UNIVERZITET U BEOGRADU

Saobraćajni fakultet

Miloš S. Milenković

Fuzzy stohastički model za dimenzionisanje železničkog teretnog kolskog parka

doktorska disertacija

Beograd, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE

The Faculty of Transport and Traffic Engineering

Milos S. Milenkovic

A fuzzy stochastic model for rail freight car fleet sizing

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013

Mentor:	Prof. dr Nebojša Bojović, Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet
Članovi komisije:	Prof. dr Nebojša Bojović, Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet
	Prof. dr Dragutin Kostić, Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet
	Dr Jozef Kratica, naučni savetnik, Matematički Institut, Srpska akademija nauka i umetnosti

Datum odbrane:

FUZZY STOHASTIČKI MODEL ZA DIMENZIONISANJE ŽELEZNIČKOG TERETNOG KOLSKOG PARKA

Rezime

U oblasti teretnog transporta, savremene železničke kompanije suočavaju se sa jakom konkurencijom i značajnim smanjenjem učešća na tržištu. Razvoj alata za racionalnije i efikasnije iskorišćenje raspoloživih kapaciteta postaje imperativ za sve železnice. Postoje važne interakcije između odluka o dimenzionisanju i odluka o korišćenju teretnog kolskog parka. U ovom radu predložena je nova formulacija i postupak za rešavanje problema optimizacije veličine teretnog kolskog parka i alokacije teretnih kola u prisustvu neizvesnosti. Problem je zasnovan na teoriji optimalnog upravljanja pri čemu je tražnja za teretnim kolima modelovana kao fuzzy stohastička promenljiva dok je vreme putovanja teretnih kola između svakog para izvorišno-odredišnih stanica predstavljeno kao fuzzy promenljiva. Problem je formulisan kao problem određivanja optimalnog regulatora za fuzzy linearni system sa fuzzy kvadratnim indeksom performansi i fuzzy stohastičkim početnim uslovima. Predloženi model i postupak rešavanja problema kao i efikasnost pristupa, verifikovani su numeričkim eksperimentima.

Ključne reči:	železnička teretna kola, alokacija praznih kola, veličina teretnog kolskog parka, optimalno upravljanje, fuzzy stohastika
Naučna oblast:	Železnički saobraćaj i transport
Uža naučna oblast:	Upravljanje, menadžment, ekonomika i marketing u železničkom saobraćaju
UDK broj:	656.2(043.3)

A FUZZY RANDOM MODEL FOR RAIL FREIGHT CAR FLEET SIZING PROBLEM

Summary

In the area of freight transport, the railroads of almost all countries face with strong competition and a prominent trend of market reduction. It has become imperative for rail systems to develop better planned instruments for more rational and efficient utilization of freight cars that represent a great amount of total investments. There are important interactions between decisions on sizing a rail freight car fleet and decisions on utilizing that fleet. In this paper we proposed a new formulation and a solution procedure for optimizing the fleet size and freight car allocation in the presence of uncertainty. The problem is based on optimal control theory where the demand and travelling time, are modeled as a fuzzy random variable and fuzzy variable, respectively. The problem is formulated as the problem of finding an optimal regulator for a fuzzy linear system with fuzzy quadratic performance index and fuzzy random initial conditions. Computational results made for a numerical example verify the proposed model as well as the efficiency of the approach.

Keywords:	rail freight car, empty freight car allocation, rail freight car fleet size, optimal control, fuzzy randomness
Science area:	Railway traffic and transport
Tighter science area:	Control, management, economics and marketing in railway traffic
UDK number:	656.2(043.3)

Sadržaj

Sadržaj I

Spisak slika III

Spisak tabela IV

1. UVOD 1

1.1 Istorijska perspektiva 1

1.2 Praktična razmatranja 2

1.3 Svrha, ciljevi i doprinos istraživanja 4

1.4 Organizacija disertacije 5

2. PREGLED MODELA ZA UPRAVLJANJE TERETNIM KOLIMA 6

2.1 Operativni modeli za upravljanje teretnim kolima 7
2.1.1 Upravljanje zalihama praznih teretnih kola na železnici 7
2.1.2 Raspoređivanje praznih teretnih kola 10
2.1.2.1 Deterministički pristupi 13
2.1.2.2 Stohastički pristupi 20
2.1.2.3 Hibridni pristupi 24
2.1.3 Koncept zajedničkih teretnih kola 25
2.1.4 Kombinovana alokacija praznih i tovarenih kola 29

2.2 Taktički i strateški modeli za upravljanje teretnim kolima 30
2.2.1 Problemi dizajna mreže usluga 31
2.2.2 Procena tražnje 35
2.2.2.1 Modeli za proizvodnju i privlačenje 38
2.2.2.2 Modeli distribucije 41
2.2.2.3 Modeli za modalni split 43
2.2.2.4 Modeli raspoređivanja 45
2.2.3 Modeli za dimenzionisanje teretnog kolskog parka 46

3. OSNOVNE PRETPOSTAVKE FUZZY SKUPOVA I FUZZY STOHASTIKE 64

3.1 Fuzzy skupovi 64

3.2 Fuzzy brojevi 65

3.3 Trougaone fuzzy matrice 68
3.3.1 Osnovne osobine trougaonih fuzzy matrica 69
3.3.2 Inverzne trougaone fuzzy matrice 70
3.3.2.1 Metod zasnovan na scenariju 70

3.4 Defazifikacija trougaonih fuzzy brojeva 74

3.5 Fuzzy slučajne promenljive 77

4. FUZZY STOHASTIČKI MODEL ZA DIMENZIONISANJE ŽELEZNIČKOG TERETNOG KOLSKOG PARKA 80

4.1 Parametri modela 81

4.2 Funkcional cilja 86

4.3 Ograničenja problema 88

4.4 Procena fuzzy vektora stanja 94

4.5 Predloženi pristup rešavanju problema zasnovan na fuzzy linearnom kvadratnom Gausovom regulatoru 96

4.6 Izbor komponenata težinskih matrica A, B i L 99

4.7 Izbor komponenata fuzzy matrice terminalnog člana 110

5. NUMERIČKI EKSPERIMENTI 114

5.1 Eksperimenti na mreži od dve stanice 114

5.2 Eksperimenti na mreži od četiri stanice 123

5.3 Komparativna analiza rezultata fuzzy stohastičkog i stohastičkog modela 131

6. ZAKLJUČAK I PRAVCI DALJEG ISTRAŽIVANJA 133

Literatura 136

PRILOZI 151

Prilog 1: Računarski program fuzzyLQG.m 152

Prilog 2: Izlazni rezultati za primer od dve stanice 162

Prilog 3: Izlazni rezultati za primer od 4 stanice 166

Biografija autora 179

Spisak slika

Slika 2.1 Klasifikacija modela za rešavanje problema upravljanja teretnim kolima 7

Slika 3.1 Fuzzy tačka....66

Slika 3.2 Trougaoni fuzzy broj $\mathrm{A} = (a, b, c)$ 66

Slika 3.3 Slučaj $M > b$ 76

Slika 3.4 Slučaj $M < b$ 76

Slika 3.5 Model fuzzy slučajne promenljive (Moller i Beer, 2004)....79

Slika 5.1 Rešenje problema sa dve stanice....121

Slika 5.2 Rešenje problema sa četiri stanice (fuzzy upravljačke akcije) 129

Slika 5.3 Rešenje problema sa četiri stanice (fuzzy neispunjene porudžbine i fuzzy broj kola)....130

Spisak tabela

Tabela 2.1 Karakteristike modela za upravljanje zalihama teretnih kola 8

Tabela 2.2 Karakteristike determinističkih modela za raspoređivanje praznih teretnih kola 13

Tabela 2.3 Karakteristike stohastičkih modela za raspoređivanje praznih teretnih kola 21

Tabela 2.4 Osobine modela za upravljanje parkom zajedničkih teretnih kola 25

Tabela 2.5 Osobine modela za kombinovanu alokaciju praznih i tovarenih teretnih kola 29

Tabela 2.6 Osobine modela za rešavanje problema dizajna mreže usluga 31

Tabela 2.7 Osnovne osobine modela za modelovanje tražnje za uslugama u robnom saobraćaju 37

Tabela 2.8 Osnovne osobine modela za dimenzionisanje voznog parka 47

Tabela 2.9 Osnovne osobine modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila 50

Tabela 2.10 Osnovne osobine modela za heterogeno rutiranje voznog parka fiksne veličine 56

Tabela 2.11 Osnovne osobine modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila sa vremenskim prozorima 58

Tabela 2.12 Osnovne osobine modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila sa više depoa 60

Tabela 2.13 Osnovne osobine mrežnih modela za dimenzionisanje voznog parka 61

Tabela 5.1 Troškovni parametri problema dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka 115

Tabela 5.2 Fuzzy proporcije prispeća tovarenih i praznih kola tokom perioda n 115

Tabela 5.3 Dnevna tražnja između stanica na posmatranom delu železničke mreže 115

Tabela 5.4 Jedinični trošak čuvanja i početni broj kola u stanicama 116

Tabela 5.5 Fuzzy neispunjena tražnja iz prethodnog perioda 116

Tabela 5.6 Broj tovarenih kola otpremljenih pre početka ciklusa 116

Tabela 5.8 Fuzzy prognozirani broj kola u stanicama (S.D.) po danu 117

Tabela 5.9 Troškovni parametri problema dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka 124

Tabela 5.10 Fuzzy proporcije prispeća tovarenih i praznih kola tokom perioda n ... 124

Tabela 5.11 Dnevna tražnja između stanica na posmatranom delu železničke mreže 125

Tabela 5.12 Jedinični trošak čuvanja i početni broj kola u stanicama 125

Tabela 5.13 Fuzzy neispunjena tražnja iz prethodnog perioda 125

Tabela 5.14 Broj tovarenih kola otpremljenih pre početka ciklusa 126

Tabela 5.16 Fuzzy prognozirani broj kola u stanicama (S.D.) po danu 127

Tabela 5.17 Alternativni problemi i poređenje sa stohastičkim pristupom 131

1. Uvod

Još od svog utemeljenja operaciona istraživanja se koriste za rešavanje problema u saobraćaju. Pod uticajem izražene konkurencije između različitih vidova saobraćaja i kontinualno rastućeg pritiska korisnika usluga, prepoznata je potreba za razvojem sofisticiranih modela za upravljanje kompleksnim poslovnim procesima u saobraćaju.

Deregulacija je dovela do samo-transformisanja železničkih kompanija od koncepta pružanja jeftinih usluga lošeg kvaliteta, ka visoko pouzdanom i fleksibilnom učesniku na tržištu transportnih usluga. U železničkim kompanijama teretna kola imaju značajno učešće u ukupnim investicijama i efikasnije iskorišćenje ovog osnovnog kapitalnog resursa je od suštinske važnosti za opstanak i poboljšanje konkurentske pozicije železnice na tržištu.

1.1 Istorijska perspektiva

U prošlosti, kada je svetskim ekonomijama dominirala proizvodnja rasutih roba, koncept pružanja jeftinih usluga lošeg kvaliteta je mogao da održi visoku profitabilnost železničkih kompanija. Međutim, sa promenama u ekonomiji koje su bile usmerene ka uvođenju efikasnijih politika zaliha (kao što je just-in-time), železničke kompanije nisu mogle više da sprovode staru praksu zasnovanu isključivo na usklađivanju poslovnih procesa sa rastom tražnje korisnika usluga. Kao posledica prethodno izrečenog, a u cilju očuvanja konkurentnosti i profitabilnosti, železničke kompanije reinvestiraju u poboljšanu tehnologiju zajedno sa unapređenjem sopstvenih menadžerskih praksi (Suharko, 1997).

Teretna kola predstavljaju jednu od najvećih kapitalnih investicija za većinu železnica. Međutim, ovim resursom se u prošlosti vrlo loše upravljalo. Trenutno na svim savremenim železnicama, postoji vrlo izražena inicijativa da se ovaj trend promeni. Suštinski faktor koji će doprineti ostvarenju ovog cilja je poboljšanje procesa upravljanja teretnim kolskim parkom (Suharko, 1997).

1.2 Praktična razmatranja

Železnički transportni sistem kao i mnoge druge transportne sisteme karakteriše neravnoteža robnih tokova. To zapravo znači da neki regioni odnosno stanice otpreme više robe nego što je prime, dok neki drugi prihvate više robe nego što otpreme. Ovo za posledicu ima prostornu i vremensku neravnotežu ponude i tražnje praznih teretnih kola. Složenost problema dodatno je opterećena i postojanjem velikog broja tipova kola, pri čemu se može govoriti samo o delimičnoj zamenjivosti jednog tipa kola drugim, već prema njihovoj relativnoj lokaciji i ukupnom nivou zahteva. Stoga je za ispunjenje transportne tražnje neophodno uspostaviti ravnotežu i samim tim, izmestiti prazna kola uz što niže troškove prevoženja. Sasvim je izvesno, na osnovu svega izloženog da je efikasan sistem upravljanja teretnim kolima imperativ za sve železničke kompanije. Ovakav sistem pored potrebe da ispuni što veći broj zahteva korisnika prevoza, u značajnoj meri utiče na ukupan broj potrebnih kola u sistemu, kao i na to kako se kola koriste za zadovoljenje ovih zahteva. Stoga je preveliki kolski park izložen nepotrebno visokim investicijama, troškovima održavanja i zaliha, dok će u suprotnom biti prisutan nedostatak kola što će rezultovati niskim kvalitetom usluga.

Samim tim, dva su centralna pravca istraživanja u oblasti upravljanja teretnim kolskim parkom. Prvi je posvećen raspodeli kolskih kapaciteta na različite relacije. Ovaj zadatak podrazumeva određivanje neophodnih tokova praznih kola. Drugi zadatak se odnosi na određivanje optimalne veličine teretnog kolskog parka.

Proces raspodele praznih teretnih kola čine faza planiranja i faza njihovog fizičkog pokretanja uz minimizaciju troškova i zadovoljenje tražnje. Prevoz praznih kola ima značajno učešće u ukupnom transportu na železnici te je efektivan i efikasan proces raspodele presudan za smanjenje kapitalnih i operativnih troškova. Jedan deo troškova neproduktivnog transporta proporcionalan je broju pokrenutih praznih teretnih kola i u direktnoj je relaciji sa prevoznim rastojanjima. Druga vrsta troškova, kao što su troškovi ranžiranja, prouzrokovani su obradom ovih kola u ranžirnim stanicama i čine veliki deo ukupnih troškova raspodele praznih kola, što posebno važi za slučaj manjih voznih parkova. Troškovi operacija sa kolima često zavise od broja grupa kola koja se obrađuju u ranžirnim stanicama pri čemu se grupa kola sastoji od jednih ili više kola koja se zajedno obrađuju i mogu se tretirati kao jedna jedinstvena jedinica za obradu. Ovo znači da primenom strategije obrade manjeg broja grupa, ali sa većim brojem kola u njihovom sastavu neće smanjiti samo troškovi manevrisanja i ranžiranja već će se smanjiti i jedinični troškovi po kolima.

Veličina radnog kolskog parka po pravilu je u istraživanjima alokacije kola, tretirana kao ulazni podatak, premda su akademske rasprave i praktična iskustva nedvosmisleno ukazivale da su potencijalne koristi od investicija u ovaj kapitalni resurs sravnjive u poređenju sa redukovanjem operativnih troškova.

Određivanje investicionog nivoa u radni kolski park po pravilu se sprovodi postizanjem ravnoteže između troškova koji treba da obezbede dovoljne kapacitete sa jedne i mogućih troškova neispunjene tražnje sa druge strane. Dugo vremena su modeli posvećeni ovoj problematici zapravo rešavali zadatak iznalaženja optimalnog broja vozila, kako bi se ispunila tražnja i to najčešće u odnosu na kriterijum minimalnih ukupnih troškova. Neizvesnost dužine vremena putovanja za svako vozilo i broj otpremljenih kola iz svake stanice mreže (na osnovu poznate tražnje za kretanjem tovarenih kola) predstavljali su neophodne ulazne podatke. Tek se u poslednje vreme među istraživačima postiže opšta saglasnost o potrebi uključivanja problema alokacije praznih kola u zadatak određivanja visine investicija u vozni park. Cilj ovih novih tendencija treba da bude minimizacija sume konstantnih troškova nabavke kola i promenljivih troškova prevoženja (Kraay i Harker, 1995).

Transportna preduzeća suočena su sa problemom upravljanja velikim brojem kola koja se nalaze na različitim geografskim lokacijama, a koje podrazumeva njihovo pokretanje kako bi se ispunila tekuća tražnja (tovarena kola) ili upućivanje (prazna kola) ka onim lokacijama gde ih nema u dovoljnom broju prema poznatoj tekućoj tražnji, odnosno ka stanicama gde se očekuje tražnja u narednim vremenskim intervalima. Minimizacija troškova vlasništva i korišćenja kola na planskom horizontu imperativ je gotovo svih transportnih preduzeća.

1.3 Svrha, ciljevi i doprinos istraživanja

Tri osnovne kategorije problema koje treba rešiti u cilju pružanja kvalitetne transportne usluge su obezbeđenje dovoljnih kapaciteta, raspoređivanje kola i upravljanje kretanjem vozova. Određivanje veličine investicija u teretna kola železnice predstavlja primarni zadatak za prvu vrstu problema. Druga vrsta problema odnosi se na određivanje neophodnih tokova praznih kola zbog nesimetrične tražnje između stanica. Poslednja kategorija problema obuhvata regulisanje kretanja teretnih kola kako bi se uvećale prevozne i propusne sposobnosti pruga.

Interakcija između odluka o dimenzionisanju teretnog kolskog parka i odluka o iskorišćenju, odnosno raspodeli teretnih kola i kombinovani efekti ovih odluka na kapacitet i efikasnost železničkog sistema predstavlja fokus ove disertacije. Poimanjem direktnog uticaja na nivo investicija u kapitalne resurse, potencijalne koristi od poboljšanog iskorišćenja teretnih kola su mnogo veće nego što bi se moglo utvrditi samo iz obračuna smanjenih operativnih troškova. Za modelovanje interakcije iskorišćenja teretnih kola i dimenzionisanja teretnog kolskog parka moraju biti prepoznate dve krucijalne karakteristike železničkog sistema: sistem je dinamički jer se tražnja u sistemu menja tokom vremena, i postoji neizvesnost, kako u performansama sistema tako i u prognoziranju tražnje u sistemu u budućnosti. Ove dve karakteristike su osnova modela razvijenog u ovoj disertaciji.

Primenjen je fuzzy stohastički pristup problemu simultane optimizacije teretnog kolskog parka i alokacije teretnih kola. Na bazi opšte teorije sistema, predložen je pristup Linearnog Kvadratnog Regulatora (Linear Quadratic Regulator – LQR) za određivanje optimalne politike problema, pri čemu je tražnja za teretnim kolima modelovana kao fuzzy stohastička promenljiva, dok su vremena putovanja teretnih kola između izvorišno odredišnih stanica implicitno predstavljena kao fuzzy promenljive.

Osnovni cilj razvoja i primene ovog dinamičkog optimizacionog modela je dobijanje odgovora na osnovna pitanja o definisanju odgovarajuće politike investiranja. Ovo podrazumeva određivanje prostorne i vremenske lokacije teretnih kola koja se kreću u tovarenom i praznom stanju ili se nalaze po stanicama.

Takođe, pored ovog osnovnog, drugi značajan cilj predstavlja poboljšanje korišćenja teretnih kola kroz smanjenje njihovog kretanja u praznom stanju.

Treći cilj je uvođenje što većeg broja realističnih pretpostavki u razvoju fuzzy stohastičkog modela za istovremeno dimenzionisanje teretnog kolskog parka i alokaciju teretnih kola.

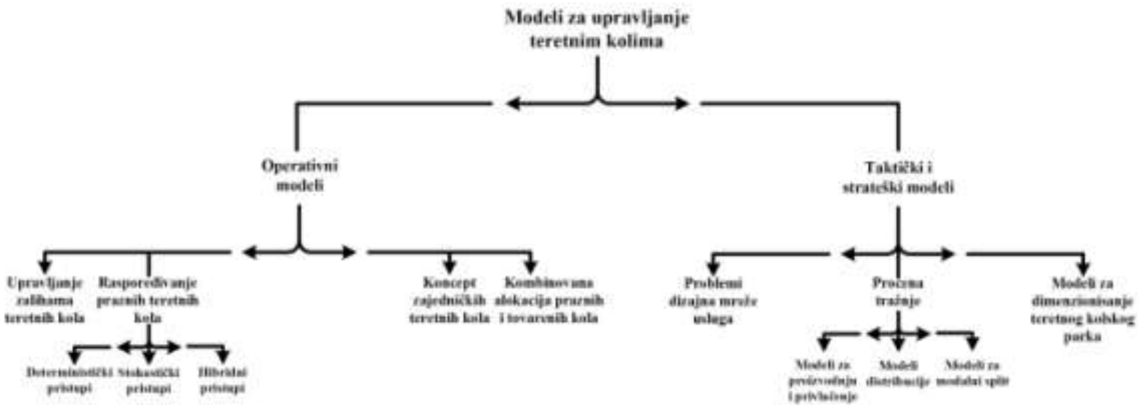
1.4 Organizacija disertacije

Disertacija je organizovana na sledeći način. Poglavlje 2. sadrži pregled literature relevantnih problema upravljanja teretnim kolima. Poglavlje 3. obuhvata osnovne pretpostavke neophodne za rešavanje razmatranog problema primenom pristupa fazi stohastičkog optimalnog upravljanja. U ovom delu razmotrene su relevantne aritmetičke operacije sa trougaonim fuzzy brojevima i trougaonim fuzzy matricama, kao i postupak za pronalaženje inverzne trougaone fuzzy matrice. Zatim je predstavljena mera rastojanja, odnosno metod označenog rastojanja za defazifikaciju određene fuzzy promenljive i dobijanje njene procene u fuzzy smislu. Poglavlje 4. sadrži matematičku formulaciju problema u fuzzy smislu i rešenje zasnovano na opštoj teoriji sistema. Poglavlje 5. obuhvata testiranje modela na hipotetičkim primerima uz opis postupka proračuna. Sprovedeni su računarski eksperimenti i načinjena je analiza dobijenih rezultata.

2. PREGLED MODELA ZA UPRAVLJANJE TERETNIM KOLIMA

U ovom poglavlju dat je pregled ranijih istraživanja za rešavanje problema efikasnog i efektivnog upravljanja teretnim kolima na železnici. Dejax i Crainic (1987) i Cordeau i ostali (1998) su predstavili detaljan pregled planskih modela u železničkim robnom saobraćaju. Modeli za rešavanje problema upravljanja teretnim kolima se mogu klasifikovati na (Slika 2.1):

- Operativne modele kojima se razmatraju problemi kraćeg vremenskog obuhvata kao što su upravljanje zalihama praznih teretnih kola, određivanje izvorišno-odredišnih tokova praznih kola i upućivanje praznih i tovarenih teretnih kola.
- Taktički i strateški orijentisane modele za rešavanje problema planiranja koji pokrivaju srednji ili duži vremenski period. Ovim modelima je obuhvaćeno dizajniranje mreže usluga, modelovanje tražnje za teretnim kolima, dimenzionisanje teretnog kolskog parka.



Slika 2.1 *Klasifikacija modela za rešavanje problema upravljanja teretnim kolima*

2.1 Operativni modeli za upravljanje teretnim kolima

Svrha operativnih modela je efikasno upravljanje datim teretnim kolskim parkom, odnosno, minimiziranje troškova kretanja praznih kola uz zadovoljenje transportne tražnje. Problemi su obično definisani na mreži na kojoj postoje tovarena i prazna kretanja. U nekim čvorovima mreže, koji predstavljaju ranžirne stanice, terminale, depoe, tražnja i ponuda praznih teretnih kola su unapred zadate vrednosti.

Modeli se odnose na rešavanje problema upravljanja zalihama praznih teretnih kola u stanicama na mreži ili problema alokacije praznih kola na određene izvorišno-odredišne parove stanica kako bi se ispunila tražnja.

2.1.1 Upravljanje zalihama praznih teretnih kola na železnici

Železnička kola se alociraju zavisno od postojeće ponude i tražnje za praznim kolima u stanicama na mreži. Jedan od problema koji su razmatrani je i održavanje adekvatne ponude praznih kola u stanicama na mreži. Naime, u svakodnevnoj realizaciji planiranih aktivnosti u železničkom robnom saobraćaju, kolski menadžeri moraju da odrede potreban nivo kola na zalihama i trenutak kada treba naručiti teretna kola u cilju zadovoljenja tražnje za robnim saobraćajem, zaštite od varijacija u tražnji i minimiziranja očekivanog ukupnog troška. Operativni troškovi robnog saobraćaja na železnici se mogu podeliti na tri kategorije: vozne troškove, stanične operativne troškove i troškove teretnih kola. U okviru poslednje komponente operativnih troškova postoje trošak vlasništva kola i troškovi zaliha. Ukupni troškovi zaliha predstavljaju sumu svih staničnih troškova zaliha koji obuhvataju trošak isporuke kola za svaku stanicu, trošak čuvanja i trošak nedostatka usled činjenice da nije raspoloživ dovoljan broj teretnih kola za zadovoljenje aktuelne tražnje.

U svakoj železničkoj kompaniji postoji problem zaliha teretnih kola. Postoje neizvesna tražnja i nepouzdane isporuke praznih kola u svim stanicama na mreži. Prema tome, pod pretpostavkom da železnička kompanija želi u potpunosti da ispuni tražnju korisnika, postoji potreba za zalihama teretnih kola u svim stanicama. Pošto postoji različita tražnja u različitim stanicama i teretna kola imaju ograničen kapacitet, nedostatak ili višak zaliha može postojati. Različite stope tražnje daće različite periode zamene i broj kola. Stanice sa većom stopom korišćenja teretnih kola trebaju veću frekvenciju zamene zaliha ili veći broj kola u narudžbinama. Prema tome, kada korisnik usluga železnice dođe u stanicu, njegovi zahtevi možda neće biti zadovoljeni usled neodgovarajuće politike zaliha koja obuhvata trajanje ciklusa zaliha, nivo zaliha kada se vrši naručivanje i broj kola koji se naručuje.

U nastavku je dat pregled najznačajnijih pristupa upravljanju zalihama teretnih kola na železničkoj mreži. U narednoj tabeli ukratko su prikazane najznačajnije karakteristike predstavljenih modela.

Tabela 2.1 *Karakteristike modela za upravljanje zalihama teretnih kola*

Autori	Godina nastanka	Vrsta modela	Pristup rešavanju
Philip i Sussman	1977	Simulacioni model diskretnog događaja	Simulacija
Mendiratta i Turnquist	1982	Dvonivovski decentralizovani optimizacioni model	Dantzig-Wolfe dekompozicija
Milenković i ostali	2011	Fazi EOQ model	Diferencijalni proračun

Philip i Sussman (1977) formulišu simulacioni model diskretnog događaja za određivanje optimalnog nivoa zaliha za određenu stanicu kao funkciju dnevnih varijacija ponude, dnevnih varijacija tražnje i troška čuvanja kola u stanici koja čekaju na utovar, u odnosu na trošak nedostatka kola za zadovoljenje tražnje korisnika prevoza. Ovaj model zaliha predstavljen je kao alternativa klasičnim metodologijama transportne optimizacije za probleme alokacije praznih kola (White i Bomberault (1969)). Pokazana je primenljivost modela na realne probleme zaliha na železnici. Kao zaključak autori naglašavaju uticaj koji varijabilnost ponude i tražnje ima na broj potrebnih kola u zalihama u određenoj stanici. Autori takođe predlažu integrisanje predloženog staničnog modela zaliha u sveobuhvatni skup modela za uspostavljanje ravnoteže zaliha teretnih kola na železničkoj mreži u celini.

Mendiratta i Turnquist (1982) predstavljaju jedan uspešan pokušaj formiranja opšteg modela za upravljanje zalihama teretnih kola na celokupnoj železničkoj mreži. Autori ukazuju na problem nedostatka koordinacije između odluka koje se donose na centralnom nivou i lokalnih odluka u pojedinim stanicama, a kao osnovni razlog za probleme raspodele praznih kola, i stoga, primenjuju na železnički slučaj metodologije razvijene od strane Baumola i Fabiana (1964), Lasdona (1970) i Jennergrena (1971) za optimizaciju decentralizovanih sistema. Rezultujući model obuvata međusobno interaktivne podmodele – mrežni model i terminalni model – svaki predstavlja aktivnosti koje se sprovode na odgovarajućem nivou u železničkom sistemu: centralno odlučivanje na korporativnom nivou se odnosi na kretanja na celokupnoj železničkoj mreži, dok su odluke o veličini zaliha načinjene u pojedinačnim stanicama. Odluke su načinjene na svakom nivou (korporativnom i staničnom) dok se koordinacija između dva nivoa zasniva na cenovnom mehanizmu. Cilj sistema je da maksimizira profit za železnicu uz ograničenja ponude i tražnje praznih kola i institucionalne zahteve.

U cilju dostizanja optimalnosti sistema, postoji iterativna razmena informacija između mrežnog i terminalnog modela. Mrežni model određuje interne cene transfera (dualne promenljive) za prazna kola koje su ulaz u terminalni model. Terminalni model koristi ove cene za određivanje narudžbina teretnih kola. Ove narudžbine se zatim vraćaju u mrežni model u cilju ponovnog proračuna transfernih cena. Iteracije se nastavljaju sve dok su rezultati dva modela konzistentni i interne transferne cene između modela reflektuju oportunitetni trošak kola. Mrežni model je formulisan kao model optimizacije korišćenjem linearnog programiranja (LP) i rešen Dantzig-Wolfe-ovom dekompozicijom. Terminalni model je formulacija upravljanja zalihama koja obuhvata stohastičku tražnju i vremena isporuke praznih kola. Razlikuje se od modela za upravljanje zalihama koji su predložili Philip i Sussman (1977) samo u detaljima formulacije. Važan aspekt modela je taj da on valjano funkcioniše čak i kada postoji sveukupni nedostatak praznih kola u sistemu. Model se može koristiti kao alat za stratešku evaluaciju od strane centralnog menadžmenta i kao operativni alat za dnevnu raspodelu praznih kola od strane staničnog osoblja. Testovi na datim podacima železnica Sjedinjenih Američkih Država pokazuju da model generiše odluke o raspodeli kojima se smanjuju prazni kola-kilometri, prazna upućivanja i prazni kola-dani bez smanjenja procenta ispunjene tražnje.

Milenković i ostali (2011) predlažu fuzzy model zaliha za određivanje optimalnog nivoa zaliha, za pojedinačnu stanicu, kao funkciju neizvesne dnevne tražnje i vremena putovanja teretnih kola, troška isporuke teretnih kola, troška čuvanja kola u stanici i troška nedostatka kola. U radu su korišćeni trougaoni fuzzy brojevi za predstavljanje dnevne tražnje za teretnim kolima i vremena putovanja između stanica ponude i tražnje. Sve troškovne komponente modelovane su kao egzaktni parametri. Model je testiran na hipotetičkoj železničkoj mreži koju čine tri stanice i troškovno optimalne vrednosti nivoa zaliha i broja kola za naručivanja su određene.

2.1.2 Raspoređivanje praznih teretnih kola

Ciklus kretanja teretnih kola sastoji se iz sledećih komponenti: vremena provedenog u posedu pošiljalaca i primalaca, vremena provedenog u kretanju u tovarenom stanju i vremena provedenog u stanicama. Analize sprovedene na većini železnica sveta pokazuju da kola čak 70% ovog ciklusa provode u neproduktivnom stanju, čekajući u čvoru ponude ili krećući se prazna između čvorova ponude i tražnje. Iako postoji veliki broj različitih tipova teretnih kola u ovom procesu, obično se vrši njihovo udruživanje u mnogo manji broj klasa, te se prema njima iskazuje ponuda i tražnja kola (Bojović, 2007).

Najveću odgovornost za raspodelu praznih kola najčešće imaju lokalni dispečeri. Teritorija železničke uprave se deli u nekoliko geografskih celina, pri čemu dispečeri preuzimaju primarnu odgovornost za ispunjenje tražnje u svom području. Svako jutro dispečeri nastoje da zadovolje transportne zahteve za ponudom odgovarajućih teretnih kola. Centralnom sistemu se šalju izveštaji o preostalim raspoloživim kolima, odnosno podaci o tražnji za kolima u narednom danu. Usled nepoverenja u efikasnu proceduru alokacije praznih kola na nivou centralne uprave, menadžeri ovih regiona često ne prikazuju stvarni već umanjeni broj raspoloživih kola, strahujući da im nedostajuća kola u narednim periodima neće na vreme biti dostavljena. Nepoverenje u odlučivanje na centralnom nivou, iskazano kroz ovaj postupak obmanjivanja, dodatno smanjuje broj mogućih izmeštanja kola i još više redukuje efikasnost sistema raspodele kola.

Problem optimizacije tokova praznih teretnih kola često se opisuje klasičnim transportnim problemom. Definišu se mesta ponude praznih kola, odnosno korisnici koji ih potražuju. Uobičajena praksa je da se troškovi dodeljivanja kola modeluju preko rastojanja na kojem se vrši izmeštanje određenih kola od izvorišne do odredišne stanice. Za definisane čvorove ponude i tražnje i korespodentne troškove rešavanje postavljenog problema se sprovodi preko zadatka linearnog programiranja, mrežnih modela ili nekih drugih metoda optimizacije. Nažalost, modeli raspodele kola korišćeni u praksi uključuju brojne aproksimacije i po pravilu ignorišu zahteve korisnika u budućnosti ili počivaju na determinističkim prognozama.

Na stvarnim železničkim mrežama obavljaju se složene operacije sa mnogo stohastičkih pobuda i imperativ je da se upravljanje kolima obavlja uz uslov da se modelom generišu izvori slučajnosti. Zahtevi korisnika za železničkim kolima predstavljaju jedan od takvih šumova, premda oni nisu najznačajniji izvor, pre svega iz razloga što korisnici imaju naviku da svoje zahteve dostavljaju nekoliko dana unapred. Drugo, mnogi od najvećih korisnika su veoma predvidivi. Verovatno najnepodesniji izvor slučajnosti za železnicu predstavljaju vremena prevoza, koja mogu značajno da variraju između dva čvora. Drugi značajan izvor je pojava novih praznih kola. Pored ostalih izbora kola mogu biti poslata i na drugu mrežu. Ta druga železnica može vratiti prazna kola, ali bez ikakve prethodne najave. Kao rezultat ovih aktivnosti prazna kola pristižu iz druge mreže na krajnje nepredvidljiv način. Postoji takođe i problem kvarova na kolima, kao i ocene korisnika da su kola neprihvatljiva (obično zbog toga što nisu dovoljno čista).

Kolski dispečeri nastoje da prilikom donošenja odluke o kolima uzmu u obzir ove stohastičke uticaje zadržavanjem određenog broja kola u rezervi, tako da ona brzo zamenjuju alternativna kola kada se događaji ne realizuju prema planu. Međutim, oni najčešće nemaju predstavu o finansijskim aspektima lagerovanja kola u njihovim stanicama. Stoga često zadržavanje više kola nego što je neophodno umanjuje stepen njihove produktivnosti. Za poboljšanje efekata ovakve prakse neophodno je najpre definisati odgovore na sledeća pitanja: koliko dodatnih kola i kog tipa je potrebno, gde ona treba da budu uskladištena i koje odluke treba doneti u slučajevima kada ima previše kola. Dalje, postoje periodi tokom godine kada su zahtevi iznad uobičajenog nivoa, tako da inventarski park možda neće biti dovoljan da odgovori tražnji.

Odluke o raspodeli kola obično počivaju na kriterijumima minimizacije troškova ili maksimizacije dobiti. Odluke o rutiranju imaju direktan uticaj na transportne troškove ili maksimizaciju dobiti. Stoga, odluke o rutiranju direktno utiču i na odluke o raspodeli kola. Sa druge strane, u funkciji alokacije praznih kola pošiljaocima, odluke o raspodeli kola mogu imati uticaj na odluke o pružanju usluge koje su podvrgnute uticaju odluka o rutiranju. Zapravo to znači da ako je dovoljno praznih kola alocirano ka pojedinačnom odredištu iz jednog izvorišta praznih kola, prazna kola zajedno sa tražnjom za tovarenim kolima u tom odredištu, mogu opravdati otpremu direktnog voza. U tom smislu prazna kola mogu biti korišćena za poboljšanje nivoa usluge za primaoce tovarenih kola, koji bi inače čekali sve dok se ne nakupi dovoljan broj teretnih kola kako bi se opravdalo otpremanje voza na krajnja odredišta ovih kola.

Odluke o raspodeli praznih kola utiču na trenutak kada se tovarena kola otpremaju. Ako su narudžbine za praznim kolima ispunjene odmah, ona su natovarena i ulaze u sistem kako bi se što pre isporučila železnici i otpremila do krajnjeg odredišta. U slučaju da narudžbine za praznim kolima nisu odmah ispunjene, roba koju treba otpremiti mora da čeka na raspoloživa prazna kola i prema tome ona će u mrežu ući kasnije. Stoga, raspodela praznih kola određuje trenutak kada se tovarena pošiljka pojavljuje u sistemu koja opet može uticati na frekvenciju otpremanja vozova. Stoga, ako se u odlukama o rutiranju razmatra samo otprema tovarenih kola, moguće je odbaciti rutu koja će u drugom slučaju biti obezbeđena vozom koji se formira na osnovu praznih kola.

Upravljanje raspodelom praznih teretnih kola podrazumeva da su u svakom trenutku poznati status i lokacija teretnih kola na mreži ili delu posmatrane mreže. Status kola se odnosi na raspoloživost kola, da li su prazna ili tovarena, odnosno da li su ispravna ili neispravna. Lokacija podrazumeva železničku stanicu (službeno mesto) u kojoj se kola nalaze u određenom trenutku.

Veliki broj pristupa za rešavanje problema alokacije praznih teretnih kola je predložen u prošlosti. Detaljan pregled istraživanja u ovoj oblasti dali su Dejax i Crainic (1987) i Bojovic (2000).

Svi pristupi se mogu kategorisati na determinističke, stohastičke i hibridne pristupe. U nastavku su izložena najznačajnija istraživanja unutar svake od ovih grupa.

2.1.2.1 Deterministički pristupi

Razvoj linearnog programiranja (LP), mrežnog modelovanja i algoritamskih tehnika tokom 60-tih godina prošlog veka inicirao je veliki broj istraživanja koja tretiraju primenu ovih pristupa za rešavanje problema alokacije teretnih kola. Ovi optimizacioni modeli su primenjeni za optimalno raspoređivanje praznih kola u skladu sa prethodno definisanim pravilima i ciljevima alokacije. U narednoj tabeli ukratko su prikazane najznačajnije karakteristike predstavljenih modela.

Tabela 2.2 *Karakteristike determinističkih modela za raspoređivanje praznih teretnih kola*

Autori	Godina nastanka	Vrsta modela	Pristup rešavanju
Leddon i Wrathall	1968	Linearni transportni model	Simpleks algoritam

Autori	Godina nastanka	Vrsta modela	Pristup rešavanju
White i Bomberault	1969	Problem pošiljke	Out-of-kilter algoritam
Misra	1972	Linearno programiranje	Transportni/Simpleks algoritam
Ouimet	1972	Problem pošiljke	Out-of-kilter algoritam
Herren	1973	Model troškovno minimalnog protoka na mreži	Out-of-kilter algoritam
Baker	1977	Linearni transportni model	Simpleks algoritam
Fernandes Grain i Figliatti de Sinay	1986	Linearno programiranje	Simpleks algoritam
Spieckermann i Voss	1995	Problem raspoređivanja aktivnosti na mašine	Pohlepna heuristika
Holmberg i ostali	1996	Višerobni problem protoka na mreži	Lagranžeova heuristika/Metod grananja i ograničavanja
Joborn i ostali	2004	Višerobni problem protoka na mreži	Tabu heuristika
Lubbecke i Zimmermann	2005	Mešovito celobrojno programiranje	Metod grananja i ograničavanja
Narisetty i ostali	2008	Linearno programiranje	Dekompozicioni pristup
Lawley i ostali	2008	Mešovito celobrojno programiranje	Sekvencijalna heuristika

Jedan od prvih pristupa predložen je od strane Misre (1972) koji minimizira ukupni trošak (u kola satima) neravnoteže broja praznih kola homogenog kolskog parka u čvorovima železničke mreže tokom određenog vremenskog perioda. Za slučaj ruta ograničenog kapaciteta razvijeni su transportni (Ford and Fulkerson (1974)) i simpleks algoritam (Dantzig (1963)). Autor predlaže transportni algoritam kao efikasan pristup rešavanju tri vrste problema: stavljanje na raspolaganje praznih kola pošiljaocima, izbor trasa za nesmetano obavljanje saobraćaja i definisanja novih prostornih lokacija (lokacije preraspodele). Neusklađenost ponude i tražnje kola karakteriše veliki broj stanica, te se izmeštanje praznih kola iz stanica gde su u višku obavlja ka stanicama gde se tovare. Ovako definisan zadatak je zapravo klasičan transportni problem i njegova razrada data je na primeru sa četiri stanice i dvadeset mogućih trasa prevoženja. Takođe je razmotrena i stohastička priroda ponude i tražnje praznih kola, a dnevne optimizacije, ili korišćenje proseka su predloženi kao rešenja. Pomenuta je i mogućnost stohastičkog modelovanja ponude i tražnje u kombinaciji sa sekvencijalnom primenom LP-a. Pored smanjenja potrebnog broja praznih kola ovaj postupak definiše dopustive trase i omogućava određivanje ušteđenih voznih sati.

Model raspoređivanja kola na železnicama Lousville i Nashville (Leddon i Wrathall (1968), Wrathall (1968), Asocijacija američkih železnica (1982)) i model pravila optimalnog toka Sauthern železnice (Baker (1977)) su takođe statički linearni transportni modeli sa poznatom ponudom i tražnjim praznih kola homogenog kolskog parka. Za rešavanje ovog problema primenjeni su standardni simpleks algoritmi.

White i Bomberault (1969) rešavaju isti problem, ali uzimaju u obzir i vremensku perspektivu preko dijagrama prostor-vreme koji šematski predstavlja različite rute koje se mogu koristiti u cilju ostvarivanja ciljne lokacije i vremena prispeća praznih kola. Ova struktura se koristi za generisanje mreže preko koje je ukupni trošak kretanja kola minimiziran. Kolski park je i u ovom slučaju homogen, dok su ponuda i tražnja pojedinih stanica poznate. Prilagođena verzija out-of-kilter algoritma (Ford i Fulkerson (1974)) se koristi za rešavanje ovog problema pošiljke. Uvođenje dinamičkog aspekta predstavlja značajan doprinos i rad ovih autora je poslužio kao osnova za brojna kasnija istraživanja i razvoj modela za alokaciju praznih vozila za sve vidove saobraćaja.

U skladu sa razmatranjem dinamike sistema raspodele praznih kola, Ouimet (1972) takođe predlaže model raspodele praznih kola sa opštim karakteristikama sličnim prethodno navedenom modelu: prostor-vreme mreža sa kapacitetima, homogen kolski park i kao funkcija cilja zadovoljenje trenutne i buduće tražnje uz minimiziranje kašnjenja, praznih kola-km, i broja praznih kola u ranžirnim stanicama (preko skladišnih lukova obuhvaćenih na mreži prostor-vreme) out-of-kilter algoritmom. Ouimet naglašava značaj dobrih procena ponude i tražnje i predlaže pokretanje modela u svakom periodu nakon ažuriranja prognoza. Ovaj pristup primenjen je na kanadskim pacifičkim železnicama kao podrška alokaciji praznih kola na nivou sistema u celini.

Model raspodele švajcarskih saveznih železnica (Herren (1973)) je takođe optimizacioni model čiji je cilj maksimiziranje zadovoljenja tražnje i minimiziranje troškova ranžirnih operacija i praznog kretanja teretnih kola. Model razmatra heterogeni kolski park sa mogućnostima zamene i ostalim specifičnim ograničenjima. Ovo se postiže predstavljanjem plana raspodele praznih kola kao modela troškovno minimalnog protoka na mreži prostor-vreme gde svaki čvor odgovara određenom tipu kola u određenoj otpremi voza (ili prispeću) od (do) određene ranžirne stanice. Lukovi na mreži predstavljaju ranžirne operacije, zamene kola i kretanja vozova. Usled veličine mreže švajcarskih železnica model je rešen modifikovanim out-of-kilter algoritmom. Rezultati su pokazali mogućnost smanjenja kolskog parka uz postizanje potpune zadovoljenja korisnika. Takođe je postojalo značajno smanjenje u troškovima i pređenom putu teretnih kola u praznom stanju.

Fernandes Grain i Figliatti de Sinay (1986) su za potrebe brazilskih železnica predložili LP formulaciju statičkog problema raspodele praznih kola za homogeni kolski park sa poznatom ponudom i tražnjom koji maksimizira profitabilnost sistema. Model je rešen standardnim simpleks algoritmom.

Narisetty i ostali (2008) su predstavili optimizacioni model primenjen na američkoj železnici Union Pacific za raspodelu praznih teretnih kola zasnovanu na tražnji. Problem raspoređivanja praznih kola je formulisan kao problem optimalnog usklađivanja između raspoloživih teretnih kola i tražnje korisnika. Model razmatra heterogeni kolski park, pa se samim tim teretna kola razlikuju prema tipu i fizičkim karakteristikama. Određenog dana, ponuda teretnih kola se sastoji od kola koja su vraćena železnici iz razmene sa drugim železnicama, kola koja železnica iznajmljuje od drugih kompanija, i kola koja su promenila svoj status i postaju raspoloživa. Prema tome, autori pretpostavljaju da je ponuda praznih kola koja će biti raspoloživa u tekućem periodu raspodele poznata kao i deo praznih kola koja će postati raspoloživa tokom narednih perioda raspodele. Tražnja za praznim kolima sastoji se od realnih i predviđenih narudžbina. Realne narudžbine su one koje su korisnici ispostavili, dok predviđene odgovaraju odlukama koje je kompanija načinila po pitanju upućivanja kola u njihova verovatna odredišta na osnovu istorijskih ili prognoziranih informacija. Četiri glavna skupa karakteristika utiču na poželjnost dopustivog rasporeda praznih kola: transportni troškovi, troškovi zamene teretnih kola, kazne usled rane/kasne isporuke, prioritet korisnika, efikasnost železničkog koridora. Funkcija cilja problema predstavljena je kao suma ovih troškova otežanih odgovarajućim koeficijentima. Razvijeni optimizacioni model je omogućio železnici da ostvari značajne uštede u troškovima transporta. Uz to, smanjen je broj osoblja potrebnog za proces ispunjenja tražnje, što je rezultiralo u povraćaju investicija od 35%.

Spieckermann i Voss (1995) su formulisali problem raspodele praznih kola kao problem raspoređivanja aktivnosti na mašine, sa mašinama koje predstavljaju železnička kola i aktivnostima koje predstavljaju zahteve za kolima. Istraživanje je sprovedeno za potrebe nemačke kompanije koja se bavi iznajmljivanjem teretnih kola za korisnike širom Evrope. Transport teretnih kola vrši se od strane nacionalnih železnica kojima kompanija mora da plati naknade za kretanja praznih ili tovarenih kola. Cilj je minimiziranje troškova praznog kretanja. Model je rešen primenom trofaznog postupka koji je deo proždrljive heuristike. U prvoj fazi pronalazi se dopustivo rešenje korišćenjem pravila „earliest due date" (EDD). Druga faza zatim pokušava da poboljša ovo rešenje u odnosu na minimiziranje ukupnog kašnjenja u ispunjavanju narudžbina. Postupak poboljšanja koji ima za cilj smanjenje transportnih troškova bez povećanja kašnjenja se koristi u trećoj fazi. Algoritam je testiran na realnim podacima i takođe na slučajno generisanim primerima. Najveći primer je sadržao 805 zahteva, 225 železničkih kola i 205 stanica. Sistem je pružio značajne troškovne uštede, ali su proračunska vremena prevazilazila nekoliko sati u nekim eksperimentima.

Holmberg, Joborn i Lundgren (1996) su predložili model višerobnog protoka na mreži za operativno raspoređivanje praznih kola. Svaka roba odgovara jednom tipu kola, dok ograničenja povezivanja limitiraju ukupan broj praznih kola koja mogu biti deo raspoređenog voza. Kretanja voza su predstavljena na mreži prostor-vreme. Cilj modela je da se minimiziraju troškovi transporta i nedostatka kola. Vrednost zaliha kola u stanici nakon planskog perioda je takođe uzeta u obzir.

Za multiperiodni planski horizont operativni model je rešen korišćenjem kliznog perioda u kome su odluke povezane sa početnim segmentom perioda primenjene dok su ostale ažurirane rešavanjem modela tokom sledećeg segmenta. Model se može takođe koristiti na strateškom nivou za procenu posledica varijacija u veličini kolskog parka. Lagranžeov heuristički metod se poredi sa jednostavnim postupkom grananja i ograničavanja. Rezultati dobijeni na realnom skupu slučajno generisanih primera su doveli do zaključka da je model vrlo primenjiv. Najveća sekvenca podataka koja je rešena sadržala je 100 stanica i 20 tipova kola. Mogućnosti zamene su takođe tretirane proširenjem osnovne formulacije. Više detalja o ovom pristupu je dao Joborn (2005) koji je takođe predstavio analizu raspodele praznih kola na švedskim državnim železnicama.

Lubbecke i Zimmermann (2005) razmatraju problem upravljanja teretnim kolima na industrijskim železnicama. Tovarena i prazna kola ulaze u industrijsko područje. Odgovarajuća kola se skladište i raspoređuju između terminala, dok natovarena i višak praznih kola napuštaju industrijsku zonu. U radu autori razmatraju problem koja kola pokrenuti, gde i kako. Korisnici železnice, odnosno proizvodni terminali, isporučuju zahtev za prevozom koji sadrži kolosek za dostavu praznih kola, vrstu tereta (za terminal istovara) ili tip kola (za terminal utovara), broj potrebnih kola i vremenski prozor isporuke. Zahtevani tip kola je moguće zameniti sličnim tipovima. Pri alociranju pojedinačnih železničkih kola na zahteve, operativni ciljevi su minimalni ranžirni rad, kratka vremena prevoza, niski troškovi iznajmljivanja kola. Železnička mreža u industrijskoj oblasti je podeljena na segmente. Grupa susednih koloseka često služi istoj svrsi, kao skladišne zone ili kao koloseci rezervisani za dolazne vozove. Svaki kolosek pripada određenom segmentu. Jedan blok kola ne sme sadržati kola koja su otpremljena ili upućena na različite segmente. Drugim rečima, blok počinje i završava u istom segmentu ili predstavlja direktnu vezu između dva segmenta. Samim tim, autori dekomponuju problem alokacije kola na dva potproblema: potproblem raspodele kola između segmenata i potproblem alokacije kola u okviru pojedinih segmenata i predlažu formulaciju mešovitog celobrojnog programiranja za rešavanje ova dva potproblema.

Joborn i ostali (2004) razmatraju problem raspodele praznih kola u raspoređenom železničkom sistemu. Autori analiziraju troškovnu strukturu prepozicioniranja praznih kola i zaključuju da trošak raspoređivanja pokazuje ponašanje ekonomije obima. Uz trošak proporcionalan broju kola otpremljenih iz izvorišta za odredište, postoji i trošak manipulisanja kolima u usputnim ranžirnim stanicama koji zavisi od broja grupa kola koja se ranžiraju. U radu je predložen optimizacioni model koji eksplicitno uzima u obzir efekat ekonomije obima. Za opis mogućih kretanja kola u vremenu i prostoru koristi se vremenski zavisna mreža koja je transformisana u mrežu sa fiksnim troškovima linkova koji simbolišu kretanje kola između određenog para stanica. Rezultujući optimizacioni model je mreža sa kapacitetima u kojoj ograničenja kapaciteta limitiraju tok na linkovima. Tabu heuristika je primenjena za rešavanje modela.

Lawley i ostali (2008) predlažu pristup za rešavanje problema raspoređivanja teretnih kola kojima se prevoze rasute robe (ugalj, gvožđe) na železnici. Analizirani problem se smatra važnim s obzirom na učešće rasutih roba u ukupnom prevozu i složenim jer koristi sve raspoložive železničke resurse i informacije za minimiziranje zakrčenja, maksimiziranje kapaciteta i smanjenje neizvesnosti vremena prispeća i otpreme. Koristi efektivnog raspoređivanja rasutih prevoza obuhvataju smanjenje nedostatka tražnje, troškova osoblja i kašnjenja na utovar/istovar. Raspoređivanje ponovljivih isporuka rasute robe ima nekoliko specifičnosti u odnosu na tradicionalne probleme raspoređivnja praznih kola. Prvo, raspoređivanje kola se vrši samo za jednu vrstu robe. Prema tome, teretna kola koja se koriste u prevozu su homogena, pa samim tim nema potrebe za razmatranjem zamenljivosti kola u modelu. Drugo, veličine pošiljke između pojedinih izvorišno-odredišnih parova tačaka su vrlo velike, implicirajući pri tom da pošiljke budu formirane tek onda kada potpuno natovareni voz može biti otpremljen od izvorišta do odredišta. Samim tim, nema potrebe za modelovanjem tražnje na kola-po-kola osnovi već na voz-po-voz osnovi. Konačno, tražnja je ponovljiva i predvidljiva. Ovo sledi iz činjenice da tražnja za teretnim kolima sledi jedan relativno stabilan režim proizvodnje kod korisnika železničkih usluga. U modelovanju problema na železnici, mogu postojati i drugi izvori neizvesnosti kao što su varijacija vremena putovanja i čekanja, koji će povećati potrebu za primenom pristupa stohastičkog modelovanja. U ovom slučaju vremena čekanja se računaju razmatranjem raspoloživog kapaciteta i vremena obrade kola u stanicama. Prosečna vremena prevoza se računaju u skladu sa saobraćajem na pruzi i menjaju se prema danu i vremenu putovanja. Autori u radu koriste deterministički pristup za rešavanje problema s obzirom na to da se radi o relativno stabilnom okruženju. Predstavljeni model razmatra informaciju o tražnji, karakteristike železničke mreže (topologija, rastojanja, vremenske karakteristike), utovarne kapacitete pošiljalaca/proizvođača, istovarne kapacitete primalaca/korisnika i karakteristike teretnih kola (broj, raspoloživost). Model predstavlja mrežu prostor-vreme, formulisanu kao program mešovitog celobrojnog programiranja pri čemu je interpretacija fizičke mreže (pošiljaoci, primaoci, stanice, pruge) replicirana u svakoj vremenskoj epohi ili periodu planiranja tokom konačnog planskog horizonta. Model se može koristiti kako za taktičko planiranje tako i za detaljne dnevne operacije odabirom odgovarajućeg planskog perioda i mrežnih karakteristika. Model eksplicitno razmatra rutiranja vozova i operativna vremena ranžirnih stanica kako bi se izbegla zakrčenja na železničkoj mreži. Metodologija rešavanja generiše dobra rešenja za velike, realne mreže.

2.1.2.2 Stohastički pristupi

Problemi upravljanja teretnim kolima u železničkom saobraćaju su veoma pogodni za primenu stohastičkih tehnika optimizacije s obzirom na to da se karakterišu vrlo izraženim dinamičkim informacionim procesima. Najčešći oblik stohastičnosti nastaje kao rezultat neizvesnosti koja se odnosi na neki aspekt tražnje za teretnim kolima (nivo tražnje, lokacija, vreme), ali i mnoge druge forme mogu biti prisutne (vreme putovanja, raspoloživost teretnih kola, iznenadni otkazi). Nakon što je donesen određeni skup upravljačkih akcija po pitanju upravljanja teretnim kolima, donosioci odluka imaju mogućnost da razmotre izlaz (nekih od) neizvesnih događaja, a zatim da reaguju na ove događaje. Prisutna dinamika često dovodi do vrlo značajnih analitičkih poteškoća: početne odluke mogu biti pod velikim uticajem sposobnosti donosioca odluka i samog sistema da reaguju na predstojeće slučajne događaje.

Iz perspektive raspodele praznih kola, postoje tri osnovne klase dinamičke informacije: tok zahteva korisnika za praznim kolima, proces promene stanja teretnih kola (kola su istovarena i vraćena prazna od strane korisnika prevoza, ili od strane druge železničke uprave) i vremena putovanja kola između stanica ponude i tražnje.

Zahtevi korisnika prevoza za praznim kolima su na većini železnica u proseku načinjeni nedelju dana ranije, s tim što je prisutna izražena rasplinutost ovog proseka pa tako neke narudžbine mogu biti ispostavljne mnogo pre, dok su neke ispostavljene u poslednjem trenutku (posebno od strane velikih i stalnih korisnika prevoza). Postoji vrlo malo raspoloživih prethodnih informacija o praznim kolima, a i vremena putovanja su poznata tek nakon što je prevoz realizovan.

Jedan od najznačanijih izvora neizvesnosti se nalazi u vremenima putovanja. Na železnici, nije neobično da se prosečno vreme putovanja teretnih kola kreće od pet do deset dana. Ovaj izvor šuma je posebno problematičan. Drugim rečima, ako je određen broj kola otpremljen iz stanice „i“ kako bi se zadovoljila tražnja u stanici „j“, ne postoji potpuno izvesna informacija o prispeću praznih kola. Prisutni su predlozi o poboljšanju prognoze prispeća praznih kola koji se zasnivaju na korišćenju saznanja o tovarenim kolima koja su trenutno u saobraćaju (poznata je njihova ruta, i ako je moguće proceniti vreme putovanja, moguće je proceniti kada će ova kola postati raspoloživa). U narednoj tabeli predstavljene su osnovne osobine stohastičkih modela za rešavanje problema raspoređivanja praznih teretnih kola.

Tabela 2.3 *Karakteristike stohastičkih modela za raspoređivanje praznih teretnih kola*

Autori	Godina nastanka	Vrsta modela	Pristup rešavanju
Jordan	1982	Nelinearni stohastički model	Frank-Wolfe algoritam
Jordan i Turnquist	1983	Nelinearni stohastički model	Frank-Wolfe algoritam
Turnquist	1986	Nelinearni stohastički model	Frank-Wolfe algoritam
Kraft	2002	Višerobni problem	Subgradijentni

		protoka na mreži	algoritam
Powell i Topaloglu	2002	Stohastičko programiranje	„Deo po deo“ linearna aproksimacija

Turnquist i Jordan (Jordan (1982), Jordan i Turnquist (1983)) su načinili jedan od prvih pokušaja u ovom pravcu. Njihova istraživanja rezultirala su u MOV-EM mrežnom optimizacionom modelu za raspodelu praznih kola (Turnquist (1986)). Ovo istraživanje je inovativno na dva načina. Prvo, uz maksimiziranje profita kao osnovni cilj, autori eksplicitno razmatraju i integrišu nekoliko troškovnih parametara: prihod od realizovanih narudžbina, troškove čuvanja kola nekorišćenih u ranžirnim stanicama, troškove neispunjene tražnje i troškova kretanja kola između stanica. Autori baziraju svoj model na pretpostavci o stohastičnosti ponude, tražnje i vremena putovanja. Model koristi mrežu prostor-vreme čiji čvorovi predstavljaju lokacije stanica u određenim vremenskim trenucima, dok lukovi predstavljaju kretanja kola između stanica i čekanja kola između pojedinih vremenskih perioda u stanicama. Model maksimizira očekivanu profitabilnost koja je određena poznatom i prognoziranom ponudom i tražnjom za praznim kolima (nekoliko tipova, u različitim stanicama na mreži), vremenima putovanja, prihodima, troškovima čuvanja i nedostatka teretnih kola. Model određuje, korišćenjem aktuelne informacije i prognoza, najbolju odluku za tekući period i predviđa buduće odluke o raspodeli. Kako vreme protiče, dodatna informacija postaje raspoloživa i model može biti ponovo pokrenut za novi tekući period korišćenjem ažuriranih podataka. Pretpostavljeno je da su očekivanja i varijanse buduće ponude i tražnje (u svakoj stanici za svaki period, za svaki tip kola) kao i očekivanja i varijanse (pretpostavljene negativne binomne raspodele) vremena putovanja između svakog para stanica poznati parametri. Autor predstavlja proračunske tehnike za neke od ovih veličina, kao i detalje o razvoju stohastičkih jednačina koje integrišu ove parametre. Model je nelinearni problem optimizacije sa linearnim dekomponujućim ograničenjima. Turnquist i Jordan su takođe primenili Frank-Wolfeov algoritam (Frank i Wolfe, 1956) za rešavanje problema.

Mendiratta (1981) posmatra problem raspoređivanja praznih kola kroz decentralizovanu strukturu odlučivanja. Razvija dva interaktivna podmodela, mrežni centralizovani i terminalni decentralizovani čiji se mehanizam koordinacije uspostavlja kroz rasporedne cene. One su nosioci informacije o vrednostima ponude kola u stanicama i to preko cena u senci. Kriterijumska funkcija terminalnog modela uzima u razmatranje minimizaciju prevoznih, skladišnih i troškova nedostatka kola. Mrežni model ima formu klasičnog transportnog problema. Terminalni model uzima u obzir stohastičku prirodu vremena prevoženja (podvrgnuta je zakonu Erlangove raspodele), stohastičke osobine tražnje te uspostavlja izvesnu analogiju sa sistemima zaliha i optimalnim upravljanjem.

Kraft (2002) je predložio metod za upravljanje procesom raspodele teretnih kola koji obuhvata sistem rezervacija i ograničenja kapaciteta. Predloženi metod se delimično temelji na posebnom pristupu formiranja cena (bidovanja) za istovremenu analizu ponude železničkih usluga i kretanja teretnih kola sa ciljem da se maksimizira profit. Predložena metodologija omogućava određivanje željenog vremena isporuke pošiljaka uzimajući u obzir potrebe korisnika usluga i prognozirane raspoložive kapacitete vozova. Problem rutiranja pošiljaka je dekomponovan na deterministički proces dinamičkog raspoređivanja kola za pošiljke koje su već primljene na prevoz i stohastički proces formiranja cena za pojedine segmente voznih ruta za predviđanje buduće tražnje za koju vremena isporuke tek trebaju da se odrede. Oba modela su formulisana kao problemi višerobnog protoka na mreži. Svaka pošiljka, koja se može sastojati od jednih ili većeg broja kola, se posmatra kao posebna roba. Subgradijentni algoritam je primenjen za rešavanje problema.

Powell i Topaloglu (2002) koriste tehnike stohastičke optimizacije za rešavanje dvonivovskih i višenivovskih problema za raspoređivanje praznih kola na železnici. Problem raspoređivanja praznih kola je okarakterisan sa izraženim stepenom stohastičnosti u ponudi, tražnji i vremenima putovanja praznih kola između stanica. Autori pored ovih ističu i neke dodatne specifičnosti raspodele praznih kola, kao što su vremenski pomereni informacioni proces i potreba za postojanjem diskretnih rešenja. Autori razmatraju niz algoritama za dvonivovske probleme sa mrežnom rekurzijom. Osnovne karakteristike problema (celobrojno rešenje, veličina problema) eliminišu scenario metode, stohastičku linearizaciju i

Bendersovu dekompoziciju (metod daje razlomljena rešenja). Prema tome, za rešenje problema raspoređivanja praznih kola autori predlažu metode koje aproksimiraju funkciju rekurzije na drugom nivou uz maksimalno očuvanje osnovne mrežne strukture. Predstavljene tehnike se zasnivaju na izvođenju separabilnih nelinearnih aproksimacija funkcije cilja. Kako je potrebno dobiti celobrojna rešenja, autori koriste "deo po deo" linearne aproksimacije sa prekidnim tačkama koje postoje samo u celobrojnim vrednostima ponude. Predstavljeni su metod pomoćne funkcije za procenu datih funkcija i relativno nova vrsta strukturnih adaptivnih metoda procene.

2.1.2.3 Hibridni pristupi

Železničke kompanije dugi niz godina koriste simulacione modele za procenu sveukupnog uticaja operativnih politika i postupaka. Simulacioni modeli u opštem slučaju predstavljaju detaljne interpretacije struktura ranžirnih stanica ili mrežnih struktura i operacija prevoza, i samim tim, imaju veliki kredibilitet u železničkoj privredi. Baker (1977) i Assad (1980) između ostalih, daju pregled simulacionih modela primenjenih u železničkoj privredi. Ovi modeli su međutim vrlo zahtevni (sa aspekta proračunskog vremena i računarskih zahteva).

Ratclife, Vinod i Sparrow (1984) predlažu kombinovanu simulaciono-optimizacionu metodologiju za rešavanje zadatka raspodele praznih kola. Korišćeni algoritam počiva na linearnom programiranju (za rešavanje zadatka raspodele kola pri poznatim zahtevima) i stohastičkom linearnom programiranju (za izmeštanje praznih teretnih kola ka stanicama u kojima se očekuju narudžbine). Kriterijumska funkcija ovih zadataka je minimizacija ukupnog vremena putovanja na mreži sa N stanica. Stohastički linearni model koristi stanja prirode, koja zapravo predstavljaju vektor tražnje stanice sa odgovarajućom verovatnoćom. Kako su ponuda i tražnja kola poznata iz statistika železničkih preduzeća, u simulacionim eksperimentima one se dobijaju iz poznatih raspodela. Za simulaciju je izabran programski jezik SLAM. Dobijeni rezultati na bazi 36-to časovnog i 48-mo časovnog intervala između realizacija algoritma za mrežu Frisco železnice pokazuju značajne uštede u ukupnom vremenu prevoženja.

2.1.3 Koncept zajedničkih teretnih kola

Tradicionalna strategija prepozicioniranja teretnih kola podrazumeva povratak istovarenih kola u stanicu utovara. Ovo je vrlo jednostavan i pogodan pristup kojim se značajan deo teretnih pošiljaka alocira sa područja jedne železnice na područje druge železnice. U cilju smanjenja troškova praznog kretanja uvodi se koncept zajedničkih teretnih kola. U okviru sporazuma o zajedničkom korišćenju teretnih kola između železnica, a u nekim slučajevima i korisnika prevoza, kola istovarena u odredišnoj stanici mogu biti otpremljena u bilo koju od stanica ponovnog utovara.

Automobilska industrija u Sjedinjenim Američkim Državama, kao jedan od glavnih pobornika ove ideje, počela je 1981. godine sa primenom koncepta zajedničkih kola za transport automobila višenivovskim auto kolima od fabrika do istovarnih tačaka. Te 1981. godine primenom ovog koncepta, jedna autmobilska kompanija ostvarila je značajno smanjenje pređenog puta teretnih kola u praznom stanju (64 miliona kola km za slučaj od 13 proizvodnih lokacija i 40 istovarnih tačaka sa 5500 kola u zajedničkom kolskom parku) u poređenju sa tradicionalnim metodom (Asocijacija američkih železnica (1982). Osnovne specifičnosti modela za upravljanje parkom zajedničkih teretnih kola date su u narednoj tabeli.

Tabela 2.4 *Osobine modela za upravljanje parkom zajedničkih teretnih kola*

Autori	Godina nastanka	Vrsta modela	Pristup rešavanju
Asocijacija Američkih železnica	1982	Linearno programiranje	Simpleks algoritam
Kikuchi	1985	Linearni problem pošiljke na mreži prostor-vreme	Simpleks algoritam
Glickman i Sherali	1985	Transportni problem	NETFLO algoritam/Dantzig-Wolfe dekompozicija
Adamidou i ostali	1993	Opšti model Nash-ove ravnoteže	Gaus-Seidelov algoritam
Sherali i Suharko	1998	Model mrežnog toka	Heuristička dekompozicija
Sherali i Lunday	2011	Analiza marginalnih troškova	Pristup teorije igara

Linearno programiranje je predstavljalo osnovnu metodologiju za najranije modele alokacije (Asocijacija američkih železnica (1982)). Veliki broj istraživanja je sproveden sa ciljem da se unapredi ova metodologija. Najznačajniji doprinosi su predstavljeni u nastavku.

Kikuchi (1985) predlaže model za centralni monitoring i upravljanje homogenim parkom zajedničkih teretnih kola. Pouzdane prognoze ponude (od centralnog monitoring sistema) i tražnje (od korisnika usluge) su pretpostavljene kao poznate. Cilj modela je formiranje dnevnih instrukcija o dispečiranju za svaka kola u sistemu tako da se minimiziraju ukupni troškovi čuvanja kola, putovanja i nedostatka za određeni planski period. Model je formulisan kao linearni problem pošiljke na mreži prostor-vreme gde se lukovi koriste za predstavljanje kretanja i stajanja teretnih kola.

Glickman i Sherali (1985) analiziraju isti problem s tim što oni uzimaju u obzir različite vrste kola sa ograničenom zamenljivošću. Njihov pristup se razlikuje u tome što oni razvijaju nekoliko modela, pri čemu svaki ima za cilj pronalaženje optimalne raspodele praznih zajedničkih kola iz različitih aspekata. Prvi model sistema minimizira ukupni trošak raspodele i razmene zajedničkog parka praznih teretnih kola. Formulisan je kao klasični transportni problem dobijen na osnovu problema dizajna mreže prostor-vreme koja obuhvata i lukove nedostatka. Drugi model ima za cilj poboljšanje ravnoteže relativnih koristi između železnica prema definisanom kriterijumu uz pomeranje rešenja u određenom opsegu optimuma prvog modela. Treći „kompanijski“ model minimizira ukupan trošak u odnosu na prethodne standarde o koristima koje raspodela i međusobna zamena kola donose svakoj kompaniji. Poređenje rešenja modela omogućava procenu troška ispunjenja ciljeva svake od železnica. Modifikovani kod za mrežnu optimizaciju NETFLO (Kennington i Helgason (1980)) se koristi za rešavanje transportnog problema. Ostali modeli se rešavaju primenom algoritma Dantzig-Wolfe dekompozicije korišćenjem mrežnog koda za potprobleme i postupka heurističkog zaokruživanja za dobijanje celobrojnih rešenja.

Adamidou i ostali (1993) su zaključili da je problem pronalaženja globalne strategije raspodele uz maksimiziranje profita za železnice koje dele kolski park najbolje predstaviti kao uopšteni model Nashove ravnoteže. Njihov model obuhvata promenjive uparivanja koje povezuju potprobleme višerobnog protoka pojedinih železnica, a rešen je Gauss-Seidelovim algoritmom koji iterativno obrađuje pojedine potprobleme. Pri rešavanju potproblema za određenu železnicu, promenljive uparivanja su fiksirane korišćenjem optimalnih tokova dobijenih pri prethodnom rešavanju potproblema za druge železnice. Pristup je testiran na realnom primeru od tri železnice i utvrđeno je da je pristup brz i pouzdan. Različite strategije rešavanja su poređene kao i različita stanja tražnje.

Sherali i Suharko (1998) predstavljaju taktički model za podršku pri centralnom upravljanju raspodelom praznih kola za transport automobila. Problem obuhvata grupu od osam glavnih proizvođača automobila koji su formirali park teretnih kola kako bi se poboljšalo iskorišćenje i smanjio broj pređenih kilometara u praznom stanju. Autori su razvili i testirali dve formulacije modela raspoređivanja praznih kola na taktičkom nivou. Prvi model koji je u suštini transportni model mrežnog toka, uzima u obzir praktična pitanja kojima se tretiraju neizvesnosti u vremenima putovanja, prioriteti u odnosu na vreme i lokaciju tražnje, više ciljeva koji se odnose na minimiziranje različitih stepena kašnjenja u isporuci i politika grupisanja pošiljaka. Unutar ovog okvira, razvijen je alat odlučivanja zasnovan na ograničenjima šanse u cilju određivanja da li uključiti određeni luk na osnovnoj mreži prostor-vreme, zatim mehanizam skaliranja prioriteta lokacija tražnje za određivanje mere jednakosti između pojedinih proizvođača automobila, kao i kaznena šema otežavanja za adresiranje verovatnosno varirajućih stepena kašnjenja na bilo kojoj ruti mreže prostor-vreme. U drugom modelu obuhvaćena je politika grupisanja pošiljaka uvođenjem skupa binarnih promenljivih koje upravljaju maksimalnim brojem blokova kola formiranih u svakoj izvorišnoj lokaciji tokom svakog dana. Ova dodatna osobina rezultira u formulaciji mrežnog toka. Smanjenjem stepena relaksacije modela uključivanjem podesnih nejednačina i podesnih faza prethodne obrade, moguće je na optimalan način rešiti problem koji ima 5000-8000 lukova. Međutim, za primere većih dimenzija neophodno je bilo razviti postupak heurističkog rešavanja. Predložena je šema koja sekvencijalno konstruiše rešenje korišćenjem pravila za određivanje podesne kolekcije čvorova tražnje, zatim pravila za odabir jednog od ovih čvorova za parcijalno zadovoljenje njegove tražnje na osnovu oportunitetnih troškova i pravila za odlučivanje o tome koji izvor bi trebao da formira grupu kola određene veličine tako da se zadovolje potrebe čvora tražnje. Pažljivim razmatranjem 21 kompozicije ova tri pravila na velikom broju različitih test slučajeva autori su predložili određenu kombinaciju za primenu. U sveukupnoj strategiji rešavanja, prvi model se koristi za brzo rešavanje problema koji ne sadrže grupisanje pošiljaka. Ovo pruža uvid u analizu odnosa između koristi od formiranja manjeg broja vozova forsiranjem politike konsolidovanja pošiljaka i većih troškova raspodele zajedno sa kaznama za kašnjenje/nedostatak.

Sherali i Lunday (2011) analiziraju problem ravnomerne raspodele datog teretnog kolskog parka koji se koristi zajednički od strane konzorcijuma proizvođača automobila i železnica koje učestvuju u sporazumu o zajedničkom korišćenju teretnih kola. Predloženim pristupom se poboljšava aktuelna praksa identifikacijom njenih nedostataka u odnosu na ravnomernu raspodelu teretnih kola. Takođe, predlažu se četiri poboljšane alternativne šeme za alokaciju železničkih kola na pošiljaoce koje su zasnovane na obuhvatanju vremena čekanja u tranzitu za proračun faktora proporcionalnosti za tovarene kola-dane, zatim na dve različite tehnike koje koriste analizu marginalnih troškova, i na pristupu teorije igara koja koristi alokacije Shapley[1] vrednosti. Autori pružaju uvid u interpretaciju teorije igara aktuelne šeme za alokaciju teretnih kola na železnice koja je zasnovana na Shapley vrednostima i predlažu alternativnu šemu za alokaciju kola na pošiljaoce uz razmatranje ukupnih troškova kapitala i operativnih troškova za izvođenje faktora proporcionalnosti. Za svaku kombinaciju aktuelnih i predloženih šema alokacije za pošiljaoce i prevoznike, autori testiraju relativnu korist u odnosu na aktuelni standard korišćenjem skupa realnih primera izvedenih na osnovu podataka TTX kompanije.

[1] Shapley vrednost predstavlja koncept rešavanja u kooperativnoj teoriji igara.

2.1.4 Kombinovana alokacija praznih i tovarenih kola

Tražnja za praznim kolima nastaje kao posledica neuravnoteženih kretanja tovarenih kola. Samim tim, logično je da se na operativnom nivou ove dve vrste kretanja teretnih kola integrišu u jedan model za alokaciju teretnih kola. Ključne osobine modela za kombinovanu alokaciju praznih i tovarenih teretnih kola date su u narednoj tabeli.

***Tabela 2.5** Osobine modela za kombinovanu alokaciju praznih i tovarenih teretnih kola*

Autori	Godina nastanka	Vrsta modela	Pristup rešavanju
Gorenstein i ostali	1971	Višerobni problem protoka na mreži	Simpleks algoritam
Shan	1985	Problem troškovno minimalnog protoka na mreži	Mrežni simpleks algoritam
Kornhauser i Adamidou	1986	Višerobni problem protoka	Iterativna heuristika
Haghani i Daskin	1986	Nelinearno mešovito celobrojno programiranje	Heuristička dekompozicija

Gorenstein i ostali (1971) predlažu računarski proces upravljanja kretanjem kola, koji će biti obuhvaćen sistemom upravljanja u realnom vremenu sa ciljem da se poboljša iskorišćenje teretnih kola i zadovoljenje korisnika usluga. Sistem raspoređivanja je sačinjen od modela alokacije praznih kola i potpunog modela raspoređivanja saobraćaja koji predstavlja LP višerobnu formulaciju minimalnog troška na mreži definisanu ranžirnom politikom pojedinih ranžirnih stanica i redom vožnje vozova. Problem alokacije praznih kola razmatra samo homogen teretni kolski park. Autori naglašavaju uticaj koje različiti tipovi kola i njihovi međuodnosi mogu imati na rešenje i preporučuju da, u kontekstu predloženog sistema, može biti podesno analizirati međuzavisnosti, a zatim razmotriti svaki tip kola posebno.

Shan (1985) razvija dva modela koji služe za poboljšanje iskorišćenja teretnih kola i kao alat analize za probleme koji nastaju iz zajedničkog korišćenja kola od strane više železnica. Prvi model tretira slučaj homogenog kolskog parka kao problem pošiljke na mreži prostor-vreme. U drugoj formulaciji razmotreno je nekoliko različitih tipova kola i problem je formulisan kao problem troškovno minimalnog protoka na mreži poznatog kapaciteta. Mrežni simpleks algoritmi se koriste za rešavanje dve formulacije.

Kornhauser i Adamidou (1986) posmatraju problem upravljanja teretnim kolima u kontekstu železnica Sjedinjenih američkih država kao nekooperativnu igru N osoba formulisan kao višerobni problem protoka na mreži prostor-vreme koja predstavlja upravljačke opcije svake železnice. Ove opcije se odnose na zadržavanje, otpremu praznih ili tovarenih kola unutar ili van mreže određene železničke uprave. Problem je rešen iterativnom heuristikom koja rešava svaki problem sve dok se ne postigne ravnotežno stanje za sve promenljive uparivanja. Pristup nije primenljiv za realne slučajeve usled naglog rasta dimenzija problema i vremena izračunavanja sa brojem razmotrenih železnica.

Haghani i Daskin (1986) predlažu kombinovani model za rutiranje vozova i alokaciju praznih kola zasnovan na mreži prostor-vreme kojim se uzimaju u obzir operacije u ranžirnim stanicama kao i saobraćaj vozova između ranžirnih stanica. Rezultujuća formulacija nelinearnog mešovitog celobrojnog programiranja je rešena heurističkim postupkom kojim se problem prvo dekomponuje na vremenske nivoe, a zatim posebno razmatraju potproblem toka teretnih kola i potproblem toka lokomotiva.

2.2 Taktički i strateški modeli za upravljanje teretnim kolima

Rešavanju problema raspodele praznih teretnih kola se ne može potpuno pristupiti samo na operativnom nivou. Tokovi praznih kola predstavljaju važnu komponentu taktičkih i strateških problema kao što su planiranje na nacionalnom i regionalnom nivou, dizajn mreže usluga i dimenzionisanje teretnog kolskog parka.

2.2.1 Problemi dizajna mreže usluga

Železničke kompanije u robnom saobraćaju obavljaju svoju delatnost na kompleksnim mrežama sačinjenim od čvorova (koje čine veliki broj utovarno/istovarnih tačaka i ranžirne stanice za ranžiranje/formiranje robnih tokova) i fizičkih linkova (železničke pruge) koji povezuju ove čvorove. Jedan od osnovnih aspekata procesa odlučivanja ovih kompanija je taktičko planiranje aktivnosti (dizajn mreže usluga – rute i nivo usluge, politika obrade kolskih tokova u ranžirnim stanicama i rutiranje saobraćaja na mreži usluga) koje rezultira u formiranju jednog efikasnog operativnog plana železnice. Neki od najvažnijih pristupa rešavanju problema dizajna mreže usluga su u kratkim crtama izloženi u nastavku, a osnovne karakteristike ovih modela sadržane su u Tabeli 2.6.

Tabela 2.6 *Osobine modela za rešavanje problema dizajna mreže usluga*

Autori	Godina nastanka	Vrsta modela	Pristup rešavanju
Crainic i ostali	1984	Nelinearno mešovito celobrojno programiranje	Heuristički algoritam
Crainic i Roesseau	1984	Mrežni optimizacioni model	Algoritam zasnovan na dekompoziciji i generisanju kolona
Haghani	1989	Višerobni problem protoka na mreži	Heuristička dekompozicija
Holmerg i Hellstrand	1996	Mešovito celobrojno programiranje	Grananje i ograničavanje/Lagranžeova heuristika
Kwon i ostali	1998	Višerobni problem protoka na mreži	Generisanje kolona
Crainic	2000	Mešovito celobrojno programiranje	Grananje i ograničavanje
Kratica	2000	Mešovito celobrojno programiranje	Genetski algoritam
Kratica i ostali	2002	Mešovito celobrojno programiranje	Genetski algoritam
Campetella i ostali	2006	Višerobni problem protoka na mreži	Tabu pretraživanje
Fukasawa i ostali	2008	Višerobni problem protoka na mreži	Grananje i ograničavanje
Caprara i ostali	2011	Celobrojno linearno programiranje	Generisanje kolona

Crainic i ostali (1984). Kreirani optimizacioni model koji integriše odnose između operativne politike za rutiranje vozova, politike ranžiranja i formiranja u ranžirnim stanicama i alokacije ranžirnog rada između ranžirnih stanica, na taktičkom nivou planiranja. Cilj je generisanje ekonomski opravdanih globalnih operativnih strategija koje obezbeđuju dobar nivo usluge sa aspekta kašnjenja i pouzdanosti. Nelinearna formulacija mešovitog celobrojnog programiranja je data, a heuristički algoritam je testiran na realnim podacima generisanim za slučaj kanadskih nacionalnih železnica.

Crainic i Roesseau (1984) predstavljaju opšti okvir za modelovanje problema dizajna uslužne mreže (koje vidove prevoza koristiti i koju frekvenciju usluge obezbediti) za multimodalni teretni transport koji se zasniva na mrežnom optimizacionom modelu. Razvijeni pristup se može koristiti kao podrška za poboljšanje procesa strateškog i taktičkog planiranja. Problem je rešen primenom algoritma zasnovanog na principima dekompozicije i generisanja kolona.

Haghani (1989) je u svom radu analizirao interakciju između odluka o rutiranju i formiranju vozova i raspoređivanju praznih kola. Autor je predložio model kojim razmatra problem taktičkog rutiranja i formiranja vozova na dinamički način, a koji omogućava modelovanje operativne raspodele kola zajedno sa rutiranjem vozova. Model obezbeđuje odluke o rutiranju i formiranju vozova nalik klasičnim statičkim mrežnim modelima (Petersen i Fullerton (1975), Assad (1980)). Međutim, zbog svoje dinamičke prirode model može da upravlja varijabilnošću tražnje i donosi odluke o raspoređivanju praznih kola kao i o optimalnom vremenskom intervalu između uzastopnih voznih usluga na određenom paru izvorišno-odredišnih stanica. Tehnika heurističke dekompozicije je razvijena za rešavanje problema. Postupak rešavanja koristi specijalnu strukturu problema i dekomponuje isti u manje potprobleme. Empirijsko istraživanje je sprovedeno kako bi se testirale performanse optimizacionog modela i postupka rešavanja.

Holmberg i Hellstrand (1996) razmatraju opšti problem dizajna mreže koji se može primeniti kao optimizacioni model za planiranje raspodele praznih kola na železnici. Autori analiziraju NP-težak problem dizajna mreže sa po jednim izvorišno-odredišnim parom za svaku vrstu robe na mreži. U radu nisu uzeta u obzir ograničenja kapaciteta pri raspodeli praznih kola s obzirom na stratešku prirodu problema, ali je razmotrena mogućnost korišćenja verzije bez kapaciteta kao potproblema problema sa kapacitetima koji bi mogao biti rešen metodom relaksacije. Za pronalaženje egzaktnog optimalnog rešenja problema dizajna mreže neograničenog kapaciteta primenjena je Lagranžeova heuristika u okviru tehnike grananja i ograničavanja. Lagranžeova heuristika koristi Lagranžeovu relaksaciju kao potproblem, rešavajući Lagranžeov dual subgradijentnom optimizacijom, u kombinaciji sa primalnom heuristikom (Bendersov potproblem) obezbeđujući pri tom primalna dopustiva rešenja. Proračunski testovi na problemima različitih veličina i različitih struktura navode na zaključak da je metod uspešniji, sa aspekta veličine problema i vremena rešavanja, u odnosu na savremene algoritme mešovitog celobrojnog programiranja.

Kwon i ostali (1998) predstavljaju nekoliko različitih načina za poboljšanje tekućih praksi za raspoređivanje teretnih kola i dinamički model za rutiranje i raspoređivanje teretnih kola. Razvijeni dinamički model uključuje heterogenost i varijabilnost saobraćaja i ograničenja kapaciteta voza tako da proizvodi planove putovanja koji su konzistentni sa ograničenjima dužine voza i osetljivi na uslužne zahteve korisnika. Za predstavljanje vremenskog i prostornog kretanja kola na železničkoj mreži i određivanje ruta i rasporeda kola tokom planskog perioda, korišćena je mreža prostor-vreme. Kretanja kola preko mogućih sekvenci kola-blok kola i blok kola-voz, aktivnosti obrade kola u stanici, i mogućih čuvanja kola u stanici su predstavljena kao različite vrste lukova na mreži prostor-vreme. Četiri različite vrste lukova se koriste: luk kretanja, luk obrade, luk čuvanja i veštački luk. Luk kretanja predstavlja definisani blok sa odgovarajućim voznim rasporedom. Luk obrade predstavlja aktivnost obrade kola u stanici. Luk čuvanja predstavlja čuvanje kola sve do naredne raspoložive otpreme voza u stanici. Veštački lukovi se koriste za predstavljanje vremenskog prozora isporuke. Problem je formulisan kao višerobni problem protoka na mreži prostor-vreme za određivanje kombinovanih ruta i rasporeda kretanja kola za dati period planiranja. Cilj modela je pronalaženje optimalnog niza tokova roba na mreži prostor-vreme i formiranje odgovarajućih planova putovanja tako da se minimiziraju ukupni kazneni troškovi (što je ekvivalentno maksimiziranju ispunjenosti uslužnih standarda). Pretpostavljeno je da su trošak voza, trošak čuvanja kola i trošak kolskog vremena fiksni tokom planskog perioda. Algoritam generisanja kolona se koristi za rešavanje predstavljenog višerobnog problema protoka. Model je testiran na hipotetičkoj železničkoj mreži zasnovanoj na podmreži jedne od glavnih železnica u Sjedinjenim Američkim Državama.

Crainic (2000) je načinio pregled različitih pristupa modelovanju dizajna uslužnih mreža i razvoju tehnika matematičkog programiranja za mrežni dizajn.

Kratica (2000) u svojoj doktorskoj disertaciji predstavlja genetski algoritam za rešavanje problema dizajniranja mreže neograničenog kapaciteta. Sekvencijalna GA implementacija sadrži fleksibilno realizovane razne varijante genetskih operatora selekcije, ukrštanja i mutacije. Osim njih dato je i nekoliko funkcija prilagođenosti, razni kriterijumi završetka rada GA i različite politike zamene generacija. Rezultati izvršavanja na datim problemima pokazuju da je sekvencijalna GA implementacija postigla rezultate koji su u svim slučajevima uporedivi sa heuristikama i ostalim metodama poznatim u literaturi, a u nekim slučajevima i bolji.

Kratica i ostali (2002) su predstavili genetski algoritam za rešavanje problema dizajniranja mreže neograničenog kapaciteta pri čemu svaka roba ima samo jedno izvorište/odredište.

Campetella i ostali (2006) su predstavili matematički model za dizajniranje mreže usluga koja predstavlja skup izvorišno-odredišnih konekcija. Rezultujućim modelom obuhvaćena su kretanja tovarenih i praznih kola, kao i troškovi usputnog ranžiranja teretnih kola. Model predlaže skup usluga koje treba ponuditi, kao i broj vozova i broj i vrstu kola koja će saobraćati na svakoj konekciji. Kvalitet usluge, meren kroz ukupno vreme putovanja, se dobija minimiziranjem vremena čekanja kola u usputnim ranžirnim stanicama. Pristup vodi problemu dizajna višerobne mreže sa konkavnim troškovnim funkcijama pojedinih linkova na mreži. Za rešavanje problema autori koriste postupak tabu pretraživanja koji sadrži mehanizme perturbacije za forsiranje algoritma ka pretraživanju većeg dela oblasti dopustivih rešenja. Proračunski rezultati na realnim primerima pokazuju značajno poboljšanje u odnosu na aktuelnu praksu.

Fukasawa i ostali (2008) su predstavili metod za određivanje optimalnog toka praznih i tovarenih kola sa ciljem da se maksimiziraju profit, prihod ili prevezene količine robe, uz dat red vožnje teretnih vozova zajedno sa njihovim vučnim kapacitetima. Autori su predložili celobrojni model višerobnog protoka za problem čija linearna relaksacija vodi dobrim gornjim granicama, ali uz vrlo veliki broj promenljivih i ograničenja. Da bi model bio primenjiv u praksi, autori su primenili fazu prethodne obrade koja smanjuje veličinu modela dva do tri puta. Redukovani model može biti rešen standardnim paketima za celobrojno programiranje. U radu su predstavljeni proračunski rezultati na realnim podacima najveće železničke kompanije u Latinskoj Americi.

Caprara i ostali (2011) su analizirali problem dizajniranja skupa profitabilnih teretnih ruta na železničkom koridoru, uzimajući u obzir nivo usluge koji je zahtevan od strane različitih roba. Profit koji se ostvaruje prevozom robe je nelinearna funkcija vremena putovanja. Autori su predložili model celobrojnog linearnog programiranja i primenili tehniku generisanja kolona kao metod rešavanja. Proračunski rezultati na realnom slučaju koridora koji prolazi kroz 11 evropskih zemalja pokazuju da je moguće dobiti rešenja bliska optimalnim.

2.2.2 Procena tražnje

Neprekidni rast populacije i izražena ekonomska aktivnost impliciraju povećanje intenziteta robnih tokova na transportnoj mreži. Kako tražnja za robnim prevozom raste, tako se uz odsustvo odgovarajućih povećanja kapaciteta mobilnost putnika i robe smanjuje. Povećanje obima robnog transporta predstavlja motiv za preciznu procenu kretanja pošiljaka kao i prognoziranje očekivanih budućih robnih tokova.

U kontekstu železničkog saobraćaja, istraživači i praktičari su saglasni da nedostatak odgovarajućeg i pouzdanog informacionog sistema za praćenje raspoloživosti praznih teretnih kola i tražnje korisnika usluga predstavlja vrlo značajan problem. Osim toga, raspolaganje ovim informacijama je od ključnog značaja za pravilnu alokaciju saobraćaja kao i za potrebe dizajna sistema. Neophodno je razmotriti tri različita aspekta ovog problema:

- Procena raspoloživosti praznih teretnih kola u izvorišnim stanicama koja se može dobiti iz analize prethodnih tovarenih pošiljaka;
- Određivanje potrebe za praznim teretnim kolima u odredišnim stanicama za naredni utovar ili bilo koju drugu aktivnost;
- Prognoziranje praznih tokova između određenih parova izvorišno-odredišnih stanica.

Prva dva problema su slična problemu prognoziranja obima prevoza u putničkom ili robnom segmentu ostalih problema planiranja u saobraćaju. Precizna procena ponude i tražnje za praznim kolima je neophodan ulaz za modele alokacije teretnih kola kao i za modele taktičkog i strateškog planiranja.

Treći problem odgovara proceni izvorišno-odredišnih matrica koja je potrebna, bilo samostalno bilo u kombinaciji sa izvorišno-odredišnim matricama tovarenih teretnih tokova, za nacionalno ili regionalno strateško planiranje u robnom saobraćaju. Treba takođe napomenuti da procena ponude i tražnje praznih teretnih kola ne može jednostavno biti izvedena samo iz tovarenih tokova, već je još nekoliko faktora potrebno razmotriti: održavanje, otkazi, uvođenje novih kola u saobraćaj, koncept zajedničkih teretnih kola i iznajmljivanje teretnih kola. Ponuda i tražnja se često procenjuju iz statističkih analiza realizovanih tokova praznih i tovarenih teretnih kola (Powell (1987), Dejax i ostali (1986)).

Kako ne postoji veliki broj istraživanja u železničkom saobraćaju u nastavku su izloženi i najvažniji pristupi iz oblasti modelovanja tražnje za uslugama u robnom segmentu ostalih vidova saobraćaja.

Noviji pregledi različitih vrsta modela u robnom saobraćaju su sadržani u Cambridge Systematics (1997), poglavljima 32-34 knjige Hensher-a i Button-a (2000), radu koji su objavili Pendyala i ostali (2000), poglavljima koja su napisali Regan i Garrido i Shankar i Pendyala u knjizi o istraživanju ponašanja putovanja (Hensher(2001)), kao i u radu Willumsena (2001).

Mnogi koncepti modelovanja koji su primenjeni u prognoziranju robnog saobraćaja su prvobitno razvijeni za putnički saobraćaj. Većina autora (Shankar i Pendayla, D'Este) su saglasni da sekvencijalna struktura modelovanja putničkog saobraćaja od četiri koraka može u potpunosti biti primenjena u robnom saobraćaju. Međutim, u okviru svakog od ovih koraka modeli za robni saobraćaj se mogu značajno razlikovati od modela u putničkom saobraćaju. Važne razlike između tržišta putničkog i robnog saobraćaja su raznolikost donosioca odluka u robnom saobraćaju (pošiljaoci, prevoznici, operatori), veliki broj različitih vrsta roba koje se prevoze i ograničena raspoloživost podataka (parcijalno raspoloživi podaci iz razloga poverljivosti).

Četiri koraka u kontekstu sistema modelovanja robnog saobraćaja su (de Jong i ostali (2004)):

- Proizvodnja i privlačenje. U ovom koraku određuju se količine roba koje će biti prevezene iz različitih izvorišnih zona, kao i količine koje će biti prevezene u različite odredišne zone. Izlaznu dimenziju predstavljaju tone roba. U među fazama modela proizvodnje i privlačenja dimenziju mogu predstavljati i novčane jedinice.
- Distribucija. U ovom koraku, određuju se robni tokovi između izvorišta i odredišta (ćelije izvorišno-odredišnih matrica). Dimenziju predstavljaju tone.
- Modalni split. U ovom koraku, se određuje alokacija robnih tokova na vidove saobraćaja (drumski saobraćaj, železnički saobraćaj, kombinovani saobraćaj, unutrašnji plovni putevi).
- Raspoređivanje. Nakon prevođenja tokova u tonama u vozne jedinice, one mogu biti raspoređene na mreže (u nekim modelima ovo se odnosi na raspoređivanje drumskih robnih tokova zajedno sa putničkim automobilima na drumske mreže).

U nastavku je načinjen pregled najznačajnijih pristupa u okviru svake od ove četiri grupe modela. U narednoj tabeli dat je spisak radova koji će biti analizirani. Radovi su klasifikovani u odnosu na tri kriterijuma: metod rešavanja, vrstu problema, i modalnost.

Tabela 2.7 *Osnovne osobine modela za modelovanje tražnje za uslugama u robnom saobraćaju*

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Coutu	1978	Gravitacioni model	Modelovanje tražnje	Železnički sektor

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Abdelwahab i Sargious	1992	Binarni probit model Linearna regresija	Modelovanje tražnje	Opšti
Dougherty	1995	Neuronske mreže	Modelovanje tražnje	Opšti
Balcock i ostali	1999	ARIMA	Modelovanje tražnje	Železnički sektor
Garrido i Mahmassani	2000	Multinomijalni probit model	Modelovanje tražnje	Drumski sektor
Fite, Taylor, Usher, English i Roberts	2001	Višestruka regresija	Modelovanje tražnje	Drumski sektor
Sivakumar i Bhat	2002	Model raspodele sa delimičnim razdvajanjem	Modelovanje tražnje	Opšti
Wong i ostali	2003	Fuzzy Linearna Regresija	Modelovanje tražnje	Železnički sektor
Nijkamp, Reggiani i Tsang	2004	Modeli diskretnog izbora i Modeli neuronskih mreža	Modelovanje tražnje	Opšti
Train i Wilson	2007	Model diskretnog izbora	Modelovanje tražnje	Opšti
Holguin-Veras i Patil	2008	Metod procene izvorišta i odredišta	Modelovanje tražnje	Drumski sektor
Milenković i ostali	2012a	ANFIS	Modelovanje tražnje	Železnički sektor
Milenković i ostali	2012b	ANFIS, ARIMA	Modelovanje tražnje	Železnički sektor
Milenković i ostali	2013	Kalmanov filter	Modelovanje tražnje	Železnički sektor

2.2.2.1 Modeli za proizvodnju i privlačenje

U prvom koraku mogu se razlikovati četiri vrste modela koji se koriste u praksi:

- Modeli trenda i vremenskih serija;
- Modeli dinamike sistema;
- Zonski modeli generisanja putovanja;
- Ulazno-izlazni i srodni modeli.

U modelima trenda, istorijski trendovi su ekstrapolirani u budućnost. Vremenske serije podataka se koriste za razvoj modela različitih nivoa složenosti, počev od jednostavnih modela faktora rasta do složenih modela autoregresivnih pokretnih sredina. Modeli vremenskih serija sa objašnjavajućim promenljivim, kao što je bruto domaći proizvod, zaposlenost, broj stanovnika i druge, su takođe razvijeni i primenjeni u praksi.

Dougherty (1995) je načinio pregled istraživanja koja se zasnivaju na primeni neuronskih mreža za analizu i rešavanje problema iz oblasti saobraćaja, među kojima je i primena u oblasti prognoziranja transportne tražnje.

Balcock i ostali (1999) su analizirali tražnju za prevozom žitarica na železnici. Autori u radu specificiraju model za prognoziranje kvartalnog obima prevoza žitarica na železnicama Sjedinjenih Američkih Država i empirijski procenjuju razvijeni model. Izbor objašnjavajućih promenljivih zahteva da ove promenljive imaju teorijski odnos sa ponudom i/ili tražnjom za prevozom žitarica železnicom i da podaci za objašnjavajuće promenljive budu vođeni na kvartalnom nivou. Međutim, postoji samo nekoliko mogućih objašnjavajućih promenljivih koje se vode sa kvartalnom učestalošću i one imaju vrlo mali uticaj na obim prevoza žitarica na železnici. Takođe, ekonomski proces koji generiše kvartalne prevoze žitarica železnicom je vrlo kompleksan i veoma je teško modelovati ovaj proces regresionim tehnikama. Iz ovih razloga autori su odlučili da primene model vremenskih serija. Model prognoziranja je generisan iz ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) modela koji su razvili Box i Jenkins (1976). AR(4) model je procenjen korišćenjem postupka procene metodom maksimalne verodostojnsti za period 1987:4-1997:4. Aktuelni obim prevoza za ovaj period je poređen sa prognozom koja je generisana predloženim modelom.

Fite i ostali (2002) modeluju tražnju u drumskom robnom saobraćaju primenom modela stepenaste višestruke regresije kojima se povezuju obim prevoza i niz nacionalnih, regionalnih i lokalnih ekonomskih pokazatelja. Modeli su formirani korišćenjem velikog skupa aktuelnih podataka jednog od najvećih prevoznika na svetu.

Wong i ostali (2003) analiziraju tražnju u železničkom robnom saobraćaju kao proces koji se neprekidno menja u prostoru i vremenu i koji je pod uticajem velikog broja kvalitativnih i kvantitativnih faktora. U cilju razvoja racionalnijeg procesa planiranja železničkog robnog saobraćaja postoji potreba za preciznim prognoziranjem tražnje u dinamičkom i neizvesnom okruženju. U analizama konvencionalne linearne regresije, devijacije između realizovanih i procenjenih vrednosti su pretpostavljene kao greške realizacije. Autori u svom radu, pristupaju problemu prognoziranja iz jedne drugačije perspektive posmatrajući ove devijacije kao rasplinutost strukture sistema. Predstavljen i diskutovan je metod fuzzy linearne regresije. Na osnovu analize karakteristika problema prognoziranja u železničkom robnom saobraćaju, predloženi metod je primenjen na realnom primeru.

U ASTRA (Assesment of Transport Strategies) modelu dinamike sistema (razvijenom u projektu za evropsku komisiju), promene u prevezenim količinama tokom vremena i povratna sprega ka/od privrede, korišćenje zemljišta i okruženje su eksplicitno modelovani (ASTRA, 2000). U makroekonomskom modulu predviđa se rast bruto domaćeg proizvoda. Dobijena predviđanja se koriste u modulu regionalne ekonomije, koji daje tražnju za prevozom sa aspekta tokova u tonama po svakom izvorišno-odredišnom paru tačaka. U transportnom podmodelu ovi tokovi se raspoređuju na vidove saobraćaja i virtuelne linkove. Promene u transportnoj tražnji mogu uticati na bruto domaći proizvod preko prevoznih troškova. Parametri modela dinamike sistema se obično ne dobijaju iz statističke procene, već iz postojeće literature, probanjem početnih vrednosti i proverom rezultujućeg dinamičkog ponašanja sistema (probanje i greška). Model dinamike sistema bi mogao da obuhvati korake distribucije i raspodele na pojedine vidove saobraćaja. Međutim, modeli dinamike sistema ne sadrže dovoljno prostornih i mrežnih detalja za analizu međuzonskih tokova i opterećenja po linkovima.

Zonske stope putovanja za proizvodnju i privlačenje se obično izvode iz klasifikacije unakrsno-sekcijskih podataka o obimu prevoza ka/od svake zone u oblasti koja se razmatra u više homogenih tipova zona (Cambridge Systematics (1997)).

Ulazno-izlazni modeli u suštini predstavljaju makro-ekonomske modele zasnovane na ulazno-izlaznim tabelama. Ove tabele opisuju, u novčanim jedinicama, šta svaki sektor ekonomije isporučuje ostalim sektorima, uključujući takođe i finalnu tražnju od strane korisnika, uvoza i izvoza. Nacionalne ulazno-izlazne tabele su razvijene za mnoge države, obično od strane zavoda za statistiku. Poseban oblik ulazno-izlazne tabele, koji za mnoge države ne postoji, je više-regionalna ili prostorna ulazno-izlazna tabela. Ova tabela obuhvata pored isporuka između sektora i isporuke između regiona. Većina prostornih ulazno-izlaznih tabela razlikuju samo nekoliko velikih regiona u okviru države.

Primeri prostornih ulazno-izlaznih modela u robnom saobraćaju su:

- Italijanski nacionalni sistem za putnike i robu (Cascetta, 1997), koji koristi 17 sektora i 20 regiona i takođe poseduje koeficijente elasticiteta;
- REGARD model za Norvešku, sa 28 sektora, koji generiše tražnju koja se koristi u norveškom modelu robnog saobraćaja NEMO (Expedite, 2000);
- SCENES evropski sistem za modelovanje putnika i robe i njegov prethodnik STREAMS (Leitham i ostali, 1999), sa 33 sektora i više od 200 zona u Evropi i sa koeficijentima elasticiteta (SCENES Consortium, 2001).

2.2.2.2 Modeli distribucije

Kao i u prethodnom koraku, svi modeli distribucije koji postoje u literaturi su zasnovani na agregiranim podacima (podacima koji su grupisani prema određenom obrascu). Robni tokovi između izvorišnih i odredišnih zona se određuju na osnovu mera proizvodnje i privlačenja i mere prevoznog otpora koja je izražena kao trošak prevoza ili generalizovani trošak prevoza. Najčešće korišćeni metod je gravitacioni model. U takvim modelima, tok između dve zone je funkcija količnika proizvoda mera proizvodnje i privlačenja zona i neke mere generalizovanog troška prevoza.

Coutu (1978) je primenio gravitacioni model za predviđanje tokova praznih teretnih kola. U gravitacionom modelu važi pretpostavka da je tok između određenog para izvorišno-odredišnih stanica proporcionalan ponudi u izvorištu i tražnji u odredištu. Faktor proporcionalnosti zavisi od parametara kao što su rastojanje i trošak putovanja između dve tačke. Autor u svom radu opisuje korake koji se trebaju preduzeti u cilju primene ove metodologije na predviđanje tokova praznih kola na kanadskim nacionalnim železnicama. Kanadske nacionalne železnice koriste ove prognoze kako bi planirali alokaciju resursa u cilju zadovoljenja tražnje za tovarenim i praznim kretanjima u svim čvorovima na mreži. Gravitacioni model je primenjen i kalibrisan u skladu sa tehnikama koje su predložili Evans i Kirby (1974) i dao je zadovoljavajuće rezultate na izloženoj studiji slučaja.

Sivakumar i Bhat (2002) predlažu pristup koji predstavlja model raspodele sa delimičnim razdvajanjem za modelovanje međuregionalnih robnih tokova. Pristup koristi logit model za procenu dela robnih tokova potrošenih u odredišnoj zoni, a koji su generisani u svakoj od proizvodnih zona. Ova ideja je u skladu sa suštinom robnih kretanja, odnosno, robni tokovi su generisani tražnjom za robom u odredištu, a koja je zadovoljena tokovima iz jedne ili više izvorišnih tačaka. Predstavljena empirijska primena pokazuje da model daje bolje rezultate u odnosu na gravitacioni model.

Holguin-Veras i Patil (2008) su predstavili višerobnu formulaciju izvorišno-odredišnog modela koji kombinuje model zasnovan na vrsti robe za procenu tovarenih tokova i komplementarni model praznih tokova. Ova integracija je važna jer je eksplicitno modelovanje praznih tokova potrebno kako bi se izbegle greške u proceni saobraćajnih tokova. Dva slučaja predloženog modela su analizirana. Prvi koristi ukupan saobraćaj u proceni, dok je drugi zasnovan na tovarenim i praznim tokovima. Rezultati pokazuju da modeli koji uključuju podmodel praznih tokova znatno prevazilaze modele koji ne sadrže ovaj podmodel po svojoj sposobnosti da repliciraju realizovane robne tokove. Poređenje rezultata višerobnog i jednorobnog modela pokazuje da višerobna formulacija donosi značajna smanjenja greške procene realizovanih tokova.

Milenković i ostali (2012a) primenjuju adaptivni neuro-fuzzy sistem zaključivanja za modelovanje tokova putnika u sistemu gradskog železničkog saobraćaja.

Milenković i ostali (2012b) porede adaptivne neuro-fuzzy sisteme zaključivanja i tradicionalne ARIMA modele za modelovanje tokova putnika u sistemu gradskog železničkog saobraćaja.

Milenković i ostali (2013) modeluju mesečne tokove putnika na železnici korišćenjem ARIMA modela u stanje-prostor formi. Identifikovani SARIMA

(0,1,1)(0,1,1)$_{12}$ model je transformisan u stanje-prostor formu, a zatim je Kalmanova rekurzija primenjena za prognoziranje.

2.2.2.3 Modeli za modalni split

Korisnici prevoza obično biraju vid prevoza kojim će otpremiti robu. Modeli izbora vida prevoza ili raspodele na pojedine vidove saobraćaja se odnose na ponašanje korisnika prevoza po pitanju izbora vida prevoza. Osnovni kriterijumi izbora se uglavnom odnose na ponuđeni nivo usluge i troškove raspoloživih vidova prevoza.

Za modalni split u robnom saobraćaju, u literaturi se mogu pronaći modeli koji se zasnivaju na agregiranim i neagregiranim podacima. Razlikuju se:

- Modeli zasnovani na elastičnosti,
- Agregatni modeli raspodele na pojedine vidove saobraćaja;
- Neoklasični ekonomski modeli;
- Ekonometrijski modeli direktne tražnje;
- Disagregatni modeli raspodele na pojedine vidove saobraćaja;
- Mikro-simulacioni pristup;
- Multimodalni mrežni modeli.

Modeli zasnovani na elastičnosti reflektuju efekte promene jedne promenljive (na primer, troška određenog vida prevoza). Elastičnosti su izvedene iz drugih modela ili ekspertskog znanja. Takvi modeli se uglavnom koriste za strateške evaluacije i/ili za brzu aproksimaciju ili u slučajevima oskudnosti podataka. Jedan takav primer je i PACE-FORWARD model (Carrillo, 1996).

Agregatni modeli raspodele na pojedine vidove saobraćaja su uglavnom binomijalni ili multinomijalni logit modeli procenjeni na podacima o učešću različitih vidova saobraćaja za veći broj zona. Ovi modeli daju učešće različitih modova, ne apsolutnu količinu prevoza (tone) ili saobraćaja (vozila) kao direktni modeli tražnje.

Neoklasični modeli se zasnivaju na ekonomskoj teoriji preduzeća. Za troškovnu funkciju, sa prevoznim uslugama kao jednim od ulaza, funkcija tražnje za prevozom može se izvesti primenom Shephardove Lemme (Gold, 1990). Primeri procena funkcija tražnje za prevozom mogu se pronaći u radovima Friedlaendera i Spadyja (1980) i Ouma (1989).

U modelu direktne tražnje neposredno se predviđa broj putovanja (ili kilometara) određenim vidom prevoza. Klasičan primer je model koji su razvili Quandt i Baumol (1966).

Modeli raspodele koja je podeljena na pojedine vidove saobraćaja su uglavnom multinomijalni logit ili logit model, koji mogu biti zasnovani na teoriji maksimizacije slučajne koristi.

Abdelwahab i Sargious (1992) su predložili pristup za modelovanje tražnje u robnom saobraćaju koji se zasniva na istovremenom odlučivanju o izboru vida prevoza i veličine pošiljke. Sistem simultanog prebacivanja se koristi za razvoj kombinovanog modela tražnje koji tretira pomenute dve determinante odlučivanja. Preciznije, proces izbora vida prevoza je formulisan kao binarni probit model izbora, dok se dve jednačine linearne regresije koriste za simulaciju izbora veličine pošiljke za železnički i drumski saobraćaj. Autori takođe razmatraju i dva alternativna metoda procene. Prvi metod zahteva formulaciju funkcije maksimalne verodostojnosti za sistem simultanih jednačina. Ovaj metod ima prednosti u istovremenom jednokoračnoj proceni parametara modela što omogućava analitičaru da postavi ograničenja na procenjenim parametrima. Manje proračunski zahtevan metod je dvofazna procena, kod koje je probit metod maksimalne verodostojnosti primenjen za procenu modela izbora vida prevoza u prvoj fazi, a metod najmanjih kvadrata primenjen za procenu jednačina veličine pošiljke u drugoj fazi. Ovaj metod, poznat i kao metod dvofaznih najmanjih kvadrata je jednostavan, konzistentan, i familijarniji analitičarima sa skromnijim znanjem ekonometrike i matematičkih postupaka. Predloženi model je primenjen za istraživanje vida saobraćaja (železnički u odnosu na drumski) i izbor veličine pošiljke svakog od razmotrenih vidova prevoza. Primena predloženog modela za analizu tražnje za međugradskim robnim transportom železnicom i drumom je demonstrirana na realnim podacima.

Garrido i Mahmassani (2000) su primenili multinomijalni probit model sa prostorno i vremenski korelisanom strukturom greške za analizu transportne tražnje u drumskom saobraćaju. Rezultujući model ima veliki broj alternativa pa je izvršena procena primenom Monte Carlo simulacije za procenu verodostojnosti modela. Model je uspešno primenjen na skupu istorijskih podataka obezbeđenih od strane međunarodne kompanije u drumskom saobraćaju.

Nijkamp i ostali (2004) porede opisnu i predviđajuću moć dve vrste modela statističke procene za multimodalne transportne tokove. Razmotreni su modeli diskretnog izbora (logit i probit modeli) i model neuronskih mreža. Komparativna analiza načinjena je na velikom skupu podataka realizovanih evropskih međuregionalnih robnih tokova za dve kategorije robe – hranu i hemikalije. Rezultati pokazuju da je prediktivni potencijal modela neuronskih mreža veći u odnosu na analize diskretnog izbora.

Train i Wilson (2007) su predstavili problem procene modela diskretnog izbora koji se zasniva na ograničenom pristupu transportnim tržištima od strane pošiljalaca. Procenjeni model je zatim primenjen za agregiranje odluka o pošiljkama kako bi se odredila prostorno generisana transportna tražnja.

2.2.2.4 Modeli raspoređivanja

Poslednja faza izloženog sekvencijalnog procesa prognoziranja robnog saobraćaja se odnosi na izbor rute između parova oblasti po vidu prevoza i rezultujućih tokova. U ovoj fazi, putovanja drumom, železnicom i unutrašnjim plovnim putevima se alociraju na rute sastavljene od linkova odgovarajućih modalnih mreža. Veliki broj robnih modela ne obuhvataju korak raspoređivanja, dok neki obuhvataju raspoređivanje samo za drumski transport. Raspoređivanje u drumskoj mreži je u nekim slučajevima sprovedeno zajedno sa putničkim saobraćajem, dok robni saobraćaj predstavlja samo mali deo ukupnog saobraćaja. Na primer, izvorišno-odredišne matrice za drumski saobraćaj holandskog robnog modela TEM-II (de Jong i ostali (2004)) su kombinovane sa drumskim putničkim saobraćajem u holandskom nacionalnom modelu pa su putovanja u putničkom i robnom saobraćaju raspoređena zajedno. Kako bi se ovo ostvarilo neophodno je konvertovati putovanja u robnom saobraćaju u ekvivalentna putnička putovanja. Jos jedan primer nezavisnog koraka raspoređivanja (umesto grupnog izbora vida prevoza i rute u multimodalnoj mreži) je italijanski nacionalni model, gde se izbor vida prevoza sprovodi na disagregatnom nivou (nivou pojedinih regiona), a raspoređivanje na nivou planiranja izvorišno-odredišnih parova tačaka.

2.2.3 Modeli za dimenzionisanje teretnog kolskog parka

Određivanje veličine voznog parka predstavlja vrlo važan problem kako za istraživače tako i za kompanije iz oblasti saobraćaja s obzirom na veliku vrednost prevoznih sredstava. Dimenzionisanje voznog parka se odnosi na sveukupni dizajn usluge (Crainic, 2000), i postoji veći broj istraživanja koja se odnose na razmatranje ovog problema u drumskom saobraćaju (Hall i Racer (1995), Du i Hall (1999), Ozdamar i Yazgac (1999)) i usluge ekspresnih paketa u vazdušnom saobraćaju (Barnhart i Schneur (1966) koja naglašavaju postojanje ovog odnosa. Dimenzionisanje voznog parka je takođe važno u sistemima za upravljanje materijalima u proizvodnim operacijama (Beamon i Deshpande (1998), Beamon i Chen (1998)). U najopštijem slučaju, dimenzionisanje voznog parka se može definisati kao dimenzionisanje sistema ponovo upotrebljivih resursa.

Frantzeskakis i Powell (1990) razmatraju problem dimenzionisanja i raspoređivanja prazne opreme sa aspekta teorije zaliha i razvijenih decentralizovanih politika za kontrolu zaliha prazne opreme. Autori su se koncentrisali na iskorišćenje datog voznog parka, a ne na odlukama o određivanju njegove veličine.

Turnquist (1988), Turnquist i Jordan (1986), List i ostali (2003), Powell i Carvalho (1998), Jordan (1982), Jordan i Turnquist (1983), Carvalho i Powell (2000), Beaujon i Turnquist (1991) su predložili taksonomiju za ovu kategoriju problema razlikujući pre svega determističke i stohastičke modele, koje takođe diferenciraju u zavisnosti od toga da li su kola potpuno ili delimično tovarena. Svaka od pomenutih kombinacija može biti razmatrana i prema prirodi saobraćaja, kao zadatak od jednog izvorišta ka jednom odredištu, od jednog izvorišta ka više odredišta i od više izvorišta ka više odredišta.

Kako literatura iz oblasti dimenzionisanja voznog parka nije posebno usmerena samo na problem određivanja veličine teretnog kolskog parka u nastavku su izloženi i najvažniji opšti pristupi kao i pristupi usmereni na ostale vidove saobraćaja. Radovi su klasifikovani u odnosu na tri kriterijuma: metod rešavanja, vrstu problema i modalnost (Tabela 2.8).

Neki radovi koriste egzaktne metode zasnovane na formulaciji matematičkog programiranja, dok ostali koriste heuristike ili metaheuristike. Po vrstama problemi su podeljeni na:

- Probleme dimenzionisanja voznog parka gde se razmatra veličina voznog parka;
- Probleme kompozicije voznog parka gde je cilj utvrđivanje kompozicije parka različitih tipova vozila;
- Probleme kompozicije voznog parka i rutiranja vozila u kojima je kompozicija voznog parka kombinovana sa rutiranjem vozila;
- Probleme rutiranja heterogenog voznog parka fiksne veličine gde je potrebno rutirati fiksni vozni park vozila različitih tipova.

Tabela 2.8 sadrži neke od najznačajnijih karakteristika modela za dimenzionisanje homogenog voznog parka.

Tabela 2.8 *Osnovne osobine modela za dimenzionisanje voznog parka*

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Dantzig i Fulkerson	1954	Linearno Programiranje	Dimenzionisanje voznog parka	Pomorski sektor
Kirby	1959	Analitički, statistički metod	Dimenzionisanje voznog parka	Železnički sektor
Parikh	1977	Teorija redova	Dimenzionisanje voznog parka	Drumski sektor
Etezadi i Beasley	1983	Celobrojno programiranje	Kompozicija voznog parka	Opšti
Saksena i Ramaschan -dran	1986	Konstruktivna heuristika	Kompozicija voznog parka	Drumski sektor
Fu i Ishkhanov	2004	Heuristika	Kompozicija voznog parka	Drumski sektor
Bojović i Milenković	2008	Višekriterijumsko odlučivanje	Određivanje optimalnog miksa teretnog kolskog parka	Železnički sektor
Bojović, Bosković, Milenković, Sunjić	2010	Višeciljna optimizacija	Kompozicija teretnog kolskog parka	Železnički sektor
Zak,	2011	Višeciljno	Dimenzionisanje	Drumski

Redmer i Sawicki		matematičko programiranje	voznog parka	sektor
Cheon, Furman i Shaffer	2012	Mešovito celobrojno programiranje	Dimenzionisanje teretnog kolskog parka	Železnički sektor

Prvi rad iz oblasti dimenzionisanja voznog parka objavili su Dantzig i Fulkerson (1954) u pomorskom sektoru. Autori razmatraju problem određivanja minimalnog broja tankera potrebnih za izvršenje fiksnog reda vožnje. Jedan od ranih pokušaja rešavanja problema optimizacije veličine kolskog parka na železnici je načinio Kirby (1959). Autor razmatra dvostrani problem povećanja stepena iskorišćenja teretnih kola u vlasništvu u malom železničkom sistemu i smanjenja učestalosti iznajmljivanja dodatnih kola. Određivanjem relativnog troška kola u vlasništvu i iznajmljenih kola po danu autor izvodi izraz za ukupni dnevni očekivani trošak. Iz ovog izraza može se odrediti broj teretnih kola u vlasništvu i iznajmljenih teretnih kola kojima se minimiziraju troškovi.

Parikh (1977) predlaže efikasan približni postupak za rešavanje problema veličine i alokacije voznog parka. Metod počiva na rezultatima teorije redova čekanja i polazi od pretpostavke da se ukupan broj vozila nekog preduzeća može predstaviti sa nekoliko odvojenih voznih parkova koji imaju svoju sopstvenu grupu korisnika. Autor uzima da ovi parkovi obezbeđuju ravnomeran nivo usluge, te za slučaj nailazaka modeliranih Puasonovom raspodelom i vremena opsluživanja raspodeljenog po zakonu Erlanga određuje za unapred zadatu verovatnoću optimalne investicije u vozne parkove.

Etezadi i Beasley (1983) istovremeno razmatraju problem određivanja optimalne strukture voznog parka i njegove optimalne veličine. Predstavljena je formulacija mešovitog celobrojnog programiranja za rešavanje problema.

Saksena i Ramaschandran (1986) su za potrebe jednog velikog indijskog naftnog preduzeća rešavajući problem prevoženja radnika na određene lokacije (naftne bušotine) zapravo određivali optimalnu veličinu voznog parka (tip i broj vozila). Predložena metodologija omogućava nalaženje viška i manjka svakog tipa vozila. Predloženim pristupom postiže se mnogo veća stopa korišćenja vozila i uspostavlja dugoročna strategija nabavke vozila.

Fu i Ishkhanov (2004) razmatraju problem kompozicije teretnog kolskog parka i predlažu heuristički postupak za određivanje optimalne veličine i miksa teretnog kolskog parka.

Bojović i Milenković (2008) su predložili rešenje problema određivanja optimalnog miksa železničkog teretnog kolskog parka. Rešenje se zasniva na primeni analitičkog hijerarhijskog procesa kao jednog od najpopularnijih metoda višekriterijumskog odlučivanja.

Bojović i ostali (2010) su razmatrali problem određivanja optimalne kompozicije teretnog kolskog parka. Problem je dekomponovan na dva potproblema, potproblem određivanja optimalnog miksa i potproblem određivanja optimalne veličine teretnog kolskog parka. Prvi potproblem se posmatra kao problem višekriterijumskog odlučivanja i rešava primenom fuzzy analitičkog hijerarhijskog procesa. Rešenje prvog potproblema se sastoji od najpodesnijih tipova teretnih kola koji se mogu koristiti za transport robe. Drugi potproblem predstavlja problem određivanja optimalne veličine teretnog kolskog parka na osnovu definisane strukture sa aspekta tipa kola. Pristup fuzzy višeciljnog linearnog programiranja se koristi za rešavanje drugog potproblema. Izloženi dvofazni pristup rešavanju problema kompozicije teretnog kolskog parka je testiran za slučaj JP „Železnice Srbije".

Zak i ostali (2011) su razmatrali problem dimenzionisanja teretnog kolskog parka u drumskom sektoru. Matematički model problema odlučivanja je formulisan preko višeciljnog matematičkog programiranja zasnovanog na teoriji redova. Postupak rešavanja se sastoji od dva koraka. U prvom koraku, uzorak Pareto-optimalnih rešenja je generisan uz pomoć računarskog programa MEGROS. U drugom koraku, ovaj skup rešenja se procenjuje prema modelu preferencija donosioca odluka. Procena rešenja se sprovodi primenom interaktivnog metoda višekriterijumskog odlučivanja. Na kraju, donosilac odluke selektuje najbolje kompromisno rešenje.

Cheon i ostali (2012) su analizirali heterogeni problem dimenzionisanja teretnog kolskog parka u hemijskoj industriji. Postavkom problema obuhvaćena je i politika zaliha s obzirom na to da se za potrebe hemijske industrije teretna kola ne koriste samo za prevoz već i za skladištenje robe. Autori su problem formulisali kao problem dugoročnog proširenja kapaciteta s obzirom na to da teretna kola na železnici imaju dug vek eksploatacije. Predloženom formulacijom obuhvaćeni su brojni ekonomski faktori obuhvaćeni. Pristup mešovitog celobrojnog programiranja je predložen za modelovanje i rešavanje ovog problema. Uočena su značajna poboljšanja u odnosu na postojeće pristupe.

Problem dimenzionisanja voznog parka i rutiranja vozila se razlikuje od klasičnih problema rutiranja vozila jer obuhvata i kompoziciju voznog parka. Samim tim, kriterijumska funkcija se zasniva na minimiziranju ukupne troškovne funkcije koja obuhvata fiksne troškove upravljanja vozilima i promenljive troškove rutiranja. Tabela 2.9 sadrži neke od najznačajnijih karakteristika modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila.

Tabela 2.9 *Osnovne osobine modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila*

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Golden, Assad, Levy i Gheysens	1984	Celobrojno programiranje, Konstruktivna heuristika	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Gheysens, Golden i Assad	1986	Konstruktivna heuristika	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Salhi, Sari, Saidi i Touati	1992	Konstruktivna heuristika	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Teodorovic, Krcmar-Nozic i Pavkovic	1995	Konstruktivna heuristika, Stohastičnost	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Gendreau, Laporte, Musaraganyi i Taillard	1999	Tabu pretraživanje	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Taillard	1999	Heurističko generisanje kolona	Kompozicija voznog parka i rutiranje, Heterogeno rutiranje fiksnog voznog parka	Opšti
Bojovic	2002	Teorija optimalnog upravljanja	Dimenzionisanje voznog parka i rutiranje	Železnički sektor

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Renaud i Boctor	2002	Konstruktivna heuristika, Particija skupa	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Lima, Goldbarg i Goldbarg	2004	Hibridni genetski algoritam	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Wu, Hartman i Wilson	2005	Linearno programiranje	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Drumski sektor
Choi i Tcha	2007	Celobrojno programiranje, Generisanje kolona	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Song i Earl	2008	Dinamičko programiranje	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Sayarshad i Ghoseiri	2009	Simulirano kaljenje	Dimenzionisanje voznog parka i rutiranje	Železnički sektor
Sayarshad i Tavakkoli-Moghaddam	2010	Simulirano kaljenje	Dimenzionisanje voznog parka i rutiranje	Železnički sektor
Sayarshad, Javadian, Tavakkoli-Moghaddam, Forghani	2010	Višeciljna optimizacija	Dimenzionisanje voznog parka i rutiranje	Železnički sektor
Sayarshad i Marler	2010	Višeciljna optimizacija	Dimenzionisanje voznog parka i rutiranje	Železnički sektor
Loxton, Lin i Teo	2012	Dinamičko programiranje i metod zlatnog preseka	Dimenzionisanje voznog parka i rutiranje	Opšti
Yaghini i Khandaghabadi	2012	Genetski algoritmi i Simulirano kaljenje	Dimenzionisanje voznog parka i rutiranje	Železnički sektor
Milenković i Bojović	2013	Teorija fuzzy optimalnog upravljanja	Dimenzionisanje voznog parka i rutiranje	Železnički sektor

Golden i ostali (1984) su objavili jedno od prvih istraživanja iz ove oblasti. Autori u radu definišu problem i predstavljaju formulaciju u kojoj je jedinični trošak kretanja jednak za sve tipove vozila i razmotren kao konstantni parametar sa jediničnom vrednošću. Prema tome, promenljivi troškovi su nezavisni od vrste vozila. Autori predlažu nekoliko heuristika za rešavanje problema. Neke su zasnovane na tehnici ušteda za problem rutiranja vozila koju su razvili Clarke i Wright (1964) dok su ostale zasnovane na jednom „gigantskom“ putovanju problema putujućeg trgovca koje je particionirano na potputovanja usklađena sa kapacitetom vozila. Autori su takođe razvili postupak za proračun donje granice kojim se razmatra odnos između fiksnih i troškova rutiranja. Ovaj postupak donje granice su kasnije primenili Gheysens i ostali (1986) za kreiranje posebne heuristike. Heuristika koristi postupak donje granice u tehnici grananja i ograničavanja za kreiranje optimalnog miksa voznog parka, a problem rutiranja vozila je rešen korišćenjem miksa vozila kao raspoloživog parka. Raspoređivanje korisnika na vozila je određeno rešavanjem uopštenog problema raspoređivanja prema prema metodu koji su predložili Fisher i Jaikumar (1981).

Salhi i ostali (1992) predstavljaju formulaciju mešovitog celobrojnog programiranja u kojoj uvode promenljive jedinične troškove kretanja. Oni pokazuju kako jednostavne modifikacije nekih dobro poznatih metoda mogu doprineti smanjenju promenljivih troškova kretanja.

Teodorović i ostali (1995) tretiraju stohastičku tražnju pri razmatranju problema. Tražnja svakog korisnika ima uniformnu raspodelu u intervalu [0,b], i računa se verovatnoća otkaza na ruti na kojoj tražnja prevazilazi kapacitet se računa. U slučaju otkaza rute, vozilo mora da se vrati u depo na istovar pre nastavka putovanja za sledećeg planiranog korisnika. Heuristički postupak je primenjen za kreiranje velikog putovanja koje je podeljeno na manje rute i raspoređeno na odgovarajuća vozila algoritmom za pronalaženje više najkraćih puteva na mreži.

Gendreau i ostali (1999) su predložili meod tabu pretraživanja zasnovan na opštim heuristikama ubacivanja, GENIUS (Gendreau i ostali (1992)) i AMP (Rochat i Taillard (1995)). Metod je poređen sa rezultatima koje je dobio Taillard (1999) i pokazane su bolje performanse na instancama sa promenljivim jediničnim troškovima kretanja. Međutim, rezultati su bili nešto slabiji na primerima gde su troškovi rutiranja bili jednaki za sve tipove vozila.

Bojović (2002) razmatra problem optimizacije veličine teretnog kolskog parka uz zadovoljenje tražnje minimiziranjem ukupnog troška. Razvijen je matematički model koji se zasniva na teoriji optimalnog upravljanja. Predloženi optimizacioni model obezbeđuje svu informaciju o železničkoj mreži, kao što su kapacitet ranžirne stanice, neispunjena tražnja i broj tovarenih i praznih kola u bilo koje vreme i u bilo kojoj lokaciji. Problem je formulisan kao problem pronalaženja optimalnog regulatora za linearni sistem koji je pod uticajem Gausovog belog šuma, sa kvadratnim indeksom performansi i slučajnim početnim uslovima.

Renaud i Boctor (2002) opisuju “sweep” heuristiku za rešavanje problema dimenzionisanja voznog parka i rutiranja vozila. Algoritam predstavlja proširenje algoritma rutiranja vozila koji su predložili Renaud i ostali (1996). Algoritam generiše veliki broj ruta, a optimalan izbor ruta i vozila se rešava kao problem particije skupa. Predložena heuristika pokazuje superiorne performanse u odnosu na postojeće algoritme, i bliska je (nekad čak i bolja) od najpoznatijih algoritama zasnovanih na tabu pretraživanju.

Lima i ostali (2004) opisuju memetički algoritam za rešavanje problema. Ovaj algoritam predstavlja hibrid genetskog algoritma i lokalnog pretraživanja zasnovanog na GENIUS algoritmu.

Wu i ostali (2005) su rešavali problem dimenzionisanja voznog parka u drumskom sektoru. Operativne i taktičke odluke za heterogeni vozni park su eskplicitno razmotrene modelom linearnog programiranja u cilju određivanja optimalne veličine i miksa voznog parka. Tražnja je pretpostavljena kao poznata dok je vreme putovanja stohastički parametar. Pristup rešavanju ima dve faze. U pravoj fazi transportna tražnja se alocira na vozila preko Bendersove dekompozicije. U drugoj fazi koriste se početne granice i dualne promenljive iz prve faze i poboljšava rešenje bez povećanja zahteva za računarskom memorijom primenom Lagranžeove relaksacije.

Choi i Tcha (2007) predstavljaju pristup zasnovan na generisanju kolona za rešavanje problema. Autori predlažu model celobrojnog programiranja čiju LP relaksaciju rešavaju metodom generisanja kolona. Šeme dinamičkog programiranja koje su razvijene za klasičan problem rutiranja vozila su modifikovane kako bi se efikasno generisale dopustive kolone. Predloženi algoritam je testiran na instancama sa fiksnim i varijabilnim troškovima. Rezultati ukazuju na dominantnost ovog algoritma po pitanju kvaliteta rešenja i vremena izvršavanja.

Song i Earl (2008) predstavljaju integrisani model za problem određivanja optimalne politike upravljanja alokacijom praznih vozila i dimenzionisanja voznog parka u sistemu koji se sastoji od dva depoa. Vremena prispeća vozila i vremena putovanja praznih vozila su posmatrana kao stohastičke promenljive. Po ovom pristupu optimalna strategija raspoređivanja vozila za homogeni vozni park se zasniva na upravljanju graničnom vrednošću sa aspekta minimiziranja očekivanog diskontovanog troška koji se sastoji od troška održavanja, zakupa i prepozicioniranja vozila u praznom stanju. Formirana je eksplicitna troškovna funkcija pod uslovom opšte strategije granične vrednosti. Ova funkcija se zatim koristi za izvođenje optimalnih graničnih vrednosti, optimalnog rasporeda praznih vozila i optimalne veličine teretnog kolskog parka.

Sayarshad i Ghoseiri (2009) su predložili formulaciju i postupak rešavanja za optimizaciju veličine teretnog kolskog parka i alokacije teretnih kola pri čemu su tražnja za teretnim kolima i vremena putovanja tretirana kao deterministička. Autori pretpostavljaju da neispunjena tražnja postaje jednaka nuli na kraju planskog perioda, odnosno, tražnje za kolima su potpuno zadovoljene tokom planskog perioda. Model takođe pruža informacije o železničkoj mreži (kapacitet ranžirnih stanica, neispunjena tražnja, broj tovarenih i praznih kola u bilo koje vreme i u bilo kojoj stanici). Proračunski testovi za male primere mogu biti rešeni egzaktnim pristupom uz kratko vreme dobijanja rezultata, dok za srednje i velike primere to nije moguće. Iz ovog razloga autori predlažu algoritam simuliranog kaljenja za rešavanje modela. Numerički primeri su predstavljeni u cilju provere efikasnosti i validnosti predloženog algoritma.

Sayarshad i Tavakkoli-Moghaddam (2010) predlažu formulaciju i postupak rešavanja za optimizaciju veličine teretnog kolskog parka i alokacije teretnih kola za slučaj stohastičke tražnje. Autori predlažu dvofazni postupak zasnovan na algoritmu simuliranog kaljenja za rešavanje problema.

Sayarshad i ostali (2010) predlažu višeciljni matematički model i postupak rešavanja za optimizaciju planiranja teretnog kolskog parka na železnici. Modelom su istovremeno obuhvaćeni sledeći ciljevi: (1) minimiziranje sume troškova koji se odnose na kvalitet usluge, (2) maksimiziranje profita predstavljenog kao razlike između prihoda generisanih zadovoljenjem tražnje korisnika i kombinovanih troškova vlasništva i kretanja železničkih kola, (3) minimiziranje veličine teretnog kolskog parka. Pareto optimalni skup je određen i primenjen za analizu odnosa između predstavljenih ciljeva.

Sayarshad i Marler (2010) predstavljaju formulaciju višeciljne optimizacije, metod rešavanja i analizu višeperiodnog problema dimenzionisanja teretnog kolskog parka. Predložena formulacija objedinjuje sledeće funkcionalnosti u jedan alat za analizu: funkcionalnost istovremene optimizacije homogenog teretnog kolskog parka i alokacije teretnih kola, funkcionalnost optimizacije profita i kvaliteta i funkcionalnost razmatranja ograničenja kapaciteta ranžirnih stanica. Profit i kvalitet (minimalna neispunjena tražnja) predstavljaju međusobno konfliktne ciljeve i maksimizirane su istovremeno. Pareto optimalan skup se koristi za trade-off analizu. Rešenje problema sadrži optimalnu veličinu teretnog kolskog parka i optimalnu strategiju alokacije teretnih kola.

Loxton i ostali (2012) razmatraju problem formiranja heterogenog voznog parka uz prisustvo stohastičke tražnje. Problem se zasniva na određivanju broja vozila koja treba kupiti za svaki tip vozila posebno, tako da ukupni očekivani trošak voznog parka bude minimalan. Autori su razvili algoritam koji predstavlja kombinaciju dinamičkog programiranja i metoda zlatnog preseka za rešavanje problema.

Yaghini i Khandaghabadi (2012) su predložili dinamički i multiperiodni model za dimenzionisanje železničkog teretnog kolskog parka. Tražnja i vremena putovanja su pretpostavljeni kao deterministički. Hibridni pristup zasnovan na kombinaciji genetskih algoritama i simuliranog kaljenja se koristi kao metod rešavanja. Eksperimentalna analiza je sprovedena primenom nekoliko test problema. Rezultati poređenja predloženog algoritma i CPLEX-a ukazuju na veliku efikasnost i efektivnost predloženog pristupa.

Milenković i Bojović (2013) su predložili novu formulaciju i postupak rešavanja za optimizaciju veličine teretnog kolskog parka i alokaciju teretnih kola na železnici. Kako postoje brojni tipovi neizvesnosti i rasplinutosti u svakodnevnom odvijanju robnog prevoza na železnici, autori predlažu pristup zasnovan na teoriji fuzzy optimalnog upravljanja uz istovremeno posmatranje rasplinutosti i stohastičnosti. Transportna tražnja je modelovana kao fuzzy stohastički parametar dok je vreme putovanja implicitno obuhvaćeno kao fuzzy parametar. Problem je formulisan kao problem pronalaženja optimalnog fuzzy regulatora za fuzzy linearni sistem sa fuzzy kvadratnim indeksom performansi i fuzzy stohastičkim početnim uslovima.

Pri razmatranju problema rutiranja vozila fiksnog heterogenog voznog parka, veličina voznog parka je konstantna ili ograničena maksimalnim brojem, ali za razliku od klasičnih problema rutiranja vozila mogu biti različitih tipova i samim tim imati različite fiksne i varijabilne troškove. Za razliku od prethodnog problema, ovde nije cilj konstruisati optimalan vozni park, već koristiti vozila različitog tipa na najbolji mogući način. Tabela 2.10 sadrži neke od najznačajnijih karakteristika modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila.

Tabela 2.10 *Osnovne osobine modela za heterogeno rutiranje voznog parka fiksne veličine*

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Gencer, Top i Aydogan	2006	Konstruktivna heuristika	Heterogeno rutiranje voznog parka fiksne veličine	Opšti
Tarantilis i Kiranoudis	2007	Konstruktivna heuristika Tabu pretraživanje	Heterogeno rutiranje voznog parka fiksne veličine	Opšti
Tavakkoli-Moghaddam, Safaei, Kah i Rabbani	2007	Simulirano kaljenje	Heterogeno rutiranje voznog parka fiksne veličine, splitovanje usluge	Opšti

Gencer i ostali (2006) su razvili novi intuitivni algoritam za rešavanje heterogenih problema rutiranja fiksnog voznog parka. PPA algoritam (Passenger Puckup Algorithm) grupiše korisnike u podesne klastere, a zatim pronalazi najbolju rutu koja pokriva sve korisnike u svakom klasteru. Za razliku od većine ostalih algoritama PPA uzima u obzir mogućnost iznajmljivanja vozila u slučaju nedostatka vozila. Po ovoj definiciji problem je moguće tretirati kao problem fiksnog voznog parka sa promenljivim parkom iznajmljenih vozila. Algoritam takođe razmatra i mogućnost splitovanja tražnje.

Tarantilis i Kiranoudis (2007) predstavljaju fleksibilni algoritam adaptivne memorije. Ova dvofazna konstrukciona heuristika je nazvana GEROCA (Generalized Route Construction Algorithm). Prva faza određuje odgovarajući par korisnika i vozila. U drugoj fazi najbolja tačka insertovanja se identifikuje i odgovarajući korisnik ili niz korisnika se insertuje. Metod je takođe u mogućnosti da smanji zahteve za veličinom voznog parka i troškove putovanja u odnosu na aktuelnu praksu raspoređivanja voznog parka.

Tavakkoli-Moghaddam i ostali (2007) su razmatrali varijantu splitovanja isporuke problema rutiranja vozila sa heterogenim voznim parkom fiksne veličine. Trošak voznog parka je zavistan od broja korišćenih vozila i ukupnog neiskorišćenog kapaciteta. Za rešavanje problema autori su razvili hibridni algoritam simuliranog kaljenja koji je testiran na nekoliko primera. Rezultati primera manjih dimenzija su poređeni sa optimalnim rešenjem dobijenim primenom egzaktnih metoda, dok su primeri većih dimenzija poređeni sa donjom granicom koja je utvrđena rešavanjem gigantskog problema putujućeg trgovca koji posećuje sve korisnike. Rezultati pokazuju da predložena heuristika može pronaći dobra rešenja u razumnom proračunskom vremenu.

Prirodni nastavak problema rutiranja vozila voznog parka fiksne veličine predstavlja uvođenje vremenskih prozora za svakog korisnika kojima je definisan interval u kome opsluživanje korisnika mora početi. Vremenski prozori mogu predstavljati stroga ograničenja, pri čemu je rešenje koje ne zadovoljava ograničenja vremenskih prozora nedopustivo ili meka ograničenja gde ranija ili kasnija opsluga ne utiču na dopustivost rešenja, ali su kažnjene u funkciji cilja. Ovo proširenje se takođe može koristiti i za dimenzionisanje voznog parka i probleme rutiranja. Tabela 2.11 sadrži neke od najznačajnijih karakteristika modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila sa vremenskim prozorima.

Tabela 2.11 *Osnovne osobine modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila sa vremenskim prozorima*

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Desrosiers, Sauve i Soumis	1988	Lagranžeova relaksacija	Dimenzionisanje voznog parka	Opšti
Ferland i Michelon	1988	Konstruktivna heuristika, grananje i ograničavanje, generisanje kolona	Heterogeno rutiranje voznog parka fiksne veličine	Opšti
Vis, de Koster i Savelsbergh	2005	Celobrojno programiranje	Dimenzinisanje voznog parka	Drumski sektor
Yepes i Medima	2006	Hibridno lokalno pretraživanje	Heterogeno rutiranje voznog parka fiksne veličine	Opšti
Braysy, Dullaert, Hasle, Mester i Gendreau	2007	Determinističko kaljenje	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti
Calvete, Gale, Oliveros i Sanchez-Valverde	2007	Konstruktivna heuristika	Kompozicija voznog parka i rutiranje	Opšti

Desrosiers i ostali (1988) razmatraju problem pronalaženja minimalnog broja homogenih vozila potrebnih za opsluživanje skupa korisnika uz ograničenja vremenskih prozora. Pristup utvrđivanja optimalnog rešenja koji koristi dopunjeni Lagranžeov metod je predstavljen. Analizirana su dva pristupa zasnovana na Lagranžeovoj relaksaciji. U prvom pristupu su relaksirana vremenska ograničenja, a u drugom ograničenja koja zahtevaju da svaki čvor bude posećen.

Slučaj heterogenog voznog parka razmatraju Ferland i Michelon (1988). Autori pokazuju da egzaktni metodi razvijeni za problem raspoređivanja vozila sa vremenskim prozorima i jednim tipom vozila mogu biti prošireni na problem više tipova vozila. Razvijene su tri različite heuristike i dva egzaktna metoda. Heuristike su zasnovane na diskretnoj aproksimaciji, metodu raspoređivanja i metodima poklapanja, dok egzaktni metodi koriste tehniku generisanja kolona i relaksaciju ograničenja vremenskog prozora.

Braysy i ostali (2007) predstavljaju determinističku metaheuristiku kaljenja za rešavanje problema. Predložena metaheuristika ima tri faze. U prvoj fazi, početna rešenja su generisana preko heuristike zasnovane na uštedama u kombinaciji sa strategijama pretraživanja sa mehanizmima obuke. U drugoj fazi, načinjen je pokušaj smanjenja ruta u početnom rešenju postupkom lokalnog pretraživanja. U trećoj fazi, rešenje iz druge faze se dalje poboljšava preko četiri operatora lokalnog pretraživanja koji su obuhvaćeni postupkom za determinističko kaljenje. Operatori lokalnog pretraživanja se koriste za upravljanje procesom poboljšanja.

Yepes i Medina (2006) razmatraju slučaj sa blagim vremenskim prozorima u kontekstu heterogenog parka vozila fiksne veličine. Autori predstavljaju trofazni hibridni algoritam lokalnog pretraživanja zasnovan na probabilističkom pretraživanju susedstva za rešavanje problema. Prvi korak je konstrukcija ekonomskih ruta zasnovana na GRASP algoritmu (1995) koji formira populaciju rešenja. U drugom koraku, evoluciona strategija zasnovana na posebnom pristupu selekcije se koristi za pretraživanje i izbor najboljeg rešenja u populaciji, dok treći korak predstavlja post optimizacioni metod zasnovan na prihvatanju graničnih vrednosti sa restartovanjem.

Još jedan pristup dimenzionisanju voznog parka uz ograničenja vremenskih prozora su predstavili Vis i ostali (2005). Autori opisuju transport između oblasti za privremeno odlaganje kontejnera ("buffer" oblasti) i skladišnih oblasti u kontejnerskom terminalu. Cilj je minimizirati veličinu voznog parka tako da transport svakog kontejnera počne u okviru njegovog vremenskog prozora. Problem je formulisan kao model celobrojnog programiranja, a simulacija je primenjena za procenu veličine voznog parka.

Calvete i ostali (2007) su razvili model mešovitog celobrojnog programiranja za problem rutiranja vozila sa strogim i blagim vremenskim prozorima (strogi vremenski prozori ne dopuštaju ugrožavanje definisanih intervala za razliku od blagih), heterogeni vozni park i više ciljeva. Za rešavanje problema autori predlažu dvofazni pristup, pri čemu se u prvoj fazi određuju sve dopustive rute i računa ukupna kazna po svakoj ruti posebno usled odstupanja od ciljeva. U drugoj fazi rešava se problem particije skupa za dobijanje najboljeg skupa dopustivih ruta.

U slučaju postojanja više depoa, problem je još složeniji u odnosu na osnovni problem kompozicije voznog parka i rutiranja vozila. Cilj problema je određivanje korisnika koji trebaju biti opsluženi od strane različitih depoa uz pronalaženje optimalne kompozicije voznog parka i najboljih mogućih ruta za vozila. U Tabeli 2.12 sadržani su neki od najznačajnijih modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila sa više depoa.

Tabela 2.12 *Osnovne osobine modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila sa više depoa*

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Salhi i Fraser	1996	Konstruktivna heuristika	Kompozicija voznog parka i rutiranja	Opšti
Salhi i Sari	1997	Konstruktivna heuristika	Kompozicija voznog parka i rutiranja	Opšti
Dondo i Cerda	2007	Konstruktivna heuristika	Kompozicija voznog parka i rutiranja	Opšti

Salhi i Sari (1997) razmatraju problem simultanog alociranja korisnika na depoe, formiranja voznog parka i konstruisanja ruta za isporuku. Autori predlažu višenivovsku kompozitnu heuristiku i dizajniraju dva testa redukcije za poboljšanje efikasnosti heuristike. Heuristika se sastoji iz tri nivoa. Na prvom nivou, početno rešenje se određuje rešavanjem problema za svaki depo i njemu odgovarajuće korisnike. Granični korisnici se zatim dodaju postojećim rutama. Na drugom nivou, kompozitna heuristika nastoji da poboljša rešenja dobijena za svaki depo. Na trećem nivou, kompozitna heuristika koja obuhvata sve depoe istovremeno se razmatra.

Salhi i Fraser (1996) obuhvataju i problem određivanja broja i lokacije depoa. Oni predstavljaju iterativni pristup koji kombinuje dve različite heuristike za istovremeno rešavanje problema lokacije, problema rutiranja i problema kompozicije voznog parka.

Dondo i Cerda (2007) uvode i vremenske prozore u razmatranje problema. Autori predlažu trofazni pristup za rešavanje problema. U prvoj fazi identifikuju se troškovno efektivni klasteri, u drugoj se ovi klasteri raspoređuju na vozila, a zatim se vozila sekvenciraju po rutama. Raspoređivanje vremena prispeća vozila se sprovodi u trećoj fazi primenom modela mešovitog celobrojnog programiranja.

Mrežni problemi optimizacije se po svojoj strukturi razlikuju od klasičnih problema rutiranja vozila. Umesto pronalaženja optimalnog skupa ruta kojima se pokriva svaki korisnik samo jednom, ovi problemi tretiraju izbor lukova na grafu u cilju zadovoljenja zahteva toka i minimiziranja ukupnih troškova sistema. Zahtevi toka su obično izraženi u formi roba koje bi trebale biti prevezene od izvorišta do odredišta u datom vremenskom intervalu. U Tabeli 2.13 sadržani su neki od najznačajnijih mrežnih modela za dimenzionisanje voznog parka i rutiranje vozila sa više depoa.

Tabela 2.13 *Osnovne osobine mrežnih modela za dimenzionisanje voznog parka*

Autori	Godina nastanka	Metod rešavanja	Vrsta problema	Modalnost
Sim i Templeton	1982	Statistički metod	Dimenzionisanje voznog parka	Opšti
Turnquist	1985	Klasifikacija istraživanja u saobraćaju	Dimenzionisanje voznog parka	Opšti
Turnquist i Jordan	1986	Statistički metod	Dimenzionisanje voznog parka	Opšti
Beaujon i Turnquist	1991	Celobrojno programiranje	Dimenzionisanje voznog parka	Opšti
Sherali i Tuncbilek	1997	Dekompozicioni pristup	Dimenzionisanje voznog parka	Železnički sektor

Turnquist (1985) opisuje nekoliko istraživačkih mogućnosti u oblasti ponude prevoznih usluga sa fokusom na dizajnu usluga. Istraživačke oblasti su klasifikovane u tri osnovne kategorije: raspoređivanje vozila, upravljanje vozilima i obezbeđenje kapaciteta koje obuhvata i dimenzionisanje veličine voznog parka. Osnovna klasifikacija pristupa problemima dimenzionisanja voznog parka je određena primenom tri faktora: vrsta saobraćaja, veličina pošiljke u odnosu na veličinu vozila i determinističke nasuprot stohastičkim analizama.

Sim i Templeton (1982) su razvili efikasan rekurzivni algoritam za analizu ponašanja vozila iz jednog izvorišta ka jednom odredištu. Vreme putovanja podvrgnuto je eksponencijalnom zakonu uz raspodele verovatnoća dok su dolasci u polaznu stanicu pojedinačni sa karakteristikama Puasonove raspodele. Za definisanje troškovne funkcije i pravila otpreme vozila koja počivaju na teoriji čekanja određen je optimalan vozni park. Zadatak spada u kategoriju stohastičkih pristupa, za delimično tovarena vozila od jednog izvorišta ka jednom odredištu.

Turnquist i Jordan (1986) razvijaju model za dimenzionisanje kontejnerskog parka koji se koriste za transport komponenata iz jedne fabrike ka više lokacija za montažu ovih komponenata. Model je formulisan uz sledeće pretpostavke:

1) Proizvodnja delova se odvija u proizvoljnom, determinističkom ciklusu;
2) Veličina pošiljke je konstantna i mala u poređenju sa brojem komponenata koje se proizvode u jednom proizvodnom ciklusu;
3) Pošiljke su formiraju na dnevnom nivou;
4) Vremena putovanja kontejnera su deterministička.

Poslednja pretpostavka je kasnije relaksirana kako bi se ispitao uticaj neizvesnosti vremena putovanja. Na osnovu rezultata za proces beskonačnog kanala opsluživanja, autori izvode jednačine kojima povezuju veličinu parka kontejnera i verovatnoću nedostatka. Autori primerom ilustruju međuzavisnost između verovatnoće nedostatka i veličine parka kontejnera i pokazuju uticaj nivoa neizvesnosti i broja montažnih lokacija na veličinu kontejnerskog parka. Uz male modifikacije razvijenih jednačina moguće je predstavljenu metodologiju primeniti na probleme dimenzionisanja parka drugih tipova transportnih sredstava.

Važan potencijalni efekat poboljšane raspodele praznih vozila se ogleda u smanjenju veličine parka bez uticaja na smanjenje kvaliteta usluge.

Beaujon i Turnquist (1991) formulišu model koji obuhvata interakcije između veličine voznog parka, tovarenih i praznih kretanja. Radi se o stohastičkom modelu optimizacije (tražnja i vremena putovanja su stohastički) na dinamičkoj mreži koji je rešen dekompozicijom koja naizmenično tretira potprobleme zaliha vozila na mreži i alokacije vozila. U svakom čvoru je definisan neto broj kola predstavljen normalnom raspodelom i njemu pridruženi troškovi čuvanja i neispunjenih porudžbina. Pretpostavljajući da je vreme putovanja determinističko problem je preformulisan u mrežni sa nelinearnim troškovima na nekim lukovima. Simultano se određuju alokacije tovarenih i praznih kola na mreži relativno malih dimenzija.

Mrežna aproksimacija se pokazala valjanom za dobijanje dovoljno dobrog rešenja sa aspekta alokacije kola i određivanja veličine voznog parka. Prirodno početno rešenje dobijeno je rešavanjem determinističke varijante problema (varijanse broja kola po stanicama jednake su nuli). Ovo rešenje će sigurno biti ispod vrednosti optimalnog parka, ali pruža dovoljno tačan skup kretanja kola, neophodan za računanje varijanse. Za ocenjene vrednosti varijanse primenjen je Frank-Wolfe-ov algoritam. Nalaženje rešenja se nastavlja iterativnom procedurom sve dok se varijansa ne promeni. Autori na hipotetičkoj mreži od pet stanica i šestodnevnom horizontu porede statitčku determinističku, dinamičku determinističku i dinamičku stohastičku varijantu. Dobijeni rezultati ukazuju na veoma važnu povezanost odluka o veličini voznog parka i alokaciji teretnih kola.

Sherali i Tuncbilek (1997) su predložili statičke i dinamičke modele za dimenzionisanje teretnog kolskog parka za slučaj zajedničkog teretnog kolskog parka. Statički model teži da podceni potrebnu veličinu kolskog parka jer je zasnovan na stacionarnim podacima. Dinamički model je formiran u odnosu na mrežu prostor-vreme koja predstavlja kretanje praznih kola između izvorišta i odredišta tokom određenog planskog perioda, sa ciljem minimiziranja potrebne veličine parka uz zadovoljenje ukupne tražnje u različitim trenucima vremena. Problem je rešen dekomponovanjem modela na niz manjih potproblema sa kraćim, međusobno preklapajućim vremenskim periodom. Nakon što je potproblem rešen, odluke za početni deo razmotrenog perioda se fiksiraju i naredni potproblem se rešava sa dopunjenim tokovima. Primeri generisani na slučajan način sa realističnim pretpostavkama se koriste za procenu performansi algoritma. Modeli se uspešno koriste od strane Asocijacije američkih železnica.

3. Osnovne pretpostavke fuzzy skupova i fuzzy stohastike

Pre predstavljanja fuzzy stohastičkog optimalnog upravljanja problemom dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka u ovom poglavlju predstavljene su najznačajnije karakteristike teorije fuzzy skupova, fuzzy brojeva i fuzzy matrica sa relevantnim operacijama. Na kraju poglavlja predstavljene su takođe osnovne osobine fuzzy stohastike (Dehghan i ostali (2009), Pal i ostali (2010), Shaymal i Pal (2007)).

3.1 Fuzzy skupovi

Neka X predstavlja oblast definisanosti čiji je generički element x. Fuzzy skup A nad X je definisan funkcijom $\mathrm{A}: X \to [0,1]$. U literaturi se ova funkcija označava kao μ_{A}, pa je prema tome, fuzzy skup A okarakterisan svojom funkcijom pripadnosti $\mu_{\mathrm{A}}: X \to [0,1]$ koja svakom elementu x u X dodeljuje realan broj $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ u intervalu $[0,1]$. Vrednost $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ u x predstavlja stepen pripadnosti x u A i interpretira se kao stepen do kog x pripada A. Prema tome, što je vrednost $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ bliža 1, to x više pripada fuzzy skupu A (Bector i Chandra, 2005).

Egzaktan podskup A od X se takođe može predstaviti i kao fuzzy skup u X sa funkcijom pripadnosti kao svojom karakterističnom funkcijom, odnosno,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = \mathrm{A} \\ 0, & \text{ako je } x \neq \mathrm{A} \end{cases} \tag{1}$$

Fuzzy skup A u X se može predstaviti i ispisivanjem uređenih parova $(x, \mu_{\mathrm{A}}(x))$, gde elementi sa nultim stepenom obično nisu dati. Prema tome, fuzzy skup A u X može se napisati kao $\mathrm{A} = \{(x, \mu_A(x))\}$ gde je $x \in X$ i $\mu_{\mathrm{A}} : X \to [0,1]$.

Definicija 1 (Osnova fuzzy skupa). Neka je A fuzzy skup u X. Tada osnova A, označena sa $S(\mathrm{A})$ predstavlja egzaktan skup dat sa:

$$S(\mathrm{A}) = \{x \in X : \mu_{\mathrm{A}}(x) > 0\} \tag{2}$$

Definicija 2 (Normalan fuzzy skup). Neka je A fuzzy skup u X. Visina $h(\mathrm{A})$ fuzzy skupa A je definisana kao:

$$h(\mathrm{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\mathrm{A}}(x) \tag{3}$$

Ako je $h(\mathrm{A}) = 1$, tada fuzzy skup A predstavlja normalan fuzzy skup, u suprotnom, radi se o subnormalnom fuzzy skupu. Ako je $0 < h(\mathrm{A}) < 1$, tada subnormalni fuzzy skup A može biti normalizovan, odnosno može postati normalan redefinisanjem funkcije pripadnosti kao $\mu_{\mathrm{A}}(x) / h(\mathrm{A}),\ x \in X$.

Definicija 3 ($\alpha - presek$). Neka je A fuzzy skup u X i $\alpha \in (0,1]$. $\alpha - presek$ fuzzy skupa A je egzaktan skup A_α dat sa

$$\mathrm{A}_\alpha = \{x \in X : \mu_{\mathrm{A}}(x) \geq \alpha\} \tag{4}$$

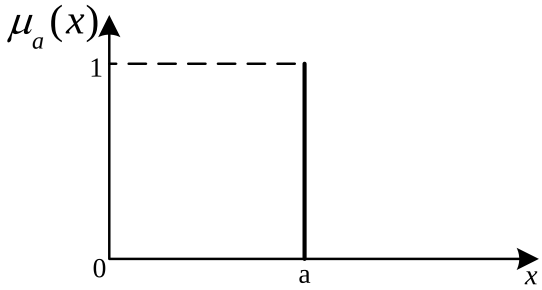
3.2 Fuzzy brojevi

Fuzzy brojevi predstavljaju jedan način da se predstavi rasplinutost i nedostatak preciznosti podataka. Razvijeni su na osnovu teorije fuzzy skupova.

Definicija 4 (Fuzzy broj). Fuzzy broj predstavlja konveksan normalizovan fuzzy skup čija funkcija pripadnosti je „deo po deo" neprekidna. Fuzzy broj A je pozitivan (negativan), označen sa $\mathrm{A} > 0$ $(\mathrm{A} < 0)$, ako njegova funkcija pripadnosti $\mu_{\mathrm{A}}(x)$ ispunjava uslov $\mu_{\mathrm{A}}(x) = 0$ za $\forall x < 0 (x > 0)$. $\alpha - presek$ fuzzy broja A je intervalni broj $[\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$.

Definicija 5. Fuzzy skup a definisan nad $R = (-\infty, \infty)$ predstavlja fuzzy tačku ako je funkcija pripadnosti a data sa

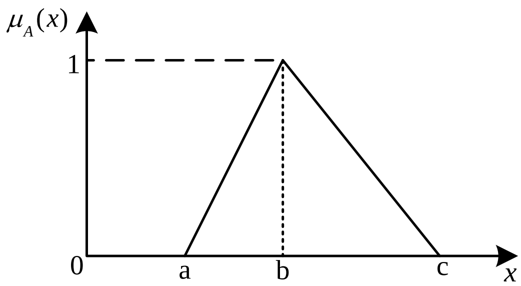
$$\mu_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = a \\ 0, & \text{if } x \neq a \end{cases} \tag{5}$$



Slika 3.1 *Fuzzy tačka*

Definicija 6 (Trougaoni fuzzy broj). Fuzzy skup $\mathrm{A} = (a,b,c)$, gde je $a < b < c$ i definisan nad R, predstavlja trougaoni fuzzy broj, ako je njegova funkcija pripadnosti data sa

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b} \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & \mathrm{b} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{c} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6}$$



Slika 3.2 *Trougaoni fuzzy broj* $\mathrm{A} = (a,b,c)$

U nastavku su izložene osnovne aritmetičke operacije nad trougaonim fuzzy brojevima (Dubois i Prade (1980)). Neka su $\mathrm{A} = (a,b,c)$ i $\mathrm{B} = (d,e,f)$ dva trougaona fuzzy broja.

Operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja su definisane na sledeći način:

Sabiranje: $\mathrm{A}+\mathrm{B}=(a+d,b+e,c+f)$

Skalarno množenje: Neka je k scalar, tada važi

$k\mathrm{A}=(ka,kb,kc)$ kada je $k\geq 0$ (7)

$k\mathrm{A}=(-ka,-kb,-kc)$ kada je $k<0$ (8)

Oduzimanje:

$$\mathrm{A}-\mathrm{B}=(a-f,\ b-e,\ c-d) \tag{9}$$

Množenje:

Kada je $\mathrm{A}\geq 0$ i $\mathrm{B}\geq 0$ ($\mathrm{A}\geq 0$ ako je $b\geq 0$)

$$\mathrm{AB}=(a,b,c)(d,e,f)=(bd+e(a-b),\ be,\ ec+b(f-e)) \tag{10}$$

Kada je $\mathrm{A}\leq 0$ $(\mathrm{b}\leq 0)$ and $\mathrm{B}\geq 0$

$$\mathrm{AB}=(a,b,c)(d,e,f)=(ea+b(f-e),\ be,\ ec+b(d-e)) \tag{11}$$

Kada je $\mathrm{A}\geq 0$ $(\mathrm{b}\geq 0)$ i $\mathrm{B}\leq 0$

$$\mathrm{AB}=(a,b,c)(d,e,f)=(ec+b(d-e),\ be,\ ea+b(f-e)) \tag{12}$$

Kada je $A\leq 0$ i $B\leq 0$

$$\mathrm{AB}=(a,b,c)(d,e,f)=(ec+b(f-e),\ be,\ ea+b(d-e)) \tag{13}$$

Inverzija trougaonog fuzzy broja: Inverzija trougaonog fuzzy broja $A=(a,b,c)$, $b>0$ je definisana kao,

$$\mathrm{A}^{-1}=(a,b,c)^{-1}=(b^{-1}-(c-b)b^{-2},\ b^{-1},\ b^{-1}+(b-a)b^{-2}) \tag{14}$$

Količnik trougaonih fuzzy brojeva A i B je dat sledećom relacijom

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\mathrm{A.B}^{-1} \tag{15}$$

Kako su inverzija i proizvod trougaonih fuzzy brojeva aproksimativne vrednosti i količnik je takođe aproksimativna vrednost.

Količnik:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\mathrm{A.B}^{-1}&=(a,b,c).(e^{-1}-(f-e)e^{-2},e^{-1},e^{-1}+(e-d)e^{-2})\\ &\simeq\left(\frac{ea+b(e-f)}{e^{2}},\ \frac{b}{e},\ \frac{ec+b(e-d)}{e^{2}}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

3.3 Trougaone fuzzy matrice

Matrica trougaonih fuzzy brojeva ili trougaona fuzzy matrica (TFM) i osnovne operacije sa ovim matricama se mogu definisati na sledeći način (Shaymal i Pal (2007), Bhowmik i ostali (2008)).

TFM reda $m \times n$ je definisana kao $\mathrm{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, pri čemu je $a_{ij} = (a_{ij}^{l}, a_{ij}, a_{ij}^{u})$ $ij-$ti element fuzzy matrice A, a_{ij} je srednja vrednost matrice A, dok a_{ij}^{l}, a_{ij}^{u} predstavljaju donju i gornju granicu, respektivno.

Kao i kod klasičnih matrica definisane su osnovne operacije sa matricama trougaonih fuzzy brojeva. Neka su $\mathrm{A} = (a_{ij})$ i $\mathrm{B} = (b_{ij})$ dve TFM istog reda. Definisane su sledeće operacije (Shyamal and Pal, 2007):

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{17}$$

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = (a_{ij} - b_{ij}) \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{A.B} = (c_{ij})_{m \times p} \; [gde \text{ je } \mathrm{A} = (a_{ij})_{m \times n},\; \mathrm{B} = (b_{ij})_{n \times p} \\ &i \; c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj},\, za \; i = 1, 2, \ldots, m \; i \; j = 1, 2, \ldots, p] \end{aligned} \tag{19}$$

$$\mathrm{A}^{k+1} = \mathrm{A}^{k}.\mathrm{A} \tag{20}$$

$$\mathrm{A}' = (a_{ji})(transponovana \;\; \mathrm{A}) \tag{21}$$

$$k.\mathrm{A} = (ka_{ij}),\, gde \; je \; k \;\, skalarna \;\, vrednost \tag{22}$$

Definicija 7 (Nula TFM). Za matricu trougaonih fuzzy brojeva se kaže da je nula matrica ako su svi njeni elementi jednaki nuli. Ova matrica označena je sa $\tilde{0}$.

$$\tilde{0} = \begin{bmatrix} (0,0,0) & (0,0,0) & \ldots & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (0,0,0) & \ldots & (0,0,0) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ (0,0,0) & (0,0,0) & \ldots & (0,0,0) \end{bmatrix} \tag{23}$$

Definicija 8 (Jedinična TFM). Kvadratna TFM je jedinična matrica ako su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki jedan, odnosno $a_{ii} = (1,1,1)$, dok su svi ostali $a_{ij} = (0,0,0),\; i \neq j$, za svako i, j. Ova matrica označena je sa $\tilde{\mathrm{I}}$.

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} (1,1,1) & (0,0,0) & \dots & (0,0,0) \\ (0,0,0) & (1,1,1) & \dots & (0,0,0) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ (0,0,0) & (0,0,0) & \dots & (1,1,1) \end{bmatrix} \tag{24}$$

Definicija 9 (Simetrična TFM). Kvadratna matrica trougaonih fuzzy brojeva je simetrična ako je $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$, odnosno ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za svako i, j.

3.3.1 Osnovne osobine trougaonih fuzzy matrica

U ovom odeljku osnovne osobine trougaonih fuzzy matrica su predstavljene. Zakoni komutativnosti i asocijativnosti u slučaju ovih matrica važe samo kod operacije sabiranja.

Osobina 1. Za bilo koje tri trougaone fuzzy matrice, A, B i C reda $m \times n$ važi:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{B} + \mathrm{A} \tag{25}$$

$$\mathrm{A} + (\mathrm{B} + \mathrm{C}) = (\mathrm{A} + \mathrm{B}) + \mathrm{C} \tag{26}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{A} = 2\mathrm{A} \tag{27}$$

$$\mathrm{A} + \tilde{0} = \mathrm{A} - \tilde{0} = \mathrm{A} \tag{28}$$

Osobina 2. Neka su A i B dve TFM istog reda i neka su k i l dva skalara. Tada važi:

$$k(l\mathrm{A}) = (kl)\mathrm{A} \tag{29}$$

$$k(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = k\mathrm{A} + k\mathrm{B} \tag{30}$$

$$(k + l)\mathrm{A} = k\mathrm{A} + l\mathrm{A} \tag{31}$$

$$k(\mathrm{A} - \mathrm{B}) = k\mathrm{A} - k\mathrm{B} \tag{32}$$

Osobina 3. Za dve matrice A i B za koje su operacije sabiranja $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ i množenja $\mathrm{A.B}$ definisane, važi:

$$(\mathrm{A}')' = \mathrm{A} \tag{33}$$

$$(\mathrm{A} + \mathrm{B})' = \mathrm{A}' + \mathrm{B}' \tag{34}$$

$$(\mathrm{A.B})' = \mathrm{B}'.\mathrm{A}' \tag{35}$$

Posledica 4. Neka su A i B dve TFM i neka su k i l dva skalara, tada:

$(k.\mathrm{A})' = k.\mathrm{A}'$ (36)

$(k.\mathrm{A} + l.\mathrm{B})' = k.\mathrm{A}' + l.\mathrm{B}'$ (37)

Posledica 5. Neka je A kvadratna TFM tada važi:

$\mathrm{A}.\mathrm{A}'$ i $\mathrm{A}'.\mathrm{A}$ su obe simetrične (38)

$\mathrm{A} + \mathrm{A}'$ je simetrična (39)

3.3.2 Inverzne trougaone fuzzy matrice

Za pronalaženje inverzne fuzzy matrice u literaturi postoje dva metoda, metod zasnovan na scenariju, i metod zasnovan na aritmetici (Dehghan i ostali (2009)). Prvim metodom razmatra se realna matrica (izvedena iz fuzzy matrice A koja se naziva scenario) i definiše fuzzy inverza u odnosu na svaki pojedinačni scenario. Drugi metod se zasniva na pronalaženju fuzzy matrice B kao inverzne fuzzy matrice A, tako da je $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \tilde{\mathrm{I}}$.

U nastavku je detaljno opisan prvi metod određivanja inverzne fuzzy matrice s obzirom na to da se isti primenjuje u razvoju identičnog modela u disertaciji.

3.3.2.1 Metod zasnovan na scenariju

a) Potrebni i dovoljni uslovi za invertibilnost fuzzy matrica

U ovom poglavlju date su neophodne pretpostavke za proveru invertibilnosti fuzzy matrica. Aproksimativne inverzije neizvesnih matrica (intervalnih, fuzzy) date su u (Ghaoni, 2002). Takođe, singularnost i regularnost intervalnih matrica su definisani u (Rohn (1993), Rohn (1996), Kreinovich i ostali (1998)).

Definicija 10. Kvadratna intervalna matrica A (Intervalna matrica je ona matrica čiji elementi su intervalni brojevi) je regularna ako je svaka matrica A koja predstavlja jedan scenario, nesingularna. Takođe, intervalna matrica A je singularna ako sadrži singularnu matricu.

Rohn (1996), Rex i Rohn (1998) i Rump (1998) su predstavili nekoliko potrebnih uslova za definisanje singularnosti i regularnosti intervalnih matrica primenom spektralnog radiusa, sopstvenih vrednosti i pozitivne definitnosti nekih realnih matrica koje su u određenom odnosu sa originalnom intervalnom matricom. Regularnost i singularnost se mogu uopštiti za slučaj fuzzy matrica.

Definicija 11. Neka je data fuzzy matrica $\mathrm{A}=(a_{ij})$ dimenzija $n\times n$. Matrica A je $\alpha - regularna$, ako je svaka matrica $\mathrm{A}\in[\mathrm{A}]_\alpha$ nesingularna. Takođe, za $\alpha<\beta$ u intervalu $[0,1]$, A je $(\alpha,\beta)-regularna$ ako je svaka matrica A u $[\mathrm{A}]_\alpha$ i izvan $[\mathrm{A}]_\beta$ regularna. Drugim rečima, ako je $[\mathrm{A}]_\alpha=[\underline{\mathrm{A}}(\alpha),\overline{\mathrm{A}}(\alpha)]$, $[\mathrm{A}]_\beta=[\underline{\mathrm{A}}(\beta),\overline{\mathrm{A}}(\beta)]$, A će biti $(\alpha,\beta)-regularna$ ako je svaka matrica A, za koju važi $\underline{\mathrm{A}}(\alpha)\le \mathrm{A}\le \underline{\mathrm{A}}(\beta)$ ili $\overline{\mathrm{A}}(\beta)\le \mathrm{A}\le \overline{\mathrm{A}}(\alpha)$ nesingularna. Takođe, važi i da je fuzzy matrica A regularna ako je svaka matrica $\mathrm{A}\in Supp(\mathrm{A})$ nesingularna.

Teorema 1. Kvadratna fuzzy matrica A je singularna, ako i samo ako nejednačina $|A_c x|\le\Delta|x|$ ima netrivijalno rešenje.

Dokaz. Neka je A singularna matrica. U tom slučaju postoji singularna matrica $A^*\in\mathrm{supp}(A)$, tako da je moguće izabrati $\alpha\in(0,1]$ tako da $\mathrm{A}^*\in[\mathrm{A}]_\alpha=[\underline{\mathrm{A}}(\alpha),\overline{\mathrm{A}}(\alpha)]\subseteq[\mathrm{A}]_0$ bude singularna. Prema predlogu 10 (Rohn (1996)), sistem $|\mathrm{A}_c x|\le\Delta|x|$ ima netrivijalno rešenje. Obrnuto, neka je jednačina $|\mathrm{A}_c x|\le\Delta|x|$ zadovoljena za $x\ne 0$. Prema tome, $[\mathrm{A}]_0$ je singularna i dokaz je kompletan.

b) Primena Rohn-ove šeme za pronalaženje inverzne fuzzy matrice

Za pronalaženje inverzne fuzzy matrice u ovoj disertaciji je primenjen pristup (Dehghan et. al., 2009) zasnovan na Rohn-ovoj šemi (Rohn, 1989; Rohn, 1993; Rohn, 1993). Neka je $\mathrm{A_I}$ intervalna matrica čiji su elementi zatvoreni intervali. $\mathrm{A_I}$ se može izraziti preko matrice donjih granica $\underline{\mathrm{A}}$ i matrice gornjih granica $\overline{\mathrm{A}}$:

$$\mathrm{A_I}=[\underline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{A}}] \tag{40}$$

Za svaku regularnu intervalnu matricu Rohn je definisao inverznu matricu A kao najmanju intervalnu matricu, koja sadrži sve inverzne matrice $(\mathrm{A_I})^{-1}=\{\mathrm{A}^{-1}:\mathrm{A}\in\mathrm{A_I}\}$, odnosno kao intervalnu matricu $\mathrm{B_I}=[\underline{\mathrm{B}},\overline{\mathrm{B}}]$ čije su granice date sa

$$\underline{\mathrm{B}}=\min_{y,z\in Y_n}\mathrm{A}_{yz}^{-1} \tag{41}$$

i

$$\overline{\mathrm{B}} = \max_{y,z\in Y_n} \mathrm{A}_{yz}^{-1} \tag{42}$$

pri čemu su min i max određeni na nivou pojedinih elemenata. A_{yz} je matrica specijalnog tipa definisana na sledeći način. Data je $m\times n$ intervalna matrica A_{I}, $y\in Y_m$, $z\in Y_n$, gde su Y_m, Y_n skupovi svih m-dimenzionalnih i n-dimenzionalnih vektora sa komponentama 1 i -1. Tada je:

$$(A_{yz})_{ij} = (A_c)_{ij} - y_i\Delta_{ij}z_j = \begin{cases} \overline{a}_{ij}, \text{ if } y_i z_j = -1, \\ \underline{a}_{ij}, \text{ if } \mathrm{y_i z_j = 1} \end{cases} \tag{43}$$

Zatim se primenjuje isti postupak za pronalaženje inverzne fuzzy matrice A za fiksirano $\alpha\in[0,1]$. Moguće je pronaći granice za inverznu $[\mathrm{A}]_\alpha$ primenom izloženog metoda kao $B(\alpha)=[\underline{B}(\alpha),\overline{B}(\alpha)]$ pri čemu je $\underline{B}(\alpha)=(\underline{B}_{ij}(\alpha))_{i,j}$ i $\overline{B}(\alpha)=(\overline{B}_{ij}(\alpha))_{i,j}$. Cilj je pronaći funkcije L_{ij} i R_{ij} koje zadovoljavaju sledeće uslove:

$$L_{ij}(\alpha)=\underline{B}_{ij}(\alpha) \tag{44}$$

$$R_{ij}(\alpha)=\overline{B}_{ij}(\alpha) \tag{45}$$

za $\alpha\in[0,1]$. Prema tome, aproksimiramo inverznu fuzzy matricu A sa $\mathrm{B}=(\mathrm{B}_{ij})$ gde je B_{ij} jedan $L_{ij}R_{ij}$ fuzzy broj, ako i samo ako za svako $\alpha_1,\alpha_2\in[0,1]$ za koje važi $\alpha_1<\alpha_2$ postoji $[\underline{B}(\alpha_2),\overline{B}(\alpha_2)]\subseteq[[\underline{B}(\alpha_1),\overline{B}(\alpha_1)]$. Naredna teorema obezbeđuje zadovoljenje ovog uslova.

Teorema 1. Neka su $[\mathrm{A}]_{\alpha_1}$ i $[\mathrm{A}]_{\alpha_2}$ dve $\alpha-presek$ matrice fuzzy matrice A takve da je $\alpha_1<\alpha_2$. Tada sledi

$$[\underline{B}(\alpha_2),\overline{B}(\alpha_2)]\subseteq[[\underline{B}(\alpha_1),\overline{B}(\alpha_1)] \tag{46}$$

Dokaz. $[\mathrm{A}]_{\alpha_1}=[\underline{\mathrm{A}}(\alpha_1),\overline{\mathrm{A}}(\alpha_1)]$ i $[\mathrm{A}]_{\alpha_2}=[\underline{\mathrm{A}}(\alpha_2),\overline{\mathrm{A}}(\alpha_2)]$. Pošto je $\alpha_1<\alpha_2$, važi $[\underline{\mathrm{A}}(\alpha_2),\overline{\mathrm{A}}(\alpha_2)]\subseteq[\underline{\mathrm{A}}(\alpha_1),\overline{\mathrm{A}}(\alpha_1)]$ tako da je

$$\{\mathrm{A}^{-1}:\mathrm{A}\in[\mathrm{A}]_{\alpha_2}\}\subseteq\{\mathrm{A}^{-1}:\mathrm{A}\in[\mathrm{A}]_{\alpha_1}\} \tag{47}$$

Prema tome, korišćenjem jednačina (20) and (21) jasno je da je $\underline{B}(\alpha_1)<\underline{B}(\alpha_2)$ i $\overline{B}(\alpha_1)<\overline{B}(\alpha_2)$. Tako da postoji $[\underline{B}(\alpha_2),\overline{B}(\alpha_2)]\subseteq[[\underline{B}(\alpha_1),\overline{B}(\alpha_1)]$.

Razmatranjem činjenice da postoje samo tri tačke jer se koriste tri vrednosti α, 0, 0.5 and 1, može se primeniti metod Lagranžeove interpolacije kako bi se dokazalo da je svaki element matrice $B(\alpha)$ fuzzy broj.

U slučaju da postoji tabela podataka,

α	α_0	α_1	α_2
$\underline{B}$	$\underline{B}_0$	$\underline{B}_1$	$\underline{B}_2$

u kojoj α_i predstavlja skalar u interval [0,1] i $\underline{B_j}(j=0,1,2)$ je $n\times n$ realna matrica. Primenom Lagranžeove interpolacije moguće je konstruisati matricu:

$$\underline{L}(\alpha)=\begin{bmatrix} \underline{L_{11}}(\alpha) & \underline{L_{12}}(\alpha) & \cdots & \underline{L_{1n}}(\alpha) \\ \underline{L_{21}}(\alpha) & \underline{L_{22}}(\alpha) & \cdots & \underline{L_{2n}}(\alpha) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \underline{L_{n1}}(\alpha) & \underline{L_{n2}}(\alpha) & \cdots & \underline{L_{nn}}(\alpha) \end{bmatrix} \tag{48}$$

u kojoj su $\underline{L_{ij}}(\alpha)$ vrednosti Lagranžeove interpolacije koje interpoliraju sledeću tabelu podataka:

α	α_0	α_1	α_2
$(\underline{B})_{ij}$	$(\underline{B}_0)_{ij}$	$(\underline{B}_1)_{ij}$	$(\underline{B}_2)_{ij}$

Slično, moguće je konstruisati $n\times n$ matricu $\overline{L}(\alpha)=\overline{L_{ij}}(\alpha)$ koja interpolira sledeću tabelu podataka:

α	α_0	α_1	α_2
$\overline{B}$	$\overline{B}_0$	$\overline{B}_1$	$\overline{B}_2$

Prema tome, dobijena je matrica $L(\alpha)$ u kojoj $L_{ij}(\alpha)=(\underline{L_{ij}}(\alpha),\overline{L_{ij}}(\alpha))$ aproksimira matricu $B_{ij}(\alpha)$.

3.4 Defazifikacija trougaonih fuzzy brojeva

Različite strategije su predložene za rangiranje fuzzy brojeva. Među njima su metode zasnovane na koeficijentu varijacije, rastojanju između dva fuzzy skupa, centroidnoj i originalnoj tački i otežanom proseku. Uprkos postojanju ovih metoda, nijednom se ne mogu konzistentno rangirati fuzzy brojevi u svim mogućim slučajevima. Nedostaci postoje pri rangiranju fuzzy brojeva korišćenjem koeficijenta varijacije, rastojanja između fuzzy skupova, centroidne i originalne tačke i otežanog proseka. U ovom odeljku predstavljen je metod označenog rastojanja za defazifikaciju trougaonih fuzzy brojeva (Yao i Wu, 2000; Chang et al., 2004; Chang et al., 2006; Bjork, 2009; Bjork, 2012) i načinjeno je poređenje ovog metoda sa alternativnim centroid metodom (Sugeno, 1985).

Definicija 12. Fuzzy skup $[a,b;\alpha]$, $0 \le \alpha \le 1$, $a < b$ definisan nad skupom realnih brojeva R, predstavlja fuzzy interval nivoa α ako je funkcija pripadnosti fuzzy skupa $[a,b;\alpha]$ data sa

$$\mu_{[a,b;\alpha]}(x) = \begin{cases} \alpha, & \mathrm{a \le x \le b} \\ 0, & \text{u suprotnom} \end{cases} \tag{49}$$

Neka je F familija svih fuzzy skupova definisanih nad R, a koji zadovoljavaju dva uslova:

(i) $\mathrm{A} \in F$, $\alpha - presek$ $A(\alpha) = [A_L(\alpha), A_R(\alpha)]$ fuzzy skupa A postoji za $\forall \alpha \in [0,1]$;

(ii) $A_L(\alpha)$ i $A_R(\alpha)$ su neprekidne funkcije na intervalu $0 \le \alpha \le 1$.

Tada za svako $\mathrm{A} \in F$, iz teoreme dekompozicije, A se može izraziti kao

$$\mathrm{A} = \bigcup_{0 \le \alpha \le 1} \alpha I_{A(\alpha)}(x) \tag{50}$$

gde $I_{A(\alpha)}(x)$ predstavlja karakterističnu funkciju $A(\alpha)$, i

$$\mu_{\alpha I_{A(\alpha)}(x)}(z) = \begin{cases} \alpha, & z \in A(\alpha) \\ 0, & z \notin A(\alpha) \end{cases} \tag{51}$$

Iz Definicije 1. i jednačine (3), jasno je da je za $x \in R$, $\alpha I_{A(\alpha)}(x) = \mu_{[A_L(\alpha), A_R(\alpha);\alpha]}(x)$ $\forall \alpha \in [0,1]$. Prema tome, $\mathrm{A} = \bigcup_{0 \le \alpha \le 1} [A_L(\alpha), A_R(\alpha);\alpha]$

U nastavku je uveden concept označenog rastojanja fuzzy skupa definisanog nad F. Prethodno je razmotreno označeno rastojanje za tačku definisanu nad R (Lee i Chiang, 2007).

Definicija 13. Označeno rastojanje: Za bilo koje $a, 0 \in R$ označeno rastojanje od a do 0 je definisano kao $d_0(a,0) = a$. Ako je $a > 0$ tada je rastojanje između a i 0, $d_0(a,0) = a$. U slučaju kada je $a < 0$ rastojanje između a i 0 je $-d_0(a,0) = -a$.

Prema tome, $d_0(a,0) = a$ predstavlja označeno rastojanje između a i 0. Za $\mathrm{A} \in F$, sa $\alpha - presekom\ A(\alpha) = [A_L(\alpha), A_R(\alpha)]$, $0 \le \alpha \le 1$ označena rastojanja dve krajnje tačke $A_L(\alpha)$ and $A_R(\alpha)$ mereno od 0 su $d_0(A_L(\alpha),0) = A_L(\alpha)$ and $d_0(A_R(\alpha),0) = A_R(\alpha)$. Prema tome, označeno rastojanje intervala $[A_L(\alpha), A_R(\alpha)]$, mereno od izvorišta 0, se može definisati kao

$$d_0([A_L(\alpha), A_R(\alpha)],0] = \frac{1}{2}[d_0(A_L(\alpha),0) + d_0(A_R(\alpha),0)] = \frac{1}{2}[A_L(\alpha) + A_R(\alpha)] \tag{52}$$

prema Definiciji 13. Za svako $\alpha \in [0,1]$, postoji jedan-na-jedan preslikavanje između egzaktnog intervala $[A_L(\alpha), A_R(\alpha)]$ i fuzzy intervala nivoa α $[D_L(\alpha), D_R(\alpha);\alpha]$.

$$[A_L(\alpha), A_R(\alpha);\alpha] \leftrightarrow [A_L(\alpha), A_R(\alpha)] \tag{53}$$

Prema tome, označeno rastojanje od $[A_L(\alpha), A_R(\alpha);\alpha]$ do $\tilde{0}$ se može definisati kao

$$d_0([A_L(\alpha), A_R(\alpha);\alpha],\tilde{0}] = d_0([A_L(\alpha), A_R(\alpha)],0) = \frac{1}{2}[A_L(\alpha) + A_R(\alpha)] \tag{54}$$

Kako $\mathrm{A} \in F$, $A_L(\alpha)$ and $A_R(\alpha)$ postoje i integrabilni su za $\alpha \in [0,1]$, važi sledeća definicija.

Definition 14. Neka je $\mathrm{A} \in F$. Označeno rastojanje A mereno od $\tilde{0}$ se može definisati kao

$$d(\mathrm{A},\tilde{0}) = \int_0^1 d([A_L(\alpha), A_R(\alpha)],\tilde{0})d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^1 (A_L(\alpha) + A_R(\alpha))d\alpha \tag{55}$$

Za trougaoni fuzzy broj $\mathrm{A} = (a,b,c)$, $\alpha - presek$ je $A(\alpha) = [A_L(\alpha), A_R(\alpha)]$, $\alpha \in [0,1]$ pri čemu je $A_L(\alpha) = a + (b-a)\alpha$ i $A_R(\alpha) = c + (c-b)\alpha$. Iz definicije 14. sledi

$$d(\mathrm{A},\tilde{0})=\frac{1}{4}(2b+a+c) \tag{56}$$

Osim toga, za $\mathrm{A}=(a,b,c)$ odnos između centroida $C(\mathrm{A})$ koji se može izvesti kao

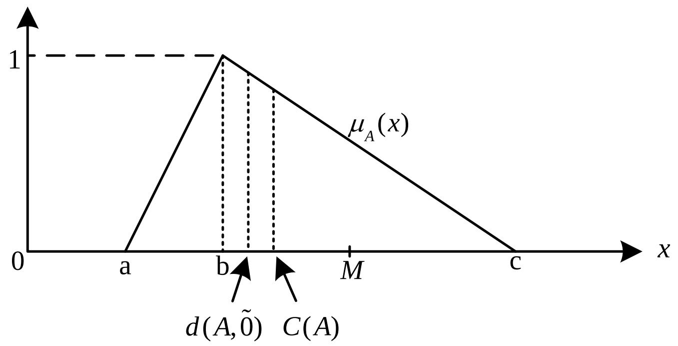
$$C(A)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\mu_A(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu_A(x)dx}=\frac{1}{3}(a+b+c) \tag{57}$$

i označenog rastojanja $d(\mathrm{A},\tilde{0})$ se može predstaviti na sledeći način. Neka je $M=(a+c)/2$. Na osnovu rezultata $b-d(A,0)=(2b-a-c)/4=(b-M)/2$, $d(\mathrm{A},\tilde{0})-C(\mathrm{A})=(b-M)/6$ i $C(\mathrm{A})-M=(b-M)/3$ sledi (Slika 3.3-3.4):

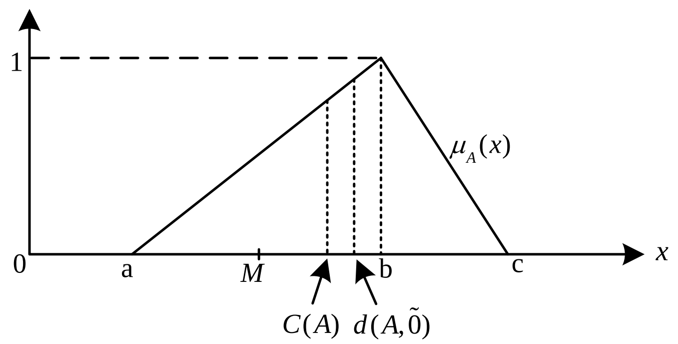
(a) Ako je $M>b,$ tada je $a<b<d(\mathrm{A},\tilde{0})<C(\mathrm{A})<M<c$

(b) Ako je $M<b,$ tada je $a<M<C(\mathrm{A})<d(\mathrm{A},\tilde{0})<b<c$

(c) Ako je $M=b,$ tada je $a<M=C(\mathrm{A})=d(\mathrm{A},\tilde{0})=b<c$



Slika 3.3 *Slučaj* $M>b$.



Slika 3.4 *Slučaj* $M<b$.

Sa Slika 3.3 i 3.4 se može uočiti da je $\mu_A(C(A)) < \mu_A(d(A,\tilde{0})) < \mu_A(b) = 1$, odnosno stepen pripadnosti u $d(A,\tilde{0})$ je veći nego u $C(A)$. Osim toga iz jednačina (56) i (57), $C(A) = (a+b+c)/3$ i $d(A,\tilde{0}) = (a+2b+c)/4$ može se zaključiti da obe predstavljaju otežanu sredinu skupa brojeva (a,b,c), dok je $d(A,\tilde{0})$ značajnije od $C(A)$, pošto je maksimalni stepen pripadnosti $A = (a,b,c)$ u tački b, koji ima veću težinu u $d(A,\tilde{0})$ nego u $C(A)$. Prema tome, u slučaju defazifikacije trougaonog fuzzy broja, bolje je koristiti metod označenog rastojanja nego centroid.

Uz to, za dva fuzzy skupa $D, E \in F$, pri čemu je $D = \bigcup_{0\le\alpha\le1}[D_L(\alpha), D_R(\alpha); \alpha]$, i $E = \bigcup_{0\le\alpha\le1}[E_L(\alpha), E_R(\alpha); \alpha]$, važi

$$\mu_{[D_L(\alpha)_\alpha, D_R(\alpha)_\alpha] + [E_L(\alpha)_\alpha, E_R(\alpha)_\alpha]}(z) = \mu_{[D_L(\alpha)_\alpha + E_L(\alpha)_\alpha] + [D_R(\alpha)_\alpha + E_R(\alpha)_\alpha]}(z) \tag{58}$$

$$D + E = \bigcup_{0\le\alpha\le1} [(D_L(\alpha) + E_L(\alpha))_\alpha, (D_R(\alpha) + E_R(\alpha))_\alpha] \tag{59}$$

$$k(\cdot)D = \begin{cases} \bigcup_{0\le\alpha\le1}[kD_L(\alpha), kD_R(\alpha); \alpha], \text{ ako je } k > 0 \\ \bigcup_{0\le\alpha\le1}[kD_R(\alpha), kD_L(\alpha); \alpha], \text{ ako je } k < 0 \end{cases} \tag{60}$$

$$D\text{-}E = \bigcup_{0\le\alpha\le1} [(D_L(\alpha) - E_R(\alpha))_\alpha, (D_R(\alpha) - E_L(\alpha))_\alpha] \tag{61}$$

Ako je $0 \le D_L(\alpha) \le D_R(\alpha)$ i $0 < E_L(\alpha) < E_R(\alpha)$ za $\alpha \in [0,1]$, tada važi

$$D \cdot E = \bigcup_{0\le\alpha\le1} [(D_L(\alpha) \cdot E_L(\alpha))_\alpha, (D_R(\alpha) \cdot E_R(\alpha))_\alpha] \tag{62}$$

$$D \div E = \bigcup_{0\le\alpha\le1} [(\frac{D_L(\alpha)}{E_R(\alpha)})_\alpha, (\frac{D_R(\alpha)}{E_L(\alpha)})_\alpha] \tag{63}$$

3.5 Fuzzy slučajne promenljive

Fuzzy slučajne promenljive su uvedene u cilju modelovanja i analize nepreciznih merljivih funkcija povezanih sa prostorom uzorkovanja slučajnog eksperimenta, pri čemu je nepreciznost vrednosti ovih funkcija formalizovana preko fuzzy skupova (Gil i ostali, 2006).

Različiti pristupi konceptu fuzzy slučajnih promenljivih su razvijeni u literaturi, a među njima najznačajniji doprinos dali su Kwakernaak (1978, 1979), Kruse i Meyer (1987) i Puri i Ralescu (1986).

Termin „fuzzy slučajna promenljiva“ uveo je Kwakernaak (1978), koji definiše fuzzy slučajne promenljive kao „slučajne promenljive čije vrednosti nisu realni, već fuzzy brojevi“, i konceptualizuje fuzzy slučajne promenljive kao neodređene percpecije egzaktne, ali neopservabilne slučajne promenljive.

Neka je (Ω, Φ, P) prostor verovatnoća i $F(R)$ skup svih fuzzy brojeva u skupu realnih brojeva R. Formalno $F(R)$ označava vrstu normalnih konveksnih fuzzy podskupova Euklidskog prostora R koji ima ograničene α nivoe za $\alpha \in [0,1]$. Ovo je vrsta preslikavanja $U: R \to [0,1]$ tako da je U_α neprazni ograničeni interval gde je

$$\begin{aligned} U_\alpha &= \{x \in R \mid U(x) \geq \alpha\} \text{ ako je } \alpha \in (0,1] \\ &= \mathrm{cl}(\mathrm{supp}\ U)^* \qquad \text{ako je } \alpha = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

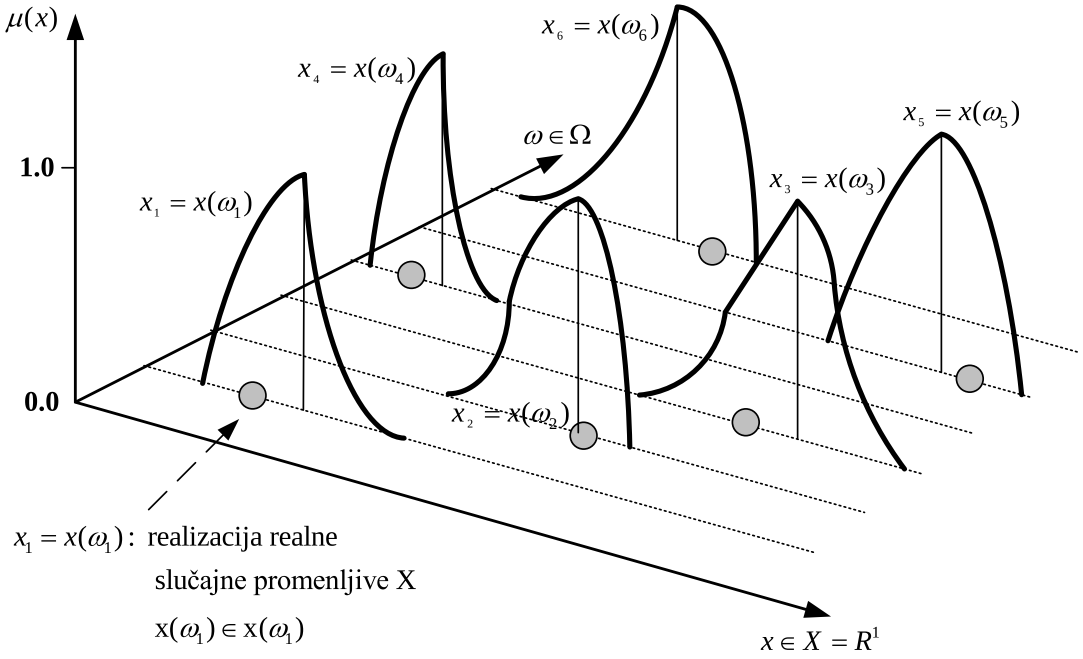
Prema tome, fuzzy slučajna promenljiva predstavlja preslikavanje $\xi : \Omega \to F(R)$ takvo da za bilo koje $\alpha \in [0,1]$ i svako $\omega \in \Omega$, realno preslikavanje

$\inf\ \xi_\alpha : \Omega \to R,$ koje zadovoljava $\inf\ \xi_\alpha(\omega) = \inf(\xi(\omega))_\alpha$ i

$\sup\ \xi_\alpha : \Omega \to R,$ koje zadovoljava $\sup\ \xi_\alpha(\omega) = \sup(\xi(\omega))_\alpha$

predstavlja realne slučajne promenljive (Slika 3.5).

Puri i Ralescu (1986) su konceptualizovali fuzzy slučajnu promenlivu kao fazifikaciju slučajnog skupa. Autori su definisali i istražili koncept fuzzy slučajnih promenljivih čije vrednosti predstavljaju fuzzy podskupove R^n (Banahov prostor), i samim tim povezali fuzzy slučajne promenljive sa već poznatim konceptom slučajnih skupova.



Slika 3.5 *Model fuzzy slučajne promenljive (Moller i Beer, 2004)*

4. FUZZY STOHASTIČKI MODEL ZA DIMENZIONISANJE ŽELEZNIČKOG TERETNOG KOLSKOG PARKA

Matematički model predstavljen u ovoj disertaciji namenjen je istovremenom rešavanju problema dimenzionisanja teretnog kolskog parka i alokacije teretnih kola uz prisustvo neizvesnosti koja je modelovana primenom fuzzy stohastike.

Investicije u teretni kolski park se sprovode sa ciljem da se zadovolji tražnja za prevozom na posmatranoj železničkoj mreži. Prevozna usluga se izvršava upućivanjem tovarenih i praznih kola u određene stanice u zahtevanom vremenskom periodu. Korišćenje teretnih kola predstavlja važan element odluka o planiranju nabavke novih kola. Smanjenje operativnih troškova upotrebe kola permanentan je cilj svih železničkih kompanija. Aktuelna istraživanja ukazuju na potrebu istovremenog odlučivanja o veličini investicija u teretni kolski park sa jedne i alokaciji teretnih kola sa druge strane.

Posmatrani problem je posebno kompleksan s obzirom na činjenicu da je železnički teretni kolski park sastavljen od mnogo različitih tipova kola i da određeni tip kola ne može biti korišćen za transport svih vrsta roba. U praksi, neraspoloživost odgovarajućeg tipa teretnih kola često nameće potrebu za upotrebom drugog tipa teretnih kola. Neke serije teretnih kola često obuhvataju veliki broj različitih podserija koje su međusobno zamenljive samo do određenog stepena. Kao što se iz pregleda literature može uočiti modeli dimenzionisanja voznog parka se mogu posmatrati kao homogeni i heterogeni. Model razvijen u ovoj disertaciji pretpostavlja homogen teretni kolski park.

U ovom poglavlju primenjen je pristup fuzzy optimalnog upravljanja za formulaciju problema. U prvom delu poglavlja definisani su parametri modela. U drugom delu, funkcional cilja sistema je predstavljen. Funkcional cilja je zasnovan na očekivanim troškovima vlasništva i raspodele praznih i tovarenih kola koji su predstavljeni kao egzaktni parametri. U trećem delu data je definicija fuzzy jednačine vektora stanja za diskretni fuzzy linearni sistem koji opisuje problem dimenzionisanja i alokacije železničkog teretnog kolskog parka. Četvrti deo ovog poglavlja sadrži procenu fuzzy vektora stanja na osnovu prognoziranog broja teretnih kola. U petom delu, predstavljen je pristup rešavanju problema dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka. U šestom delu predstavljen je pristup za izbor komponenata težinskih matrica A, B i L. U poslednjem sedmom delu ovog poglavlja predstavljen je pristup za izbor komponenata fuzzy matrice terminalnog člana $\Gamma(\mathrm{P})$.

4.1 Parametri modela

Kao osnov za modelovanje problema primenjena je opšta teorija sistema pri čemu su određeni parametri modela tretirani kao fuzzy stohastičke veličine. Dinamika broja tovarenih i praznih teretnih kola na železničkoj mreži sa N stanica i na planskom horizontu od P dana opisana je vektorskom fuzzy diferencnom jednačinom prvog reda. Neka je N broj stanica na analiziranoj železničkoj mreži. Ove stanice mogu da predstavljaju pojedinačne stanice na realnoj mreži ili grupu susednih stanica sa manjim obimom rada. Ovo ukrupnjavanje vrši se za potrebe testiranja modela iz nekoliko razloga. Najčešće nije moguće obezbediti sve neophodne podatke za testiranje modela na nivou koji predstavlja stvarnu železničku mrežu. Kako je cilj testiranja modela uočavanje njegovih osnovnih karakteristika, analiza rezultata i utvrđivanje potrebnog broja teretnih kola, to bi korišćenje stvarne mreže pre svega značilo favorizovanje istraživanja složenosti računskog postupka u odnosu na analizu dobijenih rezultata.

Upravljačke akcije o upućivanju praznih i tovarenih teretnih kola sprovode se jednom dnevno, u trenucima $0,1,\ldots,m,\ldots,n,\ldots,P$ za svaku stanicu na mreži. Dužina planskog horizonta ne može biti kraća nego što je najduže vreme putovanja kola između stanica na posmatranoj mreži. Teretna kola se razmatraju kao neprekidne promenljive. Tražnja za teretnim kolima iz stanice i za stanicu j u periodu n, $D_{ij}(n)$ je modelovana kao fuzzy stohastička promenljiva opisana fuzzy Gausovom funkcijom gustine verovatnoća $N(\mu_{ij},\sigma_{ij})$. Naime, u neizvesnim i/ili nestabilnim okruženjima teško je odrediti tražnju sa jednom vrednošću $E(D_{ij})=\mu_{ij}$, lakše je tražnju predstaviti određenim intervalom $(\mu_i-\Delta_1,\mu_i,\mu_i+\Delta_2)$, pri čemu su Δ_1 i Δ_2 definisani od strane donosoca odluka. Prema tome, fuzzy očekivanje fuzzy slučajne promenljive je moguće predstaviti trougaonim fuzzy brojem,

$$E(\sum_j D_{ij})=\mu_i=(\mu_i - \Delta_1,\mu_i,\mu_i+\Delta_2)$$

Samo su potpuno natovarena kola razmotrena, stoga je nivo tražnje meren u jedinicama teretnih kola. Tražnja se odnosi na rute između stanica, ne na same stanice. Tražnja podstiče fuzzy tokove tovarenih teretnih kola koji su predstavljeni kao $F_{ij}(n)$. U opštem slučaju može postojati nekoliko različitih tipova teretnih kola koja su raspoloživa za zadovoljenje aktuelne tražnje, pa bi notacija mogla biti proširena na $F_{ijk}(n)$ u cilju predstavljanja tokova teretnih kola tipa k. U ovoj disertaciji samo jedan tip kola biće razmotren. Kako tražnja za tovarenim teretnim kolima ka bilo kojoj stanici i ne mora biti ista kao tražnja od stanice i ka ostalim stanicama, kretanje praznih teretnih kola je neophodno za uravnotežavanje toka. Fuzzy broj praznih tokova je označen sa $E_{ij}(n)$. Upravljačke akcije, skup svih polazaka praznih i tovarenih kola na planskom periodu su pod uticajem vremena prispeća teretnih kola. U mnogim sistemima, vremena putovanja su neizvesna usled otkaza voznih sredstava i eksternih uticaja. Umesto eksplicitnog razmatranja vremena putovanja, problem u ovoj disertaciji je formulisan preko prispeća teretnih kola. Preciznije, ako je $F_{ij}(n)$ teretnih kola otpremljeno iz stanice i u periodu m, u ovom pristupu postavlja se pitanje koliko je ovih teretnih kola zapravo prispelo u stanicu j u periodu n. Prema tome, parametri $\alpha_{ij}(m,n)$ [$\beta_{ij}(m,n)$] su definisani kao fuzzy proporcije tovarenih [praznih] teretnih kola otpremljenih iz stanice i u periodu m koja će prispeti u stanicu j u periodu n.

Usled neizvesnosti tražnje i vremena putovanja, poželjno je održavati zalihe teretnih kola u određenim stanicama kako bi se izbegli povremeni nedostaci.

Neka je $S_i(n)$ fuzzy broj kola u $i-$toj stanici na kraju perioda n. Vremenski interval između donošenja odluke o upućivanju kola ka stanicama tražnje obično iznosi jedan dan. To znači da se u narednom trenutku posmatranja, nakon isteka dvadeset četiri časa, broj kola u $i-$toj stanici može opisati dodavanjem na stanje kola $S_i(n)$ razlike između fuzzy broja kola pristiglih tokom perioda $n+1$, a otpremljenih u ranijim vremenskim periodima i fuzzy broja kola otpremljenih u toku $n+1$ perioda na osnovu tražnje preostalih stanica. Stanje sistema definisano je ukupnom fuzzy ponudom kola u svakoj stanici za svaki dan tokom planskog perioda. Kako je moguće da u stanici nema onoliko kola kolika je tražnja preostalih stanica, definiše se fuzzy promenljiva $U_{ij}(n)$ koja predstavlja neispunjene zahteve između stanica i i j u toku perioda n. Zapravo, ova promenljiva predstavlja nedostavljeni broj kola stanici i iz stanice j u toku perioda n. Pretpostavljeno je da se neispunjene porudžbine prenose na naredni vremenski period, odnosno da nema izgubljene prodaje usluga.

Na osnovu uvedenih pretpostavki i prema usvojenim oznakama moguće je postaviti osnovne relacije između definisanih veličina:

$$\begin{aligned} S_i(n+1) = S_i(n) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{m<n+1} (F_{ji}(m)\cdot\theta_{ji}(m,n+1) + E_{ji}(m)\cdot\alpha_{ji}(m,n+1)) - \\ - \sum_{j=1}^{N} (F_{ij}(n+1) + E_{ij}(n+1)) \end{aligned} \quad (65)$$

$$U_{ij}(n+1) = U_{ij}(n) + D_{ij}(n+1) - F_{ij}(n+1) \quad (66)$$

$$F_{ij}(n), E_{ij}(n), U_{ij}(n), S_i(n) \geq 0 \quad (67)$$

$i=1,\dots,N;\ j=1,\dots,N; n=0,\dots,P-1,\ i \neq j$

Relacija (65) predstavlja matematički iskaz pretpostavke o očuvanju tokova kola u svakoj stanici i za svaki period, u fuzzy smislu. Ona istovremeno pokazuje i uticaj fuzzy prirode vremena putovanja kroz vrednosti θ i α na dolaske kola u njihova odredišta. Relacijom (66) pokazano je da je sva fuzzy tražnja uzeta u razmatranje, odnosno da je broj nedostavljenih tovarenih kola u $(n+1)-$om periodu jednak nedostavljenom broju tovarenih kola u prethodnom periodu uvećanom za razliku nove tražnje i otpremljenog broja tovarenih kola. Poslednja relacija ukazuje na to da su fuzzy promenljive stanja i upravljačke akcije nenegativne veličine i reflektuje prirodnu pretpostavku o pozitivnosti tokova teretnih kola, stanja kola u svakoj stanici i neispunjenih tražnji (Beaujon and Turnquist, 1991; Sayarshad and Ghoseiri, 2009; Sayarshad and Tavakkoli-Moghaddam, 2010). Prema tome, sve fuzzy promenljive stanja i upravljačkih akcija su uvek nenegativne vrednosti.

Ukratko, fuzzy upravljačke promenljive su:

$E_{ij}(n)$: fuzzy broj praznih kola otpremljenih iz stanice i za stanicu j tokom perioda n, $i=1,\ldots,N; j=1,\ldots,N; n=1,\ldots,P, i\neq j$;

$F_{ij}(n)$: fuzzy broj tovarenih kola otpremljenih iz stanice i za stanicu j tokom perioda n, $i=1,\ldots,N; j=1,\ldots,N; n=1,\ldots,P, i\neq j$;

Kako su tražnja i vremena putovanja neizvesne veličine, optimalne vrednosti za odluke o dispečiranju teretnih kola, $F_{ij}(n)$ i $E_{ij}(n)$ zavisiće od vrednosti parametara $D_{ij}(\ )$, $\alpha_{ij}(\ )$ and $\beta_{ij}(\ )$.

Stanje sistema teretnih kola u fuzzy smislu u bilo kom vremenskom periodu n je dato sa:

$S_i(n)$: fuzzy ukupan broj praznih i tovarenih kola u stanici i na kraju perioda n, $i=1,\ldots,N; n=0,1,\ldots,P$;

$U_{ij}(n)$: fuzzy broj nedostavljenih tovarenih kola u stanici i iz stanice j tokom perioda n, $i=1,\ldots,N; j=1,\ldots,N; n=1,\ldots,P, i\neq j$;

S obzirom na postojanje neizvesnosti u vremenima putovanja, sledeće fuzzy promenljive su potrebne za opis kretanja teretnih kola:

$\theta_{ij}(m,n)$: fuzzy procenat prispeća u n - tom periodu tovarenih kola otpremljenih u m - tom periodu iz stanice i u stanicu j,

$n > m,\ i = 1,\dots,N;\ j = 1,\dots,N; n = 1,\dots,P, i \neq j$;

$\alpha_{ij}(m,n)$: fuzzy procenat prispeća u n -tom periodu praznih kola otpremljenih u m -tom periodu iz stanice i u stanicu j,

$n > m,\ i = 1,\dots,N;\ j = 1,\dots,N; n = 1,\dots,P, i \neq j$;

Tražnja za teretnim kolima je data kao:

$D_{ij}(n)$: fuzzy stohastička tražnja za teretnim kolima između stanice i i stanice j tokom perioda n, $i = 1,\dots,N;\ j = 1,\dots,N; n = 1,\dots,P, i \neq j$;

Ova tražnja se može predstaviti kao zbir slučajne (stohastičke) i fuzzy determinističke komponente. Kako je pretpostavljeno da je ovaj niz Gaus-Markovskog karaktera i uz saznanje da je Gausova forma održiva u slučaju linearne transformacije, isti niz se može opisati fuzzy vektorom stanja fuzzy linearnog dinamičkog sistema, sa početnim gausovskim fuzzy vektorom stanja. Ova veličina zapravo predstavlja nekontralabilni ulaz u sistem.

Gausovski čist slučajni process predstavlja graničnu vrednost fuzzy Gaus-Markovskog procesa sa vrlo velikom kovarijansom i kratkim vremenom korelacije. Kako je Furieova transformacija funkcije korelacije u odnosu na vreme, konstantna, njen spektar je beo. Otuda se često čist gausovski slučajni process naziva beli šum (Bryson i Ho, 1975). Neka je pomoćna fuzzy promenljiva $d_{ij}(n)$ definisana na sledeći način:

$$d_{ij}(n) = D_{ij}(n+1) \tag{68}$$

$$d_{ij}(n+1) = \lambda_{ij}(n)\lambda_{ij}(n-1)\dots\lambda_{ij}(n)d_{ij}(0) + \omega_{ij}(n), \quad n = 0,1,\dots,P\text{-}1 \tag{69}$$

$$\lambda_{ij}(n) = \frac{\mu_{ij}(n+2)}{\mu_{ij}(n+1)}, \quad n = 0,1,\dots,P\text{-}2 \tag{70}$$

$$E[\omega_{ij}(n)] = \tilde{0} \tag{71}$$

Gde je:

$\lambda_{ij}(n)$: fuzzy komponenta tražnje za kolima između i i j tokom perioda n $i = 1,\dots,N;\ j = 1,\dots,N; n = 0,\dots,P-1,\ i \neq j$;

$\omega_{ij}(n)$: fuzzy slučajna komponenta tražnje za teretnim kolima između stanica i i j tokom perioda n, $i=1,\ldots,N; j=1,\ldots,N; n=0,\ldots,P-1,\ i\neq j$;

Relacije (68)-(70) omogućavaju konvertovanje bilo kog fuzzy slučajnog procesa u ekvivalentan fuzzy markovski slučajni proces pravilnim proširenjem fuzzy vektora stanja za fuzzy promenljivu $d_{ij}(n)$. Relacija (71) predstavlja fuzzy očekivanje Gausovog potpuno slučajnog procesa koji predstavlja fuzzy slučajnu komponentu tražnje. Kao i u egzaktnom slučaju, bilo koja fuzzy slučajna vektorska sekvenca se može prevesti u fuzzy markovski proces podesnim proširenjem vektora stanja i uvođenjem odgovarajućih smena. Redefinišimo $\theta_{ij}(m,n)$ i $\alpha_{ij}(m,n)$ na sledeći način:

$$a_{ji,n+1-m}(n)=\theta_{ji}(m,n+1), \quad m<n, \quad n=0,\ldots,P \tag{72}$$

$$\tilde{b}_{ji,n+1-m}(n)=\alpha_{ji}(m,n+1), \quad m<n, \quad n=0,\ldots,P \tag{73}$$

Na sličan način, pridruživanjem još jednog indeksa moguće je opisati promenljive kojima se iskazuju prispeća tovarenih i praznih kola iz prethodnih vremenskih intervala,

$$x_{ji,n+1-m}(n)=F_{ji}(m), \quad m<n, \quad n=0,\ldots,P \tag{74}$$

$$y_{ji,n+1-m}(n)=E_{ji}(m), \quad m<n, \quad n=0,\ldots,P \tag{75}$$

Potrebno je takođe uvesti i dodatne fuzzy promenljive $f_{ij}(n)$ i $\tilde{e}_{ij}(n)$ koje se mogu definisati na sledeći način:

$$f_{ij}(n)=F_{ij}(n+1),\ \tilde{e}_{ij}(n)=E_{ij}(n+1),\ \forall i,j,n \tag{76}$$

4.2 Funkcional cilja

Teorija optimalnog upravljanja razmatra problem određivanja zakona upravljanja za dati sistem tako da se određeni kriterijum optimalnosti postigne. Upravljački problem obuhvata kriterijum performansi kao meru koja predstavlja funkciju promenljivih stanja i upravljanja. U ovom pristupu, mera performansi sistema predstavlja funkcional cilja minimiziranja troškova koji obuhvata očekivane troškove vlasništva i raspoređivanja praznih i tovarenih teretnih kola na razmatranoj železničkoj mreži. Cilj je pronaći optimalnu politiku kojom se bilo koja vrednost stanja projektuje na upravljanje koje na najbolji način zadovoljava dati cilj. Fuzzy linearni gausov system u ovoj disertaciji je razmotren sa kvadratnim troškovnim funkcionalom. Kako funkcional obuhvata trošak kretanja i čuvanja praznih i tovarenih kola ne postoje praktične ograničenja da se ovaj funkcional predstavi u kvadratnom obliku. Neka su performanse sistema u fuzzy smislu merene sledećim fuzzy troškom:

$$J = \Delta[X(P)] + \sum_{n=0}^{P-1} f[X(n), U(n), n] \tag{77}$$

Fuzzy trošak je komponovan iz dva člana. Prvi član predstavlja fuzzy trošak sistema teretnog kolskog parka u poslednjem periodu planskog horizonta koji je funkcija fuzzy vektora stanja kao posledice upravljačkih akcija tokom prethodnih perioda. Ovaj trošak je izveden na osnovu jediničnih troškova čuvanja kola h_i, jediničnih troškova nedostatka kola p_{ij} i jediničnih troškova vlasništva kola dok su ona u putovanju između stanica Q. Troškovna komponenta Q je određena po kolima po periodu (Beaujon i Turnquist, 1991). Trošak čuvanja teretnih kola nije manji od troška vlasništva Q, ali u opštem slučaju obuhvata i dodatni trošak skladištenja i upravljanja teretnim kolima u stanici. U ovoj disertaciji, h_i je definisan kao jedinični trošak čuvanja teretnih kola tokom jednog vremenskog perioda u određenoj stanici, pri čemu je $h_i \geq Q$. Drugi član u funkcionalu cilja predstavlja fuzzy trošak sistema u P-1 perioda planskog horizonta koji je funkcija fuzzy vektora stanja $X(n)$ i fuzzy vektora upravljanja $U(n)$ i izveden je u odnosu na jedinični trošak čuvanja h_i, jedinični trošak nedostatka p_{ij}, jedinični trošak vlasništva ili zakupa kola tokom putovanja Q, i jedinične troškove kretanja praznih e_{ji}, i tovarenih l_{ji}, kola od jedne stanice do druge u preostalim diskretnim vremenskim periodima. Sve troškovne komponente su modelovane kao egzaktni parametri.

Troškovi koji se odnose na funkcionisanje sistema se mogu ukratko predstaviti kao:

h_i: jedinični trošak čuvanja kola u i- toj stanici po periodu. Ovaj trošak je konstantan tokom planskog horizonta $i = 1, \ldots, N$;

p_{ij}: jedinični trošak nedostatka kola između stanice i i stanice j po periodu. Ovaj trošak je konstantan tokom planskog horizonta $i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, N; i \neq j$;

e_{ij} : jedinični trošak kretanja praznih kola iz stanice i do stanice j, $i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, N; i \neq j$;

l_{ij} : jedinični trošak kretanja tovarenih kola iz stanice i do stanice j, $i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, N; i \neq j$;

Q: jedinični trošak vlasništva kola dok se ona nalaze na putovanju između stanica, po periodu;

4.3 Ograničenja problema

Pretpostavljeni oblik fuzzy diferencne jednačine koja opisuje dinamiku fuzzy broja tovarenih i praznih teretnih kola, sa specificiranim kriterijumom optimalnosti, predstavlja problem upravljanja linearnim sistemima sa fuzzy slučajnim parametrima. Elementi matrice vektora stanja su fuzzy slučajni parametri vremena prispeća kola u stanice. Razmotreni model je opisan vremenski diskretnim sistemom upravljanja čija stanja se menjaju u skladu sa sledećom fuzzy diferencnom jednačinom:

$$X(n+1) = \Lambda(n)X(n) + GU(n) + V_1(n), \quad n = 0, \ldots, P\text{-}1, \text{ dato } X(0) \tag{78}$$

pri čemu indeks $n = 0$ odgovara početnom periodu.

Ova fuzzy linearna dinamička ograničenja I reda relfektuju osnovne relacije (65)-(66) posmatranog problema. Fuzzy stanje u narednom periodu predstavlja funkciju fuzzy stanja, fuzzy upravljanja i fuzzy slučajnih poremećaja $V_1(n)$ u prethodnom periodu. Pri čemu je $X(0)$ dato i gde je

$$U(n) = \begin{bmatrix} U_1(n) \\ U_2(n) \end{bmatrix}_{2N(N-1)} \tag{79}$$

$$U_1(n) = [f_{ij}(n)]_{N(N-1)},\ i = 1,\dots,N;\ j = 1,\dots,N,\ i \neq j \tag{80}$$

$$U_2(n) = [\tilde{e}_{ij}(n)]_{N(N-1)},\ i = 1,\dots,N;\ j = 1,\dots,N,\ i \neq j \tag{81}$$

Fuzzy matrica $\Lambda[n, a(n), \tilde{b}(n)]$ je fuzzy matrica tranzicije stanja čije su dimenzije:

$[N(2N-1) + 2N(N-1)(P-1)] \times [N(2N-1) + 2N(N-1)(P-1)]$

$$\tilde{\Lambda}(n) = \left[\begin{array}{c|c|c} \tilde{I}_{N^2} & \tilde{\Lambda}1_{N^2, N(N-1)} & \tilde{\Lambda}2_{N^2, 2N(N-1)(P-1)} \\ \hline \tilde{O}_{N(N-1),N^2} & \tilde{\Lambda}3_{N(N-1),N(N-1)} & \tilde{O}_{N(N-1),2N(N-1)(P-1)} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\tilde{O}_{2N(N-1)(P-1),N^2+N(N-1)}} & \tilde{\Lambda}4_{2N(N-1)(P-1),2N(N-1)(P-1)} \end{array}\right] \tag{82}$$

Pri čemu je

$\tilde{I}_{N^2}$ fuzzy jedinična $N^2 \times N^2$ matrica.

$O_{N(N-1),N^2}; O_{N(N-1),2N(N-1)(P-1)}; O_{2N(N-1)(P-1),N^2+N(N-1)}$ su fuzzy nula matrice odgovarajućih dimenzija.

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & . & . & . & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & . & . & . & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{bmatrix} \tag{83}$$

je $N^2 \times N(N-1)$ fuzzy matrica čije su komponente $\tilde{0} = (0,0,0)$ i $\tilde{1} = (1,1,1)$.

$$\tilde{\Lambda}_2(n) = \left[\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{\tilde{A}1_{1\times 2(N-1)(P-1)}} & \tilde{O}_{1\times N(N-1)(P-1)} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\tilde{O}_{(N-1)\times 2N(N-1)(P-1)}} \\ \hline \tilde{O}_{1\times 2(N-1)(P-1)} & \tilde{A}2_{1\times 2(N-1)(P-1)} & \tilde{O}_{1\times 2(N-1)(P-1)} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\tilde{O}_{(N-1)\times 2N(N-1)(P-1)}} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\tilde{O}_{1\times N(N-1)(P-1)}} & \tilde{A}3_{1\times 2(N-1)(P-1)} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\tilde{O}_{(N-1)\times 2N(N-1)(P-1)}} \end{array}\right] \tag{84}$$

gde je

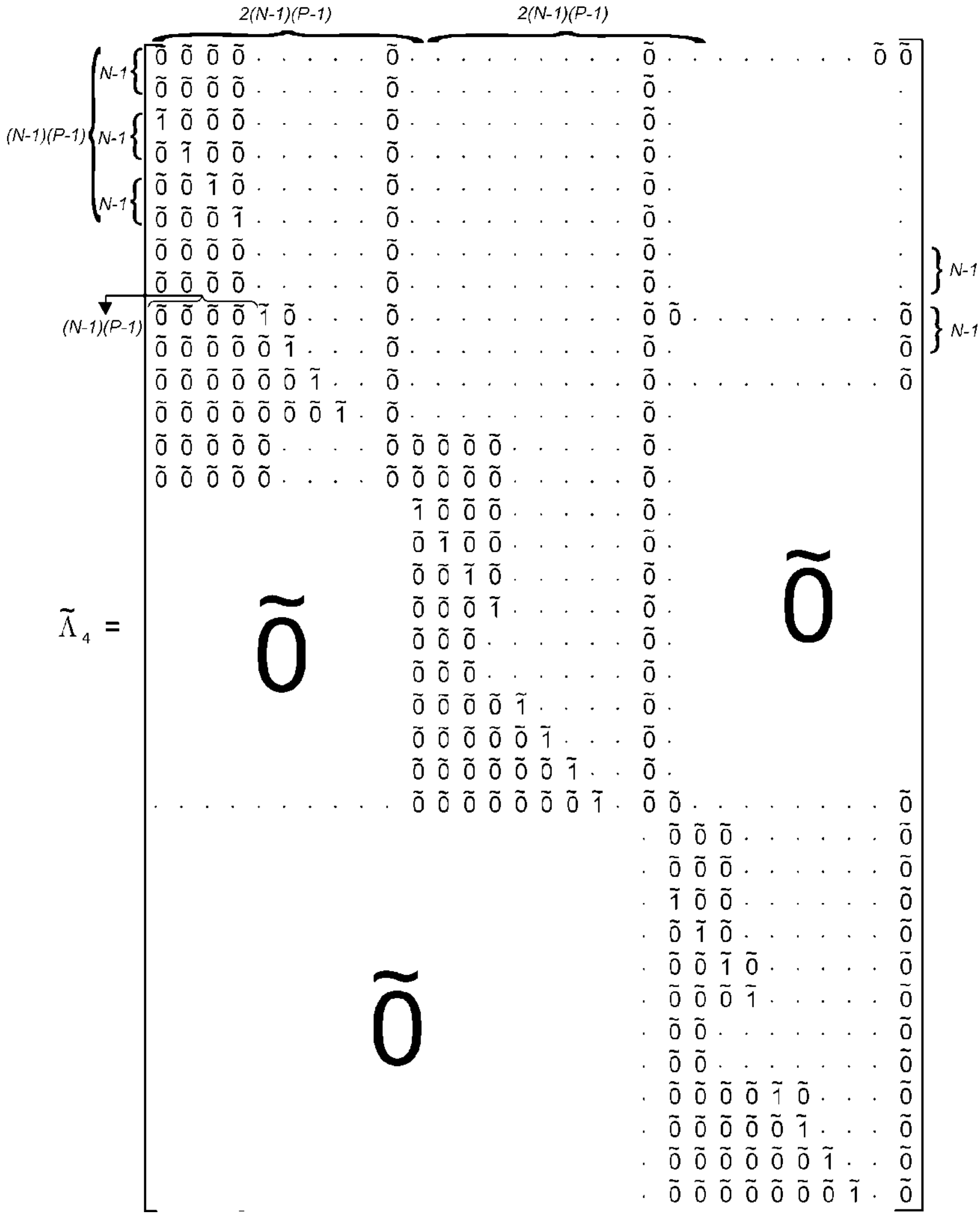
$$A1_{1\times 2(N-1)(P-1)}=[a_{211}^{(n)}\ldots a_{N11}^{(n)}\ a_{21,P-1}^{(n)}\ldots a_{N1,P-1}^{(n)}\ \mathrm{b}_{211}^{(n)}\ldots\tilde{b}_{N11}^{(n)}\ \mathrm{b}_{21,P-1}^{(n)}\ldots \mathrm{b}_{N1,P-1}^{(n)}]$$

$$A2_{1\times 2(N-1)(P-1)}=[a_{121}^{(n)}\ldots a_{N21}^{(n)}\ a_{12,P-1}^{(n)}\ldots a_{N2,P-1}^{(n)}\ \mathrm{b}_{121}^{(n)}\ldots\tilde{b}_{N21}^{(n)}\ \mathrm{b}_{12,P-1}^{(n)}\ldots \mathrm{b}_{N2,P-1}^{(n)}]$$

$$A3_{1\times 2(N-1)(P-1)}=[a_{1,N,1}^{(n)}\ldots a_{N-1,N,1}^{(n)}\ a_{1,N-1,P-1}^{(n)}\ldots a_{N-1,N,P-1}^{(n)}\ \tilde{b}_{1,N,1}^{(n)}\ldots\tilde{b}_{N-1,N,1}^{(n)}\ \tilde{b}_{1,N-1,P-1}^{(n)}\ldots\tilde{b}_{N-1,N,P-1}^{(n)}]$$

i $O_{[m\times n]}$ su fuzzy nula matrice odgovarajućih dimenzija m i n.

$$\Lambda_3(n)=diag[\lambda_{i_1,i_2}(n)]_{N(N-1)\times N(N-1)},\ i_1=1,\ldots,N;i_2=1,\ldots,N,i_1\neq i_2 \tag{85}$$

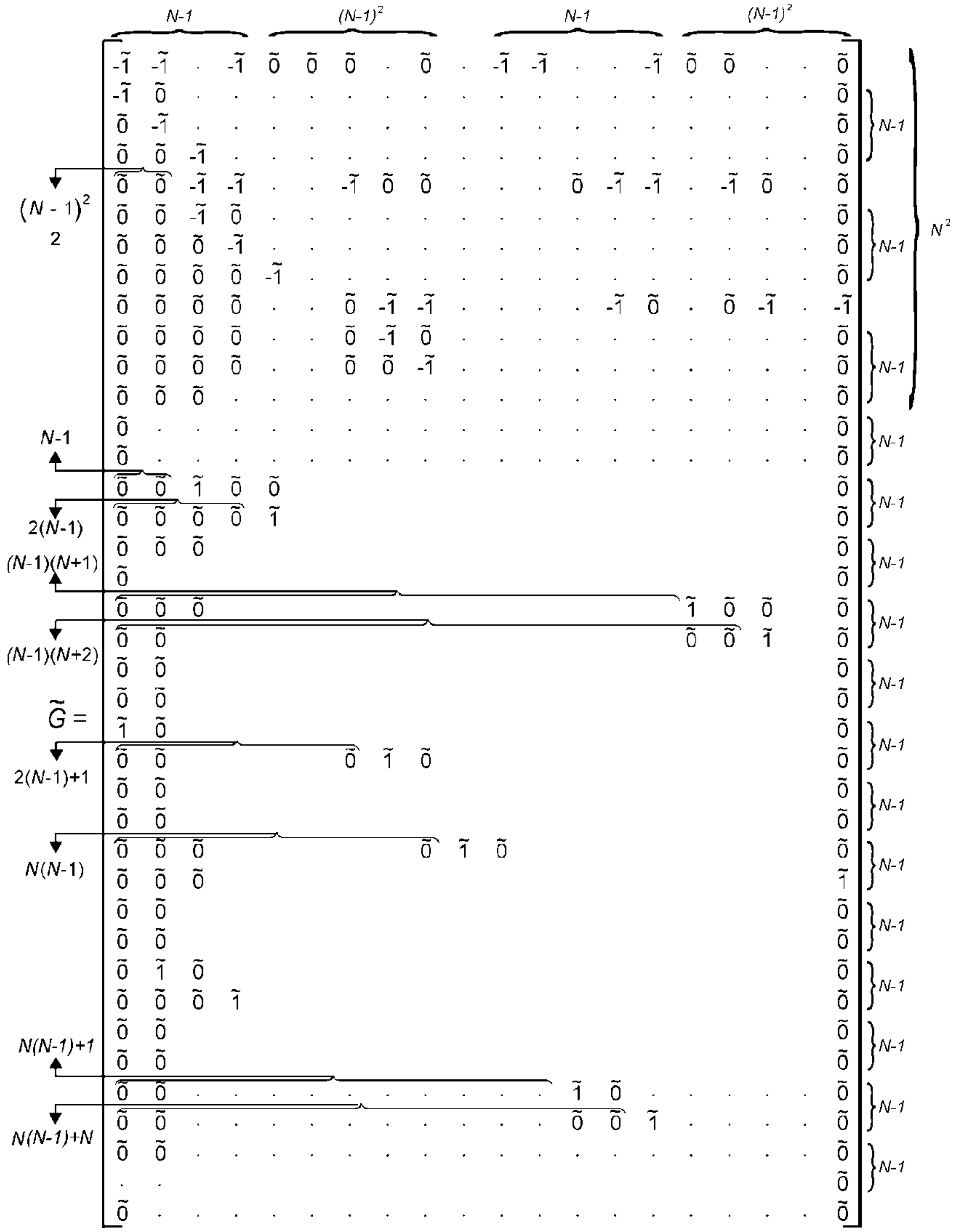


(86)

je fuzzy kvadratna matrica dimenzija $[2N(N-1)(P-1)\times 2N(N-1)(P-1)]$.

Matrica G predstavlja fuzzy matricu ulaza koja ima dimenzije

$[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]\times[2N(N-1)]$



(87)

$V_1(n)$ je vektor slučajne komponente fuzzy slučajne tražnje za kolima tokom perioda n sa komponentama $\omega_{ij}(n)$;

$$V_1(n) = \begin{bmatrix} O_1 \\ W_{ij}(n) \\ O_2 \end{bmatrix}_{N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)} \tag{88}$$

O_1 je $N \times N$ fuzzy nula matrica.
$W_{ij}(n) = [\omega_{ij}(n)]_{N(N-1)},\ i = 1,\dots,N;\ j = 1,\dots,N,\ i \neq j$
O_2 je $2N(N-1)(P-1)$ fuzzy nula matrica

$$X(n) = \begin{bmatrix} \alpha_i(n) \\ \beta_i(n) \\ \chi \\ \delta \\ \varepsilon \\ \phi \end{bmatrix},\ i = 1,\dots,N \tag{89}$$

Fuzzy vektor stanja $X(n)$ je vektor dimenzija $[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]$ koji opisuje tekuće stanje u sistemu teretnih kola preko broja tovarenih i praznih teretnih kola u periodu n, neispunjene i aktuelne tražnje tokom istog perioda i praznih i tovarenih tokova koji prispevaju u sve stanice iz prethodnih vremenskih perioda. $X(n)$ ima sledeće komponente:

$$\alpha_i(n) = \begin{bmatrix} S_k(n) \\ U_{kj}(n) \end{bmatrix}\ k = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,N, k \neq j$$

$$\beta_i(n) = \begin{bmatrix} d_{kj} \end{bmatrix},\ k = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,N, k \neq j$$

$$\chi = \begin{bmatrix} x_{211}(n) \\ : \\ x_{N11}(n) \\ : \\ x_{21,P-1}(n) \\ : \\ x_{N1,P-1}(n) \end{bmatrix} \quad \delta = \begin{bmatrix} y_{211}(n) \\ : \\ y_{N11}(n) \\ : \\ y_{21,P-1}(n) \\ : \\ y_{N1,P-1}(n) \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} x_{1N1}(n) \\ : \\ x_{N-1N1}(n) \\ : \\ x_{1N-1,P-1}(n) \\ : \\ x_{N-1N,P-1}(n) \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} y_{1N1}(n) \\ : \\ y_{N-1,N1}(n) \\ : \\ y_{1N-1,P-1}(n) \\ : \\ y_{N-1,N,P-1}(n) \end{bmatrix}$$

Predstavljene matrice (Bojović, 2001) su modifikovane, a zatim i fazifikovane u skladu sa prirodom fuzzy stohastičke teorije optimalnog upravljanja.

4.4 Procena fuzzy vektora stanja

Fuzzy vektor stanja je procenjen primenom fuzzy prognoziranih vrednosti broja teretnih kola $Z(n)$ u diskretnim vremenskim trenucima i modela (78). Za datu statističku vremensku seriju za proces planiranja nivoa zaliha teretnih kola po stanicama neophodno je prognozirati njihove vrednosti u budućim periodima. Ove vrednosti predstavljaju određene fuzzy opservacije stanja, $X(n)$. Neka je analitička forma jednačine opservacije data kao

$$Z_i(n) = S_i(n) + \Delta_i(n), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad n = 0, 1, \ldots, P \tag{90}$$

Pri čemu prvi član predstavlja fuzzy broj teretnih kola u stanici i u vremenskom periodu n, dok drugi član predstavlja fuzzy slučajnu grešku prognoze za istu stanicu tokom istog perioda.

Fuzzy prognoze broja teretnih kola su sprovedene primenom metoda dvostrukog eksponencijalnog izglađivanja (Kaufmann i Gupta, 1988). Ovaj metod je izabran u cilju adekvatnog tretiranja rastućeg trenda tražnje u razmatranim železničkim stanicama.

Fuzzy eksponencijalno izglađivanje je postupak neprekidnog ažuriranja fuzzy prognoze u skladu sa najnovijim realizacijama. Fuzzy eksponencijalno izglađivanje dodeljuje težine fuzzy realizacijama koje eksponencijalno opadaju sa udaljavanjem realizacije od sadašnjeg trenutka. Drugim rečima, skorije fuzzy realizacije dobijaju veću težinu pri prognoziranju nego starije fuzzy realizacije. Dvostuko fuzzy eksponencijalno izglađivanje se koristi kada fuzzy podaci pokazuju trend. Fuzzy eksponencijalno izglađivanje sa trendom je slično osnovnom eksponencijalnom izglađivanju osim što dve komponente moraju biti ažurirane za svaki vremenski period – nivo i trend. Nivo je izglađena procena vrednosti fuzzy podataka na kraju svakog perioda. Trend je izglađena procena prosečnog rasta na kraju svakog perioda.

Neka je fuzzy vremenska serija broja teretnih kola predstavljena uređenim nizom trougaonih fuzzy brojeva, $S_i(n) = [S_i^1(n), S_i^2(n), S_i^3(n)]$. Za bilo koji vremenski period izglađena vrednost se određuje proračunom dve jednačine, jednom za nivo, i drugi za trend:

$$S_i(n) = \alpha y_i(n) + (1-\alpha)(S_i(n-1) + b_i(n-1)) \tag{91}$$

$$b_i(n) = \gamma(S_i(n) - S_i(n-1)) + (1-\gamma)b_i(n-1) \tag{92}$$

gde je $y_i(n)$ realizacija broja teretnih kola u stanici i tokom perioda n, α i γ predstavljaju konstante izglađivanja, $S_i(n)$ i $b_i(n)$ su komponente nivoa i trenda izglađenih vremenskih serija. Prva jednačina izglađivanja prilagođava $S_i(n)$ uzimajući u obzir trend u prethodnom periodu $b_i(n-1)$, dodavajući isti poslednjoj izglađenoj vrednosti $S_i(n-1)$. Druga jednačina izglađivanja zatim ažurira trend, a izražena je kao razlika između poslednje dve vrednosti. Ova jednačina je slična osnovnom obliku eksponencijalnog izglađivanja ali je u ovom slučaju primenjena na ažuriranje trenda.

Postoji veliki broj šema za određivanje početnih vrednosti za $S_i(n)$ i $b_i(n)$. U ovom slučaju, izabrano je da $S_i(1) = y_i(1)$ i $b_i(1) = y_2 - y_1$.

Prognoza broja teretnih kola za naredni period u određenoj stanici je data sledećom relacijom:

$$Z_i(n+1) = S_i(n) + b_i(n) \tag{93}$$

Prognoza broja teretnih kola za m-narednih perioda u određenoj stanici se može odrediti kao

$$Z_i(n+m) = S_i(n) + mb_i(n) \tag{94}$$

Pri čemu je $Z_i(n+m) = [Z_i^1(n+m), Z_i^2(n+m), Z_i^3(n+m)]$ fuzzy prognozirani broj teretnih kola u stanici i. Donja granica $Z_i^1(n+m)$, srednja vrednost $Z_i^2(n+m)$, i gornja granica $Z_i^3(n+m)$ izglađenih fuzzy vrednosti se računaju posebno korišćenjem rekurzivnog obrasca (94).

Neka je sada pretpostavljeno da je fuzzy prognozirana vrednost predstavljena kao linearna funkcija fuzzy stanja.

$$Z(n) = H\,X(n) + V_2(n), \quad n = 0, 1, \ldots, P \tag{95}$$

Fuzzy matrica H ima dimenzije $N \times [N(2N-1) + 2N(N-1)(P-1)]$,

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{1} & \overbrace{\tilde{0} \; . \; . \; . \; \tilde{0}}^{N-1} & . & . \; . \; . \; . \; \tilde{0} & . \; . \; . \; . \; \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} \; . \; . \; . \; \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \; . \; . \; . \; \tilde{0} & . \; . \; . \; . \; \tilde{0} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \tilde{0} & \tilde{0} \; . \; . \; . \; \tilde{0} & \tilde{0} & \underbrace{\tilde{0} \; . \; . \; . \; \tilde{0}}_{N-1} & \tilde{1} \; . \; . \; . \; \tilde{0} \end{bmatrix} \tag{96}$$

dok $V_2(n)$ označava fuzzy beli šum koji predstavlja fuzzy greške prognoziranja.

Neka su $X(0)$ i $\{V_1(n), V_2(n)\}$ nezavisni fuzzy gausovski vektori sa sledećim karakteristikama

$$E[x(0) = x(0|0) = \bar{x}(0); \; E[V_1(n)] = E[V_2(n)] = \tilde{0} \tag{97}$$

$$\text{cov}[x(0)] = E\{[x(0) - \bar{x}(0)][x(0) - \bar{x}(0)]^T\} = M(0) \tag{98}$$

$$\text{cov}[V_1(n)] = R_1(n) \tag{99}$$

$$\text{cov}[V_2(n)] = R_2(n) \tag{100}$$

Pri čemu je:

$R_1(n)$: simetrična i pozitivno semidefinitna fuzzy matrica kovarijansi slučajne komponente tražnje za kolima dimenzija $[N(2N-1) + 2N(N-1)(P-1)] \times [N(2N-1) + 2N(N-1)(P-1)]$;

$R_2(n)$: simetrična i pozitivno semidefinitna $N \times N$ fuzzy matrica kovarijansi belog šuma u prognozi;

4.5 Predloženi pristup rešavanju problema zasnovan na fuzzy linearnom kvadratnom Gausovom regulatoru

Optimalno upravljanje za fuzzy linearni sistem sa kvadratnim kriterijumom optimalnosti vodi ka linearnoj povratnoj sprezi promenljivih stanja (Athans i Falb, 1966). Fuzzy promenljive stanja se mogu proceniti korišćenjem filtera koji predstavlja model sistema i signala koji je proporcionalan razlici prognozirane i procenjene fuzzy vrednosti. Kombinovanjem ove dve strukture, optimalnog filtera sa optimalnim determinističkim regulatorom za slučaj fuzzy ulaza, dobija se optimalni fuzzy regulator sa “ugrađenom” povratnom spregom (Bryson i Ho, 1975). Analitičko rešenje za model fuzzy linearnog sistema biće predstavljeno u diskretnom obliku, gde su fuzzy stanje $X(n)$, fuzzy upravljanje $U(n)$ i fuzzy izlaz $Z(n)$ povezani sledećim sistemom fuzzy jednačina:

$$X(n+1) = \Lambda(n)X(n) + GU(n) + V_1(n), \quad n = 0,\ldots,P\text{-}1 \text{ uz dato } X(0) \tag{101}$$

$$Z(n) = HX(n) + V_2(n), \quad n = 0,\ldots,P \tag{102}$$

Prema tome, u odnosu na dinamička ograničenja (101), grešku merenja $Z(0), Z(1),\ldots, Z(n)$ (102) i slučajne poremećaje, problem je odrediti fuzzy vektor upravljanja $U(n)$ tako da se minimizira fuzzy funkcional cilja koji ima oblik:

$$J = \frac{1}{2}X(P)^T\Gamma(P)X(P) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{P-1}[X(n),U(n)]^T\Omega(n)\begin{bmatrix}X(n)\\U(n)\end{bmatrix} \tag{103}$$

gde je

$$\Omega(n) = \left[\begin{array}{c|c}\mathrm{A}(n) & L\\ \hline L^T & B\end{array}\right]$$

Fuzzy pozitivno definitna, simetrična matrica, a preostale matrice su:

$A(n)$ je $[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]\times[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]$ fuzzy pozitivno definitna matrica;

B je $[2N(N-1)\times 2N(N-1)]$ fuzzy matrica;

L je $[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]\times[2N(N-1)]$ fuzzy matrica;

$\Gamma(P)$ je $[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]\times[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]$ fuzzy pozitivno definitna matrica;

Rekurzivni algoritam dinamičkog programiranja je primenjen za rešavanje ovog fuzzy stohastičkog problema sekvencijalne optimizacije (Bryson i Ho, 1975). Treba napomenuti da su fazi procene i upravljanja nezavisne prema principu separacije. Ovaj princip omogućava dekomponovanje problema fuzzy optimalnog upravljanja na dva nezavisna potproblema: potproblem optimalne fuzzy regulacije i potproblem fuzzy procene stanja. Diskretni fuzzy Kalmanov filter je primenjen za fuzzy procenu stanja.

Rekurentne fuzzy relacije potrebne za rešavanje formulisanog zadatka date su u nastvaku. Ove relacije rešene su analitički počev od krajnjeg ka početnom stanju planskog horizonta.

$$U(n) = -C(n) \cdot X(n) \tag{104}$$

$$C(n) = (G^T \Gamma(n+1)G + B)^{-1}(G^T \Gamma(n+1)\Lambda(n) + L^T) \tag{105}$$

$$X(n) = \overline{X}(n) + K(n)[Z(n) - H \cdot \overline{X}(n)] \tag{106}$$

$$\overline{X}(n+1) = \Lambda(n)X(n) + G \cdot U(n) \tag{107}$$

Pri čemu je $\overline{X}(0)$ dato i gde je

$$K(n) = W(n) \cdot H^T \cdot R_2(n)^{-1} \equiv M(n)H^T(HM(n)H^T + R_2(n))^{-1} \tag{108}$$

$$\Gamma(n) = \Lambda^T(n)\Gamma(n+1)\Lambda(n) - C^T(n)(B + G^T\Gamma(n+1)G)C(n) + A(n) \tag{109}$$

uz $\Gamma(P)$ dato,

$$W(n) = (\tilde{I} - K(n))H)M(n)(\tilde{I} - K(n)H)^T + K(n)R_2(n)K^T(n) \tag{110}$$

uz $M(0)$ dato,

$$M(n+1) = \Lambda(n)W(n)\Lambda^T(n) + R_1(n) \tag{111}$$

Ove jednačine predstavljaju postupak rešavanja predstavljenog problema fuzzy linearnog kvadratnog Gausovog upravljanja. Fuzzy linearni kontroler je predstavljen jednačinom (104). Ova jednačina predstavlja zakon fuzzy optimalnog upravljanja kojim se minimizira funkcija cilja (103). Zakon fuzzy optimalnog upravljanja se izvodi korišćenjem algoritma dinamičkog programiranja i Belmanovog principa optimalnosti (Speyer i Chung, 2008). Relacija (105) predstavlja fuzzy pojačanje povratne sprege procesa upravljanja. Rekurentne relacije (106) i (107) predstavljaju procenu fuzzy stanja, ili Kalmanov filter. Kalmanov filter je najpopularniji optimalni estimator i jedini način da se optimizuje funkcija cilja je da se ovaj filter uključi u sistem upravljanja. Preciznije, ove dve jednačine predstavljaju model dinamičkog sistema teretnog kolskog parka sa fuzzy parametrima, sa članom korekcije koji je proporcionalan razlici između prognoziranih fuzzy vrednosti $Z(n)$ i vrednosti procenjene na osnovu fuzzy funkcije stanja $H \cdot \overline{X}(n)$. Fuzzy matrica proporcionalnosti (108), $K(n)$, predstavlja pojačanje Kalmanovog filtera. Zapravo, ova matrica predstavlja odnos između neizvesnosti u fuzzy stanju, $W(n)$, i neizvesnosti u fuzzy prognozi, $R_2(n)$. $M(n)$ je

simetrična pozitivna semidefinitna fuzzy matrica kovarijansi vektora stanja u periodu n čije su dimenzije
$[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]\times[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]$

Relacija (110) predstavlja rešenje povratne fuzzy matrične Riccati jednačine. Matrica varijansi greške procene (110), $W(n)$ je data u formi koja je podesna za praktični proračun. Dobijena procena date serije opserviranih fuzzy podataka je optimalna u smislu minimuma srednje kvadratne greške. Relacija (111) predstavlja ažuriranje kovarijanse procene stanja pre merenja. Ovaj rekurzivni proračun je izvršen u Matlab softverskom paketu.

4.6 Izbor komponenata težinskih matrica A, B i L

Odnos između elemenata težinskih matrica u funkciji cilja i izbor odgovarajućih vrednosti ovih matrica su vrlo važni i njihovo definisanje je vrlo zahtevan zadatak. Uticaj ovih matrica na kvadratni kriterijum optimalnosti i praktične smernice za njihovo formiranje dali su Athans i Falb (1966).

U nastavku je razmotren fuzzy stohastički model zaliha i analiziran njegov odnos sa stanjem teretnih kola u određenoj železničkoj stanici. Model je zasnovan na višeperiodnom modelu ekonomične količine naručivanja (Taha, 2003). Parametar $\gamma_i(n)$ predstavlja prosečan nivo zaliha i nedostatka teretnih kola u stanici i tokom perioda n planskog horizonta. Parametar $\eta_i(n)$ je porudžbina kola za istu stanicu i period koja se formira uvek kada broj kola na zalihama u stanici dostigne određeni nivo ponovnog naručivanja. Troškovni minimum koji se sastoji od sume troškova vlasništva i alokacije teretnih kola predstavlja kriterijum za određivanje optimalnog broja teretnih kola i optimalne količine naručivanja.

Ukupna tražnja za teretnim kolima u stanici i tokom planskog horizonta je T_i. Trošak naručivanja se može izraziti kao:

$$\frac{T_i}{\eta_i}\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(v\cdot e_{ji}+(1-v)l_{ji}) \qquad (112)$$

Izraz (112) predstavlja trošak dostave teretnih kola po jednom vremenskom periodu iz svih stanica ponude do stanice za koju se računa optimalna isporuka po periodu. Kako T_i predstavlja ukupnu tražnju u stanici i, odnos $\frac{T_i}{\eta_i}$ je prosečan broj narudžbina po periodu, dok je jedinični prosečni trošak dostave jedne narudžbine teretnih kola izražen kao $\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(v \cdot e_{ji} + (1-v)l_{ji})$. Parametar v označava odnos između broja praznih kola i ukupnog broja teretnih kola. Vrednost ovog koeficijenta se računa za sva kola na razmatranoj mreži. Parametri e_{ji} i l_{ji} predstavljaju jedinični trošak praznog i tovarenog kretanja između svih stanica j i stanice i.

Prosečan nivo kola mora da bude određen u cilju definisanja troškova čuvanja kola u stanici. Uz pretpostavku da se broj kola linearno smanjuje sa η_i, vrednosti na početku planskog horizonta, na γ_i, vrednost na kraju, prosečan trošak čuvanja kola može se izraziti kao:

$$h_i \cdot (\frac{\gamma_i + \eta_i}{2} - E(\sum_{j=1}^{N} D_{ij})) \tag{113}$$

Parametar h_i predstavlja jedinični trošak čuvanja teretnih kola u stanici i. D_{ij} predstavlja prosečnu dnevnu tražnju između stanica i i j po periodu koja se računa u odnosu na $P-1$ perioda posmatranog planskog horizonta.

Za definisanje troškova neispunjenih zahteva za kolima uvodi se sledeća funkcija:

$$\delta_p\left(\left(\sum_{j=1}^{N} D_{ij}\right)\gamma_i\right) = \begin{cases} 0, & \sum_j D_{ij} < \gamma_i \\ \sum_j D_{ij} - \gamma_i, & \sum_j D_{ij} \geq \gamma_i \end{cases} \tag{114}$$

Prema tome, očekivana ukupna tražnja za kolima koja se prenosi na naredni period je:

$$\delta_p = \int_{\gamma_i}^{\infty} (\sum_j D_{ij} - \gamma_i) f(\sum_j D_{ij}) d(\sum_j D_{ij}) = \int_{\gamma_i}^{\infty} (\sum_j D_{ij}) f(\sum_j D_{ij}) - \gamma_i Y(\gamma_i) \tag{115}$$

$Y(\gamma_i)$ je komplementarna kumulativna funkcija raspodele.

Neka su tražnje za kolima između stanica posmatrane mreže nezavisne slučajne promenljive podvrgnute zakonu normalne raspodele (Jordan, 1982). Na osnovu centralne granične teoreme ovaj zbir slučajnih promenljivih gausovog tipa takođe je aproksimativno podvrgnut zakonu normalne raspodele. Neka je ova suma označena sa ν_i:

$$\nu_i = D_{i1} + D_{i2} + \ldots + D_{ij} + \ldots + D_{iN}$$

Kako je $D_{ij}\,(j = 1, 2, \ldots, N)$, i $N(\mu_{ij}, \sigma_{ij})$ normalno raspodeljeno, tada i za ν_i važi $\nu_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ pri čemu je

$$\mu_i = \mu_{i1} + \mu_{i2} + \ldots + \mu_{iN}$$
$$\sigma_i^2 = \sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2 + \ldots + \sigma_{iN}^2$$

Prema tome, funkcija ukupnih očekivanih troškova u stanici *i* tokom planskog horizonta ima sledeći oblik:

$$E[C(\gamma_i, \eta_i)] = \frac{T_i}{\eta_i} \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (\nu e_{ji} + (1-\nu) l_{ji}) + h_i \left(\frac{\eta_i + \gamma_i}{2} - E\left(\sum_{j=1}^{N} D_{ij}\right)\right) + \\ + \frac{T_i}{\eta_i} \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \left[\int_{\gamma_i}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} D_{ij} f\left(\sum_j D_{ij}\right) - \gamma_i Y(\gamma_i) \right] \tag{116}$$

Međutim, pri svakodnevnom odvijanju železničkog saobraćaja, stohastička procena tražnje za teretnim kolima je često zašumljena s obzirom na nestabilnu transportnu tražnju. Iz ovog razloga, stvarna tražnja za teretnim kolima na železnici bi se trebala posmatrati u okolini procenjene vrednosti sa fuzzy karakteristikama.

Koncept fuzzy skupova je sada primenjen u cilju dopune predstavljenog stohastičkog modela zaliha teretnih kola fuzzy stohastičkom promenljivom tražnje (Chang et al., 2006; Kwakernaak, 1979; Kwakernaak, 1979; Lin, 2008). Kolski dispečer ne može buduću tražnju proceniti kao jednu vrednost $E(\sum_j D_{ij}) = \mu_i$ već je mnogo lakše da istu proceni preko intervala $[\mu_i - \Delta_1, \mu_i, \mu_i + \Delta_2]$. Razmotrimo trougaoni fuzzy broj koji predstavlja fuzzy očekivanje fuzzy stohastičke tražnje,

$$E\left(\sum_j D_{ij}\right) = \mu_i = (\mu_i - \Delta_1, \mu_i, \mu_i + \Delta_2)$$

gde su Δ_1 i Δ_2 parametri određeni od strane kolskog dispečera. Primenom metode označenog rastojanja za defazifikaciju $E(\sum_j D_{ij})$ (Yao i Wu, 2000; Chang et al., 2004; Chang et al., 2006; Bjork, 2009; Bjork, 2012):

$$d(E(\sum_j D_{ij}),0)=\frac{1}{2}\int_0^1[E[(\sum_j D_{ij})_\alpha^-]+E[(\sum_j D_{ij})_\alpha^+]]d\alpha=E(\sum_j D_{ij})+\frac{\Delta_2-\Delta_1}{4} \qquad (117)$$

Ukupna tražnja za teretnim kolima u stanici i tokom perioda of $P-1$ dana planskog horizonta je označena kao $T_i=\sum_{n=1}^{P-1}\sum_{j=1}^{N}D_{ij}(n),\ i=1,2,\ldots,N$, tako da se fuzzy očekivanje ukupne tražnje može predstaviti kao:

$$E(T_i)=\mu_i^{tot}=(\mu_i^{tot}-\Delta_3,\mu_i,\mu_i^{tot}+\Delta_4)$$

Korišćenjem označenog rastojanja fuzzy očekivanje se može defazifikovati na sledeći način

$$d(E(T_i),0)=\frac{1}{2}\int_0^1\{E[(T_i)_\alpha^-]+E[(T_i)_\alpha^+]\}d\alpha=E(T_i)+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4} \qquad (118)$$

Sada je potrebno proceniti fuzzy očekivanje fuzzy stohastičke količine nedostatka. Neka je $D_i=\sum_j D_{ij}$ prosečna fuzzy dnevna tražnja između stanice i i svih ostalih stanica na železničkoj mreži. Prema tome, u skladu sa egzaktnim slučajem, gde je $S_i=D_i-\gamma_i$, fuzzy stohastička promenljiva $S_i=D_i-\gamma_i$ može biti definisana kao

$$S_i(d_i)=D_i(d_i)(-)\gamma_i=(d_i-\gamma_i-\Delta_1,d_i-\gamma_i,d_i-\gamma_i+\Delta_2)$$

U ovom slučaju γ_i je fuzzy tačka. Samim tim, funkcija pripadnosti $S_i(d_i)$ je:

$$\mu_{S_i(d_i)}(t)=\begin{cases}\dfrac{t-(d_i-\gamma_i-\Delta_1)}{\Delta_1},\ d_i-\gamma_i-\Delta_1\le t\le d_i-\gamma_i,\\ \dfrac{(d_i-\gamma_i+\Delta_2)-t}{\Delta_2},\ d_i-\gamma_i\le t\le d_i-\gamma_i+\Delta_2,\\ 0,\quad \text{u suprotnom.}\end{cases} \qquad (119)$$

$\alpha-presek\ S_i(d_i)$ je

$$[S_i(d_i)_L(\alpha),S_i(d_i)_U(\alpha)]=[d_i-\gamma_i-\Delta_1+\alpha\Delta_1,d_i-\gamma_i+\Delta_2-\alpha\Delta_2]\text{ za }\alpha\in[0,1]$$

Kako $S_i(d_i)$ pripada familiji fuzzy skupova nad R, procena očekivanja fuzzy stohastičke promenljive S_i u fuzzy smislu je:

$$\begin{aligned}E(D_i(-)\gamma_i)=E(S_i)&=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{\gamma_i+\Delta_1}^{\infty}[S_i(d_i)_L(\alpha)+S_i(d_i)_U(\alpha)]f_{D_i}(d_i)d(d_i)d\alpha\\&=\frac{1}{2}\int_{\gamma_i+\Delta_1}^{\infty}[2(d_i-\gamma_i)+\frac{1}{2}(\Delta_2-\Delta_1)]f_{D_i}(d_i)d(d_i)\\&=\int_{\gamma_i+\Delta_1}^{\infty}(d_i-\gamma_i)f_{D_i}(d_i)d(d_i)+\frac{1}{4}\int_{\gamma_i+\Delta_1}^{\infty}(\Delta_2-\Delta_1)f_{D_i}(d_i)d(d_i)\\&=E(D_i-\gamma_i)-\int_{\gamma_i}^{\gamma_i+\Delta_1}(d_i-\gamma_i)f_{D_i}(d_i)d(d_i)-\frac{1}{4}(\Delta_1-\Delta_2)\int_{\gamma_i+\Delta_1}^{\infty}f_{D_i}(d_i)d(d_i)\end{aligned}\tag{120}$$

Razmotrimo sada jednačinu (116) i upotrebimo fuzzy stohastičku promenljivu za prosečnu dnevnu tražnju D_i i ukupnu tražnju T_i. Promenom egzaktne stohastičke promenljive $S_i = D_i - \gamma_i$ u fuzzy stohastičku promenljivu $S_i = D_i(-)\gamma_i$, ukupan očekivani trošak u stanici i tokom planskog horizonta u fuzzy smislu je:

$$\begin{aligned}E[C(\gamma_i,\eta_i,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4)]&=(\frac{E(T_i)}{\eta_i}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N}(ve_{ji}+(1-v)l_{ji}+h_i(\frac{\eta_i+\gamma_i}{2}-E(D_i)-\frac{\Delta_2-\Delta_1}{4})\\&+(\frac{E(T_i)}{\eta_i}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N}p_{ij}[E(D_i-\gamma_i)-\int_{\gamma_i}^{\gamma_i+\Delta_1}(d_i-\gamma_i)f_{D_i}(d_i)d(d_i)\\&-\frac{1}{4}(\Delta_1-\Delta_2)\int_{\gamma_i+\Delta_1}^{\infty}f_{D_i}(d_i)d(d_i)]\end{aligned}\tag{121}$$

Tražnja za teretnim kolima D_i ima normalnu funkciju gustine verovatnoća f_{D_i} sa konačnom sredinom μ_i i standardnim odstupanjem σ_i i γ_i tako da je

$$E(D_i-\gamma_i)=\int_{\gamma_i}^{\infty}(d_i-\gamma_i)f_{D_i}(d_i)d(d_i)=\sigma_i\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})+(\mu_i-\gamma_i)\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})\tag{122}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i}^{\gamma_i+\Delta_1}(d_i-\gamma_i)f_{D_i}(d_i)d(d_i)&=\sigma_i[\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})-\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})]+\mu_i[\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})-\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})]\\&-\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})+\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})\end{aligned}\tag{123}$$

$$\int_{\gamma_i+\Delta_1}^{\infty}f_{D_i}(d_i)d(d_i)=1-\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})\tag{124}$$

$f_Z(z)$ je funkcija gustine verovatnoća standardne normalne slučajne promenljive Z, i $\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{k^2}{2}}$ i $\Phi(k)=\int_k^{\infty}\phi(x)dx$ je komplementarna kumulativna funkcija raspodele. Prema tome, jednačina (121) postaje

$$\begin{aligned}E[C(\gamma_i,\eta_i,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_4)] &= (\frac{E(T_i)}{\eta_i}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i})\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(\nu e_{ji}+(1-\nu)l_{ji})\\ &+h_i(\frac{\eta_i+\gamma_i}{2}-E(D_i)-\frac{\Delta_2-\Delta_1}{4})+(\frac{E(T_i)}{\eta_i}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N}p_{ij}\{[\sigma_i\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})\\ &+(\mu_i-\gamma_i)\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})]-\sigma_i[\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})-\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})]\\ &-\mu_i[\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})-\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})]+\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})-\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})\\ &-\frac{1}{4}(\Delta_1-\Delta_2)[1-\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})]\}\end{aligned} \quad (125)$$

Problem je sada pronaći γ_i i η_i tako da se minimizira funkcija ukupnih procenjenih troškova zaliha u fuzzy smislu. Skup potrebnih uslova za određivanje optimalnog nivoa teretnih kola u stanici i optimalne veličine poručenih kola iz ostalih stanica se može odrediti rešavanjem sledeće dve jednačine:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(\gamma_i,\eta_i)}{\partial \eta_i} &= -(\frac{E(T_i)}{\eta_i^2}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i^2})\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(\nu e_{ji}+(1-\nu)l_{ji})\\ &+\frac{h_i}{2}+(\frac{E(T_i)}{\eta_i^2}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i^2})\sum_{j=1}^{N}p_{ij}[2\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})\\ &-\sigma_i\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})-(\mu_i+\gamma_i+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4})\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4}]=0\end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C(\gamma_i,\eta_i)}{\partial \gamma_i} &= \frac{h_i}{2}+(\frac{E(T_i)}{\eta_i}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N}p_{ij}[2\frac{\gamma_i}{\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})\\ &-(\frac{2\gamma_i+\Delta_1}{\sigma_i}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4\sigma_i})\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})\\ &+\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})-2\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})]=0\end{aligned} \quad (127)$$

Ali, pre rešavanja ovog sistema nelinearnih jednačina potrebno je dokazati da je funkcija ukupnih očekivanih troškova u stanici strogo konveksna i samim tim ima jedinstveni apsolutni minimum. Ova funkcija biće konveksna ako je Heseova matrica H pozitivno semidefinitna za svako γ_i i η_i. Pronađimo elemente ove matrice.

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 C(\gamma_i,\eta_i)}{\partial \gamma_i^2} & \frac{\partial^2 C(\gamma_i,\eta_i)}{\partial \gamma_i \partial \eta_i}\\ \frac{\partial^2 C(\gamma_i,\eta_i)}{\partial \eta_i \partial \gamma_i} & \frac{\partial^2 C(\gamma_i,\eta_i)}{\partial \eta_i^2}\end{bmatrix} \quad (128)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial \gamma_i^2} &= (\frac{E(T_i)}{\eta_i} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\{\frac{4\sigma_i^2 - 2\gamma_i(\gamma_i - \mu_i)}{\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &+ [(\frac{8\gamma_i + 5\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i^3})(\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i) - \frac{3}{\sigma_i}]\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})\}\end{aligned} \tag{129}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial \eta_i^2} &= 2(\frac{E(T_i)}{\eta_i^3} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^3})\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(\nu e_{ji} + (1-\nu)l_{ji}) \\ &- 2(\frac{E(T_i)}{\eta_i^3} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^3})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[2\gamma_i \Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &- \sigma_i \phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) - (\mu_i + \gamma_i + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4})\Phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4}]\end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial \gamma_i \partial \eta_i} &= (\frac{E(T_i)}{\eta_i^2} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^2})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[2\Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &+ (\frac{2\gamma_i + \Delta_1}{\sigma_i} + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i})\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &- \frac{2\gamma_i}{\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \Phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})]\end{aligned} \tag{131}$$

Determinanta glavnog minora prvog reda Heseove matrice je data sa:

$$\begin{aligned}&(\frac{E(T_i)}{\eta_i} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\{\frac{4\sigma_i^2 - 2\gamma_i(\gamma_i - \mu_i)}{\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &+[(\frac{8\gamma_i + 5\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i^3})(\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i) - \frac{3}{\sigma_i}]\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})\} > 0\end{aligned} \tag{132}$$

što je neophodno za uslov konveksnosti. Nakon sređivanja ovog uslova, isti će biti istinit ako je $(\gamma_i - \mu_i)(\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) - \phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i})) + \Delta_1 \phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) > 0$ i $\frac{1}{\sigma_i}(4\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) - 3\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})) + \frac{5\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i^3}(\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i)\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) > 0$, tako da će izborom podesnih vrednosti za Δ_1 i Δ_2 ovaj uslov biti ispunjen.

Analizirajmo sada determinantu glavnog minora drugog reda

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial \gamma_i^2}\frac{\partial^2 C}{\partial \eta_i^2}-\frac{\partial^2 C}{\partial \gamma_i \partial \eta_i}\frac{\partial^2 C}{\partial \eta_i \partial \gamma_i} &= 2(\frac{E(T_i)}{\eta_i}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i})^2\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[\frac{4\sigma_i^2-2\gamma_i(\gamma_i-\mu_i)}{\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i}) \\ &+\frac{(8\gamma_i+5\Delta_1-\Delta_2)(\gamma_i+\Delta_1-\mu_i)-12\sigma_i^2}{4\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})] \\ &\times\{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(ve_{ji}+(1-v)l_{ji})-\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[2\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i}) \\ &-\sigma_i\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})-(\mu_i+\gamma_i+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4})\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i}) \\ &+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4}]\}-(\frac{E(T_i)}{\eta_i}+\frac{\Delta_4-\Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[2\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})+(\frac{2\gamma_i+\Delta_1}{\sigma_i} \\ &+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4\sigma_i})\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})-\frac{2\gamma_i}{\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})-\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})]^2\end{aligned} \quad (133)$$

Izraz (133) biće veći od nule izborom podesnih vrednosti za Δ_1 i Δ_2, tako da sledeće nejednakosti budu ispunjene:

$$5\Delta_1 > \Delta_2 \quad (134)$$

$$\gamma_i+\Delta_1 > \mu_i \quad (135)$$

$$4\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i}) > 3\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i}) \quad (136)$$

$$(\gamma_i+\Delta_1-\mu_i)\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i}) > (\gamma_i-\mu_i)\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i}) \quad (137)$$

$$\sigma_i\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i}) > \frac{\Delta_1-\Delta_2}{4} \quad (138)$$

$$(\gamma_i+\mu_i+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4})\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i}) > 2\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i}) \quad (139)$$

$$\begin{aligned}&(\frac{2\gamma_i+\Delta_1}{\sigma_i}+\frac{\Delta_1-\Delta_2}{4\sigma_i})\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})(\frac{2\gamma_i}{\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})-2\Phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})) \\ &> \frac{2\gamma_i}{\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})\Phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})+\frac{1}{2}(\Phi^2(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i})+4\Phi^2(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i}))\end{aligned} \quad (140)$$

Iz skupa programski generisanih vrednosti za Δ_1 i Δ_2 koje zadovoljavaju uslove (134)-(140) kolski menadžeri mogu na osnovu sopstvenog iskustva izabrati podesne vrednosti i proceniti tražnju za teretnim kolima na odgovarajući način. Prema tome, za date $T_i, D_{ij}, p_{ij}, e_{ij}, l_{ij}, \sigma_i, \mu_i, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sledeći algoritam se može definisati za pronalaženje optimalnog nivoa zaliha teretnih kola i optimalnog broja kola pri kome se sprovodi ponovno naručivanje teretnih kola u stanici *i* tokom perioda n. Ovaj algoritam je zasnovan na numeričkom pristupu za rešavanje sistema jednačina (126) i (127) koji su predložili Hadley i Within (1963). Koraci algoritma su:

Korak 0. Pronađi početnu, najmanju vrednost η_i koja je η_i^*, i neka je $\gamma_i^{(0)} = 0$. Postavi $k = 1$ i pređi na korak k.

$$\eta_i^{(1)} = \eta_i^* = \sqrt{\frac{2T_i \sum_{j=1}^{N} (\nu e_{ji} + (1-\nu) l_{ji})}{(N-1)h_i}} \tag{141}$$

Korak k. Na osnovu $\eta_i^{(k)}$ odredi $\gamma_i^{(k)}$ iz jednačine (87). Ako je $\eta_i^{(k)} \approx \eta_i^{(k-1)}$ stani, optimalno rešenje je $\gamma_i^* = \gamma_i^{(k)}$ i $\eta_i^* = \eta_i^{(k)}$. U suprotnom, zameni $\eta_i^{(k)}$ u jednačinu (126) i izračunaj $\gamma_i^{(k)}$. Stavi da je $k = k+1$, i ponovi korak k sve do konvergencije.

Kako tačka (γ_i^*, η_i^*) predstavlja globalni minimum funkcije ukupnog troška, ona se može aproksimirati Tejlorovim polinomom razvojem do drugog člana:

$$\begin{aligned} C(\gamma_i, \eta_i) \approx{}& C(\gamma^*, \eta^*) + \frac{\partial C}{\partial \gamma^*}(\gamma - \gamma^*) + \frac{\partial C}{\partial \eta^*}(\eta - \eta^*) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial \gamma^*}(\gamma - \gamma^*)^2 \\ &+ \frac{\partial^2 C}{\partial \gamma \partial \eta}(\gamma - \gamma^*)(\eta - \eta^*) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial \eta^*}(\eta - \eta^*)^2 \end{aligned} \tag{142}$$

Za izabrani kriterijum kvadratne optimalnosti u iskazu osnovnog zadatka, potrebno je odrediti koeficijente kvadratnih članova γ_i i η_i. Prema tome, postoji troškovna funkcija oblika (Monks, 1982):

$$C = \frac{1}{2}\pi^s \gamma^2 + \pi^h \gamma\eta + \frac{1}{2}\pi^u \eta^2 \tag{143}$$

Koeficijenti π^s, π^h i π^u biće određeni na osnovu izraza (142). Tako je

$$\begin{aligned} C(\gamma_i, \eta_i) \approx{}& C(\gamma^*, \eta^*) + \frac{1}{2}[(\frac{E(T_i)}{\eta_i} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\{\frac{4\sigma_i^2 - 2\gamma_i(\gamma_i - \mu_i)}{\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &+ [(\frac{8\gamma_i + 5\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i^3})(\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i) - \frac{3}{\sigma_i}]\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})\}](\gamma_i - \gamma_i^*)^2 \\ &+ \{(\frac{E(T_i)}{\eta_i^2} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^2})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[2\Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) + (\frac{2\gamma_i + \Delta_1}{\sigma_i} + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i})\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &- \frac{2\gamma_i}{\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \Phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})]\}\,(\gamma_i - \gamma_i^*)(\eta_i - \eta_i^*) \\ &+ \frac{1}{2}\{2(\frac{E(T_i)}{\eta_i^3} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^3})\sum_{j=1}^{N}(\nu e_{ji} + (1-\nu)l_{ji}) \\ &- 2(\frac{E(T_i)}{\eta_i^3} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^3})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[2\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \sigma_i\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &- (\mu_i + \gamma_i + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4})\Phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4}]\}(\eta_i - \eta_i^*)^2 \end{aligned} \tag{144}$$

Analiziranjem kvadratnih članova moguće je uočiti da su nepoznati koeficijenti:

$$\pi_i^s = (\frac{E(T_i)}{\eta_i} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\{\frac{4\sigma_i^2 - 2\gamma_i(\gamma_i - \mu_i)}{\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ +[(\frac{8\gamma_i + 5\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i^3})(\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i) - \frac{3}{\sigma_i}]\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})\} \tag{145}$$

$$\pi_i^h = (\frac{E(T_i)}{\eta_i^2} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^2})\sum_{j=1}^{N} p_{ij}[2\Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ +(\frac{2\gamma_i + \Delta_1}{\sigma_i} + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i})\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) \\ -\frac{2\gamma_i}{\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \Phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})] \tag{146}$$

$$\pi_i^u = 2(\frac{E(T_i)}{\eta_i^3} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^3})\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(\nu e_{ji} + (1-\nu)l_{ji}) \\ -2(\frac{E(T_i)}{\eta_i^3} + \frac{\Delta_4 - \Delta_3}{4\eta_i^3})\sum_{j=1}^{N} p_{ij} \times [2\gamma_i\Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \sigma_i\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) \\ -(\mu_i + \gamma_i + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4})\Phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4}] \tag{147}$$

Moguće je sada odrediti koeficijente u matricama $\mathrm{A}(n)$, B, L uopštenog fuzzy kvadratnog indekca performansi. Opisani postupak za određivanje nepoznatih koeficijenata π^s, π^h i π^u treba ponoviti za svaku stanicu na posmatranoj železničkoj mreži. Fuzzy vektor stanja, pored broja kola u stanici, obuhvata nedostavljena kola i tražnje za kolima kao promenljive koje opisuju broj kola koji se nalazi na rutama. Ostaje da se odrede fuzzy kvadratni troškovni koeficijenti i za ove promenljive.

Pretpostavljeno je da su ovi troškovi linearna funkcija broja kola na posmatranoj ruti.

$$x_{jim}(n)Q = x_{jim}(n)(q_0 + qx_{jim}(n)\sum_{s=m}^{P} sa_{jis}(n+s-m) \tag{148}$$

$$y_{jim}(n)Q = y_{jim}(n)(q_0 + qy_{jim}(n)\sum_{s=m}^{P} s\tilde{b}_{jis}(n+s-m) \tag{149}$$

Pri čemu je:

$x_{jim}(n)$: fuzzy broj tovarenih kola otpremljenih iz stanice j tokom perioda m, a prispelih u stanicu i u periodu n, $i = 1,\ldots,N;\ j = 1,\ldots,N;\ n > m,\ i \neq j$

$y_{jim}(n)$: fuzzy broj praznih kola otpremljenih iz stanice j tokom perioda m, a prispelih u stanicu i tokom perioda n, $i = 1,\ldots,N;\ j = 1,\ldots,N; n > m,\ i \neq j$

$$
\begin{aligned}
A(n) = diag(&\overset{s}{\pi}_1,\ldots,\overset{s}{\pi}_1,\overset{s}{\pi}_2,\ldots,\overset{s}{\pi}_2,\overset{s}{\pi}_N,\ldots.,\overset{s}{\pi}_N,\overset{s}{\pi}_1,\ldots,\overset{s}{\pi}_1,\ldots,\overset{s}{\pi}_2,\ldots,\overset{s}{\pi}_2,\ldots,\overset{s}{\pi}_N,\ldots,\overset{s}{\pi}_N,2q \\
&\times\sum_{s=1}^{P} s a_{21s}(n+s-1),\ldots,2q\sum_{s=1}^{P} s a_{N1s}(n+s-1),\ldots,2q\sum_{s=P-1}^{P} s a_{21s}(n+s-P+1),\ldots,2q \\
&\times\sum_{s=P-1}^{P} s a_{N1s}(n+s-P+1),\ldots,2q\sum_{s=1}^{P} s\tilde{b}_{21s}(n+s-1),\ldots,2q\sum_{s=1}^{P} s\tilde{b}_{N1s}(n+s-1),\ldots,2q \\
&\times\sum_{s=P-1}^{P} s\tilde{b}_{21s}(n+s-P+1),\ldots,2q\sum_{s=P-1}^{P} s\tilde{b}_{N1s}(n+s-P+1),\ldots,2q \\
&\times\sum_{s=1}^{P} s a_{1Ns}(n+s-1),\ldots,2q\sum_{s=P-1}^{P} s\tilde{b}_{N-1,Ns}(n+s-P+1))
\end{aligned}
\tag{150}
$$

Prema tome, matrica A je fuzzy dijagonalna kvadratna matrica čije su dimenzije $[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]\times[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]$ i koja ima komponente $\overset{s}{\pi}_i$, $q\sum_{s=m}^{P} s a_{ijs}(n+s-m)$ i $q\sum_{s=m}^{P} s\tilde{b}_{ijs}(n+s-m)$.

B je $[2N(N-1)]\times[2N(N-1)]$ fuzzy dijagonalna kvadratna matrica koja je pozitivno definitna sa komponentama $\overset{u}{\pi}_i$.

$B(n) = diag(\overset{u}{\pi}_1,\ldots,\overset{u}{\pi}_1,\overset{u}{\pi}_2,\ldots,\overset{u}{\pi}_2,\ldots,\overset{u}{\pi}_N,\ldots,\overset{u}{\pi}_N,\overset{u}{\pi}_1,\ldots,\overset{u}{\pi}_1,\overset{u}{\pi}_2,\ldots,\overset{u}{\pi}_2,\ldots.,\overset{u}{\pi}_N,\ldots,\overset{u}{\pi}_N)$

Fuzzy matrica L je matrica dimenzija $[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]\times[2N(2N-1)]$ sa komponentama $\overset{h}{\pi}_i$.

$$
L=\begin{bmatrix}
\overset{h}{M}_1 & O_1 & O_1 & \overset{h}{M}_1 & O_1 & O_1 \\
O_1 & \overset{h}{M}_2 & O_1 & O_1 & \overset{h}{M}_2 & O_1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
O_1 & O_1 & \overset{h}{M}_N & O_1 & O_1 & \overset{h}{M}_N \\
\overset{h}{N}_1 & O_2 & O_2 & \overset{h}{N}_1 & O_2 & O_2 \\
O_2 & \overset{h}{N}_2 & O_2 & O_2 & \overset{h}{N}_2 & O_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
O_2 & O_2 & \overset{h}{N}_N & O_2 & O_2 & \overset{h}{N}_N \\
O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3 & O_3
\end{bmatrix}
\tag{151}
$$

$$\overset{h}{M}_1=\left[\overset{h}{\pi}_1\right]_{N\times N-1} \qquad \overset{h}{N}_1=\left[\overset{h}{\pi}_1\right]_{N-1\times N-1}$$

$$\overset{h}{M}_2=\left[\overset{h}{\pi}_2\right]_{N\times N-1} \qquad \overset{h}{N}_2=\left[\overset{h}{\pi}_2\right]_{N-1\times N-1}$$

$$\overset{h}{M}_N=\left[\overset{h}{\pi}_N\right]_{N\times N-1} \qquad \overset{h}{N}_N=\left[\overset{h}{\pi}_N\right]_{N-1\times N-1}$$

O_1 je $N\times N-1$ fuzzy nula matrica

O_2 je $N-1\times N-1$ fuzzy nula matrica

O_3 je $[2N(N-1)(P-1)]\times[(N-1)]$ fuzzy nula matrica

4.7 Izbor komponenata fuzzy matrice terminalnog člana

Vrednost kola na kraju planskog perioda može da utiče na osetljivost odluka o njihovom upućivanju tokom posmatranog vremenskog horizonta. Za slučaj da ove odluke nisu od presudnog uticaja na ponudu kola po stanicama nije neophodno ovu vrednost uzeti u razmatranje. U modelu ovo rezultira iz pretpostavljene ciklične prirode tražnje na periodičnoj osnovi.

Fuzzy stohastički model raznosača novina je primenjen za proračun komponenata težinske fuzzy matrice terminalnog člana $\Gamma(P)$. Model koji obuhvata jednu promenljivu (stanje sistema) i jedan vremenski period biće predstavljen korišćenjem gradijentnog metoda drugog reda preko kvadratnih i linearnih članova promenljivih stanja. Treba napomenuti da je ovaj interval često duži od jednog dana, što je normalna dužina između perioda $0,1,\ldots,P-1$. U ovoj disertaciji, poslednji period planskog horizonta traje takođe jedan dan, s obzirom na to da je tražnja pretpostavljena kao ponovljiva ciklično na periodičnoj osnovi. Na osnovu ovog modela optimalni nivo zaliha teretnih kola se može definisati za jedan period u određenoj stanici uz neizvesnu tražnju i minimiziranje očekivanog ukupnog troška kao cilj.

Koeficijenti težinske matrice terminalnog člana se mogu pronaći korišćenjem jednoperiodnog modela zaliha raznosača novina. Prema tome, ako važi da je $\sum_{j=1}^{N} D_{ij} < \gamma_i$ tada je $\gamma_i - \sum_{j=1}^{N} D_{ij}$ broj kola koji se nalazi u stanici tokom jednog perioda.

U suprotnom, postojaće nedostatak $\sum_{j=1}^{N} D_{ij} - \gamma_i$ u slučaju da je $\sum_{j=1}^{N} D_{ij} > \gamma_i$.

Očekivani trošak za poslednji period, $E[C(\gamma_i)]$, se može izraziti kao

$$E[C(\gamma_i)] = h_i \int_0^{\gamma_i} (\gamma_i - D_i) f(D_i) d(D_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} \int_{\gamma_i}^{\infty} (D_i - \gamma_i) f(D_i) d(D_i) \tag{152}$$

pri čemu je $D_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i)$.

Kao i u prethodnom poglavlju pretpostavimo da postoji prosečna dnevna tražnja kao normalno raspodeljena fuzzy slučajna promenljiva $N(\mu_i, \sigma_i)$. Očekivani ukupni trošak za poslednji period je

$$\begin{aligned} E[C(\gamma_i)] &= h_i E(\gamma_i - D_i) + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} E(D_i - \gamma_i) = h_i(\gamma_i - \mu_i) \\ &+ (h_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij})[(\mu_i - \gamma_i)\Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) + \sigma_i \phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \end{aligned} \tag{153}$$

gde $E(\gamma_i - D_i)$ i $E(D_i - \gamma_i)$ predstavljaju fuzzy stohastički broj teretnih kola koji se nalazi u stanici i fuzzy stohastički broj nedostajućih teretnih kola, respektivno. γ_i predstavlja fuzzy tačku. Procena očekivanja fuzzy stohastičkog nedostatka u fuzzy smislu je

$$\begin{aligned} E(D_i - \gamma_i) &= \sigma_i \phi\left(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}\right) - 2\gamma_i \Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) + (\mu_i + \gamma_i \\ &+ \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4})\Phi\left(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}\right) - \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4} \end{aligned} \tag{154}$$

Analizirajući odnos između očekivanog fuzzy stohastičkog broja kola na čuvanju i očekivanog fuzzy stohastičkog broja kola koji nedostaje

$$E(\gamma_i - D_i) = \gamma_i - \mu_i + E(D_i - \gamma_i)$$

Procena ukupnog očekivanog troška u stanici i tokom planskog horizonta u fuzzy smislu je

$$\begin{aligned} E[C(\gamma_i, \Delta_1, \Delta_2)] &= h_i(\gamma_i - \mu_i) + (h_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij})[\sigma_i \phi\left(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}\right) - 2\gamma_i \Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) \\ &+ (\mu_i + \gamma_i + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4})\Phi\left(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}\right) - \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{4}] \end{aligned} \tag{155}$$

Neophodan uslov za određivanje optimalnog broja kola u stanici je:

$$\frac{\partial E[C(\gamma_i, \Delta_1, \Delta_2)]}{\partial \gamma_i} = 0$$

$$\begin{aligned} & h_i + (h_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij})[\frac{2\gamma_i}{\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) + \Phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i}) \\ & -2\Phi(\frac{\gamma_i - \mu_i}{\sigma_i}) - \frac{8\gamma_i + 5\Delta_1 - \Delta_2}{4\sigma_i}\phi(\frac{\gamma_i + \Delta_1 - \mu_i}{\sigma_i})] = 0 \end{aligned} \tag{156}$$

gde je $\Phi(k)$ komplementarna kumulativna funkcija raspodele. Drugi izvod ove funkcije je

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E[C(\gamma_i,\Delta_1,\Delta_2)]}{\partial\gamma_i^2} &= (h_i+\sum_{j=1}^{N} p_{ij})[\frac{(8\gamma_i+5\Delta_1-\Delta_2)(\gamma_i+\Delta_1-\mu_i)-12\sigma_i^2}{4\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i}) \\ &+\frac{4\sigma_i^2-2\gamma_i(\gamma_i-\mu_i)}{\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i-\mu_i}{\sigma_i})]\end{aligned} \quad (157)$$

Izraz (157) biće veći od nule ako su sledeće nejednakosti ispunjene:

$$(8\gamma_i+5\Delta_1-\Delta_2)(\gamma_i+\Delta_1-\mu_i)>12\sigma_i^2 \quad (158)$$

$$\sigma_i^2>\frac{1}{2}\gamma_i(\gamma_i-\mu_i) \quad (159)$$

Zadovoljenjem ovih uslova funkcija ukupnih troškova je striktno konkavna i njen apsolutni minimum je jedinstven. Optimalni nivo zaliha teretnih kola γ_i^* za poslednji period planskog horizonta se može odrediti rešavanjem jednačine (156). U okolini tačke minimuma ovu funkciju ukupnih troškova je moguće aproksimirati Tejlorovim polinomom razvojem do drugog člana

$$C(\gamma_i)\approx C(\gamma_i^*)+\frac{\partial C}{\partial\gamma_i}|_{\gamma_i^*}(\gamma_i-\gamma_i^*)+\frac{1}{2}(\gamma_i-\gamma_i^*)\frac{\partial^2 C}{\partial\gamma_i^2}|_{\gamma_i^*}(\gamma_i-\gamma_i^*) \quad (160)$$

Kako postoji potreba samo za koeficijentom uz kvadratni član,

$$\begin{aligned}g_i &= (h_i+\sum_{j=1}^{N} p_{ij})[\frac{(8\gamma_i^*+5\Delta_1-\Delta_2)(\gamma_i^*+\Delta_1-\mu_i)-12\sigma_i^2}{4\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i^*+\Delta_1-\mu_i}{\sigma_i}) \\ &+\frac{4\sigma_i^2-2\gamma_i^*(\gamma_i^*-\mu_i)}{\sigma_i^3}\phi(\frac{\gamma_i^*-\mu_i}{\sigma_i})], \quad i=1,2,\ldots,N\end{aligned} \quad (161)$$

Koeficijenti fuzzy vektora stanja na kraju planskog horizonta P opisuju troškove kola u stanici i kola u tranzitu. Prva kategorija ovih troškova procenjena je prethodnim izrazom dok se za ocenu vrednosti kola u tranzitu pretpostavlja da su linearna funkcija broja kola na posmatranoj ruti.

$\Gamma(P)$ je $[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]\times[N(2N-1)+2N(N-1)(P-1)]$ fuzzy pozitivno semidefinitna matrica u kvadratnom članu vektora stanja za poslednji period planskog horizonta.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(P) = diag(& g_1,\ldots,g_1,\ldots,g_N,\ldots,g_N,g_1,g_2,\ldots,g_N,2q\sum_{s=1}^{P} sa_{21s}(P+s-1),\cdot,2q \\
&\times\sum_{s=1}^{P} sa_{N1s}(P+s-1),2q\sum_{s=1}^{P} sa_{21s}(s+1),\cdot,2q\sum_{s=P-1}^{P} sa_{N1s}(s+1),2q \\
&\times\sum_{s=1}^{P} s\tilde{b}_{21s}(P+s-1),\cdot,2q\sum_{s=1}^{P} s\tilde{b}_{N1s}(P+s-1),2q\sum_{s=P-1}^{P} s\tilde{b}_{N1s}(s+1),\cdot,2q \\
&\times\sum_{s=1}^{P} \widetilde{sa_{1Ns}(P+}s-1),2q\sum_{s=P-1}^{P} s\tilde{b}_{N-1,Ns}(s+1)).
\end{aligned} \tag{163}
$$

Objasnimo ukratko celokupan postupak dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka. Nakon procene tekućeg stanja tokova teretnih kola, fuzzy sredina i varijansa tražnje za teretnim kolima se mogu proceniti. Tada, postoji potreba za fuzzy prognozom broja teretnih kola u svakoj stanici. Pretpostavljajući da postoji rastuća tražnja, fuzzy dvostruko eksponencijalno izglađivanje se koristi kao metod prognoziranja. Problem se može postaviti u skladu sa pristupom predloženim u odeljku 4. Komponente fuzzy težinskih matrica A, B i L su zatim određene, a rekurzivni algoritam dinamičkog programiranja primenjen za rešavanje postavljenog fuzzy stohastičkog sekvencijalnog problema optimizacije. Na kraju se sprovodi defazifikacija u cilju utvrđivanja egzaktnih rezultata koji na najbolji način obuhvataju informaciju koja je sadržana u fuzzy izlazima.

5. NUMERIČKI EKSPERIMENTI

U ovom poglavlju, primenjen je predstavljeni fuzzy stohastički model za rešavanje problema dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka. Eksperimenti su načinjeni na nizu jednostavnih hipotetičkih problema. Računarski postupak za sve operacije sa fuzzy brojevima sproveden je u Matlab programskom paketu uz korišćenje Intlab[2] (INTerval LABoratory) programskog dodatka za proračun inverznih fuzzy matrica. Predstavljeni su rezultati modela za mreže sačinjene od 2 i 4 stanice. Na kraju poglavlja data je komparativna analiza fuzzy stohastičkog i stohastičkog pristupa za različite mrežne konfiguracije i vremenske horizonte.

5.1 Eksperimenti na mreži od dve stanice

Najjednostavniji primer obuhvata 2 stanice i planski horizont od 4 dana. Svaki dan predstavlja poseban period odlučivanja, tako da je P=4. Ovaj fuzzy stohastički model obuhvata jedan tip teretnih kola.

Tabela 5.1 sadrži ulazne podatke o jediničnim troškovima kretanja teretnih kola u praznom stanju, jediničnim troškovima kretanja teretnih kola u tovarenom stanju i jediničnim troškovima nedostatka kola. Fuzzy proporcije prispeća tovarenih i praznih teretnih kola su date u Tabeli 5.2. Koeficijent praznog trčanja kola je 0.35, dok je kvadratni član u jediničnim troškovima vlasništva 10 novčanih jedinica (n.j.).

[2] Prof. Dr. Siegfried M. Rump, Institute for Reliable Computing, Hamburg University of Technology, Schwarzenbergstr. 95, 21071 Hamburg, Germany

Tabela 5.1 *Troškovni parametri problema dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka*

Izvorište	Odredište	Jedinični trošak kretanja u praznom stanju (n.j./kola)	Jedinični trošak kretanja u tovarenom stanju (n.j./kola)	Jedinični trošak nedostatka (n.j./kola)
1	2	300	100	100
2	1	350	100	100

Tabela 5.2 *Fuzzy proporcije prispeća tovarenih i praznih kola tokom perioda n*

n	Ruta 1-2	Ruta 2-1
0	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
1	(0.5, 0.51, 0.52)	(0.34, 0.35, 0.36)
2	(0.35, 0.36, 0.37)	(0.44, 0.45, 0.46)
3	(0.12, 0.13, 0.14)	(0.19, 0.20, 0.21)

Tražnja za transportom je opisana fuzzy normalnom raspodelom verovatnoća za sve periode tokom planskog horizonta i sve kombinacije izvorišno-odredišnih stanica (Tabela 5.3). S.D. predstavlja standardno odstupanje fuzzy broja teretnih kola.

Tabela 5.3 *Dnevna tražnja između stanica na posmatranom delu železničke mreže*

Izvorište	Odredište	Prosečna fuzzy stohastička dnevna tražnja (S.D.)			
		1	2	3	4
1	2	(29, 30, 31) (7)	(24, 25, 26)(3)	(34, 35, 36)(7)	(28, 30, 32)(6)
2	1	(25, 26, 27)(6)	(31, 32, 33)(6)	(39, 40, 41)(7)	(33, 35, 36)(4)

Tabela 5.4 sadrži vrednosti jediničnih troškova čuvanja kola i fuzzy procenu početnog broja kola u stanicama na razmatranoj mreži. U tabeli 5. data je

neispunjena ražnja iz prethodnih perioda po izvorišno-odredišnim parovima stanica.

Tabela 5.4 *Jedinični trošak čuvanja i početni broj kola u stanicama*

Stanica	Trošak čuvanja (n.j./kola/period)	Početni broj kola (S.D.)
1	15	(30, 32, 33)(4)
2	15	(28, 30, 31)(5)

Tabela 5.5 *Fuzzy neispunjena tražnja iz prethodnog perioda*

Izvorište	Odredište	Neispunjena tražnja
1	2	(2, 3, 4)
2	1	(3, 4, 5)

Fuzzy broj tovarenih i praznih kola koja su se nalazila u tranzitu na početku planskog horizonta dat je u Tabelama 6. i 7.

Tabela 5.6 *Broj tovarenih kola otpremljenih pre početka ciklusa*

Izvorište	Odredište	Jedan period	Dva perioda
1	2	(25, 26, 27)	(20, 22, 24)
2	1	(22, 23, 25)	(24, 25, 28)

Tabela 5.7 *Broj praznih kola otpremljenih pre početka ciklusa*

Izvorište	Odredište	Jedan period	Dva perioda
1	2	(5, 6, 7)	(7, 8, 9)
2	1	(3, 4, 5)	(6, 7, 9)

Elementi fuzzy težinskih matrica A(0), A(1), A(2), A(3), B i L u funkcionalu cilja su određeni korišćenjem relacija predstavljenog fuzzy stohastičkog modela zaliha. Za sve stanice broj kola na zalihama i broj naručenih kola je određen nakon tri iteracije primenom pristupa u odeljku 4.2 ($\gamma_1^* = 35, \eta_1^* = 65; \gamma_2^* = 42, \eta_2^* = 70$). Na osnovu fuzzy stohastičkog modela zaliha raznosača novina, vrednosti stanja kola na zalihama po stanicama za poslednji period planskog horizonta ($\gamma_1^* = 32$; $\gamma_2^* = 34$) su određene. Fuzzy prognoza aktuelnog broja teretnih kola po stanicama je data u Tabeli 5.8.

Tabela 5.8 *Fuzzy prognozirani broj kola u stanicama (S.D.) po danu*

Station	1	2	3
1	(33, 34, 35)(3)	(34, 35, 36)(3)	(35, 36, 37)(2)
2	(33, 35, 36)(2)	(35, 36, 38)(4)	(37, 38, 41)(4)

Sada je moguće definisati model fuzzy linearnog sistema za ovaj slučaj. Dinamičko ponašanje sistema alokacije teretnih kola je definisano relacijom (78) i za period $n = 0,..,2$ ova relacija je:

$$X(n+1) = \Lambda(n)X(n) + GU(n) + V_1(n)$$

ili u razvijenom obliku

$$
X(n+1)=\begin{bmatrix} S_1(n+1)\\ U_{12}(n+1)\\ S_2(n+1)\\ U_{21}(n+1)\\ d_{12}(n+1)\\ d_{21}(n+1)\\ x_{211}(n+1)\\ x_{212}(n+1)\\ y_{211}(n+1)\\ y_{212}(n+1)\\ x_{121}(n+1)\\ x_{122}(n+1)\\ y_{121}(n+1)\\ y_{122}(n+1) \end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
\tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & a_{211}(n) & a_{212}(n) & \tilde{b}_{211}(n) & \tilde{b}_{212}(n) & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \widetilde{a_{121}(n)} & \widetilde{a_{122}(n)} & \tilde{b}_{121}(n) & \tilde{b}_{122}(n)\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \widetilde{\gamma_{12}} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \widetilde{\gamma_{21}} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \widetilde{S_1(n)}\\ \widetilde{U_{12}(n)}\\ \widetilde{S_2(n)}\\ \widetilde{U_{21}(n)}\\ \widetilde{d_{12}(n)}\\ \widetilde{d_{21}(n)}\\ \widetilde{x_{211}(n)}\\ \widetilde{x_{212}(n)}\\ \widetilde{y_{211}(n)}\\ \widetilde{y_{212}(n)}\\ \widetilde{x_{121}(n)}\\ \widetilde{x_{122}(n)}\\ \widetilde{y_{121}(n)}\\ \widetilde{y_{122}(n)} \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}
-\tilde{1} & \tilde{0} & -\tilde{1} & \tilde{0}\\
-\tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & -\tilde{1} & \tilde{0} & -\tilde{1}\\
\tilde{0} & -\tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0}\\
\tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \widetilde{f_{12}(n)}\\ \widetilde{f_{21}(n)}\\ \tilde{e}_{12}(n)\\ \tilde{e}_{21}(n) \end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \widetilde{\omega_{12}(n)}\\ \widetilde{\omega_{21}(n)}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0}\\ \tilde{0} \end{bmatrix}
\tag{163}
$$

Relacija merenja, ili drugim rečima, izlaz sistema je modelovan jednačinom (90). Za period $n = 0,..,3$ ova relacija je:

$$Z(n) = H\,X(n) + V_2(n)$$

ili u razvijenom obliku

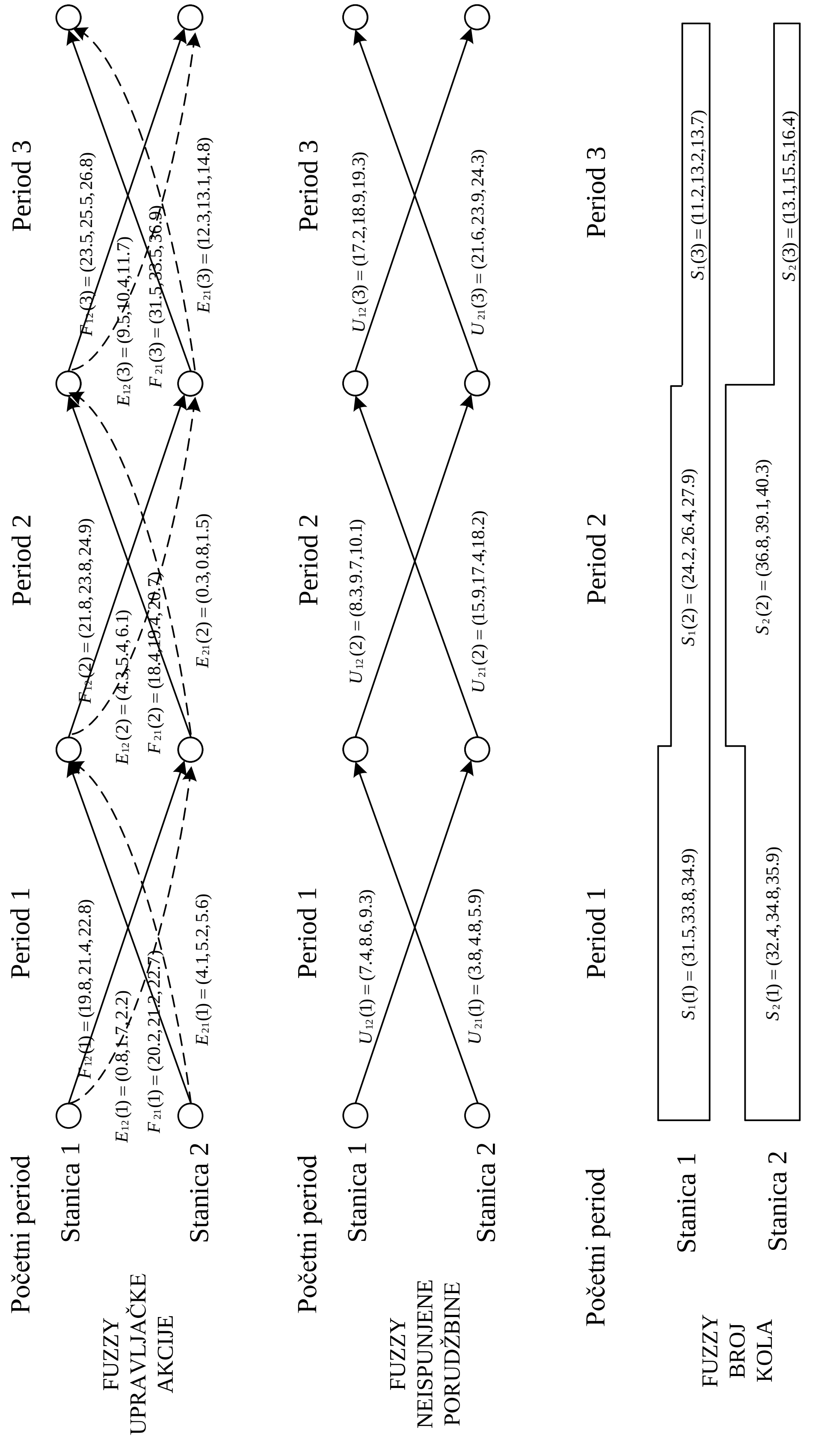
$$Z(n)=\begin{bmatrix} Z_1(n) \\ Z_2(n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_1(n) \\ U_{12}(n) \\ S_2(n) \\ U_{21}(n) \\ d_{12}(n) \\ d_{21}(n) \\ x_{211}(n) \\ x_{212}(n) \\ y_{211}(n) \\ y_{212}(n) \\ x_{121}(n) \\ x_{122}(n) \\ y_{121}(n) \\ y_{122}(n) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \Delta_1(n) \\ \Delta_2(n) \end{bmatrix} \tag{164}$$

Na osnovu definisanog matematičkog modela sistema i relacija koje se odnose na merenje izlaza sada je moguće primeniti fuzzy Kalmanov filter (106)-(107) u cilju određivanja najbolje procene fuzzy vrednosti stanja teretnih kola u pojedinim stanicama.

Problem je odrediti fuzzy vektor upravljanja $U(n)$ tako da se minimizira fuzzy funkcija cilja u odnosu na dinamička ograničenja (101) i grešku predviđanja stanja (102). Funkcija cilja predstavlja kvadratni fuzzy troškovni funkcional oblika:

$$\begin{aligned} J=\frac{1}{2}X(3)^T\Gamma(3)X(3)+\frac{1}{2}\Big\{&[X(0),U(0)]^T\Omega(0)\begin{bmatrix} X(0) \\ U(0) \end{bmatrix}+[X(1),U(1)]^T\Omega(1)\begin{bmatrix} X(1) \\ U(1) \end{bmatrix} \\ &+[X(2),U(2)]^T\Omega(2)\begin{bmatrix} X(2) \\ U(2) \end{bmatrix}\Big\} \end{aligned} \tag{165}$$

Korišćenjem rekurzivnog postupka za rešavanje (104)-(111) optimalni zakon upravljanja se može odrediti za dati sistem dimenzionisanja i alokacije teretnih kola koji se sastoji od 2 stanice na 4-dnevnom planskom horizontu. Računarski postupak za izvršenje svih fuzzy proračuna je razvijen korišćenjem Matlab softverskog paketa, a dobijeni rezultati ukratko su prikazani na narednoj slici (Slika 5.1.).



***Slika 5.1** Rešenje problema sa dve stanice*

Predstavljeni model daje aproksimativan broj teretnih kola na zalihama po pojedinim stanicama na mreži kako bi se ispunila tražnja. Osim toga, izlazi modela obezbeđuju informaciju o železničkoj mreži u fuzzy smislu, kao što je fuzzy broj teretnih kola ($S_i(n)$) prisutnih u svim stanicama tokom svakog vremenskog perioda u planskom horizontu, fuzzy neispunjena tražnja

($U_{ij}(t)$) i fuzzy broj tovarenih i praznih kretanja teretnih kola po stanicama i periodima ($X_{ij}(t), Y_{ij}(t)$).

Veličina teretnog kolskog parka koja je neophodna za pravilno funkcionisanje sistema može da se predstavi kao fuzzy prosečni broj teretnih kola koja su raspoloživa tokom planskog horizonta. Sledeći izraz se koristi za dobijanje ovog rezultata:

$$FS = \frac{1}{P}\sum_{n=1}^{P} A(n) \tag{166}$$

Pri čemu je:

$$\begin{aligned} A(1) = {} & E_{12}(1)\alpha_{12}(0,1) + F_{12}(1)\theta_{12}(0,1) + E_{21}(1)\alpha_{21}(0,1) + F_{21}(1)\theta_{21}(0,1) \\ & + E_{12}(2)\alpha_{12}(0,2) + F_{12}(2)\theta_{12}(0,2) + E_{21}(2)\alpha_{21}(0,2) + F_{21}(2)\theta_{21}(0,2) \\ & + E_{12}(3)\alpha_{12}(0,3) + F_{12}(3)\theta_{12}(0,3) + E_{21}(3)\alpha_{21}(0,3) + F_{21}(3)\theta_{21}(0,3) \\ & + \widetilde{S_1(1) + S_2(1)} \end{aligned} \tag{167}$$

$$\begin{aligned} A(2) = {} & E_{12}(2)\alpha_{12}(0,1) + F_{12}(2)\theta_{12}(0,1) + E_{21}(2)\alpha_{21}(0,1) + F_{21}(2)\theta_{21}(0,1) \\ & + E_{12}(3)\alpha_{12}(0,2) + F_{12}(3)\theta_{12}(0,2) + E_{21}(3)\alpha_{21}(0,2) + F_{21}(3)\theta_{21}(0,2) \\ & + E_{12}(1)\alpha_{12}(0,3) + F_{12}(1)\theta_{12}(0,3) + E_{21}(1)\alpha_{21}(0,3) + F_{21}(1)\theta_{21}(0,3) \\ & + \widetilde{S_1(2) + S_2(2)} \end{aligned} \tag{168}$$

$$\begin{aligned} A(3) = {} & E_{12}(3)\alpha_{12}(0,1) + F_{12}(3)\theta_{12}(0,1) + E_{21}(3)\alpha_{21}(0,1) + F_{21}(3)\theta_{21}(0,1) \\ & + E_{12}(1)\alpha_{12}(0,2) + F_{12}(1)\theta_{12}(0,2) + E_{21}(1)\alpha_{21}(0,2) + F_{21}(1)\theta_{21}(0,2) \\ & + E_{12}(2)\alpha_{12}(0,3) + F_{12}(2)\theta_{12}(0,3) + E_{21}(2)\alpha_{21}(0,3) + F_{21}(2)\theta_{21}(0,3) \\ & + \widetilde{S_1(3) + S_2(3)} \end{aligned} \tag{169}$$

Za pravilno funkcionisanje definisanog sistema neophodna veličina teretnog kolskog parka (FS) u fuzzy smislu je (90.5, 101.6, 111.3). Fuzzy optimalna vrednost ukupnih troškova koji odgovaraju potrebnoj veličini teretnog kolskog parka je određena zamenom vrednosti fuzzy upravljačkih promenljivih u relaciju (124) i iznosi $J = (188050, 213070, 226720)$ novčanih jedinica. U poređenju sa determinističkim i stohastičkim pristupom problemu, fuzzy rezultati dobijeni primenom predloženog fuzzy stohastičkog pristupa pružaju celokupan opseg izlaznog rezultata, minimalnu, najverovatniju i maksimalnu moguću vrednost, i predstavljaju važnu informaciju za donosioca odluke s obzirom na to da obuhvataju i neizvesnost koja postoji u sistemu teretnih kola. Međutim, ako u procesu odlučivanja postoji potreba za jednom egzaktnom vrednošću koja predstavlja najbolju aproksimaciju izlaznog fuzzy skupa, dobijeni fuzzy rezultati moraju biti defazifikovani. Korišćenjem metoda označenog rastojanja za defazifikaciju egzaktna vrednost od 101.3 kola se dobija uz odgovarajuću vrednost troškova od 210227 n.j. Za stohastički linearni gausov regulator koji se dobija kada se eliminiše rasplinutost u modelu optimalna vrednost teretnog kolskog parka je 83.2 kola uz odgovarajuću vrednost troškova od 92000 n.j.

5.2 Eksperimenti na mreži od četiri stanice

Druga grupa testova odnosi se na železničku mrežu od četiri stanice period od četiri dana. Tabela 5.9 sadrži ulazne podatke o jediničnim troškovima kretanja teretnih kola u praznom stanju, jediničnim troškovima kretanja teretnih kola u tovarenom stanju i jediničnim troškovima nedostatka kola. Fuzzy proporcije prispeća tovarenih i praznih teretnih kola su date u Tabeli 5.10. Koeficijent praznog trčanja kola je 0.35, dok je kvadratni član u jediničnim troškovima vlasništva 10 novčanih jedinica (n.j.).

Tabela 5.9 *Troškovni parametri problema dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka*

Izvorište	Odredište	Jedinični trošak kretanja u praznom stanju (n.j./kola)	Jedinični trošak kretanja u tovarenom stanju (n.j./kola)	Jedinični trošak nedostatka (n.j./kola)
1	2	500	250	130
1	3	500	250	130
1	4	600	350	130
2	1	600	350	100
2	3	650	350	100
2	4	700	400	100
3	1	650	400	100
3	2	700	450	100
3	4	750	500	100
4	1	700	450	100
4	2	650	500	100
4	3	650	450	100

Tabela 5.10 *Fuzzy proporcije prispeća tovarenih i praznih kola tokom perioda n*

n		
	Ruta 1-4; Ruta 2-3; Ruta 2-4;	Ruta 1-2; Ruta 4-3; Ruta 1-3;
0	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
1	(0.60, 0.61, 0.62)	(0.50, 0.51, 0.52)
2	(0.35, 0.36, 0.37)	(0.28, 0.29, 0.30)
3	(0.02, 0.03, 0.04)	(0.19, 0.20, 0.21)

Tražnja za transportom je opisana fuzzy normalnom raspodelom verovatnoća za sve periode tokom planskog horizonta i sve kombinacije izvorišno-odredišnih stanica (Tabela 5.11). S.D. predstavlja standardno odstupanje fuzzy broja teretnih kola.

***Tabela 5.11** Dnevna tražnja između stanica na posmatranom delu železničke mreže*

Izvorište	Odredište	Prosečna fuzzy stohastička dnevna tražnja (S.D.)			
		1	2	3	4
1	2	(14,15,20)(12)	(20, 21, 26)(12)	(19, 20, 26)(12)	(28, 30, 32)(6)
1	3	(18,19,23)(13)	(15,16,22)(12)	(25,26,32)(13)	(14,15,16)(3)
1	4	(19,20,24)(13)	(20,21,26)(11)	(14,15,20)(11)	(16,17,18)(4)
2	1	(18,19,22)(5)	(16,17,22)(5)	(14,16,19)(4)	(10,11,12)(2)
2	3	(15,16,18)(5)	(24,25,28)(6)	(13,16,22)(4)	(11,12,13)(3)
2	4	(21,23,25)(6)	(15,16,18)(5)	(26,27,31)(6)	(14,15,16)(2)
3	1	(18,19,22)(6)	(16,17,22)(5)	(14,16,19)(4)	(15,17,18)(5)
3	2	(15,16,18)(6)	(24,25,28)(6)	(13,16,22)(4)	(14,15,16)(3)
3	4	(21,23,25)(6)	(15,16,18)(5)	(26,27,31)(6)	(16,17,18)(4)
4	1	(15,16,19)(6)	(21,22,24)(5)	(12,14,20)(4)	(9,10,11)(2)
4	2	(10,11,15)(3)	(10,14,17)(4)	(15,16,20)(4)	(11,12,13)(3)
4	3	(18,19,22)(5)	(13,15,19)(5)	(21,22,25)(6)	(15,16,17)(5)

Tabela 5.12 sadrži vrednosti jediničnih troškova čuvanja kola i fuzzy procenu početnog broja kola u stanicama na razmatranoj mreži. U tabeli 5.13 data je neispunjena tražnja iz prethodnih perioda po izvorišno-odredišnim parovima stanica.

***Tabela 5.12** Jedinični trošak čuvanja i početni broj kola u stanicama*

Stanica	Trošak čuvanja (n.j./kola/period)	Početni broj kola (S.D.)
1	15	(15, 16, 17)(4)
2	20	(10, 13, 15)(5)
3	40	(9,10,11)(4)
4	30	(10,12,13)(3)

***Tabela 5.13** Fuzzy neispunjena tražnja iz prethodnog perioda*

Izvorište	Odredište	Neispunjena tražnja
1	2	(2, 3, 4)
1	3	(3,4,5)
1	4	(3,5,6)

Izvorište	Odredište	Neispunjena tražnja
2	1	(1,2,3)
2	3	(2,3,4)
2	4	(1,3,5)
3	1	(2,3,4)
3	2	(2,4,5)
3	4	(3,5,6)

Fuzzy broj tovarenih i praznih kola koja su se nalazila u tranzitu na početku planskog horizonta dat je u Tabelama 5.14 i 5.15.

Tabela 5.14 *Broj tovarenih kola otpremljenih pre početka ciklusa*

Izvorište	Odredište	Jedan period	Dva perioda
1	2	(15,16,17)	(8,9,10)
1	3	(10,11,12)	(15,16,17)
1	4	(10,11,12)	(15,16,17)
2	1	(10,11,12)	(11,12,13)
2	3	(11,12,13)	(5,6,7)
2	4	(8,9,10)	(10,11,12)
3	1	(9,10,11)	(3,4,5)
3	2	(11,12,13)	(10,11,12)
3	4	(9,10,11)	(14,15,16)
4	1	(7,8,9)	(4,5,6)
4	2	(9,10,11)	(15,16,17)
4	3	(13,14,15)	(8,9,10)

Tabela 5.15 *Broj praznih kola otpremljenih pre početka ciklusa*

Izvorište	Odredište	Jedan period	Dva perioda
1	2	(5,6,7)	(3,4,5)
1	3	(2,3,4)	(2,3,4)

Izvorište	Odredište	Jedan period	Dva perioda
1	4	(3,4,5)	(1,2,3)
2	1	(3,4,5)	(7,8,9)
2	3	(4,5,6)	(2,3,4)
2	4	(2,3,4)	(5,6,7)
3	1	(4,5,6)	(5,6,7)
3	2	(11,12,13)	(10,11,12)
3	4	(4,5,6)	(3,4,5)
4	1	(5,6,7)	(7,8,9)
4	2	(3,4,5)	(5,6,7)
4	3	(3,4,5)	(4,5,6)

Elementi fuzzy težinskih matrica A(0), A(1), A(2), A(3), B i L u funkcionalu cilja su određeni korišćenjem relacija predstavljenog fuzzy stohastičkog modela zaliha. Za sve stanice broj kola na zalihama i broj naručenih kola je određen nakon tri iteracije primenom pristupa u odeljku 4.2 ($\gamma_1^* = 74, \eta_1^* = 94; \gamma_2^* = 58, \eta_2^* = 88, \gamma_3^* = 58,$ $\eta_3^* = 68; \gamma_4^* = 49, \eta_4^* = 74$). Na osnovu fuzzy stohastičkog modela zaliha raznosača novina, vrednosti stanja kola na zalihama po stanicama za poslednji period planskog horizonta ($\gamma_1^* = 75, \gamma_2^* = 58, \gamma_3^* = 58, \gamma_4^* = 49$) su određene. Fuzzy prognoza aktuelnog broja teretnih kola po stanicama je data u Tabeli 5.16.

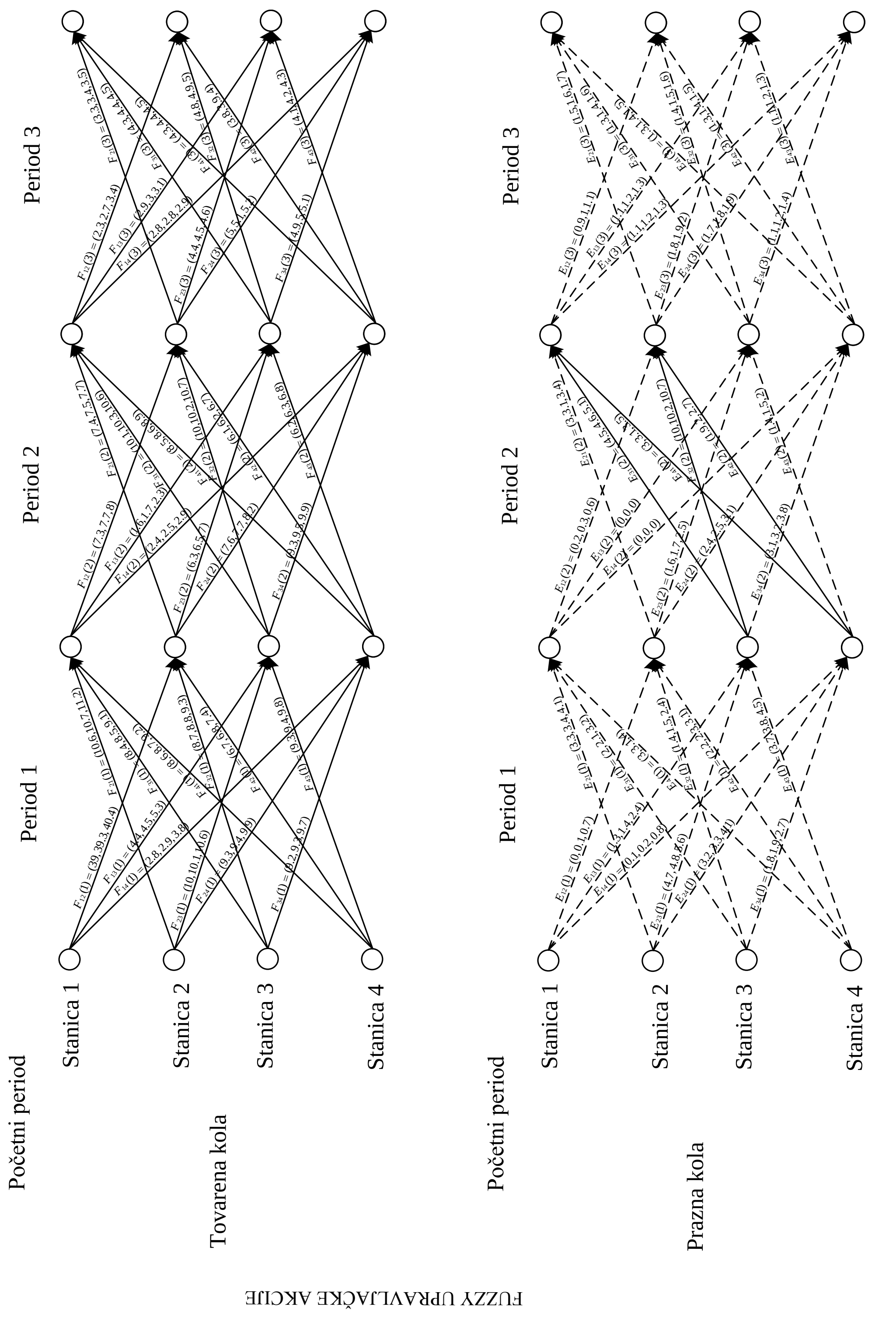
Tabela 5.16 *Fuzzy prognozirani broj kola u stanicama (S.D.) po danu*

Station	1	2	3
1	(23, 24, 25)(3)	(22, 23, 24)(3)	(25, 26, 27)(2)
2	(23, 25, 26)(3)	(25, 36, 28)(2)	(17, 18, 21)(4)
3	(19,20,21)(2)	(17,18,19)(3)	(15,16,17)(4)
4	(15,16,17)(5)	(17,18,19)(4)	(18,19,20)(3)

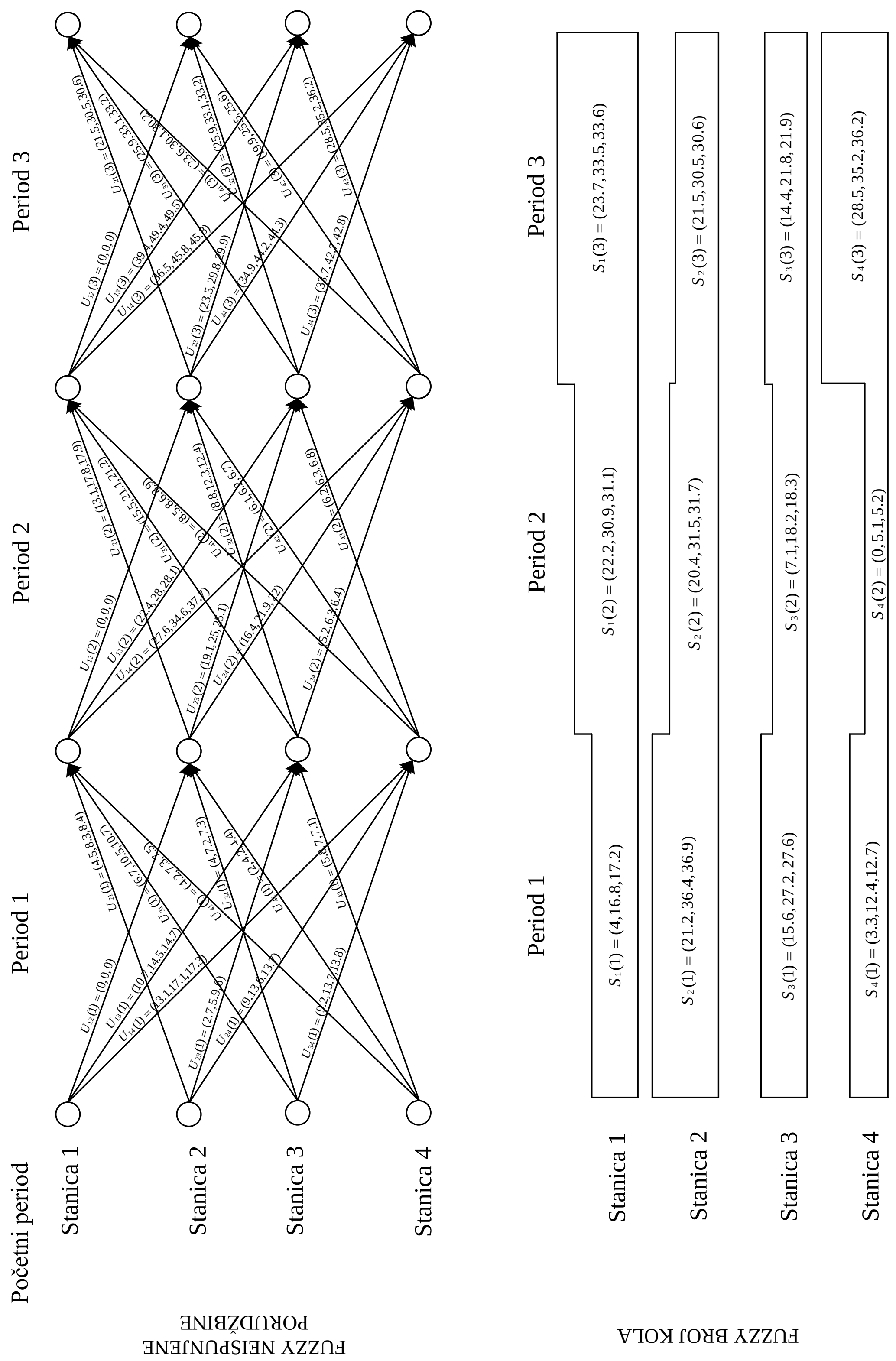
Korišćenjem rekurzivnog postupka za rešavanje (64)-(71) optimalni zakon upravljanja se može odrediti za dati sistem dimenzionisanja i alokacije teretnih kola koji se sastoji od 4 stanice na 4-dnevnom planskom horizontu. Dobijeni rezultati su ukratko prikazani (Slika 5.2 - Slika 5.3).

Za pravilno funkcionisanje definisanog sistema neophodna veličina teretnog kolskog parka (FS) u fuzzy smislu je (155.8, 204.4, 218.3). Fuzzy optimalna vrednost ukupnih troškova koji odgovaraju potrebnoj veličini teretnog kolskog parka je određena zamenom vrednosti fuzzy upravljačkih promenljivih u relaciju (125) i iznosi $\tilde{J} = (274.645, 306.045, 314.300)$ novčanih jedinica.

Korišćenjem metoda označenog rastojanja za defazifikaciju egzaktna vrednost od 195.7 kola se dobija uz odgovarajuću vrednost troškova od 300259 n.j. Za stohastički linearni gausov regulator koji se dobija kada se eliminiše rasplinutost u modelu optimalna vrednost teretnog kolskog parka je 232.13 kola uz odgovarajuću vrednost troškova od 382.467 n.j.



***Slika 5.2** Rešenje problema sa četiri stanice*



***Slika 5.3** Rešenje problema sa četiri stanice*

Za pravilno funkcionisanje definisanog sistema neophodna veličina teretnog kolskog parka (FS) u fuzzy smislu je (155.8, 204.4, 218.3). Fuzzy optimalna vrednost ukupnih troškova koji odgovaraju potrebnoj veličini teretnog kolskog parka je određena zamenom vrednosti fuzzy upravljačkih promenljivih u relaciju (125) i iznosi $\tilde{J} = (274.645, 306.045, 314.300)$ novčanih jedinica.

Korišćenjem metoda označenog rastojanja za defazifikaciju egzaktna vrednost od 195.7 kola se dobija uz odgovarajuću vrednost troškova od 300259 n.j. Za stohastički linearni gausov regulator koji se dobija kada se eliminiše rasplinutost u modelu optimalna vrednost teretnog kolskog parka je 232.13 kola uz odgovarajuću vrednost troškova od 382.467 n.j.

5.3 Komparativna analiza rezultata fuzzy stohastičkog i stohastičkog modela

U ovom poglavlju predstavljeni su rezultati poređenja fuzzy stohastičkog i stohastičkog pristupa za različite numeričke primere (Tabela 5.17). Rezultati fuzzy LQG pristupa su konvertovani u odgovarajuće egzaktne vrednosti.

Tabela 5.17 *Alternativni problemi i poređenje sa stohastičkim pristupom*

Problem	Broj stanica	Broj perioda P	**Fuzzy LQG**			**LQG**		
			FS	J (n.j.)	CPU (s)	FS	J (n.j.)	CPU (s)
1	2	4	101.3	210227	2	83.2	92000	1
2	2	7	139.7	360789	2	111.8	235298	1
3	3	7	170.3	530911	2	135.9	361695	1
4	4	4	195.7	752062	3	172.8	591944	2
5	4	7	253.8	1145519	3	220.5	827154	2
6	5	7	318.6	1545293	4	289.3	1160892	3
7	6	7	379.2	1796256	4	350.6	1390896	3

Iz Tabele 5.17 se u oba slučaja, stohastičkom i fuzzy stohastičkom, može uočiti da sa povećanjem broja stanica i broja perioda za isti broj stanica, veća veličina kolskog parka je potrebna što rezultira u višem nivou troškova potrebnih za funkcionisanje datog sistema teretnih kola. U poređenju sa stohastičkim pristupom, fuzzy stohastička analiza problema dimenzionisanja i alokacije teretnih kola daje veću potrebnu veličinu teretnog kolskog parka koja vodi većim troškovima. Ovo je logična posledica obuhvatanja budućih neizvesnosti tražnje za teretnim kolima. Pema tome, razlika u veličini teretnog kolskog parka i odgovarajućem trošku sistema raste sa povećanjem neizvesnosti. CPU vreme za sprovedene testove je vrlo malo.

Koristi predloženog pristupa u poređenju sa modelovanjem zasnovanom na stohastičkom optimalnom upravljanju se zasnivaju na istovremenom razmatranju rasplinutosti i stohastičnosti tražnje za teretnim kolima što vodi izlazu koji je daleko manje osetljiv na promene u ulazima i koji je u stanju da obuhvati nerpreciznost i neodređenost u procesu odlučivanja.

6. ZAKLJUČAK I PRAVCI DALJEG ISTRAŽIVANJA

Prevoz robe kao osnovna aktivnost u svakoj železničkoj kompaniji sprovodi se alokacijom teretnih kola. Teretni kolski park predstavlja po vrednosti jedan od najznačajnijih resursa železničkih kompanija. Vremenska i prostorna neusklađenost zahteva za prevozom često dovodi do potrebe za alokacijom praznih kola. Prazna kretanja imaju značajno učešće u ukupnom kretanju u železničkom sistemu i razvoj modernih alata za optimizaciju teretnog kolskog parka predstavlja vrlo važan zadatak.

U ovoj disertaciji, fuzzy linearni dinamički model teretnih tokova (praznih i tovarenih) na mreži je razvijen kao osnova za korišćenje teorije optimalnog upravljanja za određivanje optimalne veličine teretnog kolskog parka. Neizvesna tražnja je modelovana kao fuzzy stohastička promenljiva. Pokazano je da se teorija optimalnog upravljanja može primeniti za određivanje veličine teretnog kolskog parka u fuzzy stohastičkom smislu, na osnovu uspostavljanja ravnoteže između egzaktnih troškovnih parametara, troška neispunjenih porudžbina s jedne strane i sume troškova vlasništva i korišćenja teretnih kola sa druge strane.

Predloženi matematički model omogućava:

- Primenu opšte teorije sistema za određivanje veličine teretnog kolskog parka u svim stanicama i vremenskim periodima.
- Formulaciju zadatka kao fuzzy stohastičkog problema alokacije teretnih kola od više izvorišta ka više odredišta.

- Dekompoziciju problema na niz jednostavnijih potproblema. Samim tim, eventualni računski problemi koji proizilaze iz velikih dimenzija matrica mogu se relativno jednostavno prevazići korišćenjem strukture vektorske diferencne jednačine stanja.

Na osnovu primene fuzzy dinamičkog optimizacionog modela za potrebe dimenzionisanja teretnog kolskog parka železnice došlo se do sledećih zaključaka:

- Preko fuzzy vektorske diferencne jednačine stanja adekvatno se modeluje dinamička priroda tražnje za teretnim kolima.
- Razmatranje prognoziranog broja kola u stanici kao opservacija u Kalmanovom filtru omogućava smanjenje neizvesnosti u pogledu potrebnog broja kola u teretnom kolskom parku.
- Upućivanja teretnih kola nisu unapred fiksirana već zavise od prihoda i troškova, prognozirane ponude i tražnje i vremena prispeća.
- Optimalan fuzzy stohastički regulator sa kvadratnim kriterijumom performanse i diskretnim fuzzy linearnim modelom sistema za dinamiku broja kola po stanicama podesan je matematički alat za dimenzionisanje teretnog kolskog parka.
- Numerički testovi ukazuju na vrlo dobru računarsku efikasnost modela.
- Razvijeni model može se relativno jednostavno primeniti na druge vidove transporta jer je opšta priroda problema veoma slična.

Prema tome, ostvareni su sledeći originalni naučni doprinosi:

- Razmotren je problem simultanog dimenzionisanja teretnog kolskog parka i alokacije teretnih kola na železnici;
- Razvijen je dinamički model za upravljanje tokovima teretnih kola i dimenzionisanje kolskog parka koji je zasnovan na teoriji optimalnog upravljanja;
- Ulazni parametri, tražnja i vremena putovanja, su tretirani na fuzzy stohastički, odnosno fuzzy način;
- Razvijeni su jednoperiodni i višeperiodni model za upravljanje zalihama teretnih kola u stanicama na železničkoj mreži, uz razmatranje tražnje kao fuzzy stohastičkog ulaznog parametra;

- Razvijen je fuzzy model prognoziranja stanja teretnih kola u stanicama na železničkoj mreži;
- Sprovedeno je testiranje i validacija pristupa kao jednog računarski vrlo efikasnog načina za optimizaciju i upravljanje teretnim kolskim parkom.

Razvoj novog pristupa za modelovanje i analizu veličine teretnog kolskog parka ukazao je na potencijalne mogućnosti za dalja istraživanja:

- Problem dimenzionisanja i alokacije teretnog kolskog parka je posmatran kao homogen. Međutim, postoji mogućnost da se uključe ograničenja kapaciteta i problem posmatra kao heterogen.
- U radu je metod označenog rastojanja primenjen za defazifikaciju fuzzy brojeva. Kako postoji veliki broj alternativnih metoda za rangiranje fuzzy brojeva, komparativna analiza ovih metoda može biti sprovedena za svaki pojedinačni slučaj i najbolji od njih primenjen za defazifikaciju.
- Za prognozu fuzzy broja kola po stanicama primenjen je metod dvostrukog fuzzy eksponencijalnog izglađivanja. Moguće je poboljšati prognozu primenom fuzzy stohastičkog ARIMA modela.
- Primenljivost razvijenog modela na probleme realne veličine biće takođe razmotrena u budućnosti.

Literatura

Abdelwahab, W., Sargious, M., 1992. Modeling the Demand for Freight Transport. Journal of Transport Economics and Policy 26(1), pp. 49-70.

Adamidou, E.A., Kornhauser, A.L., Koskosidis, Y.A., 1993. A Game Theoretic/Network Equilibrium Solution Approach for the Railroad Freight Car Management Problem, Transportation Research 27(3), pp. 237-252.

Assad, A.A., 1980. Models for Rail Transportation. Transportation Research 14A, pp. 205-220.

Assad, A. A., 1980. Modelling of rail networks: Toward a routing makeup model. Transportation Research Part 14B, pp. 104-114.

Association of American Railroads, 1982. Proceeding Manual Freight Car Management Seminar, Memphis, Freight Car Management Research - Demonstration Program, AAR Pub. R510, pp. 177-201.

ASTRA consortium, 2000. Final report: assessment of transport strategies, University of Karlsruhe, Germany.

Athans, M., Falb, P.L., 1966. Optimal Control, McGraw-Hill, New York.

Babcocka, M.W., Lub, X., Nortonc, J., 1999. Time series forecasting of quarterly railroad grain carloadings. Transportation Research Part E 35(1), pp. 43-57.

Baker, L., 1977. Overview of Computer Based Models Applicable to Freight Car Utilization. Report prepared for U.S. Department of Transportation, NTIS, Springfield.

Barnhart, C., Schneur, R.R., 1966. Air network design for express shipment service. Operation Research 44(6), pp. 852-863.

Baumol, W.J., Fabian T., 1964. Decomposition Pricing for Decentralization and External Economies. Management Science 11(1), pp. 1-32.

Beamon, B.M., Deshpande, A.N., 1998. Mathematical programming approach to simultaneous unit-load and fleet-size optimization in material handling systems design. International Journal of Advanced Manufacturing Technology 14(11), pp. 858-863.

Beamon, B.M., Chen, V.C.P., 1998. Performability-based fleet sizing in a material handling system. International Journal of Advanced Manufacturing Technology 14(6), pp. 441-449.

Beaujon, G.J., Turnquist, M.A., 1986. Fleet Sizing and Vehicle Allocation Strategies. TIMS/ORA National Meeting, Miami.

Beaujon, G.J., Turnquist, M.A., 1991. A model for fleet sizing and vehicle allocation. Transportation Science 25(1), pp. 19-45.

Bector, C.R., S., Chandra, 2005. Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games. Springer, Berlin, Heidelberg.

Bhowmik, M., Pal, M., Pal A., 2008. Circulant Triangular Fuzzy Number Matrices. Journal of Physical Sciences 12, pp. 141-154.

Bojović, N., 1997. Optimizacija investicija u teretna kola železnice, doktorska disertacija, Saobraćajni fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd.

Bojovic, N.J., 2000. Application of optimization techniques to the railroad empty car distribution process: A survey. Yugoslav Journal of Operations Research 10(1), pp. 63–74.

Bojovic, J.N., 2002. A general system theory approach to rail freight car fleet sizing. European Journal of Operational Research 136(1), pp. 136-172.

Bojovic, N.J., 2007. Upravljanje železničkim saobraćajem i transportom. I izdanje, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, Srbija.

Bojović, J.N., Milenković, M., 2008. The best rail fleet mix problem. Operational Research: An International Journal 8(1), pp. 77-87.

Bojović, J.N., Bošković, B., Milenković, M., Šunjić, A., 2010. A two-level approach to the problem of rail freight car fleet composition, Transport 25(2), pp. 186-192.

Box, G.E.P., Jenkins, G.M., 1976. Time Series Analysis: Forecasting and Control, 2nd ed. Holden-Day, San Francisco, CA.

Bjork, K.M., 2009. An analytical solution to a fuzzy economic order quantity problem. International Journal of Approximate Reasoning, 50(3), pp. 485-493.

Bjork, K.M., 2012. A multi-item fuzzy economic production quantity problem with a finite production rate. International Journal of Production Economics, 135(2), pp. 702-707.

Bräysy, O., Dullaert, W., Hasle, G., Mester, D., Gendreau, M., 2008. An Effective Multi-restart Deterministic Annealing Metaheuristic for the Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows. Transportation Science 42(3), pp. 371-386.

Bryson, A.E., Ho, Y., 1975. Applied Optimal Control. Wiley, New York.

Calvete, H.I., Gale, C., Oliveros, M.J., Sanchez-Valverde, B., 2007. A goal programming approach to vehicle routing problems with soft time windows. European Journal of Operational Research 177(3), pp. 1720-1733.

Cambridge Systematics, Inc, 1997. A guidebook for forecasting freght transportation demand, NCHRP report 388, Transportation Research Board, Nacional Research Council, Washington, D.C.

Cambridge Systematics, Inc, COMSIS Corporation and University of Wisonsin-Milwaukee, 1997. Quick Response Freight Forecasting Manual, Final Report DOT-T-97-10, prepared for US Department of Transportation and US Environmental Protection Agencym US DOT, Washington, D.C.

Campetella, M., Lulli, G., Pietropaoli, U., Ricciardi, N., 2006. Freight Service Design for an Italian Railways Company. 6th Workshop on Algorithmic Methods and Models for Optimisation of Railways, pp. 1-13.

Caprara, A., Malaguti, E.T., Toth, P., 2011. A Freight Service Design Problem for a Railway Corridor, Transportation Science 45(2), pp. 147-162.

Carrillo, M.J., 1996. PACE-FORWARD-Policy analytic and computational environment for Dutch freight transport, RAND Europe, Leiden.

Carvallho, T., Powell, W.B., 2000. A multiplier adjustment method for dynamic resource allocation problems. Transportation Science 34(2), pp. 150-164.

Cascetta, E., 1997. National modelling in Italy, Simulation and evaluation models for the Italian DSS, Paper presented at Seminar on National Transport Models: The State of the Art, Noordwijk.

Chang, H.C., Yao, J.S., Ouyang, L.Y., 2006. Fuzzy mixture inventory model involving fuzzy random variable lead time demand and fuzzy total demand. European Journal of Operational Research 169(1), pp. 65-80.

Chang, H., Yao, J., and Ouyang, L. (2004). Fuzzy mixture inventory model with variable lead time based on probabilistic fuzzy set and triangular fuzzy number. Mathematical and computer modeling, 39(2-3):287–304.

Cheon, M.S., Furman, K.C., Shaffer, T.D., 2012. A Modeling Framework for Railcar Fleet Sizing in the Chemical Industry. Industrial & Engineering Chemistry Research 51(29), pp. 9825-9834.

Choi, E., Tcha, D.W., 2007. A column generation approach to the heterogeneous fleet vehicle routing problem. Computers & Operations Research 34(7), pp. 2080-2095.

Clarke, G. , Wright, J.W., 1964. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. Operations Research 12(4), pp. 568-581.

Coutu, J.Y., 1978. Prediction du traffic de wagons vides dans le reseau ferroviaire du C.N. a l'aide d'un modele de gravite. Centre de recherche sur les transports, Universite de Montreal.

Crainic, T., Ferland, J., Rousseau, J., 1984. A tactical planning model for rail freight transportation. Transportation Science 18(2), pp. 165-184.

Crainic, T.G., J.M., Rousseau, 1986. Multicommodity, multimode freight transportation: A general modeling and algorithmic framework for the service network design problem. Transportation Research Part B: Methodological 20(3), pp. 225–242.

Crainic, T.G., 2000. Service Network Design in Freight Transportation. European Journal of Operational Research 122(2) pp. 272–288.

Cordeau, J., Toth, P., Vigo, D., 1998. A survey of optimization models for train routing and scheduling. Transportation Science 32(4), pp. 308-404.

Dantzig, G.B., Fulkerson, D.R., 1954. Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule. Naval Research Logistics Quarterly 1(3), pp. 217-222.

Dantzig, G.B., 1963. Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, N.J.

de Jong, G, Gunn, H.F., Walker, W., 2004. National and international freight transport models: an overview and ideas for further development. Transport Reviews 24(1), pp. 103-124.

Dehghan, M., Ghatee, M., Hashemi B., 2009. Inverse of a fuzzy matrix of fuzzy numbers. International Journal of Computer Mathematics 86(8), pp. 1433-1452.

Dejax, P.J., Durand, T., Servant F., 1986. A Planning Model for Loaded and Empty Container Ground Transportation. TIMS/ORSA National Meeting, Los Angeles.

Dejax, P., Crainic, T., 1987. A review of empty flows and fleet management models in freight transportation. Transportation Science 21(4), pp. 227-247.

Desrosiers, J., Sauve, M., Soumis, F., 1988. Lagrangian Relaxation Methods for Solving the Minimum Fleet Size Multiple Traveling Salesman Problem with Time Windows. Management Science 34(8), pp. 1005-1022.

Dondo, R., Cerda, J., 2007. A cluster-based optimization approach for the multi-depot heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows. European Journal of Operational Research 176, pp. 1478-1507.

Dougherty, M., 1995. A review of neural networks applied to transport. Transportation Research Part C: Emerging Technologies 3(4), pp. 247–260.

Du, Y, Hall, R. 1997. Fleet sizing and empty equipment redistribution for centerterminal transportation networks. Management Science 43(2), pp. 145-157.

Dubois, D., Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, New York.

Evans, S.P., Kirby, R.H., 1974. A Three-Dimensional Furness Procedure for Calibrating Gravity Models, Transportation Research 8(2), pp. 105-122.

EXPEDITE consortium, 2000. Review of European and national passenger and freight market forecasting systems, Deliverable for the European Commission DGTREN, HCG, The Hague.

Ferland, J.A., Michelon, P., 1988. The Vehicle Scheduling Problem with Multiple Vehicle Types. Journal of the Operational Research Society 39(6), 577-583.

Ford, L.R., Fulkerson, D.R., 1974. Flows in Networks. Princeton University Press, Princeton, N.J.

Fernandes Grain, M.T., De Sinay, F., 1986. Optimal Distribution of Empty Railroad Cars. In Proceedings of the 1st International Congress in France of Industrial Engineering and Management, pp. 21-26, Ecole Centrale de Paris, France.

Fisher, M. L., Jaikumar, R., 1981. A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing. Networks 11, pp. 109-124.

Fite, J.T., Taylor, G.D., Usher, J.S., English, J. R. and Roberts, J.N., 2002. Forecasting freight demand using economic indices. International Journal of Physical Distribution & Logistics Management 32(4), pp. 299-308.

Frank, M., Wolfe, P., 1956. An Algortihm for Quadratic Programming. Naval Research Logistic Quarterly 3(1-2), pp. 95-110.

Frantzeskakis, L.F., Powell, W.B., 1990. A successive linear approximation procedure for stochastic, dynamic vehicle allocation problems. Transportation Science 24(1), pp. 40-57.

Fu, L, Ishkhanov, G, (2004). Fleet size and mix optimization for paratransit services. Transportation Research Record 1884, pp. 39-46.

Fukasawa, R., de Aragao, M.V.D., Porto, O., Uchoa, E., 2002. Solving the Freight Car Flow Problem to Optimality. Electronic Notes in Theoretical Computer Science 66(6), pp. 42-52.

Garrido R.A., Mahmassani H.S., 2000. Forecasting freight transportation demand with the space-time multinomial probit model. Transportation Research Part B 34(5), pp. 403–418.

Gencer, C., Top, I., Aydogan, E.K., 2006. A new intuitional algorithm for solving heterogeneous fixed fleet routing problems: Passenger pickup algorithm. Applied Mathematics and Computation 181(2), pp. 1552-1567.

Gendreau, M., Hertz, A., Laporte, G., 1992. New insertion and postoptimization procedures for the travelling salesman problem. Operations Research 40(6), pp. 1086-1094.

Gendreau, M., Laporte, G., Musaraganyi, C., Taillard, E.D., 1999. A tabu search heuristic for the heterogeneous fleet vehicle routing problem. Computers & Operations Research 26(12), pp. 1153-1173.

Ghaoni, L.E., 2002. Inversion error, condition number and approximate inverses of uncertain matrices. Linear Algebra Applications, pp. 171-193.

Gil, M.A., Lopez-Diaz, M., Ralescu, D.A., 2006. Overview on the development of fuzzy random variables. Fuzzy Sets and Systems 157(19), pp. 2546-2557.

Glickman, T.S., Sherali, H.D., 1985. Large-Scale Network Distribution of Pooled Empty Freight Cars Over Time, with Limited Substitution and Equitable Benefits. Transportation Research 19(2), pp. 85-94.

Golden, B. L., Assad, A., Levy, L., Gheysens, F., 1984. The Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem. Computers & Operations Research 11(1), pp. 49-66.

Gorenstein, S., Poley, S., White, W.W., 1971. On the Scheduling of the Railroad Freight Operations. IBM Data Processing Report, Technical Report 320-2999, IBM, Philadelphia Scientific Center.

Gunckel, T.F., Franklin, G.F., 1963. A General Solution for Linear Sampled-Data Control System, Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME 85D, pp. 197-207.

Haghani, A.E., Daskin, M.S., 1986. A Combined Model of Train Routing, Makeup and Empty Car Distribution. Technical Report, Northwestern University, Evanston, Illinois.

Haghani, A.E., 1989. Formulation and solution of a combined train routing and makeup, and empty car distribution model. Transportation Research Part B 23(6), pp. 413-452.

Hall, R.W., Racer, M., 1995. Transportation with common carrier and private fleets: system assignment and shipment frequency optimization. IIE Transportations 27(2), pp. 217-225.

Hensher, D.A, Button, K.J., 2000. Handbook of Transport Modelling, Handbooks in Transport, Volume 1, Pergamon, Amsterdam.

Hensher, D.A., 2001. Travel Behaviour Research, the leading edge. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

Herren, H., 1973. The Distribution of Empty Wagons by Means of Computer: An Analytical Model of the Swiss Federal Railways. Rail International 4, pp. 1005-1010.

Holguin-Veras, J., Patil, G.R., 2008. A multicommodity integrated freight origin-destination synthesis model. Networks and Spatial Economics 8(2–3), pp. 309–326.

Holmberg, K., Hellstrand, J. 1998. Solving the uncapacitated network design problem by a lagrangean heuristic and branch-and-bound. Operations Research, 46(2), pp. 247-259.

Huntley, C.L. et al., 1995. Freight routing and scheduling at CSX Transportation. Interfaces 25, pp. 58–71.

Jennergren, L.P., 1971. Studies in the Mathematical Theory of Decentralized Resource Allocation“, Ph.D. dissertation, Graduate School of Engineering, Stanford University, Stanford, Calif.

Joborn, M., Crainic, T.G., Gendreau M., Holmberg K., Lundgren, J.T., 2004. Economies of scale in Empty Freight Car Distribution in Scheduled Railways. Transportation Science 38(2), pp. 121-134.

Jordan, W.C., 1982. The Impact of Uncertain Demand and Supply on Empty rail Car Distribution. Ph.D. dissertation, Cornell University, Ithaca, N.Y.

Jordan, W.C., Turnquist M.A., 1983. A Stochastic Dynamic Model for Railroad Car Distribution. Transportation Science 17(2), pp. 123-145.

Kaufmann, A., Gupta, M.M., 1988. Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science. Elsevier Science Publishers, Netherlands.

Kennington, J.L., Helgason, R.V., 1980. Algorithms for Network Programming. Wiley, New York.

Kleindorfer, G.B., Kledindorfer, P.R., 1967. Quadratic Perofrmance Criteria with Linear Terms in Discrete-Time Control. IEEE Transactions on Automatic Control 6, pp. 320-321.

Kikuchi, S., 1985. Empty Freight Car Dispatching Model under Freight Car Pool Concept. Transportation Research 19(3), pp. 169-185.

Kirby, D., 1959. Is Your Fleet the Right Size? Operational Research Quarterly 10, p. 252.

Kornhauser, A.L., Adamidou, E.A., 1986. User and System Optimal formulation and Solution to the Shared Rail Fleet Management Problem. TIMS/ORSA National Meeting, Miami.

Kraft, E., 2002. Scheduling railway freight delivery appointments using a bid price approach. Transportation Research Part A: Policy and Practice 36(2), pp. 145–165.

Kratica, J., 2000. Parallelization of Genetic Algorithms for Solving Some NP-Complete Problems, Doktorska disertacija, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu.

Kratica, J., Tošić, D., Filipović, V., Ljubić, I., 2002. A Genetic Algorithm for the Uncapacitated Network Design Problem. Soft Computing in Industry, Recent Applications, pp. 329–338.

Kreinovich, V., Lakeyev, A.V., Rohn, J., Kahl, P.T., Kahl, P., Rohn, J., Lakeyev, A., 1998. Computational Complexity and Feasibility of Data Processing and Interval Computations, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Kruse, R., Meyer, K.D., 1987. Statistics with Vague Data, Reidel Publ. Co. Dordrecht.

Kwakernaak, H., 1978. Fuzzy random variables. Part I: definitions and theorems. Information Science 15, pp. 1–29.

Kwakernaak, H., 1979. Fuzzy random variables. Part II: algorithms and examples for the discrete case, Information Science 17, pp. 253–278.

Kwon, O.K., Martland, C.D., Sussman, J.M., 1998. Routing and scheduling temporal and heterogenous freight car traffic on rail networks. Tranportation Research Part E 34(2), pp. 101-115.

Lasdon, L.S., 1970. Optimization Theory for Large Systems, Macimillan, New York.

Lawley, M., Parmeshwaran, V., Richard, J., Turkcan, A., Dalal, M., Ramcharan, D., 2008. A time-space scheduling model for optimizing recurring bulk railcar deliveries. Transportation Research Part B 42(5), pp. 438–454.

Leddon, C.D., Wrathall E., 1968. Scheduling Empty Freight Car Fleets on the Lousville and Nashville Railroad. Cybernetics Electronic Railways 3, pp. 154–158.

Lee, H.M., Chiang, J., 2007. Fuzzy Production Inventory Based on Signed Distance. Journal of Information Science and Engineering 23, pp. 1939-1953.

Lima, C.M.R., Goldbarg, M.C. Goldbarg, E.F.G., 2004. A Memetic Algorithm for the Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem. Electronic Notes in Discrete Mathematics 18, pp. 171-176.

Lin, Y.J., 2008. A periodic review inventory model involving fuzzy expected demand short and fuzzy backorder rate. Computers & Industrial Engineering 54(3), pp. 666-676.

List, F., Wood, B., Nozick, L.K., Turnquist, M.A., Jones, D.A., Kjeldgaard, E.A., Lawton C.R., 2003. Robust optimization for fleet planning under uncertainty. Transportation Research 39(3), pp. 209-227.

Loxton, R., Lin, Q., Teo K. L., 2012. A stochastic fleet composition problem. Computers & Operations Research 39(12), pp. 3177-3184.

Lubbecke, M.E., Zimmermann, U.T., 2005. Shunting minimal rail car allocation. Computational Optimization and applications 31(3), pp. 295-308.

Mendiratta, V.B., 1981. A dynamic Optimization Model of the Empty Car Distribution process. Ph.D Dissertation, Northwestern University, Evanston, Ilinois.

Mendiratta, V.B., Turnquist, M.A., 1982. A Model for the Management of Empty Freight Cars. Transportation Research Record 838, pp. 50-55.

Misra, S.C., 1972. Linear Programming of Empty Wagon Disposition. Rail International 3, pp. 151-158.

Milenković, M., Bojović, N., Šunjić, A., 2009. A Fuzzy Multiobjective Approach for Determining the Best Rail Fleet Composition Problem. Proceedings of XL Annual Conference Italian Operational Research Society, Italy, pp. 127-128.

Milenković, M., Bojović, N., Nuhodžić, R., 2011. A Model for Rail Freight Car Inventory Process. Proceedings of 10th Balkan conference on Operation Research, Thessaloniki, Grece, pp. 175-182.

Milenković, M., Bojovic, N., Milošević, M., 2012a. A Neuro-Fuzzy Approach for Urban Rail Passenger Demand Forecasting. Proceedings of Scientific-Expert Conference on Railways, Serbia, pp. 93-96.

Milenković, M., Bojović, N., Nuhodžić, R., 2012b. A Comparative analysis of neuro-fuzzy and arima models for urban rail passenger demand forecasting. Proceedings of International Conference on Traffic and Transport Engineering, Serbia, pp. 569-577.

Milenković, M., Bojovic, N., 2013. A fuzzy random model for rail freight car fleet sizing problem. Transportation Research Part C 33, pp. 107-133.

Milenković, M., Bojović, N., Macura, D., Nuhodžić, R., 2013. Kalman filtering applied to forecasting the demand for railway passenger services. Proceedings of 16th International Conference on Transport Science, Slovenia, pp. 240-251.

Möller, B., Beer, M., 2004. Fuzzy Randomness - Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics, Springer, Berlin Heidelberg, New York.

Narisetty, A.K., Richard, J.P., Ramcharan, D., Murphy, D., Minks, G., Fuller, J., 2008. An optimization model for empty freight car assignment at Union Pacific Railroad. Interfaces 38(2), pp. 89-102.

Nijkamp, P., Reggiani, A., Tsang, W.F., 2004. Comparative modelling of interregional transport flows: Applications to multimodal European freight transport. European Journal of Operational Research 155(3), pp. 584–602.

Ouimet, G.P., 1972. Empty Freight Car Distribution. Master Thesis, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada.

Ozdamar, L., Yazgac, T., 1999. Hierarchical planning approach for a production-distribution system. International Journal of Production Research 37(16), pp. 3759-3772.

Pal, M., Murmu, G., Pal, A., 2010. Orthogonality of Imprecise Matrices, The 2010 International conference on E-Business Intelligence, China.

Pendyala, R.M., Shankar V.N., McCullough, R.G., 2000. Freight travel demand modelling: synthesis of research and development of a framework, Transportation Research Record 1725, Journal of the Transportation Research Board, TRB, National Research Council, Washington D.C., pp. 9-16.

Petersen, E.R., Fullerton, H.V., 1975. The Railcar Network Model, Report No. 75-11. Canadian Institute of Guided Ground Transport, Queen’s University of Kingston, Ontario, Canada.

Philip, C.E., Sussman, J.M., 1977. Inventory Model of the Railroad Empty Car Distribution Process. Transportation Research Record 656, pp. 52-60.

Powell, W.B., 1987. An Operational Planning Model for the Dynamic Vehicle Allocation Problem with Uncertain Demand. Transportation Research 21B (3), pp. 217-232.

Powell, W.B., Carvallho, T.A., 1998. Dynamic control of logistics queuing networks for large-scale fleet management. Transportation Science 32, pp. 90-109.

Puri, M.L., Ralescu, D.A., 1986. Fuzzy random variables. J. Math. Anal. Appl. 114(2), pp. 409–422.

Powell, W.B., Topaloglu, H., 2005. Fleet Management in Applications of Stochastic Programming. Math Programming Society - SIAM Series in Optimization, Philadelphia, pp. 185-216.

Quandt, R.R., Baumol, W., 1966. The demand for abstract transport modes: theory and measurement, Journal of Regional Science 6(2), pp. 13-26.

Ratclife, L.L., Vinod, B., Sparrow, F.T., 1984. Optimal Prepositioning of Empty Freight Cars. Simulation, pp. 269-275.

Renaud, J., Boctor, F.F., Laporte, G., 1996. An improved petal heuristic for the vehicle routing problem. Journal of the Operational Research Society 47, pp. 329-336.

Renaud, J. , Boctor, F.F., 2002. A sweep-based algorithm for the fleet size and mix vehicle routing problem. European Journal of Operational Research 140(3), pp. 618-628.

Rex, G., Rohn J., 1998, Sufficient conditions for regularity and singularity of interval matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 20, pp. 437-448.

Rochat, Y., Taillard, E.D., 1995. Probabilistic Diversification and Intensification in Local Search for Vehicle Routing. Journal of Heuristics 1, pp. 147-167.

Rohn, J., 1993. Interval matrices: Singularity and real eigenvalues. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14, pp. 82-91.

Rohn, J., 1993. Inverse Interval Matrix, SIAM J. Numer. Anal. 30(3), pp. 864-870.

Rump, S.M., 1998. Almost sharp bounds for the componentwise distance to the nearest singular matrix. Linear Multilinear Algebra 42(2), pp. 93-108.

Salhi, S., Fraser, M., 1996. An Integrated Heuristic Approach for the Combined Location Vehicle Fleet Mix Problem. Studies in Locational Analysis 8, pp. 3-21.

Salhi, S., Sari, M., 1997. A multi-level composite heuristic for the multi-depot vehicle fleet mix problem. European Journal of Operational Research 103(1), pp. 95-112.

Sayarshad, H.R., Ghoseiri, K., 2009. A simulated annealing approach for the multi periodic rail-car fleet sizing problem. Computers and Operations Research 36(6), pp. 1789-1799.

Sayarshad, H. R., Javadian, N., Tavakkoli-Moghaddam, R., Forghani, N., 2010. Solving multi-objective optimization formulation for fleet planning in a railway industry. Annals of Operations Research 181(1), pp. 185-197.

Sayarashad, H.R., Moghaddam, R.T., 2010. Solving a multi-periodic stochastic model of the rail car fleet sizing by two stage optimization formulation. Applied Mathematical Modelling 34(5), pp. 1164-1174.

Sayarshad, H. R., Marler, T., 2010. A New Multi-objective Optimization Formulation for Rail-Car Fleet Sizing Problems. Operational Research: An International Journal 10(2), pp. 175-198.

SCENES consortium, 2001. SCENES transport forecasting model: calibration and forecast scenario results, deliverable to EU DGTREN, SCENES Consortium, Cambridge.

Shan, Y.S., 1985. A Dynamic Multicommodity Network Flow Model for Real Time Optimal Rail Freight Car Management. PhD. thesis, Princeton University, Princeton, N.J.

Sherali, H. D., A. B. Suharko, 1988. A tactical decision support system for empty railcar management. Transportation Science 32(4), pp. 306-329.

Sherali, H.D., Tuncbilek, C.H., 1997. Static and Dynamic Time-Space Srategic Models and Algorithms for Multilevel Rail-Car Fleet Management, Management Science 43(2), pp. 235-250.

Sherali, H.D., Lunday, B.J., 2011. Equitable apportionment of railcars within a pooling agreement for shipping automobiles. Transportation Research Part E 47(2), pp. 263-283.

Shyamal, A.K., Pal, M., 2007. Triangular fuzzy matrices. Iranian Journal of Fuzzy Systems 4(1), pp. 75-87.

Sivakumar, A., Bhat, C., 2002. Fractional split-distribution model for statewide commodity-flow analysis. Transportation Research Record 1790, pp. 80–88.

Song, D.P., Earl, C.F., 2008. Optimal empty vehicle repositioning and fleet-sizing for two-depot service systems. European Journal of Operational Research 185(2), pp. 760-777.

Speyer, J.L., Chung, W.H., 2008. Stochastic Processes, Estimation and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA.

Steven, D., Gold, C., 1990. Modeling cot functions in computerized business simulation: an application of duality theory and Sheppar's lemma, Developments In Business Simulation & Experiential Exercises 17, Rochester Institute of Technology, pp. 70-72.

Sugeno, M., 1985. An introductory survey of fuzzy control. Information Science 36(1-2), pp. 59-83.

Tarantilis, C.D., Kiranoudis, C.T., 2007. A flexible adaptive memory-based algorithm for real-life transportation operations: Two case studies from dairy and construction sector. European Journal of Operational Research 179(3), pp. 806-822.

Tavakkoli-Moghaddam, R., Safaei, N., Kah, M.M.O., Rabbani, M., 2007. A New Capacitated Vehicle Routing Problem with Split Service for Minimizing Fleet Cost by Simulated Annealing. Journal of the Franklin Institute 344, pp. 406-425.

Teodorovic, D., Krcmar-Nozic, E., Pavkovic, G., 1995. The mixed fleet stochastic vehicle-routing problem. Transportation Planning and Technology 19(1), pp. 31-43.

Train, K., Wilson, W., 2007. Spatially Generated Transportation Demands. Research in Transportation Economics 20, pp. 97-118.

Turnquist, M.A., 1988. Research opportunities in transportation system characteristics and operations. Transportation Research 19(5-6), pp. 357-366.

Turnquist, M.A., Jordan, W.C., 1986. Fleet sizing under production cycles and uncertain travel times. Transportation Science 20(4), pp. 227-236.

Turnquist, M.A., Jordan W.C., 1982. A Computer-Based Method for Railroad Car Distribution. Final Report, U.S. Department of Transportation, Office of University Research.

Turnquist, M.A., 1986. MOV-EM: A Network Optimization Model for Empty Freight Car Distribution. School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, N.Y.

Turquist, M.A., 1985. Research Opportunities in Transportation System Characteristics and Operations. Transportation Research 19A, pp. 357-366.

Vis, I.F.A., de Koster, R.B.M., Savelsbergh, M., 2005. Minimum Vehicle Fleet Size Under Time-Window Constraints at a Container Terminal. Transportation Science 39(2), pp. 249-260.

White, W., Bomberault, A., 1969. A network algorithm for empty freight car allocation. IBM Systems Journal 8(2), pp. 147–171.

Willumsen, L.G., 2001. Taxonomy of mode choice models, paper presented at THINK-UP workshop, Rotterdam.

Wong, W.G., Niu, H. M., Ferreira, L., 2003. A fuzzy method for predicting the demand for rail freight transportation. Journal of Advanced Transportation 57(2), pp. 159-171.

Wrathall, E., 1968. Empty Freight Car Scheduling and Extensions. Transportation: A Service, New York Academy of Science, New York.

Wu P., Hartman J., Wilson G., 2005. An Integrated Model and Solution Approach for Fleet Sizing with Heterogeneous Assets. Transportation Science 39(1), pp. 87 - 103.

Yaghini, M., Khandaghabadi, Z., 2012. A hybrid metaheuristic algorithm for dynamic rail car fleet sizing problem. Applied Mathematical Modelling 37(6), pp. 4127-7138.

Yao, J.S., Wu, K., 2000. Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance. Fuzzy Sets and Systems 116, pp. 275-288

Yepes, V., Medina, J., 2006. Economic Heuristic Optimization for Heterogeneous Fleet VRPHESTW. Journal of Transportation Engineering 132, pp. 303-311.

Zak, J., Redmer, A., Sawicki, P., 2011. Multiple objective optimization of the fleet sizing problem for road freight transportation. Journal of Advanced Transportation 45(4), pp. 321–347.

PRILOZI

Prilog 1: Računarski program fuzzyLQG.m

Prilog 2: Izlazni rezultati za primer od dve stanice

Prilog 3: Izlazni rezultati za primer od 4 stanice

Prilog 1: Računarski program fuzzyLQG.m

Ovaj prilog sadrži računarski program pisan u Matlab-u za proračun upravljačkih akcija, broja kola u stanicama, neispunjenih porudžbina i potrebnog broja kola, korišćenjem fuzzy diskretnog Kalmanovog filtera za ulazne podatke date u tabelama 5.1-5.8.

fuzzyLQG.m

```
G3=[27 27 27 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 27 27 27 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 29 29 29 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 29 29 29 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 27 27 27 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 29 29
29 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 22.6 23.6 24.6 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6 33.8 35
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 22.6 23.6 24.6 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 22.6 23.6 24.6
0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 22.6 23.6 24.6];

Y2=[-1 -1 -1 0 0 0 -1 -1 -1 0 0 0; -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
-1 -1 -1 0 0 0 -1 -1 -1; 0 0 0 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 1
1 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0];

B=[0.02 0.02 0.02 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0.08 0.08 0.08 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0.02 0.02 0.02 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0.08 0.08 0.08];

F2=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.34 0.35 0.36 0.44
0.45 0.46 0.34 0.35 0.36 0.44 0.45 0.46 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.5 0.51 0.52 0.35 0.36 0.37 0.5
0.51 0.52 0.35 0.36 0.37;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.77 0.86
0.94 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.8 0.88 0.92 0 0 0 0 0 0 0 0
```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 0 0];

L=[0.06 0.06 0.06 0.06 0.06 0.06 0 0 0 0 0 0 0.06 0.06 0.06 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0.07 0.07 0.07 0.07 0.07 0.07 0 0 0 0.07 0.07 0.07 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0.06 0.06 0.06 0.06
0.06 0.06 0 0 0 0 0 0 0.06 0.06 0.06 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0.07 0.07 0.07 0.07
0.07 0.07 0 0 0 0.07 0.07 0.07 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0];

A2=[13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 5.4 5.4 5.4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5.4 5.4 5.4 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5.4 5.4
5.4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 22.60 23.60 24.60 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6 33.8
35 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 22.6 23.6 24.6 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 22.6 23.6 24.6
0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 22.60 23.60 24.60];

```
Y=[-1 0 -1 0; -1 0 0 0; 0 -1 0 -1; 0 -1 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 1; 0 0
0 0; 1 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 0];

G3=C6prime;

Y2=[-1 -1 -1 0 0 0 -1 -1 -1 0 0 0; -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
-1 -1 -1 0 0 0 -1 -1 -1; 0 0 0 -1 -1 -1 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0; 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

F1=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.34 0.35 0.36 0.44
0.45 0.46 0.34 0.35 0.36 0.44 0.45 0.46 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.5 0.51 0.52 0.35 0.36 0.37 0.5
0.51 0.52 0.35 0.36 0.37; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1.3 1.4 1.5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1.18 1.25
1.32 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0];

A1=[13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 5.4 5.4 5.4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5.4 5.4 5.4 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5.4 5.4
5.4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 32.6
33.8 35 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 32.6 33.8 35 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0]

F0=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.34 0.35 0.36 0.44
0.45 0.46 0.34 0.35 0.36 0.44 0.45 0.46 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0.5 0.51 0.52 0.35 0.36 0.37 0.5 0.51 0.52 0.35 0.36 0.37; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.77 0.83 0.89 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1.15 1.23 1.32 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1
1 0 0 0];

A0=[13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0
0 0 0 0 5.4 5.4 5.4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5.4 5.4 5.4 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 13 13 13 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 5.4 5.4 5.4 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

M0=[9 9 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 16 16 16 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 25 25 25 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 16 16 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

H=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

R20=[8 9 10 0 0 0; 0 0 0 3 4 5];

F0=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.34 0.35 0.36 0.44
0.45 0.46 0.34 0.35 0.36 0.44 0.45 0.46 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.5 0.51 0.52 0.35 0.36 0.37 0.5
0.51 0.52 0.35 0.36 0.37;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.77 0.83
0.89 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1.15 1.23 1.32 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0];

R10=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 9 9 9 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 36 36 36 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

R21=[8 9 10 0 0 0; 0 0 0 12 16 18];

F1=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.34 0.35 0.36 0.44
0.45 0.46 0.34 0.35 0.36 0.44 0.45 0.46 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.5 0.51 0.52 0.35 0.36 0.37 0.5
0.51 0.52 0.35 0.36 0.37; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1.3 1.4 1.5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1.18 1.25
1.32 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0
```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0];

R11=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 49 49 49 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 49 49 49 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0];

R22=[3 4 5 0 0 0; 0 0 0 15 16 17];

Z0=[33 34 35; 33 35 36];
Z1=[34 35 36; 35 36 38];
Z2=[35 36 37; 37 38 41];

X0=[30 32 33; 0 0 0; 28 30 31; 0 0 0; 29 30 31; 25 26 27; 22 23 25; 24
25 28; 3 4 5; 6 7 9; 25 26 27; 20 22 24; 5 6 7; 7 8 9];

Y1=Y'; H=prodrs(klon1(Y1),G3); M=prodrs1(H,Y2); N=zbir(M,B); N8=inverza(N);

P1=prodrs1(H,F2); P=zbir(P1,L); C2=prodrs1(N8,P);

G6=prodrs1(G3,F2); F2second=transp(F2); C2second=transp(C2);
G8=prodrs1(F2second, G3); G9=prodrs1(G8,F2); C3=prodrs1(C2second, N);
C4=prodrs1(C3,C2); C5=razlika(G9,C4); C6prime=zbir(C5,A2);
H=prodrs1(klon1(Y1),G3); M=prodrs1(H,Y2); N=zbir(M,B); P1=prodrs1(H,F2);
P=zbir(P1,L); P2=order(P); C2=prodrs1(N8,P2); C2prime=order(C2);
G6=prodrs1(G3,F2); F2second=transp(F2); C2second=transp(C2prime);
G8=prodrs1(F2second, G3); G9=prodrs1(G8,F2); C3=prodrs1(C2second, N);
C4=prodrs1(C3,C2prime); C5=razlika(G9,C4); C6=zbir(C5,A2);
C7prime=order(C6);
H=prodrs1(klon1(Y1),G3); M=prodrs1(H,Y2); N=zbir(M,B);
P1=prodrs1(H,F2); P=zbir(P1,L); P2=order(P); C2=prodrs1(N8,P2);
C2prime=order(C2); G6=prodrs1(G3,F2); F2second=transp(F2);
C2second=transp(C2prime); G8=prodrs1(F2second, G3); G9=prodrs1(G8,F2);
C3=prodrs1(C2second, N); C4=prodrs1(C3,C2prime); C5=razlika(G9,C4);
C6=zbir(C5,A2); C8prime=order(C6); H1=transp(H); A=prodrs1(M0,H1);
B=prodrs1(H,A); C=zbir(B,R20); D=inverza(C); K0=prodrs1(A,D);
F=prodrs1(K0,H); G=eye(14); G1=klon1(G); J=razlika(G1,F); J1=prodrs1(J,M0);
J2=transp(J); J4=prodrs1(J1,J2);
J6=prodrs1(K0,R20); J7=transp(K0); J9=prodrs1(J6,J7); W0=zbir(J4,J9);
J11=prodrs1(F0,W0); J12=transp(F0); J14=prodrs1(J11, J12); M1=zbir(J14,R10);
H1=transp(H); A2=prodrs1(M1,H1); B1=prodrs1(H,A2); C1=zbir(B1,R21);
D1=inverza(C1); K1=prodrs1(A2,D1); S=prodrs1(K1,H);
G=eye(14); G1=klon1(G); J1=razlika(G1,S); J11=prodrs1(J1,M1);
J21=transp(J1); J41=prodrs1(J11,J21); J61=prodrs1(K1,R21);
J71=transp(K1); J91=prodrs1(J61,J71); W1=zbir(J41,J91); J101=klon(W1);
J111=prodrs1(F1,W1); J121=transp(F1); J141=prodrs1(J111, J121);
M2=zbir(J141,R11); A21=prodrs1(M2,H1); B11=prodrs1(H,A21);
C11=zbir(B11,R22); D11=inverza(C11); K2=prodrs1(A21,D11);
T02=prodrs1(H,X0); T03=razlika(Z0,T02); T05=prodrs1(K0,T03);
T06=zbir(X0,T05); U0=order(-prodrs1(C40C,T06)); X10=prodrs1(F0,T06);
X20=order(prodrs1(Y2,U0)); X1=zbir(X10,X20); T12=prodrs1(H,X1);
T13=razlika(Z1,T12); T15=prodrs1(K1,T13); T16=zbir(X1,T15);

U1=order(-prodrs1(C41C,T16)); X11=prodrs1(F1,T16); X21=order(prodrs1(Y2, U1)); X2=order(zbir(X11,X21)); T22=prodrs1(H,X2); T23=razlika(Z2,T22); T25=prodrs1(K2,T23); T26=zbir(X2,T25); U2=order(-prodrs1(C42C,T26)); X12=prodrs1(F2,T26); X22=order(prodrs1(Y2, U2));
X3=order(zbir(X12,X22));

Funkcije prodrs, prodrs1, zbir i razlika su posebno kreirane .m funkcije za aritmetičke operacije sa fuzzy matricama, proizvod, zbir i razliku, respektivno. Funkcija transp se koristi za transponovanje fuzzy matrice, funkcija order za uređivanje fuzzy matrica i funkcija inverza za proračun inverze matrice sastavljene od trougaonih fuzzy brojeva. Funkcije klon i klon1 se koriste za transformisanje egzaktnih u trougaone fuzzy matrice.

Prilog 2: Izlazni rezultati za primer od dve stanice

U ovom prilogu dati su izlazni rezultati za primer od dve stanice i planski horizont od četiri dana. Dati su fuzzy vektori upravljačkih akcija $U0$, $U1$, $U2$ (plan upućivanja tovarenih i praznih kola) i fuzzy vektori stanja dobijeni korišćenjem Kalmanovog filtra, $X0$, $X1$, $X2$, $X3$.

```
>> fuzzyLQG
>> U0
U0 =
   19.7997   21.4285   22.7601
   20.1940   21.2043   22.6569
    0.7587    1.6635    2.2291
    4.1042    5.1782    5.5540
>> U1
U1 =
   21.8064   23.8213   24.9428
   18.3587   19.3699   20.7459
    4.3463    5.3601    6.1412
   0.3469   0.764    1.4758
>> U2
U2 =
   23.5114   25.5271   26.8273
   31.4973   33.5148   36.9150
   9.4609   10.3720   11.6507
   12.0346   13.0865   14.7746
>> X0
X0 =
    30    32    33
     0     0     0
    28    30    31
     0     0     0
    29    30    31
    25    26    27
    22    23    25
    24    25    28
     3     4     5
     6     7     9
    25    26    27
```

```
    20    22    24
     5     6     7
     7     8     9
>> X1
X1 =
   31.5202   33.7580   34.8772
    7.3812    8.5715    9.2816
   32.3964   34.7974   35.8650
    3.7651    4.7957    5.8958
   23.9303   24.9000   24.9263
   30.7339   31.9800   32.0157
   20.3563   21.2043   21.2049
   22.0900   23.0000   23.0200
    4.9136    5.1182    5.1226
    3.8500    4.0000    4.0100
   20.5715   21.4285   21.4288
   24.9700   26.0000   26.0100
    1.5971    1.6635    1.6692
    5.7700    6.0000    6.0100
>> X2
X2 =
   24.1593   26.3535   27.8598
    8.3317    9.6502   10.1407
   36.7802   39.0813   40.2875
   15.9567   17.4057   18.2063
   33.5041   34.8600   34.8853
   38.4140   39.9750   39.9978
   18.5953   19.3699   19.3707
   20.3646   21.2043   21.2043
   0.1565   0.1564   0.1491
    4.9156    5.1182    5.1183
   22.8686   23.8213   23.8225
```

```
  20.5799   21.4285   21.4285
   5.1459    5.3601    5.3679
   1.5977    1.6635    1.6636
>> X3
X3 =
  11.2267   13.1585   13.6726
  17.2295   18.9831   19.2835
  13.0698   15.5211   16.4268
  21.6008   23.8659   24.2663
  27.8086   28.9338   28.9549
  47.2537   49.1693   49.2055
  32.1744   33.5148   33.5148
  18.6029   19.3699   19.3700
  12.5632   13.0865   13.0904
  0.1564   0.1564   0.1563
  24.5061   25.5271   25.5271
  22.8780   23.8213   23.8213
   9.9572   10.3720   10.3748
   5.1479    5.3601    5.3602
>>
```

Prilog 3: Izlazni rezultati za primer od 4 stanice

U ovom prilogu dati su izlazni rezultati za primer od dve stanice i planski horizont od četiri dana. Dati su fuzzy vektori upravljačkih akcija U0 , U1 , U2 (plan upućivanja tovarenih i praznih kola) i fuzzy vektori stanja dobijeni korišćenjem Kalmanovog filtra, X0 , X1 , X2 , X3 .

```
>> fuzzyLQG
>> U0
U0 =
  39.0104   39.3354   40.3966
   4.3991    4.4613    5.3424
   2.8354    2.8862    3.7534
  10.6573   10.7355   11.1593
  10.0125   10.0866   10.6185
   9.3343    9.4108    9.9419
   8.4252    8.4908    9.1189
   8.7495    8.8131    9.3251
   9.2295    9.2974    9.7355
   8.5793    8.6550    9.2124
   6.7383    6.8042    7.3864
   9.3400    9.4056    9.8231
  0.0060    0.0734    0.7001
   1.3494    1.4094    2.3670
  0.2227   0.1745    0.7668
   3.2767    3.3482    4.1169
   4.6897    4.7651    5.5732
   3.1898    3.2560    4.0788
   2.0406    2.1235    3.2185
   1.4397    1.5033    2.3906
   1.8351    1.8928    2.7198
   3.0146    3.1098    4.0468
   2.2216    2.3019    3.1337
   3.7516    3.8253    4.4940
>> U1
U1 =
   7.3218    7.7201    8.0293
   1.6372    1.6957    2.2773
   2.4202    2.4780    2.9269
   7.4087    7.5340    7.6820
   6.3186    6.4608    7.0509
```

```
   7.5808    7.7276    8.1866
  10.0900   10.2550   10.5729
  10.0077   10.1800   10.6881
   9.3079    9.4627    9.8721
   8.4814    8.6233    8.8866
   6.0619    6.1843    6.6684
   6.2236    6.3474    6.8017
   0.2300    0.2579    0.6000
  0.6075   0.7734   0.9526
  0.0292   0.0353    0.4791
   3.0442    3.1268    3.4056
   1.6530    1.7499    2.4591
   2.4201    2.5175    3.1001
   4.4823    4.5946    5.0735
   3.4188    3.5297    4.2276
   3.1288    3.2233    3.7836
   3.0221    3.1124    3.5148
   1.9581    2.0471    2.6691
   1.3617    1.4373    2.0224
>> U2
U2 =
   2.3216    2.6915    3.4180
   2.9592    2.9878    3.0232
   2.8273    2.8551    2.8891
   3.3542    3.4050    3.4785
   4.4434    4.5072    4.5821
   5.0586    5.1284    5.1991
   4.3231    4.4000    4.5342
   4.8156    4.8972    5.0204
   4.8939    4.9702    5.0746
   4.3454    4.4133    4.5037
   3.8772    3.9389    4.0417
   4.1764    4.2341    4.3154
   0.9684    0.9784    1.0193
   1.1523    1.1643    1.2130
```

1.1523	1.1643	1.2130
1.4965	1.5288	1.6316
1.7805	1.8190	1.9413
1.7805	1.8190	1.9413
1.3700	1.4180	1.6245
1.3700	1.4180	1.6245
1.1513	1.1916	1.3651
1.2772	1.3144	1.4680
1.2772	1.3144	1.4680
1.0732	1.1045	1.2336

X0 =

15	16	17
0	0	0
0	0	0
0	0	0
10	13	15
0	0	0
0	0	0
0	0	0
9	10	11
0	0	0
0	0	0
0	0	0
10	12	13
0	0	0
0	0	0
0	0	0
14	15	16
18	19	23
19	20	24
18	19	22
15	16	18
21	23	25

18	19	22
15	16	18
21	23	25
15	16	19
10	11	15
18	19	22
10	11	12
9	10	11
7	8	9
11	12	13
3	4	5
4	5	6
5	6	7
7	8	9
5	6	7
7	8	9
5	6	7
7	8	9
15	16	17
11	12	13
9	10	11
8	9	10
10	11	12
15	16	17
5	6	7
7	8	9
3	4	5
3	4	5
4	5	6
5	6	7
10	11	12
11	12	13

```
   13    14    15
   15    16    17
    5     6     7
    8     9    10
    2     3     4
    4     5     6
    3     4     5
    2     3     4
    2     3     4
    4     5     6
   10    11    12
    8     9    10
    9    10    11
   15    16    17
   10    11    12
   14    15    16
    3     4     5
    2     3     4
    4     5     6
    3     4     5
    5     6     7
    3     4     5
>> X1
X1 =
    4.0049   16.7875   17.1881
   33.3385   34.3354   35.2692
   10.7447   14.5387   14.7419
   13.1205   17.1138   17.3164
   21.2410   36.4148   36.8913
    4.4933    8.2645    8.4184
    2.7368    5.9134    6.0171
    9.0627   13.5892   13.6931
   15.5963   27.2446   27.6285
```

6.7278	10.5092	10.6624
4.0113	7.1869	7.2901
9.1807	13.7026	13.8060
3.3091	12.4228	12.6971
4.1671	7.3450	7.4988
2.0167	4.1958	4.3991
5.8235	9.5944	8.7976
5.6950	7.0000	7.0950
12.2950	15.2000	15.7400
16.2500	20.0000	20.6000
13.9150	17.1000	17.5200
20.8000	25.6000	26.0000
13.0650	16.1000	16.4000
13.9150	17.1000	17.5200
20.8000	25.6000	26.0000
13.0650	16.1000	16.4000
18.2300	22.4000	22.7700
11.8350	14.3000	14.7800
12.3900	15.2000	15.5100
9.7567	10.7355	11.7316
6.7960	8.4908	8.5222
6.9278	8.6550	8.6829
8.8500	11.0000	11.0500
8.0500	10.0000	10.0500
6.4500	8.0000	8.0500
2.6822	3.3482	3.3867
1.7030	2.1235	2.1783
2.4926	3.1098	3.1566
4.8500	6.0000	6.0500
6.4500	8.0000	8.0500
4.8500	6.0000	6.0500
0	0	0
7.0536	8.8131	8.8387
5.4467	6.8042	6.8333
12.8500	16.0000	16.0500

```
   9.6500   12.0000   12.0500
   8.0500   10.0000   10.0500
   0.0288    0.0334    0.0668
   1.2059    1.5033    1.5477
   1.8455    2.3019    2.3435
   4.8500    6.0000    6.0500
   6.4500    8.0000    8.0500
   3.2500    4.0000    4.0500
   3.5721    4.4613    4.5053
   8.0730   10.0866   10.1132
   7.5278    9.4056    9.4265
   8.8500   11.0000   11.0500
   9.6500   12.0000   12.0500
  11.2500   14.0000   14.0500
   1.1305    1.4094    1.4573
   3.8159    4.7651    4.8055
   3.0639    3.8253    3.8587
   2.4500    3.0000    3.0500
   4.0500    5.0000    5.0500
   3.2500    4.0000    4.0500
   2.3115    2.8862    2.9295
   7.5324    9.4108    9.4373
   7.4413    9.2974    9.3193
   8.8500   11.0000   11.0500
   7.2500    9.0000    9.0500
   8.0500   10.0000   10.0500
  0.1669   0.1745   0.1275
   2.6081    3.2560    3.2972
   1.5171    1.8928    1.9341
   3.2500    4.0000    4.0500
   2.4500    3.0000    3.0500
   4.0500    5.0000    5.0500
>> X2
X2 =
  22.2211   30.9457   31.0606
```

33.4559	35.0555	36.0275
22.4011	28.0430	28.0831
27.5778	34.6359	34.6789
20.3778	31.5532	31.6881
13.0980	17.8305	17.8654
19.1193	25.0527	25.0850
16.3789	21.9617	21.9892
7.1192	18.1937	18.3229
12.1647	17.3541	17.3910
16.4229	22.6069	22.6407
14.7368	20.3400	20.3679
-0.9347	5.1353	5.2046
15.5269	21.1217	21.1550
8.8203	12.3115	12.3518
13.7944	17.6688	18.4469
5.1687	6.3000	6.4443
19.9924	24.3200	24.7432
11.5313	14.0000	14.3210
12.7118	15.3900	15.6654
12.5600	15.3600	15.7560
22.3955	27.3700	27.7175
12.7118	15.3900	15.6654
12.5600	15.3600	15.7560
22.3955	27.3700	27.7175
10.9891	13.4400	13.7871
14.0904	17.1600	17.7608
18.7548	22.8000	23.1273
6.5414	7.5340	8.5278
8.2123	10.2550	10.2709
6.9058	8.6233	8.6365
9.7365	10.7355	11.7353
6.8774	8.4908	8.4924
7.0103	8.6550	8.6564
2.5056	3.1268	3.1408
3.6813	4.5946	4.6185

2.4944	3.1124	3.1325
2.7119	3.3482	3.3501
1.7198	2.1235	2.1263
2.5187	3.1098	3.1121
0	0	0
8.1526	10.1800	10.2054
4.9536	6.1843	6.2085
0	0	0
7.1384	8.8131	8.8143
5.5112	6.8042	6.8057
0.2077	0.2579	0.2750
2.8293	3.5297	3.5646
1.6421	2.0471	2.0782
0.0270	0.0334	0.0351
1.2176	1.5033	1.5056
1.8643	2.3019	2.3040
1.3595	1.6957	1.7248
5.1757	6.4608	6.4903
5.0841	6.3474	6.3701
3.6135	4.4613	4.4635
8.1699	10.0866	10.0879
7.6184	9.4056	9.4067
0.5751	0.7734	0.8424
1.4048	1.7499	1.7854
1.1536	1.4373	1.4665
1.1415	1.4094	1.4118
3.8596	4.7651	4.7671
3.0983	3.8253	3.8270
1.9853	2.4780	2.5004
6.1894	7.7276	7.7505
7.5779	9.4627	9.4832
2.3377	2.8862	2.8883
7.6225	9.4108	9.4121
7.5307	9.2974	9.2985
0.0030	0.0053	0.0190

```
   2.0189    2.5175    2.5466
   2.5834    3.2233    3.2513
  0.1746   0.2745   0.3722
   2.6372    3.2560    3.2581
   1.5330    1.8928    1.8948
>> X3
X3 =
  23.6957   33.4662   33.5483
 30.7568  31.4470  32.4199
  39.3993   49.3752   49.3998
  36.5282   45.7808   45.8004
  21.5247   30.5165   30.5802
  23.5383   29.8155   29.8336
  28.2559   35.9055   35.9301
  34.8612   44.2032   44.2255
  14.4306   21.7771   21.8440
  22.1820   28.3441   28.3636
  25.9194   33.0698   33.0953
  33.7215   42.7398   42.7624
  10.5700   16.6035   16.6536
  23.6338   30.1484   30.1708
  19.9612   25.5326   25.5678
  28.5329   35.1529   36.2347
   7.1667    8.8200    8.8616
  15.8595   19.4560   19.9593
  11.4634   14.0000   14.2961
  11.3552   13.8510   14.0942
  20.1152   24.5760   24.8381
  15.6382   19.1590   19.4449
  11.3552   13.8510   14.0942
  20.1152   24.5760   24.8381
  15.6382   19.1590   19.4449
  15.4260   18.8160   18.9747
  18.5607   22.3080   22.6903
  14.9818   18.2400   18.4811
```

2.4086	3.4050	4.4024
3.5238	4.4000	4.4067
3.5340	4.4133	4.4178
6.5344	7.5340	8.5337
8.3062	10.2550	10.2558
6.9845	8.6233	8.6240
1.2247	1.5288	1.5340
1.1368	1.4180	1.4283
1.0534	1.3144	1.3221
2.5325	3.1268	3.1275
3.7213	4.5946	4.5958
2.5208	3.1124	3.1134
0	0	0
3.9218	4.8972	4.9033
3.1542	3.9389	3.9440
0	0	0
8.2454	10.1800	10.1813
5.0090	6.1843	6.1855
0.7832	0.9784	0.9805
1.1368	1.4180	1.4283
1.0534	1.3144	1.3221
0.2088	0.2579	0.2588
2.8588	3.5297	3.5315
1.6579	2.0471	2.0486
2.3917	2.9878	2.9896
3.6089	4.5072	4.5109
3.3901	4.2341	4.2381
1.3734	1.6957	1.6972
5.2329	6.4608	6.4622
5.1411	6.3474	6.3486
0.9320	1.1643	1.1667
1.4571	1.8190	1.8251
0.8851	1.1045	1.1109
0.6735	0.7734	0.9719
1.4172	1.7499	1.7517

```
    1.1640    1.4373    1.4388
    2.2855    2.8551    2.8568
    4.1062    5.1284    5.1320
    3.9799    4.9702    4.9754
    2.0070    2.4780    2.4791
    6.2590    7.7276    7.7287
    7.6644    9.4627    9.4637
    0.9320    1.1643    1.1667
    1.4571    1.8190    1.8251
    0.9553    1.1916    1.2002
   0.0043   0.0053   0.0081
    2.0389    2.5175    2.5190
    2.6106    3.2233    3.2247
>>
```

Biografija autora

Mr Miloš Milenković, dipl. inž. rođen je 24.11.1979. godine u Smederevskoj Palanci, gde je stekao osnovno i srednjoškolsko obrazovanje. Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu je upisao školske 1998/99. godine. Diplomirao je 09.12.2004. godine na Odseku za železnički saobraćaj i transport, na temi „Primena inteligentnih transportnih sistema u železničkom saobraćaju“ pod mentorstvom Prof. dr Nebojše Bojovića.

U periodu od 2005. do 2008. godine bio je angažovan kao stručni saradnik na izvođenju nastave iz predmeta „Ekonomika železničkog saobraćaja i transporta“, „Upravljanje železničkim saobraćajem i transportom“ i „Tržišno i marketinško poslovanje u železničkom saobraćaju“ na Združenoj katedri za upravljanje na železnici, vuču i vozna sredstva.

U JP “Železnice Srbije“ je zasnovao radni odnos 18.12.2006. godine. Nakon položenog stručnog ispita i stečenog zvanja „Samostalni inženjer na železnici“, postao je „Vodeći inženjer za organizaciju saobraćaja i red vožnje“ u Sektoru za prevoz putnika.

Marta 2008. godine je zasnovao radni odnos kao saradnik u nastavi za užu naučnu oblast „Upravljanje, menadžment, ekonomika i marketing u železničkom saobraćaju“ na Saobraćajnom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Na Saobraćajnom fakultetu Univerziteta u Beogradu, magistrirao je 2010. godine sa temom „Primena celobrojnog programiranja za rešavanje problema raspoređivanja vozova“.

Juna 2010. godine izabran je u zvanje asistenta za užu naučnu oblast „Upravljanje, menadžment, ekonomika i marketing u železničkom saobraćaju“. U periodu 2010-2013 godine, angažovan je na izvođenju nastave iz predmeta „Inženjerska ekonomika u železničkom saobraćaju i transportu“, „Troškovna efikasnost u železničkom inžinjerstvu“ i „Upravljanje železničkim saobraćajem i transportom“ na osnovnim studijama. U pomenutom periodu angažovan je na master studijama na izvođenju nastave iz predmeta „Menadžment u transportu i komunikacijama“ i „Projektovanje organizacije u transportu i komunikacijama“.

Oblasti naučnog interesovanja kandidata su: matematičko programiranje, teorija optimalnog upravljanja, fuzzy teorija optimalnog upravljanja, heuristički algoritmi, analiza vremenskih serija, fuzzy i fuzzy stohastičko modelovanje vremenskih serija.

Radio je recenzije za časopise „International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems“ i „International Journal of Railway Technology“. Član je uređivačkog odbora konferencije pod nazivom „The Second International Conference on Railway Technology: Research, Development and Maintenance“ u organizaciji Civil-Comp Limited koja će se održati u periodu od 08. do 11. 04. 2014. godine u gradu Ajaccio na Korzici (Francuska).

Do sada je kao jedan od autora objavio 30 naučno stručnih radova u međunarodnim i domaćim časopisima i u zbornicima radova sa međunarodnih i domaćih konferencija, simpozijuma i skupova. Učestvovao je u izradi 6 naučno istraživačkih i stručnih projekata i studija.