

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Бојан М. Павковић

**ИСТРАЖИВАЊЕ МЕТОДА  
КОРЕКЦИЈЕ ТРАЈЕКТОРИЈА  
ПРОЈЕКТИЛА У ФУНКЦИЈИ ОД  
ПОВЕЋАЊА ЊИХОВОГ ДОМЕТА И  
ПРЕЦИЗНОСТИ**

докторска дисертација

Београд, 2012.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Bojan M. Pavković

**RESEARCH OF PROJECTILE  
TRAJECTORY CORRECTION  
METHODS IN FUNCTION OF THEIR  
RANGE AND PRECISION  
ENHANCEMENT**

Doctoral Thesis

Belgrade, 2012.

**Комисија за преглед и одбрану:**

Ментор: Проф. др Слободан Јарамаз,  
Универзитет у Београду – Машински факултет

Чланови комисије: Проф. др Ђорђе Благојевић,  
Универзитет у Београду – Машински факултет

Проф. др Момчило Милиновић,  
Универзитет у Београду – Машински факултет

Проф. др Дејан Мицковић,  
Универзитет у Београду – Машински факултет

др Дарко Васиљевић, виши научни сарадник  
Институт за физику

Датум одбране: . . . 2012.

## ПРЕДГОВОР

Овај рад је настао на основу теоријских истраживања из области артиљеријских ракета са импулсним управљањем спроведених у сврху подизања научне компетентности из те области. Научна област корекције трајекторија артиљеријских ракета је одабрана на основу реалних потреба и могућности домаће одбрамбене индустрије, а правац истраживања на основу постојећих светских научних достигнућа из те области. Нека од теоријских сазнања остварених у овом раду су већ усвојена као основ за реалне развојне задатке домаће одбрамбене индустрије, чија ће реализација, у наредном периоду, обезбедити и њихову верификацију у пракси.

Изражавам своју дубоку захвалност Др Данилу Ћуку, научном саветнику у пензији и бившем директору Војнотехничког института у Београду, на несебичној помоћи при изради овог рада. Такође, захваљујем се Војнотехничком институту и Војсци Србије на финансијској подршци.

Београд, април 2012.

Бојан Павковић

## ИЗВОД

### ИСТРАЖИВАЊЕ МЕТОДА КОРЕКЦИЈЕ ТРАЈЕКТОРИЈА ПРОЈЕКТИЛА У ФУНКЦИЈИ ОД ПОВЕЋАЊА ЊИХОВОГ ДОМЕТА И ПРЕЦИЗНОСТИ

Артиљеријске ракете средњег и великог домета се користе на бојишту за индиректно гађање удаљених циљева. Имајући велико растурање погодака, користе се за гађање целих области из вишецевних лансера. Применом одговарајућег управљачког система могуће је знатно смањити растурање и повећати вероватноћу погађања циљева.

Управљачки системи са реактивним импулсима су довољно једноставни да се могу применити на артиљеријским ракетама и ефикасни да остваре задовољавајуће растурање погодака. Њихов енергетски ресурс је, међутим, ограничен, тако да је неопходно да се изврши оптимизација закона вођења, како би се добило задовољавајући резултати и у случају са малим бројем управљачких импулса.

У овом раду је приказана модификација методе праћења трајекторије са прозором, као и потпуно нов закон вођења назван праћењем задате путање са импулсно фреквентном модулацијом. Оба закона вођења су прилагођена нестационарности артиљеријских ракета услед различите брзине и густине ваздуха током лета, и подразумевају временски или висински променљиво управљање, како би се остварила добра тачност са малим бројем управљачких импулса.

Такође, представљена је поједностављена управљачка шема – активно пригушење, која извршава корекцију поремећаја одмах након напуштања лансирне цеви.

Симулацијама математичког модела извршена је анализа параметара и перформанси поменутих метода вођења. Показано је да је модификована метода праћења путање са прозором адекватна за примену на артиљеријским ракетама. Праћење путање са импулсно фреквентном модулацијом остварује знатно боље резултате, и у случају великог броја импулса, може да оствари готово тачкасте поготке. Показано је, такође, да је примена активног пригушења ефикасан метод за смањење броја ракета потребних за погађање циља.

Кључне речи:	Артиљеријске ракете, Вођење и управљање, Импулсно управљање, Реактивни импулси, Праћење трајекторије, Растурање погодака, Монте Карло техника.
Научна област:	Машинство
Ужа научна област:	Војно машинство – системи наоружања
УДК број:	623.463.3:519.6(043.3)

## ABSTRACT

### RESEARCH OF PROJECTILE TRAJECTORY CORRECTION METHODS IN FUNCTION OF THEIR RANGE AND PRECISION ENHANCEMENT

Long- and medium-range artillery rockets are used for indirect fire on distant targets. As they have a large impact point dispersion, they are considered to be area weapons. Nevertheless, a control system is required in order to reduce the dispersion and increase the hit probability.

The pulse jet control systems are simple and efficient enough to be implemented on artillery rockets and to produce acceptable impact point dispersions. However, as they are highly energy-limited, it is necessary to perform an optimization of the control logic in order to obtain a satisfactory performance with the minimum number and intensity of control pulses.

A modification of the published Window-based Trajectory Tracking control method has been presented for the application on artillery rockets, as well as the new, two-phase guidance scheme named Trajectory Tracking with Pulse Frequency Modulation. Both schemes are considering the fact that an artillery rocket flies through different atmospheric environments, which demands a time- or altitude-varying control law in order to achieve high hit precision with the limited number of pulse jets aboard.

Also a simplified and cost-effective control scheme called Active Damping is presented with the purpose to perform correction of disturbances at the muzzle.

Simulation studies have been conducted in order to perform parametric and performance analyses. It is shown that the Modified Window-based Trajectory Tracking achieves satisfactory performance for artillery rockets hit points dispersion. The Trajectory tracking with Pulse Frequency Modulation performs significantly better, and, in the case of high number of pulse jets, this control scheme is capable of achieving an almost pinpoint precision. The Active Damping control method introduces a cost effective method to significantly lower the number of rockets needed for destruction of the target.

Key words: Artillery Rockets, Guidance and Control Systems, Impulse Control, Pulse Jets, Trajectory Tracking, Hit Points Dispersion, Monte Carlo method.

Scientific field: Mechanical Engineering

Scientific subfield: Military Engineering – Weapon Systems

UDK number: 623.463.3:519.6(043.3)

# САДРЖАЈ

<b>ГЛАВА 1. УВОД</b>	<b>1</b>
<b>ГЛАВА 2. РАСТУРАЊЕ ПОГОДАКА НЕВОЂЕНИХ РАКЕТА</b>	<b>5</b>
Поремећаји при лансирању	6
Одступање вредности тоталног импулса	7
Дезаксијалност силе потиска	7
Ветар	9
<b>ГЛАВА 3. УТИЦАЈ ПОРЕМЕЋАЈА НА РАСТУРЊЕ ПОГОДАКА НЕВОЂЕНИХ РАКЕТА</b>	<b>11</b>
Растурање погодака артиљеријских пројектила	11
Метод анализе	13
Растурање погодака услед варијација вредности углова лансирања	15
Растурање погодака услед варијација угаоних брзина на изласку из лансирне цеви	16
Растурање погодака услед дезаксијалности потиска	17
Растурање погодака услед ветра	17
Растурање погодака услед одступања тоталног импулса	18
<b>ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ РАКЕТЕ</b>	<b>20</b>
<b>ГЕОМЕТРИЈСКЕ ДЕФИНИЦИЈЕ</b>	<b>20</b>
Инерцијални координатни систем	20
Координатни систем везан за земљу (Земаљски систем)	20
Покретни вертикални координатни систем	21
Везани координатни систем	22
Полувезани (аеробалистички) координатни систем	22
Брзински координатни систем	23
Ојлерови углови ракете	23
Аеродинамички углови	24
Трансформација вектора	24
Трансформација извода вектора	25
<b>ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА</b>	<b>25</b>
Брзина и убрзање у покретном координатном систему	25
Угаона брзина земаљских координатних система	27
Угаона брзина покретног вертикалног координатног система	27
Угаона брзина везаног координатног система	28
Брзина центра масе у односу на Земљу	29
Убрзање центра масе ракете	29
Једначине кретања у везаном координатном систему (Ојлерове једначине)	30
<b>АЕРОДИНАМИЧКЕ СИЛЕ И МОМЕНТИ</b>	<b>32</b>
Силе које делују на ракету	32
Аеродинамичке силе и моменти	33
Линеаризација једначина кретања	35
<b>ГЛАВА 5. ИМПУЛСНО УПРАВЉАЊЕ</b>	<b>38</b>
<b>ГЛАВА 6. ОДЗИВ РАКЕТЕ НА ИМПУЛСНУ КОМАНДУ</b>	<b>43</b>
Импулсни одзив ракете - промена нападаног угла	45
Импулсни одзив ракете - промена угла брзине	50
<b>ГЛАВА 7. ВОЂЕЊЕ РАКЕТА СА РЕАКТИВНИМ ИМПУЛСНИМ УПРАВЉАЊЕМ</b>	<b>54</b>
Пропорционална навигација	55
Параболичко пропорционална навигација PAPNG	58
Праћење задате трајекторије – Trajectory tracking, TT	60
<b>ГЛАВА 8. ВОЂЕЊЕ АРТИЉЕРИЈСКИХ РАКЕТА МЕТОДОМ ПРАЋЕЊА ЗАДАТЕ ТРАЈЕКТОРИЈЕ</b>	<b>63</b>
Растојање ракете од референтне трајекторије	63
Праћење трајекторије са променљивом величином прозора вођења	66
Реактивни импулсни мотори	67
Логика активирања управљачких мотора	68
<b>СИМУЛАЦИЈА МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА ТТ ВОЂЕЊА</b>	<b>70</b>
Резултати симулације једног репрезентативног случаја	71

<b>ПАРАМЕТАРСКА АНАЛИЗА</b>	<b>76</b>
Анализа применом Монте Карло технике	77
Дистрибуција места погодака	79
Параметарска анализа за ТТ вођење са фиксним прозором	80
Параметарска анализа за ТТ вођење са променљивим прозором	82
<b>ГЛАВА 9. ПРАЋЕЊЕ ТРАЈЕКТОРИЈЕ ПРИМЕНОМ ИМПУЛСНО ФРЕКВЕНТНО МОДУЛИСАНОГ УПРАВЉАЧКОГ СИГНАЛА</b>	<b>91</b>
Одређивање референтне трајекторије	94
Коефицијенти команде	95
Коефицијенти дискретног ускладника	99
Ток прорачуна команде	105
<b>СИМУЛАЦИЈА МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА РАКЕТЕ СА ПФМ ВОЂЕЊЕМ</b>	<b>107</b>
Резултати симулације једног репрезентативног случаја	108
<b>ПАРАМЕТАРСКА АНАЛИЗА</b>	<b>116</b>
Дистрибуција места погодака	117
Параметарска анализа ПФМ вођења	118
Анализа перформанси система вођења	126
<b>ГЛАВА 10. ПОВЕЋАЊЕ ДОМЕТА АРТИЈЕРИЈСКИХ РАКЕТА ПРОМЕНОМ РАСПОДЕЛЕ ПОТИСКА РАКЕТНОГ МОТОРА</b>	<b>135</b>
Повећање домета прерасподелом потиска ракетног мотора	136
Утицај модификованог потиска на прецизност невођених ракета	139
Перформансе система за ПФМ вођење у случају измењеног потиска ракетног мотора	142
<b>ГЛАВА 11. ПОВЕЋАЊЕ ПРЕЦИЗНОСТИ АРТИЈЕРИЈСКИХ РАКЕТА МЕТОДОМ АКТИВНОГ ПРИГУШЕЊА</b>	<b>146</b>
Угаоне брзине пропињања и скретања ракете након напуштања лансера	147
Активно пригушење угаоних брзина пропињања и скретања	150
Импулсно фреквентна модулација команде	153
Управљачки систем за корекцију угаоних брзина	155
<b>СИМУЛАЦИЈА МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА РАКЕТЕ СА АКТИВНИМ ПРИГУШЕЊЕМ</b>	<b>157</b>
Резултати симулације једног репрезентативног случаја управљања	160
<b>АНАЛИЗА ПЕРФОРМАНСИ И УТИЦАЈА ПАРАМЕТАРА</b>	<b>163</b>
Дистрибуција места погодака	165
Параметарска анализа активног пригушења	166
<b>ГЛАВА 12. ЗАКЉУЧАК</b>	<b>170</b>
Правци даљег истраживања	172
<b>ЛИТЕРАТУРА</b>	<b>173</b>
<b>ПРИЛОГ А. РАКЕТА ОРКАН</b>	<b>176</b>
<b>ПРИЛОГ В. СТАТИСТИЧКА АНАЛИЗА КОРИШЋЕЊЕМ МОНТЕ КАРЛО ТЕХНИКЕ</b>	<b>180</b>
<b>ПРИЛОГ С. ПРИНУДНО ВОЂЕЊЕ УСЛЕД ОГРАНИЧЕЊА ВЕЛИЧИНА СТАЊА И УЛАЗА</b>	<b>188</b>
Опис проблема	188
Основна шема вођења	189
Шема принудног вођења	190
Генерисање принудног управљања коришћењем конвексности	191
Раздвајање принудног од основног вођења	193
Одређивање принудног вођења за један почетни услов	195
Принудно вођење за почетну вредност грешке у конвексној околини скупа $E$	196
<b>БИОГРАФИЈА</b>	<b>199</b>
Објављени радови	199



## НОМЕНКЛАТУРА

$A$	амплитудна фреквентна карактеристика [dB];
$c_0, c_1, d_1$	коэффициенти дискретног ускладника;
$C_{N\alpha}, C_{m\alpha}, C_{mq}$	аеродинамички деривативи;
$CEP$	вероватна кружна грешка [m];
$D$	аеродинамичка сила отпора [N];
$e_h, e_y$	грешка положаја у вертикалној и хоризонталној равни [m];
$\mathbf{f} = [f_x \ f_y \ f_z]^T$	вектор и пројекције убрзања ракете [m/s <sup>2</sup> ];
$F$	сила потиска [N];
$I_c$	интензитет управљачког импулса [N-s];
$I_{tot}$	тотални импулс ракетног мотора [N-s];
$J_x, J_y$	момент инерције ракете око уздужне и попречне осе [kg-m <sup>2</sup> ];
$K$	укупни коефицијент команде;
$K_p$	коэффициент појачања [s];
$K_u$	појачање ускладника;
$K_{wh}$	коэффициент утицај висине на прозор за вођење [m];
$K_\omega$	појачање повратне спреге активног пригушења [s <sup>-1</sup> ];
$l$	карактеристична дужина [m];
$l_c$	крак дејства управљачког импулса [m];
$\mathbf{L}$	матрица трансформације вектора;
$L, M, N$	пројекције вектора момента аеродинамичких сила [N-m];
$m$	маса ракете [kg];
$m_w, m_q, m_\eta$	динамички коефицијенти у линеаризованим једначинама
$M$	Махов број;
$N_I$	број управљачких импулса
$P$	притисак ваздуха [Pa];
$Q$	динамички притисак [Pa];
$r_w$	величина прозора вођења [m];
$\mathcal{R}$	геоцентрични радијус [m];
$R_e$	Рејнолдсов број;
$S$	карактеристична површина [m <sup>2</sup> ];
$t_{\min}$	минимално време између две узастопне команде [s];
$t_d$	еквивалентно време кашњења импулса [s];
$T$	температура ваздуха [K];
$T_d$	временска константа ускладника [s];
$T_s$	период узорковања [s];
$V$	интензитет вектора брзине ракете [m/s];
$\mathbf{V} = [u \ v \ w]^T$	вектор и компоненте брзине ракете [m/s];

$V_d, V_p$	вероватна грешка по домету и правцу [m];
$v_{SF}$	брзина специфичне силе [m/s];
$\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$	вектор и пројекције положаја ракете [m];
$X, Y, Z$	пројекције вектора аеродинамичких сила [N];
$z_w, z_q, z_\eta$	динамички коефицијенти у линеаризованим једначинама
$\alpha$	параметар ускладника
$\alpha, \beta$	нападни угао и угао клизања [rad, °];
$\varepsilon$	угао дезаксијалности силе потиска [mrad];
$\varphi$	фазна фреквентна карактеристика [°];
$\Phi, \Theta, \Psi$	углови ваљања, пропињања и скретања, [rad, °];
$\Phi_K$	угао команде [rad, °];
$\gamma$	угао вектора брзине у вертикалној равни [rad, °];
$\Gamma$	одступање положаја ракете од референтне трајекторије [m];
$\eta, \zeta$	коефицијенти команде у вертикалној и хоризонталној равни;
$\lambda, \mu$	географска ширина и дужина;
$\lambda_W, \lambda_{SF}$	тежински фактори за ветар и брзину специфичне силе;
$\tau$	време до наредне импулсне команде [s];
$\tau_I$	трајање управљачког импулса [ms];
$\omega = [p \ q \ r]^T$	вектор и пројекције угаоне брзине ракете [rad/s];
$\omega_{yz}, \omega_{yz}$	вектор угаоне брзине у попречној равни и његов интензитет [rad/s];
$\omega_c$	пресечна учестаност појачања [rad/s];
$\omega_n$	сопствена учестаност краткопериодичних осцилација [rad/s];
$\zeta_n$	степен пригушења;

#### Доњи индекси

0	почетна вредност;
1, 2	фаза управљања
$c$	почетак фазе управљања
$e$	крај фазе управљања
$f$	крајња вредност
$RT$	референтна трајекторија;
$W$	односи се на ветар;

#### Скраћенице

ТТ	Енг: trajectory tracking, праћење трајекторије.
ПФМ	Енг: pulse frequency modulation, импулсно фреквентна модулација.
ИНС	Инерцијални навигациони систем.
SDINS	Енг: Strap-down Inertial Navigation System, бесплатформни ИНС.
FFT	Енг: Fast Fourier transform, брза Фуријеова трансформација.

# Глава 1.

## УВОД

Артиљеријске ракете се примењују на ратишту за гађање удаљених циљева индиректном ватром. При томе, линија визирања циља не постоји, па се елементи гађања заузимају на основу познатих географских координата циља и лансера, користећи балистички рачунар и таблице гађања. Ради остваривања што већих домета, лансирање се изводи под великим угловима елевације. Велики домети, мала брзина при напуштању лансера и дуго трајање лета до циља чине да овакве ракете буду веома осетљиве по питању утицаја поремећаја на тачност погађања. Са повећањем домета, прецизност ракетних система све више опада. Зато се артиљеријске ракете примењују пре за гађање области него појединачних - тачкастих циљева. При томе се за ефикасно покривање гађане области рачуна на велики број ракета, а ракете се лансирају из вишецевних лансера. Овакав вид употребе артиљеријских ракета налази своје место и у условима модерног ратовања на основу бројних предности које остварује у односу на класичну артиљерију: већи домет, велика концентрација ватрене моћи у кратком времену, ниска цена лансера и њихова велика мобилност. Са друге стране, цена ракета је виша од цене муниције класичне артиљерије и прецизност ракетних система је знатно мања.

Гађање циљане области великим бројем ракета повлачи статистички приступ одређивању ефикасности гађања. При томе се користе статистички показатељи расподела падних тачака, као што је вероватна кружна грешка, која представља полупречник круга који садржи половину свих погодака. Ова величина линеарно зависи од даљине циља, тако да број ракета потребних за погађање циља са одређеном вероватноћом зависи од квадрата даљине. Подразумевани стандард за прецизност невођених артиљеријских ракета је да је вероватна кружна грешка око 1% домета.

Поред броја ракета са којима се гађа нека област, вероватноћа уништавања свих циљева у гађаној области зависи и од радијуса убојног дејства бојевих глава. У ранијем периоду, ефикасност бојевих глава повећавана је применом касетне муниције, што је знатно смањивало број ракета потребних за погађање свих циљева у гађаној области. Конвенцијом о касетној муницији из Даблина (2008.), њена производња и употреба се забрањује свим државама потписницама. Обзиром да је велики број држава потписао и ратификовао ту Конвенцију, у будућем развоју ракетних артиљеријских система не треба рачунати на употребу касетних бојевих

глава, већ је за подизање вероватноће погађања потребно побољшати прецизност артиљеријских ракета.

У случају гађања циљева (области) на даљинама мањим од 20 km, растурање погодака невођених артиљеријских ракета обезбеђује равномерну дистрибуцију погодака по целој гађаној области. Са повећањем даљина гађања, број потребних ракета за покривање дате области расте квадратно, што чини употребу ракетне артиљерије економски неисплативом. Такође, обзиром да растурање погодака има нормалну расподелу, падне тачке са великим промашајем, који су иначе мало вероватни, употребом великог броја ракета постају реалност, што повлачи велику могућност појаве колатералне штете.

Употреба артиљеријских ракета на модерном бојишту подразумева строжије захтеве за прецизношћу, како би колатерална штета била сведена на што мању могућу меру. Такође, захтевају се већи домети, како би дејствујуће снаге биле што даље од противника. Ова два захтева су противуречна, јер повећање домета утиче на смањење прецизности. Са друге стране, јавља се потреба да се производи оружје са што нижом ценом. У случају артиљеријских ракета, то може бити остварено повећањем прецизности и обезбеђивањем уништавања циља са мањим бројем ракета. Сви ови захтеви могу бити задовољени применом вођених артиљеријских ракета или ракета са повећаном прецизношћу. Задатак управљачких система таквих ракета је да обезбеде смањење растурања погодака које економски оправдава њихово увођење, или да остваре вероватну кружну грешку довољно малу да се погоци могу сматрати за тачкасте.

Већина артиљеријских ракета великог калибра  $D > 500$  mm и домета  $> 100$  km се лансирају са појединачних лансирних шина, па је код њих неопходно применити управљачке системе, како би се остварили тачкасти погоци. Тако је, нпр, код ракете Scud, увођењем система за вођење растурање смањено са 3000 m у случају варијанте Scud A на 50 m код варијанте Scud D. И код других, сличних модерних решења, као што су Руске ОТР-23 Ока, ОТР-21 Точка, 9К720 Искандер и Америчка MGM-140 АТАСМС, примењени су комбиновани системи вођења инерцијално / ГПС и инерцијално / самонавођење, који обезбеђују приближно тачкасте поготке и на тај начин представљају алтернативу примени тактичких нуклеарних бојевих глава.

Примена управљачких система на артиљеријским ракетама које се лансирају из вишецевних лансера почела је са Руским ВМ-30 Smerch, на којима је имплементиран упрошћени систем за корекцију поремећаја и повећање прецизности. За

Амерички M270 MLRS је планирана употреба ГПС / инерцијално вођених ракета M30 и M31 са аеродинамичким управљачким органима. Такође, у фази развоја се налазе бројни пројекти вођених артиљеријских ракета мањег калибра, од којих треба истаћи Израелски Assular, вођени пројектил калибра 160 mm, са реактивним импулсним управљањем.

Примена управљачких система на артиљеријске ракете које се лансирају из вишецевних лансера захтева оптимизацију њихове цене, која треба да одговара смањењу броја ракета потребних да се уништи циљ. Смањење цене управљачких органа могуће је остварити применом реактивног импулсног управљања. Такви управљачки органи се састоје од одређеног броја ракетних мотора распоређених по обиму ракете на управљачком прстену. Они немају покретних делова, користе веома једноставни електронски систем за активирање и имају веома мале захтеве за електричном енергијом. Поузданост и цена таквих управљачких органа су веома повољни. У претходном периоду, управљачки системи са реактивним импулсним управљањем су били тема бројних научних радова, како ради примене на ракетама, тако и за потребе других врста муниције. Такође, овакав управљачки систем је уведен у оперативну употребу на шведском минобацачком вођеном пројектилу Strix.

Проблематику примене импулсних реактивних управљачких органа на ракетама разматрали су Jitgraphai и Costello [1] на примеру ракета са директним гађањем (direct fire missiles). Предложен је поједностављени управљачки систем који се заснива на прстену ракетних мотора са импулсним дејством (pulse jets) и закон вођења по методи праћења путање са прозором. Jitgraphai, Burchett и Costello у [2] су дали поређење различитих начина вођења ракете са директним гађањем. Поређени су метод праћења трајекторије са прозором, параболичко пропорционална навигација, као и обична пропорционална навигација. Gupta, Saxena, Singhal и Ghosh су у [3] проширили разматрање из [1] и на артиљеријске ракете, и то на случај гађања под ниским угловима елевације, када се оне не разликују значајно од ракета за директно гађање.

Предмет овог рада је проширивање разматрања употребе реактивних импулса на артиљеријске ракете у случају високих углова елевације. При томе долази до одређених специфичности, по којима се посматрана проблематика разликује од описане у [1], [2] и [3]. Наиме, ракета домета 55km, лансирана под елевацијом од 56° остварује висину темена путање од 22km и време лета до циља од 110s. Самим тим, није рационално управљати ракетом на исти начин по целој путањи, јер је на великим висинама управљање јако неефикасно. При томе се мора имати у

виду да је предложени метод управљања помоћу управљачких ракетних мотора импулсног дејства пре свега енергетски ограничен одређеним бројем импулса и њиховим интензитетом.

Предложена су два различита алгоритма вођења, који се са захтевом за оптимизацију потрошње енергије боре на различите начине. Оба се заснивају на праћењу унапред задате, равнотежне трајекторије – оне коју остварује ракета без дејства поремећаја.

Први метод заснива се на методи праћења задате трајекторије са прозором, описане у [1], [2] и [3]. Њена модификација подразумева да је величина прозора зависна од висине ракете. На тај начин се у делу путање који се налази у слојевима са разређеном атмосфером, где је командовање неефикасно, повећаном величином прозора смањује употребљена количина импулса, а у деловима путање са гушћом атмосфером, повећава.

Други предложени алгоритам, назван вођење са импулсно фреквентном модулацијом (енг: pulse frequency modulation, PFM), обавља управљање у две фазе. Прва је непосредно након престанка рада ракетног мотора, док је ракета у пењању и има максималну брзину. Тада се врши корекција њене трајекторије, како би се компензовали поремећаји који настају услед лансирања и услед одступања вредности тоталног импулса ракетног мотора. Друга фаза вођења се обавља тек у завршном делу путање, када се ракета спушта у ниже, гушће слојеве атмосфере. Тада се извршава коначно фино навођење ракете на задати циљ, како би се обезбедила висока тачност погађања.

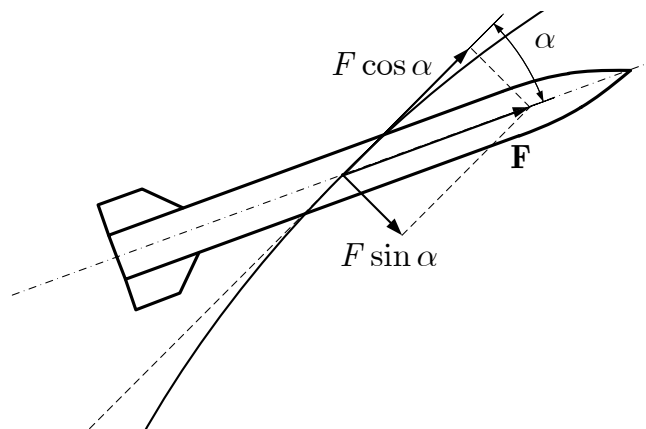
Поред ових шема вођења, које подразумевају употребу прецизног бесплатформног инерцијалног навигационог система, представљена је и метода компензације поремећаја приликом лансирања применом активног пригушења. Задатак управљачког система, у овом случају, је да користећи инерцијалне сензоре ниске класе тачности и мањи број управљачких импулса малог интензитета изврши компензацију поремећаја непосредно по напуштању лансера и на тај начин смањи растурање погодака.

## Глава 2.

### РАСТУРАЊЕ ПОГОДАКА НЕВОЂЕНИХ РАКЕТА

Растурање погодака је био кроз историју и остао основни проблем у употреби ракета на ратишту. По Гантмахеру и Левину [4], током другог светског рата, однос вероватне грешке по правцу и домета ( $V_p/x_{\max}$ ) при максималном домету је био између 1/15 и 1/100 за различите врсте артиљеријских ракета, док је за артиљеријске гранате тај однос био 1/1500 до 1/3000 и за минобацачке пројектиле 1/150 до 1/300. У случају растурања по домету ( $V_d/x_{\max}$ ) разлика је била мање изражена: 1/30 до 1/100 за ракете, 1/200 до 1/300 за гранате и 1/60 до 1/150 за минобацачке пројектиле.

Ракете се од других артиљеријских пројектила разликују у томе што са лансирне рампе или из лансирне цеви излазе са малом брзином и, након тога, у релативно краткој фази лета, повећавају брзину дејством ракетног мотора. Та фаза се назива активна фаза лета. Убрзавање ракете под дејством реактивне силе без ограничења путање лансером проузрокује да се угловни поремећаји претворе у одступање положаја центра масе ракете од референтне путање. Угловна величина одступања осе ракете од вектора брзине - нападни угао, јавља се приликом силаска ракете са лансирног уређаја, али и током лета услед бочног ветра.



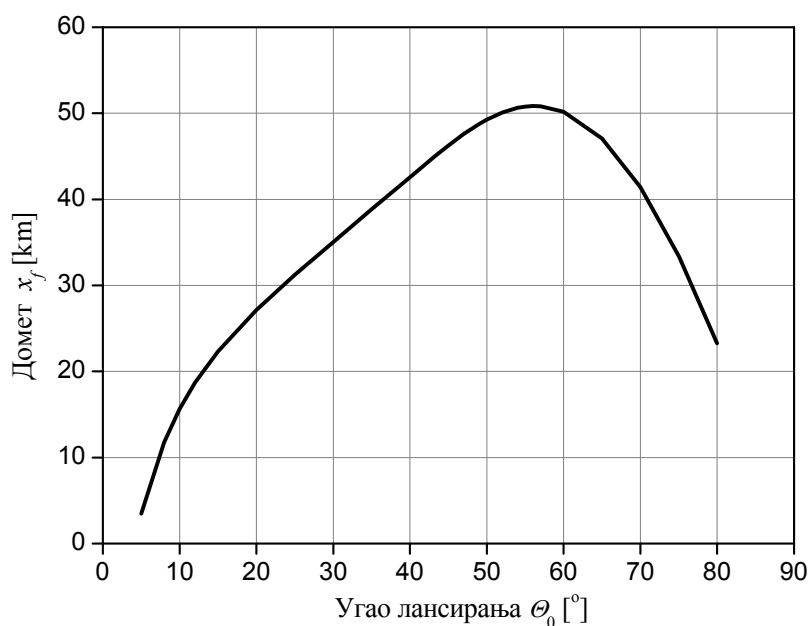
Слика 2.1. Утицај нападног угла на одступање ракете од путање.

Процес лансирања и активна фаза лета су појаве у којима се генеришу најзначајнији поремећаји. Ти поремећаји, који настају на почетку лета, проузрокују угловну грешку брзине, чијим се интеграљењем по путањи добија знатна величина промашаја на циљу.

## Поремећаји при лансирању

Угао под којим се лансирају артиљеријске ракете одређује се спољно-балистичким прорачуном за задати положај циља и лансера, као и за атмосферске услове на лансирном положају и дуж путање ракете. Зависност домета од угла лансирања приказан је на слици 2.2.

Свакој величини угла лансирања (елевације лансера)  $\theta_0$ , одговара одређена вредност почетне угаоне брзине пропињања  $q_0$ , која је условљена геометријом ослањања ракете и лансера. Почетна вредност угла скретања  $\psi_0$  је, такође, одређена положајем циља и атмосферским условима, док је угаона брзина скретања приликом напуштања лансера  $r_0 = 0$ . Ови углови и угаоне брзине, које представљају почетне параметре слободног лета ракете су, у реалном случају, стохастичке величине. Одступање њихових вредности од номиналних су дефинисане грешком одређивања и заузимања елемената гађања, величином зазора између ракете и лансера, као и осцилацијама лансера.



Слика 2.2. Зависност домета од угла лансирања.

Како се артиљеријске ракете углавном испалују из вишецевних лансера, грешка одређивања и заузимања положаја су константни за све ракете из једног рафала, док је грешка услед осцилација лансера независна случајна величина. Средња вредност грешке (стандардна девијација) заузимања елемената гађања и грешке услед осцилација лансера су условљене квалитетом самог лансера, док је грешка одређивања елемената гађања условљена квалитетом система за управља-



ње ватром. Величине зазора између ракете и лансера су условљене прописаним толеранцијским пољима и квалитетом израде ракете и лансера.

На слици 2.2 приказана је зависност домета ракете од угла лансирања. Нагиб те криве представља зависност величине промашаја по домету од грешке угла елевације лансера. Самим тим, величина промашаја по домету зависи од елевације лансера. За вредности углова блиске онима за које се постиже максимални домет, нагиб је изузетно мали, односно, промашај веома мало зависи од грешке угла елевације. Са друге стране, за јако мале углове, нагиб криве је веома велики, па је систем веома осетљив на грешку угла елевације. Овако ниски углови лансирања се, међутим, избегавају због мале вредности падног угла ракете на циљу. У тим случајевима се примењују аеродинамичке кочнице уграђене на ракете, које драстично смањују домет за дати угао елевације.

### **Одступање вредности тоталног импулса**

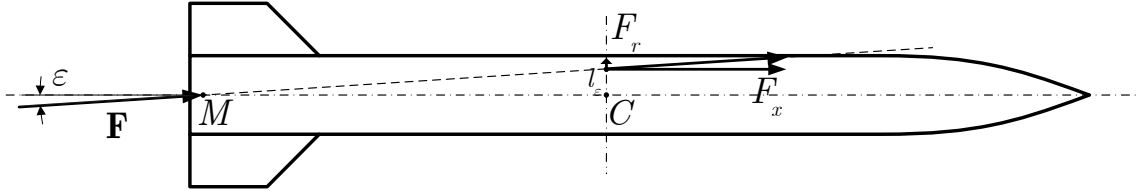
Величина реактивне силе зависи од геометрије и брзине сагоревања ракетног горива, као и од геометријских карактеристика млазника. Од наведених параметара, вредност брзине сагоревања је најподложнија променама услед различитих фактора, од којих је најзначајнији температура горива. Вредност интеграла силе потиска по времену – тотални импулс горива  $I_{tot}$ , међутим, не зависи од брзине сагоревања, већ од масе и специфичне енергетске вредности ракетног горива. Одступања ових величина зависе од квалитета технолошког процеса израде ракетног горива и мотора. Одступања вредности реактивне силе услед разлика у температури горива су од далеко мањег значаја за величину промашаја од одступања тоталног импулса. Утицај одступања брзине сагоревања се додатно смањује корекцијом таблица гађања у зависности од температуре. У даљем разматрању ће само одступање тоталног импулса  $\Delta I_{tot}$  бити узето у обзир.

### **Дезаксијалност силе потиска**

У идеалном случају, вектор силе потиска ракетног мотора се поклапа са осом ракете. У реалном случају, долази до одступања од правца тог вектора, које може да настане због несиметрије у гасодинамичким процесима и због несиметрија у геометрији млазника. Одступање вектора силе потиска од осе ракете приказано је на сликама 2.3 и 2.4.

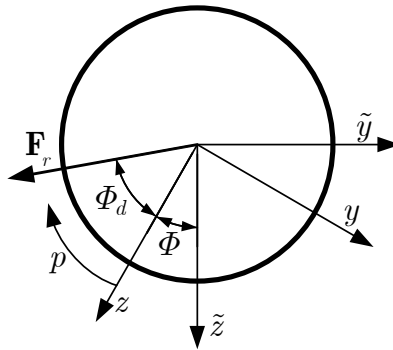
Угао одступања правца вектора силе потиска – дезаксијалност потиска  $\varepsilon$  утиче да се у екваторијалној равни која пролази кроз центар масе ракете дође до померања тачке дејства реактивне силе од центра масе. Ако се реактивна сила раз-

лежи на аксијалну  $F_x = F \cos \varepsilon \approx F$  и радијалну компоненту  $F_r = F \sin \varepsilon \approx F\varepsilon$ , онда аксијална компонента, која се налази на краку  $d$  од центра масе, формира момент  $M_{\text{dez}} = Fl_\varepsilon$ . Вектор реактивне силе лежи у равни која садржи осу ракете и која са референтном равни везаног координатног система ракете формира угао  $\Phi_d$ .



Слика 2.3. Дезаксијалност силе потиска.

Величина угла дезаксијалности вектора потиска, као и угловни положај равни у којој се он налази  $\Phi_d$ , су случајне величине за сваку ракету. Величина угла има нормалну расподелу а положај равни вектора униформну.



Слика 2.4. Угловни положај равни силе потиска.

У случају неротирајуће ракете, утицај дезаксијалности потиска на промашај на циљу би био веома велики. Чак и за јако мале вредности тог угла, а самим тим и крака силе  $l_\varepsilon$ , услед велике вредности импулса силе потиска који делује на ракету док јој кретање није ограничено лансером, интеграл поремећајног момента има веома велике вредности:

$$I_{Md,y} = \int_0^{t_f} F \cdot l_\varepsilon \cdot \sin(\Phi - \Phi_d) dt \quad (2.1)$$

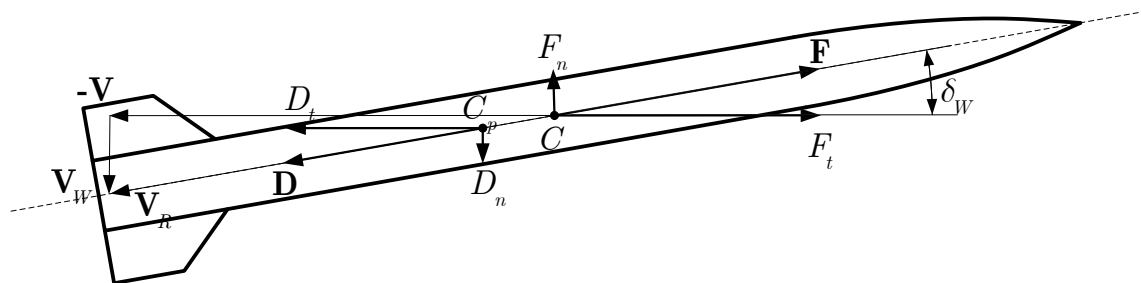
Једначина (2.1) представља вредност хоризонталне компоненте импулса поремећајног момента силе потиска услед њене дезаксијалности.  $\Phi$  је угао између референтне равни везаног координатног система ракете и вертикалне равни која садржи осу ракете (угао ваљања). У случају да ракета не ротира, или да ротира веома споро, и да  $\Phi - \Phi_d \neq k\pi$ , импулс поремећајног момента има врло велике вредности и формира значајан угао скретања. Да би се ова појава ублажила у што је могуће већој мери, уводи се ротација ракете, која може бити остварена уград-

њом крила под углом, уградњом млазника ракетног мотора под углом, тако да формирају момент ваљања и лансирањем из ожљебљених цеви.

## Ветар

Утицај ветра на кретање ракета се разликује у активној фази и фази слободног лета. Током активне фазе, ветар проузрокује угловно одступање трајекторије ракете. У случају бочног ветра, угловно одступање је супротног смера од смера ветра. Током фазе слободног лета, ветар носи ракету у смеру своје брзине. У случају константног ветра, величина одступања од путање проузрокована у активној фази је знатно већа од оне проузроковане у фази слободног лета.

На слици 2.5 приказан је утицај бочног ветра на аеродинамичке силе које делују на ракету. Нека се у односу на инерцијални координатни систем ракета креће брзином  $\mathbf{V}$ , а атмосфера брзином  $\mathbf{V}_W$  (ветар) у правцу нормалном на вектор брзине ракете. Посматрајући из координатног система везаног за ракету, атмосфера се креће релативном брзином  $\mathbf{V}_R$ , која је векторски збир  $\mathbf{V}_R = -\mathbf{V} + \mathbf{V}_W$ . Након завршених свих прелазних процеса услед лансирања, ракета се под дејством аеродинамичких сила и момената поставља у правцу резултујуће брзине атмосфере  $\mathbf{V}_R$ , при чему је нормална аеродинамичка сила једнака нули и делује само сила отпора  $\mathbf{D}$  у правцу резултујуће брзине атмосфере.



Слика 2.5. Утицај бочног ветра на аеродинамичке силе.

У том равнотежном положају, оса ракете се налази под одређеним углом у односу на вектор брзине ракете (тангенте на путању)  $\mathbf{V}$ . Тај угао дефинисан је изразом  $\delta_W = \tan^{-1}(V_W/V) \approx V_W/V$ . У случају да је ракетни мотор активан, на ракету, поред аеродинамичке силе отпора, делује и реактивна сила  $\mathbf{F}$  у правцу осе ракете. Ове две силе су истог правца и супротног смера. Нормално на трајекторију ракете делује сила  $(D - F) \sin \delta_W$  у смеру ветра. Пошто је за артиљеријске ракете током активне фазе  $F \gg D$ , ракета скреће у ветар. Током фазе слободног лета, ветар носи ракету, али са веома малом силом  $D_n = D V_W/V$ . Компонента ветра

паралелна са брзином ракете утиче на сличан начин као и бочна компонента. Уколико је смер ветра исти као смер брзине ракете (у леђа), ракета ће се поставити под углом  $\Theta$  у односу на инерцијални координатни систем већим од угла брзине  $\gamma$ , па ће проузроковати повећање домета, уколико се гађа под угловима мањим од угла који одговара максималном домету, односно смањење уколико се гађа при већим угловима. Супротно важи за чеони ветар.

Ветар може да има значајан утицај на одступање падне тачке, па се мора узети у обзир приликом спољно-балистичког прорачуна. У реалности, брзина ветра је временски променљиво векторско поље. За потребе одређивања његовог утицаја, користи се балистички ветар, који има константан правац и интензитет током лета ракете, и чији је ефекат исти као и ефекат реалног ветра. Процена балистичког ветра врши се помоћу вредности брзине ветра измерене на ватреном положају, а уколико је то могуће, и у вишим слојевима атмосфере, помоћу метеоролошког балона.

Одступање реалне брзине балистичког ветра од измерене проузроковаће промашај на циљу. До одступања може доћи из више разлога, као што су грешка мерења и промена правца и брзине балистичког ветра током времена и дуж путање ракете.

Гантмахер и Левин [4] су дали приближне аналитичке методе прорачуна растурања погодака услед разних поремећаја. У глави 3 дата је анализа утицаја поремећаја на растурање погодака добијена применом Монте Карло методе (Прилог В).

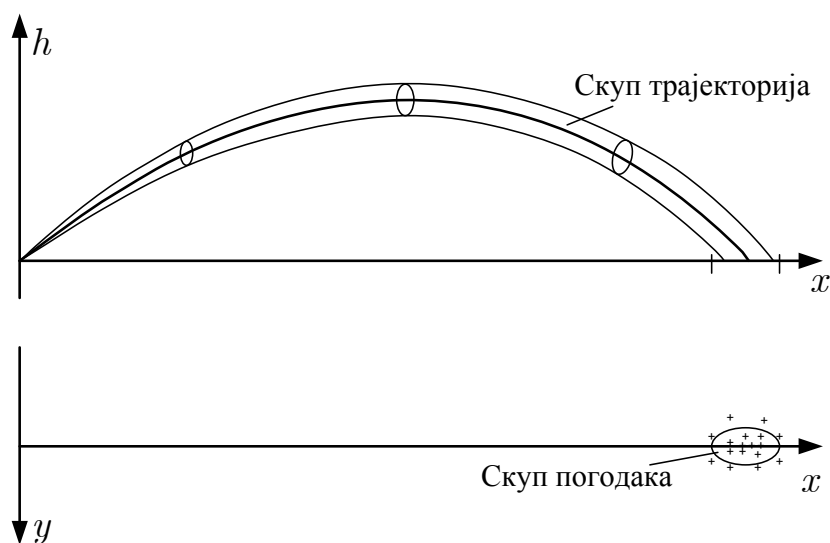
### Глава 3.

## УТИЦАЈ ПОРЕМЕЋАЈА НА РАСТУРЊЕ ПОГОДАКА НЕВОЂЕНИХ РАКЕТА

У глави 2 разматрана је појава растурања погодака невођених ракета и дат је опис основних поремећаја који на то утичу. Ти поремећаји су стохастичке величине, па се оцена њиховог утицаја може добити применом Монте Карло методе за статистичку анализу понашања нелинеарних система (Прилог В).

### Растурање погодака артиљеријских пројектила

Под дејством поремећаја долази до одступања путања од равнотежне, што за последицу има одступање погодака од жељене тачке. У случају артиљеријских ракета посматра се одступање погодака на хоризонталној равни тла. Код пројектила за директно гађање посматра се растурање у вертикалној равни, док се у случају против-авионских пројектила посматра одступање у простору.



Слика 3.1. Растурање артиљеријских пројектила.

Одступање погодка сваког појединачног пројектила зависи од одступања параметара система од референтних вредности - поремећаја. Величина поремећаја је случајна величина, чији карактер и параметри расподеле зависе од конструкционих и технолошких параметара посматраног система. Уз претпоставку да сви поремећаји имају нормалну расподелу, може се претпоставити да исто важи и у случају координата погодака.

Посматрајући скуп погодака као статистички узорак, можемо га окарактерисати математичким очекивањем (жељена падна тачка) и стандардном девијацијом, као мером растурања погодака. У спољној балистици се уместо стандардне девијације  $\sigma$ , као мера растурања погодака чешће користи величина вероватна грешка, и то вероватна грешка по домету  $V_d$  и вероватна грешка по правцу  $V_p$ . Вероватна грешка се дефинише као:

$$\int_{-V}^V p(x) dx = 0.5, \quad (3.1)$$

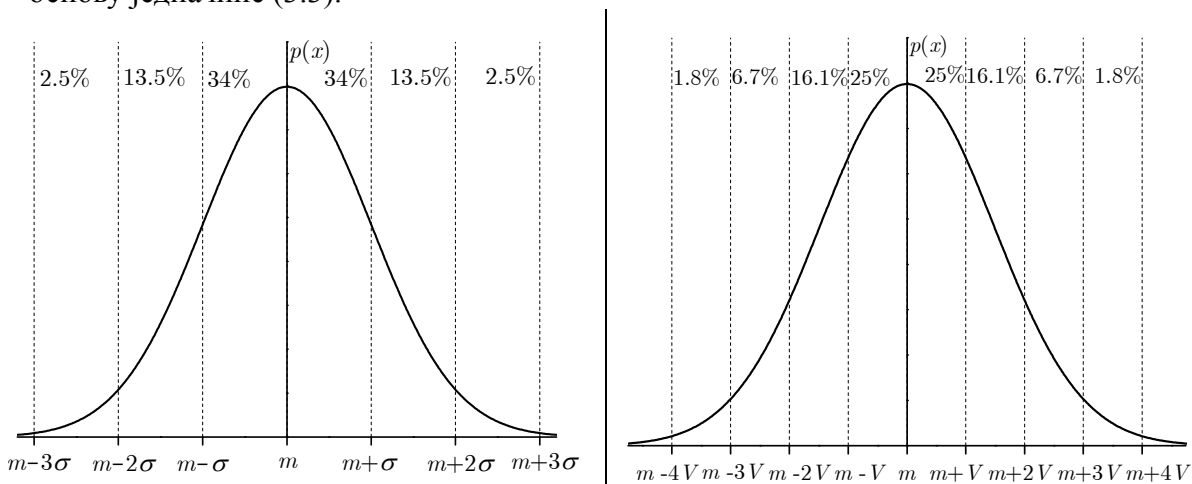
где је  $p(x)$  функција густине вероватноће случајне променљиве  $x$ . У случају нормалне (Гаусовске) расподеле, имамо:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2)$$

На основу (3.1), вероватноћа да се случајна променљива нађе у интервалу  $(-V, V)$  је 0.5, односно неједнакости  $|x - m| < V$  и  $|x - m| > V$  имају исту вероватноћу. Ако посматрамо скуп погодака, вредност вероватне грешке представља границе интервала који садржи 50% погодака. Веза између стандардне девијације и вероватне грешке дата је са:

$$V = 0.6745\sigma \quad (3.3)$$

Вредност вероватне грешке се може одредити из узорка пребројавањем или на основу једначине (3.3).



Слика 3.2. Вероватноће припадања различитим интервалима нормалне расподеле у зависности од стандардне девијације и вероватне грешке.

Вероватноћа да се вредност случајне променљиве са нормалном расподелом

нађе у одређеном интервалу једнака је површини испод криве нормалне расподеле у том интервалу (слика 3.2). Тако је вероватноћа да се случајна променљива нађе у интервалу  $m - 4V < x < m + 4V$  једнака 99.3%. Уколико се испали довољно велики број пројектила, очекује се да 99.3% погодака буде у границама  $(-4V, 4V)$  око математичког очекивања падне тачке. Интервал  $(-4V, 4V)$  се назива интервал растурања, а његова дужина  $8V$  максимално растурање.

Посматрајући стандардну девијацију, имамо  $\Pr(-3\sigma, 3\sigma) = 0.99$ , односно очекује се да 99% узорка буде у границама  $(-3\sigma, 3\sigma)$ .

Елипса са полуосама  $V_d$  и  $V_p$  назива се елипса растурања, а вероватноћа да се погодак налази унутар те елипсе је 0.203. Посматрајући елипсу са полуосама  $4V_d$  и  $4V_p$ , вероватноћа садржања поготка је 0.974. У случају правоугаоне области, вероватноћа садржаја поготка је  $\Pr[|x| < V_d, |y| < V_p] = 0.25$ .

Вероватна кружна грешка *CEP* се дефинише као полупречник круга  $r_c$  у коме је вероватноћа садржања поготка 0.5, тј. у коме се садржи 50% погодака:

$$\Pr\left[r = \sqrt{x^2 + y^2} < r_c\right], \quad (3.4)$$

где  $x$  и  $y$  означавају одступање падне тачке од математичког очекивања у правцу домета и бочном правцу.

У специјалном случају када је елипса растурања круг ( $V_d = V_p$ ), вероватна кружна грешка је  $CEP = 1.75V_d = 1.75V_p$ .

Који ће од поменутих показатеља величине растурања погодака бити примењен зависи од природе разматрања. У случају посматрања перформанси система вођења, примењује се вероватна кружна грешка *CEP*, док се у случају разматрања утицаја величине поремећаја на величину растурања погодака користи стандардна девијација у одговарајућем правцу због директног рачунања.

## Метод анализе

Као метод анализе утицаја величине одређених поремећаја на величину промашаја користи се Монте Карло симулација (Прилог В). Примењен је нелинеарни математички модел лета ракете са 6 степени слободе кретања. Само посматрани поремећај се узима као случајна величина, док све остале величине имају своје референтне вредности. Претпоставља се да све случајне величине имају нормалну

расподелу вероватноће.

Почетак симулације подразумева генерисање случајне променљиве са нормалном расподелом и жељеном стандардном девијацијом око референтне вредности. Добијање случајне величине са нормалном расподелом се заснива на особини случајних величина исказаних централном граничном теоремом: сума великог броја независних случајних променљивих различитих функција расподеле има нормалну расподелу независно од карактера тих функција.

Генератор случајних бројева, који је доступан у сваком компајлеру, даје број који је случајна променљива са униформном расподелом. Сума великог броја таквих бројева, сваког добијеног након поновне иницијализације генератора, како би се обезбедила њихова независност, је случајна променљива са расподелом која тежи нормалној са повећањем броја сабирака.

Да би се обезбедило да добијена случајна променљива има нормалну расподелу са жељеном вредношћу стандардне девијације  $\sigma$ , потребно је добити променљиву са стандардном нормалном расподелом  $\mathcal{N}(0,1)$  и помножити је жељеном вредношћу стандардне девијације. Случајна променљива са нормалном расподелом се добија као збир одређеног броја независних случајних променљивих исте расподеле.

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_K \quad (3.5)$$

Дисперзија такве случајне величине је

$$\sigma_y^2 = m \left( \left( y - m(y) \right)^2 \right) = m(y^2) - m^2(y) \quad (3.6)$$

Уколико су променљиве  $x_1, x_2, \dots, x_K$  независне, онда је  $m(x_i x_j) = 0$  за  $i \neq j$ , па је

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_K}^2 = K \sigma_{x_i}^2 \quad (3.7)$$

Уколико је  $x_i$  случајна величина добијена као излаз генератора случајних бројева са униформном расподелом на интервалу  $(-0.5, 0.5)$ , онда је стандардна девијација такве променљиве  $\sigma_{x_i} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ . На основу (3.7), за  $\sigma_y = 1$ ,  $K = 12$ . Случајна променљива са нормалном расподелом  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  се добија као:

$$y = m + \sigma \sum_{i=1}^{12} x_i. \quad (3.8)$$



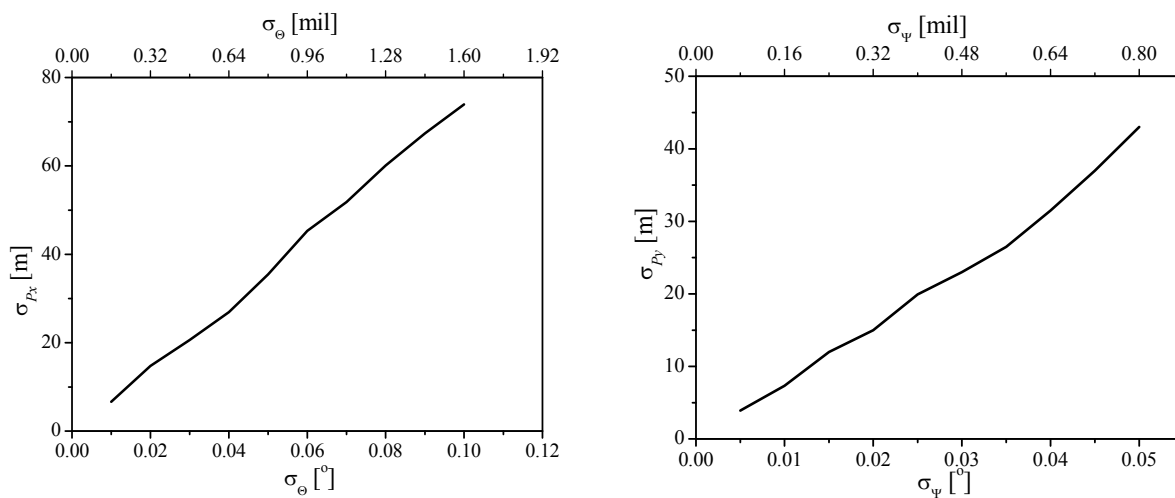
Како се већ са 6 сабирака независних случајних променљивих добија довољно добро представљање нормалне расподеле, може се искористити и:

$$y = m + \sqrt{2}\sigma \sum_{i=1}^6 x_i \quad (3.9)$$

Након генерисања поремећаја, изводи се симулација лета и бележе координате падне тачке. Дати поступак се понавља жељени број пута, у зависности од жељене поузданости Монте Карло симулације (прилог В). Из скупа падних тачака се, на крају, одреде математичко очекивање и стандардна девијација. Дати поступак се понавља за различите вредности стандардне девијације посматране величине и добијају се дијаграми зависности стандардне девијације промашаја у жељеном правцу од стандардне девијације посматраног параметра система.

### Растурање погодака услед варијација вредности углова лансирања

До варијација углова лансирања долази као последица осцилација лансера приликом рафалног опаљивања ракета и као последица одступања вредности угловних брзина ракета на изласку из лансирне цеви.



Слика 3.3. Утицај стандардних девијација угла лансирања на промашај ракете.

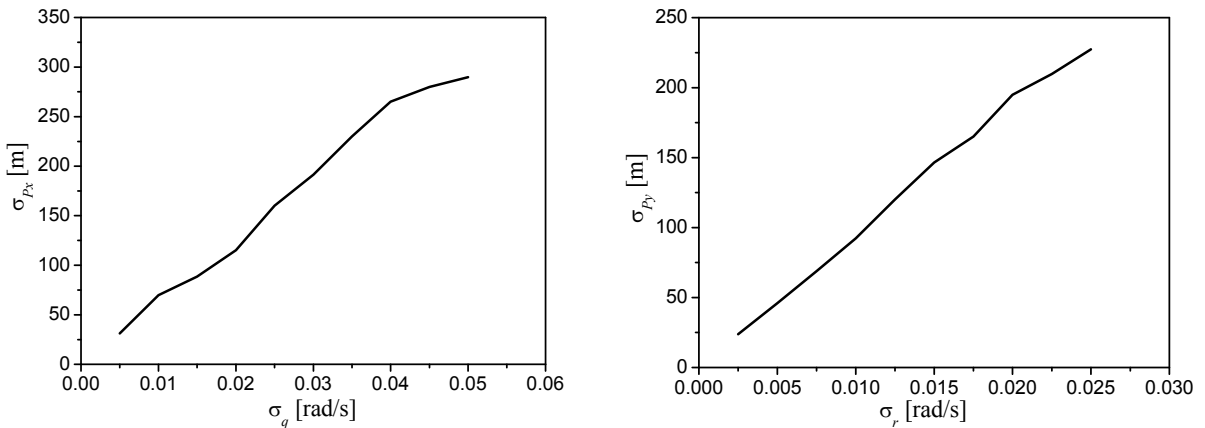
Осцилације лансера по правцу при рафалном опаљивању су по амплитуди мање него осцилације угла елевације. Референтна путања се добија за угао елевације од  $\theta_0 = 43.9^\circ$ , при којем је домет  $x_f = 45 \text{ km}$ , што је знатно мање од елевације при максималном домету (глава 2, слика 2.2). Ова вредност угла лежи на делу криве са средњом вредношћу утицаја угла елевације на домет. Гађањем при елевацијама блиским онима са максималним дометом смањује се утицај одступања угла елевације на промашај по домету. Поредићи вредности стандардне девијације

промашаја по домету и по скретању види се да су истог реда величине за исту вредност стандардне девијације одступања угла лансирања и да важи  $\sigma_{P_{x,y}} \approx x_f \cdot \sigma_{\theta,\psi} [\text{rad}]$ .

### Растурање погодака услед варијација угаоних брзина на изласку из лансирне цеви

До појаве одступања вредности угаоних брзина на изласку из лансера долази услед трзаја који се преноси са лансера на ракету и услед одступања вредности брзине ракете. Трзај лансера је случајни поремећај и његов утицај на ракету се огледа као независна случајна варијација почетних вредности угаоних брзина ракете у вертикалној и хоризонталној равни. Одступање вредности почетне брзине ракете је последица одступања вредности силе потиска ракетног мотора за време кретања ракете кроз лансер, до којег долази услед разлике температуре горива. Одступање вредности брзине ракете на излазу из лансера има утицај на вредности угаоне брзине пропадања.

За реалан систем, одступања угаоне брзине пропињања су већа него одступања угаоне брзине скретања, као последица одступања вредности брзине ракете на излазу из цеви, али и као последица већих осцилација лансера у вертикалној него у хоризонталној равни. Међутим, за исте вредности одступања угаоних брзина, већи је промашај по правцу (слика 3.4).



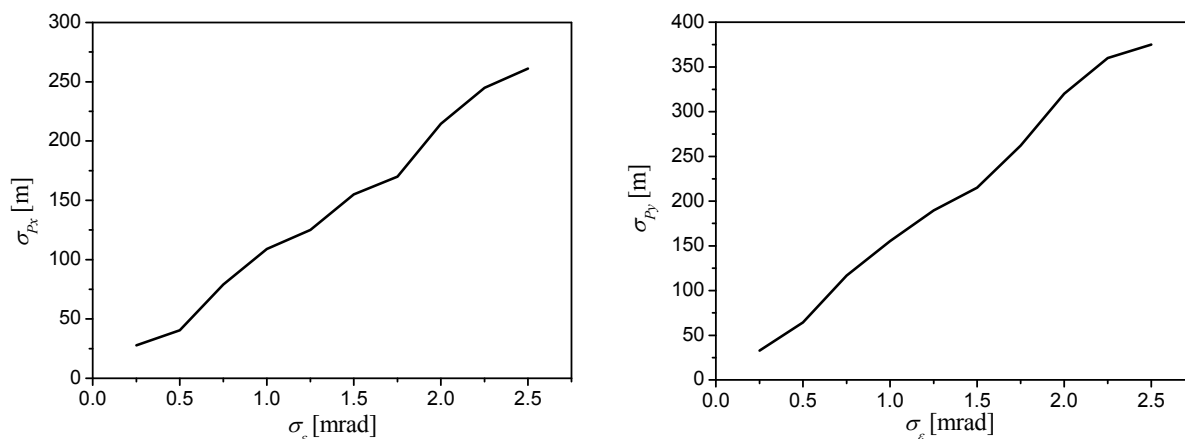
Слика 3.4. Зависност промашаја од одступања угаоних брзина на изласку из лансера.

Угаона брзина скретања ракете на изласку из лансера је случајна величина са нормалном расподелом, са математичким очекивањем једнаким или веома блиским нули. Угаона брзина пропињања, међутим, има вредност математичког очекивања која зависи од угла елевације и од брзине кретања ракете кроз лансер. У случају референтне путање, та вредност је  $q_0 = -0.16 \text{ rad/s}$ .

На основу свега наведеног, може се закључити да су поремећаји угаоних брзина на изласку из лансера значајнији од поремећаја самих углова елевације и скретања ракете.

### Растурање погодака услед дезаксијалности потиска

Дезаксијалност силе потиска је један од најзначајнијих фактора за прецизност артиљеријских ракета. У случају ракетног система ОРКАН, утицај дезаксијалности потиска је смањен применом ротирајуће ракете. Ротација је обезбеђена двојачо: уградњом крилаца под углом и ожљебљеном цеви лансера, како би ракета одмах по изласку, када је најосетљивија на поремећаје, имала довољну угаону брзину ваљања.



Слика 3.5. Зависност промашаја од стандардне девијације дезаксијалности силе потиска.

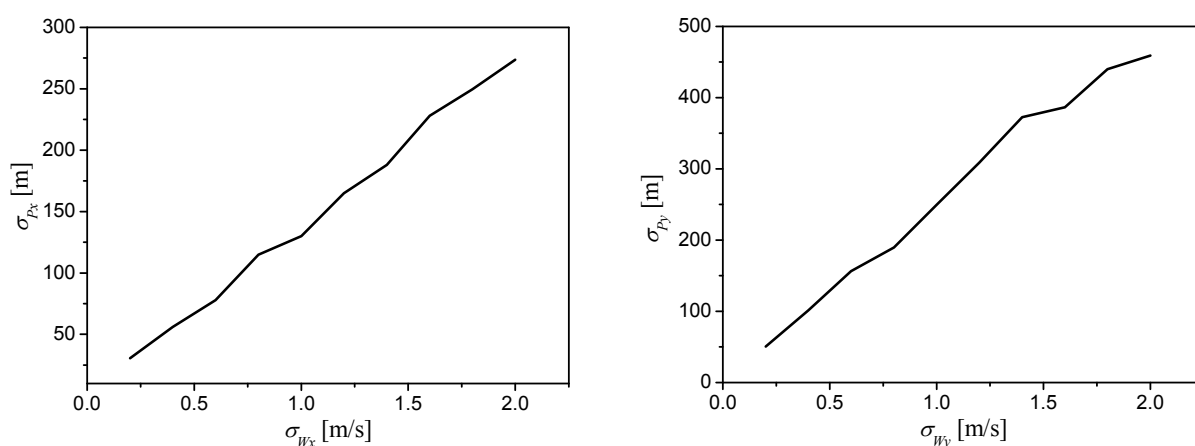
Референтна трајекторија је добијена у случају да вектор силе потиска строго лежи на оси ракете. У реалности, правац тог вектора је случајна величина, одређена са два угла:  $\epsilon$  и  $\Phi_d$  (глава 2, слике 2.3 и 2.4). Угао дезаксијалности вектора потиска  $\epsilon$  има нормалну расподелу вероватноће са математичким очекивањем једнаким нули и стандардном девијацијом  $\sigma_\epsilon$ , док угловни положај равни вектора потиска  $\Phi_d$  има униформну расподелу у границама  $0 \div 180^\circ$ .

За разлику од претходно разматраних поремећаја који делују у само једној равни, дезаксијалност силе потиска утиче на промашај и по домету и по скретању. За разматрани случај, утицај дезаксијалности силе потиска нешто је већи на промашај по правцу него по домету.

### Растурање погодака услед ветра

Ветар је веома значајан фактор за величину растурања погодака артиљеријских ракета. Његов утицај је највећи на делу путање са активним ракетним мото-

ром. У реалности, брзина ветра се мери и на основу измерених вредности врши се корекција елемената гађања. До одступања долази услед недовољно тачно одређене брзине ветра, или услед његове промене током времена. За потребе симулације, референтна трајекторија је одређена за случај да нема ветра  $V_{W_x} = V_{W_y} = 0$ . У Монте Карло симулацији, брзина ветра се узима као случајна величина са нормалном расподелом, са математичким очекивањем  $M(V_{W_{x,y}}) = 0$  и променљивом стандардном девијацијом  $\sigma_{W_{x,y}}$ . Брзина ветра се узима константна током времена и по путањи. Одвојено су разматрани утицај бочног и уздужног ветра. Бочни ветар има већи утицај на промашај него уздужни.



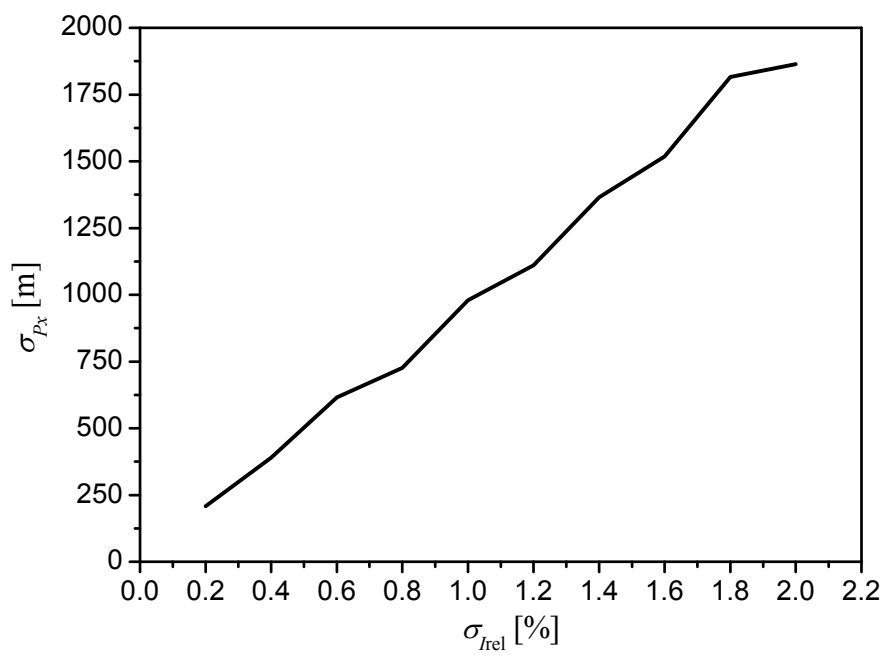
Слика 3.6. Зависност промашаја од стандардне девијације брзине ветра.

### Растурање погодака услед одступања тоталног импулса

Одступање тоталног импулса је поремећај који искључиво делује на промашај по домету. Његов утицај је далеко значајнији за артиљеријске ракете којима се гађа под високим угловима елевације него у случају ниских елевација или ракета за директно гађање.

Величина одступања тоталног импулса зависи од квалитета технолошког процеса израде пуњења ракетног мотора. Због изузетно великог утицаја на промашај, овај параметар је под посебном контролом током израде. Због тога, у реалности, вредност тоталног импулса нема чисту нормалну расподелу, јер се, након контроле, сва неисправна пуњења одбацују. Монте Карло симулације су вршене уз претпоставку да су све вредности са одступањима преко  $1.5\sigma_I$  одбачене.

На слици 3.7 приказана је зависност стандардне девијације промашаја по домету у зависности од релативне стандардне девијације тоталног импулса:  $\sigma_{I,rel} = \sigma_I / I_{tot}$  [%].



Слика 3.7. Зависност промашаја од релативне стандардне девијације тоталног импулса.

## Глава 4.

# МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ РАКЕТЕ

Основ за анализу, израчунавање и симулацију кретања летећих објеката (ракета) је њихов математички модел, као и помоћни системи једначина, тј. основне једначине кретања. Основни циљ овог поглавља је добијање општег математичког модела атмосферског лета ракете у односу на ротирајућу земљу, како би се добио систем једначина који довољно тачно описује кретање ракете и који је погодан за нумеричку симулацију. Након описа потребних координатних система и кретања материјалне тачке у односу на ротирајућу земљу, развијене су динамичке и кинематичке једначине атмосферског лета крутог тела, и на крају, представљене су једначине поремећајног кретања у свом димензионом облику. Комплетан математички модел атмосферског лета дали су Etkin и Ried [5].

### ГЕОМЕТРИЈСКЕ ДЕФИНИЦИЈЕ

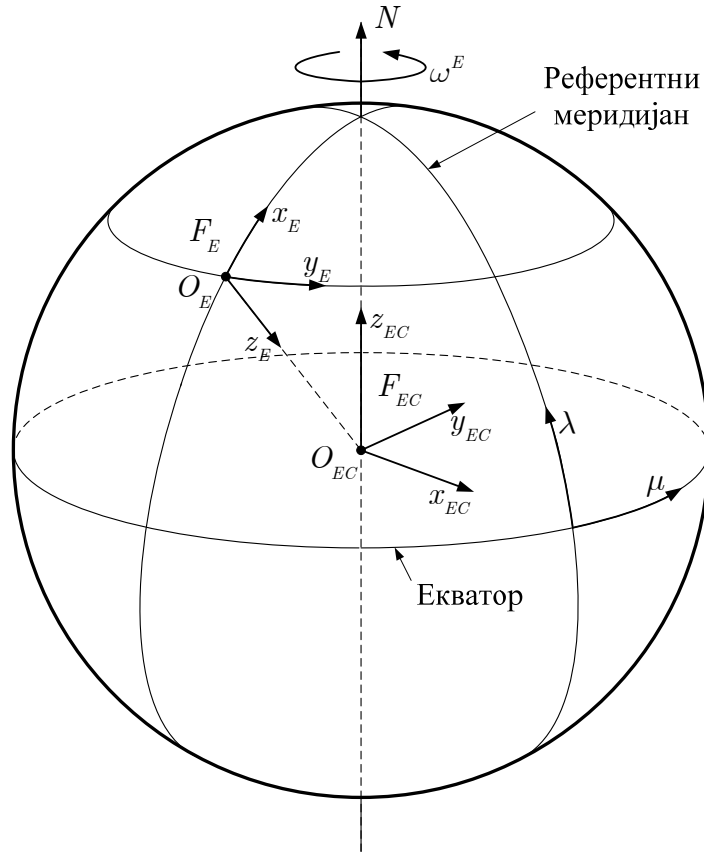
У овом поглављу представљени су основни координатни системи који се користе у изучавању динамике лета артиљеријских ракета. Сви координатни системи су десне орјентације.

#### Инерцијални координатни систем

Овај координатни систем, означен са  $F_I$ , је непокретан или у стању равномерно праволинијске транслације у односу на удаљене звезде.

#### Координатни систем везан за земљу (Земаљски систем)

Ротација Земље  $\omega_E$  у односу на  $F_I$  може да се занемари у многим проблеми-ма динамике лета, па сваки координатни систем везан за Земљу може да се користи као инерцијални. У случају веома великих брзина и свемирског лета то није случај, тако да се угаона брзина земље мора узети у разматрање. Слика 4.1 приказује два координатна система везана за Земљу, који су од интереса у механици лета.  $F_{EC}$  има координатни почетак у центру Земље, и осе усмерене ка референтним тачкама на Екватору и оси Земље. Овај систем је значајан када је неопходно да се узме у обзир ротације Земље.  $F_E$  је систем везан за површину Земље, са координатним почетком у близини ракете, или, уобичајено, у месту лансирања. Оса  $O_E z_E$  је усмерена вертикално наниже,  $O_E x_E$  ка северу и  $O_E y_E$  ка истоку. Раван  $O_E x_E y_E$  је локална хоризонтална раван.



Слика 4.1. Земаљски координатни системи.

### Покретни вертикални координатни систем

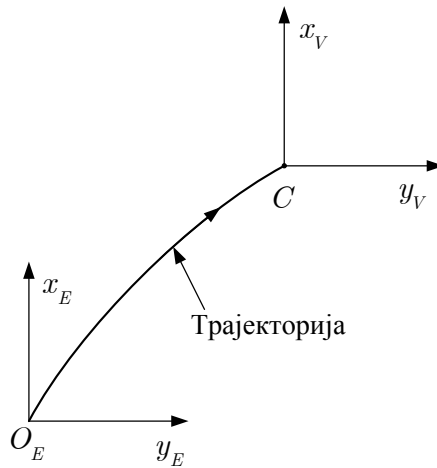
Координатни почетак овог система означеног са  $F_V : O_V$  је везан за ракету, уобичајено за њен центар масе. Оса  $O_V z_V$  је усмерена вертикално наниже у правцу убрзања Земљине теже,  $O_V x_V$  ка северу и  $O_V y_V$  ка истоку. Уколико је координатни систем  $F_E$  довољно близу ракети, тако да закривљеност површине Земље може да се занемари, онда су осе  $F_V$  паралелне систему  $F_E$ .

Како су  $x$  осе оба система  $F_V$  и  $F_E$  усмерене ка северу, помоћу две ротације могуће је остварити да осе  $F_E$  буду паралелне са осама  $F_V$ :

- $-\Delta\lambda$  око осе  $O_E y_E$  и
- $\Delta\mu$  око осе  $O_{EC} z_{EC}$ ,

где су  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_E$  и  $\Delta\mu = \mu - \mu_E$ , а  $(\lambda, \mu)$  и  $(\lambda_E, \mu_E)$  су географска ширина и дужина координатних почетака  $O_V$  и  $O_E$ , респективно.

Угаона брзина  $F_V$  у односу на  $F_I$  је  $\omega^V$ .



Слика 4.2 Покретни везани координатни систем.

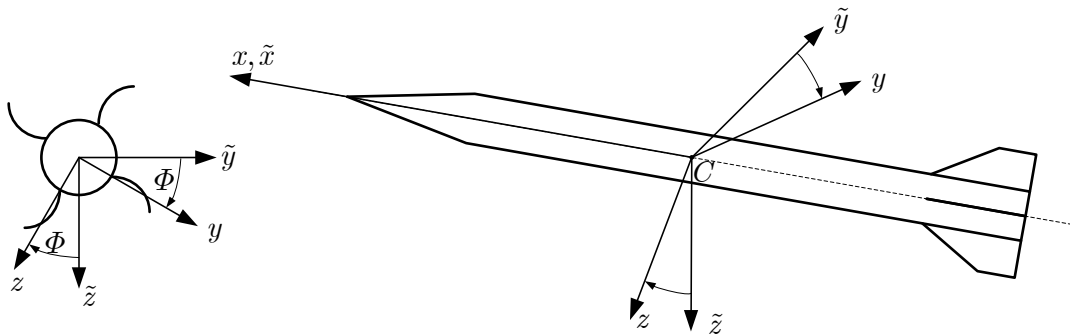
### Везани координатни систем

Овај координатни систем означава се са  $F_B$ . Осе везаног координатног система  $Oxyz$  су фиксне у односу на тело ракете, за које се претпоставља да је недеформабилно. Координатни почетак је обично центар масе, а оса  $Ox$  усмерена ка врху ракете. Осе  $Oy$  и  $Oz$  могу бити везане за било који правац управан на осу ракете. У случају неротирајуће ракете, узимају се тако да је оса  $Oz$  усмерена наниже.

Угаона брзина  $F_B$  у односу на  $F_I$  је  $\omega = [p \ q \ r]^T$  а брзина  $\mathbf{V}_B = [u \ v \ w]^T$ .

### Полувезани (аеробалистички) координатни систем

Артиљеријске ракете су, по правилу, ротирајуће. У том случају примењује се полувезани координатни систем означен са  $F_B : O\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , чија је оса  $O\tilde{x}$  везана за ракету и поклапа се са осом  $Ox$ , а оса  $O\tilde{z}$  за вертикалну раван, усмерена наниже.



Слика 4.3 Аеробалистички координатни систем.



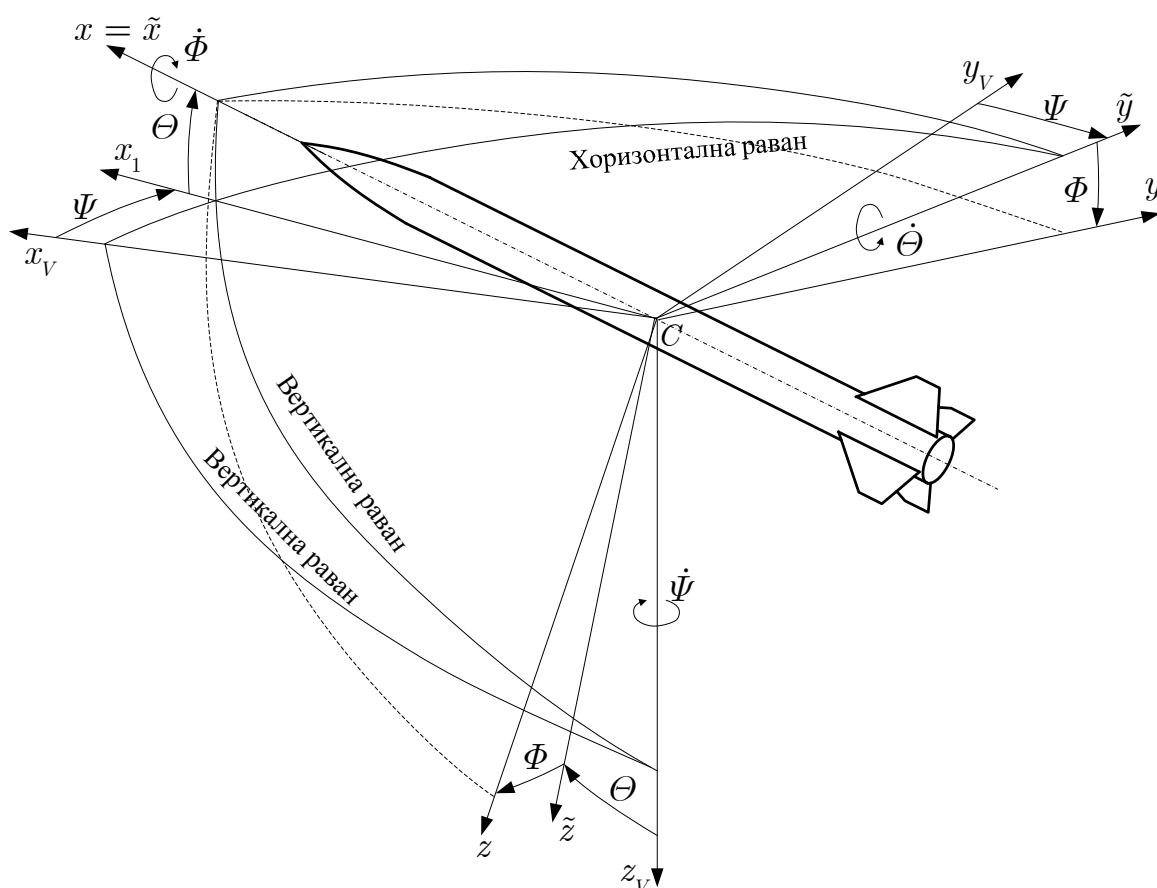
## Брзински координатни систем

Координатни почетак овог система, означеног са  $F_W$ , везан је за ракету, обично за њен центар масе, а оса  $O_W x_W$  је усмерена у правцу вектора релативне брзине  $V$  у односу на атмосферу. Осе  $O_W y_W$  и  $O_W z_W$  могу бити везане за било који правац управан на вектор релативне брзине. У случају да ракета има једну раван симетрије, оса  $O_W z_W$  се узима да лежи у њој.

Угаона брзина  $F_W$  у односу на  $F_I$  је  $\omega^W = [p_W \quad q_W \quad r_W]$ .

## Ојлерови углови ракете

Оријентација било којег координатног система у односу на неки други може се дати преко три угла узастопних ротација око оса  $z$ ,  $y$  и  $x$ , у циљу довођења његових оса у паралелан положај са осама тог другог система. То је општи случај Ојлерових углова.



Слика 4.4 Обртање координатних система:

а) – за угао  $\Psi$  око осе  $Cz_v$ , б) – за угао  $\Theta$  око осе  $Cy_v$ , в) – за угао  $\Phi$  око осе  $Cx_v$ .

У механици лета артиљеријских ракета, користе се Ојлерови углови који ротирају покретни вертикални координатни систем  $F_V$  у полуvezани  $F_B$  и vezани  $F_B$ . Слика 4.4 приказује редослед ротација. Положај полуvezаног система  $F_B$  у односу на покретни вертикални добија се на следећи начин:

1. обраћањем координатног система  $Cx_V y_V z_V$ , за угао скретања  $\Psi$ , око осе  $Cz_V$  (десна ротација) добија се  $Cx_1 \tilde{y} z_V$  и
2. обраћањем координатног система  $Cx_1 \tilde{y} z_V$  око новог положаја осе  $C\tilde{y}$  за угао пропињања  $\Theta$ , добија се  $C\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$ .

Положај vezаног система у односу на полуvezани добија се:

3. обраћањем система  $C\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$  око новог положаја осе  $C\tilde{x} \equiv Cx$ , за угао ваљања  $\Phi$ , добија се  $Cxyz$ .

### Аеродинамички углови

Линеарно кретање  $\mathbf{V}$  ракете у односу на атмосферу може да се представи преко своје три ортогоналне компоненте  $(u, v, w)$  у vezаном координатном систему, или помоћу интензитета брзине  $V$  и два одговарајућа угла, нападног и угла клизања:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{w}{u} \quad \text{и} \quad (4.1)$$

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v}{V}. \quad (4.2)$$

Уколико познајемо интензитет брзине и њене углове, имамо:

$$\begin{aligned} u &= V \cos \beta \cos \alpha \\ v &= V \sin \beta \\ w &= V \cos \beta \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.3)$$

### Трансформација вектора

Произвољни вектор може бити изражен својим пројекцијама на осе различитих координатних система:

$$\mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} v_{a1} \\ v_{a2} \\ v_{a3} \end{bmatrix} \text{ у координатном систему } F_a \text{ и } \mathbf{v}_b = \begin{bmatrix} v_{b1} \\ v_{b2} \\ v_{b3} \end{bmatrix} \text{ у } F_b$$

Између ових пројекција може да се изведе следећа зависност:

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{L}_{ba} \mathbf{v}_a. \quad (4.4)$$

Матрица  $\mathbf{L}_{ba}$  је матрица трансформације вектора из координатног система  $F_a$  у  $F_b$ . Матрица трансформације из  $F_b$  у  $F_a$  је  $\mathbf{L}_{ab}$  и за њу важи:

$$\mathbf{L}_{ab} = \mathbf{L}_{ba}^{-1} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{L}_{ba}^T = \mathbf{L}_{ba}^{-1} \quad (4.6)$$

Од посебног интереса су матрица трансформације покретног вертикалног у везани координатни систем, која је одређена Ојлеровим угловима, као и матрица трансформације из координатног система ваздушне брзине  $F_W$  у везани, одређена нападним угловима:

$$\mathbf{L}_{BV} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi \\ \cos \Theta \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi \\ -\sin \Theta & \sin \Phi \cos \Theta & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{L}_{BW} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

### Трансформација извода вектора

Нека је вектор  $\mathbf{v}$  дат у односу на два координатна система  $F_a$  и  $F_b$ , и нека  $F_b$  ротира константном угаоном брзином  $\boldsymbol{\omega}$  у односу на  $F_a$ . Онда је

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{L}_{ba} \mathbf{v}_b \quad (4.9)$$

Изводи вектора  $\mathbf{v}_a$  и  $\mathbf{v}_b$  су  $\dot{\mathbf{v}}_a$  и  $\dot{\mathbf{v}}_b$ . Ово нису две пројекције истог вектора, већ два различита вектора. Како  $F_b$  ротира у односу на  $F_a$ , имамо:

$$\dot{\mathbf{v}}_a = \mathbf{L}_{ab} \dot{\mathbf{v}}_b + \dot{\mathbf{L}}_{ab} \mathbf{v}_b = \mathbf{L}_{ab} \dot{\mathbf{v}}_b + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{L}_{ab} \mathbf{v}_b \quad (4.10)$$

Множењем горњег израза матрицом  $\mathbf{L}_{ba}$  са леве стране, имамо:

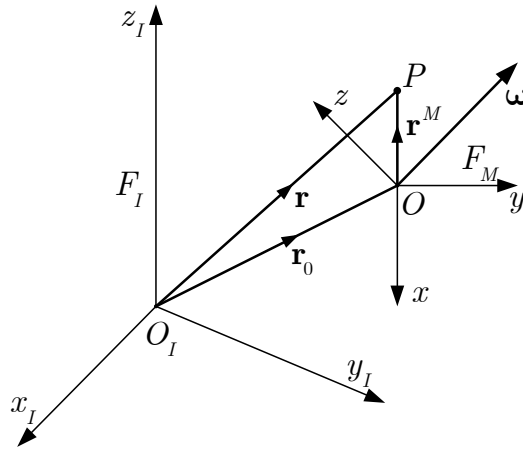
$$\mathbf{L}_{ba} \dot{\mathbf{v}}_a = \dot{\mathbf{v}}_b + \boldsymbol{\omega}_a \times \mathbf{v}_b \quad (4.11)$$

## ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА

### Брзина и убрзање у покретном координатном систему

Сви координатни системи, осим инерцијалног, се налазе у стању кретања у односу на инерцијални простор. Кретање везаног координатног система, приказано на слици 4.5, је посебно сложено, укључујући убрзање координатног почетка и

ротацију. Нека је  $F_M(Oxyz)$  произвољни покретни координатни систем, са почетком у тачки  $O$  и угаоном брзином  $\omega$  у односу на инерцијални координатни систем  $F_I$ . Нека је  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}^M$  вектор положаја тачке  $P$ .



Слика 4.5. Покретни координатни систем.

Брзина и убрзање тачке  $P$  у односу на  $F_I$  су:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_I &= \dot{\mathbf{r}}_I \\ \mathbf{a}_I &= \ddot{\mathbf{r}}_I \end{aligned} \quad (4.12)$$

Брзина тачке  $P$  исказана у покретном координатном систему је:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_{O_M} + \dot{\mathbf{r}}^M + \omega \times \mathbf{r}^M. \quad (4.13)$$

Први члан у горњем изразу представља брзину координатног почетка  $O$  у односу на  $F_I$ , други је релативна брзина тачке  $P$  у односу на  $O$ , и последњи је преносна брзина, тј. брзина у односу на  $F_I$  тачке из  $F_M$  која се тренутно поклапа са  $P$ .

Инерцијално убрзање тачке  $P$  исказано у покретном координатном систему је:

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_{O_M} + \ddot{\mathbf{r}}^M + \dot{\omega} \times \mathbf{r}^M + 2\omega \times \dot{\mathbf{r}}^M + \omega \times \omega \times \mathbf{r}^M \quad (4.14)$$

$$\mathbf{a}_{O_M} = \dot{\mathbf{v}}_{O_M} + \omega \times \mathbf{v}_{O_M} \quad (4.15)$$

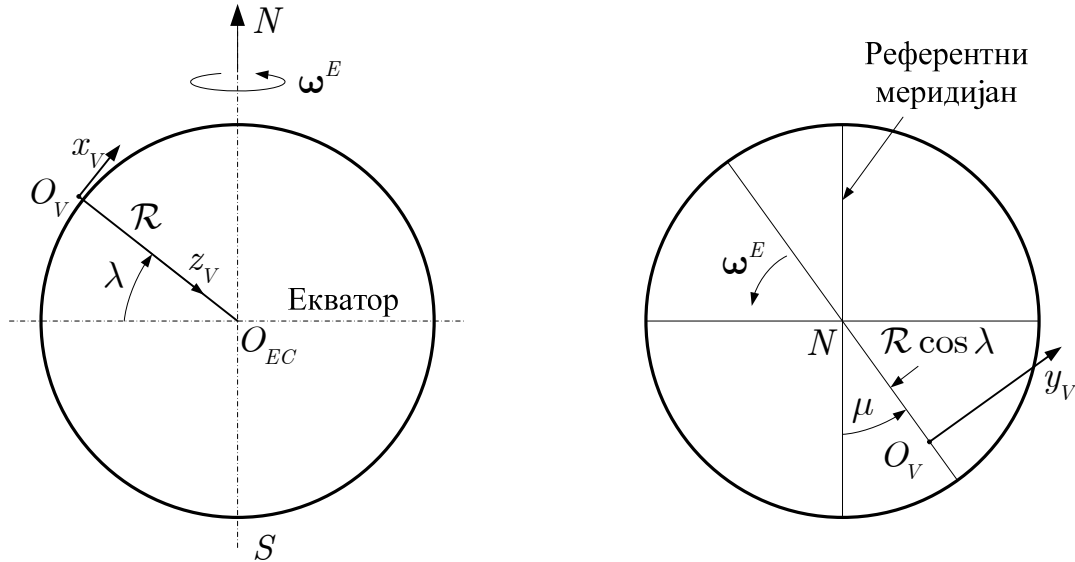
У претходним једначинама имамо:

- $\mathbf{a}_{O_M}$  : убрзање координатног почетка покретног координатног система,
- $\ddot{\mathbf{r}}^M$  : убрзање тачке  $P$  у односу на покретни координатни систем,
- $\dot{\omega} \times \mathbf{r}^M$  : тангенцијално убрзање услед променљиве угаоне брзине покретног

координатног система,

- $2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}^M$  : Кориолисово убрзање,
- $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^M$  : центрипетално убрзање.

### Угаона брзина земаљских координатних система



Слика 4.6. Геоцентричне поларне координате.

Кретање Земље састоји се од ротације око сопствене осе, прецесије и нутације Земљине осе, ротације око Сунца и додатних кретања Сунчевог система и галаксије. У случају атмосферског лета значајно је само прво од поменутих кретања, иако се, у многим случајевима, и оно може да занемари. Претпоставља се, дакле, да се Земља окреће константном угаоном брзином  $\boldsymbol{\omega}^E$  око своје осе, која је непокретна у инерцијалном простору.

$$\boldsymbol{\omega}_{EC}^E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^E \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\omega}_E^E = \begin{bmatrix} \cos \lambda_E \\ 0 \\ -\sin \lambda_E \end{bmatrix} \omega^E; \quad \boldsymbol{\omega}_V^E = \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ 0 \\ -\sin \lambda \end{bmatrix} \omega^E \quad (4.16)$$

$\omega^E = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$  је угаона брзина Земље, један окрет на дан.  $\lambda_E$  је географска ширина тачке  $O_E$  а  $\lambda$  је географска ширина тачке  $O_V$ .

### Угаона брзина покретног вертикалног координатног система

Покретни вертикални координатни систем  $F_V$ , који се налази на геоцентричним поларним координатама  $(\lambda, \mu)$  има угаону брзину:

$$\boldsymbol{\omega}_V^V = \begin{bmatrix} (\omega^E + \dot{\mu}) \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -(\omega^E + \dot{\mu}) \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Компоненте угаоне брзине  $\boldsymbol{\omega}^V$  у  $F_B$  се добијају множењем вектора (4.17) матрицом трансформације  $\mathbf{L}_{BV}$  са леве стране.

### Угаона брзина везаног координатног система

Оријентација везаног координатног система  $F_B$  у односу на покретни вертикални  $F_V$  је дата преко Ојлерових углова  $\Psi, \Theta, \Phi$ . Ако су  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  јединични вектори система  $F_B$ , слика 4.4, онда је релативна угаона брзина:

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^V = \mathbf{i}\dot{\Phi} + \tilde{\mathbf{j}}\dot{\Theta} + \mathbf{k}_V\dot{\Psi}. \quad (4.18)$$

Компоненте јединичних вектора  $\mathbf{i}, \tilde{\mathbf{j}}, \mathbf{k}_V$  у  $F_B$  су:

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \Phi \\ -\sin \Phi \end{bmatrix}; \quad \mathbf{k}_V = \begin{bmatrix} -\sin \Theta \\ \cos \Theta \sin \Phi \\ \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Онда је:

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^V = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi} - \dot{\Psi} \sin \Theta \\ \dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi \\ \dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Theta} \sin \Phi \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Може се написати:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \sin \Phi \cos \Theta \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Инвертовањем претходне једначине, добија се:

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \Phi \tan \Theta & \cos \Phi \tan \Theta \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi \sec \Theta & \cos \Phi \sec \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Једначина (4.22) може да се употреби за израчунавање брзине промена Ојлерових углова на основу релативних угаоних брзина  $(P, Q, R)$ , које могу да се одреде у односу на апсолутне угаоне брзине  $(p, q, r)$  користећи једначине (4.20) и

(4.17):

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - \mathbf{L}_{BV} \begin{bmatrix} (\omega^E + \dot{\mu}) \cos \lambda \\ -\dot{\lambda} \\ -(\omega^E + \dot{\mu}) \sin \lambda \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

### Брзина центра масе у односу на Земљу

Положај центра масе ракете у односу на Земљу дат је сферичним поларним координатама:  $\mathcal{R}$  - геоцентрични радијус,  $\mu$  - географска дужина и  $\lambda$  - географска ширина. Њихова промена зависи од компоненти брзине система  $F_V$  у односу на Земљу (слика 4.6):

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{R}} &= -V_{z_V}^E \\ \dot{\mu} &= \frac{1}{\mathcal{R} \cos \lambda} V_{y_V}^E \\ \dot{\lambda} &= \frac{1}{\mathcal{R}} V_{x_V}^E \end{aligned} \quad (4.24)$$

Компоненте вектора  $\mathbf{V}_V^E$  су:

$$\mathbf{V}_V^E = \mathbf{L}_{VB} (\mathbf{V}_B + \mathbf{W}_B), \quad \mathbf{V}_B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W}_B = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

$\mathbf{V}$  је релативна брзина ракете у односу на атмосферу, а  $\mathbf{W}$  је релативна брзина атмосфере у односу на Земљу. Уколико је  $\mathbf{W} = 0$ , имамо:

$$\mathbf{V}_V^E = \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \mathcal{R} \\ \dot{\mu} \mathcal{R} \cos \lambda \\ -\dot{\mathcal{R}} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{VB} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

### Убрзање центра масе ракете

Основна једначина за инерцијално убрзање центра масе ракете је (4.14), где се посматра покретна тачка  $O_V$  у ротирајућем координатном систему  $F_E$ . Члан  $\dot{\mathbf{r}}^M$  је сада брзина центра масе ракете у односу на земљу, означена са  $\mathbf{V}^E$ . Претпоставља се да је оса Земље непокретна у инерцијалном простору и је  $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$ . Самим тим је убрзање  $\mathbf{a}_0$  координатног почетка система  $F_E$  у ствари, центрипетално убрзање услед ротације Земље. Ово убрзање је обично занемарљиво, у поређењу са убрзањем земљине теже. Оно је нула на половима и око  $1/1000 g$  на екватору. Слична је

чињеница и за центрипетално убрзање  $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}^M$  у једначини (4.14), тј, углавном је занемарљиво. Од два преостала члана једначине (4.14),  $\ddot{\mathbf{r}}^M = \dot{\mathbf{V}}^E \mathbf{a}$ , Кориолисово убрзање је  $2\boldsymbol{\omega}^E \times \mathbf{V}^E$ . Кориолисово убрзање зависи од величине и правца брзине ракете, и највише је  $10\%g$  при орбиталним брзинама. Иако је често занемарљив, овај члан се ипак задржава у математичком моделу, па имамо:

$$\mathbf{a}_{C_E} = \dot{\mathbf{V}}_E^E + 2\boldsymbol{\omega}_E^E \times \mathbf{V}_E^E \quad (4.27)$$

Једначина (4.27) се може трансформисати у покретни координатни систем  $F_B$  користећи (4.11) и чињеницу да је релативна угаона брзина система  $F_B$  у односу на  $F_E$  ( $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^E$ ), имамо:

$$\mathbf{a}_{C_B} = \mathbf{L}_{BE} \mathbf{a}_{C_E} = \dot{\mathbf{V}}_B^E + (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^E)_B \times \mathbf{V}_B^E + 2\boldsymbol{\omega}_B^E \times \mathbf{V}_B^E \quad (4.28)$$

$$\mathbf{a}_{C_B} = \dot{\mathbf{V}}_B^E + (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}^E)_B \times \mathbf{V}_B^E, \quad (4.29)$$

где су:

$$\mathbf{V}_B^E = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_B^E = \begin{bmatrix} p_B^E \\ q_B^E \\ r_B^E \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{BV} \begin{bmatrix} \cos \lambda \\ 0 \\ -\sin \lambda \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^E \quad (4.30)$$

У случају стационарне атмосфере, једначине (4.29) и (4.30) дају:

$$\begin{aligned} a_{C_x} &= \dot{u} + (q + q_B^E)w - (r + r_B^E)v \\ a_{C_y} &= \dot{v} + (r + r_B^E)u - (p + p_B^E)w \\ a_{C_z} &= \dot{w} + (p + p_B^E)v - (q + q_B^E)u \end{aligned} \quad (4.31)$$

### Једначине кретања у везаном координатном систему (Ојлерове једначине)

Једначина кретања ракете под дејством резултујуће силе  $\mathbf{f}$  у везаном координатном систему  $F_B$  је:

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{a}_{C_B} m, \quad (4.32)$$

где је  $\mathbf{a}_{C_B}$  дато једначином (4.29), односно, у случају стационарне атмосфере (4.31). Ако се аеродинамичка и реактивна сила у везаном координатном систему означе као:

$$\mathbf{f}_{a_B} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{r_B} = \begin{bmatrix} F_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$



скаларне једначине кретања постају:

$$\begin{aligned} X + F_r - mg \sin \Theta &= m \left[ \dot{u} + (q + q_B^E)w - (r + r_B^E)v \right] \\ Y + mg \cos \Theta \sin \Phi &= m \left[ \dot{v} + (r + r_B^E)u - (p + p_B^E)w \right] \\ Z + mg \cos \Theta \cos \Phi &= m \left[ \dot{w} + (p + p_B^E)v - (q + q_B^E)u \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

У случају да се ротација Земље може да занемари, чланови  $(p_B^E, q_B^E, r_B^E)$  нестају.

Моментна једначина кретања у инерцијалном координатном систему  $F_I$  је:

$$\mathbf{m}_I = \dot{\mathbf{h}}_I, \quad (4.35)$$

где су  $\mathbf{m}_I$  момент спољних сила и  $\mathbf{h}_I$  момент количине кретања у односу на центар масе ракете, исказани у инерцијалном координатном систему. У везаном координатном систему, претходна једначина постаје:

$$\mathbf{m}_B = \mathbf{L}_{BI} \mathbf{m}_I = \dot{\mathbf{h}}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{h}_B \quad (4.36)$$

У условима атмосферског лета, момент спољних сила  $\mathbf{G}$  потиче од аеродинамичких, пропулзивних и управљачких сила. Ако означимо:

$$\mathbf{m}_B = \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h}_B = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

једначина (4.35) добија скаларни облик:

$$\begin{aligned} L &= \dot{h}_x + qh_z - rh_y \\ M &= \dot{h}_y + rh_x - ph_z \\ N &= \dot{h}_z + ph_y - qh_x \end{aligned} \quad (4.38)$$

У случају да је посматрани објекат артиљеријска ракета, може се претпоставити да је она чврсто тело и да су  $Czx$  и  $Cyx$  равни симетрије. Тада једначина (4.38) постаје:

$$\begin{aligned} L &= I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr \\ M &= I_y \dot{q} - (I_z - I_x)rp \\ N &= I_z \dot{r} - (I_x - I_y)pq \end{aligned} \quad (4.39)$$

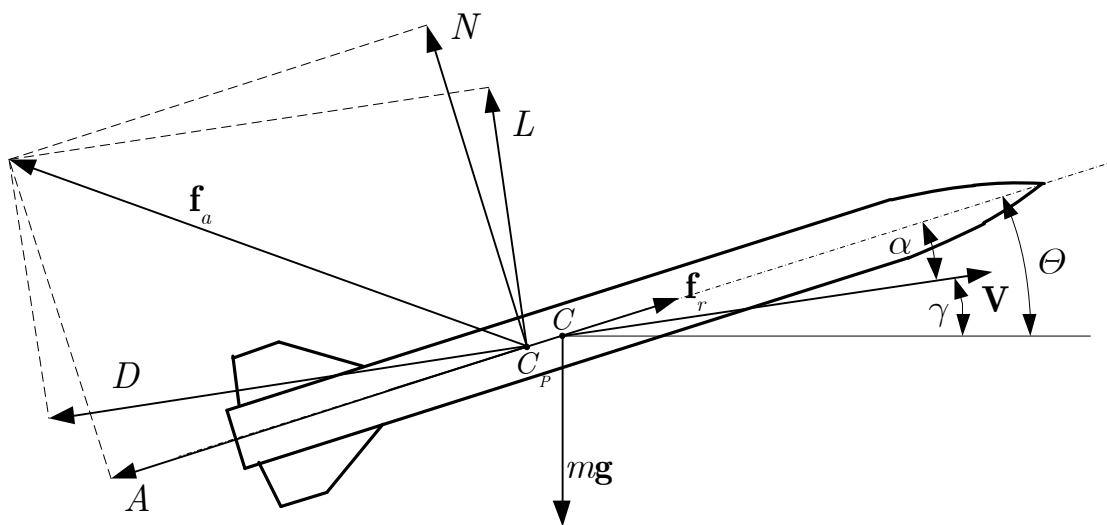
Претходно разматрање даје математички модел атмосферског лета ракете око ротирајуће Земље. За потребе нумеричке симулације, користе се следеће једначине:

- Диференцијалне једначине кретања у везаном координатном систему (4.34), (4.39),
- Кинематске једначине угаоних брзина (4.22) и (4.23),
- Кинематске једначине геоцентричних поларних координата (4.26),
- Угаона брзина ротације Земље у везаном координатном систему (4.30).

## АЕРОДИНАМИЧКЕ СИЛЕ И МОМЕНТИ

### Силе које делују на ракету

У диференцијалним једначинама кретања (4.34) и (4.39) са леве стране се налазе пројекције спољних сила и момената на осе везаног координатног система. Поред силе Земљине теже  $mg$ , на ракету делује аеродинамичка сила  $f_a$  и реактивна сила  $f_r$ . На слици 4.7 приказане су спољне силе које делују на ракету у вертикалној равни. Како су артиљеријске ракете по правилу носиметричне, сви закључци се односе и на пројекције сила у хоризонталном правцу.



Слика 4.7. Спољне силе које делују на ракету.

Сила земљине теже делује у центру масе  $C$ , док аеродинамичка сила  $f_a$  делује у центру притиска  $C_p$ . Реактивна сила  $f_r$ , делује у правцу осе ракете у активној фази лета. Компонента аеродинамичке силе у правцу брзине кретања је аеродинамички отпор  $D$ , а управно на тај правац је сила узгона  $L$  и бочна сила  $C$ . Пројекције аеродинамичке силе на осе везаног координатног система су  $X, Y, Z$ . Компоненте вектора  $f_a$  у равни одређеној тим вектором и уздужном осом ракете  $Cx$  су аксијална сила  $A$  и нормална сила  $N$ .

$$\mathbf{f}_{a_B} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{BW} \begin{bmatrix} -D \\ C \\ -L \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Негативни предзнаци у једначини (4.40) последица су уобичајених конвенција: узгон је позитиван навише, отпор уназад и бочна сила удесно.

Пројекција момента аеродинамичких сила  $\mathbf{m}_a$  на осе везаног координатног система су  $L, M, N$ .

### Аеродинамичке силе и моменти

Аеродинамичке силе су приближно пропорционалне производу  $QS$ , где је  $Q = \frac{1}{2}\rho V^2$  динамички притисак,  $\rho$  је густина ваздуха,  $V$  је релативна брзина у односу на атмосферу и  $S$  је референтна површина, што је, у случају артиљеријских ракета, површина попречног пресека. Самим тим, усвојена је пракса да се аеродинамичке силе деле величином пропорционалном поменутом производу, како би се добили бездимензиони коефицијенти силе, који зависе искључиво од облика, оријентације и кретања тела. У случају момената аеродинамичких сила, у димензионишућу величину је укључена и референтна дужина  $l$ , која је, у случају артиљеријских ракета, њихов калибар.

$$\begin{aligned} X &= C_x QS \\ Y &= C_y QS \\ Z &= C_z QS \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} L &= C_l QSl \\ M &= C_m QSl \\ N &= C_n QSl \end{aligned} \quad (4.42)$$

Аеродинамичке силе нису строго линеарне по  $\rho$  нити квадратно зависне од  $V$  услед вискозитета и стишљивости ваздуха, тако да и ти бездимензиони коефицијенти  $C_{(\ )}$  варирају са  $\rho$  и  $V$ . Бездимензионе величине које узимају у обзир ове параметре су Рејнолдсов број  $R_e$  и Махов број  $M$ .

$$R_e = \frac{Vl\rho}{\mu}, \quad M = \frac{V}{C} \quad (4.43)$$

И Рејнолдсов број и Махов број су функције брзине и висине лета, која одређује густину ваздуха и брзину звука  $C$ . У већини проблема динамике лета, дија-

пазон промена  $R_e$  и његов утицај на величину сила могу да се занемаре, тако да се аеродинамички коефицијенти исказују у зависности од Маховог броја  $M$ .

У уопштеном случају, аеродинамички коефицијенти су сложене функције више параметара, који подразумевају оријентацију и кретање тела и карактер струјања. Уопштена је пракса да се исказују у облику линеарних комбинација тих параметара за различите услове струјања. Коефицијенти пропорционалности се називају аеродинамички деривативи.

Аксијална аеродинамичка сила  $A = -X$  је, за мале вредности нападних углова приближно једнака сили отпора  $D$ . Може да се представи као збир силе отпора при  $\alpha = 0$  и њеног прираста у функцији од нападног угла. За мале вредности  $\alpha$ , уобичајено је да се зависност отпора од нападног угла представи као линеарна функција од  $\alpha^2$ .

$$C_A = -C_X = C_{A_0}(M) + C_{A\alpha^2}(M)\alpha^2 \quad (4.44)$$

Сила аеродинамичког отпора се, у случају артиљеријских ракета, умањује за вредност отпора базе када је активан ракетни мотор, па у том случају имамо:

$$C_A = C_{A_0}(M) - C_{AB}(M) + C_{A\alpha^2}(M)\alpha^2 \quad (4.45)$$

У случају нормалних аеродинамичких сила имамо:

$$\begin{aligned} C_N = -C_Z &= C_{N\alpha}(M)\alpha + C_{Nq}(M)\hat{q} + C_{N\delta_z}(M)\delta_z \\ C_Y = -C_{N\alpha}(M)\beta &+ C_{Nq}(M)\hat{r} + C_{N\delta_y}(M)\delta_y \end{aligned} \quad (4.46)$$

У претходним једначинама су нормализоване угаоне брзине пропињања и скретања:

$$\hat{q} = q \frac{l}{V}, \quad \hat{r} = r \frac{l}{V}, \quad (4.47)$$

док су  $\delta_z, \delta_y$  углови отклона управљачких површина у случају аеродинамички управљиве ракете.

Момент ваљања је:

$$C_l = C_{l_0}(M) + C_{lp}(M)\hat{p} \quad (4.48)$$

$$\hat{p} = p \frac{l}{V} \quad (4.49)$$

Аеродинамички дериватив  $C_{l_0}$  је последица уградње аеродинамичких површина под углом, како би се остварила жељена брзина ваљања.

Моменти пропињања и скретања су:

$$\begin{aligned} C_m &= C_{m\alpha}(M)\alpha + C_{mq}(M)\hat{q} + C_{m\delta}(M)\delta_z \\ C_n &= -C_{m\alpha}(M)\beta + C_{mq}(M)\hat{r} + C_{m\delta}(M)\delta_y \end{aligned} \quad (4.50)$$

Аеродинамички деривативи се добијају на основу прорачуна и експерименталних података.

$$C_{A0}(M) = \frac{1}{QS} A_0(M) \quad (4.51)$$

$$C_{A\alpha^2}(M) = \frac{1}{QS} \frac{\partial A(M)}{\partial \alpha^2} \quad (4.52)$$

$$C_{N\alpha}(M) = \frac{1}{QS} \frac{\partial N_F(M)}{\partial \alpha} \quad (4.53)$$

$$C_{Nq}(M) = \frac{1}{QS} \frac{\partial N_F(M)}{\partial \hat{q}} \quad (4.54)$$

$$C_{N\delta}(M) = \frac{1}{QS} \frac{\partial N_F(M)}{\partial \delta} \quad (4.55)$$

$$C_{L0}(M) = \frac{1}{QS} L_0(M) \quad (4.56)$$

$$C_{Lp}(M) = \frac{1}{QS} \frac{\partial L(M)}{\partial \hat{p}} \quad (4.57)$$

$$C_{m\alpha}(M) = \frac{1}{QS} \frac{\partial M(M)}{\partial \alpha} \quad (4.58)$$

$$C_{mq}(M) = \frac{1}{QS} \frac{\partial M(M)}{\partial \hat{q}} \quad (4.59)$$

$$C_{m\delta}(M) = \frac{1}{QS} \frac{\partial M(M)}{\partial \delta} \quad (4.60)$$

### Линеаризација једначина кретања

Имајући у виду једначине кретања (4.34) и (4.39), као и линеаризоване изразе за аеродинамичке силе и моменте (4.41) - (4.50), могуће је оформити линеаризовани математички модел поремећајног кретања пројектила око своје равнотежне путање. Овакав линеаризовани модел има значаја у анализи динамичких карактеристика.

ристика и синтези закона управљања у случају вођеног пројектила.

Артиљеријске ракете су по правилу осносиметричне, па је карактер поремећајног кретања исти у обе равни. За потребе анализе динамичких карактеристика, посматра се кретање ракете у аеробалистичком координатном систему.

Одступања величина стања од равнотежних величина су:

$$\begin{aligned}
 u &= u^r + \Delta u; & \tilde{v} &= \tilde{v}^r + \Delta \tilde{v}; & \tilde{w} &= \tilde{w}^r + \Delta \tilde{w} \\
 p &= p^r + \Delta p; & \tilde{q} &= \tilde{q}^r + \Delta \tilde{q}; & \tilde{r} &= \tilde{r}^r + \Delta \tilde{r} \\
 \Phi &= \Phi^r + \Delta \Phi; & \Theta &= \Theta^r + \Delta \Theta; & \Psi &= \Psi^r + \Delta \Psi \\
 \delta_z &= \delta_z^r + \Delta \delta_z; & \delta_y &= \delta_y^r + \Delta \delta_y
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Линеаризовани систем једначина поремећајног кретања око равнотежне путање у аеробалистичком координатном систему:

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{u} &= g \Delta \Theta \\
 \Delta \dot{\tilde{v}} &= z_w \Delta \tilde{v} - (u + z_q) \Delta \tilde{r} - z_\delta \Delta \delta_y - z_w \tilde{v}_W \\
 \Delta \dot{\tilde{w}} &= z_w \Delta \tilde{w} + (u + z_q) \Delta \tilde{q} + z_\delta \Delta \delta_z - z_w \tilde{w}_W \\
 \Delta \dot{p} &= l_p \Delta p \\
 \Delta \dot{\tilde{q}} &= m_w \Delta \tilde{w} + m_q \Delta \tilde{q} - m_r \Delta \tilde{r} + m_\delta \Delta \delta_z - m_w \tilde{w}_W \\
 \Delta \dot{\tilde{r}} &= -m_w \Delta \tilde{v} + m_r \Delta \tilde{q} + m_q \Delta \tilde{r} + m_\delta \Delta \delta_y + m_w \tilde{v}_W \\
 \Delta \dot{\Phi} &= \Delta p \\
 \Delta \dot{\Theta} &= \Delta \tilde{q} \\
 \Delta \dot{\Psi} &= \Delta \tilde{r} \\
 \Delta \dot{x} &= \Delta u \\
 \Delta \dot{y} &= u \Delta \Psi + \Delta \tilde{v} \\
 \Delta \dot{h} &= -\Delta \dot{z} = u \Delta \Theta - \Delta \tilde{w}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Величине  $\tilde{v}_W, \tilde{w}_W$  представљају брзину ветра у аеробалистичком координатном систему. Динамички коефицијенти у линеаризованим једначинама су:

$$\begin{aligned}
 z_w &= \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial w} = \frac{QS}{mu} C_{N\alpha} \\
 z_q &= \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial q} = \frac{QSl}{mu} C_{Nq} \\
 z_\delta &= \frac{1}{m} \frac{\partial Z}{\partial \delta_z} = \frac{QS}{m} C_{N\delta}
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$l_p = \frac{1}{I_x} \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{QSl^2}{I_x u} C_{lp} \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned}
m_w &= \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial w} = \frac{QSl}{I_y u} C_{m\alpha} \\
m_q &= \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial q} = \frac{QSl^2}{I_y u} C_{mq} \\
m_\delta &= \frac{1}{I_y} \frac{\partial M}{\partial \delta} = \frac{QSl}{I_y} C_{m\delta} \\
m_r &= \frac{I_x}{I_y} p
\end{aligned} \tag{4.65}$$

За потребе анализе динамичких карактеристика система посматра се кретање у једној, вертикалној равни. Из система једначина (4.62), трећа, пета, осма и дванаеста једначина формирају систем:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{w} &= z_w \Delta \tilde{w} + (u + z_q) \Delta \tilde{q} + z_\delta \Delta \delta_z \\
\Delta \dot{q} &= m_w \Delta \tilde{w} + m_q \Delta \tilde{q} + m_\delta \Delta \delta_z \\
\Delta \dot{\Theta} &= \Delta \tilde{q} \\
\Delta \dot{h} &= u \Delta \Theta - \Delta \tilde{w}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

који се може записати у облику једначине стања система:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\Theta} \\ \Delta \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_w & u + z_q & 0 & 0 \\ m_w & m_q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{w} \\ \Delta \tilde{q} \\ \Delta \Theta \\ \Delta \tilde{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_\delta \\ m_\delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \delta_z. \tag{4.67}$$

Једначина (4.67) се даље може записати и у другим формама, нпр. у облику преносне функције система, и вршити анализа динамичких карактеристика система.

За случај посматране ракете Оркан, аеродинамички деривативи (4.51) - (4.60) у функцији од Маховог броја дати су у прилогу А.

## Глава 5.

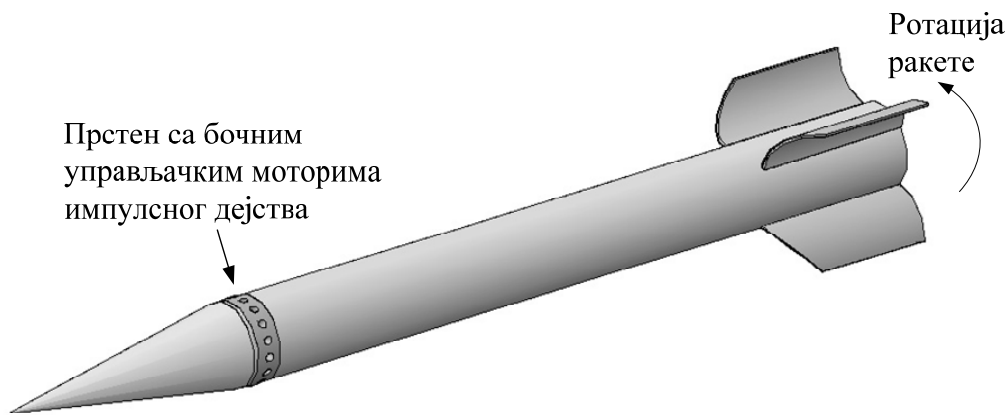
### ИМПУЛСНО УПРАВЉАЊЕ

Артиљеријске ракете су подложне великом расипању погодака услед многобројних поремећаја који делују на целокупан ракетни систем, као што је описано у другом поглављу. Поремећај почетних вредности угаоних брзина и просторних углова ракете након изласка из лансирне цеви су последица параметара лансера. Величине дезаксијалности потиска и одступања тоталног импулса су везане за процес и квалитет израде ракете. Одступање брзине ветра од измерене вредности, која се у одређеним условима лета ракете и не може прецизно да одреди, је случајна величина.

Артиљеријске ракете малог домета немају проблем прецизности, јер се иначе не користе за гађање тачкастих циљева већ за гађање области, па је одређена, умерена, вредност дисперзије погодака прихватљива. Са повећањем домета, величина одступања погодака је све израженија и прети да угрози употребљивост таквих ракетних система.

Један од начина борбе против великог растурања је увођење упрошћеног управљачког система за корекцију путање пројектила у току лета. Основни захтев за такве управљачке системе је да се могу једноставно надоградити на постојеће невођене артиљеријске ракете, да буде робустан, једноставан и ниске цене. Ова проблематика је интензивно разматрана у претходном периоду и то пре свега кроз развој управљачких система намењених паметној муницији. Такође, континуиран развој микро електро механичких система (МЕМС) указује на могућност уградње комплетног система сензора и на пројектиле малих и средњих калибара. На пољу управљачких механизма, уложени су значајни напори за реализовање нових иновативних решења. Примењени концепти обухватају реактивне импулсе [1,6], синтетизоване млазове [7], аеродинамичке кочнице [8,9], извлачеће иглице [10,11], покретни нос [12], канаре [13], двоструко ротирајуће пројектиле [14,15], набојно ваздушно покретање [16], и унутрашњу покретну масу [17].

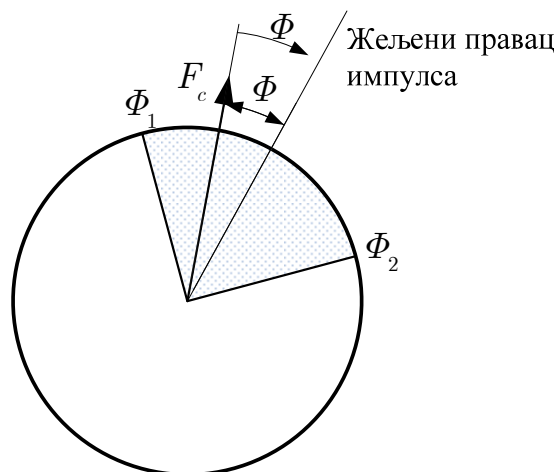




Слика 5.1. Управљање реактивним импулсом

Концепт управљања реактивним импулсима је анализиран у случају ракете за директно гађање [1,6], као и у случају артиљеријских ракета са положеном путањом [3].

Управљачки систем се састоји од одређеног броја ракетних мотора импулсног дејства, распоређених по прстену на обиму ракете. Сваки импулсни мотор делује на ракету једнократно, у одређеном тренутку, силом великог интензитета и кратког времена дејства, која лежи у равни управној на осу симетрије ракете. Правац вектора импулса у тој равни одређен је жељеним правцем корекције трајекторије. Импулсно управљање је једино могуће применити на ротирајуће ракете, како би сваком импулсу било омогућено да делује у произвољном правцу у равни нормалној на осу ракете. Овај захтев је испуњен за артиљеријске ракете, код којих се принудним ваљањем смањује утицај дезаксијалности потиска на промашај.



Слика 5.2. Управљачка сила и њен импулс

Сваки од управљачких ракетних мотора има тотални импулс  $I_c$ . Уколико се претпостави да је интензитет силе потиска константан током рада управљачког мотора и износи  $F_c$ , онда је дужина трајања импулса  $\tau_I = I_c/F_c$ . Импулс управљачке силе  $I_F$  је увек мањи од тоталног импулса мотора, због губитака везаних за ротацију ракете. Наиме, једино пројекција силе на правац импулса је корисна:

$$I_F = \int_{t_1}^{t_2} F_c \cos \Phi dt \quad (5.1)$$

Уколико се претпостави да је угаона брзина ваљања константна  $\dot{\Phi} = \text{const}$ , израз за импулс управљачке силе је:

$$I_F = \frac{F_c}{\dot{\Phi}} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \cos \Phi d\Phi = \frac{F_c}{\dot{\Phi}} (\sin \Phi_2 - \sin \Phi_1). \quad (5.2)$$

Уколико претпоставимо да је  $\Phi_1 = -\Phi_K$ ;  $\Phi_2 = \Phi_K$ , имамо:

$$I_F = 2 \frac{F_c}{\dot{\Phi}} \sin \Phi \quad (5.3)$$

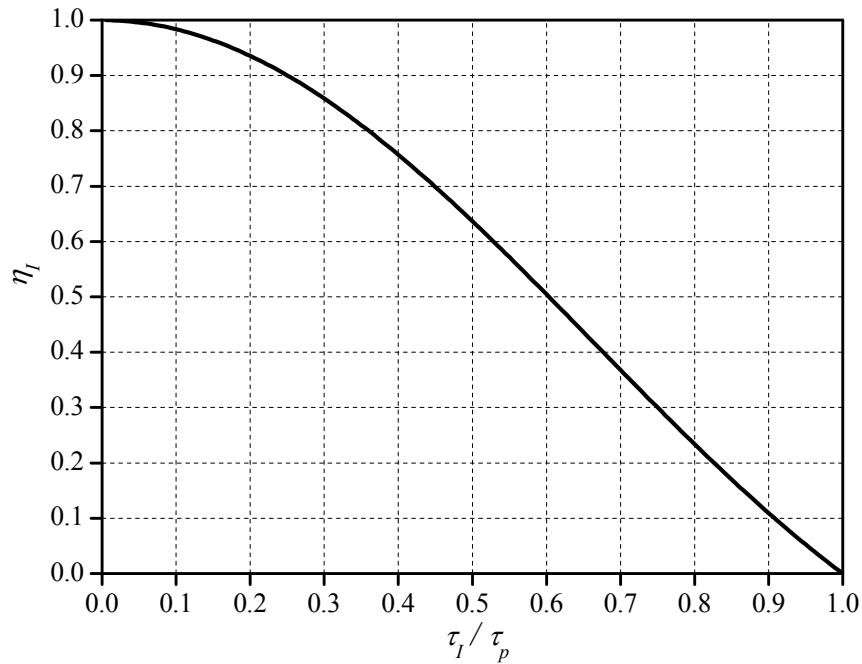
Са друге стране  $I_c = F_c \tau_I = 2F_c \frac{\Phi}{\dot{\Phi}}$ , па је степен искоришћења импулсног мотора

$$\eta_I = \frac{I_F}{I_c} = \frac{\sin \Phi}{\Phi}. \quad (5.4)$$

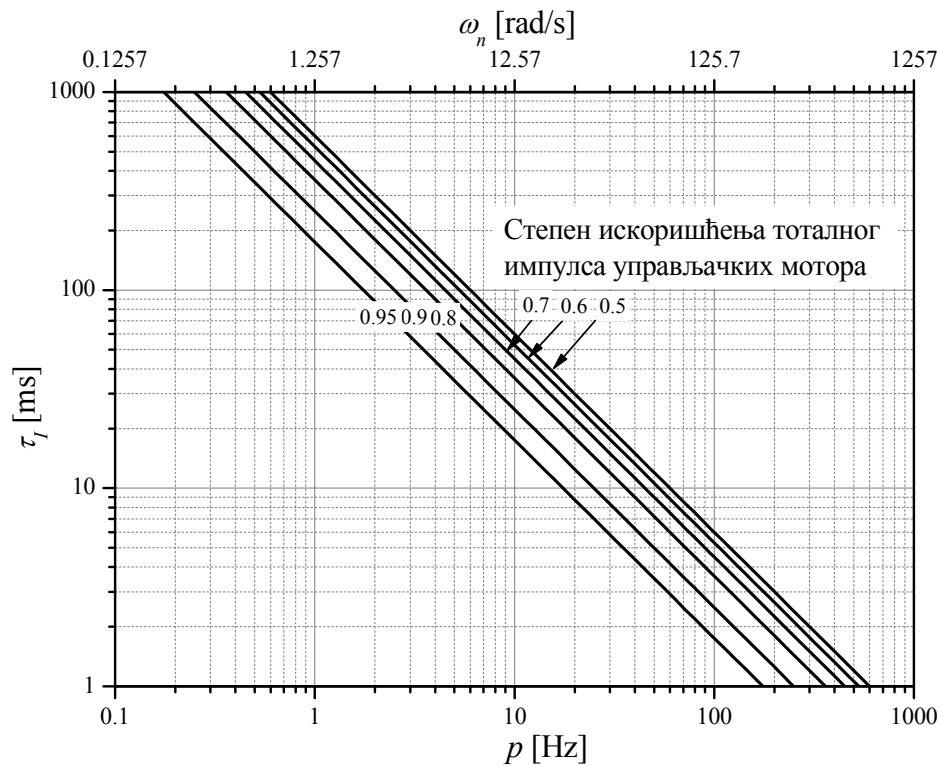
На слици 5.3 приказана је зависност степена искоришћења импулсног мотора од односа трајања импулса и периода ротације ракете  $\frac{\tau_I}{\tau_p} = \frac{\Phi}{\pi}$ . Дужина трајања

импулса зависи од врсте и конструктивних параметара примењених ракетних мотора и не може да буде бесконачно кратка. Са слике 5.3 се види да се за однос  $\tau_I/\tau_p = 0.175$  добија  $\eta_I = 0.95$ . Са друге стране, период ваљања  $\tau_p = 2\pi/p$  је одређен угаоном брзином ваљања, која не може да има превише мале вредности. Неопходно је да угаона брзина ваљања буде значајно већа или значајно мања од сопствене учестаности кратко-периодичних осцилација  $\omega_n$ , како код ракете не би долазило до резонантног поклапања осцилација. Варијанта  $p \ll \omega_n$  није применљива у пракси због лошег ефекта на смањење утицаја дезаксијалности потиска на промашај и компликација у логици активирања импулса, где би се појавио проблем чекања мотора који није већ одрадио. У пракси се узима  $p = k_p \omega_n$ ,

$$k_p = 5 \div 10.$$



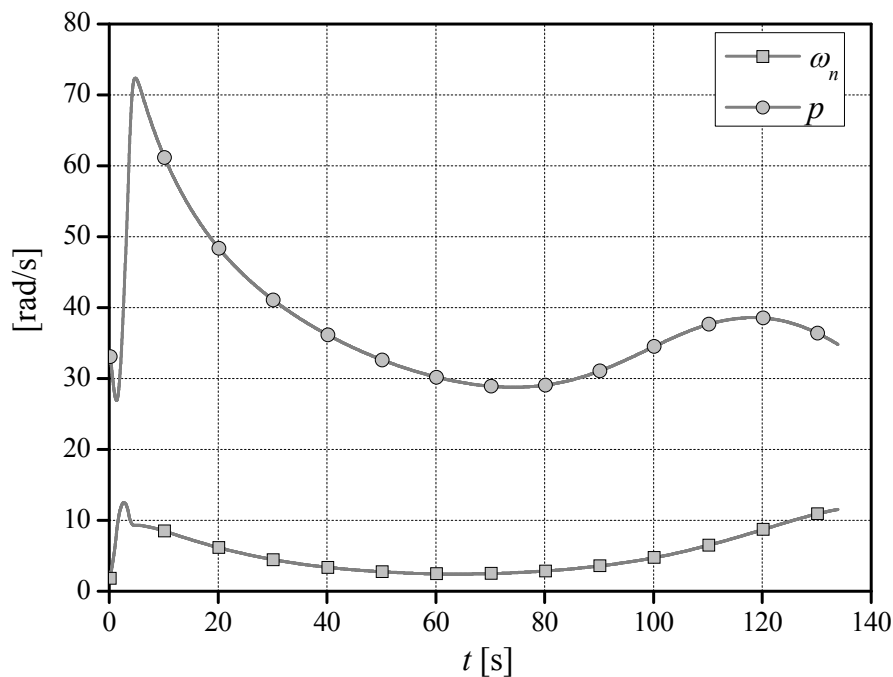
Слика 5.3. Степен искоришћења тоталног импулса управљачког мотора.



Слика 5.4. Трајање импулса управљачких мотора у зависности од степена искоришћења.

На слици 5.4 је приказана вредност трајања импулса управљачких мотора за

вредности степена искоришћења импулсних мотора од  $\eta_I = 0.5$  до  $\eta_I = 0.95$ , у зависности од угаоне брзине ваљања  $p$  [Hz]. Као илустрација, приказане су и одговарајуће вредности сопствених учестаности кратко-периодичних осцилација ракете за случај да су вредности угаоне брзине ваљања изабране према захтеву  $p = 5\omega_n$ . Вредност  $\omega_n$  за ракету Оркан је дата на слици 5.5 и креће се у границама од  $2.5 \div 12 \text{ rad/s}$ . Вредност угаоне брзине ваљања је такође дата на слици 5.5 и може бити у опсегу  $p = 4.5 \div 11.5 \text{ Hz}$ . Са тим опсегом брзина, за постизање  $\eta_I \geq 0.9$  је потребно да је време трајања импулса  $\tau_I \leq 30 \text{ ms}$ .



Слика 5.5 угаона брзина ваљања и природна учестаност на путањи са максималним дометом.

## Глава 6.

# ОДЗИВ РАКЕТЕ НА ИМПУЛСНУ КОМАНДУ

Уколико је трајање импулса управљачких ракетних мотора  $\tau_I$  довољно мало у односу на сопствену учестаност кратко-периодичних осцилација, дејство импулса се може веродостојно представити Дираковом импулсном функцијом  $\delta(t)$ , а кретање система након такве побуде је импулсни одзив система. Уколико се примени линеаризовани математички модел лета ракете, могуће је једнозначно одредити његов импулсни одзив и карактеристике прелазног процеса у зависности од величине управљачког импулса.

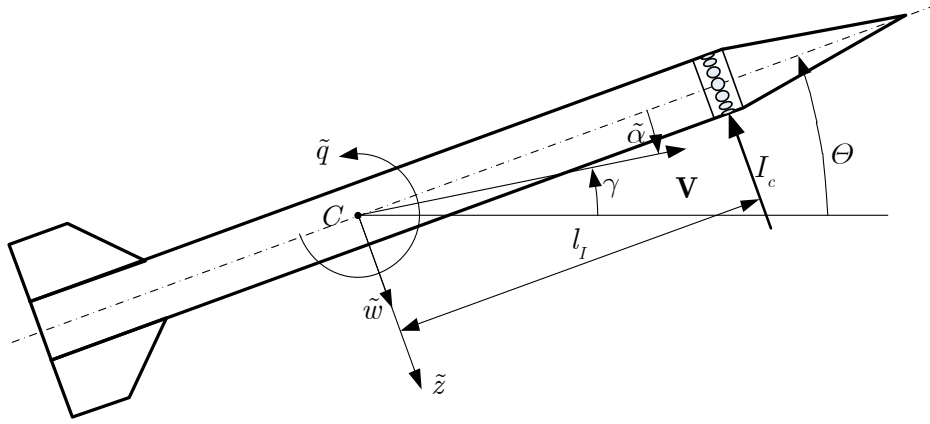
Проблематика промене путање пројектила услед дејства бочног импулса је детаљно разматрана у претходном периоду. Разматрана су решења линеаризованих модела кретања пројектила са 6 степени слободе. Посматрани су крилима стабилисани тенковски пројектил [18] и жироскопски стабилисани подцевни пројектил [19] подвргнути дејству управљачког импулса, као и генерални случај скретања пројектила подвргнутог деловању бочне силе [20]. Сви ови случајеви се односе на пројектиле за директно гађање, који се крећу по положеним путањама блиским линији визирања, и дају зависност њиховог бочног померања од управљачких сила или импулса. У случају артиљеријске ракете, примењује се корекција путање, па је од интереса посматрање промене угла брзине у зависности од контролног импулса.

Предмет ове анализе је одређивање карактеристичних величина импулсног одзива ракете, који су од значаја за даљу синтезу система корекције трајекторије. Те величине се мењају са променом параметара математичког модела ракете, који се мењају са висином и брзином ракете. У зависности од изабраног принципа корекције трајекторије, управљање може да се примењује у разним тренуцима лета, којима одговарају различите вредности брзине ракете и њене висине, односно густине ваздуха. Све величине биће дате за један карактеристични случај лета, који одговара путањи са максималним дометом, за целу путању ракете, од краја активне фазе до краја лета.

Артиљеријске крилима стабилисане ракете погодне за управљање реактивним импулсима се крећу са умереним угаоним брзинама ваљања, што је последица са једне стране потребе за смањењем утицаја дезаксијалности потиска, а са друге стране саме могућности командовања импулсима са коначним временом трајања. Самим тим, посматрање раванског кретања ракете даје довољно тачне резултате,

па је примењено у следећој анализи.

На слици 6.1 приказано је дејство управљачког импулса у вертикалној равни и све кинематске величине у вертикалној равни.



Слика 6.1. Управљање реактивним импулсом

Посматрајући кретање ракете у вертикалној равни, уочавамо следеће величине: вектор брзине ракете  $\mathbf{V}$ , његову пројекцију на  $\tilde{z}$  осу аеробалистичког координатног система  $\tilde{w}$ , угао пропињања  $\Theta$ , угао брзине  $\gamma$  и нападни угао  $\tilde{\alpha}$ , угаону брзину пропињања  $\tilde{q}$  и положај прстена са импулсним моторима у односу на центар масе ракете  $l_I$ . Услед дејства управљачког импулса  $I_c$ , ракета ће добити прираст брзине и угаоне брзине пропорционалне интензитету тог импулса. Без губитка општости, претпоставља се да његов вектор лежи у вертикалној равни. Прираст пројекције брзине ракете на  $\tilde{z}$  осу и прираст пројекције угаоне брзине на хоризонталну  $\tilde{y}$  осу аеробалистичког координатног система (угаона брзина пропињања) су:

$$\Delta \tilde{w} = -\frac{I_c}{m}, \quad (6.1)$$

$$\Delta \tilde{q} = I_c \frac{l_I}{J_y}, \quad (6.2)$$

где су  $\Delta \tilde{w} = \tilde{w}_0^+ - \tilde{w}_0^-$  и  $\Delta \tilde{q} = \tilde{q}_0^+ - \tilde{q}_0^-$  разлике одговарајућих величина непосредно пре и после импулса. Маса ракете је  $m$ , а момент инерције око осе  $Cy$  је  $J_y$ .

Без губитка општости можемо да узмемо да је  $\tilde{w}_0^- = \tilde{q}_0^- = 0$ .

Линеаризовани модел кретања ракете описан је системом једначина (4.62). Посматрајући кретање само у вертикалној равни, имамо:

$$\dot{\tilde{w}} = z_w \tilde{w} + u \tilde{q} \quad (6.3)$$

$$\dot{\tilde{q}} = m_w \tilde{w} + m_q \tilde{q} \quad (6.4)$$

уз почетне услове дефинисане са:

$$\tilde{w}_0 = -\frac{1}{m} \cdot I_c, \quad \tilde{q}_0 = \frac{l_I}{J_y} \cdot I_c. \quad (6.5)$$

Приметимо да су почетни услови линеарне функције управљачког импулса  $I_c$ . Самим тим, сви параметри импулсног одзива система линеарних диференцијалних једначина (6.3), (6.4) линеарно зависе од интензитета импулса.

Од посебног интереса је разматрање кретања нападног угла  $\tilde{\alpha}(t)$  и угла брзине  $\gamma(t)$  током импулсног одзива система. Показатељи осцилаторности прелазног процеса – непригушена амплитуда осцилација, период осцилација и време смирења су значајни када је у питању промена нападног угла, док је у случају промене угла брзине најзначајнија трајна промена угла, која остаје након завршетка прелазног процеса.

### Импулсни одзив ракете - промена нападног угла

Решење система линеарних диференцијалних једначина (6.3) - (6.5) је дато изразима (6.6) и (6.15):

$$\tilde{q}(t) = A_q e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega_e t + \varphi_q), \quad (6.6)$$

где су:

$$\omega_n^2 = m_q z_w - m_w u \quad (6.7)$$

$$\zeta_n = -\frac{z_w + m_q}{2\omega_n} \quad (6.8)$$

$$\omega_e = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad (6.9)$$

$$\varphi_q = \tan^{-1} \left( \frac{C_1}{C_2} \right) \quad (6.10)$$

$$A_q = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad (6.11)$$

$$C_1 = \frac{m_w \tilde{w}_0 + (m_q + \zeta_n \omega_n) \tilde{q}_0}{\omega_e} = \frac{-\frac{m_w}{m_R} + (m_q + \zeta_n \omega_n) \frac{l_I}{J_y}}{\omega_e} I_c \quad (6.12)$$

$$C_2 = \tilde{q}_0 = \frac{l_I}{J_y} I_c \quad (6.13)$$

Коефицијенти  $C_1$  и  $C_2$ , који зависе од почетних услова, су линеарне функције управљачког импулса  $I_c$ , па је самим тим то и непригушена вредност амплитуде осцилација угаоне брзине пропињања  $A_q$ , дефинисана једначином (6.11).

Нападни угао дефинисан са

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{\tilde{w}}{V} \quad (6.14)$$

добиа се као решење система (6.3) - (6.5):

$$\tilde{\alpha}(t) = A_\alpha e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega_e t + \varphi_\alpha) \quad (6.15)$$

где је:

$$A_\alpha = \frac{-1}{m_w u} \sqrt{(m_q^2 + 2m_q \zeta_n \omega_n + \omega_n^2)(C_1^2 + C_2^2)} \quad (6.16)$$

$$\varphi_\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{(m_q + \zeta_n \omega_n) C_2 - \omega_e C_1}{(m_q + \zeta_n \omega_n) C_1 + \omega_e C_2} \right) \quad (6.17)$$

На основу једначина (6.12), (6.13) и (6.16) следи да је непригушена амплитуда осцилација линеарна функција управљачког импулса  $I_c$ :

$$A_\alpha = K_\alpha I_c \quad (6.18)$$

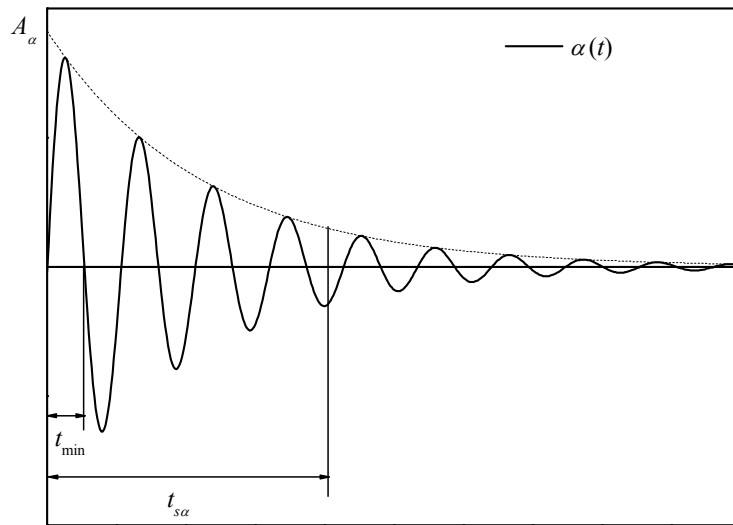
$$K_\alpha = \frac{-1}{m_w U} \sqrt{(m_q^2 + 2m_q \zeta_n \omega_n + \omega_n^2)} \cdot \frac{l_I}{J_y \omega_e} \sqrt{\left( -\frac{m_w J_y}{m_R l_I} + (m_q + \zeta_n \omega_n) \right)^2 + \omega_e^2} \quad (6.19)$$

Прелазни процес величине нападног угла при дејству управљачког импулса је од посебне важности за импулсно управљање ракета. Приказан је на слици 6.2. Карактеришу га непригушена амплитуда осцилација  $A_\alpha$  и време смирења  $t_{s\alpha}$ .

Приликом сваког импулса, ракета заузима велики нападни угао. Непригушена амплитуда осцилација нападног угла се јавља као ограничавајући фактор при импулсном управљању. У случају да се захтева да максимална амплитуда осцилација нападног угла не пређе неку задату вредност  $A_\alpha \leq A_d$ , интензитет управљачког импулса је одређен са:

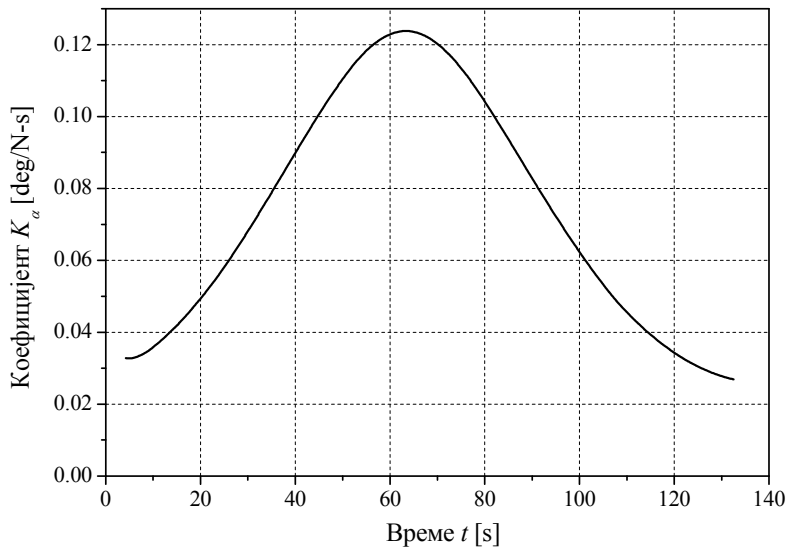
$$I_c \leq \frac{A_d}{K_\alpha} \quad (6.20)$$





Слика 6.2. Импулсни одзив по нападном углу.

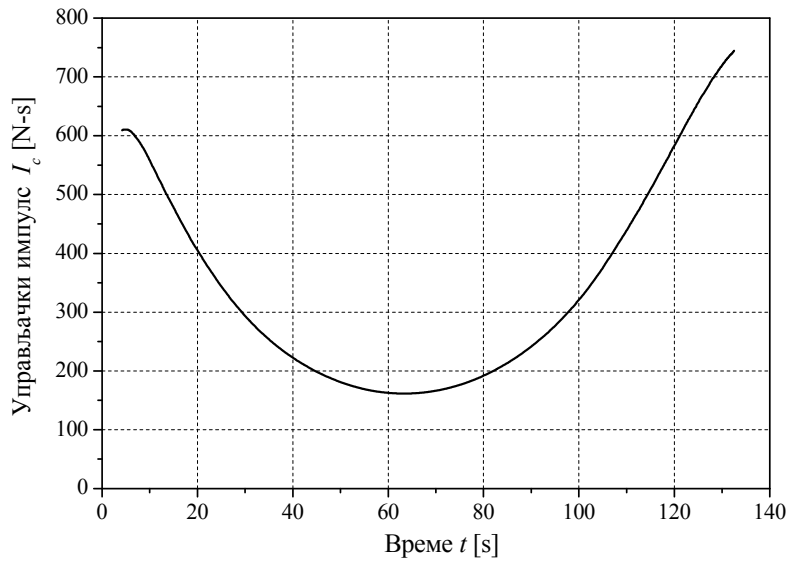
На слици 6.3 приказана је вредност коефицијента непригушене амплитуде осцилација  $K_\alpha$  за посматрани пример ракете Оркан на путањи са максималним дометом.



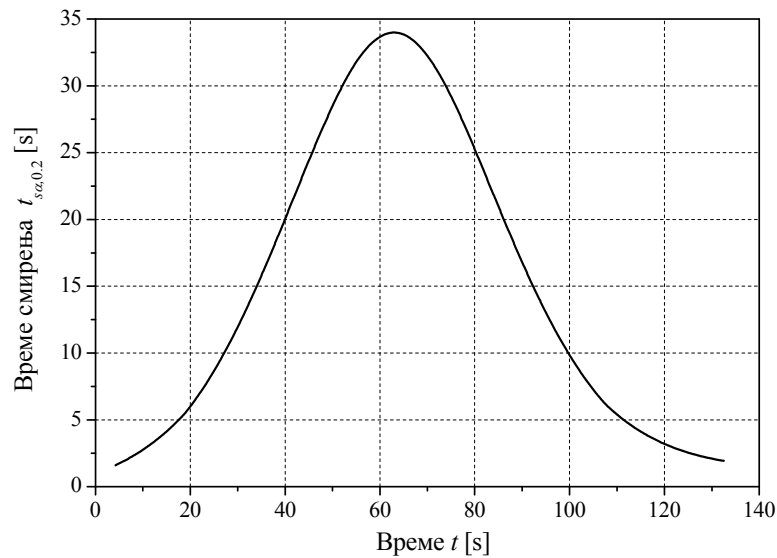
Слика 6.3. Вредност коефицијента непригушене амплитуде осцилација нападног угла  $K_\alpha$  током лета ракете при максималном домету.

У случају  $A_d = 20^\circ$ , максимални управљачки импулс је дат на слици 6.4. На основу овог дијаграма могуће је одабрати интензитет управљачких импулса за жељени период лета у коме се врши управљање. Уколико се импулсно управљање користи за продужење домета, па је неопходно интензивно управљање на већем делу трајекторије, намеће се као потенцијално и решење са два различита нивоа

управљачког импулса.



Слика 6.4. Вредност управљачког импулса за непригушену амплитуду осцилација  $A_d = 20^\circ$ .



Слика 6.5. Време смирења  $t_{sa,0.2}$

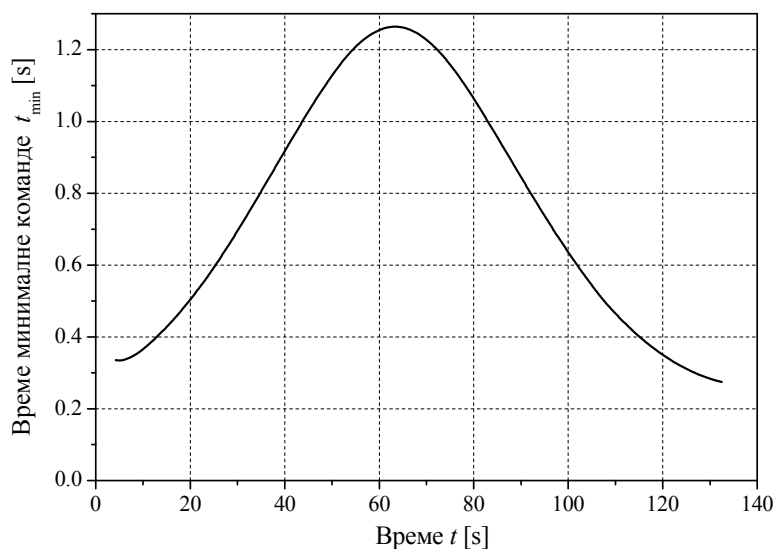
Време смирења се дефинише као време потребно да се амплитуда осцилација смањи на неку унапред задату вредност у односу на непригушену вредност. Из једначине (6.15), за  $k_p = A_\alpha / A_{\alpha,0} = 0.2$ , имамо:

$$t_{sa,0.2} = -\frac{\ln 0.2}{\zeta_n \omega_n} \quad (6.21)$$

Вредности времена смирења дефинисане једначином (6.21) за одабрани при-

мер лета ракете по путањи са максималним дометом дате су на слици 6.5.

На основу горе наведеног (слика 6.3 и 6.5) јасно је да импулсно командовање на већим висинама, где је атмосфера разређена, проузрокује велике амплитуде нападаог угла, које се веома мало пригушују. Велика средња вредност нападаог угла, у том случају, утиче на повећање отпора, а самим тим и на смањење домета.



Слика 6.6. Време минималне команде  $t_{\min}$ .

Један од начина да се тај проблем превазиђе је да се не врши никакво управљање док се ракета не спусти у ниже слојеве атмосфере. У том случају могуће је да је почетно одступање ракете од жељене трајекторије на почетку фазе управљања веома велико и да га није могуће компензовати само једним импулсом. У том случају долази до формирања поворке импулса, која би могла да доведе до слагања њиховог дејства и постизања веома великих вредности нападаог угла. Битна карактеристика логике командовања, у том случају, је минимално време између два узастопна импулса  $t_{\min}$  (слика 6.2). Уколико би то време било једнако четвртини периоде осцилација нападаог угла, дошло би до сабирања ефеката и постизања веома високих вредности амплитуда. Због тога се поставља као услов да минимално време између два импулса одговара половини периода осцилација, када угаона брзина пропињања има максималну вредност у супротном смеру од дејства управљачког импулса:

$$t_{\min} = \frac{\pi}{\omega_e} \quad (6.22)$$

На слици 6.6 приказана је вредност минималног времена између два узастопна импулса одређена по једначини (6.22) и (6.7) - (6.9). Уколико се примењује

управљачка шема са командовањем током целог лета, минимално време је ограничено великом вредношћу која се добија на темену путање. У случају командовања одмах након завршетка активне фазе, као и у силазном делу путање, могуће је применити и знатно краћа времена и згуснути импулсе у циљу добијања адекватне корекције путање.

### Импулсни одзив ракете - промена угла брзине

Систем линеарних диференцијалних једначина (6.3), (6.4) са почетним условима дефинисаним једначином (6.5) има решење по угаоној брзини пропињања дефинисано једначинама (6.6) - (6.13). Угао пропињања  $\Theta$  се добија као интеграл угаоне брзине  $\tilde{q}$  :

$$\Theta(t) = \int \tilde{q}(t) dt, \quad \Theta(0) = 0 \quad (6.23)$$

Решавањем горњег интеграла, добија се:

$$\Theta(t) = \Theta_{\infty} + A_{\Theta} e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega_e t + \varphi_{\Theta}) \quad (6.24)$$

где су:

$$A_{\Theta} = \frac{A_q}{\omega_n} = \frac{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}{\omega_n} \quad (6.25)$$

$$\varphi_{\Theta} = \varphi_q - \tan^{-1} \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta_n^2}} = \tan^{-1} \left( \frac{C_1^2}{C_2^2} \right) - \tan^{-1} \sqrt{1 - \frac{1}{\zeta_n^2}} \quad (6.26)$$

$$\Theta_{\infty} = A_{\Theta} \sin \varphi_{\Theta} = \frac{C_1 \omega_e + C_2 \zeta_n \omega_n}{\omega_n^2} \quad (6.27)$$

Угао вектора брзине  $\gamma$  је једнак разлици угла пропињања и нападног угла:

$$\gamma(t) = \Theta(t) - \alpha(t) = \gamma_{\infty} + A_{\gamma} e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\omega_e t + \varphi_{\gamma}) \quad (6.28)$$

где су:

$$\gamma_{\infty} = \Theta_{\infty} = \frac{C_1 \omega_e + C_2 \zeta_n \omega_n}{\omega_n^2} \quad (6.29)$$

$$\varphi_{\gamma} = \tan^{-1} \frac{A_{\Theta} \sin \varphi_{\Theta} - A_{\alpha} \sin \varphi_{\alpha}}{A_{\Theta} \cos \varphi_{\Theta} - A_{\alpha} \cos \varphi_{\alpha}} \quad (6.30)$$

$$A_\gamma = \frac{A_\theta \sin \varphi_\theta - A_\alpha \sin \varphi_\alpha}{\sin \varphi_\gamma} \quad (6.31)$$

Дејствовањем једног управљачког импулса интензитета  $I_c$ , угао брзине се трајно промени за  $\gamma_\infty$ , дефинисано изразом (6.29). Како су величине  $C_1$  и  $C_2$  линеарне функције импулса  $I_c$  (једначине (6.12) и (6.13)), онда је то и  $\gamma_\infty$ , па важи:

$$\gamma_\infty = K_{\gamma_\infty} I_c, \quad (6.32)$$

где је:

$$K_{\gamma_\infty} = \frac{1}{I_c} \frac{C_1 \omega_e + C_2 \zeta_n \omega_n}{\omega_n^2} \approx \frac{1}{mU} \left( 1 + \frac{z_w l_I m}{m_w J_y} \right) \quad (6.33)$$

Овај израз је добијен уз претпоставку  $-m_w U \gg m_q z_w$ , тј  $\omega_n^2 \approx -m_w U$ . Како су динамички коефицијенти дефинисани са:

$$z_w = \frac{\partial \tilde{Z} / \partial \tilde{w}}{m} = -\frac{QS}{m} \frac{1}{U} \frac{\partial C_{\tilde{N}}}{\partial \tilde{\alpha}}, \quad (6.34)$$

$$m_w = \frac{\partial \tilde{M} / \partial \tilde{w}}{J_y} = \frac{Q S d}{J_y} \frac{1}{U} \frac{\partial C_{\tilde{m}}}{\partial \tilde{\alpha}}, \quad (6.35)$$

$$m_q = \frac{\partial \tilde{M} / \partial q}{J_y} = \frac{Q S d^2}{J_y} \frac{1}{U} \left[ \frac{\partial C_{\tilde{m}}}{\partial q} \right], \quad (6.36)$$

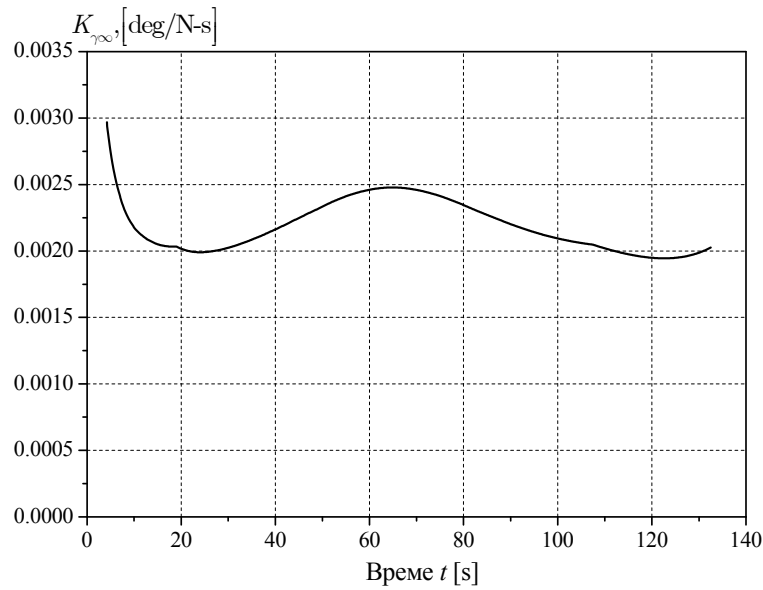
израз (6.33) постаје:

$$K_{\gamma_\infty} \approx \frac{1}{mU} \left( 1 - \frac{l_I}{d} \frac{C_{N\alpha}}{C_{m\alpha}} \right) \quad (6.37)$$

Коефицијент  $K_{\gamma_\infty}$  представља меру управљивости ракете бочним импулсом и величину коју треба максимизирати приликом дизајна ракете. Обзиром да су аеродинамички деривативи  $C_{N\alpha}$  и  $C_{m\alpha}$  супротног знака, максимизирање израза (6.37) подразумева максимизирање односа растојања импулса од центра масе ракете и референтне дужине (пречника) ракете, тј уградњу прстена са управљачким моторима што ближе врху ракете. Такође, максимизирање  $C_{N\alpha} / |C_{m\alpha}|$  подразумева такву аеродинамичку конфигурацију са што већим узгоном и што мањом резервом стабилности.

На слици 6.7 приказане су вредности коефицијента  $K_{\gamma_\infty}$  током лета ракете по

путањи са максималним дометом. Као што је приказано, управљање је најефикасније одмах након активне фазе, али је, у принципу, могуће и на деловима путање када се ракета налази на већим висинама. Поредиши варијацију параметра  $K_{\gamma_\infty}$  на путањи са променама других параметара импулсног одзива,  $K_\alpha$ ,  $t_{s\alpha,0.2}$  и  $t_{\min}$  (слике 6.4, 6.5, 6.6), намеће се закључак да је тај параметар прилични инваријантан са висином и брзином ракете. Уколико се, међутим, јавља потреба за веома интензивним управљањем, као нпр. у случају продужења домета, ограничавајући фактор је амплитуда нападног угла ракете (једначине (6.16), (6.18) и (6.19), слике 6.3, 6.4).



Слика 6.7. Коефицијент промене угла брзине  $K_{\gamma_\infty}$ .

Израз за коефицијент амплитуде непригушених осцилација нападног угла (6.19) се може упростити уз претпоставку да је  $C_2 \gg C_1$ , односно  $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \approx C_2$ . На слици 6.8 приказан је однос коефицијената  $C_1$  и  $C_2$  током лета ракете по путањи са максималним дометом.

Коефицијент  $C_2$  је константан и представља прираст угаоне брзине пропињања ракете услед дејства импулса интензитета  $I_c$ . Уколико претпоставимо да је  $\omega_e \approx \omega_n \approx \sqrt{-m_w U}$ , онда имамо:

$$\frac{C_1}{C_2} = \left( \frac{2m_w r_y^2}{l_I} + m_q - z_w \right) \frac{1}{2\sqrt{-m_w U}}, \quad (6.38)$$

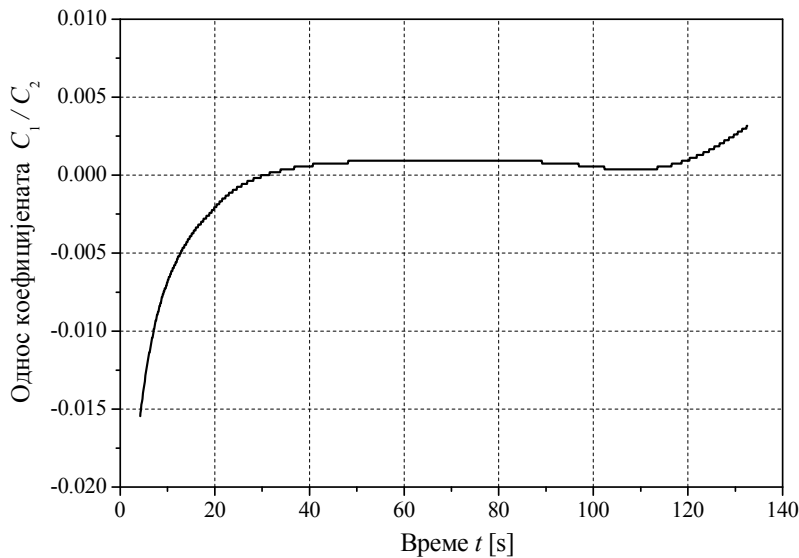
где је  $r_y$  полупречник инерције око попречне осе. Корен брзине ракете је за два реда величине већи од осталих величина у изразу са десне стране једначине (6.38),

тако да важи  $C_2 \gg C_1$ . Онда је на основу једначина (6.16) и (6.18):

$$K_\alpha = \frac{-1}{m_w U} \sqrt{(m_q^2 + 2m_q \zeta_n \omega_n + \omega_n^2)} \frac{C_2}{I_c}, \quad (6.39)$$

па уз већ усвојено поједностављење  $\omega_n^2 \approx -m_w U$ , имамо:

$$K_\alpha = \frac{l_I}{J_y \sqrt{-m_w U}} = \frac{l_I \sqrt{2}}{U \sqrt{J_y \rho S d |C_{m\alpha}|}} \quad (6.40)$$



Слика 6.8. Однос коефицијената  $C_1/C_2$

Коефицијент  $K_\alpha$  представља меру осцилаторности импулсног одзива ракете и приликом дизајна га треба минимизирати. За разлику од  $K_{\gamma_\infty}$ , овај коефицијент зависи и од густине ваздуха, па је јако променљив у зависности од висине лета. Минимизирање  $K_\alpha$  подразумева смањење  $l_I$  и повећање  $C_{m\alpha}$ , што је у супротности са захтевима за максимизирање  $K_{\gamma_\infty}$ . Како је густина ваздуха најпроменљивији фактор у изразу за  $K_\alpha$ , намеће се као закључак да је на вредност непригушене амплитуде осцилација нападног угла веома тешко утицати дизајном ракете, те да импулсно управљање на великим висинама сигурно производи велике амплитуде осцилација нападног угла, које се, узимајући у обзир и велико време смирења на великим висинама (слика 6.5), веома слабо пригушују.

## Глава 7.

# ВОЂЕЊЕ РАКЕТА СА РЕАКТИВНИМ ИМПУЛСНИМ УПРАВЉАЊЕМ

Невођене ракете намењене за директно или индиректно гађање се карактеришу великим растурањем погодака услед велике осетљивости на поремећаје који настају приликом лансирања, у активној фази лета (док ради ракетни мотор), и, у мањој мери, у фази слободног лета. Та њихова карактеристика чини да се оне користе за гађање целе одређене области (артиљеријске), или се, за гађање појединачних циљева директном ватром, употребљава већи број ракета.

На артиљеријске и ракете за директно гађање могуће је применити упрошћени систем вођења, и то не са циљем прецизног вођења и директног поготка у тачности циљ, већ смањења дисперзије погодака и смањења броја ракета потребних за погађање циља. Такав, поједностављени систем вођења мора да задовољи следеће захтеве:

- Могућност једноставне уградње на постојеће ракете,
- Ниска цена и маса уређаја,
- Висока поузданост.

Управљачки систем представљен у 5. поглављу намењен је за примену у таквим, упрошћеним системима вођења. Такви системи вођења се састоје од прстена са импулсним ракетним моторима као извршног органа, рачунара за вођење, сензора и, евентуално, инерцијалног навигационог система. Предложени управљачки систем задовољава све горе постављене услове и може се употребити у склопу различитих принципа вођења.

Специфичности оваквог управљачког система огледају се у чињеници да се он састоји од ограниченог броја реактивних импулсних мотора. Сваки од њих може да делује на ракету краткотрајним импулсом, једнократно, у одређеном временском тренутку. Интензитет импулса је исти за сваки посматрани мотор. Уколико се овакав управљачки систем угради на ротирајућу ракету, и уколико је угаона брзина ваљања у границама описаним у глави 5, правци дејства импулса реактивних сила управљачких мотора се могу ефикасно контролисати.

Системи вођења засновани на реактивном импулсном управљању су се нашли као предмет истраживања у претходном периоду. Harkins и Brown [6] су развили



једноставан принцип вођења са импулсним управљањем са циљем смањења растурања погодака ракета за директно гађање, које настаје услед одступања угаоних брзина на изласку из лансера. Такав систем управљања користи само сензор угаоне брзине у повратној спрези. Применом таквог система корекције путање, растурање погодака је смањено 4 пута. Jitgraphai и Costello [1] су анализирали исти проблем користећи закон вођења са праћењем путање. Такав закон вођења захтева да ракета буде опремљена инерцијалном мерном јединицом, и у зависности од примењене конфигурације импулса, смањује растурање и до 100 пута. Calise и El-Shirbiny [21] су развили принцип управљања са бочним импулсима за ротацијом стабилисан пројектил лансиран из топовске цеви, заснован на пропорционалној навигацији, модификован тако да узима у обзир савијање трајекторије услед гравитације. Jitgraphai и сар. [2] су дали поређење различитих метода вођења у случају ракета за директно гађање. Gupta и сар. [3] су дали анализу вођења по трајекторији за артиљеријске ракете, али само у случају гађања на малим дOMETИМА, са малим углом елевације лансера, при чему се артиљеријске ракете не разликују битно од ракета за директно гађање. Glebocki и Vogt [22] су представили управљачки систем за минобацачки пројектил са импулсним реактивним управљањем, који се заснива на поједностављеној бесплатформној ИЦ глави за реализацију директног вођења. Burchett и Costello [23] су предложили управљачки систем са предикцијом кретања система, који се заснива на линеарној теорији пројектила употребљеној да се у реалном времену израчуна падна тачка пројектила. У овој глави представљени су неки од поменутих закона вођења и могућност њихове примене на управљачке системе са реактивним импулсима.

### Пропорционална навигација

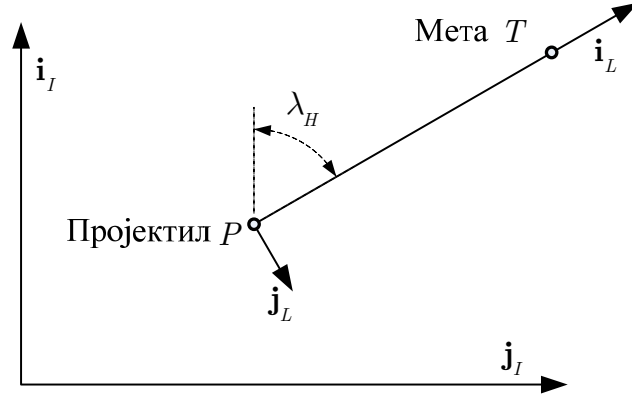
Развијена за време Другог светског рата, пропорционална навигација је класична метода за вођење тактичких и стратешких ракета. Овакав систем вођења подразумева да су командна убрзања, која се израчунавају током лета, пропорционална угаоној брзини линије визирања  $\dot{\lambda}$  и брзини приближавања циљу  $V_c$ . Такав закон вођења може да се математички представи на следећи начин:

$$A_c = N \cdot V_c \cdot \dot{\lambda}, \quad (7.1)$$

где  $N$  представља константу пропорционалне навигације, која типично узима вредности између 3 и 5.

Посматрајући кретање у хоризонталној равни, закон управљања пропорционалне навигације може се добити према слици 7.1. Тачка  $P$  представља пројектил, који

је испален из лансера ка циљу, у тачки  $T$ . Координатни систем линије визирања  $(\mathbf{i}_L, \mathbf{j}_L, \mathbf{k}_L)$  се дефинише са почетком у тачки  $P$ . Јединични вектор  $\mathbf{i}_L$  лежи на пројекцији линије која спаја пројектил и циљ на хоризонталну раван. Јединични вектор  $\mathbf{j}_L$  лежи у хоризонталној равни, а вектор  $\mathbf{k}_L$  је усмерен вертикално наниже.



Слика 7.1. Координатни систем линије визирања.

Релација између инерцијалног координатног система и координатног система линије визирања дата је преко матрице трансформације, дате следећом једначином:

$$\begin{Bmatrix} \dot{i}_I \\ \dot{j}_I \\ \dot{k}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_H & -\sin \lambda_H & 0 \\ \sin \lambda_H & \cos \lambda_H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{j}_L \\ \dot{k}_L \end{Bmatrix} = [T_{LI}] \begin{Bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{j}_L \\ \dot{k}_L \end{Bmatrix}, \quad (7.2)$$

где су  $\lambda_H$  и  $\dot{\lambda}_H$  дефинисане следећим једначинама:

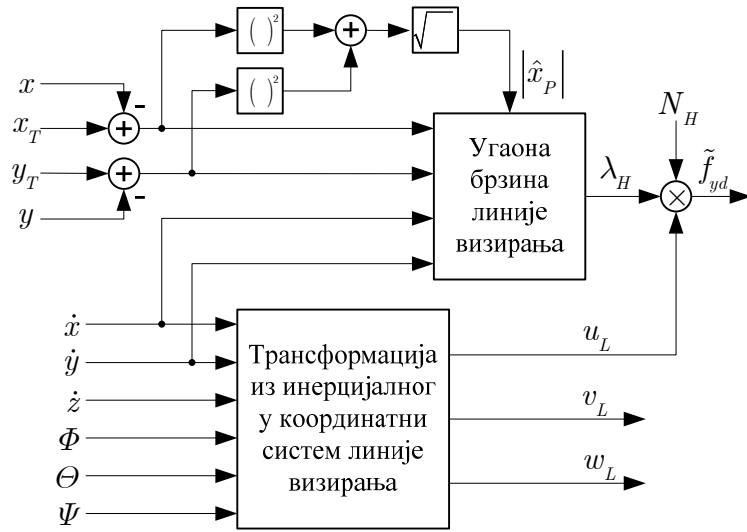
$$\lambda_H = \tan^{-1} \left( \frac{y_T - y}{x_T - x} \right) \quad (7.3)$$

$$\dot{\lambda}_H = \frac{-\dot{y}(x_T - x) + \dot{x}(y_T - y)}{(x_T - x)^2 + (y_T - y)^2} \quad (7.4)$$

Једначина (7.4) је поједностављена уз претпоставку да је циљ непокретан. Захтевано хоризонтално нормално убрзање је онда:

$$\tilde{f}_{yd} = N_H \dot{\lambda}_H u_H \quad (7.5)$$

$$u_H = \dot{x} \cos \lambda_H + \dot{y} \sin \lambda_H \quad (7.6)$$



Слика 7.2. Блок дијаграм закона вођења у хоризонталној равни.

Закон вођења по методи пропорционалне навигације у вертикалној равни може се добити на идентичан начин. Коначни изрази закона вођења у вертикалној равни су:

$$\lambda_V = \tan^{-1} \left( \frac{z_T - z}{x_T - x} \right) \quad (7.7)$$

$$\dot{\lambda}_V = \frac{-\dot{z}(x_T - x) + \dot{x}(z_T - z)}{(x_T - x)^2 + (z_T - z)^2} \quad (7.8)$$

$$\tilde{f}_{zd} = N_V \dot{\lambda}_V u_V \quad (7.9)$$

$$u_V = \dot{x} \cos \lambda_V + \dot{z} \sin \lambda_V \quad (7.10)$$

Једначина (7.8) је поједностављена уз претпоставку да је циљ непокретан. Величина захтеваног бочног убрзања је дата једначином (7.9).

Укупно захтевано бочно убрзање у координатном систему линије визирања је:

$$\tilde{\mathbf{f}}_d = \tilde{f}_{yd} \mathbf{j}_L + \tilde{f}_{zd} \mathbf{k}_L = f_{xd} \mathbf{i}_B + f_{yd} \mathbf{j}_B + f_{zd} \mathbf{k}_B \quad (7.11)$$

Компоненте захтеваног бочног убрзања се трансформишу у везани координатни систем трансформацијом прво из координатног система линије визирања у инерцијални, а затим у везани:

$$\begin{Bmatrix} f_{xd} \\ f_{yd} \\ f_{zd} \end{Bmatrix} = [L_{BI}] [L_{IL}] \begin{Bmatrix} 0 \\ \tilde{f}_{yd} \\ \tilde{f}_{zd} \end{Bmatrix}. \quad (7.12)$$

Симбол  $(\sim)$  означава да је величина дата у координатном систему линије визирања. У једначини (7.12),  $L_{BI}$  је матрица трансформације из инерцијалног у везани координатни систем:

$$L_{BI} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos \Psi & \cos \Theta \sin \Psi & -\sin \Theta \\ \sin \Phi \sin \Theta \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi & \sin \Phi \sin \Theta \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi & \sin \Phi \cos \Theta \\ \cos \Phi \sin \Theta \cos \Psi + \sin \Phi \sin \Psi & \cos \Phi \sin \Theta \sin \Psi - \sin \Phi \cos \Psi & \cos \Phi \cos \Theta \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Интензитет укупног захтеваног бочног убрзања, јед. (7.14) се користи као сигнал грешке, који је параметар логике активирања реактивних импулса. Угао активирања дат је једначином (7.15).

$$\Gamma = \sqrt{f_{yd}^2 + f_{zd}^2} \quad (7.14)$$

$$\Phi_K = \tan^{-1}(f_{zd}/f_{yd}). \quad (7.15)$$

Улазне величине за овакав закон вођења (слика 7.2) су координате ракете и циља, као и брзине ракете и њена оријентација. Ове величине се добијају од стране инерцијалног навигационог система, који, у овом случају, представља основни сензор управљачког система.

### Параболичко пропорционална навигација PAPNG

PAPNG у хоризонталној равни користи исти закон вођења као и класична пропорционална навигација. Према томе,  $\tilde{f}_{yd}$  је дато једначином (7.5). У вертикалној равни координатног система линије визирања, примењен је параболички закон вођења. На тај начин се захтевана вредност бочног убрзања у вертикалној равни прилагођава савијању путање услед тежине ракете. Параметри жељене параболичне трајекторије се стално одређују током лета. На слици 7.3 приказана је жељена параболична трајекторија у вертикалној равни координатног система линије визирања, описана следећом једначином:

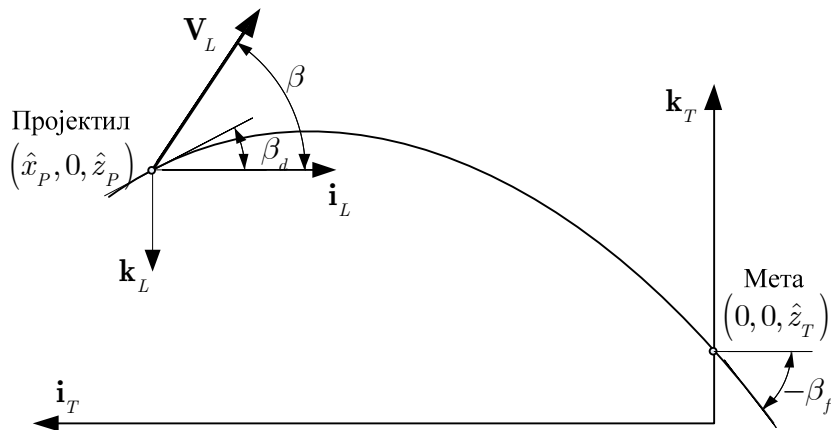
$$\hat{z}_p = \hat{z}_T + K_1 \hat{x}_p + K_2 \hat{x}_p^2, \quad (7.16)$$

где су  $\hat{x}_p$  и  $\hat{z}_p$  компоненте положаја пројектила, а  $\hat{z}_T$  висина циља у инерцијалном координатном систему везаном за циљ. Јединични вектори тог координатног система  $\mathbf{i}_T$  и  $\mathbf{k}_T$  су приказани на слици 7.3. Вектор  $\mathbf{k}_T$  је вертикалан, усмерен навише, а  $\mathbf{i}_T$  је хоризонталан и лежи у вертикалној равни координатног система линије визирања. Вектори  $\mathbf{i}_T$  и  $\mathbf{k}_T$  су паралелни и супротног смера од вектора  $\mathbf{i}_L$

и  $\mathbf{k}_L$  покретног вертикалног координатног система линије визирања. Параметри  $K_1$  и  $K_2$  се одређују тако да трајекторија пролази кроз циљ и то под унапред задатим углом  $\beta_f$ .

$$K_1 = \tan \beta_f \quad (7.17)$$

$$K_2 = \frac{-K_1 \hat{x}_P + \hat{z}_P - \hat{z}_T}{\hat{x}_P^2} \quad (7.18)$$



Слика 7.3. Жељена параболична путања.

Жељена вредност компоненте нормалног убрзања у вертикалној равни која садржи линију визирања је одређена следећом једначином:

$$\tilde{f}_{zd} = \frac{V_L (\beta_d - \beta)}{\tau} \quad (7.19)$$

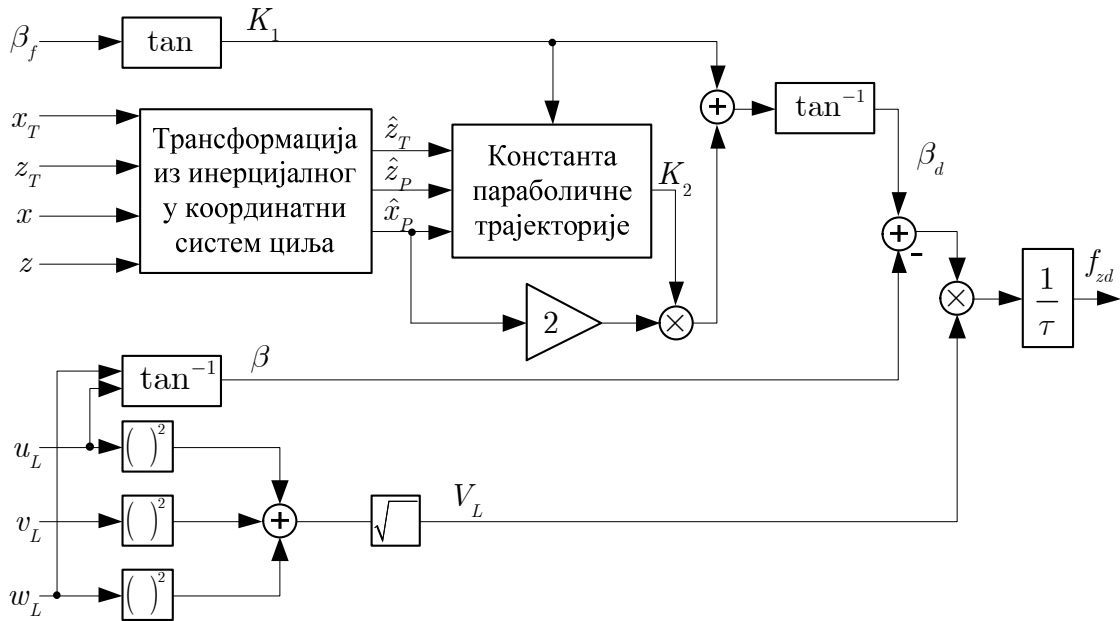
На слици 7.4 приказан је блок дијаграм закона вођења методом PAPNG у вертикалној равни. У једначини (7.19),  $V_L$  је интензитет пројекције вектора брзине у вертикалној равни линије визирања, а  $\beta$  је угао брзине пројектила у координатном систему линије визирања, а  $\beta_d = \tan^{-1}(K_1 + 2K_2 \hat{x}_P)$  је жељени угао брзине пројектила, одређен на основу жељене параболичне трајекторије, као што је приказано на слици 7.4. Жељено нормално убрзање у координатном систему линије визирања је одређено једначином (7.20). У везаном координатном систему, оно је дато једначином (7.21), а трансформација се одвија ротацијама, прво из координатног система линије визирања у инерцијални, па из инерцијалног у везани координатни систем, (7.22).

$$\mathbf{f}_d = -\tilde{f}_{zd} \sin \beta \cdot \mathbf{i}_L + \tilde{f}_{yd} \cdot \mathbf{j}_L - \tilde{f}_{zd} \cos \beta \cdot \mathbf{k}_L \quad (7.20)$$

$$\mathbf{f}_d = f_{xd} \cdot \mathbf{i}_B + f_{yd} \cdot \mathbf{j}_B + f_{zd} \cdot \mathbf{k}_B \quad (7.21)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{xd} \\ f_{yd} \\ f_{zd} \end{Bmatrix} = [L_{BI}][L_{IL}] \begin{Bmatrix} -\sin \beta \cdot \tilde{f}_{zd} \\ \tilde{f}_{yd} \\ -\cos \beta \cdot \tilde{f}_{zd} \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

Величина грешке и угао импулсне команде се одређују из једначина (7.14) и (7.15), користећи резултат из (7.22).



Слика 7.4. Закон вођења методом параболне навигације у вертикалној равни.

Као и у случају PNG, основни сензор система за вођење је инерцијални навигациони систем.

### Праћење задате трајекторије – Trajectory tracking, TT

Принцип праћења задате трајекторије подразумева да је референтна путања одређена пре лансирања ракете и спреmlена у меморији рачунара за вођење на ракети. Систем за вођење пореди измерену позицију ракете са задатом трајекторијом и врши корекцију са циљем довођења ракете на жељену путању. Референтна (жељена) путања није, у овом случају, једноставна параболола, већ се добија као резултат симулације лета ракете без утицаја поремећаја. Као и код PAPNG, неопходно је присуство ИНС (инерцијалног навигационог система) у циљу одређивања просторног положаја ракете. Док се код PAPNG жељена параболна путања одређује стално током лета, код TT вођења је та путања одређена непосредно пре лансирања и похрањена у меморију рачунара за вођење.

Референтна трајекторија је дата преко низа тачака, одређених координатама у инерцијалном координатном систему  $x_T(t), y_T(t), h_T(t)$  за време  $t$  дефинисано од тренутка лансирања. Систем за вођење пореди измерену позицију ракете са задатом трајекторијом и формира вектор грешке позиције у инерцијалном координатном систему. Координате ракете у истом координатном систему у произвољном временском тренутку су  $x(t), y(t), h(t)$ . Одступање ракете од путање се добија као:

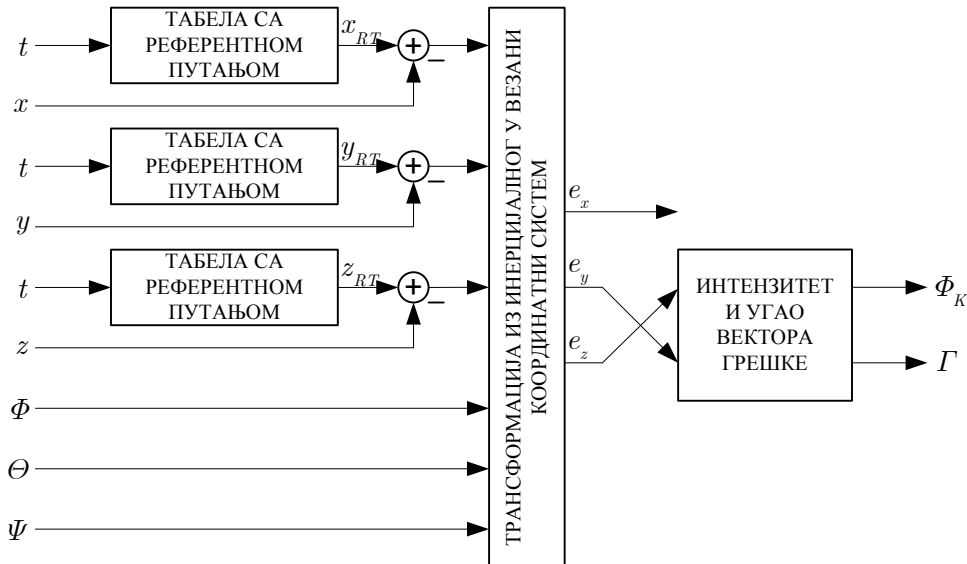
$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{Bmatrix} = L_{BI} \begin{Bmatrix} x_{RT}(t) - x(t) \\ y_{RT}(t) - y(t) \\ z_{RT}(t) - z(t) \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$

где је  $L_{BI}$  матрица трансформација вектора из инерцијалног у везани координатни систем, дата једначином (7.13).

Интензитет и угао вектора грешке положаја ракете су  $\Gamma$  и  $\Phi_K$ , респективно, и дефинисани су као:

$$\Gamma = \sqrt{e_z^2 + e_y^2} \quad (7.24)$$

$$\Phi_K = \tan^{-1} \left( \frac{e_z}{e_y} \right) \quad (7.25)$$



Слика 7.5. Блок дијаграм вођења по трајекторији.

Поменути принципи вођења намењени су, превасходно, ракетама за директно, непосредно гађања. Jitraphai, Burchett и Costello у [2] су вршили поређење разли-

читих метода вођења и у потпуности одбацили метод чисте пропорционалне навигације, као инфериоран у односу на PAPNG. Основна предност параболичке навигације је у томе што узима у обзир закривљење путање под утицајем гравитације. У случају довољно великог броја управљачких мотора, PAPNG и ТТ дају добре резултате у описаном случају ракета за директно гађање. Са смањеним бројем мотора, ТТ вођење има значајну предност.

Артиљеријске ракете за индиректно гађање се разликују од горе наведених по томе што се, за постизање великих домета, лансирање врши под високим угловима елевације. Ракета Оркан, разматрана у овом раду, остварује максимални домет од 51km лансирана под углом од  $56^\circ$ , при чему је теме путање на висини од 22km, а укупно време лета 120s. Са становишта вођења и управљања реактивним импулсима, артиљеријске ракете се разликују од ракета за директно гађање по следећим специфичностима:

- Облик њихове путање се знатно разликује од параболе, па вођење методом PAPNG не даје добре резултате, већ је потребно применити методу праћења задате трајекторије
- Дуго време лета до циља и потреба да се компензују поремећаји који настају константно током лета захтева стално управљање и, самим тим, велики број управљачких импулса. Са друге стране, ракета је опремљена неким, константним бројем управљачких мотора, којих не може бити превише, јер се тиме нарушава принцип једноставности управљачког система са импулсним моторима. Самим тиме се намеће потреба за оптимизацијом закона вођења по питању утрошка енергије – реактивних импулса.
- Артиљеријске ракете се крећу кроз различите слојеве атмосфере, тако да су карактеристике њиховог одзива на управљачки импулс веома променљиве на путањи, као што је приказано у глави 6.
- Доминантни поремећај за артиљеријске ракете представља одступање вредности тоталног импулса ракетног мотора. Компензација тог поремећаја захтева посебну стратегију.

У наредним поглављима представљена је модификована метода праћења задате трајекторије, као и оригинална метода праћења трајекторије са импулсно фреквентном модулацијом, које су оптимизоване за примену импулног управљања на артиљеријске ракете.



## Глава 8.

# ВОЂЕЊЕ АРТИЉЕРИЈСКИХ РАКЕТА МЕТОДОМ ПРАЂЕЊА ЗАДАТЕ ТРАЈЕКТОРИЈЕ

Метод прађења задате трајекторије – trajectory tracking, ТТ, описан у претходном поглављу, разматран је у литератури и примењиван у случају ракета за директно гађање. Тај метод може да се примени и у случају вођења артиљеријских ракета. Уз одређена додата побољшања, која узимају у обзир специфичности артиљеријских ракета у односу на ракете за директно гађање, могуће је остварити веома добре резултате.

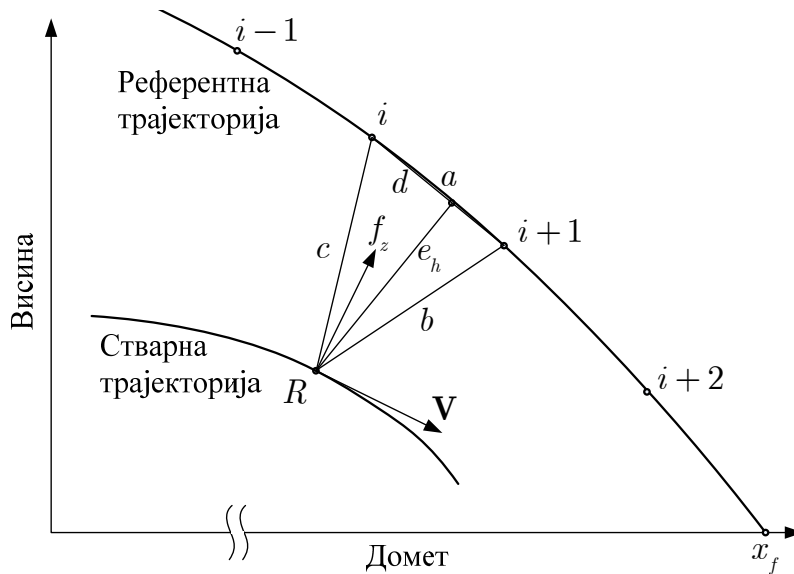
Основни проблем примене управљачких система са реактивним импулсима за вођење артиљеријских ракета је у ограниченом броју расположивих управљачких мотора. Они су распоређени по обиму прстена на предњем делу ракете, и њихов број је одређен њиховим геометријским карактеристикама, пречником тог дела ракете и бројем управљачких прстенова. Повећање броја управљачких мотора директно повећава масу и цену управљачког система. Предмет побољшања и оптимизације у примењеној методи вођења је остваривање прихватљивих перформанси система управљања – смањење растурања погодака, са што мањим бројем управљачких мотора.

### Растојање ракете од референтне трајекторије

Прво побољшање у односу на ТТ методу описану у глави 7 представља начин одређивања грешке положаја ракете у односу на референтну трајекторију. Као и у поступку примењеном на ракете за директно гађање, непосредно пре лансирања се одређује референтна трајекторија, као жељена путања ракете. Та трајекторија се одређује на основу познатих координата лансера и циља и тренутних атмосферских услова на ватреном положају. Из таблица гађања се, за те податке, одређују параметри лансирања – азимут и елевација лансера, а симулацијом лета ракете за тако одређене почетне услове добијају се координате референтне трајекторије у времену  $x_{RT}(t), y_{RT}(t), h_{RT}(t)$  у инерцијалном координатном систему. За потребе симулације користи се исти програм као и за одређивање таблица гађања, као и исти скуп почетних параметара програма, што обезбеђује да се добије референтна трајекторија која пада тачно на циљ. Координате референтне трајекторије одређене су у односу на лансирни положај и спреmlјене у меморији рачунара за вођење на ракети у облику низа од  $N_{RT}$  тачака са координатама

$x_{RT}(i), y_{RT}(i), h_{RT}(i), i = 1 \dots N_{RT}$ . Координате одређене на овај начин нису повезане са временском базом.

Тренутни положај ракете у простору добија се мерењем. Овакви системи вођења подразумевају да је ракета опремљена инерцијалним навигационим системом, који у реалном времену даје тренутни положај ракете у инерцијалном координатном систему  $x, y, h$ . Грешка положаја ракете се одређује уз претпоставку да је информација о њеном положају у простору апсолутно тачна. Она се дефинише као најкраће растојање између ракете и референтне трајекторије. Грешку дефинисану на тај начин можемо да разложимо на грешку у хоризонталној  $e_y$  и грешку у вертикалној равни  $e_h$ . Принцип одређивања грешке положаја, за случај вертикалне равни, приказан је на слици 8.1.



Слика 8.1. Грешка положаја ракете у вертикалној равни.

Растојање ракете од задате трајекторије у вертикалној и хоризонталној равни се рачуна као висина троугла којег сачињавају ракета  $R$  и две тачке из скупа тачака на трајекторији са најмањим растојањем до ракете:

$$r^2(i) = (x_R - x_T(i))^2 + (y_R - y_T(i))^2 + (h_R - h_T(i))^2 \quad (8.1)$$

Ако претпоставимо да те две тачке имају индексе  $i$  и  $i + 1$ , величине страница и висина троугла приказаног на слици 8.1 су:

$$a^2 = (x_{RT}(i) - x_{RT}(i+1))^2 + (h_{RT}(i) - h_{RT}(i+1))^2 \quad (8.2)$$

$$b^2 = (x_{RT}(i+1) - x)^2 + (h_{RT}(i+1) - h)^2 \quad (8.3)$$

$$c^2 = (x_{RT}(i) - x)^2 + (h_{RT}(i) - h)^2 \quad (8.4)$$

$$d = (a^2 + c^2 - b^2)/2a \quad (8.5)$$

$$|e_h| = \sqrt{c^2 - d^2} \quad (8.6)$$

Знак грешке положаја је негативан уколико је ракета изнад референтне трајекторије и десно од ње уколико се посматра од лансера ка циљу. Једначине за величину грешке у хоризонталној равни  $e_y$  су истог облика као једначине (8.2) - (8.6), са параметром  $h$  замењеним са  $y$ .

Интензитет и угао вектора грешке положаја ракете су  $\Gamma$  и  $\Phi_K$ , респективно, и дати су једначинама (8.7) и (8.8). Овде треба имати на уму да је угао вектора грешке одређен у односу на вертикалну раван, као што је приказано на слици 8.3, а да је додатно  $\pi$  услед супротне оријентације оса координатног система грешке положаја у односу на полувезани координатни систем (позитивне вредности грешке положаја су доле и десно).

$$\Gamma = \sqrt{e_h^2 + e_y^2} \quad (8.7)$$

$$\Phi_K = \tan^{-1} \left( \frac{e_h}{e_y} \right) + \pi \quad (8.8)$$

Поступак за одређивање грешке положаја ракете у односу на референтну трајекторију примењен у радовима који се односе на ракете за директно гађање [1], [2] описан је једначином (7.23) у поглављу 7. Тај поступак подразумева да се грешка положаја формира на основу координата тачке на референтној трајекторији у којој би ракета требала да се налази у посматраном тренутку, изражених у везаном координатном систему. У полувезаном систему, грешка у вертикалној равни би, на основу једначине (7.23) била:

$$e_z = \sin \Theta (x_{RT}(t) - x(t)) + \cos \Theta (z_{RT}(t) - z(t)) \quad (8.9)$$

Посматра се, у ствари, пројекција растојања посматране тачке на трајекторији од ракете, на раван  $Cyz$  полувезаног координатног система. Као такав, овај поступак има значајан недостатак када су у питању импулсно управљане артиљеријске ракете. Наиме, услед дејства реактивних управљачких импулса на ракету, долази до значајних осцилација њеног нападног угла, а самим тим и до осцилација угла пропињања  $\Theta$  и оријентације равни  $C\tilde{y}\tilde{z}$ . Такође, у случају одступања тотал-

ног импулса, а самим тим и брзине ракете, долази до значајнијег одступања њеног домета од референтних вредности током времена  $x_{RT}(t) - x(t)$ , тако да се, услед осцилација оријентације равни  $C\tilde{y}\tilde{z}$ , формирају осцилације грешке положаја, чија величина није занемарљива у односу на величину прозора за вођење. Ова појава илустрована је на слици 8.10. У случају ракета за директно гађање, ова појава је мање изражена услед њихових положених путања и малих вредности угла  $\Theta$ . Са применом методе одређивања грешке положаја описане у овом поглављу, добија се глатка крива промене те величине. Оријентација вектора грешака у вертикалној и хоризонталној равни је у правцима нормалним на пројекције референтне трајекторије на те равни.

### Праћење трајекторије са променљивом величином прозора вођења

Применом претходног поступка, добија се одступање положаја ракете, дато преко интензитета  $\Gamma$  и угла вектора грешке  $\Phi_K$ . Управљањем се обезбеђује да се, када величина грешке буде већа од неке задате вредности  $r_w$ , активира реактивни импулс чије је дејство такво да враћа ракету ка референтној трајекторији. Угао импулса је, према томе, супротан од угла вектора грешке.

Величина  $r_w$  назива се величина прозора вођења и представља полупречник замишљеног ваљка око референтне трајекторије, унутар кога се не врши управљање. У радовима који се односе на ракете са директним гађањем [1], [2], узимано је  $r_w = \text{const}$ . У случају артиљеријских ракета, услед дугог времена лета до циља намеће се потреба за оптимизацијом утрошка енергије управљања – броја реактивних импулса. То је могуће остварити у случају да се примени променљива величина прозора вођења:

$$r_w(h) = r_{w0} \left( 1 + \frac{h}{K_{wh}} \right). \quad (8.10)$$

Параметар  $r_{w0}$  [m] представља величину прозора на земљи, док је параметар  $K_{wh}$  [m] коефицијент утицаја висине на величину прозора вођења. За  $K_{wh} \rightarrow \infty$ , прозор вођења је константне величине.

Узето је да се величина прозора вођења повећава са висином лета ракете. На тај начин се умањује број команди извршених у теменом делу путање, које резултују великим нападним угловима ракете услед смањене густине ваздуха. Такође, врши се груписање команди у почетном и завршном делу путање. У почетном делу врши се компензација почетних поремећаја – угаоних брзина на изласку из

лансирне цеви и брзине након завршетка активне фазе. У завршном делу путање, смањењем величине прозора вођења, ракета се прецизније наводи на циљ.

### Реактивни импулсни мотори

Систем корекције трајекторије ракета реактивним импулсима са ТТ методом вођења карактерише се бројем  $N_I$  и интензитетом  $I_c$  [N-s] управљачких импулса и параметрима закона вођења. Претпоставља се да су сви расположиви управљачки мотори идентични, тј да имају исти импулс и његово трајање и кашњење. Такође, претпоставља се да је време дејства импулса довољно мало у односу на период ваљања ракете, као и да су губици услед трајања импулса већ узети у обзир у вредности  $I_c$ .

Ефекат кашњења појаве управљачког импулса приказан је на слици 8.2. Уколико се са  $t_K$  обележи тренутак издавања команде за активирање управљачког мотора, еквивалентно време кашњења добија се преко првог момента површине испод криве потиска:

$$t_d = \frac{\int_{t_K}^{\infty} F(t)(t - t_K) dt}{\int_{t_K}^{\infty} F(t) dt}. \quad (8.11)$$

Уколико означимо време кашњења припале управљачког мотора са  $\tau_{kp}$ , време трајања импулса са  $\tau_I$ , еквивалентно време кашњења може да се добије као:

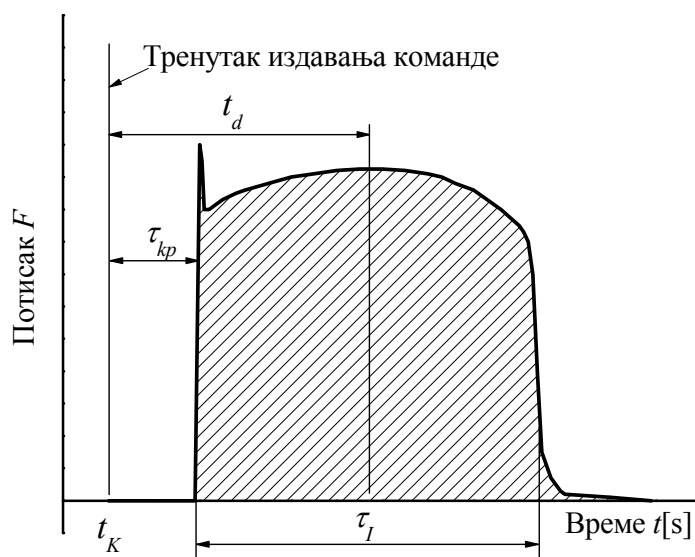
$$t_d = \tau_{kp} + \frac{1}{2}\tau_I \quad (8.12)$$

Еквивалентни угао кашњења појаве управљачког импулса  $\Phi_d$  зависи од времена кашњења те појаве и угаоне брзине ваљања:

$$\Phi_d = p \cdot t_d \quad (8.13)$$

Значајан параметар система вођења методом ТТ је минимално време између два узастопна импулса  $t_{\min}$ . Значај тог параметра разматран је у глави 5, где су дате основне смернице за његов избор, које су условљене потребом да се оствари што је могуће мања вредност осцилација нападног угла ракете у случају интензивног командовања. У случају ТТ вођења, не примењује се концентрисано интензивно командовање, већ се расположиви импулси распоређују по целој трајекторији. Самим тим, примењују се знатно веће вредности параметра  $t_{\min}$  од оних дефини-

саних у глави 5.



Слика 8.2. Кашњење појаве управљачког импулса.

### Логика активирања управљачких мотора

У току лета ракете, у временским интервалима дефинисаним периодом узорковања ИНС-а, одређује се вектор одступања ракете од референтне трајекторије. Асинхроно од тог процеса, врши се активирање управљачких мотора када се остваре за то одређени услови. Услови да се изврши активирање су да је измерени интензитет вектора грешке положаја већи од задате величине прозора вођења и да је време протекло од тренутка претходног активирања  $t_{preth}$  веће од  $t_{min}$ . Ова два услова су представљена једначинама (8.14) и (8.15). Услови за активирање  $n$ -тог управљачког мотора су да тај мотор није већ утрошен и да је разлика његовог угла ваљања и задатог, који узима у обзир и еквивалентни угао кашњења, мања од задате величине прага угла активирање  $\varepsilon_\phi$ . Ови услови, представљени једначинама (8.16) и (8.17) се проверавају за сваки од  $N_I$  управљачких мотора. Како је дејство импулса управљачког мотора супротно његовом угловном положају на обиму ракете, активирањем мотора који заузима угао ваљања  $\Phi_K$  остварује се импулс усмерен ка референтној трајекторији.

$$\Gamma > r_w \quad (8.14)$$

$$t > t_{preth} + t_{min}, \quad (8.15)$$

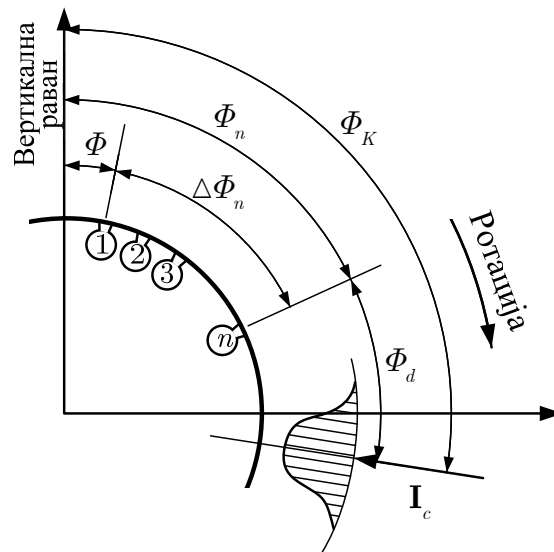
$$\exists I_i \text{ и} \quad (8.16)$$

$$|\Phi + \Delta\Phi_n + \Phi_d - \Phi_K| < \varepsilon_\phi \quad (8.17)$$

Овакав тип вођења подразумева да се управљање одвија по целој путањи ракете, па се за почетак вођења може узети крај активне фазе лета  $T_{AF}$ .

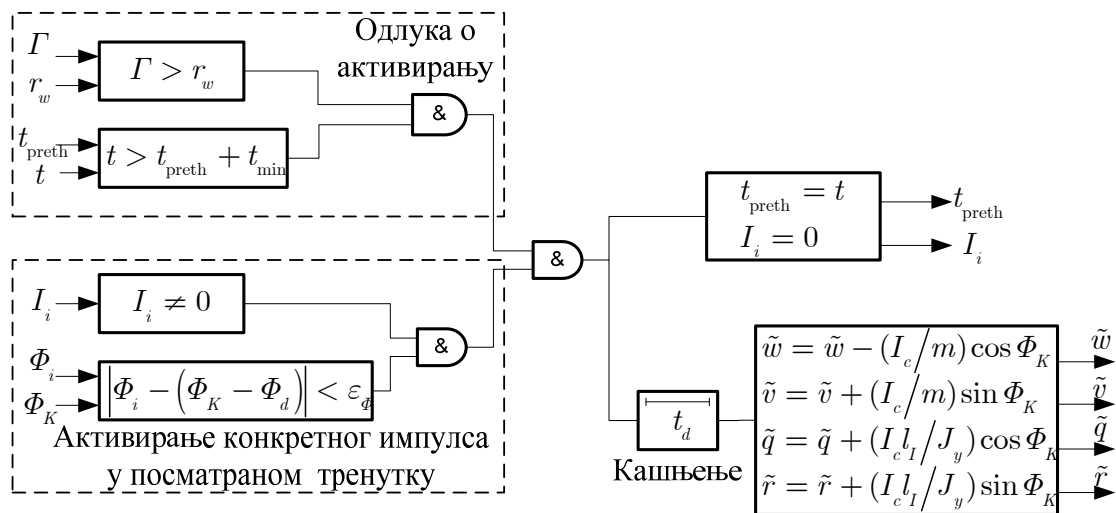
На слици 8.3 приказан је услов угла ваљања за активирање управљачког мотора. Угао ваљања ракете је дефинисан као угао првог управљачког мотора у односу на вертикалну раван. Угао између првог и  $n$ -тог управљачког мотора је:

$$\Delta\Phi_n = \frac{2\pi(n-1)}{N_I} \quad (8.18)$$



Слика 8.3. Угао импулсне команде.

Логика активирања управљачких мотора приказана је на слици 8.4.



Слика 8.4. Логика активирања управљачких мотора

Комплетан алгоритам закона вођења може се сумирати на следећи начин:

- Непосредно пре лансирања се израчунава референтна трајекторија и учитава у меморију рачунара за вођење.
- У задатим временским интервалима се, на основу измереног положаја ракете од стране ИНС-а, одређују интензитет  $\Gamma$  и угао  $\Phi_K$  вектора грешке, на основу поступка описаног једначинама (8.1) - (8.8).
- У случају да је примењено вођење са променљивом величином прозора, одређује се величина прозора вођења по једначини (8.10).
- Проверава се услов величине прозора и време протекло од претходног активирања.
- Уколико је претходни услов задовољен, за сваки неискоришћени мотор се проверава услов (8.17). Овај услов мора да се проверава у интервалима краћим од  $2\varepsilon_\phi/p$ , како би се обезбедило да се активирање изврши чим први неактивиран мотор прође кроз задати сектор.

## СИМУЛАЦИЈА МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА ТТ ВОЂЕЊА

Основни алат за анализу понашања примењеног система вођења и ефекта импулсног управљања на лет ракете је симулација математичког модела тако управљане ракете са 6 степени слободе кретања. Опис математичког модела је дат у глави 4, док су геометријске, инерцијалне, погонске и аеродинамичке карактеристике разматране артиљеријске ракете дате у Додатку А.

Табела 8.1.

Величина	Јед. мере	Номинална вредност	Поремећајна вредност
Почетни угао пропињања	°	43.902	43.92
Почетни угао скретања	°	0.1136	0.12
Почетна угаона брзина пропињања	rad/s	-0.0598	-0.04
Почетна угаона брзина скретања	rad/s	0	-0.01
Аксијална компонента брзине ветра	m/s	0	2
Попречна компонента брзине ветра	m/s	0	2
Угао дезаксијалности потиска	mrad	0	1
Одступање тоталног импулса ракетног мотора	%	0	1



За потребе приказа рада система вођења и управљања изабран је један случај лета са дометом  $x_T = 45000 \text{ m}$ , мањим од максималног. Референтни почетни услови – номинални углови лансирања и референтна трајекторија, су одређени тако да ракета, у случају лета без поремећаја, падне у жељену тачку. Како би се приказао ефекат вођења и управљања, изабран је један скуп вредности поремећаја који делују на ракету. Номиналне и поремећајне вредности почетних величина и параметара дате су у табели 8.1.

Да би се приказали ефекти примењених побољшања за вођење артиљеријских ракета, паралелно су дати резултати симулација у случају без поменутих побољшања – са фиксном величином прозора за вођење и рачунањем одступања од референтне трајекторије по једначини (7.23), као и резултати симулације лета неуправљане ракете.

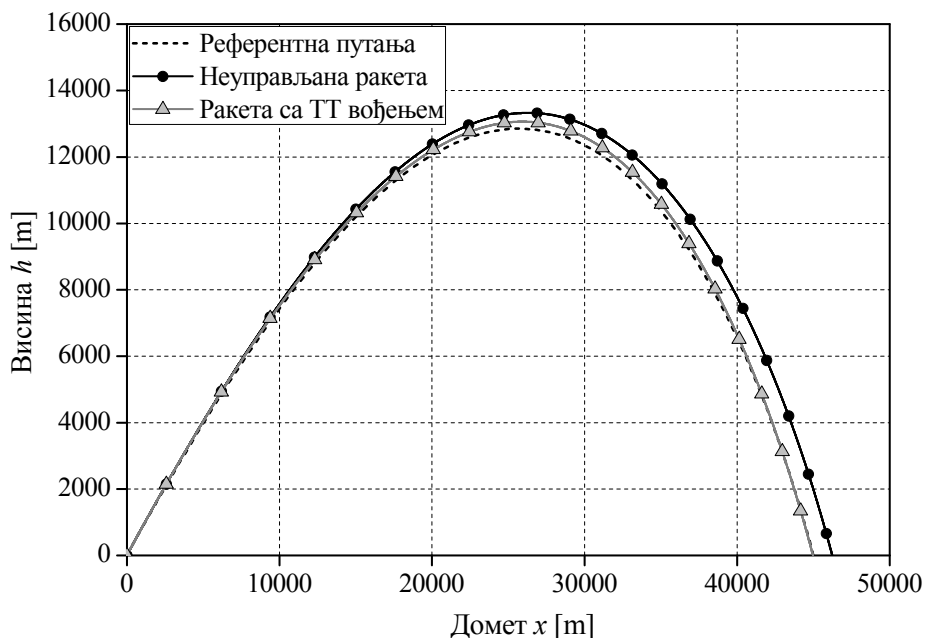
Примењен је управљачки систем који се састоји од  $N_f = 35$  управљачких мотора, сваки импулса  $I_c = 70 \text{ N}\cdot\text{s}$ . У случају ракете са ГТ вођењем са фиксном величином прозора, примењено је  $r_w = 100 \text{ m}$ , док је у случају са променљивом величином прозора, једначина (8.10), узето  $r_{w0} = 6 \text{ m}$  и  $K_{wh} = 400 \text{ m}$ . Минимално време између две узастопне команде је у оба случаја било  $t_{\min} = 1.5 \text{ s}$ .

### Резултати симулације једног репрезентативног случаја

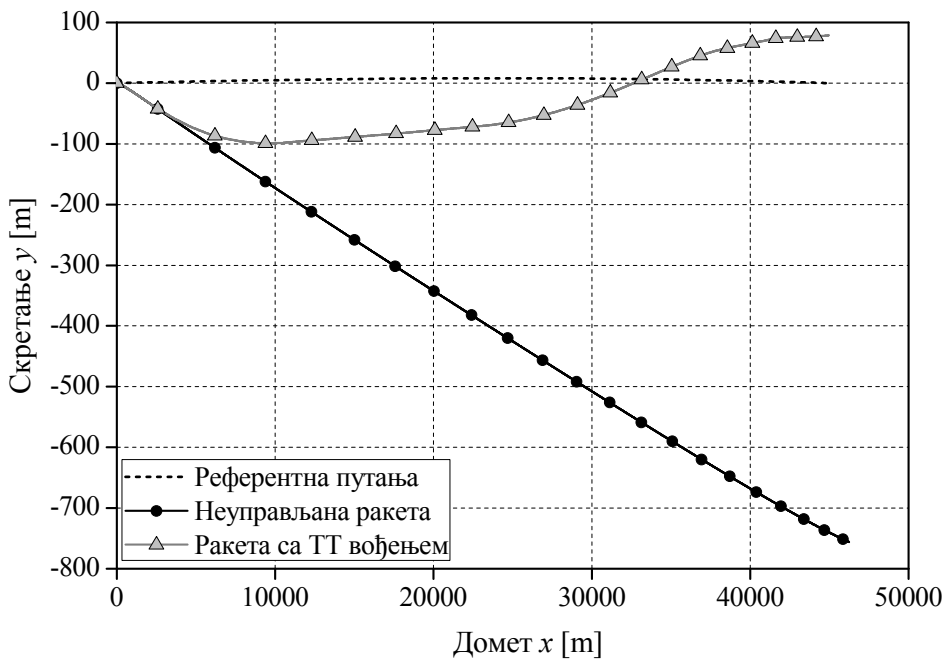
На сликама 8.5 и 8.6 приказано је поређење путања вођене и невођене ракете у хоризонталној и вертикалној равни. Примењен је разматрани метод ГТ вођења са променљивим прозором. Доминантни поремећај, у овом случају, је одступање тоталног импулса, које доводи до тога да невођена ракета остварује теме путање на висини од  $13330 \text{ m}$ , уместо на  $12850 \text{ m}$ , на референтној путањи, што резултира промашајем на циљу по домету од  $1240 \text{ m}$ . Промашај у хоризонталној равни од  $750 \text{ m}$  настао је у највећој мери услед дејства бочног ветра и дезаксијалности силе потиска. Поред трајекторија вођене и невођене ракете, приказана је и референтна трајекторија, тј. путања коју би ракета имала без дејства поремећаја. Систем вођења са праћењем задате трајекторије са променљивом величином прозора и импулсним реактивним управљањем је у потпуности способан да компензује поменуте поремећаје.

Како у случају ГТ вођења управљање почиње одмах по завршетку активне фазе, са дијаграма 8.5 и 8.6 је приметна рана промена трајекторије вођене ракете са путање неуправљане ка референтној трајекторији. Такође, посматрајући пројекције путања на хоризонталну раван, уочава се једна од основних негативних

карактеристика метода вођења заснованих на прозору, а то је присуство прескока. Наиме, како нема вођења док је ракета унутар прозора, догодило се да је ракета прешла преко референтне трајекторије, а управљања није било све док није изашла из прозора за вођење. На крају, ракета пада 30 m испред и 78 m десно од циља.

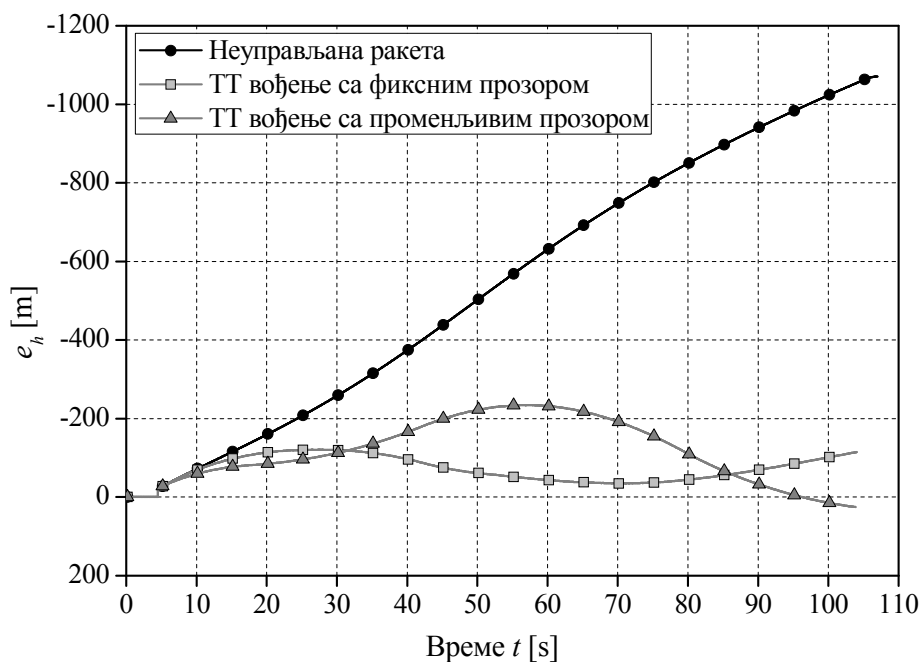


Слика 8.5. Поређење путања у вертикалној равни.

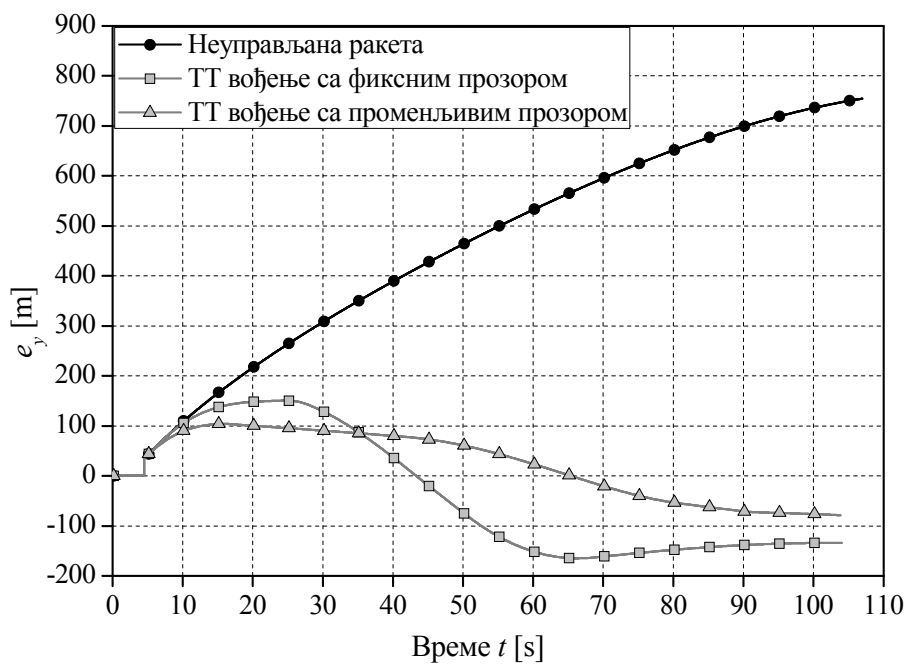


Слика 8.6. Поређење путања у хоризонталној равни.

Слике 8.7 и 8.8 приказују поређење одступања од референтне путање у случају невођене ракете и у случају вођења са фиксном и променљивом величином прозора. Приказана одступања су у оба случајева добијена методом описаном на слици 8.1, али у случају вођења са фиксним прозором грешка вођења није одређена на тај начин, већ применом једначине (7.23).



Слика 8.7. Поређење одступања трајекторија од референтне у вертикалној равни.



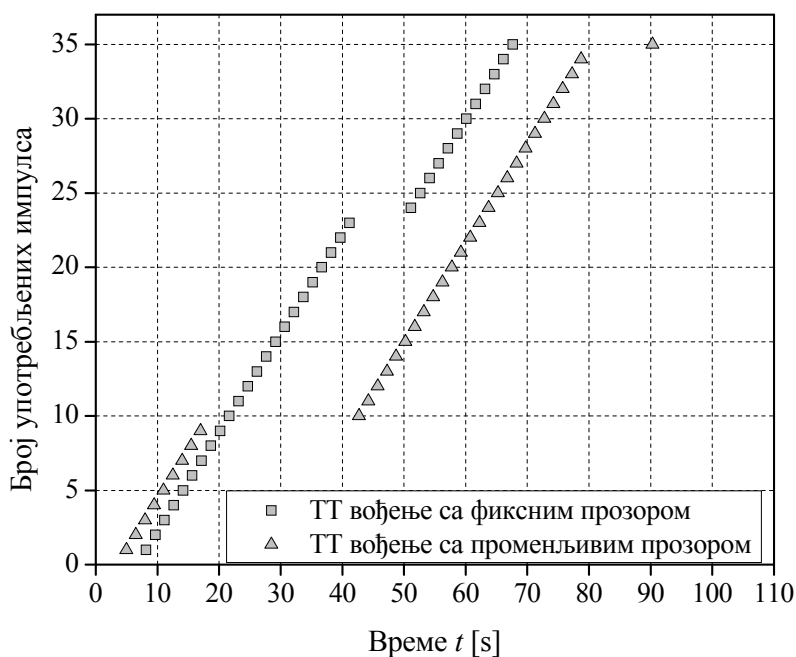
Слика 8.8. Поређење одступања трајекторија од референтне у хоризонталној равни.

Вођење по принципу праћења задате трајекторије и примењени управљачки систем од 35 импулса интензитета  $I_c = 70 \text{ N}\cdot\text{s}$  су у стању да компензују поменути скуп поремећаја и остваре прецизност на циљу која је задовољавајућа за артиљеријске ракете тог домета.

Вођење са фиксним прозором остварује приметно мању прецизност у односу на вођење са променљивом величином прозора. На крају ракета пада 115 m иза и 133 m десно од циља.

Приликом тумачења дијаграма 8.7 и 8.8 треба имати на уму да су величине  $e_h, e_y$  грешке положаја, па је њихова оријентација супротна од оса  $Ch, Cy$ .

На сликама 8.9 и 8.10 приказано је функционисање система вођења и управљања у посматраним случајевима. Слика 8.9 приказује тренутке активирања управљачких мотора, а слика 8.10 приказује поређење величине прозора вођења  $r_w$  и интензитета вектора грешке положаја ракете  $\Gamma$ , добијеног по једначинама (8.1) - (8.7).

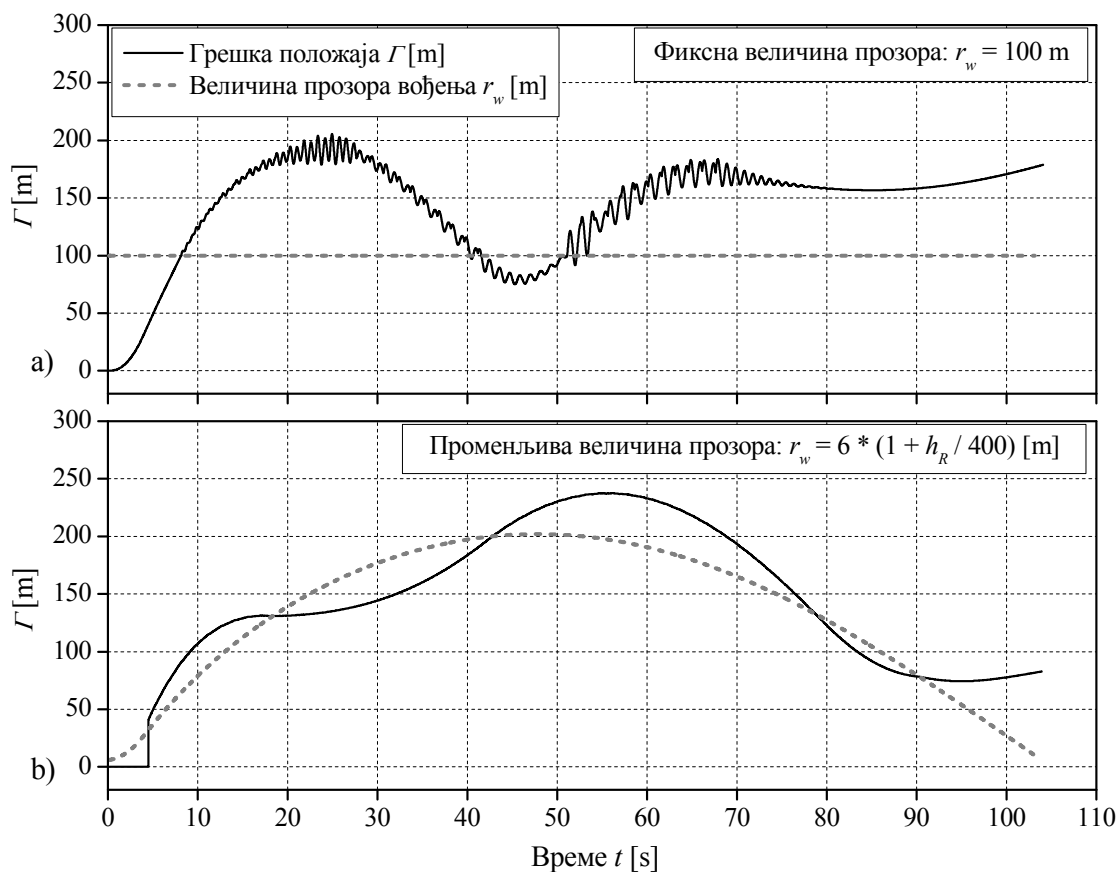


Слика 8.9. Распоред активирања управљачких мотора.

У случају вођења са променљивом величином прозора, са управљањем се почело одмах након завршетка активне фазе. Са друге стране, на средишњем делу путање, величина прозора за вођење је била преко 200 m. Почетну корекцију путање систем са променљивим прозором за вођење обавио је са 9 импулса и након тога био унутар прозора све до 43. секунде. За разлику од тога, систем са

фиксним прозором је опалио први импулс у тренутку  $t = 8.1$  s, а требало му је укупно 23 импулса да доведе ракету унутар прозора од 100m. Све импулсе је потрошио до 68. секунде, и након тога се ракета кретала без вођења.

Код система са променљивим прозором за вођење, укупна потрошња импулса у почетном и средњем делу путање је била мања, тако да је остало довољно импулса за силазни део, када се смањује величина прозора и ракета прецизније наводи на циљ.

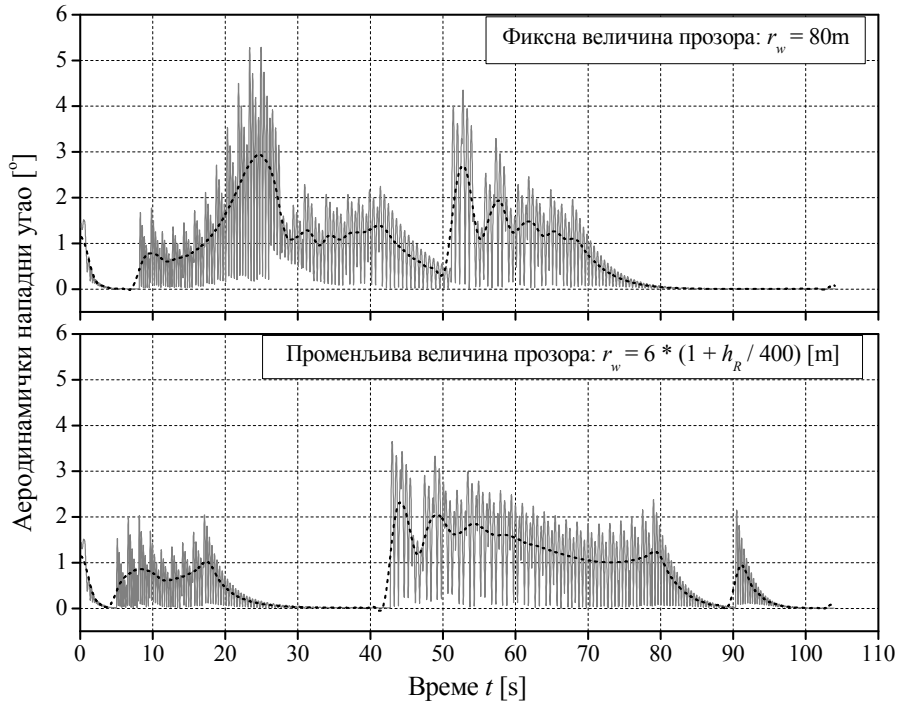


Слика 8.10. Грешка положаја и величина прозора вођења.

Вредност интензитета вектора грешке положаја ракете у случају вођења са фиксном величином прозора, слика 8.10, је веома осцилаторна. Разлог за то лежи у чињеници да је у том случају тај вектор дат у полувезаном координатном систему, који осцилује са осцилацијама нападног угла ракете. Метод импулсног управљања ракетом бочно постављеним ракетним моторима производи велике осцилације нападног угла, као што је приказано у глави 6. Ефекат великих осцилација величине  $\Gamma$  се, у овом случају, огледа кроз ефективно повећање те вредности у односу на величину прозора вођења.

Слика 8.11 приказује промене укупног аеродинамичког нападног угла ракете

током лета, као и усредњене вредности тих нападних углова добијене применом ниско-пропусног FFT филтра, пропусног опсега  $\omega_c = 0.5 \text{ Hz}$ . У случају са фиксном величином прозора за вођење је долазило до веће амплитуде осцилација нападног угла. Иако је у оба случаја испаљено свих 35 мотора, средња вредност аеродинамичког нападног угла је била  $0.815^\circ$  са фиксним, наспрам  $0.714^\circ$  у случају са променљивим прозором за вођење.



Слика 8.11. Поређење аеродинамичких нападних углова.

У случају вођења са фиксном величином прозора, управљачки импулси су опаљивани од 8. до 40. секунде у униформној поворци са периодом од 1.5 s. Максимум амплитуде нападног угла био је у времену  $t \approx 25 \text{ s}$ , када је било испуњено  $t_{\min} \approx 3.5\pi/\omega_n$ . Вредности  $\omega_n$  на равнотежној путањи дате су на слици 5.5.

## ПАРАМЕТАРСКА АНАЛИЗА

Предмет параметарске анализе је одређивање оптималних вредности параметара система вођења, при којима он остварује најбоље перформансе. Оптимизација се извршава методом подешавања параметара.

Комплетан математички модел лета ракете дат је у глави 4. Скуп једначина које описују кретање артиљеријских ракета је (4.22), (4.23), (4.26), (4.30), (4.34) и (4.39), уз аеродинамичке силе и моменте дефинисане једначинама (4.41) и (4.42).

Такав систем једначина нема аналитичко решење, већ се морају примењивати нумеричке методе за одређивање кретања система. Самим тим, није могуће наћи аналитичко решење за проблем оптимизације, већ се мора применити метод подешавања параметара. Као мера перформанси система, за потребе овог разматрања, узета је вероватна кружна грешка *СЕР*. Тај параметар је изабран уместо пара вероватне грешке по правцу и домету, као што је уобичајено у ракетној артиљерији, јер је то јединствени параметар који карактерише цео систем.

### **Анализа применом Монте Карло технике**

На дијаграмима 8.5 – 8.11 приказано је дејство система вођења по методи праћења задате путање и управљачког система са реактивним импулсним управљањем. Та анализа је спроведена за један случај величина поремећаја. У обзир је узета једна комбинација осам различитих почетних вредности величина стања и величина поремећаја. У реалности, тих осам променљивих су случајне, међусобно независне величине. Понашање система вођења и управљања је различито за сваку њихову комбинацију. Због тога се, ради добијања веродостојније слике о могућностима система вођења и управљања, примењује анализа Монте Карло методом, описаном у Прилогу В. Резултат такве анализе су статистички показатељи растурања погодака ракетног система.

За потребе овог разматрања, Монте Карло техника се примењује на следећи начин:

- Врши се одабир случајних вредности стохастичких величина као што је описано у глави 3. То су почетне вредности величина стања и вредности поремећаја, дате у табели 8.2. Претпоставља се да је свака од тих величина случајна, са нормалном расподелом и дефинисаним математичким очекивањем и стандардном девијацијом.
- За тако одабрану комбинацију почетних вредности величина стања и вредности поремећаја врши се симулација математичког модела са 6 степени слободе кретања, описаног у глави 4. Као резултат симулације, узимају се одступања падне тачке ракете од жељеног положаја (падне тачке референтне путање) по домету и правцу.
- У случају да је потребно да се спроведе анализа утицаја вредности појединих параметара система вођења, за сваку изабрану комбинацију почетних величина стања и величина поремећаја врше се симулације за све задате комбинације тих параметара.

- Поменути поступак се понавља задати број пута, који је у овом случају  $N_{MC} = 200$ , за приближно 95% степен поверења (Прилог В).
- Групишу се резултати симулација за сваку задату комбинацију параметара система вођења и врши њихова статистичка анализа. Коначни резултат је величина вероватне кружне грешке  $CEP$ , која се добија одређивањем најмањег полупречника круга са центром у жељеној падној тачки, који у себи садржи половину (100) свих падних тачака. Вредност најмањег полупречника се добија њеним поступним повећавањем и пребројавањем.

Оваквим поступком се остварује да се свака комбинација параметара закона вођења испитује под истим условима. Уколико би се извршила статистичка анализа почетних вредности величина стања и величина поремећаја, за сваку комбинацију параметара закона вођења би се добили исти статистички показатељи тих величина. Задате вредности математичких очекивања – номиналних вредности и стандардних девијација – одступања случајних величина, које су примењене у овом разматрању, дате су у табели 8.2.

Табела 8.2.

Величина	Јед. мере	Математичко очекивање	Стандардна девијација
Почетни угао пропињања	°	43.902	0.03
Почетни угао скретања	°	0.1136	0.018
Почетна угаона брзина пропињања	rad/s	-0.0598	0.02
Почетна угаона брзина скретања	rad/s	0	0.01
Аксијална компонента брзине ветра	m/s	0	2
Попречна компонента брзине ветра	m/s	0	2
Угао дезаксијалности потиска	mrad	0	1.5
Одступање тоталног импулса ракетног мотора	%	0	0.5

Обзиром да је вредност тоталног импулса ракетног мотора случајна величина која се контролише приликом производње ракете, њена расподела вероватноће није у потпуности нормална, јер се све ракете са одступањем масе горива (тоталног импулса) преко неке вредности одбацују. У овом случају узето је да је максимална вредност одступања тоталног импулса  $\sigma_{TI, \max} = 1\%$ .

Задатак система вођења артиљеријских ракета је да компензује поремећаје који на њу делују. Самим тим, параметри система вођења зависе од величине тих поремећаја, као и од жељене прецизности ракетног система. Параметре система



вођења можемо да поделимо на:

- енергетске параметре управљачког система – број  $N_I$  и импулс  $I_c$  управљачких мотора и
- параметре закона вођења – параметре величине прозора вођења  $r_{w0}$  и  $K_{wh}$  и минимално време између две узастопне команде  $t_{\min}$ .

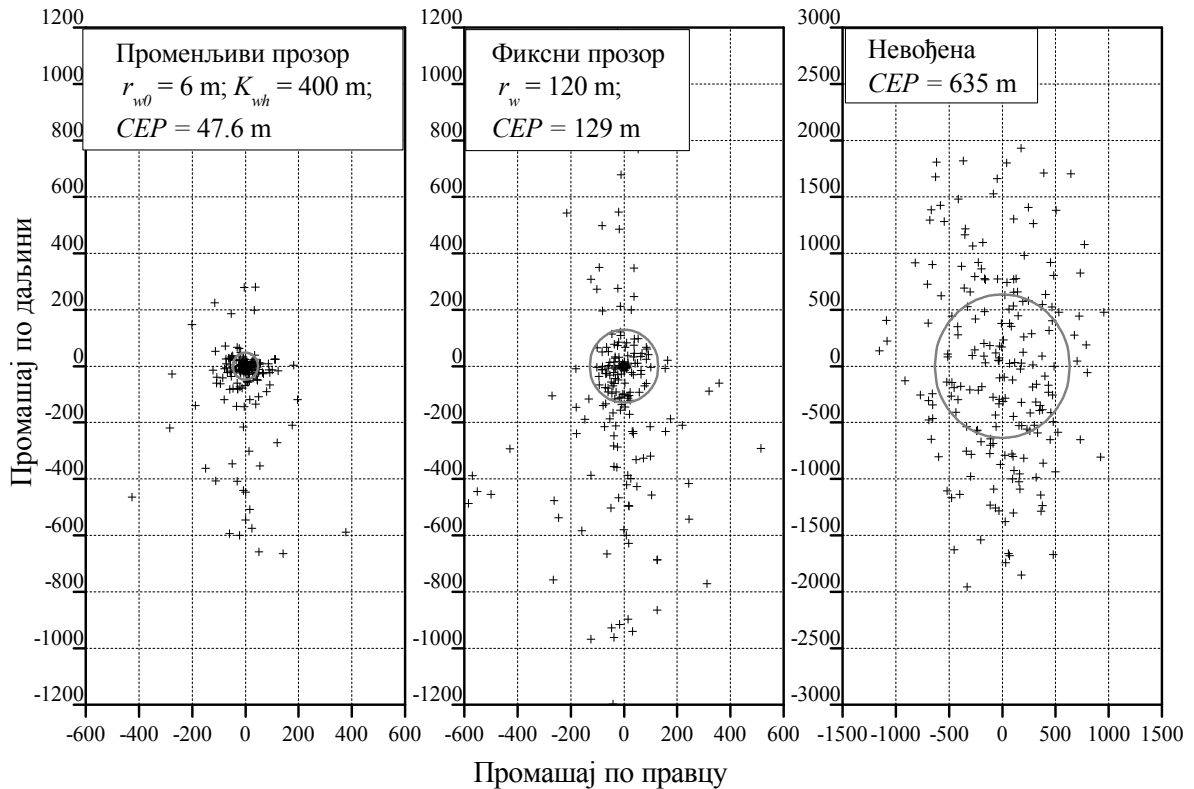
Величина потребних енергетских ресурса зависи од саме ракете, величине поремећаја које систем вођења треба да компензује и жељене прецизности, а величина параметара закона вођења, поред поменутог, зависи и од примењених енергетских ресурса. Да би се пронашла оптимална комбинација ових 5 параметара, примењена је метода подешавања параметара, уз Монте Карло симулацију лета ракете са 6 степени слободе и система вођења. Резултати добијени овом анализом односе се на скуп вредности поремећаја дат у табели 8.2 и путању са дометом  $x_{RT,f} = 45 \text{ km}$ .

### Дистрибуција места погодака

На слици 8.12 приказане су расподеле погодака добијене Монте Карло методом за почетне вредности величина стања и вредности поремећаја дате у табели 8.2. Приказани су подаци добијени за невођену ракету, као и за ракете са ТТ вођењем са фиксном ( $r_w = 100 \text{ m}$ ) и променљивом ( $r_{w0} = 6 \text{ m}$  и  $K_{wh} = 400 \text{ m}$ ) величином прозора вођења. У случају вођене ракете, управљачки систем са састојао од  $N_I = 35$  мотора, сваки импулса  $I_c = 70 \text{ N-s}$ , а минимално време између два узастопна импулса било је  $t_{\min} = 1.5 \text{ s}$ . У случају невођене ракете, са оваквим величинама поремећаја, остварена је вероватна кружна грешка  $CEP = 635 \text{ m}$ , са вођењем и фиксним прозором  $CEP = 129 \text{ m}$ , а са променљивом величином прозора за вођење  $CEP = 47.6 \text{ m}$ . У првом случају, величина вероватне кружне грешке смањена је 4.9 пута, а у другом 13.4 пута.

Дистрибуција места погодака у случају невођених ракета показује да је одступање по домету веће него одступање по правцу. Наиме  $V_d = 538 \text{ m}$  и  $V_p = 282 \text{ m}$ , што указује да је у овом случају ефекат одступања тоталног импулса доминантан. У случају ракета са ТТ вођењем, разлика је још уочљивија, па је, нпр. за вођење са променљивим прозором  $V_d = 123 \text{ m}$  и  $V_p = 51 \text{ m}$ . Дистрибуција погодака вођених ракета показује да постоји одређени број погодака са знатним одступањем, док је већина погодака тесно груписана око циља. Случајеви са вели-

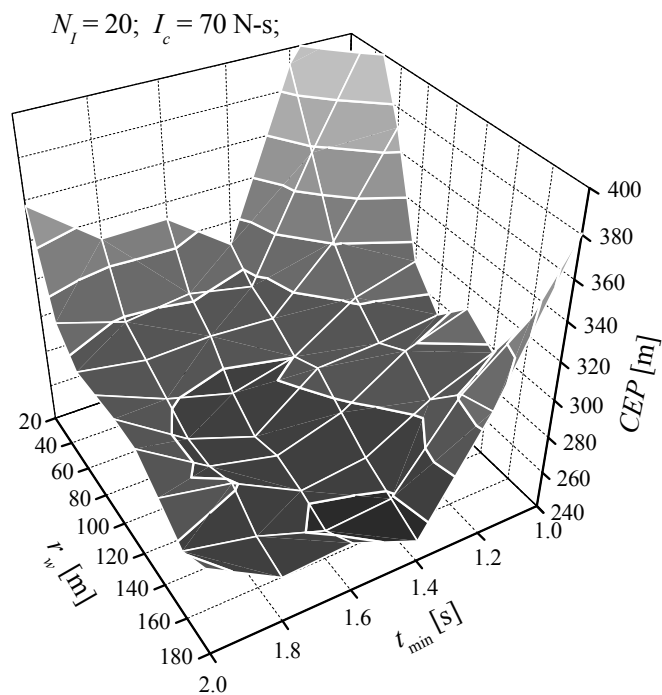
ким растурањем су повезани са појавом да услед знатних почетних поремећаја и, пре свега, одступања вредности тоталног импулса, систем вођења потроши све управљачке импулсе у раној фази, тако да на крају није могуће извршавање команди, при чему долази до знатних промашаја. У оба случаја вођених ракета је присутна појава да је број подбачаја већи него број пребачаја. Та појава је последица нелинеарности математичког модела ракета, као и прираста отпора са нападним углом ракете.



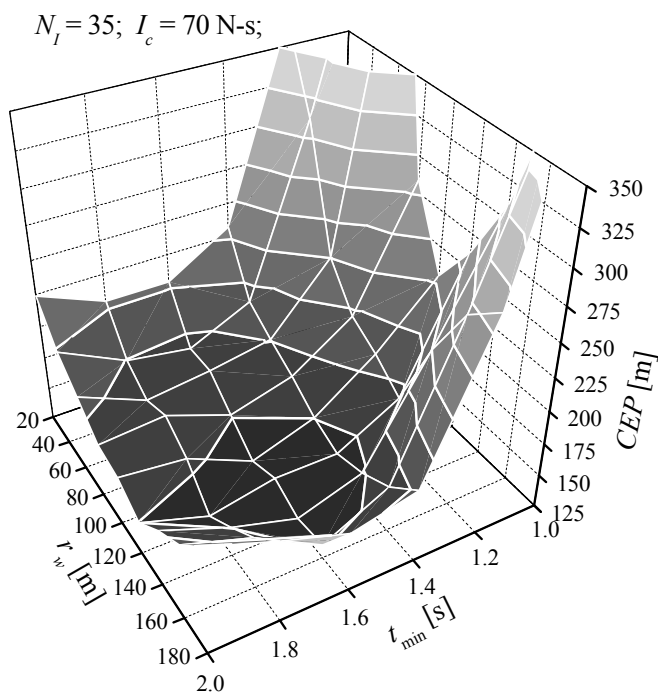
Слика 8.12. Слика погодака.

### Параметарска анализа за ТТ вођење са фиксним прозором

На сликама 8.13 – 8.15 приказани су резултати Монте Карло симулације за ТТ вођење са фиксном величином прозора. Дата је зависност вероватне кружне грешке  $CEP$  од параметара закона вођења – величине прозора вођења  $r_w$  и минималног времена између две узастопне команде  $t_{min}$ . Примењен је управљачки систем са реактивним импулсима интензитета  $I_c = 70 \text{ N}\cdot\text{s}$ , са малим ( $N_I = 20$ ), средњим ( $N_I = 35$ ) и великим ( $N_I = 50$ ) бројем импулса.



Слика 8.13. ТТ вођење са фиксном величином прозора: зависност растурања погодака од параметара закона вођења за случај са 20 управљачких мотора.

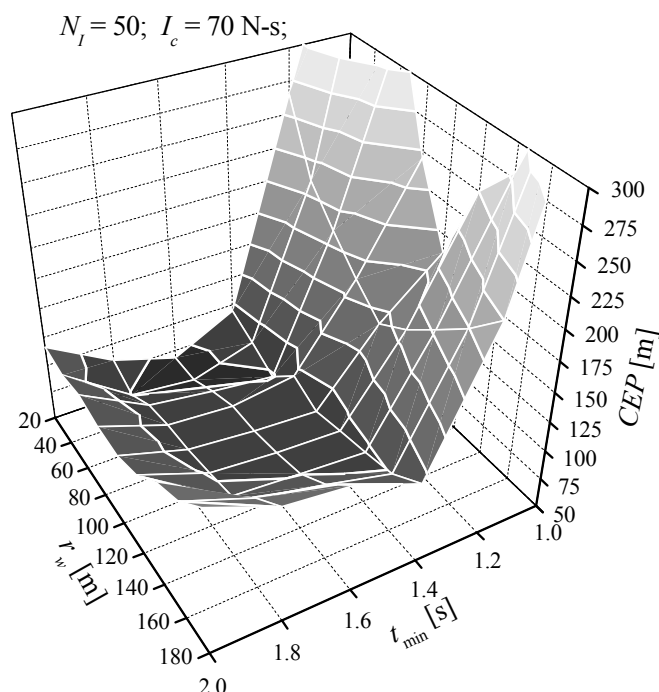


Слика 8.14. ТТ вођење са фиксном величином прозора: зависност растурања погодака од параметара закона вођења за случај са 35 управљачких мотора.

На основу остварених резултата, може се закључити да се за  $t_{\min} \approx 1.5 \text{ s}$  добијају најмање вредности растурања погодака независно од примењене величине

прозора вођења. Оптимална величина прозора за вођење, са друге стране, директно зависи од броја расположивих импулса. У случају са малим бројем импулса, најбољи резултати се добијају са великим прозором, и обратно. Величина прозора мора бити довољно велика да систем за вођење не потроши све импулсе сувише рано, што би могло довести до великих промашаја на циљу.

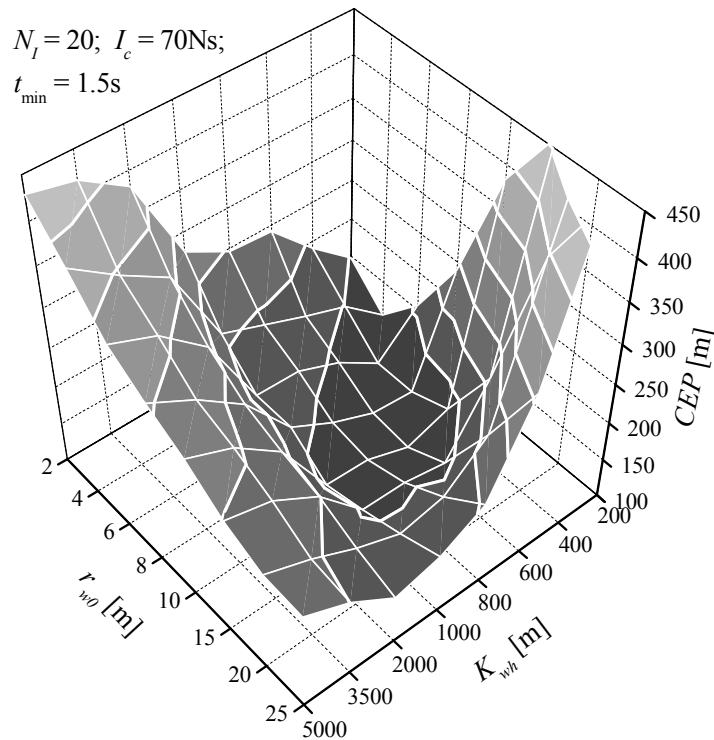
У случају  $N_I = 20$ , остварена је минимална вредност  $CEP = 251\text{m}$  за  $r_w = 180\text{m}$ . За  $N_I = 35$ ,  $CEP = 132\text{m}$  за  $r_w = 120\text{m}$  и за  $N_I = 50$ ,  $CEP = 67.9\text{m}$  за  $r_w = 40\text{m}$ .



Слика 8.15. ТТ вођење са фиксном величином прозора: зависност растурања погодака од параметара закона вођења за случај са 50 управљачких мотора.

### Параметарска анализа за ТТ вођење са променљивим прозором

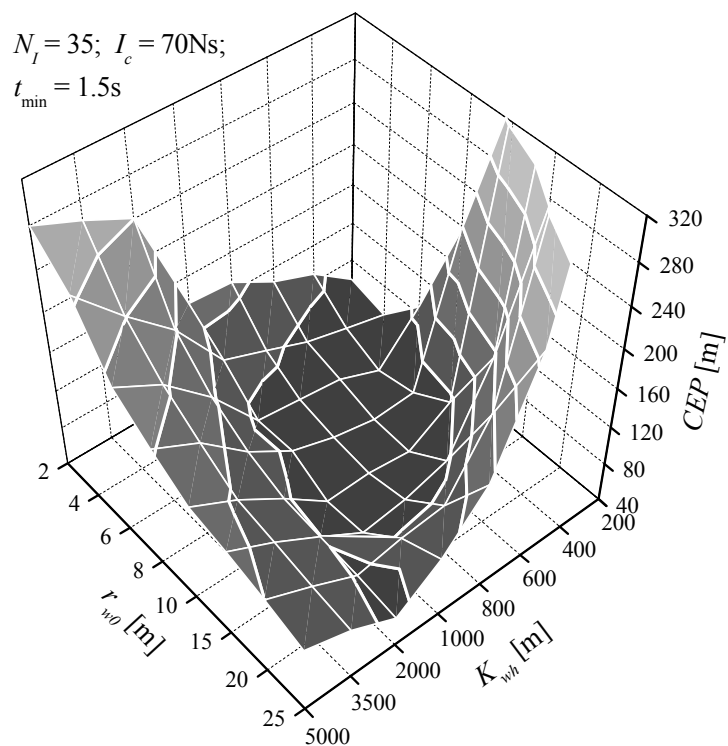
На сликама 8.16 – 6.18 приказани су резултати симулације за ТТ вођење са променљивом величином прозора. Дата је зависност вероватне кружне грешке  $CEP$  од параметара величине прозора вођења  $r_{w0}$  и  $K_{wh}$ . Примењен је управљачки систем са реактивним импулсима интензитета  $I_c = 70 \text{ N-s}$ , са малим ( $N_I = 20$ ), средњим ( $N_I = 35$ ) и великим ( $N_I = 50$ ) бројем импулса. Како су, у случају вођења са фиксном величином прозора, најмање вредности растурања погодака добијене за  $t_{\min} \approx 1.5\text{s}$ , приликом параметарске анализе ТТ вођења са променљивом величином прозора та вредност параметра је била фиксирана.



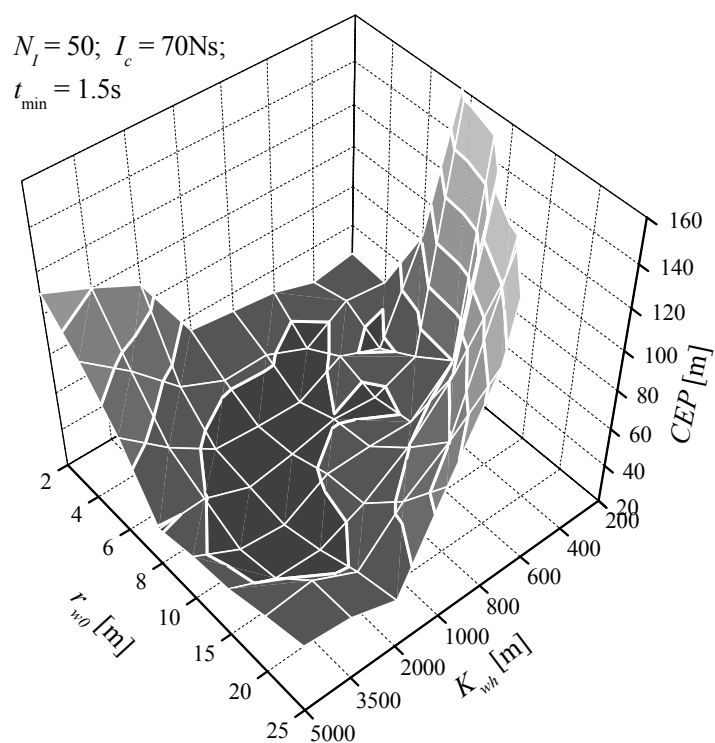
Слика 8.16. ТТ вођење са променљивом величином прозора: зависност растурања погодака од параметара величине прозора вођења за случај са 20 управљачких мотора.

Величина параметра  $K_{wh}$  је обрнуто пропорционална степену повећања прозора вођења са висином. Мање вредности тог параметра значе да је величина прозора вођења више променљива са висином, а веће да је његова величина ближа константној вредности. Како је, у овом случају, теме референтне путање на висини од око 13000 m, вредност  $K_{wh} = 11000$  m представља повећање величине прозора вођења на темену путање за 120%,  $K_{wh} = 6500$  m за 200%, а  $K_{wh} = 600$  m одговара повећању прозора од 32 пута. На дијаграмима су приказани резултати за широки дијапазон промена параметара  $r_{w0}$  и  $K_{wh}$ . При томе треба имати у виду да се за различите комбинације тих параметара могу добити слични прозори вођења, као нпр. за парове  $r_{w0} = 6$  m и  $K_{wh} = 400$  m и  $r_{w0} = 12$  m и  $K_{wh} = 800$  m.

У случају  $N_I = 20$ , остварена је минимална вредност  $CEP = 105$  m за  $r_{w0} = 4$  m и  $K_{wh} = 200$  m. За  $N_I = 35$ ,  $CEP = 43$  m за  $r_{w0} = 6$  m и  $K_{wh} = 400$  m, и за  $N_I = 50$ ,  $CEP = 28$  m за  $r_{w0} = 10$  m и  $K_{wh} = 2000$  m. Остварени резултати су значајно бољи него у случају вођења са константном величином прозора. Са малим бројем, 20 управљачких импулса, остварено је побољшање перформанси система вођења, тј. смањење величине растурања погодака од 58%, са 35 импулса, смањење за 67%, и са 50 импулса, смањење за 59%.



Слика 8.17. ТТ вођење са променљивом величином прозора: зависност растурања погодака од параметара величине прозора вођења за случај са 35 управљачких мотора.



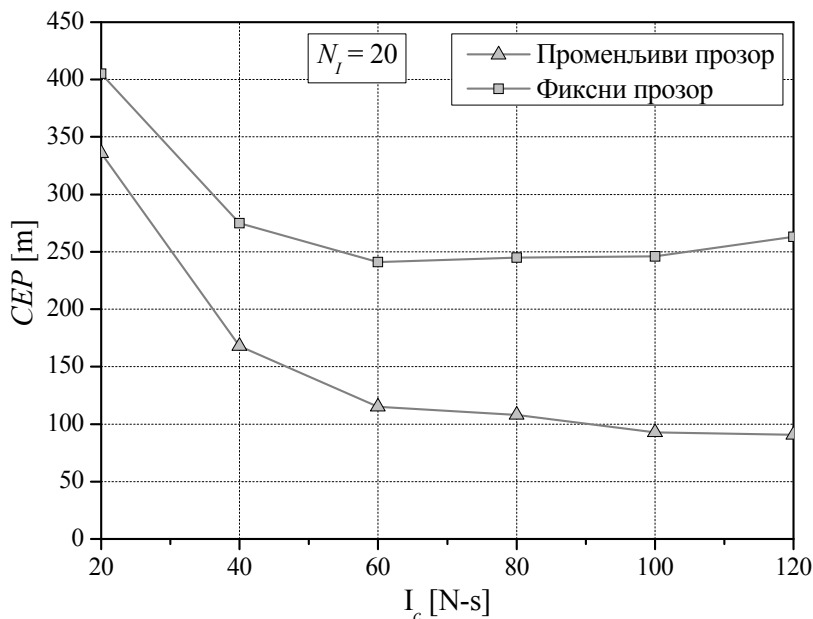
Слика 8.18. ТТ вођење са променљивом величином прозора: зависност растурања погодака од параметара величине прозора вођења за случај са 50 управљачких мотора.

Оптималне вредности параметара прозора вођења су међусобно веома зависне, па се могу посматрати једино у пару, као комбинација вредности. Иако у сваком од три посматрана случаја, постоји апсолутни минимум, може се говорити и о областима вредности параметара у којима се остварују добри резултати. Те области су јасно диференциране, са минимумом који формира зависност:

$$K_{wh,opt} = f(r_{w0}) \quad (8.19)$$

Вредности ове функције минимума расту са повећањем броја управљачких импулса, што значи да у случају већег броја импулса имамо већу вредност параметра  $K_{wh}$  и, самим тим, мање повећање прозора вођења са висином. У случају мањег броја импулса, мања вредност параметра  $K_{wh}$  значи још већи прозор на средњем делу путање, чиме се смањује број импулса утрошених у том и почетном делу и омогућује управљање и у завршном делу путање.

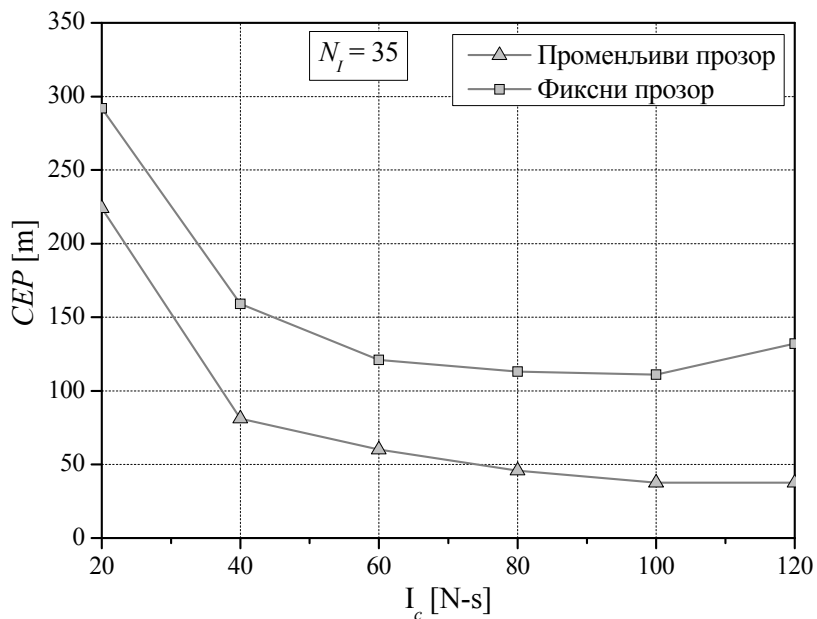
Претходна процедура приказује метод подешавања параметара, који подразумева симулације дејства управљачког система са свим могућим комбинацијама његових параметара и одабир оних за које се остварују најбољи резултати.



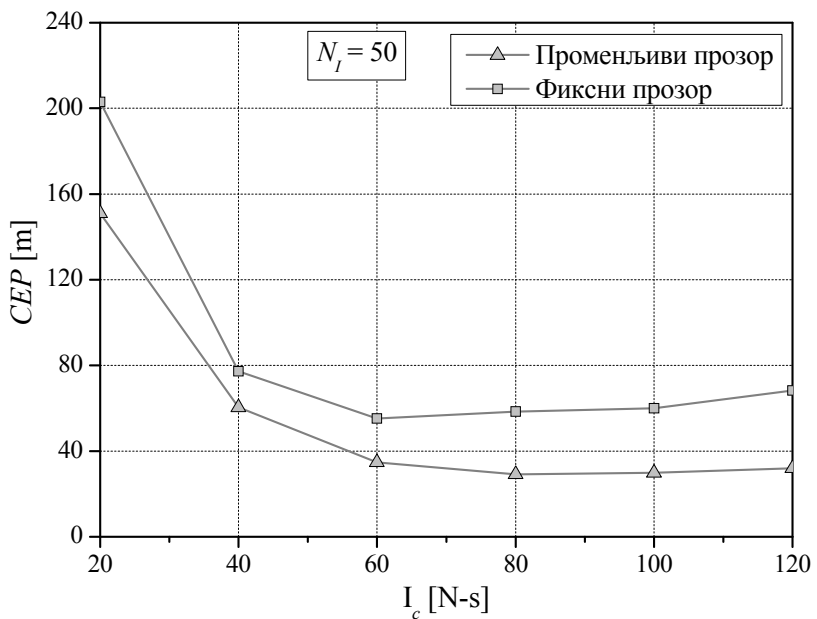
Слика 8.19. ТТ вођење: зависност растурања погодака од интензитета управљачких импулса.

На дијаграмима 8.19 до 8.24 дата је анализа зависности растурања погодака од енергетског ресурса управљачког система. Ова анализа је обављена на исти начин као и претходна анализа утицаја параметара закона вођења. За сваку задату комбинацију броја и импулса управљачких мотора, извршен је скуп Монте Карло симулација са различитим вредностима параметара закона вођења, и одабран је

најбољи резултат, са најмањим растурањем погодака. Величине поремећаја су, као и у претходној анализи, дате у табели 8.2.



Слика 8.20. ТТ вођење: зависност растурања погодака од интензитета управљачких импулса.



Слика 8.21. ТТ вођење: зависност растурања погодака од интензитета управљачких импулса.

Карактеристично за обе ове методе вођења је да, у случају да је енергетски ресурс управљачког система недовољан за потпуну компензацију поремећаја, свако повећање броја или интензитета мотора има великог утицаја на тачност система. Повећање енергетског ресурса преко вредности која обезбеђује компензацију

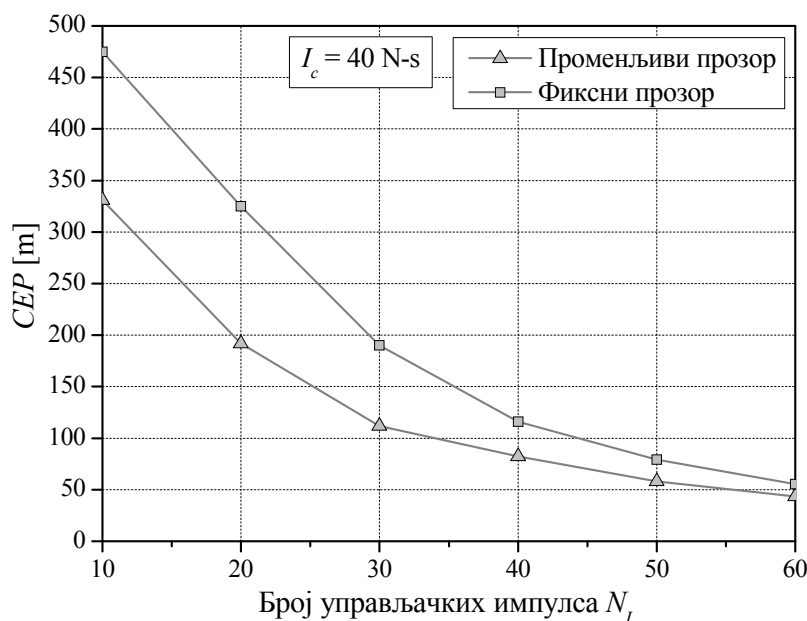


поремећаја, има, даље, веома мало утицаја на повећање тачности система. Та вредност енергетских ресурса зависи од величине поремећаја који делују на систем, али и од саме методе вођења.

Дијаграми 8.19 до 8.21 приказују зависност растурања погодака од интензитета управљачких импулса, и то за случај малог (20), средњег (35) и великог броја импулса. Ради поређења, дати су и резултати за ГТ вођење са фиксном величином прозора.

Потпуна компензација поремећаја за оба случаја ГТ вођења остварује се са импулсима интензитета  $I_c = 40 \div 60 \text{ N-s}$ . Повећање импулса преко те границе доноси веома смањење растурања, до вредности која остварује минимално растурање. Након те вредности интензитета импулса, његово даље повећање проузрокује пад перформанси система. За 35 импулса, минимално растурање се добија за интензитет  $I_c = 100 \text{ N-s}$ , а за 50 импулса  $I_c = 80 \text{ N-s}$ .

На дијаграмима 8.22 и 8.23 дата је величина растурања погодака у зависности од броја управљачких импулса за случај да је њихов интензитет  $I_c = 40 \text{ N-s}$  и  $I_c = 70 \text{ N-s}$ . У случају великог броја управљачких мотора, примена променљивог прозора не доноси тако велики добитак, као у случају са малим бројем мотора, где се побољшање креће до 60%.

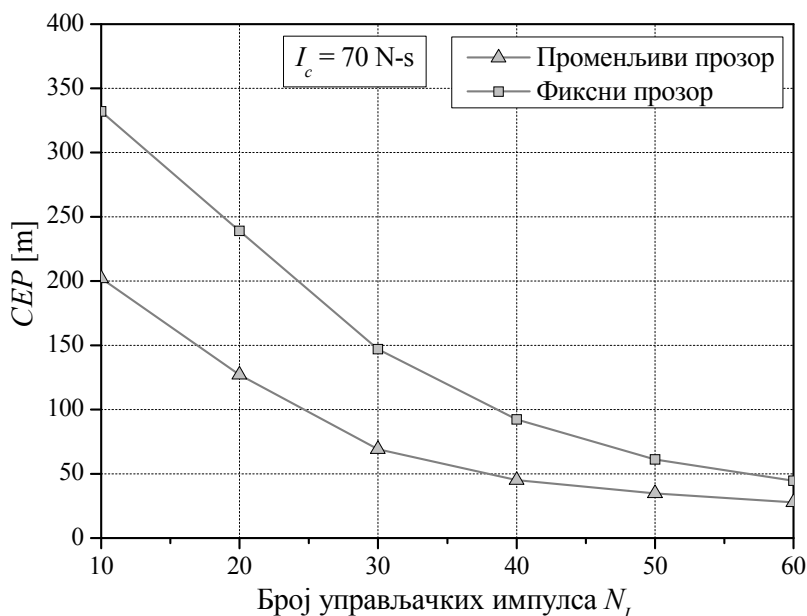


Слика 8.22. ГТ вођење: зависност растурања погодака од броја управљачких импулса.

За разлику од претходног разматрања утицаја интензитета управљачких

импулса на величину растурања, овде је немогуће пронаћи минимум, тј. неки број импулса за који се остварује минимално растурање. У овом случају може се говорити о оптималном броју мотора, тј. о минималном броју који остварује задато растурање погодака.

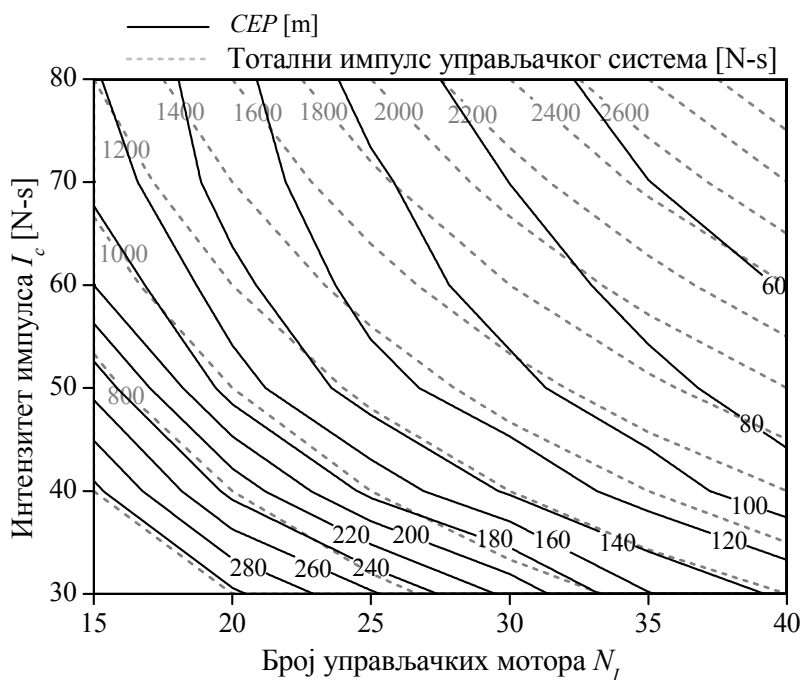
Поређењем остварених резултата ове две методе, намеће се закључак да закон вођења са прозором променљиве величине остварује знатно боље карактеристике од вођења са фиксним прозором. Уколико фиксирамо интензитет управљачких импулса, можемо рећи да вођење са променљивим прозором остварује исто растурање као вођење са фиксним прозором са бројем импулса већим за 10 до 15. Другим речима, модификацијом закона вођења постиже се уштеда од 10 до 15 управљачких мотора.



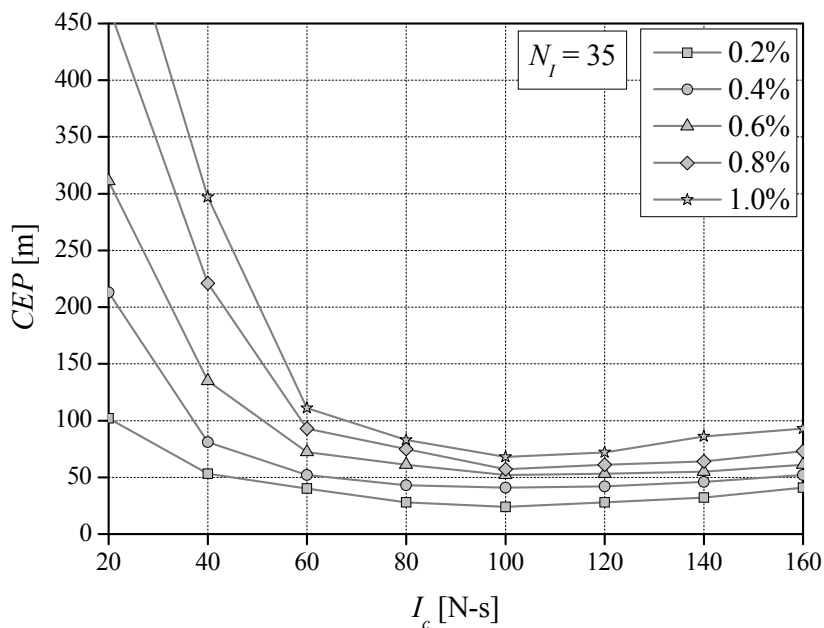
Слика 8.23. ТТ вођење: зависност растурања погодака од броја управљачких импулса.

У претходној анализи је показано да перформансе система вођења методом ТТ са променљивим прозором на различите начине зависе од броја и интензитета управљачких ракетних мотора. Повећање импулса преко неке вредности чак смањује перформансе система. Следећа анализа даје могућност да се за жељену вредност растурања погодака одаберу потребни импулс и број управљачких мотора. Слика 8.24 приказује зависност прецизности ракетног система од енергетског ресурса управљачког система, у случају ТТ вођења са променљивом величином прозора. На дијаграму су приказане контуре са константном вредношћу вероватне кружне грешке, као и контуре са тоталним импулсом управљачког система  $I_{c,T} = N_I I_c$ . За исту величину  $I_{c,T}$ , боља прецизност се остварује са комбинација-

ма са већим бројем мотора мањег импулса.



Слика 8.24. ТТ вођење са променљивом величином прозора.



Слика 8.25. Перформансе система вођења за различите вредности стандардне девијације тоталног импулса  $\sigma_{TI}$ .

Растурање вредности тоталног импулса је доминантни поремећај са становишта растурања погодака артиљеријског ракетног система. Слика 8.25 приказује зависност перформанси система вођења методом ТТ са променљивим прозором од

величине стандардне девијације одступања тоталног импулса. У овој анализи није примењено ограничење максималног одступања те величине, као што је то био случај у претходним разматрањима. Разматран је случај са 35 управљачких импулса различитог интензитета. За сваку тачку на дијаграму означену симболом је извршена Монте Карло симулација за све могуће комбинације параметара закона вођења и приказана минимална вредност.

Резултати ове анализе потврђују доминантност одступања тоталног импулса у односу на остале поремећаје за растурање погодака вођених артиљеријских ракета методом ГТ са променљивим прозором. Повећање стандардне девијације тоталног импулса проузрокује готово линеарно повећање растурања погодака. Повећањем вредности појединачних импулса може се компензовати растурање тоталног импулса, али само до најмањег могућег растурања за такву величину поремећаја. Тако, у случају стандардне девијације тоталног импулса од 1%, применом импулса од  $I_c = 100 \text{ N-s}$  се могу добити исти резултати као у случају стандардне девијације од 0.6% и импулса од  $I_c = 60 \text{ N-s}$ .

## Глава 9.

# ПРАЋЕЊЕ ТРАЈЕКТОРИЈЕ ПРИМЕНОМ ИМПУЛСНО ФРЕКВЕНТНО МОДУЛИСАНОГ УПРАВЉАЧКОГ СИГНАЛА

Основна карактеристика по којој се артиљеријске ракете разликују од ракета за директно гађање, када је у питању применљивост управљачких система заснованих на реактивним импулсима су домет и висина њихове трајекторије. Како су управљачки системи са реактивним импулсима ограничени бројем управљачких ракетних мотора, у случају великих домета није рационално да се ракетом управља на исти начин током целог лета. Штавише, јавља се потреба да се избегне активирање импулса на великим висинама, где они производе велике нападне углове. Ове потребе довеле су до развоја нове методе праћења задате трајекторије, назване праћење путање са импулсно фреквентном модулацијом (ПФМ), приказане у овом поглављу. Ова метода подразумева да се управљање извршава у две фазе: прва непосредно након активне фазе лета, и друга у силазном делу путање, када се ракета спусти у гушће слојеве атмосфере. При томе се примењује систем вођења са континуалним рачунањем команде и њеним претварањем у поворку импулса користећи импулсно фреквентну модулацију, како би се остварило пригушно дејство управљачког система и избегла појава прескока.

Управљачки систем који се састоји од одређеног броја ракетних мотора импулсног дејства, до сада је у литератури [1], [2], [3], [6], [22] и [23] примењиван искључиво у оквиру алгоритама са условима дефинисаном логиком окидања. Са друге стране, потреба за остварењем пригушног дејства намеће употребу система аутоматског регулисања, чији би се степен пригушења могао егзактно и одредити. Добијена континуална управљачка величина се, онда, треба претворити у дискретну, импулсну команду. Имајући на располагању одређени број импулса истог интензитета, да би се извршила модулација командног континуалног сигнала, једино је могуће мењати временски период између два узастопна импулса. Таква модулација се назива импулсно-фреквентна модулација, pulse-frequency modulation, PFM.

У овде примењеном принципу вођења, који подразумева примену дискретне репрезентације континуалног система регулисања и претварање управљачког сигнала у поворку импулса применом фреквентне импулсне модулације, величина стања која се контролише је одступање ракете од референтне путање. Примењује

се затворени систем аутоматског управљања, коме је у главној грани додат пропорционално – диференцијални ускладник првог реда, у циљу остваривања жељене динамике и пригушења. Примењени систем регулисања мора, такође, да буде временски променљив. Наиме, артиљеријске ракете се примењују код индиректног гађања и испаљују се под великим углом. При томе пролазе кроз слојеве атмосфере различите густине. Такође, њихова брзина није константна, па је њихов математички модел нестационаран. Самим тим, параметри закона вођења не могу бити константни, већ ће бити дати као функције времена.

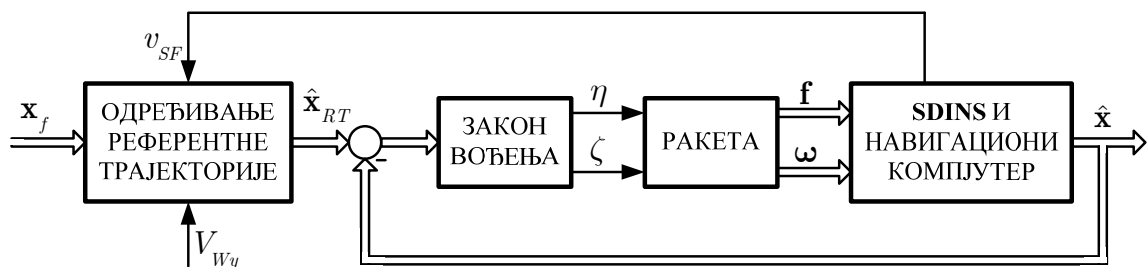
Најзначајнији поремећаји настају на самом почетку лета – приликом лансирања и током активне фазе. Одступања почетних вредности угла и угаоних брзина пропињања и скретања су резултат поремећаја приликом лансирања, док одступање вредности тоталног импулса, дезаксијалност силе потиска и бочни ветар проузрокују поремећаје у активној фази. Ефекат ових поремећаја се акумулира током лета ракета, па је улога прве фазе вођења да их компензује чим је то могуће. Током друге фазе, приближавајући се крају путање, ракета се прецизно наводи на циљ на основу свог одступања од референтне трајекторије. Референтна трајекторија је и у овом случају, као и код ТТ вођења, одређена као путања невођене ракете без дејства поремећаја, добијена на основу положаја жељене падне тачке у односу на лансер и локалних атмосферских услова.

На почетку обе фазе вођења одступање ракете од референтне трајекторије може да буде знатно. Да би се успешно компензовала таква велика грешка, неопходно је да постоји одређени енергетски ресурс, огледан у броју и интензитету расположивих импулсних мотора. Претпоставља се да су сви мотори једнаки, да је број мотора резервисаних за прву фазу ограничен, и да се неискоришћени мотори из прве фазе могу искористити у другој.

На крају активне фазе, ефекат поремећаја изазваних бочним ветром, дезаксијалношћу потиска и одступањем почетних вредности угаоних брзина пропињања и скретања може се одредити на основу одступања положаја ракете од референтне трајекторије и ефикасно компензовати. Одступање тоталног импулса ракетног мотора, међутим, не производи моментално одступање од референтне трајекторије. Самим тим, само на основу мерења растојања од референтне трајекторије, у првој фази вођења се не би могла да оствари адекватна компензација одступања вредности тоталног импулса, док би се у другој фази појавило превелика грешка положаја, за чију компензацију управљачки систем не би имао довољно енергетских ресурса. Како је одступање тоталног импулса ракетног мотора фактор са најзначајнијим утицајем на растурање погодака артиљеријских ракета, што је показа-

но у главама 2 и 8, овај проблем захтева да му се обрати посебна пажња. Devasia и Meyer [24] су развили методу која користи унапред одређене маневре за принудно вођење (recovery guidance), како би се остварило задовољавајуће понашање система у случају присуства засићења по величинама стања и улаза. Такав принцип је могуће применити и у овој ситуацији. Због великог значаја који има за формирање ПФМ праћења путање, основе методе принудног вођења дате су у Додатку С.

У случају да је референтна трајекторија одређена на основу номиналне вредности тоталног импулса ракетног мотора и стандардне атмосфере без бочног ветра, одступање тих величина довело би до великих грешака положаја, што би произвело значајне проблеме за систем вођења. Зато се референтна трајекторија одређује на основу вредности балистичког ветра непосредно пре лансирање и измерене вредности брзине специфичне силе на крају активне фазе лета. Брзина услед специфичне силе  $v_{SF}$  је брзина услед негравитационог убрзања и добија се од инерцијалног навигационог система, као што је показано у [25] и [26], као интеграл сигнала подужног акцелерометра. Принцип вођења методом ПФМ праћења путање приказан је на слици 9.1. Блок дијаграм система управљања састоји се од дела само са главном граном (одређивање референтне трајекторије) и дела са повратном граном, који служи за праћење тако генерисане референтне трајекторије, користећи оцењену стварну трајекторију добијену од навигацијског компјутера. Оцена положаја ракете добија се применом “strapdown” инерцијалног навигационог система (SDINS). Решавање навигационих једначина заснива се на коришћењу угаоне брзине  $\omega$ , добијене од брзинских жироскопа, специфичне силе  $\mathbf{f}$ , добијене помоћу акцелерометара, и гравитације  $\mathbf{g}$ , као што је показано у литератури [25] и [26]. На основу оцене одступања ракете од референтне трајекторије, закон вођења генерише команде  $\eta, \zeta$  у вертикалној и хоризонталној равни са циљем корекције трајекторије.



Слика 9.1. Блок дијаграм система вођења методом ПФМ праћења путање.

У наредним поглављима приказан је основни принцип методе вођења путем ПФМ праћења путање, што подразумева метод одређивања референтне путање,

дефиницију командних коефицијената и алгоритам вођења.

### Одређивање референтне трајекторије

Проблем одређивања референтне трајекторије може да се поједностави узимајући у обзир чињеницу да се ефекти одступања тоталног импулса и бочног ветра могу да разложе на вертикалну и хоризонталну раван, респективно. За дате екстремне вредности (минимална, номинална и максимална) тоталног импулса ракетног мотора ( $I_{tot}^{(l)}$ ;  $l = 1, 2, 3$ ) и бочног ветра ( $V_{W_y}^{(l)}$ ;  $l = 1, 2, 3$ ), могу да се унапред одреде референтне трајекторије дефинисане својим координатама: домет  $x_{RT}^{(l)}(t)$ , скретање  $y_{RT}^{(l)}(t)$  и висина  $h_{RT}^{(l)}(t)$ . Углови елевације и азимута лансера ( $\Theta_0^{(l)}, \Psi_0^{(l)}$ ;  $l = 1, 2, 3$ ) се одређују тако да су следећи гранични услови падних тачака задовољени:

$$\begin{aligned} h_{RT}^{(l)}(\Theta_0^{(l)}, I_{tot}^{(l)}, q(0) = q_0, x_f) &= h_f \\ y_{RT}^{(l)}(\Psi_0^{(l)}, V_{W_y}^{(l)}, r(0) = 0, x_f) &= y_f \end{aligned} \quad (9.1)$$

Овакав скуп екстремних референтних трајекторија се користи да се одреди нова, модификована референтна трајекторија за измерено одступање током лета. Имајући у виду да се уместо тоталног импулса мери брзина специфичне силе, имамо:

$$h_{RT}(t) = \lambda_{SF} h_{RT}^{(l)}(t) + (1 - \lambda_{SF}) h_{RT}^{(l+1)}(t) \quad (9.2)$$

$$y_{RT}(t) = \lambda_W y_{RT}^{(l)}(t) + (1 - \lambda_W) y_{RT}^{(l+1)}(t) \quad (9.3)$$

$$\Psi_0 = \lambda_W \Psi_0^{(l)} + (1 - \lambda_W) \Psi_0^{(l+1)} \quad (9.4)$$

где су

$$\lambda_{SF} = \frac{v_{SF}^{(l+1)} - v_{SF}}{v_{SF}^{(l+1)} - v_{SF}^{(l)}}, \quad \lambda_W = \frac{V_{W_y}^{(l+1)} - V_{W_y}}{V_{W_y}^{(l+1)} - V_{W_y}^{(l)}} \quad (9.5)$$

$$l = \begin{cases} 1, & (v_{SF} < v_{SF}^{(2)}) \vee (V_{W_y} < V_{W_y}^{(2)}) \\ 2, & (v_{SF} > v_{SF}^{(2)}) \vee (V_{W_y} > V_{W_y}^{(2)}) \end{cases} \quad (9.6)$$

Параметри  $\lambda_{SF}$  и  $\lambda_W$  су тежински фактори за линеарну интерполацију датих референтних трајекторија по брзини специфичне силе и брзини бочног ветра, респективно. Одређивање одступања референтне трајекторије од вертикалне равни  $y_{RT}(t)$  се извршава пре лансирања, док се висина референтне трајекторије  $h_{RT}(t)$



израчунава у току лета, након одређивања брзине због специфичне силе на крају активне фазе. Како тренутна брзина ветра  $V_w$  представља вектор који се мења у простору и времену, користи се еквивалентна средња брзина током лета (балистички ветар). Правац балистичког ветра може имати вредности из интервала  $[-\pi, \pi]$  у односу на правац трајекторије. Брзина балистичког ветра која се користи за модификацију референтне трајекторије добија се на основу метеоролошких података доступних непосредно пре лансирања. Стварни балистички ветар се разликује од процењене (измерене) вредности за одступање  $\Delta V_w$ , што је Гаусовска случајна променљива са нормалном расподелом и дефинисаном стандардном девијацијом. У даљем разматрању узима се у обзир бочна компонента ветра  $V_{wy}$  и њено одступање  $\Delta V_{wy}$ .

Одступање ракете од референтне трајекторије се одређује на начин који је описан у претходном поглављу, слика 8.1, као најкраће растојање од ракете до референтне трајекторије, користећи једначине (8.1) - (8.6). Сигнал грешке положаја одређен на поменути начин је гладак и погодан за методу ПФМ праћења путање. Претпоставља се да је положај ракете у простору одређен апсолутно тачно.

### Коефицијенти команде

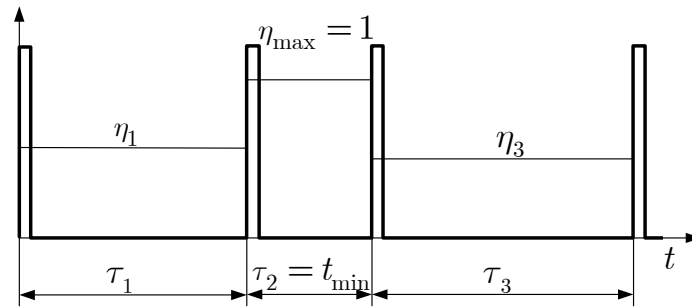
Примена система аутоматског регулисања у циљу остваривања пригушног дејства захтева познавање математичког модела објекта који се регулише – ракете. Уопштени опис механике лета дат је у глави 4. За потребе ове анализе употребиће се математички модел лета исказан у аеробалистичком координатном систему, који је најпогоднији за представљање ротирајућих ракета. Тај координатни систем је везан за тело ракете, али се не ваља заједно са њом, већ му је раван  $Oxz$  стално вертикална. Линеаризовани математички модел лета ракете у вертикалној равни дат је следећом једначином у простору стања, изведеном из једначине (4.67):

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{w} \\ \Delta \dot{q} \\ \Delta \dot{\theta} \\ \Delta \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_w & u + z_q & 0 & 0 \\ m_w & m_q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -u & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \tilde{w} \\ \Delta \tilde{q} \\ \Delta \tilde{\theta} \\ \Delta \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_\eta \\ m_\eta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \eta \quad (9.7)$$

У овом случају се уместо отклона крмила  $\delta$ , због могућности примене импулсног управљања, као улазна величина користи коефицијент команде у вертикалној равни  $\eta$ , који представља однос између оствареног и највећег могућег нормалног убрзања у тој равни, током одређеног временског периода. Самим тим, вредност коефицијента команде је ограничена на  $-1 \leq \eta \leq 1$ . Такође, ради разли-

ковања од координата референтне трајекторије, у једначини (9.7) је искоришћена вертикална координата  $\tilde{z}$  аеробалистичког координатног система.

Коефицијенти матрице улаза,  $z_\eta, m_\eta$  су деривативи силе и момента услед управљања и дефинишу ефикасност ракете у стварању управљачке силе и момента (Garnel и East [27]). Њихова дефиниција прилагођена је трансформацији континуалне команде  $\eta$ , јед.(9.7) у поворку импулса (фреквентна импулсна модулација). Основе импулсно – фреквентне модулације дали су Onyshko и Noges [28], [29].



Слика 9.2. Импулсно – фреквентна модулација.

На слици 9.2 приказано је управљање поворком импулса и принцип импулсно – фреквентне модулације. Сви импулси су истог интензитета  $I_c$ , док се временски период између њих разликује. Такође, претпоставља се да сви импулси делују у вертикалној равни. Дејство импулса фиксног интензитета и променљивог временског периода који му претходи  $\tau$  еквивалентно је дејству константног коефицијента команде  $\eta$  током тог периода. Интензитет еквивалентне континуалне команде обрнуто је пропорционалан времену које претходи импулсу. Средња вредност нормалног убрзања у вертикалној равни током временског интервала  $\tau$  пре посматраног импулса  $I_c$  је:

$$\tilde{f}_z^{(\eta)} = I_c / (m \cdot \tau) \quad (9.8)$$

Коефицијент команде  $\eta$  представља однос између оствареног и максималног средњег нормалног убрзања у вертикалној равни у периоду времена који претходи посматраном импулсу. Како та максимална вредност одговара минималном времену између две узастопне команде  $t_{\min}$ , имамо:

$$\eta = \tilde{f}_z^{(\eta)} / \tilde{f}_{z,\max}^{(\eta)} = t_{\min} / \tau \quad (9.9)$$

Динамички коефицијент управљања  $z_\eta$  је дефинисан тако да израз  $z_\eta \eta$  представља вредност нормалног убрзања у вертикалној равни услед команде  $\eta$ . Током

периода времена  $\tau$ , средња вредност нормалног убрзања је:

$$z_\eta \cdot \eta = I_c / (m \cdot \tau) \quad (9.10)$$

Коефицијент команде  $\eta$  је нормализован на 1, што значи да максимална команда  $\eta = 1$  одговара минималном могућем времену између два импулса  $\tau = t_{\min}$ , па је:

$$z_\eta = I_c / (t_{\min} m) \quad (9.11)$$

Уколико обележимо са  $l_c$  растојање прстена са импулсним моторима од центра масе ракете, динамички коефицијент управљања моментом је онда:

$$m_\eta = I_c l_c / (t_{\min} J_y) \quad (9.12)$$

За  $t_{\min} = \text{const}$ , вредности коефицијената  $z_\eta, m_\eta$  су константне током читавог времена лета. Уколико се коефицијент команде у хоризонталној равни означи са  $\zeta$ , онда је укупни коефицијент команде:

$$K = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2} \quad (9.13)$$

Уколико се, поред тога што су вредности  $\eta, \zeta$  нормализоване на 1, добије  $K > 1$ , вредност укупног коефицијента команде се ограничавају на  $K = 1$ .

Угао команде:

$$\Phi_K = \tan^{-1} \frac{\zeta}{\eta} \quad (9.14)$$

Време од претходног до следећег импулса:

$$\tau = \frac{t_{\min}}{K} \quad (9.15)$$

Користећи једначине (9.13) - (9.15), пар континуалних команди  $\eta, \zeta$  у вертикалној и хоризонталној равни се претвара у одговарајући тренутак и угловни положај управљачког импулса, односно, врши се импулсно фреквентна модулација тих управљачких сигнала.

Претходно разматрање дефинисало је управљачке динамичке коефицијенте  $z_\eta, m_\eta$  матрице улаза у једначини (9.7). Коефицијенти матрице стања су променљиви за време лета ракете. Добијају се из:

$$z_w = \frac{\partial \tilde{Z} / \partial \tilde{w}}{m} = \frac{QS}{m} \frac{1}{V} \frac{\partial C_{\tilde{N}}}{\partial \tilde{\alpha}} \quad (9.16)$$

$$m_w = \frac{\partial \tilde{M} / \partial \tilde{w}}{J_y} = \frac{Q S \ell}{J_y} \frac{1}{V} \frac{\partial C_{\tilde{m}}}{\partial \tilde{\alpha}} \quad (9.17)$$

$$m_q = \frac{\partial \tilde{M} / \partial q}{J_y} = \frac{Q S \ell}{J_y} \frac{\ell}{V} \frac{\partial C_{\tilde{m}}}{\partial q} \quad (9.18)$$

Вредности масе  $m$ , момента инерције око осе  $y - J_y$ , референтне дужине  $l$  и површине  $S$  су константне током времена. Са друге стране, аеродинамички деривативи су дати као функције Маховог броја, и дати су у Додатку А, слике А.2 – А.6.

$$\frac{\partial C_{\tilde{m}}}{\partial q} = C_{mq}(M); \quad \frac{\partial C_{\tilde{m}}}{\partial \alpha} = C_{m\alpha}(M); \quad \frac{\partial C_{\tilde{N}}}{\partial \alpha} = C_{N\alpha}(M); \quad (9.19)$$

Махов број и динамички притисак  $Q$  су функције брзине ракете  $V$  и температуре и густине ваздуха, који су, опет, функција висине лета ракете  $h$  и притиска и температуре на лансирном месту  $P_0, T_0$ .

За висине ракете  $h < 11000\text{m}$  температура  $T$  и притисак  $P$  ваздуха су:

$$T = T_0 - 0.0065 \cdot h \quad (9.20)$$

$$P = P_0 + \left( 1 - 0.0065 \frac{h}{T_0} \right)^{\frac{g}{0.0065R}} \quad (9.21)$$

где је  $R$  специфична гасна константа сувог ваздуха. За висине  $h > 11000\text{m}$  имамо:

$$T = T_0 - 0.0065 \cdot 11000 \quad (9.22)$$

$$P_{11000} = P_0 + \left( 1 - 0.0065 \frac{11000}{T_0} \right)^{\frac{g}{0.0065R}} \quad (9.23)$$

$$P = P_{11000} \cdot e^{\frac{-g(h-11000)}{RT}} \quad (9.24)$$

Густина ваздуха:

$$\rho = \frac{100P}{RT} \quad (9.25)$$

Брзина звука:

$$C = 20.05\sqrt{T} \quad (9.26)$$

Махов број:

$$M = \frac{V}{C} \quad (9.27)$$

Динамички притисак:

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (9.28)$$

Иако стварна трајекторија одступа од референтне, за потребе одређивања параметара математичког модела (9.7) може се узети  $V(t) = V_{RT}(t)$  и  $h(t) = h_{RT}(t)$ .

За познате метеоролошке податке са лансирног положаја и жељену референтну трајекторију, параметри математичког модела се, из (9.16) ÷ (9.28), са довољном тачношћу могу представити као функције времена и као такве учитане у меморију рачунара за вођење:

$$z_w = z_w(t); m_w = m_w(t); m_q = m_q(t) \quad (9.29)$$

На описани начин дефинисани су коефицијенти матрице стања и улаза у једначини (9.7).

### Коефицијенти дискретног ускладника

Модификација референтне трајекторије у складу са одступањем вредности тоталног импулса може да доведе до појаве великих вредности грешке вођења на почетку прве фазе. Такође, на почетку друге фазе вођења уобичајена је појава знатног одступања положаја ракете од референтне трајекторије. Самим тим, на почетку обе фазе вођења долази до веома интензивног командовања, како би се таква велика грешка вођења компензовала. У случају да систем вођења не обезбеђује пригушно дејство, дошло би до појаве прескока, па чак и осцилаторног понашања, што би, у случају енергетски ограниченог управљања реактивним импулсима, довело до њиховог превременог трошења. У случају да је на располагању мали број управљачких импулса и да не постоји адекватно пригушно дејство управљачког система, могућа би била ситуација да систем вођења компензујући велику почетну грешку оствари велику брзину приближавања референтној трајекторији и при томе потроши све импулсе, тако да не остане могућност даљег управљања. На тај начин се могу остварити већи промашаји него код невођених ракета. Из тог разлога неопходно је увођење пригушног дејства управљачког система.

Закон вођења методом ПФМ праћења путање користи дискретизовану верзију

континуалног управљачког система и претвара управљачки сигнал у поворку импулса користећи импулсно фреквентну модулацију. Управљана величина стања је одступање положаја ракете од референтне трајекторије. Примењен је затворени систем аутоматског управљања, са пропорционално–диференцијалним (ПД) ускладником са фазним предњачењем првог реда у главној грани, како би се оствариле жељена динамика и пригушење. Пропорционално диференцијални ускладник I реда дат једначином:

$$W_u(s) = \frac{\Delta\eta(s)}{\Delta\tilde{z}(s)} = K_u \frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1} \quad (9.30)$$

Модел ракете у простору стања дат је једначином (9.7). Да би се тај систем приказао у форми преносне функције, уводе се следеће ознаке [27]:

$$\omega_n^2 = m_q z_w - m_w u \quad (9.31)$$

$$2\zeta_n \omega_n = -(z_w + m_q) \quad (9.32)$$

$$K_\alpha = \frac{1}{u} \frac{m_\eta u - m_q z_\eta}{\omega_n^2} \quad (9.33)$$

$$T_\alpha = \frac{z_\eta}{m_\eta u - m_q z_\eta} \quad (9.34)$$

$$K_q = \frac{m_w z_\eta - z_w m_\eta}{\omega_n^2} \quad (9.35)$$

$$T_q = \frac{m_\eta}{m_w z_\eta - z_w m_\eta} \quad (9.36)$$

$$T_\gamma^2 = -\frac{K_\alpha}{K_q} T_\alpha \quad (9.37)$$

$$2\zeta_\gamma T_\gamma = T_q - \frac{K_\alpha}{K_q} \quad (9.38)$$

Преносна функција оствареног нормалног убрзања ракете  $\tilde{f}_z$  у зависности од команде  $\eta$  се добија на начин описан у следећем разматрању. Нормално убрзање у аеро-балистичком координатном систему је:

$$\tilde{f}_z(t) = \ddot{\tilde{z}}(t). \quad (9.39)$$

Са друге стране, диференцирањем последње једначине система (9.7), уз прет-

поставку да је пројекција брзине на осу  $Cx$  приближно константна и  $u \approx V$ ,  $\dot{u} = 0$ , добија се:

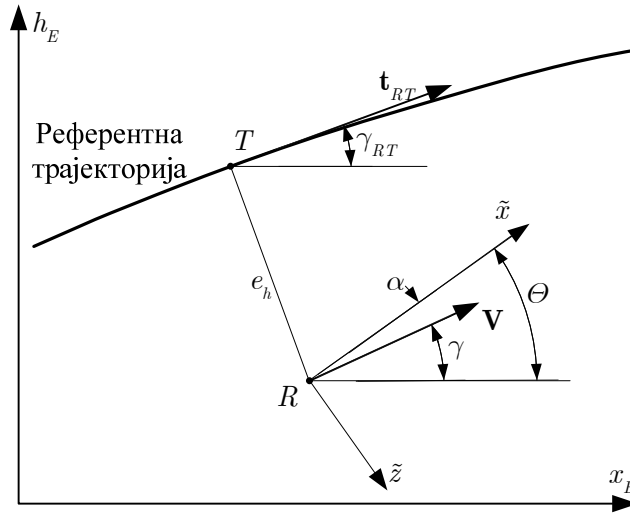
$$\Delta \ddot{z}(t) = \Delta \dot{w}(t) - \tilde{q}(t)V, \quad (9.40)$$

па је преносна функција нормалног убрзања у аеробалистичком координатном систему:

$$\frac{\Delta \tilde{f}_z(s)}{\Delta \eta(s)} = \frac{s \Delta \tilde{w}(s)}{\Delta \eta(s)} - \frac{\Delta \tilde{q}(s)}{\Delta \eta(s)} V = -V \frac{\omega_n^2 K_q (T_\gamma^2 s^2 + 2\zeta_\gamma T_\gamma s + 1)}{s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2} \quad (9.41)$$

Ако преносну функцију ракете, означимо са  $W_R$ , имамо:

$$W_R(s) = \frac{\Delta \tilde{z}(s)}{\Delta \eta(s)} = \frac{\Delta \tilde{z}(s)}{\Delta \tilde{f}_z(s)} \cdot \frac{\Delta \tilde{f}_z(s)}{\Delta \eta(s)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\Delta \tilde{f}_z(s)}{\Delta \eta(s)} \quad (9.42).$$



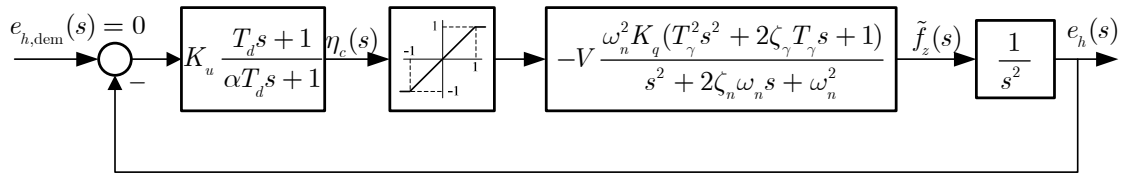
Слика 9.3. Грешка вођења.

Грешка вођења се, у случају методе ПФМ праћења путање, одређује на исти начин као и у случају ТТ вођења са променљивим прозором, као најкраће растојање између ракете и референтне трајекторије. На слици 9.3 приказана је геометрија положаја ракете у односу на референтну трајекторију у вертикалној равни. Правац грешке положаја у вертикалној равни  $e_h$  је управан на тангенту референтне трајекторије у тачки  $T$ , која има најмање растојање од ракете. Како је путања ракете блиска референтној трајекторији, вектор брзине ракете  $V$  је приближно паралелан вектору тангенте трајекторије  $t_{RT}$ . За мале вредности нападног угла  $\alpha$  имамо  $\cos \alpha \approx 1$  и:

$$\ddot{e}_h = \ddot{z} \cos(\alpha + \gamma - \gamma_{RT}) \approx \ddot{z} \quad (9.43)$$

На основу претходног разматрања, у једначинама (9.39) - (9.30) се може заменити  $\ddot{z}$  са  $\ddot{e}_h$  и  $z(s)$  са  $e_h(s)$ .

На слици 9.4 приказан је блок дијаграм континуалног система аутоматског управљања у вертикалној равни. Његов циљ је да поништи одступање положаја ракете од референтне трајекторије  $e_h$ . Излаз ускладника је коефицијент команде  $\eta_c$ , чија се вредност ограничава на  $\pm 1$  због касније импулсно фреквентне модулације. Ракета под дејством те команде и одговарајућих аеродинамичких сила остварује нормално убрзање, чија је компонента у вертикалној равни аеробалистичког координатног система  $\tilde{f}_z$ . То убрзање дефинише кретање ракете у вертикалној равни, и, двоструком интеграцијом, одређује вредност грешке вођења у вертикалној равни  $e_h$ .



Слика 9.4. Блок дијаграм система управљања.

Преносна функција отвореног кола ракете је:

$$W_{ok}(s) = W_u(s)W_R(s) = -K_u V \frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1} \frac{\omega_n^2 K_q (T_\gamma^2 s^2 + 2\zeta_\gamma T_\gamma s + 1)}{(s^2 + 2\zeta_n \omega_n s + \omega_n^2) s^2} \quad (9.44)$$

Прећи ћемо сада на разматрање у фреквентном домену. Циљ усклађивања система је да се одреде временска константа  $T_d$ , појачање  $K_u$  и параметар  $\alpha$  ускладника (9.30), тако да се оствари захтевана вредност пресечне учестаности појачања отвореног кола целог система  $\omega_c$ , једначина (9.44), и оствари захтевани фазни угао фреквентне карактеристике отвореног кола  $\varphi_{ok}(\omega_c)$ .

Фреквентна карактеристика отвореног кола може да се добије заменом комплексног аргумента  $s$  са  $j\omega$  у једначини (9.44). Да би се остварило да је пресечна учестаност појачања једнака  $\omega_c$ , потребно је да је амплитуда фреквентне карактеристике отвореног кола једнака јединици за  $\omega = \omega_c$ :

$$A_{ok}(\omega_c) = |F_{ok}(j\omega_c)| = 1 \quad (9.45)$$

Раздвајајући фреквентне карактеристике ускладника и ракете, имамо:

$$A_{ok}(\omega_c) = |F_u(j\omega_c)| \cdot |F_R(j\omega_c)|, \quad (9.46)$$



где је

$$A_R(\omega_c) = |F_O(j\omega_c)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega_c) + \operatorname{Im}^2(\omega_c)} \quad (9.47)$$

$$\operatorname{Re}(\omega_c) = K_q V \left( \frac{\omega_n}{\omega_c} \right)^2 \frac{(T_\gamma^2 \omega_c^2 - 1)(\omega_n^2 - \omega_c^2) - 2\zeta_\gamma T_\gamma \zeta_n \omega_n \omega_c^2}{4\zeta_n^2 \omega_n^2 \omega_c^2 - (\omega_n^2 - \omega_c^2)^2} \quad (9.48)$$

$$\operatorname{Im}(\omega_c) = K_q V \left( \frac{\omega_n}{\omega_c} \right)^2 \frac{2\zeta_\gamma T_\gamma \omega_c (\omega_n^2 - \omega_c^2) + 2\zeta_n \omega_n \omega_c (T_\gamma^2 \omega_c^2)}{4\zeta_n^2 \omega_n^2 \omega_c^2 - (\omega_n^2 - \omega_c^2)^2} \quad (9.49)$$

Ускладник дефинисан једначином (9.30) има максималну поправку фазе за учестаност  $\omega = 1/(T_d \sqrt{\alpha})$ . За изабрану вредност параметра  $\alpha$ , временска константа ускладника се бира тако да се максимална поправка фазе оствари за учестаност једнаку жељеној пресечној учестаности појачања отвореног кола  $\omega_c$ :

$$T_d = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\alpha}} \quad (9.50)$$

За тако дефинисан ускладник, амплитуда његове фреквентне карактеристике за учестаност  $\omega = \omega_c$  не зависи од те учестаности:

$$A_u(\omega_c) = K_u \frac{\sqrt{4 - (1 - \alpha)^2 / \alpha}}{1 + \alpha} = K_u \cdot A_\alpha \quad (9.51)$$

Амплитудна фреквентна карактеристика отвореног кола за  $\omega = \omega_c$  је:

$$A_{ok}(\omega_c) = K_u \cdot A_\alpha \cdot \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega_c) + \operatorname{Im}^2(\omega_c)} \quad (9.52)$$

Како за  $\omega = \omega_c$  важи  $A_{ok}(\omega_c) = 1$ , имамо:

$$K_u = \frac{1}{A_\alpha \sqrt{\operatorname{Re}^2(\omega_c) + \operatorname{Im}^2(\omega_c)}} \quad (9.53)$$

Под претпоставком да је изабрана вредност пресечне учестаности појачања отвореног кола знатно мања од сопствене учестаности кратко-периодичних осцилација  $\omega_c \ll \omega_n$ , могу се утврдити следеће зависности фазних углова:

$$\varphi[F_R(j\omega_c)] \approx -\pi \quad (9.54)$$

$$\varphi[F_{ok}(j\omega_c)] \approx -\pi + \varphi[F_u(j\omega_c)] \quad (9.55)$$

Ускладник дефинисан једначином (9.30) и условом (9.50) има на учестаности  $\omega = \omega_c$  максимално фазно предњачење, које зависи само од изабране вредности параметра  $\alpha$ :

$$\varphi_u(\omega_c) = \tan^{-1}\left[\frac{(1-\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}\right] \quad (9.56)$$

За изабрану вредност параметра  $\alpha$ , фазни угао фреквентне карактеристике отвореног кола је:

$$\varphi_{ok}(\omega_c) = -\pi + \tan^{-1}\left[\frac{(1-\alpha)}{2\sqrt{\alpha}}\right] \quad (9.57)$$

Параметар  $\alpha$  се бира тако да је испуњено  $0.1 \leq \alpha \leq 1$ . За  $\alpha = 0.1$ , добија се  $\varphi_{u,\max} = 54.9^\circ$ . Спуштајући вредности испод  $\alpha < 0.1$  се добија мали прираст фазног предњачења, уз повећани прираст високо фреквентног шума. Уколико је потребно да се оствари већа поправка фазе, примењује се двоструки ускладник.

Сада су сви коефицијенти ускладника (9.30) дефинисани, па, примењујући билинеарну трансформацију (Тустинов метод) и инверзну z-трансформацију [30] на (9.30), имамо:

$$\eta_k = c_0 e_{h,k} + c_1 e_{h,k-1} - d_1 \eta_{k-1} \quad (9.58)$$

$$c_0 = K_u \frac{T_s + 2T_d}{T_s + 2\alpha T_d} \quad (9.59)$$

$$c_1 = K_u \frac{T_s - 2T_d}{T_s + 2\alpha T_d} \quad (9.60)$$

$$d_1 = \frac{T_s - 2\alpha T_d}{T_s + 2\alpha T_d} \quad (9.61)$$

Израз (9.58) је дискретна једначина ПД ускладника, где индекси  $k$  и  $k-1$  представљају текући и претходни одабирак.  $T_s$  у једначинама (9.59) – (9.61) је период одабирања.

Претходно описани поступак у потпуности дефинише одређивање коефицијента команде у вертикалној равни  $\eta$ . Коефицијент команде у хоризонталној равни  $\zeta$  се рачуна на исти начин као и у вертикалној:

$$\zeta_k = c_0 e_{y,k} + c_1 e_{y,k-1} - d_1 \zeta_{k-1} \quad (9.62)$$

Овако одређени коефицијенти команде  $\eta_k, \zeta_k$  се импулсно фреквентном модулацијом претварају у одговарајуће параметре импулсне команде: времена до сле-

дећег импулса  $\tau_k$  и угла импулсне команде  $\Phi_{K,k}$ , дефинисане једначинама (9.13) - (9.15). Уколико се информације од навигационог рачунара о положају ракете у простору добијају у временским интервалима  $T_S$ , у тим интервалима се и занављају вредности параметара  $\tau_k$  и  $\Phi_{K,k}$ . Активирање импулсних ракетних мотора се одвија асинхроно од тог процеса, по посебној окидачкој логици.

Услови за опаљење  $i$ -тог управљачког мотора су:

- Да је почела фаза управљања:  $t_{c1} \leq t < t_{e1}$  за прву и  $t > t_{c2}$  за другу фазу.
- Да је од тренутка претходног импулса или од почетка фазе управљања протекло време веће од  $\tau_k : t > t_{preth} + \tau_k$ .
- Да посматрани импулсни мотор није већ утрошен.
- Да је разлика његовог угла ваљања и задатог, који узима у обзир и еквивалентни угао кашњења, мања од задате величине прага угла опаљења  $\varepsilon_\Phi$ :

$$\left| \Phi + \Delta\Phi_n + \Phi_d - \Phi_{K,k} \right| < \varepsilon_\Phi \quad (9.63)$$

Угловни услов дат једначином (9.63) приказан је на слици 8.3.

Управљање се одвија на исти начин у обе фазе. Разликују се само параметри закона вођења.

### Ток прорачуна команде

Улазне величине за прорачун су:

- Системске величине:
  - Маса  $m$ , момент инерције  $J_y$ , крак дејства импулса  $l_c$ .
  - Референтна дужина  $l$  и површина  $S$ .
  - Аеродинамички деривативи  $C_{N\alpha}(M)$ ,  $C_{m\alpha}(M)$ ,  $C_{mq}(M)$  у функцији Маховог броја, задати као бројевни низови, за задате вредности Маховог броја  $M(i)$ .
- Величине са ватреног положаја
  - Притисак  $P_0$  и температура  $T_0$ .
  - Референтна трајекторија, задата као низ тачака у простору, датих координатама  $x_R(i)$ ,  $y_R(i)$ ,  $h_R(i)$  у инерцијалном координатном систему.
- Измерене величине, добијене од бесплатформног инерцијалног навигационог система:
  - Координате ракете у односу на инерцијални координатни систем  $x, y, h$ .

- Брзина ракете  $V$ .
- Параметри система вођења у првој и другој фази
  - Жељена вредност пресечне учестаности појачања отвореног кола  $\omega_{c1,2}$ .
  - Поправка фазе, огледана у коефицијенту  $\alpha_{1,2}$ .
  - Минимално време између два импулса  $t_{\min 1,2}$ .
  - Почетак и крај прве  $t_{c1}, t_{e1}$  и почетак друге фазе  $t_{c2}$ ,
  - Интензитет управљачког импулса  $I_c$ ,
  - Број управљачких мотора  $N_I$ .
  - Број управљачких мотора резервисаних за прву фазу  $N_{I1}$ .

Пре лансирања (симулације), на основу познатих координата ракетног система и циља, као и доступних информација о атмосферским условима, одређују се, из таблица гађања почетни услови лансирања, као скуп екстремних референтних трајекторија који им одговара. Врши се избор жељених параметара закона вођења  $\omega_{c1,2}, \alpha_{1,2}, t_{\min 1,2}, t_{c1,2}$  и  $t_{e1}$ . Затим се одреде константне вредности (9.11), (9.12), (9.50) и (9.51). Променљиве вредности се одређују за референтне величине стања у форми низова вредности:

- Атмосфера: (9.20) – (9.28),
- Коефицијенти ускладника: (9.16) – (9.18), (9.31) – (9.38), (9.47) – (9.52), (9.53) и (9.59) – (9.61).

У меморију рачунара за вођење, смештеног на ракети, снимају се коефицијенти дискретног ускладника  $c_0(t), c_1(t)$  и  $d_1(t)$ , као временски зависни низови података, заједно са екстремним референтним трајекторијама,  $x_{RT}^{(l)}(i), y_{RT}^{(l)}(i), h_{RT}^{(l)}(i)$ .

Током лета, у сваком тренутку одабирања, одређивања положаја ракете, одређују се:

- Две тачке на референтној путањи са најмањим растојањем до ракете, (8.1),
- Одступање од референтне путање: (8.2) – (8.6),
- Коефицијент и угао команде: (9.58), (9.13) – (9.15).

Ова метода вођења захтева више прорачуна пре лансирања и већи капацитет меморије на ракети за складиштење података у односу на ГТ вођење са променљивим прозором.

## СИМУЛАЦИЈА МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА РАКЕТЕ СА ПФМ ВОЂЕЊЕМ

Основни алат за анализу понашања примењеног система вођења и ефекта импулсног управљања на лет ракете је симулација математичког модела тако управљане ракете са 6 степени слободе кретања. Опис математичког модела је дат у глави 4, док су геометријске, инерцијалне, погонске и аеродинамичке карактеристике разматране артиљеријске ракете дате у Додатку А.

За потребе приказа рада система вођења и управљања изабран је један случај лета са дометом  $x_T = 45000 \text{ m}$ , мањим од максималног. Референтни почетни услови – номинални углови лансирања и референтна трајекторија, су одређени тако да ракета, у случају лета без поремећаја, падне у жељену тачку. Како би се приказао ефекат вођења и управљања, изабран је један скуп вредности поремећаја који делују на ракету. Номиналне и поремећајне вредности почетних величина и параметара дате су у табели 9.1. Ракета напушта лансер са брзином  $V_0 = 92.7 \text{ m/s}$  и угаоном брзином ваљања  $p_0 = 33 \text{ rad/s}$ . За случај  $I_{tot}^{(1)} = 0.98I_{tot}$ , референтна трајекторија која задовољава услов (9.1) се добија за  $\Theta_0^{(1)} = 46.584^\circ$ , а за  $I_{tot}^{(3)} = 1.02I_{tot}$ :  $\Theta_0^{(3)} = 41.688^\circ$ . Корекције трајекторије у односу на бочни ветар су: за  $V_{Wy}^{(1)} = -10 \text{ m/s}$ , почетни угао скретања је  $\Psi_0^{(1)} = -3.05^\circ$ , а за  $V_{Wy}^{(3)} = 10 \text{ m/s}$ , имамо  $\Psi_0^{(3)} = 3.30^\circ$ . Претпоставља се да мерење бочног ветра није било тачно, тако да је референтна трајекторија одређена за  $V_{Wy} = 5 \text{ m/s}$  ( $\lambda_w = 0.5$ ,  $\Psi_0 = 1.65^\circ$ ), док је стварна вредност балистичког ветра била  $V_{Wy} = 7 \text{ m/s}$ . Такође, претпоставља се да је мерење брзине специфичне силе било тачно.

Табела 9.1.

Величина	Јед. мере	Номинална вредност	Поремећајна вредност
Почетни угао пропињања	°	43.902	43.92
Почетни угао скретања	°	1.65	1.67
Почетна угаона брзина пропињања	rad/s	-0.0598	-0.04
Почетна угаона брзина скретања	rad/s	0	-0.01
Аксијална компонента брзине ветра	m/s	0	2
Попречна компонента брзине ветра	m/s	5	7
Угао дезаксијалности потиска	mrad	0	1
Одступање тоталног импулса ракетног мотора	%	0	1

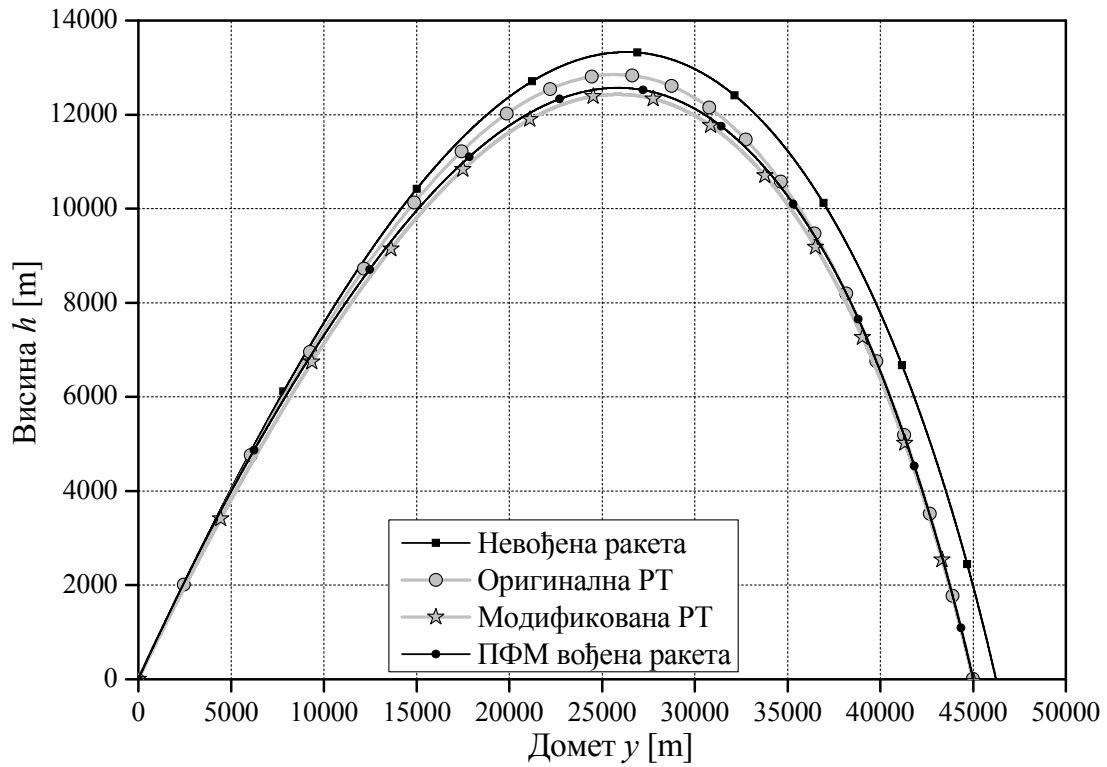
Примењен је управљачки систем који се састоји од  $N_I = 35$  управљачких мотора, сваки импулса  $I_e = 70 \text{ N}\cdot\text{s}$ . Пресечне учестаности појачања су биле  $\omega_{c1,2} = 0.3 \text{ rad/s}$ , и  $\alpha_{1,2} = 0.1$ , за обе фазе вођења. Друга фаза је почела у тренутку  $t_{c2} = 75 \text{ s}$ , са минималним временом између два узастопна импулса од  $t_{\min 2} = 0.5 \text{ s}$ . Прва фаза је имала на располагању 16 импулса, завршила се у тренутку  $t_{e1} = 10 \text{ s}$ , и  $t_{\min 1} = 0.2 \text{ s}$ .

### Резултати симулације једног репрезентативног случаја

На слици 9.5 приказано је поређење путања вођене и невођене ракете у вертикалној равни. Како је изабрани скуп поремећаја које делују у вертикалној равни исти као у случају анализе ТТ вођења са променљивим прозором, и у овом случају је доминантни поремећај одступање тоталног импулса, које доводи до тога да невођена ракета остварује теме путање на висини од 13330 m, уместо на 12850 m, на референтној путањи, што резултира промашајем на циљу по домету од 1240 m.

Поред трајекторија вођене и невођене ракете, приказана је и референтна трајекторија, тј. путања коју би ракета имала без дејства поремећаја, као и модификована референтна трајекторија (РТ). Модификована РТ је одређена из услова (9.1), као путања ракете са различитом вредношћу тоталног импулса, која пада у исту тачку као и оригинална РТ. Обзиром да је, у посматраном случају, тотални импулс ракетног мотора за 1% већи од оригиналног, већа је и брзина ракете након активне фазе, па је за погодак исте тачке потребан нижи угао елевације лансера од  $\Theta_0 = 42.795^\circ$ , уместо  $\Theta_0 = 43.902^\circ$ , под којим је ракета требало да буде лансирана, односно стварног почетног угла од  $\Theta_0 = 43.92^\circ$  који је различит од задатог услед поремећаја при лансирању.

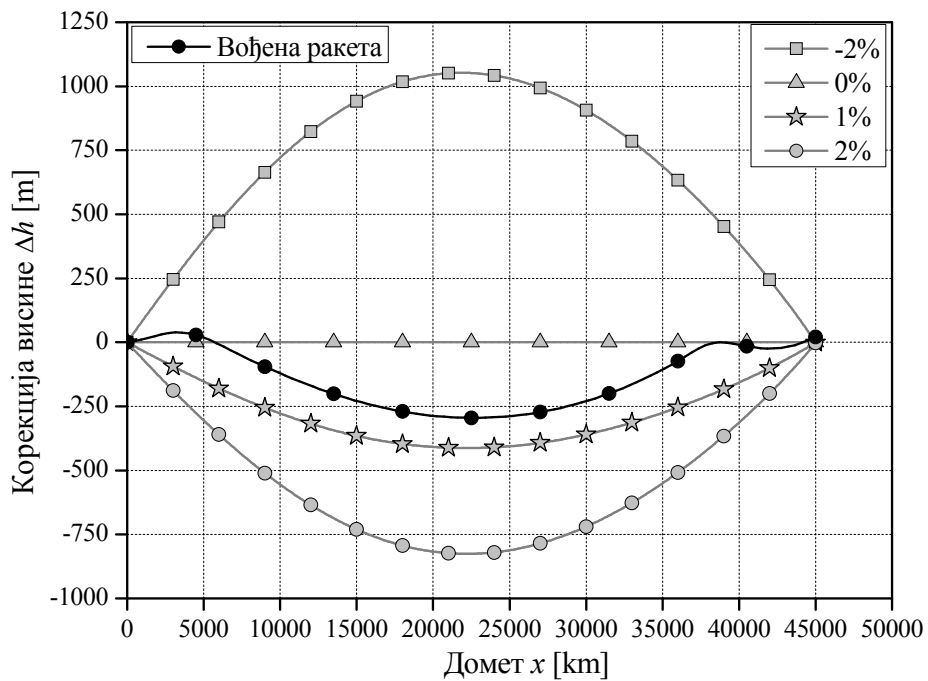
Ракетни мотор на номиналној температури ради 4.1 s. Да би се компензовало продужење времена рада мотора услед ниже брзине сагоревања ракетног горива на нижим температурама, брзина због специфичне силе се мери у тренутку  $t = 5 \text{ s}$ , што је и почетак прве фазе вођења. У том тренутку, ракета се налази на координатама  $x = 2455 \text{ m}$  и  $h = 2045 \text{ m}$ , и на основу измерене вредности брзине специфичне силе, мења се РТ. Нова референтна трајекторија је нижа од оригиналне, у складу са нижим углом лансирања и већим тоталним импулсом ракетног мотора. Прва фаза управљања траје до  $t_{e1} = 10 \text{ s}$ , што одговара координатама  $x = 6130 \text{ m}$  и  $h = 4790 \text{ m}$ . У том времену, управљачки систем је променио путању ракете ка модификованој РТ, и омогућио ефикасну корекцију у другој фази вођења.



Слика 9.5. Референтне трајекторије (РТ) и остварене путање у вертикалној равни.

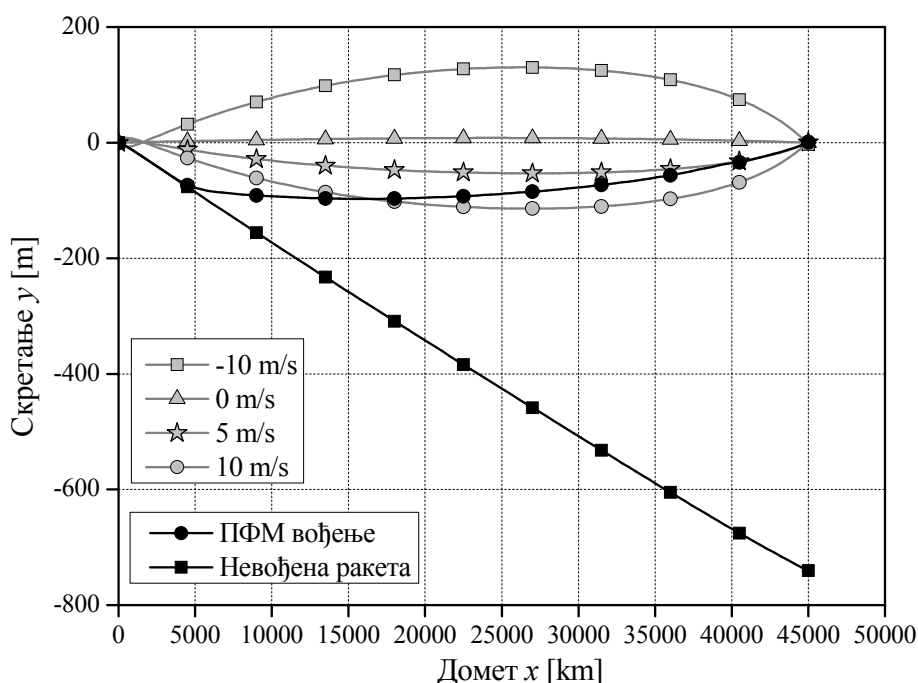
На слици 9.6 приказане су корекције референтне трајекторије за екстремне вредности одступања тоталног импулса од  $\pm 2\%$ , добијене по једначини:

$$\Delta h_{RT}^{(l)} = h_{RT}^{(l)} - h_{RT}^{(2)}, \quad l = 1, 3 \quad (9.64)$$



Слика 9.6. Корекције РТ и остварене путање у вертикалној равни.

Примењена РТ, која одговара одступању вредности тоталног импулса за 1% и остварена путања вођене ракете су такође приказани у односу на оригиналну референтну трајекторију, која је представљена линијом  $\Delta h_{RT}^{(2)} = 0$ . Грешка вођења у посматраној тачки на путањи, која се одређује по једначинама (8.2) - (8.6) није разлика координата висине, већ најмање растојање између две криве. У случају да није било измене РТ, грешка вођења би била дефинисана растојањем до оригиналне РТ (0%), што не би могло да доведе до адекватне акције на самом почетку. Модификација РТ повећава почетну вредност грешке вођења на тај начин што помера базу у односу на коју се та вредност грешке одређује. Систем вођења ефикасно компензује све поремећаје, тако да вођена ракета пада на растојању од 13.2 m иза циља.



Слика 9.7. Поређење путања у хоризонталној равни.

На слици 9.7 приказане су екстремне референтне трајекторије у зависности од одступања вредности бочног ветра  $y_{RT}^{(l)}$ ,  $l = 1, 2, 3$ , модификована РТ и остварене путање вођене и невођене ракете. За разлику од слике 9.6, овде нису приказана одступања од оригиналне референтне трајекторије, већ стварне вредности координата. Тако, у случају да нема бочног ветра,  $y_{RT}^{(2)}$  није нула. Пре лансирања, на основу метеоролошких података, РТ која одговара балистичком бочном ветру од 5 m/s се одређује и снима у меморију рачунара за вођење. Тој путањи одговара азимут лансера од  $\psi_0 = 1.65^\circ$ , док се, услед поремећаја при лансирању остварује



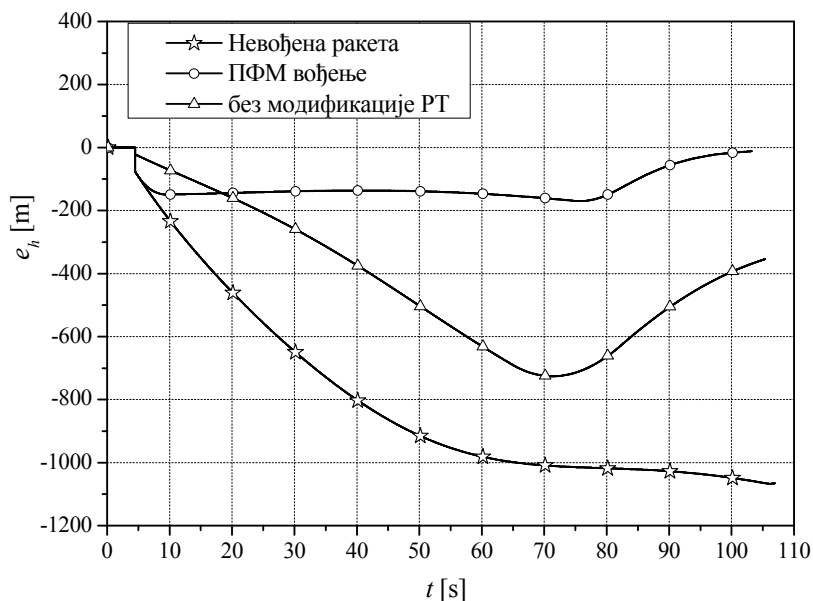
почетна вредност угла скретања  $\Psi_0 = 1.67^\circ$ . Без вођења, ракета остварује промашај у хоризонталној равни од 750 m, који је, у највећој мери, настао услед дејства бочног ветра и дезаксијалности силе потиска. Примењени систем вођења ефикасно компензује све поремећаје, тако да вођена ракета пада 0.4 m десно од циља.

На сликама 9.8 и 9.9 приказано је одступања од референтне путање – грешка вођења у случају ПФМ вођене и невођене ракете. У оба случаја та величина је одређена у односу на модификовану РТ. Ради демонстрације значаја промене референтне трајекторије, приказана је и грешка вођења у случају да није било промене РТ и прве фазе вођења. У том случају вођење почиње нешто раније, у тренутку  $t_c = 65\text{ s}$ , како би систем вођења могао боље да компензује поремећаје.

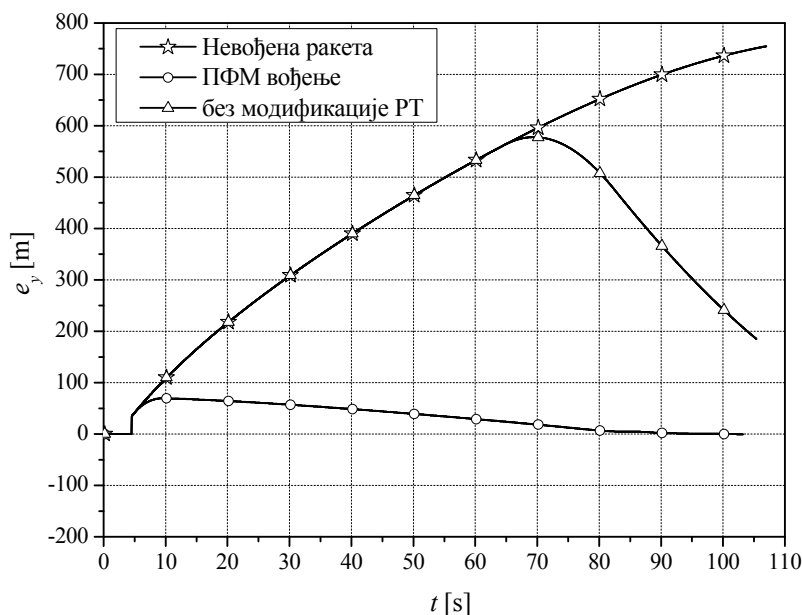
Грешка вођења се, у том случају, одређује у односу на оригиналну РТ.

Без корекције у првој фази, вођена ракета без модификације РТ нема довољно енергетских ресурса да компензује велике грешке положаја настале до почетка фазе управљања. Управљачки систем који се састоји од 35 реактивних импулса појединачног интензитета  $I_c = 70\text{ N}\cdot\text{s}$ , у том случају није довољан, тако да ракета пада 407 m даље и 185 m лево од циља.

Разлика грешке положаја у вертикалној равни невођене и вођене ракете без модификације РТ до почетка њеног вођења су последица промене базе у односу на коју се она рачуна. Модификација РТ у хоризонталној равни се обавља пре лансирања и иста је за све случајеве, тако да се величине грешке у тој равни не разликују док не почне фаза вођења.



Слика 9.8. Поређење одступања трајекторија од референтне у вертикалној равни.



Слика 9.9. Поређење одступања трајекторија од референтне у хоризонталној равни.

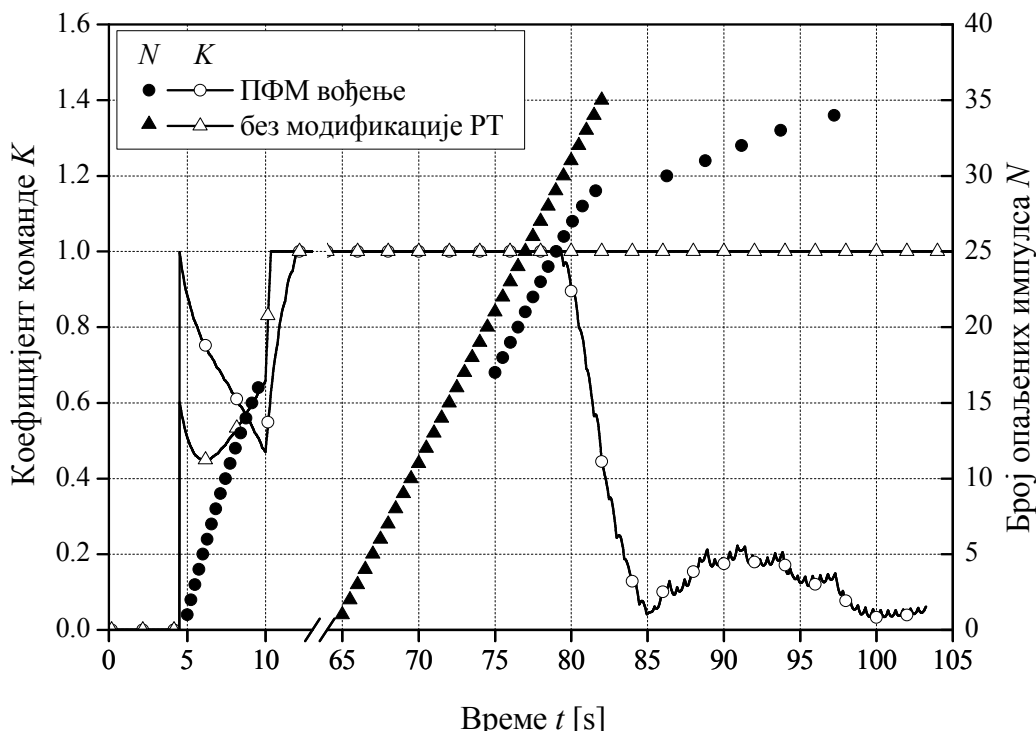
Посматрајући трајекторију ракете са ПФМ вођењем, јасно је уочљив пригушни карактер прелазног процеса. Остварена путања се асимптотски приближава задатој вредности у обе равни.

На слици 9.10 приказано је функционисање система за ПФМ вођење у посматраним случајевима. Приказани су укупни коефицијент команде  $K$ , једначина (9.13) и тренуци издавања импулсне команде – активирања управљачких мотора. На истом дијаграму је приказано понашање система вођења у обе фазе. У случају без промене РТ, вођење почиње у 65. секунди, док је у случају са променом РТ, прва фаза између 5. и 10. секунде, а друга фаза после 75. секунде. Иако у случају без модификације РТ није било прве фазе вођења, приказане су вредности коефицијента команде  $K$  израчунате на основу грешке вођења.

Систем ПФМ вођења је у првој фази имао на располагању 16 мотора и све их је искористио, како би компензовао велико одступање вредности тоталног импулса од 1%. Захваљујући модификацији референтне трајекторије, почетни коефицијент укупне команде је  $K = 1$ , али му, услед промене путање под дејством управљачких импулса, вредност брзо пада. Минимално време између два узастопна импулса у првој фази, које одговара  $K = 1$  је  $t_{\min 1} = 0.2\text{ s}$ . Први импулси у првој фази се опаљују са таквом вредношћу, док на крају те фазе период између импулса пада на  $\tau = 0.4\text{ s}$  услед  $K = 0.5$ .

У другој фази, која почиње у тренутку  $t_{c2} = 75\text{ s}$ , систем вођења има на распо-

лагању преосталих 19 управљачких мотора. Иако вредност грешке вођења није значајно нарасла у периоду од 10. до 75. секунде, (слике 9.8 и 9.9), вредност коефицијента укупне команде је са  $K \approx 0.5$  на крају прве фазе порасла на максималних  $K = 1$ , што се догодило одмах након завршетка прве фазе  $t_{e1} = 10\text{ s}$ , услед промене вредности минималног периода између два импулса са  $t_{\min 1} = 0.2\text{ s}$  на  $t_{\min 2} = 0.5\text{ s}$ . Наиме, као што се из једначина (9.58) - (9.60) може видети, за исте вредности грешке вођења  $e_{h,y}$ , вредност коефицијента команде је пропорционална појачању ускладника  $K_u$ , које је, по једначини (9.53) и (9.48) - (9.49) обрнуто пропорционално коефицијенту  $K_q$ , чија је вредност, опет, обрнуто пропорционална  $t_{\min}$ , једначине (9.35), (9.11) и (9.12). Према томе, за исте вредности грешке вођења, вредност коефицијента укупне команде се пропорционално повећава са порастом  $t_{\min}$ .



Слика 9.10. Коефицијент укупне команде и број утрошених импулса.

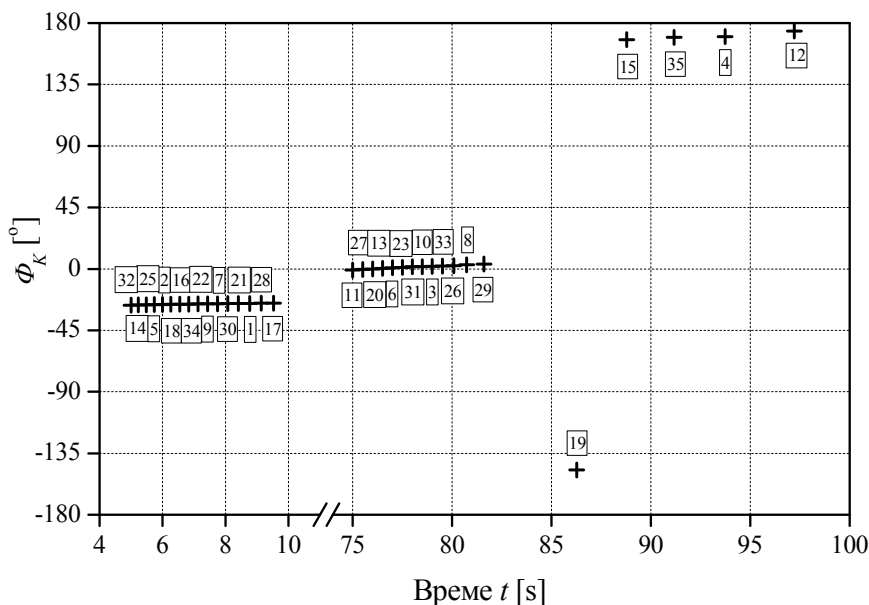
По почетку друге фазе, систем за вођење је са 10 импулса опалених у секвенци са периодом  $t_{\min 2}$  спустио вредност коефицијента команде испод 1. Након 83. секунде вредност коефицијента укупне команде се спустила испод 0.2. У наредном периоду, систем за вођење је испалио још 5 импулса ради fine корекције путање. Укупно је испалено 34 управљачких мотора.

У случају без модификације референтне трајекторије, 35 импулса опалених у

низу почев од 65. секунде нису били довољни да компензују велику грешку вођења која се јавила у завршном делу путање.

На слици 9.11 приказан је распоред активирања управљачких мотора и угао ваљања под којим су дејствовали - угао команде  $\Phi_K$ , једначина (9.14). Обзиром да је у обе фазе вођења период ваљања ракете приближно дупло мањи од  $t_{\min}$ , никада није долазило до ситуације да вредност реализоване команде буде угрожена тренутним непостојањем неопаленог мотора у дозвољеној околини задатог угла команде.

Доминантна команда у првој фази је била у вертикалној равни, услед великог одступања тоталног импулса и промене референтне трајекторије. Међутим, одступање положаја у хоризонталној равни настало услед ветра је било довољно да се формира команда у тој равни довољна да компензује те поремећаје. Почетком друге фазе, грешка вођења у хоризонталној равни је била минимална, тако да су сви импулси опалјивани вертикално наниже. Након што је остварена компензација грешке вођења, преосталих 5 импулса су опалјени навише, како би умањили брзину приближавања ракете референтној трајекторији.

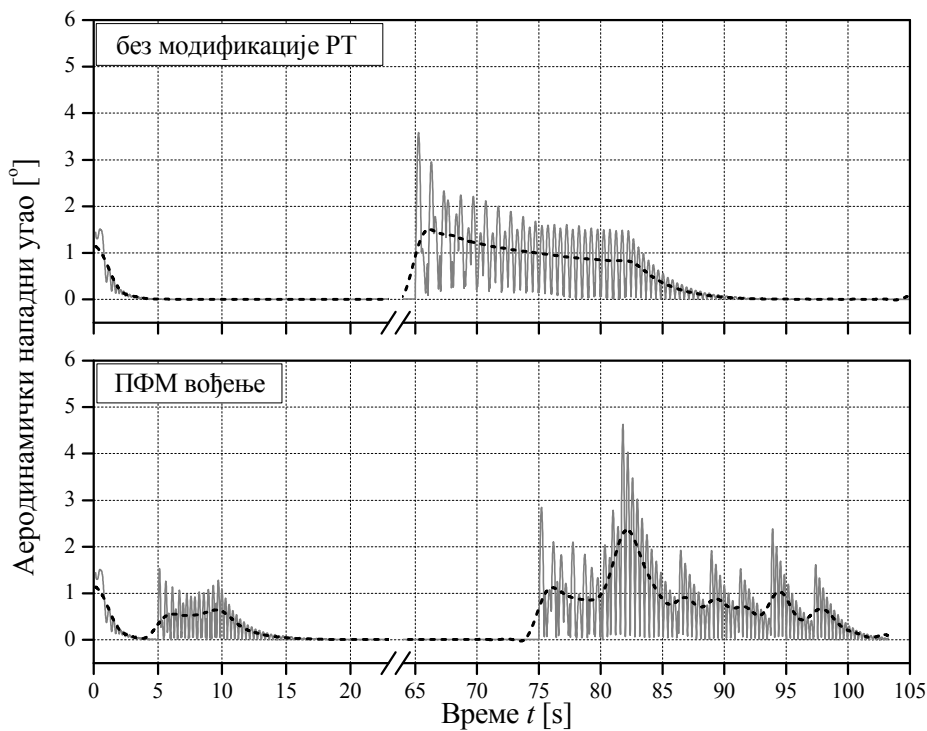


Слика 9.11. Распоред активирања управљачких мотора.

Слика 9.12 приказује промене укупног аеродинамичког нападног угла ракете током лета, као и усредњене вредности тих нападних углова добијене применом ниско-пропусног FFT филтра (брза Фуријеова трансформација), пропусног опсега  $\omega_c = 0.5 \text{ Hz}$ . У случају ПФМ вођења са променом референтне трајекторије, испалено је 34 мотора, а средња вредност аеродинамичког нападног угла током целе

путање је била  $0.287^\circ$ , док је у случају без модификације РТ средња вредност нападног угла била  $0.225^\circ$ , иако је испалењено свих 35 мотора. Остварене средње вредности нападних углова су знатно мање него у случају ТТ вођења у глави 8. Највећа забележена усредњена вредност је била у случају ПФМ вођења са модификованом РТ, када се, након 82. секунде окончала поворка импулса. На основу тога, може се закључити да је одабрана вредност  $t_{\min 2} = 0.5\text{s}$  имала позитиван ефекат на смањивање амплитуде нападног угла. Минимално време између две узастопне команде је веома битан параметар за ПФМ праћење путање. Након почетка прве и друге фазе вођења долази до серије импулсних команди. Како је почетна грешка вођења тада углавном веома велика, често имамо  $K = 1$ , што подразумева да се јавља серија импулса у једнаким интервалима  $t_{\min}$ . Вредност овог параметра може да се узме:

$$t_{\min} = \pi / \omega_n(t_c) \quad (9.65)$$



Слика 9.12. Поређење нападних углова у вертикалној равни.

Ова вредност минималног времена између две узастопне команде обезбеђује најмање вредности амплитуде осцилација нападног угла током тог низа импулса, тако што поставља опаљење импулса у тренутак када попречна угаона брзина има највећу вредност у правцу супротном од дејства импулса, што се дешава на половини периода кратко-периодичних осцилација. Вредности  $\omega_n$  на равнотежној

путањи дате су на слици 5.5. У тренутку  $t = 65 \text{ s}$ , вредност минималног времена између два импулса из једначине (9.65) је била  $t_{\min} = 0.58 \text{ s}$ , а у тренутку  $t = 75 \text{ s}$ :  $t_{\min} = 0.5 \text{ s}$ .

## ПАРАМЕТАРСКА АНАЛИЗА

Систем вођења методом ПФМ праћења путање се по својим хардверским компонентама не разликује од система за ТТ вођење. Самим тим, све методе за анализу перформанси ТТ вођења су применљиве и у овом случају. Штавише, као природно се намеће поређење перформанси тих метода. Самим тим, у анализи перформанси система за ПФМ вођење примењују се симулације истог математичког модела ракете као и у глави 8, уз примену Монте Карло технике, описане у Додатку В, на начин дефинисан у глави 8. Како би добијени резултати били упоредиви, узето је да су статистички показатељи поремећаја исти као у случају ТТ вођења и дати у табели 8.2.

Задатак система вођења артиљеријских ракета је да компензује поремећаје који на њу делују. Самим тим, параметри система вођења зависе од величине тих поремећаја, као и од жељене прецизности ракетног система. Параметре система вођења можемо да поделимо на:

- Енергетске параметре управљачког система – број  $N_I$  и импулс  $I_c$  управљачких мотора и
- Параметре закона вођења:
  - Параметре прве фазе вођења – број дозвољених импулса  $N_{I1}$ , крај фазе вођења  $t_{e1}$ , минимално време између два импулса  $t_{\min 1}$ , пресечну учестаност појачања  $\omega_{c1}$  и коефицијент ускладника  $\alpha_1$ .
  - Параметре друге фазе вођења – почетак фазе вођења  $t_{e2}$ , минимално време између два импулса  $t_{\min 2}$ , и параметре ускладника  $\omega_{c2}$  и  $\alpha_2$ .

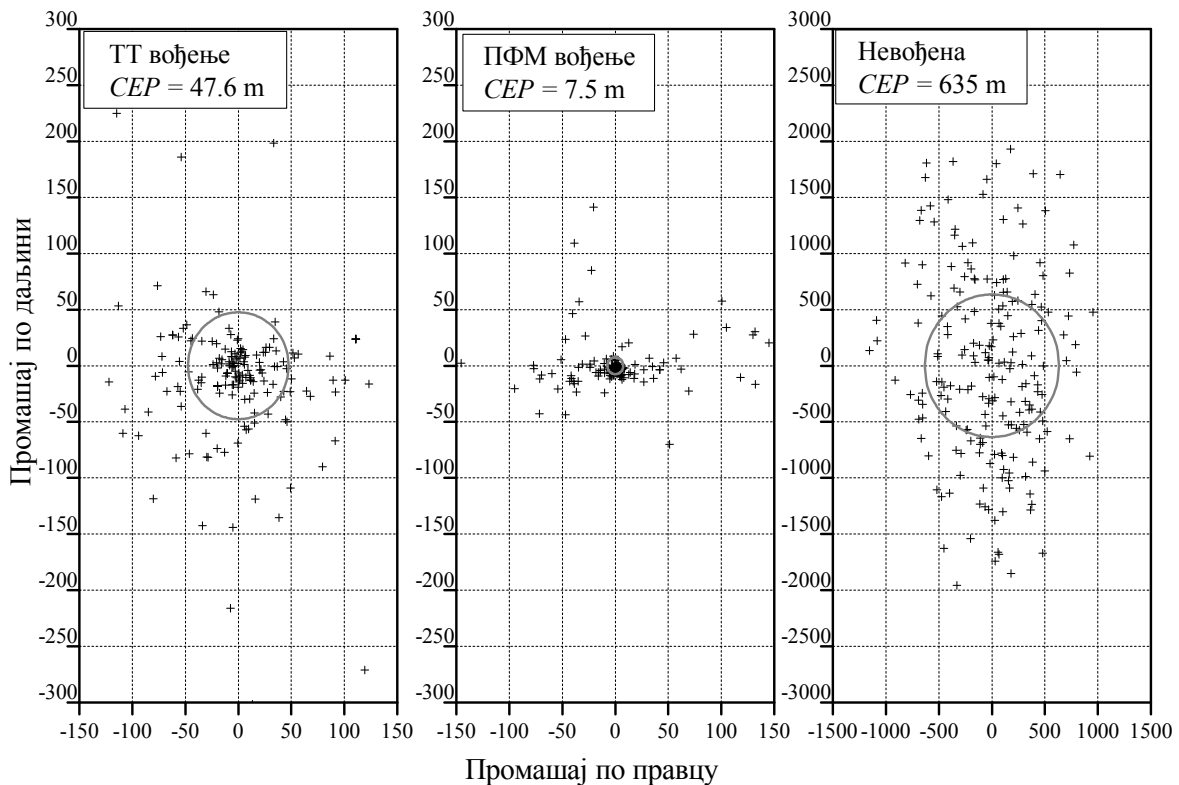
Величина потребних енергетских ресурса зависи од саме ракете, величине поремећаја које систем вођења треба да компензује и жељене прецизности, а величина параметара закона вођења, поред поменутог, зависи и од примењених енергетских ресурса. За разлику од ТТ вођења, уместо 3, у случају ПФМ вођења имамо 9 софтверских параметара. Да би се пронашла њихова оптимална комбинација, примењена је метода подешавања параметара, уз Монте Карло симулацију лета ракете са 6 степени слободе и система вођења. Резултати добијени овом анализом односе се на скуп вредности поремећаја дат у табели 8.2 и путању са доме-

ТОМ  $x_{RT,f} = 45 \text{ km}$ .

### Дистрибуција места погодака

На слици 9.13 приказане су расподеле погодака добијене Монте Карло методом за почетне вредности величина стања и вредности поремећаја дате у табели 8.2. Приказани су подаци добијени за невођену ракету, као и за ракете са ПФМ вођењем, са параметрима  $N_{I1} = 12$ ,  $t_{e1} = 10 \text{ s}$ ,  $t_{\min 1} = 0.2 \text{ s}$ ,  $\omega_{c1} = 0.4 \text{ rad/s}$ ,  $\alpha_1 = 0.15$ ,  $t_{c2} = 70 \text{ s}$ ,  $t_{\min 2} = 0.5 \text{ s}$ ,  $\omega_{c2} = 0.25 \text{ rad/s}$  и  $\alpha_2 = 0.15$ . Поред тога, приказани су и резултати за систем са ТТ вођењем са променљивом величином прозора и параметрима  $r_{w0} = 6 \text{ m}$ ,  $K_{wh} = 400 \text{ m}$  и  $t_{\min} = 1.5 \text{ s}$ . У случају вођене ракете, управљачки систем са састојао од  $N_I = 35$  мотора, сваки импулса  $I_c = 70 \text{ N-s}$ . У случају невођене ракете, са оваквим величинама поремећаја, остварена је вероватна кружна грешка  $CEP = 635 \text{ m}$ , са ПФМ вођењем  $CEP = 7.5 \text{ m}$ , а са ТТ вођењем  $CEP = 47.6 \text{ m}$ . У првом случају, величина вероватне кружне грешке смањена је 85 пута, а у другом 13.4 пута.

Дистрибуција места погодака у случају невођених ракета показује да је одступање по домету веће него одступање по правцу. Наиме вероватне грешке по домету и правцу су  $V_d = 538 \text{ m}$  и  $V_p = 282 \text{ m}$ , што указује да је у овом случају ефекат одступања тоталног импулса доминантан. У случају ракета са ТТ вођењем, разлика је још уочљивија, па је  $B_r = 123 \text{ m}$  и  $B_l = 51 \text{ m}$ . За разлику од тога, у случају ПФМ вођења ситуација је обратна, па је вероватна грешка по домету мања од вероватне грешке по правцу:  $V_d = 13.2 \text{ m}$  и  $V_p = 33 \text{ m}$ . Ова чињеница указује на закључак да је примењена метода директне компензације доминантног поремећаја – одступања тоталног импулса променом референтне трајекторије, дала очекиване резултате. Дистрибуција погодака вођених ракета показује да, поред тога што је већина погодака тесно груписана око циља, постоји одређени број падних тачака са знатним одступањем, што је последица прерано утрошених управљачких мотора и немогућности система вођења да заврши фини корекцију путање. Појава забележена код ТТ вођења да је број подбачаја већи него број пребачаја у случају ПФМ вођења није присутна, јер је ефекат прираста отпора са нападним углом ракете смањен, услед мање просечне вредности нападаног угла током лета (слике 8.11 и 9.12), и његове прерасподеле у завршни део путање, где је ефекат смањења брзине ракете на домет мањи.



Слика 9.13. Слика погодака.

### Параметарска анализа ПФМ вођења

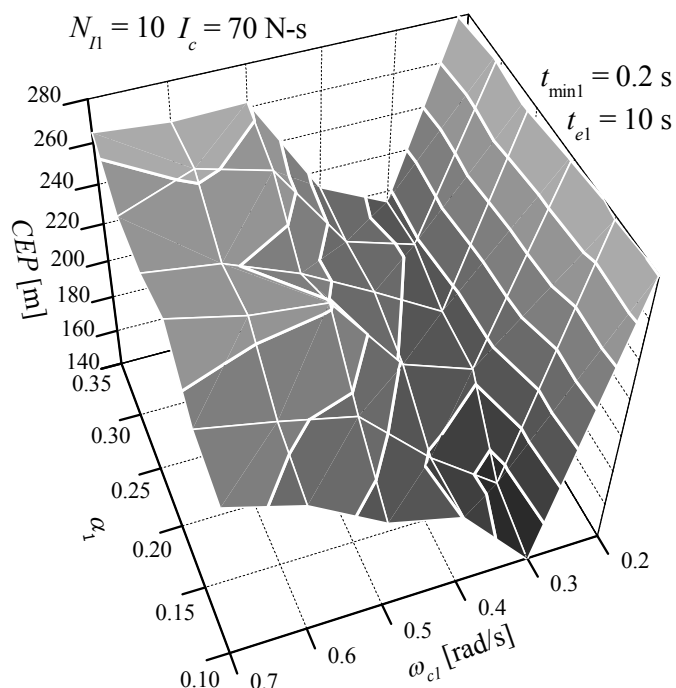
Анализа презентирана у овом поглављу демонстрира начин добијања оптималних вредности параметара система ПФМ вођења коришћењем методе подешавања параметара. Прво ће бити приказана метода добијања оптималне комбинације софтверских параметара за једну изабрану комбинацију броја и интензитета управљачких ракетних мотора:  $N_I = 35$ ,  $I_c = 70 \text{ N}\cdot\text{s}$ . Након тога, приказана је зависност перформанси система од разних комбинација броја и интензитета импулса.

Обзиром да се ПФМ вођење састоји од две фазе, које имају укупно 9 софтверских параметара, прво ће бити посматран случај у коме се управљање одвија само у првој фази. За одабрану комбинацију параметара прве фазе која остварује најмање растурање на циљу, приступа се анализи параметара друге фазе.

Прва фаза вођења почиње у тренутку  $t_{c1} = 5 \text{ s}$ , што је време до којег се сигурно завршава рад ракетног мотора на екстремно ниским температурама. Крај прве фазе је у тренутку  $t_{e1} = 10 \text{ s}$ . Период од 5 секунди је сасвим довољан да се, са изабраним вредностима  $t_{\min 1}$ , испуцају сви мотори резервисани за прву фазу вођења, тако да је тренутак краја прве фазе фиксиран.

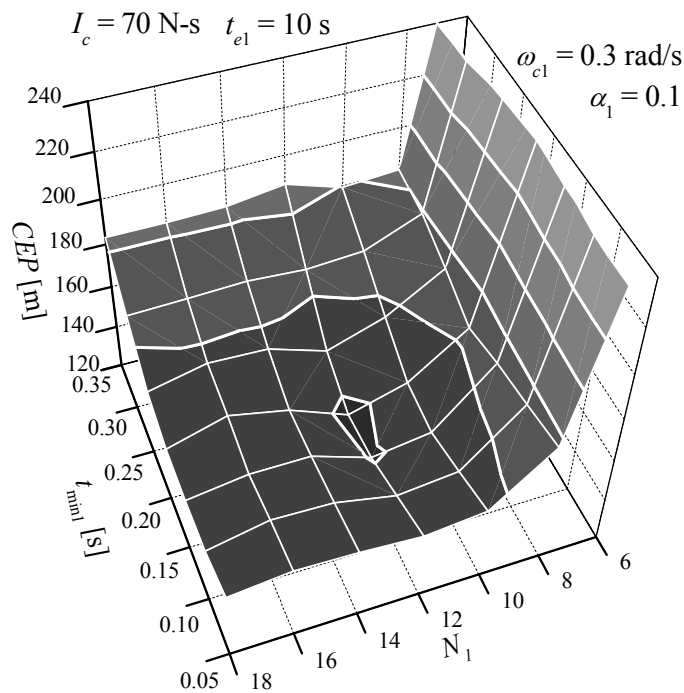


На слици 9.14 приказана је зависност перформанси прве фазе вођења од параметара ускладника  $\alpha_1$  и  $\omega_{c1}$ , за усвојене вредности  $N_{I1} = 10$  и  $t_{\min 1} = 0.2 \text{ s}$ . Величина растурања погодака се смањује са смањењем параметра  $\alpha_1$ , односно са повећањем претека фазе отвореног кола и, самим тим, пригушења. Најмања могућа вредност параметра  $\alpha$  је 0.1. Вредност пресечне учестаности појачања отвореног кола за коју се добијају најмања растурања погодака је  $\omega_{c1} = 0.3 \text{ rad/s}$ .



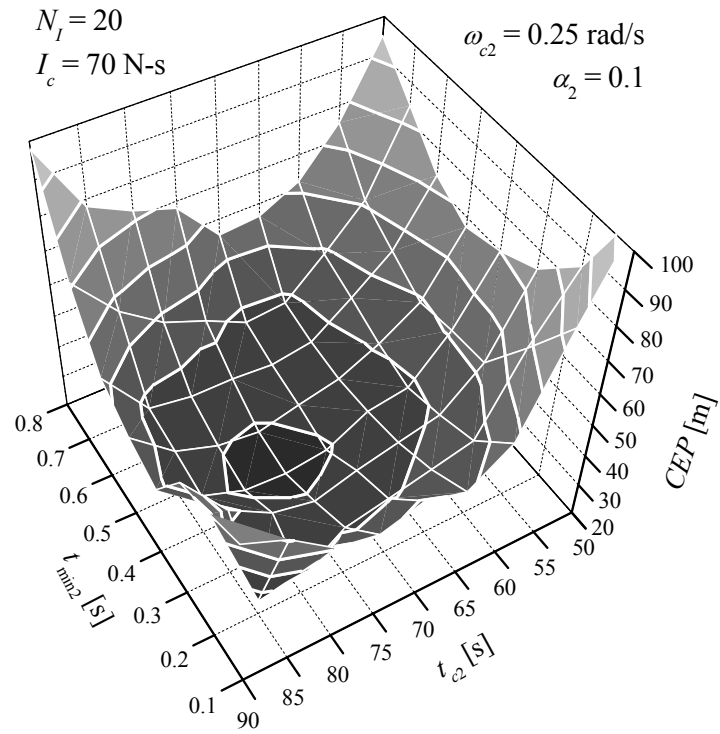
Слика 9.14. ПФМ вођење: перформансе прве фазе у зависности од  $\alpha_1$  и  $\omega_{c1}$ .

На слици 9.15 приказана је зависност перформанси прве фазе од броја мотора  $N_{I1}$  и минималног времена између два узастопна импулса. При томе су за вредности параметара ускладника изабране оне за које је у претходној анализи добијено најмање растурање погодака:  $\omega_{c1} = 0.3 \text{ rad/s}$  и  $\alpha_1 = 0.1$ . На основу резултата ове анализе, може се закључити да се добре вредности растурања погодака добијају за све вредности параметара  $t_{\min 1} \leq 0.2 \text{ s}$  и  $N_{I1} \geq 10$ . Најмање растурање се добија у случају да је 12 импулса резервисано за прву фазу. Како је за прву фазу значајно и да се потроши што је могуће мање мотора, како би они могли да буду искоришћени и касније, за потребе анализе утицаја параметара друге фазе усваја се  $N_{I1} = 10$  и  $t_{\min 1} = 0.2 \text{ s}$ .

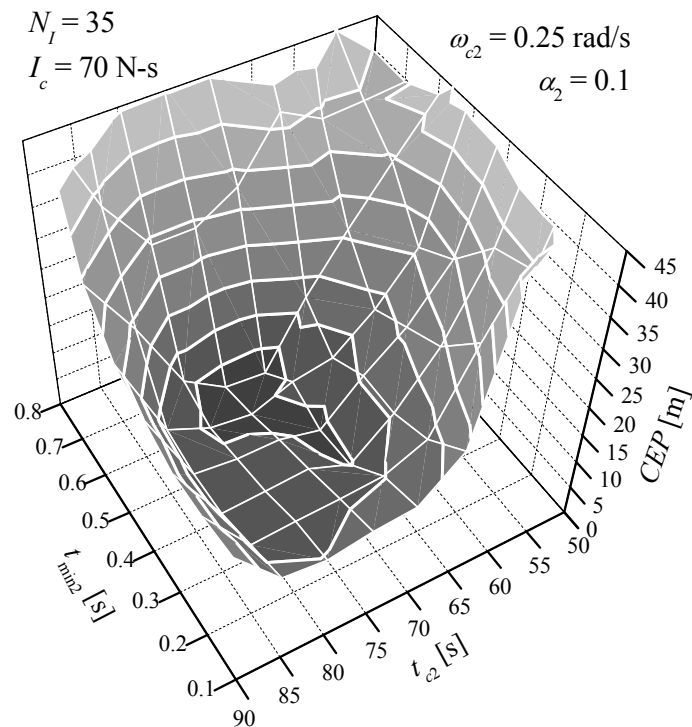


Слика 9.15. ПФМ вођење: перформансе прве фазе у зависности од  $t_{\min 1}$  и  $N_{I1}$ .

На сликама 9.16 – 9.18 приказана је анализа утицаја временских параметара друге фазе ПФМ вођења: почетак фазе вођења  $t_{c2}$  и минимално време између две узастопне команде  $t_{\min 2}$ . Монте Карло симулације су извођене уз претпоставку да су параметри прве фазе вођења били они за које је у претходној анализи утврђено да дају оптималне резултате:  $N_{I1} = 10$ ,  $t_{\min 1} = 0.2 \text{ s}$ ,  $\omega_{c1} = 0.3 \text{ rad/s}$  и  $\alpha_1 = 0.1$ . Приликом анализе утицаја временских параметара, претпостављено је да су параметри ускладника друге фазе  $\omega_{c2} = 0.25 \text{ rad/s}$  и  $\alpha_2 = 0.1$ . Примењен је управљачки систем са реактивним импулсима интензитета  $I_c = 70 \text{ N-s}$ , са малим ( $N_I = 20$ ), средњим ( $N_I = 35$ ) и великим ( $N_I = 50$ ) бројем импулса.



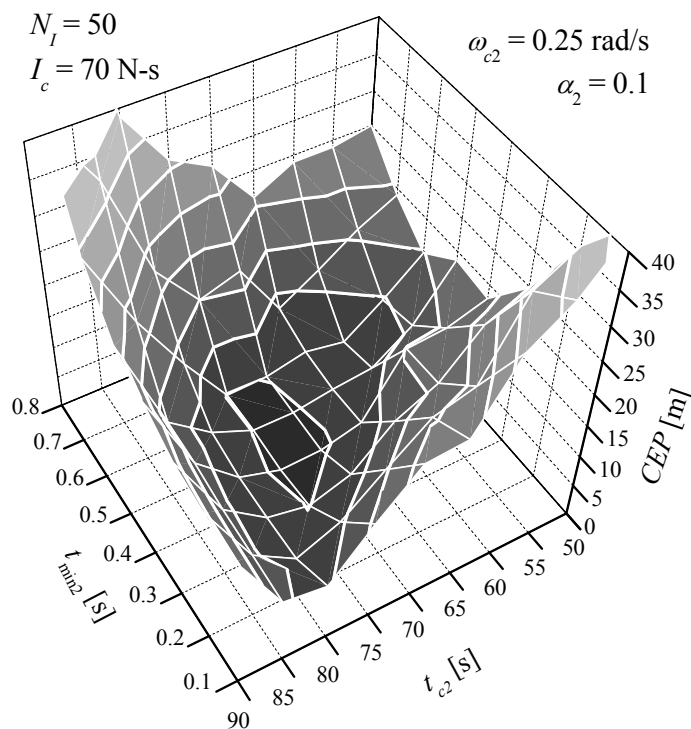
Слика 9.16. ПФМ вођење: зависност растурања погодака од временских параметара друге фазе.



Слика 9.17. ПФМ вођење: зависност растурања погодака од временских параметара друге фазе.

Систем ПФМ вођења је веома осетљив на временске параметре закона вође-

ња. Перформансе тог система у великој мери зависе од комбинације ових параметара. У случају да је укупно на располагању 20 импулса, област временских параметара у којима се остварују прихватљиви резултати је прилично широка. Наиме, услед малог броја импулса који преостају у другој фази, распоред њиховог деловања губи на значају. Најбољи резултат се добија за  $t_{c2} = 75\text{ s}$  и за  $t_{\min 2} = 0.4\text{ s}$ :  $CEP = 27.2\text{ m}$ .



Слика 9.18. ПФМ вођење: зависност растурања погодака од временских параметара друге фазе.

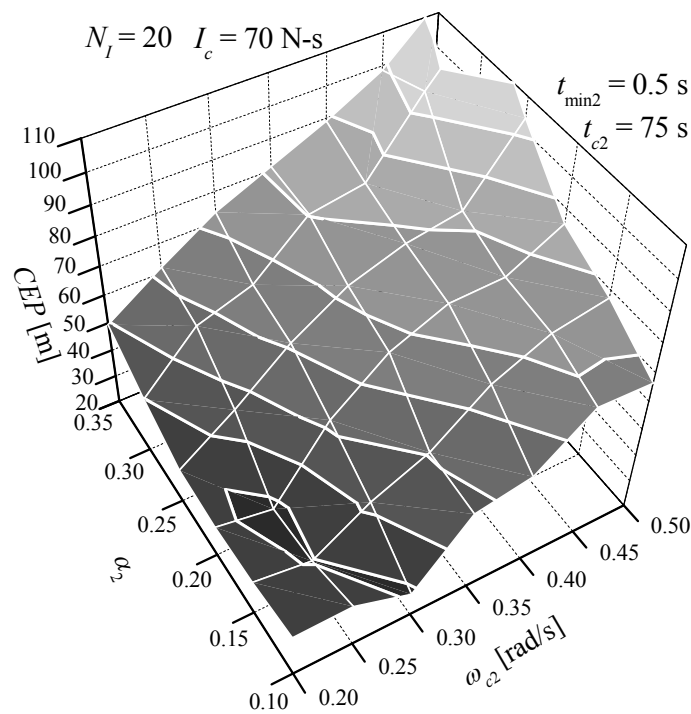
У случају 35 управљачких мотора, област најбољих резултата је сужена, пре свега значајним утицајем почетка фазе вођења. Уколико управљање почне сувише рано, долази до прераног трошења свих мотора и немогућности да се изврши фино навођење на циљ. Сувише касни почетак управљања не оставља довољно времена да се изврши потпуна компензација. Најбољи резултат се добија за  $t_{c2} = 75\text{ s}$  и за  $t_{\min 2} = 0.6\text{ s}$ :  $CEP = 6.5\text{ m}$ . У случају 50 импулса, добре резултате је могуће добити и са ранијим почетком друге фазе вођења. Најмање растурање погодака се добија за  $t_{c2} = 70\text{ s}$  и за  $t_{\min 2} = 0.4\text{ s}$ :  $CEP = 4.6\text{ m}$ .

На основу претходне анализе, може да се закључи да оптималне вредности енергетских параметара зависе од постојећег енергетског ресурса. Оне су међусобно веома зависне, тако да можемо о њима да говоримо као о паровима, комбина-

цијама вредности. Повећање вредности  $t_{c2}$  смањује време лета до поготка, па да би сви управљачки мотори могли да се искористе, неопходно је да се смањи време између два узастопна импулса.

На сликама 9.19 – 9.21 приказана је зависност растурања погодака од параметара ускладника друге фазе вођења: односа нуле и пола  $\alpha_2$  и пресечне учестаности појачања отвореног кола  $\omega_{c2}$ . Као и у претходном случају, примењен је управљачки систем са реактивним импулсима интензитета  $I_c = 70 \text{ N-s}$ , са малим ( $N_I = 20$ ), средњим ( $N_I = 35$ ) и великим ( $N_I = 50$ ) бројем импулса.

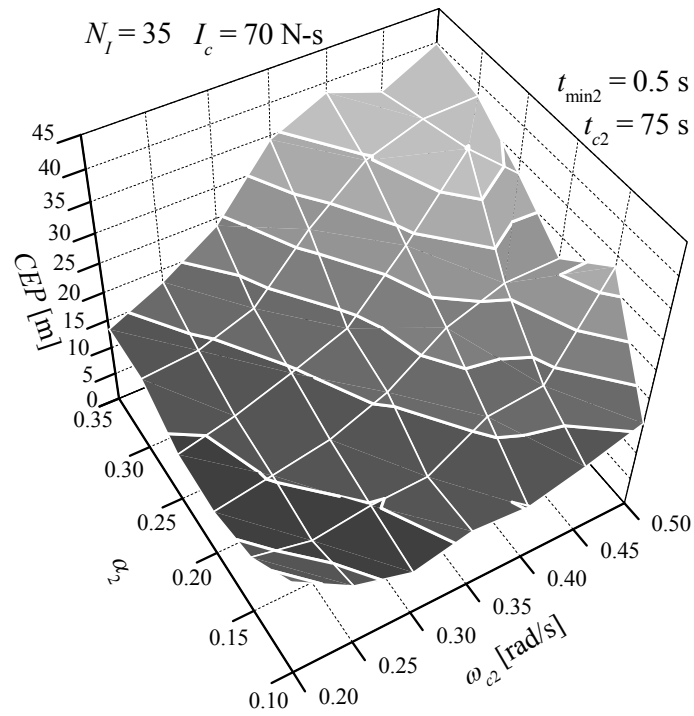
Временски параметри закона вођења су одабрани у складу са резултатима претходне анализе, дакле  $t_{c2} = 75 \text{ s}$  и  $t_{\min 2} = 0.4 \text{ s}$  за случај са 20 управљачких мотора,  $t_{c2} = 75 \text{ s}$  и  $t_{\min 2} = 0.6 \text{ s}$  за 35 мотора и  $t_{c2} = 70 \text{ s}$  и  $t_{\min 2} = 0.4 \text{ s}$  за 50 мотора.



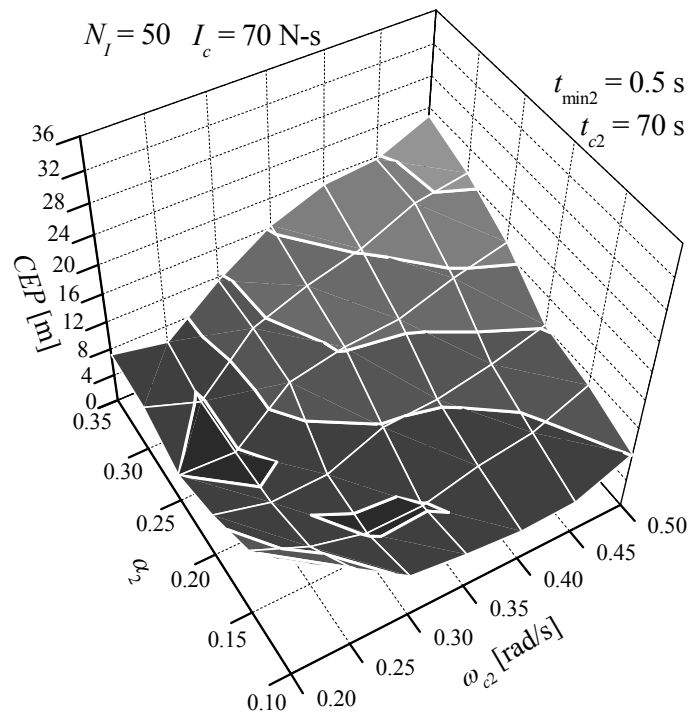
Слика 9.19. ПФМ вођење: зависност растурања погодака од параметара ускладника друге фазе.

Параметри ускладника дефинишу карактер прелазног процеса система аутоматског управљања. Пресечна учестаност отвореног кола диктира динамику система, док однос нуле и пола ускладника дефинише поправку фазе, који тај ускладник уноси, а самим тим и претек фазе целог отвореног кола, од чега зависи степен пригушења прелазног процеса. Дакле, већа вредност  $\omega_{c2}$  значи бржу динамику

система, а мања вредност  $\alpha_2$  значи веће пригушење прелазног процеса.



Слика 9.20. ПФМ вођење: зависност растурања погодака од параметара ускладника друге фазе.



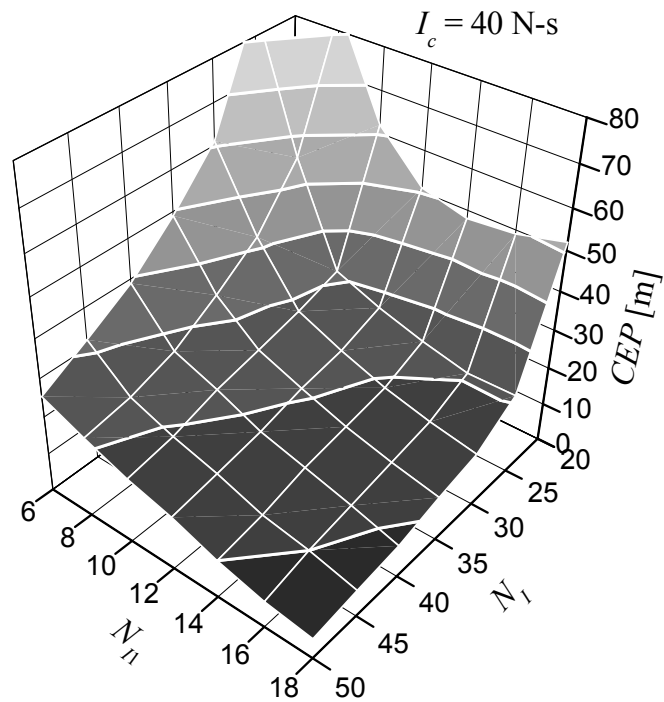
Слика 9.21. ПФМ вођење: зависност растурања погодака од параметара ускладника друге фазе.

Резултати претходне анализе показују да је величина растурања погодака веома зависна од комбинације параметара ускладника. Такође, за одређени енергетски ресурс не постоји јединствена оптимална вредност ових параметара, већ можемо говорити о њиховој функционалној зависности  $\alpha_2 \cdot \omega_{c2} = C$ , за чија решења се добијају најмање вредности растурања погодака. Ово значи да је, у случају система веће динамике, потребно и веће пригушење, односно, да спорији системи боље функционишу са мањом резервом фазе. Такође, приметно је да се вредност константе функције зависности  $C$  повећава са бројем мотора, што значи да се у случају мањег броја мотора бољи резултати остварују са споријим системом, који за исте вредности грешке формира мање вредности команди, односно троши мање импулса.

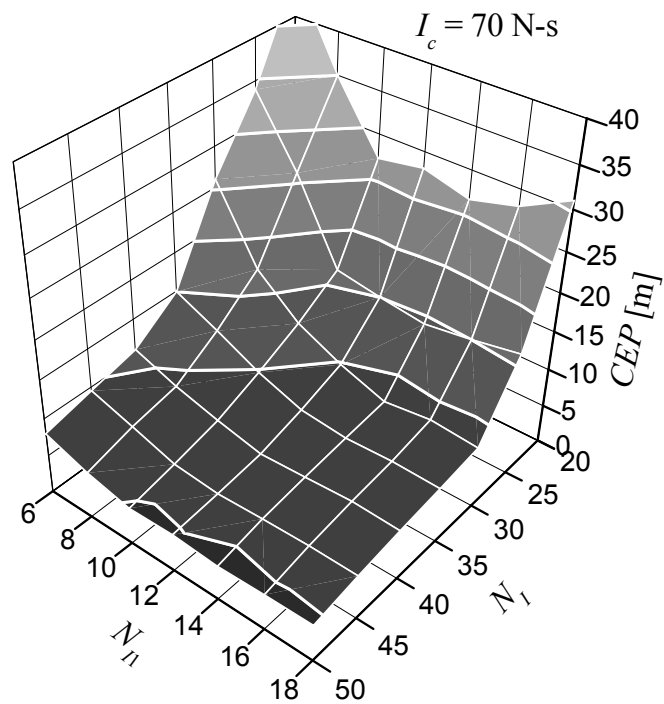
У случају са 20 управљачких мотора, остварено је растурање погодака  $CEP = 27.7$  m за  $\omega_{c2} = 0.25$  rad/s и  $\alpha_2 = 0.2$ ; са 35 мотора,  $CEP = 7.2$  m за  $\omega_{c2} = 0.3$  rad/s и  $\alpha_2 = 0.1$ , и са 50 мотора  $CEP = 4.6$  m за  $\omega_{c2} = 0.35$  rad/s и  $\alpha_2 = 0.15$ .

На сликама 9.22 и 9.23 приказана је зависност растурања погодака система за ПФМ вођење у зависности од броја мотора прве и друге фазе вођења. Свака вредност на том дијаграму добијена је за оптималну комбинацију параметара закона вођења. Параметри су варирани у следећим границама:  $0.25 \leq \omega_{c1} \leq 0.4$  [rad/s],  $t_{min1} = 0.2$  s,  $\alpha_1 = 0.1$ ,  $0.3 \leq t_{min2} \leq 0.6$  [s],  $0.2 \leq \omega_{c2} \leq 0.35$  [rad/s],  $60 \leq t_{c2} \leq 85$  [s],  $0.1 \leq \alpha_2 \leq 0.2$ . У случају када је интензитет импулса био  $I_c = 40$  N-s, за остваривање бољих резултата је било потребно што више мотора у првој фази, како би се почетни поремећаји што боље компензовали. Једино у случају са 20 управљачких мотора се минимум растурања јавио за неки број импулса прве фазе мањи од максималног разматраног – 18. У том случају је оптималан број импулса био 14, што би, у најнеповољнијем случају, загарантовало 6 импулса у другој фази.

У случају јачих импулса интензитета  $I_c = 70$  N-s, за све бројеве импулса прве фазе веће или једнаке 14 добијене су сличне вредности растурања погодака, па се намеће закључак да је управо тај број импулса од 70 N-s довољан да у потпуности компензује почетне поремећаје. За остваривање мале вредности растурања на крају потребно је имати што већи број импулса, како би се прелазни процеси завршили у потпуности.



Слика 9.22. ПФМ вођење у зависности од расподеле мотора по фазама.



Слика 9.23. ПФМ вођење у зависности од расподеле мотора по фазама.

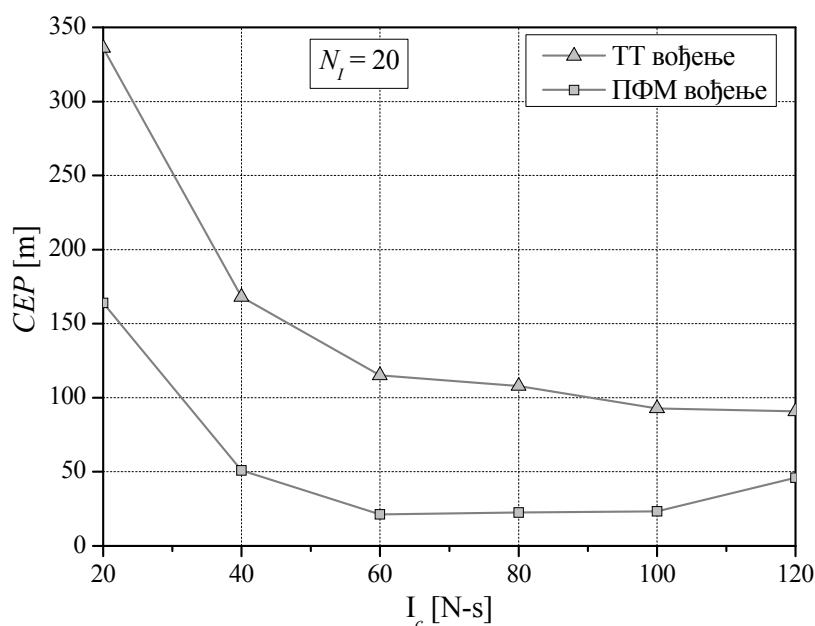
### Анализа перформанси система вођења

На дијаграмима 9.24 до 9.30 дата је анализа зависности растурања погодака од енергетског ресурса управљачког система. Ова анализа је обављена на исти



начин као и претходна анализа утицаја параметара закона вођења. За сваку задату комбинацију броја и импулса управљачких мотора, извршен је скуп Монте Карло симулација са различитим вредностима параметара закона вођења, и одабран је најбољи резултат, са најмањим растурањем погодака. Сви остали параметри ракетног система, као и величине поремећаја су, такође, били исти као у претходној анализи.

Дијаграми 9.24 – 9.26 приказују зависност растурања погодака од интензитета управљачких импулса, и то за случај малог (20), средњег (35) и великог (50) броја импулса. Ради поређења, дати су и резултати за методу ТТ вођења описану у глави 8.

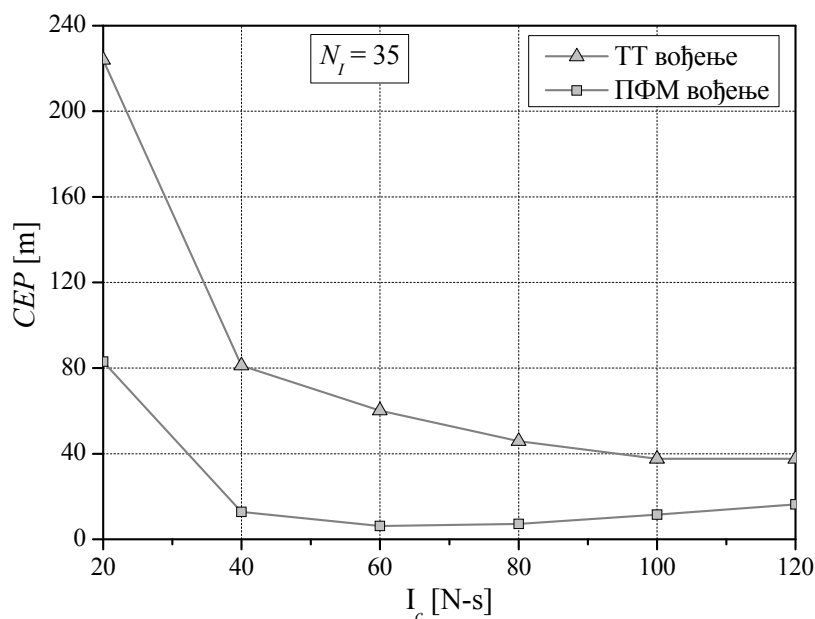


Слика 9.24. Зависност растурања погодака од интензитета управљачких импулса.

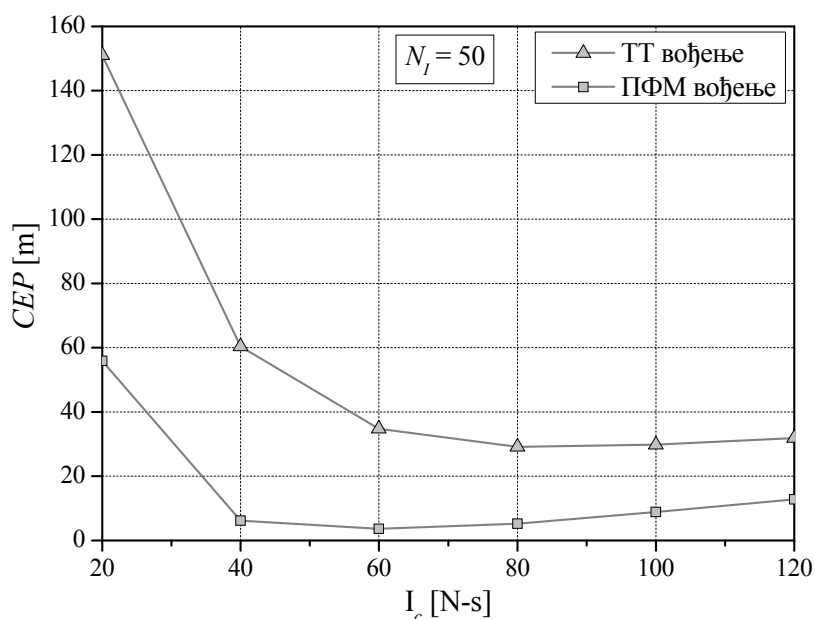
Као и у случају ТТ вођења, у случају да је енергетски ресурс управљачког система недовољан за потпуну компензацију поремећаја, свако повећање броја или интензитета мотора има великог утицаја на тачност система. У том случају, величина растурања погодака линеарно опада са повећањем интензитета управљачких импулса. Повећање енергетског ресурса преко вредности која обезбеђује компензацију поремећаја, има, даље, веома мало утицаја на повећање тачности система.

За све разматране бројеве управљачких импулса, најмање растурање погодака остварено је са импулсима од 60 N-s. У случају 20 импулса, остварено је  $CEP = 21.3\text{ m}$ , са 35 импулса:  $CEP = 6.1\text{ m}$  и са 50 импулса  $CEP = 3.6\text{ m}$ . Повећање интензитета управљачких импулса преко те, оптималне, вредности смањује

перформансе система вођења, јер онемогућује фино завршавање прелазног процеса и постизање малих вредности растурања погодака.



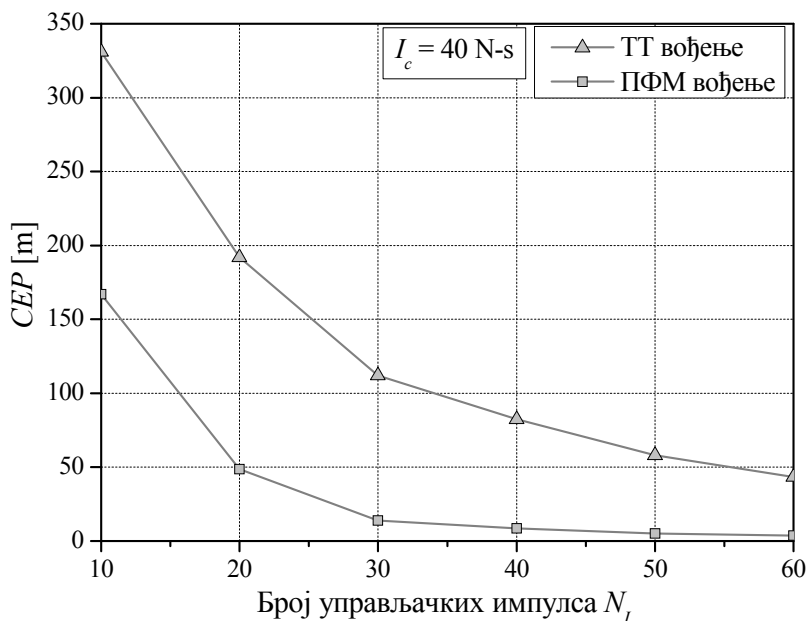
Слика 9.25. Зависност растурања погодака од интензитета управљачких импулса.



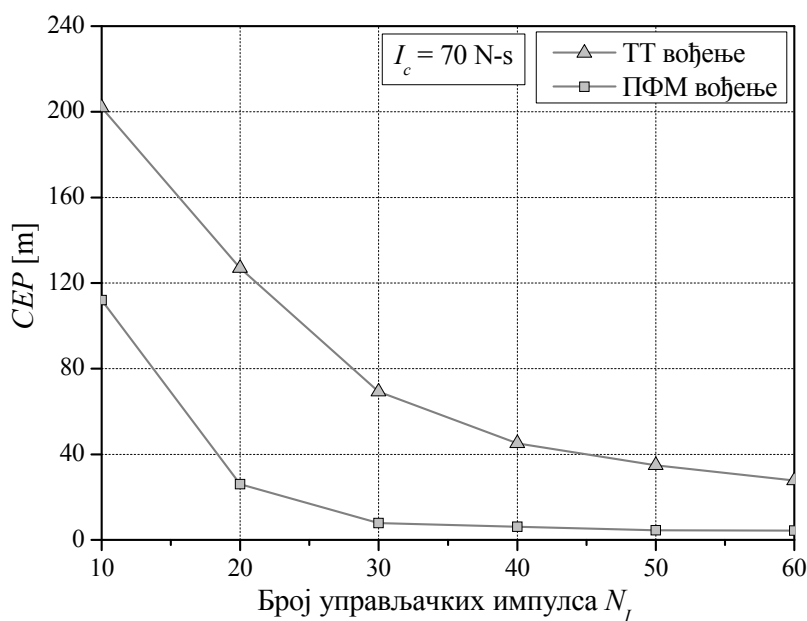
Слика 9.26. Зависност растурања погодака од интензитета управљачких импулса.

На дијаграмима 9.27 и 9.28 дата је величина растурања погодака у зависности од броја управљачких импулса, за две карактеристичне вредности импулса управљачких мотора: средње  $I_c = 40$  N-s и велике  $I_c = 70$  N-s. За разлику од повећања интензитета импулса, повећање њиховог броја увек смањује растурање погодака. У оба случаја се потпуна компензација поремећаја остварује се са 30 импулса, па

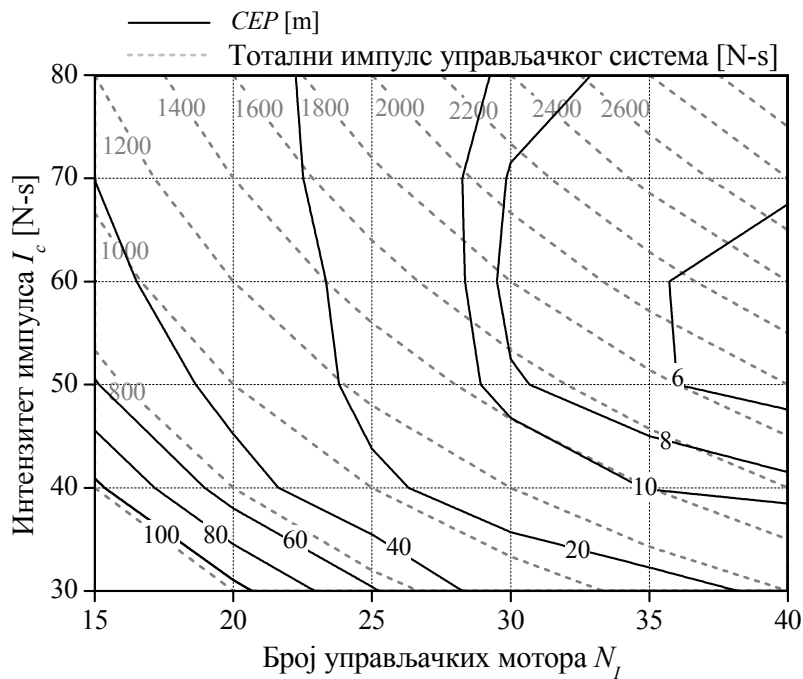
је ефекат повећања броја импулса преко 30 веома мали. Имајући у виду да сложеност и цена управљачког система директно зависе од њиховог броја, ова вредност  $N_I = 30$  се намеће као оптимална. Са 30 импулса, у случају да им је интензитет 40 N-s остварује се  $CEP = 13.9 \text{ m}$ , а са 70 N-s :  $CEP = 7.8 \text{ m}$ . У оба разматрана случаја вредности интензитета импулса, ПФМ метода са 20 управљачких мотора остварује исту вредност вероватне кружне грешке као ТТ вођење са 60.



Слика 9.27. Зависност растурања погодака од броја управљачких импулса.



Слика 9.28. Зависност растурања погодака од броја управљачких импулса.

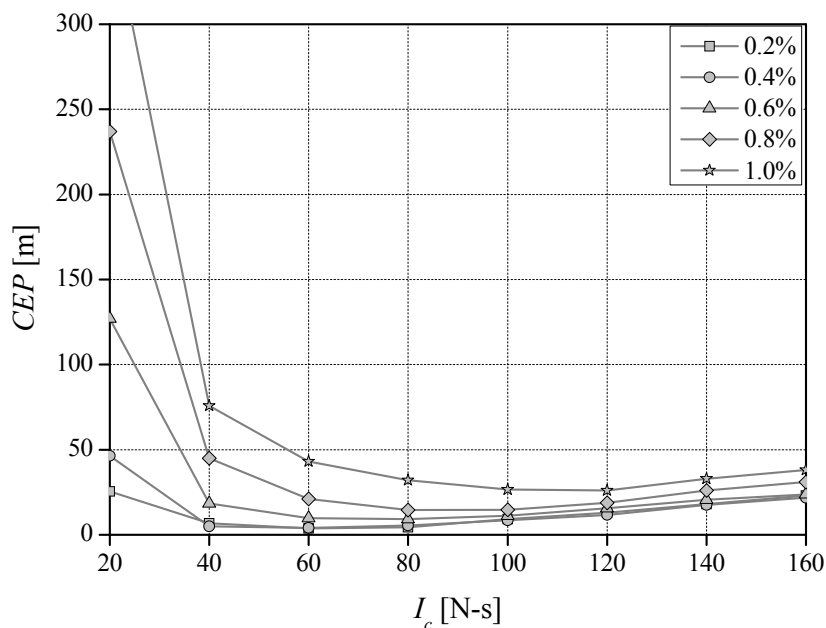


Слика 9.29. Зависност растурања погодака од енергетског ресурса управљачког система.

Слика 9.29 приказује зависност прецизности ракетног система од енергетског ресурса управљачког система, у случају ПФМ вођења. На основу тог дијаграма, могуће је изабрати оптималну комбинацију броја и импулса управљачких мотора, који остварују жељену вредност растурања погодака. Ради боље прегледности, контуре са константном вредношћу вероватне кружне грешке су дате у логаритамској скали, а контуре са тоталним импулсом управљачког система  $I_{c,T} = N_I I_c$  са линеарном скалом. Вредности укупног тоталног импулса управљачког система са којима не може да се оствари потпуна компензација поремећаја су  $I_{c,T} < 1000 \text{ N-s}$ . У том случају криве константне вредности растурања погодака су готово паралелне кривама константних вредности  $I_{c,T}$ , односно, величина растурања погодака зависи од укупне расположиве енергије. Таква ситуација указује на чињеницу да расположива енергија управљачког система није довољна за потпуну компензацију поремећаја. У случају да је  $I_{c,T} > 1000 \text{ N-s}$ , расположива енергија је довољна за потпуну компензацију у случају одговарајуће комбинације броја и импулса управљачких мотора. У том случају је величина растурања погодака веома зависна од броја мотора. Повећање импулса преко  $I_c = 50 \text{ N-s}$  не доноси значајно смањење растурања, а у неким случајевима га и повећава.

Растурање вредности тоталног импулса је доминантни поремећај са становишта растурања погодака артиљеријског ракетног система. Слика 9.30 приказује

зависност перформанси система за ПФМ вођење од величине стандардне девијације одступања тоталног импулса. У овој анализи није примењено ограничење максималног одступања те величине, као што је то био случај у претходним разматрањима. Разматран је случај са 35 управљачких импулса различитог интензитета. За сваку тачку на дијаграму означену симболом је извршена Монте Карло симулација за све могуће комбинације параметара закона вођења и приказана минимална вредност.

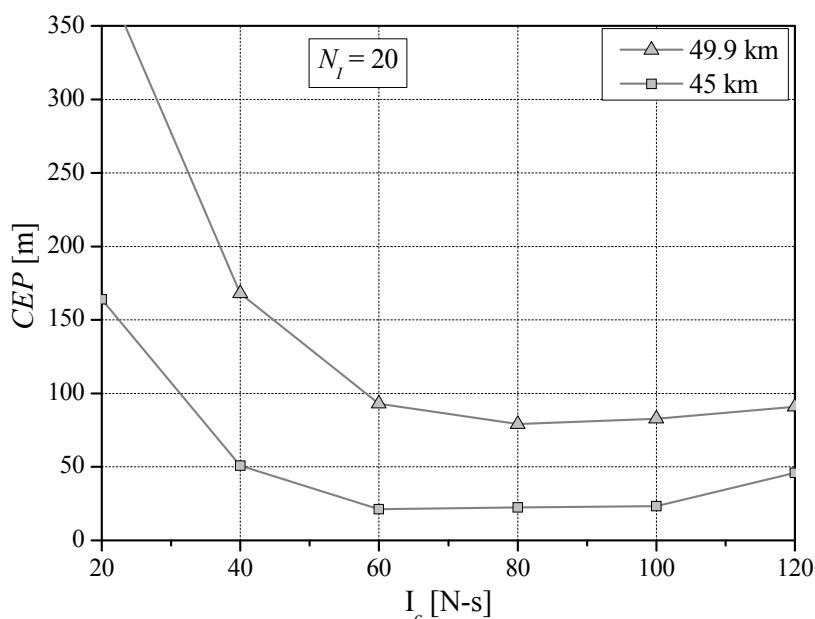


Слика 9.30. Перформансе система вођења за различите вредности стандардне девијације тоталног импулса  $\sigma_{TI}$ .

Обзиром да је код ПФМ методе примењена директна компензација поремећаја вредности тоталног импулса ракетног мотора, остварене перформансе система у много мањој мери зависе од тог поремећаја него у случају ТТ вођења. До се код ТТ вођења величина растурања погодака готово линеарно повећава са стандардном девијацијом тоталног импулса, у случају ПФМ вођења то повећање је занемарљиво докле год систем располаже довољним енергетским ресурсом да се изврши компензација тог поремећаја и фина корекција путање у завршном делу. У случају да су управљачки импулси интензитета 20N-s, у првој фази вођења није могуће да се у потпуности компензује одступање у случају  $\sigma_{TI} \geq 0.4\%$ , тако да даље повећање тог поремећаја драстично нарушава перформансе система. Повећање интензитета управљачких импулса доприноси компензацији већих вредности  $\sigma_{TI}$  у првој фази, али отежава фино навођење ракете на циљ, због чега се вредност растурања погодака повећава за веома велике  $I_c$ . Интензитет управљачких

импулса који остварује најмање растурање погодака се повећава са повећањем  $\sigma_{TI}$ . У случају  $\sigma_{TI} = 0.2\%$ , добија се  $CEP = 3.7$  m за  $I_c = 40$  N-s, а за  $\sigma_{TI} = 1\%$ :  $CEP = 26$  m за  $I_c = 120$  N-s.

Као посебан случај, у наредном разматрању дата је анализа перформанси система вођења у случају максималног домета. Две су основне разлика у односу на посматрани пример путање домета 45 km. Прва је што се овом случају остварује знатно више теме путање, дужа трајекторија и веће растурање погодака. Ова проблематика посебно је разматрана у глави 11. У случају домета од 45 km остварује се теме путање на 13 km, а у случају максималног домета теме путање је на 21 km.

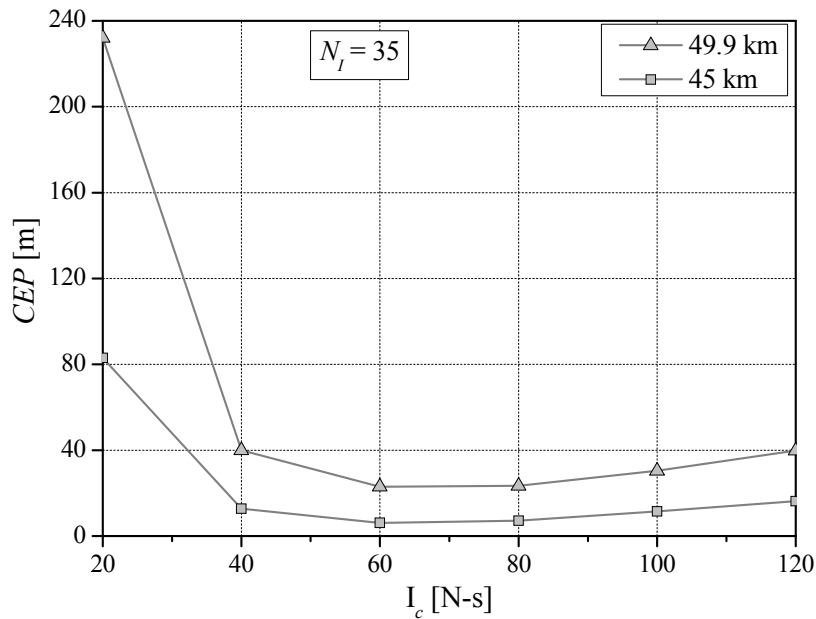


Слика 9.31. Перформансе ПФМ вођења при средњем и максималном домету.

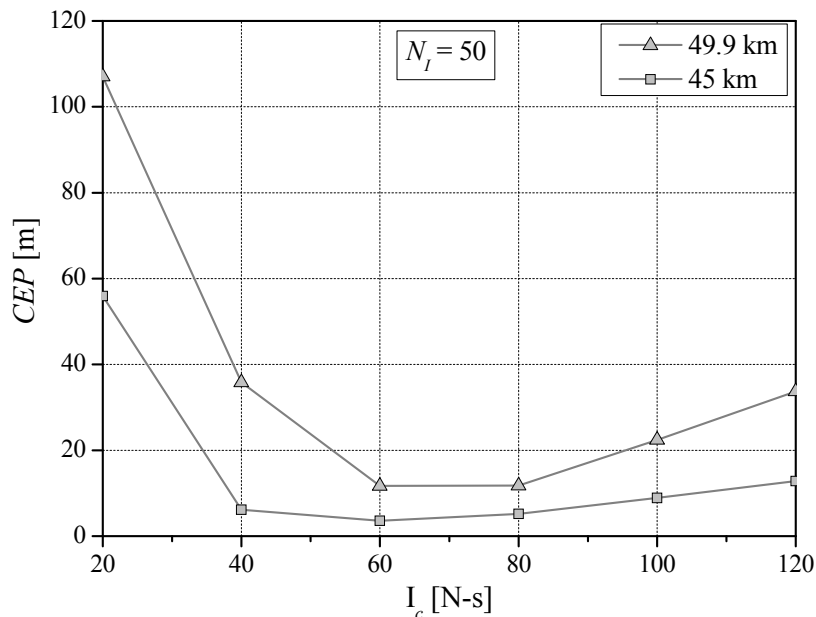
Друга битна карактеристика везана за гађање циљева блиских максималном домету је та што је за повећање домета потребно извршити велику промену висине темена путање. Самим тим су потребне знатно веће корекције референтне трајекторије у случају мањег тоталног импулса. Тако је, за тотални импулс мањи за 1% потребна корекција висине темена путање за 2750 m, наспрам 510 m у случају домета од 45 km.

Обзиром да је одступање тоталног импулса ограничено на  $\pm 1\%$ , претпостављено је да је циљ на максималној даљини коју је могуће достигнути са тоталним импулсом мањим за 1% од номиналног. У том случају је могуће одредити корекције референтне трајекторије по једначинама (9.1) - (9.6). Таква референтна путања је домета 49900 m, има теме на 17520 m и добија се уколико се лансирање изврши под углом од  $50.877^\circ$ . У случају да је тотални импулс мањи за 1% од своје номи-

налне вредности, овај домет се добија са елевацијом лансера од  $55.74^\circ$ , при чему је теме путање на 20300 m.



Слика 9.32. Перформансе ПФМ вођења при средњем и максималном домету.



Слика 9.33. Перформансе ПФМ вођења при средњем и максималном домету.

На сликама 9.31 – 9.33 приказано је поређење перформанси система вођења методом ПФМ праћења путање у случају домета од 45 km и 49.9 km. Дата је промена растурања погодака у зависности од интензитета управљачких импулса у случају малог  $N_I = 20$ , средњег  $N_I = 35$  и великог  $N_I = 50$  броја импулса.

Поредећи растурања на средњем и максималном домету, видимо да перфор-

мансе ПФМ вођења знатно опадају на максималном домету. Такође, за добијање најбољих резултата потребно је применити импулсе већег интензитета, него у случају домета од 45 km. Растурања погодака која се остварују на максималном домету су, чак и у случају малог броја импулса, у границама зоне уништења бојеве главе, док се са великим бројем импулса могу добити веома прецизни погоци. Са друге стране, услед модификације трајекторије, максимални домет је за дозвољено одступање тоталног импулса од 1% смањен са 50450 m на 49900 m.



## Глава 10.

# ПОВЕЋАЊЕ ДОМЕТА АРТИЉЕРИЈСКИХ РАКЕТА ПРОМЕНОМ РАСПОДЕЛЕ ПОТИСКА РАКЕТНОГ МОТОРА

Повећање домета артиљеријских ракета могуће је остварити путем промена на ракетном мотору. Те промене могу бити остваривање већег тоталног импулса путем повећања количине ракетног горива или његове калоричне моћи. Други начин за повећање домета је оптимизација нивоа и облика криве потиска уз задржавање истог тоталног импулса. У случају невођених артиљеријских ракета, облик криве дијаграма потиска је условљен следећим факторима:

- Максимални домет,
- Величина растурања погодака,
- Цена, сложеност и технологичност ракетног мотора.

Ова три наведена фактора су најчешће међусобно супротстављени. Оптимизацијом дијаграма потиска у циљу повећања домета нарушиће се величина растурања погодака. Са дијаграма 3.3 до 3.7 (поглавље 3) види се да је, после растурања тоталног импулса, одступање почетних вредности угаоних брзина најзначајнији фактор за растурање погодака артиљеријских ракета. Добијање најмањег растурања подразумева велику брзину ракете на устима цеви, како би се што више смањила величина угаоних брзина пропињања и скретања у том тренутку, а самим тим и њихова одступања од номиналних вредности. У случају ракете Оркан, примењена је конфигурација са посебним стартним мотором, који завршава рад унутар лансирне цеви. Тиме је остварен висок ниво потиска и велика брзина на устима цеви  $V_0 = 91.3 \text{ m/s}$ . Таква конфигурација даје мала растурања погодака, али није оптимална по питању домета. Повећана цена и сложеност таквог система погона је, у овом случају, оправдана величином ракета Оркан. У случају мањих ракета (122/128 mm), примењују се једноставнији једнофазни ракетни мотори.

Увођење система вођења код артиљеријских ракета поједностављује претходно изнети проблем. Није више неопходно оптимизовати потисак по питању величине растурања, јер се сви поремећаји који настану у току лета могу компензовати. Циљ разматрања у овом поглављу је да се утврди колико је систем ПФМ вођења са импулсним управљањем, описан у глави 9, у стању да компензује повећан ниво поремећаја, који настаје као последица измењеног нивоа потиска у циљу

повећања домета.

### Повећање домета прерасподелом потиска ракетног мотора

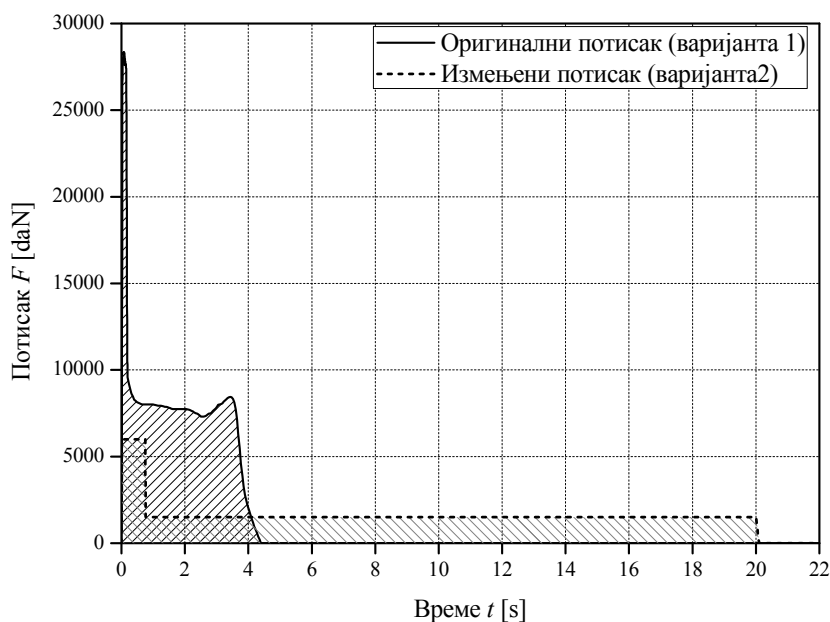
Повећање домета је могуће остварити прерасподелом потиска. На слици 10.1 је дата једна таква шема и приказано је поређење оригиналног и измењеног дијаграма потиска. Резултати за оригинални дијаграм потиска добијени су мерењем, док је измењени дијаграм потиска добијен под следећим претпоставкама:

- Задржана је иста вредност тоталног импулса
- Потисак је апроксимиран са два сегмента у оквиру којих је константне вредности
- Однос нивоа потиска у првом и другом сегменту је 4:1.

Добијени дијаграм потиска се састоји из два сегмента:

$$F = \begin{cases} 6000 \text{ daN}, & 0 < t < 0.76 \\ 1500 \text{ daN}, & 0.76 \leq t < 20 \end{cases} \quad (10.1)$$

Оваква шема потиска је блиска оптималној по критеријуму максимизације домета. Са смањеним потиском приликом лансирања са  $\approx 27000 \text{ daN}$  на  $6000 \text{ daN}$  (4.5 пута), ракета излази из цеви са брзином од  $V_0 = 41.7 \text{ m/s}$ . Две разматране варијанте су обележене као варијанта 1 (оригинални потисак) и варијанта 2 (измењени потисак).



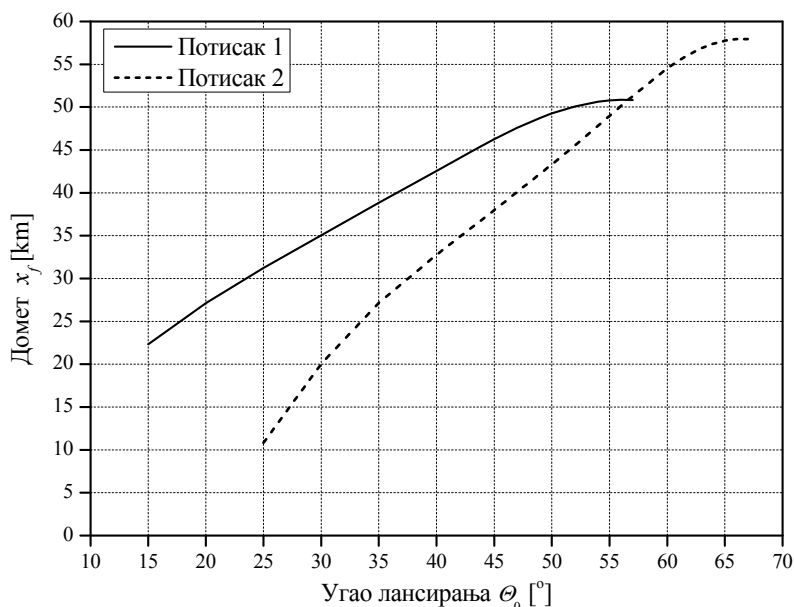
Слика 10.1 Оригинални и измењени ниво потиска.

На слици 10.2 приказано је поређење зависности домета ракете од угла лан-

сирања за две поменуте варијанте потиска. Применом варијанте 2 потиска, максимални домет је повећан са 50.5 km на 58 km, што представља повећање од око 15%, искључиво применом прерасподеле потиска.

Са слике 10.2 је приметно да су, за постизање истих домета, у случају варијанте потиска 2 потребни већи углови лансирања. Та појава је последица великог почетног пада вредности угла пропињања у том случају (слика 10.5), што настаје као последица мале почетне брзине и веће негативне угаоне брзине пропињања. Наиме, у случају варијанте потиска 2 остварује се приближно 2.2 пута мања брзина ракете на устима цеви, и 2.2 пута већа (негативна) угаона брзина пропињања.

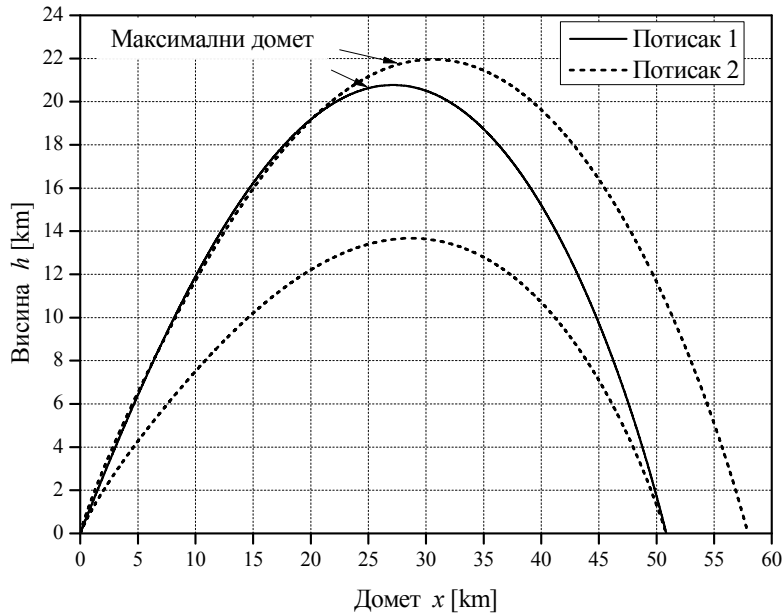
На слици 10.3 приказано је поређење путања ракете са две поменуте варијанте потиска у случају максималног домета, као и путања ракете са измењеним потиском која остварује исти домет (50.5 km) као ракета са оригиналним потиском при максималном домету. У случају друге варијанте потиска, за исти домет се остварују знатно нижа темена путања, 13.67 km наспрам 20.77 km. Ракета се креће кроз гушће слојеве атмосфере, што, у случају вођене ракете, знатно повећава ефикасност управљања (глава 6, слике 6.2 – 6.6). У случају раније разматране путање домета 45 km, темена путања су на 12.85 km у случају варијанте потиска 1 и 10.05 km при варијанти потиска 2.



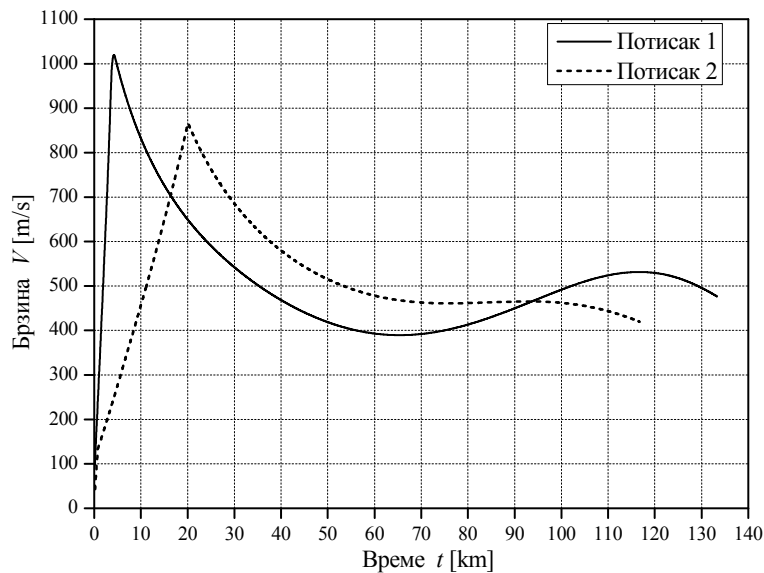
Слика 10.2. Домет ракете са оригиналним и измењеним потиском.

На слици 10.4 приказано је поређење брзина ракета у случају домета од 50.5 km. У случају друге варијанте потиска, ракета на почетку путање остварује мању брзину, али већу у другом делу путање. Разлог за овакву појаву лежи у чињеници

да је у случају измењеног потиска знатно дуже време током којег није присутан отпор базе, као и што је максимална брзина ракете остварена када се она налази на већој висини, па се, услед мање густине ваздуха и мањег отпора, брзина ракете мање смањује. У случају измењеног потиска укупно време лета је, такође, смањено.



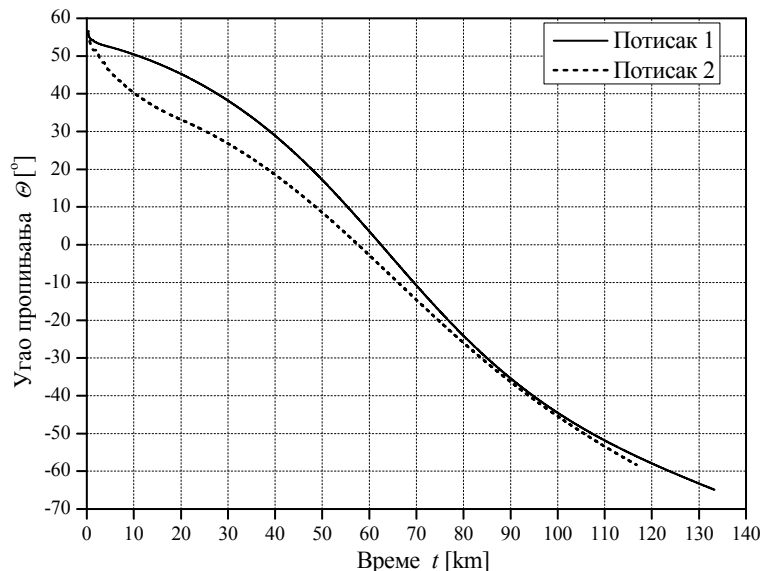
Слика 10.3. Поређење путања са максималним дометом



Слика 10.4. Поређење брзина ракете за домет од 50.5 km.

На слици 10.5 приказано је поређење углова пропињања за две варијанте потиска у случају домета од 50.5 km. Иако се лансирање обавља при сличној еле-

вацији, услед знатно веће негативне вредности угаоне брзине пропињања, на почетном делу путање долази до већег опадања угла пропињања, тако да је путања положенија.



Слика 10.5. Поређење углова пропињања ракета за домет од 50.5 km.

### Утицај модификованог потиска на прецизност невођених ракета

Применом ПФМ вођења и реактивних импулса као управљачких органа могуће је повећати прецизност артиљеријских ракета и компензовати смањење прецизности које се јавља са прерасподелом потиска ради повећања домета. У наредном разматрању дато је поређење растурања невођених артиљеријских ракета за две различите варијанте потиска марш мотора у случају путање домета 49.9 km, која је блиска путањи са максималним дометом у случају оригиналног потиска. Сви резултати су добијени Монте Карло симулацијама математичког модела ракета са 6 степени слободе, са статистичким показатељима поремећајних величина датим у табели 10.1.

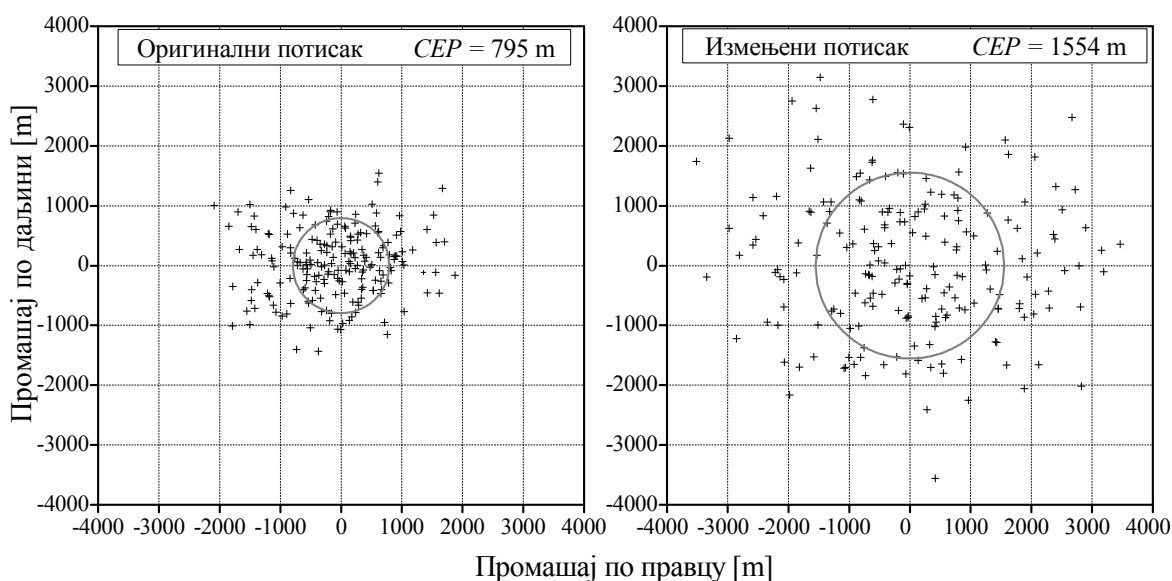
На основу података из табеле 10.1, може се приметити да до највеће разлике долази код почетне брзине ракета на устима цеви, као и код почетне вредности угаоне брзине пропињања, која зависи од  $V_0$  и приближно јој је обрнуто пропорционална. Узето је да су стандардне девијације тих величина пропорционалне њиховим средњим вредностима, односно  $\sigma_{V_0^{(1)}} / \sigma_{V_0^{(2)}} = V_0^{(1)} / V_0^{(2)}$ ,  $\sigma_{q_0^{(1)}} / \sigma_{q_0^{(2)}} = q_0^{(1)} / q_0^{(2)}$  и  $\sigma_{r_0^{(1)}} / \sigma_{r_0^{(2)}} = q_0^{(1)} / q_0^{(2)}$ , где горњи индекс (1) означава случај са оригиналним а (2) са измењеним потиском ракетног мотора. Такође, као и у разматрањима у поглављима 8 и 9, одступање вредности тоталног импулса је

ограничено на 1%.

Табела 10.1.

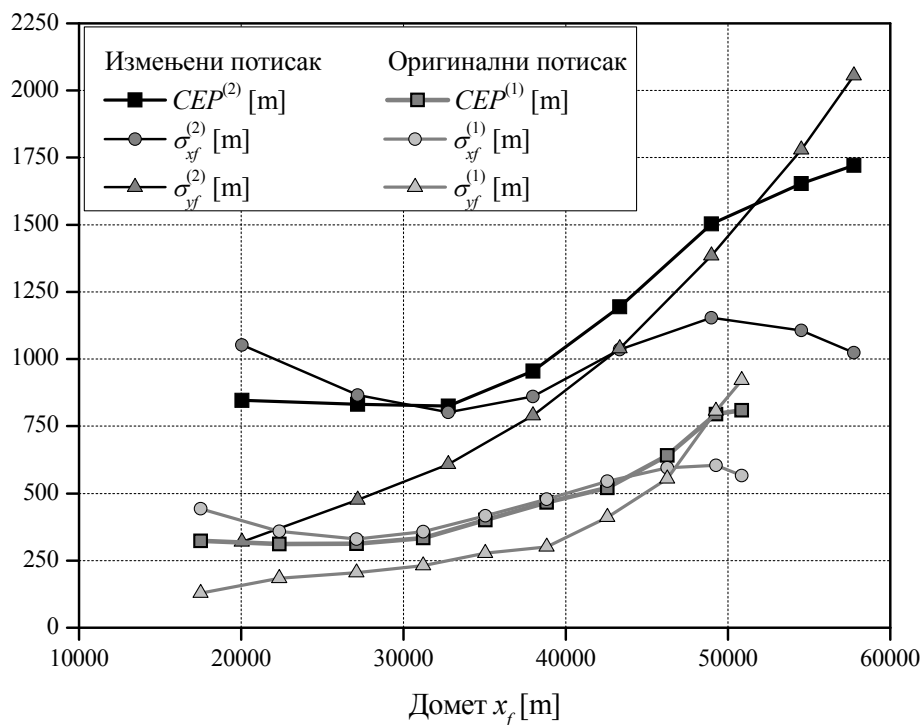
Величина	Ознака	Јед. мере	Математичко очекивање		Стандардна девијација	
			Пот. 1	Пот. 2	Пот. 1	Пот. 2
Почетна брзина ракете	$V_0$	m/s	91.3	41.7	0.27	0.125
Почетни угао пропињања	$\Theta_0$	°	50.8	58.6	0.03	0.03
Почетни угао скретања	$\Psi_0$	°	0.084	0.23	0.018	0.018
Почетна угаона брзина пропињања	$q_0$	rad/s	-0.046	-0.099	0.02	0.042
Почетна угаона брзина скретања	$r_0$	rad/s	0	0	0.01	0.021
Аксијална компонента брзине ветра	$\Delta V_{Wx}$	m/s	0	0	2	2
Попречна компонента брзине ветра	$\Delta V_{Wy}$	m/s	0	0	2	2
Угао дезаксијалности потиска	$\varepsilon$	mrاد	0	0	1.5	1.5
Одступање тоталног импулса	$\Delta I_{tot}$	%	0	0	0.5	0.5

На слици 10.6 приказано је поређење растурања погодака невођених ракета у случају домета од 49.9 km, за две поменуте варијанте потиска. Варијанта са измењеним потиском остварује знатно веће растурање погодака:  $CEP^{(2)} = 1554\text{ m}$ , наспрам  $CEP^{(1)} = 795\text{ m}$  у случају оригиналног потиска. Стандардне девијације по правцу и домету су  $\sigma_{yf}^{(1)} = 807\text{ m}$  и  $\sigma_{xf}^{(1)} = 567\text{ m}$  у случају оригиналног, односно,  $\sigma_{yf}^{(2)} = 1447\text{ m}$  и  $\sigma_{xf}^{(2)} = 1157\text{ m}$  у случају измењеног потиска.



Слика 10.6. Поређење слика погодака у случају домета од 49.9 km.

Приметно је да је у оба случаја растурање по правцу веће него по домету, и у случају оригиналног потиска та појава је израженија. На слици 10.7 приказана је зависност растурања погодака од домета за две разматране шеме потиска ракетног мотора. Приказане су величине вероватне кружне грешке  $CEP$ , као и стандардне девијације растурања погодака по домету и правцу.



Слика 10.7. Зависност растурања од домета

У оба случаја је приметно да растурање погодака по правцу и домету на различит начин зависе од домета путање. Растурање по правцу има мале вредности за мале домете, док са приближавањем домета максималном, растурање погодака по правцу нагло расте и постаје израженије од растурања по домету. Разлог за ту појаву лежи у чињеници да се путање са дометима блиским максималним остварују знатно дуже путање услед великих углова лансирања. Тако, на пример, у случају оригиналног потиска, за домет од 45 km дужина путање је 53.7 km, а за максимални домет (50.5 km) дужина путање је 68.4 km. Дакле, за повећање домета од 13%, повећана је дужина путање за 27.5%.

У случају малих домета, ситуација је знатно различита. Кратке путање дају мало растурање по правцу, али веома велико по домету. Разлог за овакву појаву је у чињеници да се код положених путања за мале вредности одступања ракете од равнотежне путање по висини добијају велике вредности одступања по домету. Са приближавањем домета ракета максималном, растурање по домету се смањује.

На основу претходних разматрања, намеће се закључак да је само прерасполом потиска ракетног мотора могуће остварити повећање домета артиљеријских ракета за 15%, по цену знатног погоршања прецизности, односно повећања вероватне кружне грешке преко два пута. Ова чињеница се може посматрати и на други начин: код артиљеријских ракета Оркан је жртвован максимални домет на рачун оптимизације растурања погодака. Оптимизација растурања невођених ракета је од великог значаја, јер се број ракета потребних за погађање свих циљева у одређеној зони повећава са квадратом вероватне грешке.

### **Перформансе система за ПФМ вођење у случају измењеног потиска ракетног мотора**

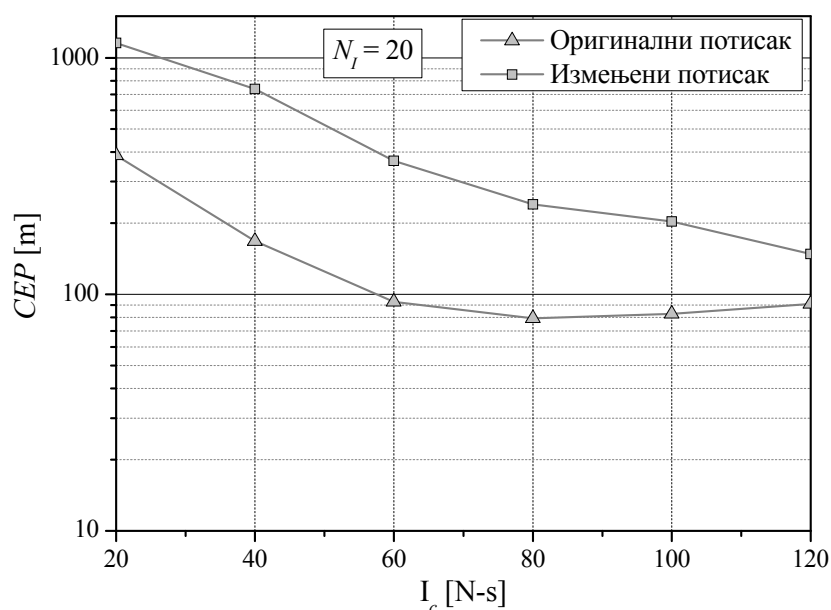
Применом измењене шеме потиска могуће је остварити веће домете артиљеријских ракета, али уз повећано растурање погодака. Систем за корекцију трајекторије са реактивним импулсним управљањем и ПФМ вођењем, представљен у глави 9 у стању је да знатно смањи растурање погодака ракета са оригиналним потиском, а у случају довољног управљачког ресурса може да обезбеди и приближно тачкасте поготке. У случају измењеног потиска ситуација се разликује по следећем:

- Растурања погодака су знатно (преко два пута) већа у случају измењеног потиска. Самим тим, потребна је већа енергија за компензацију растурања.
- У случају измењеног потиска, ракета се за исти домет креће по положенијим, а самим тим и нижим путањама. Иако се ракета у том случају креће кроз гушће слојеве атмосфере, не добија се ефикасније управљање, већ само мање амплитуде осцилација нападног угла (глава 6, слике 6.3 – 6.7). Са друге стране, положенија путање скраћене дужине остављају мање простора за корекцију, па захтевају енергичније управљање.
- Прва фаза вођења почиње знатно касније. Ова фаза почиње са престанком рада ракетног мотора, када се мерењем брзине специфичних сила може да процени одступање вредности тоталног импулса. У случају оригиналног потиска, то је након 5 секунди од лансирања, а у случају измењеног након 20 секунди. У случају разматране путање са дометом  $x_f = 49900 \text{ m}$ , ракета са оригиналним потиском се на почетку прве фазе вођења налази на висини  $h_{c1}^{(1)} = 2510 \text{ m}$ , а преостала дужина путање је 65300 m. Ракета са измењеним потиском се на почетку прве фазе вођења налази на висини  $h_{c1}^{(2)} = 5775 \text{ m}$ , а преостала дужина референтне трајекторије је 50420 m. Самим тим, дужина трајекторије током које се врши корекција је смањена.



Претходно наведене чињенице указују на то да је у случају измењеног потиска управљање артиљеријским ракетама знатно отежано. Циљ наредне анализе је да се утврди да ли се метод управљања реактивним импулсима и метода ПФМ вођења могу применити и у случају измењеног потиска. У даљем разматрању је представљено поређење перформанси управљачких система у случају оригиналног и измењеног потиска ракетног мотора.

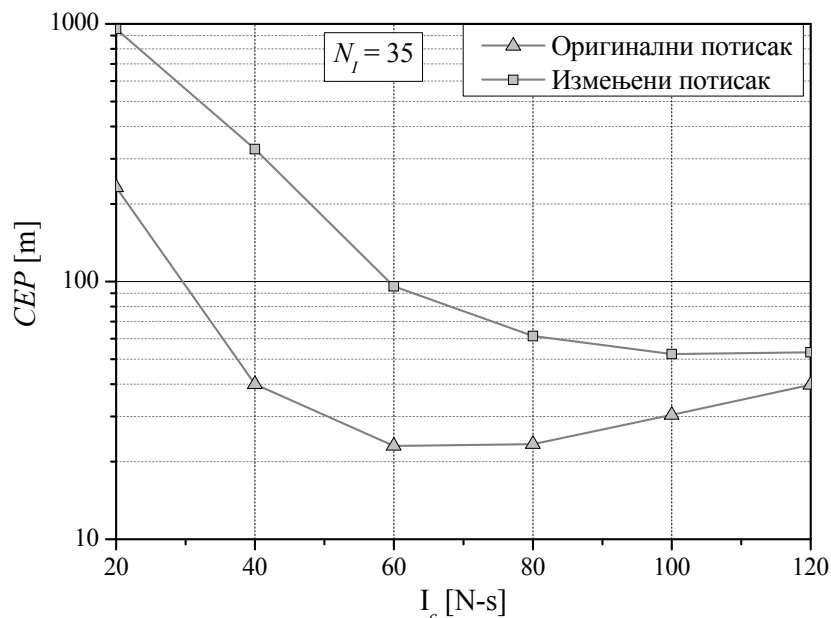
На сликама 10.8 – 10.10 приказано је поређење зависности растурања погодака у случају оригиналног и измењеног потиска од интензитета импулса за мали (20), средњи (35) и велики (50) број управљачких мотора. Разматране су путање са дометом од 49.9 km, блиског максималном за ракете са оригиналним потиском, који омогућује корекцију трајекторије услед одступања вредности тоталног импулса. Свака тачка дијаграма добијена је, као што је објашњено у претходном поглављу, Монте Карло симулацијом, за величине поремећаја дате у табели 10.1, за оне параметре закона вођења за које је методом подешавања параметара утврђено да дају најмање растурање погодака.



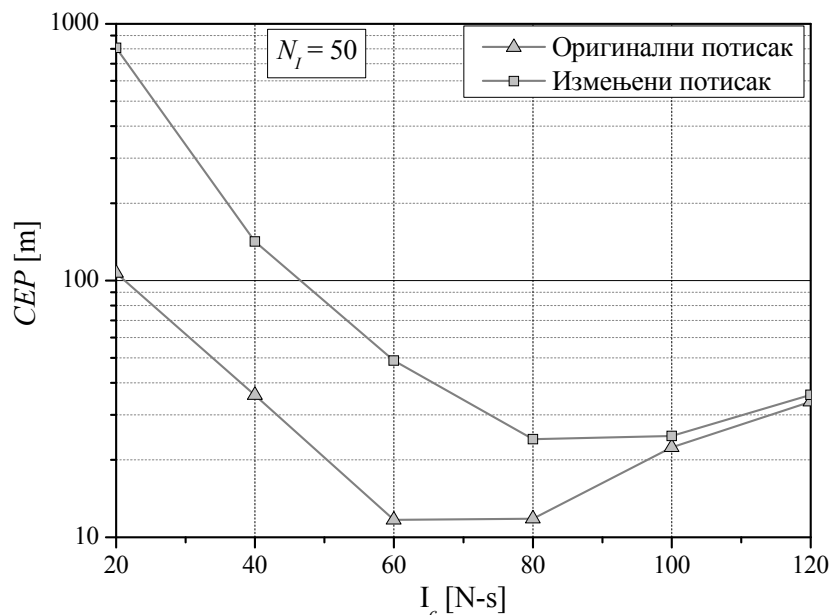
Слика 10.8. Поређење растурања погодака за различите варијанте потиска.

У случају малог броја управљачких мотора, повећана енергетска захтевност управљачког система долази у први план. Величина растурања директно зависи од интензитета управљачких импулса. Остварено растурање вођених ракета је знатно веће него у случају са оригиналним потиском. За мале вредности управљачких импулса, када је у оба случаја величина растурања обрнуто пропорционална интензитету импулса, разлика у величини растурања је 3-5 пута, што је веће него

разлика растурања невођених ракета. На основу тога, може да се закључи да каснији почетак прве фазе вођења и смањена дужина трајекторије током које се врши управљање имају додатног негативног ефекта на перформансе система ПФМ вођења артиљеријских ракета.



Слика 10.9. Поређење растурања погодака за различите варијанте потиска.



Слика 10.10. Поређење растурања погодака за различите варијанте потиска.

Уколико се пред систем вођења стави као задатак да компензује повећање растурања применом нове шеме потиска, онда се то остварује већ са 20 импулса интензитета 40 N-s. Са друге стране, у случају управљачког система са 20 импул-

са, повећање њиховог интензитета је императив, као би се остварила што боља компензација поремећаја. Применом импулса интензитета већег од 100 N-s остварују се растурања погодака која нису достижна за невођене артиљеријске ракете:  $CEP < 0.4 \cdot x_f / 100$ , али не оправдавају примену система вођења.

У случају средњег броја управљачких мотора, потпуна компензација поремећаја остварује се применом импулса од 100 N-s. Величина вероватне кружне грешке од 52 m, која се при томе остварује је у граници зоне уништења бојеве главе, па је примена система вођења са 35 управљачких импулса оправдана.

Управљачким системом који се састоји од 50 импулса могуће је остварити вероватну кружну грешку од 24.1 m, применом импулса интензитета 80 N-s.

Систем за ПФМ вођење артиљеријских ракета остварује знатно слабије перформансе у случају модификованог потиска ракетног мотора. У већини случаја остварују се 2-5 пута већа растурања погодака. У случају средњег и великог броја управљачких мотора, међутим, и та, повећана растурања су довољно мала, тако да омогућују ефикасну примену вођених артиљеријских ракета са повећаним дометом, чак и у случају гађања на мањим дометима. На основу приказаних резултата, намеће се закључак да системи корекције путање са реактивним импулсним моторима могу да компензују повећане поремећаје у случају измењеног потиска повећањем и оптималним избором енергетског ресурса управљачког система. У случају примене таквих система корекције путање, није потребно вршити оптимизацију потиска у циљу повећања прецизности, већ само у циљу повећања домета. Као што је приказано, једном таквом оптимизацијом могуће је остварити повећање домета од 15%.

## Глава 11.

# ПОВЕЋАЊЕ ПРЕЦИЗНОСТИ АРТИЉЕРИЈСКИХ РАКЕТА МЕТОДОМ АКТИВНОГ ПРИГУШЕЊА

Основ за ову методу корекције дали су Harkins и Brown [6], који су разматрали проблем ракета за директно гађање ваздух – земља, које се лансирају из вишецевних – саћастих лансера. Они су предложили упрошћени систем за смањење растурања, који се заснива на реактивним импулсним моторима и брзинским жироскопима у повратној вези. Применом таквог система успели су да остваре смањење растурања 4 пута. У том случају, одступање вредности угаоних брзина пропињања и скретања које имају ракете након напуштања лансера, као и поремећаји тих вредности услед ветра и дезаксијалности потиска имају далеко већи утицај на растурање погодака него одступање вредности тоталног импулса ракетног мотора.

У случају артиљеријских ракета, ситуација се донекле разликује. У глави 3 приказан је утицај величине различитих поремећаја на величину растурања погодака, где су сви резултати добијени Монте-Карло симулацијом модела са 6 степени слободе. Из те анализе се види да је одступање вредности тоталног импулса ракетног мотора далеко најзначајнији параметар за растурање погодака невођених артиљеријских ракета. Ситуација, међутим, може бити и другачија. Тотални импулс ракетног мотора, односно количина ракетног горива је величина која се контролише приликом производње. Разним методама, као што су производња пуњења из сегмента и њихово упаривање, као и разврставање ракета у различите тежинске категорије, могуће је остварити знатно смањење одступања вредности тоталног импулса у оквиру једне шарже, односно у оквиру једног лансера. Уједначеност састава, односно специфичног тоталног импулса горива се такође може побољшати применом напредних метода за контролу квалитета производног процеса, као и применом великих миксера у којима се производи гориво за већи број ракета и чије се карактеристике контролишу. Са друге стране, оптимизација потиска у циљу максимизације домета, као што је описано у глави 10, повлачи са собом смањење брзине ракете на излазу из лансирне цеви, повећање почетне вредности угаоне брзине пропињања (апсолутне), и, самим тим, повећање растурања те вредности. На основу горе наведеног, могуће је да се у случају квалитетног производног процеса ракета и оптимизације потиска са циљем максимизације домета, одступање вредности талног импулса ракетног мотора изгуби доминантни

положај за растурање погодака, и да метода активног пригушења нађе примену и у случају артиљеријских ракета.

Гантмахер и Левин [4] су дали детаљну анализу растурања погодака невође-них ракета, и показали да највећи ефекат имају поремећаји који настају непосредно по напуштању лансера. Нападни угао који се јавља у том периоду последица је почетних осцилација угаоних брзина пропињања и скретања, дејства ветра и ексцентричности потиска ракетног мотора. Задатак управљачког система по методи активног пригушења је да сведе почетне вредности угаоних брзина пропињања и скретања у периоду непосредно након напуштања лансирне цеви на неке, унапред задате вредности, односно да пригуши њихове почетне осцилације. Обзиром да за извршење тог задатка није потребна велика енергија, као и да се управљање извршава непосредно по напуштању лансера, када је брзина ракете мала, као логична се намеће примена управљачког система заснованог на реактивним импулсима. Такав управљачки систем се одликује ниском ценом, одсуством покретних делова и високом ефикасношћу и у случају мале брзине ракете, па је могуће решење и у случају артиљеријских ракета мањих калибара и домета.

За потребе ове анализе изабрана је ракета Оркан са модификованим потиском ради добијања оптималног домета, као што је показано у глави 10. Као што је тамо показано, променом дијаграма потиска, на рачун добитка већег домета, растурање погодака је повећано два пута, што укупан број ракета потребних за погађање циља повећава четири пута. Задатак оваквог упрошћеног система за повећање прецизности је да смањи растурање погодака на величину коју остварују оригиналне ракете.

### **Угаоне брзине пропињања и скретања ракете након напуштања лансера**

Угаоне брзине пропињања и скретања ракете  $\tilde{q}$  и  $\tilde{r}$  су пројекција вектора угаоних брзина  $\omega$  на осе  $O\tilde{z}$  и  $O\tilde{y}$  аеробалистичког координатног система. Уколико се посматра линеаризовани математички модел атмосферског кретања ракете у вертикалној равни у пољу силе Земљине теже, трансформацијом диференцијалних једначина кретања (4.34) и (4.39) из везаног у аеро-балистички координатни систем, имамо:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\tilde{w}} &= z_w(t)\Delta\tilde{w} + u(t)\Delta\tilde{q} + g \cos \Theta(t) \\ \Delta\dot{\tilde{q}} &= m_w(t)\Delta\tilde{w} + m_q(t)\Delta\tilde{q}\end{aligned}\tag{11.1}$$

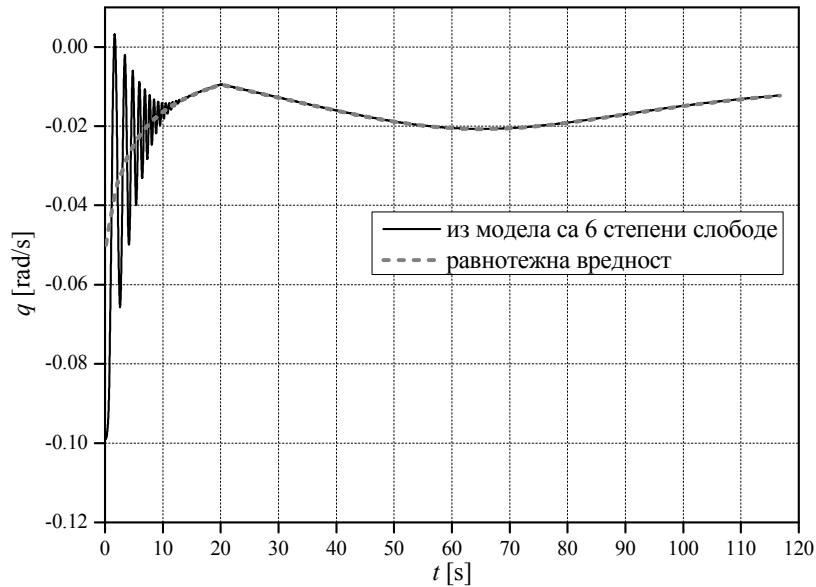
За унапред познату путању пројектила и аеродинамичке параметре на њој, у произвољном тренутку  $\tau$ , имамо:

$$\Delta\ddot{q} + 2\zeta_n(\tau)\omega_n(\tau)\Delta\dot{q} + \omega_n^2(\tau)\Delta\tilde{q} = m_w(\tau)g \cos \Theta(\tau) \quad (11.2)$$

Уколико се занемари осцилаторни прелазни процес, равнотежна вредност угаоне брзине пропињања је:

$$\tilde{q}_R = \frac{m_w}{\omega_n^2} g \cos \Theta \quad (11.3)$$

На слици 11.1 приказано је поређење равнотежне вредности угаоне брзине пропињања добијене применом једначине (11.3) и вредности добијене симулацијом референтне трајекторије модела са 6 степени слободе кретања. Након напуштања лансирне цеви, угаона брзина пропињања ракете је знатно већа од равнотежне вредности. Осцилаторно кретање ракете које настаје након лансирања последица је различитости тог параметра од равнотежне вредности. Након завршетка прелазног процеса угаона брзина ракете се смирује на својој равнотежној вредности.



Слика 11.1. Угаона брзина пропињања и њена равнотежна вредност.

Ако посматрамо ситуацију у хоризонталној равни, услед одсуства дејства силе Земљине теже, равнотежна вредност угаоне брзине скретања је  $\tilde{r}_R = 0$ . У идеалном случају, систем за активно пригушење би требао да се након изласка ракете из лансера супротстави осцилацијама и оствари  $\tilde{q}(t) = \tilde{q}_R(t)$  и  $\tilde{r}(t) = 0$ . Да би то било могуће, неопходно је имати информацију о угаоним брзинама у аеробалистичком координатном систему. Обзиром да су брзински жироскопи везани за тело ракете и мере величине  $q, r$  у везаном координатном систему, за одређивање  $\tilde{q}$  и  $\tilde{r}$  неопходно је познавање угла ваљања  $\Phi$ , који се може добити

интеграцијом још једног брзинског жирокопа који мери угаону брзину ваљања  $p$ , и који мора бити високе класе тачности. У овом разматрању је показано да се корекција може вршити и у односу на вредности угаоних брзина у везаном координатном систему и на тај начин додатно поједноставити управљачки систем.

Уколико означимо са  $L_{\tilde{B}B}$  матрицу трансформације из везаног у аеробалистички координатни систем, за познати угао ваљања  $\Phi$ , компоненте вектора угаоне брзине у аеробалистичком координатном систему су:

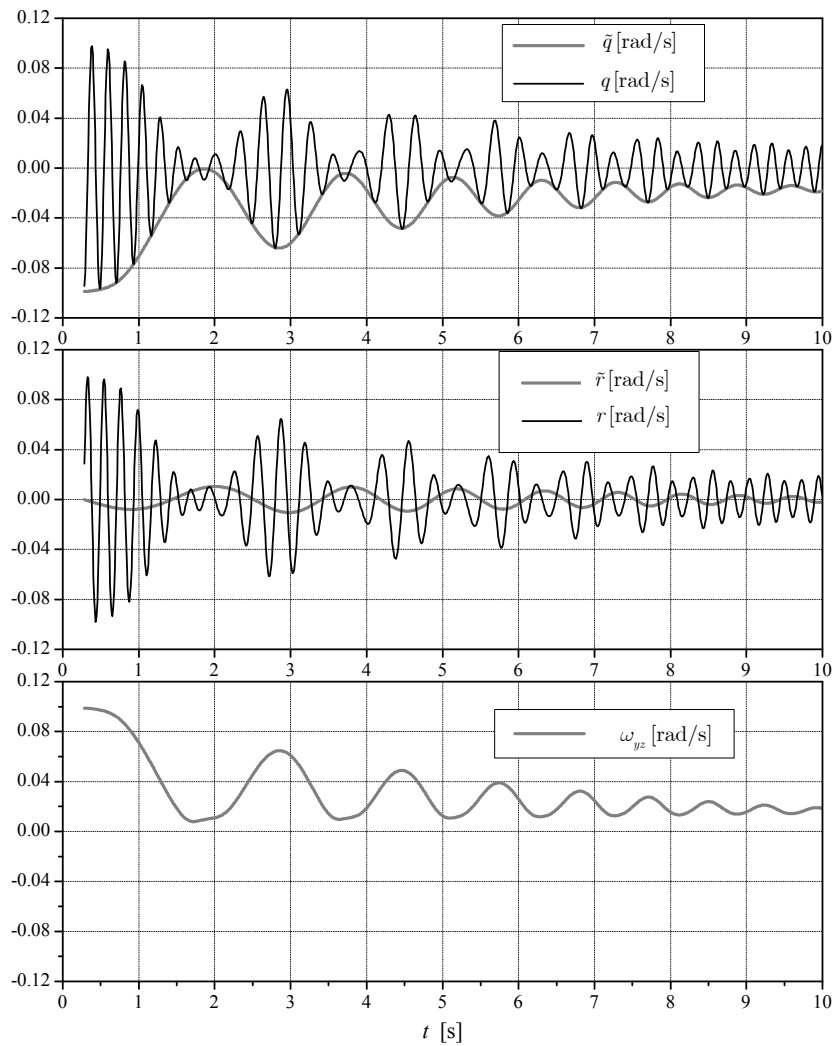
$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{q} \\ \tilde{r} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{\tilde{B}B} \omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Phi & -\sin \Phi \\ 0 & \sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (11.4)$$

Обзиром да је угаона брзина ваљања у периоду непосредно након лансирања 3-5 пута већа од сопствене учестаности кратко-периодичних осцилација, показивања брзинских жирокопа, који су везани за тело ракете су осцилаторна са периодом осцилација која одговара периоду ваљања. Уколико посматрамо вектор угаоне брзине ракете  $\omega = [p \ q \ r]^T$ , онда је његова пројекција на раван  $Cyz$ :  $\omega_{yz} = [0 \ q \ r]^T$ . У аеробалистичком координатном систему имамо  $\tilde{\omega} = [\tilde{p} \ \tilde{q} \ \tilde{r}]^T$  и његову пројекцију на раван  $C\tilde{y}\tilde{z}$ :  $\tilde{\omega}_{yz} = [0 \ \tilde{q} \ \tilde{r}]^T$ . Интензитет вектора  $\omega_{yz}$  и његов угао у равни  $Cyz$  у односу на осу  $y$  су:

$$\omega_{yz} = \sqrt{q^2 + r^2} \quad (11.5)$$

$$\Phi_{\omega} = \tan^{-1} \frac{r}{q} \quad (11.6)$$

На слици 11.2 приказане су угаоне брзине пропињања и скретања у везаном и аеробалистичком координатном систему, као и интензитет вектора угаоне брзине у равни  $Cyz$  у првих 10 секунди лета ракете. Док  $\tilde{q}$  осцилује око равнотежне вредности дефинисане једначином (11.3), а  $\tilde{r}$  око нуле, са учестаношћу кратко-периодичних осцилација, дотле угаоне брзине у везаном координатном систему осцилују око нуле са учестаношћу ваљања ракете. Интензитет вектора угаоних брзина  $\omega_{yz}$ , који се добија на основу  $q$  и  $r$ , међутим, не осцилује са учестаношћу ваљања ракете, већ са учестаношћу кратко-периодичних осцилација, око апсолутне вредности равнотежне угаоне брзине пропињања  $\tilde{q}_R$ .



Слика 11.2. Угаоне брзине пропињања и скретања

### Активно пригушење угаоних брзина пропињања и скретања

Као што се види са слике 11.1, након напуштања лансера долази до осцилација вредности угаоних брзина ракете, а самим тим и до углова пропињања и скретања и нападног угла и угла клизања. Карактер прелазног процеса (слика 11.1) указује на чињеницу да је кретање ракете око попречних оса јако осцилаторно, са веома малим степеном пригушења. Задатак система за активно пригушење је да повећа степен пригушења и да се супротстави осцилацијама. Уколико са  $\dot{\omega}_c$  означимо вектор управљачког угаоног убрзања у везаном координатном систему, закон управљања је:

$$\dot{\omega}_c = -K_\omega \omega_{yz}, \quad K_\omega > 0 \quad (11.7)$$

Трансформацијом претходне једначине у аеробалистички координатни систем, имамо:



$$\dot{\tilde{\omega}}_c = \mathbf{L}_{\bar{B}\bar{B}} \dot{\tilde{\omega}}_c = -K_\omega \mathbf{L}_{\bar{B}\bar{B}} \omega_{yz} = -K_\omega \mathbf{L}_{\bar{B}\bar{B}} \mathbf{L}_{\bar{B}\bar{B}} \tilde{\omega}_{yz} = -K_\omega \tilde{\omega}_{yz} \quad (11.8)$$

Претварањем претходне једначине у скаларни облик, добија се:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}}_c &= -K_\omega \tilde{q} \\ \dot{\tilde{r}}_c &= -K_\omega \tilde{r} \end{aligned} \quad (11.9)$$

Сада систем (11.1) постаје:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\tilde{w}} &= z_w(t) \Delta \tilde{w} + u(t) \Delta \tilde{q} + g \cos \Theta(t) \\ \Delta \dot{\tilde{q}} &= m_w(t) \Delta \tilde{w} + [m_q(t) - K_\omega] \Delta \tilde{q} \end{aligned} \quad (11.10)$$

Овакав систем се може трансформисати у:

$$\Delta \ddot{\tilde{q}} + 2\zeta_{nAD}(\tau) \omega_{nAD}(\tau) \Delta \dot{\tilde{q}} + \omega_{nAD}^2(\tau) \Delta \tilde{q} = m_w(\tau) g \cos \Theta(\tau). \quad (11.11)$$

Систем описан претходном диференцијалном једначином остварује равнотежну у вредност угаоне брзина пропињања:

$$\tilde{q}_{RAD} = \frac{m_w}{\omega_{nAD}^2} g \cos \Theta, \quad (11.12)$$

која је веома блиска по вредности равнотежној вредности у случају без активног пригушења, дате једначином (11.3). Уколико се уведе ознака  $m_{qAD} = m_q - K_\omega$ , природна учестаност и степен пригушења постају:

$$w_{nAD}^2 = m_{qAD} z_w - m_w V \quad (11.13)$$

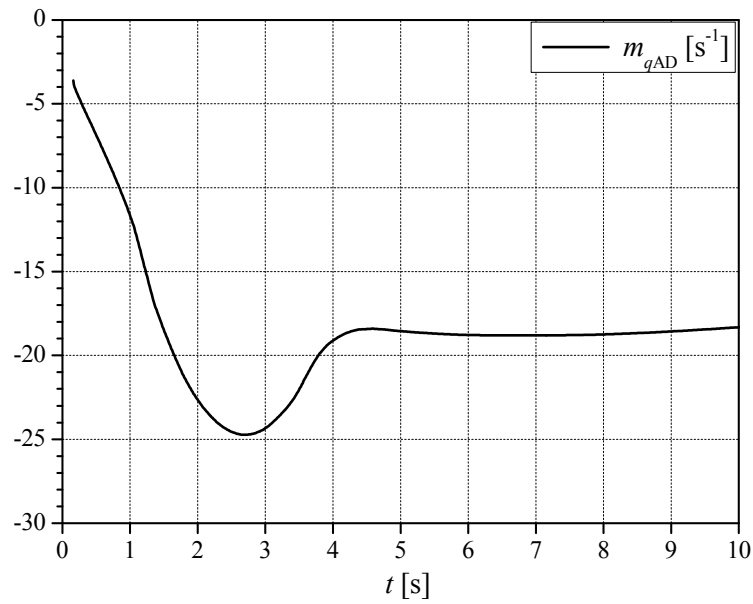
$$\zeta_{nAD} = \frac{-z_w - m_{qAD}}{2\omega_n} \quad (11.14)$$

На основу претходних једначина добија се:

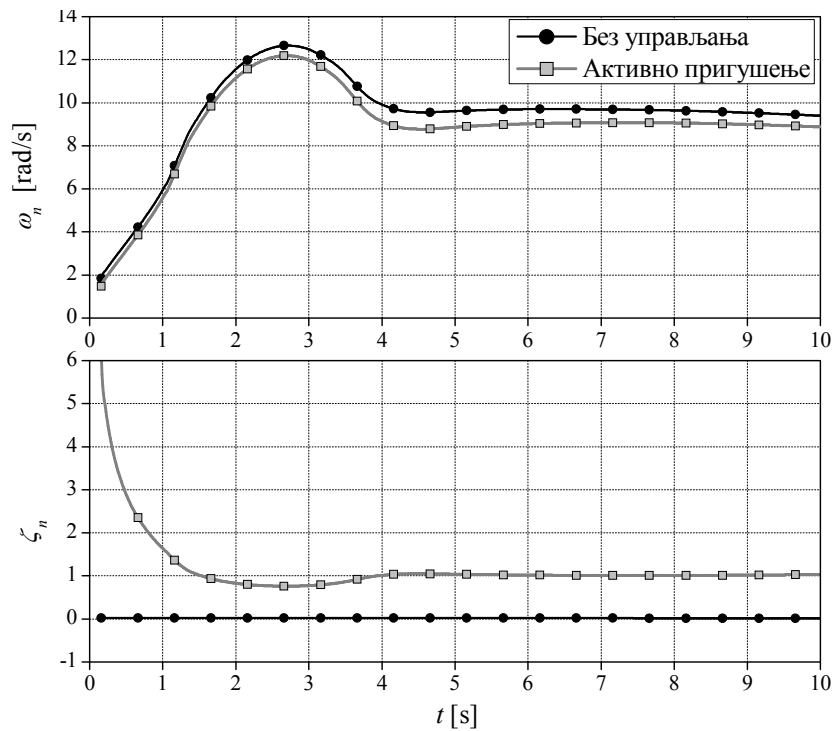
$$m_{qAD} = (2\zeta_n - 1) z_w - 2\sqrt{\zeta_n (\zeta_n - 1) z_w^2 - \zeta_n m_w V} \quad (11.15)$$

што се у посебном случају  $\zeta_n = 1$  своди на  $m_{qAD} = z_w - 2\sqrt{-m_w V}$ . На слици 11.3 приказана је промена вредности параметра  $m_{qAD}$  добијене за  $\zeta_n = 1$ , током првих 10 секунди лета ракете Оркан са модификованим потиском, након напуштања лансирне цеви.

За вредност  $K_\omega \approx -m_{qAD} \approx 18 \text{ s}^{-1}$  добијену са претходног дијаграма, уз претпоставку  $\zeta_n = 1$ , промена природне учестаности и степена пригушења ракете Оркан са измењеним потиском, са и без активног пригушења, у току првих 10 секунди лета, приказани су на слици 11.4.



Слика 11.3. Вредност параметра  $m_{qAD}$  за  $\zeta_n = 1$ .



Слика 11.4. Утицај активног пригушења на  $\zeta_n$  и  $\omega_n$ .

Са слике 11.4 се види да се увођењем активног пригушења незнатно смањује динамика система, док се пригушење повећава са вредности блиској нули на задату вредност  $\zeta_n = 1$ .

## Импулсно фреквентна модулација команде

Једначине управљања методом активног пригушења су (11.5) - (11.7). Континуално управљање (11.7) потребно је претворити у поворку импулса, користећи импулсно фреквентну модулацију, као што је описано у глави 9. Дејство управљачког импулса интензитета  $I_c$  [N-s] на растојању  $l_I$  [m] од центра масе тела са попречним моментом инерције  $J_y$  [kg-m<sup>2</sup>], произвешће средње угаоно убрзање  $\dot{\omega}_c$  у временском интервалу  $\tau$  [s] који му претходи:

$$\dot{\omega}_c = \frac{I_c l_I}{\tau J_y} \quad (11.16)$$

Вредност тог средњег угаоног убрзања зависи од јединог променљивог параметра у једначини (11.16) -  $\tau$ . Максимална вредност угаоног убрзања  $\dot{\omega}_{c,\max}$  одговара минималном времену између два узастопна импулса  $t_{\min}$ . Дефинишимо коефицијент команде  $K$  као однос између оствареног и максималног могућег угаоног убрзања:

$$K = \frac{|\dot{\omega}_c|}{\dot{\omega}_{c,\max}} \quad (11.17)$$

За  $\dot{\omega}_c$  дефинисано једначином управљања (11.7), и  $\dot{\omega}_{c,\max}$  једначином (11.16) уз  $\tau = t_{\min}$ , имамо:

$$K = \frac{t_{\min} J_y K_\omega}{I_c l_I} \omega_{yz} = K_P \omega_{yz} \quad (11.18)$$

$$K_P = \frac{t_{\min} J_y K_\omega}{I_c l_I} \quad [\text{s}] \quad (11.19)$$

Коефицијент појачања  $K_P$  зависи од појачања повратне спреге угаоне брзине  $K_\omega$  и параметара импулсно фреквентне модулације. За одређени интензитет управљачких импулса, њихов положај у односу на центар масе ракете и њене инерцијалне карактеристике, вредност коефицијента појачања је дефинисана минималним временом између два узастопна импулса и коефицијентом  $K_\omega$ .

Импулсно фреквентна модулација управљачког сигнала ( $\dot{\omega}_c$ ) захтева да се уместо једначине управљања (11.7) примени нелинеарно управљање, како би се, услед импулног управљања, избегло осциловање угаоне брзине око нулте вредности. Због тога се управљање по једначини (11.7) обуставља када се интензитет

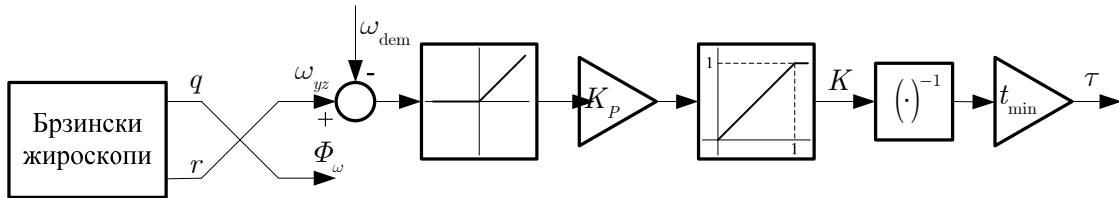
вектора угаоне брзине у попречној равни  $\omega_{yz}$  смањи испод неке, задате вредности  $\omega_{dem}$ . Закон управљања, онда, узима следећи облик:

$$K = \begin{cases} K_P (\omega_{dem} - \omega_{yz}) & , \omega_{dem} < \omega_{yz} \\ 0 & , \omega_{dem} \geq \omega_{yz} \end{cases} \quad (11.20)$$

Вредност коефицијента команде, која представља однос између жељеног и максималног угаоног убрзања се ограничава на  $K \leq 1$ . На основу коефицијента команде, одређује се време до следећег импулса:

$$\tau = \frac{t_{min}}{K}, \quad (11.21)$$

Блок дијаграм система управљања дат је на слици 11.5.



Слика 11.5. Блок дијаграм управљања по методи активног пригушења.

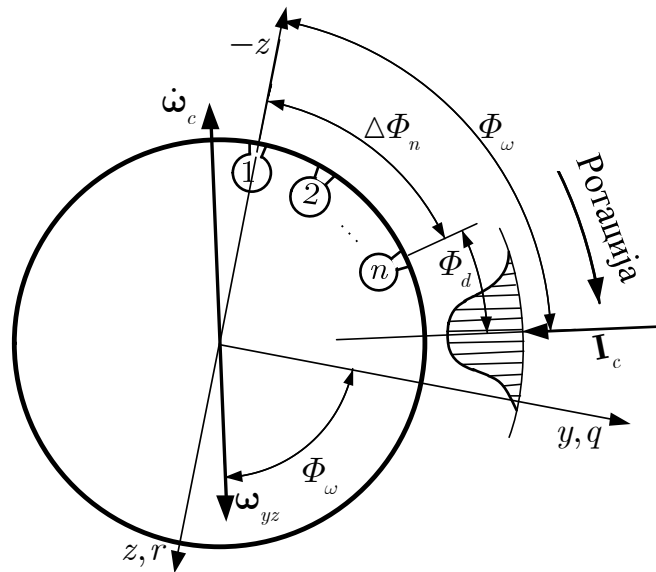
Логика активирања управљачких мотора је слична као у случају ПФМ праћења путање. Услови за активирање  $i$ -тог управљачког мотора су:

- Да је од тренутка претходног импулса или од напуштања лансирне цеви протекло време веће од  $\tau$ :  $t > t_{preth} + \tau$ .
- Да посматрани  $n$ -ти импулсни мотор није већ утрошен.
- Да је разлика његовог угла ваљања и задатог, који узима у обзир и еквивалентни угао кашњења, мања од задате величине прага угла активирања  $\varepsilon_\Phi$ :

$$|\Delta\Phi_n + \Phi_d - \Phi_\omega| < \varepsilon_\Phi \quad (11.22)$$

Угловни услов дат изразом (11.22) приказан је на слици 11.6. Уместо рачунања угловног услова у аеробалистичком координатном систему, приказаног на слици 8.3, у случају методе активног пригушења то се обавља у везаном. Члан  $\Phi + \Delta\Phi_n$  из услова датог једначином (8.17), који представља угаони положај  $n$ -тог импулса у аеро-балистичком координатном систему се мења његовим угловним положајем у везаном координатном систему  $\Delta\Phi_n = 2\pi(n-1)/N_I$ , у односу на негативни крај осе  $z$ . При томе треба имати у виду да оса  $z$  на слици 11.6 није вертикална, већ ротира заједно са везаним координатним системом. Угао вектора угаоне брзи-

не  $\omega_{yz}$  у равни  $Cyz$  везаног координатног система  $\Phi_\omega$  дефинисан је једначином (11.6) у односу на осу  $y$ . Вектор управљачког сигнала (угаоног убрзања),  $\dot{\omega}_c$ , је, по једначини (11.7) супротан вектору  $\omega_{yz}$ . Вектор управљачког импулса  $I_c$  лежи у равни нормалној на вектор  $\dot{\omega}_c$ . Сви поменути вектори леже у равни  $Cyz$  или су јој паралелни. Са слике 11.6 се види да су углови између осе  $y$  и вектора  $\omega_{yz}$ , као и између негативног дела осе  $z$  и пројекције вектора  $I_c$  са управним крацима, и, према томе, једнаки ( $\Phi_\omega$ ). Тиме је потврђена неједнакост (11.22).



Слика 11.6. Угао импулсне команде.

Еквивалентни угао кашњења  $\Phi_d$  зависи од угаоне брзине ваљања, времена кашњења припале и времена трајања импулса  $\tau_I$ . Како у управљачком систему не постоји сензор који мери величину  $p$ , она се узима као унапред позната функција времена. У наредним разматрањима претпостављено је да нема кашњења припале и да је еквивалентни угао кашњења  $\Phi_d = p\tau_I/2$ . Праг угла активирања је у вези са учестаношћу проверавања услова (11.22), како би се обезбедило да се активирање изврши чим први неутрошен мотор прође кроз задати сектор  $\varepsilon_\phi > pT_s/2$ . Са друге стране, он мора бити довољно мали да се обезбеди прецизност дејства управљачког импулса. У посматраном случају, за  $p < 10 \text{ Hz}$  и  $T_s = 0.002 \text{ s}$ , изабрано је  $\varepsilon_\phi = 0.08 \text{ rad} = 4.6^\circ$ .

### Управљачки систем за корекцију угаоних брзина

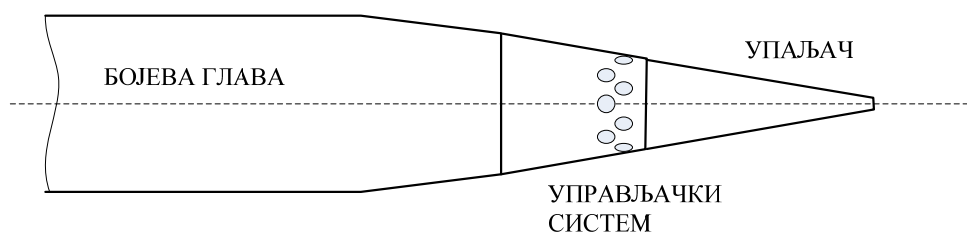
Управљачки систем за корекцију почетних вредности угаоних брзина методом

активног пригушења се састоји од следећих компоненти:

- Управљачког прстена са одређеним бројем реактивних импулсних мотора.
- Два брзинска жироскопа.
- Електронског подсистема са контролером.

Као и претходно описане варијанте импулног управљања, и метод активног пригушења се заснива на прстену са одређеним бројем реактивних импулса распоређених по обиму. Локација прстена је на врху ракете, као што је описано у глави 5. За разлику од примена описаних у главама 8 и 9, у овом случају је за корекцију потребан мањи број импулса, знатно нижег интензитета.

Обзиром да се инерцијални сензори у овом случају не користе за потребе инерцијалне навигације, већ као мерни орган повратне спреге управљања, они не морају бити високе класе тачности, као што је то био случај за вођење са праћењем задате путање.



Слика 11.7. Корекција угаоне брзине реактивним импулсима.

Електронски систем са микро-контролером, за разлику од вођења по принципу праћења задате трајекторије, нема потребу за комуникацијом са лансером, којом се преносе параметри референтне путање. Такође, не постоји навигацијски рачунар. Алгоритам управљања који се извршава на микро-контролеру је, као што је приказано на слици 11.5, веома једноставан.

Све наведене карактеристике подсистема управљачког система указују да је такав систем довољно једноставан и јефтин да се може применити и на артиљеријским ракетама мањег калибра.

Параметре управљачког система можемо поделити на енергетске и параметре закона управљања.

Енергетски параметри управљачког система су:

- број управљачких мотора  $N_I$ ,
- импулс појединачног мотора  $I_c$  и
- трајање управљачког импулса  $\tau_I$

Параметри закона управљања су:

- минимално време између два узастопна импулса  $t_{\min}$ ,
- коефицијент појачања  $K_p$ ,
- задата вредност угаоне брзине пропињања  $\omega_{\text{dem}}$ .

## СИМУЛАЦИЈА МАТЕМАТИЧКОГ МОДЕЛА РАКЕТЕ СА АКТИВНИМ ПРИГУШЕЊЕМ

Основни алат за анализу ефеката активног пригушења и примењеног импулсног управљачког система на параметре лета ракете је симулација математичког модела тако управљане ракете са 6 степени слободe кретања. Опис математичког модела је дат у глави 4, док су геометријске, инерцијалне, погонске и аеродинамичке карактеристике разматране артиљеријске ракете дате у Додатку А.

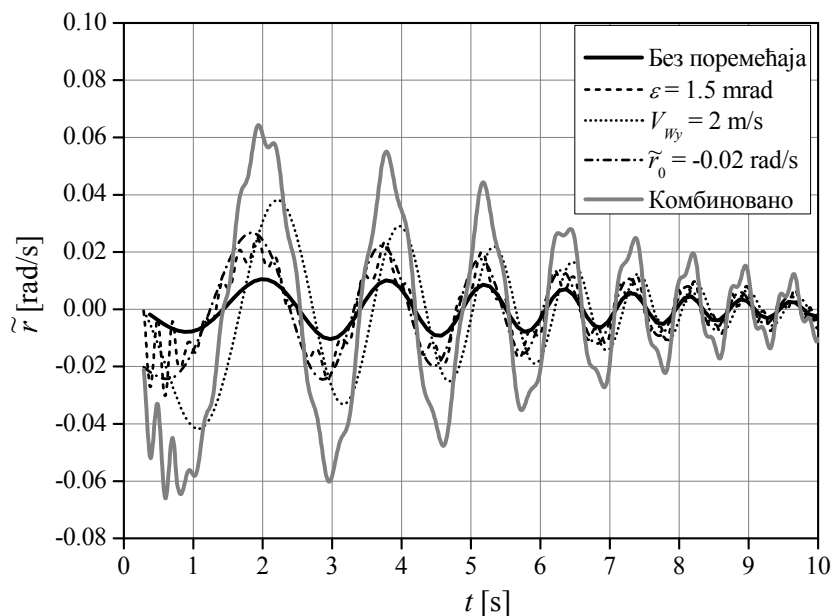
За потребе приказа рада система вођења и управљања изабран је случај разматран у глави 10, где је, применом модификованог потиска ракетног мотора добијено повећање домета од 15% уз повећање растурања за 100%. Анализирана је путања са дометом од  $x_f = 49900 \text{ m}$ , који одговара максималном управљивом домету по методи ПФМ праћења трајекторије у случају ракета са оригиналним потиском. Номиналне и поремећајне вредности почетних величина и параметара дате су у табели 11.1. Ракета напушта лансер са брзином  $V_0 = 41.7 \text{ m/s}$  и угаоном брзином ваљања  $p_0 = 33 \text{ rad/s}$ . Почетни углови пропињања и скретања су  $\Theta_0 = 58.52^\circ$  и  $\Psi_0 = 0.23^\circ$ .

Табела 11.1.

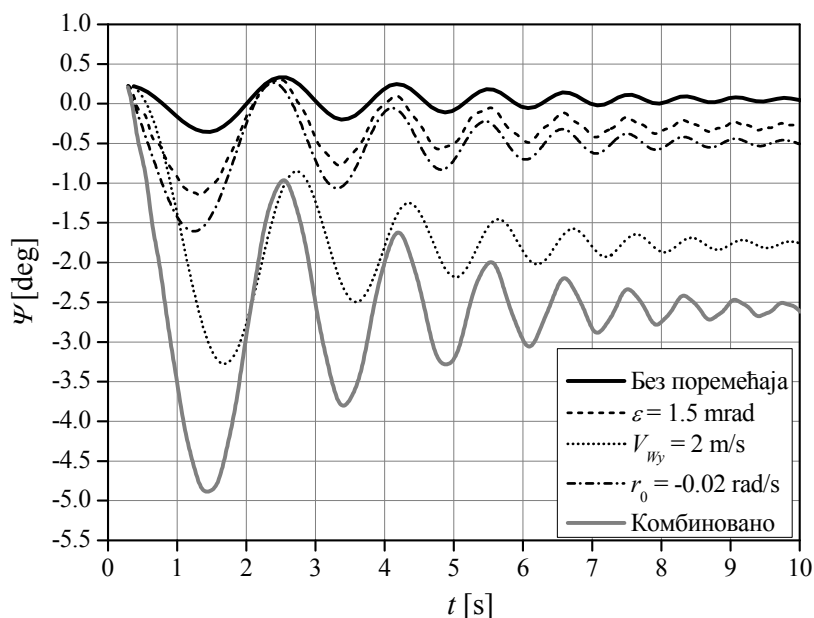
Величина	Јед. мере	Номинална вредност	Поремећајна вредност
Почетна угаона брзина пропињања	rad/s	-0.099	-0.14
Почетна угаона брзина скретања	rad/s	0	-0.02
Аксијална компонента брзине ветра	m/s	0	-2
Попречна компонента брзине ветра	m/s	0	2
Угао дезаксијалности потиска	mrad	0	1.5

На сликама 11.8 – 11.11 приказан је утицај појединих поремећаја на угаоне брзине и углове пропињања и скретања. При томе је посматрано само првих 10 секунди лета. Приказана је угаона брзина у случају без поремећаја, као и три случаја у којима дејствује само један од релевантних поремећаја за посматрану равн

кретања. При томе, дезаксијалност силе потиска је значајна за кретање у обе равни, док се у хоризонталној равни посматрају одступање почетне вредности угаоне брзине скретања и бочни ветар, а у вертикалној, одступање почетне вредности угаоне брзине пропињања и подужни ветар. Поред поменутог, приказан је и комбиновани случај, у којем дејствују сви поремећаји у обе равни.



Слика 11.8. Утицај поремећаја на угаону брзину скретања.

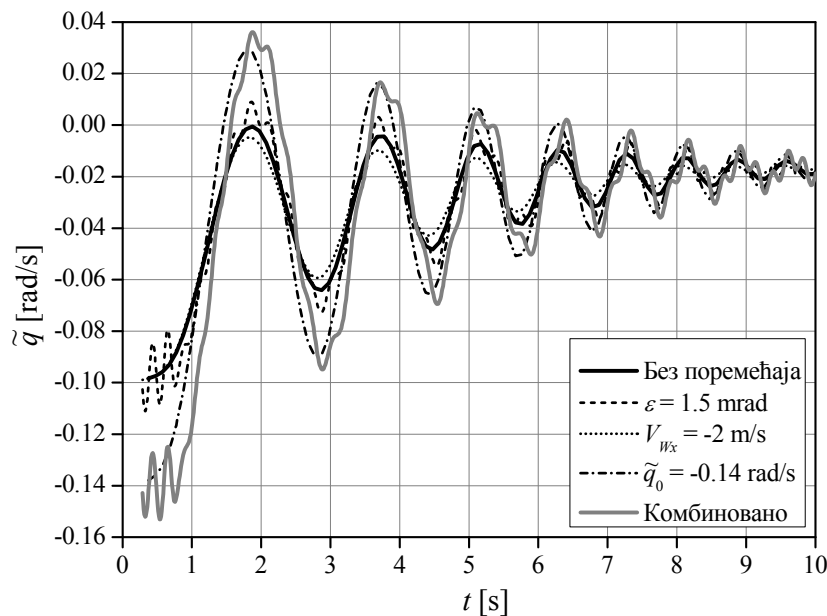


Слика 11.9. Утицај поремећаја на угао скретања.

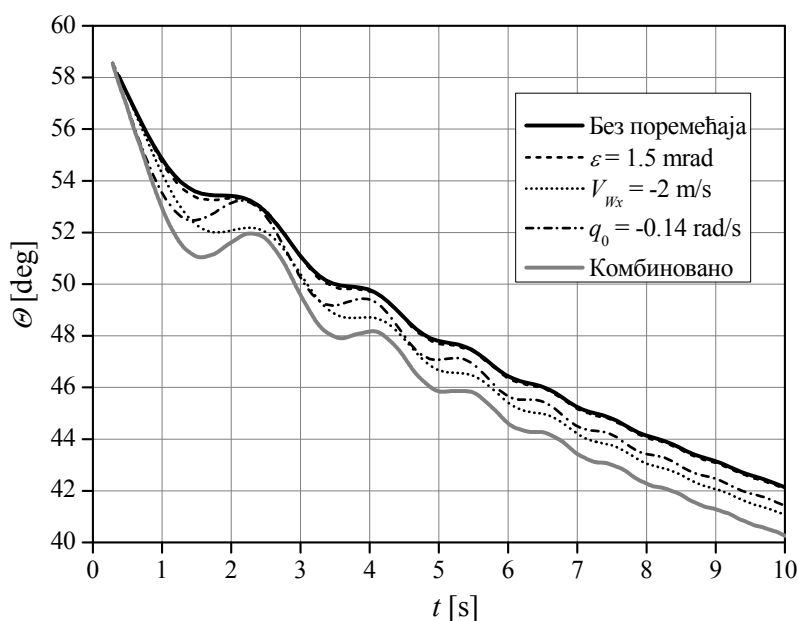
Слике 11.8 и 11.9 приказују утицаје појединачних поремећаја на угаону брзину и угао скретања. Сви поменути поремећаји повећавају осцилације угаоне брзи-



не скретања, које производе промену средње вредности угла скретања. Као што се са слике 11.9 може видети, највећа промена угла скретања настаје у тзв. критичном делу путање, током прве полупериоде осцилације угаоне брзине. За изабране вредности поремећаја, може се закључити да бочни ветар има највећи утицај на осцилације и промену угла скретања. Утицај дезаксијалности потиска, у посматраном случају ракете Оркан, ублажен је принудним увођењем угаоне брзине ваљања ракете помоћу ожљебљене лансирне цеви. Такође, приметно је да се ефекат различитих поремећаја, који су изабрани тако да делују сви у истом смеру, сабира.



Слика 11.10. Утицај поремећаја на угаону брзину пропињања.



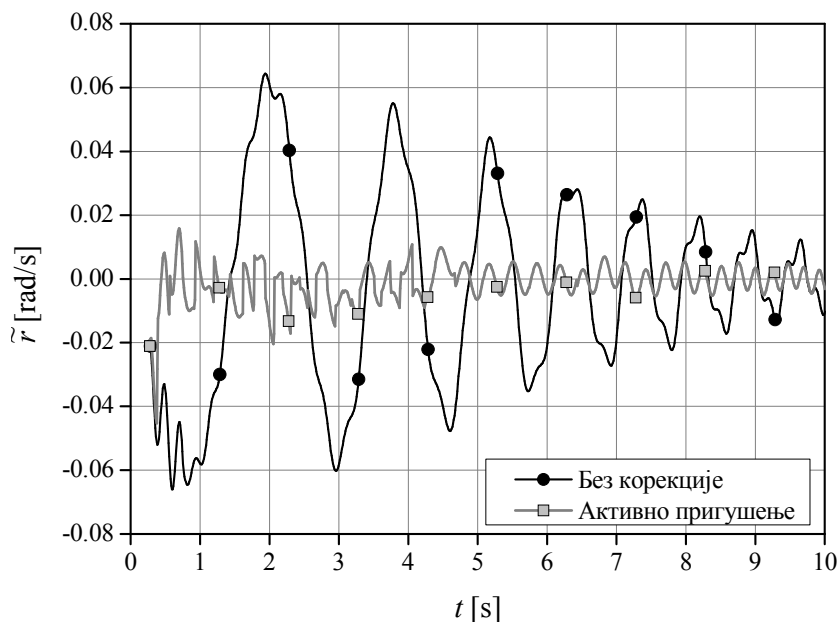
Слика 11.11. Утицај поремећаја на угао пропињања.

На сликама 11.10 и 11.11 приказан је утицај поремећаја на угаону брзину и угао пропињања. Поредићи утицаје у вертикалној и хоризонталној равни, може да се закључи да су у вертикалној равни знатно веће осцилације угаоне брзине у случају без дејства поремећаја, које настају услед чињенице да се почетна вредност угаоне брзине пропињања разликује од равнотежне вредности, дефинисане једначином (11.3).

### Резултати симулације једног репрезентативног случаја управљања

Дејство система за корекцију поремећаја методом активног пригушења приказано је на једном примеру, за који је изабрано комбиновано дејство поремећаја, као што је описано у претходном разматрању у табели 11.1. Угаоне брзине и углови пропињања и скретања у случају ракете без управљања приказани су на сликама 11.8 – 11.11. Претпостављено је да се управљачки систем састоји од  $N_f = 32$  мотора импулса  $I_c = 15 \text{ N}\cdot\text{s}$ , као и да су параметри закона управљања:  $K_p = 20 \text{ s}$ ,  $\omega_{\text{dem}} = 0.01 \text{ rad/s}$  и  $t_{\text{min}} = 0.1 \text{ s}$ .

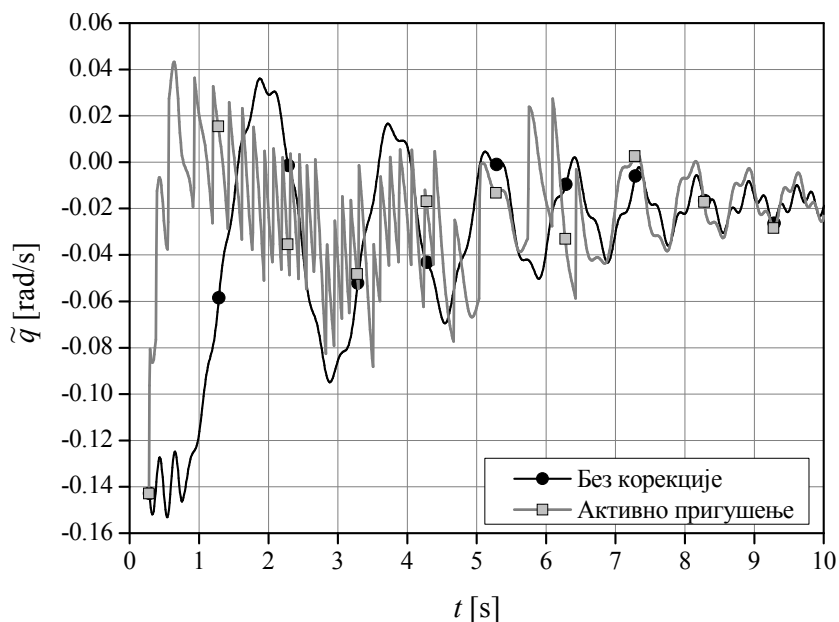
На сликама 11.12 и 11.13 приказана су поређења угаоних брзина скретања и пропињања у аеробалистичком координатном систему у случају ракете са и без управљања. Систем за активно пригушење поворком управљачких импулса ефикасно сузбија осцилације у хоризонталној равни и одржава угаону брзину скретања блиску нули.



Слика 11.12. Угаоне брзине скретања ракете са и без управљања.

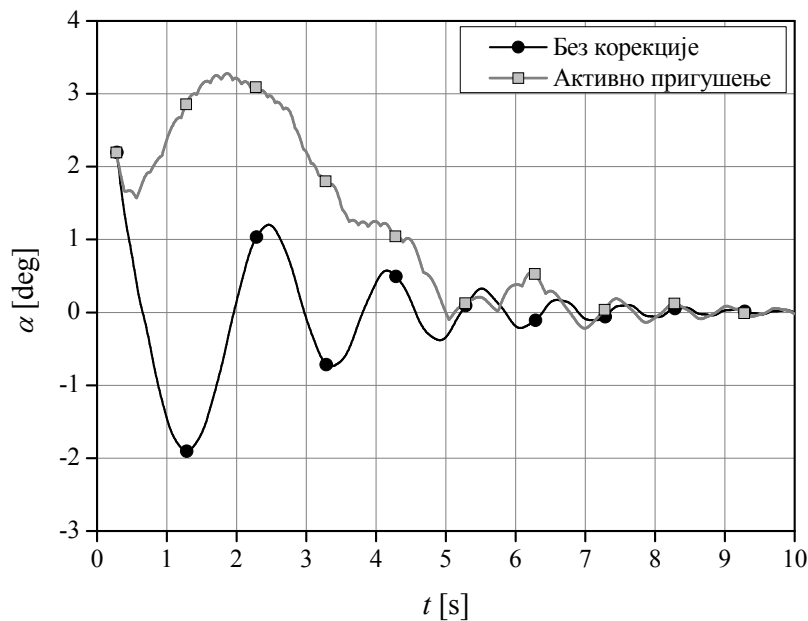
У вертикалној равни ситуација је различита. Након напуштања лансера, угаона брзина пропињања се брзо доводи на вредност која је блиска нули. Таква ситуација доводи до спречавања осцилација и, чак пораста вредности нападног угла, што је приказано на слици 11.15. Такође, ниска вредност угаоне брзине пропињања је у супротности са равнотежном вредношћу датом једначином (11.3) и приказаном на слици 11.1, која је, непосредно након лансирања око  $\tilde{q}_R \approx 0.04 \text{ rad/s}$ .

Претходне две чињенице су разлог због којег се велики број импулса опали у покушају да се угаона брзина пропињања задржи у задатим границама. Са слика 11.12 и 11.13 се види да је угао управљачких импулса био такав да је већи део команде извршаван у вертикалној равни, упркос томе што је управљање обављано у везаном координатном систему, без информације о положају вертикале.

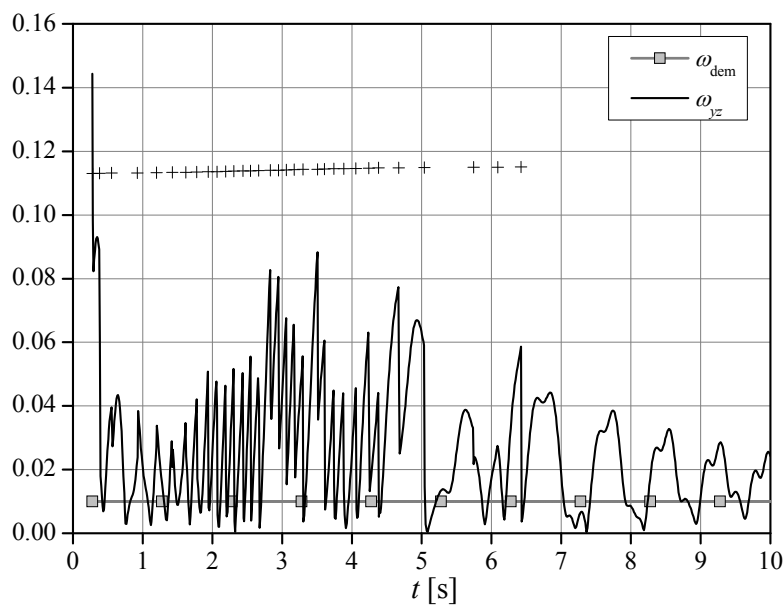


Слика 11.13. Угаоне брзине пропињања ракета са и без управљања.

На слици 11.15 приказан је интензитет вектора угаоне брзине у попречној равни  $\omega_{yz}$ , дефинисан једначином (11.5), који је у овом случају контролисана величина. Такође, приказани су и тренуци издавања импулсних команди. Након утрошења свих управљачких импулса у тренутку  $t = 6.5 \text{ s}$ , настављају се слободне осцилације угаоне брзине  $\omega_{yz}$ . У вертикалној равни (слика 11.13), амплитуда тих осцилација је блиска осцилацијама неуправљане ракете, услед разлике између тренутне и равнотежне вредности угаоне брзине  $\tilde{q}$ . У хоризонталној равни су у потпуности пригушене осцилације са природном учестаношћу, и након престанка дејства управљања, остају само осцилације са учестаношћу ваљања ракете, које настају услед дезаксијалности потиска ракетног мотора, који је и даље активан.



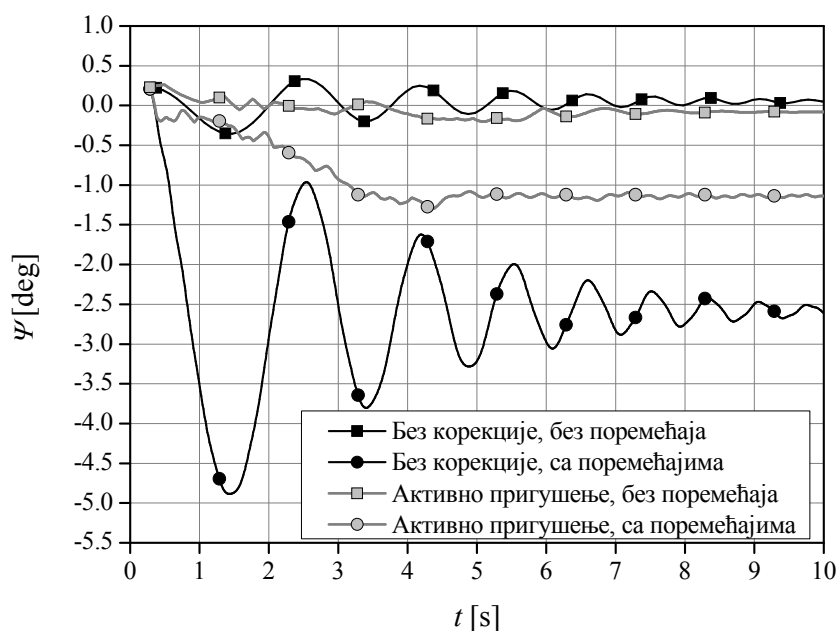
Слика 11.14. Нападни угао ракете  $\tilde{\alpha}$ , са и без управљања.



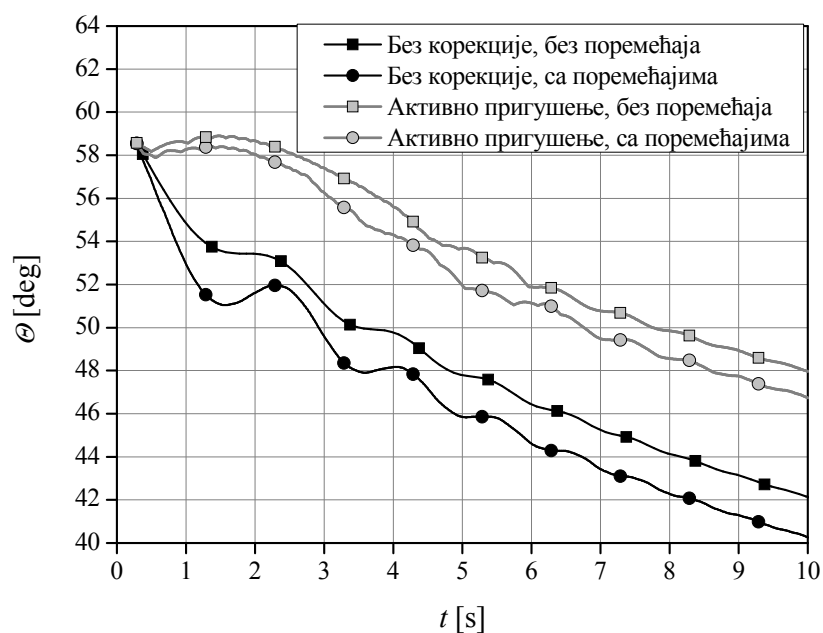
Слика 11.15. Угаоне брзине пропињања ракете без дејства поремећаја.

На сликама 11.16 и 11.17 приказано је поређење углова скретања и пропињања ракете у току прелазног процеса након напуштања лансирне цеви. Приказани су резултати у случајевима са и без управљања, са и без дејства поремећаја. Иако управљачки систем по методи активног пригушења није у стању да у потпуности компензује утицај поремећаја на углове пропињања и скретања, он успева да знатно смањи разлику између тих величина у случају са и без дејства поремећаја. Посматрајући дијаграм промене угла скретања, примећујемо да је разлика смање-

на са  $2.6^\circ$  на  $1.2^\circ$ . У случају угла пропињања смањење њихове разлике применом активног пригушења је нешто мање, са  $1.9^\circ$  на  $1.2^\circ$ .



Слика 11.16 Поређење угла скретања.



Слика 11.17. Поређење угла пропињања.

## АНАЛИЗА ПЕРФОРМАНСИ И УТИЦАЈА ПАРАМЕТАРА

Параметарска анализа има за циљ одређивање оптималних вредности параметара управљачког система, при којима он остварује најбоље перформансе. У случају анализе утицаја параметара и анализе перформанси система користи се Мон-

те Карло техника описана у Додатку В, на начин као што је описано у глави 8. Предмет анализе је ракета Оркан са модификованим потиском, као што је приказано у глави 10. Разматра се путања домета  $x_f = 49900 \text{ m}$ , за коју су вредности математичких очекивања и стандардних девијација почетних вредности величина стања и поремећаја дате у табели 11.1.

Ракета са модификованим потиском је изабрана из разлога што се услед такве модификације знатно смањује брзина са којом ракета напушта лансер, па утицаји поремећаја приликом лансирања и током критичног дела путање добијају већи значај у односу на девијацију тоталног импулса, чији је утицај приметан тек у каснијој фази лета. Како је дејство система за повећање прецизности артиљеријских ракета ограничено на критичну фазу лета, он није кадар да компензује одступања вредности тоталног импулса ракетног мотора. У случају да тај поремећај има велике вредности и постане доминантан у односу на поремећаје који настају у критичном делу путање, примена система за активно пригушење не би дала задовољавајуће резултате.

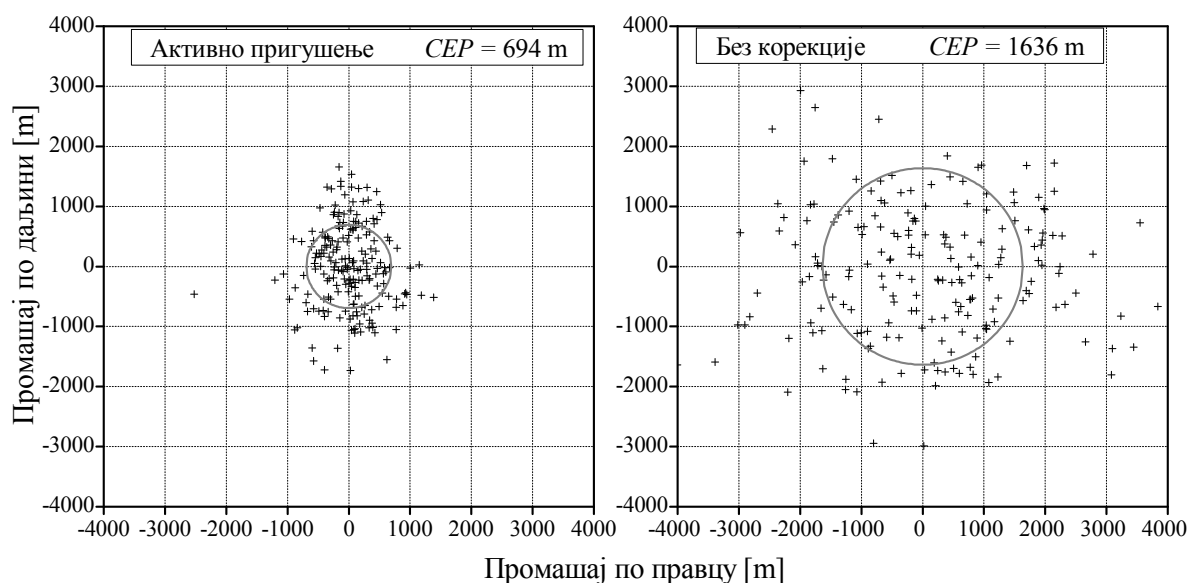
Обзиром да је вредност тоталног импулса ракетног мотора случајна величина која се контролише приликом производње ракете, њена расподела вероватноће није у потпуности нормална, јер се све ракете са одступањем масе горива (тоталног импулса) преко неке вредности одбацују. У овом случају узето је да је максимална вредност одступања тоталног импулса  $\sigma_{TI, \max} = 1\%$ .

Табела 11.1.

Величина	Ознака	Јед. мере	Математичко очекивање	Стандардна девијација
Почетна брзина ракете	$V_0$	m/s	41.7	0.125
Почетни угао пропињања	$\theta_0$	°	58.6	0.03
Почетни угао скретања	$\psi_0$	°	0.23	0.018
Почетна угаона брзина пропињања	$q_0$	rad/s	-0.099	0.042
Почетна угаона брзина скретања	$r_0$	rad/s	0	0.021
Аксијална компонента брзине ветра	$\Delta V_{W_x}$	m/s	0	2
Попречна компонента брзине ветра	$\Delta V_{W_y}$	m/s	0	2
Угао дезаксијалности потиска	$\epsilon$	mrad	0	1.5
Одступање тоталног импулса	$\Delta I_{\text{tot}}$	%	0	0.5

## Дистрибуција места погодака

На слици 11.18 приказане су расподеле погодака добијене Монте Карло методом за почетне вредности величина стања и вредности поремећаја дате у табели 11.1. Приказани су подаци добијени за неуправљане ракете, као и за ракете са активним пригушењем, са параметрима  $I_c = 15 \text{ N}\cdot\text{s}$ ,  $N_I = 32$ ,  $t_{\min} = 0.1 \text{ s}$ ,  $\omega_{\text{dem}} = 0.01 \text{ rad/s}$  и  $K_p = 20 \text{ s}$ . Претпостављено је да је трајање управљачког импулса  $\tau_I = 0.005 \text{ s}$ . Анализа је рађена за статистички узорак од 200 симулација.



Слика 11.18. Слика погодака.

Статистички показатељи растурања погодака дати су у табели 11.2.

Табела 11.2.

Статистички показатељ	Ознака	Јед. мере	Неуправљана ракета	Активно пригушење	Смањење грешке
Вероватна кружна грешка	$CEP$	m	1636	694	2.36
Вероватна грешка по домету	$V_d$	m	741	466	1.59
Вероватна грешка по правцу	$V_p$	m	1094	321	3.41

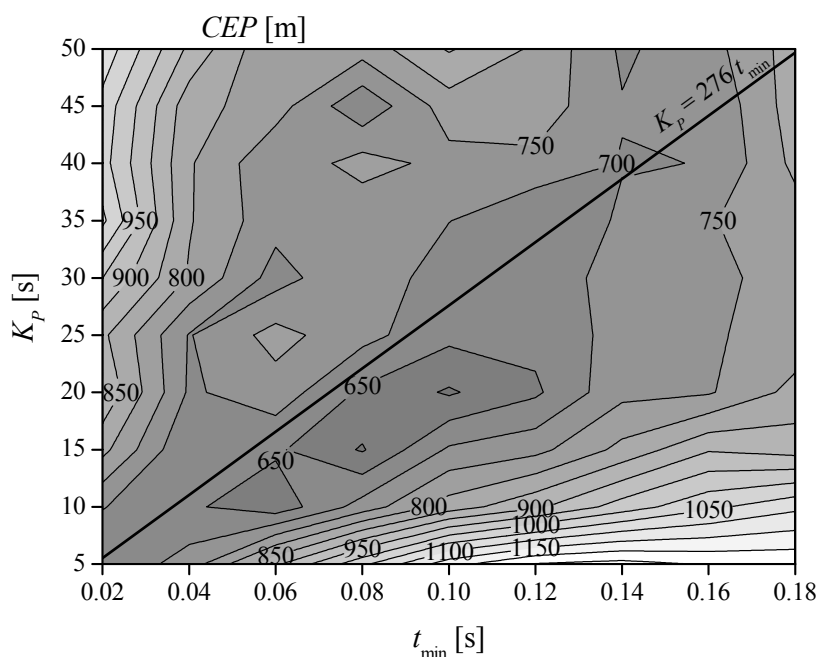
Применом система за активно пригушење, растурање погодака је смањено испод нивоа који остварује ракета са оригиналним потиском (слика 10.7). Услед немогућности оваквог система управљања да компензује одступања тоталног импулса, мења се карактер дистрибуције погодака, па растурање по домету постаје веће него растурање по правцу.

## Параметарска анализа активног пригушења

Перформансе система за побољшање прецизности артиљеријских ракета зависе од његових параметара, који су: број  $N_I$  и интензитет  $I_c$  управљачких мотора, минимално време између два узастопна импулса  $t_{\min}$ , коефицијент појачања  $K_p$ , захтевана угаона брзина  $\omega_{\text{dem}}$  и трајање управљачког импулса  $\tau_I$ . За одређивање њихове оптималне комбинације, при којој се добија најмање растурање погодака, примењена је метода подешавања параметара.

На слици 11.19 приказана је зависност растурања погодака од комбинације коефицијента појачања  $K_p$  и минималног времена између две узастопне команде  $t_{\min}$ . У разматраном случају, остали параметри управљачког система су били:  $N_I = 32$ ,  $I_c = 15 \text{ N}\cdot\text{s}$ ,  $\omega_{\text{dem}} = 0.01 \text{ rad/s}$ ,  $\tau_I = 0.005 \text{ s}$ .

Веза параметара  $K_p$  и  $t_{\min}$  дата је изразом (11.19). За жељену вредност степена пригушења  $\zeta_n = 1$ , која по једначини (11.15) даје  $K_\omega \approx -m_{qAD} \approx 18 \text{ s}^{-1}$ , и за  $J_y = 562 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , уз  $l_I = 2.44 \text{ m}$ , на основу поменуте једначине добија се  $K_p = 276 \cdot t_{\min}$ .



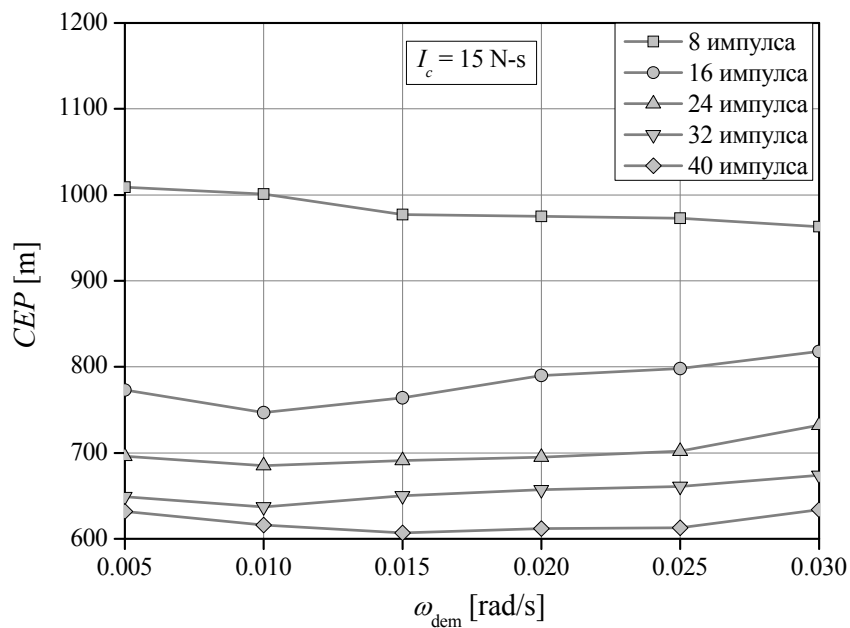
Слика 11.19. Зависност растурања од  $K_p$  и  $t_{\min}$ .

На основу резултата анализе зависности растурања од комбинације параметара  $K_p$  и  $t_{\min}$  приказаних на слици 11.19 може се закључити да је предложена вредност степена пригушења  $\zeta_n = 1$  блиска оптималној. Област најбољих резултата



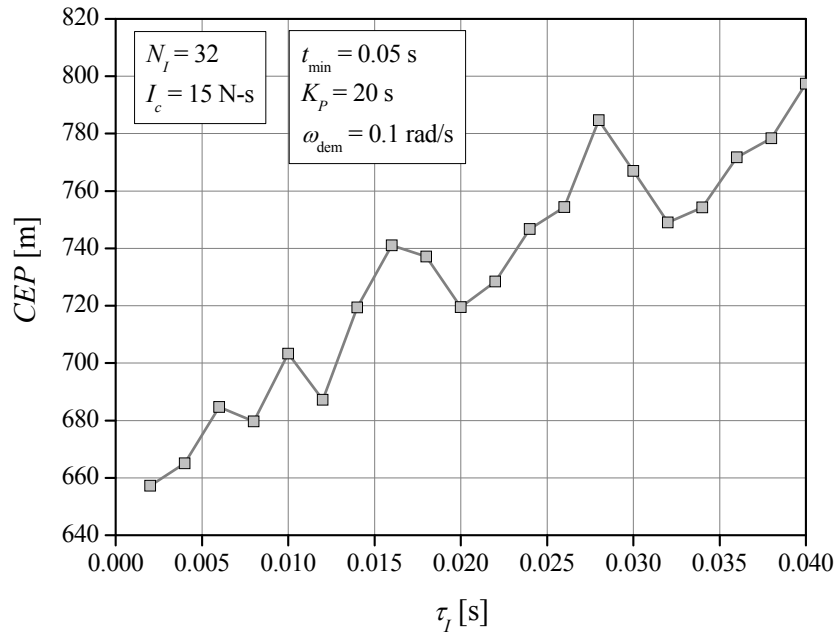
на слици 11.19 је јасно диференцирана и блиска правој  $K_p = 276 \cdot t_{\min}$ . Услед специфичности примењеног импулсног управљања, бољи резултати се остварују за ограничени опсег минималног времена између две импулсне команде, па се може усвојити  $t_{\min} = 0.1 \text{ s}$  и  $K_p = 20 \text{ s}$ .

На слици 11.20 приказана је зависност растурања погодака од задате вредности угаоне брзине  $\omega_{\text{dem}}$ . За задати интензитет од  $I_c = 15 \text{ N-s}$  и бројеве управљачких импулса, извршена је серија Монте Карло симулација за различите комбинације параметара  $K_p$  и  $t_{\min}$  и за  $\tau_I = 0.005 \text{ s}$  и приказане су најмање тако добијене вредности растурања. Резултат анализе показује да величина растурања веома мало зависи од параметра  $\omega_{\text{dem}}$ . У случају екстремно малог броја управљачких импулса, бољи резултати се остварују са већим вредностима, док се повећањем броја импулса као оптимална показала  $\omega_{\text{dem}} = 0.01 \text{ rad/s}$ .



Слика 11.20. Зависност растурања погодака од  $\omega_{\text{dem}}$ .

На слици 11.21 приказана је зависност растурања од дужине трајања управљачког импулса  $\tau_I$ , за случај са 32 управљачка мотора импулса  $I_c = 15 \text{ N-s}$  и комбинацију софтверских параметара за коју се у претходној анализи показало да за такав енергетски ресурс остварује оптималне резултате. На основу остварених резултата може да се закључи да продужење трајања импулса негативно утиче на величину растурања погодака, те да се, приликом дизајна управљачког система треба потрудити да се примене мотори са што је могуће краћим временом дејства.

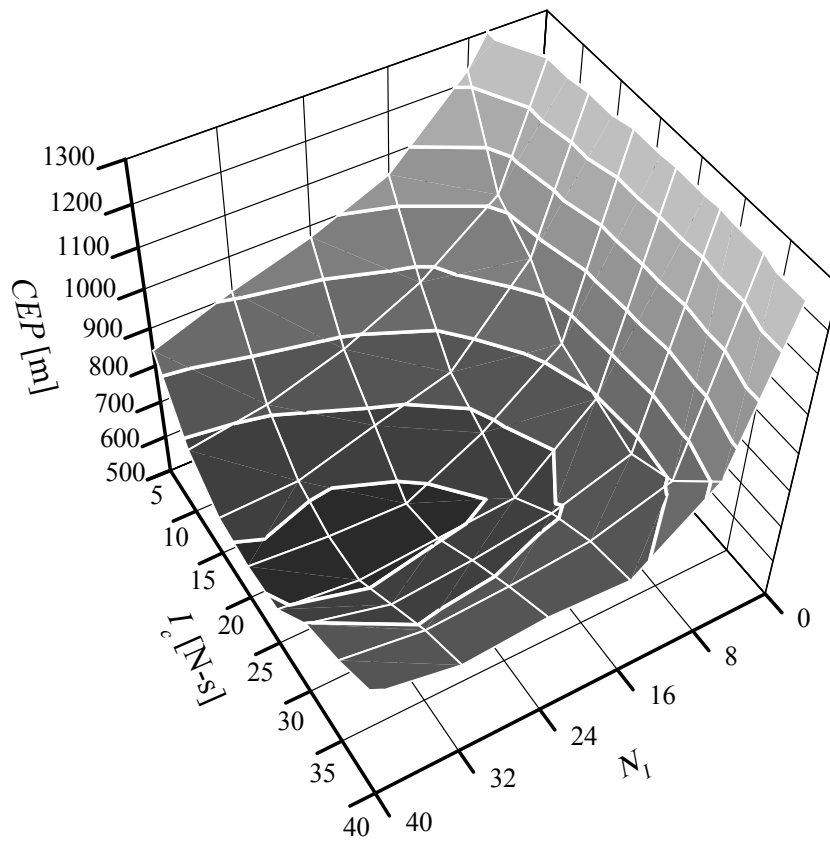


Слика 11.21. Зависност растурања од трајања управљачког импулса.

На слици 11.22 приказана је анализа перформанси система за побољшање прецизности методом активног пригушења у зависности од броја и интензитета управљачких импулса. Свака тачка на том дијаграму добијена је за оптималну комбинацију параметара закона управљања, као и за  $\tau_I = 0.005\text{ s}$ . На основу те анализе закључује се да се најмање растурање добија за импулсе  $I_c = 20\text{ N-s}$ .

Величина растурања се знатно смањује са повећањем броја импулса до 16, док је, у случају импулса већег интензитета, утицај повећања броја мотора на величину растурања веома мали или никакав. У случају импулса мањег интензитета утицај повећања броја мотора на поремећај је велики, што указује да је у том случају недостатак енергије управљачког система од пресудног утицаја за величину растурања.

Метода активног пригушења почетних осцилација угаоних брзина ракета, која је оригинално развијена за ракете за директно гађање, може да се примени и на артиљеријске ракете и оствари значајна побољшања њихове прецизности. Управљачки систем који користи ту методу се својом једноставношћу изведбе, робусношћу, одсуством покретних делова и ниском ценом намеће за употребу пре свега на ракетама калибра 122/128 mm, домета већег од 20 km. Посебан квалитет оваквог система огледа се у његовој компактности, као и могућности да се имплементира на постојеће артиљеријске ракете и тиме у знатној мери повећа њихову употребну вредност.



Слика 11.22. Зависност растурања од енергетског ресурса управљачког система.

## Глава 12.

### ЗАКЉУЧАК

Проблем растурања погодака артиљеријских пројектила се јавља као ограничавајући фактор приликом њихове употребе на дометима већим од 30km, где је, за постизање одговарајуће концентрације погодака која гарантује погађање циља неопходно употребити веома велики број ракета. Смањење потребног броја ракета могуће је остварити повећањем њихове прецизности, увођењем различитих система за вођење.

Обзиром на чињеницу да се артиљеријске ракете на бојишту користе за гађање области, што подразумева употребу великог броја ракета које се лансирају из вишецевних лансера, цена управљачког система који се на њих примењује у односу на остварено побољшање прецизности је од великог значаја. Знатно смањење цене и сложености управљачког система могуће је остварити применом управљачког система са реактивним импулсним моторима.

У овом раду је представљена примена импулсног управљања на артиљеријске ракете. Ова проблематика је у досадашњем теоријском разматрању била ограничена на ракете за директно гађање, које се одликују положеном путањом. Примена импулсног управљања је знатно компликованија на артиљеријске ракете, које се користе за индиректно гађање, и чија се путања карактерише великом закривљеношћу и нестационарношћу величина стања услед великих разлика у брзини ракете и густине ваздуха. Због тога се не могу користити постојеће методе и закони вођења, већ је неопходна њихова модификација или у потпуности нови приступ, што је и била основна тема овог рада.

Представљена је модификација методе праћења задате трајекторије са прозором за вођење, која је у случају ракета за директно гађање давала одличне резултате. Модификација се огледа у увођењу новог метода рачунања растојања од задате путање и примени прозора за вођење чија је величина зависна од висине лета ракете. Приказан је поступак оптимизације параметара управљачког система методом подешавања параметара. Дата је анализа перформанси таквог система вођења у зависности од примењеног енергетског ресурса управљачког система. Показано је да је том методом могуће остварити растурања која су прихватљива за артиљеријске ракете. Смањење растурања које се може остварити овом методом у односу на невођене ракете је, у зависности од броја и интензитета примењених импулса, од 5 до 15 пута, што у потпуности оправдава увођење управљачког сис-

тема са циљем повећања прецизности.

Потпуно нова метода вођења названа праћење задате трајекторије са импулсно-фреквентном модулацијом (ПФМ вођење) је оригинално представљена у овом раду. Та метода се заснива на рачунању команде као у случају континуалних управљачких система, и њеном импулсно-фреквентном модулацијом, како би била прилагођена извршавању на импулсном управљачком систему. Предвиђено је да се управљање извршава у две фазе – непосредно по окончању активне фазе лета и у завршном делу путање. У првој фази се извршава корекција доминантног поремећаја, који је одступање вредности тоталног импулса, увођењем модификације референтне трајекторије. У завршној фази лета се врши прецизно навођење ракете на циљ. Дата је параметарска анализа овог закона вођења, као и анализа перформанси у зависности од примењеног енергетског ресурса управљачког система. Показано је да је, у случају довољног броја и интензитета управљачких импулса, применом ове методе вођења могуће остварити веома мала растурања погодака, која су знатно мања од радијуса убојног дејства бојеве главе.

Обзиром да се код вођених артиљеријских ракета утицај поремећаја који на њу делују компензује дејством управљачког система, њих није потребно конструкционо оптимизовати ради остваривања што боље прецизности, већ се оптимизација може извршити по критеријуму остваривања домета. У овом раду је приказана једна таква оптимизација, која доноси побољшање домета од 15%, уз повећање растурања од 100% у случају невођених ракета. Применом система ПФМ вођења могуће је остварити потпуну компензацију тако увећаних поремећаја и смањење растурања погодака и до 50 пута у случају примене управљачког система са великим енергетским ресурсом, које обезбеђује да вероватна кружна грешка буде мања од радијуса убојног дејства бојеве главе.

У раду је представљена и метода повећања прецизности артиљеријских ракета названа метода активног пригушења. Ова метода обезбеђује корекцију поремећаја на критичном делу путање, одмах након напуштања лансирне цеви. Управљачки систем који се том приликом примењује је знатно једноставнији и јефтинији него у случају вођења са праћењем трајекторије јер се заснива на два брзинска жироскопа ниске класе тачности. Дата је параметарска анализа и анализа перформанси те методе управљања. Разматрано је дејство таквог управљачког система на ракете са повећаним дометом и повећаним растурањем од 100%. Показано је да је поменути систем за корекцију поремећаја у стању да смањи вероватну кружну грешку у том случају за 2.5 пута, на вредност мању него у случају ракета са оригиналним дометом, конструкционо оптимизованих по величини растурања пого-

дака. Овакав управљачки систем се својом једноставношћу и перформансама намеће за употребу на артиљеријским ракетама калибра 128/122 mm.

### **Правци даљег истраживања**

Резултати приказани у овом раду добијени су под претпоставком да је положај ракете у простору одређен савршено прецизно. Положај ракете у простору се може одредити применом strapdown инерцијалног навигационог система или његовом комбинацијом са ГПС системом. Тачност одређивања положаја зависи од одабране методе и карактеристика примењених сензора. У даљем истраживању би се требала анализирати зависност перформанси система вођења по методи праћења трајекторије од класе тачности сензора примењених у СДИНС-у.

Домет артиљеријских ракета је могуће повећати применом "једрења" (енг: gliding) у силазном делу трајекторије. У том случају употреба аеродинамичких управљачких површина би била неопходна. Методологијом приказаном у овом раду било би могуће одредити захтеве за такав управљачки систем, као и могућа повећања домета.

Слично са методама које користе линеарну теорију пројектила за одређивање положаја падне тачке, могуће би било применити методу која у обзир узима велику закривљеност путање артиљеријских ракета. У том случају, закон вођења се састоји из два корака: 1) рачунање корелисане брзине (брзина потребна да се погоди циљ из датог положаја ракете у простору) и Q-матрице која повезује диференцијалну разлику положаја ракете у простору и промену корелисане брзине и 2) предикцију падне тачке користећи податке из корака 1).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Jitpraphai, T., Costello, M. "Dispersion Reduction of a Direct Fire Rocket Using Lateral Pulse Jets", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 38, No. 6, 2001, pp 929-936.
- [2] Jitpraphai, T., Burchett, B. and Costello, M., "A Comparison of Different Guidance Schemes for a Direct-fire Rocket with a Pulse Jet Control Mechanism", U.S. Army Research Lab, ARL-CR-493, Aberdeen Proving Ground, MD, April 2002.
- [3] Gupta, S.K., Saxena, S., Singhal A., Ghosh A.K., "Trajectory Correction Flight Control System using Pulsejet on an Artillery Rocket" *Defense Science Journal*, Vol. 58, No. 1, 2008, pp. 15-33.
- [4] Gantmakher, F.R. Levin L.M. "The Flight of Uncontrolled Rockets", Pergamon Press, 1964.
- [5] Etkin, B. and Reid, L.D., *Dynamics of Flight, Stability and Control*, John Wiley & Sons, 1995. pp. 93-160.
- [6] Harkins, T., Brown, T. "Using Active Damping as a Precision-Enhancing Technology for 2.75-inch Rockets", ARL-TR-1772, U.S. Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD, 1999.
- [7] Amitay, M., Smith, D., Kibens, V., Parekh, D., Glezer, A., "Aerodynamic Flow Control over an Unconventional Airfoil Using Synthetic Jet Actuators," *AIAA Journal*, Vol. 39, No. 3, 2001, pp. 361–370.
- [8] Harkins, T., Davis, B., "Drag-Brake Deployment Method and Apparatus for Range Error Correction of Spinning, Gun-Launched Artillery Projectiles," U.S. Patent 6345785, issued 12 Feb. 2002.
- [9] T. Hillstrom, T., and Osborne, P., "United Defense Course Correcting Fuze for the Precision Guidance Kit Program," *49th Annual Fuze Conference*, National Defense Industrial Association, Arlington, VA, 5–7 Apr. 2005,
- [10] Massey, K., Flick, A., "Mechanical and Jet Actuators for Guiding a Small Caliber Subsonic Projectile," *25th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Miami, FL, AIAA Paper 2007-3813, 25–28 June 2007.
- [11] Massey, K., McMichael, J., Warnock, T., and Hay, F., "Mechanical Actuators for Guidance of a Supersonic Projectile," *23rd AIAA Applied Aerodynamics Conference*, Toronto, Ontario, Canada, AIAA Paper 2005-4970, 6–9 June 2005.
- [12] Costello, M., Agarwalla, R., "Improved Dispersion of a Fin Stabilized Projectile Using a Passive Moveable Nose," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol 23, No. 5, 2000, pp 900–903.
- [13] Costello, M., "Extended Range of a Gun Launched Smart Projectile Using Controllable Canards," *Shock and Vibration*, Vol 8, No. 3–4, 2001, pp. 203–213.
- [14] Costello, M., Peterson, A., "Linear Theory of a Dual Spin Projectile in Atmospheric Flight," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 23, No. 5, 2000, pp. 789–797.
- [15] Burchett, B., Peterson, A., and Costello, M., "Prediction of Swerving Motion of a Dual-Spin Projectile with Lateral Pulse Jets in Atmospheric Flight," *Mathematical and*

*Computer Modeling*, Vol. 35, No. 7–8, 2002, pp. 821–834.

[16] Chandgadkar, S., Costello, M., Dano, B., Liburdy, J., and Pence, D., “Performance of a Smart Direct Fire Projectile Using a Ram Air Control Mechanism,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 124, No. 4, 2002, pp. 606–612.

[17] Rogers, J., Costello, M., “Control Authority of a Projectile Equipped with an Internal Translating Mass,” 2007 AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference, Hilton Head, SC, AIAA Paper 2007-6492, 2007.

[18] Guidos, B., Cooper, G. ”Linearized Motion of a Fin-Stabilized Projectile Subjected to a Lateral Impulse”, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 39, No. 3, 2002, pp 384-391.

[19] Cooper, G., ”Projectile Aerodynamic Jump due to Lateral Impulsives”, ARL-TR-2076, U.S. Army Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD, 1999.

[20] Ollerenshaw, D., Costello, M. “Simplified Projectile Swerve Solution for General Control Inputs”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, 2008, pp 1259-1265.

[21] Calise, A., and H. El-Shirbiny. “An Analysis of Aerodynamic Control for Direct Fire Spinning Projectiles.” *Proceedings of the 2001 American Institute of Aeronautics and Astronautics Guidance, Navigation, and Control Conference*, AIAA 2001-4217, Montreal, Canada, 2001.

[22] Glebocki, R. and Vogt, R. “Guidance System of Smart Mortar Missile”, *The Archive of Mechanical Engineering*, Vol. 54, No. 1, 2007.

[23] Burchett, B. and Costello, M. “Model Predictive Lateral Pulse Jet Control of an Atmospheric Rocket,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol 25, No 5, 2002, pp 860-867.

[24] Devasia, S. and Meyer, G., “Recovery Guidance Satisfying Input and State Constraints: Rate Saturating Actuator Example”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 21, No. 5, 1998, pp. 733-741.

[25] Savage, P. G., “Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 1, 1998, pp. 19-28.

[26] Savage, P. G., “Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 2: Velocity and Position Algorithms,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, 1998, pp. 208-221.

[27] Garnel, P. and East, D.J., *Guided Weapon Control Systems*, Pergamon Press, 1977. pp. 46-64.

[28] Onyshko, S. and Noges, E., “Optimisation of Pulse Frequency Modulated Control Systems via Modified Maximum Principle”, *IEEE Transactions on Automatic Controls*, Vol. 13, No. 2, 1968, pp. 144-149.

[29] Onyshko, S. and Noges, E., “Pulse Frequency Modulation and Dynamic Programming”, *IEEE Transactions on Automatic Controls*, Vol. 14, No. 5, 1969, pp. 558-561.

[30] Oppenheim, A. V. and Schaffer, R. W. “*Discrete-Time Signal Processing*”, 2nd ed. Prentice Hall Signal Processing Series 1999.

[31] Taylor, J. H. and Price, C. F. “*Direct Statistical analysis of Missile Guidance Systems via CADET<sup>TM</sup>*”, The Analytic Sciences Corporation, 1975.



- [32] Mayne, D. Q., and Schroeder, W. R., "Nonlinear Control of Constrained Linear Systems" *International Journal of Control*, Vol. 60, No.5, 1994, pp.1035-1043.
- [33] Anderson, B. D. O., and Moore, J. B., *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990, Chap. 2.
- [34] Gupta, N. K., "Frequency Shaped Cost Functionals: Extension of Linear-Quadratic-Gaussian Design Methods" *Journal of Guidance and Control*, Vol. 3, No.6, 1980, pp. 529-535.

## ПРИЛОГ А.

### РАКЕТА ОРКАН

У овом прилогу дати су основни подаци о артиљеријској ракети 262 mm Оркан, који су коришћени за симулације у овом раду. Подаци су намењени за сваког читаоца који жели да сопственим симулацијама провери или се надовеже на овде објављене резултате. Претпостављено је да је оригинална касетна бојева глава замењена унитарном, идентичних инерцијалних карактеристика.

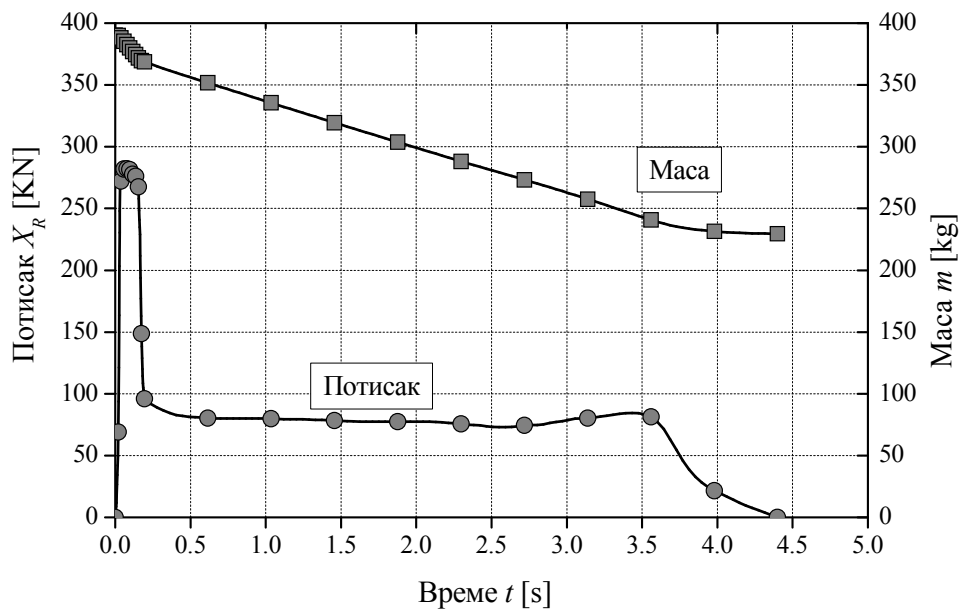
Табела А.1. Габаритне и инерцијалне карактеристике ракете Оркан

Величина	Јед. мере	Вредност	
		Пре лансирања	После акт. фазе
Калибар	mm	262	
Дужина ракете	m	4.66	
Дужина лансера	m	5.85	
Маса	kg	390.3	229.6
Положај центра масе (од врха ракете)	mm	2654	2474
Полупречник инерције око уздужне осе	mm	94.1	97.6
Полупречник инерције око попречне осе	mm	1201	1407
Положај управљач. прстена (од врха ракете)	mm	400	
Тотални импулс ракетног мотора	daN-s	33420	

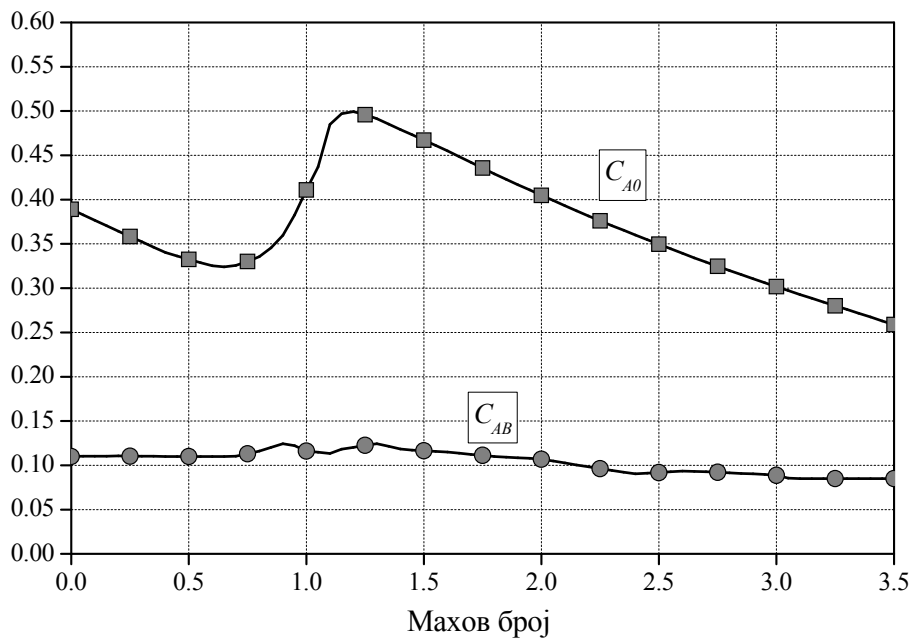
Основне инерцијалне и габаритне карактеристике ракете дате су у табели А.1, док су на слици А.1 дате промене потиска и масе за време рада ракетног мотора.

На сликама А.2 – А.6 дате су вредности аеродинамичких дериватива ракете Оркан у функцији Маховог броја, које су коришћене у симулацијама математичког модела са 6 степени слободе. Ознаке аеродинамичких дериватива одговарају оним датим у глави 4, једначине (4.44) – (4.60).

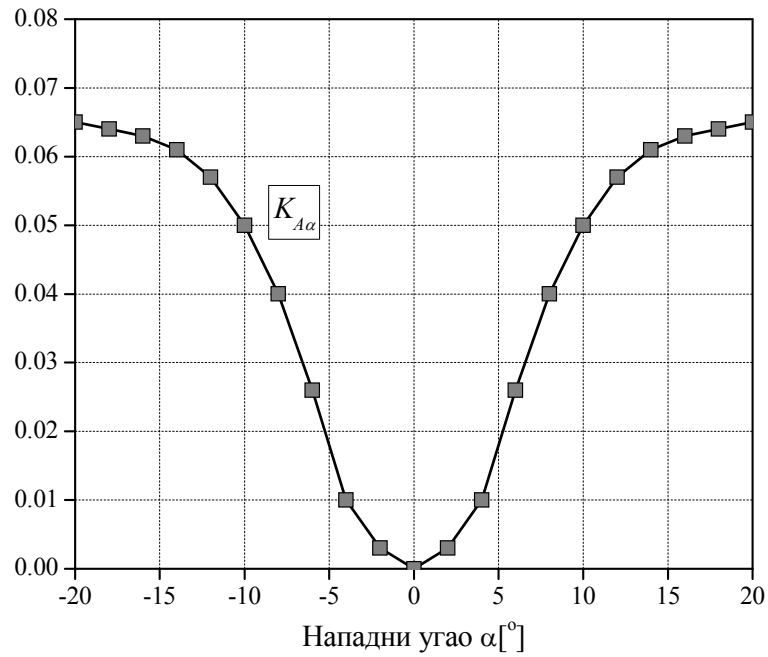
На слици А.2 приказани су деривативи силе аеродинамичког отпора. Обзиром да се, услед импулсног управљања, могу јавити и велике вредности нападног угла, зависност силе аеродинамичког отпора од нападног угла је дата у нелинеарном облику, па је, уместо компоненте  $C_{A\alpha^2}(M)\alpha^2$  у једначини (4.44) и (4.45) у симулацији математичког модела коришћен израз  $K_{A\alpha}(\alpha)C_{A0}(M)$ , где су вредности коефицијента  $K_{A\alpha}$  дате на слици А.3.



Слика А.1. Промена масе и потиска током рада ракетног мотора.

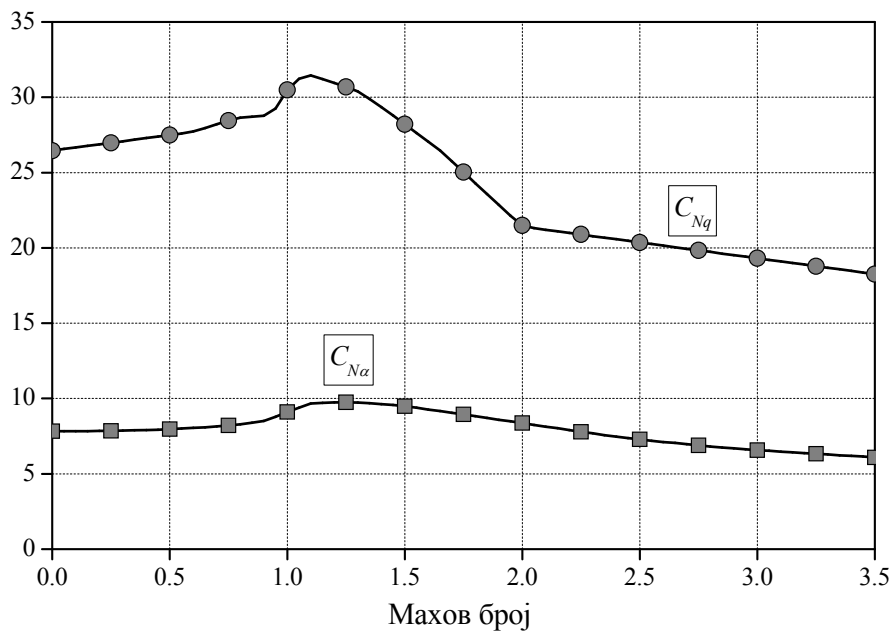


Слика А.2. Деривативи силе аеродинамичког отпора.

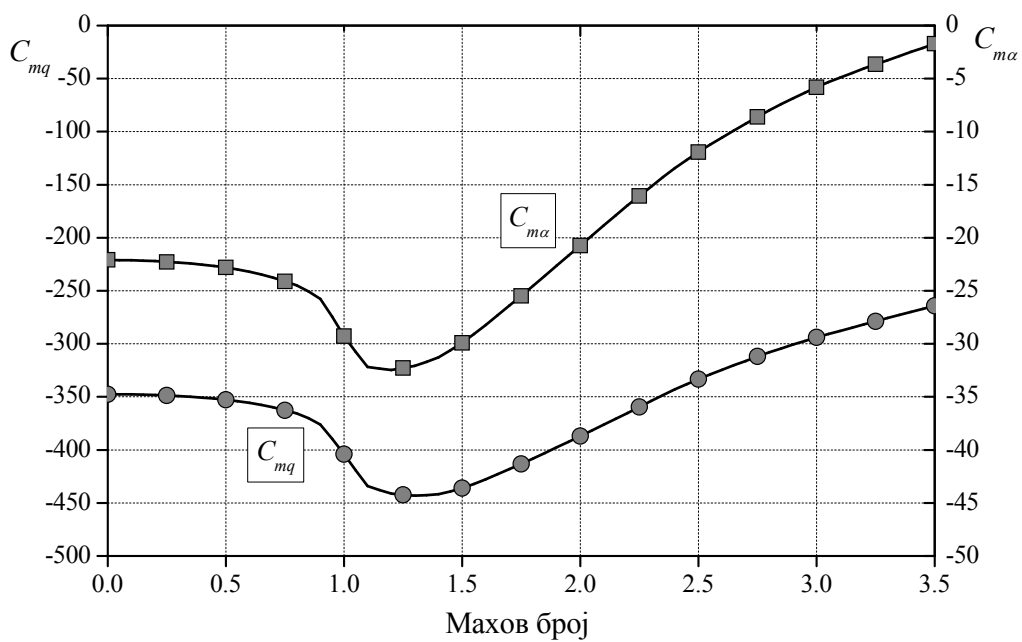


Слика А.3. Прираст силе аеродинамичког отпора услед нападног угла ракете.

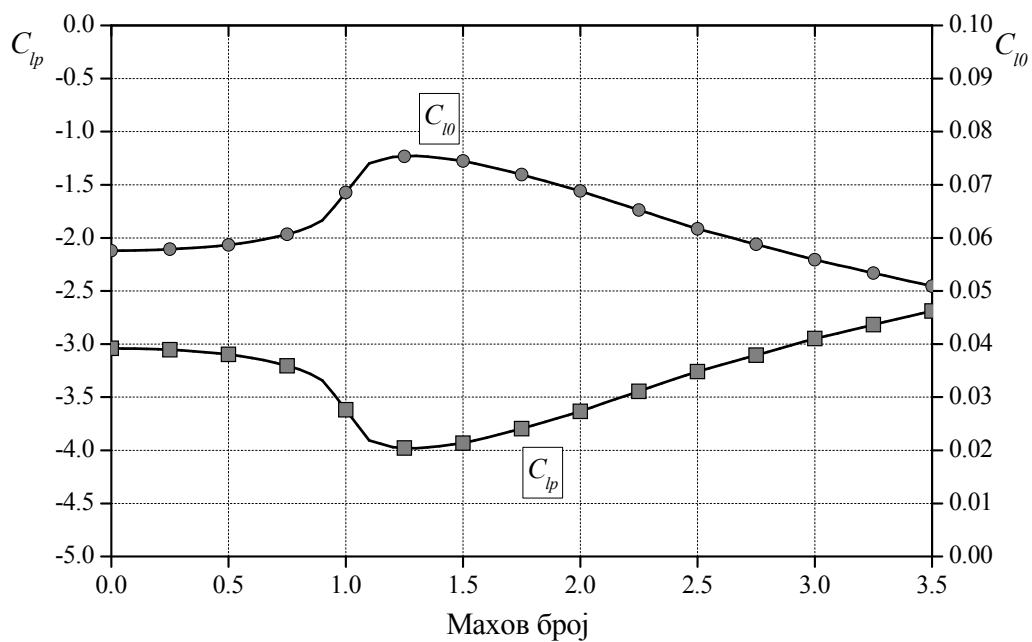
На сликама А.4 – А.6 приказане су вредности дериватива аеродинамичке силе узгона, момента пропињања и момента ваљања.



Слика А.4. Деривативи аеродинамичке силе узгона.



Слика А.5. Деривативи аеродинамичког момента пропињања.



Слика А.6. Деривативи аеродинамичког момента ваљања.

## ПРИЛОГ В.

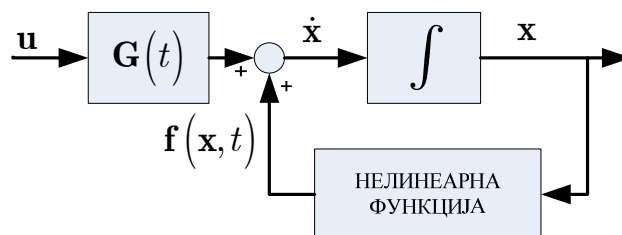
### СТАТИСТИЧКА АНАЛИЗА КОРИШЋЕЊЕМ МОНТЕ КАРЛО ТЕХНИКЕ

Монте Карло метод за статистичку анализу перформанси нелинеарних система са случајним улазима детаљно су описали Taylor и Price [31]. Услед великог значаја те технике као методе за анализу перформанси система вођења артиљеријских ракета, у овом додатку су дате неке основе Монте Карло методе.

Монте Карло метод се заснива на директним симулацијама у циљу добијања одзива система на типичне почетне услове и поремећаје, генерисане у складу са њиховим, специфицираним, статистикама. Према томе, информације неопходне за ову врсту анализе су математички модел система, статистике почетних услова и статистике случајних поремећаја. Математички модел система може бити приказан у облику диференцијалне једначине вектора стања:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t), \quad (\text{В.1})$$

Где је  $\mathbf{x}$  величина стања, функција  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  представља линеарне и нелинеарне динамичке релације у систему,  $\mathbf{u}$  је вектор улаза, а матрица  $\mathbf{G}$  је матрица улаза, тј. сваки елемент те матрице  $g_{ij}$  представља утицај улазне величине  $u_j(t)$  на дериватив величине стања  $\dot{x}_i$ . Диференцијална векторска једначина стања (В.1) приказана је у облику блок дијаграма на слици В.1.



Слика В.1. Блок дијаграм нелинеарног динамичког система.

Почетни услови вектора стања су одређени под претпоставком да све величине стања имају нормалну расподелу, са датим вредностима математичких очекивања садржаним у вектору математичког очекивања  $\mathbf{m}_0$  и са матрицом коваријанси  $\mathbf{P}_0$ :

$$E[\mathbf{x}(0)] = \mathbf{m}_0 \quad (\text{В.2})$$

$$E\left[\left(\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0\right)\left(\mathbf{x}(0) - \mathbf{m}_0\right)^T\right] = \mathbf{P}_0 \quad (\text{B.3})$$

За вектор улаза  $\mathbf{u}$  се претпоставља да је састављен од елемената који су међусобно независни Гаусовски бели шум око неке задате вредности  $\mathbf{b}(t)$ , тј:

$$E\left[\mathbf{u}(t)\right] = \mathbf{b}(t) \quad (\text{B.4})$$

$$E\left[\left(\mathbf{u}(t) - \mathbf{b}(t)\right)\left(\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{b}(\tau)\right)^T\right] = \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau), \quad (\text{B.5})$$

где је  $\mathbf{Q}(t)$  матрица густине спектра улазне величине (која је дијагонална, услед међусобне независности). Импулсна функција  $\delta(t - \tau)$  указује да стохастичке компоненте вектора улаза имају нулту аутокорељацију за  $t \neq \tau$ , тј. величина  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{b}(t)$  је бели шум.

Анализа методом Монте Карло захтева велики број,  $q$ , репрезентативних симулација одзива система. Према томе,  $q$  пута се понавља следећа процедура: прво, одреди се вектор почетних услова на основу датих статистика, тј. генерише се вектор случајних величина  $\mathbf{x}(0)$  на основу једначина (B.2) и (B.3). Затим се одреди случајни вектор шума на основу једначина (B.4) и (B.5). Занемарујући компоненту  $\mathbf{b}(t)$ , генерише се широкопојасни Гаусовски шум  $u_i(t)$  густине спектра  $q_i$ . За то се користи генератор случајних бројева, како би се добила независна секвенца случајних бројева  $u_{i,k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , који задовољавају:

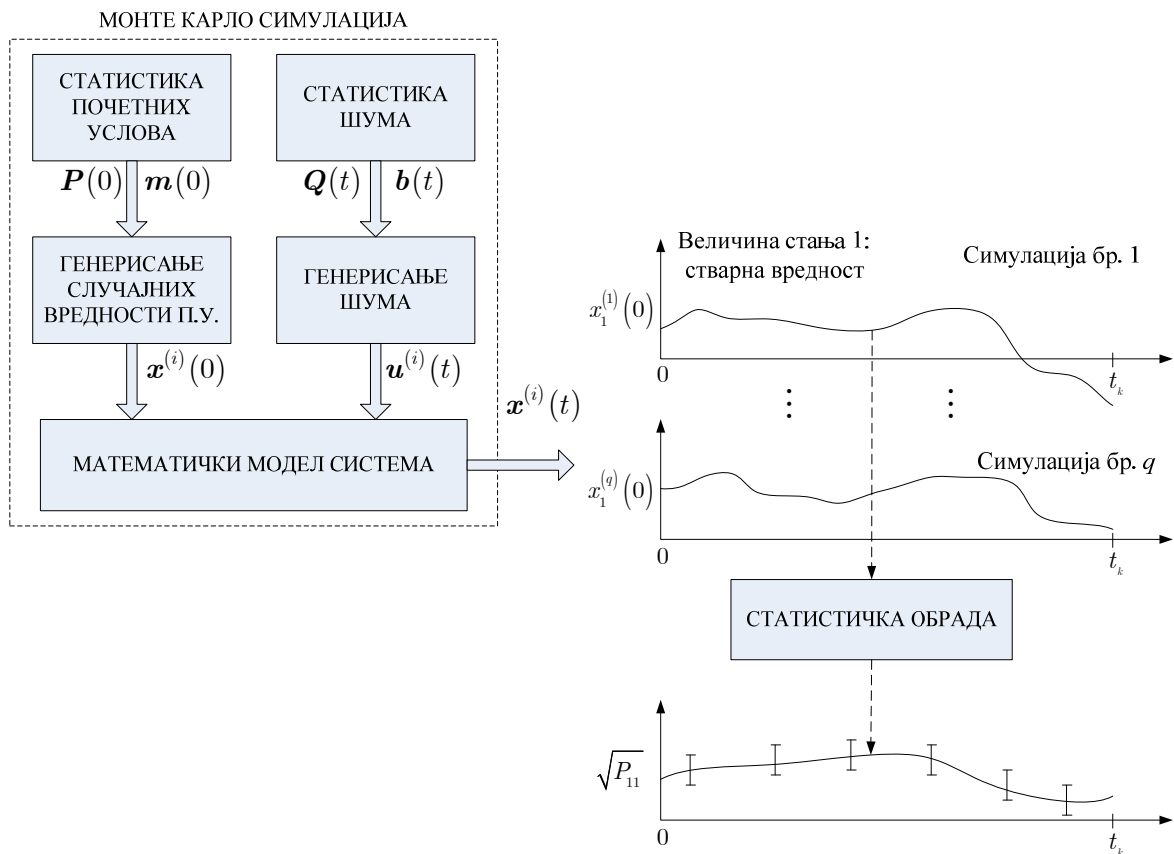
$$E\left[u_{i,k}\right] = 0; \quad E\left[u_{i,k}^2\right] = q_i/\Delta t \quad (\text{B.6})$$

Онда се дефинише  $u_i(t) = u_{i,k}$ ,  $k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t$ , где је  $\Delta t$  мали временски корак интеграције. Уколико је  $\Delta t$  довољно мало ( $1/\Delta t$  знатно веће од пропусног опсега посматраног система), онда је величина  $u_i(t)$  Гаусовски бели шум.

Вектори  $\mathbf{x}(0)$  и  $\mathbf{u}(0)$ , одређени на описани начин, обезбеђују довољно података за одређивање  $\dot{\mathbf{x}}(0)$  у једначини (B.1), која се даље користи за интеграцију решења од  $t = 0$  до  $t = \Delta t$ , примењујући било коју од стандардних метода за нумеричку интеграцију диференцијалних векторских једначина стања. Након тога се, за одређено  $\mathbf{x}(\Delta t)$ , наставља симулација генерисањем нових вредности вектора поремећаја  $\mathbf{u}(\Delta t)$ , одређивањем  $\dot{\mathbf{x}}(\Delta t)$  и нумеричком интеграцијом система да би се добило  $\mathbf{x}(2\Delta t)$ . Поступак се понавља све док се не постигне крајње време  $t_f$ .

Извођењем  $q$  независних симулација добија се скуп трајекторија стања, означених са  $\mathbf{x}^{(i)}(t, \mathbf{x}^{(i)}(0), \mathbf{u}^{(i)}(t))$ , како би се показала зависност трајекторија од случајних почетних вредности величина стања и шума као улазне величине:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}^{(1)}(t, \mathbf{x}^{(1)}(0), \mathbf{u}^{(1)}(t)) \\ \mathbf{x}^{(2)}(t, \mathbf{x}^{(2)}(0), \mathbf{u}^{(2)}(t)) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(q)}(t, \mathbf{x}^{(q)}(0), \mathbf{u}^{(q)}(t)) \end{array} \right\}; 0 \leq t \leq t_f \quad (\text{B.7})$$



Слика В.2. Шематски приказ Монте Карло технике.

Свака од трајекторија задовољава почетну векторску диференцијалну једначину стања (В.1) до граница тачности примењене нумеричке методе за интеграцију. Вредности математичког очекивања  $\mathbf{m}(t)$  и коваријансе  $\mathbf{P}(t)$  вектора стања у произвољном тренутку времена се оцењују усредњавањем на скупу добијених трајекторија, користећи следеће релације:



$$\hat{\mathbf{m}}(t) \triangleq \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q \mathbf{x}^{(i)}(t) \cong \mathbf{m}(t), \quad (\text{B.8})$$

$$\hat{\mathbf{P}}(t) \triangleq \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^q \left( \mathbf{x}^{(i)}(t) - \hat{\mathbf{m}}(t) \right) \left( \mathbf{x}^{(i)}(t) - \hat{\mathbf{m}}(t) \right)^T \cong \mathbf{P}(t), \quad (\text{B.9})$$

где  $\hat{\mathbf{m}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{P}}(t)$  означавају оцењене вредности.

Да би се проценила тачност приближних статистика датих једначинама (B.8) и (B.9), неопходно је размотрити статистичке особине оцена  $\hat{\mathbf{m}}(t)$  и  $\hat{\mathbf{P}}(t)$ . Ради једноставности, посматраће се скаларна случајна променљива  $y$ , која може бити вредност једне од величина стања у једном временском тренутку. Нека су  $m$  и  $p$  стварне вредности математичког очекивања и варијансе променљиве  $y$ :  $m = E[y]$ ,  $p = E[(y - m)^2]$ . Извођењем једног скупа од  $q$  Монте Карло симулација, добијају се оцене тих статистика  $\hat{m}$  и  $\hat{p}$ , користећи једначине (B.8) и (B.9). Те оцене су такође случајне величине. Наиме, ако се, независно од првог, изврши још један скуп од  $q$  Монте Карло симулација, са истим статистикама почетних вредности и шумова, добиће се другачији скуп решења симулација са другачијим оценама математичког очекивања и варијанси. Уколико је број  $q$  довољно велик, применом теореме централног лимита се доказује претпоставка да су  $\hat{m}$  и  $\hat{p}$  Гаусовске и, самим тим, да су њихове дистрибуције у потпуности одређене следећим статистикама (асимптотски тачно за велико  $q$ ):

$$E[\hat{m}] = m, \quad (\text{B.10})$$

$$E[\hat{p}] = p, \quad (\text{B.11})$$

$$\sigma_m^2 \triangleq E[(\hat{m} - m)] = \frac{p}{q}, \quad (\text{B.12})$$

$$\sigma_p^2 \triangleq E[(\hat{p} - p)] = \frac{\mu_4 - p^2}{q}, \quad (\text{B.13})$$

где је  $\mu_4$  четврти централни момент

$$\mu_4 = E[(y - m)^4]. \quad (\text{B.14})$$

За велики број често коришћених функција расподеле густине вероватноће, четврти централни момент је у облику

$$\mu_4 = \lambda p^2, \quad (\text{B.15})$$

при чему су вредности  $\lambda$  дате у табели В.1.

Уводећи параметар  $\lambda$ , стандардне девијације из једначина (В.12) и (В.13) се могу представити као:

$$\sigma_{\hat{m}} = \sqrt{\frac{p}{q}} \quad (\text{В.16})$$

$$\sigma_{\hat{p}} = p \sqrt{\frac{\lambda - 1}{q}} \quad (\text{В.17})$$

Табела В.1

НАЗИВ	ФУНКЦИЈА ОПИСА	ГРАФИЧКИ ПРИКАЗ	$\lambda$
Експоненцијална	$\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} x-m },$ $-\infty < x < \infty$		6
Нормална	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2},$ $-\infty < x < \infty$		3
Троугаона	$\frac{1}{\sqrt{6}\sigma} \left(1 - \frac{ x-m }{\sqrt{6}\sigma}\right),$ $m - \sqrt{6}\sigma \leq x \leq m + \sqrt{6}\sigma$		2.4
Униформна	$\frac{1}{\sqrt{12}\sigma},$ $m - \sqrt{3}\sigma \leq x \leq m + \sqrt{3}\sigma$		1.8
Биполарна (дискретна)	$\frac{1}{2} \delta(x - m - \sigma)$ $\frac{1}{2} \delta(x - m + \sigma)$		1.0

Претходно разматрање статистика Гаусовске случајне променљиве  $\hat{p}$  пружа основ за одређивање опсега у близини  $\hat{p}$ , тако да стварна вредност  $p$  лежи унутар тог опсега са вероватноћом  $\psi$ . Уводећи коефицијент  $n_\sigma$  стандардних девијација  $\sigma_{\hat{p}}$ , имамо:

$$\text{Prob}\left[0 \leq |p - \hat{p}| \leq n_\sigma \sigma_{\hat{p}}\right] = \psi \quad (\text{В.18})$$

Како је  $\hat{p}$  Гаусовска случајна променљива,  $n_\sigma$  је решење једначине:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n_\sigma}^{n_\sigma} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta = \psi \quad (\text{B.19})$$

Неке репрезентативне вредности кумулативне вероватноће математичког очекивања Гаусовске случајне променљиве унутар  $n_\sigma$  њених стандардних девијација су дате у следећој табели:

Табела В.2.

$n_\sigma$	$\psi$
1	0.6827
1.96	0.95
2.576	0.99

Заменом израза (В.17) у (В.18) добија се неједнакост по  $p$ :

$$\text{Prob} \left[ \underline{p} \triangleq \frac{\hat{p}}{1 + n_\sigma \sqrt{\frac{\lambda - 1}{q}}} \leq p \leq \frac{\hat{p}}{1 - n_\sigma \sqrt{\frac{\lambda - 1}{q}}} \triangleq \bar{p} \right] = \psi \quad (\text{B.20})$$

тј, стварна вредност  $p$  лежи између  $\underline{p}$  и  $\bar{p}$ , дефинисаних у (В.20) са вероватноћом  $\psi$ . Једначина (В.20) се може представити на други начин, у односу на оцену стандардне девијације  $\sigma$  случајне променљиве  $y$ :

$$\text{Prob}[\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}] = \psi \quad (\text{B.21})$$

где је  $\sigma = \sqrt{p}$  стварна вредност стандардне девијације, и:

$$\underline{\sigma} \triangleq \sqrt{\underline{p}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{1 + n_\sigma \sqrt{\frac{\lambda - 1}{q}}}} \triangleq \underline{\rho} \hat{\sigma} \quad (\text{B.22})$$

$$\hat{\sigma} \triangleq \sqrt{\hat{p}} \quad (\text{B.23})$$

$$\bar{\sigma} \triangleq \sqrt{\bar{p}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{1 - n_\sigma \sqrt{\frac{\lambda - 1}{q}}}} \triangleq \bar{\rho} \hat{\sigma} \quad (\text{B.24})$$

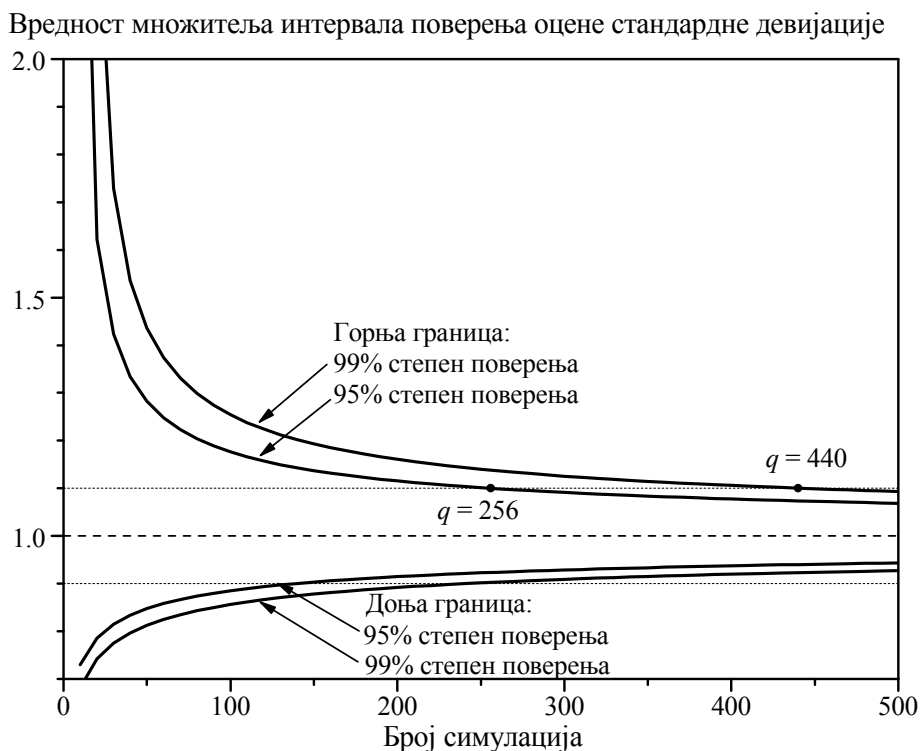
Величине  $\underline{\sigma}$  и  $\bar{\sigma}$  се називају доња и горња граница поверења; вредност  $\psi$  изражена у процентима ( $100\psi$ ) је степен поверења. Претходне једначине показују

да се границе поверења стандардне девијације могу добити из њене оцене  $\hat{\sigma}$  преко коефицијената  $\underline{\rho}$  и  $\bar{\rho}$ , који су функције параметра  $\lambda$ , броја Монте Карло симулација  $q$  и броја стандардних девијација  $n_\sigma$ , одређеног жељеним степеном поверења.

Да би се могли израчунати коефицијенти границе поверења, потребно је да се изврши правилан избор параметра  $\lambda$ , који зависи од статистике случајне променљиве  $y$ . Један начин је да се одреди приближна вредност  $\lambda$  помоћу оцене четвртог централног момента, користећи  $q$  одабирака случајне величине  $y$ , израчунавајући:

$$\lambda \simeq \hat{\mu}_4 / \hat{\sigma}^2 \triangleq \hat{\lambda} \quad (\text{B.25})$$

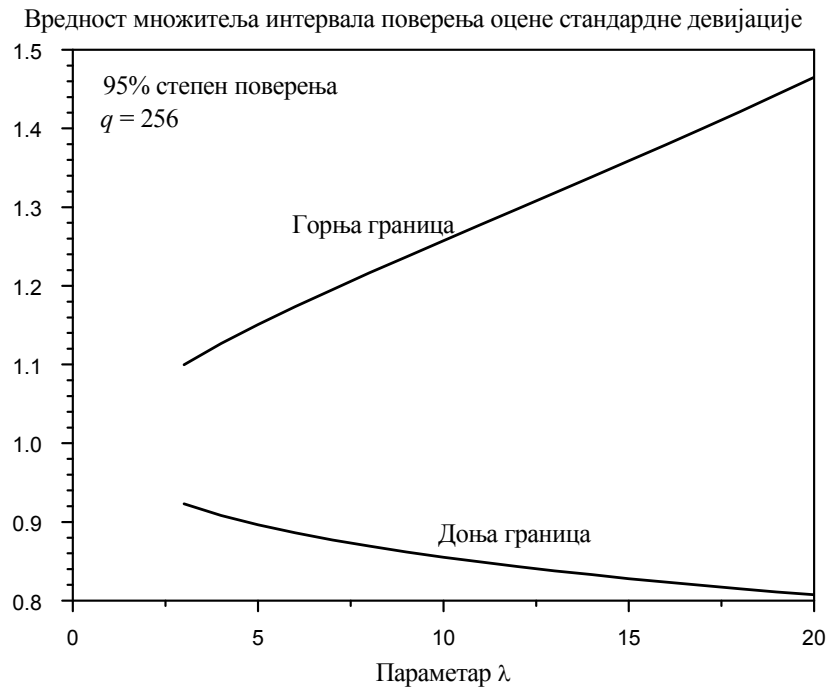
Није неопходно тачно познавати вредност  $\lambda$  јер вредности граница поверења  $\underline{\sigma}$  и  $\bar{\sigma}$  нису претерано осетљиве на грешку тог параметра. У одсуству поузданих информација о вредностима виших централних момената, често се подразумева да је случајна променљива  $y$  Гаусовска, тј  $\lambda = 3$ .



Слика В.3. Зависност граница интервала поверења од броја симулација.

Типичне вредности коефицијената  $\underline{\rho}$  и  $\bar{\rho}$  за  $\lambda = 3$  су приказане на слици В.3 као функције броја Монте Карло симулација за две различите вредности степена поверења. Ако, на пример, желимо да имамо 99% сигурност да је  $\sigma$  у границама

од 10% од оцене њене вредности  $\hat{\sigma}$ , тј  $\text{Prob}[0.9\hat{\sigma} \leq \sigma \leq 1.1\hat{\sigma}] = 0.99$ , онда са слике В.3 видимо да је потребно да се изврши 440 симулација. За 95% сигурности довољно је 256 симулација.



Слика В.4. Зависност граница интервала поверења од параметра  $\lambda = \mu_4/p^2$ .

Слика В.4 приказује опадање тачности оцене стандардне девијације добијене Монте Карло методом за дати степен поверења у зависности од повећања параметра  $\lambda$  услед тога што  $y$  није Гаусовска. За  $\lambda = 20$  горња 95% граница поверења, којој одговара 256 симулација је 50% већа од оцењене вредности  $\sigma$ .

## **ПРИЛОГ С.**

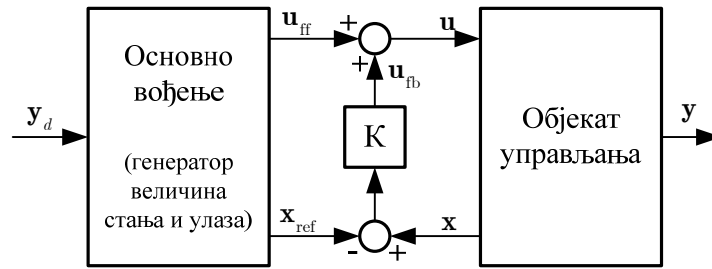
### **ПРИНУДНО ВОЂЕЊЕ УСЛЕД ОГРАНИЧЕЊА ВЕЛИЧИНА СТАЊА И УЛАЗА**

Принудно вођење услед ограничења величина стања и улаза детаљно су описали Devasia и Meyer [24]. Услед великог значаја те методе за формирање методе корекције референтне трајекторије, која је саставни део ПФМ вођења артиљеријских ракета, у овом прилогу су дате неке основе методе принудног вођења.

#### **Опис проблема**

Многе управљачке шеме се заснивају на праћењу излазне величине, као што је и метода праћења задате трајекторије. Код тих метода вођења, релативно велике грешке праћења (или велики спољни поремећаји који могу бити моделовани као грешке праћења) могу да доведу до засићења улаза, и до нарушавања ограничења величина стања. Та нарушавања ограничења могу да доведу до губитка контроле и престанка праћења излазне величине. Овде се третира питање модификовања закона вођења – принудно вођење, да би се повратило праћење излаза (од великих грешака праћења), без нарушавања ограничења величина улаза и стања. Проблематика принудног вођења односи се на линеарне системе.

Разматрана управљачка шема (слика С.1) се састоји од директне и повратне гране. Један приступ пројектовању таквог комбинованог контролера је да се референтна трајекторија одређује од стране контролера главне гране, а улога повратне гране је да генерише управљање тако да се ракета води по тој трајекторији. Значајан проблем са оваквим приступом је да релативно велике вредности почетне грешке праћења могу да доведу до нарушавања ограничења актуатора (управљачког система) и других величина стања, што може да резултира смањењем перформанси система вођења. Овај проблем постаје посебно значајан уколико се користе високе вредности појачања у повратној грани регулатора, како би се остварило строжије праћење путање. Са високим појачањем, регулатор повратне гране може да ефикасно ради само у ограниченом спектру величина грешака праћења, док велике грешке праћења могу да изазову ефекте засићења, што доводи до погоршања перформанси. Узрок за такве велике грешке може бити и велики спољни поремећај моделован као грешка праћења.



Слика С.1. Основна управљачка шема.

### Основна шема вођења

Нека је систем описан следећом једначином

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Где је  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  вектор стања,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^q$  вектор улаза и  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$  вектор излаза. Поред тога, нека је повратна веза по стању  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}(t)$  дата тако да је затворено коло система стабилно, односно, матрица  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}$  је Хурвицова. У наредном разматрању, матрица повратне везе  $\mathbf{K}$  ће се узети да је константна.

С обзиром на жељену трајекторију излаза  $\mathbf{y}_d(\cdot)$ , основна шема вођења (слика С.1) даје референтну трајекторију улаза и стања  $[\mathbf{u}_{\text{ff}}(\cdot), \mathbf{x}_{\text{ref}}(\cdot)]$ , која задовољава једначину система (С.1) и тачно остварује задати вектор излаза:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_{\text{ref}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_{\text{ref}}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_{\text{ff}}(t) \\ \mathbf{y}_d(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}_{\text{ref}}(t) \end{aligned} \right\} \forall t \in (-\infty, \infty) \quad (\text{C.2})$$

Даље, трајекторија вектора стања  $\mathbf{x}_{\text{ref}}(\cdot)$ , која производи тачан вектор излаза, је стабилисана помоћу повратне везе по стању. Закон управљања је:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{\text{ff}}(t) + \mathbf{K}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{ref}}(t)] \quad (\text{C.3})$$

Са овим законом управљања, динамика праћења грешке

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{ref}}(t) \quad (\text{C.4})$$

се добија из једначина (С.1) и (С.2) као

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{e}(t) \quad (\text{C.5})$$

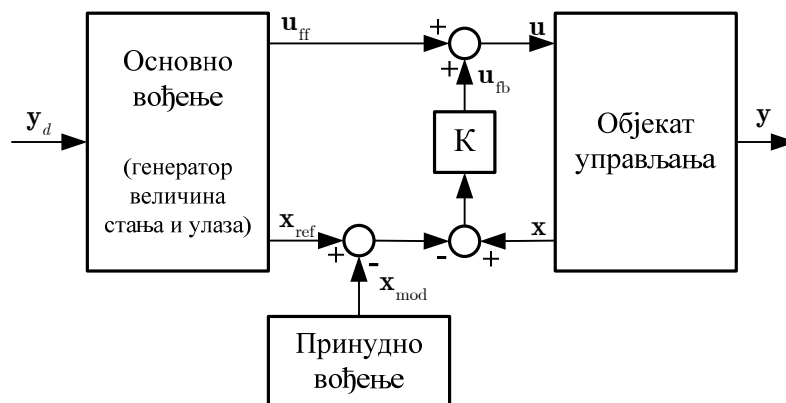
Пошто је матрица  $\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}$  Хурвицова,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_{\text{ref}}(t)$  и  $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{y}_{\text{ref}}(t)$  када  $t \rightarrow \infty$  и, према томе, праћење излаза је постигнуто. Можемо да приметимо да се

у овој шеми праћења излазне величине, референтна трајекторија стања  $\mathbf{x}_{\text{ref}}(\cdot)$  и улаз у повратну спрегу  $\mathbf{u}_{\text{ff}}(\cdot)$  могу унапред одредити. Типично је а се жељена излазна трајекторија састоји од комбинације неколико унапред одређених путања, а основна шема вођења може да спаја неколико унапред одређених закона вођења. Ови основни закони вођења могу да се одреде преко инверзије динамике објекта .

Критичан проблем са претходном шемом вођења је да велике грешке између референтне и стварне трајекторије стања на почетку управљања могу да доведу до засићења актуатора и да, на тај начин, знатно погоршају перформансе система. При томе треба имати на уму да је проблем засићења улаза посебно наглашен у случају релативно високих појачања регулатора  $K$ , које могу бити неопходне за постизање високих перформанси за релативно мале грешке праћења. Циљ маневара за принудно вођење је да измени основни закон вођења (референтна трајекторија стања), тако да величине стања могу да се доведу у близину референтне трајекторије стања, односно, да се поврати праћење излаза, без засићења актуатора и у оквиру ограничења других величина стања. Принудно вођење услед великих спољних поремећаја може се, такође, проучавати на основу овог оквира, под условом да су поремећаји моделовани као почетна вредност грешке праћења, која изазива генератор принудног вођења.

### Шема принудног вођења

Шема принудног вођења има за циљ да управља системом у оквиру ограничења величина стања и улаза. Примењен је приступ да се промени референтне трајекторија стања, да би се избегло нарушавање њихових ограничења (слика С.2). Ова модификација,  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$ , је, у суштини, отворено коло; претпоставља се, међутим, да генератор трајекторије принудног вођења има информацију о почетној величини грешке праћења (у тренутку када се иницира принудно вођење).



Слика С.2. Основна управљачка шема.



Уз модификовану трајекторију стања, закон управљања дат једначином (C.3) постаје (слика C.2):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_{\text{ff}}(t) + \mathbf{u}_{\text{fb}}(t) \\ &= \mathbf{u}_{\text{ff}}(t) + \mathbf{K}[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{\text{ref}}(t)] + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) \\ &= \mathbf{u}_{\text{ff}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t)\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

где је

$$\mathbf{u}_{\text{fb}}(t) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) \quad (\text{C.7})$$

и једначина грешке (C.5) постаје:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})\mathbf{e}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) \quad (\text{C.8})$$

### Генерисање принудног управљања коришћењем конвексности

Основна идеја овог приступа је да се унапред израчунају измене референтних трајекторија за скуп почетних услова (из скупа  $X$ ), а затим користите те унапред израчунате модификације за друге почетне услове. Ово је сажето у следећем ставу који користи принцип конвексности, као што су га дефинисали Мауне и Schroeder [32]. Став тврди да ће, ако је за скуп почетних услова  $X$  познато задовољавајуће принудно вођење, онда се задовољавајуће принудно управљање може добити за било које почетно стање у конвексној околини скупа  $X$ , под условом да важи следећа претпоставка:

*Претпоставка 1:* Област прихватљивих вредности величина стања у  $\mathfrak{R}^n$  и област прихватљивих вредности величина улаза у  $\mathfrak{R}^q$  су конвексне области које садрже координатни почетак.

*Став 1:* За свако почетно стање  $\mathbf{x}^m(0) \in X$  нека је  $\mathbf{x}_{\text{mod}}^m(\cdot)$  модификација трајекторије која омогућава принудно вођење које задовољава ограничења величина стања и улаза. Нека је  $\mathbf{x}(0)$  почетно стање из конвексне околине скупа  $X$  и  $\lambda_{\mathbf{x}(0)} \in \Lambda_p$  за неки природан број  $p$ , где је:

$$\Lambda_p = \left\{ \lambda \in \mathfrak{R}^p \mid \lambda_m \geq 0 \forall_m \in (1, 2, \dots, p); \sum_{m=1}^p \lambda_m = 1 \right\}, \quad (\text{C.9})$$

где доњи индекси указују на компоненте вектора, тако да је:

$$\mathbf{x}(0) = \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0), m]} \mathbf{x}^m(0), \quad (\text{C.10})$$

где горњи индекси означавају елементе низа. У том случају, модификација трајекторије:

$$\mathbf{x}_{\text{mod}}(t) = \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{x}_{\text{mod}}^m(t) \quad (\text{C.11})$$

је валидан принудни закон вођења, тј. ограничења величина стања и улаза су задовољна.

*Доказ:* Динамика грешке, једначина (C.8) је линеарна по почетном стању  $\mathbf{e}(0)$  и улазу  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$ . Како су  $\mathbf{e}(0)$  и  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$  линеарне комбинације од  $\mathbf{e}^m(0)$  и  $\mathbf{x}_{\text{mod}}^m(\cdot)$  са истим тежинским коефицијентима за сваки  $m \in (1, 2, \dots, p)$ , линеарност динамике грешке даје:

$$\mathbf{e}(t) = \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{e}^m(t) \quad (\text{C.12})$$

где је  $\mathbf{e}^m(\cdot)$  решење динамичке једначине грешке које одговара модификацији трајекторије  $\mathbf{x}_{\text{mod}}^m(\cdot)$  и почетном услову  $\mathbf{e}^m(0)$ .

Нека је  $\mathbf{x}^m(\cdot)$  решење модификоване једначине стање са почетним условом  $\mathbf{x}^m(0)$  и модификацијом услед вођења  $\mathbf{x}_{\text{mod}}^m(\cdot)$ . Онда, из дефиниције грешке имамо:

$$\mathbf{x}^m(\cdot) = \mathbf{x}_{\text{ref}}(\cdot) + \mathbf{e}^m(\cdot) \quad (\text{C.13})$$

Ова једначина и услов

$$\sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} = 1 \quad (\text{C.14})$$

који следи из дефиниције  $\Lambda_p$  у претпоставци 1, имплицирају да:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_{\text{ref}}(t) + \mathbf{e}(t) \\ &= \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{x}_{\text{ref}}(t) + \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{e}^m(t) \\ &= \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{x}^m(t) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

На овај начин, конвексна околина  $\mathbf{x}^m(t)$  формира цилиндричну структуру са променом времена; претпоставка 1 повлачи да је тај цилиндар у прихватљивој

области простора стања и да је, самим тим, стање  $\mathbf{x}(\cdot)$ , које се налази унутар цилиндра, такође прихватљиво.

Слично томе, линеарност модификоване величине улаза по  $\mathbf{e}(\cdot)$  и  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$ , једначина (С.6), даје:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_{\text{ff}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) \\ &= \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{u}_{\text{ff}}(t) + \mathbf{K} \cdot \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{e}^m(t) + \mathbf{K} \cdot \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{x}_{\text{mod}}^m(t) \quad (\text{C.16}) \\ &= \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{x}(0),m]} \mathbf{u}^m(t)\end{aligned}$$

где је  $\mathbf{u}^m(\cdot)$  модификована величина улаза за почетно стање  $\mathbf{x}^m(0)$ . На тај начин конвексна околина  $\mathbf{u}^m(t)$  такође формира цилиндричну структуру са променом времена. Претпоставка 1 повлачи да је тај цилиндар у конвексној прихватљивој области простора улаза, па је самим тим, и  $\mathbf{u}(\cdot)$ , који се налази у том цилиндру, такође прихватљив.

*Напомена 1:* Став 1 важи и за нестационарне системе.

### Раздвајање принудног од основног вођења

У описаном приступу, модификација вођења  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$  у принципу зависи од одређеног маневра који се разматра. На тај начин, за различите маневре, добијене вредности  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$  могу да се разликују чак и у случају да је почетна грешка праћења  $\mathbf{e}^m(0)$  непромењена. У даљем разматрању је предложен метод који уклања зависност модификације вођења  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$  од маневара основног вођења  $[\mathbf{u}_{\text{ff}}(\cdot), \mathbf{x}_{\text{ref}}(\cdot)]$ . На тај начин се остварује смањење меморије за складиштење модификација вођења, уз прихватање малог смањења перформанси.

Граничне вредности величина улаза могу да се разложе на посебне граничне вредности директне и повратне гране, користећи троугаону неједнакост:

$$\begin{aligned}\left|u_i(t)\right| &\leq \left|u_{(\text{ff},i)}(t)\right| + \left|K\left(e_i(t) + x_{(\text{mod},i)}(t)\right)\right| \\ &= \left|u_{(\text{ff},i)}(t)\right| + \left|u_{(\text{fb},i)}(t)\right|\end{aligned}\quad \left. \vphantom{\left|u_i(t)\right|} \right\} \forall i \in (1, 2, \dots, q) \quad (\text{C.17})$$

Основно вођење може да се одреди тако да се обезбеди да компоненте величина улаза директне гране,  $\left|u_{(\text{ff},i)}(t)\right|$ , буду у оквиру задатих граница. Са друге стране, принудно вођење може да се дефинише тако да компоненте величина улаза

повратне гране  $\left| u_{(\text{fb},i)}(t) \right|$  буду ограничене. Оваква расподела управљања омогућава да граничне вредности величина улаза повратне спреге  $\mathbf{u}_{\text{fb}}$  буду независне од улаза директне гране  $\mathbf{u}_{\text{ff}}$ . На тај начин, само улазне величине главне гране услед основног вођења зависе од конкретног управљања.

Слично томе, граничне вредности компонената вектора стања могу да се раставе на граничне вредности компонената грешке  $\left| e_i(t) \right|$  и граничне вредности компонената референтне трајекторије стања  $\left| x_{(\text{ref},i)}(t) \right|$ , које зависе од примењеног управљања.

$$\begin{aligned} \left| x_i(t) \right| &\leq \left| x_{(\text{ref},i)}(t) \right| + \left| x_i(t) + x_{(\text{ref},i)}(t) \right| \\ &= \left| x_{(\text{ref},i)}(t) \right| + \left| e_i(t) \right| \end{aligned} \quad \forall i \in (1, 2, \dots, n) \quad (\text{C.18})$$

Основно вођење може, поново, да буде дефинисано тако да је  $\left| x_{(\text{ref},i)}(t) \right|$  у оквиру граничних вредности, док се принудно вођење одређује тако да се ограничава вредност  $\left| e_i(t) \right|$ . Овако растављање је формализовано од следећим ставом.

*Претпоставка 2:* Област прихватљивих вредности грешке у  $\mathfrak{R}^n$  и област прихватљивих вредности величина улаза повратне везе у  $\mathfrak{R}^q$  су конвексне области које садрже координатни почетак.

*Став 2:* За све почетне вредности грешке  $\mathbf{e}^m(0) \in E$ , нека је  $\mathbf{x}_{\text{mod}}^m(\cdot)$  модификација трајекторије услед принудног вођења, које задовољава ограничења вредности грешке и улазне величине повратне везе. Онда, за дати почетни услов  $\mathbf{e}(0)$  у конвексној околини скупа  $E$  и за  $\lambda_{\mathbf{e}(0)} \in \Lambda_p$  за неко  $p$ , тако да:

$$\mathbf{e}(0) = \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{e}(0),m]} \mathbf{e}^m(0), \quad (\text{C.19})$$

модификација трајекторије:

$$\mathbf{x}_{\text{mod}}(t) = \sum_{m=1}^p \lambda_{[\mathbf{e}(0),m]} \mathbf{x}_{\text{mod}}^m(t) \quad (\text{C.20})$$

је валидан закон принудног вођења, односно, ограничења величина стања и улаза су задовољена.

*Доказ:* Ово следи из аргумената сличним онима за доказ става 1 и неједнакости (C.17) и (C.18).

Овај став имплицира да се одређивање модификације трајекторије  $\mathbf{x}_{\text{mod}}$  може да уради независно од одређеног основног закона вођења. Међутим, ово раздвајање принудног вођења од основног вођења резултује жртвовањем перформанси на рачун смањене употребе меморије.

### Одређивање принудног вођења за један почетни услов

За посебан почетни услов, одговарајуће принудно вођење се може наћи на различите начине. Циљ овог разматрања није да одреди принудно вођење за дате почетне услове, већ да се, коришћењем коначног скупа маневара принудног вођења како би се одредило принудно вођење за друге почетне услове. Да би се илустровао метод одређивања принудног вођења за произвољни почетни услов, почеће се од принудног вођења за специфичне почетне услове одређеног коришћењем методологије оптималног управљања. Потребно је извршити минимизацију индекса перформансе по свим улазима  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$  динамичке једначине грешке (C.8):

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \left\{ \mathbf{e}^T(t) \cdot \mathbf{Q}_e \cdot \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}_{\text{fb}}^T(t) \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_{\text{fb}}(t) + \mathbf{x}_{\text{mod}}^T(t) \cdot \mathbf{Q}_{\text{mod}} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \mathbf{x}_{\text{mod}}^T(t) (\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{Q}_{\text{mod}}) \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) \right. \\ &\quad \left. + 2\mathbf{e}^T(t) (\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) + \mathbf{e}^T(t) (\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{Q}_e) \mathbf{e}(t) \right\} dt \\ &= \int_0^\infty \left\{ \mathbf{x}_{\text{mod}}^T(t) \cdot \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) + 2\mathbf{e}^T(t) \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) + \mathbf{e}^T(t) \cdot \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{e}(t) \right\} dt \end{aligned} \quad , \quad (\text{C.21})$$

где је  $\mathbf{Q}_{\text{mod}}$  матрица тежинских фактора за модификацију  $\mathbf{x}_{\text{mod}}$  основног закона вођења,  $\mathbf{Q}_e$  је матрица тежинских фактора за грешку вођења  $\mathbf{e}$ , док је  $\mathbf{R}$  матрица тежинских фактора за величине улаза повратне спреге. Овај проблем оптимизације је стандардни проблем оптималног управљања за линеарни систем који сачињава модификована динамичка једначина грешке (C.8):

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{e}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}_{\text{mod}}(t) \quad (\text{C.22})$$

где је  $\mathbf{x}_{\text{mod}}$  величина улаза а  $\mathbf{e}$  величина стања. Оптимална модификација трајекторије се добија као:

$$\mathbf{x}_{\text{mod}}(t) = \hat{\mathbf{K}} \mathbf{e}(t), \quad (\text{C.23})$$

где је:

$$\hat{\mathbf{K}} = -\hat{\mathbf{R}}^{-1} \left[ (\mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^T \cdot \mathbf{P} + \hat{\mathbf{S}} \right], \quad (\text{C.24})$$

а  $\mathbf{P}$  је симетрично решење алгебарске Рикатијеве једначине:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) + (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^T \cdot \mathbf{P} - \\ & (\mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} + \hat{\mathbf{S}}) \cdot \hat{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \left( (\mathbf{B} \cdot \mathbf{K})^T \cdot \mathbf{P} + \hat{\mathbf{S}}^T \right) + \hat{\mathbf{Q}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

са матрицама  $\hat{\mathbf{S}}$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}$  и  $\hat{\mathbf{R}}$  дефинисаним у једначини (C.21).

Замењујући модификацију закона вођења у динамичку једначину грешке (C.8), и решавајући је, добија се модификација трајекторије отвореног кола која зависи само од почетне вредности грешке:

$$\mathbf{x}_{\text{mod}}(t) = \hat{\mathbf{K}} e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{K}})t} \mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{K}} e^{(\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}_e)t} \mathbf{e}(0) \quad (\text{C.26})$$

где је  $\mathbf{K}_e = \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{K}}$ . За сваку почетну вредност грешке  $\mathbf{e}(0)$ , тежински коефицијенти ( $\mathbf{Q}_e$ ,  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{Q}_{\text{mod}}$ ) који се користе приликом оптимизације индекса перформансе система могу бити различити. Међутим, само резултујућа матрица коефицијената  $\mathbf{K}_e$  из једначине (C.26) треба да се меморише за сваки од почетних услова.

Треба имати на уму да и други алгоритми могу да се искористе за добијање одговарајућих закона принудног вођења за унапред одређене почетне услове у  $E$ . Алтернативна приступи за одређивање модификације вођења  $\mathbf{x}_{\text{mod}}(\cdot)$  укључују следеће.

1) Тежински фактори  $\mathbf{Q}_e$ ,  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{Q}_{\text{mod}}$  у датом индексу перформансе могу бити нестационарни [33].

2) Проблем оптимизације може бити постављен у фреквентном домену, а тежински фактори могу да зависе од учестаности, како би се узело у обзир ограничење пропусног опсега актуатора [34].

3) Још један приступ подразумева да се у коначном времену постигне нулта вредност грешке праћења [33].

У даљем разматрању обрадиће се метод коришћења ових унапред одређених принудних закона вођења ради генерисања принудног вођења за друге почетне услове.

### Принудно вођење за почетну вредност грешке у конвексној околини скупа $E$

Нека је  $E$  скуп почетних вредности грешака за које су познате маневри принудног вођења. Свака почетна вредност грешке у конвексној околини скупа  $E$  онда може да буде написана као конвексна комбинација елемената  $E$ :

$$\mathbf{e}(0) = \sum_m \lambda_m \mathbf{e}^m(0) \quad (\text{C.27})$$

Где је  $\mathbf{e}^m(0) \in E$ . Оваква репрезентација почетне вредности грешке није јединствена. Међутим, свака репрезентација доводи до прихватљивог маневра принудног вођења (по ставу 2).

*Напомена 2:* Конкретан избор конвексне комбинације  $\mathbf{e}^m(0)$  може бити оптимизована коришћењем додатних критеријума, као што је, на пример, максимизирање степена конвергенције динамичке једначине грешке. При томе треба имати у виду да резултујућа динамика грешке  $\mathbf{e}(\cdot)$  конвергира исто или брже као најспорија  $\mathbf{e}^m(\cdot)$  која има бар један коефицијент у једначини (С.27) различит од нуле, што одређује доњу граничну вредност степена конвергенције. Самим тим, коефицијенти  $\lambda_m$  конвексне комбинације у једначини (С.27) могу бити одабрани тако да се максимизира доња граница степена конвергенције.

Овде се представља једна техника за одређивање закона принудног вођења помоћу на одговарајући начин дефинисаног скупа почетних вредности грешке  $E$ , за које је принудно вођење унапред израчунато. Техника је представљена у наредних четири корака.

- 1) Дефинише се конвексан скуп вредности грешке  $V_{\alpha,\beta}$ . Нека је скуп прихватљивих вредности грешке  $V_{\alpha,\beta}$  дефинисан горњом и доњом граничном вредношћу компонената вектора грешке, односно, нека су  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  и  $\beta \in \mathbb{R}^n$  такви да задовољавају:

$$\alpha_i < \beta_i, \quad \forall i \in (1, 2, \dots, n) \quad (\text{С.28})$$

и да је за сваку прихватљиву почетну вредност грешке  $\mathbf{e}(0) \in V_{\alpha,\beta}$  задовољен услов:

$$\alpha_i \leq e_i(0) \leq \beta_i, \quad \forall i \in (1, 2, \dots, n) \quad (\text{С.29})$$

- 2) Дефинише се скуп  $E$  за чије је елементе принудно вођење унапред одређено. Дефинишу се угаоне тачке скупа прихватљивих вредности грешке  $V_{\alpha,\beta}$  као скуп почетних вредности грешке  $E$ , за које су маневри принудног вођења унапред израчунати, односно:

$$E = \left\{ \mathbf{e} \mid e_i = \alpha_i \vee e_i = \beta_i, \quad \forall i \in (1, 2, \dots, n) \right\} \quad (\text{С.30})$$

Нека је  $\{\mathbf{e}^m\}_{m=1}^{m=2^n}$  нумерација скупа  $E$ . Сваки вектор  $\mathbf{e}^m$  треба да буде написан као  $\mathbf{e}^m(0)$ . Међутим зависност елемената од времена ( $t = 0$ ) није експлицитно наведена ради лакше нотације.

- 3) Одређивање тежинских фактора  $\lambda$  за произвољне почетне вредности

грешке из скупа  $V_{\alpha,\beta}$ . Тежински фактори за произвољне почетне вредности грешке се могу наћи помоћу једначина представљених у следећем ставу.

*Став 3:* Било која почетна вредност грешке  $\mathbf{e}(0) \in V_{\alpha,\beta}$  се може написати као:

$$\mathbf{e}(0) = \sum_{m=1}^{2^n} \lambda_m \mathbf{e}^m \quad (\text{C.31})$$

где је  $\lambda \in A_{2^n}$ , и

$$\lambda_m = \prod_{i=1}^n \gamma_i(e_i, e_i^m) \quad (\text{C.32})$$

уз

$$\gamma(e_i, e_i^m) = \begin{cases} \frac{\beta_i - e_i}{\beta_i - \alpha_i}, & \forall e_i^m = \alpha_i \\ \frac{e_i - \alpha_i}{\beta_i - \alpha_i}, & \forall e_i^m = \beta_i \end{cases} \quad (\text{C.33})$$

*Доказ:* Ово следи из уводног аргумента.

- 4) Користећи  $\lambda$  одређује се принудно вођење. У овом последњем кораку, тежински вектор  $\lambda$ , који се одређује помоћу једначине (C.32) и (C.33) се користи за генерисање принудног вођења, као што је приказано у ставу 2.

*Напомена 3:* Перформансе принудног вођења би се могле побољшати растављањем скупа почетних вредности грешака у мање скупове  $V_{\alpha^j, \beta^j}$ ,  $j \in (1, 2, \dots, J)$ , и одређивањем принудног вођења за сваки од тих скупова. Овакав поступак може довести до побољшања перформанси, али се у том случају повећава количина спремљених информација (за свако претходно израчунато принудно вођење за угаоне тачке сваког од мањих скупова).



## БИОГРАФИЈА

Бојан Павковић је рођен у Београду, 27.03.1974. године. Ожењен је и отац троје деце.

Похађао је основну школу "14. Октобар" на Лабудовом брду и Математичку гимназију у Београду. Студије на Машинском факултету у Београду је уписао 1992. године, а завршио 1998, на одсеку за аутоматско управљање, са просечном оценом у току студија 8.48. Дипломски рад са темом "Примена генералисаних инверзија у динамичкој анализи сингуларних система" је радио под менторством проф. др Драгутина Дебелковића и одбранио са оценом десет. Исте године уписао је постдипломске студије на Машинском факултету у Београду. Магистарски рад на тему "Синтеза вођења противоклопне ракете малог домета" је радио под менторством проф. др. Слободана Јарамаза, и одбранио га је 2007. године.

Бојан Павковић је запослен у Војнотехничком институту од 2000. године. у Ракетном сектору, Одељење за вођење и управљање, Лабораторија за серво системе. Учествовао је на бројним пројектима, радећи на развоју серво система и система за вођење, од којих је најзначајнији ПОРС Бумбар.

### Објављени радови

1. Б. Павковић, "One method of electromechanical actuator parameters identification", *Scientific Technical Review*, Vol. LIII, No. 1, 2003, YU ISSN 0350-0667, стр 46-52.
2. Б. Павковић, "Синтеза закона вођења и симулација лета у затвореној петљи противоклопне вођене ракете Бумбар", *Зборник радова 1. Научног скупа Одбрамбене технологије у функцији мира – ОТЕХ 2005*, Београд, 2005, стр IX-(9-14).
3. Б. Павковић, М. Миловановић, "Рекурзивни експандовани Калманов филтер у систему вођења и управљања противоклопне ракете", *Зборник радова 31. конгреса са међународним учешћем ХИПНЕФ 2008*, Врњачка Бања, 2008, стр 327-333.
4. М. Миловановић, М. Павић, Б. Павковић "NIL симулација у процесу дизајнирања система вођења и управљања ракете", *Зборник радова 31. конгреса са међународним учешћем ХИПНЕФ 2008*, Врњачка Бања, 2008, стр 405-410.
5. Б. Павковић, М. Павић "Анализа промашаја противоклопне ракете малог домета методом адјунгованог система", *Зборник радова 53. Конференције за ЕТРАН*, Врњачка Бања, 2009, АУ1.1 1-4.
6. М. Павић, Б. Павковић "Примена оптималног закона управљања на ласерски вођену бомбу", *Зборник радова 53. Конференције за ЕТРАН*, Врњачка Бања, 2009, АУ3.4 1-4.
7. Саша Живковић, Никола Глигоријевић, Бојан Павковић, Горан Марјановић, "Разматрање примене и испитивања интегралних ракетно набојно-млазних мотора", *Зборник радова 3. научног скупа ОТЕХ 2009*, Београд, 2009, НБ1/3.

8. Б. Павковић, М. Павић, Д. Ћук, "Trajectory Correction of Artillery Rockets using Trajectory Tracking with Pulse Frequency Modulation", *4th International Scientific Conference on Defensive Technologies OTEH 2011 Proceedings*, Београд 2011, str 211-216.
9. Д. Ћук, Б. Павковић, М. Павић, "Comparison of Different Guidance Laws for a Mortar Missile With a Pulse Jet Control Mechanism", *4th International Scientific Conference on Defensive Technologies OTEH 2011 Proceedings*, Београд 2011, str. 217-223.
10. Б. Павковић, М. Павић, Д. Ћук, "Frequency-Modulated Pulse-Jet Control of an Artillery Rocket", *Journal of Spacecraft and Rockets* Vol. 49, No. 2, март-април 2012, стр 286-294, ISSN: 0022-4650 doi: 10.2514/1.A32133

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани \_\_\_\_\_ мр Бојан М. Павковић \_\_\_\_\_

број уписа \_\_\_\_\_

### Изјављујем

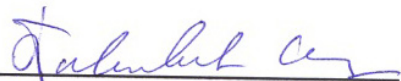
да је докторска дисертација под насловом

Истраживање метода корекције трајекторија пројектила у  
функцији од повећања њиховог домета и прецизности

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, \_\_\_\_\_ 25.06.2012. \_\_\_\_\_



Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_ мр Бојан М. Павковић \_\_\_\_\_

Број уписа \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада \_\_\_\_\_ Истраживање метода корекције трајекторија пројектила у функцији од повећања њиховог домета и прецизности \_\_\_\_\_

Ментор \_\_\_\_\_ Проф. др Слободан Јарамаз \_\_\_\_\_

Потписани \_\_\_\_\_ мр Бојан М. Павковић \_\_\_\_\_

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, \_\_\_\_\_ 25.06.2012. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ 

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Истраживање метода корекције трајекторија пројектила у  
функцији од повећања њиховог домета и прецизности

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

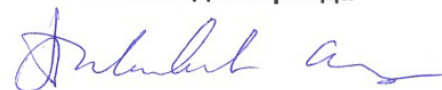
Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, 25.06.2012.

Потпис докторанда



мр Бојан М. Павковић