	,00(a)
1.4. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Објашњења и вођење учитеља* позитивни	1	,06	,23
	2	,29	,46
негативни	1	,00	,00
	2	,07	,25
1.5. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Задаци* позитивни	1	,06	,23
	2	,08	,27
негативни	1	,03	,16
	2	,01	,12
2.1. Како си радио домаћи задатак? позитивни	1	,85	,36
	2	,88	,33
негативни	1	,10	,30

[85] Из техничких разлога ученици К-групе нису били анкетирани, те су нову К-групу само за анкетирање чинили ученици из друге школе, школе у којој се није радио експеримент, али у којој су слични услови и исти уџбеник који се примењивао у настави математике (две школе територијално веома близу). Надамо се да ово није много утицало на резултате анкетирања.

[86] У Прилогу 7 дата је цела табела Independent Samples Test, са свим параметрима.

	E=1; K=2	Mean	Std. Deviation
	2	,15	,35
2.2. А занимљиве теже задатке? позитивни	1	,71	,46
	2	,57	,50
негативни	1	,16	,37
	2	,41	,50
3. Како си разговарао о задацима на часу? позитивни	1	,75	,43
	2	,78	,42
негативни	1	,14	,35
	2	,17	,38
4. Да ли су ти модели, слике и остало помагали у учењу или су ти отежавали учење? позитивни	1	,82	,39
	2	,79	,41
негативни	1	,01	,12
	2	,05	,23
5. Како си решавао задатке који су практични за живот? позитивни	1	,67	,47
	2	,65	,48
негативни	1	,19	,40
	2	,28	,45
6. Опиши какав је уџбеник који си користио на овим часовима. позитивни	1	,87	,35
	2	,70	,46
негативни	1	,06	,23
	2	,53	,50

Табела 41.

Independent Samples Test

	t-test for Equality of Means		
	t	df	Sig. (2-tailed)
1.1. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Атмосфера на часу* позитивни	3,35	101,48	,00
негативни	-1,42	75,00	,16
1.2. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Учење* позитивни	2,35	146,71	,02
негативни	-2,95	142,47	,00
1.3. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Ученик и његов однос* позитивни	2,91	97,11	,00
1.4. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Објашњења и вођење учитеља*	-3,99	111,51	,00

	t-test for Equality of Means		
позитивни негативни	-2,30	75,00	,02
1.5. Како си учио на овим часовима? Опиши. - *Задаци* позитивни	-,59	147	,56
негативни	,62	147	,54
2.1. Како си радио домаћи задатак? позитивни	-,57	147	,57
негативна	-,91	147	,36
2.2. А занимљиве теже задатке? позитивни	1,81	145,85	,07
негативни	-3,40	139,27	,00
3. Како си разговарао о задацима на часу? позитивни	-,33	147	,74
негативни	-,57	147	,57
4. Да ли су ти модели, слике и остало помагали у учењу или су ти отежавали учење? позитивни	,50	147	,62
негативни	-1,32	147	,19
5. Како си решавао задатке који су практични за живот? позитивни	,34	147	,74
негативни	-1,22	147	,23
6. Опиши какав је уџбеник који си користио на овим часовима. позитивни	2,48	138,83	,01
негативни	-7,42	105,81	,00

Е и К-група разликују се на доста одговора са анкете, што је занимљиво и значајно за наш рад (подвукла О.Ђ.). На основу изнетих резултата да се закључити следеће.

У табели 40. за категорију *1.1. Како си учио на овим часовима? Опиши. - Атмосфера на часу* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,22 и SD=0,42) и К-групе (M=0,04 и SD=0,20). За две поменуте аритметичке средине из табеле 41. видимо да постоји статистички значајна разлика. Постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене о *атмосфери на часу* (t=3,35; df=101,48; p<0,05) (подвукла О.Ђ.).

За исту категорију у табели 40. негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (М=0 тј. ниједан ученик у Е-групи није дао негативну процену на ово питање, па је и SD=0) и К-групе (М=0,03 и SD=0,16). За две поменуте аритметичке средине из табеле 41. видимо да не постоји статистички значајна разлика за негативне процене о *атмосфери на часу*, разлике су случајне (t=-1,42; df=75,00; p>0,05).

Када се говори о *атмосфери на часу* као позитивној процени чешће је помињана категорија у Е-групи (21,90% према 3,90% у К-групи, дескриптивну статистику дајемо у Прилогу 7). Неки од најчешће навођених ученичких одговора су: „Забављали смо се на часу." и „Нисам знао/ла да је геометрија тако забавна.". Запазимо да ни један ученик из Е-групе није дао негативну процену за атмосферу на часу учећи по иновативном моделу. Ово говори у прилог да је била створена пријатна клима за учење.

За категорију *1.2. Како си учио на овим часовима? Опиши.* - *Учење* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (М=0,70 и SD=0,46) и К-групе (М=0,51 и SD=0,50). Постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене о *учењу* (подвукла О.Ђ.) тј. ученици Е и К-групе значајно се разликују по својим позитивним проценама о *учењу* на часовима (t=2,35; df=146,71; p<0,05) .

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (М=0,19 и SD=0,40) и К-групе (М=0,41 и SD=0,50). Постоји статистички значајна разлика између Е и К-групе у погледу негативних процена о *учењу* (подвукла О.Ђ.), тј. ученици Е и К-групе значајно се разликују по својим негативним проценама о *учењу* на часовима (t=-2,95; df=142,47; p<0,05).

Када се говори о *учење на часу* као позитивна процена чешће је помињана категорија у Е-групи (69,90% према 51,30% у К-групи), са типичним одговорима: „Лепо сам учио/ла.", „Добро сам учио/ла.", „Занимљиво.", „Доста смо научили.", „Да разумем.", „Лако." и „Јасно.", а као негативна процена чешће је помињана у

К-групи (40,80% према 19,20% у Е-групи). Ученици Е-групе јасно уочавају нашу тежњу да учење на часовима геометрије буде учење са разумевањем.

За категорију *1.3. Како си учио на овим часовима? Опиши.* - *Ученик и његов однос* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,16 и SD=0,37) и К-групе (M=0,03 и SD=0,16). Постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене о *ученику и његовом односу* приликом учења на часовима (t=2,91; df=97,11; p<0,05) (подвукла О.Ђ.).

За исту категорију негативна процена и за Е и за К-групу аритметичка средина је 0, те и стандардне девијације, па т-вредност није ни рачуната (ниједан ученик није бирао ову категорију).

Ученик и његов однос као позитивна процена чешће је помињана категорија у Е-групи (16,40% према 2,60% у К-групи). Чести одговори су нпр. „Слушао/ла (гледао/ла) сам како треба да се ради.“, „Трудио/ла сам се.“, „Вредно сам учио/ла (вежбао/ла).“, „Трудио/ла сам се да упамтим и применим све што сам научио/ла.“ и „Што више да научим.“. Ни у једној групи ученици нису дали негативну процену за ову категорију. Јасно се уочава да су ученици Е-групе имали изражену потребу активног учешћа у математичким активностима.

За категорију *1.4. Како си учио на овим часовима? Опиши.* - *Објашњења и вођење учитеља* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,06 и SD=0,23) и К-групе (M=0,29 и SD=0,46). Постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене о *објашњењу и вођењу учитеља* у процесу учења на часовима (t=-3,99; df=111,51; p<0,05) (подвукла О.Ђ.).

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0 tj. ни један ученик у Е-групи није дао негативну процену на ово питање, те је и SD=0) и К-групе (M=0,07 и SD=0,25). Постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу негативне процене о *објашњењу и вођењу учитеља* у процесу учења на часу (t=-2,30; df=75,00; p<0,05) (подвукла О.Ђ.).

Објашњења и вођење учитеља као позитивна процена је чешће помињана категорија у К-групи (28,90% према 5,50% у Е-групи). Чести одговори су нпр. „Све лепо појашњено.“. Разлог овоме може да буде јасније изражено директно вођење од стране учитеља по традиционалном приступу у односу на изведени иновативни у коме се улоге учитеља и ученика преплићу. Ниједан ученик Е-групе није негативно проценио објашњења и вођења учитеља.

За категорију *1.5. Како си учио на овим часовима? Опиши. - Задаци* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,06 и SD=0,23) и К-групе (M=0,08 и SD=0,27). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене о *задацима* за учење на часовима, разлике су случајне (t=-,59; df=147; p>0,05).

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,03 и SD=0,16) и К-групе (M=0,01 и SD=0,12). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу негативне процене о *задацима* за учење на часовима, разлике су случајне (t=0,62; df=147; p>0,05).

Ученици су ову категорију ретко помињали.

За категорију *2.1. Како си радио домаћи задатак?* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,85 и SD=0,36) и К-групе (M=0,88 и SD=0,33). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене о изради *домаћих задатака*, разлике су случајне (t=-0,57; df=147; p>0,05).

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,10 и SD=0,30) и К-групе (M=0,15 и SD=0,35). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу негативне процене о изради *домаћих задатака*, разлике су случајне (t=-0,91; df=147; p>0,05).

За категорију *2.2. Како си радио занимљиве теже задатке?* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,71 и SD=0,46) и К-групе (M=0,57 и SD=0,50). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене о изради *тежих задатака*, разлике су случајне (t=1,81; df=145,85; p>0,05).

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,16 и SD=0,37) и К-групе (M=0,41 и SD=0,50). Постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу негативне процене о изради *тежих задатака* (t=-3,40; df=139,27; p<0,05) (подвукла О.Ђ.).

Категорија *израде тежих задатака* негативна процена чешће је помињана у К-групи (40,80% према 16,40% у Е-групи). Чести су одговори негативне процене у К-групи нпр. „Тешко, нисам схватао/ла.“, „Нисам их схватао/ла, нису увек најјаснији.“ и „Нисам их баш радио/ла.“. Из овога се да закључити да су ученици који геометријске садржаје савладавају према традиционалном приступу мање спремни да уче и раде теже, сложеније задатке. Ово свакако има импликације на наставу, нарочито може да се одрази на задатке примене.

За категорију *3. Како си разговарао о задацима на часу?* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,75 и SD=0,43) и К-групе (M=0,78 и SD=0,42). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене *о разговору при решавању задатака* на часу, разлике су случајне (t=-0,33; df=147; p>0,05).

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,14 и SD=0,35) и К-групе (M=0,17 и SD=0,38). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу негативне процене *о разговору при решавању задатака на часу*, разлике су случајне (t=-0,572; df=147; p>0,05).

За категорију 4. *Да ли су ти модели, слике и остало помагали у учењу или су ти отежавали учење?* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,82 и SD=0,39) и К-групе (M=0,79 и SD=0,41). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене о коришћењу *модела, слика и др. дидактичких средстава* у процесу учења, разлике су случајне (t=0,50; df=147; p>0,05).

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,01 и SD=0,12) и К-групе (M=0,05 и SD=0,23). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу негативне процене о коришћењу *модела,* *слика и др. дидактичких средстава* у процесу учења, разлике су случајне (t=-1,32; df=147; p>0,05).

За категорију 5. *Како си решавао задатке који су практични за живот?* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,67 и SD=0,47) и К-групе (M=0,65 и SD=0,48). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене *о решавању задатке који су практични за живот*, разлике су случајне (t=0,34; df=147; p>0,05).

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,19 и SD=0,40) и К-групе (M=0,28 и SD=0,45). Не постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу негативне процене *о решавању задатке који су практични за живот*, разлике су случајне (t=-1,22; df=147; p>0,05).

За категорију 6. *уџбеника који се користио на овим часовима* позитивне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,87 и SD=0,35) и К-групе (M=0,70 и SD=0,46). <u>Постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу позитивне процене какав је *уџбеник* који су ученици користили за учење</u> (t=2,48; df=138,83; p<0,05) (подвукла О.Ђ.).

За исту категорију негативне процене дати су дескриптивни подаци Е-групе (M=0,06 и SD=0,23) и К-групе (M=0,53 и SD=0,50). <u>Постоје значајне разлике између Е и К-групе у погледу негативне процене уџбеника који су ученици користили за учење</u> (t=-7,42; df=105,81; p<0,05) (подвукла О.Ђ.).

Када се говори о *уџбенику* који се користи за учење као позитивна процена чешће је помињана категорија у Е-групи (86,30% према 69,70% у К-групи). Нпр. чести су одговори у Е-групи: „Веома занимљив, са много задатака и питања за размишљање. Радо сам радио/ла и учио/ла из њега, доста се научи.“, „Занимљив.“, „Леп.“, „Поучан.“, „Сликовит.“, „Забаван уџбеник.“ и „Добар, али су ми неки задаци били тешки.“. Ученици су препознавали да иновативни модел уџбеника има такво структурисане захтеве да они подстичу на размишљање и коришћење различитих репрезентација математичких појмова, као и диференцираност у концепту. Категорији *уџбеника* као негативна процена чешће се помиње у К-групи (52,60% према 5,50% у Е-групи). Овде запажамо велику разлику у одговорима за негативну процену. Нпр. чест је био одговор у К-групи „Тежак уџбеник.“. Напоменимо да се ради о уџбенику са традиционалним приступом, очигледно не тако ‘лаког’ приступа.

Изведимо кратак закључак. Експерименталним програмом са реалистичним приступом створена је пријатна клима за учење. Ученици су запазили тежњу да учење буде учење са разумевањем и њиховим активним учешћем у математичким активностима. Ученици су спремнији за израду тежих задатака, више су мотивисани за решавање проблемских задатака. Ово се свакако може одразити на задатке примене знања тј. на постигнућа ученика који уче у реалном окружењу, чиме скрећемо пажњу да одабрани приступ може да буде значајан у том смислу. И сам иновативни уџбеник као модел који прати изабрани приступ су ученици експерименталне групе препознали као веома подстицајан за учење, јер диференцираним концептом мотивише ученике и буди њихово интересовање за сазнањем.

Када говоримо о бенефитима примењеног наставног приступа могли би да кажемо да ученици имају боља постигнућа у неким аспектима у којима смо добили разлике, али не само да имају боља постигнућа, већ се ученици и осећају боље на часовима, занимљивије им је за учење, више су мотивисани за учење и радо прихватају овакав модел уџбеника као основну књигу из које уче.

ЗАКЉУЧЦИ

18. Методичке импликације

Наше истраживање било је усмерено на откривање пута шта води ученике до појмова са значењем од, са једне стране, визуелних представа до, са друге стране, просторног резоновања, наглашавајући повезаност визуелног и вербалног процеса као значајне у ученичком раду и изграђивању математичких појмова и суптилно уобличавање резоновања. На тој основи следимо идеје изнете у раду Клементса и Батисте у изграђивању и елаборирању постојеће интуиције о простору, развијајући безусловно и геометријску интуицију (Clements and Battista 1992: 457).

Додајући овоме и конструктивистички поглед, у истраживању смо се бавили развојем геометријских појмова и геометријског мишљења у реалистичном окружењу у коме се учи. Испитивали смо развој ученичких знања у реалистичном окружењу, као и како учитељи ово користе за учење и како се одвија тај процес.

Иновативним моделом уџбеника који подржава реалистичан приступ, моделима и поступцима тежили смо да наставу учинимо што ефикаснијом и унапредимо нивое постигнућа ученика. Резултати потврђују општу хипотезу да увођење реалног окружења и пропратног иновативног уџбеника позитивно утиче на постигнућа и мотивацији ученика IV разреда у геометрији чиме је потврђен ефекат наставног приступа ‘реално окружење’. Ученици који су учили по експерименталном програму успешнији су у задацима чињеница од ученика контролне групе, али су остали на истом нивоу у задацима примене знања док су ученици контролне групе показали значајно лошије резултате и тиме делимично потврдили једну од постављених помоћних хипотеза. Ученици експерименталне групе у задацима примене знања имају значајно боље резултате у математичком контексту, али не и у реалном. Али је зато примена одабраног приступа створила већу мотивисаност ученика за учење геометријских садржаја у почетној настави чиме је потврђена једна од помоћних хипотеза. Мишљење и учитеља и ученика о изабраном приступу је позитивно, а сам уџбеник ученици су препознали као подстицајан за учење при чему је створио пријатну климу и пробудио повећану мотивисаност и спремност за израду тежих проблемских задатака чиме су потврђене неке од помоћних хипотеза. Мишљења смо да би ово у неком дугорочнијем приступу показало већи ефекат експерименталног програма.

Бавили смо се развојем геометријског мишљења за које се као битне виде просторна способност и визуелна имагинација (Lean & Clements 1981, Wheatley 1990, према Clements & Battista 1992: 443). Две су основне компоненте просторних задатака и то просторна: 1) *оријентација* – разумевање и оперисање односима између позиције објекта у простору према нечијем положају и 2) *визуелизација* – разумевање и представљање замишљених покрета објеката из дво- и тро- димензионалног простора (Bishop 1980, Harris 1981, McGee 1979, према Clements & Battista 1992: 444).

Ослањали смо се на резултате анализа које показују да су особе са добро развијеним просторним способностима способне у замишљању просторних уређења објеката из различитих тачака посматрања и за манипулацију визуелним сликама (Klements 1979, према Clements & Battista 1992: 444). Тест геометријских способности помогао нам је да сагледамо где су ученици IV разреда. Иако смо потврдили помоћну хипотезу да одабрани приступ више погодује ученицима који имају боље геометријске способности, код свих ученика, посебно код оних који су показали нижи ниво знања из геометрије на почетном тесту, створена је добра мотивисаност за учење по одабраном приступу и иновативном уџбенику.

Изградњу геометријског образовања видимо у Глејзеровом принципу природне сврсисходности где ученик у процесу учења геометрије пролази у кондензованом облику основне етапе развоја геометријске науке кроз три циклуса и према њима формирана четири курса геометријског образовања: 1) сликовиту геометрију, 2) практичну геометрију, 3) систематски курс геометрије и 4) геометрију намењену изучавању ученика са повећаним интересовањима (Глејзер 1997: 4). Ослањали смо се на педагошке идеје које „изнова стварају основна искуства у развијању математичких ентитета“ (Thom 1973, према Villani 1998: 320) и то на начин сагледавања учења / подучавања као процеса који има значење за ученике, не прескачући ни један део стазе која постепено води од конкретног и интуитивног аспекта до апстрактне геометрије. Овоме додајемо и историјске перспективе које проналазимо у раду Марјановића (Marjanović 2007: 13) који разматра нивое кроз које пролази школска геометрија: 1) интуитивна, 2) геометрија у духу Талеса и Питагоре – предеуклидска геометрија и 3) еуклидска. Садржаји интуитивне геометрије покривају програм узраста којим се и ми бавимо – млађи разреди основне школе. Овим начином реализације школске геометрије обезбеђује се природни процес развоја који у обзир узима многовековна историјска искуства човечанства и ослања се на њих. Геометрија у млађим разредима основне школе је интуитивна и припрема је за следећи ниво – ниво предеуклидске геометрије, што значи да деца треба да усвоје интуитивна значења свих основних појмова предеуклидске геометрије и оспособе се за њихово представљање геометријским цртежима.

Пут који смо пратили креће од модела и слика, преко геометријског простора, његових објеката и поимања њихових међусобних односа. Следили смо пут од опажајне геометрије који се постепено креће ка геометријским дедукцијама кроз форму историјско-искуствене равни детета. Забринули су нас ставови и мишљења учитеља који готово да занемарују употребу модела и слика, што се касније одразило и на ученичко резоновање и решавање проблема готово без коришћења слике као погодне репрезентације геометријских појмова (подвукла О.Ђ.).

Уобличавање математичког курикулума који се односи на почетну наставу геометрије – и то реалистичну – сагледали смо у духу де Морових идеја (de Moor 1991, према Fauzan 2002: 49):

- Аспекти реалистичне геометрије не разматрају се одвојено и не подучавају се као изоловане теме. Различити аспекти уско су повезани и обједињени у целину.
- Реалистична интерпретација геометрије представља проучавање простора у ком живимо и феномена који се појављују у њему са могућим уопштавањима. Реалистична геометрија не садржи само активности засноване на раду ученика помоћу папира и оловке, нити је она учитељево излагање градива кроз објашњења док га ученици имитирају у тој активности.
- Инструкције у реалистичној геометрији су такве да позивају на радњу која се одвија кроз групни облик рада, где су истраживања, експериментисања, дискусије и рефлексије срж просеца учења и подучавања.

Бавили смо се математичким образовањем као културолошким питањем – како формирати учионичко окружење које постаје микрокосмосом математичке културе (Schoendfeld 1989: 86) тј. питањем геометрије као дела наслеђа и културне баштине која се преноси (Bartolini and Boero 1998: 60). Питање није ни мало једноставно, али истраживањем трагамо за одговором у математичкој учионици у којој се „развија важна структура дискусије“ (Schoendfeld 1989: 86).

Сматрамо да је експлицитно и систематско вођење разговора карактеристика будућности у стварању културне и друштвене конструкције знања које обезбеђује активну примену знања. У учионици, експеримент подстиче рану геометризацију симулирајући стварни окружујући свет. Овај процес илуструје практично знање које ствара потребу за замишљеним сликама и резултира стварањем геометријског алата (Bartolini 1996, према Bartolini and Boero 1998: 58). За развој важног когнитивног процеса интуиције, хипотетичког резоновања и рада са више различитих хипотеза и стратегија ученици бивају систематски укључени у ‘реалистичне активности’ (Boero 1990, Ferrari 1992, према Bartolini and Boero 1998: 55). Са посматраних часова стекли смо јасну слику да је учитеље потребно оспособити за системско вођење разговора и учионички дискурс (подвукла О.Ђ.).

Ако хоћемо да математичко резоновање постане ‘навика ума’ од најранијих дана формалног образовања деце, требало би обезбедити и током студија будућих учитеља и током професионалног обављања посла стицање одговарајућих математичких и методичких знања, а наставу тако организовати да: 1) акције у почетној настави буду акције резоновања (расуђивања), 2) резоновање у почетној настави буде системско мишљење и 3) да се формирају аутентичне прилике за резоновањем (Diezmann et al. 2002: 289).

Истраживање на пољу репрезентација и резоновања показују да кључну улогу имају активности и аналогије у подстицању ученика за развој способности решавања проблемских задатака (Mayer 1987, према Pepin 2008: 8). Активности помажу да се моделује процес решавања проблема, а конкретне аналогије стварају значења у повезивању процедура са познатим искуством (Mayer 1987, Mayer et al 1995, према Pepin 2008: 8). Важно је стварати везе између различитих репрезентација које би у проблемски оријентисаној настави биле укључене и то визуелне, вербалне и симболичке чији је садржај уклопљен у познате ситуације тако да су оне међусобно повезане. Из искуства реализованог експерименталног програма сматрамо да је неопходан добро разрађен и структурисан методички приручник који би предлагао проблемске ситуације погодне за геометријске активности и учење у реалном контексту (подвукла О.Ђ.).

Сматрали смо да је манипилисање дидактичким материјалом један од основних циљева у учењу геометрије, посебно оне на нижем степену ван Хилеове хијерархије (Fuys et al. 1988, према Clements & Battista 1992: 449). Коришћење објеката за манипулисање обезбеђује ученицима да провере своје идеје, испитају их и размишљају о њима, те их модификују. Овај физички приступ наглашава ученичка интересовања, помаже им у уопштавањима и успостављању нових хипотеза и води формирању нових односа. Забринути смо што је уопштавања у вођеној дискусији учитеља било јако мало, те скрећемо пажњу на ову чињеницу дајући смер у том смислу и геометријском курикулуму и уопште програмским активностима, посебно методичком приручнику, али и професионалном оспособљавању будућих учитеља (подвукла О.Ђ.).

Жеља нам је да то буде подржано геометријским курикулумом у коме се наглашава употреба модела из простора. Ученици морају да буду вођени у процесу учења при употреби манипулативног материјала, одређујући манипулативни модел према њиховим неформалним појмовима. Али, употреба манипулативног материјала треба да буде подстицана у дужем временском периоду и вођена од стране учитеља који моделује процес учења. Учитељи који изводе наставу геометрије требало би да знају да је коришћење дидактичких манипулативних средстава важан сегмент за наставу геометрије. Важан део обуке учитеља лежи у учењу веза између апстрактних геометријских појмова и њихових конкретних репрезентација које би ученике подстицали на откривање геометријских модела у свакодневном животу.

Појам визуелне слике игра важну улогу у настави геометрије. Представљају холистичке репрезентације објеката које су изоморфне према свом референтном објекту. Слике врло брзо стварају интуитивну представу извесног геометријског појма (Clements & Battista 1992: 449). Стога је потребно подстицати њихово коришћење у почетној настави геометрије, мада смо приметили сасвим супротно у изведеном експерименталном програму, јер су учитељи то ретко радили (подвукла О.Ђ.).

Следимо идеју уџбеника математике који представља „истраживачки рад, обезбеђујући добро дефинисање структуре дисциплине“ (Corry 2009: 565). Уџбеници презентују садржај предмета за који су намењени, обликујући искуство ученика у процесу откривања математичких идеја, пружајући ученицима прилику да из њих уче и то тако да уче оно што се сматра важним у образовној политици. Учитељи посредују у овом контакту утичући на избор задатака по којима ученици раде, осмишљавајући и структурирајући ученички рад.

Уџбеници се нашироко користе при одабиру задатака за рад у наставном процесу (Kuhs and Freeman 1979, Luke et al. 1989, Pepin an Haggarty 2001, према Pepin 2008: 3). Улога им је и већа. Уџбеници служе не само за развој мишљења ученика док учење траје, већ он оставља дугорочније последице (Doyle 1988, према Pepin 2008: 3). Ово би значило да задаци из уџбеника по којима се учење одвија утичу на шири опсег од онога како се мислило, а то је како ученици уопште мисле и разумеју значења математичких појмова / поступака (Hiebert et al. 1997, Henningsen & Stein 1997, према Pepin 2008: 3). Зато смо се у нашем истраживању бавили задацима који су нам показали којим нивоом знања ученици владавају учећи по уџбенику у реалном окружењу, али дајући и смернице за даља истраживања (подвукла О.Ђ.).

18.1. Реално окружење у почетној настави геометрије – предлог иновативног модела уџбеника математике и методичког приручника као подршка наставном приступу ‘реално окружење’

Представимо концепт иновативног модела уџбеника као једну практичну имплементацију који подржава конструктивистички приступ настави у ‘реалном окружењу’ (Милинковић, Ђокић и Дејић 2008, Milinković i Đokić 2009a, Ђокић и Дејић 2008). Концепт методичког приручника био би сличних структурних елемената (слично као Прилог 2.). Истакнимо да смо заступници гледишта да су основни циљеви почетне наставе математике, поред математичке писмености, стварање стања упитаности, тежња ка стварању истраживачког духа ученика, као и осећаја за успостављање веза формалне математике са једне стране са појавама из реалног окружења са друге.

Одговарајућим структурисањем уџбеничких целина може се постићи ефекат активирања ученичких потенцијала за упознавање математичких појмова и решавање проблема (Милинковић, Ђокић и Дејић 2008: 73, Гусев 2003: 237). Постигнутом диференцијацијом у уџбенику развија се мишљење ученика, подстиче се развој математичких способности ученика и помаже ученицима да достигну више нивое знања и уобличе математичко резоновање.

Предлажемо структурисање наставних целина кроз:

- активирање пажње (мотивацију) и мотивациони задатак,
- проблематизацију појма или поступка;
- увежбавање и меморисање кроз решавање задатака;
- диференцијацијацију у уџбенику;
- проширивање и обогаћивање знања, истраживачке задатке и занимљиве информације;
- самоевалуацију.

Активирање пажње (мотивација) и мотивациони задатак

Посебна пажња у овом уџбенику посвећена је мотивисању ученика за учење математике. Волфолк истиче потребу доживљаја школских активности као вредних и смислених од стране ученика (Woolfolk 1995, према Милинковић, Ђокић и Дејић 2008: 73). Прво, ученицима се на почетку сваког поглавља уџбеника најављује шта ће научити. На пример, на почетку поглавља *Сабирање и одузимање природних бројева* ученици сазнају да ће научити: „више о операцијама сабирања и одузимања, да сабирају и одузимају вишецифрене бројеве, о својствима операција сабирања и одузимања и да примене знања у решавању различитих задатака“ (Дејић и др., 2009, I: 65). Друго, свако поглавље у уџбенику почиње проблемском ситуацијом тзв. мотивационим задатком. До решавања овог задатака долази се тек на крају поглавља када ученици у довољној мери прошире своје знање. Ученику се кроз задатак пружа мотивација, јер су задаци одабрани тако да заинтересују ученика. Са друге стране, ученик се доводи у сазнајни конфликт, јер је задатак такав да се не може решити на нивоу дотадашњег знања. Он представља јасан путоказ за ученика коме је јасно „где јесте“ и „где жели да буде“ (Woolfolk 1995, према Милинковић, Ђокић и Дејић 2008: 73).

У примеру (слика 23.) ученик чита песму о путовању кроз европске градове. Поистовећујући се са главним ликом из песме, ученик се позива да представи пут на бројевној полуправој кроз одабране градове на основу података о удаљености градова датих у табели.

Кад од Чешке пођем пешке,
Могу без иједне грешке,
Преко Финске, преко Шведске,
Ја да стигнем до Норвешке.
В. Банић

Дара је сањала да је из Србије преко Чешке, Финске и Шведске стигла до Норвешке.
У табели је дат приказ њеног пута.
На бројевној полуправој представи њен пут, као што је започето.

пут	удаљеност у km
Београд–Праг (Чешка)	960
Праг–Хелсинки (Финска)	1 840
Хелсинки–Стокхолм (Шведска)	450
Стокхолм–Осло (Норвешка)	550

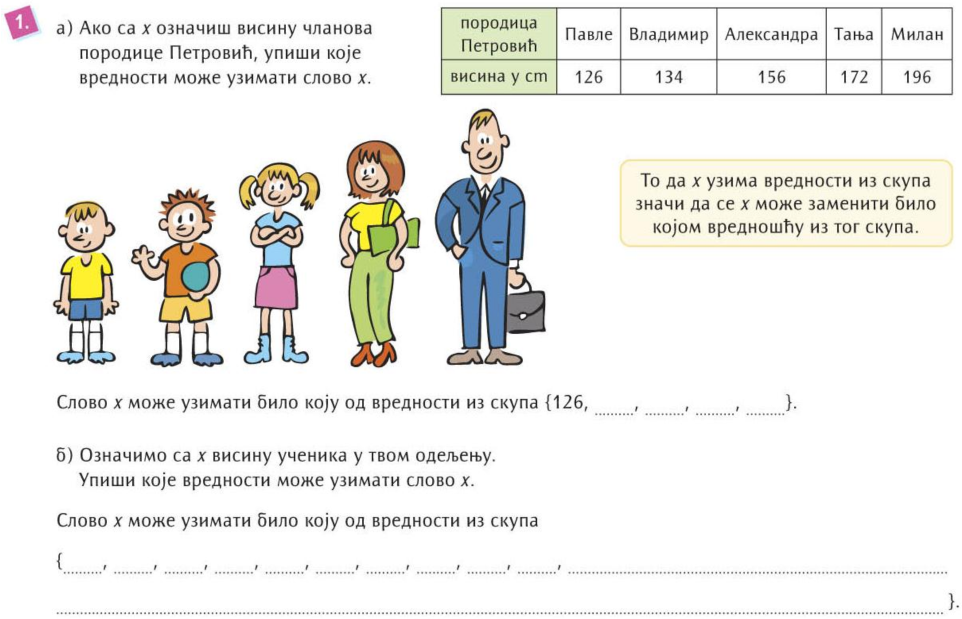
Слика 23. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

Проблематизација појма или поступка

Значај секвенцирања изричит је у реалистичном математичком образовању. У таквој традицији, задатак секвенца почиње проблемском ситуацијом (Gravemeijer 1999, према Margolinas 2013: 13). На пример подела великог броја људи у мање групе (проблеми дељења) који захтевају прво неформалне стратегије решавања проблема и различите репрезентације појмова и настављају променом фокуса ка формализацији и уопштавању процедура решавања, односно у овом случају долази се до општег алгоритма који се може користити за различите проблеме дељења. У овом типу задатка секвенце идеја ‘вођења са дидактичким моделом’ од неформалног ка формалном важна је као алтернативна стратегија за нарастајуће математички сложене проблеме са којима се ученици сусрећу (Heuvel-Panhuizen 2003, према Margolinas 2013: 13).

Ситуациони проблеми често су већ веома комплексни и могу да се реше пре него што се зна ‘математички поступак’, па стога они могу да буду добре полазне тачке за проблематизовање појма.

Тако би се први проблем у обради новог садржаја решавао кроз полупрограмиран поступак. Без обзира на то да ли је у питању упознавање новог појма или поступка, мотив за учење тражи се у проблемској ситуацији. Полупрограмираним поступком ученик се усмерава ка откривању неке појаве (појма) или се моделује ток размишљања у проблемским ситуацијама. Овакав став близак је реалистичном математичком приступу (*РМО*) који је заснован на упознавању математичких садржаја кроз анализирање и решавање изабраних модел задатака (проблемских ситуација) које су основа сазнања (Милинковић 2007, према Милинковић, Ђокић и Дејић 2008: 74, *ЛОТ*).


1. а) Ако са *x* означиш висину чланова породице Петровић, упиши које вредности може узимати слово *x*.

породица Петровић	Павле	Владимир	Александра	Тања	Милан
висина у cm	126	134	156	172	196

То да *x* узима вредности из скупа значи да се *x* може заменити било којом вредношћу из тог скупа.

Слово *x* може узимати било коју од вредности из скупа {126, ..., ..., ..., ...}.

б) Означимо са *x* висину ученика у твом одељењу. Упиши које вредности може узимати слово *x*.

Слово *x* може узимати било коју од вредности из скупа

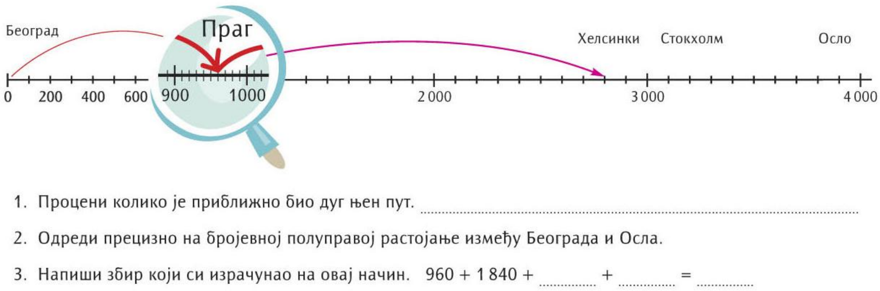
{......., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...

....}.

Слика 24. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

На пример, до проблематизације појма променљиве ученици долазе бавећи се читањем података о висини чланова породице (слика 24.). На тај начин спонтано се долази до потребе увођења обједињујућег (апстрактног) математичког појма.

За илустрацију проблематизације поступка послужиће нам наредни пример. У модел уџбенику постављен је задатак (слика 25.) одређивања дужине пређеног пута (преко сабирања). Модел бројевне полуправе одговара графичком представљању пута. Растојање између тачака (бројева) одговара растојању између градова. Поступак сабирања на бројевној полуправој на тај начин добија смисао и практичну употребну вредност.



Слика 25. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

Ученици не смеју да буду остављени у недоумици шта треба да знају на крају сваке мале јединице, али и након заокружене целине.

У уџбенику се користе ситуације из реалног живота као мотивација за учење математичких садржаја, али и као места примене математичких знања.

Увежбавање и меморисање кроз решавање задатака

Плут истиче значај разноврсности примена и контекста за које се садржаји везују (Плут 2003, према Милинковић, Ђокић и Дејић 2008: 76). Према психолошкој теорији памћења разноврсност садржаја за које се везују нова знања омогућава флексибилнији употребу знања у новим контекстима. У иновативном моделу уџбеника уочљиво је поштовање овог принципа у свим деловима уџбеника. Задаци који су намењени увежбавању и меморисању су разноврсни по сложености од једноставних до сложених у захтевима, разноврсни су по избору репрезентације и форми. На пример, ученици се мотивишу да увежбају поступак множења вишецифрених бројева троцифреним бројем и вишеструком десетицом израчунавањем количине хране које поједу одабране животиње за дати период (слика 26.).

У табели су дати подаци о томе колико хране дневно могу да поједу неке животиње. Израчунај колико је то хране за једну календарску годину, а колико за дати период. (Рачунај за годину од 365 дана.)

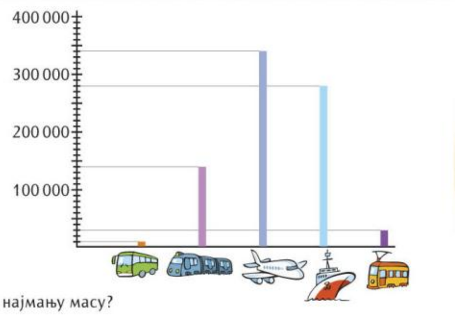
животиња	количина хране за 1 дан	количина хране за 1 годину	период у годинама	количина хране за дати период
слон	200 kg зелене масе		70	
орка	100 kg рибе		95	
нилски коњ	40 kg хране		54	
пеликан	2 kg рибе		20	
бубамара	1 000 ваши		3	
жута белоушка	20 пуноглаваца		20	
мрки медвед	15 лососа		35	
слепић	10 пужева голаћа		60	

Слика 26. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

У наредном примеру (слика 27.) уочљиво је коришћење различитих репрезентација податка – табеларних и графичких. Одређују се подаци о маси превозних средстава читањем из табеле и са графика.

Упиши у табелу податке са слике.

превозно средство	маса у kg
воз	140 000
брод	
	340 000



а) Које превозно средство има највећу, а које најмању масу?

....

б) Која превозна средства имају мању масу од масе брода?

....

в) Које превозно средство има већу масу од масе брода?

....

Слика 27. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

Диференцијација у уџбенику

У уџбеницима се све више јасно уочава тенденција која подржава *диференцирану наставу* (Гусев 2003: 237). Тако се у уџбеницима: 1) издваја садржај који је обавезан за све (јасно назначени делови) и 2) велики број разноврсних задатака за чије решавање није потребно учење додатног градива.

Све више је примера појаве једне нова генерација уџбеника математике за млађе разреде основне школе који, за разлику од ранијих, воде дијалог са ученицима и видљиво користе диференцијацију наставе (Истомина 2000, Петерсон 2000, Тарасов и Тарасова 1996, Давыдов и др., према Гусев 2003: 241).

Диференцирани задаци у уџбеницима су природни наставак и развој самосталног рада ученика. Док се при подели на варијанте код састављања и реализације самосталног рада долази до проблема како узети у обзир индивидуалне карактеристике ученика, диференцирани задаци то чине аутоматски (Гусев 2003: 265). Сам принцип њиховог састављања и коришћења предвиђа континуирани прелаз од једних индивидуалних карактеристика и могућности на друге кроз осмишљени систем питања. При том сваки ученик пролази исти почетни ниво, напредује својом брзином и постиже индивидуалне успехе.

Систем диференцираних задатака има за циљ развој логичког мишљења ученика и развој њихових математичких способности, али и да се контролише ниво таквог развоја. Структура диференцираних задатака омогућава да се помогне ученицима да „достигну виши ниво знања“ (Гусев 2003: 266). Такви задаци утичу на развијање систематичности мишљења, јасности и тачности, а омогућавају и да се евентуално открију ученици који имају склоности ка дедуктивном мишљењу на овом узрасту.

Могући су различити типови диференцираних задатака: а) једноставни диференцирани задаци за рад на часу који омогућавају да се утврди градиво, контролише ниво његовог усвајања, подстиче и развија мотивиција за учење; б) диференцирани задаци вишег нивоа, намењени за индивидуалне домаће задатке и за рад при продубљеном изучавању предмета итд. У уџбеницима се специјално издвајају две врсте вежбања у којима се учење заснива на томе да: 1) ученик извлачи закључке и 2) објашњава како је дошао до закључака (Гусев 2003: 237). Ове вежбе би требало да обезбеде рад ученика целог одељења, где сваки ученик може да изрази своје мишљење и чује мишљење других.

У примеру (слика 28.) приказана је једна уџбеничка јединица из теме *Запремина квадра и коцке*. У њој се јасно издвајају и обележавају садржаји који су: 1) обавезни за све ученике – израчунавање запремине прво квадра, а затим и коцке, те уопштавање речима и симболима, у оквиру којих се решавају задаци који су показни примери и задаци за вођено увежбавање и 2) садржаји у целинама намењеним као додатни садржај за ученике који желе да их решавају у виду: *Задатка обележеног сијалицом (задатак плус)* за ученике који воле изазов и проблемске задатке, *Истраживачки задатак* у ком се види да је математика свуда око нас, *Из историје математике* где се сазнаје како су у давна времена решавани проблеми са којима се ученик у овој књизи сусреће и део именован као *И ово је математика* као занимљиви задаци / проблеми који се решавају математичким поступцима / процедурама (упућујући на овај начин ученике да математику препознају у свакодневном окружењу и примењују математичке процедуре при решевању проблема и тражењу решења).

Проширивање и обогаћивање знања кроз давање занимљивих информација и задатака

Уџбеник поред остваривања циљева наставе кроз обраду предвиђених садржаја, може и треба да има и додатне садржаје. Како истиче Требјешанин уџбеник „може да утиче на развој нових интелектуалних и културних интересовања и потреба тако што ће сугерисати или иницирати неке активности које су и изван уџбеника и школске ситуације“ (Требјешанин 2001, према Милинковић, Ђокић и Дејић 2008: 76).

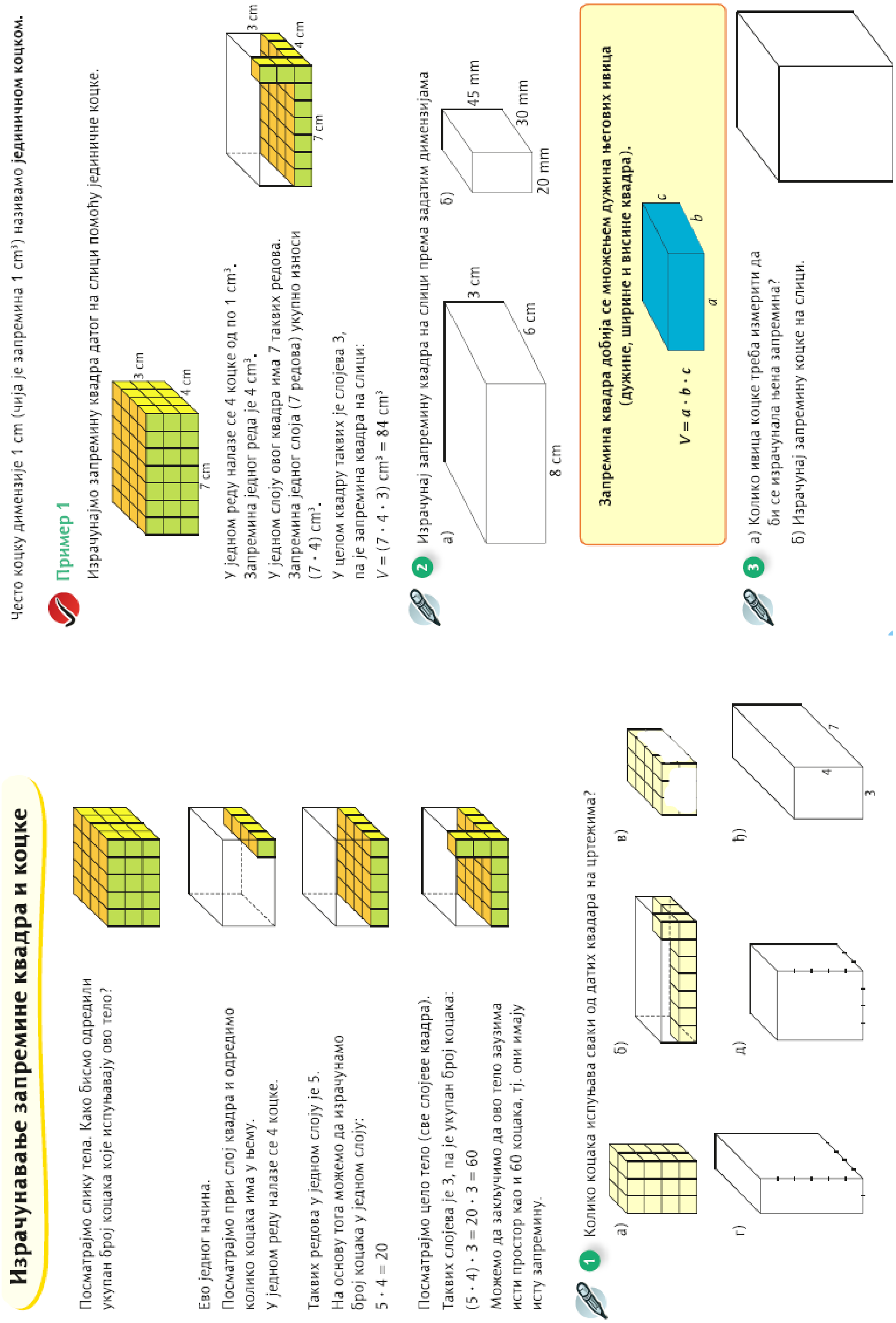
Слика 29. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

У примеру (слика 29.) знања из математике се проширују и обогаћују занимљивим информацијама из биологије (познавања природе). Ученик сабирајући на вертикалној бројевној полуправој учи на којој надморској висини расту поједине биљне културе.

Садржаји из елементарне статистике не налазе се у основном програму математике у млађим разредима основне школе. Стога ови садржаји представљају обогаћивање програма и морају се уводити у уџбеник с посебном мером и пажњом. У примеру (слика 30.) ученици се подстичу да примене познавање графичког представљања разломака за читање 'торте' какве виђају у новинама.

Истраживачким задатком у примеру (слика 31.) ученик се упућује да сазна године рођења чланова породице, пронађе одговарајућу годину рођења на бројевној полупавој и на тај начин визуелно сагледава проток времена. За ученике који желе да науче и сазнају нешто више, у свакој теми уџбеника дају се линкови са интернета (слика 32.).

У уџбенику је јасно изражен став да је математика део опште културе, чиме следимо идеје Бартолинија и Боера (Bartolini and Boero 1998: 60) о геометрији као делу наслеђа и културној баштини која се преноси. Због тога се у њему могу наћи: историјски садржаји, изреке, питалице, пословице ... На пример, на једној страни уџбеника, завршавајући поглавље са 'много' рачунања, ученицима се поставља питалица: „Да ли знаш шта значи када кажемо да на неког можемо да рачунамо?" или на крају поглавља из геометрије ученицима се предлаже да размисле о значењу изреке: „Коцка је бачена!".



Израчунавање запремине квадра и коцке

Посматрајмо слику тела. Како бисмо одредили укупан број коцака које испуњавају ово тело?

Ево једног начина.

Посматрајмо први слој квадра и одредимо колико коцака има у њему.

У једном реду налазе се 4 коцке.

Таквих редова у једном слоју је 5.

На основу тога можемо да израчунамо број коцака у једном слоју:

$5 \cdot 4 = 20$

Посматрајмо цело тело (све слојеве квадра).

Таквих слојева је 3, па је укупан број коцака:

$(5 \cdot 4) \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$

Можемо да закључимо да ово тело заузима исти простор као и 60 коцака, тј. они имају исту запремину.

1 Колико коцака испуњава сваки од датих квадара на цртежима?

а) б) в)

г) д) ђ)

Често коцку димензије 1 cm (чија је запремина 1 cm^3) називамо **јединичном коцком.**

Пример 1

Израчунајмо запремину квадра датог на слици помоћу јединичне коцке.

У једном реду налазе се 4 коцке од по 1 cm^3.
Запремина једног реда је 4 cm^3.

У једном слоју овог квадра има 7 таквих редова.
Запремина једног слоја (7 редова) укупно износи $(7 \cdot 4)$ cm^3.

У целом квадру таквих је слојева 3,
па је запремина квадра на слици:

$V = (7 \cdot 4 \cdot 3)\ cm^3 = 84\ cm^3$

2 Израчунај запремину квадра на слици према задатим димензијама

а) б)

Запремина квадра добија се множењем дужина његових ивица (дужине, ширине и висине квадра).

$V = a \cdot b \cdot c$

3 а) Колико ивица коцке треба измерити да би се израчунала њена запремина?

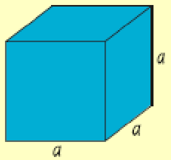
б) Израчунај запремину коцке на слици.

Слика 28. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2012)

Коцка је квадар код којег су све ивице међусобно једнаке (подударне).

Запремина коцке добија се множењем дужина њених ивица (дужине, ширине и висине коцке).

$V = a \cdot a \cdot a$

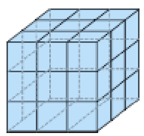


4 Које димензије може да има квадар чија је запремина 12 dm³? Задатак уради у свесци.

Дужина (dm)	*	*	*	*
Ширина (dm)	*	*	*	*
Висина (dm)	*	*	*	*
Запремина (dm³)	12	12	12	12

И ово је математика

Дрвена коцка обојена плавом бојом по спољашњим странама исечена је на мање коцке.

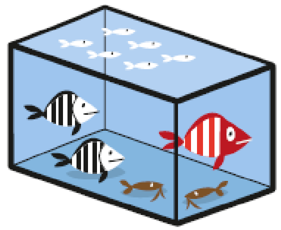


а) Колико има мањих коцака чије су три стране обојене?
б) Колико има мањих коцака чије су две стране обојене?
в) Колико има мањих коцака са само једном обојеном страном?
г) Колико има мањих коцака које су необојене (немају обојену ниједну страну)?

Истраживачки задатак

Планирали смо да направимо школски акваријум који запрема 150 *l* воде. У акваријум би биле смештене тропске рибице. У табели су дати подаци о количини воде потребној за њихов живот.

Врста рибице	Запремина воде у којој рибица живи
Планински бели облак	3 dm³
Зебраста	7 dm³ 500 cm³
Црвено-пругаста	9 dm³
Брката	4 dm³ 500 cm³



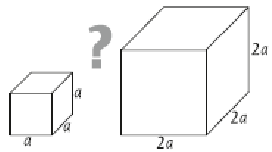
а) Желимо да акваријум има дужину 60 cm и ширину 50 cm. Израчунај колико је стакла потребно за прављење овог акваријума без поклопца.
б) У акваријуму би живело најмање по 6 рибица од сваке наведене врсте. Колико би се још рибица и које врсте могло сместити у акваријум?

Задатак има два решења. Направи извештај за своје одељење.

Из историје математике

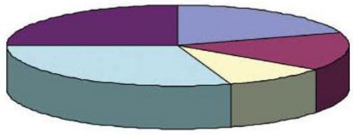
Још су се стари Грци бавили проблемима запремине тела. Питали су се колика би била дужина ивице коцке која би имала два пута већу запремину од полазне коцке.
Грци су тај проблем решавали цртањем, а не рачунањем.

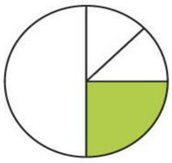
Већина је мислила да нова коцка треба да има два пута дужу ивицу од полазне коцке. Шта ти мислиш о томе? У свесци израчунај запремине обе коцке и упореди их.



У једном разреду има 24 ученика: 12 је смеђооко, 6 зеленооко, 3 су црнооока, а остали су плавооки. Попуни празна поља у табели, а затим на кругу обој одговарајуће делове браон, зеленом, црном и плавом бојом.

боја очију	број ученика	део укупног броја ученика	боја на кругу
смеђа			
зелена	6	$\frac{1}{4}$	зелена
црна			
плава			



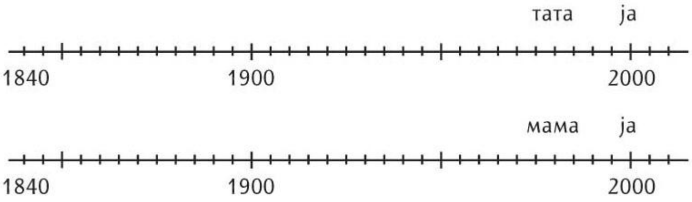


У новинама често виђаш овакве цртеже. Помоћу њих се могу представити разни бројчани подаци. Понекад се овакви цртежи називају *торте* или *пите*.

Слика 30. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

Истраживачки задатак

Разговарај са члановима породице о својим прецима. Утврди које године су рођени твој отац, деда, прадеда..., као и мама, бака, прабака... Упиши на бројевним полуправама године рођења својих предака.

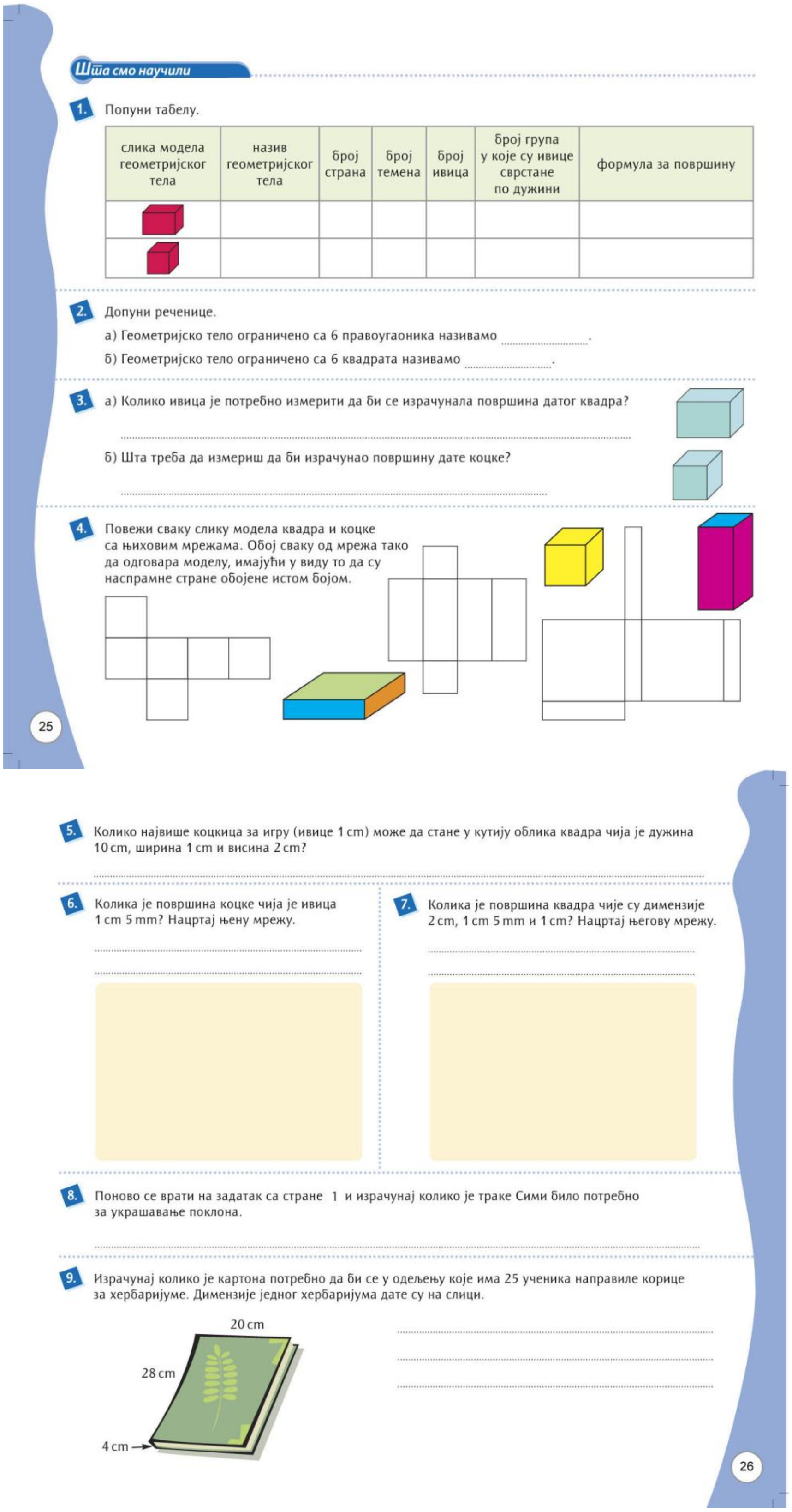


Слика 31. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

За љубитеље компјутера

Ако желиш да решиш још неки занимљив задатак о упоређивању површина, посети следеће адресе на Интернету:
http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/welcome.xml?groep=0 (линк: Gullivers Travel)
http://www.figurethis.org/challenges/c12/challenge.htm
http://www.figurethis.org/challenges/c76/challenge.htm

Слика 32. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)



Шта смо научили

1. Попуни табелу.

слика модела геометријског тела	назив геометријског тела	број страна	број темена	број ивица	број група у које су ивице сврстане по дужини	формула за површину

2. Допуни реченице.

а) Геометријско тело ограничено са 6 правоугаоника називамо ....

б) Геометријско тело ограничено са 6 квадрата називамо ....

3. а) Колико ивица је потребно измерити да би се израчунала површина датог квадра?

....

б) Шта треба да измериш да би израчунао површину дате коцке?

....

4. Повежи сваку слику модела квадра и коцке са њиховим мрежама. Обој сваку од мрежа тако да одговара моделу, имајући у виду то да су наспрамне стране обојене истом бојом.

25

5. Колико највише коцкица за игру (ивице 1 cm) може да стане у кутију облика квадра чија је дужина 10 cm, ширина 1 cm и висина 2 cm?

....

6. Колика је површина коцке чија је ивица 1 cm 5 mm? Нацртај њену мрежу.

....

....

7. Колика је површина квадра чије су димензије 2 cm, 1 cm 5 mm и 1 cm? Нацртај његову мрежу.

....

....

8. Поново се врати на задатак са стране 1 и израчунај колико је траке Сими било потребно за украшавање поклона.

....

9. Израчунај колико је картона потребно да би се у одељењу које има 25 ученика направиле корице за хербаријуме. Димензије једног хербаријума дате су на слици.

....

....

....

26

Слика 33. (Дејић, Милинковић и Ђокић 2009, 2012)

Самоевалуација

Дискутабилно је питање какву врсту повратне информације треба и може да пружи уџбеник. За разлику од многих стручњака Плут сматра да уџбеник пре свега треба да омогући ученику проверу решења задатака и да повремено резимира битне ствари из текста и даје прегледне табеле у којима се повезује градиво у систем знања. С друге стране Пешић се залаже за учесталу повратну информацију после сваке веће целине (Пешић 1998, према Милинковић, Ђокић и Дејић 2008: 77). На крају сваког поглавља сумира се научено и пружа прилика за самоевалуацију ученика кроз решавање одабране групе задатака којима се још једном посвећује пажња различитим елементима знања која је ученик требало да усвоји у оквиру датог поглавља.

На пример (слика 33.) након поглавља *Површина квадра и коцке* дати су задаци за самоевалуацију са решењима (без целог поступка решавања задатка). Изабрани задаци омогућавају систематизацију знања из те теме чиме се ученик упућује на најзначајније садржинске елементе.

19. Отворена питања за даља истраживања – простор као модел почетне наставе геометрије у уџбеницима математике

Колико су актуална питања којим се бавимо говори и тек објављена студија Конференције Међународне комисије математичких инструкција посвећена задацима у математичком образовању (*Task Design in Mathematics Education,* Proceedings of ICMI Study 22 (Vol. 1), Oxford, UK, 2013.). Издвојмо оне од елемената који се тичу и нашег истраживања.

Они који се баве наставом математике фокус виде у великој мери у социјалном окружењу учионице и учењу заснованом на обрасцима аргументованог мишљења, емоционалног ангажовања, те мерењу учења (Margolinas 2013: 10). Реалистично математичко образовање показује како пажљиво формиране ситуационе секвенце могу да воде ученике ка апстрактним формама.

Због разлога глобалне стварности Валверде, Бианки, Волф, Шмит и Хуанг у поменутој публикацији Конференције фокусирају се на уџбеник математике, делимично зато што су често традиционалног приступа или су прилагођени захтевима тестирања ученика, а не њиховом истраживању и развоју Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang 2002, према Margolinas 2013: 11), али и због тога што су у неким земљама уџбеници главна снага образовних промена. Осим резултата и анализа TIMSS-а који указују на значај уџбеника (Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt & Houang 2002, према Margolinas 2013: 298[87]), они су основа за планирање наставе и остваривање снажног утицаја на садржај учења, те како се оно одвија (Ball & Cohen 1996, Yang, Reys & Wu 2010, према Margolinas 2013: 298[88]). Научни значај нашег истраживања лежи у сагледавању проблема и налажењу одговора концепта уџбеника почетне наставе математике утемељеног у теорији реалистичног математичког образовања и верификацији одговора методама статистичке анализе. Интердисциплинараним приступом одабраном проблему дајемо оригинални допринос дидактичко-методичким наукама.

Практични значај нашег истраживања видимо у давању конкретних предлога у осмишљавању задатака / активности који чине језгро ефикасне наставе, што је добро илустровано у теоријски заснованом дугорочном истраживачком пројекту реалистичног математичког образовања (de Lange 1996, према Margolinas 2013: 10). Математички задатак чини срж математичког образовања (Artigue & Perrin-Glorian 1991, према Margolinas 2013: 12). Задаци генеришу активности које стварају прилике за увођење математичких појмова, идеја, стратегија, као и да се користи и развија математичко мишљење и различити начини истраживања. Говори се о састављању, модификацији, избору, секвенцирању, оцењивању задатака итд. и то задатака из уџбеника математике (или других извора за учење).

[87] Barabash, M. and Guberman, R. (2013): „Developing Young Students' Geometric Insight Based on Multiple Informal Classifications as a Central Principle in the Task Design“, In: *Task Design in Mathematics Education*, Proceedings of ICMI Study 22 (Vol. 1). Oxford, UK, pp. 295-303.

[88] Ibid.

Наше теоријско и експериментално истраживање није било усмерено само на нивое постигнућа ученика у задацима примене знања у геометрији, чији ефекти нису до краја сагледани због краткоће трајања програма, већ се бавимо и појмом и идејом формирања простора. Зато постављамо оправдано питање зашто у програму почетне наставе геометрије нема захтева за развој способности *просторног резоновања,* поред унапређивања искустава при *мерењу дужине, површине и запремине*?!

Отуда отварамо пут новим истраживањима која би успостављала, истраживала и пратила ефекте (новог) програма почетне наставе геометрије и *простора као модела (основношколске наставе геометрије) у уџбеницима целог циклуса почетне наставе следећи велике идеје А. Поенкареа кроз просторно резоновање у геометријски структурисаним активностима у 'реалном окружењу'*.

ЛИТЕРАТУРА

а)

1.

Anderson, J. (2009): „Mathematics Curriculum Development and the Role of Problem Solving", ASCA Conference, National Biennial Conference Curriculum: a national conversation, 2-4 October, Canberra, Australia.

Bartolini, B. M. & Boero, P. (1998): "Teaching and learning geometry in context", In: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, An ICMI Study Ed. Mammana and Villani, V., Kluwer Academic Publishers, pp. 52-62.

Berlin, D. (2003): „Integrated Mathematics: From Models to Practice". In: Ed. McGraw, S. A. *Integrated Mathematics: Choices and Challenges*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Berthelot, R. & Salin, H. (1998): "The role of pupils' spatial knowledge in the elementary teaching of geometry", In: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, An ICMI Study Ed. Mammana, C. and Villani, V., Kluwer Academic Publishers, 71-78.

Bishop, A.J. (1980): „Spatial abilities and mathematics achievement - A Review". In: *Educational Studies in Mathematics*, 11, pp. 257-269.

Bruner, J. (1966): *Toward a Theory of Instruction*, Norton, New York.

Cai, J. (2003): „What research tells us about teaching mathematics through problem solving". In: *Research and issues in teaching mathematics through problem solving*, Lester, F. (Ed.), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 241-254. Available on: http://tlsilveus.com/Portfolio/Documents/EDCI327_ProblemSolving.pdf

Clements, D.H. & Battista, M.T. (1992): „Geometry and Spatial Reasoning". In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (Ed.) D. A. Grouws, Macmillan Publishing Copmany, New York, pp.420-464.

Collaborative Group (2006): *Developments in the Geometry Curriculum in the UK and Japan*, Collaborative Group for Research in Mathematics Education.

Cooper, B. and Harries, T. (2002): „Children's Responses to Contrasting `Realistic' Mathematics Problems: Just how realistic are children ready to be?", *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 49, Issue 1, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp 1-23. Accessed: 25/02/2009, URL: http://jstor.org/stable/3483258

Corry, L. (2009): „Writing the ultimate mathematical textbook: Nicolas Bourbaki's *Éléments de mathématique*", In: *The Oxford Handbook of the History of*

Mathematics, Robson, E. and Stedall J. (Ed.), Oxford University Press, pp. 565-588.

Curriculum and Evaluation (1989): *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Dejić, M., Milinković, J. & Đokić, O. (2009): „Didactics of Mathematics Course in Teachers Education“, Пятая международная научно-теоретическая конференция *Образование и наука в третьем тысячелетии*, Сборник научных трудов под редакцией В. И. Степанова, Издательство Алтайского Университета, Барнаул, стр. 14-21.

De Moor, E. (1999): „From `Vormleer` to Realistic Geometry”. Скинуто 1. фебруара 2008. са: http://www.ru.nl/w-ens/gmfw/samenv/prom99-3.html

Diezmann, C. M., Watters, J. and English, L. (2002): „Teacher behaviours that influence young children’s reasoning”, In: Cockburn, A. D. and Nardi, E. (Ed.) *Proceedings 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2* (PME), pages 289-296, Norwick, UK.

Dreyfus**,** T. (2012): „Constructing abstract mathematical knowledge in context“**,** *12th International Congress on Mathematical Education*, 8-15 July, COEX, Seoul, Korea. Available April 15th 2013 on: http://www.icme12.org/upload/submission/1953_F.pdf

Duval, R. (1998): „Geometry from the cognitive point of view“, In: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, An ICMI Study Ed. Mammana and Villani, V., Kluwer Academic Publishers, 37-52.

English, L. and Watters, J. (2004): “Mathematical Modeling in the Early School Years”, *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 16, No. 3, pp. 59-80.

Fauzan, A. (2002): *Applying Realistic Mathematics Education (RME) in Teaching Geometry in Indonesian primary* schools, Thesis University of Twente, Enschede. Available on: http://doc.utwente.nl/58707/1/thesis_Fauzan.pdf

Fauzan, A., Slettenhaar, D., Plomp, T. (2002): „Traditional Mathematics Education vs. Realistic Mathematics Education: Hoping for Changes“, *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference,* Centre for Research in Learning Mathematics, Valero, P. & Skovsmose, O. (Ed.), Copenhagen, pp. 1-4. Available on: http://mes3.learning.aau.dk/Projects/Fauzan.pdf

Fischbein, E. (1993): „The Theory of Figural Concepts“, *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 139-162. Available March 25th 2013 on: http://www.jstor.org

Freudenthal, H. (1968): „Why to teach mathematics so as to be useful“, *Educational Studies in Mathematics, 1* (1, 2), pp. 3-8.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1983): „Major Problems of Mathematics Education“, *Proceeedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education ICME IV*, (Ed.) Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollak, H. and Suydam, M., Birkähuser Boston Inc., USA, pp.1-7.
Или:
Freudenthal, H. (1981): „Major Problems of Mathematics Education“, *Educational Studies in Mathematics*, Reidel, D. Publishing Co., Dordrecht, Holland, Vol. 12, No. 2, pp. 133-150.

Freudenthal, H. (1991): *Revisiting mathematics education,* Dordrecht, Kluwer Academic, Netherlands.

Fujita, T. & Jones, K. (2002): „Opportunities for the development of geometrical reasoning in current textbooks in the UK and Japan“. In: Pope, S. (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 22 (3).

Geometry Working Group (1998): „Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning“, *Informal Proceedings 18-1&2 of BSRLM (British Society for Research into Learning Mathematics)*, pp. 29-34. Also available at: http://www.bsrlm.org.uk/IPs/ip18-12/BSRLM-IP-18-12-5.pdf

Ginsburg, H. P. and Baron, J. (1993): “Cognition: Young Children’s Construction of Mathematics”, *Research Ideas for the Classroom − Early Childhood Mathematics*, Ed. Jensen, R. J., NCTM, New York, pp. 3-21.

Глейзер, Г. Д. (1991): „Каким бьiть школьному курсу геометрии“, *Математика в школе*, 4-с, 68-71.

Глейзер, Г.Д. (2001): *Математика – Хрестоматия по истории, методологии, дидактике*, УРАО, Москва.

Gravemeijer, K.P.E. (1994): *Developing Realistic Mathematics Education*, Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute.

Гусев, В. А. (2003a): „Дифференциация обучения математике в школе“, у: *Психолого-педагогичнеские основьи математике*, Вербум-М, Академия, Москва, стр. 184-290.

Гусев, В. А. (2003b): „Мотивация обучения математике в школе“, у: *Психолого-педагогичнеские основьи математике*, Вербум-М, Академия, Москва, стр. 291-411.

Gutierrez, A., Kuzniak, A. and Straesser, R. (2005): „Research on Geometrical Thinking“, Working Group 7 *Research on Geometrical Thinking, CERME 4,* pp. 725-726.

Hershkowitz, R. (1998): “About reasoning in geometry”, In: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* An ICMI Study Ed. Mammana and Villani, V., Kluwer Academic Publishers, 29-36.

Heuvel-Panhuizen, van den M. (1995): *A representional model in a long-term learning process – the didactical use of models in Realistic Mathematics Education,* AERA, San Francisco.

Heuvel-Panhuizen, van den M. (1996): *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Heuvel-Panhuizen, van den M. (2001): „Realistic Mathematics Education as work in progress”, F.L. Lin (Ed.) *Common Sense in Mathematics Education – Proceedings of 2001 the Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education,* Taipei, Taiwan, pp.1-40.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992): „Learning and Teaching with Understanding“. In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* (Ed.) D. A. Grouws, Macmillan Publishing Copmany, New York, 65-97.

Houdement, C. and Kuzniak, A. (2003): „Elementary geometry split into different geometrical paradigms“, *Proceedings of CERME 3, Working group 7,* pp. 1-9. Или:
Houdement, C. and Kuzniak, A. (1999): „Un exemple de cadre conceptuel pour létude de l’enseignement de la géométrie en formation des maîtres”, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 40(3), 283-312.

House, P.A. & Coxford, A.F. (Ed.) (1995): *Connectig Mathematics across the Curriculum,* Yearbook, National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, Reston, Virginia. http://www.brocku.ca/MeadProject/Poincare/Poincare_1905_toc.html

Kjeldsen, T. H. (2009): „Abstraction and application: new contexts, new interpretations in the twentieth-century mathematics“, In: *The Oxford Handbook of the History of Mathematics,* Robson, E. and Stedall J. (Ed.), Oxford University Press, pp. 755-778.

Margolinas, C. (Ed.). (2013): „Introduction“, in: *Task Design in Mathematics Education,* Proceedings of ICMI Study 22 (Vol. 1). Oxford, UK, pp. 9-15.

Marjanović, M.M. (2001): „Metric Eucliden Projective and Topological properties“, in: *Teaching of Mathematics,* Vol. IV, No. 1, pp. 41-70.

Marjanović, M. M. (2007): „Didactical Analysis of Primary Geometric Concepts II“, *The Teaching of Mathematics*, Vol. X, 1, Belgrade, pp. 11-36.

Martio, O. (2009a): „Разговори о настави математике у школама“, Грађевински факултет Универзитета у Београду и Друштво математичара Србије, 22. април 2009. године, PowerPoint презентација
Или:
Martio, O. (2008): „Mathematics curriculum development in Finland – unexpected effects”, Paris, November 26-27. Available at: http://www.jem-thematic.net/en/workshop5

Martio, O. (2009b): „Long Term Effects In Learning Mathematics In Finland – Curriculum Changes And Calculators“, *The Teaching Of Mathematics*, Belgrade, Vol. XII, 2, pp. 51–56.

Mićić, V. (1999): „Discovery learning – probably a new approach“, *Proceedings of the 16th Panhellenic Conference on Mathematical Education*, Larisa, pp. 114-117.

Milinković, J. (2012): „Realistic Mathematics Education from theory to practice“, in: Conference Proceedings *1st International Conference on Learning and Teaching Mathematics KUPM*, Maribor, pp. 43-49.

OECD (Organization for Economic Co-operation and Development) (2004): *Learning for Tomorrow's World – First Results from PISA 2003*, OECD, Paris.

Pepin, B. (2008): „Mathematical tasks in textbooks: Developing an analytical tool based on ‘connectivity’”, Discussion group *The changing nature and roles of mathematics textbooks: form, use, access*, ICME 11, Mexico. Also available 2011, November 11 at: http://dg.icme11.org/tsg/show/18

Piaget, J. & Inhelder, B. (1971): *The Child's Conception of Space*, Routledge & Kegan Paul Ltd., London.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960): *The Child's Conception of Geometry*, Basic Books, New York.

PISA (Programme for International Student Assessment) (2003): *Learning for Tomorrow's World First Results from PISA 2003*. Available: http://www.pisa.oecd.org

Poincaré, H. (1905): *Science and hypothesis*. Preface by J. Larmor, London and Newcastle-on-Cyne, The Walter Scott Publishing Co., Ltd New York.
Или:
Poincare, H. (1952): *Science and Hypothesis*, Dover Publications, Inc. New York.

Погорелов, А. В. (1977): *Элементарная геометрия*, Наука, Москва.

Prenger, J. (2005): *Construction of Meaning in the Mathematics Classroom* – Research Proposal, Dissertations of the University of Groningen, Netherlands. Available on: http://www.rug.nl/research/clcg/research/projects/prenger?lang=en

Resnick, L.B. & Ford, W.W. (1981): *The Psychology of Mathematics Instruction*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey.

Robitaille, D. F. and Travers, K. J. (1992): "International studies of achievement in mathematics". In: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Ed. Grouws, D. A., National Council of Teachers of Mathematics, Macmillan Publishing Company, pp. 687-709.

Romberg, T. A. (2003): „Creating a Research Community in Mathematics Education", *WCER Working Paper No. 2003-10*, Wisconsin Center for Education Research, School of Education, University of Wisconsin-Madison, USA.

Schwarz, B., Dreyfus, T. & Hershkowitz, R. (2008): „The nested epistemic actions model for abstraction in context", in: Schwarz, B., Dreyfus, T. & Hershkowitz, R. (Eds.), *Transformations of knowledge in classroom interactions*, London, UK: Routledge, pp. 1-37.

Encyclopedia of education and human development (2005): Sharpe, M. E. (Inc.), Farenga, S. J. and Ness, D. (Ed.), Foreword by Borland, J. H., Armonk New York and London England.

Skemp, R. (1986): *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, London.

Spatial Test Battery. Accessed: 01/01/2010: http://cty.jhu.edu/ts/stbformat.html

Steen, L. A. (1999): „The concluding chapter", in *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*, NCTM's Yearbook, Stiff, V. L. (Ed.), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 270-285.
Или:
Steen, L. A. (1999): „Twenty Questions about Mathematical Reasoning", *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12*. Available on: http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/reason.html

Stein, M.K., Smith, M.S., Henningsen, M. & Silver, E.A. (2000): *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*, Teachers College Press, New York.

Stillman, G. (2007): „Mathematical Modelling in the Real World", PowerPoint presentation, Teachers' Training Faculty, Belgrade, Serbia, October 31st .

Streefland, L. (1991): *Fractions in Realistic Mathematics Education*. A Paradigm of Developmental Research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Thompson, D. R. and Senk, S. L. (2008): „A Multi-dimensional approach to understanding in mathematics textbook developed by UCSMP“. Available December 6th 2011 at: http://dg.icme11.org/tsg/show/18

TIMSS (1999): *TIMSS 1999 International Mathematics Report Findings from IEA's Repeat of the Third International Mathematics and Science Study at the Eighth Grade*. Available: http://timss.bc.edu/timss1999i/math_achievement_report.html

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education,* Dordrecht, Reidel.

Treffers, A. (1991): „Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990“. In: *Realistic Mathematics Education in Primary School,* Streefland, L. (ed.), Utrecht: CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Villani, V. (1998): “The way ahead”, In: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century,* An ICMI Study Ed. Mammana and Villani, V., Kluwer Academic Publishers, pp. 319-327.

Woolfolk, A.E. (1998): *Educational Psychology*, Boston: Allyn & Bacon.

Wubbels, T., Korthagen, F. and Broekman, H. (1997): „Preparing teachers for Realistic Mathematics Education“, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 32, Issue 1, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, pp. 1–28. Accessed: 07/06/2013, URL: http://www.jstor.org/stable/3483008

Yakimanskaya, I. S. (1991): *The Development of Spatial Thinking in Schoolchildren –* Survey of Applied Soviet Research in School Mathematical Education, Soviet Studies in Mathematics Education, Vol. 3, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Zech, F. (1998): *Grundkurs Mathematikdidaktik – Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik,* 9. Auflage, Beltz Verlag, Weinheim und Basel.

2.

Антић, И. и Павловић-Бабић, Д. (2011): „Решавање математичких проблема у реалном контексту: квалитативна и квантитативна анализа постигнућа“, *Настава и васпитање*, Београд, LX, 2, стр. 193-205.

Антонијевић, Р. (2007): „Области истраживања постигнућа ученика: TIMSS 2007 и PISA 2006“, *Настава и васпитање*, 4, Београд, стр. 373-386.

Антонијевић, Р. и Вељковић, М. (2005): „Наставни садржаји и постигнуће ученика из математике“. У: *TIMSS 2003 у Србији*, Антонијевић, Р. и Јањетовић, Д. (пр.), Београд, стр. 81-107.

Банђур, В. и Поткоњак, Н. (1999): *Методологија педагогије*, Савез педагошких друштава Југославије, Београд.

Божић, М. (2010): „Математички и физички простор“ – предавања на *Коларчевом народном универзитету*, Београд, јануар-фебруар.

Божић, М. (2012): „Писа тестови и шта нам је чинити?“, *Настава математике*, Друштво математичара Србије, LVII, 1-2, стр. 1–11.

Буквић, А. (1996): *Начела израде психолошких тестова*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Wolf, B., Momirović, K. i Džamonja, Z. (1992): *KOG 3 – baterija testova inteligencije*, Savez društva psihologa Srbije, Centar za primenjenu psihologiju, Beograd.

Vuković, N. (2005): *PC Statistika i verovatnoća* – matematička statistika, Fakultet organizacionih nauka, Beograd.

Глејзер, Г. Д. (1997): „Геометрија у школи“, *Настава математике*, XLII, 1-2, Друштво математичара Србије, Београд, стр. 1-6.

Дајовић, М. И. (1978): „Зашто учимо геометрију“, *Настава математике*, V, 1-2, Београд.

Дејић, М. (1998): „Кратак осврт на проблемску наставу“, *Наша школа*, 1-2, Бањалука, стр. 104-121.

Дејић, М. (): „Приказ мање познатих радова Михаила Петровић Аласа, намењених наставницима и ученицима основних и средњих школа“, *Педагошка стварност*, Нови Сад, стр. – .
Или:
Dejić, M. (2001): „Prikaz manje poznatih radova Mihaila Petrović Alasa, namenjenih nastavnicima i učenicima osnovnih i srednjih škola“, *10th Congress of Yugoslav Mathematicians*, Belgrade, January 21–24.

Дејић, М. (2002): „Анализа и објашњење садржаја наставног програма математике у разредној настави“, *Настава и васпитање*, 3, Београд, стр. 166-183.

Дејић, М. (2004): *Почетна настава геометрије - методички приступ*, Архимедес, Београд.

Дејић, М. (2008): „Неки аспекти образовања учитеља у области методике наставе математике“, *Настава и васпитање*, 2, Београд, стр. 136-149.

Дејић, М. и Егерић, М. (2007): *Методика наставе математике*, Учитељски факултет, Београд.

Dragićević, Č. (2009): *Statistika za psihologe* – sa zbirkom zadataka, drugo izdanje, Centar za primenjenu psihologiju Društva psihologa Srbije, Beograd.

Ђокић, О. (2007): *Појам линије у почетној настави геометрије*, Монографије (Ед.), Учитељски факултет, Београд.

Ђокић, О. (2008): „Задаци оријентисани на примену знања – од (новог) наставног програма до (нових) уџбеника почетне наставе математике“, у: Радовановић, И. и Радовић, В. Ж. (ур.) *Иновације у основношколском образовању – од постојећег ка могуће*, Учитељски факултет, Београд, стр. 192-207.

Ђокић, О. и Дејић, М. (2008): „Како учитељ може да изабере уџбеник математике?“, у: *Методички аспекти наставе математике*, Педагошки факултет, Јагодина, стр. 31-47.

Đokić, O. (2011): „O izboru udžbenika matematike“, *Debata na temi o udžbenicima*, Centar za demokratiju i Demokratski politički forum, Beograd, 23. mart.

Европска комисија (2005): „Образовање у Европи – различити системи, заједнички циљеви до 2010. године“, *Педагогија*, 2, Београд, стр. 256-271.

Живковић, Р. (1980): „Настава и уџбеници математике у основној и средњој школи са становишта откривајуће методе поучавања“, у: *Проблеми савременог математичког образовања*, Институт за педагошка истраживања, Зборник 13, Просвета, Београд, стр. 127-134.

Зујев, Д. Д. (1988): *Школски уџбеник*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Ivić, I., Milinković, M., Rosandić, R., Smiljanić, V. (1976): *Nova beogradska revizija Bine- Simonove skale*, Beograd.

Ивић, И. и сар. (1997): *Активно учење*, Институт за психологију, Београд.

Илић-Дајовић, М. (1980): „Неки проблеми савремене наставе геометрије“, у: *Проблеми савременог математичког образовања*, Институт за педагошка истраживања, Зборник 13, Просвета, Београд, стр. 23-30.

Kvaščev, R., Đurić, Đ. i Krkljuš, S. (1989): *Sposobnosti, osobine ličnosti i uspeh učenika*, Zavod za izdavanje udžbenika i Institut za pedagogiju Filozofskog fakulteta, Novi Sad.

Коен, М. и Нејгел Е. (1965): *Увод у логику и научни метод*, Завод за издавање уџбеника Социјалистичке Републике Србије, Београд.

Kocić, Lj. (1981): *Padagoški eksperiment* – karakteristike i mogućnosti, Institut za pedagoška istraživanja, Prosveta, Beograd.

Коцић, Љ. (2001): „Дидактичко-методички захтеви у обликовању структуре уџбеника“. У: *Савремени основношколски уџбеник – теоријско-методолошке основе*, Требјешанин, Б. и Лазаревић Д. (ур.), Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, стр. 131-156.

Кузмановић, Д. и Павловић-Бабић, Д. (2011): „Приступи процењивању образовних постигнућа ученика: критички осврт“, у: Зборник Института за педагошка истраживања, 43, 1, стр. 63-85.

Лексикон образовних термина (2013): Учитељски факултет, Београд. (у штампи)

Lučić, Z. (1997): „Euklidska geometrija – merenje površi“, u: *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Matematički fakultet, Beograd, str. 235-240.

Lučić, Z. (2009): „Najstarije teoreme geometrije“, u: *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, str. 3–32.

Lučić, Z. (2009): „Euklid i njegovi sledbenici“, u: *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, str. 33–70.

Manturov, O.V., Solncev, J.K., Sorkin, J.I., Fedin, N.G. (1969): *Rečnik matematičkih termina sa tumačenjima*, red. Ditkina, V.A., Naučna knjiga, Beograd.

Марјановић, М. М. (1996): *Методика математике I и II*, Учитељски факултет, Београд.

Марјановић, М. М. (2005): „Дидактичка анализа – план за разматрање“, *Настава математике*, Друштво математичара Србије, Београд, L, 4, стр. 5-12. Скинуто 1.7. 2008.: http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/nm/228/nm50401.pdf

Милинковић, Ј. (2007a): „Реално окружење као извор математичких појмова“, у: *Дидактичко-методички аспекти промена у основношколском васпитању*, Учитељски факултет, Београд, стр. 111-117.

Милинковић, Ј. (2007b): *Методички аспекти наставе вероватноће и статистике у основној школи*, Монографије (Ед.), Учитељски факултет, Београд.

Милинковић, Ј. и Мићић, В. (2008): „Улога дидактичких средстава у основношколској геометрији“. У: *Методички аспекти наставе математике*, Педагошки факултет, Јагодина, стр. 33-37.

Милинковић, Ј., Ђокић, О. и Дејић, М. (2008): „Модел уџбеника као основе активног учења у настави математике“, *Иновације у настави*, 1, Vol. 21, бр. 1, Учитељски факултет, Београд, стр. 70-79.

Milinković, J. i Đokić, O. (2009a): „Udžbenik matematike za aktivnog učenika“, u: *Škola po mjeri***,** X. međunarodni znanstveni skup "Dani Mate Demarina", Pula, str. 483-498.

Milinković, J. i Đokić, O. (2009b): „Kriterijumi evaluacije praktične nastave studenata“, International Conference *Promoting teacher education – From intake system to teaching practice,* Curriculum Reform in Teacher Education, Faculty of Education in Jagodina, Jagodina, Special edition Conference Proceeding No. 8/2, 19-20 May 2009, pp. 251-262.

Мићић, В. (2005): „Учење откривањем – можда нови приступ“, *Настава математике*, Друштво математичара Србије, Београд, L, 4, стр. 13-21.

Pallant, J. (2009): *SPSS: priručnik za preživljavanje* – postupni vodič kroz analizu podataka pomoću SPSS-a za Windows (verzija 15) (*SPSS Survival Manual*: A Step by Step Guide to Data Analysis Using SPSS for Windows (Version 15), Third Edition by Julie Pallant, published by Allen & Unwin, Copyright 2007) (prevod) – aplikativni program “SPSS for Widows“, priručnik iz matematičke statistike, ALLEN & UNWIN, Mikro knjiga, Beograd.

Пантић, В. и Ђокић, О. (2005): *О PISA тестирању – поглед из математичког угла*, Републички семинар о настави математике и рачунарства у основној школи, у средњим школама, на вишим школама и на факултетима, Министарство просвете и спорта Србије и Друштво математичара Србије (саопштење и штампана публикација са резимеима саопштења), Нови Сад, стр. 23-24.

Pešić, J. M. (1998): „Psihološke osnove ciljeva obrazovanja“, u: *Novi pristup strukturi udžbenika – teorijski principi i konstrukcija rešenja*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, str. 67-71.

Pešić, J. (2005): „Problemski diskurs udžbenika“, *Psihologija,* Beograd, Vol. 38 (3), str. 225-237.

Плут, Д. (2003): „Базична истраживања у психологији и импликације на теорију уџбеника“, у: *Уџбеник као културно-потпорни систем*, Плут, Д., Завод за уџбенике и наставна средства Београд и Институт за психологију Филозофски факултет Београд, стр. 109-240.

Плут, Д. (2003): „Мотивациона средства у уџбеницима“, у: *Уџбеник као културно-потпорни систем*, Завод за уџбенике и наставна средства и Институт за психологију, Београд, стр. 173-185.

Плут, Д. (ур.) (2007): *Квалитет уџбеника за млађи школски узраст*, Институт за психологију, Београд.

Romano, D. A. (2009a): „Istraživanje matematičkog obrazovanja“, *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, Banja Luka, Vol. I, broj 1, 1-10.

Романо, Д. А. (2009b): „О геометријском мишљењу“, *Настава математике*, Друштво математичара Србије, LIV, 2–3, стр. 1–11. Скинуто 1.7. 2008.: http://elib.mi.sanu.ac.yu/files/journals/nm/228/nm50402.pdf

Romano, D. A. (2009c): „Teorije matematičkog obrazovanja, prvi dio: RME – teorija“, *Istraživanje matematičkog obrazovanja*, Banja Luka, Vol. I, broj 1, 23-35.

Романо, Д. А. (2011): „Једно утврђивање математичких компетенција студената учитељског програма“, *Настава математике*, Друштво математичара Србије, LVI 1-2, стр. 8–18.

Стројк, Д. Ј. (1991): *Кратак преглед историје и филозофије математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Математичка библиотека, Београд.

Tenjović, L. (2000): *Statistika u psihologiji* – priručnik, dopunjeno izdanje, Centar za primenjenu psihologiju Društva psihologa Srbije, Beograd.

Todorović, D. (2008): *Metodologija psiholoških istraživanja,* Centar za primenjenu psihologiju, Društvo psihologa Srbije, Beograd.

Требјешанин, Б. (2001): „Врсте и нивои знања у савременом уџбенику“, у: Требјешанин, Б. и Лазаревић, Д. (ур.) *Савремени основношколски уџбеник*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, стр. 69-78.

Требјешанин, Б. (2007): „Наставни програм и ефекти наставе и школског учења“, у: *Дидактичко-методички аспекти промена у основношколском образовању*, Учитељски факултет, Београд, стр. 23-34.

Требјешанин, Б. (2009): „Унутрашња мотивација“, у: *Мотивација за учење*. Едиција Студије, Учитељски факултет, Београд, стр. 50-85.

Требјешанин, Б. и Лазаревић Д. (ур.) (2001): *Савремени основношколски уџбеник – теоријско-методолошке основе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Трнавац, Н. (2007): „Дидактичко-методички аспекти промена у основношколском васпитању и образовању“, у: *Дидактичко-методички аспекти промена у основношколском образовању*, Учитељски факултет, Београд, стр. 11-22.

Хавелка, Н. (2001): „Уџбеник и различите концепције образовања и наставе“, у: Требјешанин, Б. и Лазаревић, Д. (ур.) *Савремени основношколски уџбеник*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, стр. 31-58.

Courant, R. i Robbins, H. (1973): *Šta je matematika?* – Elementarni pristup idejama i metodima, Naučna knjiga, Beograd.

Šušnjić, Đ. (2007): *Metodologija* - kritika nauke, IV izdanje, Čigoja, Beograd.

б)

Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања (2011): *Општи стандарди постигнућа – образовни стандарди за крај првог циклуса обавезног образовања за предмет Математика*, Београд.

Министарство просвете (2006): *Образовна постигнућа ученика трећег разреда – национално тестирање 2004*, Министарство просвете и спорта Републике Србије и Завод за вредновање квалитета образовања и васпитања. Скинуто 1. јула 2008. са: http://www.ceo.edu.yu/projekti2006.html

Правилник о наставном плану и програму за I и II разред основног образовања и васпитања. Службени гласник РС – Просветни гласник, бр. 10/04, 20/04, 1/05, 3/06 и 15/06, Београд.

Правилник о наставном плану и програму за први, други, трећи и четврти разред са наставним планом и програмом за трећи разред. Просветни гласник, бр. 1/05 и 15/06, Београд. Доступно 10. августа 2008. и на: http://www.mps.sr.gov.yu/code/navigate.php?Id=473

Правилник о наставном плану и програму за четврти разред основног образовања и васпитања. Просветни гласник, бр. 3/06 и 15/06, Београд. Доступно 10. августа 2008. и на: http://www.mps.sr.gov.yu/code/navigate.php?Id=473

в)

Дејић, М., Милинковић, Ј. и Ђокић, О. (2006): *Приручник за учитеље за наставу математике у четвртом разреду основне школе*, Креативни центар, Београд.

Дејић, М., Милинковић, Ј. и Ђокић, О. (2009): *Математика – уџбеник за IV разред* (први и други део), четврто издање, Креативни центар, Београд.

Дејић, М., Милинковић, Ј. и Ђокић, О. (2012a): *Математика – уџбеник за IV разред,* Креативни центар, Београд.

Дејић, М., Милинковић, Ј. и Ђокић, О. (2012b): *Математика – радна свеска за IV разред,* Креативни центар, Београд.

Ђокић, О. и Богавац, Д. (2006): *Математика – припремни предшколски програм,* Завод за уџбенике, Београд.

Ђокић, О. и Богавац, Д. (2006): *Математика – радна свеска*, припремни предшколски програм, Завод за уџбенике, Београд.

Ђокић, О. и Богавац, Д. (2007): „Приручник за математику“, у: Богавац, Д., Бојовић, Д., Ђокић, О., Требјешанин, Б., Гачановић, Б. и Новковић, Љ. *Приручник за извођење припремног програма*, Завод за уџбенике, Београд.

г)

1.

Јовановић-Лазић, М. и Дрндаревић, Д. (2006): *Математика 1*, БИГЗ PUBLISHING, Београд.

Јоксимовић, С. (2005): *Математика*, Едука, Београд.

Маринковић, С., Маринковић, Љ. И Беговић. Д. (2005): *Математика*, Креативни центар, Београд.

Маринковић, С. (2005): *Забавна математика,* Креативни центар, Београд.

Марјановић, М., Вуковић, М., Капс, М. и Влајковић, Љ. (2002): *Математика,* Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Марјановић, М., Вуковић, М., Капс, М. и Влајковић, Љ. (2002): *Радни листови из математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Рајшп, М., Јовановић, М. и Жиц, Ј. (2006): *Игра бројева и облика,* Klett, Београд.

Тодоровић, О. и Анокић, П. (2005): *Математика*, Народна књига, Београд.

Тодоровић, О. (2005): *Моја математика*, Народна књига, Београд.

Шимић, Г. (2005): *Моја прва математика*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Шимић, Г. и Пајић, Р. (2005): *Радни листови из математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

2.

Јовановић-Лазић, М. и Дрндаревић, Д. (2006): *Математика 2*, БИГЗ PUBLISHING, Београд.

Јоксимовић, С. (2004): *Математика*, Едука, Београд.

Максимовић. С. (2006): *Игра бројева и облика,* Klett, Београд.

Малешевић, Д. И Маричић, С. (2004): *Математика*, Народна књига, Београд.

Малешевић, Д. И Маричић, С. (2004): *Математика – радни лист*, Народна књига, Београд.

Маринковић, С., Беговић. Д. и Маринковић, Љ. (2005): *Математика,* Креативни центар, Београд.

Маринковић, С. (2007): *Забавна математика*, Креативни центар, Београд.

Марјановић, М. и М., Капс (2005): *Математика*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Марјановић, М., Капс, М., Корен, Д. (2004): *Радни листови из математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Тодоровић, О. и Анокић, П. (2005): *Математика*, Народна књига, Београд. Тодоровић, О. (2005): *Математика*, Народна књига, Београд.

3.

Јовановић-Лазић, М. и Дрндаревић, Д. (2006): *Математика 3*, БИГЗ PUBLISHING, Београд.

Јовановић-Лазић, М. (2006): *Математика 3*, БИГЗ PUBLISHING, Београд.

Јоксимовић, С. и Влаховић. Б. (2004): *Математика*, Едука, Београд.

Јовановић, М. и Николић, А. (2005): *Игра бројева и облика*, Klett, Београд.

Маринковић, С., Беговић, Д. (2007): *Забавна математика*, Креативни центар, Београд.

Марјановић, М., Поповић, Б., Зељић, М. и Капс, М. (2006): *Математика*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Марјановић, М., Поповић, Б., Зељић, М. и Капс, М. (2006): *Радни листови из математике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд.

Стефановић. А. (2005): *Математика*, Креативни центар, Београд.

Тодоровић, О. и Анокић, П. (2005): *Математика*, Народна књига, Београд. Тодоровић, О. (2005): *Математика*, Народна књига, Београд.

4.

Анокић, П. и Косановић, С. (2006): *Математика*, Народна књига, Београд.

Вуловић, Н., Јовановић, М. и Николић, А. (2006): *Игра бројева и облика*, Klett, Београд.

Максимовић, М. (2006): *Математика 4*, БИГЗ PUBLISHING, Београд.

Максимовић, М. (2006): *Математика 4 – радни лист*, БИГЗ PUBLISHING, Београд.

Марјановић, М., Поповић, Б., Зељић, М. и Мандић, М. (2006): *Математика*, Завод за уџбенике, Београд.

Марјановић, М., Поповић, Б., Зељић, М. и Мандић, М. (2006): *Радни листови из математике*, Завод за уџбенике, Београд.

Јоксимовић, С. (2006): *Математика*, Едука, Београд.

Стефановић, А, Маринковић, С., Марковић, С. (2006): *Забавна математика*, Креативни центар, Београд.

Тодоровић, О. и Огњановић, С. (2006): *Математика*, Народна књига, Београд.

Тодоровић, О. (2006): *Математика*, Народна књига, Београд.

ПРИЛОЗИ

Табела 1. Избор међународних и домаћих пројеката – концепције математичког образовања засноване на реалном окружењу као основном полазишту

Теорија или филозофија на којој је пројекат заснован:	***Пројекти:***	***Носилац пројекта:***	***Статус пројекта:***	***Издавач:***	***Интернет адресе:***
	1. **Everyday Mathematics** (Elementary School, K – 6)	University of Chicago, School Mathematics Project Everyday Mathematics Center	Активан од 1997.	SRA/Mc Graw-Hill	http://everydaymath.uchicago.edu http://www.sra-4kids.com/product_info/math
	2.**Investigations in Number, Data and Spaces** (Elementary School, K – 5)	TERC - research and development center in Cambridge, MA	Активан од 1998.	Scott Foresman	http://www.terc.edu/investigations http://www.scottforesman.com
	3. **Math Trailblazers** (Elementary School, K – 5)	Teaching Integrated Mathematics and Science (TIMS) project at the Institute for Mathematics and Science Education, University of Illinois at Chicago	Активан од 1997.	Kendall /Hunt Publishing Company, Elementary-High School Division	http://www.math.uic.edu/IMSE http://www.kendallhunt.com/elhi
Realistic Mathematics Education (RME), од 1987.	4. **Mathematics in Context** – a curriculum for the U.S. middle school (Middle School, 5 – 8)	Wisconsin Center for Education Research at the University of Wisconsin -	Активан од 1991. до 2005.	Encyclopedia Britannica, Incorporated	http://www.wcer.wisc.edu

Теорија или филозофија на којој је пројекат заснован:	***Пројекти:***	***Носилац пројекта:***	***Статус пројекта:***	***Издавач:***	***Интернет адресе:***
		Madison, USA and the Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (FIsme) at the University of Utrecht, Netherlands Since 2006 Fi-US is reallocated to the University of Colorado at Boulder	Активан од 2006.		http://www.fi.uu.nl http://showmecenter.missouri.edu/showme/mic.shtml
	5. **Math net** (for Elementary school)	The Freudenthal Institute for Science andMathematics Education (FIsme), Utrecht University, Netherlands	Активан од 1996.		http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/
	6. **Developing Mathematics through Contexts** (for Elementary school)	Centre for Mathematics Education at Manchester	Активан од 2004.		http://www.crme.soton.ac.uk/research/rme.html

Теорија или филозофија на којој је пројекат заснован:	***Пројекти:***	***Носилац пројекта:***	***Статус пројекта:***	***Издавач:***	***Интернет адресе:***
		Metropolitan University (MMU), Great Britain and Freudenthal Institute in The Netherlands			http://www.partnership.mmu.ac.uk/cme/DMtC/Default.html
	7. **Cognitively Guided Instruction (CGI)** (Elementary School, K – 6)	Wisconsin Center for Education Research, USA	Активан од 1996. до 2002.		http://www.wcer.wisc.edu/ncisla/teachers/
	8. **Активно учење**	Институт за психологију у Београду, UNICEF канцеларија у Београду	Активан од 1994.	Приручник, UNICEF	http://www.un.org.rs/srp/publications.jsp http://hemija.chem.bg.ac.rs/aktivno
Human experience	9. **MathScape: Seeing and Thinking Mathematically** (Middle School, 6 – 8)	Seeing and Thinking Mathematical, Project at the Education Development Center in collaboration with Creative Publications		Creative Publications	http://www2.edc.org/MathscapeSTM http://www.glencoe/sec/math
	10. **Middle Grades MATH Thematics**	The Sixth Through Eight		McDougal Littell	http://lennes.math.umt.edu/~stem

Теорија или филозофија на којој је пројекат заснован:	***Пројекти:***	***Носилац пројекта:***	***Статус пројекта:***	***Издавач:***	***Интернет адресе:***
	(Middle School, 6 – 8)	Mathematics (STEM) University of Montana – Missoula			http://www.classzone.com/start/math_thematics.cfm
	11. **Voyager Pathways to Algebra and Geometry** (Middle School, 6 – 8)	Middle School Math through Applications Program (MMAP)		West Ed	http://mmap.wested.org http://mmap.wested.org/pathways
	12. **Connected Mathematics** (Middle School, 6 – 8)	Connected Mathematics Project at Michigan State University		Prentice Hall	http://www.math.msu.edu/cmp http://www.phschool/math/cmp
	13. **NWO PROO Students' contribution in Realistic Mathematics Education**	The Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education (FIsme), Utrecht University, Netherlands	Завршен пројекат		http://www.fi.uu.nl/en/projects/researchindex.html

Табела 2. Заступљеност задатака примене у уџбеницима почетне наставе математике

	Завод I			**Завод II**			**Креативни центар**			**Клет**			**Народна књига I**			**Народна књига II**			**Народна књига III**			**Едука**			**Бигз**		
	F	f	%	F	f	%	F	f	%	F	f	%	F	f	%	F	f	%				F	f	%	F	f	%
I разред	139	35	25,17	181	32	17,67	132	29	21,96	56	10	17,85	100	17	17							196	31	15,81	110	17	15,45
II разред	53	11	20,75				43	11	25,58	17	4	23,52	15	0	0	0	0	0				94	41	43,61	44	8	18,18
III разред	122	19	15,57				128	42	32,81	105	38	36,19	162	24	14,81							178	39	21,91	263	61	23,19
IV разред	101	68	67,32				138	78	56,52	150	102	68	27	21	77,78				110	66	60	75	45	60	109	50	45,87
Σ	415	133	**32,04**	181	32	**17,67**	441	160	**36,28**	328	154	**46,95**	304	62	**20,39**	0	0	**0**	110	66	**60**	543	156	**28,72**	526	136	**25,85**

F - укупан број задатака у геометријској теми уџбеничког комплета наведеног издавача;
f – број задатака примене у геометријској теми уџбеничког комплета наведеног издавача и
% - процентуално изражен број задатака примене у односу на укупан број задатака у геометријској теми уџбеничког комплета наведеног издавача.

ПРИЛОГ 1: Иновативни модел уџбеника математике – тема *Квадар и коцка*

КВАДАР И КОЦКА

Научићеш

- **особине геометријских тела квадра и коцке**
- **како се одређује површина квадра и коцке**

Сима пакује поклон у кутију димензија датих на слици. Колика је површина папира потребна Сими за увијање поклона? Колико је украсне траке Сими потребно за украшавање поклона ако је машна дуга 2 dm?

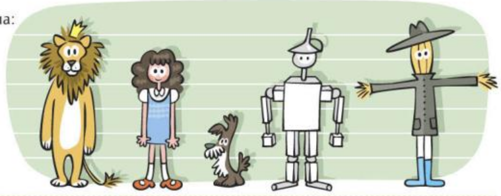
Помоћи ћеш Сими да реши проблем у вези с паковањем касније.

Подсети се

1. Погледај слику и напиши који од јунака из бајке *Чаробњак из Оза* има тело састављено од различитих модела геометријских тела: .... Напиши која су то тела.

....

Обој све делове његовог тела:
а) оне облика квадра плавом бојом
б) оне облика коцке црвеном бојом.



2. Посматрај слику и одговори.

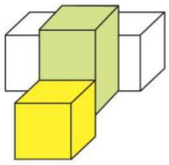
а) Ког облика је тело жуте боје? ....

б) Ког облика је тело зелене боје?

....

в) Које тело је делимично прекривено телом зелене боје?

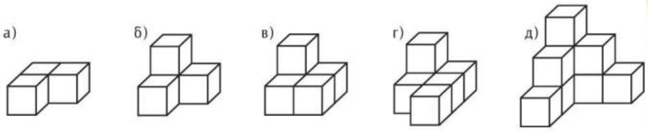
....



1

3. Сима је слагао коцке онако како је приказано на сликама.

(1) Колико је коцака Сима употребио за слагање сваког од тела са слике?



Број коцака: ....

(2) Колико би још истих коцака требало додати па да од тела на слици настане тело облика коцке?

а) .... б) ....

Из историје математике

Постоји претпоставка да реч **коцка** потиче од речи која означава кост за играње. Била је то коцка за бацање у разним играма. Како је прва кост за бацање имала тај облик, све остале су по њој добиле назив коцка.

Овај назив се користио још пре 2 600 година. Први су га користили грчки математичари Питагора и Еуклид.

Да ли знаш...

Да ли је коцкица чоколаде облика коцке? ....

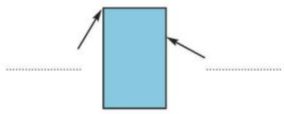
Да ли је правилно рећи *свеска на коцке?* .... Како би требало рећи? ....

2

4. Напиши поред слике називе означених елемената правоугаоника.

Колико страница има правоугаоник? ....

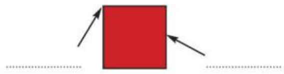
Колико темена има правоугаоник? ....



5. Напиши поред слике називе означених елемената квадрата.

Колико страница има квадрат? ....

Колико темена има квадрат? ....



6. Какве су по дужини дужи AB и CD са слике? ....

Кажемо још и да су AB и CD **подударне** странице. Симболима то записујемо: AB ≅ CD

Да ли на овој слици има још подударних дужи? Које су то дужи? .... ≅ ....

7. Одговори користећи слике из задатака 4 и 5.

а) Какве су наспрамне странице правоугаоника по дужини? ....

б) Да ли суседне странице правоугаоника могу да буду подударне? ....

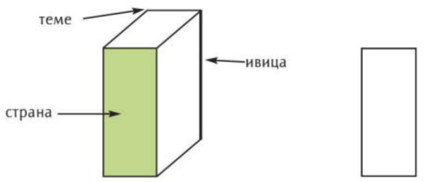
в) Какве су наспрамне странице квадрата по дужини? ....

г) Да ли су суседне странице квадрата подударне? ....

3

Особине квадра и коцке

На слици је представљено геометријско тело облика квадра.



Све стране квадра су правоугаоници.

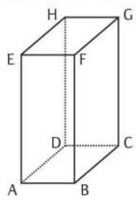
1. Користи модел квадра и одговори на питања.

Колико страна има квадар? ....

Колико темена има квадар? .... То су: A, B, ...

Колико ивица има квадар? .... То су: AB, ...

....



Овај квадар именујемо као квадар ABCDEFGH.

Од материјала из Прилога на крају уџбеника направи модел квадра.

На моделу можеш лако да уочиш да су наспрамне (несуседне) стране квадра **подударне**.
По међусобном положају оне су **паралелне**.

На моделу који си направио обој истом бојом подударне стране квадра. Колико различитих боја ти је потребно? ....

Посматрај слику и запиши парове подударних страна.

ABCD ≅ EFGH , BCGF ≅ .... и .... ≅ ....

4

2. Из сваког темена квадра полазе по 3 различите ивице. Из темена B полазе ивице:

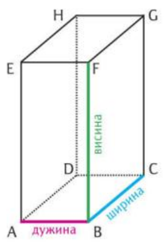
BA, ... и ....

Дужине ивица које полазе из истог темена (састају се у истом темену) представљају три димензије квадра: дужину, ширину и висину.

У сваком темену састају се и 3 различите стране квадра. У темену B састају се стране:

BCDA, ... и ....

Ивице квадра могу да се разврстају у 3 групе од по 4 ивице. У свакој групи ивице су међусобно паралелне и подударне (једнаке по дужини). Обој ивице на слици тако да једна група ивица буде исте боје (користи слику и боје са слике).



1. Група обојена црвеном бојом:

BA ∥ CD ∥ FE ∥ ...... и BA ≅ CD ≅ FE ≅ GH

2. Група обојена плавом бојом:

BC ∥ AD ∥ ...... ∥ ...... и BC ≅ AD ≅ ...... ≅ ......

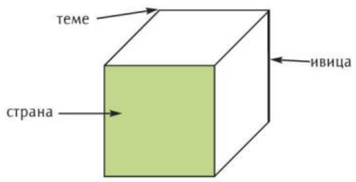
3. Група обојена зеленом бојом:

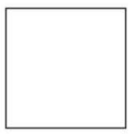
BF ∥ ...... ∥ ...... ∥ ...... и ...... ≅ ...... ≅ ...... ≅ ......

Квадар има 6 страна. Све стране квадра су правоугаоници.
Наспрамне стране квадра су подударне и паралелне.

Квадар има 12 ивица и 8 темена. Из сваког темена полазе по 3 различите ивице.
Ивице квадра разврставамо у 3 групе од по 4 ивице које су подударне и паралелне.

На слици је представљено тело облика квадра чије су све ивице једнаке. Такав квадар назива се коцка.





Све стране коцке су квадрати.

3. Користи модел коцке и одговори на питања.

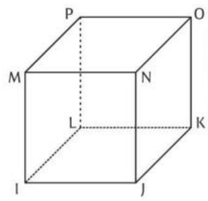
Колико страна има коцка? ....

Колико темена има коцка? .... То су: I, J, ...

Колико ивица има коцка? .... То су: IJ, ...

....

Ову коцку именујемо као коцку IJKLMNOP.



Од материјала из Прилога на крају уџбеника направи модел коцке.

Упореди све стране једне коцке на моделу.

Да ли су оне међусобно подударне? ....

Колико ти је боја потребно да би обојио подударне стране модела коцке? ....

Упореди на моделу ивице коцке по дужини. Напиши какве су. ....

Колико ти је боја потребно да би обојио подударне ивице коцке? .... Уради то на слици.

Квадар је геометријско тело ограничено са 6 правоугаоника.
Коцка је квадар ограничен са 6 квадрата.

Задаци за вежбање

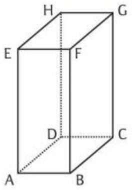
1. Посматрај квадар са слике и допуни.

а) Темена која припадају горњој страни квадра су: ......, ..., ... и ....

б) Ивице које полазе из темена A су: ......, ... и ....

в) Ивица AE је подударна и паралелна са ивицама: ......, ... и ....

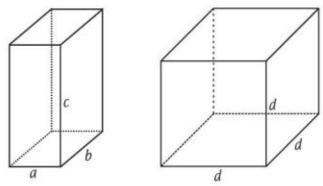
г) Страна паралелна и подударна страни BCGF је страна ....



2. Прочитај са слике и допиши.

а) димензије квадра: дужина a;
ширина ......;
висина ....

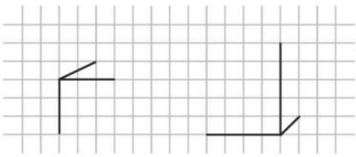
б) димензије коцке: дужина ......;
ширина ......;
висина ....



Код ког геометријског тела су све три димензије исте, а код ког су различите?

Исте су код ...., а различите код ....

3. Доврши започето цртање коцке и квадра.



Да ли знаш...

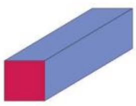
Шта значи израз *стати на нечију страну?*

....

....

7

4.



а) Шта су стране овог квадра?

Стране овог квадра су ...... правоугаоника и ...... квадрата.

Плавом бојом обојени су ...., а црвеном бојом ....

Колико страна квадра видимо на слици? ......

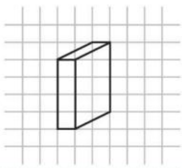
Колико страна квадра не видимо? ......

б) Могу ли код квадра који није коцка само две стране бити квадрати? ....

в) Могу ли две суседне стране квадра који није коцка бити квадрати? ....

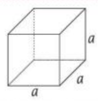
5. а) Колико квадара истих димензија треба додати квадру (на слици) чија је дужина 1 cm, ширина 4 cm и висина 4 cm да би се добила коцка? ......

б) Колико квадара димензија 8 cm, 4 cm и 4 cm треба да употребиш да би сложио тело облика коцке? ......



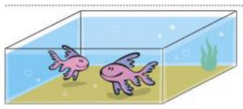
6. Укупна дужина свих ивица коцке је 84 cm. Израчунај колика је дужина њене ивице.

....



7. Горан је све ивице акваријума облика квадра, осим горњих, облепио заштитном траком. Колико му је траке било потребно ако је висина акваријума 15 cm, дужина 43 cm и ширина 30 cm?

....



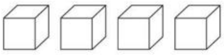
....

....

....

8

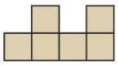
8. На слици су дате коцке. Колико различитих квадара можеш да саставиш од свих коцака? ....



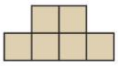
9. Колико најмање једнаких квадрата треба да саставиш да би добио нов квадрат? ....
Колико ти је једнаких коцака потребно да би саставио нову коцку? ....

И ово је математика!

Састави тело од коцкица за игру изгледа као на слици, које посматрамо са две стране.



Поглед на сложене коцке спреда



Поглед на сложене коцке са стране

Колико коцака си употребио? ....

Истраживачки задатак

Направи модел квадра и коцке.

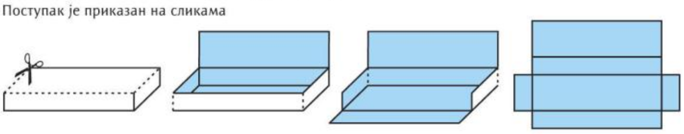
Потребан материјал
Да би направио ивице квадра и коцке, употреби пластичне сламчице у боји, а за темена искористи мало пластелина. Користи маказе, лењир и оловку.

Упутство за прављење модела
1. размисли о томе колико ти је сламчица потребно за ивице, а колико лоптица пластелина за темена
2. размисли о дужинама сламчица
3. нека сламчице истих дужина буду исте боје
4. колико различитих боја ће ти бити потребно:
   а. за модел квадра?
   б. за модел коцке?

9

Мрежа површи квадра и коцке

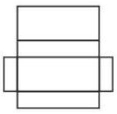
1. На слици је приказан модел квадра. Замисли да маказама сечеш модел дуж његових ивица тако да површ квадра буде из једног комада.
Поступак је приказан на сликама



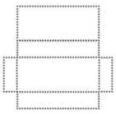
На овај начин добио си **мрежу површи квадра**.

Од картона на коме је нацртана мрежа површи квадра (из Прилога уџбенику) савијањем дуж испрекиданих линија и лепљењем можеш да саставиш модел квадра.

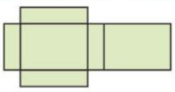
2. а) Подударне правоугаонике на мрежи површи квадра обој истом бојом.
Колико различитих боја ти је потребно? ....



б) Обој истом бојом подударне странице правоугаоника.
Колико различитих боја ти је потребно? ....



Мрежа површи квадра може имати и другачије облике, као што је, на пример, ова на слици.



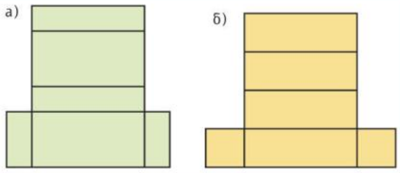
10

3. Да ли мреже на слици могу да буду мреже површи квадра? ....

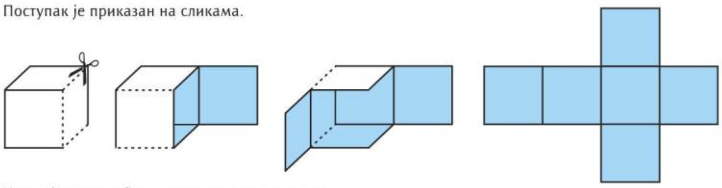
Образложи одговор. ....

....

....



4. На слици је приказан модел коцке. Замисли да маказама сечеш модел дуж ивица тако да површ коцке буде из једног комада.
Поступак је приказан на сликама.



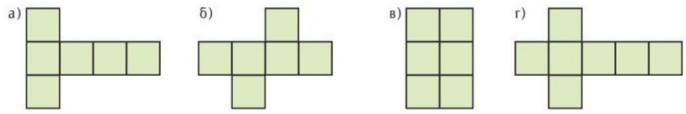
На овај начин добио си **мрежу површи коцке**.

Од картона на коме је нацртана мрежа површи коцке (из Прилога уџбенику) савијањем дуж испрекиданих линија и лепљењем можеш да саставиш модел коцке.

5. а) Подударне квадрате на мрежи површи коцке обој истом бојом. Колико боја ти је потребно? ....

б) Обој истом бојом подударне странице квадрата. Колико боја ти је потребно? ....

6. Које од мрежа на слици јесу мреже површи коцке? Заокружи слова испред тачних одговора.



Истраживачки задатак

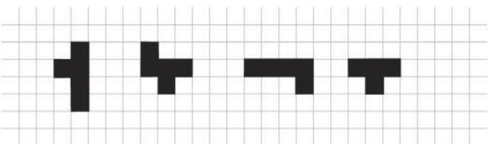
Од картона направи кутијицу без поклопца, у којој ћеш држати оловке. Пази да димензије буду тако одабране да у кутију можеш да сместиш оловке.

Колико твоја кутијица треба да има страна?
Прво направи мрежу површи квадра. Склапањем мреже добићеш кутијицу.

Од материјала користи: тањи картон, маказе, лењир и оловку. Након прављења кутијицу можеш да ојачаш селотејпом.

Задаци за вежбање

1. Бојењем квадрата допуни слике тако да добијеш мреже површи коцке.



2. а) На квадратној мрежи нацртај три различите мреже површи коцке чија је ивица 1 cm.

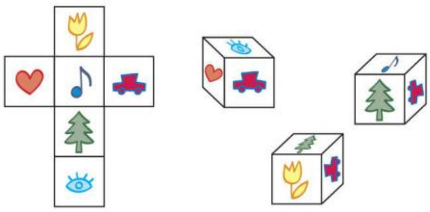
б) Колика је површина мреже коцке ивице 1 cm? ....

в) Упореди површине нацртаних мрежа коцака из задатка. У каквом су односу те мреже? ....

Површина квадрата чија је страница 1 cm је .... cm^2.

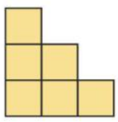
Мрежа површи коцке има .... таквих квадрата.

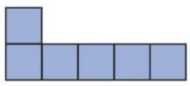
3. Мрежа површи коцке дата на слици одговара само једној од коцака. Заокружи ту коцку.

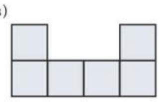


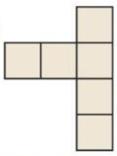
13

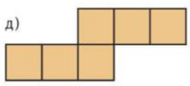
4. Заокружи слово поред оне мреже која одговара мрежи коцке.

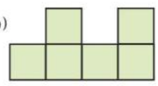
а)


б)


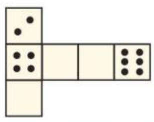
в)


г)


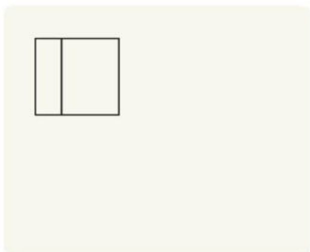
д)


ђ)


5. На слици је представљена мрежа површи коцке. То је коцкица за игру. За њу важи следеће правило: збир бројева тачака на наспрамним странама коцке увек је 7. Доцртај тачке на мрежи у складу с наведеним правилом.



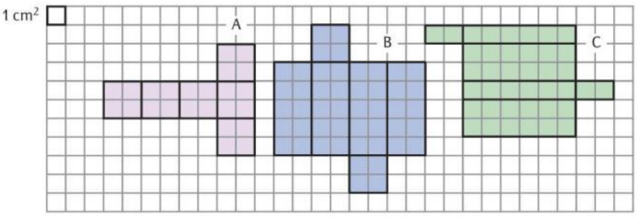
6. Доврши цртање започете мреже површи квадра.



14

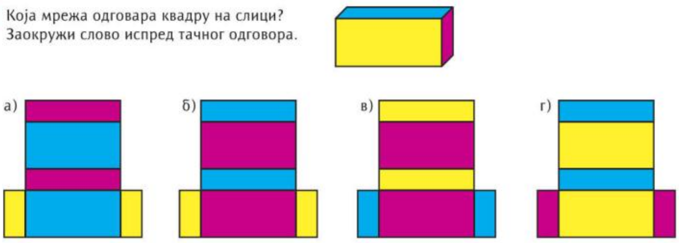
7. На квадратној мрежи нацртај мрежу површи квадра чије су димензије: дужина 3 cm, ширина 2 cm и висина 1 cm.

8. На слици су дате мреже површи коцке и два квадра. Ако је дата јединица мере 1 cm², упореди површине коцке и квадара.

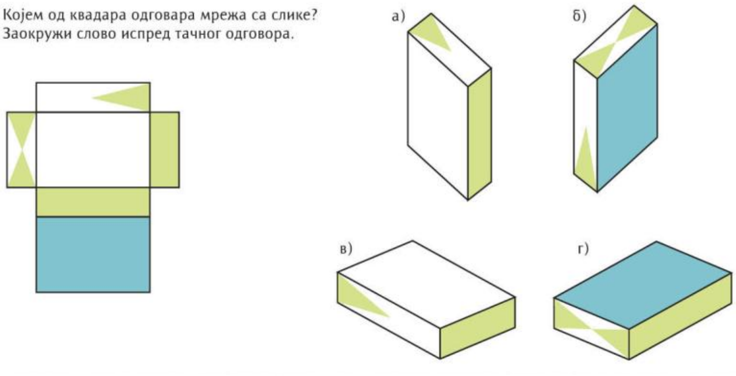


$P_A =$ .... cm², $P_B =$ .... cm² и $P_C =$ .... cm² $P_A <$ .... $<$ ....

9. Која мрежа одговара квадру на слици? Заокружи слово испред тачног одговора.



10. Којем од квадара одговара мрежа са слике? Заокружи слово испред тачног одговора.



За љубитеље компјутера

На следећој Интернет адреси наћи ћеш занимљив задатак: http://www.figurethis.org/challenges/c55/challenge.htm
Реши га.

11. Нацртај мрежу површи:
а) коцке димензије 1 cm 5 mm
б) квадра димензија 1 cm, 2 cm и 4 cm.

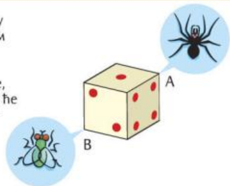
а)

б)

И ово је математика!

На два најудаљенија темена коцкице за игру стоје мува и паук. Који је најкраћи пут којим паук може да стигне до муве и улови је?

Најпре на мрежу површи коцке уцртај тачке, затим места на којима стоје мува и паук. То ће ти помоћи да откријеш који је најкраћи пут којим ће паук стићи до муве.



Да ли знаш...

Шта значи када се каже: *Коцка је бачена*?

....

Површина квадра и коцке

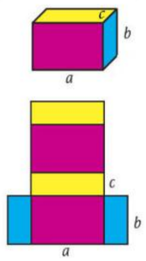
Подсети се

Како израчунавамо површину правоугаоника чије су странице a и b? ....

Како израчунавамо површину квадрата чија је страница a? ....

Којим се мерним јединицама изражава површина? ....

На слици је модел квадра. Замисли да маказама сечеш модел.
На тај начин добио би мрежу површи квадра дату на доњој слици.



1. Површ квадра састоји се од ...... правоугаоника, од којих су наспрамни правоугаоници подударни и обојени истом бојом. Израчунај колика је површина црвено обојеног, жуто обојеног и плаво обојеног правоугаоника:

P = $a \cdot b$ На мрежи површи квадра има 2 црвено обојена правоугаоника.

P = $a \cdot$ ...... На мрежи површи квадра има 2 жуто обојена правоугаоника.

P = ... $\cdot$ ...... На мрежи површи квадра има 2 плаво обојена правоугаоника.

Мрежа површи квадра састоји се од 3 пара подударних правоугаоника.
Површину квадра рачунамо на следећи начин:

P = 2 · P + 2 · P + 2 · P

P = $2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$ или P = $2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

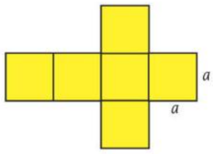
2. Сада се врати на задатак са 1. стране и помози Сими да израчуна колика му је површина папира потребна за увијање поклона. Потребна му је онолика површина папира колика је површина тог квадра димензија 15 cm, 5 cm и 10 cm.

P = 2 · (15 · 10 + 15 · 5 + 10 · 5) cm² = 2 · .... cm² = ... cm² = ... cm²

Сима ће утрошити .... украсног папира за увијање поклона.

3. Ако би Симин поклон био упакован у кутију облика коцке (ивица коцке је 17 cm), колико би му тада украсног папира било потребно? Да би то сазнао, користи модел коцке.

Поступак добијања мреже површи коцке исти је као и за мрежу површи квадра.



а) Посматрај квадрат чија је страница дужине a. Сваки део мреже коцке је ...., чија је страница дужине .... Сваки од 6 квадрата има страницу која је по дужини једнака ивици коцке.

Површина сваког квадрата износи: $P = a \cdot$ ....

Мрежа површи коцке састоји се од 6 квадрата. Површину коцке израчунавамо на следећи начин:

$P = 6 \cdot a \cdot a$

б) Колико је папира Сими потребно за увијање поклона облика коцке чија је ивица 17 cm?

$P = 6 \cdot$ .... $\cdot$ .... cm^2 = ... = ...

Сима ће утрошити .... украсног папира за увијање кутије с поклоном.

Задаци за вежбање

1. Колика је површина коцке чија је ивица 6 dm?

....

2. Колика је површина квадра чије су ивице a = 1 dm 5 cm, b = 4 cm и c = 1 dm?

....

....

19

3. Површину квадра чије су ивице a, b и c израчунавамо на следећи начин:

$P = 2 \cdot a \cdot b +$ .... $\cdot$ .... $\cdot$ .... + ... $\cdot$ .... $\cdot$ .... или $P =$ .... $\cdot$ (....... $\cdot$ .... + ... $\cdot$ .... + ... $\cdot$ ....)

Шта овде представљају:

а) бројеви a, b и c? ....

б) производи бројева:

a и b? ....

a и c? ....

b и c? ....

Зашто поменуте производе множимо са 2? ....

....

4. Површину коцке израчунавамо на следећи начин: $P = 6 \cdot a \cdot$ ....

Шта овде представља:

а) број a? ....

б) производ $a \cdot a$? ....

Зашто производ $a \cdot a$ множимо бројем 6? ....

5. Ако је површина коцке 96 cm^2, колика је њена ивица?

$6 \cdot a \cdot a = 96\,cm^2$ ....

a = ... cm

6. Колико картона ти је потребно да би обложио отворену посуду облика коцке чија је ивица 53 cm?

....

7. Обим једне стране коцке је 64 cm. Колика је површина те коцке?

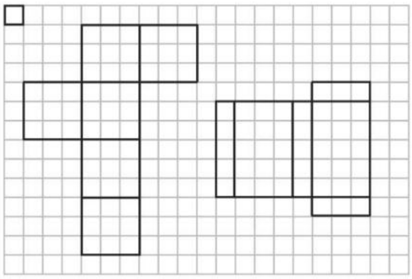
....

....

20

8. На слици су дате мреже површи коцке и квадра. Одреди димензије квадра и коцке и израчунај њихове површине.

1 cm^2



....

....

....

....

9. Мирка од картона прави 3 кутијице облика коцке, у којима ће држати оловке, бојице и фломастере. Свака кутијица има поклопац. Ивица сваке коцке је 15 cm. Колико је картона Мирки потребно да би направила ове кутијице? (На отпатке приликом резања картона за сваку кутијицу оде 900 cm^2.)

....

....

....

10. Ивице школског акваријума облика коцке су оштећене, па из њега истиче вода. Ученици су одлучили да ојачају ивице заштитном траком и облепе акваријум провидном фолијом. Утрошено је укупно 2 m 6 dm 4 cm траке. Израчунај површину фолије коју ће ученици утрошити за заштиту бочних страна.

....

....

....

21

11. Колика је површина платна потребна за шивење путне торбе облика квадра ако су њене димензије: висина 30 cm, дужина 50 cm и ширина 20 cm?

....

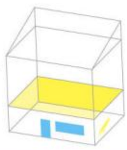
....

12. Колико стакла је потребно за прављење акваријума без поклопца, облика коцке чија је ивица 8 dm, ако је:

а) дно стаклено? ....

б) дно метално? ....

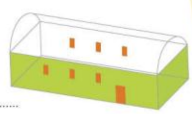
13. Подрум куће дужине 10 m, ширине 6 m и висине 3 m треба окречити. Креће се зидови и плафон. Врата просторије широка су 1 m, а висока 2 m. Просторија има и прозор дужине 3 m и висине 1 m. Израчунај површину зидова које треба окречити.



....

....

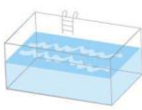
14. Треба споља окречити магацин облика квадра чије су димензије: дужина 17 m, ширина 6 m и висина 4 m. Магацин има 6 прозора који су широки 5 dm и високи 10 dm и једна врата широка 1 m и висока 2 m. Израчунај колика је површина магацина коју треба окречити.



....

....

15. Базен облика квадра треба обложити плочицама квадратног облика димензија 1 dm. Ивице базена су: дужина 4 m 5 dm, ширина 3 m и дубина 2 m. Колико је плочица потребно за поплочавање базена?



....

....

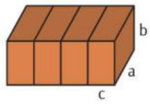
22

16. Картонска кутија за стаклене чаше има димензије 22 cm, 15 cm и 10 cm. Колико се таквих кутија може направити од 10 m^2 картона ако укупни отпаци буду 6 dm^2?

....

....

17. Четири кутије облика квадра залепљене су широм страном једна за другу, као на слици. Колика је површина тако добијеног квадра ако су димензије једне кутије a = 8 cm, b = 6 cm 5 mm, c = 4 cm.

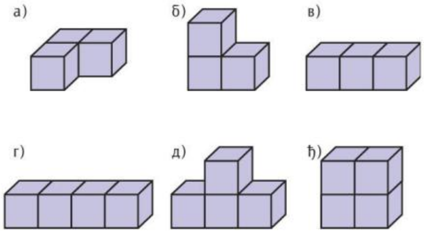


....

....

....

18. Сима је слагао коцке као на слици. Све коцке су једнаких ивица: 1 cm. Одреди површине сложених тела.



а) ....

б) ....

в) ....

г) ....

д) ....

ђ) ....

Која тела имају једнаке површине? ....

Која тела су састављена од једнаког броја коцака? ....

Која тела с једнаким бројем коцака имају различите површине? ....

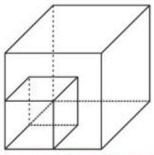
23

19. а) Ако се ивица коцке димензије 1 m удвостручи, колика је површина добијене коцке?

....

б) Колико је пута површина добијене коцке већа од прве?

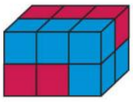
....



20. Израчунај површину квадра ако су површине његових страна 21 cm^2, 28 cm^2 и 12 cm^2.

....

21. Од коцака димензије 1 cm састављено је тело приказано на слици. Израчунај површину дела тела састављеног од коцака плаве боје. Коцке које не видиш су плаве боје.



....

....

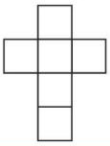
....

И ово је математика!

Може ли се једним потезом (не дижући врх оловке с папира и не идући двапут истим путем) нацртати ова фигура (мрежа коцке)?

....

Покушај то да урадиш.



Да ли знаш...

Нит паучине је врло јака и еластична. Да би се прекинула од сопствене тежине, морала би да буде дуга 80 km. Постоје пауци чија мрежа може да буде широка до 250 cm, а у њу може да се ухвати мања птица или слепи миш.

24

Шта смо научили

1. Попуни табелу.

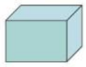
слика модела геометријског тела	назив геометријског тела	број страна	број темена	број ивица	број група у које су ивице сврстане по дужини	формула за површину
						
						

2. Допуни реченице.

а) Геометријско тело ограничено са 6 правоугаоника називамо ....

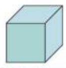
б) Геометријско тело ограничено са 6 квадрата називамо ....

3. а) Колико ивица је потребно измерити да би се израчунала површина датог квадра?



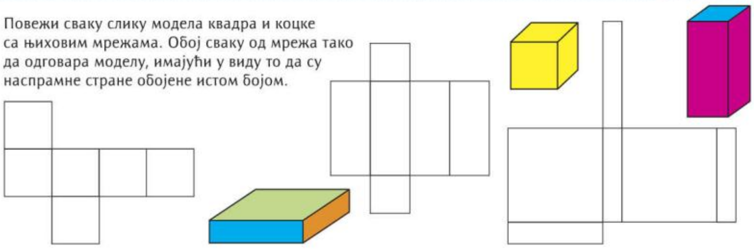
....

б) Шта треба да измериш да би израчунао површину дате коцке?



....

4. Повежи сваку слику модела квадра и коцке са њиховим мрежама. Обој сваку од мрежа тако да одговара моделу, имајући у виду то да су наспрамне стране обојене истом бојом.



25

5. Колико највише коцкица за игру (ивице 1 cm) може да стане у кутију облика квадра чија је дужина 10 cm, ширина 1 cm и висина 2 cm?

....

6. Колика је површина коцке чија је ивица 1 cm 5 mm? Нацртај њену мрежу.

....

....

7. Колика је површина квадра чије су димензије 2 cm, 1 cm 5 mm и 1 cm? Нацртај његову мрежу.

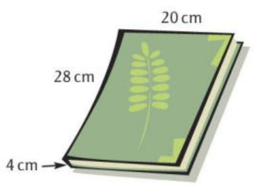
....

....

8. Поново се врати на задатак са стране 1 и израчунај колико је траке Сими било потребно за украшавање поклона.

....

9. Израчунај колико је картона потребно да би се у одељењу које има 25 ученика направиле корице за хербаријуме. Димензије једног хербаријума дате су на слици.



....

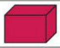
....

....

26

Страна 25-26

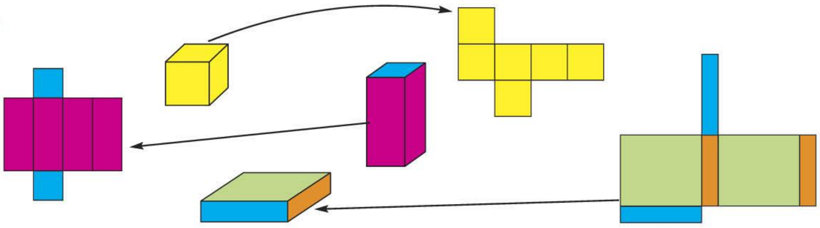
1.

слика модела геометријског тела	назив геометријског тела	број страна	број темена	број ивица	број група у које су ивице сврстане по дужини	формула за површину
	квадар	6	8	12	3 групе од по 4 ивице	$P = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$
	коцка	6	8	12	1 група са 12 подударних ивица	$P = 6 \cdot a \cdot a$

2. а) квадар б) коцка

3. а) 3 димензије: дужину, ширину и висину
б) 1 димензију: дужину или ширину или висину

4.



5. 20 коцкица за игру

6. $P = 1\,350\,\mathrm{mm}^2$, сам нацртај мрежу

7. $P = 13\,\mathrm{cm}^2$, сам нацртај мрежу

8. Дужина целе траке с машном износи 100 cm.

9. $P = 308\,\mathrm{dm}^2$

ПРИЛОГ 2: Материјали за учитеље

КВАДАР И КОЦКА

	НАСТАВНА ТЕМА	Тип часа						Тип часа		
Редни број наставне јединице	Наставне јединице	Понављање	Обрада	Утврђивање	Проширивање	Систематизација	Провера знања	ОБРАДА И ПРОШИРИВАЊЕ ЗНАЊА	ОСТАЛИ ТИПОВИ ЧАСОВА	ПИСМЕНИ ЗАДАЦИ
	Правоугаоник и квадрат – ***почетни тест*** **- сва одељења**									
	Експериментални програм									
1.	Квадар и коцка (У: стр. 1 – 3)	+								
2.	Особине квадра и коцке (У: стр. 4 – 6)		+							
3.	Особине квадра и коцке (У: стр. 7 – 9)			+						
4.	Мрежа површи квадра и коцке (У: стр. 10 – 14)		+							
5.	Мрежа површи квадра и коцке (У: стр. 13 – 17)			+						
6.	Површина квадра и коцке (У: стр. 18 – 20)		+							
7.	Површина квадра и коцке (У: стр. 20 – 22)			+						
8.	Површина квадра и коцке (У: стр. 22 – 23)				+					
9.	Површина квадра и коцке				+					

	(У: стр. 23 – 24)									
10.	Шта смо научили (У: стр. 25 – 27)					+				
	Квадар и коцка – ***завршни тест* - сва одељења**						+			
		1	**3**	**3**	**2**	**1**	**1**	**5**	**5**	**1**

Способност деце за формирање геометријских појмова у 4. разреду је таква да ученици упозната својства, по којима препознају фигуре, користе за повезивање и откривање нових својстава фигура и описују их.

Напомена: у задацима у којима је неопходно коришћење коцке, квадра или више тела облика коцке и квадра, можете тражити од ученика да их решавају, осим индивидуално, и у групи (пар или вишечлана група). Некад ће ученици доносити моделе од куће, некад ће их правити на самом часу, некад ће модели бити припремљени од стране извођача експеримента.

За саме часове потребно је обезбедити:

1) комплет дрвених модела квадра и коцке (или направљених чврстих модела које учитељи иначе користе у раду),
2) комплет лењира за цртање и креде у боји и
3) графоскоп за пројекцију.

1.
Општи подаци

Учитељ:	
Датум:	
Разред и одељење:	IV-

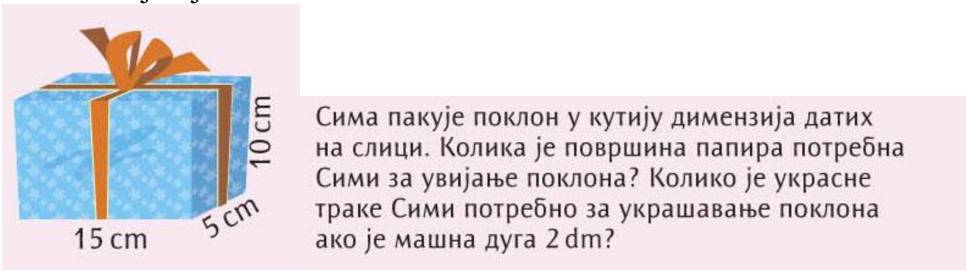
Методички подаци

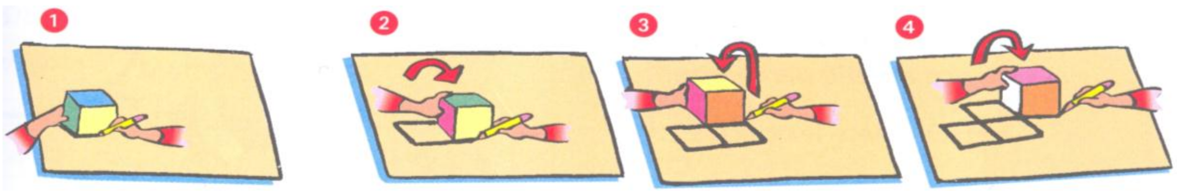
Наставна тема:	Квадар и коцка
Наставна јединица:	**Квадар и коцка**
Претходна наставна јединица:	Квадар и коцка – тела облика квадра и коцке; Правоугаоник и квадрат – особине
Наредна наставна јединица:	Особине квадра и коцке
Потребно знање ученика:	Појмови квадар и коцка, правоугаоник и квадрат – особине, појам подударности дужи (фигура)
Тип часа:	*Понављање*
Циљ часа:	Поновити појмове: тела облика квадра и коцке; својства (особине) правоугаоника: углови, странице, темена, појам подударности дужи (фигура).
Задаци часа:	
- Образовни	- препознавање и разликовање тела облика: • лопте, ваљка и купе, • пирамиде, квадра и коцке;

	- препознавање тела састављених од тела поменутих облика,
- Функционални:	- подстицање развоја просторног резоновања: уочавање тела облика квадра и коцке и њихови међусобни односи; - разликовање тело-модел-слика: разликовање модела квадра и коцке, којима можемо манипулисати у физичком простору, од слике тих геометријских тела, као и самих геометријских тела, апстракција у геометријском простору.
- Васпитни	- развијање способности ученика да посматрају, анализирају и закључују; - развијање критичког односа према стварности.
Облици рада:	индивидуални, фронтални
Наставне методе:	- метода хеуристичког разговора, - учење путем вођеног открића.
Наставна средства:	Уџбеник, направљен модел квадра димензија 15x5x10 cm од картона за сваког ученика, папир, графо-фолије.

Ток часа

	Ученицима објаснити начин договореног рада и коришћење Уџбеника. Математичка игра „Погоди ког облика је предмет у врећици“. Објаснити начин рада: један ученик жмури и завлачи руку у непрозирну врећицу у којој су смештени неки предмети. Напипани насумично изабрани један предмет се

	не вади, већ описује речима какав је то предмет. У учионици би требало што брже неко од ученика да погоди ког облика је напипано тело. Затим се тело вади из врећице и показује. Ко од ученика погоди облик описаног тела, добија улогу оног који следећи иде до врећице. Предмети су облика квадра, коцке, пирамиде, те лопте, купе и ваљка. Игру одиграти неколико пута.
Почетни задатак у Теми Ученици задатке решавају од примера до примера, вођени индуктивним путем. У овој фази рада користи се процедурални начин изражавања, а после ће уопштавати (генерализовати) речима и на крају симболима. Водити их постепено ка формулском изражавању. **ВАЖНО** **** Вођене кораке за учење учитељ***	*Почетна проблемска ситуација* – има за циљ да ученике мотивише (заинтересује) за нов појам. Овде ученици не уче како се израчунава површина квадра, већ их само припремамо за тај појам.  <u>Материјали за рад ученика:</u> а) пакет који се умотава димензија датих на слици и б) папир за умотавање који ће са друге стране бити згодан за писање/цртање. Ученици би испред себе имали модел поклон-квадра који им је дат. Водити их у раду да уче путем открића. Постављати им питање и оставити мало времена да размисле и дају одговор. По потреби постављати подпитања због бољег разумевања и решавања проблема. <u>Вођени кораци***** за учење путем открића:</u> а) Размисли како можеш да откријеш колико ти је папира за умотавање овог поклона потребно. Користи пакет, папир и оловку.

постављa у виду питања и нуди материјале који имају функцију да подстакну ученике да на познатим чињеницама „локално“ откривају нове. *Ученик на овај начин бива вођен у „открићу“.* *Питања могу да буду и записана на табли или графо-фолији, али не сва одједном, већ једно по једно.* *<u>Напомена 1:</u> Није потребно задавати следеће питање ако учитељ „осети“ да ученици сами долазе до идеја, али исто тако је важно постављати подпитања уколико ученици „лутају“ у решењу!* *<u>Напомена 2:</u> После ћемо се враћати овој проблемској ситуацији када дође време формулског извођења.* *Када год се јави ситуација у учионици да ученици не могу да реше нову проблемску ситуацију, могу се враћати овој и по аналогији са њом решавати нову. У том*	(Ученици цртају подударне правоугаонике, преврћући модел по папиру као што то доња слика показује. Ученици ће превртањем (манипулисањем) објекта и његовим прислањањем на папир „открити“ да им је потребна онолика површ папира колика је укупна површ свих правоугаоника тј. свих страна кутије (поклона) облика квадра.)  б) Колико си фигура нацртао? Да ли је једнак број нацртаних фигура и страна модела квадра? Да ли су фигуре који си нацртао и стране модела међусобно подударне? (Нацртаће 6 фигура, колико има и страна модел квадра, које им јесу подударне. Биће то раванско представљање целе мреже површи тела.) в) Да ли оне могу да буду нацртане као једна сложена фигура састављена од простих? (Кроз гозговор их водити ка једној сложеној фигури састављеној од простих, чије површине знамо да рачунамо – ради се о правоугаоницима.)

случају овај задатак-проблемска ситуација постаје ***модел*** *решавања осталима!*	
Напомена: Пазити на питање под 7**б**), јер се ради о квадрату.	**Стр. 1-3**. Користити графо-фолију за фронтални рад на задацима. **Зад. 1:** Ученици треба да препознају тела облика квадра и коцке. **Зад. 2:** Након препознавања тела на слици, од ученика се тражи да замисле које би тело (квадар или коцка) могло да се „крије“ иза других тела (квадар или две коцке). Разговор водити и ако је потребно користити моделе тела и дискутовати о различитим решењима. **Зад. 3:** колико је коцки употребљено за слагање тела на слици; колико је још потребно додати коцки да би од тела добили нову коцку. Бољим ученицима тражити да за примере под в), г) и д) дају све одговоре, и под 1) и под 2). Ученике упознати са речи коцка у рубрици *Из историје математике*. Као занимљивост их упутити на питања у рубрици *Да ли знаш...* **Зад. 4-6:** Ученике је потребно подсетити шта су елементи правоугаоника и квадрата: странице и темена. Поновити појам подударности дужи у **зад. 6**. У **7. зад.** ученике подсетити на особине правоугаоника и квадрата.
Напомена: диференциран домаћи задатак дајемо ученицима бољих	Домаћи задатак: 1) Пронађи и запиши шта значи реч *геометрија*. Погледај у некој од енциклопедија, дечјих часописа, на интернету или сл.. 2) Запиши: Донети за следећи час 30 пластичних сламчица − по 6 сламчица у 5 различитих боја. Сламчице су једнаких дужина. Донеси и једну шипку пластелина, као и лењир, оловку и маказе. Диференциран домаћи задатак: 3) На интернету постоје занимљиви геометријски задаци за решавање. На пример, за

способности, а уколико желе и остали ученици могу да га раде.	упоређивање површина, посети следеће интернет адресе: http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/welcome.xml?groep=0 (link: Gullivers Travel) http://www.figurethis.org/challenges/c12/challenge.htm http://www.figurethis.org/challenges/c76/challenge.htm

Прилог 1.
Уџбеничка стр.1 − 3, на графо-фолији

2.
Општи подаци

Учитељ:	
Датум:	
Разред и одељење:	IV-

Методички подаци

Наставна тема:	Квадар и коцка
Наставна јединица:	**Особине квадра и коцке**
Претходна наставна јединица:	Квадар и коцка
Наредна наставна јединица:	Особине квадра и коцке – утврђивање
Потребно знање ученика:	Својства (особине) правоугаоника и квадрата, њихови елементи; појам паралелности дужи (правих/равни) и подударности дужи (фигура).

Тип часа:	*Обрада*
Циљ часа:	Упознати својства (особине) квадра и коцке, њихове елементе.
Задаци часа:	
- Образовни	- Упознавање елемената квадра и коцке; - Препознавање свих страна квадра које су облика: правоугаоника или правоугаоника и квадрата; - Препознавање свих страна коцке које су облика квадрата; - Упознавање неких особина квадра и коцке.
- Функционални:	- Решавање проблемске ситуације која укључује анализирање модела квадра и коцке; - Прављење модела квадра и коцке употребом сламчица и пластелина; - Цртање на квадратној мрежи квадра и коцке према упознатим својствима; - Дефинисање шта је квадар, а шта коцка.
- Васпитни	- Развијање способности ученика да посматрају, анализирају и закључују; - Развијање критичког односа према стварности.
Облици рада:	Индивидуални, фронтални
Наставне методе:	- метода хеуристичког разговора, - учење путем вођеног открића.
Наставна средства:	Уџбеник, направљен модел квадра (исти са претходног часа) и коцке од картона за сваког ученика, 6 сламчица у 5 боја, истих дужина, пластелин,

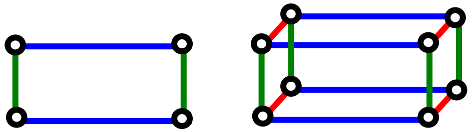
	маказе, лењир, оловка, графо-фолије.

Ток часа

	Провера домаћег задатка, фронтално усмено.
Напомена: учитељ, пратећи рад ученика, поставља питања. Никада не иде на следеће уколико већина ученика није дошла до „открића“ или га уопште не поставља (ученици су сами „открили“ идеју). Иначе, сламчице су веома погодне за употребу у почетној настави геометрије из више разлога: - у функцији су истраживачког задатка,	Ученици би испред себе имали модел квадра који им је дат и на основу посматрања и опипавања правили би модел од сламчица и пластелина – модел на коме су истакнути елементи квадра који се упознају. <u>Материјал:</u> - По 6 сламчица у 5 боја, истих дужина, - шипка пластелина једне боје, - маказе, лењир, оловка. <u>Вођени кораци:</u> 1. Посматрај и опипај модел квадра. Шта су његове стране? Направи један такав модел. На располагању ти је 30 сламчица: по 6 сламчица истих дужина и свака у 5 боја и пластелин за прављење куглица. 2. Размисли колико ти је сламчица, а колико куглица пластелина потребно за прављење модела квадра. 3. Размисли о дужинама сламчица. Нека сламчице једнаких дужина буду једне исте боје. 4. Прво погледај једну страну квадра и покушај да је направиш. 5. Колико сламчица си везао за једну куглицу пластелина? Да ли је тај број исти као и број ивица на моделу квадра по коме правиш свој модел? 6. Како можеш да „видиш“ стране квадра? Опиши. Погледај место где се

<table>
<tr>
<td>

- подстичу децу на експеримент и „локалне дедукције“,
- једноставне су за употребу и
- јефтине као материјал.



</td>
<td>

куглица пластелина везује са сламчицама. Зашто оно изгледа као слово Y? (изгледа тако јер не можеш да видиш стране квадра; можеш једино да видиш ивице и темена, а стране замишљаш)

7. Зашто ниси употребио свих 30 сламчице или 30 лоптица од пластелина да би направио модел квадра састављен од 6 правоугаоника? (зато што свака куглица пластелина везује 3 сламчице и свака сламчица је страница 2 правоуганика тј. 2 стране квадра)
8. Колико различитих боја сламчица ти је потребно за прављење модела квадра? (потребно је 3 боје сламчица; у свакој куглици ће бити везане 3 сламчице различитих боја) Колике су дужине сламчица једне боје? А колике су дужине све 3 боје? (сламчице једне боје су истих дужина; сламчице различитих боја су различитих дужина; сламчице за прављење модела квадра имаће 3 различите дужине) Колико сламчица истих дужина/боја си користио да направиш модел квадра? (4 сламчице тј. у 3 групе/боје по 4 сламчице једнаких дужина; укупно то је 12 сламчица)
9. Да ли модел квадра може да има сламчице само у две дужине и две боје? (идеја је да направе модел квадра чије су 2 стране квадрати а 4 правоугаоници тј. да направе модел од 4 сламчице једне дужине тј. једне боје и 8 сламчица друге дужине тј. боје)
10. И овде се може користити идеја превртања, као на претходном часу! (усмеравање пажње на једну страну квадра и уочавање елемената и особина квадра)

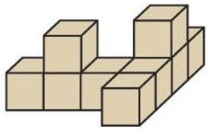
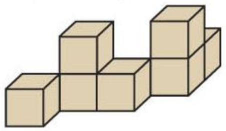
Пратити да ли су ученици конструисали модел квадра према некој од карактеристика:

- број темена,
- број ивица,
- шта су стране модела (правоугаоници или правоугаоници и квадрати).

</td>
</tr>
</table>

	Прећи на фронтални рад у Уџбенику, **стр. 4-5**, а затим и на уопштавања о особинама квадра. Користити графо-фолије за решавање. **Зад. 1. и 2:** особине квадра; упознавање елемената квадра преко слике и направљеног модела. Вратити се на модел који су ученици правили и питати их следеће: 1. Да ли је дужина квадра увек највећа – већа и од ширине и од висине? 2. Покажи своје решење. (идеја је да ученици схвате да било која тројка бројева може да буде тројка мерних бројева дужина ивица квадра и да „дужина“ квадра није увек у тој тројци највећи број[89]) Поступак поновити за коцку. Уџбеник, **стр. 6, зад. 3**. Уочавање сличности и разлика квадра и коцке; дефинисати шта је квадар, а шта је коцка.
	Стр. 7 – 8, Задаци за вежбање: **зад. 3.** и **4**. Фронтално радити и користити графо-фолије. Пазити на задатак 4б). Подсетити их на рад са сламчицама.
Напомена: Могу се користити коцкице за игру као модели у сваком оваквом типу задатка. Решења су:	Домаћи задатак 1) **1., 2. и 5. задатак, стр. 7** Уџбеника. Зад. 5б) цртати у решавању, а ако је отежано користити моделе и направити тело. Диференциран домаћи задатак: 2) **Стр. 9**, рубрика *И ово је математика*. Бољи ученици нека га реше за домаћи, и остали који хоће и могу. Потребно је замислити или саставити тело од коцки и пронаћи решење (решења).

[89] Иако је ово „осетљиво“ питање, ми га можемо уврстити у разматрање. Људи су навикнути да дужина има највећи мерни број, па даље ширина и висина. Можемо то нашим ученицима и предочити. Посебно *идеју договора* у математици.

Постоји више могућности да се реши овај задатак. Ево две:  Употребљено је 9 коцака.  Употребљено је 7 коцака. Најмањи могући број коцака је 7 а највећи 20.	

Прилог 1.
Уџбеничка стр.4 − 6, на графо-фолији

3.
Општи подаци

Учитељ:	
Датум:	
Разред и одељење:	IV-

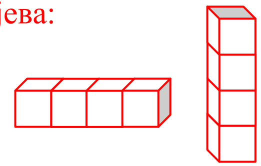
Методички подаци

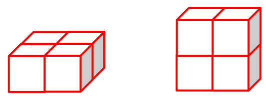
Наставна тема:	Квадар и коцка
Наставна јединица:	**Особине квадра и коцке**

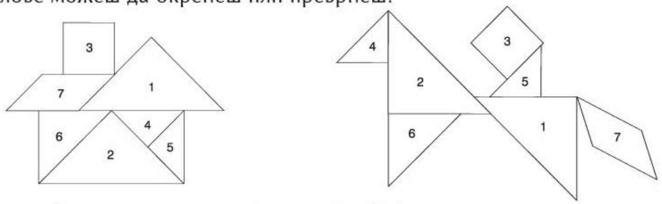
Претходна наставна јединица:	Особине квадра и коцке – обрада
Наредна наставна јединица:	Мрежа површи квадра и коцке
Потребно знање ученика:	Својства (особине) квадра и коцке, њихови елементи; појам паралелности дужи (правих/равни) и подударности дужи (фигура).
Тип часа:	*Утврђивање*
Циљ часа:	Поновити и увежбавати особине квадра и коцке, примењујући унутар математике и у свакодневним ситуацијама
Задаци часа:	
- Образовни	- Препознавање свих особина квадра и коцке;
- Функционални:	- Решавање проблемске ситуације која укључује анализирање модела квадра и коцке; - Примена елемената квадра и коцке унутар математичких појмова, као и у свакодневним ситуацијама
- Васпитни:	- развијање способности ученика да посматрају, анализирају и закључују; - развијање критичког односа према стварности.
Облици рада:	Индивидуални, фронтални
Наставне методе:	- метода хеуристичког разговора, - учење путем вођеног открића.
Наставна средства:	Уџбеник, коцкице за друштвене игре – по ученику 10 (ученици их доносе); модел за игру Танграм

	графо-фолије.

Ток часа

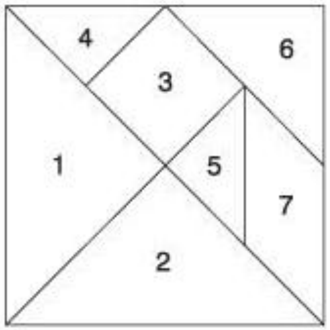
	Поновити особине квадра и коцке научене на прошлом часу. Проверити домаћи задатак и решење путем графо-фолије. **Стр. 7**, зад. из рубрике *Да ли знаш...* дискутовати о значењу речи *страна* у различитим контекстима – свакодневном говору и математици (иста реч са различитим значењима). Тражити од ученика да пронађу још неки такав пример. Ако не успеју на часу, за домаћи задатак имају овај захтев.
Напомена: Задаци захтевају способност цртања и замишљања тела облика квадра и коцке, састављања квадара од датих коцки (могуће је ученике у овим задацима водити кроз слику, али је циљ да замисле моделе тела у геометријском простору и дају одговор на постављене захтеве). По потреби користити моделе тела или слике (по процени и према реакцији ученика).	**Стр. 8 − 9**, зад. 6 − 9.: увежбавање особина квадра и коцке, те примена у реалним ситуацијама. **Зад. 6.** питати ученике како рачунају дужину ивице коцке ако знају збир дужина свих ивица коцке. (од ученика тражити запис математичким симболима $l=12\cdot a$, $a=l:12$) У **зад. 7.** ученике упутити на слику када размишљају о лепљењу ивица акваријума (без горњих). Препорука – ако отежано разумевају преко слике (повлачећи оловком преко ивица квадра тј. акваријума), користити се моделом отвореног квадра. Водити их питањима: колико ивица је облепљено траком? Колико ивица има дужину 43 cm? Колико ивица има дужину 30 cm? Колико ивица има дужину 15 cm? Колика је укупна дужина траке? **Зад. 8.** Ученици би испред себе имали моделе коцака и правили би квадре. (У покушајима би долазили до следећих случајева:  итд.

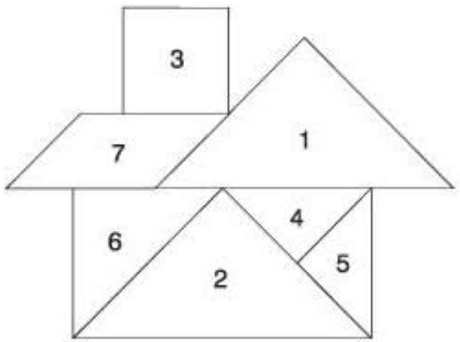
	Ово би све били исти квадри, па смо нашли 1 случај. Ученицима указати на релативан положај квадра - према референтном телу или оном ко посматра.  итд. И ово би све били исти квадри, па смо нашли још 1 случај. Укупно је 2 квадра која се могу саставити од понуђених коцака.) **Зад. 9.** Помоћ при решавању може да буде слика или модел квадрата тј. коцке. Увек покушајте прво без слике, затим са сликом и на крају са моделом. (Решења су редом: 3(4) и 7 (8))
	Домаћи задатак 1) **Стр. 17**, рубрика *Да ли знаш*... Пронађи шта значи ова изрека. Покушај на нађеш још неку изреку у којој се појављује реч из математике. 2) Упутити ученике на *Табле мудрости* или *Танграм* (*Прилог 2*). Описати начин игре и дати им модел квадрата.

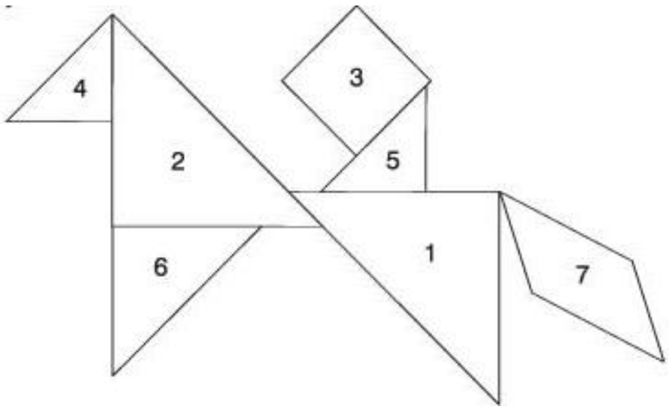
	ТАНГРАМИ или „Табле мудрости" су стара кинеска игра, у Кини позната под називом Чи-чиа-тан. Кроз ову игру постајеш маштовит и добар конструктор. За игру ти је потребан картон у облику квадрата који се налази у прилогу на крају уџбеника. Исеци квадрат по линијама. Добићеш 7 делова. Од њих можеш да састављаш различите фигуре. На следећим сликама приказано је како од изрезаних делова можеш да саставиш кућу и коњаника. При састављању фигура држи се следећих правила: 1. За састављање фигуре употреби свих 7 делова. 2. Делови не смеју да се преклапају, већ треба да се додирују по ивицама. 3. Делове можеш да окрећеш или преврћеш.  Цртежи који следе су силуете фигура. Пробај да их саставиш од исечених делова квадрата. Направи и сам неке фигуре користећи свих 7 делова. Диференциран домаћи задатак: 3) *Таблама мудрости* могу да се играју и на интернету и то на следећим адресама: http://www.fi.uu.nl/rekenweb/en/welcome.xml и иди на link Tangram http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_112_g_2_t_4.html?open=activities

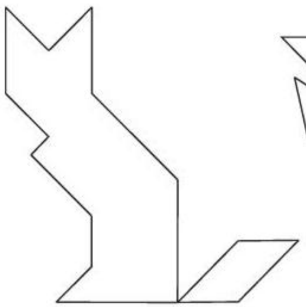
Прилог 1.
Уџбеничка стр.7 − 9, на графо-фолији

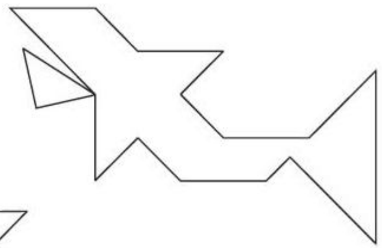
Прилог 2.
Модел за Танграм

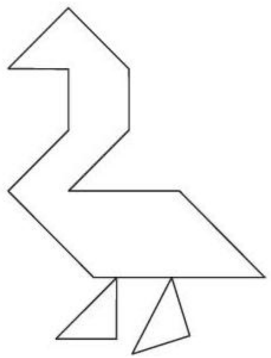

4
6
3
1
5
7
2

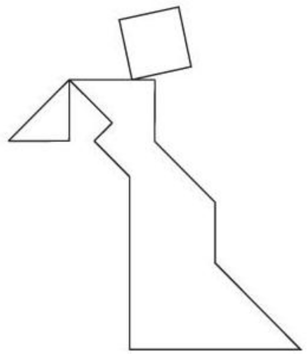

3
1
7
4
6
5
2


4
3
2
5
1
6
7









4.
Општи подаци

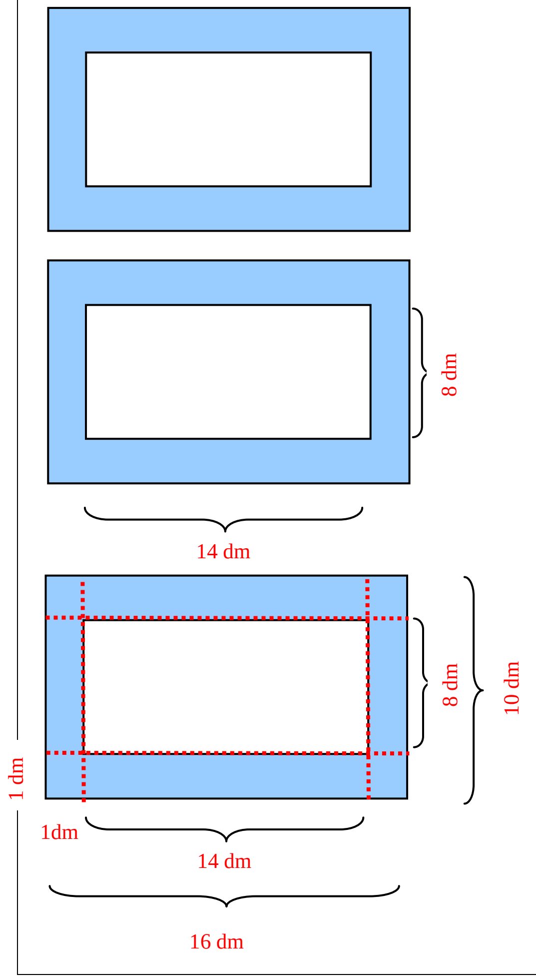
Учитељ:	
Датум:	
Разред и одељење:	IV-

Методички подаци

Наставна тема:	Квадар и коцка
Наставна јединица:	**Мрежа површи квадра и коцке**
Претходна наставна јединица:	Особине квадра и коцке
Наредна наставна јединица:	Мрежа површи квадра и коцке – утврђивање
Потребно знање ученика:	Упозната својства квадра и коцке
Тип часа:	*Обрада*
Циљ часа:	Развијање површи модела квадра и коцке у њихове мреже и цртање мреже површи коцке
Задаци часа:	
- Образовни	- Уочавање како се развија модел квадра и коцке у њихове мреже;
- Функционални:	- Анализирање мрежа површи квадра и коцке: подударни правоугаоници, подударне ивице; - Разликовање мрежа које могу или не могу да буду мреже површи коцке;

	- Правилно цртање мрежа површи коцке, и то постепено: 1) на квадратној мрежи и 2) на започетој слици, употребом прибора за цртање; - Препознавање – геометријско резоновање - којој од коцки припада дата мрежа; постепено подстицати и развијати способност замишљања коцке састављене од дате мреже.
- Васпитни:	- развијање способности ученика да посматрају, анализирају и закључују; - развијање критичког односа према стварности.
Облици рада:	Индивидуални, фронтални
Наставне методе:	- метода хеуристичког разговора, - учење путем вођеног открића.
Наставна средства:	Уџбеник, модели правоугаоника у две боје на картону за сваког ученика, модели правоугаоника и квадрата за састављање мреже површи квадра, прибор за цртање, графо-фолије.

Ток часа



Провера домаћег задатка, фронтално усмено.

Да се подсетимо шта смо научили из теме *Правоугаоник и квадрат*. Прављење аналогија са раванским фигурама и навикавање на овакав начин размишљања у теми *Квадар и коцка*.

Израчунај површину стољњака који деца са слике шију.

Дара и Стева шију стољњак за сто чије су димензије 14 *dm* и 8 *dm*. Стољњак прелази преко ивица стола по 1 *dm*.

Колика је укупна површина стољњака са шавом?

Материјали:

а) моделе правоугаоника у одговарајућим бојама како слике показују (*Прилог 3*) и
б) више тавих модела које ће бити у функцији решавања задатка путем сечења и преклапања (проналажење више решења).

<u>Вођени кораци:</u>

а) Прво на сликама стољњака обележи све димензије. (Тамо где ученици имају потешкоћу, можемо их водити подсећањем где се столљак „савија“ када је на столу.)
б) Израчунај површину тог стољњака. ($P = [(14+1+1) \cdot (8+1+1)]\ dm^2 = (16 \cdot 10)\ dm^2 = 160\ dm^2$)

<table>
<tr>
<td>

Напомена: на сликама картончићима у боји прекривамо делове бело обојеног правоугаоника чије су странице дужина 16 *cm* и 10 *cm*; прекривамо просте (са по 1 делом) или сложене фигуре (са 2 или 3 дела фигуре) које су делови бело обојеног правоугаоника, у зависности како „гледамо“ на целу сложену правоугаону фигуру.

</td>
<td>

в) Да ли постоји више начина на које можеш да израчунаш површину? Погледај делове од којих је фигура састављена. (Да, постоји.)

- Постоји више начина гледања на фигуру. Довољно је да ученик пронађе бар два различита!) Постоји 1 бели правоугаоник и 8 мањих плавих. На њих можемо да гледамо на следеће начине: 1+(1+1+1+1+1+1+1+1), 1+(2+2+2+2), 1+(3+1+1+3) итд. како слике показују. Идеја је да се фигура разлаже део по део.

Пишемо:
$P = (14 \cdot 8)\ dm^2 + 4 \cdot (1 \cdot 1)\ dm^2 + 2 \cdot (14 \cdot 1)\ dm^2 + 2 \cdot (8 \cdot 1)\ dm^2 = 160\ dm^2$

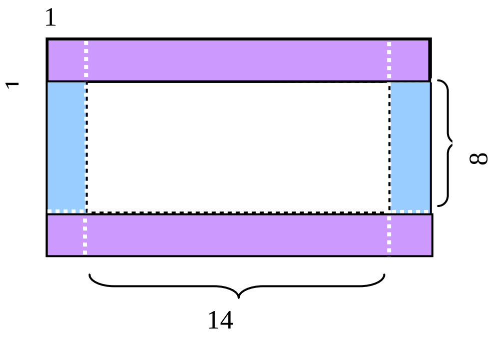
Затим даље:
$P = (14 \cdot 8)\ dm^2 + 2 \cdot [(8+1+1) \cdot 1]\ dm^2 + 2 \cdot (14 \cdot 1)\ dm^2 = 160\ dm^2$ итд.

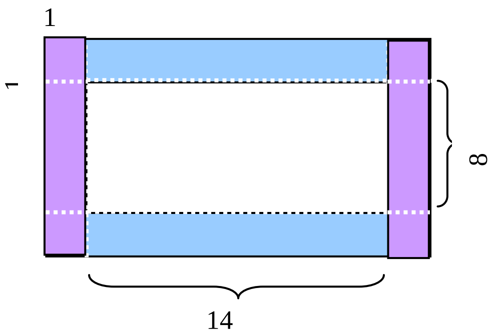
Како ће ученици до овога да долазе? Понудићемо им већ исечене делове (или да их сами секу). Преклапањем са првом сликом бело обојеног правоугаоника ученици ће долазити до решења. Понудити исечене делове или их сећи у току саме активности – зависи од процене учитеља према предзнањима ученика.

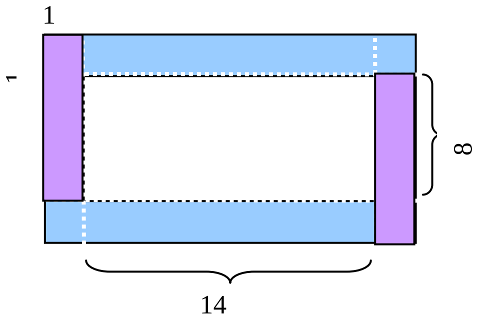
- Идеја је да ученици на различите начине увиде како се рачуна укупна површина једне сложене фигуре и да ученике „полако“ припремамо за мреже површи тела као сложене раванске фигуре састављене из делова које су површи простих (сложених) фигура.

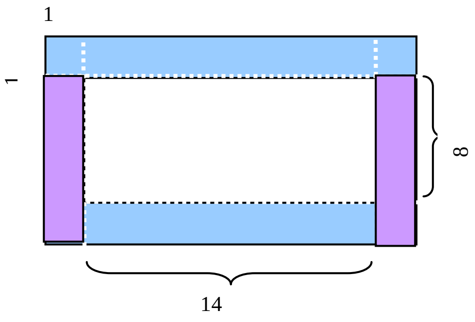
Коментарисати оне од фигура које би биле непрактичне за шивење.

</td>
</tr>
</table>


1
1
8
14


1
1
8
14


1
1
8
14



Размотавање у мрежу површи тела

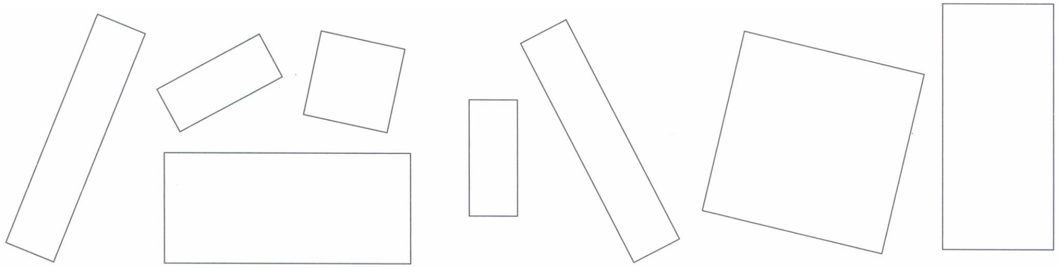
<u>Материјал:</u>

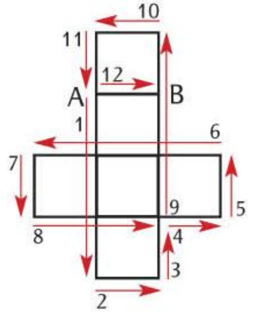
Модел квадра, модел коцке, маказе, бојице

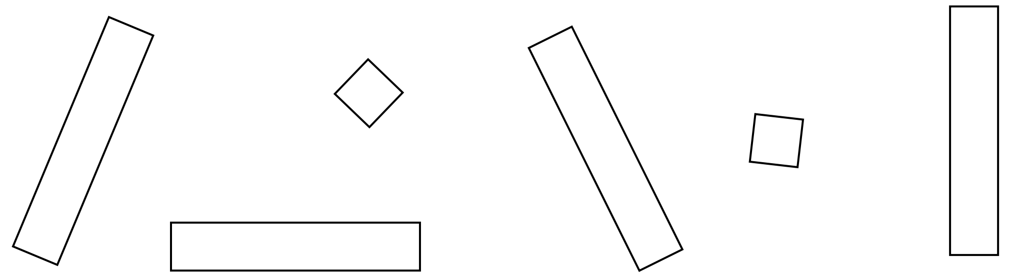
<u>Вођени кораци:</u>

1. Модел квадра разрежи по његовим ивицама. Пази да га тако исечеш да остане у једном комаду.

	2. На овај начин добио си мрежу површи квадра. Од којих фигура је она састављена? (састављена је од правоугаоника) 3. Обоји истом бојом подударне странице правоугаоника (ивице квадра). Колико различитих боја ти је потребно? (3) 4. Подударне правоугаонике на мрежи обоји истом бојом. Колико различитих боја ти је потребно? (3) 5. Сада можеш да упоредиш своју мрежу површи квадра са мрежама другара у одељењу. (идеја је да се уоче различите мреже површи квадара што ће се сигурно десити јер ће ученици разрезивати мреже по различитим ивицама) Разрезану мрежу квадра (коцке) чувати у коверти-џепу на крају Уџбеника, за наредне часове. Наставити рад у Уџбенику, део који се односи мрежу површи квадра. **Стр. 10 – 11, зад. 1 – 3,**: развијање модела квадра у мрежу – путем слике након модела; анализа мреже површи кавдра; препознавање мреже површи квадра. **Зад. 3. б)** продискутовати и подсетити се квадра коме су две стране квадрати. Урадити исто за коцку. Наставити рад у Уџбенику, део који се односи мрежу површи коцке. **Стр. 11 – 12, зад. 4 – 6,**: развијање модела коцке у мрежу – путем слике након модела; анализа мреже површи коцке; препознавање мреже површи коцке; разликовање која од понуђених слика мрежа може да буде мрежа површи коцке (пазити на број квадрата и њихов положај у равни - приликом састављања коцке неки од квадрата неће моћи да заузму положај и буду стране коцке, као у **зад. 6**, под **в)** и **г)**, **стр. 12**. Ученици могу да прецртају мрежу површи коцке из задатка на папир да би утврдили која мрежа одговара мрежи површи коцке. Цртати и формирати моделе коцки могу за оне мреже за које имају дилему, не за све. Мреже исецају маказама и склапају тј. покушавају да склопе коцку.

	Задатак (*Прилог 2*): Дати ученицима на картону следећу слику. Захтев је да обоје и исеку фигуре од којих могу да направе мрежу површи једног тела, односно од којих могу да саставе један модел тела. Које је то тело?  Вођени кораци: а) нађи у пару по 2 подударне фигуре, б) међусобно подударне обоји истом бојом, в) издвој 3 пара подударних фигура од којих ћеш моћи да саставиш мрежу површи тела – води рачуна о дужинама страница фигура: оне једнаких дужина биће слепљене, г) лепљењем фигура састави мрежу површи, д) затим и сам модел тела. Које си тело добио? (Добио си правилан паралелепипед или квадар.) ђ) Које су фигуре остале неупотребљене? е) Да ли се од фигура на доњој слици, на сличан начин као у претходном примеру, може саставити модел квадра? Објасни. (Направиће модел квадра. На доњој слице се сусрећу са проблемском ситуацијом где је мрежа површи квадра састављена од правоугаоника и квадрата. Добијамо правилан паралелепипед у оба случаја.)

<table>
<tr>
<td>
Решење за стр. 24. је:
Мрежа коцке може се нацртати из једног потеза.


</td>
<td>


Задаци за вежбање

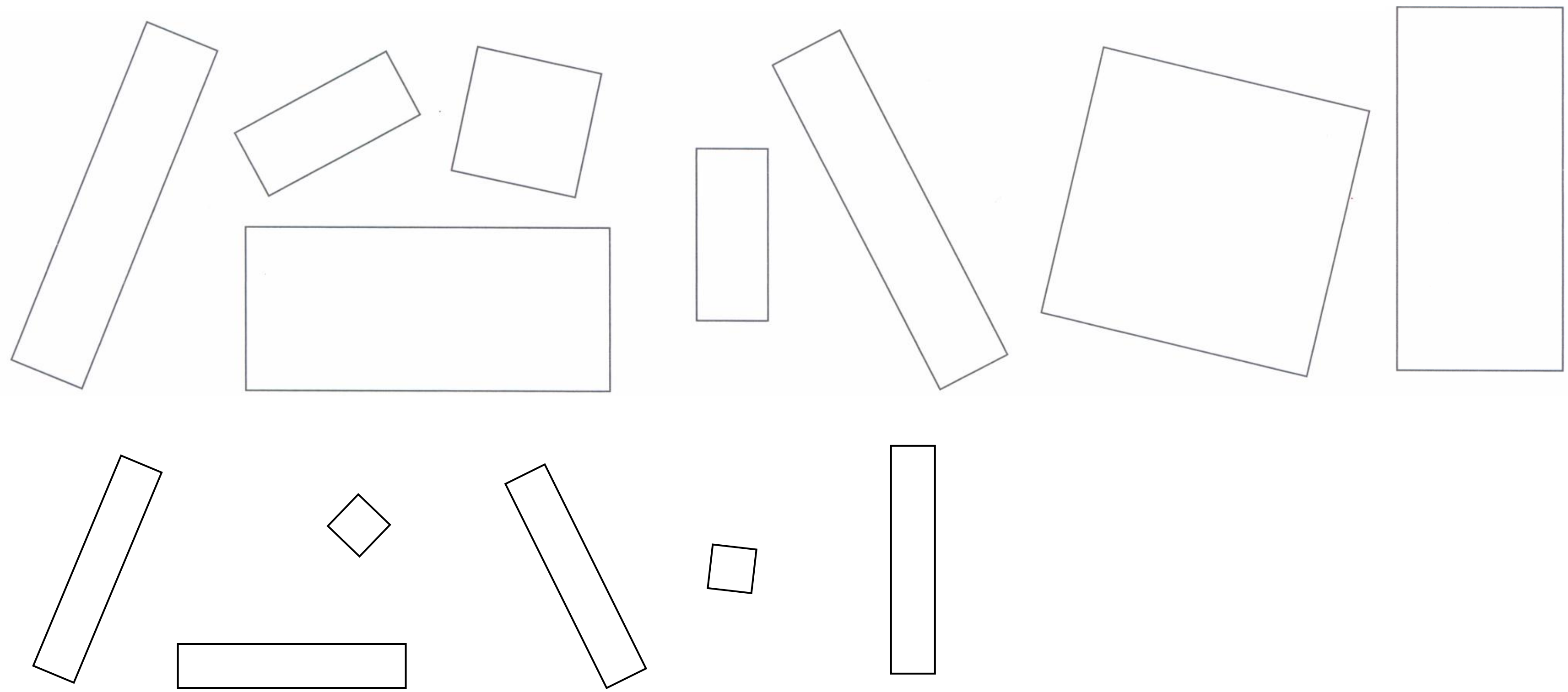
Стр. 12 – 13, зад. 1 – 2.
У зад. 1. могући су различити одговори (различите мреже).
У 2. задатку могуће је цртати на папиру и сећи и састављати мреже ако се теже решава. То могу ученици којима је ово отежано.

Домаћи задатак:
1) **Стр. 13 – 14, зад. 3, 4. и 5**. Приликом решавања задатака могу да користе моделе.
За 5. зад. Потребно је да пазе да имају све бројеве од 1 до 6 као нумерације на коцкици за играње.

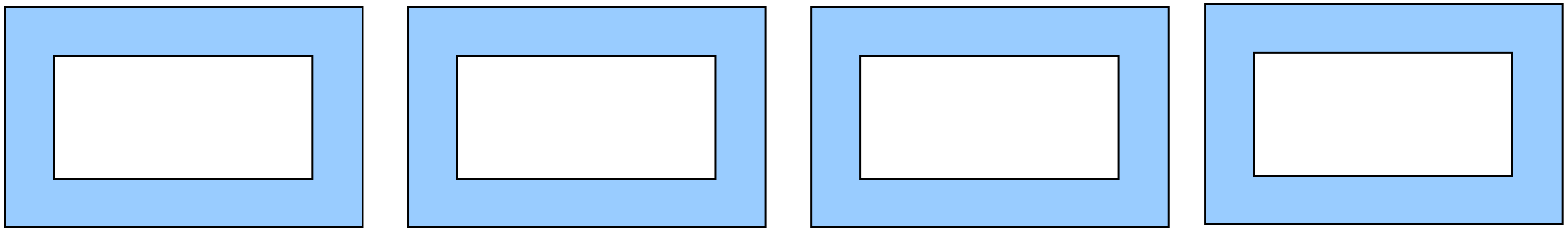
Диференциран домаћи задатак:
2) **Стр. 24**, рубрика *И ово је математика*.
</td>
</tr>
</table>

Прилог 1.
Уџбеничка стр. 10 − 14, на графо-фолији.

Прилог 2.
Слике правоугаоника и квадрата



Прилог 3.



5.

Општи подаци

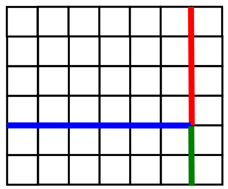
Учитељ:	
Датум:	
Разред и одељење:	IV-

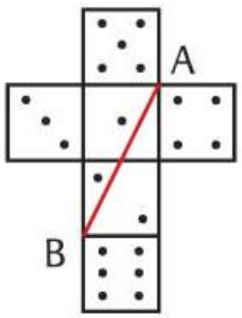
Методички подаци

Наставна тема:	Квадар и коцка
Наставна јединица:	**Мрежа површи квадра и коцке**
Претходна наставна јединица:	Мрежа површи квадра – обрада
Наредна наставна јединица:	Израчунавање површине квадра и коцке
Потребно знање ученика:	Препознавање мрежа квадра и коцке, њихово цртање
Тип часа:	*Утврђивање*

Циљ часа:	Цртање мреже површи квадра и примена мрежа површи квадра и коцке у задацима унутар математике и у свакодневним ситуацијама
Задаци часа:	
- Образовни	- Уочавање како се развија површ модела квадра и коцке у њихове мреже;
- Функционални:	- Анализирање мрежа површи квадра и коцке: подударни правоугаоници, подударне ивице; - Анализирање мрежа које могу или не могу да буду мреже површи коцке; - Правилно цртање мрежа површи коцке, а затим и квадра, и то постепено: 1) на започетој слици и 2) потпуно самостално, употребом прибора за цртање; - Препознавање – геометријско резоновање - којој од коцки припада дата мрежа; постепено подстицати и развијати способност замишљања коцке састављене од дате мреже; - Препознавање – геометријско резоновање - која од понуђених мрежа површи квадара одговара датом квадру; постепено подстицати и развијати способност препознавања ком од квадара припада дата мрежа; - Прављење модела квадра и коцке од мрежа њихових површи.
- Васпитни:	- развијање способности ученика да посматрају, анализирају и закључују; - развијање критичког односа према стварности.
Облици рада:	Индивидуални, фронтални
Наставне методе:	- метода хеуристичког разговора, - учење путем вођеног открића.
Наставна средства:	Уџбеник, графо-фолије, прибор за цртање.

Ток часа

	Провера домаћег задатка, фронтално на графо-фолији. Дискусија о решењима.
	Задаци за вежбања **Стр. 12 – 17, зад. 6 – 11.** У зад. 6. су могући различити одговори. У зад. 7. могуће је да започнемо на мрежи цртање на начин задавањем дужине, ширине и висине. Започети следеће кораке уколико је отежано разумевање:  Питати ученике како све могу да започну цртање мреже. Зад. 8. постепено ученике води од мреже површи ка појму површине. Зад. 9, решење је под г). Питати ученике како препознају мрежу – геометријско резоновање. (по бојама страна и „сусрету“ у одређеним теменима) Зад. 10. слично као претходни, али пошто је он тежи, могуће је направити модел квадра прецртавајући га на папир. (решење б) Зад. 11. ученици сада потпуно самостално цртају мреже површи квадра и коцке. Неко од ученика црта фронтално на табли, уз учитељеву помоћ. Могућа су различита решења.

<table>
<tr>
<td>Решење је:

</td>
<td>Домаћи задатак
1) Нацртати мрежу површи квадра чије су димензије редом 5 cm, 3 cm и 2 cm и мрежу површи коцке чија је ивица дужине 3 cm.
2) Стр. 12: у овом задатку ученике треба подстицати да размишљају о мрежи површи тела које ће направити за одлагање оловака (размишљање о димензијама тела). Истраживачки задатак је са циљем да се научено примени и такмичарског је карактера. Бираћемо најбољу - по чврстини и употребљивости – посуду лепог дизајна. Посуду донети за 2 дана (што је довољно времена за израду).

Диференциран домаћи задатак:
3) Рубрика И ово је математика, стр. 17. Пазити на оријентацију у простору!
4) Рубрика За љубитеље компјутера, стр. 16.</td>
</tr>
</table>

Прилог 1.
Уџбеничка стр. 13 − 17, на графо-фолији.

6.
Општи подаци

Учитељ:	

Датум:	
Разред и одељење:	IV-

Методички подаци

Наставна тема:	Квадар и коцка
Наставна јединица:	**Површина квадра и коцке**
Претходна наставна јединица:	Мрежа површи квадра и коцке
Наредна наставна јединица:	Површина квадра и коцке – утврђивање
Потребно знање ученика:	Израчунавање површине правоугаоника и квадрата, мерне јединице за површину – основна и оне које су мање и веће од основне, израчунавање површине сложене фигуре преко збира површина простих фигура – дуж заједничких ивица/без преклапања дела површи фигура, својства квадра и коцке
Тип часа:	*Обрада*
Циљ часа:	Израчунавање површине квадра и коцке
Задаци часа:	
- Образовни	- Препознавање правоугаоника и квадрата на мрежи површи квадра и коцке и уочавање подударних, -
- Функционални:	- Анализирање мреже површи квадра и израчунавање површине квадра преко збира површина свих страна квадра (преко збира површина правоугаоника); - Анализирање мреже површи коцке и израчунавање површине коцке преко збира површина свих страна коцке (преко збира површина квадрата);

	- Упознате јединице за површину (основна 1 m^2 и оне мање и веће од ње) примењивати при израчунавању површине квадра и коцке, као и примењивати стечена знања о рачунским операцијама. Напомена: овде *није оправдано* кренути од 1 m^2, иако је то основна јединица за мерење површине, већ од мање нпр. 1 cm^2.
- Васпитни:	- развијање способности ученика да посматрају, анализирају и закључују; - развијање критичког односа према стварности. -
Облици рада:	Индивидуални, фронтални
Наставне методе:	- метода хеуристичког разговора, - учење путем вођеног открића.
Наставна средства:	Уџбеник, модел квадра направљен од мреже површи квадра из коверте-џепа Уџбеника, графо-фолије.

Ток часа

	Провера домаћег цртањем фронтално. Дискусија о различитим мрежама површи. **Стр. 18:** За увођење појма површине квадра и коцке подсетити ученике како израчунавамо површину правоугаоника и квадрата чије су странице познате, као и којим мерним јединицама се изражава површина.
	Подсећање на проблемску ситуацију. Вратимо се на проблемску ситуацију када смо размотавали мрежу површи квадра. Урадимо то исто. (Ученици су сачували мреже и лепљењем добили модел квадра кога ће поново разрезати.)

<u>Вођени кораци:</u>

1. Подударни правоугаоници обојени су једном бојом. Размисли и израчунај површину мреже квадра тј. површину целог квадра. Послужи се сликом.
2. Да се подсетимо како смо рачунали површину једне сложене фигуре састављене из простих. Сети се проблемске ситуације када су Дара и Стева шили стољњак. Ово ће ти помоћи у решавању ове нове проблемске ситуације. Сети се и задатка са Стевом када смо хтели да му помогнемо да умотамо (упакујемо) поклон украсним папиром на почетку рада у овој Теми. Шта смо радили? (све стране квадра положили смо у раван и цртали их на папиру – добили смо мрежу површи квадра)
3. Поред сваког обојеног правоугаоника напиши како рачунаш његову површину.
4. Запиши једном формулом како рачунаш површину целог квадра. (ученици се процедурално/реторички изражавају – рачунају површине правоугаоника појединачно и за целу мрежу површи квадра, изражавајући се конкретним мерним бројевима и мерним јединицама; тек након ове активности прелазе на формулско изражавање)

Уџбеник, стр. 18 − 19. Зад. 1 − 3: одређивање површине квадра и коцке преко њихових мрежа; површину увести преко збира површина свих страна квадра тј. коцке:

	1) површина квадра чије су ивице дате (ивице a, b и c): $P = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ 2) површина коцке чија је ивица дата (ивица a): $P = 6 \cdot a \cdot a$ Упознате јединице за површину (1 m^2 итд.) примењивати при израчунавању површине квадра и коцке. Пазити на претварање јединица из мањих у веће и обрнуто и чињеницу да дужине морају да буду <u>изражене истом јединицом мере</u>.
	Задаци за вежбу **Стр. 19 − 20, зад. 1 − 2.** Прво ученици раде самостално, а затим се решења проверавају фронтално.
	Домаћи задатак **Стр. 20, зад. 3 − 4**. Подсећање на договорено такмичење бирања кутијице за оловке.

Прилог 1.
Уџбеничка стр. 18 − 20, на графо-фолији.

7.
Општи подаци

Учитељ:	
Датум:	
Разред и одељење:	IV-

Методички подаци

Наставна тема:	Квадар и коцка

Наставна јединица:	**Површина квадра и коцке**
Претходна наставна јединица:	Површина квадра и коцке – обрада
Наредна наставна јединица:	Површина квадра и коцке – примене
Потребно знање ученика:	формула (образац) за површину квадра и коцке, својства квадра и коцке, њихови елементи
Тип часа:	*Утврђивање*
Циљ часа:	Увежбавати и примењивати израчунавање површине квадра и коцке
Задаци часа:	
- Образовни	- Препознавање тела из свакодневног окружења облика квадра и коцке,
- Функционални:	- Издвајање познатих и непознатих података у текстуалним задацима – проблемским ситуацијама, - Примена површине квадра и коцке, како унутар математике, тако и у свакодневним ситуацијама, - Примена збира дужина свих ивица квадра у проблемским ситуацијама; - Примена збира дужина свих ивица коцке у проблемским ситуацијама; - Упознате јединице за површину (основна 1 m^2 и оне мање и веће од ње) примењивати при израчунавању површине квадра и коцке, као и примењивати стечена знања о рачунским операцијама.
- Васпитни:	- развијање способности ученика да посматрају, анализирају и закључују; - развијање критичког односа према стварности.

Облици рада:	Индивидуални, фронтални
Наставне методе:	- метода хеуристичког разговора, - учење путем вођеног открића.
Наставна средства:	Уџбеник, графо-фолије.

Ток часа

	Фронтално на графо-фолији проверити домаћи задатак.
Напомена: *задаци захтевају способност замишљања простора и тела у том простору, те међусобних односа таквих тела.* Тамо где је отежано геометријско резоновање, понудити ученицима слику објекта, али прво покушати решити задатак без ње!	Задаци за вежбу **Стр. 20 - зад. 5 – 12**: задаци захтевају примену израчунавања површине квадра и коцке, али и разумевање шта значи који од симбола у формулама. У задацима је понекад до решења могуће доћи на два начина и то је неопходно подстицати. Нпр. у **зад. 8** преко формуле за површину или пребројавањем квадрата као јединице мере за површину. Захтеви су усмерени и на примену површине квадра и коцке у свакодневним ситуацијама. Уколико се деси да **11. и 12. зад.** не стигну да ураде, пребацити га за домаћи.
	Домаћи задатак: 1) **Стр. 24**, рубрика *Да ли знаш...*. Пронађи сличан податак из енциклопедије, дечјег часописа и сл.

	2) Задати ученицима следеће задатке: 1. а) Попуни табелу ако су a, b и c ивице квадра, а P површина квадра са задатим ивицама a, b и c.

a	b	c	$a \cdot b$	$b \cdot c$	$a \cdot c$	P
13 cm	5 cm	4 cm				
10 m			40 m²		50 m²	

б) Попуни табелу ако је a ивица коцке, а P површина коцке са задатом ивицом a.

a	P
7 dm	
	600 cm²

2. а) Израчунај површину коцке ако је обим једне њене стране 20 cm.
   б) Израчунај површину коцке ако је површина једне њене стране 9 cm².

3. Основа квадра је квадрат површине 100 cm². Површина бочне стране је 50 cm². Израчунај ивицу његове основе и висину квадра.

Задатке је могуће решавати и путем слике.

Такмичење и избор најбоље направљене кутијице за оловке.

Прилог 1.

Уџбеничка стр. 20 −22 , на графо-фолији.

8. и 9.
Општи подаци

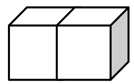
Учитељ:	
Датум:	
Разред и одељење:	IV-

Методички подаци

Наставна тема:	Квадар и коцка
Наставна јединица:	**Површина квадра и коцке – примене**
Претходна наставна јединица:	Површина квадра и коцке – утврђивање
Наредна наставна јединица:	Шта смо научили – квадар и коцка
Потребно знање ученика:	формула (образац) за површину квадра и коцке, својства квадра и коцке, њихови елементи
Тип часа:	*Проширивање*
Циљ часа:	Примењивати површину квадра и коцке унутар математике и у свакодневним ситуацијама
Задаци часа:	
- Образовни	- Применити површину квадра и коцке, како унутар математике, тако и у реалним ситуацијама, постепено се „приближавајући“ појму запремине, по аналогији са појмом површине (дужине): избор погодне нестандардне/стандардне јединице мере за запремину, пребројавање колико се изабраних јединица мере садржи у објекту чија се запремина мери и извештавање мерног броја;

	- Геометријско резоновање – замишљање тела у геометријском простору и однос тела једних према другима.
- Васпитни:	- развијање способности ученика да посматрају, анализирају и закључују; - развијање критичког односа према стварности.
Облици рада:	Индивидуални, фронтални
Наставне методе:	- метода хеуристичког разговора, - учење путем вођеног открића.
Наставна средства:	Уџбеник, графо-фолије.

Ток часа

	Фронтална провера домаћег задатка.
	Задаци за вежбу **Стр. 22 − 23, зад. 13 − 18.** Служити се сликама у задацима, уколико је неопходно. У **зад. 18** пазити на решења – када „слепимо“ две коцке једном њиховом страном, онда број страна те две коцке са 12 је смањен на 10 (две стране су „слепљене“), као што слика показује. Ученике пустити да до овог дођу самостално, али их водити у идеји да „гледају“ на овај начин. $6 \cdot a \cdot a + 6 \cdot a \cdot a - (a \cdot a + a \cdot a) = 12 \cdot a \cdot a - 2 \cdot a \cdot a = 10 \cdot a \cdot a$  Решења су:

	а) 14, б) 14, в) 14, г) 18, д) 18, ђ) 16; а, б и в и г и д; а, б и в и г, д и ђ; г, д и ђ.
	Домаћи задатак а) Задаци: 1. **Стр. 24, зад. 20**. Задати следеће задатке: 2. Израчунај површину кутије без поклопца облика коцке ивице 5 dm. 3. На картонској кутији облика квадра чије су ивице a = 7 dm, b = 3 dm и c = 4 dm направљен је отвор димензија 8 cm и 4 cm. Колика је површина ове кутије? 4. Подрум куће дужине 10 m, ширине 6 m и висине 3 m треба окречити. Крече се зидови и плафон. Врата просторије широка су 1 m, а висока 2 m. Просторија има и прозор дужине 3 m и висине 1 m. Израчунај површину зидова које треба окречити. Диференцирани домаћи задатак (нека покушају сви ученици да га ураде): 5. Ученицима дати предлог почетног корака како би лакше извршили захтев у зад. 19. (који следи). (ако је отежано разумевање, понудити им слику; ако „не иде“ ни преко слике, задатак је могуће решити преко модела, сечењем картона помоћу маказа и уочавањем односа делова површи)

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Пре око 2 400 година велики грчки мудрац Сократ питао је неког дечака: „Ако страницу квадрата повећамо два пута, колико ће се пута повећати његова површина?“

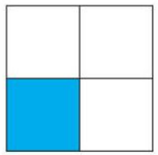
Шта би ти одговорио?

....

Дечак је одговорио: „Два пута“.

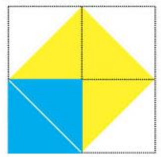
Дечак није био у праву, али је, као и ти, био радознао и желео је да сазна тачан одговор.

Сократ му је помогао да дође до одговора и нацртао слику.



Обојеном квадрату два пута је увећао страницу и добио нов квадрат. Његова површина је .... пута већа од површине обојеног квадрата.

Ако те занима како се добија квадрат чија је површина два пута већа од површине датог квадрата, погледај следећу слику.



6. Стр. 24, зад. 19 и 21.
(У зад. 21. до решења је могуће доћи на два начина: пребројавањем плаво обојених квадрата и збиром њихових површина или од површине целог тела облика квадра одузети површину црвено обојених квадрата. Подстицати ученике да дају различите одговоре!
Ученици којима је задатак много тежак, могу да раде преко модела, слажући коцке.)
</td>
</tr>
</table>

Прилог 1.

Уџбеничка стр. 22 −24, на графо-фолији.

10.
Општи подаци

Учитељ:	
Датум:	
Разред и одељење:	IV-

Методички подаци

Наставна тема:	Квадар и коцка
Наставна јединица:	**Квадар и коцка**
Претходна наставна јединица:	Квадар и коцка
Наредна наставна јединица:	Запремина квадра и коцке
Потребно знање ученика:	особине квадра и коцке, мреже површи квадра и коцке, израчунавање површине квадра и коцке
Тип часа:	*Систематизација*
Циљ часа:	Поновити све појмове из теме *Квадар и коцка*
Задаци часа:	
- Образовни	- Понављање и систематизовање појмова из теме Квадар и коцка кроз одређене групе задатака,
- Васпитни:	- Навикавање ученике на самопроверавање као саставни део процеса учења (провера наученог)

Облици рада:	Индивидуални, фронтални
Наставне методе:	Рада на тексту, монолошка
Наставна средства:	Уџбеник

Ток часа

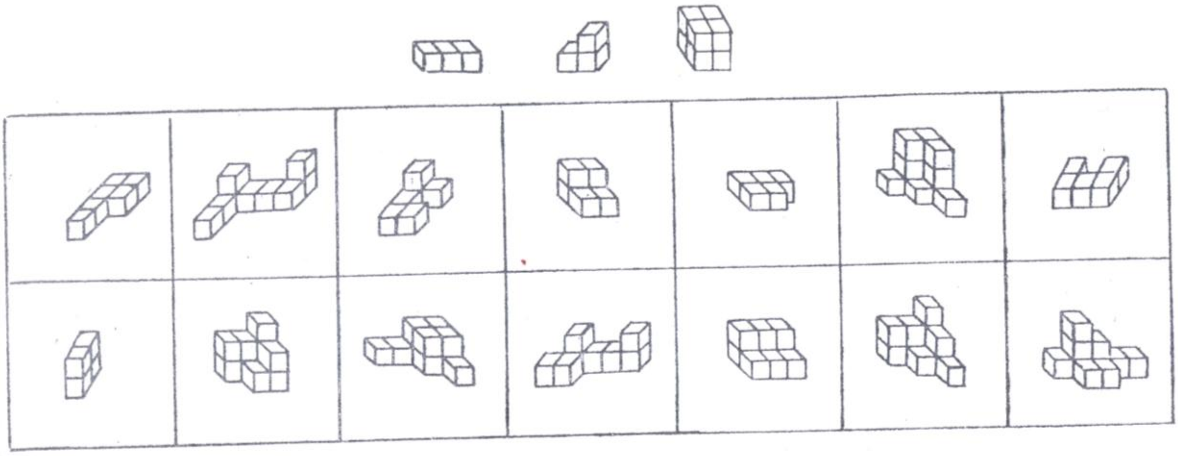
	Фронтално провера домаћег задатка на графо-фолији и усмено.
Шта смо научили	На почетку часа ученицима објаснити да ће данас самостално радити и проверити колико су научили из теме „Квадар и коцка“. Радиће задатке из Уџбеника на стр. 25 – 26. Укупно је девет задатака за самопроверу наученог у трајању од <u>30 минута</u>. **Стр. 25 – 26**: задаци за систематизацију градива. Тим задацима проверавамо реализацију постављених задатака: **Зад. 1, 3. и 5**: особине квадра и коцке, формуле за површину; **Зад. 2:** дефинисање квадра и коцке; **Зад. 4:** препознавање мрежа површи квадра и коцке; **Зад. 6. и 7:** цртање мреже површи коцке и квадра; израчунавање површине коцке и квадра; **Зад. 8. и 9:** примена површине квадра и коцке у свакодневним ситуацијама. Решења задатака су на следећој **стр. 27**. Упознати ученике са начином провере. Дата су само „гола“ решења, без целих корака у решавању. Ученике учити да раде задатак, чак и кад имају потешкоћу. Тек након што га ураде могу да провере решење. Ако им решење није добро, поново се враћају на израду задатка. Ако учитељ уочи да већина ученика има потешкоћу са неким од задатака,

	фронтално тражи од ученика да дају идеју и објашњења и евентуално на табли дају *неки* започети корак. Док ученици раде, учитељ обилази ученике и прати њихов рад.
	Проверава се тачност урађених задатака. Дискусија са ученицима: - колико су појединачно задатака тачно урадили, - шта им је било лако у изради, - шта им је било тешко у изради, - шта им је било занимљиво и сл. Посебно нагласити да је овим начином рада поновљено све оно што је важно да се запамти из до сада обрађених садржаја из теме „Квадар и коцка“.

Прилог 1.
Уџбеничке стр.25 − 27, на графо-фолији

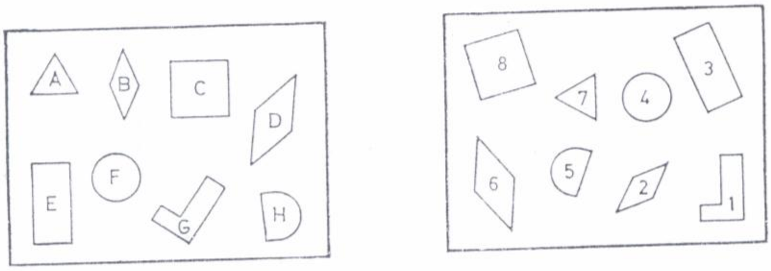
ПРИЛОГ 3: ТЕСТ ГЕОМЕТРИЈСКИХ СПОСОБНОСТИ

1. Пребој коцке у сваком пољу.



2. Пронађи подударне (једнаке) фигуре.

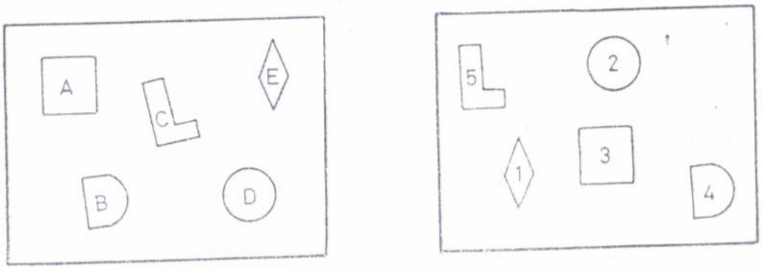
PRIMER



A	7
B	2
C	8
D	6
E	3
F	4
G	1
H	5

U desnom okviru pronadite crtež koji po obliku i veličini odgovara crtežu u levom okviru i, sa strane, uz odgovarajuće slovo unesite broj tačnog rešenja.

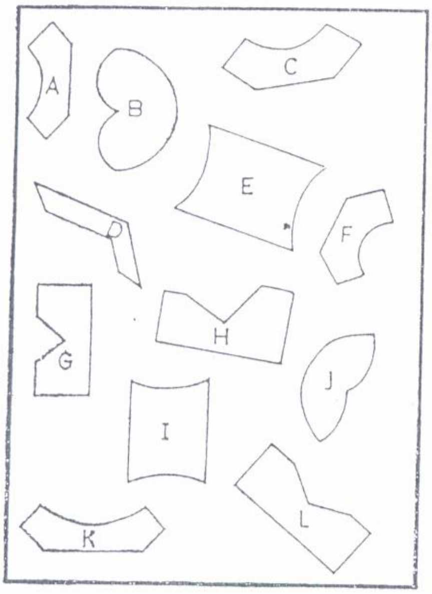
VEŽBA

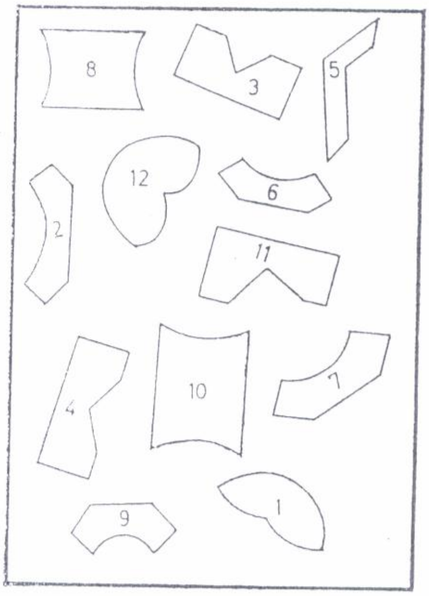


A	
B	
C	
D	
E	

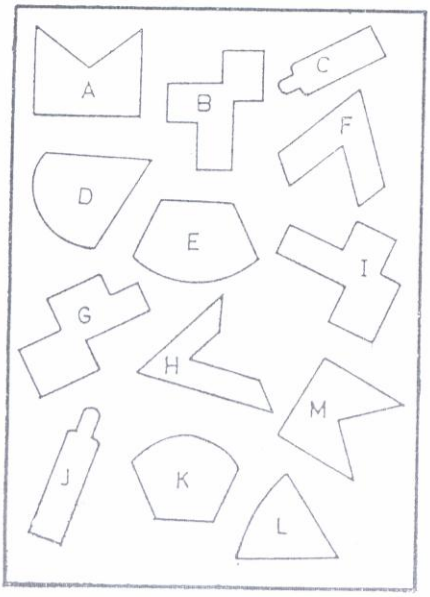
ZADACI ZA REŠAVANJE

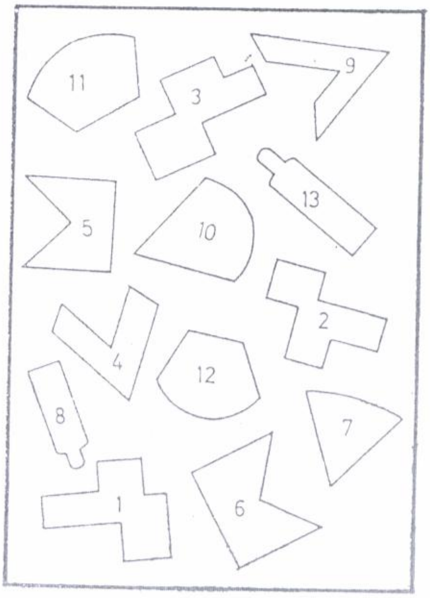
Pronađite koji broj ima crtež u desnom okviru koji odgovara crtežu u levom okviru i rešenje upišite u kolonu sa strane.





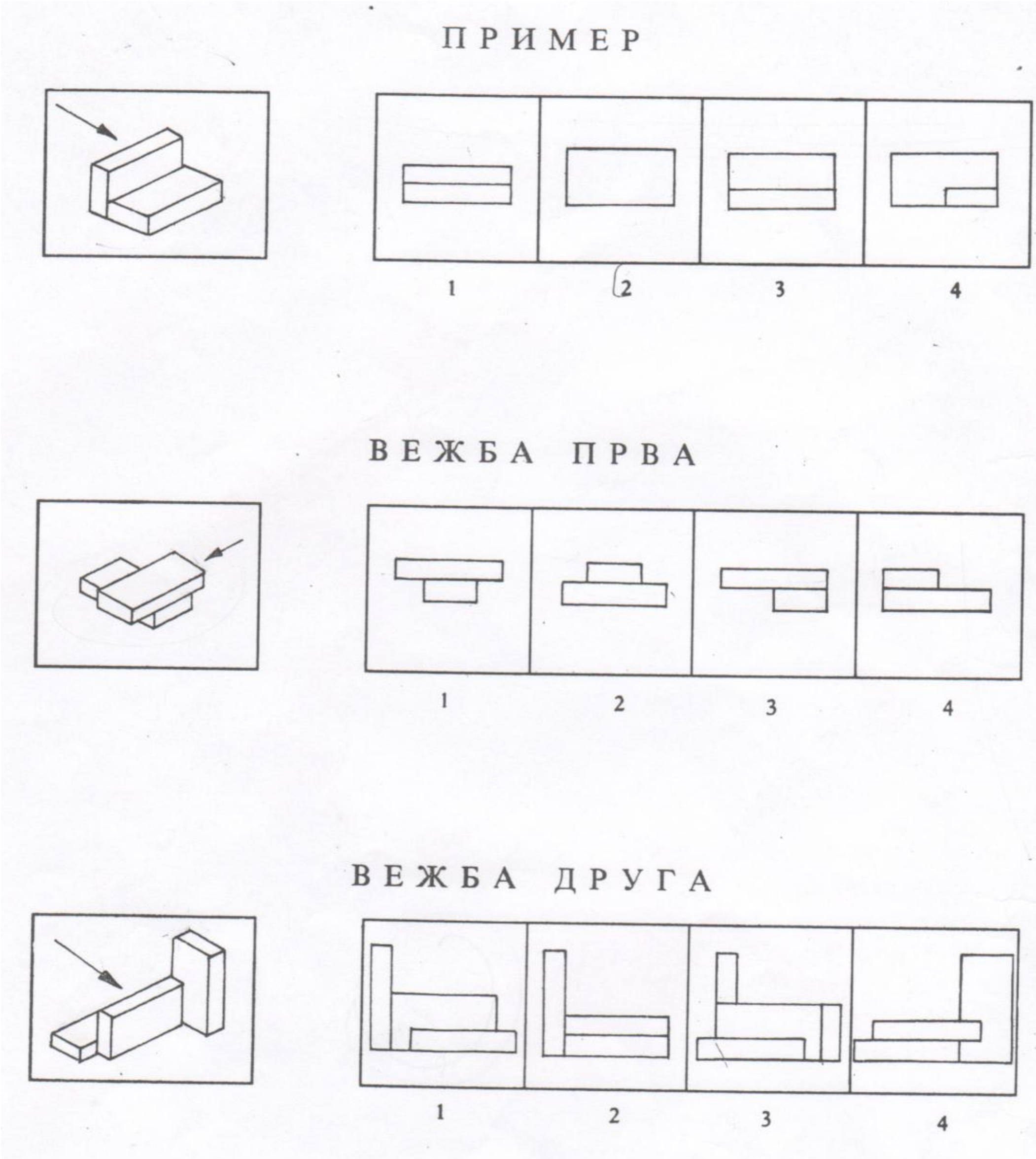
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
L	





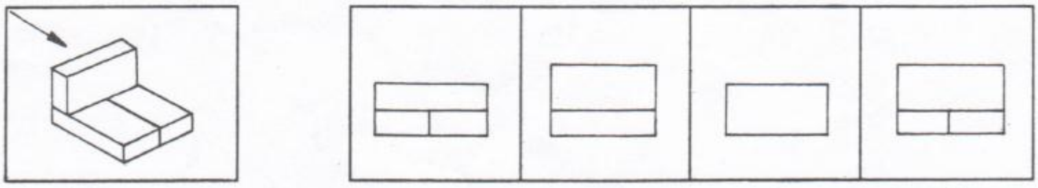
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	
I	
J	
K	
L	
M	

3. Погледај тело и стрелицу која показује на њега. Заокружи одговарајућу слику која то приказује.



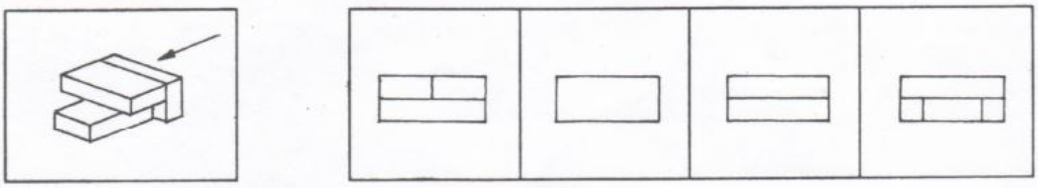
З А Д А Ц И

1



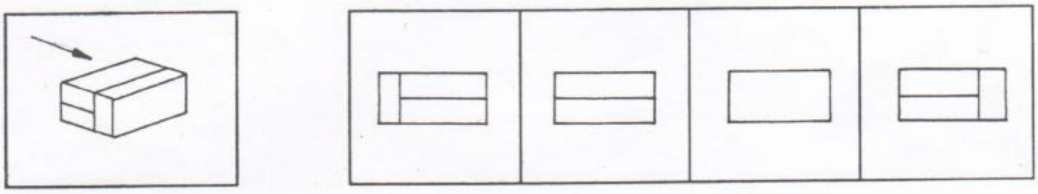
1 2 3 4

2



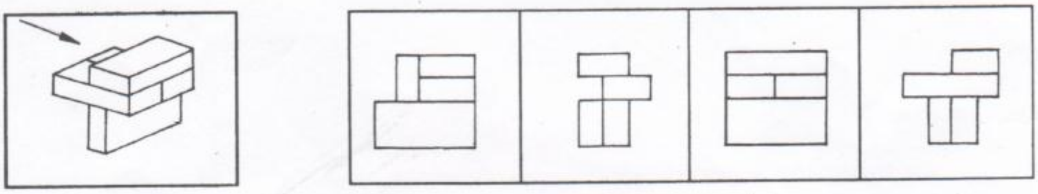
1 2 3 4

3



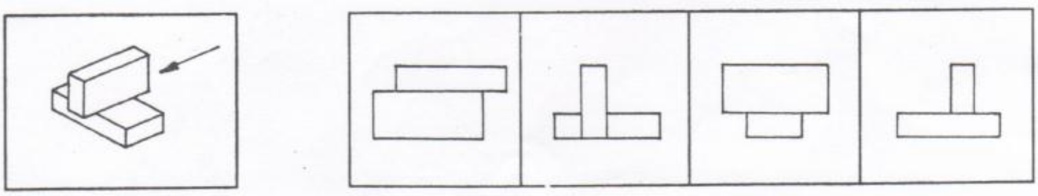
1 2 3 4

4

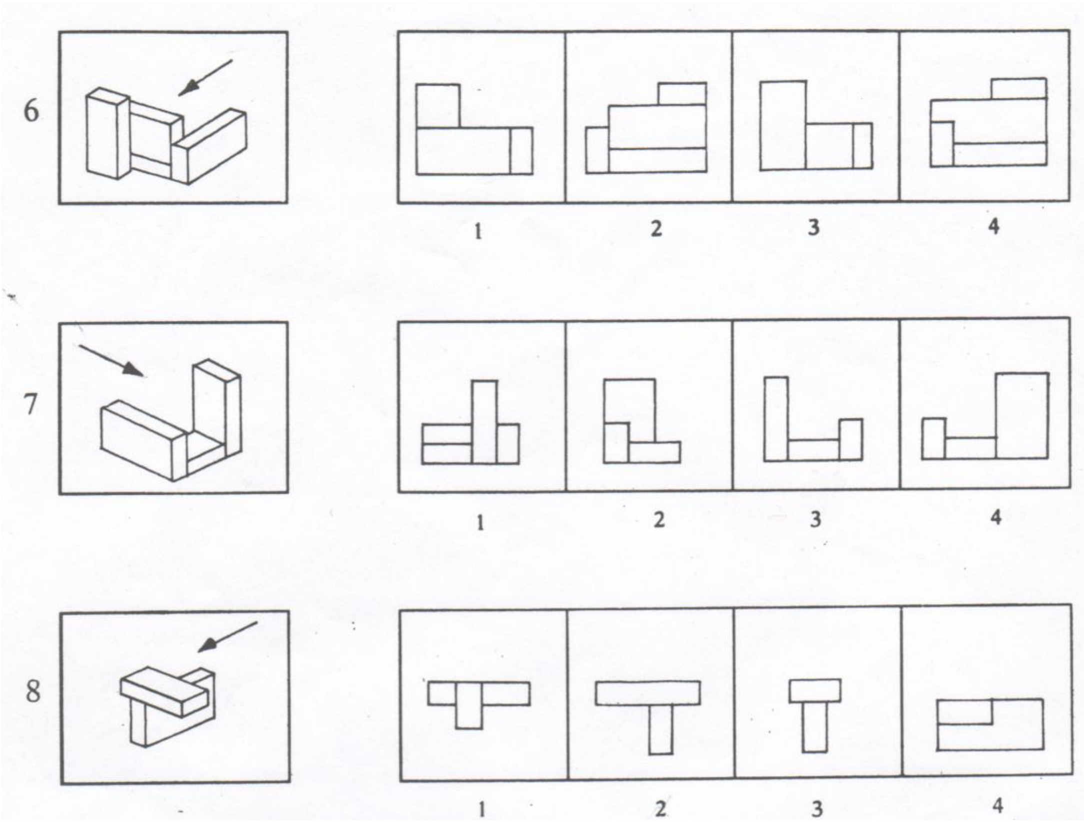


1 2 3 4

5

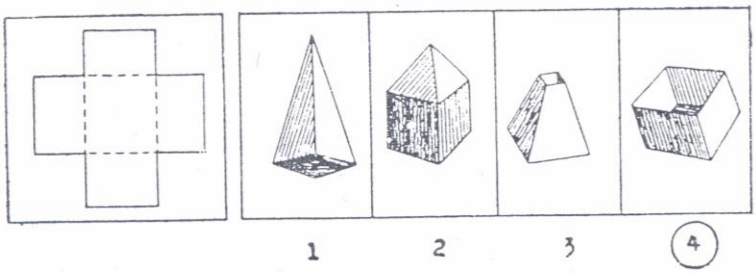


1 2 3 4

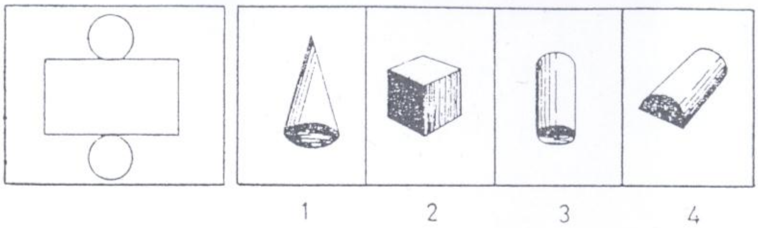


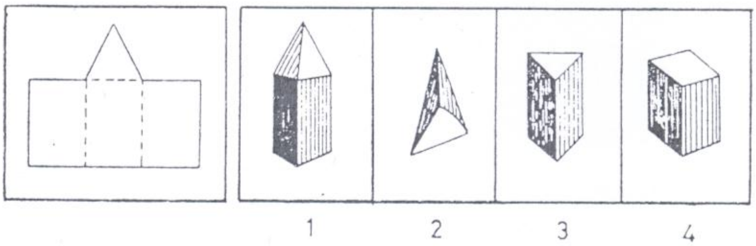
4. Погледај фигуру и заокружи њој одговарајуће тело од више понуђених.

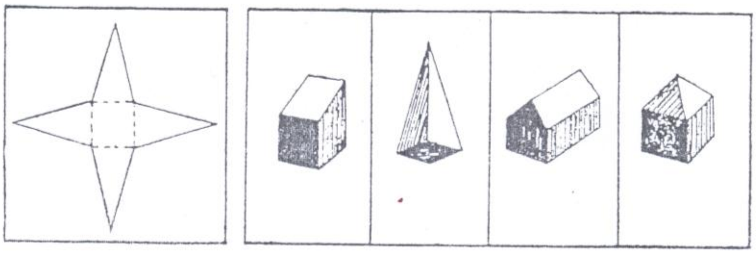
PRIMER

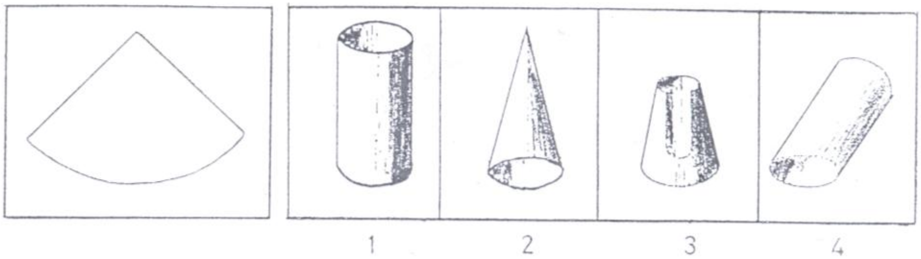


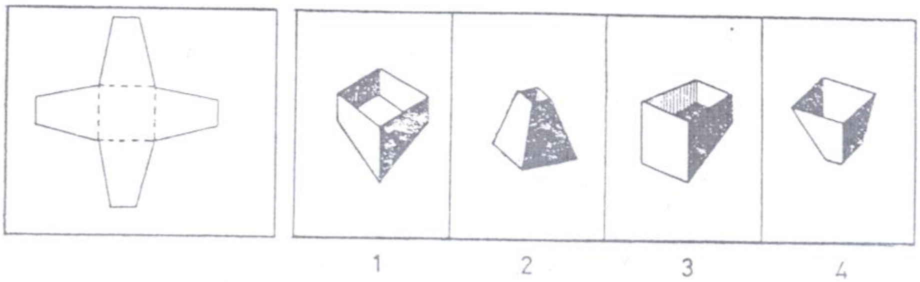
Vaš je zadatak da zamislite koje bi geometrijsko telo dobili ako bi nacrt sa leve strane isekli i presavili na mestima koja su označena isprekidanim crtama. Zatim u listu za odgovore upišite broj koji se nalazi ispod okvira onog tela koje predstavlja tačno rešenje.


1
2
3
4


1
2
3
4




1
2
3
4


1
2
3
4

ПРИЛОГ 4: ТЕСТОВИ ЗНАЊА

ПОЧЕТНИ ТЕСТ

Име и презиме *Одељење*

Правоугаоник и квадрат

Упутство за рад

На овом тесту знања одговараћеш на питања о правоугаонику и квадрату: њиховим особинама, упоређивању површи, мерењу и мерним јединицама за површину.

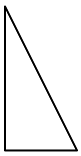
Пажљиво прочитај свако питање. У великом броју питања очекује се да заокружиш слово испред тачног одговора. Добро размисли пре него што одговориш – питање некад тражи један, а некад више тачних одговора. Остале одговоре пиши читко. Време за израду теста је 45 минута.

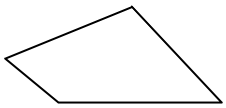
Желим ти успешан рад!

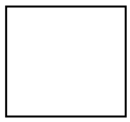
Питања:

1. Представљене су неке фигуре. Нацртај дуж на свакој од фигура тако да добијеш оно што запис испод ње тражи.

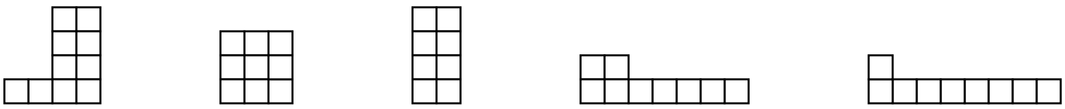
а) 
3 правоугаоника

б) 
3 троугла

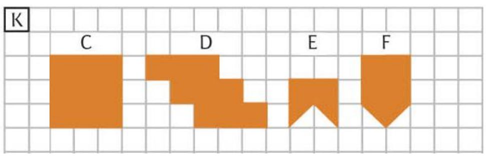
в) 
2 троугла и 1 четвороугао

г) 
3 правоугаоника

2. Фигуре које имају једнаке површи обоји једном бојом.

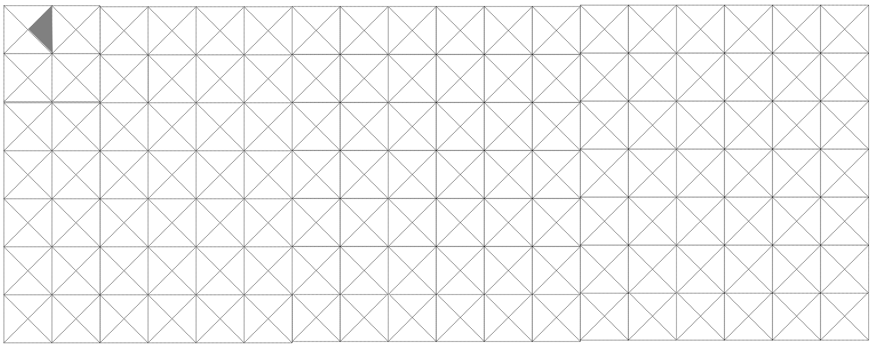


3. Ако је јединица мере квадратић К из мреже, колике су површине фигура на слици?



P_C= ______ P_D= ______ P_E= _______ P_F= ______

4. На мрежи је обојена фигура. Нека нам та фигура буде мерна јединица за мерење површи.



а) Обоји фигуру чија би се површ мерила том мерном јединицом.

б) На истој мрежи нацртај још једну фигуру која је подударна нацртаној фигури под а).

5. Од датих површина 365 cm^2, 432 m^2, 560 dm^2 и 370 mm^2 напиши:

најмању ___________
највећу ____________

6. Исписане су неке величине. Пронађи међу њима оне које су једнаке и повежи их стрелицом.

2 ha 200 a 2 000 m^2
2 a 200 m^2
20 000 m^2

7. Повежи стрелицама парове из леве и десне колоне тако да добијеш тачне реченице.

У 1 m^2 записане величине садрже се:

1 dm^2	0 пута
10 dm^2	100 пута
100 dm^2	10 пута
	1 пут

8. Исписане су две реченице. Заокружи реч тачно или реч нетачно према истинитости тих реченица. Тамо где је реченица нетачна, напиши је тако да постане тачна.

а) Погодна мерна јединица за мерење површи фотографије је cm^2.

Тачно

Нетачно
Погодна мерна јединица је ___ (допиши)

б) Погодна мерна јединица за мерење површи географске карте је km^2.

Тачно

Нетачно
Погодна мерна јединица је ___ (допиши)

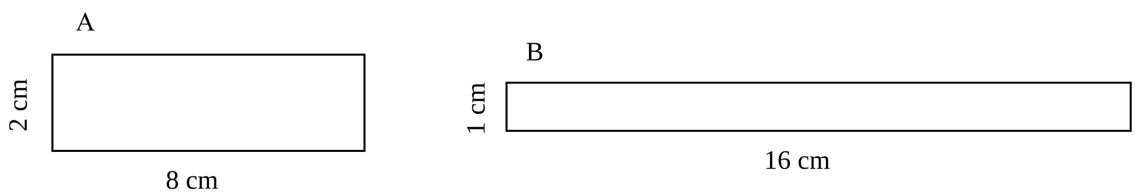
9. Заокружи слово испред реченица које могу да буду тачне:

а) Парче моје пице може да има површину 1 *ha*.
б) Воћњак мога деде може да захвата 2 *ha*.
в) Двориште школе и фудбалског терена поред школе
могу заједно да износе 1 *ha*.

10. Заокружи тачан одговор. Формула за израчунавање површине правоугаоника је:

а) $P = 2 \cdot (a \cdot b)$
б) $P = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot b)$
в) $P = a \cdot b$

11. Погледај фигуре.



Заокружи слово испред оних реченица које су тачне:

а) Фигуре A и B су истог облика.
б) Обими правоугаоника A и B су једнаки.
в) Правоугаоници A и B су подударни.
г) Површине правоугаоника A и B су једнаке.

Рачунања:

12. Погледај слику.

Паја Јовановић,
Мачевање

а) Колика је површина платна употребљена за слику?

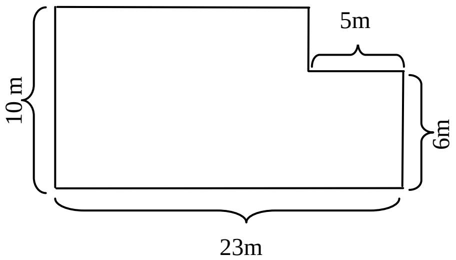
____

б) Да ли можеш ову слику да уоквириш рамом од украсне лајсне дужине 2 *m*?

____

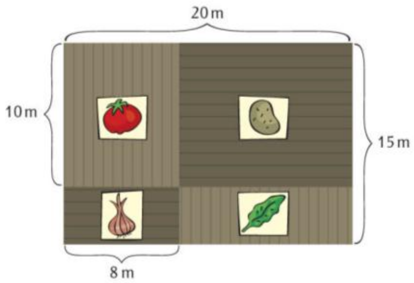
Одговор и објашњење: ______________________________

13. Израчунај површину приказане фигуре.



Рачунање:

14. У башти приказаној на слици посађене су сорте поврћа.



а) Колико је m^2 баште под сваким засадом?

 ______________________________

 ______________________________

 ______________________________

 ______________________________

б) Колико ари има башта?

____

в) Заокружи слово испред реченице која је <u>тачна</u>:

Површину ове баште могу да израчунам:
а) само на један начин,
б) на два начина,
в) на неколико начина.

ЗАВРШНИ ТЕСТ

Име и презиме *Одељење*

Квадар и коцка

Упутство за рад

На овом тесту знања одговараћеш на питања о квадру и коцки: њиховим особинама, мрежама њихових површи и израчунавању површина.

Пажљиво прочитај свако питање. У великом броју питања очекује се да заокружиш слово испред тачног одговора. Добро размисли пре него што одговориш – питање некад тражи један, а некад више тачних одговора. Остале одговоре пиши читко. Користи прибор за цртање. Време за израду теста је 45 минута.

Желим ти успешан рад!

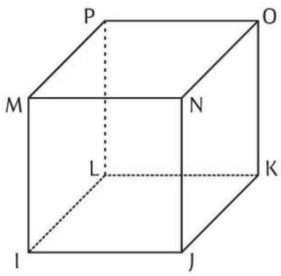
Питања:

1. Нацртај слике модела: а) коцке и б) квадра.

а) б)

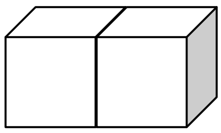
2. На слици је представљено тело облика коцке. Замисли да је оно направљено од дрвета и постављено у положај који слика показује.

   Допуни следеће реченице:
   а) Од укупно ___ страна коцке, видим ___________ и то су: ________________.
   б) Од укупно ___ темена коцке, не видим ________ и то: ____________________.
   в) Од укупно ___ ивица коцке, не видим _________ и то: ____________________.



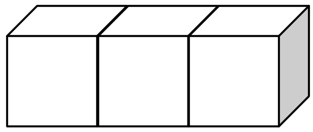
3. Допиши изостављено.

На слици је представљено тело чије су ивице: дужина 4 cm, ширина 2 cm и висина 2 cm. Ако то тело пресечеш на пола како је приказано, добићеш два тела облика ________ чије су ивице: дужина __________________________________.



4. На слици су приказане три коцке. Слепљене су по једној или две стране како слика приказује и тако је настало ново тело.

Одговори на следећа питања о новом телу.
а) Ког облика је ново тело? ___________
б) Колико оно има страна? ___________
в) А колико темена? _________________
г) Обележи му она темена која видиш.
д) Колико оно има ивица? ____________



5. Заокружи једно или више слова испред тачних одговора.

Ако је једна страна квадра квадрат, мрежа површи квадра <u>може да се састоји од</u>:

а) 6 квадрата,
б) 4 квадрата и 2 правоугаоника,
в) 2 квадрата и 4 правоугаоника.

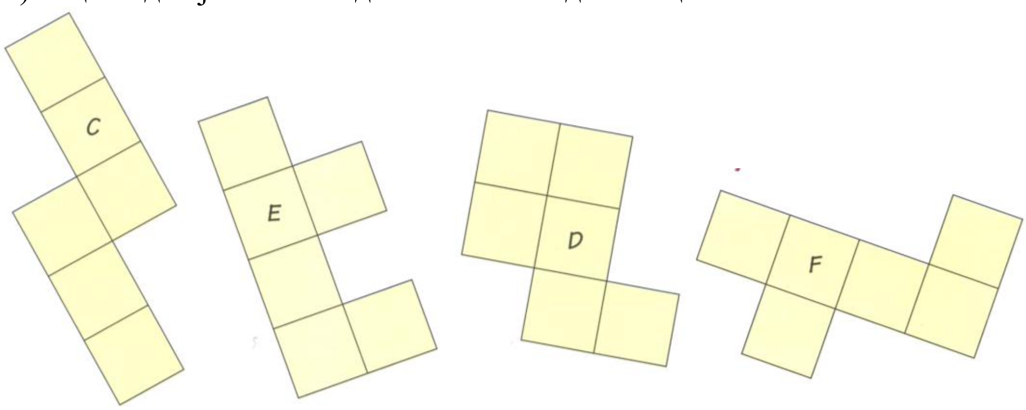
6. Допиши у реченицама оно што је изостављено.

Ако испред себе имаш два модела правоугаоника чије су странице дужина 6 cm и ширина 2 cm и два модела правоуганика чије су странице дужина 8 cm ширина 2 cm, да би од њих могао да саставиш модел квадра:

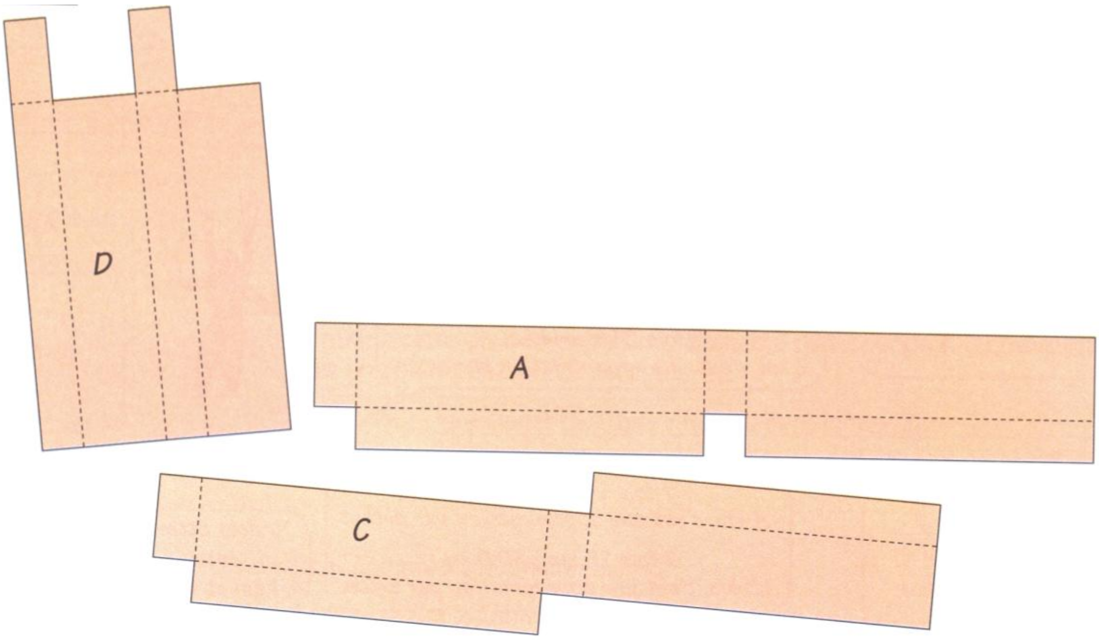
а) недостају ти још: ____,
б) чије су странице: дужина ____.
в) Тај квадар би имао ивице: дужина _____, ширина ______ и висина _____.

Слика:
(уколико је потребно за решавање)

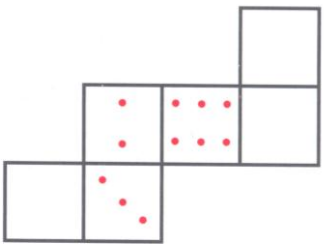
7. Заокружи једно или више слова на мрежама површи:
а) коцки од којих можеш да саставиш моделе коцки.



б) квадара од којих можеш да саставиш моделе квадара.



8. Замисли да од мреже површи коцке на слици саставиш модел коцке. Допуни доцртавање тачака на овој мрежи тако да важи правило: збир броја тачака на наспрамним странама коцке увек је једнак 7.



9. Нацртај мреже површи:

а) квадра чије су ивице $a=3$ cm, $b=2$ cm и $c=1$ cm

и

б) коцке чија је ивица $d=1$ cm 5 mm

10. Заокружи реч тачно или нетачно према истинитости реченице. Ако је реченица <u>нетачна</u>, напиши је тако да она буде <u>тачна</u>.

Површину коцке рачунаш према формули P = 4 · a · a.

Тачно Нетачно

Тачна форумула је ____________________, јер
____
____.

11. Заокружи једно или више слова испред тачних одговора.

Потребно је да укоричиш једну књигу. Књига је дужине 26 cm, ширине 18 cm и дебљине 2 cm. Она може да се укоричи картоном чије су дужина и ширина:

а) 20 cm и 30 cm, б) 30 cm и 40 cm, в) 40 cm и 50 cm.

1) Решавање:

2) Слика:
(уколико је потребно за решавање)

3) Објасни одговор. ____
____
____

ПРИЛОГ 5: АНКЕТНИ УПИТНИЦИ ЗА УЧИТЕЉЕ

Име и презиме учитеља

____

УПИТНИК БР. 1

Пре почетка истраживања, након упознавања са циљем и начином рада

Овај инструмент садржи питања којима ћете изнети Ваше мишљење о *измењеном наставном приступу* припремљеном и примењеном у теми „Квадар и коцка“.

Молимо Вас да дате свој коментар на свако од питања.

1. Изнесите Ваше опште утиске о предложеним идејама за рад.

2. Како бисте окарактерисали избор методе *учења путем вођеног открића* у овој теми:
   - према предзнању ученика?

   - према садржају који се обрађује?

3. Изнесите Ваша очекивања/мишљења о мотивацији ученика за рад предложеним начином рада – *одабир проблемских ситуација из реалног окружења*.

4. Какво је Ваше мишљење о *проблемским ситуацијама из реалног окружења* из којих се формирају геометријски појмови у овој теми?

5. Какво је Ваше мишљење о *проблемским ситуацијама из реалног окружења* које постају модел за учење путем <u>аналогија</u> и решавање нових проблемских ситуација?

6. Каква су Ваша очекивања у погледу постигнућа ученика након експерименталног дела програма:

- од познавања чињеница –

- до примене наученог

  а) у математичком –

  б) у реалном окружењу (контексту) -

7. Изнесите Ваш општи утисак о предложеном истраживању.

УПИТНИК БР. 2

<u>После реализације часова</u>

1. Да ли су и како активности у оквиру истраживања утицале на мотивацију ученика:
   - За рад на часу?

   - За израду домаћих задатака и постепено вођење ученика ка самосталности ?

2. Заокружите који од мотива, подржан оваквим начином рада, можете да издвојите као веома битан:
   - постизање постављеног циља,
   - доживљај нечег личног (што је значајно за индивидуу; нпр. да сазна, научи и сл.),
   - вербализовани аргументи ученика за чињење одређене активности,
   - усмереност активности на предмет.

   Зашто?

3. *Сазнајни интерес* је од посебног значаја као мотив за учење.
   а) Изнесите Ваше мишљење о томе како је одабрани наставни приступ по коме смо радили прошао кроз следеће фазе:

   Развој
   - Знатижеље -
   - духовне радозналости – тежње ка новим сазнањима -
   - сазнајног интереса –
   - креативног (стваралачког) интереса –

б) Да ли су ученици овим начином рада препознали циљ (задатке) учења новог градива?

в) А циљ (задатке) самопровере (самоконтроле) кроз домаћи и контролни задатак?

4. Да ли је ученикова комуникација на часу била израженије подстицана вођеним разговором кроз учење путем открића?

5. Како је обрађен садржај у овом истраживању?

6. Какав је избор наставних средстава?

7. Како је овај начин рада утицао на:

- препонавање практичног значаја градива за ученике
- ученикова нова сазнања
- доступност градива ученику
- садржај градива који одговара постојећим или новонасталим потребама ученика за учење
- очигледности
- занимљивости за ученика?

8. а) Како би окарактерисали овакав наставни приступ када би он садржавао пратећу методичку разраду - материјале у виду припрема и задатака?

б) Овај наставни приступ је имао и подржан одговарајући уџбеник математике (у сврху овог истраживања то је била уџбеничка тема). Како би га окарактерисали?

9. Изнесите Ваше утиске са часова који су одржани.

10. Изнесите Ваш општи утисак о истраживању.

Хвала Вам на стручној сарадњи и уложеном труду да се ово истраживање спроведе!

ПРИЛОГ 6: АНКЕТНИ УПИТНИК ЗА УЧЕНИКЕ

Име и презиме ученика Школа Одељење

Упитник

Одговараћеш на нека питања о часовима на којима си учио из геометрије о КВАДРУ И КОЦКИ. Одговори на свако питање онако како разумеш и мислиш.

Уколико немаш довољно простора за писање одговора, пређи на другу страну папира.

1. Како си учио на овим часовима? Опиши.

2. а) Како си радио домаћи задатак?

   б) А занимљиве теже задатке?

3. Како си разговарао о задацима на часу?

4. Да ли су ти модели, слике и остало помагали у учењу или су ти отежавали учење?

5. Како си решавао задатке који су практични за живот?

6. Опиши какав је уџбеник који си користио на овим часовима.

ПРИЛОГ 7: ДЕСКРИПТИВНА СТАТИСТИКА

Descriptive Statistics

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
PRETEST_1A	,00	1,00	,5448	,21573
PRETEST _1B	,00	,89	,3826	,22491
PRETEST _2A	,00	1,00	,2957	,27572
PRETEST _2B1	,00	,88	,4935	,20697
PRETEST _2B2	,00	1,00	,1393	,23587
RETEST_1A	,00	1,00	,3451	,39383
RETEST _1B	,10	,90	,6074	,18003
RETEST _2A	,00	1,00	,4134	,20498
RETEST _2B1	,00	1,00	,3709	,44403
RETEST _2B2	,00	1,00	,0229	,12599
PRETEST_SUMA ZA CEO TEST	,09	,82	,3721	,14066
RETEST_SUMA ZA CEO TEST	,02	,88	,3519	,18831
Valid N (listwise)				

Е-група

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
1а	0	1	,27	,449
1б	0	1	,23	,422
1в	0	1	,18	,389
1г	0	1	,18	,389
2	,00	2,00	1,6212	,73934
3	,00	4,00	1,2424	1,31337
4а	,00	1,00	,4545	,50175
4б	,00	1,00	,1818	,38865
5	,00	2,00	1,5909	,70115
6	,00	3,00	1,5758	1,08217
7	,00	3,00	1,0303	1,26454
8а	,00	1,00	,6667	,47502
8б	,00	2,00	,7727	,69715
9а	,00	1,00	,9242	,26664
9б	,00	1,00	,8939	,31027
9в	,00	1,00	,5758	,49801
10	,00	3,00	2,2273	1,32195
11а	,00	1,00	,3333	,47502
11б	,00	1,00	,0606	,24043
11в	,00	1,00	,7121	,45624

11г	,00	1,00	,1364	,34580
12а	,00	1,00	,2727	,44877
12б	,00	1,00	,0606	,24043
13	,00	2,00	,1212	,41194
14а	,00	1,00	,1212	,32887
14б	,00	1,00	,0758	,26664
14в	,00	1,00	,1970	,40076
suma	5,00	31,00	16,7121	5,27918
1а	,00	2,00	1,3824	,59924
1б	,00	2,00	1,2647	,63757
2а	,00	1,00	,5294	,50285
2б	,00	1,00	,4118	,49581
2в	,00	1,00	,4412	,50022
3	,00	2,00	1,1471	,65254
4а	,00	1,00	,9265	,26294
4б	,00	1,00	,7353	,44446
4в	,00	1,00	,6176	,48958
4г	,00	1,00	,2647	,44446
4д	,00	1,00	,5882	,49581
5а	,00	1,00	,2794	,45205
5б	,00	1,00	,8382	,37097
5в	,00	1,00	,7353	,44446
6а	,00	1,00	,1618	,37097
6б	,00	1,00	,0588	,23704
6в	,00	1,00	,1471	,35680
7а	2,00	4,00	3,5294	,55907
7б	,00	3,00	2,7941	,61228
8	,00	3,00	1,5147	1,37670
9а	,00	2,00	,9853	,85506
9б	,00	2,00	1,1618	,98663
10	,00	2,00	1,0294	,51747
11а	,00	1,00	,0294	,17021
11б	,00	1,00	,0294	,17021
11в	,00	1,00	,0147	,12127
11г	,00	1,00	,0588	,23704

suma	9,00	34,00	22,7794	6,26015

К-група

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
1а	0	1	,66	,477
1б	0	1	,50	,504
1в	0	1	,47	,503
1г	0	1	,49	,503
2	,00	2,00	1,1912	,95037
3	,00	4,00	1,1471	1,28440
4а	,00	1,00	,5588	,50022
4б	,00	1,00	,2500	,43623
5	,00	2,00	1,2206	,87836
6	,00	3,00	1,5588	1,11144
7	,00	3,00	,8529	1,17517
8а	,00	1,00	,6471	,48144
8б	,00	2,00	,7647	,69363
9а	,00	1,00	,8088	,39615
9б	,00	1,00	,7500	,43623
9в	,00	1,00	,5000	,50372
10	,00	3,00	2,5147	1,11292
11а	,00	1,00	,2794	,45205
11б	,00	1,00	,0299	,17146
11в	,00	1,00	,5441	,50175
11г	,00	1,00	,0882	,28575
12а	,00	1,00	,2647	,44446
12б	,00	,00	,0000	,00000
13	,00	2,00	,1618	,50698
14а	,00	1,00	,0882	,28575
14б	,00	1,00	,0735	,26294
14в	,00	1,00	,2794	,45205
suma	4,00	32,00	16,6912	6,27779
1а	,00	2,00	,9730	,73973
1б	,00	2,00	,9324	,74633
2а	,00	1,00	,2703	,44713
2б	,00	1,00	,2162	,41447
2в	,00	1,00	,2297	,42353
3	,00	2,00	,9595	,62896
4а	,00	1,00	,6757	,47132
4б	,00	1,00	,6081	,49151
4в	,00	1,00	,5541	,50046
4г	,00	1,00	,1622	,37112
4д	,00	1,00	,4730	,50268
5а	,00	1,00	,3108	,46598
5б	,00	1,00	,6486	,48065
5в	,00	1,00	,6081	,49151
6а	,00	1,00	,0946	,29465
6б	,00	1,00	,0676	,25272
6в	,00	1,00	,0676	,25272
7а	,00	4,00	2,7568	1,20286
7б	,00	3,00	2,2027	1,05959
8	,00	3,00	,7432	1,18276
9а	,00	2,00	,4054	,75705

9б	,00	2,00	,6757	,95240
10	,00	2,00	,9324	,41648
11а	,00	,00	,0000	,00000
11б	,00	,00	,0000	,00000
11в	,00	,00	,0000	,00000
11г	,00	1,00	,0270	,16327
suma	2,00	32,00	16,6216	5,76647

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
IQ_TOTAL	Equal variances assumed	,016	,900	,557	146	,578	,1564	,28059	-,39815	,71093
	Equal variances not assumed			,557	145,752	,578	,1564	,28064	-,39826	,71105

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
IQ_TOTAL	Equal variances assumed	1,175	,280	1,494	146	,137	,4219	,28248	-,13639	,98016
	Equal variances not assumed			1,520	139,172	,131	,4219	,27750	-,12677	,97054

Frequencies
eksperimentalna grupa
Frequency Table

A1.1_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	57	78,1	78,1	78,1
	1,00	16	21,9	21,9	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.1_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	73	100,0	100,0	100,0

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.2_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	22	30,1	30,1	30,1
	1,00	51	69,9	69,9	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.2_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	59	80,8	80,8	80,8
	1,00	14	19,2	19,2	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.3_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	61	83,6	83,6	83,6
	1,00	12	16,4	16,4	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.3_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	73	100,0	100,0	100,0

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.4_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	69	94,5	94,5	94,5
	1,00	4	5,5	5,5	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.4_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	73	100,0	100,0	100,0

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.5_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	69	94,5	94,5	94,5
	1,00	4	5,5	5,5	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A1.5_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	71	97,3	97,3	97,3
	1,00	2	2,7	2,7	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A2.1_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	11	15,1	15,1	15,1
	1,00	62	84,9	84,9	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A2.1_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	66	90,4	90,4	90,4
	1,00	7	9,6	9,6	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A2.2_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	21	28,8	29,2	29,2
	1,00	51	69,9	70,8	100,0
	Total	72	98,6	100,0	
Missing	System	1	1,4		
Total		73	100,0		

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A2.2_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	61	83,6	83,6	83,6
	1,00	12	16,4	16,4	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A3_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	18	24,7	24,7	24,7
	1,00	55	75,3	75,3	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A3_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	63	86,3	86,3	86,3
	1,00	10	13,7	13,7	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A4_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	13	17,8	17,8	17,8
	1,00	60	82,2	82,2	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A4_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	72	98,6	98,6	98,6
	1,00	1	1,4	1,4	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A5_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	24	32,9	32,9	32,9
	1,00	49	67,1	67,1	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A5_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	59	80,8	80,8	80,8
	1,00	14	19,2	19,2	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A6_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	10	13,7	13,7	13,7
	1,00	63	86,3	86,3	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

A6_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	69	94,5	94,5	94,5
	1,00	4	5,5	5,5	100,0
	Total	73	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = eksperimentalna grupa

kontrolna grupa
Frequency Table

A1.1_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	73	96,1	96,1	96,1
	1,00	3	3,9	3,9	100,0

	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.1_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	74	97,4	97,4	97,4
	1,00	2	2,6	2,6	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.2_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	37	48,7	48,7	48,7
	1,00	39	51,3	51,3	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.2_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	45	59,2	59,2	59,2
	1,00	31	40,8	40,8	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.3_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	74	97,4	97,4	97,4
	1,00	2	2,6	2,6	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.3_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	76	100,0	100,0	100,0

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.4_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	54	71,1	71,1	71,1

	1,00	22	28,9	28,9	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.4_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	71	93,4	93,4	93,4
	1,00	5	6,6	6,6	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.5_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	70	92,1	92,1	92,1
	1,00	6	7,9	7,9	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A1.5_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	75	98,7	98,7	98,7
	1,00	1	1,3	1,3	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A2.1_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	9	11,8	11,8	11,8
	1,00	67	88,2	88,2	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A2.1_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	65	85,5	85,5	85,5
	1,00	11	14,5	14,5	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A2.2_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	33	43,4	43,4	43,4
	1,00	43	56,6	56,6	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A2.2_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	45	59,2	59,2	59,2
	1,00	31	40,8	40,8	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A3_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	17	22,4	22,4	22,4
	1,00	59	77,6	77,6	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A3_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	63	82,9	82,9	82,9
	1,00	13	17,1	17,1	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A4_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	16	21,1	21,1	21,1
	1,00	60	78,9	78,9	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A4_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	72	94,7	94,7	94,7
	1,00	4	5,3	5,3	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A5_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	27	35,5	35,5	35,5
	1,00	49	64,5	64,5	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A5_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	55	72,4	72,4	72,4
	1,00	21	27,6	27,6	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A6_Z(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	23	30,3	30,3	30,3
	1,00	53	69,7	69,7	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

A6_C(a)

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	,00	36	47,4	47,4	47,4
	1,00	40	52,6	52,6	100,0
	Total	76	100,0	100,0	

a E=1; K=2 = kontrolna grupa

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
A1.1_Z	Equal variances assumed	60,855	,000	3,391	147	,001	,1797	,05300	,07497	,28444
	Equal variances not assumed			3,347	101,477	,001	,1797	,05369	,07321	,28620
A1.1_C	Equal variances assumed	8,225	,005	-1,395	147	,165	-,0263	,01886	-,06359	,01096
	Equal variances not assumed			-1,424	75,000	,159	-,0263	,01848	-,06314	,01051
A1.2_Z	Equal variances assumed	13,852	,000	2,341	147	,021	,1855	,07923	,02890	,34204
	Equal variances not assumed			2,345	146,708	,020	,1855	,07909	,02917	,34178
A1.2_C	Equal variances assumed	33,291	,000	-2,935	147	,004	-,2161	,07363	-,36161	-,07061
	Equal variances not assumed			-2,948	142,471	,004	-,2161	,07330	-,36101	-,07122
A1.3_Z	Equal variances assumed	43,628	,000	2,952	147	,004	,1381	,04677	,04563	,23050
	Equal variances not assumed			2,911	97,107	,004	,1381	,04743	,04394	,23220

A1.4_Z	Equal variances assumed	89,876	,000	-3,941	147	,000	-,2347	,05955	-,35237	-,11699
	Equal variances not assumed			-3,989	111,514	,000	-,2347	,05884	-,35126	-,11810
A1.4_C	Equal variances assumed	23,478	,000	-2,252	147	,026	-,0658	,02921	-,12352	-,00806
	Equal variances not assumed			-2,298	75,000	,024	-,0658	,02863	-,12282	-,00876
A1.5_Z	Equal variances assumed	1,386	,241	-,586	147	,559	-,0242	,04124	-,10564	,05734
	Equal variances not assumed			-,588	144,639	,558	-,0242	,04110	-,10538	,05707
A1.5_C	Equal variances assumed	1,529	,218	,615	147	,539	,0142	,02314	-,03150	,05998
	Equal variances not assumed			,611	128,189	,542	,0142	,02331	-,03188	,06036
A2.1_Z	Equal variances assumed	1,326	,251	-,574	147	,567	-,0323	,05618	-,14329	,07876
	Equal variances not assumed			-,573	144,092	,567	-,0323	,05630	-,14354	,07901
A2.1_C	Equal variances assumed	3,391	,068	-,911	147	,364	-,0488	,05362	-,15481	,05712
	Equal variances not assumed			-,914	144,330	,362	-,0488	,05343	-,15445	,05676
A2.2_Z	Equal variances assumed	11,346	,001	1,808	146	,073	,1425	,07883	-,01326	,29834

	Equal variances not assumed			1,812	145,853	,072	,1425	,07865	-,01289	,29798
A2.2_C	Equal variances assumed	46,202	,000	-3,382	147	,001	-,2435	,07201	-,38582	-,10120
	Equal variances not assumed			-3,401	139,271	,001	-,2435	,07161	-,38509	-,10193
A3_Z	Equal variances assumed	,428	,514	-,327	147	,744	-,0229	,06992	-,16107	,11529
	Equal variances not assumed			-,327	146,188	,744	-,0229	,06997	-,16117	,11539
A3_C	Equal variances assumed	1,320	,252	-,572	147	,568	-,0341	,05954	-,15174	,08361
	Equal variances not assumed			-,573	146,634	,567	-,0341	,05944	-,15153	,08339
A4_Z	Equal variances assumed	,994	,320	,497	147	,620	,0324	,06527	-,09654	,16143
	Equal variances not assumed			,498	146,924	,619	,0324	,06518	-,09638	,16126
A4_C	Equal variances assumed	7,293	,008	-1,318	147	,190	-,0389	,02954	-,09731	,01944
	Equal variances not assumed			-1,333	113,865	,185	-,0389	,02920	-,09677	,01891
A5_Z	Equal variances assumed	,458	,499	,339	147	,735	,0265	,07825	-,12815	,18114
	Equal variances not assumed			,339	146,928	,735	,0265	,07822	-,12809	,18109

A5_C	Equal variances assumed	6,030	,015	-1,215	147	,226	-,0845	,06960	-,22208	,05301
	Equal variances not assumed			-1,218	145,917	,225	-,0845	,06942	-,22173	,05266
A6_Z	Equal variances assumed	26,765	,000	2,467	147	,015	,1656	,06713	,03297	,29832
	Equal variances not assumed			2,481	138,825	,014	,1656	,06675	,03366	,29763
A6_C	Equal variances assumed	280,042	,000	-7,317	147	,000	-,4715	,06444	-,59887	-,34417
	Equal variances not assumed			-7,415	105,811	,000	-,4715	,06359	-,59759	-,34545

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Оливера Ђокић

број уписа

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Реално окружење у почетној настави геометрије

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 19.08.2013.

Оливера Ђокић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Оливера Ђокић

Број уписа

Студијски програм

Наслов рада Реално окружење у тоталној настави географије

Ментор проф. др Мирко Гршић

Потписани Оливера Ђокић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 19.08.2013.

Оливера Ђокић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Реално окружење у почетној настави геометрије

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 19.08.2013.

Оливера Ђокић

Биографија аутора

Мр Оливера (Јован) Ђокић рођена је 1972. у Сарајеву где је завршила основну школу и Математичку гимназију. Дипломирала је на Учитељском факултету у Београду 1999. и магистрирала на истом 2005. на тему *Појам линије у почетној настави геометрије и његово изграђивање*.

Објављени радови који су од значаја:

- *Појам линије у почетној настави геометрије*, Учитељски факултет, Београд, 2007. (монографија)
- „Модел уџбеника као основе активног учења у настави математике“, *Иновације у настави*, 1, Учитељски факултет, Београд, 2008, 70-79. (коаутор)
- „Udžbenik matematike za aktivnog učenika“. U: *Dani „Mate Demarina“ Pula-Medulin*, 10. međunarodni znanstveni skup, Hrvatska, Pula: Sveučilište „Jurja Dobrila“, 2009, 483-498. (koautor)
- „Didactics of Mathematics Course in Teachers Education“, Пятая международная научно-теоретическая конференция *Образование и наука в третьем тысячелетии*, Барнаул, Издатеьство Алтайскога Университета, 27-31. марта 2009, 13-21. (коаутор)
- „Kriterujumi evaluacije praktične nastave studenata“, International Conference *Promoting teacher education – From intake system to teaching practice,* Curriculum Reform in Teacher Education, Jagodina, 19-20 May 2009. (koautor).
- „Задаци оријентисани на примену знања – од (новог) наставног програма до (нових) уџбеника почетне наставе математике“. У: *Иновације у основношколском образовању – од постојећег ка могућем*, Учитељски факултет, Београд, 2008, 192-207.
- „Експеримент као значајна подршка интуитивног пута изграђивања појма линије у почетној настави геометрије“. У: *Дидактичко-методички аспекти промена у основношколском образовању*, Учитељски факултет, Београд, 2007, 118-129.
- “Asking Questions in Assessment of Students in Elementary Teaching of Mathematics”, *14th International Conference „Evaluation in education in the balkan countries“*, Belgrade, 16 – 18th June 2011, Serbia. (coauthor)
- „О мотивацији и учењу геометрије на предшколском узрасту“. У: *Методички аспекти наставе математике II,* Јагодина, 2012, 183-198. (коаутор)

Добитник је награде „Златна табла“ 2006. године на 37. међународном сајму опреме и средстава за савремену наставу додељену групи аутора *Завода за уџбенике*. 2003. године боравила је, у оквиру студијског путовања, на *Teacher Training School, Helsingin II normaalikoulu*. Била је стипендиста више фондација: *WUS Austria Belgrade Office, Задужбине „Студеница“ Конгреса Српског Уједињења*, *Центра за српске студије у Београду* и *Фонда за отворено друштво*.

Ради на Учитељском факултету у Београду као асистент на *Катедри за методику математике*.