

Универзитет у Београду
Машински факултет

Раде Н. Грујичић

Безмрежна *Fragile Points* метода (FPM)
у проблемима опструјавања аеродинамичких
облика и простирања топлоте

докторска дисертација

Београд, 2023.

University of Belgrade
Faculty of Mechanical Engineering

Rade N. Grujicic

**Meshless Fragile Points Method (FPM)
for Fluid Flow around Aerodynamic Shapes and
Heat Distribution Problems**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2023

Ментори

др Александар Бенгин, редовни професор
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Горан Воротовић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Машински факултет

Чланови Комисије за одбрану докторске дисертације

др Огњен Пековић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Јелена Сворцан, ванредни професор
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Мирко Коматина, редовни професор
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Јела Воротовић, научни сарадник
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Игор Вушановић, редовни професор
Универзитет Црне Горе, Машински факултет

Датум одбране

Захвалница

Моје путовање кроз докторске студије обиљежено је упознавањем и/или сарадњом са великим бројем изузетних и јединствених људи који су оставили неизбрисив траг у овом периоду мог живота. У првом реду бих велику захвалност на дивној сарадњи исказао проф. др Атлурију (*Satya N. Atluri, Presidential Chair and University Distinguished Professor at Texas Tech University*). Бити у прилици да учим од човјека његове величине, посебна је награда у животу. Уз бројне лекције из области рачунарске механике и безмрежних метода, добио сам врло драгоцене животне савјете поникле на богатом искуству.

Нарочиту захвалност дугујем проф. др Игору Вушановићу. Осим што је заслужан за успостављање сарадње са професором Атлуријем и обезбјеђивање стипендије за мој истраживачки боравак на *Texas Tech* универзитету, он је имао визију развоја мог научног рада. Указивао ми је на значај нумеричких метода, нарочито на општост у њиховој примјени, подржавао ме, охрабривао и мотивисао све вријеме. У моју заштиту је стао и онда када нису они који су за то били далеко позванији или када није дијелио моје мишљење, што нарочито цијеним. Иако ме је свјесно усмјерио на тежи пут, знао је зашто то ради. Да могу опет да бирам, поново бих се упутио истом стазом.

Изузетно лијепу сарадњу сам остварио са проф. др Николом Младеновићем, који је био пун подршке и ненаметљивости, на чему сам му веома захвалан. Поред помоћи у виду савјета и идеја на путу реализације докторске дисертације, одиграо је врло значајну улогу приликом дефинисања њених оквира.

Моји званични ментори, проф. др Александар Бенгин и проф. др Горан Воротовић, већ су ме при првом сусрету дочекали с подршком и предусретљивошћу и такав однос према мени одржали све вријеме током наше сарадње, на чему сам им врло захвалан. Показали су ми личним примјером како треба да изгледа добар однос ментора према кандидату, што ће бити од великог значаја за мој будући рад.

Веома сам захвалан професорима и колегама на Машинском факултету у Подгорици и Машинском факултету у Београду са којима сам сарађивао у овом периоду, али и пријатељима који су увијек били ту за мене. Посебну захвалност дугујем декану Машинског факултета у Подгорици, проф. др Радоју Вујадиновићу. Његова спремност да ми пружи сваки вид подршке у раду за мене ће остати најљепши примјер родитељског односа Управе факултета према својим сарадницима.

Напоследатку бих се, као најбитнијим у овој причи, захвалио члановима своје породице на безрезервној подршци, стрпљењу и толеранцији. Они цјелокупном том путу дају смисао и вриједност.

Безмрежна *Fragile Points* метода (FPM) у проблемима опструјавања аеродинамичких облика и простирања топлоте

Сажетак

Идеја ове дисертације је да се нова безмрежна *Fragile Points* метода (FPM) први пут примијени у рјешавању основних проблема из механике флуида и простирања топлоте. У том циљу су представљене карактеристике методе, с акцентом на новине у концептуалном смислу, што се у првом реду односи на дисконтинуалне локално полиномне пробне функције. Базирајући се на преглед литературе, истакнут је значај формулације пробних функција у полиномном облику, а потом наглашене предности и недостаци које носи њихов дисконтинуални карактер.

Да би се направио први корак у правцу анализе примјенљивости FPM у рјешавању проблема из механике флуида, једначина потенцијалног струјања стишљивог флуида дискретизована је процедуром FPM базираној на Галеркиновој слабој форми и нумеричкој корекцији флукса. Добијене су и FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* формулације једначине. Кроз неколико примјера представљене су могућности FPM у симулацији подзвучног потенцијалног опструјавања аеродинамичких облика. Резултати су упоређени са доступним аналитичким, експерименталним и нумеричким рјешењима. Показало се да је FPM прецизна, поуздана, стабилна и конвергентна. Добијеним резултатима направљена је основа за будућа истраживања сложенијих проблема.

Да би се сагледала могућност примјене FPM у рјешавању проблема из домена простирања топлоте, једначина провођења топлоте кроз нехомогене анизотропне средине дискретизована је у FPM-*Primal* форми. Добијени резултати за конкретне случајеве упоређени су са аналитичким рјешењима и резултатима које дају друге нумеричке методе. Мноштвом примјера доказани су робусност и конвергентност методе. За одабране једнодимензионалне, дводимензионалне и тродимензионалне случајеве анализирани су фактори који утичу на стабилност методе и дате препоруке опсега из којих треба бирати *penalty* параметре.

Кључне ријечи

Fragile Points метода, безмрежна метода, корекција нумеричког флукса, потенцијално струјање, топлотна кондукција

Научна област

Машинско инжењерство

Уже научне области

Ваздухопловство и Термомеханика

УДК број

629.7:536.2(043.3)

Meshless Fragile Points Method (FPM) for Fluid Flow around Aerodynamic Shapes and Heat Distribution Problems

Abstract

The aim of this dissertation is to pioneer the application of the novel meshless Fragile Points Method (FPM) in addressing fundamental challenges in fluid mechanics and heat distribution. To achieve this, the method's properties are introduced, with an emphasis on its conceptual innovations, specifically the utilization of discontinuous locally-polynomial trial functions. Based on the literature review, the significance of polynomial formulation is highlighted, and advantages and disadvantages arising from discontinuous nature are addressed.

To initiate an analysis of FPM's applicability in addressing fluid mechanics problems, discretization of the compressible potential fluid flow equation is performed using the FPM procedure grounded in the Galerkin weak form and numerical flux correction. FPM-Primal and FPM-Mixed formulations of the equation are derived. Through several examples, the FPM simulation capabilities for subsonic potential flow around aerodynamic shapes are presented. Results are compared with available analytical, experimental, and numerical solutions. Precision, reliability, stability, and convergence of FPM are confirmed. These findings establish a foundation for future exploration of more complex problems.

To assess the feasibility of using FPM in heat distribution analysis, the equation governing heat conduction through non-homogeneous anisotropic media was discretized using the FPM-Primal. The outcomes for specific cases were compared with both analytical and numerical results. Through numerous examples, the robustness and convergence of the method were proved. Based on selected one-dimensional, two-dimensional, and three-dimensional cases, factors influencing the method's stability were analyzed, offering recommendations for penalty parameter ranges.

Key words

Fragile Points Method, meshless method, numerical flux correction, potential flow, heat conduction

Scientific field

Mechanical Engineering

Scientific subfields

Aerospace Engineering and Thermomechanics

UDK number

629.7:536.2(043.3)

Садржај

1	Увод	1
1.1	Преглед истраживања	2
1.2	Циљ и хипотезе докторске дисертације	8
1.3	Структура докторске дисертације	9
2	<i>Fragile Points</i> метода (FPM)	11
2.1	Подјела домена на поддомене	12
2.2	Пробна (<i>trial</i>) функција	16
3	Подзвучно потенцијално струјање стишљивог флуида око аеродинамичких облика	23
3.1	Полазна једначина	23
3.2	Гранични услови	23
3.3	Дискретизација једначине на бази галеркиновске слабе форме	26
3.4	Дискретизација једначине на бази галеркиновске слабе форме уз корекцију нумеричког флукса	28
3.4.1	Дискретизована једначина у FPM- <i>Primal</i> облику	30
3.4.2	Дискретизована једначина у FPM- <i>Mixed</i> облику	32
3.5	Нумеричка имплементација	34
3.5.1	Нумеричка имплементација у FPM- <i>Primal</i> облику	34
3.5.2	Нумеричка имплементација у FPM- <i>Mixed</i> облику	39
3.6	Нумерички примјери	48
3.6.1	Дводимензионални проблеми	49
3.6.2	Тродимензионални проблеми	58
4	Нестационарно провођење топлоте кроз нехомогене анизотропне средине	65
4.1	Полазна једначина, гранични услови и почетни услов	65
4.2	Дискретизација једначине на бази галеркиновске слабе форме уз корекцију нумеричког флукса	66
4.3	Нумеричка имплементација	68
4.4	Нумеричке методе за рјешавање обичних диференцијалних једначина	73
4.5	Нумерички примјери	76
4.5.1	Једнодимензионални проблеми	76
4.5.2	Дводимензионални проблеми	86
4.5.3	Тродимензионални проблеми	106

5 Закључак	117
Литература	123
Прилог А: Кôд за брзу уређену подјелу домена на поддомене	131
Прилог Б: Униформно опструјавање цилиндра - аналитичко рјешење	135
Биографија аутора	137
Изјава о ауторству	139
Изјава о истовјетности штампане и електронске верзије докторског рада	141
Изјава о коришћењу	143

Списак ознака, индекса и скраћеница

Латиничне ознаке

b	(потенцијално струјање) полуразмах (<i>semi-span length</i>)
c	специфични топлотни капацитет
C_L	бездимензиони коефицијент узгона
C_p	бездимензиони коефицијент притиска
E	поддомен
e	границе поддомена
F_L	сила узгона
g_D	вриједност тражене функције на Дирихлеовој граници
g_N	скаларни производ $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$
g_R	Робинов (конвективни) гранични услов
h	коефицијент преноса топлоте
h_e	параметар који зависи од границе
J	дискретна тежинска L^2 норма
k	коефицијент топлотне проводљивости
l	дужина тетиве аеропрофила
M	Махов број
m	(дефинисање пробне функције) број сусједних тачака за посматрану тачку
m	(рјешавање ОДЈ) ознака временског корака
n	број тачака у којима се апроксимира вриједност тражене функције
n_t	број временских корака
P	тачка
Q	густина топлотног извора
R	полупречник
r_0	релативна грешка нумеричког рјешења на бази Лебегове норме
$\bar{r}_0$	r_0 грешка осредњена по временским корацима
r_1	релативна грешка градијента нумеричког рјешења на бази Лебегове норме
S	референтна (релевантна) дужина/површина опструјаваног облика
t	вријеме
U	интензитет брзине флуида у посматраној тачки домена
u	температурно поље, односно тражена функција у општем случају
u_h	пробна (<i>trial</i>) функција тражене функције
$\hat{u}_h$	нумерички флуks (апроксимација функције u_h на границама поддомена)
u_R	вриједност тражене функције изван Робинове (конвективне) границе
v	тестна (<i>test</i>) функција
w	тежинска функција

B	функција облика градијента пробне функције u_h
E	јединична матрица
g	градијент тражене функције на Нојмановој граници
i	јединични вектор осе x
k	тензор топлотне проводљивости
L	функција облика пробне функције σ_h
N	функција облика пробне функције u_h
n	вектор нормале на границу домена/поддомена усмјерен ка спољашњости
r	вектор положаја
u	вектор вриједности пробне функције u_h у одабраним тачкама (чворовима)

Грчке ознаке

α_n	угао стријеле нападне ивице крила (<i>leading edge sweep angle</i>)
β	пројекција β вектора
Γ	скуп свих унутрашњих и спољашњих граница
Γ_D	Дирихлеове границе
Γ_h	унутрашње границе
Γ_N	Нојманове границе
Γ_R	Робинове границе
Δt	временски корак
δ_{ij}	Кroneker делта функција
$\partial\Omega$	скуп свих спољашњих граница домена
η	<i>penalty</i> параметар
η_D	<i>penalty</i> параметар на Дирихлеовим границама
η_h	<i>penalty</i> параметар на унутрашњим границама
κ	(потенцијално струјање) снага двопола
κ	(топлотна кондукција) топлотна дифузивност
Λ	виткост крила (<i>aspect ratio</i>)
λ	конусни однос (<i>taper ratio</i>)
ρ	густина
Φ	потенцијал брзине
Φ_d	потенцијал брзине усљед постојања двопола
Φ_{uf}	потенцијал брзине униформног струјања
ϕ	поремећајни потенцијал
Ω	разматрани домен
β	вектор константне вриједности на свакој граници
σ_h	пробна функција функције $\sigma = \nabla u$ (u је тражена функција)
$\hat{\sigma}_h$	нумерички флуks (апроксимација функције σ_h на границама поддомена)
τ	тестна функција

Оператори

$\circ$	оператор множења поља бројева
$\cdot$	оператор скаларног производа
$\llbracket \rrbracket$	оператор скока
$\{ \}$	оператор средње вриједности
∇	Хамилтонов (набла) оператор

Индекси

∞ непоремећена струја флуида

Скраћенице

BEM	<i>Boundary Element Method</i>
FDM	метода коначних разлика (<i>Finite Difference Method</i>)
FEM	метода коначних елемената (<i>Finite Element Method</i>)
FPM	<i>Fragile Points Method</i>
FVM	метода коначних запремина (<i>Finite Volume Method</i>)
GFDM	<i>Generalized Finite Difference Method</i>
IP	<i>Interior Penalty</i>
LDG	<i>Local Discontinuous Galerkin</i>
LME	<i>Local Maximum Entropy</i>
MFS	<i>Method of Fundamental Solutions</i>
MLPG	<i>Meshless Local Petrov–Galerkin</i>
MLPG5	варијација MLPG у којој је Хевисајдова функција узета за тестну
MLS	<i>Moving Least Squares</i>
RBF	<i>Radial Basis Function</i>
ОДЈ	обична диференцијална једначина
ПДЈ	парцијална диференцијална једначина

Глава 1

Увод

Иако се велики број физичких процеса (самим тим и проблема у машинству, односно научној и инжењерској пракси уопште), попут: деформација, дифузије, преноса топлоте, кретања флуида, простирања таласа, електромагнетизма..., вјеродостојно описује парцијалним диференцијалним једначинама (ПДЈ), само у изузетно ријетким ситуацијама оне имају своја егзактна аналитичка рјешења. С обзиром на разноврсност физичких, геометријских и вјероватносних феномена који се њима могу моделовати, из данашње перспективе је тешко вјеровати да постоји општа теорија у вези са рјешивошћу ПДЈ, те се истраживачи углавном усмјеравају ка различитим групацијама једначина које описују неки конкретан феномен. Да би проблем, математички гледано, био добро формулисан, аналитичко рјешење прво мора да постоји, а потом да буде јединствено и да степен промјена у рјешењу прати степен промјена у улазним параметрима. Због комплексности проблематике, таква рјешења се често морају тражити изван скупа континуалних и диференцијабилних функција, што процес потраге за њима чини сложенијим. [1,2]

Колико год аналитичка рјешења била погодна и пожељна, она су у општем случају ријетка и обично су добијена за упрошћене моделе који не осликавају реалне ситуације. Потреба да се дође до рјешења једначина за комплексније проблеме, усмјерила је правац истраживања таквих феномена ка нумеричким методама [1,2]. То је нарочито дошло до изражаја у другој половини прошлог вијека, периоду који обиљежава убрзан напредак рачунарских система, чиме је отворен простор за развој нумеричких метода. На тај начин је омогућено рјешавање сложених ПДЈ, уз одређени ниво грешке, а самим тим и симулација различитих процеса и појава. Примамљивост симулација лежи у чињеници да оне омогућавају предвиђање понашања посматраног система и различите нивое оптимизације без утrophа ресурса који су неопходни за дизајнирање физичког експеримента. Осим тога, због широке распрострањености у рјешавању многих практичних задатака разнолике комплексности, симулације постају вјеродостојан алат у испитивању теорија, разумијевању сложених физичких феномена или чак откривању раније непознатих законитости [3]. Међутим, због комплексности ПДЈ, специфичности самих физичких процеса и ограничења нумеричких метода развијаних за потребе њиховог рјешавања, ниједна метода се не може прогласити апсолутно супериорном у односу на друге, нити опште примјенљивом [1,2]. Стога научна заједница одавно трага за унапређењима и истражује могућности примјене појединих метода за различите групе проблема, па су се из жеље за превазилажењем недостатака једних метода развијале друге.

Искорак ка даљем унапређењу нумеричких метода за рјешавање специфичне врсте проблема основни је циљ ове докторске дисертације. Она у фокус ставља нову безмрежну (*meshless*) *Fragile Points* нумеричку методу (FPM), с намјером да пружи допринос њеном развоју, објективно очекујући да би била конкурентна постојећим нумеричким методама.

1.1 Преглед истраживања

Први озбиљни помаци у правцу развоја нумерике у данашњем облику направљени су развојем галеркиновске (*Galerkin*) методе коначних елемената (*Finite Element Method* – FEM) за описивање напона и деформација унутар материјала. С обзиром на то да је релативно једноставна и дубоко укоријењена у генерализованим варијационим принципима, врло брзо је изашла из поменутих оквира и попримила широку распрострањеност у инжењерству [4]. Она је и данас у великој мјери присутна у аеронаутици, аутомобилској индустрији и конструисању приликом рјешавања проблема који укључују пренос топлоте и масе, електромагнетни потенцијал и сличне проблеме, а поготово у структурној анализи и механици деформабилног тијела, гдје је и даље најпопуларнија [5]. FEM одликују локалне полиномне пробне (*trial*) и тестне (*test*) функције којима се описује интеракција између коначних елемената. Оне воде симетричним и ријетким глобалним матрицама крутости на бази елемената. Полиномни карактер процес интеграљења чини једноставним, а симетричност и ријеткост матрица крутости методу врло погодном и ефикасном у симулацијама које укључују велики број коначних елемената и нелинеарне проблеме [5–7]. Разноврсност у примјени, прилагодљивост облицима домена, стабилност и прецизност битне су карактеристике које ова метода посједује [2].

У рачунарској динамици флуида (*Computational Fluid Dynamics* – CFD) и рачунарској механици деформабилног тијела (*Computational Solid Mechanics* – CSM), својом популарношћу су се, уз FEM, издвојиле још метода коначних разлика (*Finite Difference Method* – FDM) и метода коначних запремина (*Finite Volume Method* – FVM) [3].

С обзиром на то да је врло једноставна, интуитивна, експлицитна и ефикасна, FDM је врло погодан и често коришћен алат за рјешавање ПДЈ када је ријеч о геометријама једноставног облика, при равномјерној расподјели чворова мреже [3, 8]. Међутим, потешкоће у примјени над доменима сложенијег облика њен су кључни недостатак, који јој у великој мјери ограничава могућност примјене у практичним проблемима од значаја, без обзира на претходно поменуте предности. Један од начина за превазилажење поменутог проблема јесте развој хибридних метода, попут [9], гдје је FEM коришћена у поддоменима са сложенијом геометријом, а FDM (која је погоднија с аспекта ефикасности и утршка меморије) у поддоменима са једноставнијом геометријом. Међутим, таквим моделима се врши удаљавање од првобитног концепта, па новонастале методе постају компликоване. Други приступи се огледају у математичким трансформацијама којима би се ријешао проблем мрежа неправилног облика, али су такве процедуре компликоване и често рачунски захтјевније од реализације саме методе [5].

FVM се често може срести у симулацији кретања флуида. Ефикасна је, попут FDM, али истовремено примјенљива над неструктурисаним мрежама, као FEM [10]. Заснована је на интегралној формулацији закона одржања и њиховом дискретном рјешавању у

физичком простору, при чему директна дискретизација омогућава једноставну формулацију промјена посматраних физичких величина [11]. Међутим, није ограничена само на динамику флуида, већ се може показати да је стабилна и конвергентна приликом рјешавања једначине преноса топлоте, транспортне једначине, проблема вишефазних струјања, али и задатака из домена биологије, медицине, хемије, структурне механике и сл. [12, 13]. Начин на који формулише флукс чини је неконзистентном у анизотропним проблемима, премда се увођењем генерализоване методе коначних разлика (GFDM) и тај недостатак може отклонити [10].

Оно што је заједничка карактеристика претходно наведених метода је диоба континуалне средине на дискретне поддомене процедуром, жаргонски званом „меширање“, која се своди на формирање тополошке мапе, са подацима о чворовима мреже и њиховој међусобној повезаности [2, 3]. Као резултат тог поступка добијају се коначни елементи у случају FEM, координатна мрежа у случају FDM и коначне запремине у случају FVM.

Иако је огроман број нумеричких метода развијен до данас, може се рећи да су се само претходно наведене издвојиле као једне од најчешће коришћених. Разлог, између осталог, лежи у чињеници да су своју масовну примјену доживјеле кроз имплементацију у различитим рачунарским програмима. С обзиром на прецизност, стабилност, конвергентност и широко распрострањену примјену, то је сасвим оправдано. Међутим, поред наведених индивидуалних мањкавости, методе на бази мреже имају неколико заједничких недостатака који ограничавају или отежавају њихову примјену у појединим областима [2, 3, 5, 6, 15–19]:

- прецизност резултата и степен конвергенције су условљени квалитетом мреже, а њено формирање може изискивати доста времена и искуства; нпр. код FEM се јавља „закључавање“ (*locking*) елемената када одабрани тип елемената није прилагођен разматраном проблему, што се манифестује погрешном интерпретацијом понашања посматране структуре (у погледу смицања и притиска), а то за последицу има нарушавање прецизности и конвергентности резултата, док FVM често захтијева коришћење структуриране мреже;
- генерисање мреже у линеарној анализи је понекад рачунски много захтјевније од самог рјешавања ПДЈ;
- велике деформације доводе до значајног изобличења мреже што врло неповољно утиче на тачност добијених резултата;
- симулација проблема који укључују дисконтинуитете у домену је веома изазовна и за собом повлачи: увођење модела кохезивних зона или придруживање нелокалних теорија (перидинамике) или брисање елемената (самим тим промјену степени слободе система) и преструктурирање мреже (првенствено измјену у подацима о повезаности елемената), што је рачунски врло компликовано, нарочито ако се рјешавају нестационарни проблеми код којих корекције настају у већем броју временских корака;
- рјешавање проблема и у континуалним срединама може бити веома тешко ако расподела функције која се одређује има дисконтинуални карактер, као што је нпр. случај са симулацијом настанка и пропагације ударних таласа;

- компликације у имплементацији метода настају ако се разматрају проблеми са покретним границама или слободним површинама;
- методе на бази мреже нису погодне ако је предмет разматрања дискретни материјални систем, гдје се као примјер може навести интеракција небеских тијела, кретање атома и сл.

Једна од метода која не припада групи класичних метода на бази мреже, а којом је направљен покушај да се уведу побољшања у односу на FEM, је метода граничних елемената (*Boundary Element Method* – BEM). Због тога што се не врши подјела цјелокупног домена на коначне елементе, већ само његових граница, BEM се одликује високом ефикасношћу [20]. Међутим, интегрална формулација је могућа само ако је познато фундаментално рјешење диференцијалног оператора ПДЈ, а таква рјешења у виду елементарних функција постоје за хомогене непрекидне средине [21–24]. Поред тога што у појединим ситуацијама постоји могућност да се код нехомогених средина поменути проблем превазиђе техником трансформације промјенљивих, недостатак општости је кључна препрека масовнијој примјени BEM, без обзира на њену ефикасност и тачност [24]. Иако су матрице система мање у односу на FEM, оне нису ријетке већ пуне, па претходно поменута ефикасност, која се доминантно огледа у смањењу рачунске сложености, постаје упитна, нарочито у симулацији нестационарних проблема [10].

У претходну групацију се може сврстати метода панела, која се одликује израженом једноставношћу због које налази велику примјену у проблемима потенцијалних струјања [25]. Њена основна предност се огледа у томе што су непознате величине (извори, дублети, вихори) распоређене само по површини опструјаваног објекта, односно по скупу панела, а не по цјелокупном домену који окружује опструјавани објекат, чиме се рачунска сложеност проблема редукује у огромној мјери [26]. С друге стране, ограничена је на невискозна безвртложна струјања у подзвучним и надзвучним условима и линеаризовану теорију која не дозвољава велике нападне углове опструјаваних конфигурација [25, 27]. Уз то се, у појединим ситуацијама, може јавити снижена тачност резултата на задњој ивици аеропрофила [25]. И поред поменутих ограничења, нашла је примјену у бројним истраживањима [28].

Претходно изложени недостаци описаних метода били су повод за развој нешто новије групације нумеричких метода, у литератури познатих као безмрежне методе, које су пандан традиционалним методама на бази мреже. Основна разлика се огледа у томе што не садрже мрежу, већ скуп тачака (чворова) распоређених по анализираном домену. То их чини врло прилагодљивим, уз значајно мањи утрошак енергије за дистрибуцију тачака у односу на генерисање мреже, које често представља посебан изазов у примјени нумеричких метода, као што је претходно речено. Најчешће се могу подијелити у двије групације: безмрежне методе на бази честица (*particles*) и безмрежне методе на бази слабе форме (*weak form*) једначина [5].

Једна од најранијих и најчешће коришћених безмрежних метода у механици флуида и механици деформабилног тијела јесте *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), која је базирана на лагранжовској формулацији [3, 17]. Првобитно је била намијењена рјешавању проблема из астрофизике у отвореном тродимензионалном простору, пошто је збирно кретање групе небеских тијела (као дискретног материјалног система) слично кретању течности и гасова, те се може моделовати класичном Њутновском хидроди-

намиком [3, 29]. Иако је њена оригинална формулација из 1977 [29] и 1993 [30] године доживјела одређена унапређења кроз неколико других метода, попут модификоване SPH методе [31] или *Reproducing Kernel Particle* методе (RKPM) [32], тешко је доказати њену стабилност и конвергентност, с обзиром на то да је базирана на јакој форми (*strong form*) једначина [5, 15].

Diffuse Element Method (DEM) је безмрежна метода настала као вид уопштења FEM. Избјегла је генерисање мреже и поједина ограничења у погледу избора пробних функција, а побољшања постигла у процијењеним вриједностима извода тражених функција [33]. Уз нарушавање симетрије, додатна унапређења у погледу тачности и конвергентности су постигнута *Petrov–Galerkin Diffuse Element* методом (PG DEM) [34].

Међу безмрежним нумеричким методама које су засноване на слабој форми једначина, најпознатије су *Element-free Galerkin* (EFG) [16] и *Meshless Local Petrov–Galerkin* (MLPG) [4]. Прва се базира на глобалној галеркиновској, а друга на локалној петров-галеркиновској слабој форми. Њихове пробне функције, којима се описује промјена тражене функције по домену, су континуалне и засноване на тачкама домена у којима се одређују вриједности тражене функције, те као такве нису подложне негативним утицајима услед изобличења мреже током симулације великих деформација и ломова [6]. Пробне функције се код поменутих метода најчешће формирају помоћу *Moving Least Squares* (MLS) и *Radial Basis Function* (RBF) апроксимација, добијајући облик сложених рационалних функција. Иако такав приступ води континуитетима вишег реда, процес њиховог интеграљења може бити доста компликован, понекад и непрецизан, нарочито ако се направи поређење са FEM чије су пробне функције полиномног облика [6, 35]. То често узрокује врло неповољан утицај на рачунску сложеност, што је кључни недостатак ових метода. У раду [36] је направљен покушај да се описани проблем превазиђе безмрежном методом коначних запремина, која је заснована на MLPG „мјешовитом“ приступу.

За разлику од EFG, чија имплементација у појединим ситуацијама захтијева „елементе сјенке“ (*shadow elements*) ради интеграљења по домену, MLPG је истински безмрежна метода [4, 6]. Сви поддомени код MLPG су облика круга/сфере и могу међусобно да се преклапају. Како се интеграљење врши преко поддомена врло једноставног облика и њихових граница, то је ова метода за нелинеарне проблеме флексибилнија и једноставнија у односу на FEM, BEM и EFG [4]. Могућност избора различитих пробних и тестних функција води разноврсним варијацијама MLPG. Интересантно је поменути MLPG5 варијацију у којој је тестна функција дефинисана као Хевисајдова, јер уколико се примијени преко симетричних слабих форми унутар локалних поддомена избјегава се интеграљење по домену, па се проблем своди на рјешавање контурних интеграла [23, 37]. Уз Хевисајдову функцију, међу тестним функцијама код MLPG методе, често се могу срести Диракова функција и локално фундаментално рјешење.

Из тежње да се очувају предности BEM и премосте проблеми које доноси њена формулација, настала је потпуно безмрежна *Local Boundary Integral Equation* (LBIE) метода. Уводећи концепт тестних функција у виду локалних фундаменталних рјешења, превазилази се проблем потребе за глобалним фундаменталним рјешењима у нехомогеним анизотропним срединама [38].

Као кључни недостатак EFG и MLPG метода већ је истакнута комплексност у погледу интеграљења. Међутим, тај проблем је одлика и бројних других галеркиновских и петров-галеркиновских безмрежних метода, управо због сложеног облика пробних функција [10,18,39]. Директно интеграљење по чворовима је једноставан и ефикасан приступ, али нестабилан, непрецизан и често неконвергентан [15,35]. Стога се углавном прибјегава квадратурама вишег реда како би се унаприједила стабилност методе, али је то на уштрб времена потребног за израчунавање, тј. рачунске сложености [35]. Поред тога, квадратурна правила у галеркиновским методама треба да задовоље одговарајућа ограничења како би степен конвергенције био оптималан [39]. Све то је правце појединих истраживања усмјерило ка развоју низа других метода за нумеричко интеграљење којима би се превазишли претходно поменути проблеми [18,35,40].

Поред повећања рачунске сложености током интеграљења, недостатак једног броја безмрежних метода, нарочито оних код којих су пробне функције базиране на MLS и *Local Maximum Entropy* (LME) апроксимацијама, огледа се у изостанку Кронекер делта својства, што наметање основних граничних услова чини компликованим [15,41]. Истраживањем [42] је направљено унапређење MLPG увођењем модификоване колокационе методе за наметање основних граничних услова. Било је покушаја да се MLS апроксимације замијене *Maximum Entropy* апроксимацијама код EFG, али је то за посљедицу имало повећање броја квадратурних тачака, а тиме и рачунске сложености методе [41].

Асиметричност матрица је још један недостатак појединих нумеричких метода, попут петров-галеркиновских, колокационих и метода на бази коначних запремина [15,42]. До изражаја долази у системима са великим бројем степени слободе.

Поред MLPG методе, али и низа других метода којима је направио веома значајан искорак у области нумеричких метода, професор Атлури (*Satya N. Atluri*) је идејни творац новије безмрежне нумеричке методе познате под називом *Fragile Points* метода (FPM). Представљена је 2019. године у раду [5] у коме је помоћу ње ријешена Поасонова једначина и у коме су доказани њена прецизност, робусност и конвергентност. Задржала је, углавном, базичне предности безмрежних метода, при чему је својом концептуалном једноставношћу превазишла све претходно описане проблеме који су присутни код других безмрежних метода.

FPM не треба мијешати са методама које имају исту скраћеницу, као што су: *Finite Point Method* [43], *Finite Particle Method* [19] и *Finite Pointset Method* [44]. Све три наведене методе су безмрежне. Попут DEM и EFG, *Finite Point* метода се користи MLS апроксимацијама, при чему се дискретизација ПДЈ базира на GFDM. Њена основна карактеристика је стабилизација једначине примјеном *Finite Calculus* (FIC) приступа којом се исправља грешка у околини граничних сегмената настала увођењем *Point Collocation* процедуре [43]. У *Finite Particle* методи, која се може сматрати побољшаном верзијом SPH, апроксимација промјенљивих и њихових извода се симултано врши рјешавањем матричних једначина над пољем бројева, при чему се коефицијенти матрица одређују скупом базних функција и низом трансформација [19]. *Finite Pointset* метода такође укључује MLS апроксимације, али је заснована на јакој формулацији којом се диференцијалне једначине моделују директном апроксимацијом диференцијалних оператора који се у њима појављују [44]. За све три методе је заједничко отежано наметање граничних услова.

Основна одлика *Fragile Points* методе (FPM) су дисконтинуалне пробне и тестне функције, локално гледано једноставног полиномног облика. Њихова расподела по поддомену у околини посматране тачке одређује се на основу вриједности функције у тачки и градијента функције у њој, при чему се градијент апроксимира на основу вриједности функције у сусједним тачкама [5]. Такав приступ води концепту „тачкасте крутости (крутости тачака)“ (*point stiffnesses*), гдје свака тачка учествује у формирању глобалне матрице крутости. Полиномни облик пробних и тестних функција омогућава веома лако интеграљење примјеном Гаусових квадратура или чак просто интеграљење у аналитичком облику. За разлику од многих других метода, попут EFG и MLPG, гдје чак ни велики број Гаусових тачака не гарантује да ће интеграљење бити тачно, код FPM је најчешће довољна само једна тачка на нивоу поддомена [5, 6, 15].

Иако се основни (Дирихлеови) гранични услови код FPM врло једноставно намећу у слабој форми, они се могу наметнути и у јакој форми с обзиром на то да пробна функција задовољава Кронекер делта својства [10, 15].

Како пробне и тестне функције у оригиналној формулацији FPM имају исти облик, матрице су симетричне, али су уз то још и позитивно дефинитне и ријетке, што су врло битне карактеристике када се рјешавају проблеми са великим бројем тачака унутар домена [5].

Истовремени недостатак и предност FPM огледа се у дисконтинуитету пробних и тестних функција. С једне стране, методу може учинити непрецизном и/или нестабилном. Међутим, примјеном концепта тзв. корекције нумеричког флуksа који је изложен у [45] рјешавају се поменути проблеми. У истом раду је направљена анализа врло широке класе дисконтинуалних метода за рјешавање елиптичких проблема другог реда и дат детаљан преглед различитих нумеричких флуksева присутних у литератури. У [5] су издвојена два флуksа која методи обезбјеђују симетричност, конзистентност и стабилност. То су *Interior Penalty* (IP) и *Local Discontinuous Galerkin* (LDG), који су довели до двије формулације FPM: *Primal* и *Mixed*. Увођењем корекције нумеричког флуksа у FPM, дисконтинуална пробна функција постаје готово комадно (*piecewise*) континуална [5]. Математички апарат се тиме мало усложњава, јер је потребно одредити неколико додатних матрица са контурним интегралима, а уз то треба извршити диобу домена на скуп поддомена, што изискује одређени труд. Међутим, чињеницом да се на тај начин обезбјеђује стабилност методе и доноси предности, које FPM чине врло конкурентном методом, поменути недостаци се стављају потпуно у други план.

Локално дефинисање пробних функција, тј. дисконтинуални карактер методе, омогућава једноставну манипулацију границама између поддомена. Уколико за тим постоји потреба, унутрашње границе, тј. везе између појединих поддомена, се могу врло лако раскинути, што је изузетно погодно за симулацију проблема у оквиру механике лома, али и других проблема и процеса код којих разматрани домен садржи дисконтинуитете, одакле је и потекао назив методе (*Fragile Points* — тачке лома). Уколико се унутар домена јавља пукотина (дисконтинуитет), FPM уводи претпоставку да се она поклапа са појединим унутрашњим границама које раздвајају поддомене. Пукотина се узима у обзир на тај начин што се унутрашње границе које се са њом поклапају предефинишу у слободне, а тачке које дијеле границу престају да буду сусједне. Тиме се мало мијења облик матрица, али веома битна чињеница је да се не мијења број степени слободе. Уко-

лико пукотина у домену не постоји унапријед, већ се јавља и шири током посматраног процеса, онда се у симулацији може дефинисати критеријум који је потребно задовољити да би пукотина настала, како би се реализовала процедура раскида унутрашњих граница ако се поменути критеријум испуни. Овакав начин третирања дисконтинуитета је изузетно једноставан и представља вриједност која FPM издваја у односу на друге методе. [5, 6, 8, 10, 15, 46]

Све претходно описане карактеристике, нарочито могућност симулације комплексних проблема који укључују дисконтинуитете, ствара утисак да FPM може бити погоднија за рјешавање бројних проблема у односу на друге нумеричке методе. Недуго након што је FPM представљена радом [5], уследио је низ радова са њеном примјеном у рјешавању разноврсних проблема:

- симулација настанка и пропагације пукотина [6],
- коначне деформације хипереластичних материјала [46],
- анализа динамичких ломова [47],
- симулација општећења и ломова структура са „U“ зарезом [48],
- хиперболичка телеграфска једначина [17],
- линеарна и нелинеарна таласна једначина у срединама сложеног облика са пукотинама [8],
- флексо-електрична анализа [15, 49],
- магнетостатичка анализа суперпроводљивих акцелераторских магнета [7],
- симулација електрофизиологије срца [41],
- дефинисање оријентације влакана миокарда [50].

1.2 Циљ и хипотезе докторске дисертације

У периоду од протекле четири године публиковано је више од 15 радова у часописима са SCI листе на тему примјене FPM у рјешавању различитих ПДЈ, што говори о популарности коју је метода стекла, разноврсној примјенљивости и актуелности проблематике. Стиче се утисак да би FPM могла имати свијетлу будућност у свијету симулације физичких процеса и нумеричког рјешавања ПДЈ, те би било врло занимљиво и корисно анализирати могућности њене примјене у другим сферама науке. С тим у вези, основна идеја истраживања спроведених током припреме ове дисертације је развој FPM у правцу рјешавања ПДЈ стишљивог потенцијалног подзвучног струјања флуида и опште једначине нестационарне топлотне кондукције кроз нехомогене анизотропне средине различитог облика.

Полазећи од наведеног циља дисертације, намећу се сљедеће хипотезе:

- *Fragile Points* методом (FPM) се може успјешно рјешавати парцијална диференцијална једначина стишљивог потенцијалног подзвучног струјања флуида, са посебном намјеном рјешавања проблема опструјавања аеродинамичких облика;

- *Fragile Points* методом (FPM) се може успјешно рјешавати парцијална диференцијална једначина нестационарне топлотне кондукције кроз анизотропне нехомогене средине различитог облика;
- *Fragile Points* метода (FPM) је робусна, конвергентна и стабилна;
- по тачности резултата, *Fragile Points* метода (FPM) парира актуелним нумеричким методама.

1.3 Структура докторске дисертације

Након уводних напомена и прегледа литературе датих у првом поглављу, у другом поглављу је пружен детаљан приказ специфичности FPM које је одвајају од других метода. Акценат је стављен на опис начина за подјелу домена на поддомене и карактеристика које тополошка мапа треба да посједује након тог процеса. Осим тога, представљен је приступ којим се врши формирање дисконтинуалних локално линеарних пробних и тестних функција и дата њихова визуелна интерпретација за конкретне једнодимензионалне, дводимензионалне и тродимензионалне случајеве.

У трећем поглављу је извршена дискретизација ПДЈ стишљивог потенцијалног подзвучног струјања флуида помоћу галеркиновског FPM приступа. Представљен је поступак корекције нумеричког флукса и изведене су FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* формулације посматране једначине. Описан је начин имплементације граничних услова, с посебним освртом на Кута—Жуковски. За коректно моделовање циркулације, одабран је приступ предложен у [51], по коме се иза задње ивице аеропрофила/крила умеће тзв. *wake* линија/површина, чиме се омогућава скок потенцијала дуж ње. Предност дисконтинуалног карактера FPM је у посматраној ситуацији дошла до изражаја. Услиједили су: нумеричка имплементација, поређење FPM резултата са аналитичким, експерименталним и другим нумеричким резултатима кроз рјешавање неколико конкретних примјера опструјавања аеродинамичких облика, испитивање конвергенције и предлагање опсега оптималних вриједности тзв. *penalty* параметара којима се, између осталог, врши стабилизација методе. Добијени резултати су верификовани кроз публикацију [52].

У четвртном поглављу је ПДЈ нестационарне топлотне кондукције дискретизована помоћу FPM-*Primal* приступа у просторном домену. У обзир су узети: Дирихлеов, Нојманов, Робинов и симетрични гранични услов. С обзиром на то да су предмет разматрања нестационарни проблеми, FPM приступом је добијен полудискретни систем, па је било неопходно укључити и неку од бројних техника за дискретизацију у временском домену, тј. за рјешавање обичних диференцијалних једначина (ОДЈ). Размотрене су: Ојлерова експлицитна метода, Ојлерова имплицитна метода, трапезно правило и Рунге—Кута (*Runge-Kutta*) метода четвртог реда. Након нумеричке имплементације за сваки од четири приступа, извршена је процјена рачунске сложености и кроз низ конкретних примјера направљено међусобно поређење метода. Размотрене су једнодимензионалне, дводимензионалне и тродимензионалне средине различитог облика које су хомогене/нехомогене, изотропне/анизотропне, са топлотним извором или без њега. Извршено је поређење FPM рјешења са аналитичким и рјешењима других нумеричких метода. Добијени резултати су верификовани кроз публикације [21, 53, 54].

У петом поглављу су изведени основни закључци до којих се дошло током припреме дисертације.

Глава 2

Fragile Points метода (FPM)

Главне карактеристике *Fragile Points* методе (FPM) у концептуалном смислу огледају се у следећем:

- потребно је издијелити домен на поддомене,
- пробне функције су дисконтинуалне и полиномне,
- дискретизација је базирана на галеркиновској слабој (*weak*) форми и тестним функцијама које су углавном исте као пробне,
- потребно је извршити корекцију нумеричког флукса.

Основна идеја на којој почива FPM оличена је са једне стране у тежњи да се омогући поуздана, ефикасна и лака симулација проблема код којих се у домену јављају пукотине, а да се са друге стране одаберу једноставне пробне и тестне функције које ће процес нумеричког интеграљења учинити лаганим и прецизним. Оба захтјева су задовољена одабиром дисконтинуалних пробних и тестних функција које на локалном нивоу имају полиномни облик. Прекидни карактер функција узрокује потребу да се изврши подјела домена на поддомене, што није уобичајено за безмрежне методе. У зависности од комплексности рјешаваног проблема, више је начина које је погодно бирати за подјелу домена на поддомене. Поглавље 2.1 даје преглед приступа коришћених у овој дисертацији.

У зависности од степена полинома којим се апроксимира тражена функција, на располагању је више метода за дефинисање пробних функција. У радовима у којима су бирани полиноми првог степена, попут [5,6,8,21,46], употребљена је GFDM. У истраживањима која су укључивала полиноме вишег степена, попут [10,15], коришћене су методе на бази вишедимензионалних диференцијалних квадратура заснованих на безмрежним радијалним базним функцијама (RBFs), као што је метода [55]. У свим проблемима разматраним у овој дисертацији пробна функција је имала линеарни карактер. У поглављу 2.2 приказан је поступак њене формулације.

У до сада публикованим материјалима који се баве FPM, просторна дискретизација је вршена помоћу галеркиновске слабе форме. За тестне функције су углавном биране функције које су исте као пробне, чиме се обезбјеђује симетричност матрица. Изузетак је истраживање чији су резултати представљени у [10], а којим је направљено неколико ва-

ријација FPM. За дискретизацију је коришћена петров-галеркиновска (*Petrov–Galerkin*) слаба форма једначина, док су за тестне функције биране: Диракова функција, Хевисајдова функција и локално фундаментално рјешење. Иако се сваком од њих нарушава симетричност, матрице могу постати изразито ријетке због тога што се интегрални на поддоменима или на локалним границама често потиру или свде на контурне [10]. У зависности од проблема који се разматра, тиме се у већој или мањој мјери може унаприједити рачунска ефикасност методе, што је био основни мотив поменутог истраживања. Према тврђењима аутора [10], таква формулација у симулацији топлотне кондукције може бити далеко супериорнија у односу на све друге у литератури доступне методе. У поглављима која слиједе дискретизација једначина је вршена помоћу галеркиновске слабе форме, при чему је очување симетричности методе био принцип према коме су се бирале тестне функције.

Дисконтинуални карактер функција у комбинацији са галеркиновском слабом формом често може водити непрецизности и нестабилности методе. То је нарочито изражено уколико је расподјела тачака унутар домена насумична. Због тога FPM уводи концепт корекције нумеричког флукса [5]. Преглед најчешће коришћених нумеричких флуксева у дисконтинуалним галеркиновским методама приказан је у [45]. У досадашњим истраживањима на пољу FPM употребљаване су двије врсте нумеричких флуксева које методу чине симетричном и стабилном. То су *Interior Penalty* (IP) и *Local Discontinuous Galerkin* (LDG), који су довели до двије формулације FPM – *Primal* и *Mixed*. У свим случајевима разматраним у дисертацији коришћени су IP нумерички флуксеви, док су у неким од њих тестирани још и LDG флуксеви. Процедура која стоји иза корекције нумеричког флукса испреплетана је са поступком дискретизације једначина, па ће више ријечи о њој бити у наредним поглављима која се баве примјеном FPM у симулацији конкретних физичких процеса.

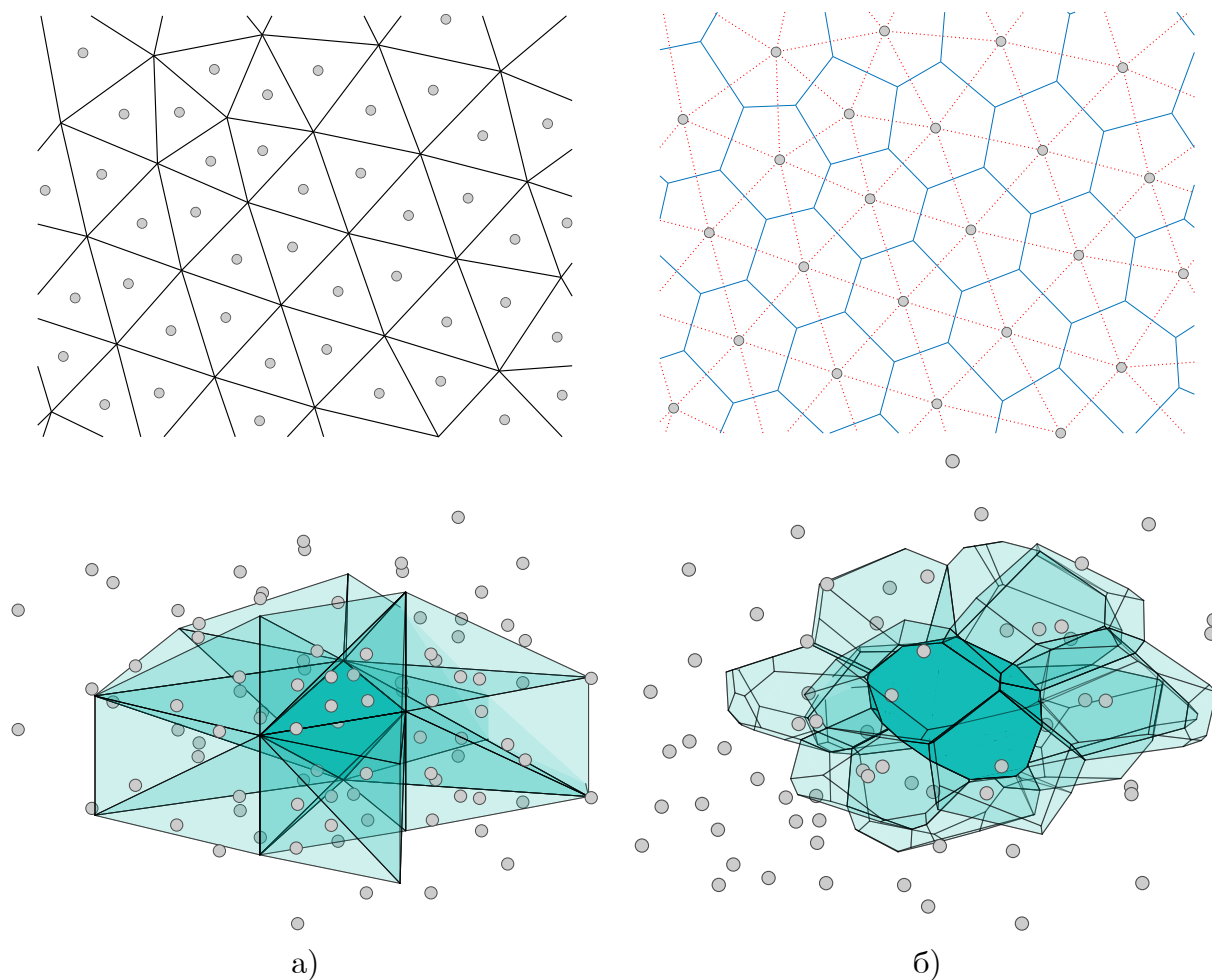
2.1 Подјела домена на поддомене

Као и у осталим безмрежним нумеричким методама, први корак у рјешавању проблема јесте расподјела тачака по посматраном домену, у којима ће бити приближно одређене вриједности тражене функције. Уз то је код FPM потребно извршити подјелу домена на поддомене тако да поддомени, произвољног облика и распореда, прекрију цјелокупни домен, а да се међусобно не преклапају, али и да се сваком поддомену додијели само једна од претходно расподијељених тачака. Више је начина на које се поменута активност може реализовати. С обзиром на мноштво рачунарских програма за генерисање мреже развијених за потребе препроцесирања код нумеричких метода на бази мреже, погодно је користити се неким од њих због високе ефикасности, а добијену мрежу трансформисати у облик погодан за FPM. Тиме се прави таква подјела домена у којој би чворови мреже имали улогу тјемена полигона/полиедара који ограничавају поддомене, док би се тачке у којима се рачунају вриједности функције смјештале у унутрашњост полигона/полиедара. Други, врло аналоган приступ јесте да се изврши Делонеова триангулација домена, а да се потом тачке смјесте у геометријска средишта добијених троуглова/тетраедара (слика 2.1.а), док је за FPM уобичајено да се тако добијена мрежа трансформише у Воронојев дијаграм (слика 2.1.б), њен дуални граф. И Делонеова триангулација и Воронојев дијаграм воде резултатима подједнаког квалите-

та, с тим што је број тачака домена у случају Воронојевог дијаграма мањи, па је тада мања и рачунска сложеност методе. Због тога је такав приступ доминантно биран за све проблеме разматране у овој дисертацији.

Финални исход подјеле домена на поддомене јесте скуп информација који, између осталог, садржи:

- координате тачака унутар домена,
- листу сусједа за сваку од тачака,
- координате тјемена полигона/полиедара који ограничавају поддомене,
- за сваку од тачака домена листу тјемена конкретног полигона/полиедра који се за њу везује,
- векторе спољашњих нормала на границе поддомена,
- листу поддомена који садрже спољашњу границу и
- листу тјемена на спољашњим границама.



Слика 2.1: Подјела домена (изнад — дводимензионални; испод — тродимензионални) на бази: а) Делонеове триангулације, б) Воронојевог дијаграма

Намеће се логичан закључак да подјела домена на поддомене изискује додатни напор који се другим безмрежним методама избјегава. Иако је дисконтинуални карактер методе главни узрочник поменути активности, предности које такав приступ собом носи надилазе наведени недостатак.

Много је различитих алгоритама и рачунарских програма који се директно или индиректно могу користити за генерисање Воронојевог дијаграма. Током припреме дисертације анализирано је више приступа и само неки од њих ће бити наведени у наставку. Међутим, њихов детаљнији опис надилази обим ове дисертације, прво због тога што методе на којима се базирају представљају засебну научну дисциплину, а друго због тога што су у области нумеричких метода углавном добро познати.

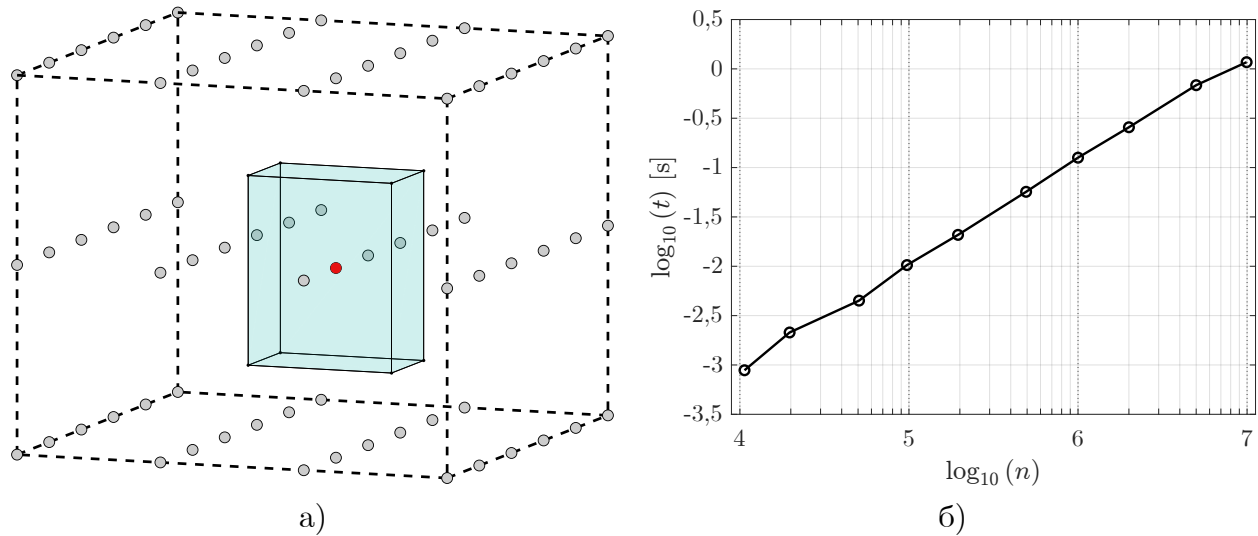
С обзиром на то да су сви програмски кодови за потребе дисертације припремани у *Matlab* програмском окружењу, погодно је користити се интегрисаним функцијама за Делонеову триангулацију и цртање Воронојевог дијаграма. Функција `delaunay(r)` даје матрицу у чијим су врстама наведене ознаке чворова који формирају троуглове/тетраедре, на основу матрице `r` која садржи координате одабраних чворних тачака унутар домена. Функција `voronoin(r)` за исти параметар даје матрицу координата тјемена која формирају ћелије Воронојевог дијаграма и промјенљиву типа `cell` са листом ознака тјемена која окружују сваку од тачака домена. И једна и друга функција су базиране на *Quickhull* алгоритму. У оба случаја су излази функција полазна основа за одређивање преосталих информација о подијељеном домену, односно не дају директно све потребне податке. Недостатак `voronoin()` функције је то што се у списку тјемена налази и тачка у бесконачности, па је добијени Воронојев дијаграм, који се протеже до у бесконачност, потребно ограничити тако да се уклопи у оквире жељеног домена. Слични проблеми се јављају и код домена који садржи отворе, јер се у њих по аутоматизму смјештају сувишне Воронојеве ћелије, које је потребно изузети.

Наредни приступ употребљен у овом раду је програмски код написан на основу Бовиер–Вотсоновог (*Bowyer–Watson*) алгоритма за Делонеову триангулацију. Иако се и његова временска комплексност [56] и временска комплексност *Quickhull* алгоритма [57] могу грубо процијенити на $O(n \log n)$, гдје је n број чворних тачака (тачака у којима се апроксимира вриједност тражене функције), показало се да је Бовиер–Вотсон алгоритам мање ефикасан.

С обзиром на широку распрострањеност нумеричких метода, мноштво је рачунарских програма развијено за потребе генерисања мреже. Приликом рјешавања проблема који су укључивали сложену геометрију, аутор дисертације се користио *open source* програмским алатом *Gmsh* за добијање троугаоне/тетраедарске мреже. Она је у појединим ситуацијама коришћена директно, док је у другим примјерима даље трансформисана у Воронојев дијаграм. Прва предност ових приступа у односу на претходно наведене интегрисане функције је једноставнија дистрибуција тачака по домену. Друга, веома битна, предност је то што *Gmsh* програм пружа информацију о сегментима мреже који се налазе на границама домена.

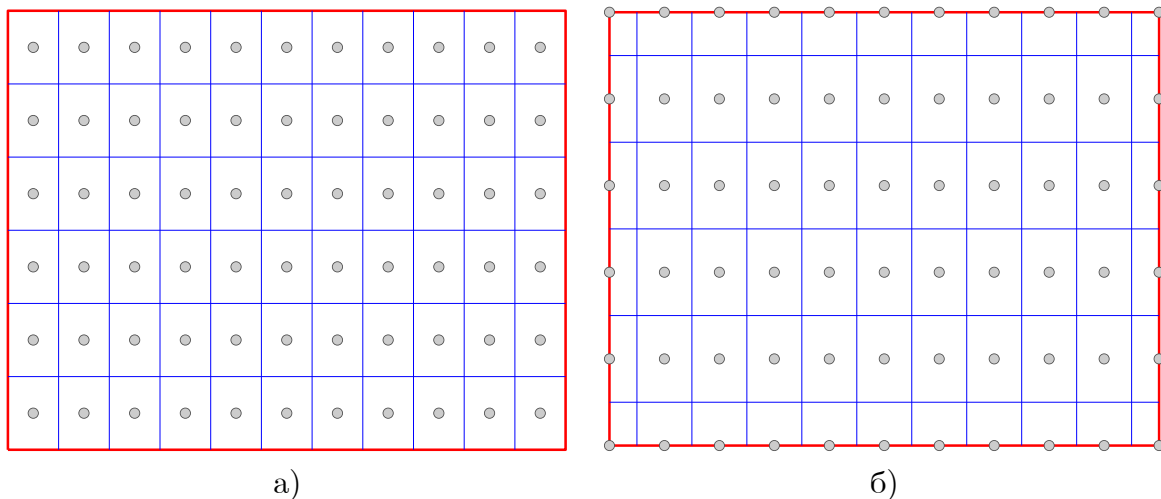
Један од споредних резултата ове дисертације је алгоритам за подјелу домена на поддомене који се извршава изузетно брзо. Базиран је само на `linspace()`, `reshape()` и `repmat()` интегрисаним *Matlab* функцијама, а пратећи код је дат у прилогу А. Његово ограничење је то што се може користити само за домене облика правоугаоника/квадра,

при чему је расподјела тачака дуж осе униформна, али број подиока може да се разликује од једне до друге осе. Алгоритам одликује изузетно ниска временска комплексност, која се може сматрати линеарном, $O(n)$, слика 2.2. Поређења ради, за тродимензионални проблем који укључује $100 \times 100 \times 100$ тачака, код се извршава за свега 0,15 секунди, док `voronoi()` функцији требају 353 секунде¹, при чему она не даје комплетне информације, већ је потребно вршити додатна израчунавања, као што је претходно речено. *Gmsh* програму за генерисање такве мреже треба 10 секунди.



Слика 2.2: Алгоритам за брзу подјелу домена облика квадрa на поддомене: а) скуп тачака са једним издвојеним поддоменом, б) временска комплексност алгоритма

Расподјела тачака се може извршити тако да се свака смјести у унутрашњост (слика 2.3.а) или тако да се неке од њих распореде и по границама домена (слика 2.3.б).



Слика 2.3: Расподјела тачака по којој су: а) све тачке у унутрашњости домена, б) неке тачке на границама домена

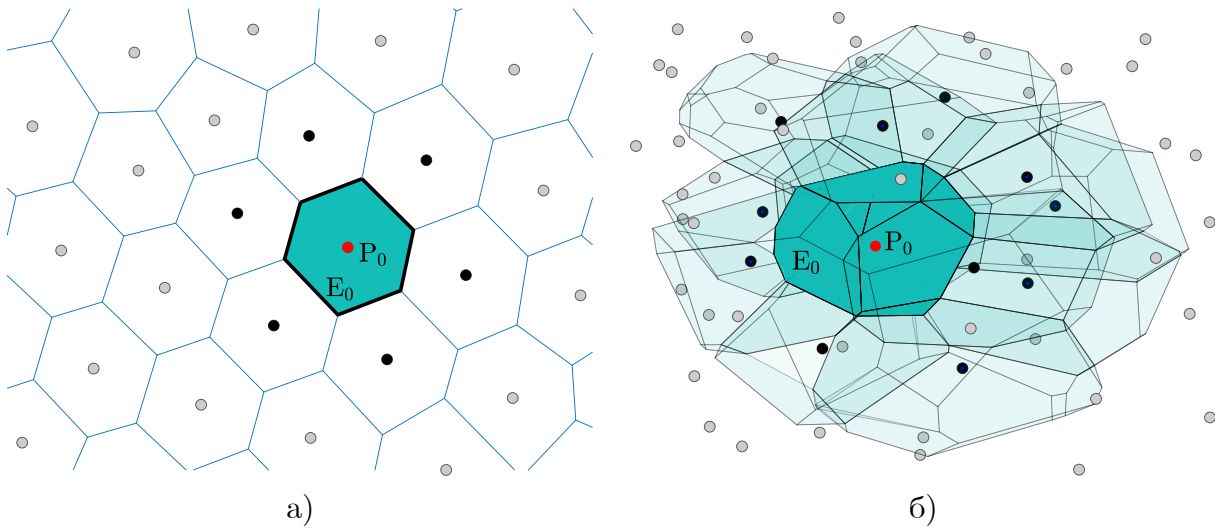
¹Карактеристике рачунара на коме је извршен код су: Intel(R) Core(TM) i3-9100T CPU @ 3,10 GHz; RAM 8,00 GB; Intel(R) UHD Graphics 630.

Могућност избора између једног од наведена два приступа нуди различите опције у погледу наметања Дирихлеовог граничног услова, што није чест случај са другим безмрежним методама, о чему ће мало више ријечи бити у наредном поглављу.

2.2 Пробна (*trial*) функција

Наредна фаза на путу развоја FPM подразумева дефинисање тзв. пробне (*trial*) функције. У питању је функција којом се апроксимира тражена физичка величина. И поред тога што дисконтинуални карактер FPM изискује додатни труд да би се извршила претходно описана подјела домена на поддомене, једна од кључних предности методе огледа се у томе што се за пробне функције бирају дисконтинуалне функције, односно функције чији се облик разликује од једног до другог поддомена. Први разлог лежи у томе што се тада пробним функцијама може дати врло једноставан полиномни облик који довољно вјеродостојно описује промјену функције на локалном нивоу, док је с друге стране изузетно погодан за интеграљење. Поступак интеграљења се најчешће може реализовати добро познатим Гаусовим квадратурама на бази само једне тачке или се у појединим ситуацијама може извршити чак и аналитички. Други разлог је лакоћа симулације пукотина, што за већину других метода може представљати нарочит, често непремостив, изазов.

Даље се за сваку од тачака домена бирају тзв. *supporting*, односно сусједне тачке. Ријеч је о скупу тачака унутар домена које директно утичу на вриједност функције у посматраној тачки, односно скуп тачака на основу којих се дефинише облик пробне функције у поддомену коме тачка припада. У другим безмрежним методама је уобичајено да се за сваку тачку веже центар сфере одређеног полупречника тако да све тачке које се налазе у унутрашњости сфере представљају сусједне тачке за посматрану тачку. С обзиром на то да се код FPM подјела домена врши на бази Делонеовог или Воронојевог дијаграма, за сусједне је најприродније изабрати оне тачке са којима посматрана тачка има заједничку границу (слика 2.4).



Слика 2.4: Сусједне тачке (подебљане) за тачку P_0 :
 а) дводимензионални домен, б) тродимензионални домен

Као што је претходно истакнуто, за све проблеме разматране у овој дисертацији непозната физичка величина је у просторном домену апроксимирана дисконтинуалном функцијом која на нивоу посматраног поддомена има линеарни карактер. Расподјела пробне функције по поддомену E_0 зависи од њене вриједности у тачки поддомена P_0 и вриједности њеног градијента у истој тачки, а по линеарном закону се мијења у зависности од положаја произвољне тачке поддомена у односу на посматрану тачку P_0 , што након развоја у Тејлоров ред првог степена даје сљедећу зависност:

$$u_h(\mathbf{r}) = u_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla u|_{P_0}, \quad \mathbf{r} \in E_0, \quad (2.1)$$

гдје су: u_h пробна функција, u_0 вриједност пробне функције у тачки P_0 , $\nabla u|_{P_0}$ градијент пробне функције у тачки P_0 . Градијент функције у претходној релацији је непозната величина. За његово апроксимирање се може употребити GFDM на основу вриједности пробне функције у сусједним тачкама. Да би се успоставила поменута веза, потребно је минимализовати дискретну тежинску L^2 норму J [5]:

$$J = \sum_{i=1}^m [(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla u|_{P_0} - (u_i - u_0)]^2 w_i, \quad (2.2)$$

гдје је: m укупан број сусједних тачака за тачку P_0 , u_i вриједност функције u_h у i -тој сусједној тачки, а w_i тежинска функција у i -тој тачки. Узимајући константне вриједности тежинских функција добија се:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)^T \nabla u|_{P_0} - (u_i - u_0) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m - x_0 & y_m - y_0 & z_m - z_0 \end{bmatrix} \nabla u|_{P_0} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_0 \\ u_0 \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} \nabla u|_{P_0} &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_0 \\ u_0 \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} \nabla u|_{P_0} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A} \nabla u|_{P_0} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \nabla u|_{P_0} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix},$$

$$\nabla u|_{P_0} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

$$\nabla u|_{P_0} = \mathbf{B} \mathbf{u}, \quad (2.3)$$

гдје је:

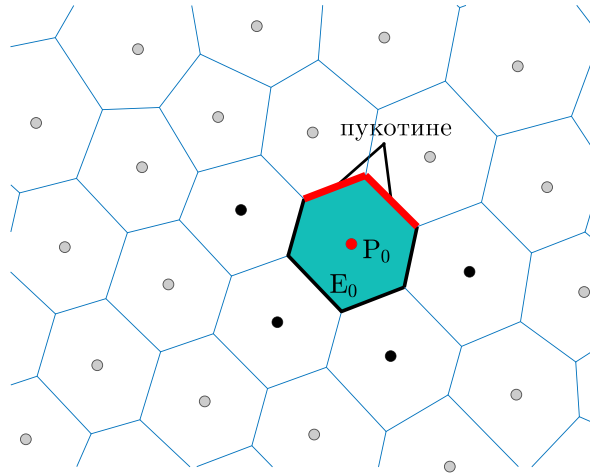
$$\mathbf{u} = [u_0 \ u_1 \ \cdots \ u_m]^T, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{m \times (m+1)}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{A} = [\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 \ \cdots \ \mathbf{r}_m - \mathbf{r}_0]^T. \quad (2.6)$$

Дефиниција функције облика градијента пробне функције (матрица $\mathbf{B}$) указује на то да матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ не би смјела да буде сингуларна. Пратећи аналогiju са радом [40] у коме су описане карактеристике GFDM, може се закључити да је $m \geq d$ потребан услов инвертибилности матрице, док је довољан услов да је ранг матрице једнак d , гдје d одговара димензији домена². Уколико се сусједи тачака дефинишу на бази Воронојевог дијаграма на раније описани начин, поменути услови су задовољени. Изузеци могу настати у ситуацијама када се разматрају проблеми који укључују пукотине. FPM се базира на приступу по коме се пукотина јавља на споју два поддомена. Тада се унутрашња граница између поддомена предефинише у пукотину тако што јој се додјељује карактер спољашње границе, док тачке које раздваја посматрана граница престају да буду сусједне (слика 2.5). У таквим ситуацијама се може десити да број сусједа за неке од тачака буде недовољно велики да би матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ била регуларна. Међутим, градијент функције у спорним тачкама могуће је апроксимирати директно методом разлика, приступом који се често може срести у *Moving Particle Semi-Implicit* и другим безмрежним *particle* методама [6, 8, 58] или се број сусједа може проширити тако што ће се скупу сусједних тачака за спорну тачку придружити сусједи сусједа.

² $d = 1$ за једнодимензионалне, $d = 2$ за дводимензионалне и $d = 3$ за тродимензионалне проблеме.



Слика 2.5: Пукотине у домену (сусједи тачке P_0 су подебљани)

Уврштавањем израза (2.3) и (2.4) у релацију (2.1) добија се пробна функција следећег облика:

$$\begin{aligned} u_h(\mathbf{r}) &= u_0 + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ u_h(\mathbf{r}) &= [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1 \times (m+1)} \mathbf{u} + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ u_h(\mathbf{r}) &= \mathbf{N} \mathbf{u}, \quad \mathbf{r} \in E_0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

гдје је:

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \mathbf{B} + [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1 \times (m+1)} \tag{2.8}$$

вектор који се назива функција облика пробне функције u_h .

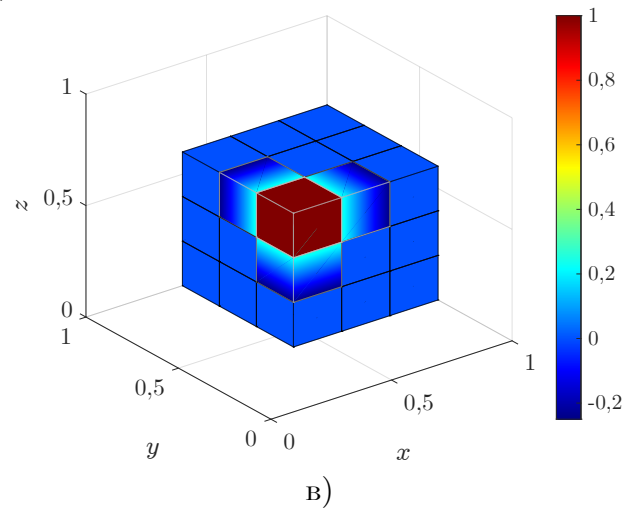
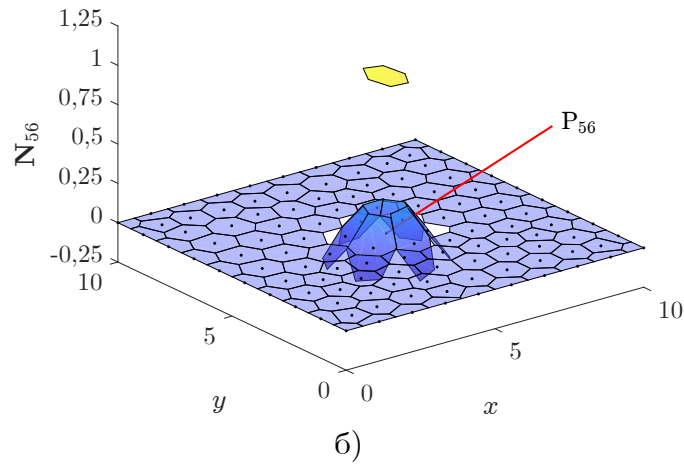
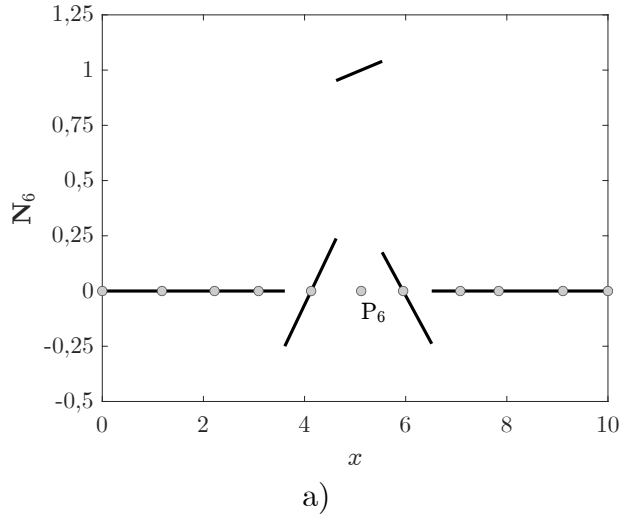
Илустрације ради, слика 2.6 даје графичку интерпретацију функције облика $\mathbf{N}$ у околини једне тачке у средишњем дијелу једнодимензионалног, дводимензионалног и тродимензионалног домена за одабрани скуп тачака.

Користећи се истим расподјелама тачака које су употријебљене за добијање слике 2.6, слика 2.7 има за циљ да прикаже изглед пробне функције u_h за конкретни једнодимензионални, дводимензионални и тродимензионални случај. За ту сврху су одабране следеће три функције:

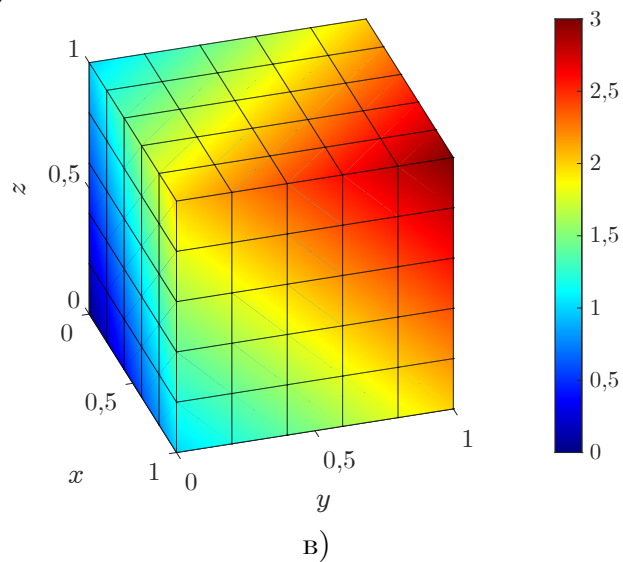
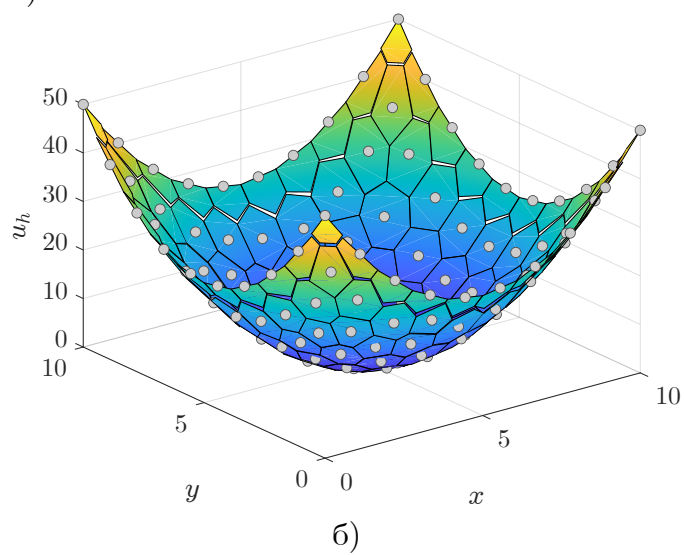
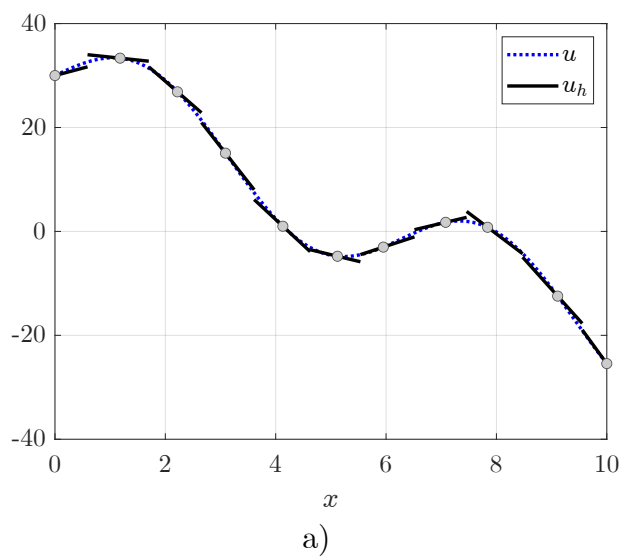
$$\begin{aligned} u(x) &= 10 \sin(x) - 5x + 30, \\ u(x; y) &= (x - 5)^2 + (y - 5)^2, \\ u(x; y; z) &= x + y + z. \end{aligned}$$

На слици 2.7 су уочљиви дисконтинуитети у пробној функцији на границама поддомена, што је очекивано. Уколико се дискретизација ПДЈ базира на галеркиновској слабој форми, као што је то случај са свим примјерима анализираним у овој дисертацији, дисконтинуитети могу довести до непрецизности резултата и нестабилности методе [5]. Поменути проблеми се превазилазе увођењем концепта корекције нумеричког флуksа на границама поддомена [5]. Суштина идеје огледа се у томе да се примјеном одговарајућих

нумеричких флуксева ублаже скокови на границама поддомена како би пробна функција која је у глобалу дисконтинуална добила приближно комадно (*piecewise*) континуални облик (облик изломљене линије у дводимензионалном приказу).



Слика 2.6: Функција облика N у околини средишње тачке: а) једнодимензионалног домена, б) дводимензионалног домена, в) тродимензионалног домена



Слика 2.7: Пробна функција u_h за функцију:
 а) $u(x) = 10 \sin(x) - 5x + 30$, б) $u(x; y) = (x - 5)^2 + (y - 5)^2$, в) $u(x; y; z) = x + y + z$

Глава 3

Подзвучно потенцијално струјање стишљивог флуида око аеродинамичких облика

3.1 Полазна једначина

Невртложно струјање невискозног флуида може се описати скаларном функцијом која се назива потенцијал брзине. Градијент потенцијала брзине даје поље брзине у струји флуида. Уколико током кретања флуид наиђе на препреку, доћи ће до поремећаја функције потенцијала. Узимајући да се непоремећено струјање флуида одвија дуж осе x , укупни потенцијал брзине може да се изрази као:

$$\Phi(x; y; z) = U_{\infty}x + \phi(x; y; z), \quad (3.1)$$

гдје је Φ потенцијал брзине, U_{∞} брзина непоремећеног тока флуида, а ϕ поремећајни потенцијал који настаје услед препреке у струји флуида.

Диференцијална једначина потенцијалног струјања стишљивог флуида има облик:

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad x, y, z \in \Omega, \quad (3.2)$$

гдје је M_{∞} Махов број непоремећене струје, док Ω симболизује цјелокупни разматрани домен. При врло малим вриједностима Маховог броја M_{∞} претходни израз добија облик Лапласове једначине и описује струјање нестишљивог флуида.

Израз (3.2) је погодно написати у следећем облику:

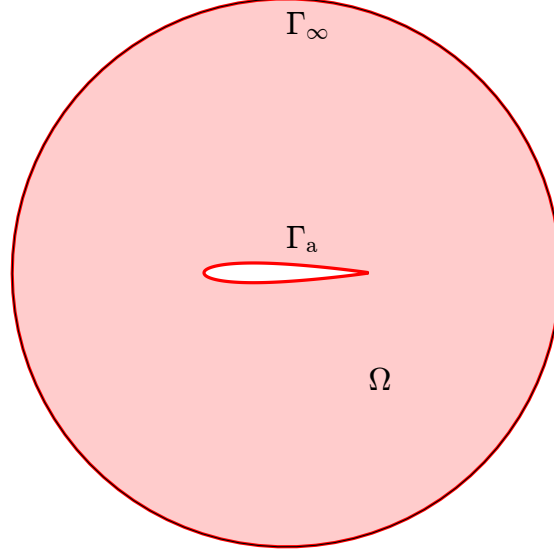
$$(\mathbf{M} \circ \nabla) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad (3.3)$$

гдје је $\mathbf{r}$ вектор положаја, „ $\circ$ “ оператор множења поља бројева, „ $\cdot$ “ оператор скаларног производа, а ∇ Хамилтонов оператор. Помоћни вектор $\mathbf{M}$ има облик $[1 - M_{\infty}^2 \quad 1 \quad 1]^T$.

3.2 Гранични услови

Приликом симулације опструјавања издвајају се двије границе (слика 3.1). Прва се јавља у контакту флуида и опструјаваног објекта (Γ_a), мјесту на коме долази до

поремећаја потенцијала брзине, и самим тим облик границе прати облик објекта. Друга се налази на довољно великој удаљености у односу на извор поремећаја, таквој да се поремећајна брзина на њој може сматрати занемарљивом (Γ_∞). Произвољног је облика и у свим примјерима анализираним у овој дисертацији бирана је кружница/површина сфере.



Слика 3.1: Домен Ω и границе домена Γ

Будући да флуид опструјава објекат, компонента брзине флуидног дјелића (на првој граници) управна на објекат се потиरे. Имајући то у виду, а полазећи од израза (3.1) и дефиниције потенцијала брзине, добија се релација која представља Нојманов гранични услов:

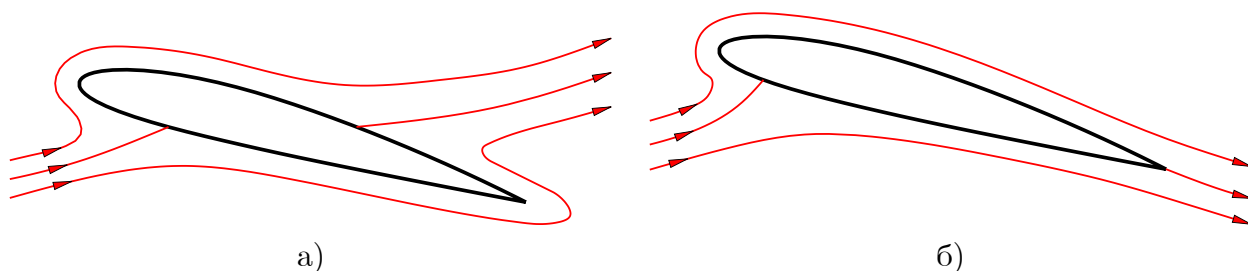
$$\nabla \Phi \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow U_\infty n_x + \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = -U_\infty n_x, \quad (3.4)$$

гдје је $\mathbf{g}$ градијент тражене функције на Нојмановој граници, $\mathbf{n}$ вектор нормале на границу домена усмјерен ка спољашњости, а n_x његова пројекција на правац осе x .

С обзиром на то да се на другој граници поремећајна брзина може сматрати занемарљивом, то поремећајни потенцијал ϕ_∞ има константну вриједност, чиме је дефинисан Дирихлеов гранични услов. У свим разматраним примјерима узето је $g_D = 0$, гдје је g_D вриједност тражене функције на Дирихлеовој граници.

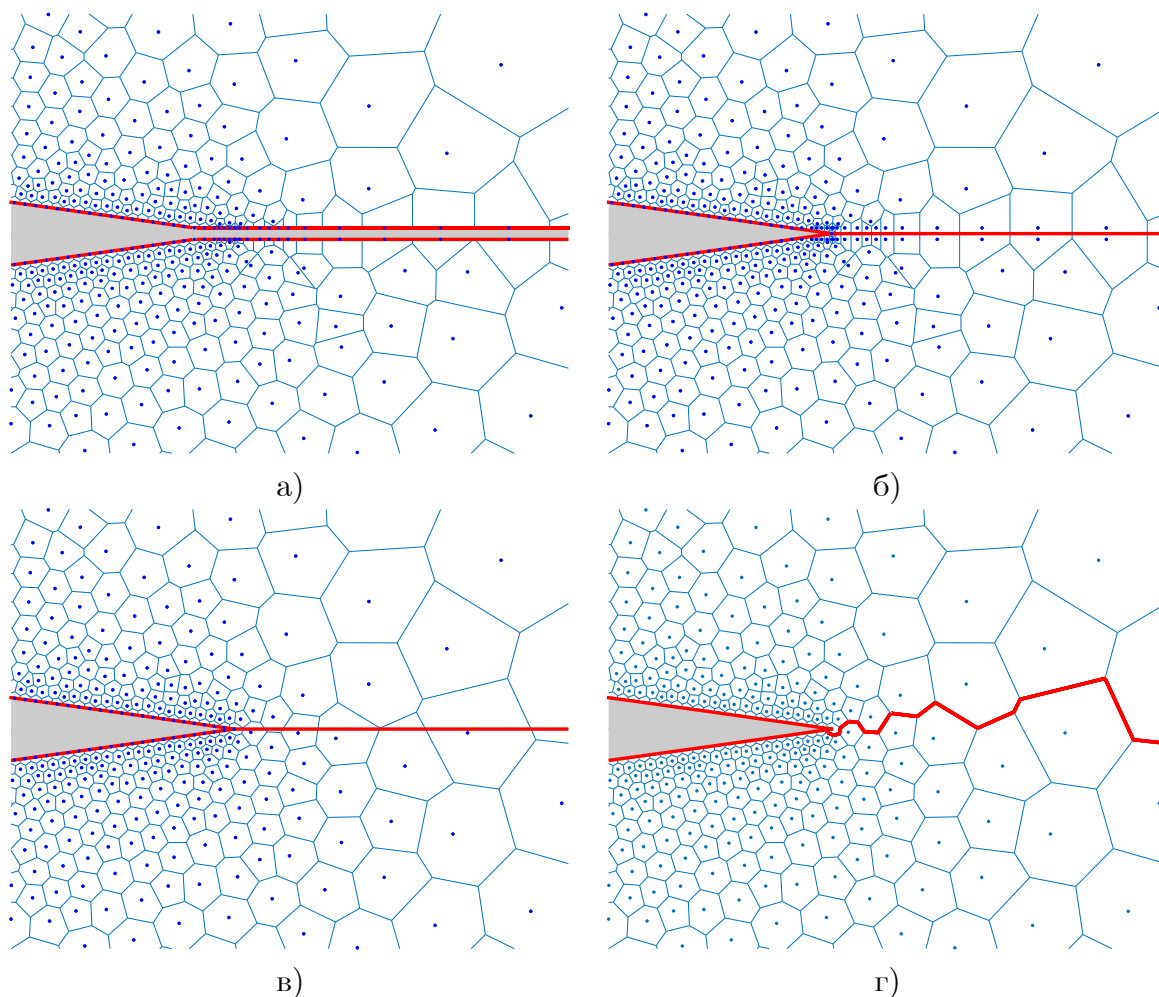
Ако се симулира асиметрично потенцијално струјање³ око аеропрофила/крила, неопходно је увести и тзв. Кута—Жуковски услов, према коме је циркулација таква да није омогућено опструјавање флуида око задње ивице аеропрофила/крила. Тиме у симулацији долази до глатког одвајања струјног тока у непосредној околини задње ивице, чиме се добија реалнија слика физичког процеса (слика 3.2).

³Под асиметричним струјањем се подразумијева ситуација у којој се профили брзине на горњој и доњој страни аеропрофила/крила међусобно разликују, а настаје када је облик аеропрофила/крила асиметричан или када је нападни угао различит од нуле.



Слика 3.2: Циркулација око аеропрофила ако Кута–Жуковски услов:
а) није узет у обзир, б) јесте узет у обзир

Више је начина за наметање Кута–Жуковски услова [25, 51, 59–61]. У овој дисертацији је одабран приступ по коме се иза задње ивице аеропрофила/крила убацује танки процјеп (унутар домена) који се понаша као чврста пукотина (слика 3.3.а), чиме се омогућава симулација скока потенцијала брзине између сусједних слојева посматраног флуида.



Слика 3.3: Увођење дисконтинуитета унутар домена иза задње ивице аеропрофила:
а) танки процјеп, б) права линија на бази правилне расподеле тачака, в) права линија на бази повећања броја поддомена, г) изломљена права линија

Мана поменуте идеје је потреба за измјенама у геометрији домена, али и то што програми за генерисање мреже понекад игноришу процјеп у домену због малих димензија, па је потребно уложити додатни напор како би се он моделовао.

Дисконтинуални карактер FPM омогућава други, врло сличан приступ. Идеја се огледа у томе да се избјегне цртање процјепа тиме што ће њега замијенити дуж/површ, таква да раздваја поддомене. Поддомени са једне и са друге стране дужи/површи престају да буду сусједни, а дужи/површи се додјељује карактер Нојманове умјесто карактера унутрашње границе. Дуж/површ се може формирати тако што ће се посебна пажња посветити дистрибуцији тачака унутар региона кроз који она пролази како би скуп унутрашњих граница формирао сегменте дужи/површи (слика 3.3.б). Недостатак таквог приступа је додатни труд око расподјеле тачака. Други начин јесте да дуж/површ пресијече насумично распоређене поддомене, чиме се од једног пресјеченог поддомена праве два (слика 3.3.в). Мана ове идеје је то што повлачи потребу за уметањем нових тачака, унутар поддомена којима тачке недостају. То изискује измјене у листи сусједа и у карактеристикама поддомена, што су додатне неповољности.

Претходно наведени приступи интуитивно су довели до идеје да се унутар домена са насумичном расподјелом тачака уведе замишљена дуж/површ иза задње ивице аеропрофила/крила и да се уоче поддомени које она пресијеца, те да се дуж/површ трансформише у комадно линеарну (изломљену, *piecewise*) дуж/површ састављену од појединих граница пресјечених поддомена (слика 3.3.г). Аналогно претходном, унутрашњим границама које она садржи додјељује се карактер спољашње (Нојманове) границе, а поддомени који су њом раздвојени престају да буду сусједни. Тиме се избјегавају: било какве измјене у геометрији домена, вођење рачуна о расподјели тачака, измјене и допуне у иницијалној дистрибуцији тачака и интервенције у геометријским карактеристикама поддомена, те се цјелокупна процедура, захваљујући специфичностима саме FPM, значајно поједностављује.

3.3 Дискретизација једначине на бази галеркиновске слабе форме

Да би се добила галеркиновска слаба форма ПДЈ (3.3), обје стране једнакости је потребно помножити тестном функцијом v и извршити интеграљење по свим сегментима домена (поддоменима):

$$\sum_{E \in \Omega} \int_E ((\mathbf{M} \circ \nabla) \cdot \nabla \phi) v \, d\Omega = 0, \quad (3.5)$$

гдје је E ознака конкретног поддомена.

Примјењујући правило извода производа⁴ над лијевој страном претходне једнакости добија се релација:

$$\sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{M} \circ \nabla v) \cdot \nabla \phi \, d\Omega = \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla \cdot ((\mathbf{M} \circ \nabla \phi) v) \, d\Omega. \quad (3.6)$$

⁴ $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} v) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) v + (\nabla v) \cdot \boldsymbol{\tau}$

Примјеном дивергентне теореме⁵ и замјеном тражене функције ϕ пробном функцијом u_h , израз (3.6) се своди на следећи облик:

$$\sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{M} \circ \nabla v) \cdot \nabla u_h d\Omega = \sum_{e \in \Gamma} \int_e (\mathbf{M} \circ \nabla u_h) \cdot \mathbf{n} v d\Gamma, \quad (3.7)$$

гдје је e ознака за границе конкретног поддомена, а Γ скуп свих унутрашњих (Γ_h) и спољашњих граница ($\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$).

Уочава се да се поступак интеграљења по конкретном поддомену врши само једном.

Узимањем тестне функције која је идентична пробној и уврштавањем изрази (2.3) у претходну релацију, члан са лијеве стране добија облик:

$$\sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{M} \circ \nabla v) \cdot \nabla u_h d\Omega = \sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{M} \circ \mathbf{B} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega = \sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{M} \circ \mathbf{B} \mathbf{u})^T \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega,$$

односно:

$$\mathbf{u}^T \left(\sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{M} \circ \mathbf{B})^T \mathbf{B} d\Omega \right) \mathbf{u}.$$

Претходно указује на то да матрица крутости посматраног поддомена E има следећи облик:

$$\mathbf{K}_E = \int_E (\mathbf{M} \circ \mathbf{B})^T \mathbf{B} d\Omega. \quad (3.8)$$

С обзиром на то да је одабрана пробна функција линеарног карактера, матрица $\mathbf{B}$ је константна, па се претходни интеграл може одредити простим множењем подинтегралне функције и површине/запремине поддомена, чиме се процес интеграљења значајно поједностављује, односно избјегава.

Уочава се да крутост поддомена зависи од функције облика градијента рачунате за конкретну тачку поддомена, па се може рећи да FPM уводи концепт крутости тачке, за разлику од FEM у којој фигурише концепт крутости елемента [5]. Матрице крутости појединачних поддомена се код FPM састављају у глобалну матрицу крутости према истој процедури као у FEM.

Као што је наглашено у претходном поглављу, непрецизност резултата и нестабилност методе су нуспојаве дисконтинуалних галеркиновских метода. За превазилажење поменутих проблема, FPM у поступак дискретизације уводи корекцију нумеричког флуksа.

⁵ $\iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) dV = \oint_S (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dS$

3.4 Дискретизација једначине на бази галеркиновске слабе форме уз корекцију нумеричког флукса

Приликом увођења корекције нумеричког флукса, полазну диференцијалну једначину другог реда (3.3) је погодно написати у облику система једначина првог реда [5]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \nabla \phi \\ (\mathbf{M} \circ \nabla) \cdot \boldsymbol{\sigma} &= 0.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Множењем прве једначине из система (3.9) тестном функцијом $\boldsymbol{\tau}$, а друге тестном функцијом v , увођењем пробних функција $\boldsymbol{\sigma}_h$ и u_h и интеграљењем лијевих и десних страна добијених релација по конкретном поддомену, добија се слаба форма једначина у сљедећем облику:

$$\begin{aligned}\int_{E \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega &= \int_{E \in \Omega} (\nabla u_h) \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega \\ \int_{E \in \Omega} (\mathbf{M} \circ \nabla) \cdot \boldsymbol{\sigma}_h v d\Omega &= 0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Примјеном правила извода производа и дивергентне теореме, систем (3.10) може да се сведе на:

$$\begin{aligned}\int_{E \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega &= - \int_{E \in \Omega} u_h (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) d\Omega + \int_{e \in \Gamma} \hat{u}_h \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma \\ \int_{E \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega &= \int_{e \in \Gamma} (\mathbf{M} \circ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h) v \cdot \mathbf{n} d\Gamma,\end{aligned}\tag{3.11}$$

гдје су $\hat{u}_h$ и $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h$ нумерички флуксеви, који представљају апроксимацију пробних функција u_h и $\boldsymbol{\sigma}_h$ на границама поддомена.

Примјеном правила извода производа и дивергентне теореме над првим сабирком са десне стране прве једначине, систем (3.11) је могуће довести на облик дефинисан сљедећим релацијама:

$$\begin{aligned}\int_{E \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega &= \int_{E \in \Omega} \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega - \int_{e \in \Gamma} u_h \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma + \int_{e \in \Gamma} \hat{u}_h \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma \\ \int_{E \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega &= \int_{e \in \Gamma} (\mathbf{M} \circ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h) v \cdot \mathbf{n} d\Gamma.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Сумирањем по свим поддоменима добија се:

$$\begin{aligned}\sum_{E \in \Omega} \int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega &= \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega + \sum_{e \in \Gamma} \int_e (\hat{u}_h - u_h) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma \\ \sum_{E \in \Omega} \int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega &= \sum_{e \in \Gamma} \int_e (\mathbf{M} \circ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h) v \cdot \mathbf{n} d\Gamma.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Увођењем оператора скока „ $\llbracket$ “ и средње вриједности „ $\{\}$ “, претходни контурни интеграл се могу написати у компактној форми у зависности од типа границе [5, 45]:

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \Gamma} \int_e (\hat{u}_h - u_h) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma &= \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \llbracket \hat{u}_h - u_h \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \{\hat{u}_h - u_h\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket d\Gamma, \\ \sum_{e \in \Gamma} \int_e (\mathbf{M} \circ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h) v \cdot \mathbf{n} d\Gamma &= \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\mathbf{M} \circ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \llbracket \mathbf{M} \circ \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h \rrbracket \{v\} d\Gamma, \end{aligned} \quad (3.14)$$

гдје Γ_h представља скуп унутрашњих, а $\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N$ унију свих (унутрашњих и спољашњих) граница, при чему је Γ_D сет Дирихлеових, а Γ_N сет Нојманових граница.

Оператори на унутрашњим границама имају облике [45]⁶:

$$\llbracket v \rrbracket = v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2, \quad \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket = \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2, \quad \{v\} = 0,5(v_1 + v_2), \quad \{\boldsymbol{\tau}\} = 0,5(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2), \quad (3.15)$$

док се исти оператори на спољашњим границама добијају из израза [45]:

$$\llbracket v \rrbracket = v \mathbf{n}, \quad \{\boldsymbol{\tau}\} = \boldsymbol{\tau}. \quad (3.16)$$

У литератури је предложено више нумеричких флуксева. Преглед често коришћених дат је у [45]. Избор флукса у великој мјери може утицати на стабилност, тачност, конзистентност и рачунску ефикасност методе [5]. Аналогно раду [5], у овом поглављу су одабрани *Interior Penalty* (IP), представљен у табели 3.1, и *Local Discontinuous Galerkin* (LDG), дат у табели 3.2. Оба флукса методу чине симетричном, стабилном и конзистентном [45]. Први води FPM-*Primal*, а други FPM-*Mixed* формулацији методе [5].

Табела 3.1: *Interior Penalty* (IP) нумерички флукс [62]

	Γ_h	Γ_D	Γ_N
$\hat{u}_h$	$\{u_h\}$	g_D	u_h
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h$	$\{\nabla u_h\} - \frac{\eta_h}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket$	$\nabla u_h - \frac{\eta_D}{h_e} (u_h - g_D) \mathbf{n}$	$\mathbf{g}$

h_e – параметар који зависи од границе, а који има димензију дужине

η_h – *penalty* параметар на унутрашњим границама

η_D – *penalty* параметар на Дирихлеовим границама

Табела 3.2: *Local Discontinuous Galerkin* (LDG) нумерички флукс [63]

	Γ_h	Γ_D	Γ_N
$\hat{u}_h$	$\{u_h\} - \boldsymbol{\beta} \cdot \llbracket u_h \rrbracket$	g_D	u_h
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h$	$\{\boldsymbol{\sigma}_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket - \frac{\eta_h}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket$	$\boldsymbol{\sigma}_h - \frac{\eta_D}{h_e} (u_h - g_D) \mathbf{n}$	$\mathbf{g}$

$\boldsymbol{\beta}$ – вектор константне вриједности на свакој граници

⁶ v је произвољни скалар, а $\boldsymbol{\tau}$ произвољни вектор, док је индексом „1“ означен први, а индексом „2“ други поддомен који дијеле посматрану унутрашњу границу.

За параметар h_e који зависи од границе најлогичније је одабрати јединичну вриједност у једнодимензионалним, а вриједност једнаку дужини границе у дводимензионалним проблемима. У тродимензионалним проблемима се може одабрати квадратни коријен површине границе која раздваја поддомене или удаљеност између тачака које дијеле границу, како је предложено у [21].

Док је код IP нумеричког флукса потребно да вриједности *penalty* параметара буду довољно велике како би се обезбиједила стабилност нумеричке методе, код LDG нумеричког флукса је стабилност осигурана *penalty* параметрима који имају позитивне вриједности [45].

3.4.1 Дискретизована једначина у FPM-*Primal* облику

Из табеле 3.1 се види да IP нумерички флуксеви зависе само од пробне функције u_h , па се може извршити елиминација пробне функције σ_h из система једначина (3.13). Узимајући да је тестна функција τ једнака $\mathbf{M} \circ \nabla v$ и позивајући се на једнакости (3.14), добија се:

$$\begin{aligned}
& \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega \\
& + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e [\![\hat{u}_h - u_h]\!] \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \{\hat{u}_h - u_h\} [\![\mathbf{M} \circ \nabla v]\!] d\Gamma \\
& = \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\mathbf{M} \circ \hat{\sigma}_h\} \cdot [\![v]\!] d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma} \int_e [\![\mathbf{M} \circ \hat{\sigma}_h]\!] \{v\} d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Уврштавање IP нумеричких флуксева из табеле 3.1 у једначину (3.17) даје сљедећи израз:

$$\begin{aligned}
& \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega \\
& + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e ([\![\{u_h\} - u_h]\!] \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} + \{\{u_h\} - u_h\} [\![\mathbf{M} \circ \nabla v]\!]) d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{g_D - u_h\} [\![\mathbf{M} \circ \nabla v]\!] d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \{u_h - u_h\} [\![\mathbf{M} \circ \nabla v]\!] d\Gamma \\
& = \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left(\left\{ \mathbf{M} \circ \left(\{\nabla u_h\} - \frac{\eta_h}{h_e} [\![u_h]\!] \right) \right\} \cdot [\![v]\!] + \left[\left[\mathbf{M} \circ \left(\{\nabla u_h\} - \frac{\eta_h}{h_e} [\![u_h]\!] \right) \right] \{v\} \right] \right) d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left[\left[\mathbf{M} \circ \left(\nabla u_h - \frac{\eta_D}{h_e} (u_h - g_D) \mathbf{n} \right) \right] \{v\} \right] d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e [\![\mathbf{M} \circ \mathbf{g}]\!] \{v\} d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Претходна формулација пружа могућност да се Дирихлеови гранични услови наметну и у јакој и у слабој форми. Ако се на границама домена поставе тачке, чланови облика $g_D - u_h$ ће имати нулту вриједност, па се интеграли који их садрже потиру, те се Дирихлеови гранични услови намећу у јакој форми. Ако нема тачака по границама домена, онда се IP члановима намећу Дирихлеови гранични услови у слабој форми.

У изразу (3.18) се уочавају сљедеће једнакости на унутрашњим границама:

$$\begin{aligned}
 \{\{v\} - v\} &= \{0,5(v_1 + v_2) - v\} = \{0,5v_1 + 0,5v_2 - v\} \\
 &= 0,5(0,5v_1 + 0,5v_2 - v_1 + 0,5v_1 + 0,5v_2 - v_2) = 0, \\
 \{\{\boldsymbol{\tau}\} - \boldsymbol{\tau}\} &= \{0,5(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) - \boldsymbol{\tau}\} = \{0,5\boldsymbol{\tau}_1 + 0,5\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}\} \\
 &= 0,5(0,5\boldsymbol{\tau}_1 + 0,5\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1 + 0,5\boldsymbol{\tau}_1 + 0,5\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_2) = \mathbf{0}, \\
 \llbracket \{v\} \rrbracket &= \llbracket 0,5(v_1 + v_2) \rrbracket = 0,5(v_1 + v_2) \mathbf{n}_1 + 0,5(v_1 + v_2) \mathbf{n}_2 \\
 &= 0,5(v_1 + v_2) \mathbf{n}_1 - 0,5(v_1 + v_2) \mathbf{n}_1 = \mathbf{0}, \\
 \llbracket \{\boldsymbol{\tau}\} \rrbracket &= \llbracket 0,5(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) \rrbracket = 0,5(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n}_1 + 0,5(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n}_2 \\
 &= 0,5(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n}_1 - 0,5(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\
 \llbracket \llbracket v \rrbracket \rrbracket &= \llbracket v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2 \rrbracket = (v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_1 + (v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_2 \\
 &= (v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_1 - (v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\
 \llbracket \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \rrbracket &= \llbracket \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \rrbracket = (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_1 + (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_2 \\
 &= (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_1 - (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \mathbf{n}_1 = \mathbf{0}, \\
 \{\llbracket v \rrbracket\} &= \{v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2\} = 0,5(v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2) + 0,5(v_1 \mathbf{n}_1 + v_2 \mathbf{n}_2) = \llbracket v \rrbracket, \\
 \{\llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket\} &= \{\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2\} = 0,5(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2) + 0,5(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2) = \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket,
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

док се примјећује да на Дирихлеовој граници важи:

$$\{v\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket = v \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \llbracket v \rrbracket \cdot \boldsymbol{\tau} = \llbracket v \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\}. \tag{3.20}$$

Уврштавањем добијених једнакости у једначину (3.18) и увођењем ознаке η која има улогу η_h параметра у случају унутрашњих, а η_D параметра у случају Дирихлеових граница, добија се:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\mathbf{e} \in \Omega_E} \int \nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega \\
 &- \sum_{\mathbf{e} \in (\Gamma_h \cup \Gamma_D)_e} \int \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} d\Gamma \\
 &+ \sum_{\mathbf{e} \in \Gamma_D_e} \int \llbracket g_D \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} d\Gamma \\
 &= \sum_{\mathbf{e} \in (\Gamma_h \cup \Gamma_D)_e} \int \left(\mathbf{M} \circ \left(\{\nabla u_h\} - \frac{\eta}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right) \right) \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma \\
 &+ \sum_{\mathbf{e} \in \Gamma_D_e} \int \left[\frac{\eta}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \right] \{v\} d\Gamma \\
 &+ \sum_{\mathbf{e} \in \Gamma_N_e} \int \llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\} d\Gamma,
 \end{aligned}$$

из чега слиједи:

$$\begin{aligned}
& \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega \\
& - \sum_{e \in (\Gamma_h \cup \Gamma_D)} \int_e \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} d\Gamma \\
& - \sum_{e \in (\Gamma_h \cup \Gamma_D)} \int_e \left(\mathbf{M} \circ \left(\{\nabla u_h\} - \frac{\eta}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right) \right) \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma \\
& = \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\left[\frac{\eta}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \right] \{v\} - \llbracket g_D \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\} d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Претходна релација представља коначни облик једначине потенцијалног струјања стишљивог флуида добијен дискретизацијом ПДЈ (3.3) на бази FPM-*Primal* приступа. Битно је нагласити да увођење корекције нумеричког флукса није промијенило чињеницу да се интегралање по поддомену врши само једном, али и да је одговарајућа подинтегрална функција константна, што процес интегралања значајно поједностављује.

3.4.2 Дискретизована једначина у FPM-*Mixed* облику

Пошто LDG нумерички флуксеви зависе и од пробне функције u_h и од пробне функције σ_h , није погодно вршити елиминацију функције σ_h из система једначина (3.13), као што је претходно био случај. Уврштавање нумеричких флуксева из табеле 3.2 у систем једначина (3.13), уз позивање на једнакости (3.14), (3.19) и (3.20) и замјену ознака η_h и η_D ознаком η , даје сљедећи систем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{E \in \Omega} \int_E \sigma_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega = \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega \\
& - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} d\Gamma - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\boldsymbol{\beta} \cdot \llbracket u_h \rrbracket\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{g_D - u_h\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket d\Gamma \\
& \sum_{E \in \Omega} \int_E \sigma_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega = \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left\{ \mathbf{M} \circ \left(\{\sigma_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \sigma_h \rrbracket - \frac{\eta}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right) \right\} \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left[\mathbf{M} \circ \left(\sigma_h - \frac{\eta}{h_e} (u_h - g_D) \mathbf{n} \right) \right] \{v\} d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\} d\Gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{E \in \Omega} \int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\Omega + \sum_{E \in \Omega} \int_E (-\nabla u_h \cdot \boldsymbol{\tau}) \, d\Omega \\
 & + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \llbracket u_h \rrbracket \cdot (\{\boldsymbol{\tau}\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket) \, d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{u_h\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \, d\Gamma \\
 & = \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{g_D\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{E \in \Omega} \int_E (-\boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v)) \, d\Omega + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (\{\boldsymbol{\sigma}_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket) \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \, d\Gamma \\
 & + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{\boldsymbol{\sigma}_h\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \, d\Gamma + \sum_{e \in (\Gamma_h \cup \Gamma_D)} \int_e \left(-\left\{ \frac{\eta}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) \, d\Gamma \\
 & = \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(-\left\{ \frac{\eta}{h_e} g_D \mathbf{n} \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) \, d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e (-\llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\}) \, d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Узимајући да је $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h$, из претходне релације произилази коначни облик једначине потенцијалног струјања стисљивог флуида добијен FPM-*Mixed* приступом:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{E \in \Omega} \int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h) \, d\Omega + \sum_{E \in \Omega} \int_E (-\nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h)) \, d\Omega \\
 & + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \llbracket u_h \rrbracket \cdot (\{\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket) \, d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{u_h\} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \, d\Gamma \\
 & = \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{g_D\} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{E \in \Omega} \int_E (-\boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v)) \, d\Omega + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (\{\boldsymbol{\sigma}_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket) \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \, d\Gamma \\
 & + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{\boldsymbol{\sigma}_h\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \, d\Gamma + \sum_{e \in (\Gamma_h \cup \Gamma_D)} \int_e \left(-\left\{ \frac{\eta}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) \, d\Gamma \\
 & = \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(-\left\{ \frac{\eta}{h_e} g_D \mathbf{n} \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) \, d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e (-\llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\}) \, d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Аналогно FPM-*Primal* варијанти, основни гранични услови могу да се наметну и у јакој и у слабој форми. Ако се узме константна функција облика за $\boldsymbol{\sigma}_h$, и FPM-*Mixed* приступ ће водити константним подинтегралним функцијама приликом интеграловања по поддомену.

Систем једначина (3.23) може да се запише у скраћеном облику:

$$\begin{aligned}
 c(\boldsymbol{\sigma}_h; \boldsymbol{\sigma}_h) + s(\boldsymbol{\sigma}_h; u_h) &= f_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_h) \\
 s(v; \boldsymbol{\sigma}_h) + J(u_h; v) &= f_u(u_h),
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

гдје је:

$$\begin{aligned}
c(\boldsymbol{\sigma}_h; \boldsymbol{\sigma}_h) &= \sum_{E \in \Omega_E} \int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega, \\
s(\boldsymbol{\sigma}_h; u_h) &= \sum_{E \in \Omega_E} \int_E (-\nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h)) d\Omega \\
&\quad + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \llbracket u_h \rrbracket \cdot (\{\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket) d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{u_h\} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket d\Gamma, \\
s(v; \boldsymbol{\sigma}_h) &= \sum_{E \in \Omega_E} \int_E (-\boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v)) d\Omega \\
&\quad + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (\{\boldsymbol{\sigma}_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket) \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{\boldsymbol{\sigma}_h\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) d\Gamma, \\
J(u_h; v) &= \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left(- \left\{ \frac{\eta_h}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) d\Gamma \\
&\quad + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(- \left\{ \frac{\eta_D}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) d\Gamma, \\
f\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_h) &= \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{g_D\} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket d\Gamma, \\
f_u(u_h) &= \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(- \left\{ \frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e (-\llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\}) d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

3.5 Нумеричка имплементација

3.5.1 Нумеричка имплементација у FPM-*Primal* облику

Једначину потенцијалног струјања стишљивог флуида у дискретизованом облику (3.21) погодно је написати у сљедећој форми:

$$\begin{aligned}
&\sum_{E \in \Omega_E} \int_E \nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega \\
&+ \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{M} \circ \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket - \mathbf{M} \circ \{\nabla u_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket - \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma \\
&+ \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{M} \circ \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket - \mathbf{M} \circ \{\nabla u_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket - \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma \\
&= \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\left\llbracket \frac{\eta_D}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \right\rrbracket \{v\} - \llbracket g_D \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma \\
&+ \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\} d\Gamma,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ОДНОСНО:

$$\mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_E \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_h \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_D \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_D + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_N, \quad (3.27)$$

гдје је:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_E \mathbf{u} &= \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_h \mathbf{u} &= \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{M} \circ \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket - \mathbf{M} \circ \{\nabla u_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket - \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_D \mathbf{u} &= \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{M} \circ \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket - \mathbf{M} \circ \{\nabla u_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket - \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_D &= \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\left\llbracket \frac{\eta_D}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \right\rrbracket \{v\} - \llbracket g_D \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_N &= \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\} d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из израза (3.27) слиједи матрична једначина:

$$\begin{aligned} \sum (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_h + \mathbf{K}_D) \mathbf{u} &= \sum (\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_N), \\ \mathbf{K} \mathbf{u} &= \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

чијим се рјешавањем добија вектор вриједности пробне функције у одабраним тачкама домена $(\mathbf{u})$.

Да би се добили коначни облици матрица за поддомене $\mathbf{K}_E$, $\mathbf{K}_h$, и $\mathbf{K}_D$ и вектора $\mathbf{F}_D$ и $\mathbf{F}_N$, у интеграле из израза (3.28) су уврштене пробне и тестне функције и њихови градијенти. За тестну функцију v одабрана је пробна функција u_h , дефинисана изразом (2.7). Добијени резултати су приказани у наставку.

Први интеграл из израза (3.28) води матрици $\mathbf{K}_E$:

$$\int_E \nabla \mathbf{u}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v) d\Omega = \int_E \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{B} \mathbf{u}) d\Omega = \int_E \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}) \mathbf{u} d\Omega,$$

која има сљедећи облик:

$$\mathbf{K}_E = \int_E \mathbf{B}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}) d\Omega. \quad (3.30)$$

Други интеграл из израза (3.28) води матрици $\mathbf{K}_h$:

$$\int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{M} \circ \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket - \mathbf{M} \circ \{\nabla u_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket - \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
&= \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1 u_{h_1} + \mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2 u_{h_2}) \cdot \mathbf{n}_1 v_1 d\Gamma \\
&+ \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1 u_{h_1} + \mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2 u_{h_2}) \cdot \mathbf{n}_2 v_2 d\Gamma \\
&- \int_e \mathbf{M} \circ \frac{1}{2} (\nabla u_{h_1} + \nabla u_{h_2}) \cdot (\mathbf{n}_1 v_1 + \mathbf{n}_2 v_2) d\Gamma \\
&- \int_e (\mathbf{n}_1 u_{h_1} + \mathbf{n}_2 u_{h_2}) \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \nabla v_1 + \mathbf{M} \circ \nabla v_2) d\Gamma \\
\\
&= \int_e \frac{\eta_h}{h_e} ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \\
&+ \int_e \frac{\eta_h}{h_e} ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \\
&- \int_e \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2 \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \\
&- \int_e (\mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \\
\\
&= \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
\\
&= \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \mathbf{u} \right) d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \right) \mathbf{u} d\Gamma \\
 &+ \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \right) \mathbf{u} d\Gamma \\
 &+ \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \right) \mathbf{u} d\Gamma \\
 &+ \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \right) \mathbf{u} d\Gamma,
 \end{aligned}$$

која има следећи облик:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_h &= \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} \left((\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \right) \right) d\Gamma \\
 &+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} \left((\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \right) \right) d\Gamma \\
 &+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} \left((\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2)^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_1) \right) \right) d\Gamma \\
 &+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} \left((\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2)^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}_2) \right) \right) d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Трећи интеграл из израза (3.28) води матрици $\mathbf{K}_D$:

$$\begin{aligned}
 &\int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{M} \circ \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket - \mathbf{M} \circ \{\nabla u_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket - \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{M} \circ \mathbf{n} u_h \cdot \mathbf{n} v - \mathbf{M} \circ \nabla u_h \cdot \mathbf{n} v - \mathbf{n} u_h \cdot \mathbf{M} \circ \nabla v \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \mathbf{N} u \cdot \mathbf{n} \mathbf{N} u - \mathbf{M} \circ \mathbf{B} u \cdot \mathbf{n} \mathbf{N} u - \mathbf{n} \mathbf{N} u \cdot \mathbf{M} \circ \mathbf{B} u \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n})^T \mathbf{n} \mathbf{N} u - \mathbf{u}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B})^T \mathbf{n} \mathbf{N} u - \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}) u \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n})^T \mathbf{n} \mathbf{N} - (\mathbf{M} \circ \mathbf{B})^T \mathbf{n} \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}) \right) \mathbf{u} d\Gamma,
 \end{aligned}$$

која има следећи облик:

$$\mathbf{K}_D = \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n})^T \mathbf{n} \mathbf{N} - (\mathbf{M} \circ \mathbf{B})^T \mathbf{n} \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}) \right) d\Gamma. \tag{3.32}$$

Четврти интеграл из израза (3.28) води вектору $\mathbf{F}_D$:

$$\begin{aligned}
& \int_e \left(\left[\frac{\eta_D}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \right] \{v\} - \llbracket g_D \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\left\{ \frac{\eta_D}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \right\} \cdot \llbracket v \rrbracket - \llbracket g_D \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\llbracket v \rrbracket \cdot \left\{ \frac{\eta_D}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \right\} - \{\mathbf{M} \circ \nabla v\} \cdot \llbracket g_D \rrbracket \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\mathbf{n} v \cdot \frac{\eta_D}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) - \mathbf{M} \circ \nabla v \cdot \mathbf{n} g_D \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} \cdot \frac{\eta_D}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) - \mathbf{M} \circ \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} g_D \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \frac{\eta_D}{h_e} g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) - \mathbf{u}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B})^T \mathbf{n} g_D \right) d\Gamma \\
&= \int_e \mathbf{u}^T g_D \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) - (\mathbf{M} \circ \mathbf{B})^T \mathbf{n} \right) d\Gamma,
\end{aligned}$$

који има следећи облик:

$$\mathbf{F}_D = \int_e g_D \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) - (\mathbf{M} \circ \mathbf{B})^T \mathbf{n} \right) d\Gamma. \quad (3.33)$$

Унутар петог интеграла из израза (3.28) уочава се чинилац $\llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket$ који се, уз позивање на релацију (3.4), може представити на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket &= (\mathbf{M} \circ \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{M} \circ \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} \\
&= (1 - M_\infty^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z = \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} n_z - M_\infty^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x \\
&= \nabla \phi \cdot \mathbf{n} - M_\infty^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} - M_\infty^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x = -U_\infty n_x - M_\infty^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x \\
&= - \left(U_\infty + M_\infty^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x.
\end{aligned} \quad (3.34)$$

Уколико се узме да је пројекција поремећајне брзине на правац осе x помножена квадратом Маховог броја знатно мања од брзине непоремећене струје флуида, онда се може узети да је:

$$\llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \approx -U_\infty n_x = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}, \quad (3.35)$$

па се из петог интеграла у изразу (3.28) добија:

$$\int_e \llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\} d\Gamma \approx \int_e \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} v d\Gamma = - \int_e U_\infty n_x v d\Gamma = - \int_e U_\infty n_x \mathbf{N} \mathbf{u} d\Gamma = - \int_e U_\infty n_x \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T d\Gamma,$$

одакле слиједи вектор $\mathbf{F}_N$:

$$\mathbf{F}_N = - \int_e U_\infty n_x \mathbf{N}^T d\Gamma. \quad (3.36)$$

Иако је то раније констатовано, због битности се наглашава да се једини интеграл по поддомену (3.30) своди на производ подинтегралне функције и површине/запремене поддомена, што процес интеграљења чини тривијалним. Границе су у дводимензионалним проблемима облика прости праве линије, а у тродимензионалним облика полигона. За рјешавање интеграла (3.31)–(3.33) и (3.36), у овој дисертацији су употријебљене прости Гаусове квадратуре, премда је за дводимензионалне проблеме поменуте интеграле било једноставно одредити чак и аналитички.

Анализирајући кораке који воде нумеричком рјешењу, уочава се да је рјешавање система једначина (3.29) у рачунском смислу далеко захтјевније од свих других израчунавања због инверзије матрице крутости $\mathbf{K}$. У грубој процјени се може рећи да временска комплексност FPM-*Primal* приступа износи $O(n^3)$ ако се за рјешавање поменутог система једначина употребљава Гаусова метода елиминације⁷. Међутим, како је матрица крутости $\mathbf{K}$ ријетка и уз то симетрична, систем једначина (3.29) се може ријешити напреднијим алгоритмима којима је временску комплексност могуће снижити. Нпр., инверзија ријетке матрице се алгоритмом [64] може реализовати с комплексношћу $O(n^{2,331645})$, а алгоритмом [65] с комплексношћу $O(n^{2,27159})$, док сложеност алгоритма [66] износи $O(n^{2,2131})$.

3.5.2 Нумеричка имплементација у FPM-*Mixed* облику

Систем једначина (3.24) може се трансформисати у матричну једначину сљедећег облика:

$$\begin{bmatrix} \sum \mathbf{C}_E & \sum (\mathbf{S}_E + \mathbf{S}_h + \mathbf{S}_D)^T \\ \sum (\mathbf{S}_E + \mathbf{S}_h + \mathbf{S}_D) & \sum (\mathbf{J}_h + \mathbf{J}_D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \mathbf{F}_D \\ \sum (\mathbf{F}_{uD} + \mathbf{F}_{uN}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\sigma \\ \mathbf{F}_u \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

чије подматрице произилазе из израза (3.25). Уколико се за тестну функцију v одабере пробна функција u_h , дефинисана изразом (2.7), а за пробну функцију $\boldsymbol{\sigma}_h$ функција ∇u_h , одговарајуће матрице и вектори на нивоу поддомена ће имати облике изведене у наставку. Због општости ће се користити запис по коме је:

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (3.38)$$

иако ће се у крајњем узети да је $\mathbf{L} = \mathbf{B}$.

Први интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{C}_E$:

$$\int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega = \int_E \mathbf{L} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{L} \mathbf{u}) d\Omega = \int_E \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{L}) \mathbf{u} d\Omega,$$

⁷ n је број тачака унутар домена.

која има следећи облик:

$$\mathbf{C}_E = \int_E \mathbf{L}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{L}) d\Omega. \quad (3.39)$$

Други интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{S}_E$:

$$\int_E (-\nabla u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h)) d\Omega = - \int_E \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{L} \mathbf{u}) d\Omega = - \int_E \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{L}) \mathbf{u} d\Omega,$$

која има следећи облик:

$$\mathbf{S}_E = - \int_E \mathbf{B}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{L}) d\Omega. \quad (3.40)$$

Трећи интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{S}_h$:

$$\begin{aligned} & \int_e \llbracket u_h \rrbracket \cdot (\{\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket) d\Gamma \\ &= \int_e (u_{h_1} \mathbf{n}_1 + u_{h_2} \mathbf{n}_2) \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1} + \frac{1}{2} \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2} + \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1})) + \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2})) \right) d\Gamma \\ &= \int_e \left(u_{h_1} \mathbf{n}_1 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1} + u_{h_1} \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1})) \right) d\Gamma \\ &+ \int_e \left(u_{h_1} \mathbf{n}_1 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2} + u_{h_1} \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2})) \right) d\Gamma \\ &+ \int_e \left(u_{h_2} \mathbf{n}_2 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1} + u_{h_2} \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1})) \right) d\Gamma \\ &+ \int_e \left(u_{h_2} \mathbf{n}_2 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2} + u_{h_2} \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta} (\mathbf{n}_2 \cdot (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2})) \right) d\Gamma \\ &= \int_e \left(u_{h_1} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1} + u_{h_1} (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}) ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1}) \right) d\Gamma \\ &+ \int_e \left(u_{h_1} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2} + u_{h_1} (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}) ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2}) \right) d\Gamma \\ &+ \int_e \left(u_{h_2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1} + u_{h_2} (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}) ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1}) \right) d\Gamma \\ &+ \int_e \left(u_{h_2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2} + u_{h_2} (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}) ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2}) \right) d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_e \left(u_{h_1} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1} + u_{h_1} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(u_{h_1} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2} - u_{h_1} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) (\mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(u_{h_2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1} - u_{h_2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1} \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(u_{h_2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \frac{1}{2} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2} + u_{h_2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) (\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2} \right) d\Gamma \\
\\
&= \int_e u_{h_1} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1} d\Gamma \\
&+ \int_e u_{h_1} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2} d\Gamma \\
&+ \int_e u_{h_2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_1} d\Gamma \\
&+ \int_e u_{h_2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{h_2} d\Gamma \\
\\
&= \int_e \left((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_1^T \boldsymbol{\beta} \right) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \left((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_1^T \boldsymbol{\beta} \right) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{L}_2 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \left((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_2^T \boldsymbol{\beta} \right) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{L}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \left((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_2^T \boldsymbol{\beta} \right) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{L}_2 \mathbf{u} d\Gamma \\
\\
&= \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_1^T \boldsymbol{\beta} \right)^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{L}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_1^T \boldsymbol{\beta} \right)^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{L}_2 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_2^T \boldsymbol{\beta} \right)^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{L}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_2^T \boldsymbol{\beta} \right)^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{L}_2 \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_1 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{L}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_1 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{L}_2 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_2 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{L}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_2 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{L}_2 \mathbf{u} d\Gamma,
\end{aligned}$$

која има следећи облик:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_h &= \int_e \mathbf{N}_1^T \left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_1 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{L}_1 d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{N}_1^T \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_1 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)^T \mathbf{L}_2 d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{N}_2^T \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_2 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{L}_1 d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{N}_2^T \left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{n}_2 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)^T \mathbf{L}_2 d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Четврти интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{S}_D$:

$$\begin{aligned}
&\int_e \{u_h\} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket d\Gamma \\
&= \int_e \llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h\} d\Gamma \\
&= \int_e (\mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{L} \mathbf{u}) d\Gamma \\
&= \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{L}) \mathbf{u} d\Gamma,
\end{aligned}$$

која има следећи облик:

$$\mathbf{S}_D = \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{L}) d\Gamma. \tag{3.42}$$

Пети интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{S}_E^T$:

$$\int_E (-\boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \nabla v)) d\Omega = - \int_E \mathbf{L} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{B} \mathbf{u}) d\Omega = - \int_E \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{B}) \mathbf{u} d\Omega.$$

Шести интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{S}_h^T$:

$$\begin{aligned}
& \int_e (\{\boldsymbol{\sigma}_h\} + \boldsymbol{\beta} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket) \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) d\Gamma \\
&= \int_e (\{\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h\} + \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\beta} \llbracket \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket) \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma \\
&= \int_e \left(\frac{1}{2} \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1} + \frac{1}{2} \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2} + (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \mathbf{n}_2) \right) \cdot (\mathbf{n}_1 v_1 + \mathbf{n}_2 v_2) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1}) \cdot \mathbf{n}_1 v_1 + (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{n}_1 v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2}) \cdot \mathbf{n}_1 v_1 + (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_1 v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_1}) \cdot \mathbf{n}_2 v_2 + (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{n}_2 v_2 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_{h_2}) \cdot \mathbf{n}_2 v_2 + (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\beta}) (\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_2 v_2 \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \mathbf{n}_1) \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \mathbf{n}_2) \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \mathbf{n}_1) \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \mathbf{n}_2) \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)) \cdot \mathbf{n}_1 v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)) \cdot \mathbf{n}_2 v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)) \cdot \mathbf{n}_1 v_2 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 + \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)) \cdot \mathbf{n}_2 v_2 \right) d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 + (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_1) v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 - (\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1)) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_1) v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 - (\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_2) v_2 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 + (\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2)) (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_2) v_2 \right) d\Gamma \\
\\
&= \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 + \boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 - \boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 - \boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 + \boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_2) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 \right) d\Gamma \\
\\
&= \int_e \boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_1 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 d\Gamma \\
&+ \int_e \boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_1 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 d\Gamma \\
&+ \int_e \boldsymbol{\sigma}_{h_1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_2 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 d\Gamma \\
&+ \int_e \boldsymbol{\sigma}_{h_2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_2 \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2 d\Gamma \\
\\
&= \int_e \mathbf{L}_1 \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{L}_2 \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{L}_1 \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{L}_2 \mathbf{u} \cdot \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{L}_1^T \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_1^T \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{L}_2^T \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_1^T \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{L}_1^T \left(\frac{1}{2} - \mathbf{n}_2^T \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{L}_2^T \left(\frac{1}{2} + \mathbf{n}_2^T \boldsymbol{\beta} \right) (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Седми интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{S}_\mathbf{D}^T$:

$$\begin{aligned}
&\int_e \{ \boldsymbol{\sigma}_h \} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) d\Gamma \\
&= \int_e \boldsymbol{\sigma}_h \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n} v) d\Gamma \\
&= \int_e \mathbf{L} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \mathbf{N} \mathbf{u} d\Gamma \\
&= \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{L}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \mathbf{N} \mathbf{u} d\Gamma.
\end{aligned}$$

Осми интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{J}_\mathbf{h}$:

$$\begin{aligned}
&\int_e \left(- \left\{ \frac{\eta_h}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) d\Gamma \\
&= - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{n}_1 u_{h1} + \mathbf{n}_2 u_{h2}) \cdot (\mathbf{M} \circ (\mathbf{n}_1 v_1 + \mathbf{n}_2 v_2)) d\Gamma \\
&= - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{n}_1 u_{h1} + \mathbf{n}_2 u_{h2})^T (\mathbf{M} \circ (\mathbf{n}_1 v_1 + \mathbf{n}_2 v_2)) d\Gamma \\
&= - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{n}_1 u_{h1} + \mathbf{n}_2 u_{h2})^T ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) v_1 + (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) v_2) d\Gamma \\
&= - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u})^T ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \\
&= - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T + \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T) ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \\
&= - \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T) ((\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 + (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2) \right) \mathbf{u} d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_e \mathbf{u}^T \frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
 &\quad - \int_e \mathbf{u}^T \frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} d\Gamma \\
 &\quad - \int_e \mathbf{u}^T \frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} d\Gamma \\
 &\quad - \int_e \mathbf{u}^T \frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u} d\Gamma,
 \end{aligned}$$

која има следећи облик:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_h &= - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 d\Gamma \\
 &\quad - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 d\Gamma \\
 &\quad - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 d\Gamma \\
 &\quad - \int_e \frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Девети интеграл из израза (3.25) води матрици $\mathbf{J}_D$:

$$\begin{aligned}
 &\int_e \left(- \left\{ \frac{\eta_D}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) d\Gamma \\
 &= - \int_e \frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{n} u_h \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n} v) d\Gamma \\
 &= - \int_e \frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{M} \circ \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u}) d\Gamma \\
 &= - \int_e \frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \mathbf{N} \mathbf{u} d\Gamma,
 \end{aligned}$$

која има следећи облик:

$$\mathbf{J}_D = - \int_e \frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}) \mathbf{N} d\Gamma. \tag{3.44}$$

Десети интеграл из израза (3.25) води вектору $\mathbf{F}_{\sigma_D}$:

$$\begin{aligned}
 &\int_e \{g_D\} \llbracket \mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h \rrbracket d\Gamma \\
 &= \int_e g_D (\mathbf{M} \circ \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{n} d\Gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_e g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{L}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\
 &= \int_e g_D \mathbf{u}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{L})^T \mathbf{n} d\Gamma,
 \end{aligned}$$

који има следећи облик:

$$\mathbf{F}_{\sigma D} = \int_e g_D (\mathbf{M} \circ \mathbf{L})^T \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3.45)$$

Једанаести интеграл из израза (3.25) води вектору $\mathbf{F}_{uD}$:

$$\begin{aligned}
 &\int_e \left(- \left\{ \frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} \right\} \cdot (\mathbf{M} \circ \llbracket v \rrbracket) \right) d\Gamma \\
 &= - \int_e (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}v) \cdot \frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} d\Gamma \\
 &= - \int_e (\mathbf{M} \circ \mathbf{n}\mathbf{N}\mathbf{u})^T \frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} d\Gamma \\
 &= - \int_e \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n})^T \frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} d\Gamma,
 \end{aligned}$$

који има следећи облик:

$$\mathbf{F}_{uD} = - \int_e \frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{N}^T (\mathbf{M} \circ \mathbf{n})^T \mathbf{n} d\Gamma. \quad (3.46)$$

Дванаести интеграл из израза (3.25) уз релацију (3.35) води вектору $\mathbf{F}_{uN}$:

$$\begin{aligned}
 &\int_e (- \llbracket \mathbf{M} \circ \mathbf{g} \rrbracket \{v\}) d\Gamma \\
 &\approx \int_e (- \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \{v\}) d\Gamma \\
 &= \int_e U_\infty \mathbf{n}_x v d\Gamma \\
 &= \int_e U_\infty \mathbf{n}_x \mathbf{N}\mathbf{u} d\Gamma \\
 &= \int_e U_\infty \mathbf{n}_x \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T d\Gamma,
 \end{aligned}$$

који има следећи облик:

$$\mathbf{F}_{uN} = \int_e U_\infty \mathbf{n}_x \mathbf{N}^T d\Gamma. \quad (3.47)$$

У изразима (3.39) и (3.40) се врши интеграљење по поддомену, при чему су подинтегралне функције константне, као што је и претходно био случај. Уочава се да је ред система (3.37), односно његов број степени слободе, двоструко већи у односу систем једначина у FPM-*Primal* форми (3.29), па је рачунска сложеност методе самим тим већа.

3.6 Нумерички примјери

Резултат претходно описане процедуре је вектор апроксимативних вриједности поремећајног потенцијала ϕ (вриједности пробне функције u_h) у одабраним тачкама домена. На основу њих и израза (2.3) могу се одредити поремећајне брзине на нивоу поддомена као градијент поремећајног потенцијала. Њиховим сумирањем са брзином непоремећене струје флуида $U_\infty \mathbf{i}$ добија се укупно поље брзине, које даље омогућава да се одреде бездимензиони коефицијенти притиска C_p и узгона C_L .

За потенцијална струјања која се одвијају при ниским Маховим бројевима, коефицијент притиска се може одредити из релације [51]:

$$C_p = 1 - \left(\frac{U}{U_\infty} \right)^2, \quad (3.48)$$

гдје је U интензитет брзине флуида у посматраној тачки домена.

Коефицијент узгона се може одредити из израза [67]:

$$C_L = \frac{2F_L}{\rho_\infty S U_\infty^2}, \quad (3.49)$$

гдје је F_L сила узгона, ρ_∞ густина флуида у непоремећеној струји, а S референтна (релевантна) површина у тродимензионалним проблемима, односно дужина тетиве аеро-профила l у дводимензионалним проблемима.

Кроз више конкретних примјера, у наставку су анализиране могућности FPM у симулацији опструјавања неколико различитих аеродинамичких облика. Подјела домена на поддомене је у сваком од њих вршена трансформацијом троугаоне/тетраедарске мреже добијене помоћу *Gmsh* програма. У примјерима са аналитичким рјешењем, оцјена квалитета добијених резултата базирана је на анализи релативних грешака у вриједности поремећајног потенцијала r_0 и поремећајне брзине r_1 , које су процјењене помоћу Лебегове (*Lebesgue*) норме:

$$r_0 = \frac{\|u_h - \phi\|_{L^2}}{\|\phi\|_{L^2}}, \quad r_1 = \frac{\|\nabla u_h - \nabla \phi\|_{L^2}}{\|\nabla \phi\|_{L^2}}, \quad (3.50)$$

гдје је:

$$\|\phi\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} \phi^2 d\Omega \right)^{1/2}, \quad \|\nabla \phi\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 d\Omega \right)^{1/2}. \quad (3.51)$$

3.6.1 Двостепенационални проблеми

У првом примјеру се разматра униформно опструјавање цилиндра бесконачне дужине. Укупни потенцијал брзине се у аналитичком облику може изразити као суперпозиција потенцијала брзине униформног струјања и потенцијала брзине услед постојања двопола (дублета). Ако се за полупречник цилиндра одабере вриједност:

$$R = \left(\frac{\kappa}{2\pi U_\infty} \right)^{1/2}, \quad (3.52)$$

гдје је κ снага двопола концентрисаног у координатном почетку, може се показати да коефицијент притиска C_p на његовом обиму има вриједност:

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta, \quad (3.53)$$

при чему поремећајни потенцијал на обиму цилиндра има облик [68]:

$$\phi = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{x}{R^2} = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\cos \theta}{R} = U_\infty x = U_\infty R \cos \theta. \quad (3.54)$$

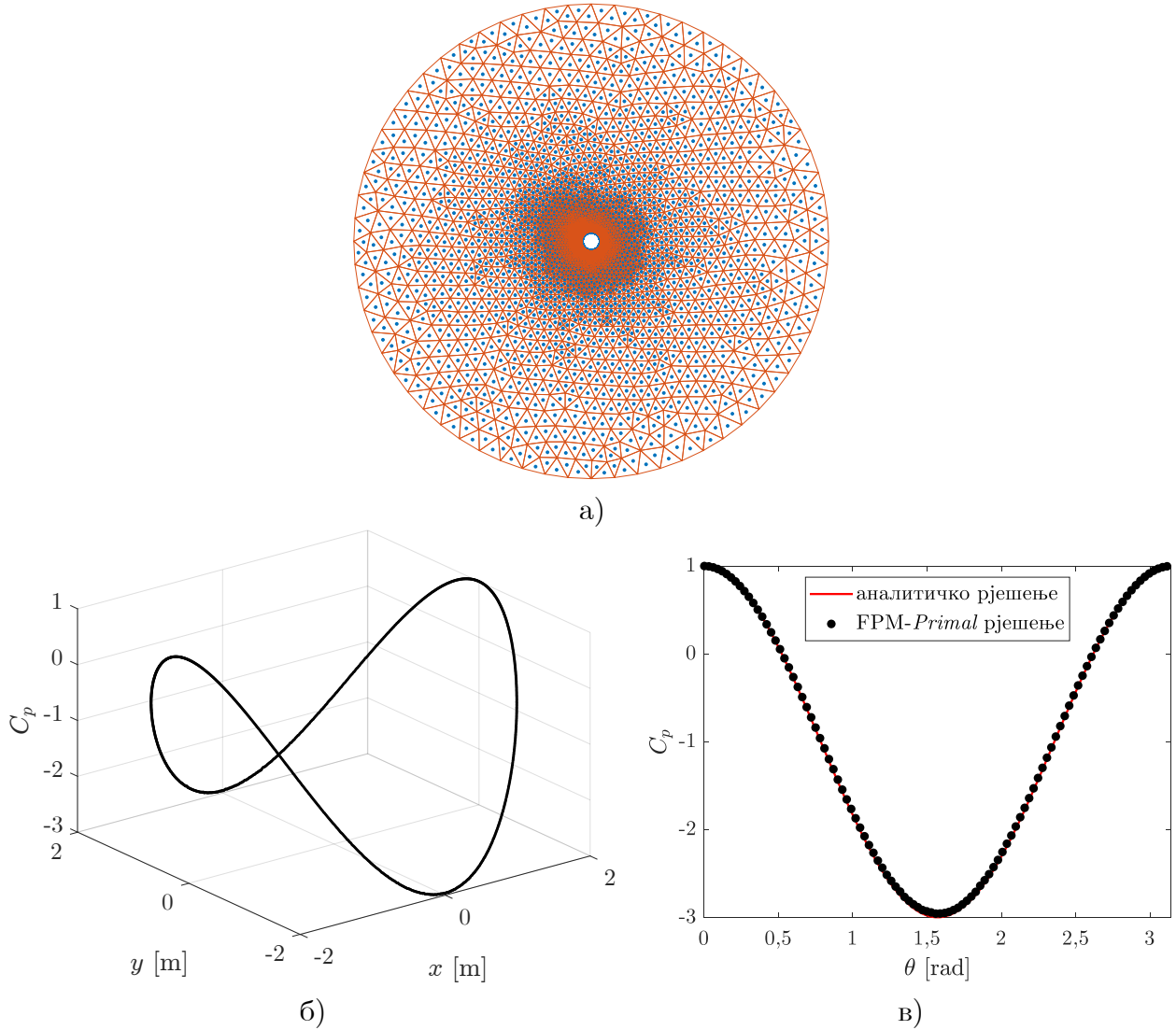
Извођење аналитичких рјешења (3.52) и (3.53) дато је у прилогу Б.

За добијање нумеричког рјешења помоћу FPM разматрано је опструјавање кружнице полупречника 2 m. За брзину непоремећене струје флуида одабрана је вриједност 1 m/s, а снага двопола је одређена из релације (3.52). На кружници егзистира Нојманов гранични услов, дефинисан релацијом (3.4). За Дирихлеову границу одабрана је концентрична кружница полупречника 50 m, под претпоставком да је толика кружница довољно велика у односу на мању да би се поремећајна брзина на обиму велике кружнице могла сматрати занемарљивом. Домен је простор између двије кружнице.

Слике 3.4 и 3.5 приказују резултате одређене FPM-*Primal* приступом. На основу искустава из претходних истраживања, попут [5], за η параметар је бирана вриједност 5 на унутрашњим, а вриједност 10 на Дирихлеовим границама. За параметар који зависи од границе h_e одабрана је вриједност једнака дужини границе. У рјешењу са слике 3.4 домен је издијељен на Делонеове троуглове и садржи 17794 поддомена, од чега се њих 1260 (око 7%) граничи са мањом кружницом. Уочава се да у оваквом приступу нема тачака распоређених по самим границама. Релативна грешка r_0 на обиму опструјаване кружнице износи 0,00473, док релативна грешка r_1 има вриједност 0,00596. Подјела домена на поддомене у рјешењу са слике 3.5 извршена је на бази Воронојевог дијаграма, добијеног трансформацијом претходно поменуто Делонеове троугаоне мреже. Таква подјела дала је 9559 поддомена, од чега се њих 1260 (око 13%) граничи са мањом кружницом. Примјећује се да је у оваквом приступу дио тачака постављен на самим границама, за разлику од претходне ситуације. Релативна грешка r_0 износи 0,00595, док релативна грешка r_1 има вриједност 0,00687.

На основу слика 3.4 и 3.5 и вриједности грешака уочава се да је веома добро преклапање нумеричких резултата са аналитичким. Оно што је још битно запазити јесте да тачност резултата не зависи од тога да ли је дио тачака смјештен на границама домена или су све распоређене искључиво по његовој унутрашњости. Иако врло приближни, резултати са Делонеовим троугловима су за нијансу бољи од резултата са Воронојевим

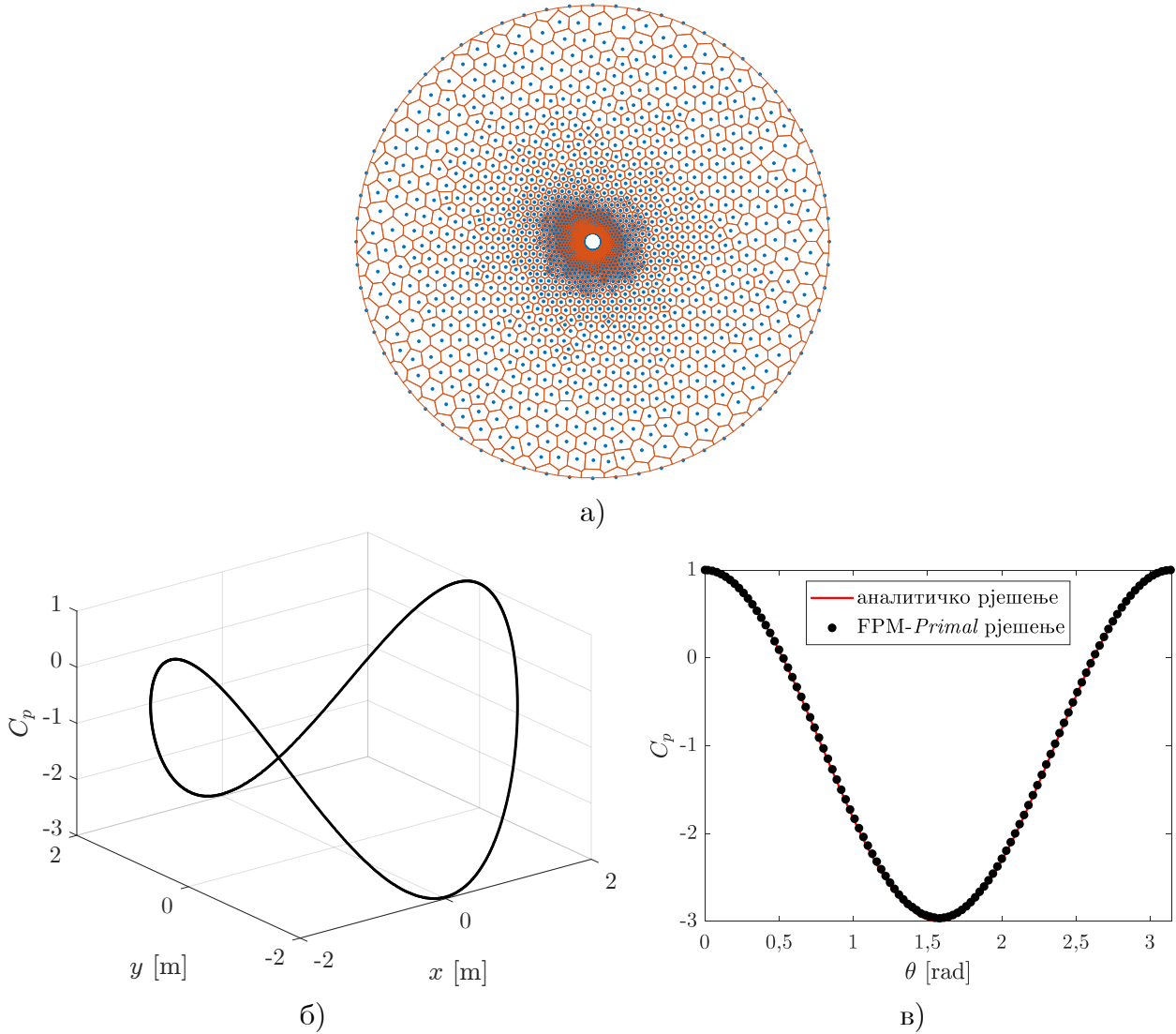
дијаграмом. Разлог лежи у томе што је код случаја са Делонеовом триангулацијом број тачака унутар домена већи за око 86%. Међутим, с таквим повећањем броја тачака истовремено расте и рачунска сложеност методе. У грубој процјени се може рећи да је у конкретном случају приступ на бази Делонеове мреже спорији најмање $1,86^{2,2131} \approx 4$ пута.



Слика 3.4: Потенцијално опструјавање кружнице, при чему је домен издијељен на Делонеове троуглове: а) домен, б) коефицијент притиска на обиму кружнице добијен FPM-Primal приступом, в) поређење FPM-Primal и аналитичког рјешења на горњој половини кружнице

Ради додатног поређења направљена су још два теста. У првом је домен са 17580 тачака подијељен на Воронојеве ћелије од којих се њих 1144 (око 6,5%) граничи са мањом кружницом. У таквом сценарију је добијена релативна грешка $r_0 = 0,00401$ и релативна грешка $r_1 = 0,00575$, што одговара малочас наведеним вриједностима грешака које се добијају при подјели домена на 17794 Делонеова троугла. У другом тесту је домен са 9588 тачака подијељен на Воронојеве ћелије од којих се њих 588 (око 6%) граничи са мањом

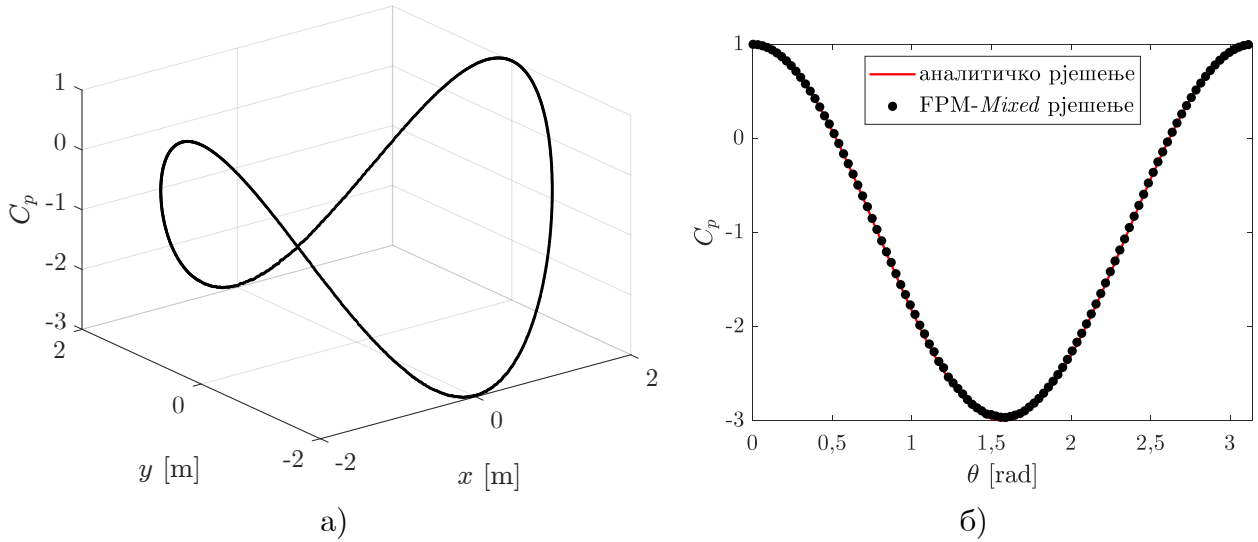
кружницом. Релативна грешка r_0 износи 0,00431, а релативна грешка r_1 износи 0,00979. Без обзира на то што је задржан мањи број тачака, мало је снижен ниво r_0 грешке (у односу на малопређашњу ситуацију са 9559 Воронојевих ћелија) простим подешавањем односа броја тачака на граници и ван ње. У сваком случају, за сваку од размотрених ситуација ред величине грешке је подједнако низак.



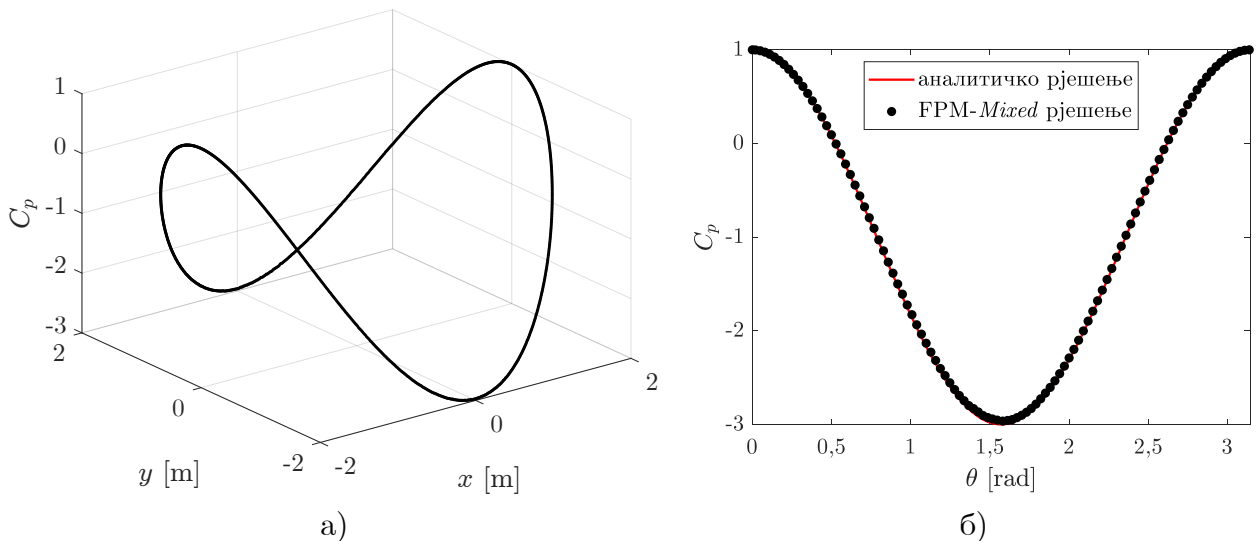
Слика 3.5: Потенцијално опструјавање кружнице, при чему је домен издијељен на Воронојеве ћелије: а) домен, б) коефицијент притиска на обиму кружнице добијен FPM-Primal приступом, в) поређење FPM-Primal и аналитичког рјешења на горњој половини кружнице

Слике 3.6 и 3.7 приказују резултате првог димензионалног примјера који су одређени FPM-Mixed приступом, гдје је за η параметар на унутрашњим границама бирана вриједност 5, а на Дирихлеовим вриједност 10, док је β вектору дат облик $[1 \ 1]^T$. За параметар који зависи од границе h_e одабрана је вриједност једнака дужини посматране границе. Приликом добијања рјешења са слике 3.6 домен је издијељен на исти начин као на слици 3.4.а, односно на Делонеове троуглове, и садржи 17794 поддомена,

од чега се њих 1260 (око 7%) граничи са мањом (опструјаваном) кружницом. Релативна грешка r_0 на обиму опструјаване кружнице износи 0,00220, док релативна грешка r_1 има вриједност 0,00437. Приликом добијања рјешења са слике 3.7 домен је издијељен на исти начин као на слици 3.5.а, односно на Воронојеве ћелије, и садржи 9559 поддомена, од чега се њих 1260 (око 13%) граничи са мањом кружницом. Релативна грешка на обиму опструјаване кружнице r_0 износи 0,00624, док релативна грешка r_1 има вриједност 0,00719.



Слика 3.6: Потенцијално опструјавање кружнице, при чему је домен издијељен на Делонеове троуглове: а) коефицијент притиска на обиму кружнице добијен FPM-Mixed приступом, б) поређење FPM-Mixed и аналитичког рјешења на горњој половини кружнице

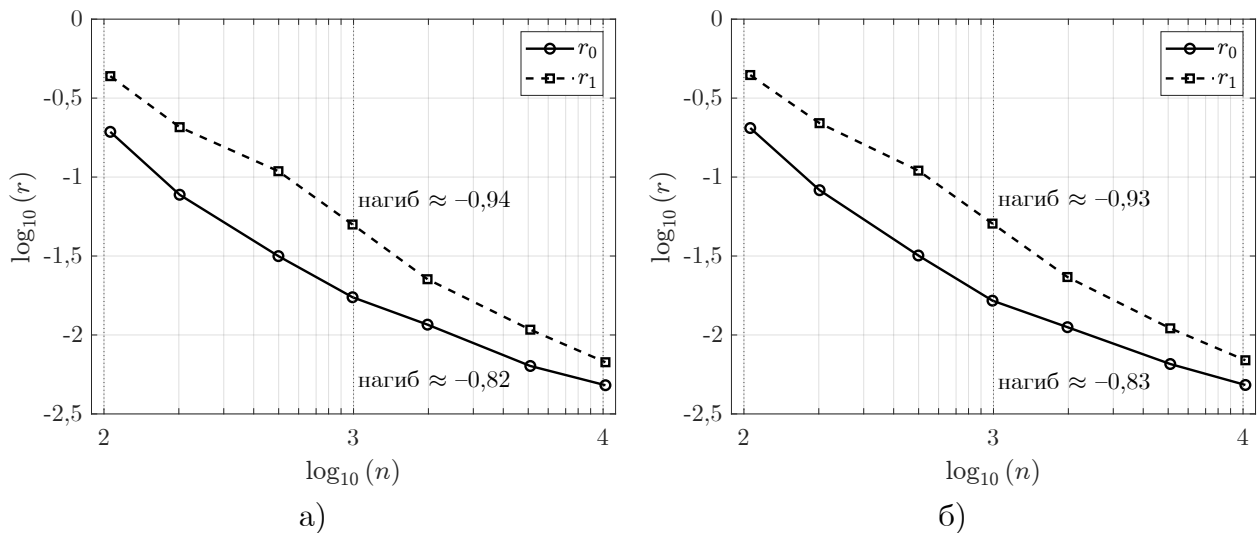


Слика 3.7: Потенцијално опструјавање кружнице, при чему је домен издијељен на Воронојеве ћелије: а) коефицијент притиска на обиму кружнице добијен FPM-Mixed приступом, б) поређење FPM-Mixed и аналитичког рјешења на горњој половини кружнице

Премда је додатна активност потребна да би се троугаона мрежа претворила у Воронојев дијаграм⁸, такав приступ ће се користити у свим будућим примјерима. Првенствени разлог је то што се увођењем Воронојеве подјеле значајно смањује број тачака домена, без нарушавања нивоа тачности резултата, чиме се у великој мјери снижава рачунска сложеност методе.

Претходно изложени резултати указују на то да су рјешења добијена FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* приступом међусобно врло подударна, с тим што је у случају FPM-*Mixed* варијанте ред система једначина двоструко већи, па је рачунска сложеност методе, у грубој процјени, већа макар $2^{2,2131} \approx 4,6$ пута, а меморијски простор за складиштење података о укупној матрици крутости већи четири пута⁹. Стога ће се у свим будућим примјерима користити FPM у *Primal* облику.

Да би се испитала конвергентност FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* приликом симулирања дводимензионалних струјања, одабран је претходни проблем с обзиром на то да за њега постоји аналитичко рјешење, (3.54). Зависност релативних грешака у вриједности поремећајног потенцијала r_0 и вриједности поремећајне брзине r_1 на опструјаваној кружници од броја тачака домена приказана је на слици 3.8.



Слика 3.8: Степен конвергенције резултата при анализи дводимензионалних струјања примјеном: а) FPM-*Primal* приступа, б) FPM-*Mixed* приступа

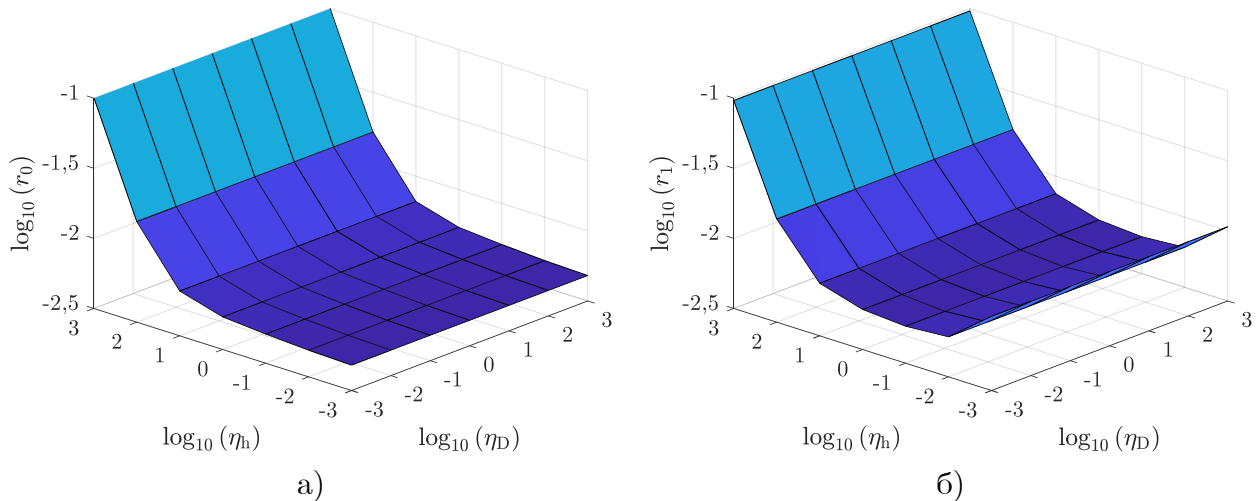
Подјела домена на поддомене (приликом добијања рјешења са слике 3.8) базирана је на Воронојевом дијаграму. Проблем је ријешен за домен истих димензија и облика као у претходном случају и непромијењене U_∞ , κ , η , β и h_e величине. Иако је расподјела тачака насумична, у сваком анализираном случају се 10 до 18% њих смјештало на граници са мањом кружницом. Уочава се да вриједност грешака опада са порастом броја тачака, чиме је конвергентност FPM потврђена. Такође се примјећује да је степен конвергенције FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* приступа готово идентичан.

⁸Једном припремљен код за трансформацију Делонеове троугаоне мреже у Воронојев дијаграм у својој највећој мјери остаје непромијењен и за друге облике поддомена, те се поменути активност углавном своди на једноставно покретање кода, без претходних модификација.

⁹Меморијски простор је већи четири пута уколико се матрица записује у класичном формату.

Утицај η параметара и β вектора на вриједност релативних грешака (r_0 и r_1) анализиран је у наставку. Одабран је исти проблем као у пређашњем случају. Домен је подијељен на 9559 Воронојевих ћелија, од чега се њих 1260 (око 13%) граничи са мањом кружницом.

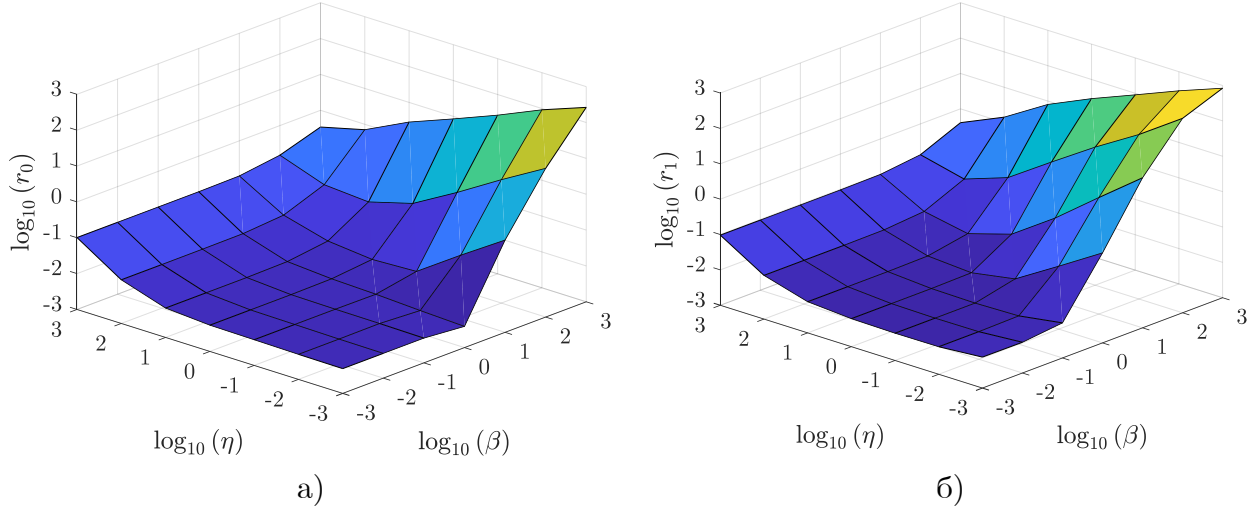
На слици 3.9 приказане су величине грешака добијене FPM-*Primal* приступом, при чему су вриједности η параметара на унутрашњим и Дирихлеовим границама вариране у интервалу од 10^{-3} до 10^3 . Грешка r_0 се креће у распону од 0,00477 до 0,10128, а грешка r_1 у опсегу од 0,00583 до 0,09623. У примјеру са слике 3.5 су за исту подјелу домена на поддомене добијене грешке које су блиске минималним из претходно наведених интервала ($r_0 = 0,00473$, $r_1 = 0,00596$) при вриједностима η параметара од $\eta_h = 5$ и $\eta_D = 10$. Уочава се да су поменуте вриједности добро одабране, те ће исте бити употребљаване и у наредним примјерима. На основу слике 3.9 се примјећује да превелике вриједности η_h параметара снижавају прецизност методе, што је у складу са закључком изведеним у [5], али и да није добро бирати премале вриједности η параметара. Вриједности блиске јединици су најпогодније. Посматрајући слику 3.9 стиче се утисак да је утицај η_D параметра на квалитет резултата занемарљив. Међутим, такав закључак се не може сматрати општим, већ је тачан само у конкретном случају, када се посматра потенцијално опструјавање аеродинамичких облика, али не и када се анализира неки други феномен. Разлог лежи у томе што је у конкретној ситуацији много доминантнији утицај Нојмановог граничног услова.



Слика 3.9: Утицај η_h и η_D параметара код FPM-*Primal* варијанте за дводимензионалне проблеме на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке

На слици 3.10 приказане су величине грешака добијене FPM-*Mixed* приступом, при чему су вриједности $\eta_h = \eta_D = \eta$ параметра вариране у интервалу од 10^{-3} до 10^3 , а вриједности чланова $\beta = \beta [1 \ 1]^T$ вектора у распону од $\beta = 10^{-3}$ до $\beta = 10^3$. Грешка r_0 се креће у опсегу од 0,00391 до 264,29, а грешка r_1 у опсегу од 0,00590 до 838,15. Иако утицај η параметара на квалитет резултата није превише изражен, уочљиво је да је погодно бирати вриједности блиске 0,1. У рјешењу са слике 3.7 је за исту подјелу домена на поддомене узето $\eta_h = 5$ и $\eta_D = 10$, па су добијене грешке биле нешто веће у односу на минималне из претходно поменутих опсега ($r_0 = 0,00624$, $r_1 = 0,00719$). С

друге стране, β вектор има велики утицај на квалитет добијених резултата. Што су вриједности његових чланова мање, то су резултати бољи, при чему су резултати за $\beta > 10$ углавном неупотребљиви. За сваку β вриједност која је нижа од 1 добијају се готово идентични резултати.

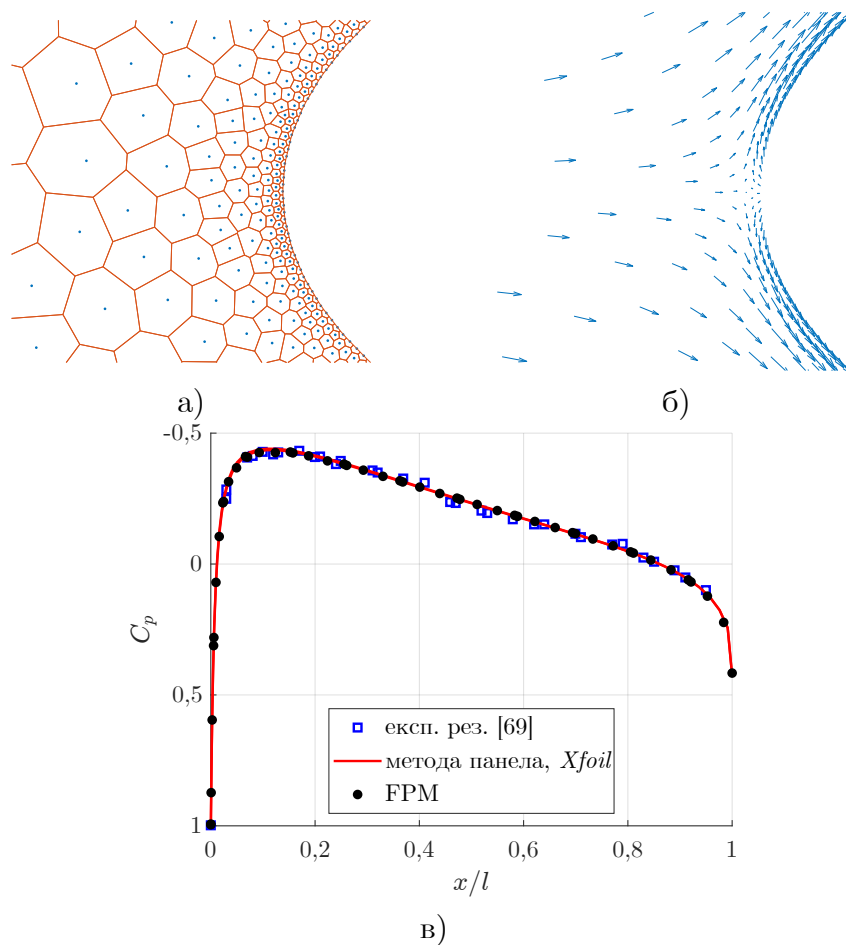


Слика 3.10: Утицај $\eta_h = \eta_D = \eta$ параметра и $\beta = \beta [1 \ 1]^T$ вектора код FPM-Mixed варијанте за дводимензионалне проблеме на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке

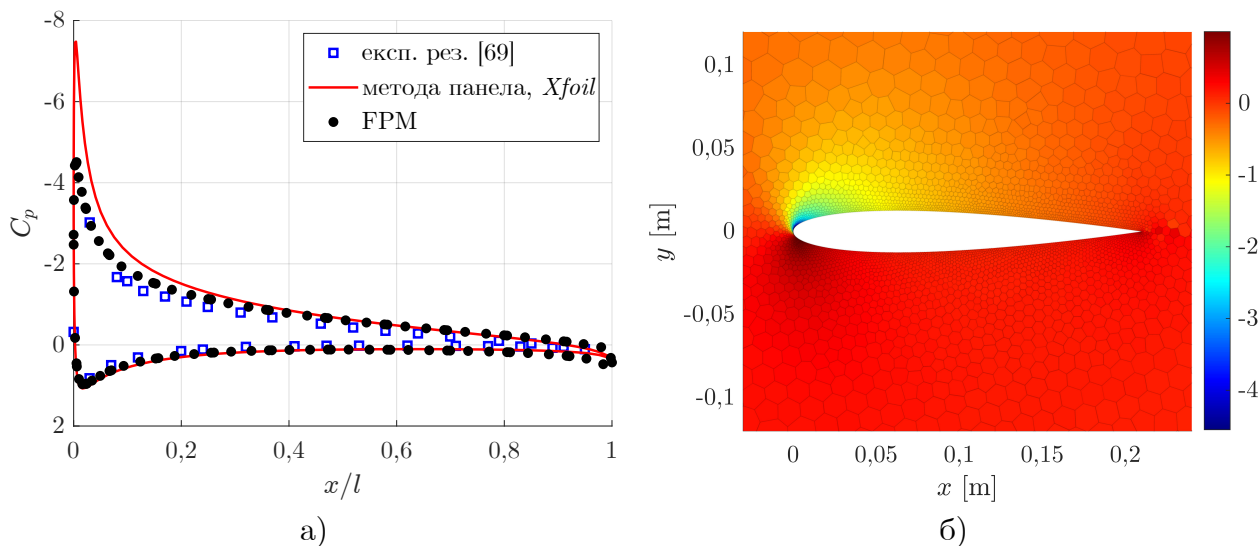
У другом примјеру се разматра опструјавање симетричног НАСА 0012 аеропрофила при нултом нападном углу, што даје симетричну струју флуида. Махов број непоремећене струје је $M_\infty = 0,3$. На слици 3.11.а приказан је изглед поддомена у непосредној близини нападне ивице аеропрофила, а на слици 3.11.б изглед поља брзине у истом рејону добијеног помоћу FPM. Слика 3.11.в приказује експериментално одређену расподелу коефицијента притиска C_p по контури аеропрофила дату у [69], расподелу добијену помоћу Xfoil програма¹⁰ на основу 120 панела и расподелу одређену помоћу FPM-Primal методе. За добијање резултата коришћењем FPM одабран је аеропрофил тетиве $l = 0,21$ m. Центар кружнице на којој је поремећајна брзина занемарљива смјештен је у средиште тетиве и одабрана је вриједност од 5 m за њен полупречник. Унутар домена је распоређено 8357 тачака, од чега се њих 480 (6%) налази на самом аеропрофилу.

У трећем примјеру се поново разматра опструјавање НАСА 0012 аеропрофила, али овога пута при нападном углу од 8° , што струјање чини несиметричним, те се Кута–Жуковски услов мора узети у обзир. Махов број непоремећене струје флуида је $M_\infty = 0,503$. Аналогно претходном примјеру, слика 3.12.а приказује експериментално одређену расподелу коефицијента притиска C_p по контури аеропрофила дату у [69], расподелу добијену помоћу Xfoil програма на основу 120 панела и расподелу одређену помоћу FPM, док слика 3.12.б даје приказ вриједности коефицијента притиска C_p у околини аеропрофила добијених помоћу FPM. Дужина тетиве аеропрофила је $l = 0,21$ m, центар кружнице је смјештен у њеном средишту, полупречник кружнице је 5 m, док је домен, поново, издијељен на 8357 Воронојевих ћелија, од чега се њих 480 (6%) граничи са аеропрофилом.

¹⁰ Xfoil програм је заснован на методи панела која се често користи у симулацији потенцијалног струјања.

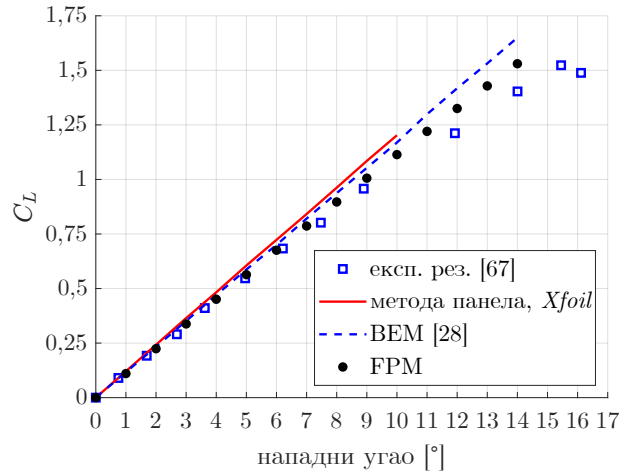


Слика 3.11: Опструјавање НАСА 0012 аеропрофила при $M_\infty = 0,3$: а) Воронојеве ћелије и б) поље брзине у близини нападне ивице, в) расподјела коефицијента C_p по контури



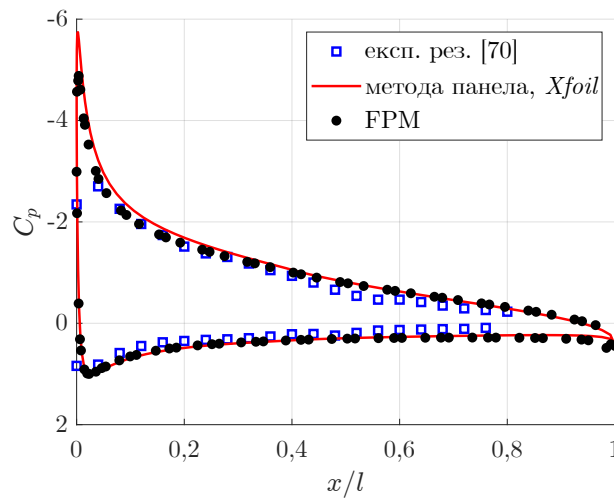
Слика 3.12: Опструјавање НАСА 0012 аеропрофила при $M_\infty = 0,503$ и нападном углу од 8° : а) расподјела коефицијента притиска C_p по контури аеропрофила, б) расподјела коефицијента притиска C_p у околини аеропрофила добијена помоћу FPM

У четвртном примјеру се анализира нестишљиво опструјавање НАСА 0012 аеро-профила. Слика 3.13 приказује експериментално одређене вриједности коефицијента C_L дате у [67] и вриједности добијене помоћу: методе панела, BEM [28] и FPM. За добијање FPM резултата одабрани су идентични домен и поддомени као у претходна два случаја. Уочава се да нумерички приступи дају међусобно усаглашене резултате, али они одступају од експерименталних како се повећава нападни угао. Разлог порасту грешке лежи у томе што теорија потенцијалног струјања почива на претпоставци да је струјање невр-тложно, што се може сматрати испуњеним једино при малим нападним угловима.



Слика 3.13: Коефицијент узгона C_L при нестишљивом опструјавању НАСА 0012 аеро-профила за различите нападне углове

Петим примјером се симулира опструјавање (асиметричног) НАСА 2412 аеро-профила. Брзина непоремећене струје флуида је $U_\infty = 30 \text{ m/s}$ ($M_\infty \approx 0,087$), а нападни угао 10° . Слика 3.14 приказује: експериментално добијену распоdjелу коефицијента C_p по контури аеро-профила дату у [70], распоdjелу добијену помоћу *Xfoil* програма на основу 120 панела и распоdjелу одређену помоћу FPM.



Слика 3.14: Распоdjела коефицијента притиска C_p по контури НАСА 2412 аеро-профила при брзини непоремећене струје флуида од 30 m/s ($M_\infty \approx 0,087$) и нападном углу од 10°

Сви претходно разматрани примјери показују да су резултати које даје FPM у сагласности са доступним аналитичким и експерименталним резултатима, али и да FPM по квалитету рјешења може да парира другим нумеричким методама.

3.6.2 Тродимензионални проблеми

У првом примјеру тродимензионалног подзвучног струјања разматра се потенцијално опструјавање сфере. То је проблем за који је у литератури доступно аналитичко рјешење.

Укупни потенцијал брзине се може изразити као суперпозиција потенцијала брзине униформног струјања Φ_{uf} и потенцијала брзине услед постојања двопола Φ_d [68]:

$$\Phi = \Phi_{uf} + \Phi_d = U_\infty x + \frac{\kappa x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (3.55)$$

Пратећи аналогију са извођењем датим у прилогу Б, може се показати да је веза између снаге двопола концентрисаног у координатном почетку κ и полупречника сфере R дефинисана релацијом:

$$R = \left(\frac{2\kappa}{U_\infty} \right)^{1/3}, \quad (3.56)$$

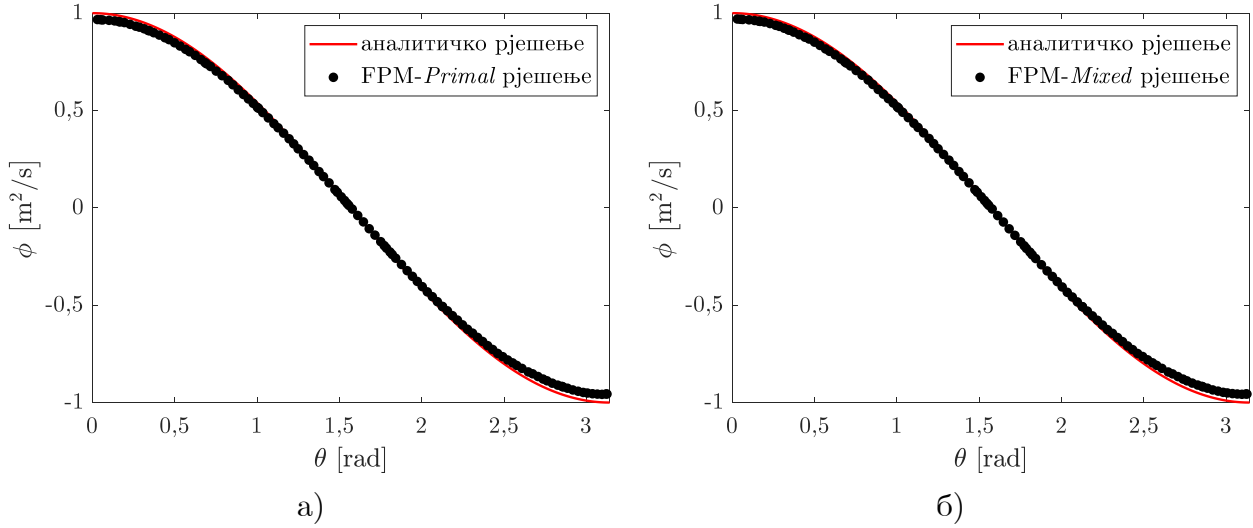
а да поремећајни потенцијал на обиму сфере има облик:

$$\phi = \frac{\kappa x}{R^3} = \frac{U_\infty x}{2} = \frac{U_\infty R \cos \theta}{2}. \quad (3.57)$$

Да би се добило нумеричко рјешење помоћу FPM, разматрано је опструјавање сфере полупречника 2 m. Брзини непоремећене струје флуида додијељена је вриједност 1 m/s, при чему је снага двопола одређена из релације (3.56). На површини сфере егзистира Нојманов гранични услов, дефинисан једнакошћу (3.4). За Дирихлеову границу одабрана је концентрична сфера чији је полупречник 50 m, под претпоставком да је толика сфера довољно велика у односу на мању да би се поремећајна брзина на обиму велике могла сматрати занемарљивом. Домен је простор који ограничавају површи двије сфере.

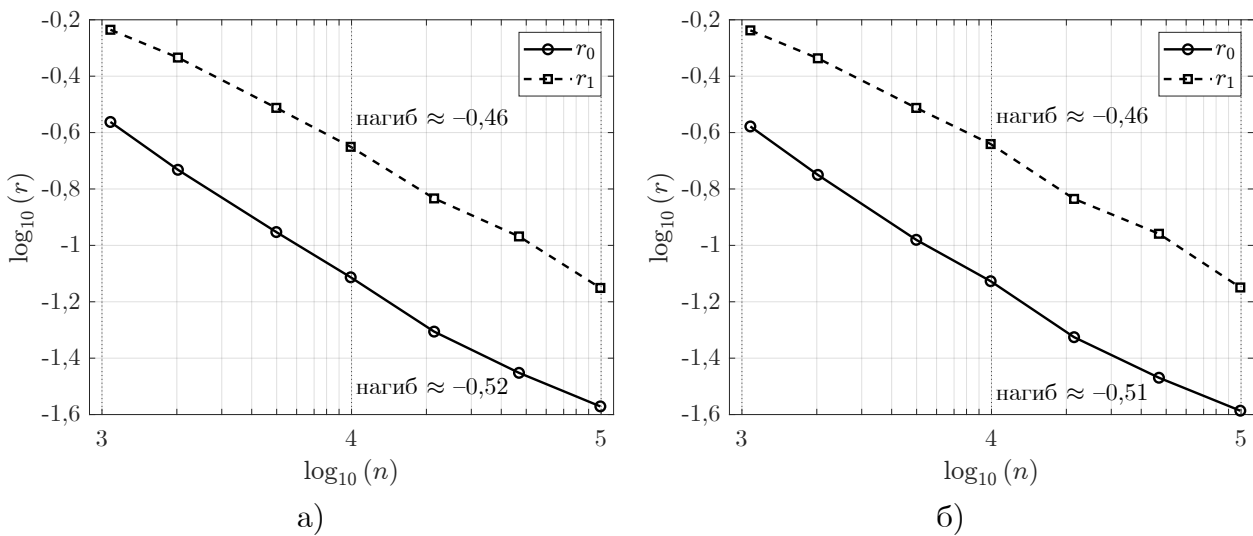
Слика 3.15 приказује вриједности поремећајног потенцијала ϕ на обиму опструјаване сфере које су одређене помоћу FPM. Параметру који зависи од границе h_e додијељена је вриједност једнака удаљености између тачака које дијеле границу, осим на Дирихлеовим границама гдје је бирана вриједност једнака квадратном коријену површине посматране границе поддомена. Подјела домена на поддомене извршена је на бази Воронојевог дијаграма формираног на основу 40558 насумично распоређених тачака, од чега се њих 10766 (око 27%) граничи са мањом сфером. Слика 3.15.а приказује резултате одређене FPM-*Primal* приступом, гдје је за η параметар на унутрашњим границама бирана вриједност 5, а на Дирихлеовим 10. Релативна грешка у вриједности поремећајног потенцијала r_0 на обиму опструјаване сфере износи 0,03566, док релативна грешка у вриједности поремећајне брзине r_1 износи 0,11543. Слика 3.15.б приказује резултате одређене FPM-*Mixed* приступом. Одабране су исте вриједности *penalty* параметара, а β вектору је додијељен облик $[1 \ 1 \ 1]^T$. Релативна грешка r_0 на обиму опструјаване

сфере износи 0,03452, док релативна грешка r_1 има вриједност 0,11668. Добијени резултати указују на то да FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* приступ дају врло подударна рјешења, али су нешто лошија у поређењу са рјешењима дводимензионалних проблема. Побољшања се могу остварити повећањем броја тачака домена, уколико хардверски ресурси то дозвољавају.



Слика 3.15: Поремећајни потенцијал ϕ при потенцијалном опструјавању сфере – поређење аналитичког рјешења на обиму опструјаване сфере у равни $z = 0$ и:
а) FPM-*Primal* рјешења, б) FPM-*Mixed* рјешења

Да би се испитала конвергентност FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* приступа приликом симулирања тродимензионалних струјања, одабран је претходни проблем с обзиром на то да за њега постоји аналитичко рјешење. Зависност релативних грешака у вриједности поремећајног потенцијала r_0 и вриједности поремећајне брзине r_1 на опструјаваној сфери од броја тачака домена приказана је на слици 3.16.

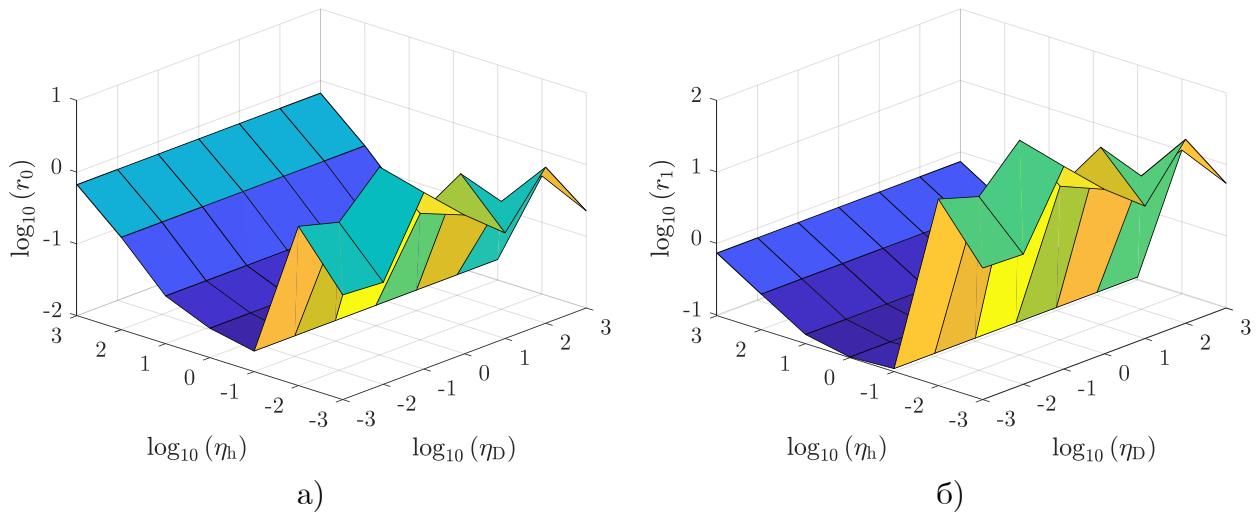


Слика 3.16: Степен конвергенције резултата при анализи тродимензионалних струјања примјеном: а) FPM-*Primal* приступа, б) FPM-*Mixed* приступа

Подјела домена на поддомене базирана је на Воронојевом дијаграму. Проблем је ријешен за домен истих димензија и облика као у претходном случају и непромијењене U_∞ , κ , η , β и h_e величине. Премда је расподјела тачака потпуно насумична, у сваком анализираном случају се око 26 до 38% њих смјештало на граници са мањом сфером. Уочава се да релативне грешке опадају са порастом броја тачака, чиме је потврђена конвергентност FPM у симулацији тродимензионалних потенцијалних струјања. Такође се примјећује да FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* рјешења имају готово идентичну брзину конвергенције.

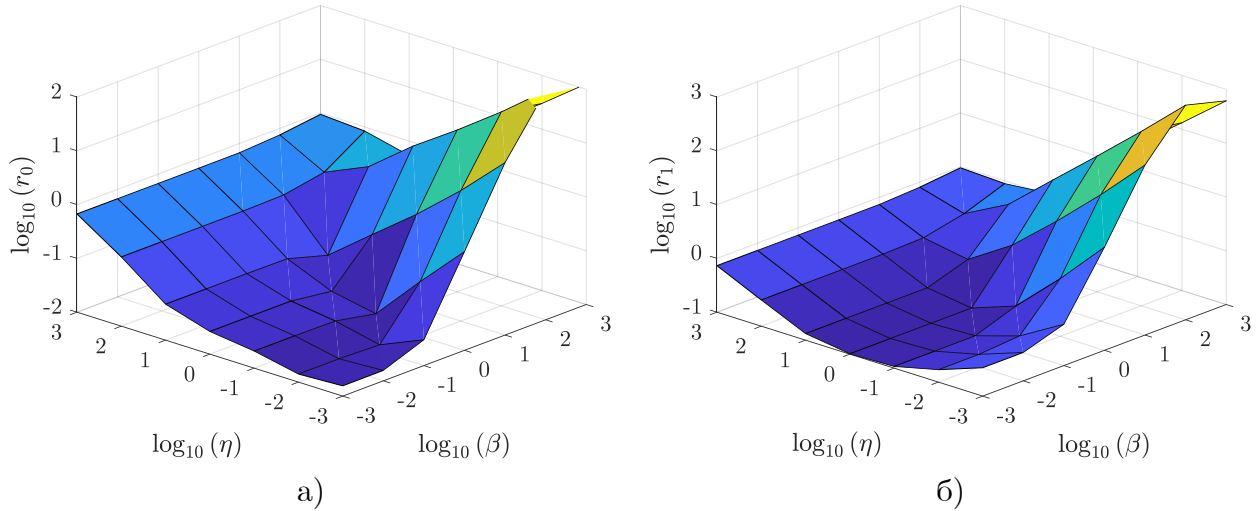
Утицај η параметара и β вектора на вриједност грешака анализиран је у наставку. Одабрани су исти проблем и исти домен као у пређашњем случају. Домен је подијељен на 40558 Воронојевих ћелија, од чега се њих 10766 (око 27%) граничи са мањом сфером.

На слици 3.17 приказане су величине грешака добијене FPM-*Primal* приступом. Вриједности η параметара вариране су у интервалу од 10^{-3} до 10^3 . Минимална r_0 грешка износи 0,01935 и добијена је за $\eta_h = 0,1$, док минимална r_1 грешка износи 0,09952 и добијена је за $\eta_h = 1$. Као и у дводимензионалним проблемима, слика 3.17 указује на то да превелике вриједности η_h параметара снижавају прецизност методе и да је најбоље бирати вриједности блиске јединици, с том разликом што је код тродимензионалних проблема изражено нарушавање стабилности методе при ниским η_h параметрима.



Слика 3.17: Утицај η_h и η_D параметара код FPM-*Primal* варијанте за тродимензионалне проблеме на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке

На слици 3.18 приказане су величине грешака добијене FPM-*Mixed* приступом. Вриједности $\eta_h = \eta_D = \eta$ параметра вариране су у интервалу од 10^{-3} до 10^3 , а вриједности чланова $\beta = \beta [1 \ 1 \ 1]^T$ вектора у распону од $\beta = 10^{-3}$ до $\beta = 10^3$. Минимална r_0 грешка износи 0,01340 и добијена је за $\eta_h = 0,01$, док минимална r_1 грешка износи 0,10143 и добијена је за $\eta_h = 1$. Исто као у дводимензионалним проблемима, стабилност FPM-*Mixed* приступа не зависи од вриједности η параметара, што је подударно са констатацијом наведеном у [5]. Вектор β има велики утицај на квалитет добијених резултата. Слика 3.18 указује на то да је за његове чланове пожељно узимати вриједности $\beta \leq 1$, док за β вриједности веће од 10 резултати постају неупотребљиви.



Слика 3.18: Утицај $\eta_h = \eta_D = \eta$ параметра и $\beta = \beta [1 \ 1 \ 1]^T$ вектора код FPM-Mixed варијанте за тродимензионалне проблеме на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке

Наредним примјером се симулира потенцијално опструјавање симетричног *Onera M6* полукрила сљедећих карактеристика:

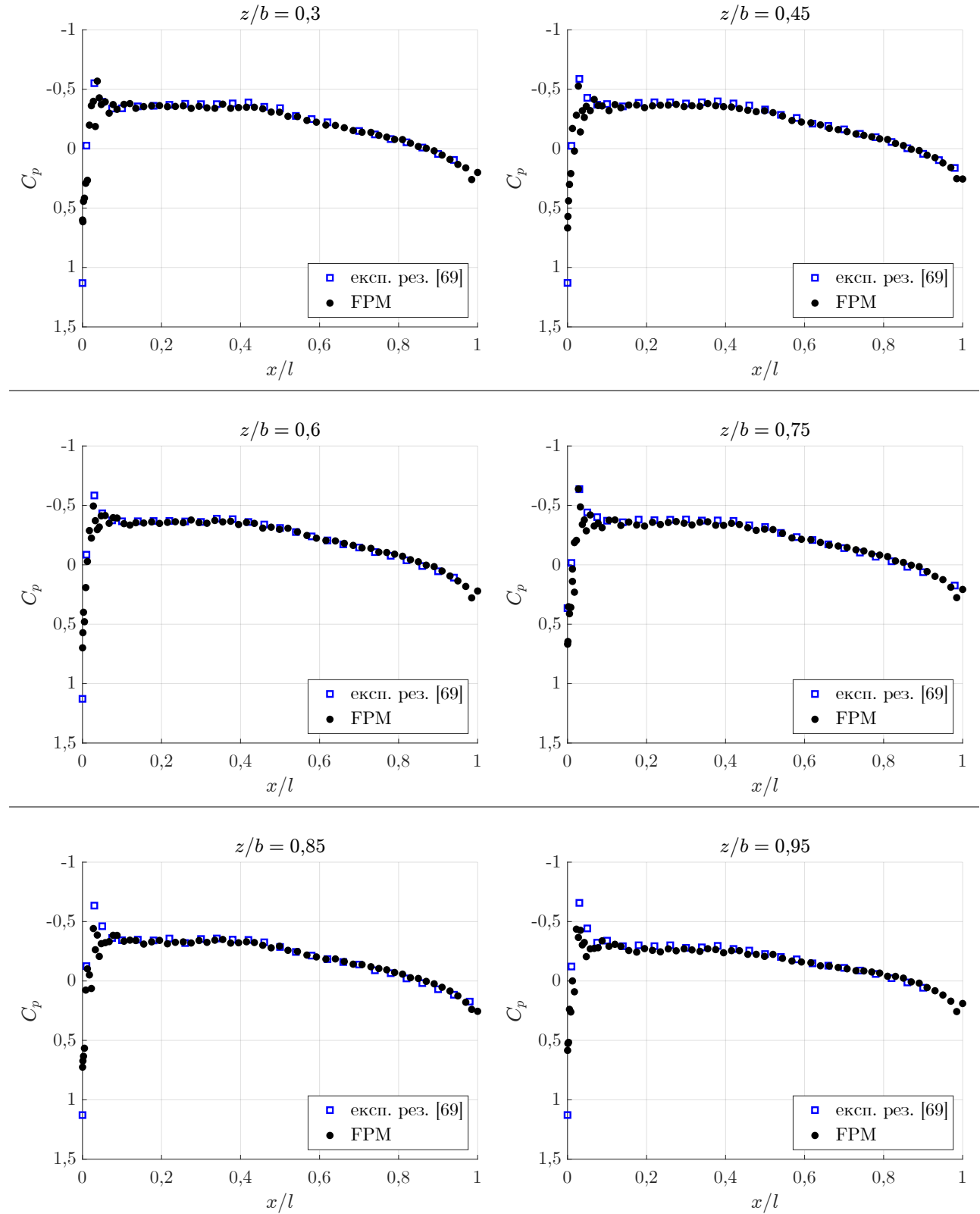
- угао стријеле нападне ивице крила (*leading edge sweep angle*) $\alpha_n = 0$,
- полуразмах (*semi-span length*) $b = 0,795 \text{ m}$,
- конусни однос (*taper ratio*) $\lambda = 1$ (правоугаono крило),
- тетива (*chord length*) $l = 0,2 \text{ m}$,
- референтна површина крила $S = 0,318 \text{ m}^2$,
- виткост крила (*aspect ratio*) $\Lambda = (2b)^2 / S = 7,95$.

У разматраном примјеру одабран је нулти нападни угао и Махов број непоремећене струје флуида $M_\infty = 0,7$. Домен је ограничен сфером полупречника 5 m чији је центар смјештен у средишту крила. По домену су насумично распоређене 42594 тачке, од којих је њих 25510 (око 60%) постављено на самом крилу. Подјела домена на поддомене извршена је на бази Воронојевог дијаграма. Параметру који зависи од границе h_e додијељена је вриједност једнака удаљености између тачака које дијеле границу, осим на Дирихлеовим границама гдје је бирана вриједност једнака квадратном коријену површине Дирихлеове границе поддомена. За η параметар на унутрашњим границама бирана је вриједност 5, а на Дирихлеовим вриједност 10.

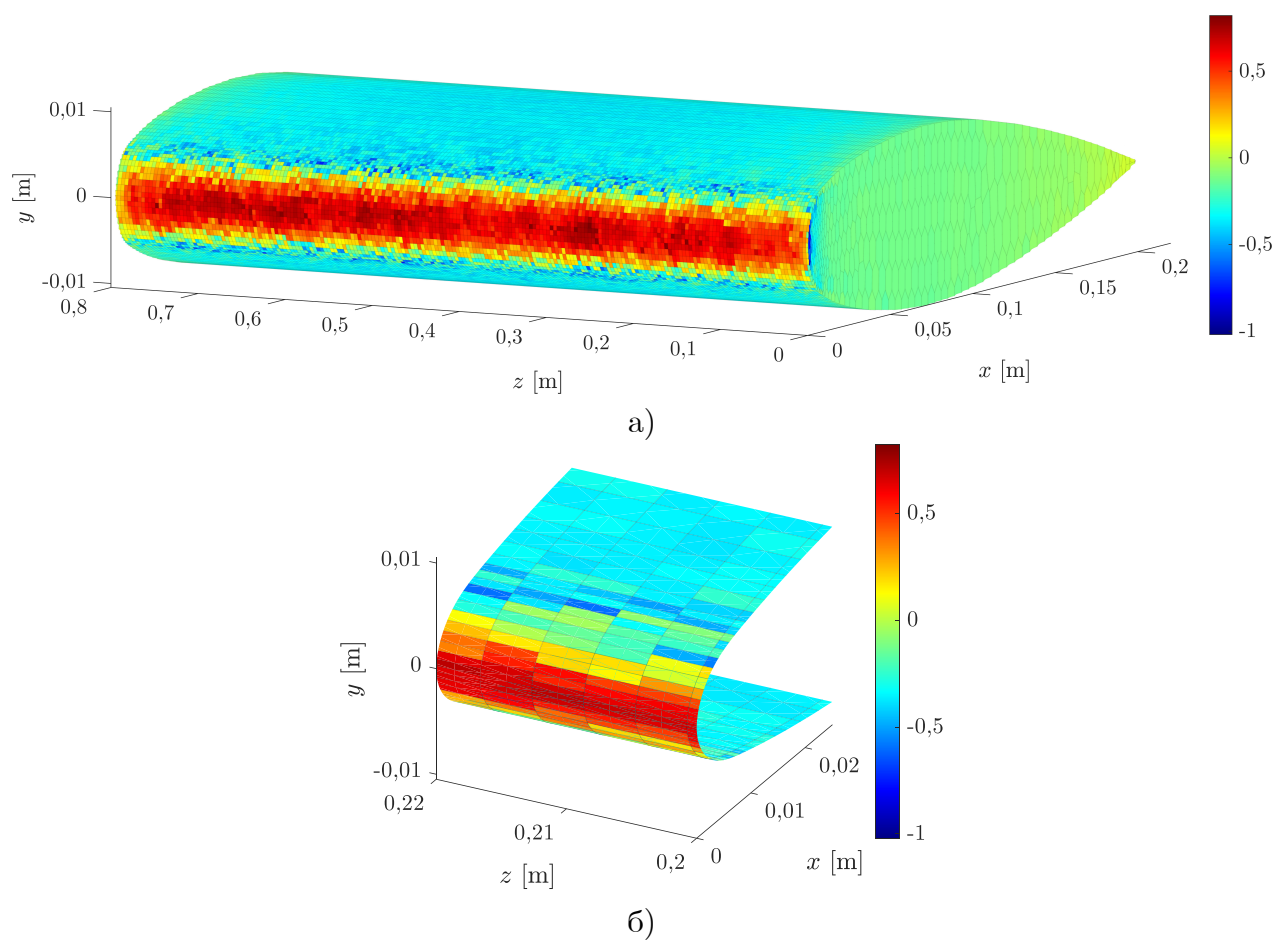
Слика 3.19 приказује експериментално добијене вриједности коефицијента C_p у неколико различитих попречних пресека полукрила, представљене у [69], и одговарајуће FPM-Primal резултате, док је на слици 3.20 представљена расподјела коефицијента C_p по површини полукрила добијена примјеном FPM-Primal приступа. На основу слика се уочава да је преклапање FPM резултата са експерименталним веома добро.

Сви разматрани примјери указују на то да FPM може бити поуздан и прецизан алат у рјешавању проблема потенцијалног опструјавања аеродинамичких облика, како

у дводимензионалним, тако и у тродимензионалним проблемима.



Слика 3.19: Расподјела коефицијента притиска C_p у различитим попречним пресјецима *Onera M6* полукрила



Слика 3.20: Расподјела коефицијента притиска C_p по површини *Opera M6* полукрила добијена помоћу FPM: а) цијело полукрило, б) детаљ

Глава 4

Нестационарно провођење топлоте кроз нехомогене анизотропне средине

4.1 Полазна једначина, гранични услови и почетни услов

Могућности примјене безмрежне *Fragile Points* методе (FPM) у проблемима простирања топлоте истражене су у овом поглављу кроз рјешавање опште ПДЈ нестационарног провођења топлоте (топлотне кондукције) кроз нехомогене анизотропне средине, која има сљедећи облик [71–73]:

$$\rho(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}) \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{r}; t) = \nabla \cdot (\mathbf{k}(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r}; t)) + Q(\mathbf{r}; t), \quad \mathbf{r} \in \Omega, t \in [0; T], \quad (4.1)$$

гдје су: Ω разматрани домен, $\mathbf{r}$ вектор положаја, t вријеме, $\rho(\mathbf{r})$ густина средине, $c(\mathbf{r})$ специфични топлотни капацитет, $u(\mathbf{r}; t)$ температурно поље, $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ тензор топлотне проводљивости и $Q(\mathbf{r}; t)$ густина топлотног извора. Код анизотропних материјала компоненте тензора топлотне проводљивости зависе од правца.

У разматрање се узимају три типа граничних услова:

- Дирихлеов, дефинисан релацијом:

$$u(\mathbf{r}; t) = g_D(\mathbf{r}; t), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_D, \quad (4.2)$$

- Нојманов, дат у облику:

$$(\mathbf{k}(\mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r}; t)) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = g_N(\mathbf{r}; t), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_N, \quad (4.3)$$

- Робинов (конвективни), дефинисан на сљедећи начин:

$$h(\mathbf{r}) (u_R(\mathbf{r}) - u(\mathbf{r}; t)) = g_R(\mathbf{r}; t), \quad \mathbf{r} \in \Gamma_R, \quad (4.4)$$

гдје је укупна (спољашња) граница домена сачињена од скупа Дирихлеових, Нојманових и Робинових граница ($\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$), док је са $\mathbf{n}$ означен вектор нормале на границу домена усмјерен ка спољашњости, са $h(\mathbf{r})$ коефицијент преноса топлоте, а са $u_R(\mathbf{r})$ температура средине изван конвективне границе.

Почетни услов је дефинисан у сљедећем облику:

$$u(\mathbf{r}; t)|_{t=0} = u(\mathbf{r}; 0), \quad \mathbf{r} \in (\Omega \cup \partial\Omega). \quad (4.5)$$

4.2 Дискретизација једначине на бази галеркиновске слабе форме уз корекцију нумеричког флукса

Претходним поглављем се показало да FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* варијанте методе дају подједнако добре резултате. С обзиром на то да је FPM-*Mixed* приступ у погледу рачунске сложености неповољнији, то је у овом поглављу дискретизација извршена само у FPM-*Primal* облику.

Први корак је да се полазна ПДЈ (4.1) запише у облику система једначина првог реда:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \nabla u \\ \rho c \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \cdot (\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}) + Q.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Множењем прве једначине тестном функцијом $\boldsymbol{\tau}$, а друге тестном функцијом v , увођењем пробних функција $\boldsymbol{\sigma}_h$ и u_h и интеграљењем по конкретном поддомену, добија се локална слаба форма једначина у следећем облику:

$$\begin{aligned}\int_{E \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega &= \int_{E \in \Omega} \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega \\ \int_{E \in \Omega} \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega &= \int_{E \in \Omega} \nabla \cdot (\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}_h) v d\Omega + \int_{E \in \Omega} Q v d\Omega.\end{aligned}\tag{4.7}$$

Примјеном правила извода производа, позивањем на дивергентну теорему и увођењем нумеричких флуксева $\hat{u}_h$ и $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h$, претходни систем се своди на:

$$\begin{aligned}\int_{E \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega &= - \int_{E \in \Omega} u_h (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) d\Omega + \int_{e \in \Gamma} \hat{u}_h \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma \\ \int_{E \in \Omega} \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega &= \int_{E \in \Omega} Q v d\Omega - \int_{E \in \Omega} (\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla v d\Omega + \int_{e \in \Gamma} (\mathbf{k}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h) v \cdot \mathbf{n} d\Gamma.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Примјеном правила извода производа и дивергентне теореме над првим сабирком са десне стране прве једначине и сумирањем по свим поддоменима, систем (4.8) добија следећи облик:

$$\begin{aligned}\sum_{E \in \Omega} \int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega &= \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega + \sum_{e \in \Gamma} \int_e (\hat{u}_h - u_h) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} d\Gamma \\ \sum_{E \in \Omega} \int_E \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega &= \sum_{E \in \Omega} \int_E Q v d\Omega - \sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla v d\Omega + \sum_{e \in \Gamma} \int_e (\mathbf{k}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h) v \cdot \mathbf{n} d\Gamma.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Увођењем оператора скока „ $\llbracket \rrbracket$ “ и оператора средње вриједности „ $\{ \}$ “, дефинисаних релацијама (3.15) на унутрашњим, односно (3.16) на Дирихлеовим границама, систем (4.9) може да се запише на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 \sum_{E \in \Omega} \int_E \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega &= \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot \boldsymbol{\tau} d\Omega \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \llbracket \hat{u}_h - u_h \rrbracket \cdot \{\boldsymbol{\tau}\} d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \{\hat{u}_h - u_h\} \llbracket \boldsymbol{\tau} \rrbracket d\Gamma
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{E \in \Omega} \int_E \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega &= \sum_{E \in \Omega} \int_E Q v d\Omega - \sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{k} \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla v d\Omega \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\mathbf{k} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \llbracket \mathbf{k} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h \rrbracket \{v\} d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Узимајући да је тестна функција $\boldsymbol{\tau}$ једнака ∇v , може се извршити елиминација пробне функције $\boldsymbol{\sigma}_h$ из претходног система једначина, чиме се добија:

$$\begin{aligned}
 \sum_{E \in \Omega} \int_E \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega &+ \sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{k} \nabla u_h) \cdot \nabla v d\Omega \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (\mathbf{k} \llbracket \hat{u}_h - u_h \rrbracket) \cdot \{\nabla v\} d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \{\hat{u}_h - u_h\} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket d\Gamma \\
 &= \sum_{E \in \Omega} \int_E Q v d\Omega + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\mathbf{k} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma} \int_e \llbracket \mathbf{k} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h \rrbracket \{v\} d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Уврштавањем IP нумеричких флуксева на унутрашњим и Дирихлеовим границама из табеле 3.1 у једначину (4.11) и уврштавањем Нојмановог (4.3) и Робиновог (4.4) граничног услова добија се:

$$\begin{aligned}
 \sum_{E \in \Omega} \int_E \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega &+ \sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{k} \nabla u_h) \cdot \nabla v d\Omega \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (\mathbf{k} \llbracket \{u_h\} - u_h \rrbracket) \cdot \{\nabla v\} d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\{u_h\} - u_h\} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket d\Gamma \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{g_D - u_h\} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket d\Gamma \\
 &= \sum_{E \in \Omega} \int_E Q v d\Omega \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left\{ \mathbf{k} \left(\{\nabla u_h\} - \frac{\eta_h}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right) \right\} \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left[\mathbf{k} \left(\{\nabla u_h\} - \frac{\eta_h}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right) \right] \{v\} d\Gamma \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left[\mathbf{k} \left(\nabla u_h - \frac{\eta_D}{h_e} (u_h - g_D) \mathbf{n} \right) \right] \{v\} d\Gamma \\
 &+ \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e g_N v d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_R} \int_e h v u_R d\Gamma - \sum_{e \in \Gamma_R} \int_e h v u d\Gamma.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Замјеном једнакости (3.19) и (3.20) у израз (4.12) добија се финални облик опште једначине провођења топлоте кроз анизотропне нехомогене средине у дискретизованој форми, на бази FPM-*Primal* приступа:

$$\begin{aligned}
& \sum_{E \in \Omega_E} \int_E \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega + \sum_{E \in \Omega_E} \int_E (\mathbf{k} \nabla u_h) \cdot \nabla v d\Omega \\
& - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e (\mathbf{k} \llbracket u_h \rrbracket) \cdot \{\nabla v\} d\Gamma - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left(\mathbf{k} \left(\{\nabla u_h\} - \frac{\eta_h}{h_e} \llbracket u_h \rrbracket \right) \right) \cdot \llbracket v \rrbracket d\Gamma \\
& - \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \{u_h\} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket d\Gamma - \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left[\left[\mathbf{k} \left(\nabla u_h - \frac{\eta_D}{h_e} u_h \mathbf{n} \right) \right] \right] \{v\} d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_R} \int_e h v u d\Gamma \\
& = \sum_{E \in \Omega_E} \int_E Q v d\Omega \\
& + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\left[\left[\mathbf{k} \left(\frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} \right) \right] \right] \{v\} - \{g_D\} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket \right) d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e g_N v d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_R} \int_e h v u_R d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.3 Нумеричка имплементација

Пратећи аналогiju са изразом (2.7) могуће је увести сљедећу ознаку:

$$\frac{\partial u_h}{\partial t} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}. \tag{4.14}$$

Једначину (4.13) је погодно написати у сљедећој форми:

$$\begin{aligned}
& \sum_{E \in \Omega_E} \int_E \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega + \sum_{E \in \Omega_E} \int_E (\mathbf{k} \nabla u_h) \cdot \nabla v d\Omega \\
& + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{k} \llbracket u_h \rrbracket) \cdot \llbracket v \rrbracket - (\mathbf{k} \{\nabla u_h\}) \cdot \llbracket v \rrbracket - (\mathbf{k} \llbracket u_h \rrbracket) \cdot \{\nabla v\} \right) d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\left[\left(\frac{\eta_D}{h_e} u_h \mathbf{k} \mathbf{n} - \mathbf{k} \nabla u_h \right) \right] \{v\} - \{u_h\} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket \right) d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_R} \int_e h v u d\Gamma \\
& = \sum_{E \in \Omega_E} \int_E Q v d\Omega \\
& + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\left[\left[\mathbf{k} \left(\frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} \right) \right] \right] \{v\} - \{g_D\} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket \right) d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e g_N v d\Gamma \\
& + \sum_{e \in \Gamma_R} \int_e h v u_R d\Gamma,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

ОДНОСНО:

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}^T \sum \mathbf{C}_E \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_E \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_h \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_D \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_R \mathbf{u} \\ &= \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_E + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_D + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_N + \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_R, \end{aligned} \quad (4.16)$$

гдје је:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T \sum \mathbf{C}_E \dot{\mathbf{u}} &= \sum_{E \in \Omega} \int_E \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_E \mathbf{u} &= \sum_{E \in \Omega} \int_E (\mathbf{k} \nabla u_h) \cdot \nabla v d\Omega, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_h \mathbf{u} &= \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{k} \llbracket u_h \rrbracket) \cdot \llbracket v \rrbracket - (\mathbf{k} \{ \nabla u_h \}) \cdot \llbracket v \rrbracket - (\mathbf{k} \llbracket u_h \rrbracket) \cdot \{ \nabla v \} \right) d\Gamma, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_D \mathbf{u} &= \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\left[\left(\frac{\eta_D}{h_e} u_h \mathbf{k} \mathbf{n} - \mathbf{k} \nabla u_h \right) \right] \{ v \} - \{ u_h \} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket \right) d\Gamma, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{K}_R \mathbf{u} &= \sum_{e \in \Gamma_R} \int_e h v u d\Gamma, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_E &= \sum_{E \in \Omega} \int_E Q v d\Omega, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_D &= \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\left[\mathbf{k} \left(\frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} \right) \right] \{ v \} - \{ g_D \} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket \right) d\Gamma, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_N &= \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e g_N v d\Gamma, \\ \mathbf{u}^T \sum \mathbf{F}_R &= \sum_{e \in \Gamma_R} \int_e h v u_R d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Множењем израза (4.16) вектором $\mathbf{u}$ са лијеве стране, а потом матрицом $(\mathbf{u} \mathbf{u}^T)^{-1}$, такође са лијеве стране, добија се полудискретни систем у виду матричне једначине:

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{C}_E \dot{\mathbf{u}} + \sum (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_h + \mathbf{K}_D + \mathbf{K}_R) \mathbf{u} &= \sum (\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_R), \\ \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} &= \mathbf{F}, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{K} \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

гдје је $\mathbf{C}$ општа матрица топлотне капацитивности, а $\mathbf{K}$ општа матрица топлотне проводљивости. Да би се дошло до нумеричког рјешења једначине (4.18), уз FPM је потребно увести неку методу за рјешавање ОДЈ, о чему ће више ријечи бити у наредном потпоглављу.

Коначни облици матрица $\mathbf{C}_E$, $\mathbf{K}_E$, $\mathbf{K}_h$, $\mathbf{K}_D$ и $\mathbf{K}_R$ и вектора $\mathbf{F}_E$, $\mathbf{F}_D$, $\mathbf{F}_N$ и $\mathbf{F}_R$ се добијају када се у изразе (4.17) уврсте пробне и тестне функције и њихови градијенти. За тестну функцију v одабрана је функција u_h . Добијени резултати су дати у наставку.

Први интеграл из израза (4.17) води матрици $\mathbf{C}_E$:

$$\int_E \rho c v \frac{\partial u_h}{\partial t} d\Omega = \int_E \rho c \mathbf{N} \mathbf{u} \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_E \rho c \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}} d\Omega,$$

која има следећи облик:

$$\mathbf{C}_E = \int_E \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega. \quad (4.19)$$

Други интеграл из израза (4.17) води матрици $\mathbf{K}_E$:

$$\int_E (\mathbf{k} \nabla u_h) \cdot \nabla v d\Omega = \int_E (\mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega = \int_E \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{k}^T \mathbf{B} \mathbf{u} d\Omega,$$

која има следећи облик:

$$\mathbf{K}_E = \int_E \mathbf{B}^T \mathbf{k}^T \mathbf{B} d\Omega. \quad (4.20)$$

Трећи интеграл из израза (4.17) води матрици $\mathbf{K}_h$:

$$\begin{aligned} & \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{k} \llbracket u_h \rrbracket) \cdot \llbracket v \rrbracket - (\mathbf{k} \{ \nabla u_h \}) \cdot \llbracket v \rrbracket - (\mathbf{k} \llbracket u_h \rrbracket) \cdot \{ \nabla v \} \right) d\Gamma \\ &= \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{k} (\mathbf{n}_1 u_{h_1} + \mathbf{n}_2 u_{h_2})) \cdot (\mathbf{n}_1 v_1 + \mathbf{n}_2 v_2) d\Gamma \\ & \quad - \int_e \mathbf{k} \frac{1}{2} (\nabla u_{h_1} + \nabla u_{h_2}) \cdot (\mathbf{n}_1 v_1 + \mathbf{n}_2 v_2) d\Gamma \\ & \quad - \int_e (\mathbf{k} (\mathbf{n}_1 u_{h_1} + \mathbf{n}_2 u_{h_2})) \cdot \frac{1}{2} (\nabla v_1 + \nabla v_2) d\Gamma \\ &= \int_e \frac{\eta_h}{h_e} ((\mathbf{k} \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + (\mathbf{k} \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \\ & \quad - \int_e \left(\mathbf{k} \frac{1}{2} (\mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}) \right) \cdot (\mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \\ & \quad - \int_e ((\mathbf{k} \mathbf{n}_1) \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + (\mathbf{k} \mathbf{n}_2) \mathbf{N}_2 \mathbf{u}) \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}) d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_e \frac{\eta_h}{h_e} (\mathbf{k}\mathbf{n}_1\mathbf{N}_1\mathbf{u} + \mathbf{k}\mathbf{n}_2\mathbf{N}_2\mathbf{u})^T (\mathbf{n}_1\mathbf{N}_1\mathbf{u} + \mathbf{n}_2\mathbf{N}_2\mathbf{u}) d\Gamma \\
&- \int_e \frac{1}{2} (\mathbf{k}\mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{k}\mathbf{B}_2\mathbf{u})^T (\mathbf{n}_1\mathbf{N}_1\mathbf{u} + \mathbf{n}_2\mathbf{N}_2\mathbf{u}) d\Gamma \\
&- \int_e \frac{1}{2} (\mathbf{k}\mathbf{n}_1\mathbf{N}_1\mathbf{u} + \mathbf{k}\mathbf{n}_2\mathbf{N}_2\mathbf{u})^T (\mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_1 \mathbf{u}) \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}) \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_1 \mathbf{u}) \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \mathbf{B}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_2 \mathbf{u}) \right) d\Gamma \\
&= \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_1) \right) \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_2) \right) \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_1) \right) \mathbf{u} d\Gamma \\
&+ \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_2) \right) \mathbf{u} d\Gamma,
\end{aligned}$$

која има следећи облик:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_h &= \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_1) \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_2) \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_1) \right) d\Gamma \\
&+ \int_e \left(\frac{\eta_h}{h_e} \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{n}_2 \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{k}^T \mathbf{B}_2) \right) d\Gamma.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Четврти интеграл из израза (4.17) води матрици $\mathbf{K}_D$:

$$\begin{aligned}
& \int_e \left(\left[\left(\frac{\eta_D}{h_e} u_h \mathbf{k} \mathbf{n} - \mathbf{k} \nabla u_h \right) \right] \{v\} - \{u_h\} \llbracket \mathbf{k} \nabla v \rrbracket \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\left(\frac{\eta_D}{h_e} u_h \mathbf{k} \mathbf{n} - \mathbf{k} \nabla u_h \right) \cdot \mathbf{n} v - u_h \mathbf{n} \cdot (\mathbf{k} \nabla v) \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{k} \mathbf{n} u_h \cdot \mathbf{n} v - \mathbf{k} \nabla u_h \cdot \mathbf{n} v - \mathbf{n} u_h \cdot (\mathbf{k} \nabla v) \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{k} \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{u}) \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} (\mathbf{k} \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u})^T \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} - (\mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{u})^T \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} - (\mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u})^T \mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
&= \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{u} \right) d\Gamma \\
&= \int_e \mathbf{u}^T \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} \mathbf{N} - \mathbf{B}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{k} \mathbf{B} \right) \mathbf{u} d\Gamma,
\end{aligned}$$

која има следећи облик:

$$\mathbf{K}_D = \int_e \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} \mathbf{N} - \mathbf{B}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} \mathbf{N} - \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{k} \mathbf{B} \right) d\Gamma. \quad (4.22)$$

Пети интеграл из израза (4.17) води матрици $\mathbf{K}_R$:

$$\int_e h v u d\Gamma = \int_e h \mathbf{N} \mathbf{u} \mathbf{N} \mathbf{u} d\Gamma = \int_e h \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{u} d\Gamma,$$

која има следећи облик:

$$\mathbf{K}_R = \int_e h \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma. \quad (4.23)$$

Шести интеграл из израза (4.17) води вектору $\mathbf{F}_E$:

$$\int_E Q v d\Omega = \int_E Q \mathbf{N} \mathbf{u} d\Omega = \int_E Q \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T d\Omega,$$

који има следећи облик:

$$\mathbf{F}_E = \int_E Q \mathbf{N}^T d\Omega. \quad (4.24)$$

Седми интеграл из израза (4.17) води вектору $\mathbf{F}_D$:

$$\begin{aligned}
 & \int_e \left(\left[\mathbf{k} \left(\frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} \right) \right] \{v\} - \{g_D\} [\mathbf{k} \nabla v] \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \left(\{v\} \left[\mathbf{k} \left(\frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{n} \right) \right] - [\mathbf{k} \nabla v] \{g_D\} \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \left(\mathbf{n} v \cdot \left(\frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{k} \mathbf{n} \right) - (\mathbf{k} \nabla v) \cdot \mathbf{n} g_D \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \left(\mathbf{n} \mathbf{N} \mathbf{u} \cdot \left(\frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{k} \mathbf{n} \right) - (\mathbf{k} \mathbf{B} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} g_D \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \left(\mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \left(\frac{\eta_D}{h_e} g_D \mathbf{k} \mathbf{n} \right) - \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} g_D \right) d\Gamma \\
 &= \int_e \mathbf{u}^T g_D \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{k} \mathbf{n} - \mathbf{B}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} \right) d\Gamma,
 \end{aligned}$$

који има следећи облик:

$$\mathbf{F}_D = \int_e g_D \left(\frac{\eta_D}{h_e} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{k} \mathbf{n} - \mathbf{B}^T \mathbf{k}^T \mathbf{n} \right) d\Gamma. \quad (4.25)$$

Осми интеграл из израза (4.17) води вектору $\mathbf{F}_N$:

$$\int_e g_N v d\Gamma = \int_e g_N \mathbf{N} \mathbf{u} d\Gamma = \int_e g_N \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T d\Gamma,$$

који има следећи облик:

$$\mathbf{F}_N = \int_e g_N \mathbf{N}^T d\Gamma. \quad (4.26)$$

Девети интеграл из израза (4.17) води вектору $\mathbf{F}_R$:

$$\int_e h v u_R d\Gamma = \int_e h \mathbf{N} \mathbf{u} u_R d\Gamma = \int_e h \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T u_R d\Gamma$$

који има следећи облик:

$$\mathbf{F}_R = \int_e h u_R \mathbf{N}^T d\Gamma. \quad (4.27)$$

4.4 Нумеричке методе за рјешавање обичних диференцијалних једначина

Поред просторне дискретизације полазне једначине, која је у претходном дијелу извршена помоћу FPM, за комплетирање нумеричког рјешења је потребно извршити

дискретизацију и у временском домену, односно увести неку нумеричку методу за рјешавање ОДЈ која би се примијенила над матричном једначином (4.18). У ту сврху је на располагању велики број метода. У литератури се често могу срести [10, 74–81]:

- Ојлерова експлицитна метода (*forward Euler*),
- Ојлерова имплицитна метода (*backward Euler*),
- трапезно правило,
- Рунге–Кута (*Runge–Kutta*) метода четвртог реда

и оне ће бити коришћене у овој дисертацији. Уз претходно наведене, треба поменути још једну методу, чији је идејни творац професор Атлури. У питању је *Local Variational Iteration* метода (LVIM), развијена кроз докторску дисертацију [82], која је, како у погледу прецизности, тако и у погледу брзине извршавања, показала доста боље перформансе у односу на високо оптималне интегрисане *Matlab* функције, попут врло често коришћене `ode45()` која је заснована на алгоритмима [83, 84]. LVIM се успјешно носи са изразито комплексним динамичким одзивима, чак и када су хаотични, али и са великим системима и дугачким временским интервалима [82]. Иако су у фокусу LVIM нелинеарне ОДЈ, њене могућности у рјешавању линеарне једначине првог реда (4.18) су истражене у публикацији [53]. У поменутом раду је доказана њена супериорност у односу на Ојлерове методе, која се првенствено огледа у томе што се може бирати доста већи корак чиме се вријеме извршавања кода смањује барем дупло, а у појединим ситуацијама и до 10–20 пута.

Примјењујући Ојлерову експлицитну шему над једначином (4.18) добија се:

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + \Delta t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}_m), \quad (4.28)$$

гдје су: Δt временски корак, $\mathbf{u}_m$ апроксимација рјешења једначине у тренутку t_m , а $\mathbf{u}_{m+1}$ апроксимација рјешења једначине у тренутку $t_{m+1} = t_m + \Delta t$.

Једначина (4.18) дискретизована помоћу Ојлерове имплицитне шеме добија сљедећи облик:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m+1} &= \mathbf{u}_m + \Delta t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_{m+1} - \mathbf{K} \mathbf{u}_{m+1}), \\ (\mathbf{E} + \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{u}_{m+1} &= \mathbf{u}_m + \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}_{m+1}, \\ \mathbf{u}_{m+1} &= (\mathbf{E} + \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K})^{-1} (\mathbf{u}_m + \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}_{m+1}), \end{aligned} \quad (4.29)$$

гдје је $\mathbf{E}$ јединична матрица димензија $n \times n$.

Дискретизација једначине (4.18) на бази трапезног правила даје:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m+1} &= \mathbf{u}_m + \Delta t \frac{1}{2} (\mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}_m) + \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_{m+1} - \mathbf{K} \mathbf{u}_{m+1})), \\ \mathbf{u}_{m+1} &= \mathbf{u}_m + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}_m) + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}_{m+1} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{u}_{m+1}, \\ \left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}_{m+1} &= \mathbf{u}_m + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_{m+1} + \mathbf{F}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}_m), \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_{m+1} = \left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \right)^{-1} \left(\mathbf{u}_m + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_{m+1} + \mathbf{F}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}_m) \right). \quad (4.30)$$

Примјењујући Рунге–Кута методу четвртог реда над једначином (4.18) добија се следећа релација:

$$\mathbf{u}_{m+1} = \mathbf{u}_m + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad (4.31)$$

гдје је:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_m - \mathbf{K} \mathbf{u}_m), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_{m+0,5} - \mathbf{K} (\mathbf{u}_m + 0,5 \Delta t \mathbf{k}_1)), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_{m+0,5} - \mathbf{K} (\mathbf{u}_m + 0,5 \Delta t \mathbf{k}_2)), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{F}_{m+1} - \mathbf{K} (\mathbf{u}_m + \Delta t \mathbf{k}_3)). \end{aligned} \quad (4.32)$$

У корацима који претходе ОДЈ (4.18), уочава се да је инверзија матрице $\mathbf{C}$ рачунски најсложенија операција. Како је констатовано у претходном поглављу, временска комплексност такве операције је $O(n^3)$ ако се проблем рјешава Гаусовом методом елиминације. Како је матрица $\mathbf{C}$ ријетка, симетрична и позитивно дефинитна, могу се користити и напреднији алгоритми [64–66] којима се снижава комплексност, нпр. на $O(n^{2,2131})$. Због множења матрице димензија $n \times n$ вектором дужине n унутар сваког временског корака, комплексност Ојлерове експлицитне шеме (4.28) се може процијенити на $O(n_t n^2)$, гдје је n_t број временских корака. Како је потпуно очекивано да број временских корака премаши $n^{0,2131}$, без обзира на број тачака унутар домена¹¹, то је комплексност $O(n_t n^2)$ доминантнија у односу на $O(n^{2,2131})$, па се узима као мјеродавна.

Код Ојлерове имплицитне методе (4.29) и трапезног правила (4.30), уз инверзију матрице $\mathbf{C}$ потребно је наћи производ двије матрице димензија $n \times n$ и извршити још једну инверзију прије него се крене са дискретизацијом у временском домену, па се у грубој процјени може рећи да је временска комплексност такве процедуре $O(n^3)$. Исто као код Ојлерове експлицитне шеме, временска комплексност рјешавања проблема у временском домену се може процијенити на $O(n_t n^2)$. Међутим, број временских корака не мора нужно бити већи од броја тачака унутар домена n , па се у општем случају не може установити да ли је веће $O(n^3)$ или $O(n_t n^2)$. Ако је број тачака унутар домена мали, временска комплексност је $O(n_t n^2)$, а ако је доста већи од броја временских корака, онда је комплексност $O(n^3)$. Временска комплексност Рунге–Кута методе је иста као код Ојлерове експлицитне методе.

Ако је број временских корака већи од броја тачака унутар домена, онда све четири методе имају исту временску комплексност која износи $O(n_t n^2)$. Међутим, анализом израза (4.28)–(4.32) јасно је да се методе током имплементације неће извршавати једнаком брзином. Код Ојлерових метода се унутар сваког временског корака производ матрице димензија $n \times n$ и вектора дужине n јавља два пута, код трапезног правила три пута, а код Рунге–Кута методе осам пута, тако да је очекивано да се Ојлерове методе извршавају приближно истом брзином, трапезно правило 50% спорије, а Рунге–Кута метода и до четири пута спорије.

¹¹За 100 тачака унутар домена добија се $100^{0,2131} \approx 3$, а за милион тачака у домену $10^{6,2131} \approx 19$.

4.5 Нумерички примјери

У наставку су, кроз више примјера, представљене могућности FPM у рјешавању конкретних једнодимензионалних, дводимензионалних и тродимензионалних стационарних и нестационарних проблема, при чему средина кроз коју се проводи топлота може бити хомогена или нехомогена и изотропна или анизотропна. Обрађени су случајеви у којима постоји топлотни извор у посматраној средини, али и проблеми који укључују Дирихлеове, Нојманове, Робинове, симетричне граничне услове и њихове комбинације. Испитана је конвергентност FPM приступа и анализиран квалитет предложених шема за дискретизацију у временском домену. Извршена је анализа утицаја *penalty* (η) параметара на стабилност методе и квалитет добијених резултата и дате су препоруке опсега из којих треба бирати њихове вриједности.

Проблеми су рјешавани и при равномјерној и при потпуно насумичној расподјели тачака унутар домена. Анализиране су ситуације у којима дио тачака лежи на границама домена и случајеви у којима на самим границама нема тачака. У свим разматраним примјерима подјела домена на поддомене базирана је на Воронојевом дијаграму и углавном је вршена или помоћу алгоритма датог у прилогу А или употребом интегрисане *Matlab* функције *voronoin()* у комбинацији са кодом за ограничавање тако добијеног домена. Изузетак је неколико тродимензионалних проблема код којих расподјела тачака није равномјерна или код којих је геометрија домена сложенијег облика. Тада се подјела домена базирала на Делонеовом дијаграму који је добијен употребом *Gmsh* програма. Параметру који зависи од границе h_e је у свим једнодимензионалним примјерима додјељивана јединична вриједност, у свим дводимензионалним случајевима вриједност једнака дужини посматране границе, а у свим тродимензионалним примјерима вриједност једнака међусобној удаљености тачака које дијеле границу, осим на спољашњим границама гдје је биран квадратни коријен површине границе. Добијени резултати су упоређени са аналитичким и нумеричким рјешењима доступним у литератури.

Приликом анализе проблема код којих постоји аналитичко рјешење, оцјена квалитета нумеричких рјешења извршена је на бази израза (3.50) и (3.51), при чему се потенцијал поремећајне брзине ϕ и његов градијент $\nabla\phi$ мијењају температуром u и њеним градијентом ∇u . Сада r_0 представља релативну грешку у вриједности температуре, а r_1 релативну грешку у добијеном облику температурног градијента.

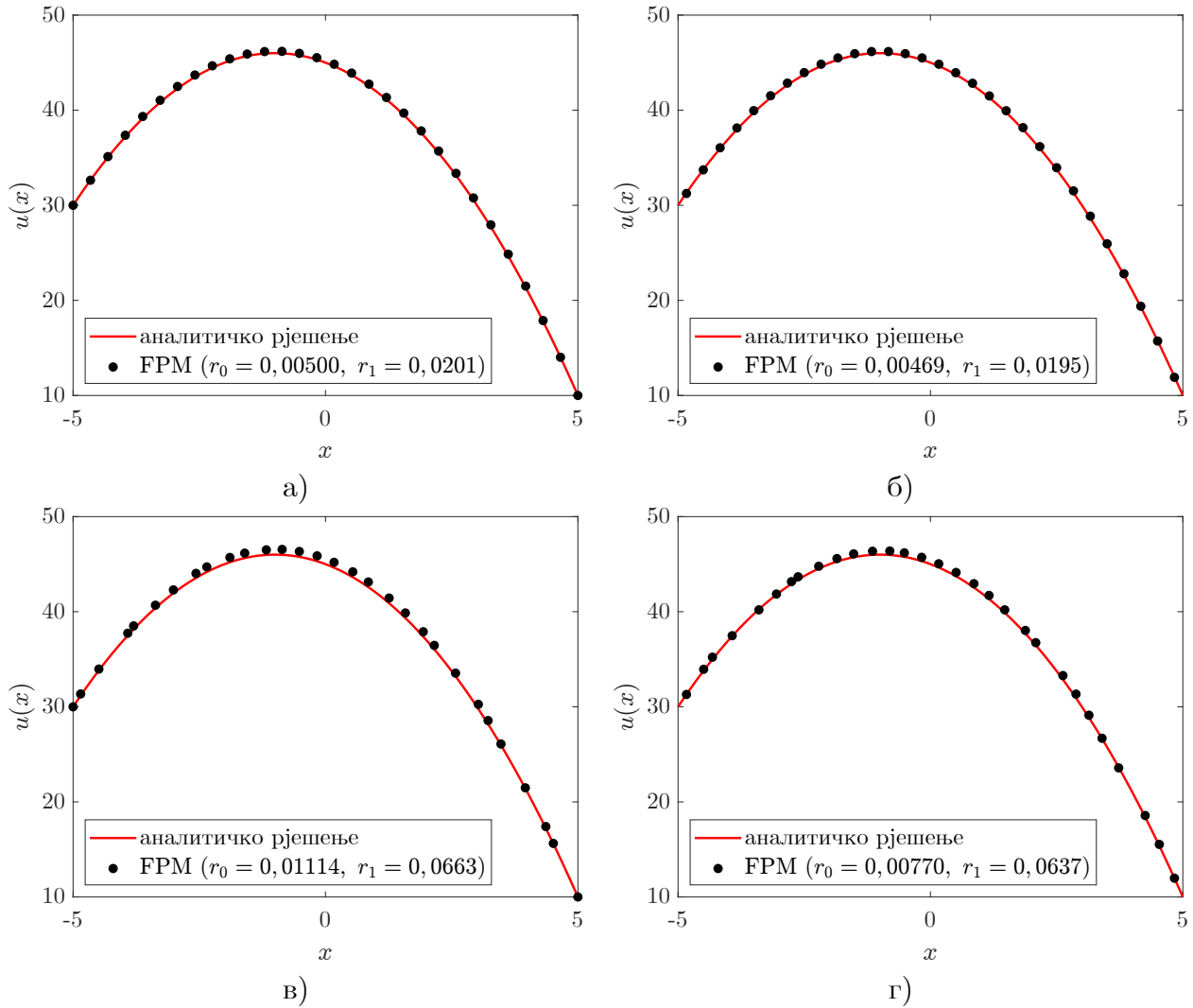
4.5.1 Једнодимензионални проблеми

У првом једнодимензионалном примјеру разматра се стационарна кондукција кроз хомогену средину димензија $x \in [-L; L]$. Унутар цјелокупног домена равномјерно се генерише топлота Q . Обје границе се одржавају на константним температурама u_{-L} и u_L . Аналитичко рјешење овог проблема дато је релацијом [85]:

$$u(x) = \frac{QL^2}{2k} \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{u_L - u_{-L}}{2} \frac{x}{L} + \frac{u_L + u_{-L}}{2}. \quad (4.33)$$

Узимајући да је $k = k = 2$, $Q = 4$, $L = 5$, $u_{-L} = 30$ и $u_L = 10$, на слици 4.1 је приказано аналитичко рјешење и резултат добијен помоћу FPM на основу 30 тачака¹².

¹²Кроз овај и неколико других примјера у наставку се, произвољним избором бројних вриједности (које

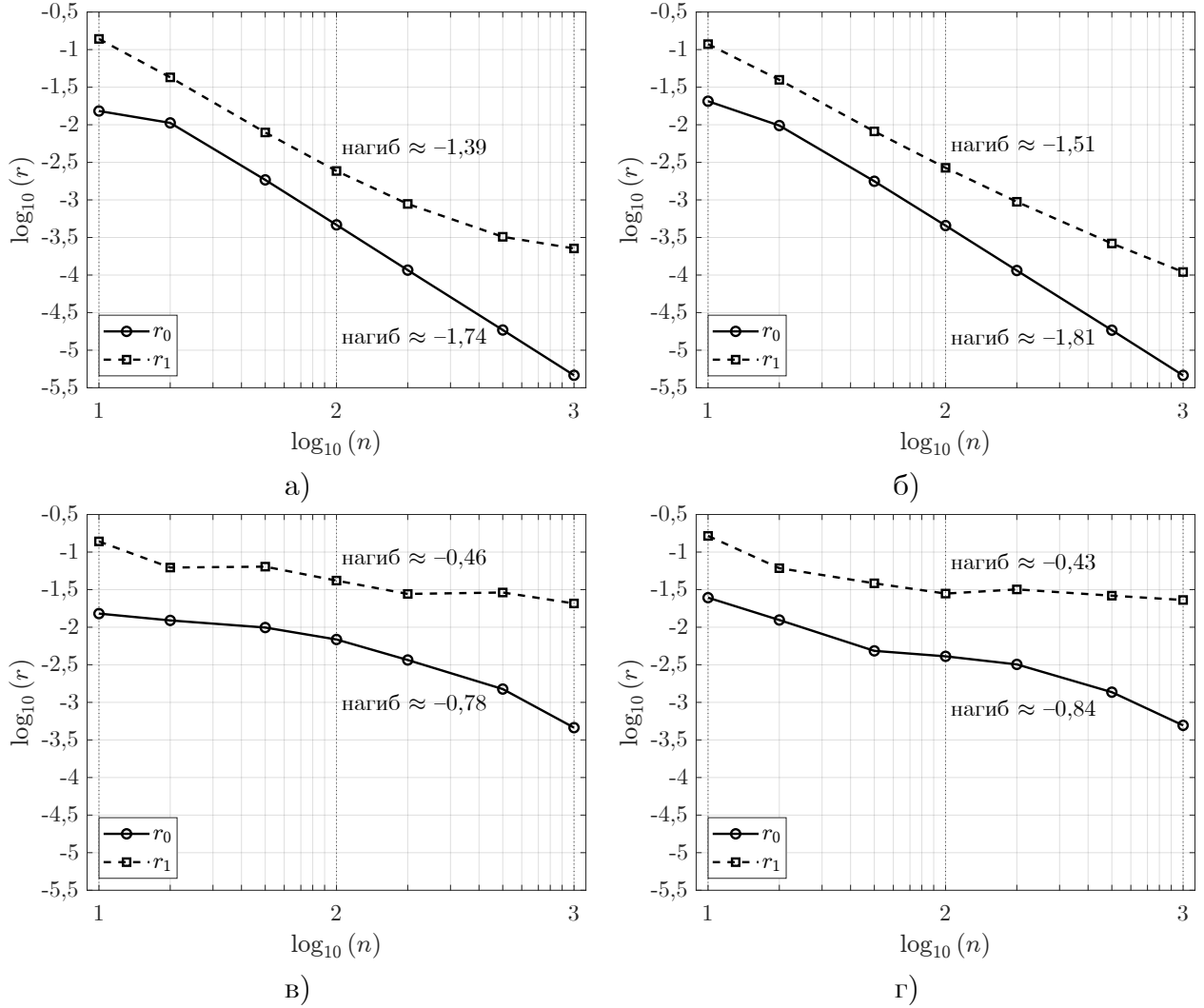


Слика 4.1: Рјешење првог једнодимензионалног проблема на основу 30 тачака за $\eta_h = 100$ и $\eta_D = 500$: а) равномерна распоdjела са тачкама на граници, б) равномерна распоdjела без тачака на граници, в) насумична распоdjела са тачкама на граници, г) насумична распоdjела без тачака на граници

За η параметре су узете вриједности $\eta_h = 100$ и $\eta_D = 500$. На слици 4.1.а приказана је распоdjела температуре добијена за равномерну распоdjелу тачака, при чему су двије тачке постављене на самим границама. На слици 4.1.б приказана је распоdjела температуре добијена за равномерну распоdjелу тачака, при чему нема тачака на границама. Сlike 4.1.в и 4.1.г, према начину позиционирања тачака у односу на границе, прате слике 4.1.а и 4.1.б респективно, при чему су распоdjеле температуре добијене на основу насумичног распореда тачака. Вриједности релативних грешака r_0 и r_1 су такође представљене на слици 4.1. Уочава се да сва четири размотрена приступа за добијање FPM рјешења дају резултате блиске аналитичким, с тим што је за конкретни проблем погодније користити се равномерном распоdjелом тачака.

не морају нужно осликавати реални физички објекат) и избјегавањем мјерних јединица, у други план ставља физички смисао проблема, док се фокус преноси на рјешавање математичког проблема (ПДЈ) нумеричким приступом.

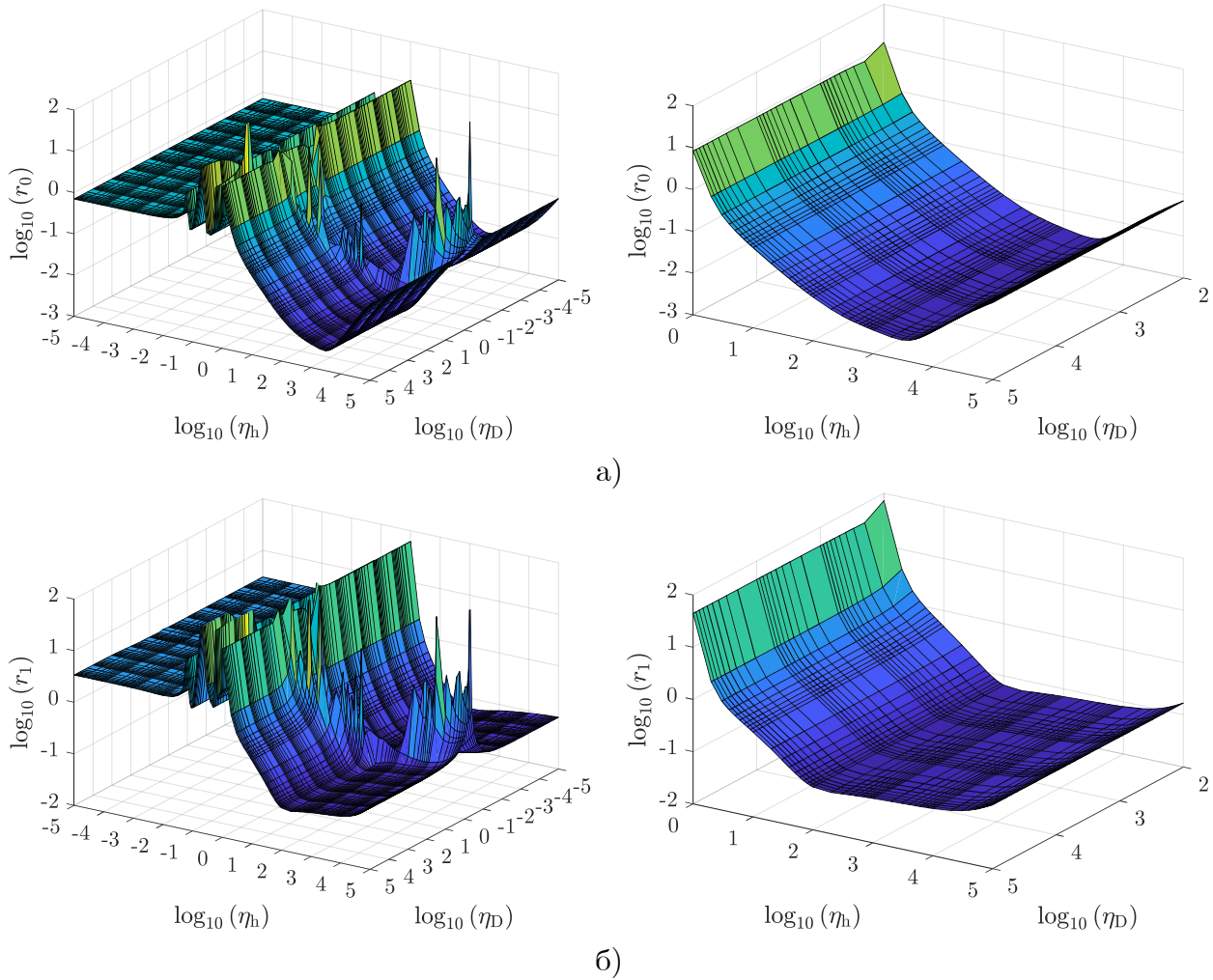
Да би се испитала конвергентност FPM-*Primal* рјешења приликом симулирања стационарне једнодимензионалне топлотне кондукције, одабран је претходно анализирани проблем. Ријешен је за домен истих димензија и карактеристика као у претходном случају и непромијењене η параметре, граничне услове и топлотни извор. На слици 4.2 приказане су вриједности грешака r_0 и r_1 добијене при различитом броју тачака (n).



Слика 4.2: Степен конвергенције нумеричких резултата првог једнодимензионалног примјера при параметрима $\eta_h = 100$ и $\eta_D = 500$: а) равномерна расподела са тачкама на граници, б) равномерна расподела без тачака на граници, в) насумична расподела са тачкама на граници, г) насумична расподела без тачака на граници

Пратећи аналогију са сликом 4.1, на слици 4.2 су приказани резултати који укључују и равномерну и насумичну расподелу тачака, као и случајеви у којима су двије тачке на самим границама и у којима су све тачке ван граница. Добијени резултати показују да вриједности грешака опадају са порастом броја тачака, чиме је конвергентност FPM потврђена. Без обзира на то да ли се тачке налазе на самим границама или не, ред величине грешке ће остати непромијењен. Грешке су мање, а брзина конвергенције већа, уколико је расподела тачака равномерна.

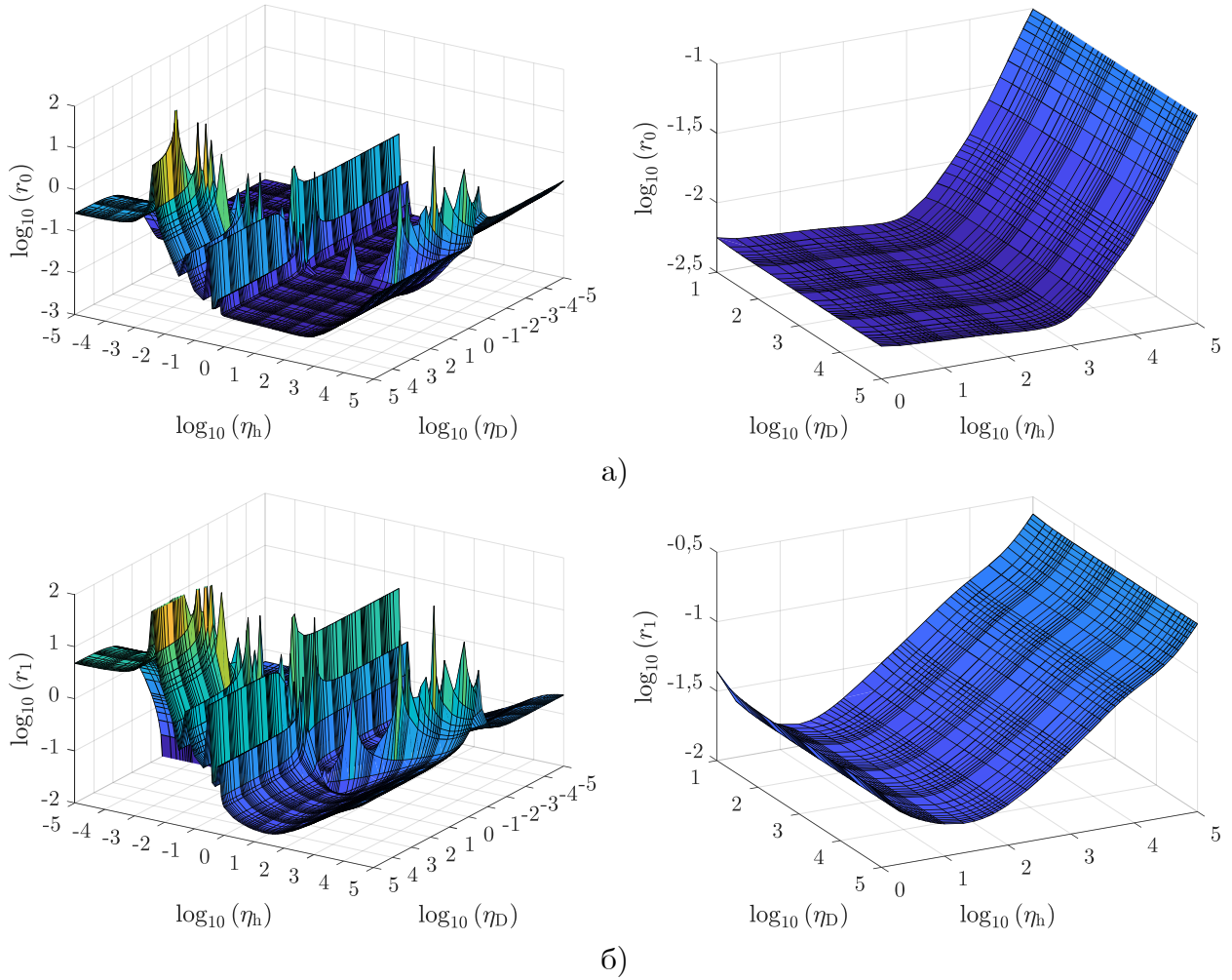
На основу резултата са слике 4.3 може се сагледати утицај η параметара на вриједност релативних грешака. За ову анализу је одабран исти проблем као у пређашњем случају. Домен је подијељен на основу 30 насумично распоређених тачака, при чему су двије постављене на границама домена. Вриједности η параметара вариране су у интервалу од 10^{-5} до 10^5 . Резултати са слике 4.3 одговарају тврдњама наведеним у [5, 45], према којима се мора постићи довољно велика вриједност η параметара код IP нумеричких флуксева да би метода била стабилна.



Слика 4.3: Грешке FPM рјешења првог једнодимензионалног проблема при насумичној расподјели 30 тачака, од чега се њих двије налазе на границама домена — утицај η_h и η_D параметара на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке

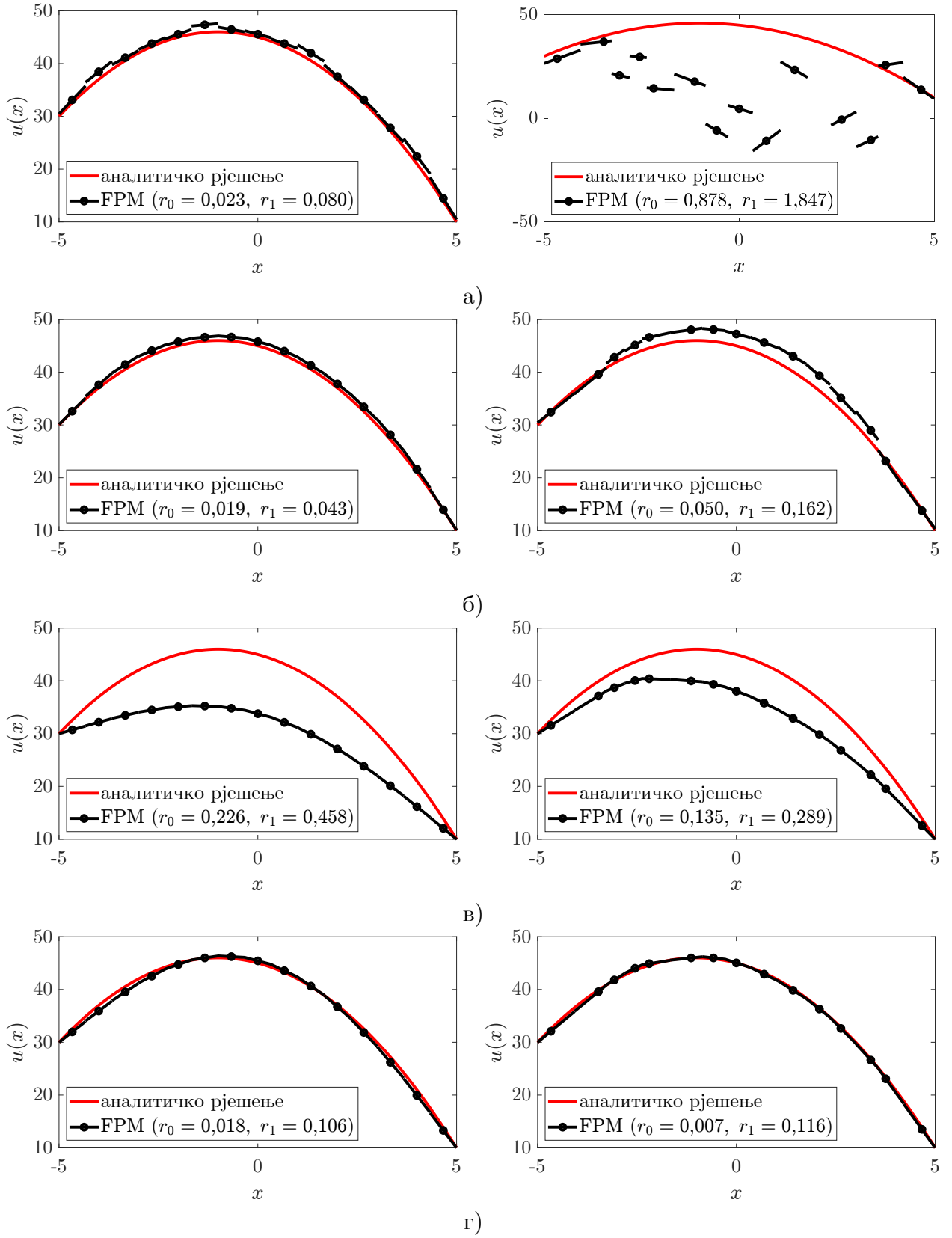
Претходна слика показује да код једнодимензионалних проблема метода даје стабилне резултате за $\eta_h \geq 1$ и $\eta_D \geq 100$. Као што је раније наведено, повећањем вриједности η_h параметра приближиће се међусобно вриједности пробне функције на границама сусједних поддомена, односно ублажиће се дисконтинуитети, али ће се прецизност методе смањити, те је потребно направити компромис између поменуте двије тенденције. Слика 4.3 показује да се најбољи резултати добијају за $\eta_h \in [10^2; 10^3]$. Док год су његове вриједности изнад 100, утицај η_D параметра није много изражен.

На слици 4.4 је приказана зависност грешака од η параметара за случај да је домен подијељен на 30 равномјерно распоређених тачака, при чему на границама нема тачака. Иако се добијене функције разликују од оних са слике 4.3, могу се извести слични закључци. За равномјерну расподјелу при којој нема тачака на самим границама, метода даје стабилне резултате за $\eta_h \geq 1$ и $\eta_D \geq 10$. Најбољи резултати се добијају за η_h вриједности које су блиске 100, при чему утицај η_D параметра није много изражен док год су његове вриједности изнад 10. Резултати на сликама 4.3 и 4.4 показују да неравномјерној расподјели погодују веће вриједности η_h параметра у односу на равномјерну расподјелу, при чему оба приступа дају стабилне резултате за исти опсег η_h вриједности.



Слика 4.4: Грешке FPM рјешења првог једнодимензионалног проблема при равномјерној расподјели 30 тачака, од којих се ниједна не налази на границама домена — утицај η_h и η_D параметара на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке

Утицај η параметара на облик пробне функције за претходно разматрани проблем представљен је на слици 4.5. На лијевој страни су примјери са 15 равномјерно распоређених, а на десној са 15 насумично распоређених тачака. Размотрене су ситуације у којима η параметри имају нулту, премалу (5), превелику (10000) и оптималну (500) вриједност и за сваку од поменутих вриједности наведене су релативне грешке на нивоу домена.



Слика 4.5: Утицај η параметара на облик пробне функције FPM рјешења добијеног на основу 15 тачака (лијево – равномерна расподела; десно – насумична расподела):

а) $\eta_h = \eta_D = 0$, б) $\eta_h = \eta_D = 5$, в) $\eta_h = \eta_D = 10000$, г) $\eta_h = \eta_D = 500$

Уколико би се избјегла корекција нумеричког флукса, односно η параметрима додијелила вриједност једнака нули (слика 4.5.а), резултати би били условно речено добри ако је расподјела тачака унутар домена равномјерна, али потпуно неупотребљиви при насумичној расподјели тачака. На слици 4.5.а се уочава да на границама поддомена постоје врло изражени дисконтинуитети у вриједностима пробне функције. На слици 4.5.б су представљени резултати са извршеном корекцијом нумеричког флукса η параметрима величине 5. Дисконтинуитети су и даље присутни, али су много блажи него у претходном случају, нарочито код примјера са насумичном расподјелом тачака. Уколико је вриједност η параметара превелика, као што је случај са рјешењима на слици 4.5.в, онда дисконтинуална пробна функција заиста губи дисконтинуални карактер и добија облик изломљене праве линије (комадно линеарни облик), али су одступања резултата од аналитичких значајна. Према томе, потребно је одабрати оне η вриједности које ће ублажити дисконтинуитете на границама поддомена, али истовремено обезбиједити тачност добијених резултата (слика 4.5.г). Управо је то био циљ анализе изведене на основу слика 4.3 и 4.4.

У литературним изворима попут [85] се код изотропних проблема у полазној једначини често обједињују густина средине ρ , специфични топлотни капацитет c и коефицијент топлотне проводљивости k у топлотну дифузивност κ :

$$\kappa = \frac{k}{\rho c}. \quad (4.34)$$

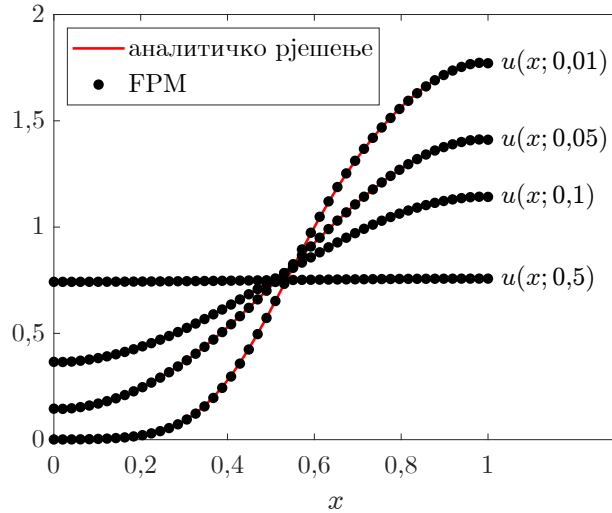
У другом једнодимензионалном примјеру разматра се нестационарна кондукција кроз хомогену средину димензија $x \in [0; 1]$. Топлотна дифузивност износи 1. Нема топлотног извора. Обје границе су адијабатске (Нојманов гранични услов има нулту вриједност). Почетни услов је задат у облику:

$$u(x; 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Аналитичко рјешење овог проблема дато је релацијом [86]:

$$u(x; t) = \frac{3}{4} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{4}{j^2 \pi^2} \left((-1)^j - \cos \frac{j\pi}{2} \right) - \frac{2}{j\pi} \sin \frac{j\pi}{2} \right) \cos(j\pi x) e^{-(j\pi)^2 t}. \quad (4.35)$$

За добијање FPM рјешења домен је издијелен на основу 50 равномјерно расподијељених тачака, а за η параметре су узете вриједности $\eta_h = 100$ и $\eta_D = 500$. Резултат је рачунат до временског тренутка $t = 0,5$ након кога расподјела температуре одговара приближно стационарној. За дискретизацију у временском домену употребљене су све четири претходно поменуте нумеричке методе за рјешавање ОДЈ, при временском кораку $\Delta t = 10^{-4}$. Свака од њих се извршава за 0,1 s дајући r_0 релативну грешку осредњену по временским корацима ($\bar{r}_0$) у интервалу од 0,00074 до 0,00094. На слици 4.6 приказан је профил температуре унутар домена у неколико различитих временских тренутака добијен аналитички и помоћу FPM у комбинацији са Ојлеровом експлицитном методом.



Слика 4.6: FPM рјешење другог примјера једнодимензионалне кондукције на основу 50 равномерно распоређених тачака при $\eta_h = 100$, $\eta_D = 500$ и $\Delta t = 10^{-4}$

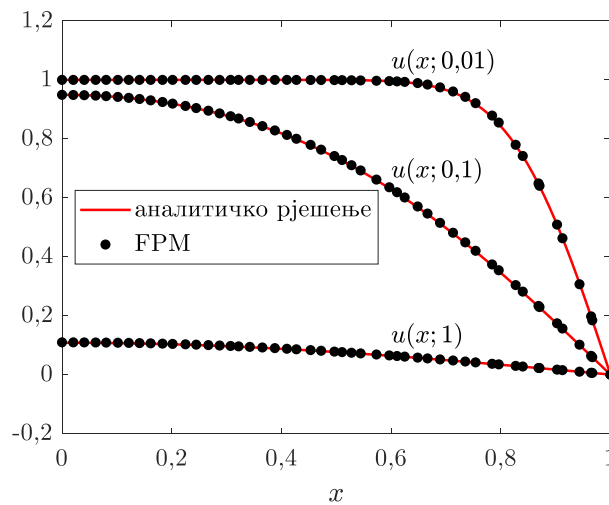
У трећем једнодимензионалном примјеру се разматра нестационарна кондукција кроз хомогену средину димензија $x \in [0; 1]$. Топлотна дифузивност је једнака 1. Нема топлотног извора. Почетни услов и гранични услови су:

$$u(x; 0) = 1, \quad \frac{\partial u(0; t)}{\partial x} = 0, \quad u(1; t) = 0.$$

Аналитичко рјешење овог проблема дато је релацијом [72]:

$$u(x; t) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos(0,5(2n-1)\pi x)}{0,5(2n-1)\pi} e^{-(0,5(2n-1)\pi)^2 t}, \quad (4.36)$$

док слика 4.7 приказује расподјелу температуре у неколико различитих тренутака добијену аналитички и помоћу FPM у комбинацији са Ојлеровом имплицитном шемом.



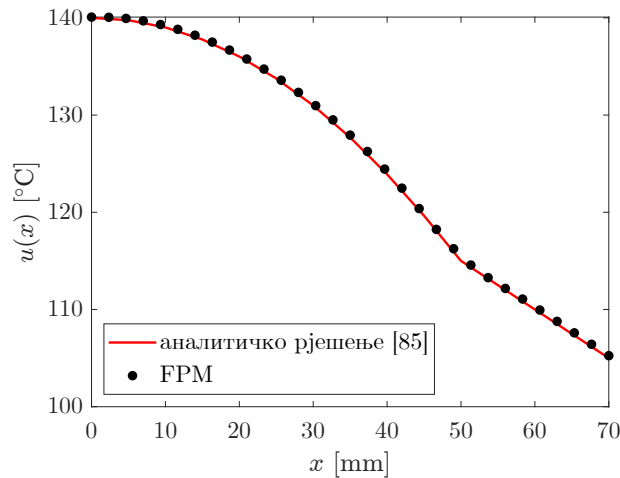
Слика 4.7: FPM рјешење трећег примјера једнодимензионалне кондукције на основу 50 насумично распоређених тачака при $\eta_h = \eta_D = 5000$ и $\Delta t = 10^{-4}$

FPM рјешење трећег примјера добијено је на основу 50 насумично распоређених тачака, за η параметре $\eta_h = \eta_D = 5000$. Резултат је рачунат до временског тренутка $t = 1$, при кораку $\Delta t = 10^{-4}$. За дискретизацију у временском домену употријебљене су све четири претходно наведене нумеричке методе. Међутим, за усвојени временски корак рјешења дају само Ојлерова имплицитна метода и трапезно правило. У првом случају вриједност r_0 грешке осредњене по временским корацима износи $\bar{r}_0 = 0,00781$, а у другом $\bar{r}_0 = 0,00791$.

За добијање претходних резултата било је потребно одабрати доста веће η параметре због изражене неуниформности у расподјели тачака. За случај равномјерно распоређених тачака, при $\eta_h = 100$ и $\eta_D = 500$, FPM у комбинацији са Ојлеровом имплицитном методом даје средњу грешку $\bar{r}_0 = 0,00152$, а у варијанти са трапезним правилом грешку $\bar{r}_0 = 0,00135$. Сличне грешке се добијају за $\eta_h = \eta_D = 5000$.

У четвртном једнодимензионалном примјеру разматра се стационарна кондукција кроз двослојни зид. Први слој је дебљине 50 mm и топлотне проводљивости $75 \text{ W/(m}^\circ\text{K)}$. У њему се равномјерно генерише топлота $Q = 1,5 \cdot 10^6 \text{ W/m}^3$. Са лијеве стране је потпуно изолован, док му је са десне стране прислоњен други слој дебљине 20 mm и двоструко веће топлотне проводљивости. Топлотног извора нема у другом слоју. Његова спољашња (десна) површина се хлади воденим млазом, при чему је температура воде 30°C , а коефицијент преноса топлоте $1000 \text{ W/(m}^2\text{K)}$. Дакле, један гранични услов је Нојманов, а други Робинов (конвективни). Овај примјер је разматран у [85], гдје се аналитичким путем дошло до вриједности температуре на једној и другој страни зида и до расподјеле температуре кроз зид. На лијевој страни зида температура износи 140°C , а на десној 105°C .

FPM рјешење овог проблема добијено је на основу 31 равномјерно распоређене тачке и за η параметре $\eta_h = \eta_D = 5000$. Нумерички одређена температура на лијевој страни зида је $140,08^\circ\text{C}$ (грешка је око 0,06%), а на десној $105,25^\circ\text{C}$ (грешка је око 0,24%). На слици 4.8 приказана је расподјела температуре кроз зид добијена помоћу FPM и расподјела представљена у [85].



Слика 4.8: FPM рјешење четвртог примјера једнодимензионалне кондукције на основу 31 равномјерно распоређене тачке при $\eta_h = \eta_D = 5000$

У петом примјеру се анализира нестационарно провођење топлоте кроз нехомогену средину сљедећих карактеристика:

$$y \in [0; 1], \quad \rho(y) = 1, \quad c(y) = e^{3y}, \quad k(y) = e^{3y}.$$

Нема топлотног извора. Почетни услов и гранични услови су:

$$u(y; 0) = 1, \quad u(0; t) = 1, \quad u(L; t) = 20.$$

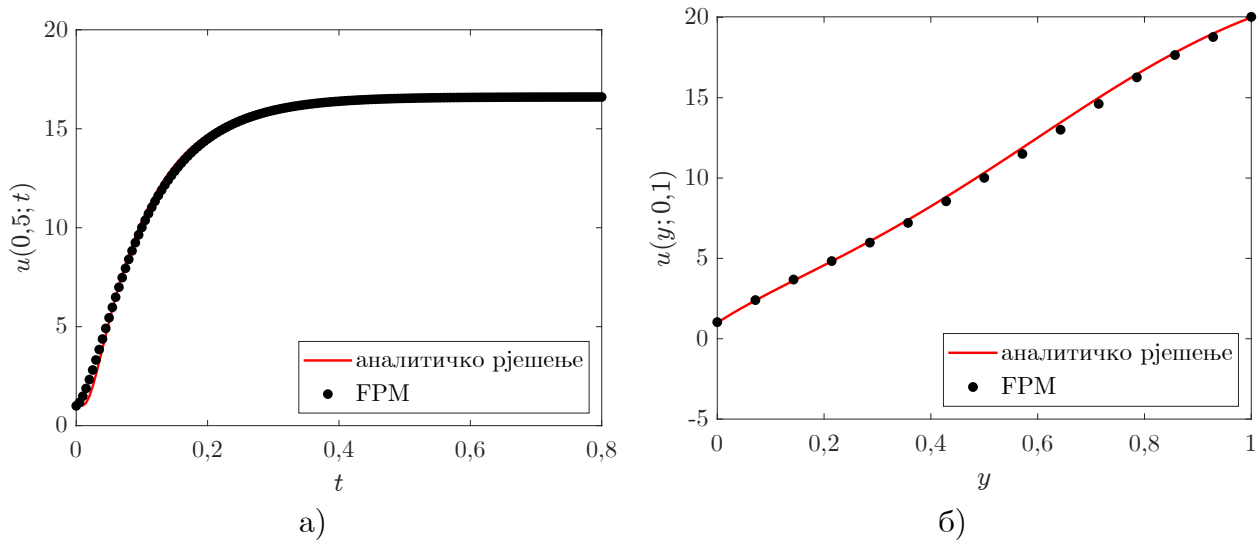
Аналитичко рјешење овог проблема дато је релацијом [24]:

$$u(y; t) = w(y) + 2e^{-1,5y} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{19e^{1,5} j \pi (-1)^j}{(j\pi)^2 + 1,5^2} \sin(j\pi y) e^{-((j\pi)^2 + 1,5^2)t}, \quad (4.37)$$

гдје је:

$$w(y) = \frac{20 - 19e^{-3y} - e^{-3}}{1 - e^{-3}}. \quad (4.38)$$

На слици 4.9.а приказано је аналитичко рјешење петог проблема у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8 и рјешење које даје FPM са Ојлеровом имплицитном методом при равномјерном распореду тачака. На слици 4.9.б дат је приказ расподеле температуре унутар домена у тренутку $t = 0,1$. За добијање FPM рјешења одабрано је 15 тачака и узето: $\eta_h = 10$, $\eta_D = 100$ и $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$.



Слика 4.9: Аналитичко рјешење петог једнодимензионалног проблема и FPM рјешење на основу 15 равномјерно распоређених тачака при $\eta_h = 10$, $\eta_D = 100$ и $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$: а) у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8, б) унутар домена за $t = 0,1$

У табели 4.1 приказане су вриједности r_0 грешке осредњене по временским корацима у оквиру посматраног интервала ($\bar{r}_0$) за различите η параметре, временске кораке и шеме за рјешавање ОДЈ. На основу добијених резултата се уочава да Ојлерова имплицитна метода даје готово увијек ниске вриједности грешке, без обзира на временски корак и вриједност η параметара, што се не може рећи за преостале три методе.

Табела 4.1: Осредњена вриједност r_0 грешке унутар временског интервала од 0 до 0,8 приликом добијања FPM рјешења петог једнодимензионалног проблема на основу 15 равномјерно/насумично распоређених тачака

		$\bar{r}_0$						
		$\eta_h = 10^1, \eta_D = 10^2$		$\eta_h = 10^2, \eta_D = 10^3$		$\eta_h = 10^3, \eta_D = 10^4$		
		равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	
Δt	$5 \cdot 10^{-3}$	Ојлер. експл.	-	-	-	-	-	-
		Ојлер. импл.	0,01841	0,14069	0,01217	0,01824	0,01620	0,01683
		трапез. прав.	0,02809	0,15181	0,14843	0,17280	0,31552	0,32126
		Рунге—Кута	-	-	-	-	-	-
$5 \cdot 10^{-5}$		Ојлер. експл.	0,01578	0,13889	-	-	-	-
		Ојлер. импл.	0,01586	0,13896	0,00830	0,01427	0,01487	0,01635
		трапез. прав.	0,01582	0,13893	0,00826	0,01423	0,01506	0,01664
		Рунге—Кута	0,01582	0,13893	0,00857	-	-	-

Кроз пет различитих примјера размотрени су и стационарна и нестационарна топлотна кондукција, проблеми код којих су карактеристике средине једнолике и неравномјерне, ситуације са топлотним извором и без њега, али и проблеми који укључују све три разматране врсте граничних услова (основни, природни и конвективни). Показало се да FPM даје веома добре резултате за сваки од анализираних случајева. Претходно изложени резултати, нарочито табела 4.1, указују на то да је од четири разматране методе за рјешавање ОДЈ најпогодније користити се Ојлеровом имплицитном методом у комбинацији са FPM.

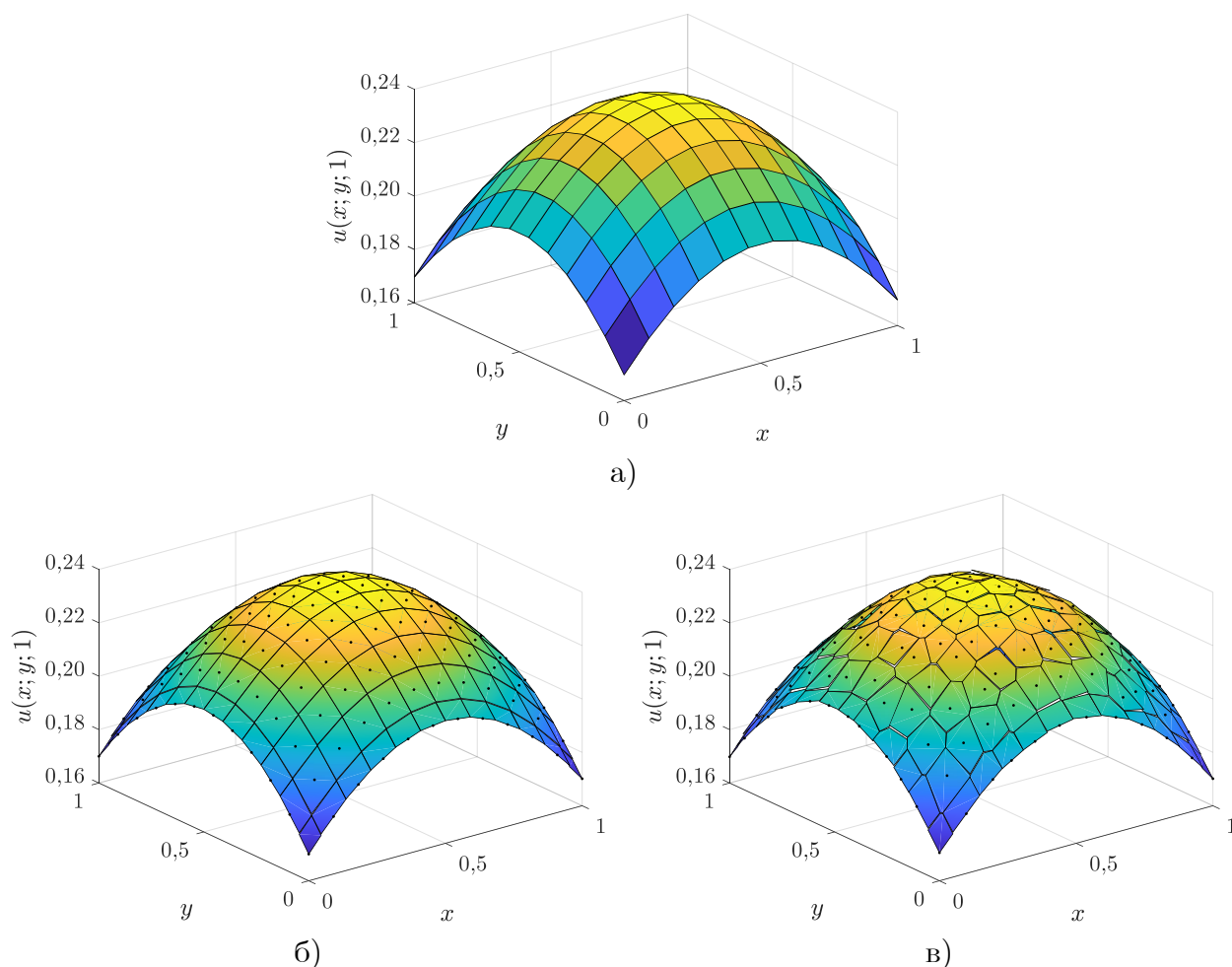
4.5.2 Дводимензионални проблеми

У првом примјеру дводимензионалне топлотне кондукције разматра се хомогена изотропна средина квадратног облика, димензија $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$. Без нарушавања општости проблема, може се узети да је $\rho = 1$ и $c = 1$, а да су компоненте тензора топлотне проводљивости $\mathbf{k}$ једнаке Кронекер делта функцији, $k_{ij} = \delta_{ij}$. Нема топлотног извора унутар домена. Аналитичко рјешење овог примјера дато је у раду [87] релацијом сљедећег облика:

$$u(x; y; t) = \sqrt{2}e^{-\pi^2 t/4} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right). \quad (4.39)$$

На основу претходног израза могуће је одредити почетни услов (за $t_0 = 0$) и граничне услове, при чему је на граници $x = 1$ постављен Нојманов, а на преостале три границе Дирихлеов гранични услов.

На слици 4.10 приказано је аналитичко рјешење у тренутку $t = 1$ и рјешење које даје FPM у комбинацији са Ојлеровом имплицитном шемом. За η параметре су одабране вриједности $\eta_h = \eta_D = 2$, док је за временски корак узето $\Delta t = 10^{-4}$. Проблем је ријешен и са униформно и са насумично распоређене 144 тачке унутар домена, од чега су њих 44 постављене на граници. У табели 4.2 приказане су вриједности релативних грешака у резултатима добијеним помоћу FPM уз коришћење четири нумеричке методе за рјешавање ОДЈ.



Слика 4.10: Рјешење првог дводимензионалног примјера у тренутку $t = 1$:
 а) аналитичко, б) FPM на основу 144 равномјерно распоређене тачке,
 в) FPM на основу 144 насумично распоређене тачке

Табела 4.2: Релативне грешке и рачунско вријеме приликом добијања FPM рјешења првог дводимензионалног примјера у тренутку $t = 1$ на основу 144 равномјерно/насумично распоређене тачке домена, при параметрима $\eta_h = \eta_D = 2$ и временском кораку $\Delta t = 10^{-4}$

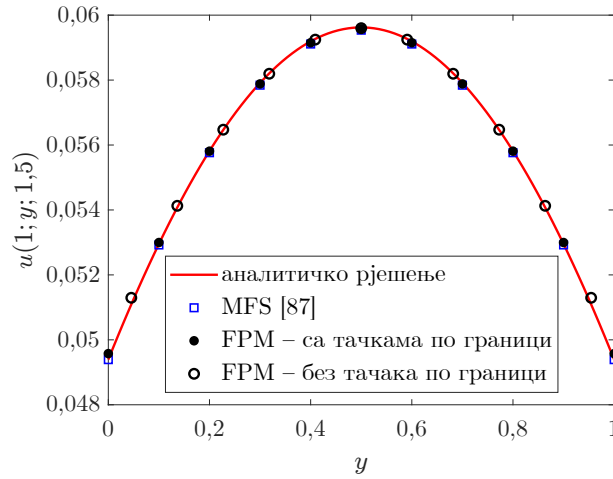
	r_0		r_1		рачунско вријеме ¹³
	равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	
Ојлерова експлицитна	0,00212	0,00331	0,0765	0,1417	6 s
Ојлерова имплицитна	0,00208	0,00328	0,0763	0,1416	6 s
трапезно правило	0,00210	0,00329	0,0764	0,1417	11 s
Рунге—Кута	0,00210	0,00329	0,0764	0,1417	16 s

Уочљиво је да свака од четири разматране методе за рјешавање ОДЈ даје међусобно приближне и веома добре резултате. Ојлерова експлицитна метода и Рунге—Кута метода

¹³Сви кодови у овом поглављу извршени су на рачунару следећих карактеристика: Intel(R) Core(TM) i3-9100T CPU @ 3,10 GHz; RAM 8,00 GB; Intel(R) UHD Graphics 630.

постају нестабилне и дивергирају ако се временски корак повећа. За корак $\Delta t = 10^{-3}$ Ојлеровом имплицитном методом се праве релативне грешке $r_0 = 0,00340$ и $r_1 = 0,0767$ за униформну, односно $r_0 = 0,00441$ и $r_1 = 0,1418$ за насумичну расподелу тачака, при чему се код извршава за 0,7 s. За временски корак $\Delta t = 10^{-2}$ Ојлеровом имплицитном методом се праве релативне грешке $r_0 = 0,02282$ и $r_1 = 0,0823$ за униформну, односно $r_0 = 0,02331$ и $r_1 = 0,1449$ за насумичну расподелу тачака, при чему се код извршава за свега 0,15 s. Трапезно правило је за нијансу спорије и даје незнатно лошије резултате у односу на Ојлерову имплицитну методу. За временски корак $\Delta t = 10^{-1}$ резултати постају неупотребљиви.

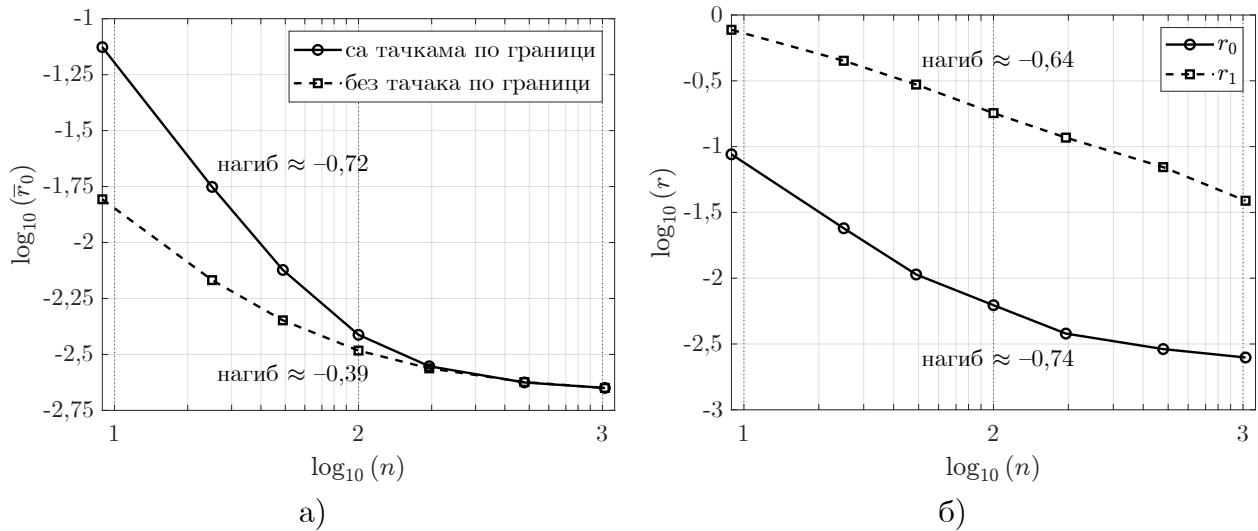
На слици 4.11 направљено је поређење резултата које даје приступ на бази FPM и Ојлерове имплицитне методе са резултатима који су одређени аналитичким путем (4.39) и са нумеричким рјешењем добијеним помоћу *Method of Fundamental Solutions* (MFS), а које је представљено у [87]. Приказани су резултати на Нојмановој граници ($x = 1$) у тренутку $t = 1,5$.



Слика 4.11: Поређење аналитичког, MFS [87] и FPM рјешења првог дводимензионалног примјера на Нојмановој граници ($x = 1$) у тренутку $t = 1,5$

На слици 4.11 представљена су два FPM рјешења добијена на основу 121 равномерно распоређене тачке, при *penalty* параметрима $\eta_h = \eta_D = 2$ и временском кораку $\Delta t = 10^{-4}$. У првом FPM рјешењу је 40 тачака постављено на самим границама. Тој ситуацији одговарају релативне грешке на нивоу домена у посматраном тренутку $r_0 = 0,00253$ и $r_1 = 0,0881$. У другом FPM рјешењу нема тачака на границама домена. Релативне грешке у том случају износе $r_0 = 0,00165$ и $r_1 = 0,0743$. На основу слике 4.11 се уочава да FPM даје мало боље резултате у односу на MFS. Стиче се утисак да је друго FPM рјешење за нијансу лошије од првог, иако претходно наведене грешке указују на супротно. Разлог за блага одступања другог рјешења од аналитичког, у приказу на слици, огледа се у чињеници да у другом рјешењу нема тачака постављених на самим границама, па је вриједност пробне функције на посматраној Нојмановој граници добијена апроксимацијом, према линеарном закону, на основу вриједности пробне функције у сусједним тачкама домена, у складу са изразом (2.7). У сваком случају, без обзира на то да ли су на границама домена постављене тачке или не, квалитет добијених FPM резултата је висок.

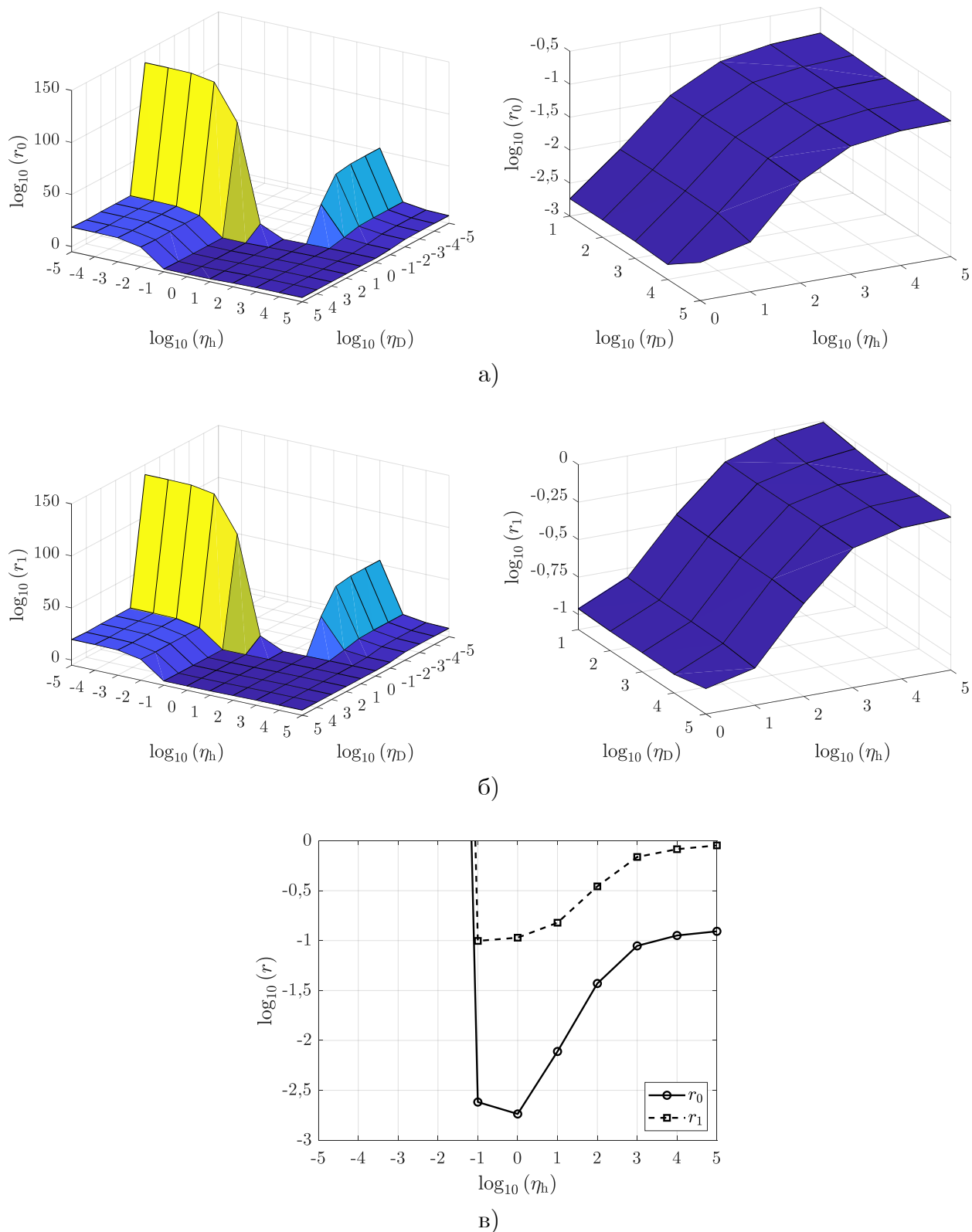
Да би се испитала конвергентност FPM рјешења приликом симулирања нестационарне дводимензионалне топлотне кондукције, одабран је претходни проблем. Ријешен је за домен истих димензија и карактеристика као у претходном случају и непромијењене η параметре, почетни услов/граничне услове. На слици 4.12.а приказана је осредњена вриједност релативне грешке r_0 унутар временског интервала $t \in (0; 1]$ добијена при различитом броју равномјерно распоређених тачака (n) и временском кораку $\Delta t = 10^{-3}$ уз употребу Ојлерове имплицитне шеме. Расподјела тачка је у првом случају вршена тако што је један дио њих постављен на самим границама, док у другом случају није било тачака на границама. На слици 4.12.б приказане су вриједности релативних грешака r_0 и r_1 у тренутку $t = 1$ добијене при различитом броју насумично распоређених тачака и временском кораку $\Delta t = 10^{-3}$ уз употребу Ојлерове имплицитне шеме. Један дио тачака је постављен на самим границама. Слика 4.12 показује да вриједности грешака опадају са порастом броја тачака, чиме је конвергентност FPM у рјешавању проблема дводимензионалне топлотне кондукције потврђена. Слика 4.12.а указује још и на то да резултати конвергирају истој вриједности без обзира на то да ли су тачке постављене на самим границама или не, што је потпуно природно.



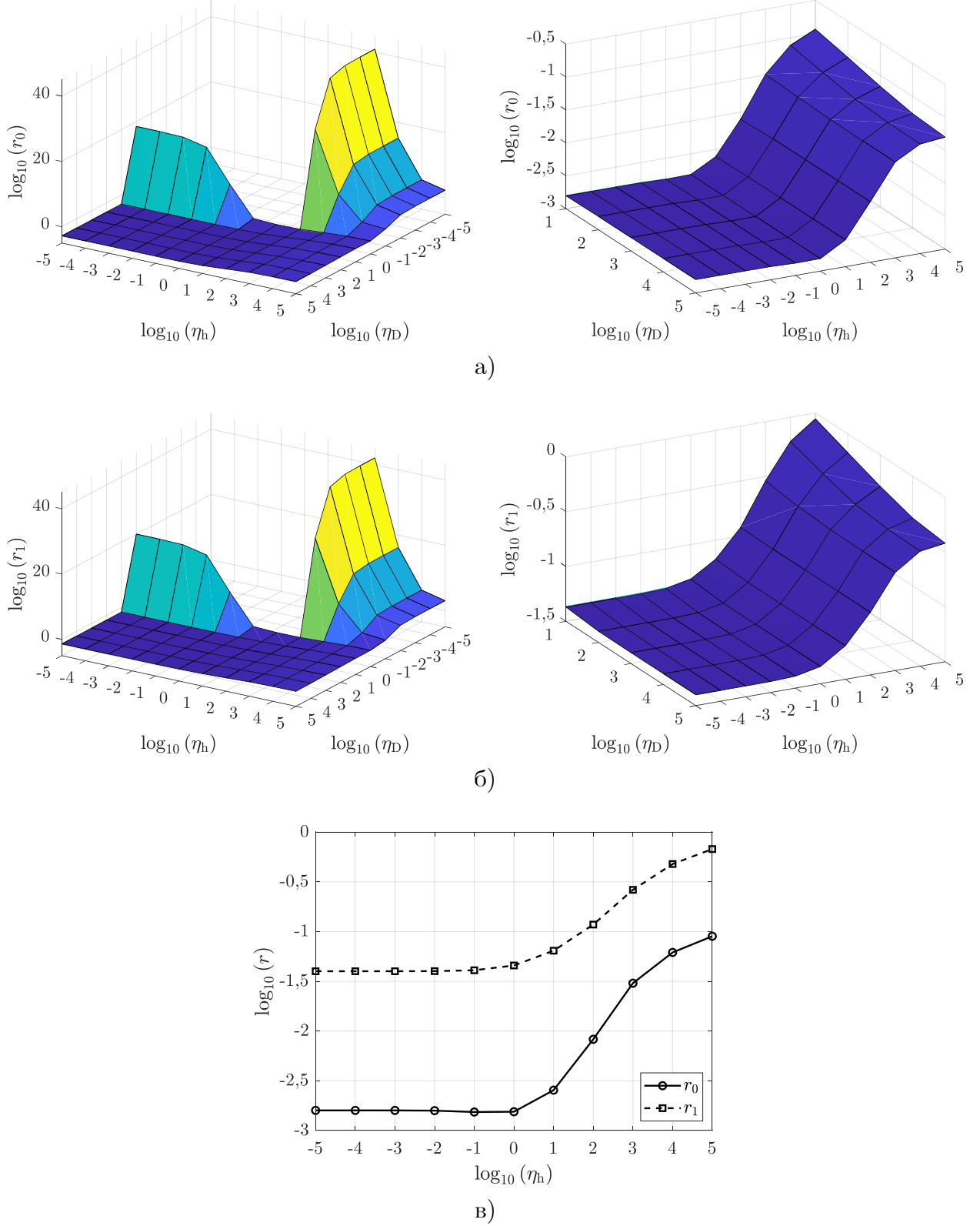
Слика 4.12: Степен конвергенције нумеричких резултата првог дводимензионалног примјера при временском кораку $\Delta t = 10^{-3}$ и параметрима $\eta_h = \eta_D = 2$:

а) осредњена вриједност r_0 грешке унутар интервала $t \in (0; 1]$ и равномјерна расподјела тачака, б) релативне грешке r_0 и r_1 у тренутку $t = 1$ и насумична расподјела тачака

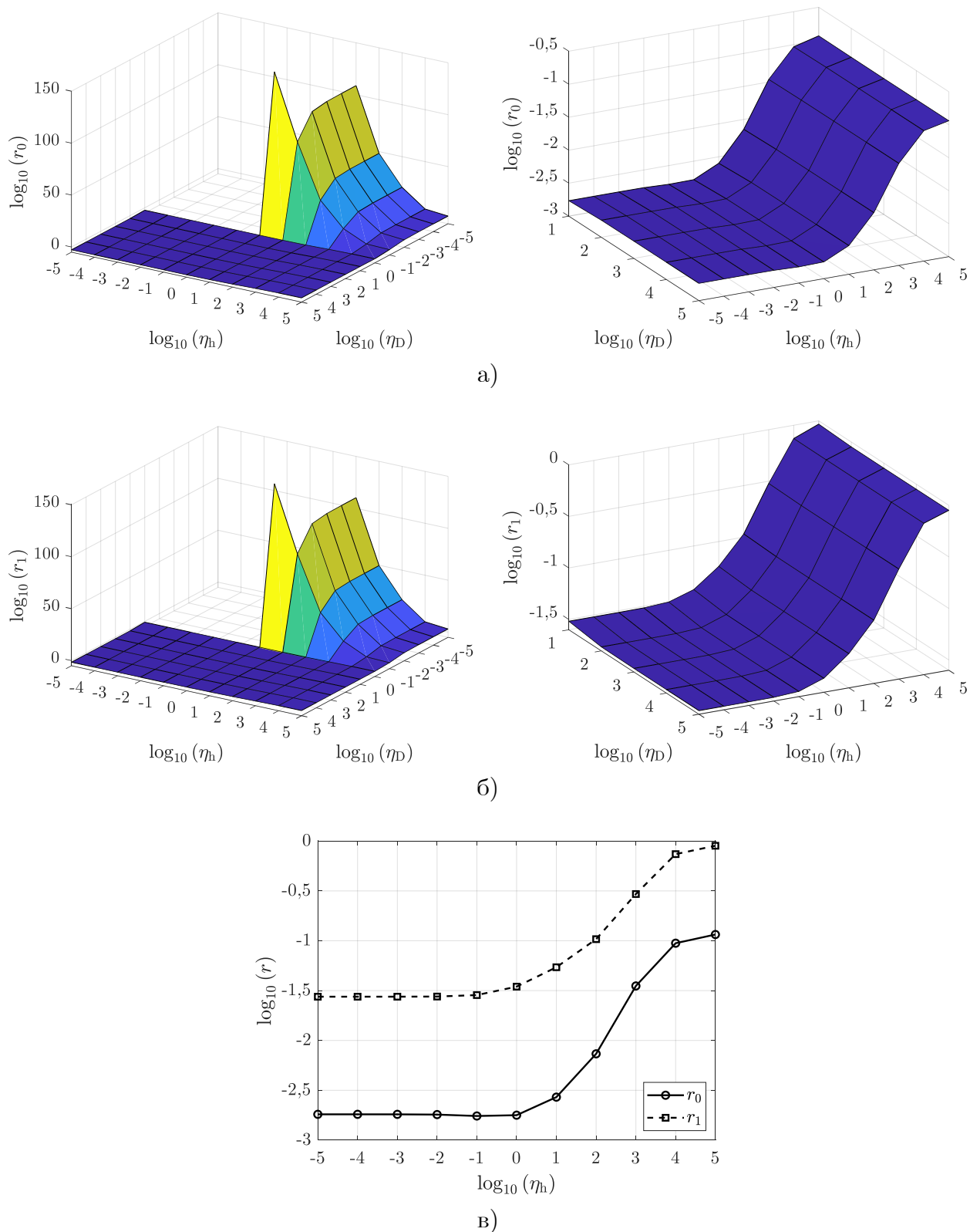
Утицај η параметара на вриједност релативних грешака анализиран је у наставку. Одабран је исти проблем као у пређашњем случају. За дискретизацију у временском домену употребљена је Ојлерова имплицитна метода. Корак износи $\Delta t = 10^{-4}$, а грешке су рачунате у тренутку $t = 1$. Вриједности η параметара вариране су у интервалу од 10^{-5} до 10^5 . Добијени резултати представљени су на сликама 4.13–4.15. У резултатима са слике 4.13 домен је подијељен на основу 144 насумично распоређене тачке, од чега се њих 44 налазе на границама домена. У резултатима са слике 4.14 домен је подијељен на основу 144 равномјерно распоређене тачке, од чега се њих 44 налазе на границама домена. У резултатима са слике 4.15 домен је подијељен на основу 144 равномјерно распоређене тачке, при чему нема тачака на границама домена.



Слика 4.13: Грешке FPM рјешења првог димензионалног проблема при насумичној распоdjели 144 тачке, од чега се њих 44 налазе на границама домена — утицај η_h и η_D параметара на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке в) r_0 и r_1 грешке за $\eta_D = 100$



Слика 4.14: Грешке FPM рјешења првог димензионалног проблема при равномјерној расподјели 144 тачке, од чега се њих 44 налазе на границама домена – утицај η_h и η_D параметара на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке в) r_0 и r_1 грешке за $\eta_D = 100$



Слика 4.15: Грешке FPM рјешења првог димензионалног проблема при равномјерној расподјели 144 тачке, од који се ниједна не налази на границама домена – утицај η_h и η_D параметара на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке в) r_0 и r_1 грешке за $\eta_D = 100$

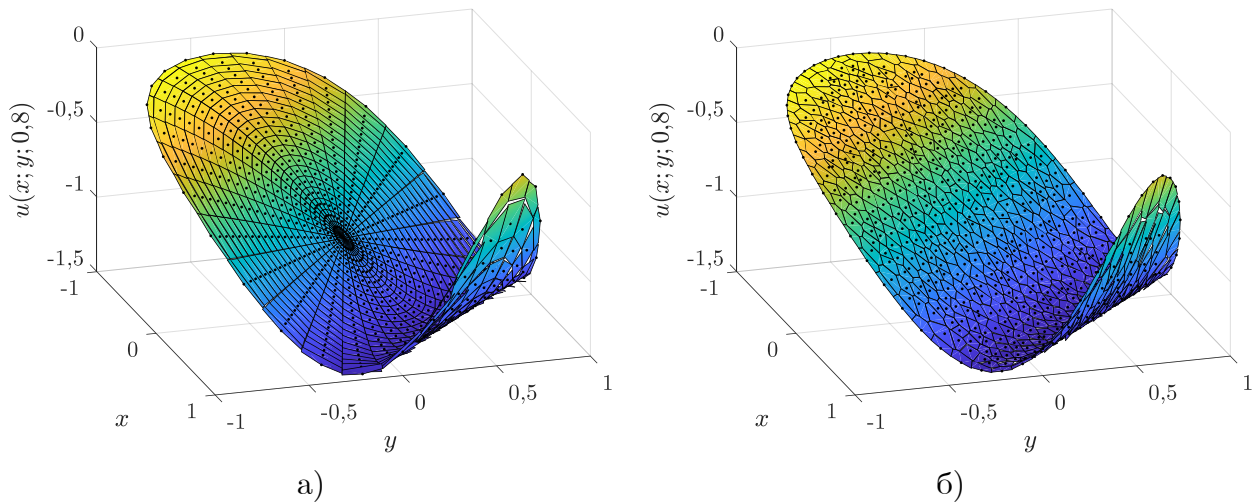
Све три претходне слике наводе на сличне закључке. Вриједности η_D параметра могу имати битан утицај на квалитет добијених резултата. Уочава се да за премале η_D параметре није могуће доћи до резултата, те да није добро бирати вриједности испод 10. С друге стране, варијације у резултатима за све веће η_D вриједности су готово занемарљиве. Утицај η_h параметра је нарочито битан и примјећује се да је погодно узимати вриједности блиске 1. Равномјерна расподела тачака дозвољава и веома ниске η_h параметре, дочим вриједности испод 1 не погодују насумичној расподјели тачака.

У другом дводимензионалном примјеру се разматра нестационарна кондукција кроз домен истих карактеристика као у првом случају ($\rho = 1$, $c = 1$, $k_{ij} = \delta_{ij}$), при чему је овог пута облика круга, чији је полупречник 1, са центром у координатном почетку. Нема топлотног извора. Аналитичко рјешење је дато у радовима [87, 88]:

$$u(x; y; t) = e^{x+y} \cos(x + y + 4t). \quad (4.40)$$

Граница домена (обод круга) је дефинисана као Дирихлеова.

На слици 4.16 приказано је рјешење у тренутку $t = 0,8$ које даје FPM са трапезним правилом. У табели 4.3 дате су вриједности релативних грешака у резултатима добијеним помоћу FPM у комбинацији са Ојлеровом имплицитном методом и трапезним правилом.



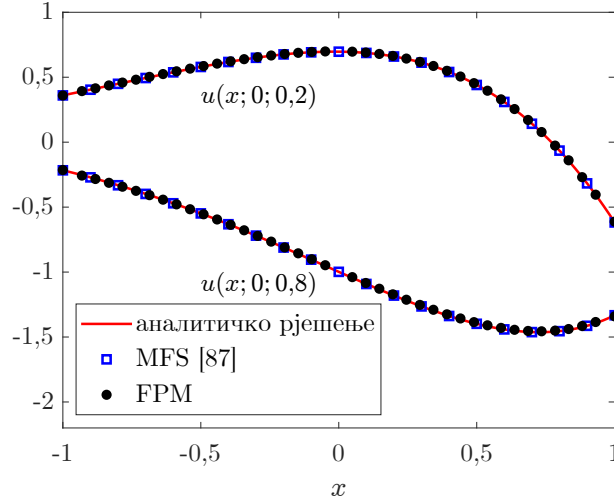
Слика 4.16: FPM рјешење другог дводимензионалног примјера у тренутку $t = 0,8$ за $\eta_h = 1$, $\eta_D = 10$ и $\Delta t = 0,0016$ на основу 600 тачака:
а) правилног распореда, б) насумичног распореда

Табела 4.3: Релативне грешке и рачунско вријеме приликом добијања FPM рјешења другог дводимензионалног примјера у тренутку $t = 0,8$ на основу 600 правилно/насумично распоређених тачака, при параметрима $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$ и кораку $\Delta t = 0,0016$

	r_0		r_1		рачунско вријеме
	равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	
Ојлерова имплицитна	0,00654	0,00838	0,1391	0,1222	1,2 s
трапезно правило	0,00527	0,00776	0,1377	0,1220	1,6 s

Проблем је ријешен са 600 правилно распоређених тачака, а потом са исто толико насумично распоређених тачака, од чега је у оба случаја њих 30 постављено на граници. За η параметре су узете вриједности $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$, док је за временски корак узето $\Delta t = 0,0016$ што даје 500 временских корака. Ојлерова експлицитна и Рунге–Кута метода добре резултате дају тек при великом броју временских корака (15000).

Слика 4.17 има за циљ поређење FPM резултата са аналитичким рјешењем (4.40) и резултатима које даје MFS, а који су представљени у [87]. Уочава се да и FPM и MFS дају одличне резултате.



Слика 4.17: Поређење аналитичког, MFS [87] и FPM рјешења другог димензионалног примјера

Кроз наредна четири примјера се разматрају ситуације у којима је средина којом се проводи топлота хомогена/нехомогена и изотропна/анизотропна, при чему је топлотни извор изостављен. Домен је квадратног облика стране L . Почетни услов и Дирихлеови гранични услови су дефинисани на следећи начин:

$$u(x; y; 0) = v_0, \quad u(x; 0; t) = u_0, \quad u(x; L; t) = u_L.$$

На преосталим страницама квадрата фигурише симетрични гранични услов. У случају изотропне средине, то одговара Нојмановом услову $g_N(0; y; t) = g_N(L; y; t) = 0$. Ако је средина анизотропна, онда је потребно обезбиједити симетричност увођењем додатне матрице топлотне проводљивости на симетричним границама [53]:

$$\mathbf{K}_S = - \int_{\mathbf{e}} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T (\mathbf{k} - k_{11} \mathbf{E}) \mathbf{B} d\Gamma, \quad (4.41)$$

гдје је k_{11} први члан тензора топлотне проводљивости $\mathbf{k}$, а $\mathbf{E}$ јединична матрица димензија 2×2 . Матрица (4.41) се потиже када је средина изотропна.

Карактеристике средине су дефинисане на следећи начин:

$$\rho(x; y) = 1, \quad c(x; y) = f(y) \quad \mathbf{k}(x; y) = f(y) \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} \\ \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} \end{bmatrix},$$

гдје је за изотропну средину $\hat{k}_{ij} = \delta_{ij}$, а за анизотропну $\hat{k}_{11} = \hat{k}_{22} = 2$, $\hat{k}_{12} = \hat{k}_{21} = 1$.

Слични нумерички примјери су разматрани у раду [22] коришћењем *Local Boundary Integral Equation* (LBIE) методе и у радовима [23, 89, 90] примјеном MLPG методе. Аналитичка рјешења су добијена на бази процедуре трансформације промјенљивих [20, 91] и изложена су у [24]. За овако постављен проблем распоdjела температуре не зависи од осе x .

У трећем примјеру дводимензионалне кондукције функција $f(y)$ има облик:

$$f(y) = (ae^{\delta y/L} + be^{-\delta y/L})^2,$$

при чему је $a = 1$ и $b = 0$. Почетни услов и гранични услови су $v_0 = u_0 = 1$ и $u_L = 20$. Да би средина била хомогена, узима се $\delta = 0$. За случај нехомогене средине одабрано је $\delta = 1,5$. Аналитичко рјешење овог проблема дато је релацијом [24]:

$$u(y; t) = w(y) + 2\sqrt{\frac{1}{f(y)}} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{j\pi}{(j\pi)^2 + \delta^2} \sin\left(\frac{j\pi}{L}y\right) e^{-\kappa((j\pi/L)^2 + (\delta/L)^2)t}, \quad (4.42)$$

гдје су:

$$w(y) = u_L \frac{a + be^{-2\delta}}{1 - e^{-2\delta}} \frac{1 - e^{-2\delta y/L}}{a + be^{-2\delta y/L}} + u_0 \frac{a + b}{1 - e^{-2\delta}} \frac{e^{-2\delta y/L} - e^{-2\delta}}{a + be^{-2\delta y/L}}, \quad (4.43)$$

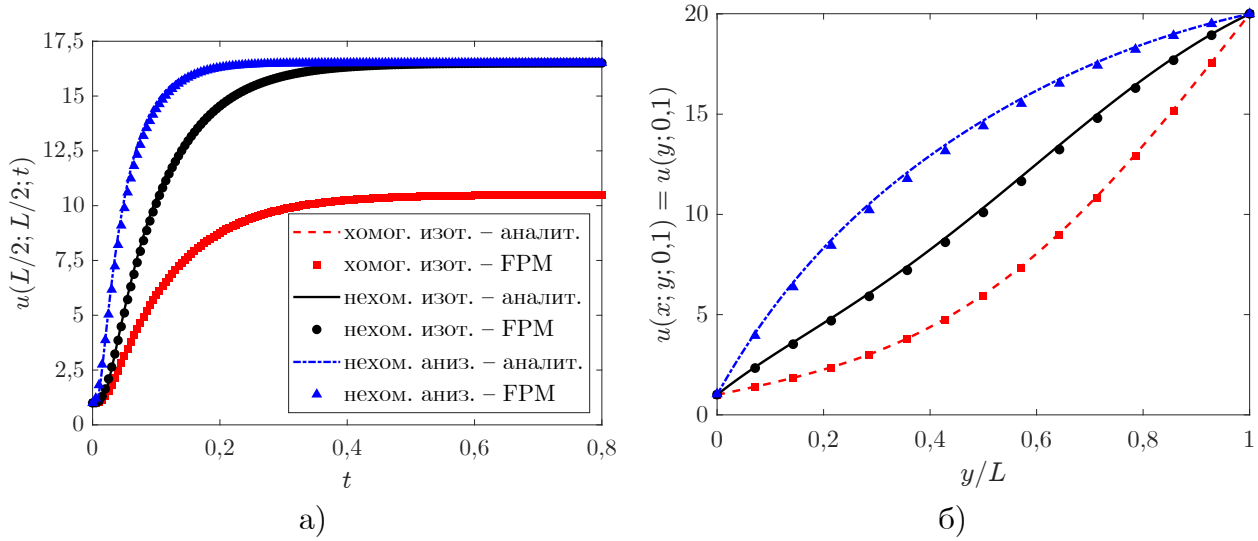
$$C_j = (a + b)(v_0 - u_0) + (ae^{\delta} + be^{-\delta})(u_L - v_0)(-1)^j$$

и гдје је за усвојене вриједности $\kappa = 1$ уколико је средина изотропна, а $\kappa = 2$ ако је анизотропна.

На слици 4.18.а приказано је аналитичко рјешење трећег дводимензионалног проблема у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8 и рјешење које даје FPM са Ојлеровом имплицитном методом при равномјерном распореду тачака. На слици 4.18.б дат је приказ распоdjеле температуре унутар домена¹⁴ у временском тренутку $t = 0,1$. За добијање FPM рјешења употријебљено је 225 тачака и узети су параметри $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$ и временски корак $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$. У табели 4.4 приказане су средње вриједности релативне грешке r_0 унутар домена по временским корацима у оквиру посматраног интервала ($\bar{r}_0$).

Идентичан проблем за случај нехомогене средине је пети примјер из групе једнодимензионалних проблема. Поређењем слика 4.9 и 4.18 уочава се да су резултати врло подударни. Међутим, интересантно је направити поређење вриједности из табеле 4.1 и табеле 4.4, јер се примјећује да су резултати бољи ако се проблем посматра као дводимензионалан.

¹⁴Приказ је у равни $x = L/2$, али је исти и у било којој другој њој паралелној равни.

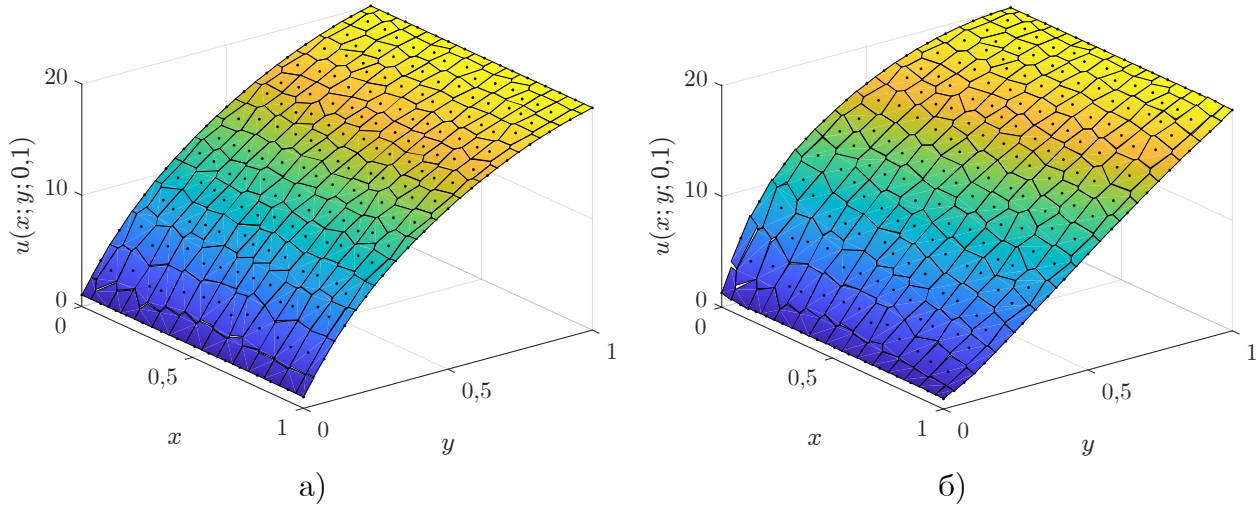


Слика 4.18: Рјешење трећег дводимензионалног проблема за различите средине:
а) у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8, б) унутар домена за $t = 0,1$

Табела 4.4: Осредњена вриједност релативне грешке r_0 унутар временског интервала од 0 до 0,8 приликом добијања FPM рјешења трећег дводимензионалног проблема на основу 225 равномерно/насумично распоређених тачака, за различите средине

		$\bar{r}_0$					
		хомог. изотр.		нехомог. изотр.		нехомог. анизотр.	
		равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	равномј.	насумич.
Δt	Ојлер. експл.	-	-	-	-	-	-
	Ојлер. импл.	0,00417	0,00394	0,00748	0,00799	0,00714	0,00775
	трапез. прав.	0,03183	0,03305	0,02978	0,03174	0,04308	0,04508
	Рунге-Кута	-	-	-	-	-	-
$5 \cdot 10^{-5}$	Ојлер. експл.	0,00137	0,00179	0,00243	0,00344	-	0,00309
	Ојлер. импл.	0,00132	0,00172	0,00247	0,00345	0,00226	0,00310
	трапез. прав.	0,00134	0,00175	0,00245	0,00344	0,00223	0,00308
	Рунге-Кута	0,00134	0,00175	0,00245	0,00344	0,00223	0,00309

Као што је претходно речено, расподјела температуре за посматрани примјер одговара једнодимензионалним проблемима. У случају анизотропне средине, то се обезбјеђује наметањем симетричног граничног услова. Добијена расподјела је еквивалентна ситуацији у којој је $\hat{k}_{12} = \hat{k}_{21} = 0$ (нема изотропности), с битном разликом што физичке карактеристике средине у симулацији нису промијењене (одржан је анизотропни карактер материјала), већ је добијени резултат постигнут увођењем додатне матрице топлотне проводљивости на симетричним границама. На слици 4.19.а приказано је претходно добијено FPM рјешење за нехомогену анизотропну средину на основу 225 тачака насумичног распореда у тренутку $t = 0,1$ када се уведе симетрични гранични услов, а на слици 4.19.б исто такво рјешење када се симетрични гранични услов замијени Нојмановим $g_N(0; y; t) = g_N(L; y; t) = 0$. На слици 4.19.б уочава се да постоји промјена у расподјели температуре дуж осе x као посљедица анизотропности средине.



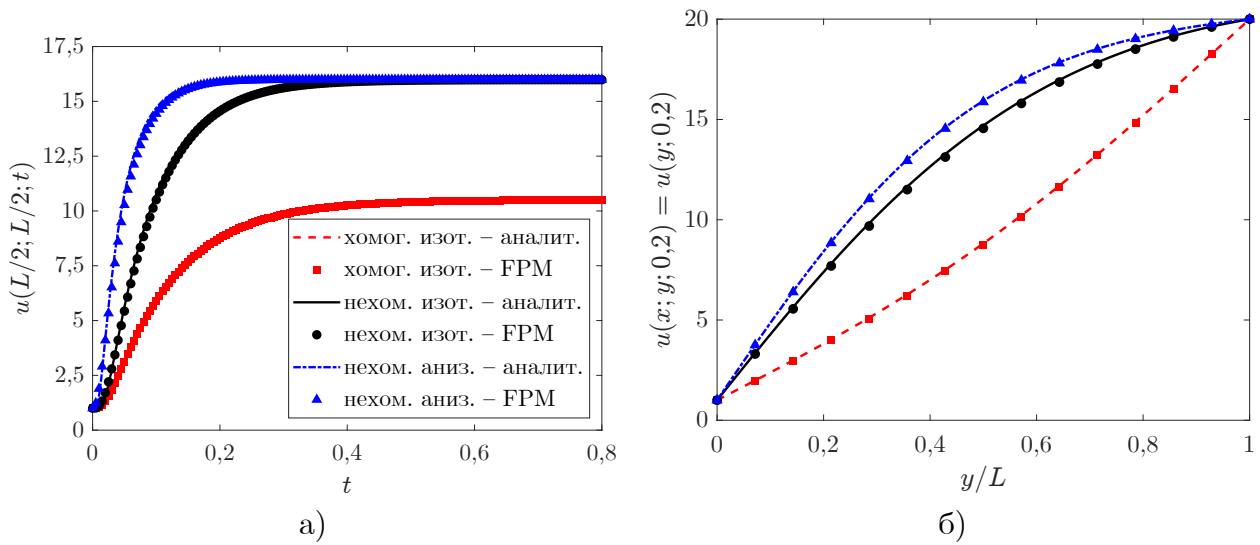
Слика 4.19: FPM рјешење трећег дводимензионалног проблема за нехомогену анизотропну средину у тренутку $t = 0,1$ уз увођење: а) симетричног граничног услова, б) Нојмановог граничног услова $g_N(0; y; t) = g_N(L; y; t) = 0$ умјесто симетричног

У четвртом дводимензионалном примјеру функција $f(y)$ је експоненцијална:

$$f(y) = (ae^{\delta y/L} + be^{-\delta y/L})^2,$$

при чему је $a = b = 1$. Почетни услов и гранични услови су $v_0 = u_0 = 1$ и $u_L = 20$. Ако је средина хомогена, онда је $\delta = 0$. За случај нехомогене средине узето је $\delta = 2$. Аналитичко рјешење овог проблема дато је релацијама (4.42)–(4.43).

На слици 4.20.а приказано је аналитичко рјешење четвртог проблема у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8 и рјешење које даје FPM у комбинацији са Ојлеровом имплицитном методом при равномјерном распореду тачака. На слици 4.20.б дат је приказ расподјеле температуре унутар домена у тренутку $t = 0,2$.



Слика 4.20: Рјешење четвртог дводимензионалног проблема за различите средине: а) у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8, б) унутар домена за $t = 0,2$

За добијање FPM рјешења употребљено је 225 тачака и узети су параметри $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$ и корак $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$. У табели 4.5 приказане су средње вриједности r_0 грешке унутар домена по временским корацима у оквиру посматраног интервала ($\bar{r}_0$).

Табела 4.5: Осредњена вриједност релативне грешке r_0 унутар временског интервала од 0 до 0,8 приликом добијања FPM рјешења четвртог димензионалног проблема на основу 225 равномјерно/насумично распоређених тачака, за различите средине

		$\bar{r}_0$						
		хомог. изотр.		нехомог. изотр.		нехомог. анизотр.		
		равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	
Δt	$5 \cdot 10^{-3}$	Ојлер. експл.	-	-	-	-	-	-
		Ојлер. импл.	0,00417	0,00394	0,00701	0,00708	0,00626	0,00635
		трапез. прав.	0,03183	0,03305	0,02929	0,03083	0,04340	0,04527
		Рунге—Кута	-	-	-	-	-	-
	$5 \cdot 10^{-5}$	Ојлер. експл.	0,00137	0,00179	0,00186	0,00237	-	0,00170
		Ојлер. импл.	0,00132	0,00172	0,00192	0,00240	0,00141	0,00171
		трапез. прав.	0,00134	0,00175	0,00189	0,00239	0,00138	0,00169
		Рунге—Кута	0,00135	0,00175	0,00189	0,00239	0,00138	0,00169

У петом примјеру димензионалне кондукције функција $f(y)$ има тригонометријски облик:

$$f(y) = \left(a \cos \frac{\delta y}{L} + b \sin \frac{\delta y}{L} \right)^2,$$

при чему је $a = 1$ и $b = 5$. Почетни услов и гранични услови су $v_0 = u_0 = 0$ и $u_L = 100$. Ако је средина хомогена, онда је $\delta = 0$. За случај нехомогене средине узето је $\delta = 2$. Аналитичко рјешење овог проблема дато је релацијом [24]:

$$u(y; t) = w(y) + 2\sqrt{\frac{1}{f(y)}} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{j\pi}{(j\pi)^2 - \delta^2} \sin\left(\frac{j\pi}{L}y\right) e^{-\kappa((j\pi/L)^2 - (\delta/L)^2)t}, \quad (4.44)$$

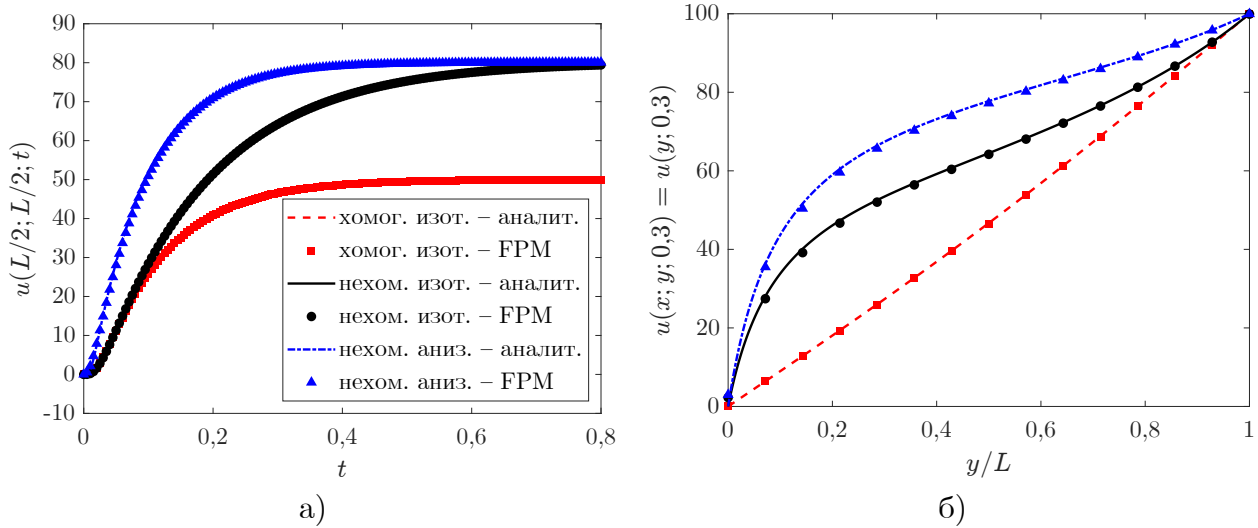
гдје су:

$$w(y) = \frac{au_0 \cos(\delta y/L) + (u_L(a \cos \delta + b \sin \delta) - au_0 \cos \delta) \frac{\sin(\delta y/L)}{\sin \delta}}{a \cos(\delta y/L) + b \sin(\delta y/L)}, \quad (4.45)$$

$$C_j = a(v_0 - u_0) + (u_L - v_0)(a \cos \delta + b \sin \delta)(-1)^j$$

и гдје је за усвојене бројне вриједности $\kappa = 1$ уколико је средина изотропна, а $\kappa = 2$ ако је анизотропна.

На слици 4.21.а приказано је аналитичко рјешење петог проблема у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8 и рјешење које даје FPM са Ојлеровом имплицитном шемом при равномјерном распореду тачака. На слици 4.21.б дат је приказ расподјеле температуре унутар домена за $t = 0,3$. FPM рјешење је добијено на бази 225 тачака, за $\eta_h = 1$, $\eta_D = 10$ и $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$. У табели 4.6 приказане су средње вриједности релативне грешке r_0 унутар домена по временским корацима у оквиру посматраног временског интервала ($\bar{r}_0$).



Слика 4.21: Рјешење петог дводимензионалног проблема за различите средине:
а) у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8, б) унутар домена за $t = 0,3$

Табела 4.6: Осредњена вриједност релативне грешке r_0 унутар временског интервала од 0 до 0,8 приликом добијања FPM рјешења петог дводимензионалног проблема на основу 225 равномерно/насумично распоређених тачака, за различите средине

		$\bar{r}_0$						
		хомог. изотр.		нехомог. изотр.		нехомог. анизотр.		
		равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	
Δt	$5 \cdot 10^{-3}$	Ојлер. експл.	-	-	-	-	-	-
		Ојлер. импл.	0,00456	0,00431	0,01061	0,01350	0,01356	0,01713
		трапез. прав.	0,03483	0,03617	0,03898	0,04347	0,05332	0,05810
		Рунге—Кута	-	-	-	-	-	-
	$5 \cdot 10^{-5}$	Ојлер. експл.	0,00149	0,00195	0,00820	0,01179	0,01008	0,01388
		Ојлер. импл.	0,00144	0,00188	0,00819	0,01177	0,01000	0,01386
		трапез. прав.	0,00146	0,00191	0,00819	0,01178	0,00999	0,01386
		Рунге—Кута	0,00147	0,00191	0,00819	0,01178	0,00999	0,01387

У шестом примјеру дводимензионалне кондукције функција $f(y)$ има степени, тј. квадратни облик:

$$f(y) = \left(1 + \frac{\delta y}{L}\right)^2.$$

Почетни услов и гранични услови су $v_0 = u_0 = 1$ и $u_L = 20$. Ако је средина хомогена, онда је $\delta = 0$. За случај нехомогене средине узето је $\delta = 3$. Аналитичко рјешење овог проблема дато је релацијом [24]:

$$u(y; t) = w(y) + 2\sqrt{\frac{1}{f(y)}} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{1}{j\pi} \sin\left(\frac{j\pi}{L}y\right) e^{-\kappa(j\pi/L)^2 t}, \quad (4.46)$$

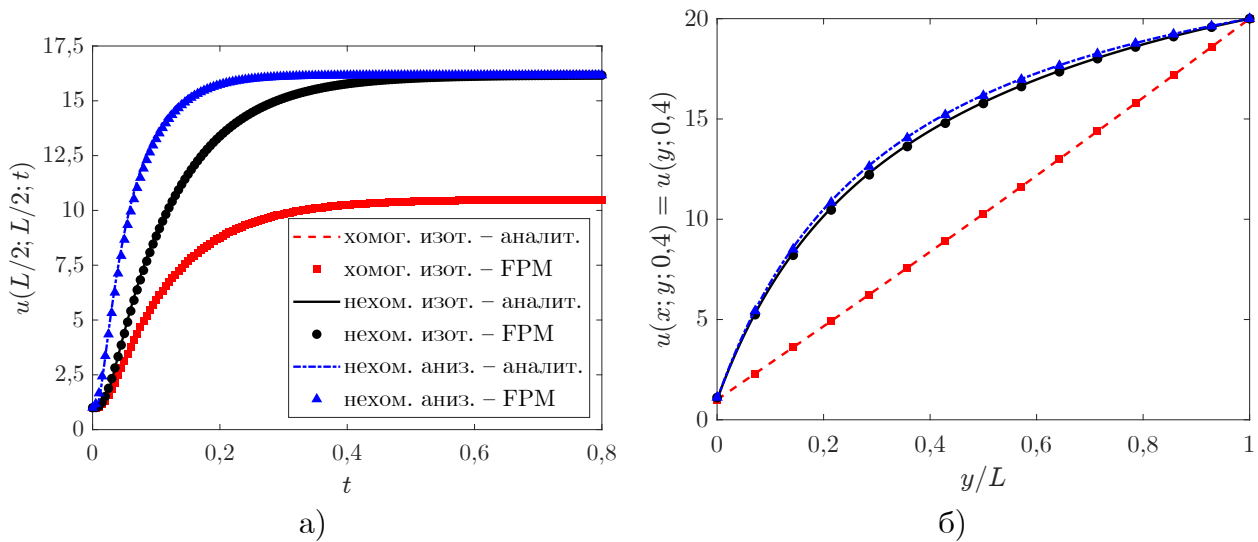
гдје су:

$$w(y) = u_0 + (u_L - u_0) \frac{(1 + \delta) y/L}{1 + \delta y/L}, \quad (4.47)$$

$$C_j = v_0 - u_0 + (u_L - v_0) (1 + \delta) (-1)^j$$

и гдје је за усвојене бројне вриједности $\kappa = 1$ уколико је средина изотропна, а $\kappa = 2$ ако је анизотропна.

Слика 4.22.а даје аналитичко рјешење шестог проблема у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8 и FPM рјешење (са Ојлеровом имплицитном шемом) при равномјерном распореду тачака. Слика 4.22.б приказује расподјелу температуре по домену за $t = 0,4$, а табела 4.7 r_0 грешку осредњену по временским корацима.



Слика 4.22: Рјешење шестог дводимензионалног проблема за различите средине:
а) у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8, б) унутар домена за $t = 0,4$

Табела 4.7: Осредњена вриједност релативне грешке r_0 унутар временског интервала од 0 до 0,8 приликом добијања FPM рјешења шестог дводимензионалног проблема на основу 225 равномјерно/насумично распоређених тачака, за различите средине

		$\bar{r}_0$						
		хомог. изотр.		нехомог. изотр.		нехомог. анизотр.		
		равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	равномј.	насумич.	
Δt	$5 \cdot 10^{-3}$	Ојлер. експл.	-	-	-	-	-	-
		Ојлер. импл.	0,00417	0,00394	0,00750	0,00848	0,00782	0,00902
		трапез. прав.	0,03183	0,03305	0,03083	0,03326	0,04409	0,04642
		Рунге—Кута	-	-	-	-	-	-
$5 \cdot 10^{-5}$		Ојлер. експл.	0,00137	0,00179	0,00297	0,00448	-	0,00462
		Ојлер. импл.	0,00132	0,00172	0,00298	0,00447	0,00316	0,00461
		трапез. прав.	0,00134	0,00175	0,00297	0,00448	0,00315	0,00460
		Рунге—Кута	0,00134	0,00175	0,00297	0,00448	0,00315	0,00461

Претходно изложена FPM рјешења шестог проблема за различите средине, уз предложене четири нумеричке методе којима се врши дискретизација једначине у временском домену, добијена су на основу 225 равномерно/насумично распоређених тачака. *Penalty* параметри на унутрашњим и Дирихлеовим границама су $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$. Резултат приказан на слици 4.22 добијен је за временски корак $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$. Уочава се да је веома добро преклапање нумеричких резултата са аналитичким. Кад год је било могуће доћи до рјешења, свака од четири разматране методе за рјешавање ОДЈ дала је врло ниске вриједности r_0 релативне грешке унутар домена осредњене по временским корацима ($\bar{r}_0$).

Разноврсни резултати из претходних неколико примјера показују да нехомогеност и анизотропност средине имају доста битан утицај на дистрибуцију температуре, али и то да се примјеном FPM врло једноставно и успјешно поменути утицаји узимају у обзир, независно од тога какав је облик функција расподјеле карактеристика материјала и који тип граничних услова фигурира. На основу слика 4.18, 4.20–4.22 уочава се да расподјеле температуре у случају изотропне и анизотропне средине конвергирају истој вриједности, с тим што ће брзина којом се постиже стационарно стање бити различита. Сви добијени резултати за претходна четири проблема су врло блиски аналитичким и нумеричким резултатима изложеним у [24].

На основу претходних резултата се може закључити да је од разматране четири методе за рјешавање ОДЈ најбоља Ојлерова имплицитна. При довољно малом кораку, све четири методе дају приближно једнаке резултате. Међутим, при већим корацима Ојлерова експлицитна и Рунге–Кута шеме постају неупотребљиве, док трапезно правило даје резултате, али су они често лошији од резултата добијених Ојлеровом имплицитном методом.

Седмим примјером се разматра стационарна топлотна кондукција кроз анизотропну средину облика квадрата странице 1. Тензор топлотне проводљивости има следећи облик:

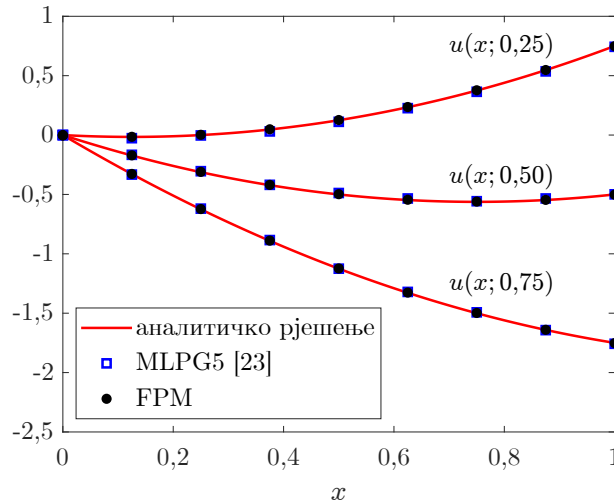
$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 0,2 & 1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

Нема топлотног извора унутар домена. Дирихлеов гранични услов је постављен на све четири границе. Аналитичко рјешење овог проблема дато је у раду [23] и има следећи облик:

$$u(x; y) = x^2 + x - 5xy. \quad (4.48)$$

Поред аналитичког рјешења, у истом раду је представљен и нумерички резултат који је добијен помоћу MLPG5 методе на основу 81 равномерно распоређене тачке унутар домена.

На слици 4.23 приказани су: аналитичко, MLPG5 и FPM рјешење посматраног проблема. Попут рјешења из рада [23], FPM резултат је базиран на 81 равномерно распоређеној тачки. За *penalty* параметре на унутрашњим и Дирихлеовим границама усвојене су вриједности $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$. Релативне грешке тако добијених FPM рјешења износе: $r_0 = 0,00163$ и $r_1 = 0,0157$. Са слике 4.23 се уочава да FPM даје за нијансу боље резултате у односу на MLPG5.

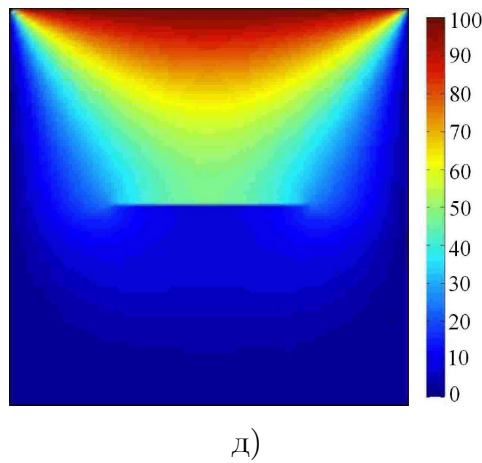
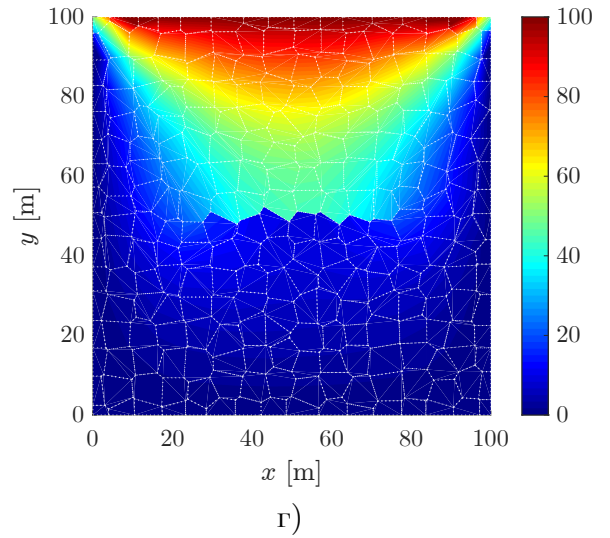
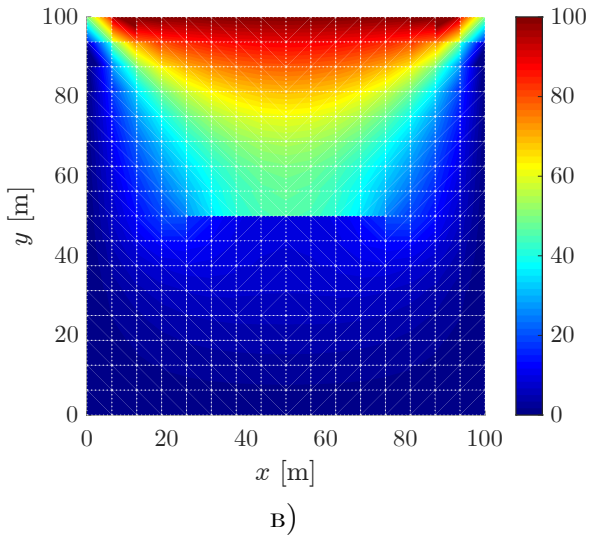
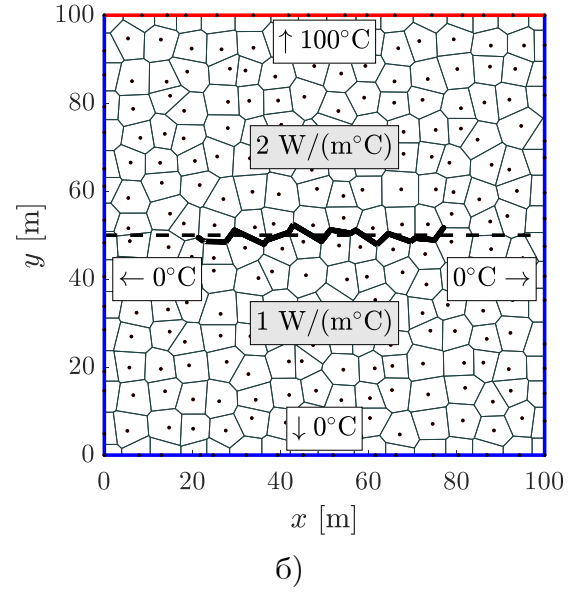
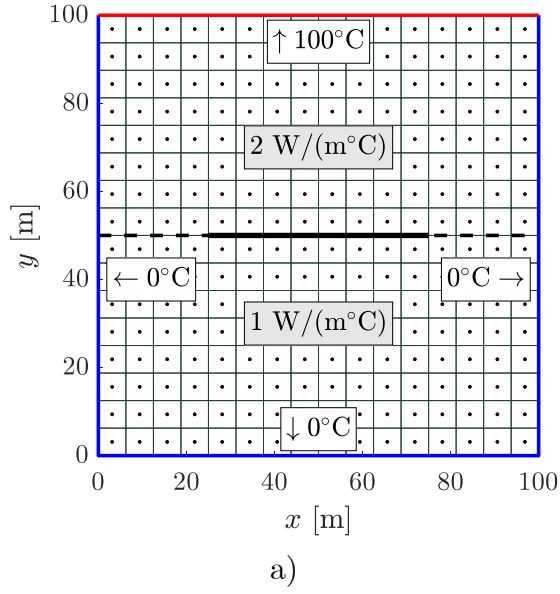


Слика 4.23: Аналитичко, MLPG5 [23] и FPM рјешење седмог проблема

Осми проблем је анализиран у радовима [92–94]. Разматра се случај стационарне кондукције кроз домен квадратног облика, димензија $x \in [0; 100]$ m, $y \in [0; 100]$ m. Компоненте тензора топлотне кондукције у горњој половини домена (за $y \geq 50$ m) износе $k_{11} = k_{22} = 2$ W/(m°C) и $k_{12} = k_{21} = 0$, а у доњој половини $k_{11} = k_{22} = 1$ W/(m°C) и $k_{12} = k_{21} = 0$. Нема топлотног извора унутар домена. На позицији $x \in [25; 75]$ m, $y = 50$ m постоји адијабатска пукотина. Све спољашње границе су Дирихлеове с нултом температуром, осим $y = 100$ m на којој температура износи 100°C.

Изглед домена након подјеле на основу 256 равномјерно распоређених тачака приказан је на слици 4.24.а, док је на слици 4.24.б представљен домен подијељен на основу 256 тачака насумичног распореда. У првом случају нема тачака на границама домена, а у другом је њих 60 распоређено по самим границама. На слици 4.24.в приказано је FPM рјешење добијено на основу равномјерно распоређених тачака, а на слици 4.24.г FPM рјешење на бази насумично расподијељених тачака. *Penalty* параметри на унутрашњим и Дирихлеовим границама у обје варијанте имају вриједности $\eta_h = 5$ и $\eta_D = 10$. У случају равномјерне расподјеле тачке су позициониране тако да се адијабатска пукотина преклапа са неколико унутрашњих граница (слика 4.24.а). У случају насумичне расподјеле тачака пукотини је додијељен облик изломљене праве линије, тако да се опет преклапа са неколико унутрашњих граница (слика 4.24.б). Тачке које дијеле те границе престају да буду сусједне, а поменутих границама се додјељује карактер Нојманове умјесто унутрашње. На слици 4.24.д приказано је рјешење добијено у комбинацији перидинамике (PD) и FEM, а које је представљено у [94]¹⁵. Уочава се да сви набројани приступи дају приближно исте резултате, с тим што је уметање адијабатске пукотине код FPM ријешено на много једноставнији начин. У околини пукотине се може примијетити одступање код рјешења на бази насумичне расподјеле тачака, у односу на друга два рјешења, због самог облика пукотине. Побољшања се могу постићи повећањем броја тачака унутар домена или таквим корекцијама Воронојевих ћелија којима ће се адијабатској пукотини вратити праволинијски облик.

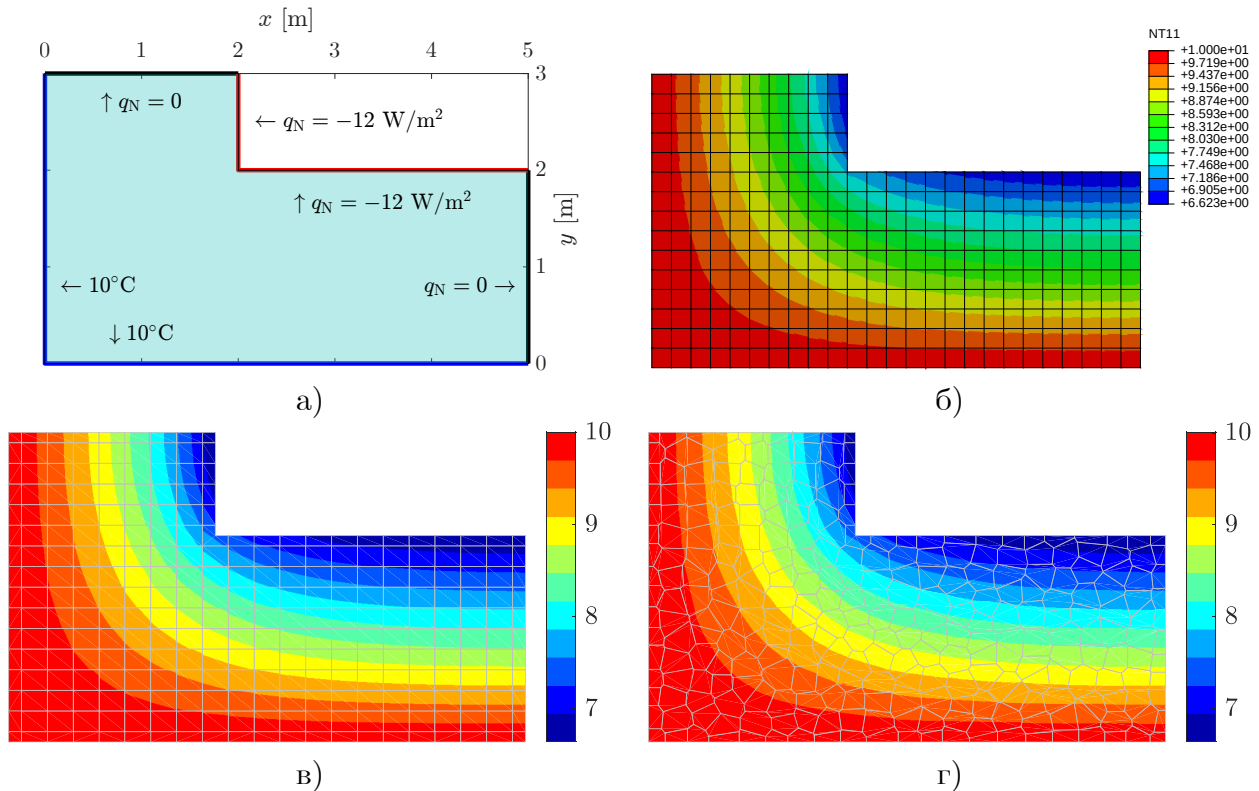
¹⁵Перидинамика (PD) је нелокална теорија базирана на интегралном рачуну која се користи у рјешавању дисконтинуалних проблема. У раду [94] домен је подијељен на два дијела. У дијелу у коме је пукотина, проблем је ријешен коришћењем PD, док је за рјешавање проблема у остатку домена коришћена FEM.



Слика 4.24: Рјешење осмог дводимензионалног проблема: а) подјела домена при равномјерној расподјели тачака, б) подјела домена при насумичној расподјели тачака, в) FPM резултат при равномјерној расподјели тачака, г) FPM резултат при насумичној расподјели тачака, д) резултат на бази PD и FEM [94]

Осми примјер је битан због тога што показује да се помоћу FPM на врло једноставан начин симулирају проблеми који укључују термичке шокове праћене појавом пукотина у кртим материјалима. Чак и када се не зна тачан облик пукотине, приближна рјешења је могуће добити простим предефинисањем појединих унутрашњих граница у пукотине када се задовољи унапријед задати критеријум за настанак дисконтинуитета.

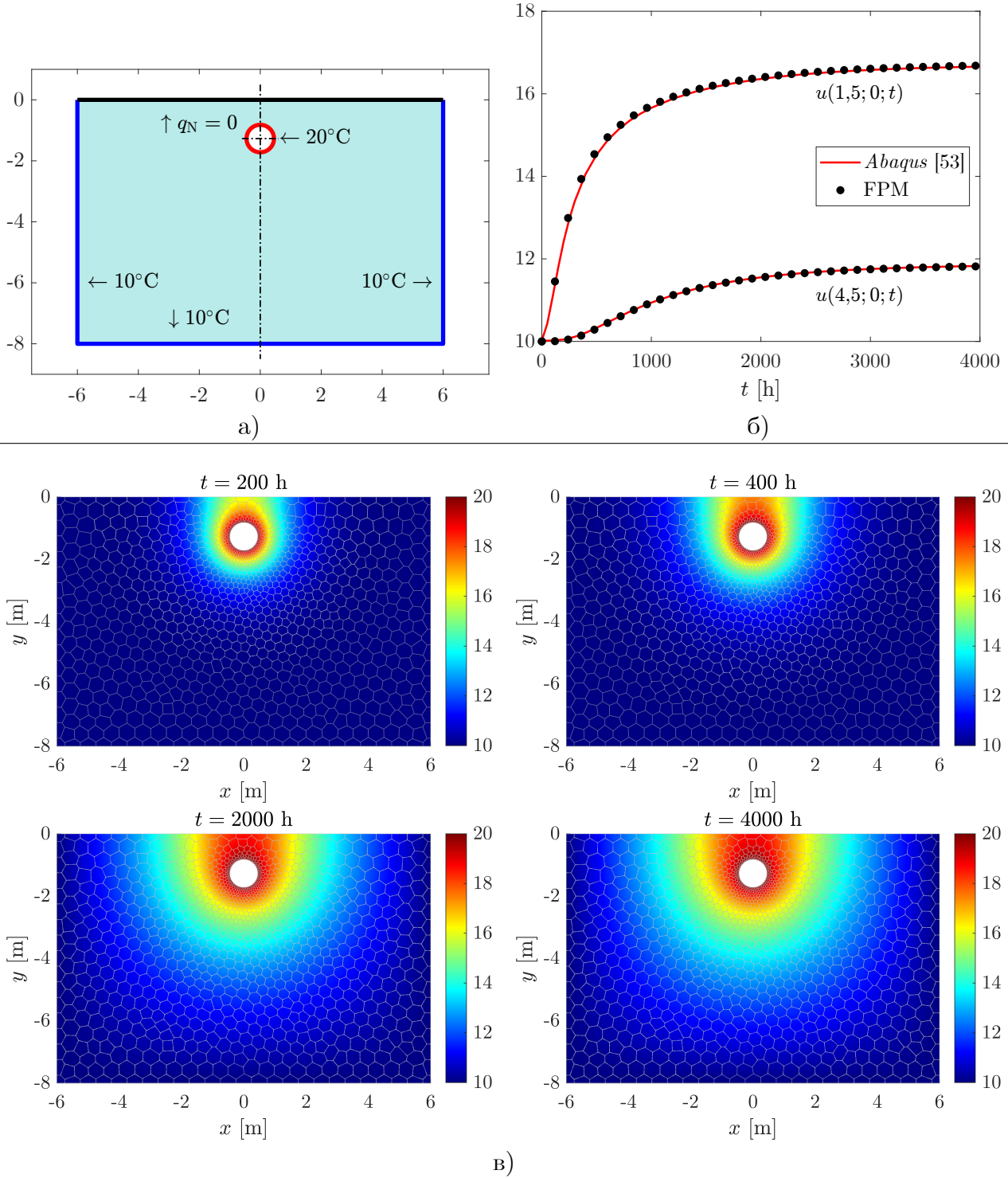
Деветим проблемом се анализира стационарна кондукција кроз домен облика латиничног слова „Г“. Геометријске карактеристике домена и гранични услови приказани су на слици 4.25.а. Компоненте тензора топлотне кондукције износе $k_{11} = 4 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$, $k_{22} = 7 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$ и $k_{12} = k_{21} = 0$. Нема топлотног извора. На слици 4.25.б приказано је рјешење добијено помоћу *Abaqus* програма на основу 300 DC2D4 елемената [53]. На слици 4.25.в приказано је FPM рјешење добијено на основу 276 равномјерно расподијељених, а на слици 4.25.г на бази 276 насумично расподијељених тачака. У оба случаја је узето $\eta_h = 5$ и $\eta_D = 10$. Уочава се да су приказани резултати међусобно усаглашени.



Слика 4.25: Девети проблем: а) геометрија домена и гранични услови, б) рјешење добијено помоћу *Abaqus* програма [53], в) FPM рјешење на бази 276 тачака равномјерног распореда, г) FPM рјешење на бази 276 тачака насумичног распореда

Десетим примјером се анализира нестационарно провођење топлоте са зидова нафтне цијеви кроз хомогено изотропно тло. Цијев је пречника 0,9 m и смјештена је на дубини од 1,27 m. Геометрија домена и гранични услови приказани су на слици 4.26.а. Густина средине је $\rho = 2620 \text{ kg/m}^3$, специфични топлотни капацитет $c = 900 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$, а топлотна проводљивост $k = 2,92 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$. Почетни услов је $u(x; y; 0) = 10^\circ\text{C}$ на нивоу цијелог домена. Овај примјер је био предмет разматрања радова [95, 96].

FPM рјешење десетог проблема одређено је на основу 1162 насумично распоређене тачке при *penalty* параметрима $\eta_h = 5$ и $\eta_D = 10$. Добијени резултати су представљени на слици 4.26.



Слика 4.26: Десети дводимензионални проблем: а) геометрија домена и гранични услови, б) поређење FPM и Abaqus [53] рјешења, в) расподела температуре добијена помоћу FPM у неколико временских тренутака

У свим претходним дводимензионалним проблемима из овог поглавља подјела домена на поддомене вршена је или помоћу `voronoin()` функције која је интегрисана у *Matlab* окружењу или помоћу кода за брзу подјелу домена на поддомене, који је дат у прилогу А. Пошто је у десетом примјеру геометрија сложенија, а како је пожељно повећати број тачака у околини цијеви у односу на остатак домена, за рјешавање овог проблема је употријебљен Воронојев дијаграм добијен трансформацијом Делонеове троугаоне мреже која је генерисана примјеном *Gmsh* програма. Дискретизација у временском домену извршена је примјеном Ојлерове имплицитне шеме у временском интервалу $t \in [0; 4000]$ h, с кораком $\Delta t = 40$ h. FPM резултати су упоређени са резултатима који су добијени помоћу *Abaqus* програма на основу 661 DC2D4 коначног елемента (715 чворова) за исти временски интервал и временски корак, а који су представљени у [53]. Због симетрије проблема, у [53] је разматрана само десна половина домена са слике 4.26.а, па је број тачака код FPM рјешења готово двоструко већи од броја коначних елемената код рјешења на бази *Abaqus* програма. На слици 4.26.б је приказано поређење резултата које дају FPM и *Abaqus*, а на слици 4.26.в расподјела температуре унутар домена у неколико временских тренутака добијена помоћу FPM. Посљедња два примјера указују на то да се резултати добијени путем FPM и помоћу *Abaqus* програма међусобно подударaju.

Разноврсношћу претходно изложених примјера се показало да FPM даје одличне резултате приликом одређивања расподјеле температуре у разноликим стационарним и нестационарним случајевима провођења топлоте кроз средине произвољних облика и карактеристика. Од четири разматране методе за рјешавање ОДЈ, Ојлерова имплицитна метода, у комбинацији са FPM, даје најбоље резултате.

4.5.3 Тродимензионални проблеми

У првом тродимензионалном примјеру се разматра стационарно провођење топлоте кроз средину облика квадра димензија: $x \in [0; a]$, $y \in [0; b]$ и $z \in [0; c]$. Тензор топлотне проводљивости има облик $\mathbf{k}(x; y; z) = \mathbf{E}$. Свака од шест граница се одржава на нултој температури. Унутар домена се генерише топлота, тако да се густина топлотног извора мијења према следећој функционалној зависности:

$$Q(x; y; z) = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{c}.$$

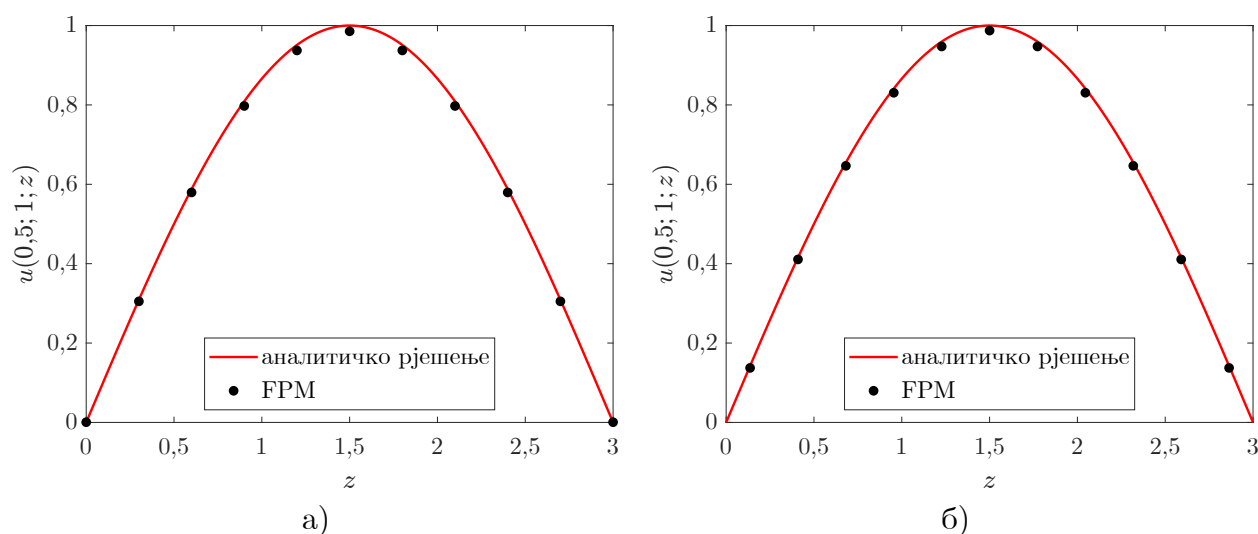
Овај проблем је разматран у [97], гдје је дато његово аналитичко рјешење:

$$u(x; y; z) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{c}, \quad (4.49)$$

али и нумеричко рјешење добијено безмрежном методом под називом *Meshless Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM).

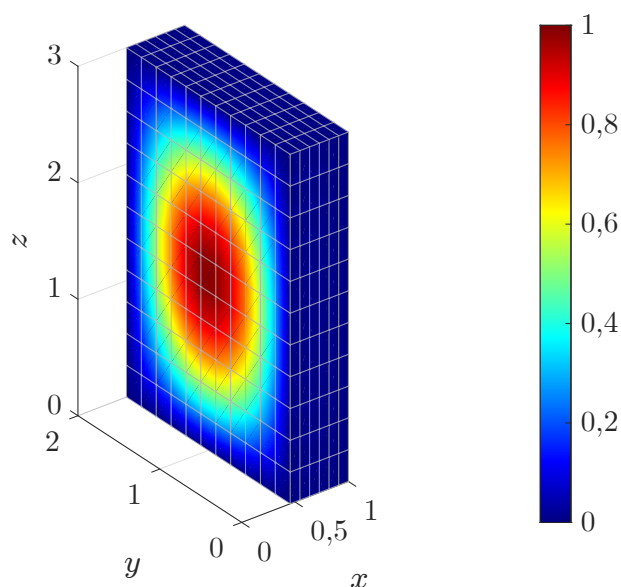
Узимајући да је $a = 1$, $b = 2$ и $c = 3$, на слици 4.27 је приказано аналитичко рјешење $u(0,5; 1; z)$ и резултат добијен помоћу FPM на основу 1331 равномјерно расподијељене тачке. За η параметре су узете вриједност $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$. На слици 4.27.а приказано је FPM рјешење за ситуацију у којој су 602 тачке постављене на самим границама, а на слици 4.27.б FPM рјешење за случај да на границама домена нема тачака. У првом

случају релативне грешке на нивоу домена имају вриједности $r_0 = 0,01396$ и $r_1 = 0,0336$, а у другом $r_0 = 0,01308$ и $r_1 = 0,0309$.



Слика 4.27: Рјешење првог тродимензионалног проблема на основу 1331 равномерно расподијељене тачке за $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$: а) 602 тачке на границама, б) без тачака на границама

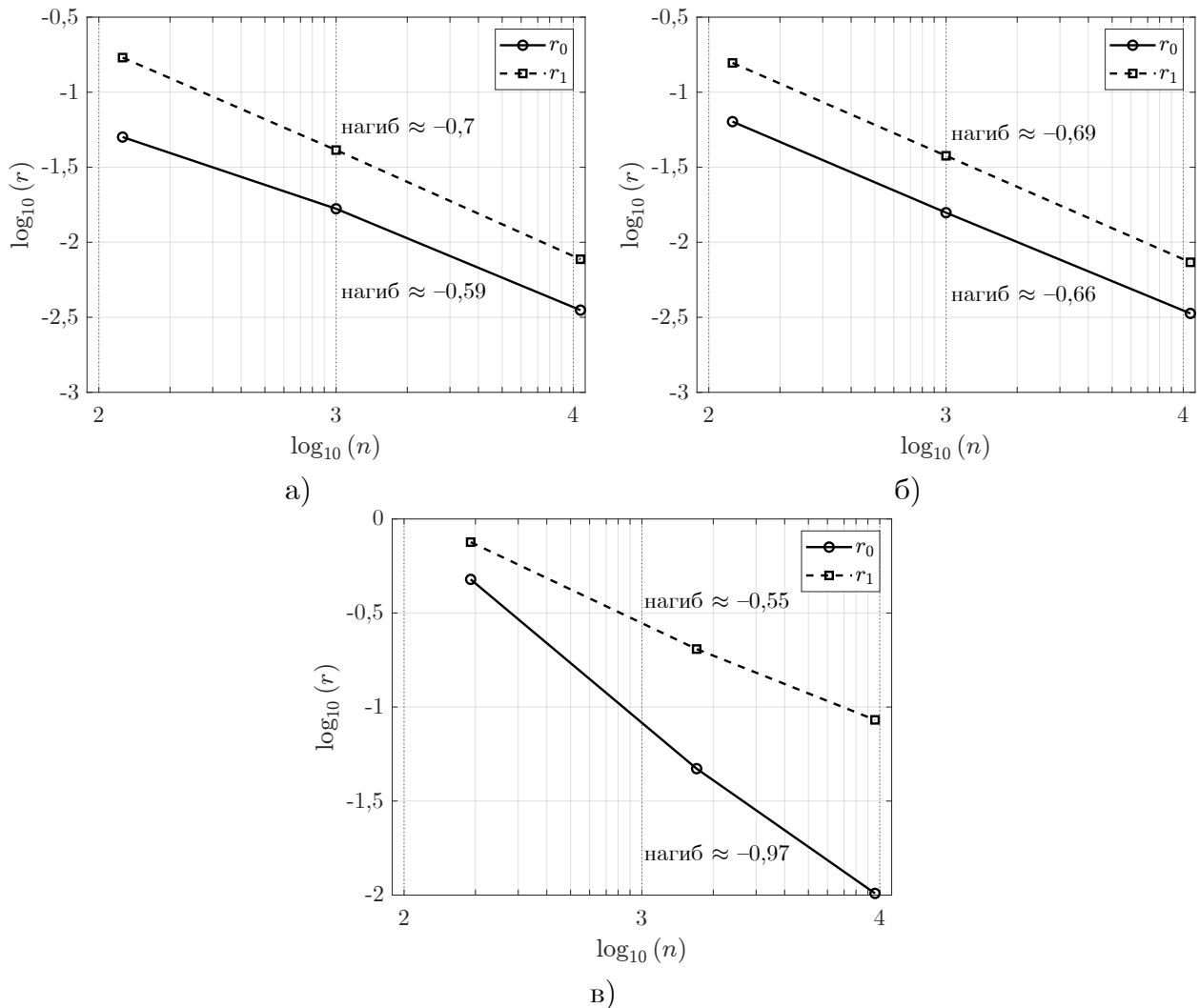
Слика 4.28 даје тродимензионални приказ расподјеле температуре добијен помоћу FPM.



Слика 4.28: Тродимензионални приказ рјешења првог проблема на основу 1331 равномерно расподијељене тачке за $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$

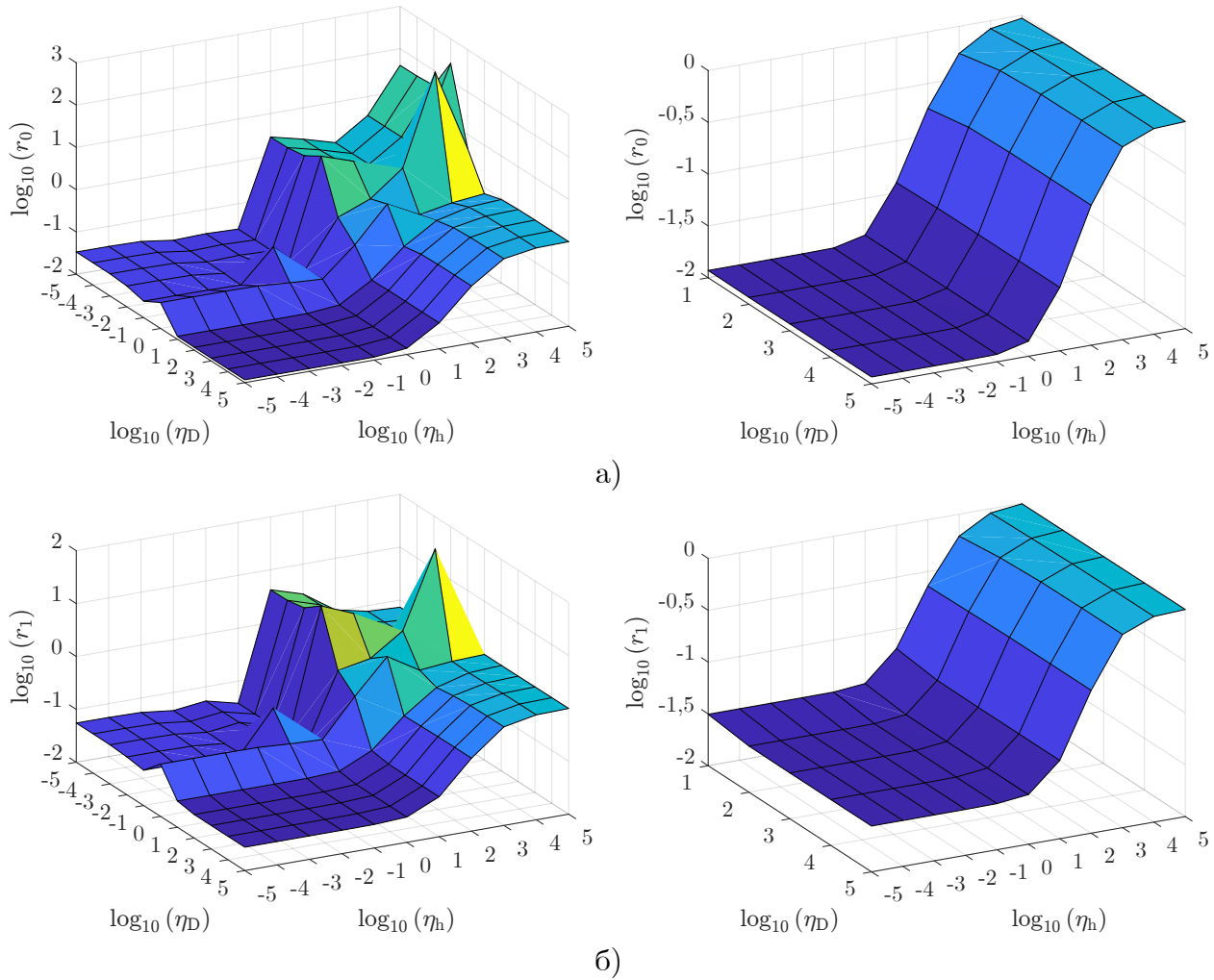
Да би се испитала конвергентност FPM рјешења приликом симулирања стационарног провођења топлоте кроз тродимензионалне средине, одабран је претходни проблем.

Ријешен је за домен истих димензија и карактеристика као у пређашњем случају и непромијењене η параметре, граничне услове и топлотни извор. На слици 4.29 приказане су вриједности релативних грешака r_0 и r_1 добијене при различитом броју тачака. Слика 4.29.а је добијена на основу равномјерне расподеле тачака за случај да је на границама домена постављен један дио тачака, слика 4.29.б на основу равномјерне расподеле тачака за случај да на границама домена нема тачака, док слика 4.29.в даје резултате на бази насумичне расподеле тачака. У рјешењима са насумичном расподелом подјела домена на поддомене извршена је на основу Делонеовог дијаграма који је формиран помоћу *Gmsh* програма. Тјемена тетраедара ограничавају поддомене, а тачке се смјештају у геометријска средишта, те стога нема тачака на самим границама. У све три варијанте вриједности r_0 и r_1 грешака опадају са порастом броја тачака, чиме је конвергентност FPM у рјешавању тродимензионалних проблема потврђена.

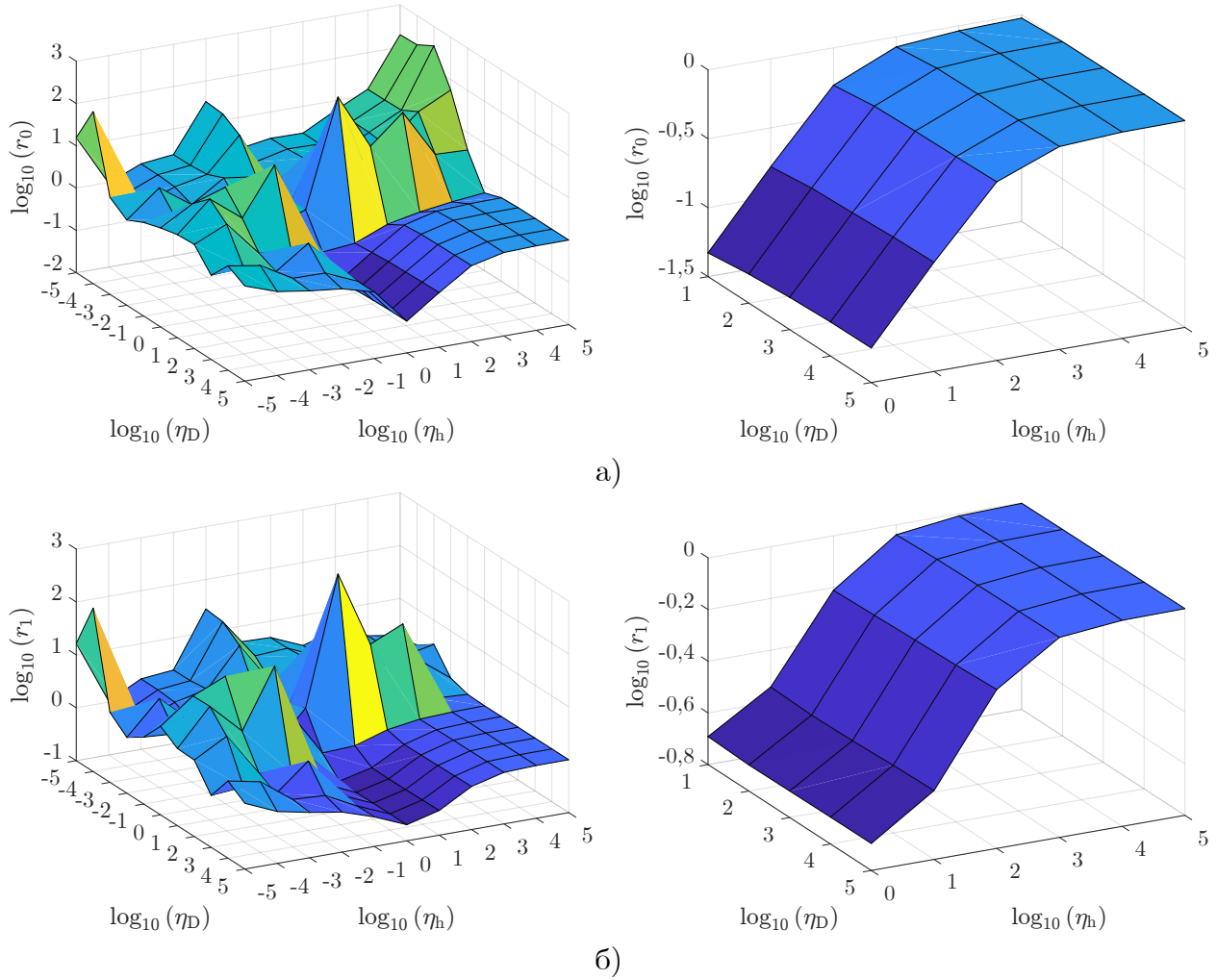


Слика 4.29: Степен конвергенције нумеричких резултата првог тродимензионалног примјера при параметрима $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$: а) равномјерна расподела са тачкама на границама, б) равномјерна расподела без тачака на границама, в) насумична расподела без тачака на границама

На основу резултата са слике 4.30 може се сагледати утицај η параметара на вриједност релативних грешака при равномерној расподјели тачака. За ову анализу је одабран исти проблем као у пређашњем случају. Домен је подијељен на основу 1331 тачке, при чему су њих 602 на границама. Вриједности η параметара на унутрашњим и Дирихлеовим границама вариране су у интервалу од 10^{-5} до 10^5 . Може се закључити да је метода стабилна за $\eta_h \leq 10$ и $\eta_D \geq 10$, а да је најпогодније бирати η_h вриједности блиске 0,1, при чему утицај η_D параметра није изражен док год се узима вриједност из наведеног опсега. С друге стране, када је расподјела тачака насумична, ситуација је другачија, што се може видјети са слике 4.31 која је добијена на основу 1711 тачака, од којих се ниједна не налази на границама. У таквим ситуацијама стабилни резултати се добијају за $\eta_h \in [1; 10]$ и $\eta_D \geq 10$. Сумарни закључак, на основу два посматрана случаја, јесте да је код тродимензионалних проблема најсигурније узимати јединичну вриједност за η_h . Сличан закључак је изведен и код дводимензионалних проблема. Иако равномерна расподјела тачака дозвољава врло ниске вриједности η_h параметра, вриједности испод јединице нису погодне када је распоред тачака насумичан.



Слика 4.30: Грешке FPM рјешења првог тродимензионалног проблема при равномерној расподјели 1331 тачке, од чега су њих 602 на границама домена – утицај η_h и η_D параметара на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке

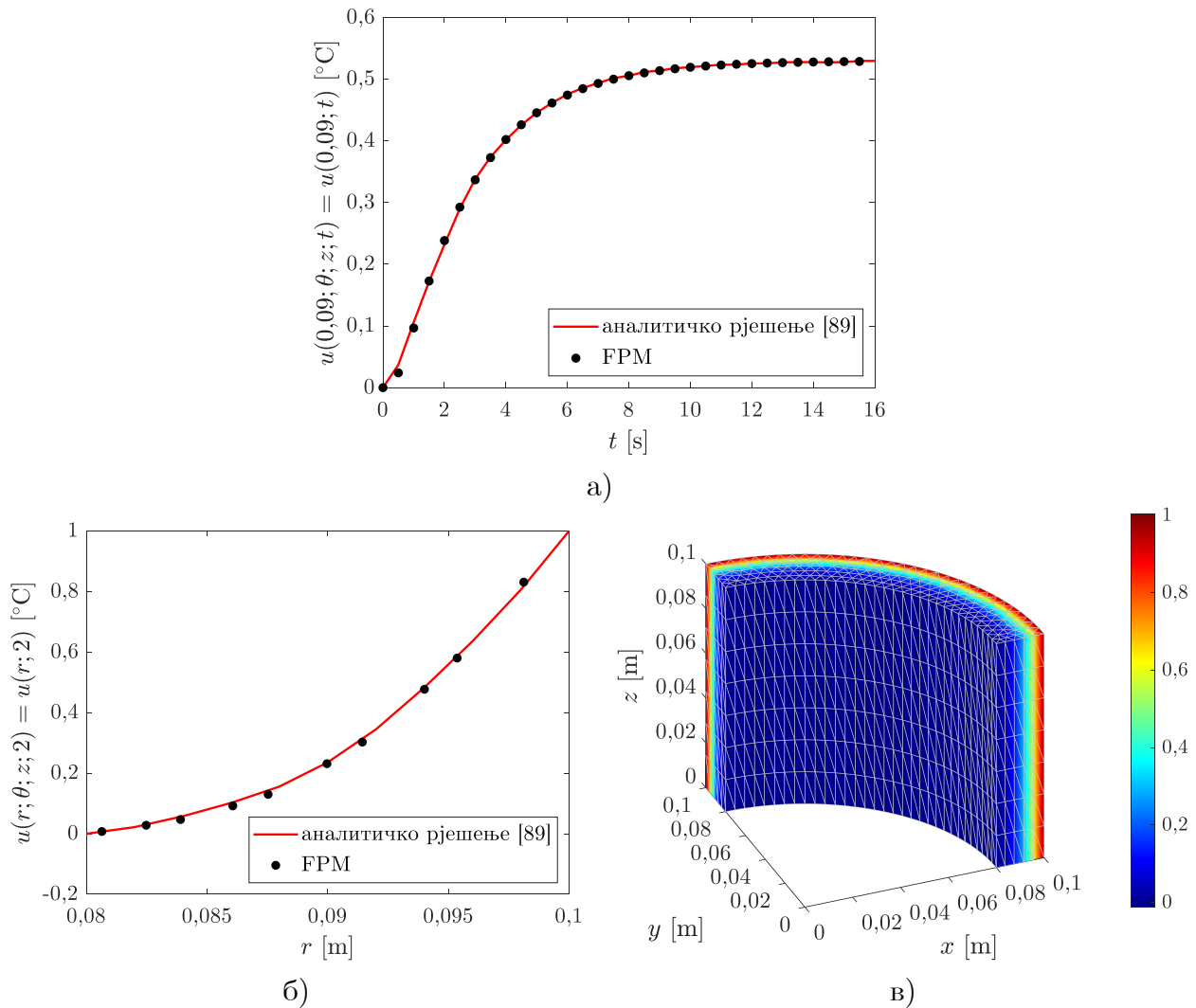


Слика 4.31: Грешке FPM рјешења првог тродимензионалног проблема при насумичној расподјели 1711 тачака, при чему нема тачака на границама домена — утицај η_h и η_D параметара на вриједност: а) r_0 грешке, б) r_1 грешке

У другом тродимензионалном примјеру се разматра нестационарно провођење топлоте кроз хомогену изотропну средину која има облик шупљег ваљка. Његова дужина је 0,10 m. Унутрашњи пречник износи 0,08 m, а спољашњи 0,10 m. Топлотна дифузивност је $\kappa = 17 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, а топлотна проводљивост $k = 17 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$. Типични практични случајеви у којима се може срести сличан проблем обухватају: цијеви измјењивача топлоте, цијеви топова, очвршћавање металних одливака, временску регулацију загријавања на зидовима кружних структура и сл. [98].

Почетна температура је једнака на нивоу домена и износи 0°C . Унутрашњи омотач шупљег ваљка се одржава на нултој температури, при чему се спољашњи омотач одржава на температури од 1°C . Преостале двије границе су адијабатске. Нема топлотног извора. Уколико се са Декартових координата пређе на поларне, онда проблем постаје једнодимензионалан, с обзиром на то да је температура једнака дуж произвољно уоченог полупречника r . Аналитичко и поједина нумеричка рјешења овог проблема дати су у [22, 89, 98–100].

С обзиром на то да је проблем симетричан, разматрана је само четвртина домена. Нове двије границе, које се добијају издвајањем четвртине, су адијабатске. FPM рјешење проблема добијено је на основу 7896 тачака, при параметрима $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$, уз временски корак $\Delta t = 10^{-3}$ s унутар интервала $t \in (0; 16]$ s. За дискретизацију у временском домену употребљена је Ојлерова имплицитна метода. Подјела домена на поддомене извршена је на основу Делонеовог дијаграма који је формиран помоћу *Gmsh* програма. Слика 4.32.а приказује аналитичко [89] и FPM рјешење проблема за $r = 0,09$ m унутар временског интервала, а слика 4.32.б једнодимензионални приказ расподеле температуре унутар домена у тренутку $t = 2$ s, док слика 4.32.в даје тродимензионални приказ расподеле температуре у тренутку $t = 2$ s.



Слика 4.32: FPM рјешење другог тродимензионалног примјера:
а)¹⁶за $r = 0,09$ m унутар временског интервала $t \in (0; 16]$ s,
б) унутар домена у тренутку $t = 2$ s (једнодимензионални приказ),
в) унутар домена у тренутку $t = 2$ s (тродимензионални приказ)

¹⁶Због мноштва временских корака потпуно би се поклопило аналитичко рјешење на слици, па је издвојен FPM резултат за сваки петстоти корак.

У трећем примјеру се разматра нестационарно провођење топлоте кроз нехомогену изотропну средину облика коцке чија је ивица јединичне дужине. Нема топлотног извора. Почетни услов и Дирихлеови гранични услови дефинисани су на сљедећи начин:

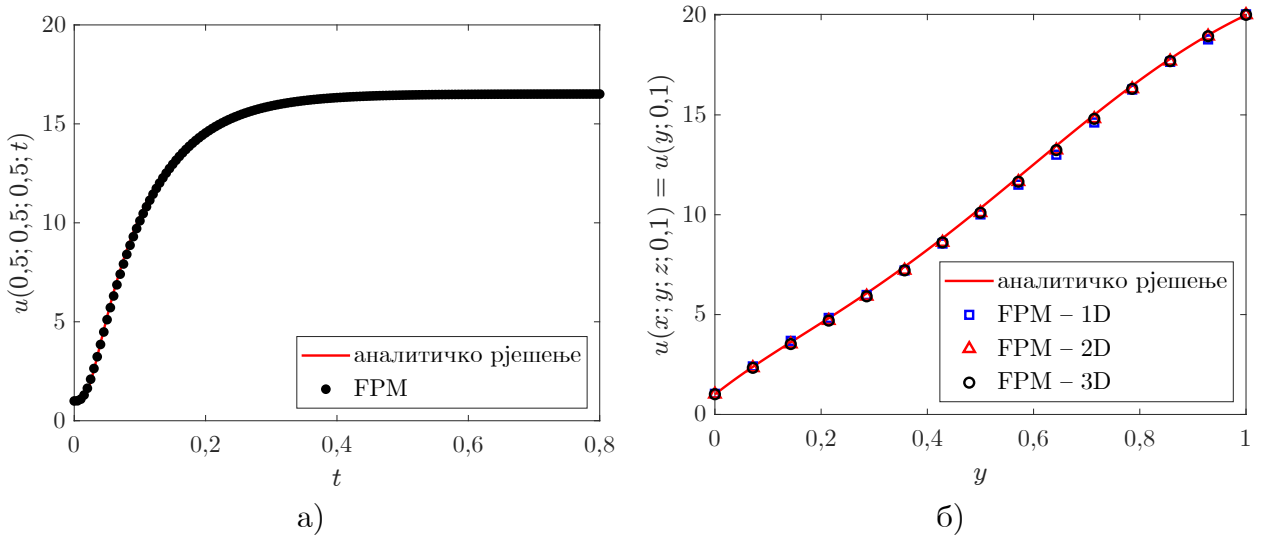
$$u(x; y; z; 0) = 1, \quad u(x; 0; z; t) = 1, \quad u(x; 1; z; t) = 20.$$

На преосталим страницама коцке ($x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ и $z = 1$) је дефинисан симетрични гранични услов. С обзиром на то да је средина изотропна, то одговара ситуацији у којој је Нојманов гранични услов на посматраним границама једнак 0. Карактеристике средине су дефинисане на сљедећи начин:

$$\rho(x; y; z) = 1, \quad c(x; y; z) = e^{3y}, \quad \mathbf{k}(x; y; z) = e^{3y} \mathbf{E}.$$

За овако формулисан задатак расподјела температуре ће се мијењати само дуж осе y . Овом проблему су еквивалентни пети једнодимензионални и трећи дводимензионални примјер. Аналитичко рјешење је дато релацијама (4.37)–(4.38).

На слици 4.33.а приказано је аналитичко рјешење посматраног проблема у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8 и рјешење које даје FPM са Ојлеровом имплицитном методом при равномјерном распореду тачака. На слици 4.33.б дат је приказ расподјеле температуре унутар домена у тренутку $t = 0,1$ и направљено поређење FPM резултата добијених посматрајући домен као једнодимензионалан (15^1 тачака), као дводимензионалан (15^2 тачака) и као тродимензионалан (15^3 тачака). У сва три случаја временски корак износи $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$, а у случају тродимензионалног домена узети су параметри $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$. На основу слике 4.33.б се уочава да су сва три FPM резултата у међусобној сагласности и да су врло блиски аналитичком рјешењу.



Слика 4.33: Аналитичко рјешење трећег тродимензионалног проблема и FPM рјешење на основу $15^3 = 3375$ равномјерно распоређених тачака при $\eta_h = 1$, $\eta_D = 10$ и $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$: а) у средишту домена за временски интервал од 0 до 0,8, б) унутар домена за $t = 0,1$

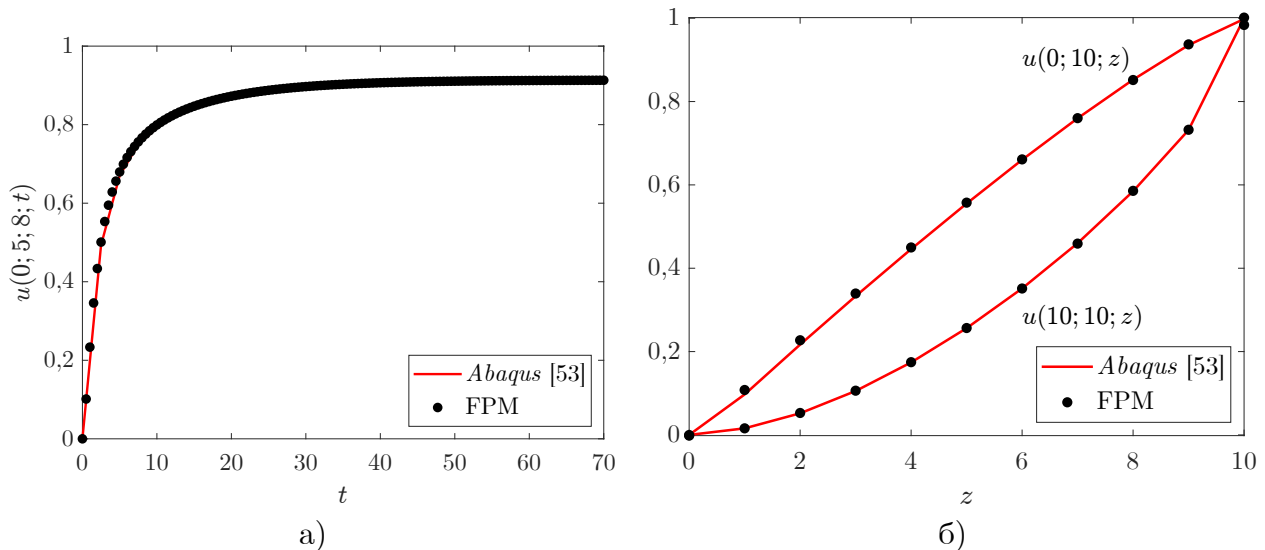
У примјеру са тродимензионалним доменом, табела 4.8 приказује вриједности релативне грешке r_0 унутар домена осредњене по временским корацима у оквиру посматраног интервала $\bar{t}_0$ за различите временске кораке и шеме за рјешавање ОДЈ. Поређењем табеле 4.8 са табелама 4.1 и 4.4 уочава се да је ниво грешке у дводимензионалном и тродимензионалном случају готово идентичан, а мало нижи у односу на једнодимензионални случај.

Табела 4.8: Осредњена вриједност релативне грешке r_0 унутар временског интервала од 0 до 0,8 приликом добијања FPM рјешења трећег тродимензионалног проблема на основу $15^3 = 3375$ равномерно распоређених тачака

	$\bar{r}_0$	
	$\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$	$\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$
Ојлерова експлицитна	-	-
Ојлерова имплицитна	0,00747	0,00244
трапезно правило	0,02979	0,00241
Рунге–Кута	-	0,00241

У четвртном примјеру се симулира нестационарно провођење топлоте кроз хомогену анизотропну коцку ивице L . Густина и специфични топлотни капацитет имају јединичне вриједности, док компоненте тензора топлотне проводљивости износе $k_{11} = k_{33} = 1$, $k_{22} = 1,5$ и $k_{12} = k_{13} = k_{23} = 0,5$. Нема топлотног извора. Почетна температура на нивоу домена једнака је нули. Граница $z = 0$ се одржава на нултој температури, док је гранични услов на граници $z = L$ дефинисан као термички шок облика Хевисајдове функције $g_D(x; y; L; t) = H(t)$.

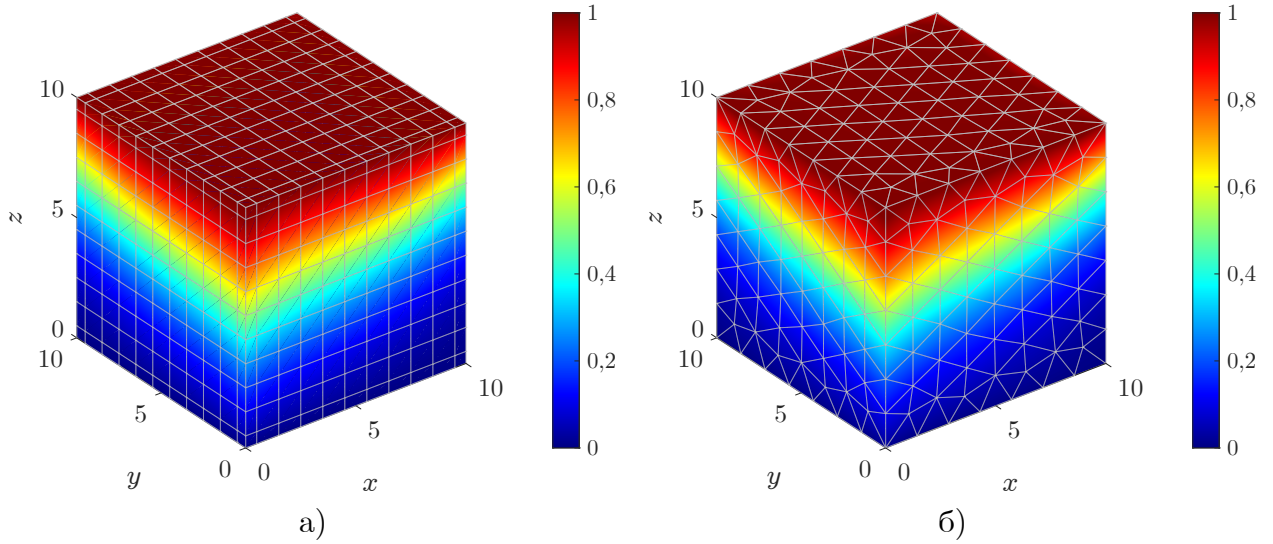
Расподјела температуре за овако дефинисан проблем зависи од све три осе. Узимајући да је $L = 10$, FPM рјешење је представљено на слици 4.34.



Слика 4.34: Поређење FPM и Abaqus [53] рјешења четвртог тродимензионалног примјера: а) у тачки $(0; 5; 8)$ унутар временског интервала $t \in (0; 70]$, б) на ивицама $x = 10$, $y = 10$ и $x = 0$, $y = 10$ у стационарном стању

FPM резултат је добијен на основу 1331 равномјерно расподијељене тачке унутар домена при параметрима $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$ и кораку $\Delta t = 0,5$ унутар интервала $t \in (0; 70]$, уз употребу Ојлерове имплицитне методе. На слици 4.34.а приказано је добијено рјешење у тачки са координатама $(0; 5; 8)$ у оквиру посматраног временског интервала, а на слици 4.34.б стационарно рјешење на ивицама $x = 10$, $y = 10$ и $x = 0$, $y = 10$. Резултати су упоређени са вриједностима добијеним помоћу *Abaqus* програма, на основу 1000 DC3D8 коначних елемената при истом временском кораку, који су представљени у [53]. Уочава се да су резултати међусобно добро усаглашени.

FPM рјешење четвртог проблема у тренутку $t = 10$ приказано је на слици 4.35. Резултат на слици 4.35.а је добијен на основу 1331 равномјерно расподијељене тачке, од чега њих 602 леже на границама, а на слици 4.35.б на основу 1711 насумично распоређених тачака, при чему нема тачака на самим границама. Оба приступа дају врло сличне резултате.



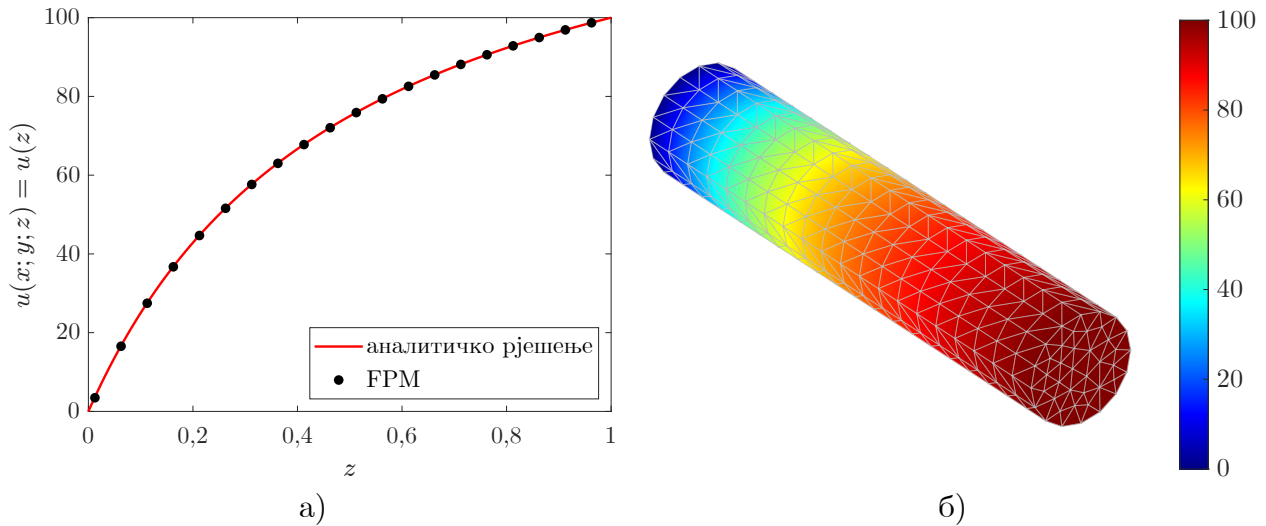
Слика 4.35: FPM рјешење четвртог тродимензионалног примјера у тренутку $t = 10$ на бази: а) 1331 равномјерно расподијељене тачке од чега њих 602 леже на границама, б) 1711 насумично распоређених тачака, при чему нема тачака на границама

У петом примјеру се разматра стационарно провођење топлоте кроз нехомогену изотропну средину облика ваљка дужине 1 и полупречника 0,1. Тензор топлотне проводљивости има облик $\mathbf{k}(x; y; z) = \mathbf{k}(z) = 5(1 + 2z)^2 \mathbf{E}$, гдје је z оса паралелна изводници ваљка. Нема топлотног извора. Почетна температура на нивоу домена једнака је нули. Граница $z = 0$ се одржава на нултој температури, док се граница $z = 1$ одржава на температури од 100. На омотачу ваљка дефинисан је Нојманов гранични услов нулте вриједности. За претходно дефинисане величине аналитичко рјешење дато је релацијом [91]:

$$u(x; y; z) = u(z) = \frac{300z}{1 + 2z}. \quad (4.50)$$

FPM рјешење проблема добијено је на основу 3840 тачака, при параметрима $\eta_h = 1$ и $\eta_D = 10$. Подјела домена на поддомене извршена је на основу Делонеовог дијаграма који

је формиран помоћу *Gmsh* програма. Релативне грешке у конкретној ситуацији износе $r_0 = 0,00109$ и $r_1 = 0,0326$, што указује на то да је нумеричко рјешење врло блиско аналитичком. Слика 4.36.а приказује аналитичко и FPM рјешење проблема, док слика 4.36.б даје тродимензионални приказ расподеле температуре дуж омотача и горње базе ($z = 1$) ваљка.



Слика 4.36: FPM рјешење петог тродимензионалног примјера:
а) једнодимензионални приказ, б) тродимензионални приказ

Претходно анализирани примјери обухватили су различиту геометрију, начин подјеле домена на поддомене, ситуације у којима је дио тачака постављен на самим границама и ситуације у којима се све тачке налазе у унутрашњости домена. Такође су обухваћени и стационарни и нестационарни проблеми, мјешовити гранични услови, средине које су хомогене/нехомогене и изотропне/анизотропне и проблеми код којих топлотни извор постоји/не постоји. Добијени резултати су врло блиски аналитичким рјешењима и резултатима које дају друге нумеричке методе, те се може закључити да је FPM погодан алат за рјешавање опште једначине топлотне кондукције кроз нехомогене анизотропне средине.

Глава 5

Закључак

Полазећи од основне формулације FPM [5], главни циљ докторске дисертације је да се метода развије тако да буде примјенљива у симулацији проблема потенцијалног струјања и топлотне кондукције.

ПДЈ стишљивог потенцијалног подзвучног струјања флуида дискретизована је помоћу двије варијације FPM: *Primal* и *Mixed*. У оба случаја је извршена нумеричка имплементација и дати су коначни облици матрице крутости и вектора којим се дефинишу основни и природни гранични услови. Дисконтинуалној пробној функцији је на нивоу поддомена додијељен линеарни карактер. Направљена је процјена временске комплексности методе, којом се показало да је у рачунском смислу убједљиво најкомплекснија операција инверзије матрице крутости, чије димензије одговарају броју тачака распо-ређених по домену. Како је та операција неизбјежна, може се констатовати да је у рачунском погледу FPM врло ефикасна. Томе додатно у прилог иду сљедеће три чињенице:

- матрица крутости је симетрична, ријетка и позитивно дефинитна, што отвара пут напреднијим алгоритмима за инверзију;
- подинтегрална функција у случају интеграљења по поддоменима је константна, па је потребно одредити само контурне интеграле;
- пробне функције су изузетно једноставне, те је интеграљење извршено простим Гаусовим квадратурама, а могло се доћи и до аналитичких рјешења посматраних интеграла.

Иако му је додијељена нулта вриједност (премда није било нужно), описан је приступ којим се Дирихлеов гранични услов врло једноставно намеће и у слабој и у јакој форми. Симетричност матрице крутости, али и једноставност у рјешавању интеграла и наметању основног граничног услова, основне су предности FPM над доказано квалитетном MLPG методом и другим безмрежним нумеричким методама које се суочавају са сличним недостацима.

Подјела домена на поддомене код FPM вршена је на бази Воронојевог и Делонеовог дијаграма. За дводимензионалне и тродимензионалне проблеме опструјавања аеродинамичких облика, за које постоје аналитичка рјешења, оцјена квалитета нумеричких

результата вршена је рачунањем релативних грешака у вриједности поремећајног потенцијала и поремећајне брзине, на бази Лебегове норме. Показало се да вриједности добијених грешака могу бити веома мале. Исти проблеми су рјешавани при различитом броју тачака унутар домена. Повећањем броја тачака, снижавао се ниво обје релативне грешке и у дводимензионалном и у тродимензионалном случају, без обзира на то да ли је употребељен FPM-*Primal* или FPM-*Mixed* приступ, чиме је доказана конвергентност обје варијације методе.

Стабилност FPM-*Primal* варијанте узрокована је одабиром η (*penalty*) параметра на унутрашњим границама. Метода је стабилна док год је $\eta \in [10^{-2}; 10^2]$, при чему вриједности из интервала од 10^{-1} до 10^1 дају најбоље резултате. С друге стране, FPM-*Mixed* приступ ће бити стабилан за ма коју позитивну вриједност η параметра, али се испоставило да је за чланове константног вектора β најбоље узимати вриједности $\beta \leq 1$.

Подјела домена на поддомене је код MLPG методе врло једноставна, јер се своди на генерисање скупа кругова/сфера (са центром у тачкама домена) који могу да се међусобно преклапају, док се код FPM подјела врши на поддомене (најчешће на Делоне-ове троуглове/тетраедре или Воронојеве ћелије) који се међусобно не преклапају. Иако сложенији у односу на MLPG, такав приступ је једноставнији у односу на генерисање мреже код FEM и FVM, јер је расподјелу тачака (поддомена) могуће извршити апсолутно произвољно, без нарушавања тачности методе, при чему сами облик поддомена може бити било какав. Наравно, увијек је погодно имати већи број тачака у зонама у којима се очекују велике промјене у вриједности посматране функције (непосредна околина опструјаваног објекта), исто као што је код FEM/FVM у поменутим зонама погодно уситнити мрежу. Друга предност FPM у односу на методе на бази мреже до изражаја је дошла приликом наметања Кута–Жуковски граничног услова. У ту сврху је одабран приступ којим се иза задње ивице аеропрофила/крила умеће тзв. *wake* линија/површина. Дисконтинуални карактер FPM је омогућио да се унутрашње границе које пресијеца замишљена *wake* линија/површина врло једноставно предефинишу у Нојманове границе (које имају улогу чврсте пукотине), дајући јој облик изломљене (*piecewise*) линије/површине.

Поред тога што је направљено поређење са аналитичким резултатима, рјешења која даје FPM су кроз неколико конкретних примјера упоређена са вриједностима добијеним помоћу методе панела и експерименталним путем. У том смислу су аутору дисертације најдрагоцјенији били *Xfoil* програм, базиран на методи панела, и референца [69], која је замишљена тако да кроз мноштво разноликих експеримената (добијених у различитим аеротунелима, са бројним конфигурацијама, у подзвучним, окозвучним и надзвучним условима струјања) буде корисно средство за валидацију нумеричких метода. Визуелним поређењем резултата се може закључити да су вриједности које даје FPM врло блиске експерименталним резултатима и да FPM може да парира методи панела, која је врло популарна и поуздана у анализи потенцијалних струјања.

Пошто се показало да су и FPM-*Primal* и FPM-*Mixed* варијација стабилне и да дају резултате подједнаке тачности и истог степена конвергентности, дискретизација једначине топлотне кондукције вршена је само на бази FPM-*Primal* приступа, јер је он бржи због двоструко мањег броја степени слободе. И у овој ситуацији је дисконтинуална

пробна функција на нивоу поддомена имала линеарни карактер, при чему су матрице поново ријетке, симетричне и позитивно дефинитне. С обзиром на то да посматрана ПДЈ описује нестационарни проблем, FPM даје само полудискретни систем, па је било потребно укључити и неку методу за рјешавање ОДЈ којом би се извршила дискретизација у временском домену. У ту сврху су анализиране: Ојлерова експлицитна метода, Ојлерова имплицитна метода, трапезно правило и Рунге—Кута метода четвртог реда. Показало се да је лако направити комбинацију FPM и различитих метода за рјешавање ОДЈ. Према је временска комплексност сваког од тако добијена четири приступа процијењена на $O(n_t n^2)$, гдје је n_t број временских корака, а n број тачака унутар домена, показало се да су Ојлерове методе брже од друге двије. Све четири методе при довољно великом броју временских корака дају подједнако добре резултате. Међутим, при мањем броју корака Ојлерова експлицитна и Рунге—Кута метода постају неупотребљиве, док Ојлерова имплицитна метода даје доста добре резултате. Стога се она у комбинацији на FPM издвојила као најбоља.

За подјелу домена на поддомене углавном је коришћен Воронојев дијаграм, осим у неколико тродимензионалних случајева гдје се диоба базирала на Делонеовом дијаграму. У једним ситуацијама је дио тачака постављен на самим границама, а у другим уопште није било тачака на границама. У појединим проблемима су тачке биле правилно распоређене у домену, а у другим насумично. Без обзира на то који је приступ за диобу домена употребљен, да ли су тачке постављене на границама или не и какав је њихов распоред по домену, FPM даје врло квалитетне резултате.

У издвојеним стационарним/нестационарним једнодимензионалним, дводимензионалним и тродимензионалним проблемима за које постоји аналитичко рјешење, резултати су добијени при различитом броју тачака. У све три ситуације се показало да ниво грешке опада са порастом броја тачака, чиме је конвергентност FPM потврђена.

Стабилност методе је истражена кроз варијацију η (*penalty*) параметара у широком опсегу вриједности $[10^{-5}; 10^5]$. Показано је да се за једнодимензионалне проблеме стабилни резултати добијају за $\eta_h \geq 1$ и $\eta_D \geq 100$, а најбољи за η_h вриједности које су блиске 100, при чему утицај η_D параметра није много изражен док год се његове вриједности налазе унутар наведеног опсега. За дводимензионалне и тродимензионалне проблеме се стабилни резултати добијају при $\eta_h \in [1; 10]$ и $\eta_D \geq 10$. Најпогодније је бирати доње граничне вриједности. Показало се још и да равномјерна расподјела тачака толерише врло ниске η_h вриједности (чак и оне блиске нули), док насумичној расподјели никако не одговарају прениски η_h параметри.

На мноштву конкретних примјера анализирани су случајеви у којима средина кроз коју се проводи топлота може бити нехомогена и анизотропна. Такви примјери се срећу код тзв. *functionally graded* материјала (FGM). У питању су композити чија се својства постепено мијењају у простору (углавном према унапријед дефинисаној функционалној законитости) како би се прилагодили конкретној намјени, при чему примјену налазе у ваздухопловној индустрији, индустрији рачунарских кола и сл. [10]. Као што је истакнуто у уводном дијелу, популарну ВЕМ методу је врло тешко прилагодити рјешавању поменутих задатака. С друге стране, показало се да FPM без проблема третира нехомогеност и анизотропност, и поред тога што је ријеч о својствима која доводе до значајних промјена у функцији расподјеле температуре по домену.

Конкретним примјерима су симулиране ситуације у којима су гранични услови дефинисани као: Дирихлеови, Нојманови, Робинови, симетрични или мјешовити (комбинација неких од њих). Док су код FVM и великог броја безмрежних нумеричких метода чије су пробне функције базиране на MLS и LME апроксимацијама присутне потешкоће у наметању неког од граничних услова, код FPM се сваки од њих може врло једноставно примијенити.

У једном од разматраних примјера је постојала адијабатска пукотина унутар домена. Она је код FPM врло једноставно третирана тиме што су унутрашње границе са којима се пукотина преклапа предефинисане у слободне. Потребно је било само уочити које тачке дијеле пукотину, а затим их у тополошкој мапи предефинисати у несусједне. То омогућава веома једноставну симулацију проблема који укључују термичке шокове праћене појавом пукотина у кртим материјалима. У симулацији се, током проласка кроз временске кораке, може испитати да ли је задовољен унапријед дефинисани критеријум (у складу са механиком континуума) за настанак дисконтинуитета у материјалу и по потреби се извршити корекција листе сусједа у тополошкој мапи, односно незнатно кориговати облик матрице топлотне капацитивности, матрице топлотне проводљивости и евентуално вектора којим се дефинише гранични услов (за случај да граница није адијабатска), чиме се може моделовати како настанак, тако и пропагација саме пукотине. Ова врста проблема за методе на бази мреже представља посебан изазов. Пошто самостална употреба FEM у оригиналној формулацији не може довести до рјешења, у раду [94] је за исти примјер, поред FEM, коришћена и PD. Други приступи, уз FEM, уводе моделе кохезивних зона. У трећим варијантама се врши брисање појединих коначних елемената, што изискује динамичку промјену броја степени слободе система, која рачунски може бити врло захтјевна. У сваком случају, FPM у ситуацијама овога типа доноси врло значајна унапређења.

Показало се да претходно описане предности FPM, уочене у проблемима потенцијалног струјања, фигуришу и у случају анализе проблема топлотне проводљивости. Због нестационарности проблема, до изражаја ће посебно доћи ниска рачунска сложеност, као посљедица једноставности у интеграљењу пробних и тестних функција.

Различити облици средина кроз које се проводи топлота такође су били предмет разматрања дисертације. Кроз те су примјере показане предности FPM у односу на FDM, за коју су сложене геометрије и неравномјерна расподела чворних тачака често непремостива препрека.

Поред тога што су FPM рјешења упоређена са аналитичким резултатима, направљена је компарација и са резултатима других нумеричких метода, попут: FEM, MLPG и MFS. Показало се да FPM даје или подједнако добра или за нијансу боља рјешења.

На основу претходног излагања, недвосмислено је доказано да се *Fragile Points* методом (FPM) могу успјешно рјешавати ПДЈ стишљивог потенцијалног подзвучног струјања флуида и ПДЈ нестационарне топлотне кондукције кроз анизотропне нехомогене средине различитог облика, при чему се у оба случаја потврдило да је FPM робусна, конвергентна и стабилна и да по прецизности резултата парира актуелним нумеричким методама. У различитим сегментима су, у односу на велики број актуелних метода, постигнута значајна побољшања. Тиме су доказане хипотезе докторске дисертације и направљен искорак ка првенственом циљу који се огледа у развоју FPM за рјешавање

шире класе проблема и придруживању групи општеприхваћених техника за рјешавање разноврсних ПДЈ.

Активностима током припреме дисертације отворен је широк пут даљим истраживањима. У концепцијском смислу, она би могла бити усредсређена на варијације у формулацији FPM у погледу избора пробних и тестних функција, као што је започето радом [10]. У области механике флуида, било би интересно ријешити сложеније проблеме, попут Ојлерове и Навије—Стоксових једначина, што ће свакако бити предмет даљих истраживања. Због једноставног облика пробних функција, природно је очекивати значајна побољшања у погледу рачунске сложености током симулације нелинеарних проблема.

Литература

- [1] Evans L.C. (2010). *Partial Differential Equations*, 2nd ed., American Mathematical Society Providence, Rhode Island
- [2] Fung Y.C., Tong P., Chen X. (2017). *Classical and Computational Solid Mechanics, Advanced Series in Engineering Science*, vol. 2, 2nd ed., World Scientific Publishing
- [3] Liu M.B., Liu G. (2010). Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(1), pp. 25-76. <https://doi.org/10.1007/s11831-010-9040-7>
- [4] Atluri S.N., Zhu T. (1998). A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational Mechanics* 22, pp. 117-127. <https://doi.org/10.1007/s004660050346>
- [5] Dong L., Yang T., Wang K., Atluri S.N. (2019). A new Fragile Points Method (FPM) in computational mechanics, based on the concepts of Point Stiffnesses and Numerical Flux Corrections, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 107, pp. 124-133. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.07.009>
- [6] Yang T., Dong L., Atluri S.N. (2020). A simple Galerkin meshless method, the Fragile Points method using point stiffness matrices, for 2D linear elastic problems in complex domains with crack and rupture propagation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(2), pp. 348-385. <https://doi.org/10.1002/nme.6540>
- [7] Rodopoulos D.C., Atluri S.N., Polyzos D. (2021). A hybrid FPM/BEM scalar potential formulation for field calculation in nonlinear magnetostatic analysis of superconducting accelerator magnets, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 128, pp. 118-132. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.04.001>
- [8] Haghighi D., Abbasbandy S., Shivanian E. (2023). Study of the Fragile Points Method for solving two-dimensional linear and nonlinear wave equations on complex and cracked domains, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 146, pp. 44-55. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.09.036>
- [9] Beilina L. (2016). Domain decomposition finite element/finite difference method for the conductivity reconstruction in a hyperbolic equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 37, pp. 222-237. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.01.016>
- [10] Guan Y., Atluri S.N. (2021). Meshless fragile points methods based on Petrov-Galerkin weak-forms for transient heat conduction problems in complex anisotropic nonhomo-

- geneous media, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(16), pp. 4055-4092. <https://doi.org/10.1002/nme.6692>
- [11] Младеновић Н.С. (1998). *Прорачуни струјања методом коначних запремина*, Машински факултет Универзитета у Београду
- [12] Fallah N.A., Bailey C., Cross M., Taylor G.A. (2000). Comparison of finite element and finite volume methods application in geometrically nonlinear stress analysis, *Applied Mathematical Modelling*, 24, pp. 439-455. [https://doi.org/10.1016/S0307-904X\(99\)00047-5](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(99)00047-5)
- [13] Leveque R.J. (2004). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press
- [14] Camacho G.T., Ortiz M. (1996). Computational modelling of impact damage in brittle materials, *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22), pp. 2899-2938. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(95\)00255-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(95)00255-3)
- [15] Guan Y., Dong L., Atluri S.N. (2021). A new meshless Fragile Points Method (FPM) with minimum unknowns at each point, for flexoelectric analysis under two theories with crack propagation, I: Theory and implementation, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 16(2), pp. 159-195. <https://doi.org/10.2140/jomms.2021.16.159>
- [16] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L. (1994). Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2), pp. 229-256. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
- [17] Haghighi D., Abbasbandy S., Shivanian E., Dong L., Atluri S.N. (2022). The Fragile Points Method (FPM) to solve two-dimensional hyperbolic telegraph equation using point stiffness matrices, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 134(1), pp. 11-21. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.09.018>
- [18] Hillman M., Chen J.S. (2016). An accelerated, convergent, and stable nodal integration in Galerkin meshfree methods for linear and nonlinear mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 107(7), pp. 603-630. <https://doi.org/10.1002/nme.5183>
- [19] Liu M.B., Xie W.P., Liu G.R. (2005). Modeling incompressible flows using a finite particle method, *Applied Mathematical Modelling*, 29(12), pp. 1252-1270. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2005.05.003>
- [20] Sutradhar A., Paulino G.H. (2004). The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, pp. 4511-4539. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.02.018>
- [21] Guan Y., Grujicic R., Wang X., Dong L., Atluri S.N. (2020). A new meshless “fragile points method” and a local variational iteration method for general transient heat conduction in anisotropic nonhomogeneous media. Part I: Theory and implementation, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 78(2), pp. 71-85. <https://doi.org/10.1080/10407790.2020.1747278>

- [22] Sladek J., Sladek V., Zhang C. (2003). Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, *Computational Materials Science*, 28, pp. 494-504. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2003.08.006>
- [23] Sladek J., Sladek V., Atluri S.N. (2004). Meshless local Petrov-Galerkin method for heat conduction problem in an anisotropic medium, *CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 6(3), pp. 309-318. <https://doi.org/10.3970/cmcs.2004.006.309>
- [24] Sladek V., Sladek J., Tanaka M., Zhang C. (2005). Transient heat conduction in anisotropic and functionally graded media by local integral equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, pp. 1047-1065. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2005.05.011>
- [25] Mohebbi F., Evans B., Sellier M. (2019). On the Kutta Condition in Compressible Flow over Isolated Airfoils, *Fluids*, 4(2), 102 <https://doi.org/10.3390/fluids4020102>
- [26] Младеновић Н. (1982). *Компјутерска анализа потенцијалног струјања и оптерећење авиона у подзвучном и надзвучном струјном пољу методом панела*, магистарски рад, Универзитет у Београду, Машински факултет
- [27] Erickson L.L. (1990). *Panel Methods - An Introduction*, NASA Technical Paper 2995
- [28] Ozdemir Y.H., Barlas B. (2021). 2D and 3D Potential Flow Simulations around NACA 0012 with Ground Effect <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-151154/v1>
- [29] Lucy L.B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *Astrophysical Journal*, 82, pp. 1013-1024. <https://doi.org/10.1086/112164>
- [30] Libersky L.D., Petschek A.G., Carney T.C, Hipp J.R., Allahdadi F.A. (1993). High Strain Lagrangian Hydrodynamics: A Three-Dimensional SPH Code for Dynamic Material Response, *Journal of Computational Physics*, 109(1) pp. 67-75. <https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1199>
- [31] Randles P.W., Libersky L.D. (1996). Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4), pp. 375-408. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01090-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01090-0)
- [32] Liu W.K., Jun S., Zhang Y.F. (1995). Reproducing kernel particle methods, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20(8-9), pp. 1081-1106. <https://doi.org/10.1002/flid.1650200824>
- [33] Nayroles B., Touzot G., Villon P. (1992). Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mechanics*, 10, pp. 307-318. <https://doi.org/10.1007/BF00364252>
- [34] Krongauz Y, Belytschko T. (1997). A Petrov-Galerkin diffuse element method (PG DEM) and its comparison to EFG, *Computational Mechanics*, 19(4), pp. 327-333. <https://doi.org/10.1007/s004660050181>
- [35] Duan Q., Li X., Zhang H., Belytschko T. (2012). Second-order accurate derivatives and integration schemes for meshfree methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(4), pp. 399-424. <https://doi.org/10.1002/nme.4359>

- [36] Atluri S.N., Han Z.D., Rajendran A.M. (2004). A new implementation of the meshless finite volume method, through the MLPG “mixed” approach, *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 6(6), pp. 491-513. <https://doi.org/10.3970/cmes.2004.006.491>
- [37] Atluri S.N., Shen S. (2002). The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods, *CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 3(1), pp. 11-52. <https://doi.org/10.3970/cmes.2002.003.011>
- [38] Zhu T., Zhang J., Atluri S.N. (1999). Meshless numerical method based on the local boundary integral equation (LBIE) to solve linear and non-linear boundary value problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23(5), pp. 375-389. [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(98\)00096-4](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(98)00096-4)
- [39] Li X. (2023). Theoretical analysis of the Reproducing Kernel Gradient Smoothing Integration technique in Galerkin Meshless Methods, *Journal of Computational Mathematics*, 41(3), pp. 503-526. <https://doi.org/10.4208/jcm.2201-m2021-0361>
- [40] Zheng Z., Li X. (2022). Theoretical analysis of the generalized finite difference method, *Computers and Mathematics with Applications*, 120, pp. 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.06.017>
- [41] Mountris K.A., Dong L., Guan Y., Atluri S.N., Pueyo E. (2022). A meshless fragile points method for the solution of the monodomain model for cardiac electrophysiology simulation, *Journal of Computational Science*, 65 101880 <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2022.101880>
- [42] Zhu T., Atluri S.N. (1998). A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method, *Computational Mechanics*, 21(3), pp. 211-222. <https://doi.org/10.1007/s004660050296>
- [43] Onate E., Perazzo F., Miquel J. (2001). A finite point method for elasticity problems, *Computers & Structures*, 79(22-25), pp. 2151-2163. [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(01\)00067-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(01)00067-0)
- [44] Saucedo-Zendejo F.R., Nobrega J.M. (2022). A novel approach to model the flow of generalized Newtonian fluids with the finite pointset method, *Computational Particle Mechanics*, 9(2022), pp. 585-595. <https://doi.org/10.1007/s40571-021-00432-y>
- [45] Arnold D.N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L.D. (2002). Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39, pp. 1749-1779. <https://doi.org/10.1137/S0036142901384162>
- [46] Mountris K.A., Li M., Schilling R., Dong L., Atluri S.N., Casals A., Wurdemann H.A. (2023). An explicit total Lagrangian Fragile Points Method for finite deformation of hyperelastic materials, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 151, pp. 255-264. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.03.001>
- [47] Shen B., Wang S., Li M., Dong L. (2022). Dynamic fracture analysis with the fragile points method, *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 54(12), pp. 3383-3397. <https://doi.org/10.6052/0459-1879-22-498>

- [48] Wang K., Shen B., Li M., Dong L., Atluri S.N. (2022). A Fragile Points Method, with an interface debonding model, to simulate damage and fracture of U-notched structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 123(8), pp. 1736-1759. <https://doi.org/10.1002/nme.6914>
- [49] Guan Y., Dong L., Atluri S.N. (2021). A new meshless Fragile Points Method (FPM) with minimum unknowns at each point, for flexoelectric analysis under two theories with crack propagation, II: Validation and discussion, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 16(2), pp. 197-223. <https://doi.org/10.2140/jomms.2021.16.197>
- [50] Mountris K.A., Pueyo E. (2022). A meshless fragile points method for rule-based definition of myocardial fiber orientation, *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 226 107164 <https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2022.107164>
- [51] Anderson J.D. (2007). *Fundamentals of Aerodynamics*, 6th ed., McGraw-Hill Education
- [52] Grujicic R., Mladenovic N., Bengin A., Vorotovic G., Dong L., Atluri S.N. (2023). Meshless Fragile Points Method (FPM) in a 2D and 3D potential compressible subsonic fluid flow, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 151, pp. 538-547. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2023.03.032>
- [53] Guan Y., Grujicic R., Wang X., Dong L., Atluri S.N. (2020). A new meshless “fragile points method” and a local variational iteration method for general transient heat conduction in anisotropic nonhomogeneous media. Part II: Validation and discussion, *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, 78(2), pp. 86-109. <https://doi.org/10.1080/10407790.2020.1747283>
- [54] Guan Y., Grujić R., Wang X., Dong L., Atluri S.N. (2020). A new and efficient meshless computational approach for transient heat conduction in anisotropic nonhomogeneous media: fragile points method and local variational iteration scheme, *Proceedings of the ASME 2020, International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE2020*, November 16-19, 2020, Portland, OR, USA
- [55] Shu C., Ding H., Yeo K.S. (2003). Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(7-8), pp. 941-954. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00618-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00618-7)
- [56] Rebay S. (1993). Efficient Unstructured Mesh Generation by Means of Delaunay Triangulation and Bowyer-Watson Algorithm, *Journal of Computational Physics*, 106(1), pp. 125-138. <https://doi.org/10.1006/jcph.1993.1097>
- [57] Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H. (1996). The quickhull algorithm for convex hulls, *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22(4), pp. 469-483. <https://doi.org/10.1145/235815.235821>
- [58] Gambaruto A.M. (2015). Computational haemodynamics of small vessels using the Moving Particle Semi-implicit (MPS) method, *Journal of Computational Physics*, 302, pp. 68-96. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.08.039>

- [59] Lewis R.I. (1991). *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, UK <https://doi.org/10.1017/CBO9780511529542>
- [60] Xu C. (1998). Kutta Condition for sharp edge flows, *Mechanics Research Communications*, 25, pp. 415-420. [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(98\)00054-8](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(98)00054-8)
- [61] Ramos A., McDonald R.A. (2011). A Meshless Finite Difference Scheme for Compressible Potential Flows, *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, Orlando, Florida <https://doi.org/10.2514/6.2011-654>
- [62] Douglas J., Dupont T. (1976). Interior Penalty Procedures for Elliptic and Parabolic Galerkin Methods, *Computing Methods in Applied Sciences, Lecture Notes in Physics*, 58, pp. 207-216. ISBN 978-3-540-08003-9. Springer-Verlag <https://doi.org/10.1007/BFb0120591>
- [63] Cockburn B. Shu C.W. (1998). The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(6), pp. 2440-2463. <https://doi.org/10.1137/S0036142997316712>
- [64] Peng R., Vempala S. (2021). Solving sparse linear systems faster than matrix multiplication, *Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pp. 504-521.
- [65] Nie Z. (2021). Matrix anti-concentration inequalities with applications, *Proceedings of the 54th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, 243938571 <https://doi.org/10.1145/3519935.3520060>
- [66] Casacuberta S., Kyng R. (2022). Faster Sparse Matrix Inversion and Rank Computation in Finite Fields, *13th Innovations in Theoretical Computer Science Conference (ITCS 2022)*, pp. 33:1-33:24, Leibniz International Proceedings in Informatics, Dagstuhl Publishing, Germany
- [67] Abbott, I.H., Von Doenhoff, A.E. (1959). *Theory of Wing Sections*, 1st ed., Dover Publications New York, USA
- [68] Cantwell B. *Applied Aerodynamics (course notes), Chapter 10: Elements of potential flow*, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University
- [69] NATO, Advisory group for aerospace research and development (1979). *AGARD Advisory Report No. 138, Experimental data base for computer program assessment*, NATO
- [70] Matsson J.E., Voth J.A., McCain C.A., McGraw C. (2016). Aerodynamic Performance of the NACA 2412 Airfoil at Low Reynolds Number, *American Society for Engineering Education's 123rd Annual Conference & Exposition*, June 26-29, 2016, New Orleans, LA, USA <https://doi.org/10.18260/p.26539>
- [71] Sladek J., Sladek V., Tan C.L., Atluri S.N. (2008). Analysis of transient heat conduction in 3D anisotropic functionally graded solids, by the MLPG method, *CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 32(3), pp. 161-174. <https://doi.org/10.3970/cmcs.2008.032.161>

- [72] Mackowski D.W. (2011). *Conduction Heat Transfer: Notes for MECH 7210*, Alabama: Mechanical Engineering Department, Auburn University
- [73] Wrobel L.C. (2002). *The boundary element method, vol. 1: Applications in thermo-fluids and acoustics*, Chichester: Wiley
- [74] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, 2nd revised ed., Springer Series in Computational Mathematics
- [75] Цветковић А., Спалевић М. (2013). *Нумеричке методе*, Универзитет у Београду, Машински факултет
- [76] Мартиновић М., Шћепановић Р. (1995). *Нумеричке методе*, Унирекс и Природно-математички факултет Подгорица
- [77] Радуновић Д. (2003). *Нумеричке методе*, Академска мисао, Београд
- [78] Burden R.L., Faires J.D. (2010). *Numerical Analysis*, 9th ed., Brooks/Cole Cengage Learning
- [79] Iserles A. (2009). *A first course in the numerical analysis of differential equations*, 2nd ed., Cambridge University Press
- [80] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd ed., Cambridge University Press
- [81] Atkinson K., Han W., Stewart D. (2009). *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons
- [82] Wang X. (2019). *Optimized Picard iteration methods for nonlinear dynamical systems with non-smooth nonlinearities, and orbital mechanics*, PhD dissertation, Texas Tech University
- [83] Dormand J.R., Prince P.J. (1980). A family of embedded Runge-Kutta formulae, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6, pp. 19-26. [https://doi.org/10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3)
- [84] Shampine L.F., Reichelt M.W. (1997). The MATLAB ODE Suite, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18, pp. 1-22. <https://doi.org/10.1137/S1064827594276424>
- [85] Bergman T.L., Lavine A.S., Incropera F.P., Dewitt D.P. (2011). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 7th ed., John Wiley & Sons
- [86] Subani N., Jamaluddin F., Mohamed M.A.H., Badrolhisam A.D.H. (2020). Analytical Solution of Homogeneous One-Dimensional Heat Equation with Neumann Boundary Conditions, *Journal of Physics: Conference Series* 1551 012002 <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1551/1/012002>
- [87] Johansson B.T., Lesnic D., Reeve T. (2011). A method of fundamental solutions for two-dimensional heat conduction, *International Journal of Computer Mathematics*, 88(8), pp. 1697-1713. <https://doi.org/10.1080/00207160.2010.522233>
- [88] Reeve T., Johansson B.T. (2013). The method of fundamental solutions for a time-dependent two-dimensional Cauchy heat conduction pro-

- blem, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37, pp. 569-578. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.12.008>
- [89] Mirzaei D., Dehghan M. (2011). MLPG method for transient heat conduction problem with mls as trial approximation in both time and space domains, *CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 72(3), pp. 185-210. <https://doi.org/10.3970/cmes.2011.072.185>
- [90] Mirzaei D., Schaback R. (2014). Solving heat conduction problems by the direct meshless local Petrov-Galerkin (DMLPG) method, *Numerical Algorithms*, 65(2), pp. 275-291. <https://doi.org/10.1007/s11075-013-9711-1>
- [91] Sutradhar A., Paulino G.H. (2004). A simple boundary element method for problems of potential in nonhomogeneous media, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(13), pp. 2203-2230. <https://doi.org/10.1002/nme.1046>
- [92] Sladek J., Sladek V., Wunsche M., Zhang C. (2009). Interface crack problems in anisotropic solids analyzed by the MLPG, *CMES - Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 54(2), pp. 223-252. <https://doi.org/10.3970/cmes.2009.054.223>
- [93] Oterkus S., Madenci E., Agwai A. (2014). Peridynamic thermal diffusion, *Journal of Computational Physics*, 265, pp. 71-96. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.01.027>
- [94] Liu S., Fang G., Wang B., Fu M., Liang J. (2018). Study of thermal conduction problem using coupled peridynamics and finite element method, *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 50(2), pp. 339-348. <https://doi.org/10.6052/0459-1879-17-332>
- [95] Xu C., Yu B., Zhang Z., Zhang J., Wei J., Sun S. (2010). Numerical simulation of a buried hot crude oil pipeline during shutdown, *Petroleum Science*, 7, pp. 73-82. <https://doi.org/10.1007/s12182-010-0008-x>
- [96] Yu B., Li C., Zhang Z., Liu X., Zhang J., Wei J., Sun S., Huang J. (2010). Numerical simulation of a buried hot crude oil pipeline under normal operation, *Applied Thermal Engineering*, 30, pp. 2670-2679. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2010.07.016>
- [97] Rong-Jun C., Hong-Xia G. (2010). Meshless analysis of three-dimensional steady-state heat conduction problems, *Chinese Physics B*, 19 090201 <https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/9/090201>
- [98] Carslaw H.S., Jaeger J.C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford
- [99] Myers G.E. (1971). *Analytical methods in conduction heat transfer*, McGraw-Hill
- [100] Tu T.W., Lee S.Y. (2015). Analytical Solution of Heat Conduction for Hollow Cylinders with Time-Dependent Boundary Condition and Time-Dependent Heat Transfer Coefficient, *Journal of Applied Mathematics*, 203404 <http://dx.doi.org/10.1155/2015/203404>

Прилог А: Кôд за брзу уређену подјелу домена на поддомене

Matlab кôд за брзу уређену подјелу домена облика правоугаоника на поддомене, такву да нема тачака на границама домена (слика 2.3.а), дат је испод.

```
1 % ULAZNI PODACI
2 pax = 5; pay = 8; % broj odsjecaka po osama
3 xd = 0; xg = 1; yd = 0; yg = 3; % granice domena
4 % -----
5 pn = pax*pay; dx = (xg - xd)/pax; dy = (yg - yd)/pay;
6
7 % koordinate tacaka domena
8 xp = reshape(repmat(linspace(xd + dx/2,xg - dx/2,pax),pay,1),pn,1);
9 yp = repmat(linspace(yd + dy/2,yg - dy/2,pay).',(pax,1));
10
11 % tacke na granicama
12 p1 = (1:pay).'; % x = xd
13 p2 = p1 + (pax - 1)*pay; % x = xg
14 p3 = (0:pax - 1).'*pay + 1; % y = yd
15 p4 = p3 + pay - 1; % y = yg
16
17 % površine poddomena
18 Pi = dx*dy; P = ones(pn,1)*Pi;
19
20 % dužine stranica poddomena na granicama
21 L1 = dy; L12 = L1*ones(pay,1); L2 = dx; L34 = L2*ones(pax,1);
22
23 % susjedne tacke
24 s = repmat((1:pn).',(1,4)); s = s + [-pay, pay, -1, 1];
25 s(p1,1) = 0; s(p2,2) = 0; s(p3,3) = 0; s(p4,4) = 0;
26
27 % dužine stranica koje razdvajaju susjedne tacke
28 L = repmat([L1 L1 L2 L2],pn,1);
29 L(p1,1) = 0; L(p2,2) = 0; L(p3,3) = 0; L(p4,4) = 0;
30
31 % koordinate tjemena koja ogranicavaju poddomene
32 I = zeros((pax + 1)*(pay + 1),2);
33 I(:,1) = reshape(repmat(linspace(xd,xg,pax + 1),(pay + 1),1),[],1);
34 I(:,2) = repmat(linspace(yd,yg,pay + 1).',(pax + 1),1);
35
36 % raspored tjemena po poddomenima
37 R = zeros(pn,4); Ra = reshape(repmat((0:pax - 1),pay,1),[],1);
38 R(:,1) = (1:pn).'+ Ra; R(:,2) = R(:,1) + 1;
39 R(:,3) = R(:,1) + pay + 2; R(:,4) = R(:,1) + pay + 1;
```

Matlab кôд за брзу уређену подјелу домена облика правоугаоника на поддомене, такву да поједине тачке леже на границама домена (слика 2.3.б), дат је испод.

```

1 % ULAZNI PODACI
2 pax = 5; pay = 8; % broj odsjecaka po osama
3 xd = 0; xg = 1; yd = 0; yg = 3; % granice domena
4 %-----
5 pn = pax*pay; dx = (xg - xd)/(pax - 1); dy = (yg - yd)/(pay - 1);
6
7 % koordinate tacaka domena
8 xp = reshape(repmat(linspace(xd,xg,pax),pay,1),pn,1);
9 yp = repmat(linspace(yd,yg,pay).',pax,1);
10
11 % tacke na granicama
12 p1 = (1:pay).'; % x = xd
13 p2 = p1 + (pax - 1)*pay; % x = xg
14 p3 = (0:pax - 1).'*pay + 1; % y = yd
15 p4 = p3 + pay - 1; % y = yg
16
17 % površine poddomena
18 Pi = dx*dy;
19 P = ones(pn,1)*Pi;
20 P(p1) = 0.5*P(p1); P(p2) = 0.5*P(p2);
21 P(p3) = 0.5*P(p3); P(p4) = 0.5*P(p4);
22
23 % dužine stranica poddomena na granicama
24 L1 = dy; L12 = L1*ones(pay,1); L12([1 pay],:) = 0.5*L1;
25 L2 = dx; L34 = L2*ones(pax,1); L34([1 pax],:) = 0.5*L2;
26
27 % susjedne tacke
28 s = repmat((1:pn).',1,4);
29 s = s + [-pay, pay, -1, 1];
30 s(p1,1) = 0; s(p2,2) = 0; s(p3,3) = 0; s(p4,4) = 0;
31
32 % dužine stranica koje razdvajaju susjedne tacke
33 L = repmat([L1 L1 L2 L2],pn,1);
34 L(p1,1) = 0; L(p2,2) = 0; L(p3,3) = 0; L(p4,4) = 0;
35 L(p1,3:4) = 0.5*L(p1,3:4);
36 L(p2,3:4) = 0.5*L(p2,3:4);
37 L(p3,1:2) = 0.5*L(p3,1:2);
38 L(p4,1:2) = 0.5*L(p4,1:2);
39
40 % koordinate tjemena koja ogranicavaju poddomene
41 I = zeros((pax + 1)*(pay + 1),2);
42 I(:,1) = reshape(repmat([xd linspace(xd...
43     + 0.5*dx,xg - 0.5*dx,pax - 1) xg],(pay + 1),1),[],1);
44 I(:,2) = repmat([yd linspace(yd...
45     + 0.5*dy,yg - 0.5*dy,pay - 1) yg].',(pax + 1),1);
46
47 % raspored tjemena po poddomenima
48 R = zeros(pn,4);
49 Ra = reshape(repmat((0:pax - 1),pay,1),[],1);
50 R(:,1) = (1:pn).'+ Ra;
51 R(:,2) = R(:,1) + 1;
52 R(:,3) = R(:,1) + pay + 2;
53 R(:,4) = R(:,1) + pay + 1;

```

Matlab код брзу уређену подјелу домена облика квадрa на поддомене, такву да нема тачака на границама домена, дат је испод.

```

1 % ULAZNI PODACI
2 pax = 5; pay = 8; paz = 4; % broj odsjecaka po osama
3 xd = 0; xg = 1; yd = 0; yg = 3; zd = 0; zg = 2; % granice domena
4 % -----
5 pn = pax*pay*paz;
6 dx = (xg - xd)/pax; dy = (yg - yd)/pay; dz = (zg - zd)/paz;
7
8 % koordinate tacaka domena
9 xp = reshape(repmat(linspace(xd + dx/2,xg - dx/2,pax),pay*paz,1),pn,1);
10 yp = repmat(linspace(yd + dy/2,yg - dy/2,pay).',pax*paz,1);
11 zp = reshape(repmat(linspace(zd + dz/2,zg - dz/2,paz),pay,paz),pn,1);
12
13 % tacke na granicama
14 p1 = (1:pay*paz).'; % xd
15 p2 = p1 + (pax - 1)*pay*paz; % xg
16 p3 = reshape(repmat((1:pay*paz:(pax - 1)*pay*paz + 1),paz,1)...
17     + pay*(0:(paz - 1)).',pax*paz,1); % yd
18 p4 = p3 + (pay - 1); % yg
19 p5 = reshape(repmat((1:pay),pax,1) + pay*paz*(0:(pax - 1)).',pax*pay,1); % zd
20 p6 = p5 + pay*(paz - 1); % zg
21
22 % zapremine poddomena
23 V = ones(pn,1)*dx*dy*dz;
24
25 % površine strana poddomena na granicama
26 P1 = dy*dz; P12 = P1*ones(pay*paz,1);
27 P2 = dx*dz; P34 = P2*ones(paz*pax,1);
28 P3 = dx*dy; P56 = P3*ones(pax*pay,1);
29
30 % susjedne tacke
31 s = repmat((1:pn).',1,6); s = s + [-pay*paz, pay*paz, -1, 1, -pay, pay];
32 s(p1,1) = 0; s(p2,2) = 0; s(p3,3) = 0; s(p4,4) = 0; s(p5,5) = 0; s(p6,6) = 0;
33
34 % površine strana koje razdvajaju susjedne tacke
35 P = repmat([P1 P1 P2 P2 P3 P3],pn,1);
36 P(p1,1) = 0; P(p2,2) = 0; P(p3,3) = 0;
37 P(p4,4) = 0; P(p5,5) = 0; P(p6,6) = 0;
38
39 % koordinate tjemena koja ogranicavaju poddomene
40 I = zeros((pax + 1)*(pay + 1)*(paz + 1),3);
41 I(:,1) = reshape(repmat(linspace(xd,xg,pax + 1),(pay + 1)*(paz + 1),1),[],1);
42 I(:,2) = repmat(linspace(yd,yg,pay + 1).',(pax + 1)*(paz + 1),1);
43 I(:,3) = reshape(repmat(linspace(zd,zg,paz + 1),(pay + 1),(pax + 1)),[],1);
44
45 % raspored tjemena po poddomenima
46 R = zeros(pn,8);
47 Ra = reshape(repmat(reshape(repmat(linspace...
48     (0,paz - 1,paz),pay,1),pay*paz,1),1,pax)...
49     + linspace(0,pax - 1,pax)*(pay + 1)*(paz + 1),pn,1);
50 R(:,1) = repmat(1:pay*paz,1,pax).'+ Ra;
51 R(:,2) = R(:,1) + 1;
52 R(:,3:4) = R(:,1:2) + pay + 1;
53 R(:,5:8) = R(:,1:4) + (pay + 1)*(paz + 1);

```

Matlab кôд за брзу уређену подјелу домена облика квадрa на поддомене, такву да поједине тачке леже на границама домена, дат је испод.

```

1 % ULAZNI PODACI
2 pax = 5; pay = 8; paz = 4; % broj odsjecaka po osama
3 xd = 0; xg = 1; yd = 0; yg = 3; zd = 0; zg = 2; % granice domena
4 % -----
5 pn = pax*pay*paz;
6 dx = (xg - xd)/(pax - 1); dy = (yg - yd)/(pay - 1); dz = (zg - zd)/(paz - 1);
7 % koordinate tacaka domena
8 xp = reshape(repmat(linspace(xd,xg,pax),pay*paz,1),pn,1);
9 yp = repmat(linspace(yd,yg,pay).',pax*paz,1);
10 zp = reshape(repmat(linspace(zd,zg,paz),pay,pax),pn,1);
11 % tacke na granicama
12 p1 = (1:pay*paz).'; % xd
13 p2 = p1 + (pax - 1)*pay*paz; % xg
14 p3 = reshape(repmat((1:pay*paz:(pax - 1)*pay*paz + 1),paz,1)...
15     + pay*(0:(paz - 1)).',pax*paz,1); % yd
16 p4 = p3 + (pay - 1); % yg
17 p5 = reshape(repmat((1:pay),pax,1) + pay*paz*(0:(pax - 1)).',pax*pay,1); % zd
18 p6 = p5 + pay*(paz - 1); % zg
19 % zapremine poddomena
20 Vi = dx*dy*dz; V = ones(pn,1)*Vi;
21 V(p1) = 0.5*V(p1); V(p2) = 0.5*V(p2); V(p3) = 0.5*V(p3);
22 V(p4) = 0.5*V(p4); V(p5) = 0.5*V(p5); V(p6) = 0.5*V(p6);
23 % površine strana poddomena na granicama
24 P1 = dy*dz; P2 = dx*dz; P3 = dx*dy;
25 P12 = P1*ones(pay,paz); P12([1 pay],:) = 0.5*P1;
26 P12(:, [1 paz]) = 0.5*P12(:, [1 paz]); P12 = reshape(P12,[pay*paz,1]);
27 P34 = P2*ones(paz,pax); P34([1 paz],:) = 0.5*P2;
28 P34(:, [1 pax]) = 0.5*P34(:, [1 pax]); P34 = reshape(P34,[pax*paz,1]);
29 P56 = P3*ones(pax,pay); P56([1 pax],:) = 0.5*P3;
30 P56(:, [1 pay]) = 0.5*P56(:, [1 pay]); P56 = reshape(P56,[pax*pay,1]);
31 % susjedne tacke
32 s = repmat((1:pn).',1,6); s = s + [-pay*paz, pay*paz, -1, 1, -pay, pay];
33 s(p1,1) = 0; s(p2,2) = 0; s(p3,3) = 0; s(p4,4) = 0; s(p5,5) = 0; s(p6,6) = 0;
34 % površine strana koje razdvajaju susjedne tacke
35 P = repmat([P1 P1 P2 P2 P3 P3],pn,1);
36 P(p1,1) = 0; P(p2,2) = 0; P(p3,3) = 0; P(p4,4) = 0; P(p5,5) = 0; P(p6,6) = 0;
37 P(p1,3:6) = 0.5*P(p1,3:6); P(p2,3:6) = 0.5*P(p2,3:6);
38 P(p3,[1 2 5 6]) = 0.5*P(p3,[1 2 5 6]); P(p4,[1 2 5 6]) = 0.5*P(p4,[1 2 5 6]);
39 P(p5,1:4) = 0.5*P(p5,1:4); P(p6,1:4) = 0.5*P(p6,1:4);
40 % koordinate tjemenâ koja ograničavaju poddomene
41 I = zeros((pax + 1)*(pay + 1)*(paz + 1),3);
42 I(:,1) = reshape(repmat([xd linspace(xd...
43     + 0.5*dx,xg - 0.5*dx,pax - 1) xg],(pay + 1)*(paz + 1),1),[],1);
44 I(:,2) = repmat([yd linspace(yd...
45     + 0.5*dy,yg - 0.5*dy,pay - 1) yg].',(pax + 1)*(paz + 1),1);
46 I(:,3) = reshape(repmat([zd linspace(zd...
47     + 0.5*dz,zg - 0.5*dz,paz - 1) zg],(pay + 1),(pax + 1)),[],1);
48 % raspored tjemenâ po poddomenima
49 Ra = reshape(repmat(reshape(repmat(linspace(0,paz - 1,paz),pay,1),pay*paz,1)...
50     ,1,pax) + linspace(0,pax - 1,pax)*(pay + 1)*(paz + 1),pn,1);
51 R = zeros(pn,8); R(:,1) = repmat(1:pay*paz,1,pax).'+ Ra; R(:,2) = R(:,1) + 1;
52     R(:,3:4) = R(:,1:2) + pay + 1;
53     R(:,5:8) = R(:,1:4) + (pay + 1)*(paz + 1);

```

Прилог Б: Униформно опструјавање цилиндра - аналитичко рјешење

При униформном опструјавању цилиндра бесконачне дужине, укупни потенцијал брзине се у аналитичком облику може изразити као суперпозиција потенцијала брзине униформног струјања Φ_{uf} и потенцијала брзине услед постојања дипола (дублета) Φ_{d} [68]:

$$\Phi = \Phi_{\text{uf}} + \Phi_{\text{d}} = U_{\infty}x + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (\text{Б.1})$$

гдје је κ снага дипола концентрисаног у координатном почетку. Уочава се да је потенцијал услед дипола заправо поремећајни потенцијал ϕ у изразу (3.1). Уколико се у претходној релацији направи прелаз са Декартових на поларне координате $(r; \theta)$, по којима је $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$, може се показати да постоји радијус $r = R$ при коме ће радијална брзина имати нулту вриједност, што одговара опструјавању цилиндра полупречника R :

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \begin{bmatrix} U_{\infty} + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\kappa}{2\pi} \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{\infty} + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{r^2 - 2r^2 \cos^2 \theta}{r^4} \\ \frac{\kappa}{2\pi} \frac{-2r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^4} \end{bmatrix}, \\ \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} &= (\nabla \Phi)^T \mathbf{n} = \begin{bmatrix} U_{\infty} - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{r^2} & -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \\ &\begin{bmatrix} U_{\infty} - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{R^2} & -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = 0, \\ &\left(U_{\infty} - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{R^2} \right) \cos \theta - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \sin^2 \theta \cos \theta}{R^2} = 0, \\ &\left(U_{\infty} - \frac{1}{R^2} \frac{\kappa}{2\pi} (2 \cos^2 \theta - 1 + 2 \sin^2 \theta) \right) \cos \theta = 0, \\ &R = \left(\frac{\kappa}{2\pi U_{\infty}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

За тако усвојен полупречник цилиндра могуће је извести компактан израз за аналитичко одређивање коефицијента притиска C_p на његовом обиму:

$$C_p = 1 - \frac{1}{U_{\infty}^2} \left(\left(U_{\infty} - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{R^2} \right)^2 + \left(-\frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{R^2} \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
 C_p &= 1 - \frac{1}{U_\infty^2} \left(U_\infty^2 - 2U_\infty \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{R^2} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \frac{4 \cos^4 \theta - 4 \cos^2 \theta + 1}{R^4} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \frac{4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{R^4} \right), \\
 C_p &= 1 - \frac{1}{U_\infty^2} \left(U_\infty^2 - 2U_\infty \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \cos^2 \theta - 1}{R^2} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \frac{-4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1}{R^4} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \frac{4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{R^4} \right), \\
 C_p &= 1 - \frac{1}{U_\infty^2} \left(U_\infty^2 - 2U_\infty \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{R^2} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \frac{1}{R^4} \right), \\
 C_p &= 1 - \frac{1}{U_\infty^2} \left(U_\infty^2 - 2U_\infty \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1}{R^2} + 2U_\infty \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2 \sin^2 \theta}{R^2} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \frac{1}{R^4} \right), \\
 C_p &= 2 \frac{\kappa}{2\pi U_\infty} \frac{1}{R^2} - 2 \frac{\kappa}{2\pi U_\infty} \frac{2 \sin^2 \theta}{R^2} - \left(\frac{\kappa}{2\pi U_\infty} \right)^2 \frac{1}{R^4}, \\
 C_p &= 2R^2 \frac{1}{R^2} - 2R^2 \frac{2 \sin^2 \theta}{R^2} - R^4 \frac{1}{R^4}, \\
 C_p &= 1 - 4 \sin^2 \theta.
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

Биографија аутора

Раде (Неђељко) Грујичић рођен је у Пљевљима 1991. године. Основну школу „Ристан Павловић“ завршио је 2006, а Средњу стручну школу у Пљевљима, смјер Машински техничар, 2010. године. За постигнуте резултате добио је диплому Луча А.

На Машинском факултету Универзитета Црне Горе на студијском програму Машинство, смјер Примијењена механика и конструисање, завршио је трогодишње основне академске студије 2013. године с просјечном оцјеном 9,96. Годину дана касније на истом смјеру завршава специјалистичке академске студије с просјечном оцјеном 10, бранећи рад под називом „Развој конструкције мобилног робота за сакупљање пакова различите боје“, а 2016. и једногодишње магистарске (мастер) академске студије с просјечном оцјеном 10, бранећи рад под називом „Утицај броја активних котрљајних тијела на генерисање топлоте код кугличног лежаја са радијалним додиром“. За резултате постигнуте током студија добио је више награда и стипендија.

У Средњој стручној школи „Иван Ускоковић“ у Подгорици радио је као наставник приправник, а у Руднику угља А.Д. Пљевља као инжењер за рударску опрему и механизацију. Током 2016/17. био је ангажован као демонстратор на извођењу вјежби из Математике I на Машинском факултету Универзитета Црне Горе, на коме од 2017/18. ради као сарадник у настави (асистент) изводећи аудиторне вјежбе на предметима из области Примијењена механика.

Поред других студијских посјета, усавршавао се на Машинском факултету *Texas Tech* универзитета у Лабоку, радећи истраживање из области безмрежних метода којим је руководио професор *Satya N. Atluri*, а затим и на Техничком универзитету у Минхену.

Био је ангажован као сарадник на 10 научноистраживачких пројеката. Објавио је 13 радова у међународним и домаћим часописима и дао 16 саопштења на међународним и домаћим скуповима.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора: Раде Грујичић

Број индекса: Д28/2016

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Безмрежна *Fragile Points* метода (FPM)

у проблемима опструјавања аеродинамичких облика и простирања топлоте

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у цјелини ни у дијеловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Београду,

1. 12. 2023.

Потпис аутора

Изјава о истовјетности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора:	Раде Грујичић
Број индекса:	Д28/2016
Студијски програм:	Машинско инжењерство
Наслов рада:	Безмрежна <i>Fragile Points</i> метода (FPM) у проблемима опструјавања аеродинамичких облика и простирања топлоте
Ментори:	др Александар Бенгин, редовни професор и др Горан Воротовић, ванредни професор

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истовјетна електронској верзији коју сам предао ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и мјесто рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду,

1. 12. 2023.

Потпис аутора

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Безмрежна *Fragile Points* метода (FPM)

у проблемима опструјавања аеродинамичких облика и простирања топлоте

која је моје ауторско дјело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучио.

- ①. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство — некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство — некомерцијално — без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство — некомерцијално — дијелити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство — без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство — дијелити под истим условима (CC BY-SA)

У Београду,

Потпис аутора

1. 12. 2023.

1. **Ауторство.** Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. **Ауторство — некомерцијално.** Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дјела.
3. **Ауторство — некомерцијално — без прерада.** Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, без промјена, преобликовања или употребе дјела у свом дјелу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дјела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дјела.
4. **Ауторство — некомерцијално — дијелити под истим условима.** Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дјела и прерада.
5. **Ауторство — без прерада.** Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, без промјена, преобликовања или употребе дјела у свом дјелу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дјела.
6. **Ауторство — дијелити под истим условима.** Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дјела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.