

UNIVERZITET U BEOGRADU
EKONOMSKI FAKULTET

Lazar A. Čolić

**NEUROMARKETINŠKI PRISTUP I PRIMENA BAJESOVIH
MODELA U ANALIZI EFEKATA REGULACIONOG
STANJA NA ODLUČIVANJE POTROŠAČA**

doktorska disertacija

Beograd, 2023

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Lazar A. Čolić

**NEUROMARKETING APPROACH AND APPLICATION OF
BAYESIAN MODELS IN THE ANALYSIS OF THE EFFECTS
OF REGULATORY FOCUS ON CONSUMER DECISION-
MAKING**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2023

Mentor:

dr Ivana Prica, vanredni profesor,
Ekonomski fakultet, Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

Prof. dr Galjina Ognjanov, redovni profesor,
Ekonomski fakultet, Univerzitet u Beogradu

dr Biljana Chroneos Krasavac, vanredni profesor,
Ekonomski fakultet, Univerzitet u Beogradu

dr Bojana Milošević, vanredni profesor,
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Datum odbrane: _____

Izražavam najiskreniju zahvalnost Mentoru i članovima Komisije na velikoj pomoći i podršci u toku rada na ovoj doktorskoj disertaciji.

Neizmerno sam zahvalan svojoj porodici, roditeljima Snežani i Aleksandru i bratu Nemanji koji su mi pružali bezrezervnu podršku i bili oslonac u dosadašnjem radu.

NEUROMARKETINŠKI PRISTUP I PRIMENA BAJESOVIH MODELA U ANALIZI EFEKATA REGULACIONOG STANJA NA ODLUČIVANJE POTROŠAČA

REZIME

Analiza psihološkog (regulacionog) stanja u kontekstu odlučivanja potrošača je jedan od izazova ove disertacije. Budući da tradicionalne metode samoocenjivanja ispitanika nisu pouzdane u merenju regulacionog stanja, korišćen je neuromarketinški instrument elektroencefalograf (EEG). Na ovaj način je omogućeno simultano praćenje neuralnih reakcija tokom tretiranja ispitanika eksperimentalnim stimulusom (muzičke numere različitog tempa i energičnosti) i elicitacije njihovih preferencija. Za ocenjivanje preferencija potrošača korišćen je hijerarhijski Bajesov model izbora uz korišćenje neuromarketinških metrika dobijenih putem elektroencefalografa. Za ocenjivanje modela primenjen je Hamiltonov Monte Karlo metod korišćenjem NUTS algoritma zbog sposobnosti da oceni aposteriorne raspodele kompleksne strukture, kao što je to slučaj kod hijerarhijskih modela sa malim uzorcima korišćenog u ovom radu. Model je programiran u statističkom programskom jeziku Stan. Za potrebe elicitacije preferencija korišćen je Bajesov D-optimalan eksperimentalni dizajn, uz korišćenje apriornih informacija iz predistraživanja. Dobijenim modelom analiziran je uticaj regulacionog stanja na cenovnu osetljivost tražnje nad studentskom populacijom Univerziteta u Beogradu. Osnovni naučni cilj empirijskog istraživanja je bio da objasni uzročno-posledičnu vezu muzike koja se čuje u pozadini („pozadinske muzike“) i regulacionog stanja potrošača, sa jedne strane, i odlučivanja potrošača o izboru proizvoda, sa druge strane.

U skladu sa teorijom regulacione usklađenosti, rezultati su pokazali da promocijono regulaciono stanje smanjuje cenovnu osetljivost tražnje, dok je prevenciono pojačava. Ovaj rezultat je važio kako za hronično regulaciono stanje, tako i za situaciono regulaciono stanje. Kod merenja hroničnog regulacionog stanja, tradicionalna metrika merena BIS/BAS skalom nije bila značajan prediktor cenovne osetljivosti, dok je neuromarketinška metrika frontalne asimetrije koju pruža EEG, bila. Situaciona regulaciona stanja promocije i prevencije su primovana muzičkim stimulusima različitih nivoa energičnosti, odnosno korišćena je spora i brza verzija numere „Wake me up“ originalno izvedena od strane umetnika Avicii-a. Pokazano je da energična muzika uvodi potrošače u promocijono regulaciono stanje, koje se reflektuje kroz veću emocionalnu pobuđenost ispitanika, što posledično smanjuje cenovnu osetljivost tražnje. Sporija verzija muzičkog stimulusa je primovala prevenciono stanje, reflektovano kroz stanje relaksacije (niska emocionalna pobuđenost), što je pojačavalo cenovnu osetljivost tražnje. Dobijena veza regulacionog stanja i cenovne osetljivosti je važila samo u uslovima kada potrošači nisu bili involvirani u obradi informacija prilikom izbora proizvoda, čime su potvrđeni rezultati iz ranijih istraživanja.

Metod razvijen u ovom radu može se, osim muzike, primeniti na različite kontekstualne faktore koji primaju regulaciona stanja potrošača. Moguće je primeniti i druge neuromarketinške instrumente, poput uređaja za praćenje pogleda ispitanika, čime bi merenje psihološkog stanja bilo sveobuhvatnije. Apriorne raspodele korišćene prilikom ocenjivanja hijerarhijskih modela u ovom radu mogu poslužiti kao dodatne informacije u istraživanjima gde se koriste hijerarhijski Bajesovi modeli izbora.

Ključne reči: teorija regulacionog fokusa, Bajesova statistika, neuromarketing, elektroencefalografija, cenovna osetljivost, modeliranje izbora, analiza združenih efekata

Naučna oblast: Ekonomske nauke

Uža naučna oblast: Statistika i matematika

JEL klasifikacija: C11, C50, C90, M30, D87

UDK broj: 366.1:658.8(043.3) i 366.1:519.226(043.3)

NEUROMARKETING APPROACH AND APPLICATION OF BAYESIAN MODELS IN THE ANALYSIS OF THE EFFECTS OF REGULATORY FOCUS ON CONSUMER DECISION-MAKING

ABSTRACT

One of the challenges tackled by this thesis is the analysis of the psychological (regulatory) states within the context of consumer decision making. Since the traditional methods of interviewee self-evaluation are not reliable in estimating regulatory states, a neuromarketing instrument electroencephalograph (EEG) is used in the thesis instead. The latter allows for simultaneous tracking of neural reactions while the interviewee is being treated with the experimental stimulus (music numbers with different tempo and energy) and elicitations of their preferences. In order to estimate consumer preferences hierarchical Bayes model of choice using neuromarketing metrics obtained from electroencephalograph was used. The model is estimated using Hamilton's Monte Carlo method with NUTS algorithm. This approach is chosen because it is the preferred approach for measuring *a posteriori* distributions of complex structure, such as the hierarchical models on small samples that are employed in this thesis. The model was coded using statistical programming language Stan. To elicit preferences, Bayes D-optimal experimental design was employed, using *a priori* information provided from the pre-research. The estimated model is used to analyse the effect of regulatory states on price elasticity for the student population of the University of Belgrade.

The main scientific goal of the empirical research was to explain the causal relationship between the background music and the regulatory state of the consumer, on one hand, and the consumer decision on which product to choose, on the other hand. In line with the theory of the regulatory fit the empirical research results show that promotional regulatory state lowers the price elasticity, while the preventative state increases the price elasticity. This result was obtained in case of both chronic and situational regulatory state. In measuring the chronic regulatory state, the empirical research findings are that the traditional metrics provided by BIS/BAS scale did not provide a significant predictor of the price sensitivity, unlike the neuromarketing metrics of frontal asymmetries provided by the EEG. Situational regulatory states were primed using music stimuli of varying level of energy (tempo), i.e. slower and faster versions of the song "Wake me up" originally performed by Avicii. It was shown that the higher energy (faster) music lead the consumers to the promotional regulatory state, as reflected by higher emotional excitement of the interviewees, and this lead to the lower price elasticity. Inversely, the slower musical stimulus primed the preventative state, where the interviewees were in a relaxed state (low emotional excitement), and that increased the price elasticity of demand. The resulting relationship between the regulatory state and the price elasticity was applicable only when the consumers were not involved in processing of the available information while deciding which product to choose. These findings are in line with the already existing research.

The method developed in this thesis, besides music, could be applied to other contextual factors that prime the regulatory states of consumers. It is also possible to use other neuromarketing instruments, like the ones following the eye movements, that could help to achieve a more encompassing measure of the psychological state. *A priori* distributions used to estimate the hierarchical models in this thesis may also be used as an additional information for other research that employs the hierarchical Bayes models of choice.

Keywords: regulatory focus theory, Bayesian statistics, neuromarketing, electroencephalography, price sensitivity, choice modeling, conjoint analysis

Scientific field: Economic sciences

Scientific subfield: Statistics and mathematics

JEL classification: C11, C50, C90, M30, D87

UDC number: 366.1:658.8(043.3) i 366.1:519.226(043.3)

SADRŽAJ

1	UVOD.....	5
2	TEORIJA REGULACIONOG FOKUSA	8
2.1	Ciljevi u funkciji potreba.....	8
2.2	Situacioni i hronični regulacioni fokus	9
2.3	Teorija regulacione usklađenosti.....	11
2.3.1	Mehanizmi delovanja regulacione usklađenosti	11
2.3.2	Načini uspostavljanja regulacione usklađenosti	12
2.3.3	Izvori nastanka regulacione usklađenosti	13
2.3.4	Ograničenja regulacione usklađenosti	14
3	KONCEPTUALNI OKVIR NEUROMARKETINGA	16
3.1	Neuromarketinški instrumenti.....	17
3.2	Elektroencefalografija	19
3.2.1	Neuralna aktivnost	19
3.2.2	Istraživačke tehnike zasnovane na EEG-u	24
4	BAJESOVA PARADIGMA.....	43
4.1	Bajesova formula.....	43
4.2	Bajesovo ocenjivanje parametara i predviđanje	45
4.2.1	Tačkaste i intervalne ocene parametara	46
4.2.2	Predviđanje zavisne promenljive	48
4.3	Poređenje modela	49
4.3.1	Bajesov faktor	49
4.3.2	Metod unakrsne validacije	50
4.4	Izbor apriorne raspodele	52
4.4.1	Regularizacija parametara.....	52
4.4.2	Neinformativne apriorne raspodele.....	55
4.4.3	Slabo informativne apriorne raspodele	55
5	MONTE KARLO METODE ZASNOVANE NA LANCIMA MARKOVA (MCMC).....	57
5.1	Monte Karlo metode.....	57
5.1.1	Metod simulacije inverznom transformacijom	58
5.1.2	Simulacija multivarijacione normalne raspodele	59
5.1.3	Monte Karlo integracija	60

5.2	Markovljevi lanci	61
5.3	Monte Karlo metode zasnovane na Markovljevim lancima.....	64
5.3.1	Metropolis-Hejstings algoritam (MH)	65
5.3.2	Gibsov metod	69
5.3.3	Hamiltonov Monte Karlo metod	71
6	EFIKASNOST EKSPERIMENTALNOG DIZAJNA I BAJESOV PRISTUP U EKONOMETRIJSKOM MODELIRANJU PREFERENCIJA	80
6.1	Otkrivene i iskazane preferencije	80
6.2	Uloga eksperimentalnog dizajna u istraživanju i njeni elementi.....	81
6.3	Statistička i merna efikasnost	81
6.4	Ekonometrijski Bajesovi modeli u kontekstu eksperimentalnog dizajna.....	82
6.4.1	Nehijerarhijski linearni model	83
6.4.2	Hijerarhijski linearni model	85
6.4.3	Nelinearni Bajesovi modeli višestrukog izbora	88
6.5	Eksperimentalni dizajn i njegova efikasnost	91
6.5.1	Klasičan pristup merenju efikasnosti eksperimentalnog dizajna	92
6.5.2	Bajesov pristup merenju efikasnosti eksperimentalnog dizajna	94
7	EMPIRIJSKO ISTRAŽIVANJE	96
7.1	Predistraživanje 1 – definisanje nivoa atributa.....	98
7.1.1	Metod	99
7.1.2	Rezultati i diskusija.....	100
7.2	Predistraživanje 2 – izbor muzičkih stimulusa.....	105
7.2.1	Metod	106
7.2.2	Rezultati i diskusija.....	107
7.3	Predistraživanje 3 – ocenjivanje hiperparametara modela.....	111
7.3.1	Metod	111
7.3.2	Rezultati i diskusija.....	113
7.4	Glavno istraživanje.....	114
7.4.1	Metod	114
7.4.2	Analiza efekata situacionog regulacionog fokusa na cenovnu osetljivost tražnje	120
7.4.3	Analiza efekata hroničnog regulacionog fokusa na cenovnu osetljivost tražnje	137
8	ZAKLJUČCI.....	152
	LITERATURA.....	154
	Spisak tabela	164
	Spisak slika	165

Biografija autora	167
Izjava o autorstvu	168
Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada	169
Izjava o korišćenju	170

Spisak korišćenih skraćenica

AVC matrica	Asimptotska matrica varijanske i kovarijanse (engl. <i>asymptotic variance-covariance matrix</i>)
AZE	Analiza združenih efekata (engl. <i>Conjoint analysis</i>)
BAS	Sistem bihejvioralne aktivacije (engl. <i>Behavioral Approach System</i>)
BIS	Sistem bihejvioralne inhibicije (engl. <i>Behavioral Inhibition System</i>)
CAPI	Kompjuterski podržano anketiranje licem u lice
CEA algoritam	Algoritam promena koordinata (engl. <i>coordinate exchange algorithm</i>)
CGT	Centralna granična teorema
CI	Kredibilni interval (engl. <i>credible intervals</i>)
EEG	Elektroencefalograf
ELPD	Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela (engl. <i>expected log predictive density</i>)
EOG	Elektrookulograf
EP	Emocionalna pobuđenost
ERP	Događajem evocirani potencijali (engl. <i>event-related potentials</i>)
FA	Frontalna asimetrija
fEMG	Facijalna elektromiografija
FFT	Brza Furijeova transformacija (engl. <i>Fast Fourier transform</i>)
fMRI	Funkcionalna magnetna rezonanca
GB	Gigabajt
HLM	Hijerarhijski linearni model
HMC metod	Hamiltonov Monte Karlo metod
HSM	Mera poluuzoračkog modusa (engl. <i>half sample mode estimator</i>)
INAG	Interval najveće aposteriorne gustine
LKJ raspodela	Levandovski-Kurovicka-Džo (engl. <i>Lewandowski-Kurowicka-Joe</i>) raspodela
LPD	Log aposteriorne prediktivne raspodele (engl. <i>log pointwise predictive distribution</i>)
MAP	Modus aposteriorne raspodele (engl. <i>maximum a posteriori estimate</i>)
MCMC	Monte Karlo metode zasnovane na lancima Markova (engl. <i>Markov chain Monte Carlo</i>)
MEG	Megnetoencefalografija
MH metod	Metropolis-Hejstings metod
MK metod	Monte Karlo metod
ML	Markovljevi lanci
MLE	Ocena maksimalne verodostojnosti (engl. <i>maximum likelihood estimator</i>)
NUTS algoritam	Algoritam bez polukružnog skretanja (engl. <i>No-U-Turn Sampler</i>)
PRNG	Generator pseudoslučajnih brojeva (engl. <i>pseudorandom number generator</i>)
PSIS-LOO	Pareto uglačana metoda jednočlanog izostavljanja (engl. <i>Pareto smoothed importance sampling leave-one-out</i>)
RAM memorija	Memorija sa slučajnim pristupom (engl. <i>random-access memory</i>)
TRF	Teorija regulacionog fokusa

1 UVOD

Pojava neuromarketinga je značajno promenila pristup i unapredila kvalitet marketinških istraživanja koja se odnose na izbor i ponašanje potrošača. Sa pojavom neuronaučnih instrumenata istraživačima je konačno omogućeno da na osnovu analize moždane aktivnosti potrošača dobiju nepristrasne informacije o njihovim reakcijama. Time se rešava najveći problem sa kojim se suočavaju tradicionalni marketinški istraživači, a to je nemogućnost ispitanika, ili nedostatak njegove volje da adekvatno izveštava o uticaju određenih stimulusa kao što su, na primer, tipovi reklamnih poruka ili dizajn proizvoda. Tradicionalne metode u istraživanju tržišta pretpostavljaju da su pojedinci u stanju da svesno opišu sopstvene kognitivne i emocionalne procese koji imaju uporište u samoj podsvesti. Međutim, mnogobrojni faktori utiču na ispitanike da pristrasno govore o svojim osećanjima i mislima (Morin, 2011). Neuromarketinške tehnike omogućavaju objektivnije merenje osnovnih psiholoških procesa odgovornih za ponašanje pojedinca. Podaci dobijeni ovim putem nisu pristrasni, jer ispitanici nemaju svesno značajan uticaj na merenja dobijena korišćenjem neuromarketinških instrumenata. Osim toga, kod samoocenjivanja, kao alternativne tehnike, upitno je da li ispitanici imaju volju ili sposobnost da ispravno iskažu svoje stavove. Na primer, percepcija ispitanika o društveno prihvatljivom ponašanju može da ga podstakne da kaže kako mu prisustvo baleta u reklamnom spotu uopšte ne privlači pažnju, dok, zapravo, uživa u njemu. Dodatna prednost neuromarketinških tehnika je mogućnost simultanog praćenja neuralnih reakcija tokom tretiranja ispitanika eksperimentalnim stimulusom. Ovo je značajno jer otklanja problem pristrasnosti tokom pružanja odgovora (engl. *response bias*) usled vremenskog nepodudaranja psihološke reakcije na stimulus i pružanja odgovora ispitanika (Solnais et al., 2013).

Negativna strana neuromarketinških istraživanja je ta što se takva istraživanja najčešće sprovode na malim uzorcima, tipično od 15 do 50 ispitanika (Biercewicz et al., 2020; Ohme et al., 2010; Salminen et al., 2009; B. Schmidt & Hanslmayr, 2009). Razlog tome je vremenski zahtevna logistika sprovođenja istraživanja. U slučaju elektroencefalografskih (EEG) istraživanja, samo instalacija EEG uređaja može trajati i do 60 minuta po ispitaniku. Stoga se nameće pitanje eksterne validnosti takvih istraživanja i mogućnost sprovođenja statističkih analiza na manjim uzorcima. Kao logično rešenje ovog problema nameće se Bajesova paradigma, zbog imanentne mogućnosti uvođenja apriornih informacija kako u eksperimentalni dizajn, tako i u statističku analizu. Bajesov pristup omogućava da se u značajnoj meri nadomeste nedostaci manjeg uzorka.

Psihološko stanje potrošača bitno opredeljuje njegove preferencije u datom trenutku. Jedan od pristupa definisanju psiholoških stanja pojedinca je teorija regulacionog fokusa. Regulacioni fokus osobe je psihološko stanje gde ona pridaje veću važnost minimalnim ili maksimalnim ciljevima. Stepenn aktivacije minimalnih, odnosno maksimalnih ciljeva će zavistiti od predispozicije osobe, kao i od situacionih faktora. Razlikujemo dva fokusa regulacije: promociioni i prevencioni. Promociioni fokus karakteriše naglašena potreba za samounapređenjem, kao i senzitivnost pojedinca na pozitivne stimulse. Sa druge strane, prevencioni fokus karakteriše naglašena potreba za sigurnošću i odgovornošću, kao i senzitivnost pojedinca na negativne stimulse (Forster et al., 1998; Higgins, 1998; Higgins et al., 1997). Regulacioni fokus je neraskidivo vezan sa konceptom primovanja (engl. *priming*) kao glavne sile koja utiče na aktivaciju promociionog i prevencionog stanja kod čoveka. Primovanje možemo da definišemo kao difuznu aktivaciju mreže asocijacija u memoriji korišćenjem stimulusa kojem je izložen pojedinac. Samo razmišljanje o nekom konceptu aktivira niz srodnih asocijacija u našoj memoriji, koje dalje aktiviraju niz drugih asocijacija. Sledi da različiti stimulusi (ideje, koncepti, muzičke numere) mogu da primuju promociioni ili prevencioni fokus. To se reflektuje kroz mentalno aktiviranje mrežnih asocijacija u skladu sa zadovoljenjem potreba sigurnosti (prevencioni fokus) ili samounapređenja (promociioni fokus). Prema teoriji regulacione usklađenosti individue lakše obrađuju stimulse koji su u skladu sa njihovim

regulacionim stanjem. Drugim rečima, svi stimuli koji su u skladu sa zadovoljenjem potrebe za samounapređenjem biće lakše primećeni i obrađeni kod osoba u promocijskom fokusu. Na isti način svi stimuli koji su u skladu sa zadovoljenjem potreba sigurnosti i odgovornosti (što se reflektuje kroz veću obazrivost osobe) biće lakše primećeni i obrađeni kod osoba u prevencionom fokusu. Postoji značajna povezanost između regulacionog stanja, sa jedne strane, i tipa i intenziteta emocija, sa druge strane. Empirijski je potvrđeno u velikom broju radova da osobe u promocijskom fokusu imaju veću osetljivost duž dimenzije ushićenost-odbačenost, a osobe u prevencionom fokusu duž dimenzije uznemirenost-smirenost (Aaker & Lee, 2001; Baas et al., 2008; Higgins et al., 1997). Ovaj mehanizam delovanja će biti iskorišćen u empirijskom delu ovog rada za potrebe merenja regulacionog stanja.

Predmet istraživanja je analiza efekata regulacionog stanja potrošača na odlučivanje prilikom kupovine proizvoda. Muzika koja se čuje u pozadini ("pozadinska muzika") utiče na psihološko stanje potrošača, koje se razlikuje u zavisnosti od tempa i energičnosti konkretne muzičke numere kojoj je potrošač izložen (Caldwell & Hibbert, 1999; Chebat et al., 2001; Milliman, 1982). Analiza efekata muzike koja se čuje u pozadini na psihološko stanje ispitanika biće merena putem neinvazivnog neuronaučnog instrumenta, elektroencefalograma. Veza muzike i regulacionog stanja je empirijski potvrđena u više radova (Das et al., 2020; Sunaga et al., 2020). Fokus ovog istraživanja je da se, kroz pažljivo kalibriran eksperimentalni dizajn, mere efekti stimulusa na donošenje odluka ispitanika, za različita regulaciona stanja. Analiza interakcije regulacionog stanja potrošača i marketinških stimulusa, kao što je cena, omogućava bolje razumevanje načina na koji potrošači donose odluke tokom kupovine, kao i načina na koji kontekst odlučivanja, poput muzike, kreira preferencije kod potrošača. Takođe, istražen je i uticaj hroničnog regulacionog stanja na ponašanje potrošača.

Za prikupljanje podataka je korišćen prigodan uzorak studenata Univerziteta u Beogradu. Budući da su hipoteze testirane kroz korišćenje eksperimentalnog dizajna, u empirijskom delu, ispitanici su nasumično podeljeni u eksperimentalne grupe. Onlajn anketni metod je korišćen u fazi predistraživanja, kako bi bili prikupljeni podaci neophodni za glavno istraživanje. Ovim metodom je obezbeđen uzorak za ocenjivanje hiperparametara Bajesovog modela višestrukog izbora neophodnih za glavni eksperiment. Glavno istraživanje je sprovedeno metodom ličnog intervjuisanja uz pomoć kompjutera (engl. *computer aided personal interviewing*, CAPI). Informacije koje se odnose na hronično regulaciono stanje i potrošačke preferencije su prikupljene putem upitnika, dok su psihografski podaci dobijeni putem EEG uređaja. U fazi predistraživanja za potrebe ocenjivanja hiperparametara modela se koristiti frakcioni faktorijalni dizajn sa nultim apriornim vrednostima parametara. Hiperparametri su neophodni za optimizaciju eksperimentalnog dizajna glavnog eksperimenta, kao i za ocenjivanje konačnog ekonometrijskog Bajesovog modela. U finalnoj fazi istraživanja je korišćen Bajesov eksperimentalni dizajn gde je optimalnost postignuta minimiziranjem D-greške. Na ovaj način je obezbeđeno ocenjivanje parametara konačnog modela uz minimalne greške ocena. D-optimalan dizajn značajno doprinosi validnosti rezultata istraživanja, imajući u vidu da se eksperiment vrši na manjem uzorku, kao i da zbog kognitivnih napora ispitanika nije uputno postavljanje većeg broja pitanja za ocenjivanje parametara. Deskriptivne i komparativne analize su sprovedene korišćenjem programskog jezika R. Za potrebe ekonometrijske analize korišćeni su hijerarhijski Bajesovi modeli izbora. Za ocenjivanje preferencija ispitanika primenjen je koncept modela slučajne korisnosti. Heterogena priroda preferencija pojedinačnih ispitanika je uključena korišćenjem hijerarhijske strukture logit modela višestrukog izbora. Psihografski podaci dobijeni EEG uređajem uzimaju u obzir psihološko stanje ispitanika indukovano eksperimentalnim stimulusima, odnosno muzičkim numerama. Da bi psihografski podaci bili uključeni u ekonometrijski model potrebno je obezbediti strukturu modela koja uzima u obzir interakciju regulacionog stanja ispitanika i pojedinačnih korisnosti atributa proizvoda u istraživanju. Ovakav model je programiran korišćenjem programskog jezika STAN. Na kraju je sprovedena analiza robusnosti u cilju

sagledavanja stabilnosti rezultata dobijenih korišćenjem različitih apriornih raspodela parametara modela.

Osnovni naučni cilj istraživanja je da objasni uzročno-posledičnu vezu pozadinske muzike i regulacionog stanja potrošača, sa jedne strane, i odlučivanja potrošača o izboru proizvoda, sa druge strane. Muzičku numeru je moguće posmatrati iz više dimenzija, ali je za potrebe istraživanja od posebne važnosti njen tempo i energičnost (Das et al., 2020; L. A. Schmidt & Trainor, 2001). Dobijeni rezultati doktorske disertacije bi trebalo da objasne odnos kontekstualnih varijabli (tempo i energičnost muzičke numere) i regulacionog stanja potrošača, kao i efekte interakcije ovih faktora na ponašanje potrošača. Na primer, na koji način i u kojoj meri muzika u prodavnici može kreirati preferencije kupaca. Merenje psihološkog stanja u kontekstu odlučivanja potrošača je jedan od izazova ove disertacije, budući da tradicionalne metode samoocenjivanja ispitanika nisu pouzdane. Tradicionalne metode u istraživanju tržišta pretpostavljaju da su pojedinci u stanju da svesno opišu sopstvene kognitivne i emocionalne procese za koje znamo da imaju uporište u samoj podsvesti. Primena neuromarketinških tehnika omogućava simultano praćenje neuralnih reakcija tokom tretiranja ispitanika eksperimentalnim stimulusom (muzičke numere različitog tempa i energičnosti) i elicitanje njihovih preferencija. Na ovaj način se značajno smanjuje pristrasnost dobijenih rezultata. Za ocenjivanje hijerarhijskog Bajesovog modela primenjen je Hamiltonov Monte Karlo metod korišćenjem NUTS algoritma (engl. *No-U-Turn Sampler*). Ovaj pristup dobija sve veću popularnost zbog sposobnosti da oceni aposteriorne raspodele kompleksne strukture, kao što je to slučaj kod hijerarhijskih modela sa malim uzorcima. Predložen pristup u modeliranju uzima u obzir heterogene preferencije ispitanika kroz hijerarhijsku strukturu modela. Pored toga, u model je uključen uticaj kontekstualnih neurovarijabli, merenih EEG uređajem, koje odražavaju hronično i situaciono regulaciono stanje potrošača, kao i stepen involviranosti potrošača tokom biranja proizvoda. Iako je istraživanje okrenuto ka merenju efekata muzike na ponašanje potrošača, nije teško zamisliti druge kontekstualne varijable u modelu koje utiču na psihološko regulaciono stanje pojedinca (npr. reklame, mirisi, pozadina u onlajn prodavnici). Rezultujući metod može pronaći svoju primenu, između ostalog, u kreiranju cenovnih politika proizvoda, optimizacije marketinškog miksa gde se uzima u obzir regulaciono stanje potrošača i ocenjivanju cenovne elastičnosti tražnje u zavisnosti od različitih kontekstualnih faktora.

Struktura doktorata je koncipirana tako da je najpre (u drugom poglavlju) objašnjen teorijski koncept regulacionog fokusa, budući da iz ove teorije proizlaze hipoteze koje se ispituju. Nakon toga, u trećem poglavlju, sledi uvod u oblast neuromarketinških istraživanja sa posebnim osvrtom na primenu elektroencefalograma u naučnim i nenaučnim istraživanjima. Elektroencefalograf će biti korišćen za potrebe merenja psiholoških stanja ispitanika u empirijskom istraživanju koje je sprovedeno za potrebe ovog rada. U četvrtom poglavlju sledi predstavljanje Bajesovog metoda koji ima značajnu ulogu u integrisanju regulacionog fokusa i elektroencefalograma u cilju ocenjivanja preferencija potrošača. Bajesov metod omogućava rad sa malim uzorcima koji se tipično koriste u neuromarketinškim istraživanjima. Bajesov metod omogućava inkorporiranje apriornih informacija u eksperimentalni dizajn i ekonometrijsko modeliranje, kao što će biti objašnjeno u ovom poglavlju.

U petom poglavlju je predstavljen koncept Monte Karlo metoda zasnovanim na lancima Markova. U šestom poglavlju se govori o efikasnosti eksperimentalnog dizajna, kao i Bajesovom pristupu u ekonometrijskom modeliranju preferencija potrošača. Pošto su u prethodnim poglavljima izloženi teorijski koncepti koji će biti korišćeni za analizu rezultata empirijskog istraživanja, poslednje, sedmo poglavlje predstavlja rečeno empirijsko istraživanje. Ovde je objašnjeno kako je sprovedeno samo istraživanje, navedene su hipoteze koje će biti testirane uz primenu hijerarhijskog Bajesovog modela i korišćenje neuromarketinškog instrumenta, elektroencefalograma.

2 TEORIJA REGULACIONOG FOKUSA

Teorija regulacionog fokusa (TRF) konceptualizuje odnos pojedinca prema ciljevima koje teži da zadovolji. Teoriju je uveo (Higgins, 1998) koji je objasnio na koji način pojedinac reguliše svoje emocije, motivaciju i ponašanje prilikom ispunjavanja svojih ciljeva. TRF je nusprodukt koncepta *samodiskrepance* čije okvire je, takođe, definisao (Higgins, 1987). Pojedinac ima svest o internim idealima kao maksimalnim ciljevima koje teži da ostvari (aspiracije, želje, nadanja), a sa druge strane svest o minimalnim ciljevima (dužnosti, odgovornosti) u čijem ostvarivanju ne sme da podbaci. Prema teoriji samodiskrepance pojedinac teži da smanji odstupanje između “trenutnog” stanja i maksimalnih/minimalnih ciljeva. Zadovoljavanjem maksimalnih ciljeva pojedinac biva nagrađen pozitivnim emocijama kao što su sreća, ushićenje, radost, dok neispunjavanje ovih ciljeva vodi negativnim emocijama poput razočarenja. Na primer, pojedinac kupovinom poklona za godišnjicu braka ima za cilj da usreći svog partnera. Ukoliko uspe u tome, nagrada će biti osećaj ushićenja, dok će u suprotnom pojedinac biti razočaran. Ispunjavanjem minimalnih ciljeva pojedinac oseća olakšanje i smirenost, dok neispunjavanje ovih ciljeva vodi ka stresu, anksioznom osećaju i nesigurnosti (Higgins et al., 1997). Na primer, odlazak na sistematski pregled ima za cilj da pojedinac proveri da li je sve u redu sa njegovim zdravstvenim stanjem. Ako je izveštaj pozitivan, pojedinac će osećati olakšanje i smirenost, dok bi u suprotnom mogao osećati nelagodu i strah. Međutim, intenzitet emocionalne reakcije prilikom zadovoljavanja ciljeva je u funkciji *regulacionog fokusa*, odnosno regulacionog stanja u kom se osoba nalazi u tom trenutku. Regulacioni fokus pojedinca je psihološko (ili motivaciono) stanje gde pojedinac pridaje veću važnost minimalnim ili maksimalnim ciljevima. Step en aktivacije minimalnih/maksimalnih ciljeva će zavisi ti od hronične predispozicije pojedinca i/ili situacionih faktora. Razlikujemo dva regulaciona fokusa, promocioni i prevencioni. Prema teoriji regulacionog fokusa osobe sa promoci onim fokusom će regulisati ponašanje *prilaženjem* ka ispunjavanju maksimalnih ciljeva, dok će one sa prevencionim fokusom regulisati svoje ponašanje *izbegavanjem* neispunjavanja minimalnih ciljeva. Promoci on i fokus karakteriše pojačana senzitivnost pojedinca na prisustvo/odsustvo pozitivnih događaja. S druge strane, prevencioni fokus karakteriše pojačana senzitivnost pojedinca na prisustvo/odsustvo negativnih događaja (Čolić & Prica, 2022b; Forster et al., 1998; Higgins, 1998; Higgins et al., 1997). Sledi da isti cilj može biti povezan sa različitim emocionalnim reakcijama u zavisnosti od toga da li se osoba fokusira na pozitivne ili negativne strane krajnjeg ishoda. Na primer, fudbaler u promoci onom fokusu će pobedu na utakmici videti kao uspeh (osećaj radosti u slučaju uspeha, razočarenja u slučaju neuspeha), dok će fudbaler u prevencionom fokusu pobedu videti kao obavezu (osećaj olakšanja u slučaju uspeha, nemira u slučaju neuspeha). Sledi opis ciljeva u funkciji potreba kao glavnih pokretača u formiranju stavova i ponašanja pojedinca. Nakon toga biće definisan regulacioni fokus kao psihološko stanje pod uticajem hroničnog i situacionog stanja. Na kraju glave biće opisan efekat regulacionog usklađivanja koji nastaje kada postoji kompatibilnost regulacionog fokusa i načina ostvarivanja ciljeva sa akcentom na determinante i posledice u kontekstu motivacije i moći ubeđivanja.

2.1 Ciljevi u funkciji potreba

Glavni pokretač svakog čoveka u ispunjavanju njegovih kratkoročnih i dugoročnih ciljeve su njegove potrebe. Teorija regulacionog fokusa polazi od toga da čovek ima dva tipa osnovnih potreba: potrebu za sigurnošću (engl. *security*) i potrebu za sopstvenim unapređenjem (engl. *nurturance*). Uticajna teorija u svetu društvenih nauka je Maslovljeva hijerarhija potreba (Maslow, 1943) koja je u skladu sa TRF.

Maslovljeva hijerarhija potreba se najčešće opisuje kao piramida potreba gde se najosnovnije potrebe nalaze na dnu piramide, dok se potreba za samoostvarenjem i transcendencijom nalazi na vrhu. Pojedinač će težiti da prvo zadovolji potrebe na dnu piramide pre nego što primat da “višim potrebama”. Potrebe na vrhu piramide (samoostvarenje i transcendencija) su takozvane potrebe rasta koje odgovaraju potrebama unapređenja kod promocijskog regulacionog fokusa. To su potrebe gde osoba teži da ostvari svoj pun potencijal. Ispod ovih potreba se nalaze takozvane potrebe nedostatka (fiziološke potrebe, potreba sigurnosti, potreba za pripadnošću, potreba za uvažavanjem) koje odgovaraju prevencionom regulacionom fokusu.

Ljudska motivacija ka izbegavanju pretnji, kako bi se osigurala sigurnost je imanentna prevencionom fokusu, dok je motivacija samounapređenja dominantnija kod promocijskog fokusa. Potrebe za sigurnošću (bezbednošću) i unapređenjem su usađene u ljudski organizam od samog rođenja kako bi osigurale njegov opstanak. Međutim, ljudi izgrađuju mehanizam prepoznavanja pretnji i prilika u okruženju od ranih dana. Staratelji su jedan od glavnih faktora koji oblikuje naše poimanje okruženja i utiče na razvijanje našeg regulacionog fokusa. Da li će neka osoba imati dominantno izražen promocijski ili prevencioni fokus zavisiće dobrim delom od načina na koji je vaspitana (Brković, 2009; Keller, 2008). Ukoliko staratelji primenjuju negujući pristup vaspitanja onda pojedinac teži da stvari oko sebe posmatra kao prilike za unapređenje sebe. Takav pristup vaspitanja podrazumeva da staratelj nagrađuje/kažnjava postupke deteta pružanjem/uskraćivanjem nagrade (npr. zagrljaj ili poljubac). Sledstveno, pojedinac tako razvija senzitivnost na dobitke, dok manji akcenat stavlja na posledice svojih dela. Sa druge strane, staratelj može da zauzme strožiji pristup tako što će sistem nagrađivanja/kažnjavanja svoditi na kaznene mere (npr. podizanjem tona) u slučaju loših postupaka deteta, dok će dobro ponašanje biti nagrađivano odsustvom kaznenih mera. Dakle, potrebe za sigurnošću i unapređenjem su urođene kod svakog pojedinca, ali vaspitanje i interakcija sa okruženjem će jednu potrebu činiti dominantnijom od druge. Dosta radova govori o kulturološkim razlikama u pogledu dominantnih potreba koje pojedinac teži da zadovolji u zavisnosti iz koje zemlje potiče. Na primer, istočnjačke kulture imaju dominantniju potrebu za sigurnošću, dok zapadnjačke teže ka zadovoljenju potrebe za samounapređenjem (Aaker & Lee, 2001; Gardner et al., 1999).

2.2 Situacioni i hronični regulacioni fokus

Pojedinac može imati predispoziciju ka jednom od dva samoregulaciona stanja (promocijsko ili prevenciono), a interakcija sa najbližim okruženjem (porodica, društvo) će imati bitnu ulogu u formiranju hroničnog regulacionog fokusa. Osobe sa hroničnim promocijskim fokusom više zanimaju aktivnosti koje imaju veze sa unapređenjem sebe. Čak i ako neka situacija može delovati kao pretnja za većinu ljudi, osoba sa jakim promocijskim fokusom će tu istu situaciju videti kao priliku. Osobe sa hroničnim prevencionim fokusom obazrivo pristupaju u većini situacija kako bi osigurale sigurnost. Takve osobe su odgovornije nego osobe u promocijskom fokusu. Veliki broj radova potvrđuje postojanje i ulogu hroničnog regulacionog fokusa u ponašanju pojedinca (Aaker & Lee, 2001; Chernev, 2006; Haws et al., 2010). Ipak, predispozicija ka promocijskom ili prevencionom stanju nije konstantna veličina već varira tokom života (Lockwood et al., 2005), ali i u zavisnosti od trenutnog konteksta u kom se nalazi pojedinac. Situacioni regulacioni fokus je poslednjih godina privukao dosta pažnje u društvenim naukama kao, na primer, u oblasti marketinških komunikacija (Kareklas et al., 2012; Lee & Aaker, 2004; Rothman et al., 2013), ponašanja potrošača (Avnet & Higgins, 2006; Baek & Reid, 2013) i teorije odlučivanja (Förster et al., 2003).

Situacioni regulacioni fokus je neraskidivo povezan sa konceptom *primovanja* kao glavne sile koja utiče na dinamiku kretanja promociionog i prevencionog stanja kod čoveka. Primovanje možemo da definišemo kao difuznu aktivaciju mreže asocijacija u memoriji, a koje se aktiviraju stimulusom kojem je osoba izložena. Samo razmišljanje o nekom konceptu aktivira niz srodnih asocijacija u našoj memoriji koje dalje aktiviraju niz drugih asocijacija. Veći deo ovih aktivacija se odvija podsvesno, dok samo mali deo dopire do naše svesti. Jedan od efekata primovanja je da ćemo brže prepoznati ili obraditi srodne koncepte i emocije u odnosu na stimulus. Na primer, ukoliko gledamo TV u sobi sa čokoladom na stolu, pre ćemo obratiti pažnju na reklamu za čokoladni sladoled koja se emituje, nego da čokolada nije prisutna u našem vidokrugu. Razlog je što iskustveno učimo da kad god imamo kontakt sa čokoladnim sladoledom sva je šansa da će i čokolada biti prisutna pa će jedno asociirati na drugo, a da pritom ovaj mehanizam asocijacija ne mora da se odvija kroz svesno stanje pojedinca. U zavisnosti od prirode asocijacija o kojima govorimo razlikujemo različite tipove primovanja. Neki od osnovnih tipova primovanja su: *perceptivno*, *konceptualno*, *afektivno*. Bitno je istaći da različiti tipovi primovanja ne isključuju jedno drugo. Primer sa čokoladom bi bio *konceptualno primovanje*. *Perceptivno primovanje* aktivira vizuelno slične koncepte iz naše memorije. Na primer, ako prilikom kupovine u marketu primetimo kupca koji nosi upadljivo žutu košulju, pre ćemo obratiti pažnju na banane u odeljku sa voćem. *Afektivno primovanje* se odnosi na asocijacije koje su emocionalno kongruentne. Na primer, bubašvaba se tipično vezuje za negativne emocije tako da bi izloženost pojedinca ovom stimulusu aktiviralo koncepte sa sličnom emocionalnom vrednošću (Fazio, 2001). Aktivirana mreža asocijacija dovodi do toga da će pojedinac pre primetiti da je konobar u kafiću neobrijan ili da čaša nije lepo oprana ukoliko je naleteo na bubašvabu pre kafića i ako ima izraženu averziju prema tom insektu.

Situacioni regulacioni fokus zavisi od stimulusa koji nas svakodnevno u svakom trenutku okružuju. Dakle, različiti konteksti, ideje, koncepti primuju promociionu ili regulacionu fokus u većoj ili manjoj meri (Čolić & Prica, 2022b). Ukoliko je neki stimulus asocijativno vezan za ciljeve koji se odnose na unapređenje pojedinca onda će taj stimulus indukovati promociionu fokus. Slično, ako stimulus asociira na sigurnost osobe, onda on indukuje preventivni fokus. Na primer, udar groma može kod osobe da naglasi potrebu za sigurnošću, što će se manifestovati kroz anksiozno stanje pojedinca i obazrivije ponašanje, odnosno preventivni fokus. Kupljen loto tiket, sa druge strane, će verovatno kod većine ljudi izazvati promociiono stanje budući da pojačava potrebu samounapređenja kroz maštanje u slučaju dobitka. Pojačana potreba samounapređenja će se manifestovati kroz pozitivne emocije uzbuđenja i nadanja. Dakle, postoji značajna povezanost između regulacionog stanja, sa jedne strane, i tipa i intenziteta emocija, sa druge strane. Promociionu i preventivnu fokus osobe se odražava na senzitivnost različitih tipova emocija koju ta osoba ispoljava prema pozitivnom, odnosno negativnom ishodu konkretne aktivnosti. Kao što je u uvodnom poglavlju već rečeno, empirijski je potvrđeno da osobe u promociionom fokusu imaju veću osetljivost duž dimenzije ushićenost-odbačenost, a osobe u preventivnom fokusu duž dimenzije uznemirenost-smirenost (Aaker & Lee, 2001; Baas et al., 2008; Higgins et al., 1997).

U svom radu (Rothman et al., 2013) su tražili od učesnika da zapišu svoje misli i osećanja kada razmišljaju o određenim aktivnostima. Rezultati su pokazali da kada su ispitanici razmišljali o uključivanju u aktivnosti koje se odnose na očuvanje zdravlja (npr. treniranje) onda su se dominantno javljale misli i osećanja koja su konzistentna sa promociionim fokusom. S druge strane, kada su ispitanici razmišljali o uključivanju u aktivnosti čiji je cilj detektovanje zdravstvenih problema (npr. test na holesterol) onda su dominirale misli i emocije koje su u skladu sa preventivnim fokusom. (Shah et al., 1998) su kod ispitanika primovali regulaciona stanja manipulacijom različitih modaliteta podsticaja u rešavanju anagramskih zadataka. Kod grupe gde je trebalo izazvati promociiono stanje učesnicima je rečeno da će svi biti plaćeni sa po 4 američka dolara za učestvovanje u istraživanju uz mogućnost zarade

dodatnog dolara ukoliko zadatak obave uspešno. Na taj način učesnici su bili senzitivizirani na prisustvo dobitka. Drugoj grupi ispitanika je indukovano preventivno stanje tako što im je rečeno da će biti plaćeni 5 dolara za učestvovanje u istraživanju, ali uz mogućnost da izgube jedan dolar ukoliko budu neuspešni u anagramskom zadatku. Na taj način učesnici su bili senzitivizirani na prisustvo gubitka.

Nekoliko radova sugeriše da situacioni regulacioni fokus može da pojača ili inhibira hronični fokus. Na primer, (Kark & Van Dijk, 2007) daju teorijski okvir koji ukazuje na to da će konzistentnost između situacionog regulacionog fokusa (stanja) radnika, izazvanog stilom rukovođenja od strane menadžera, i hroničnog regulacionog stanja radnika uticati povoljno na performanse preduzeća. Shah et al. (1998) takođe potvrđuju u svom radu sinergijski efekat preklapanja situacionog i hroničnog fokusa kod motivacije ispitanika prilikom rešavanja anagramskih zadataka. (Latimer et al., 2008) su u svom istraživanju analizirali poruke koje podstiču fizičku aktivnost. Pokazalo se da su poruke sa naglašenim dobicima pojačavale promocijsko stanje kod ispitanika (i inhibirale preventivno), dok su poruke sa naglašenim gubicima pojačavale preventivno stanje (i inhibirale promocijsko). U slučajevima kada postoji kompatibilnost između situacionog fokusa poruke i hroničnog regulacionog stanja osobe koja je to poruci bila izložena, takva poruka je značajno efektivnija nego kad kompatibilnost nije prisutna.

2.3 Teorija regulacione usklađenosti

Regulaciona usklađenost ili regulacioni „fit“ (engl. *regulatory fit*) predstavlja pojačanu motivaciju ili moć ubeđivanja kod pojedinca kada postoji kompatibilnost regulacionog fokusa i načina ostvarivanja cilja. Efekti regulacione usklađenosti se ogledaju u pojačanoj reakciji pojedinca na stimulus, kao i lakšoj obradi stimulusa koji je u skladu sa regulacionim stanjem osobe. Na primer, jedno istraživanje je pokazalo da su ispitanici voljni da plate više za proizvod kada postoji usklađenost između regulacionog fokusa i tipa strategije korišćene prilikom izbora proizvoda (Avnet & Higgins, 2006). Jednoj grupi je bilo rečeno da koriste argumente, a drugoj subjektivna osećanja prilikom izbora između dva korektora (korektori ili „belilo“ koji se koriste da bi se napisani tekst „izbelio“) na osnovu datog opisa proizvoda. Proizvodi su bili opisani tako da svi ispitanici izaberu isti korektor (eksperiment je svesno napravljen sa jednim dominantnim proizvodom i jednim koji je inferioran). Grupi koja je u eksperimentu u procesu izbora koristila osećanja je rečeno da oceni intenzitet 10 emocija koje dati proizvod izaziva kod njih, dok je u grupi koja je koristila argumente prilikom izbora samo rečeno da ocene atraktivnost proizvoda na osnovu datih opisa. Nakon napravljenog izbora, od ispitanika je zatraženo da daju svoju procenu koliko bi platili za izabrani korektor da ga vide u radnji. Ispitanici koji su koristili argumente prilikom izbora su bili spremni da plate značajno veći iznos za izabrani korektor kad su bili u preventivnom fokusu nego u promotivnom. Nasuprot tome, ispitanici koji su koristili osećanja prilikom izbora su bili spremni da plate više za birani korektor u promocijskom fokusu nego u preventivnom fokusu. To je, takođe, bila validacija prethodnog dobijenih rezultata drugog Avnetovog rada prema kojem su ljudi u promocijskom fokusu skloni rasuđivanju na osnovu osećanja, a u preventivnom na osnovu argumenata (Pham & Avnet, 2004).

2.3.1 Mehanizmi delovanja regulacione usklađenosti

Postavlja se pitanje na koji način regulaciona usklađenost dovodi do intenziviranja (pojačavanja) reakcije na stimulus. U stručnoj literaturi, predloženi mehanizmi delovanja koji dovode do ove uzročnosti su veća fluentnost (lakoća) u obradi (engl. *processing fluency*) stimulusa i veća mentalna involviranost (engl. *engagement*) pojedinca. Pri tome, ovi mehanizmi nisu nezavisni, već mogu i da pojačavaju jedan drugog (Lee & Higgins, 2009).

Fluentnost obrade informacija se odnosi na lakoću sa kojom pojedinac reprodukuje znanje iz svoje memorije. Koji će koncepti biti mentalno pristupačniji nekoj osobi zavisice od njenog regulacionog fokusa, kako hroničnog tako i situacionog. Na primer, prevencioni fokus dovodi osobu u stanje veće obazrivosti, pa samim tim sve znanje koje može poslužiti u svrhe zadovoljavanja potrebe sigurnosti će biti mnogo pristupačnije takvoj osobi. Uplašen čovek će nepoznatog prolaznika, koji mu prilazi na ulici, pre identifikovati kao pretnju nego kao prolaznika koji možda hoće samo da ga pita koliko je sati. Bolji pristup konceptima koji se nalaze u raspoloživoj memoriji pojedinca znači da će ti koncepti lakše isplivati u svesno stanje. Odnosno, osoba će lakše obraditi poruke koje su u skladu sa njenim regulacionim fokusom (Lee & Aaker, 2004). Takođe, govor tela sagovornika ili predavača će biti više ili manje prijemčiv u zavisnosti od regulacionog stanja u kome se osoba nalazi (Cesario & Higgins, 2008). Isto tako i rečnik koji osoba koristi će biti drugačiji u zavisnosti od toga da li je ta osoba u promociionom ili prevencionom fokusu (Semin et al., 2005).

Drugi mehanizam delovanja regulacione usklađenosti je veća involviranost pojedinca. Regulaciona stanja aktiviraju različite ciljeve kod pojedinca u skladu sa osnovnim regulacionim potrebama, samounapređenja i sigurnosti. Stimulusi koji su u skladu sa trenutnim regulacionim potrebama pojedinca će sledstveno imati veću važnost pa će i involviranost pojedinca biti veća. Tako će poruke koje naglašavaju koristi u skladu sa potrebama samounapređenja biti relevantnije pojedincima u promociionom fokusu, dok će poruke koje naglašavaju koristi u skladu sa potrebama sigurnosti biti relevantnije pojedincima u prevencionom fokusu. Posledično, u uslovima regulacione usklađenosti, a samim tim i veće involviranosti, pojedinac će moći da reprodukuje više informacija iz sadržaja kom je bio izložen (Aaker & Lee, 2001).

Iako su veća involviranost i lakoća (fluentnost) obrade dva različita mehanizma, postoji međusobna uzročnost ove dve komponente. Veća involviranost pojedinca u neku temu ili sadržaj dovodi do aktivacije srodnih asocijacija i samim tim do veće lakoće obrade informacija (Lee et al., 2010; Lee & Higgins, 2009). Alternativno, postoje dokazi koji govore o uzročnosti i u suprotnom pravcu. Lakoća sa kojom pojedinac obrađuje sadržaj kojem je izložen izaziva pozitivna osećanja kod pojedinca (Lee & Labroo, 2004) što vodi većoj involviranosti u trenutnu aktivnost (Shulman et al., 2020; Vaughn et al., 2010).

2.3.2 Načini uspostavljanja regulacione usklađenosti

Regulaciona usklađenost se može uspostaviti na tri načina: korišćenjem strategija ispunjavanja cilja kompatibilnim sa regulacionom orijentacijom, obrađivanjem informacija koje su u skladu sa regulacionom orijentacijom, i usaglašavanjem komponenata poruke nezavisno od regulacione orijentacije pojedinca (Lee & Higgins, 2009). Kod prvog pristupa pojedinac u procesu ispunjavanja nekog cilja primenjuje strategiju koja je u saglasnosti sa njegovim regulacionim stanjem. Na primer, Shah i saradnici su pokazali da kod rešavanja anagramskih zadataka usklađenost strategije rešavanja i regulacionog stanja dovodi do veće motivacije i boljih performansi (Shah et al., 1998). Svim ispitanicima je dato 12 anagramskih zadataka koji su bili obeleženi crvenom i zelenom bojom. Uspešno rešeni zeleni anagrami su ispitanicima donosili poen, dok su neuspešno rešeni crveni anagrami značili gubitak poena. Na taj način je kod ispitanika ostvarena manipulacija strategija rešavanja anagrama, strategija obazrivosti kod crvenih zadataka (kako ne bi izgubili poen) i strategija aspirativnosti kod zelenih (kako bi ostvarili poen). Rezultati su pokazali da su, usled pojačane motivacije prouzrokovane regulacionom usklađenošću, ispitanici u promociionom stanju ostvarivali bolje performanse kod zelenih anagrama, dok su ispitanici u prevencionom stanju postizali veći uspeh sa crvenim anagramima.

Drugi pristup uspostavljanja regulacione usklađenosti je kada pojedinac obrađuje poruku koja je u skladu sa njegovim regulacionim potrebama (sigurnost naspram samounapređenja). Regulaciona stanja čine pojedinca osetljivim na prisustvo različitih tipova informacija. Informacije koje su u skladu sa regulacionim fokusom će pre biti primećene i lakše obrađene od strane pojedinca (Lee & Aaker, 2004). Veća lakoća obrade informacija dovodi do veće involviranosti pojedinca u sadržaj same poruke i intenziviranja reakcije na poruku nezavisno od toga da li je reakcija pozitivna ili negativna. Na primer, Semin i saradnici su istražili uticaj apstraktno naspram konkretno definisanih poruka kojima su se ispitanici ubeđivali da se bave sportom, u zavisnosti od njihovog hroničnog regulacionog fokusa (Semin et al., 2005). Rezultati su pokazali da su apstraktno definisane poruke bile efektivnije kod ispitanika u promocijnom fokusu, dok su konkretno definisane poruke bile efektivnije kod ispitanika u prevencionom fokusu. Ovo istraživanje je u skladu sa rezultatima drugih istraživanja prema kojima ljudi u promocijnom fokusu konstruišu informacije na globalnom nivou, dok u prevencionom fokusu teže lokalnoj obradi informacija (Förster & Higgins, 2005; Lee et al., 2010). Ukoliko je osoba zabrinuta da će se prehladiti (prevencioni fokus) onda će pre reći da mora da “pije čaj od kamilice” umesto da mora da “pije piće protiv prehlade”. Ukoliko osoba ide da se vidi sa prijateljima (promocijoni fokus) onda će pre biti sklonija da kaže da ide “na piće” nego da ide da “popije čaj od kamilice”.

Treći način uspostavljanja regulacione usklađenosti ne zavisi od apriorne regulacione orijentacije pojedinca. Kod ovog pristupa regulaciona usklađenost se uspostavlja kod ispitanika tokom procesa obrade same poruke. Jedan deo poruke primuje regulaciono stanje, dok drugi deo poruke uspostavlja regulacionu usklađenost naglašavanjem koristi (potrebe) primovanog regulacionog stanja. Na primer, Lee i Aaker su pokazali da uokviravanje (engl. *framing*) poruka u marketinškim obraćanjima u skladu sa promocijnim, odnosno prevencionim koristima koje poruka promovise, direktno utiče na moć ubeđivanja (Lee & Aaker, 2004). U jednom eksperimentu ispitanici su bili izloženi reklamama za sok od grožđa. Jednoj grupi su u poruci bile naglašene promocijne koristi ovog soka (npr. više energije zbog sadržaja vitamina C i gvožđa). Drugoj grupi su bile naglašene prevencionne koristi (npr. smanjuje rizik srčanih problema i tumora). Unutar prve grupe (poruka sa promocijnim koristima) ispitanicima kojima je prikazan pozitivno uokviren slogan „Zgrabi energiju” (engl. “*Get Energized!*”) proizvod je bio značajno atraktivniji nego kada je slogan bio negativno uokviren „Ne propusti priliku da zgrabiš energiju” (engl. “*Don't Miss Out on Getting Energized!*”). Kod druge grupe (poruka sa prevencionim koristima) je važno suprotno. Negativno uokviren slogan je učinio sok od grožđa značajno atraktivnijim nego u slučaju pozitivno uokvirenog slogana.

2.3.3 Izvori nastanka regulacione usklađenosti

Regulaciona usklađenost može nastati unutar ili izvan situacije u kojoj se odigrava proces ubeđivanja (Cesario et al., 2008). Efekat regulacione usklađenosti će biti različit u zavisnosti od toga da li je uspostavljen u toku fokalne situacije ili pre toga. Na primer, ukoliko su promotivne poruke slate putem kanala društvenih mreža i istovremeno definisane tako da odgovaraju regulacionoj orijentaciji pojedinca¹, onda izvor efekta ubeđivanja usled regulacione usklađenosti nazivamo integralnom regulacionom usklađenošću (engl. *integral regulatory fit*). Glavni efekat integralne regulacione usklađenosti u ovoj situaciji bi se manifestovao kroz pojačanu involviranost pojedinca u sadržaj poruka kojima su izloženi (Mogilner et al., 2008). Istraživanja pokazuju da se obrada informacija odvija kroz visok stepen elaboracije (Koenig et al., 2009). Visok stepen elaboracije znači pojačanu pažnju pojedinca orijentisanu ka suštinskim informacijama u poruci naspram perifernih informacija kao što su dizajn ili

¹ Regulaciono stanje pojedinca kome se šalje poruka preko društvenih mreža može da bude ocenjeno ili da se primuje.

ličnost koja prenosi poruku. Na primer, to znači da će kvalitet argumenata imati značajniju ulogu nego što to ima broj argumenata kod ubeđivanja.

Drugi izvor regulacione usklađenosti je sporedna regulaciona usklađenost (engl. *incidental regulatory fit*) koji se uspostavlja nezavisno od fokalne situacije. Na primer, u svom radu (Freitas et al., 2002) su naložili ispitanicima da zapišu ciljeve i nade kojima streme (izazivanje promociionog fokusa), s jedne strane i, sa druge strane, dužnosti i obaveze koje imaju u životu (izazivanje prevencionog fokusa). Nakon zapisanih ciljeva ispitanici su imali zadatak da opišu strategije koje sprovode u svrhu zadovoljavanja ovih ciljeva 1. kako bi sve prošlo kako treba (strategije kompatibilne promociionom fokusom), kao i 2. strategije koje sprovode kako bi obezbedili da ništa ne pođe naopako (strategije kompatibilne prevencionom fokusom). Na ovaj način postignuta su četiri stanja, dva stanja regulacione kompatibilnosti (usklađenosti) i dva stanja regulacione nekompatibilnosti. Nakon ovog zadatka ispitanici su bili izloženi porukama ubeđivanja gde je veća efektivnost ostvarena kod ispitanika sa regulacionom usklađenošću. Obrada informacija usled sporedne regulacione usklađenosti se odvija kroz nizak stepen elaboracije, dok se u slučaju regulacione nekompatibilnosti obrada odvija kroz visok stepen elaboracije (Koenig et al., 2009). Ukoliko postoji usklađenost onda to signalizira pojedincu da je „sve u redu”. Taj efekat integralne regulacione usklađenosti se, zatim, prenosi na narednu (nepovezanu) situaciju u kojoj će se pojedinac naći. Takva regulaciona usklađenost se naziva sporednom regulacionom usklađenošću. Posledično, stepen motivacije pojedinca u toj novoj situaciji neće biti na visokom nivou, već će heuristika (mentalna prečica) biti glavni navigator ponašanja. Kod regulacione nekompatibilnosti pojedinac prelazi u stanje pojačane budnosti pa samim tim pažljivije obrađuje poruke i fokusira se više na sadržaj poruka nego na njihovu formu.

2.3.4 Ograničenja regulacione usklađenosti

Regulaciona usklađenost nema uvek povoljne efekte u evaluaciji (proizvoda ili reklama) i ubeđivanju. Određeni faktori anuliraju uticaj regulacione usklađenosti. Pre svega, regulaciona usklađenost neće imati efekta ukoliko je ispitanik svestan izvora njenog nastanka. Sama regulaciona usklađenost nastaje kao rezultat pogrešne atribucije osećaja povećanog samopouzdanja. Pojedinac se oseća dobro povodom svoje reakcije na neku situaciju (usled regulacione usklađenosti) i samim tim reakcija se intenzivira. Ukoliko se osobi skrene pažnja odakle potiče takav viši nivo samopouzdanja, takva osoba će korigovati svoju reakciju i time anulirati efekat regulacione usklađenosti (Cesario et al., 2004).

Drugo, regulaciona usklađenost dovodi do intenziviranja reakcije, što ne znači uvek veću efektivnost reklamne poruke. Ukoliko je reakcija na poruku negativna, regulaciona usklađenost će samo pojačati taj efekat. Na primer, Cesario i saradnici su na uzorku studenata testirali efektivnost poruke koja se odnosila na program unapređenja praktičnih i akademskih veština kod đaka i studenata. Efektivnost poruke je testirana u zavisnosti od manipulacije regulacione usklađenosti i od inicijalne reakcije ispitanika prema poruci. Ispitanici su prvo pročitali nacrt programa koji bi trebalo da se sprovede, zatim je usledila manipulacija regulacione usklađenosti nezavisno od date situacije (sporedna regulaciona usklađenost), i na kraju su ispitanici izražavali koliko podržavaju sprovedene programa. Rezultati su pokazali da su u uslovima regulacione usklađenosti ispitanici bili ekstremniji u svojim odgovorima. Oni koji su imali pozitivno mišljenje prema programu su više podržavali program u uslovima regulacione usklađenosti. Takođe, oni koji nisu podržavali program su bili negativniji prema programu u uslovima regulacione usklađenosti nego u uslovima regulacione neusklađenosti (Cesario et al., 2004).

Treće, u situacijama koje su same po sebi značajne za pojedinca, pa samim tim dovode do njegove veće involviranosti, efekat regulacione usklađenosti neće imati veliki značaj. Kako je glavni adut regulacione

usklađenosti povećana motivacija, onda se može očekivati da regulaciona usklađenost nema prostora za delovanje. Sama situacija izaziva veću involviranost i motivaciju pojedinca tako da su efekti koje bi imala regulaciona usklađenost već na snazi. Na primer, u svom radu Hong i Lee su pokazali da su ljudi koji su percipirali da su pod rizikom da se zaraze hepatitisom C bili jednako motivisani da se testiraju u slučaju regulacione usklađenosti i neusklađenosti. Sa druge strane, kod ispitanika koji nisu percipirali sebe kao deo rizične grupe, efekat regulacione usklađenosti je značajno povećavao nameru ispitanika da se testiraju na hepatitis C, nego u slučaju regulacione neusklađenosti (Hong & Lee, 2008).

3 KONCEPTUALNI OKVIR NEUROMARKETINGA

Neuromarketing predstavlja sponu između neuronauke i marketinških istraživanja. Razvio se kao posebna oblast neuroekonomije za koju kažemo da se bavi primenom neuronaučnih metoda u analizi ekonomski relevantnih problema. Iz ovoga sledi da se i neuromarketing, kao naučna oblast, bavi primenom neuronaučnih metoda zarad analize i razumevanja ljudskog ponašanja u marketinškom domenu (Fortunato et al., 2014). Uspostavljanjem odnosa između stimulusa i područja mozga, gde se dati stimulusi obrađuju, stičemo dublje razumevanje o kognitivnim, psihološkim i emocionalnim procesima kod samog potrošača. Neuralne aktivnosti predstavljaju reakcije na različite stimulse koje posmatramo (npr. reklama, ambalaža) i pružaju informacije o potrošačima koje mogu da imaju značajnu korist za donosiocje marketinških odluka.

U nastavku sledi sažetak glavnih odnosa između neuralnih aktivnosti i ponašanja potrošača, koji su relevantni za oblast istraživanja tržišta². Delovi prefrontalnog korteksa (spoljašnji sloj strukture nervnog tkiva mozga) se povezuju sa procesima donošenja odluka i mogu imati značajnu ulogu u npr. ocenjivanju percipirane vrednosti nekog proizvoda ili reklame za potrošača. Leva i desna strana prefrontalnog korteksa čoveka su odgovorne za motivaciona stanja privlačenja i izbegavanja tog pojedinca. Aktivacija leve strane prefrontalnog korteksa reflektuje psihološko stanje privlačenja izazvano određenim stimulusom, kao npr. želja za čokoladom koja se nalazi pred nama ili agresivnost ka nekome ko nas je iznervirao. Aktivacija desne strane označava odbojnost koju je izazvao određeni stimulus, kao npr. reakcija na stresnu scenu tokom gledanja filma strave i užasa. Prilikom obrade stimulusa koji imaju ulogu nagrade zadužen je deo mozga pod imenom striatum. Tako, na primer, hrana, droga i novac aktiviraju ovaj deo mozga kod pojedinca. Amigdala je deo mozga koji se sastoji iz dve bademolike grupe neurona u predelima slepoočnica. Amigdala je značajna za regulisanje emocija³. Pažnja i vizuelna obrada se vezuju za prefrontalni korteks i potiljačni režanj. Na primer, marketinški istraživači su bili pred posebnim izazovom kada treba da ocene kako ispitanici memorišu reklamni sadržaj. Sada je poznato da analiza reakcija na reklamni stimulus u tim delovima mozga može dati vredne informacije prilikom kreiranja reklamnog spota.

Ukratko, pojava neuromarketinga je doprinela modernizaciji istraživanja tržišta. Neuroinstrumenti konačno omogućavaju naučnim i nenaučnim istraživačima da na osnovu analize moždanih reakcija potrošača dobiju nepristrasne informacije, kao i informacije koje ranije uopšte nisu bile dostupne. Neuromarketing pristup eliminiše najveći problem sa kojim su se suočavali tradicionalni istraživači tržišta, a to je nesposobnost i/ili volja ispitanika da izveštavaju o uticaju određenih stimulusa kao što su, na primer, tipovi reklamnih poruka ili dizajn proizvoda. Neuromarketing pristup, takođe, omogućava prikupljanje informacija o ponašanju potrošača u domenima kojima se nisu bavili tradicionalni istraživači tržišta.

Tradicionalne metode u istraživanju tržišta imaju značajna ograničenja. Prvo, one pretpostavljaju da su pojedinci u stanju da svesno opišu sopstvene kognitivne i emocijne procese za koje znamo da imaju uporište u samoj podsvesti. Drugo, mnogobrojni faktori utiču na ispitanike da pristrasno govore o svojim osećanjima i mislima (Morin, 2011). Neuromarketing tehnike omogućavaju izučavanje osnovnih

² Pregled literature u ovom pasusu je napravljen na osnovu rada (Solnais et al., 2013).

³ Budući da su emocije veoma kompleksan fenomen, smatra se da ni jedan pojedinačni deo mozga nije isključivo nadležan za emocije.

psiholoških procesa odgovornih za ponašanje pojedinca. Podaci dobijeni ovim putem ne podležu pristrasnosti jer ispitanici nemaju (ili barem ne značajan) uticaj na merenja. Sa druge strane, kod samoocenjivanja, kao alternativne tradicionalne tehnike u istraživanju tržišta, je upitno da li ispitanici imaju volju i/ili sposobnost da iskažu svoje stavove. Na primer, percepcija ispitanika o društveno prihvatljivom ponašanju ga može podstaći da kaže kako mu prisustvo baleta u reklamnom spotu ne privlači pažnju, iako zapravo uživa u istom. Dodatna prednost neuromarketinških tehnika je mogućnost simultanog praćenja neuralnih reakcija tokom tretiranja ispitanika eksperimentalnim stimulusom. Ovo je značajno jer otklanja problem pristrasnosti tokom pružanja odgovora (engl. *response bias*) usled vremenskog nepodudaranja psihološke reakcije na stimulus i pružanja odgovora ispitanika (Solnais et al., 2013). Sledi opis neuromarketinških instrumenata, njihova sistematizacija i uloga u neuromarketingu. Nakon toga biće opisana priroda funkcionisanja neuralne aktivnosti korteksa i metodologija merenja putem elektroencefalograma, sa stanovišta donošenja zaključaka o emotivnim i kognitivnim stanjima pojedinca na osnovu neuroaktivnosti.

3.1 Neuromarketinški instrumenti

Neuromarketinški instrumenti se mogu podeliti u tri kategorije: instrumenti koji mere metaboličke aktivnosti u mozgu, instrumenti koji mere električne aktivnosti u mozgu i instrumenti koji ne mere aktivnost mozga (Fortunato et al., 2014). Najpopularniji neuroinstrumenti koji se koriste u istraživanju tržišta su: funkcionalna magnetna rezonanca (fMRI), elektroencefalograf (EEG), magnetoencefalografija (MEG), snimanje pokreta očiju, elektrodermalna aktivnost i facijalno prepoznavanje emocija. U nastavku će ovi instrumenti biti ukratko opisani. Najpre će biti izložena tri instrumenta koja mere aktivnost mozga (fMRI, EEG i MEG), a zatim tri neuroinstrumenta koji se ne baziraju na aktivnosti mozga (snimanje pokreta očiju, elektrodermalna aktivnost i facijalno prepoznavanje emocija).

Funkcionalna magnetna rezonanca meri aktivnost mozga sa velikom prostornom preciznošću koja je manja od jednog kubnog milimetra, čime se omogućava istraživanje svih delova mozga, čak i onih koji su najmanje pristupačni. Slike koje generiše fMRI daju informacije o promeni protoka krvi u mozgu što indirektno daje informaciju o aktivnostima koje se odigravaju u različitim delovima mozga. Kada aktivni neuroni prenose električne signale drugim neuronima oni traženu energiju dobijaju iz krvi koja brzo oslobađa kiseonik neuronima kojima je energija potrebna. Oksidovana i neoksidovana krv imaju različita magnetna svojstva što omogućava da se pomoću magnetne rezonance stekne uvid u to koji su neuroni aktivni, koji nisu. Za istraživače to je značajno jer prilikom izlaganja ispitanika stimulusu (npr. reklama) delovi mozga koji se aktiviraju imajuće aktivne neurone koji se mogu detektovati na fMRI preko kontrasta oksidovane i neoksidovane krvi. Ovaj instrument ima veliku prostornu rezoluciju u merenju moždanih aktivnosti, ali istovremeno i slabu temporalnu rezoluciju, što je njegova osnovna mana. Naime, aktivnost neurona kroz oksidaciju krvi putem fMRI se može evidentirati tek nekoliko sekundi nakon izlaganja stimulusu. To može da bude značajan nedostatak imajući u vidu ogroman značaj koji ima svaka sekunda u kreiranju TV reklame, na primer. Druga mana je što je ovaj merni instrument izuzetno skup i samim tim nedostupan većini istraživača.

Elektroencefalograf je instrument koji meri aktivnost neurona površinskog dela mozga, odnosno korteksa. Ovaj uređaj ima veliku primenu u medicini – na primer, za dijagnoze mentalnih problema kao što je epilepsija. Kako su se poslednjih godina pojavile kompanije koje proizvode ovaj uređaj po komercijalnim cenama, on je postao dostupniji široj naučnoj i nenaučnoj javnosti. EEG ima visoku vremensku rezoluciju – na primer, uređaji koje proizvodi kompanija Emotiv Inc, i koji korišćen u istraživanju koje je sprovedeno za potrebe ovog rada, imaju rezoluciju od 128 i više merenja u jednoj

sekundi. Velika prednost EEG-a je to što on omogućava merenje moždane reakcije ispitanika tokom same obrade stimulusa, čime se omogućava dobijanje informacija o nesvesnim reakcijama ispitanika dok su izloženi stimulusu. Na primer, u jednom istraživanju je pokazano da je deo reklame, koji ispitanici čak nisu ni svesno registrovali, imao značajan uticaj na percepciju koji je reklamirani brend imao nakon takve reklamne poruke (Ohme et al., 2009). Do ovog zaključka se došlo na osnovu neuroaktivnosti registrovanih putem EEG-a tokom gledanja reklame (Ohme et al., 2009). Druga prednost EEG-a je ta što je ovaj uređaj mobilan, čime se istraživačima omogućava da sprovode eksperimente u manje veštačkim uslovima (na primer, unutar prodavnice). Osnovna mana EEG-a je to što može da meri samo neuroaktivnost korteksa, dok aktivnosti delova mozga van korteksa ne mogu biti registrovane ovim uređajem.

Magnetoencefalografija omogućava merenje aktivnost kore mozga uz visoku vremensku rezoluciju, tako što prati promene magnetnog polju na površini glave ispitanika, dok je neuroaktivnost u subkortikalnom delu gotovo nemerljiva ovim uređajem. U tom smislu MEG je sličan EEG-u budući da oba instrumenta imaju visoku temporalnu, ali slabu prostornu preciznost merenja moždanih aktivnosti. Iako su u istoj kategoriji po pitanju temporalno-prostorne rezolucije, MEG je superiorniji instrument po pitanju preciznosti merenja. Kako MEG može da prati reakcije ispitanika na stimulse u realnom vremenu, predstavlja instrument sa velikom upotrebnom vrednošću. Na primer, istraživanja ovim instrumentom su dala značajne rezultate u objašnjavanju kognitivnih procesa, kao što su prepoznavanje predmeta, pristup verbalnoj memoriji i prisećanje specifičnih događaja. Sa druge strane korišćenje MEG-a zahteva veoma komplikovanu i skupu opremu zbog čega je EEG znatno popularniji (Fortunato et al., 2014; Morin, 2011).

Snimanje pokreta očiju (engl. *eye tracker*) predstavlja tehniku kojom se prate pokreti očiju i širenje zenica ispitanika tokom izloženosti nekom stimulusu. Istraživač može da vidi na osnovu širenja i skupljanja zenica, na primer, koliko je teško ispitaniku da razume određenu promocionu poruku. Dodatno, moguće je istražiti kolika je preglednost i prijemčivost sajta tako što se prati šta ispitanik gleda tokom pretraživanja stranice i kojim redosledom gleda različite sadržaje koji su dostupni na toj stranici. Sama tehnika predstavlja odlučnu dopunu instrumentima koji mere aktivnost mozga. Na primer, na osnovu snimanja pokreta očiju možemo da pratimo šta ispitanik gleda na veb sajtu, dok paralelno merimo emocije i pažnju ispitanika putem EEG-a ili drugih uređaja kojima se meri moždana aktivnost. U zavisnosti od raspoloživih funkcija ova tehnika može dosta da varira u ceni. Postoje sofisticirani uređaji za praćenje pokreta očiju i zenica koji se mehanički spajaju sa računarom. Najpoznatija kompanija koja se bavi proizvodnjom ovih instrumenata je švedska kompanija Tobii Technology. Sa druge strane, postoji veliki broj IT kompanija koje prave softverska rešenja za praćenje očiju ispitanika po pristupačnim cenama. Istraživačima je dovoljno samo da njihov računar ima integrisanu kameru i prosečne hardverske performanse da bi mogao sprovoditi istraživanja.

Elektrodermalna aktivnost (engl. *electrodermal activity*) predstavlja tehniku merenja emocijog uzbuđenja ispitanika. Tehnika merenja se sprovodi tako što se elektrode postavljaju na prste ispitanika. U emocionalnim situacijama, kao što je izloženost nekom stimulusu, aktiviraju se znojne žlezde koje luče znoj na rukama i na taj način menjaju električnu provodljivost površine kože. Problem sa ovom tehnikom je što eksterni faktori, kao što je temperatura eksperimentalnog okruženja, mogu da utiču na validnost rezultata. Drugo, postoji docnja od nekoliko sekundi u merenju reakcije ispitanika na stimulus tako da nije podesan za merenje dinamike emocija kod složenih stimulusa kao što su video zapisi.

Facijalno prepoznavanje emocija (engl. *facial coding*), kao što samo ime kaže, predstavlja tehniku prikupljanja informacijama o emocijnim reakcijama ispitanika na osnovu njihovih izraza lica. Facijalno prepoznavanje emocija se može vršiti preko facijalne elektromiografije (fEMG) ili preko softverskih

aplikacija koje putem kamere na računaru prepoznaju emocije korisnika. Facijalna elektromiografija je instrument koji se primenjuje postavljanjem elektroda na lice ispitanika i tokom izlaganja stimulusu ovaj instrument prati mišićne aktivnosti na osnovu električnih aktivnosti koje generišu mišićna vlakna prilikom mišićne kontrakcije. fEMG može da detektuje i najsitnije promene na ljudskom licu, čak i one koje nisu vidljive pukom posmatraču. Problem sa ovim instrumentom je taj što on ima nisku eksternu validnost budući da podrazumeva da ispitanik nosi puno elektroda na svom licu što može značajno da utiče na njegove reakcije. Sa druge strane, softver za facijalno prepoznavanje emocija omogućava analizu ispitanika i iz njegovog doma, gde je dovoljno da samo ima računar sa kamerom. Belgijska kompanija EyeSee Research sprovodi svakodnevno istraživanja ovog tipa sa ispitanicima na različitim kontinentima u isto vreme. Mana kod softverskog pristupa je što nije moguće pouzdano meriti različite tipove emocija ovim putem, ali je svakako u prednosti u odnosu na alternativni tradicionalni metod samoocenjivanja (Cowie et al., 2001).

3.2 Elektroencefalografija

U ovom delu treće glave će prvo biti objašnjena priroda funkcionisanja neuralne aktivnosti korteksa i metodologija merenja putem elektroencefalografa, sa stanovišta donošenja zaključaka o emotivnim i kognitivnim stanjima pojedinca na osnovu neuroaktivnosti (u delu 3.2.1). Nakon toga će biti predstavljene dve istraživačke metode koje koriste EEG: događajem evocirani potencijali (engl. *event-related potentials*, ERP) i frekvenciona analiza EEG signala (u delu 3.2.2).

3.2.1 Neuralna aktivnost

Mozak se sastoji od stotine milijardi nervnih ćelija, neurona, koje su međusobno povezane putem nervnih mostova, sinapsi. Neuron komuniciraju među sobom slanjem električnih impulsa putem dugačkih nervnih nastavaka aksona. Neuron koji šalje impuls drugom neuronu nazivamo presinaptičkim neuronom, a neuron primalac se naziva postsinaptički neuron. Akson jednog neurona se preko sinapse vezuje za drugi neuron. Električni impuls, koji presinaptički neuron šalje drugim ćelijama preko aksona, se naziva akcioni potencijal. Kada akcioni potencijal dođe do kraja aksona, dolazi do ispuštanja tzv. neurotransmitera u sinaptički deo. Neurotransmiteri su supstance koje se lepe za receptore postsinaptičke ćelije i izazivaju otvaranje kanala kroz koje dolazi do razmene jona, čime se menja električni potencijal unutar ćelije u odnosu na spoljašnost ćelije. Drugim rečima, stvara se novi impuls koji se zove postsinaptički potencijal. Upravo ovaj tip impulsa ima ključnu ulogu u većini neuroistraživanja (EEG istraživanja su samo jedna od njih). Ukoliko je postsinaptički impuls dovoljno jak, odnosno ako njegova jačina pređe određeni prag, on će izazvati akcioni potencijal koji će se prenositi putem aksona do sinapse sa drugim neuronom. Intenzitet postsinaptičkog potencijala će zavistiti od intenziteta stimulusa. Sa druge strane, akcioni potencijal se realizuje po principu „sve ili ništa“, što znači da njegov intenzitet ne zavisi od jačine postsinaptičkog impulsa već se realizacija ili odvija u punoj snazi ili se ne odvija uopšte. Što je jačina stimulusa veća, frekvencija akcionog potencijala koja se generiše u neuronu će takođe biti veća, ali će amplituda svakog pojedinačnog akcionog potencijala ostati nepromenjena.

Prilikom slanja impulsa, na membrani neurona se formira minijaturno električno polje. Da bismo mogli da registrujemo ovo polje na površini kože glave (u daljem tekstu: skalpa) čoveka, impuls mora da traje dovoljno dugo i da bude dovoljno jak. Oba tipa neuroimpulsa, i postsinaptički i akcioni potencijal, nisu dovoljno jaki kod pojedinačnih neurona da bi bili registrovani putem EEG-a. Akcioni potencijal je tip impulsa koji traje kratko (oko jedne milisekunde). Bitna karakteristika ovog tipa impulsa je da kada neuron generiše akcioni potencijal, mora da prođe neko vreme (mereno u milisekundama, ms) pre nego

što isti neuron može da generiše novi akcioni potencijal. Da bi bio vidljiv za EEG, potrebno je da se veliki broj prostorno bliskih akcionih potencijala realizuje istovremeno kod različitih neurona (pošto jedan neuron ne može istovremeno da generiše više akcionih potencijala). Nepodudaranje akcionih potencijala čak i za delić milisekunde utiče značajno na mogućnost njihovog merenja. Dodatno, smer kretanja akcionih potencijala bi trebalo da bude pod sličnim uglom, odnosno aksoni neurona bi morali biti približno paralelni, kako bi moglo da dođe do sabiranja potencijala. Na primer, ako je ugao kretanja dva akciona potencijala veći od 90 stepeni, dolazi do poništavanja ukupnog potencijala, a kad je ugao koji zaklapaju dva aksona tačno 180 stepeni (što je ekvivalentno uglu kretanja akcionih potencijala), onda je zbirni potencijal nula. Akcioni potencijali su u tom smislu nepraktični za merenje EEG-om.

Za razliku od akcionog potencijala, postsinaptički potencijal traje dovoljno dugo da bi mogao biti registrovan (u pitanju su desetine ili stotine milisekundi). Tipičan neuron će imati veliki broj konekcija sa drugim presinaptičkim neuronima, pa je samim tim moguće istovremeno formiranje velikog broja postsinaptičkih impulsa u istom neuronu koji traju dovoljno dugo (za razliku od akcionog potencijala). Kao i kod akcionog potencijala, električno polje koje formiraju postsinaptički potencijali u pojedinačnom neuronu je izuzetno malo, tako da ga elektrode EEG uređaja ne mogu registrovati. Potrebno je da veliki broj neurona, usmerenih u istom smeru, sinhronizovano formira postsinaptičke potencijale koji će biti sabrani u dovoljno veliki potencijal koji će moći da bude registrovan na površini skalpa. Neuroni koji imaju svojstvo da su orijentisani u istom smeru, ka skalpu glave, su tzv. piramidalne ćelije koje se nalaze u površinskoj kori mozga, korteksu. Dakle, elektrode EEG-a registruju samo deo moždanih aktivnosti koje proizvode piramidalne ćelije usled simultanog grupnog delovanja na pojedinačnim lokacijama unutar korteksa (Luck, 2014).

Mozak nikad ne pravi pauzu u svom radu, čak ni kad smo u snu. Aktivnost mozga se reflektuje kroz obrasce ponašanja električnog potencijala što se reflektuje u signalu koji registruje EEG na skalpu pojedinca. Bitno je naglasiti da se ovde misli samo na aktivnosti spoljašnje strukture mozga, odnosno cerebralnog korteksa. Kako se različite aktivnosti neurona ispoljavaju kroz promene u električnom potencijalu na skalpu čoveka, signal koji se dobija iz pojedinačne elektrode predstavlja mešavinu informacija. Jedan deo registrovanog signala odnosi se na obradu informacija iz spoljašnjosti (npr. eksperimentalni stimulus), dok se drugi deo odnosi na interne procese koji se odigravaju u čoveku (npr. snovi, kao i ostale svesne i nesvesne aktivnosti mozga).

Neuroni imaju složene obrasce slanja električnih impulsa drugim neuronima. Signal koji registruje jedna elektroda EEG-a odražava mešavinu nekoliko osnovnih frekvencija električnih impulsa koje sinhronizovano proizvodi više hiljada neurona u delu korteksa gde je postavljena elektroda. Različite grupe frekvencije odražavaju različita kognitivna i emocionalna stanja (Luck, 2014). Intervale frekvencija nazivamo moždanim talasima koje grupišemo u pet osnovnih tipova talasa, u skladu sa njihovim frekvencionim opsegom: delta (1 – 4 Hz), teta (4 – 8 Hz), alfa (8 – 12 Hz), beta (13 – 25 Hz) i gama (> 25 Hz).

Alfa moždani talasi predstavljaju oscilatornu aktivnost u frekvencionom opsegu od 8 – 12 Hz. Prisustvo ovih talasa u EEG signalu se vezuje sa senzorne, motorne i memorijske procese. Intenziviranje snage alfa talasa se događa, na primer, tokom mentalnog i fizičkog opuštanja sa zatvorenim očima. S druge strane, smanjeno prisustvo alfa talasa reflektuje stanje mentalne aktivnosti i angažovanosti, na primer tokom koncentrisane pažnje prema bilo kojoj vrsti stimulusa. Alfa talasi koje registrujemo u prefrontalnom korteksu predstavljaju bitne markere psiholoških stanja privlačenja i izbegavanja (Harmon-Jones & Gable, 2018a).

Beta moždani talasi (13 – 25 Hz) su prisutni u budnom stanju čoveka i vezuju se za logičko-analitičko rezonovanje. Kada se fokusiramo na neki problem, snaga ovih talasa se intenzivira u EEG signalu. Prilikom izvršavanja fizičkog pokreta dela tela pojačava se snaga beta talasa u centralnom korteksu (Koudelková & Strmiska, 2018).

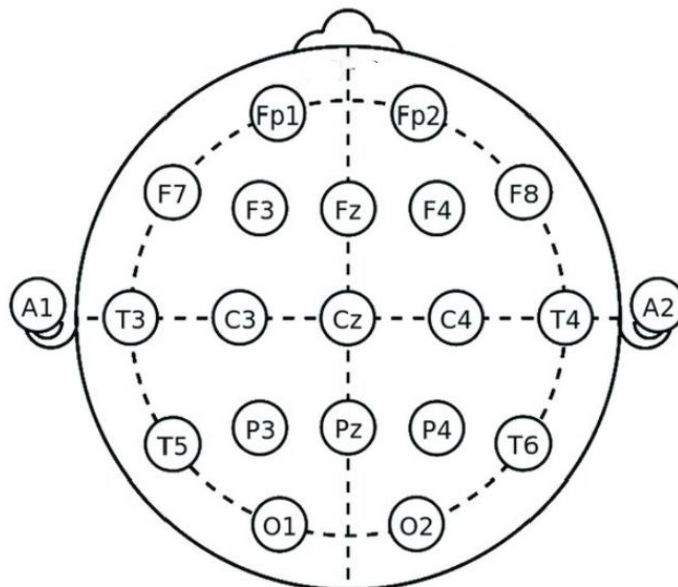
Teta moždani talasi (4 – 8 Hz) imaju visoku korelaciju sa stepenom opuštenosti kod čoveka. Putem ovih talasa možemo dobiti informacije o složenosti mentalnih operacija koje se odvijaju u mozgu neke osobe (stanja nižeg odnosno višeg stepena opuštenosti). Na primer, u situacijama kada se osoba duboko zamisli o nečemu ili kada sanja, ona je u stanju visoke opuštenosti što će biti registrovano kroz manju snagu ovih talasa u signalu koji meri EEG. Prisustvo teta moždanih talasa se može registrovati u svim delovima korteksa (Niedermeyer & da Silva, 2005).

Gama talasi (> 25 Hz) su najbrži moždani talasi i njihova aktivnost se vezuje za obradu informacija i stepen pažnje ispitanika. Detekcija ovih talasa putem EEG-a je dosta otežana zbog preklapanja sa frekvencijom koju emituju očni mišići tokom pokreta očiju. Ukoliko je za konkretno neuroistraživanje potrebno analizirati gama talase, onda je iz signala merenog EEG-om neophodno prethodno otkloniti visokofrekventne talase koji se odnose na kretanje mišića očiju, kako bi rezultati bili validni (Koudelková & Strmiska, 2018; Luck, 2014).

Delta talasi (1 – 4 Hz) spadaju u veoma spore talase i njihovo pojačano prisustvo je primetno tokom meditacije ili tokom dubokog sna. U kliničkim istraživanjima ovi talasi su odličan indikator dubine sna u kojem se nalazi osoba. Tipično nastaju u talamusu i pojačana snaga ovih talasa se može registrovati na desnoj moždanoj hemisferi (Niedermeyer & da Silva, 2005).

3.2.1.1 Merenje neuroaktivnosti elektroencefalografom

EEG koristi elektrode koje se kače na površinu kože glave (skalp) ispitanika odakle se snima električni potencijal koji emituju neuroni korteksa. U zavisnosti od sofisticiranosti uređaja, EEG može imati različit broj elektroda, od najmanje 5 do preko 100 elektroda. Priroda istraživanja određuje potrebu za sofisticiranom uređaja, a samim tim i lokacijama na korteksu koje će biti posmatrane. Opšteprihvaćen sistem definisanja i imenovanja lokacija skalpa kod primene EEG uređaja je tzv. *međunarodni sistem 10-20* (engl. *international 10–20 system*). Prema nomenkulaturi ovog sistema, ime elektrode počinje sa jednim ili dva slova kojima se identifikuje regija skalpa sa koje određena elektroda snima signal, a završava se rednim brojem konkretne elektrode u datom regionu skalpa. Imena elektroda prema regijama skalpa su: AF ili FP (prefrontalni deo), F (frontalni), T (temporalni), P (parietalni), O (okcipitalni) i C (centralni).



Slika 3.1 Pozicije elektroda prema međunarodnom 10-20 sistemu.

Izvor: Rojas et al. (2018)

Elektrode u kontaktu sa skalpom ispitanika snimaju električni potencijal sa površine kože. Međutim, različiti faktori utiču na kvalitet signala kao što su mrtve ćelije kože, znoj itd. Svi ovi faktori formiraju otpor koji ne dozvoljava signalu da dopre do EEG uređaja. Ovaj otpor se naziva električna impedansa, ili jednostavno impedansa, i meri se u omima (Ω). Neuroaktivnost može biti pouzdano analizirana samo kada je nivo impedanse tokom primene EEG merenja na dovoljno niskom nivou.

Električni potencijal dobijen EEG-om se meri u mikrovoltima (μV). Da bismo merili električni potencijal nekog regiona na skalpu (npr. pozicija F3) moramo da imamo referentnu tačku u odnosu na koju merimo potencijal, odnosno uzemljenje (označimo to sa G). Potencijal između ove dve pozicije možemo, za potrebe objašnjenja, da predstavimo matematičkim izrazom $F3 - G$. Uzemljenje (G) je povezano sa pojačivačem signala EEG uređaja tako da će zbog toga kupiti određene šumove iz električnog kola pojačivača. Iz toga sledi da potencijal između F3 i G nikad neće odslikavati samo aktivnost neurona, već i smetnji koje nisu povezane sa neurološkom aktivnošću. Radi otklanjanja šumova ovog tipa, uvek se uvodi referentna elektroda (npr. P3). Referentna elektroda, kao i sve druge, daje električni potencijal između regije skalpa i uzemljenja (G). Ukoliko od potencijala ($F3 - G$) oduzmemo potencijal ($P3 - G$) onda uspevamo da neutrališemo uticaj električnog šuma iz uzemljenja. Prostim matematičkim jezikom rečeno, ovo sledi iz $(F3 - G) - (P3 - G) = F3 - P3$ (Luck, 2014).

Za referentnu elektrodu obično biramo lokaciju koja nije relevantna za potrebe istraživanja koje sprovodimo i koja, idealno, ne nosi informacije o relevantnim neuroaktivnostima. Na ovaj način izbegavamo neutralisanje informacija bitnih za eksperiment. Obično se za referentne elektrode biraju pozicije na lobanji iznad uveta koje u svom signalu registruju nizak stepen neuroaktivnosti, a visok stepen sistematskog šuma prisutnog u ostalim elektrodama. Takođe, za referentni signal se može uzeti i prosek izlaznih signala više elektroda, kao npr. signala elektroda iza oba uveta, tzv. mastoidne lokacije (Smith et al., 2017a).

3.2.1.2 Artefakti i validnost EEG podataka

Primena EEG-a podrazumeva snimanje signala koji nosi informacije o neuralnim aktivnostima različitih delova korteksa. Međutim, u praksi je gotovo nemoguće dobiti čist neuralni signal. Električna aktivnost na površini skalpa odražava, pored neuroaktivnosti, i niz drugih aktivnosti. Signali snimljeni EEG-om koji nisu rezultat neuroaktivnosti se nazivaju *artefakti*. Fiziološke artefakte generiše telo ispitanika, dok nefiziološki artefakti nastaju u okruženju u kom se nalazi ispitanik tokom eksperimenta (Salminen et al., 2009).

Fiziološki artefakti koji nastaju tokom snimanja EEG-om uključuju kretanje očiju, treptanje, gutanje pljuvačke, pomeranje jezika i pomeranje mišića usled facijalnih ekspresija. Svaka aktivacija mišića stvara određeni električni potencijal koji se meša sa signalom koji šalju neuroni. Problem stvaranja šuma usled artefakata se rešava tako što se delovi signala koji sadrže značajan šum odbacuju, statistički kontrolišu ili ostavljaju kao sastavni deo signala. Koji će metod rešavanja problema artefakata biti primenjen zavisiće od prirode istraživanja koje se sprovodi. Neka istraživanja koriste niske frekvencione opsege neuro signala, druga koriste visoke frekvencione domene, dok se treća bave nivoima električnog potencijala. Na primer, pomeranje oka i treptaji reflektuju električni signal sa sporim oscilacijama, manjim od 7,5 Hz (Hagemann & Naumann, 2001). Ako su niske frekvencije neuroaktivnosti od značaja za istraživanje, onda je bitno uzeti u obzir ove artefakte jer će za istraživača biti teško da naknadno razluči koje su informacije iz EEG signala rezultat neuroloških aktivnosti, a koje pokreta očiju. Kombinovanje EEG-a sa elektrookulografom (EOG) može biti od velike koristi kod ovakvih istraživanja. EOG meri električnu aktivnost pokreta očiju tako što koristi elektrode postavljene u predelu oko očiju, po sličnom principu kao EEG. Na ovaj način je moguće statistički kontrolisati uticaj pokreta očiju i treptanja. Ukoliko se istraživanje fokusira na visoke frekvencije neuroaktivnosti, međutim, onda sami pokreti očiju ne predstavljaju značajan problem i mogu se ignorisati (Hagemann & Naumann, 2001).

Nefiziološki artefakti se odnose na eksterne izvore koji utiču na kvalitet EEG signala. U kojoj meri će informacije iz signala biti kontaminirane zavisiće od same prirode istraživanja. Kao i u slučaju kod fizioloških artefakata, bitno se razlikuju situacije gde se istraživanje bavi frekvencionim opsegom i one gde se istraživanje bavi nivoima električnog potencijala. Analize koje se bave frekvencionim opsegom su znatno robusnije na prisustvo artefakata. Tako istraživanja koja podrazumevaju kontakt sa električnim uređajima, kao što je igranje igrice na kućnim video konzolama, neizostavno dovode do prisustva nefizioloških artefakata (Salminen et al., 2009). Bitan izvor nefizioloških artefakata se odnosi na kvalitet i postavku elektroda EEG uređaja. Ukoliko elektroda ima loš kontakt sa skalpom, signal sa tog mesta gubi na kvalitetu, a u najgorem slučaju postaje u potpunosti bezvredan. Ukoliko se referentna elektroda tokom merenja otkači (što se obično dešava na mastoidnim pozicijama), onda će signal na svim ostalim elektrodama biti kontaminiran. Na kraju, nefiziološki artefakt imanentan svakom istraživanju koje koristi EEG je frekvencija električne mreže zemlje u kojoj se obavlja merenje. Svako domaćinstvo dobija električnu energiju sa naponom i frekvencijom prenošenja koji se razlikuju u zavisnosti od zemlje u kojoj se to domaćinstvo nalazi. U Srbiji se, kao i u ostatku Evrope, električna energija prenosi sa naizmeničnim naponom od 220 volti i na frekvenciji od 50 Hz. Sa druge strane, u SAD-u se prenos električne energije odvija pod naponom od 110 volti i na frekvenciji od 60 Hz, dok Japan ima prenos od 100 V i frekvencijama od 50 Hz i 60 Hz, u zavisnosti od dela zemlje. Zašto je ovo bitno? Ukoliko se istraživanje vrši na mestu gde postoji bilo kakav električni uređaj koji je povezan sa izvorom električne energije (npr. sijalica), javiće se smetnja u signalu. Pretpostavimo da imamo uključenu sijalicu u prostoriji tokom eksperimenta. Prenos električne energije do sijalice se odvija pod znatno višim naponom nego aktivnost koju registruje EEG (volt naspram mikrovolta) sa frekvencijom od 50 Hz. Provodnici (npr. kablovi i žice) formiraju magnetno polje koje prenosi oscilacije na druge provodnike u blizini (npr. elektrode na

EEG uređaju). Na ovaj način EEG uređaj registruje šum u signalu na frekvenciji od 50 Hz. Dobra stvar kod neuroistraživanja je da aktivnost koju emituju neuroni ima znatno manju frekvenciju od 50 Hz tako da se najčešće signal na ovoj frekvenciji odstranjuje (filtrira) softverskim i/ili hardverskim tehnikama. Usvojena mantra među istraživačima koji primenjuju EEG je da ne postoji jednako dobar supstitut čistom signalu (Luck, 2014). Sa druge strane, moramo biti svesni da EEG signal nikad nije savršen odraz neuralne aktivnosti, ali nije ni nepremostiva prepreka za dobijanje validnog rezultata istraživanja koje sprovodimo (Hagemann & Naumann, 2001).

3.2.2 Istraživačke tehnike zasnovane na EEG-u

Dve istraživačke tehnike koje se primenjuju na signal dobijen EEG uređajem su: događajem evocirani potencijali (eng. *event-related potentials*, ERP) i frekvenciona analiza. Događajem evocirani potencijali (ERP) je tehnika merenja neuroprocesa koji se aktiviraju eksternim stimulusom. Karakteriše je veliki broj ponavljanja stimulusa (generalno 50-100), kojima je izložen ispitanik. Stimulusi se prikazuju u kratkim intervalima 200-1000 ms dok se paralelno prati moždana reakcija ispitanika. Frekvenciona analiza (ili spektralna analiza) EEG signala se bavi analizom moždanih talasa. Prilikom korišćenja ove tehnike pretpostavlja se da su moždane aktivnosti oscilatorne prirode. Signal koji EEG uređaj registruje na površini skalpa je mešavina više signala različitih frekvencija gde svaka frekvencija nosi informaciju o različitim kognitivnim, emocionalnim, i motivacionim procesima ispitanika. U nastavku će biti bliže opisane ove dve tehnike.

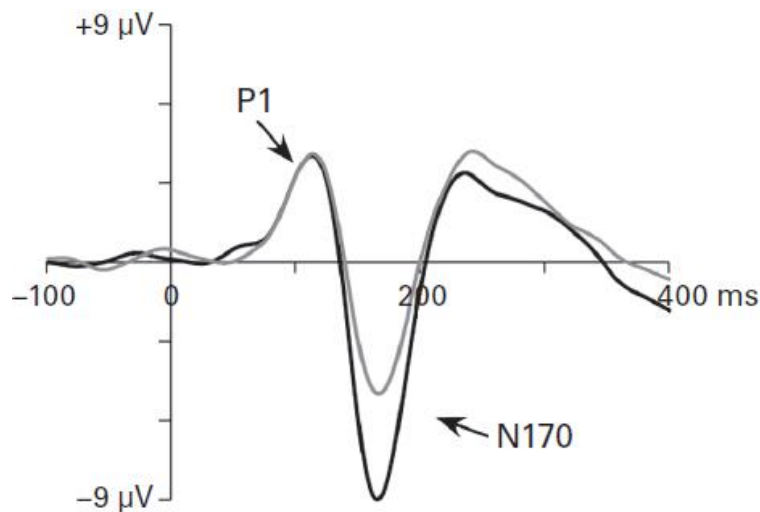
3.2.2.1 Događajem evocirani potencijali

Signali, koje registruje EEG, reflektuju aktivnosti mozga koje su rezultat svesnih i podsvesnih procesa koji se odigravaju u pojedincu. Kod ERP studija, odgovarajući stimulus se prikazuje ispitaniku. Tokom obrade stimulusa, neuroni menjaju obrasce ponašanja, što se odražava na voltažu signala registrovanog na skalpu. Ukoliko bi se svi neuralni procesi ispitanika odnosili isključivo na reakciju na stimulus kome su izloženi u konkretnom eksperimentu, bilo bi dovoljno ispitanika izložiti tom stimulusu samo jednom. Međutim, u stvarnosti situacija je mnogo složenija. Dok ispitanik obrađuje stimulus, paralelno se odigravaju drugi svesni i nesvesni procesi. Na primer, ispitanik ima ispit naredne nedelje zbog čega mu se često javljaju mentalne predstave povezane sa tim ispitom, istraživač čini ispitanika nervoznim, ekran na kom se prikazuje stimulus privlači ispitanika da nesvesno obradi dizajn i brend računara itd.

Zbog kompleksnih procesa koji se odigravaju u mozgu ispitanika potrebno je eksperiment koncipirati tako da se izlaganje stimulusu ponovi mnogo puta i da se na kraju izračuna prosek svih signala dobijenih iz pojedinačnih izlaganja (segmenata ili epoha). Logika ovakvog pristupa leži u tome da neuralni procesi, koji se ne odnose na stimulus, nasumično povećavaju i smanjuju napon (voltažu) EEG signala. Sledi da će se uprosečavanjem signala iz pojedinačnih epoha neutralisati šum, dok će se signal evociran stimulusima (eng. *event-related potential*) održati usled postojanog delovanja kroz epohe.

Signal koji dobijemo uprosečavanjem kroz epohe je srž analize evociranih potencijala. Slika 3.2 daje primer prikaza dva dobijena signala ERP analizom iz rada Rossion and Jacques (2008). Ordinata daje informaciju o naponu (izraženom u mikrovoltima, μV) određene lokacije na skalpu. Apscisa prikazuje vreme u milisekundama u odnosu na početak prikazivanja stimulusa. Vidimo da su signali uprosečeni na intervalu od 100 ms pre početka prikazivanja stimulusa do 400 ms nakon početka prikazivanja stimulusa. Prema tome, u ovom primeru dužine epoha su 500 ms. Dužine epoha i vremenska izloženosti stimulusu će varirati u zavisnosti od prirode istraživanja. Dinamika talasa, kao i amplitude tih talasa pružaju

informacije o tome kako ispitanik obrađuje stimulus kojem je izložen. Različiti tipovi stimulusa izazivaju talase sa imanentnim obrascima ponašanja koji se razlikuju u zavisnosti od tipa stimulusa.



Slika 3.2 Primer talasa u ERP istraživanju tokom posmatranja ljudskih lica (crna krivulja) i automobila (siva krivulja).

Izvor: Rossion and Jacques (2008).

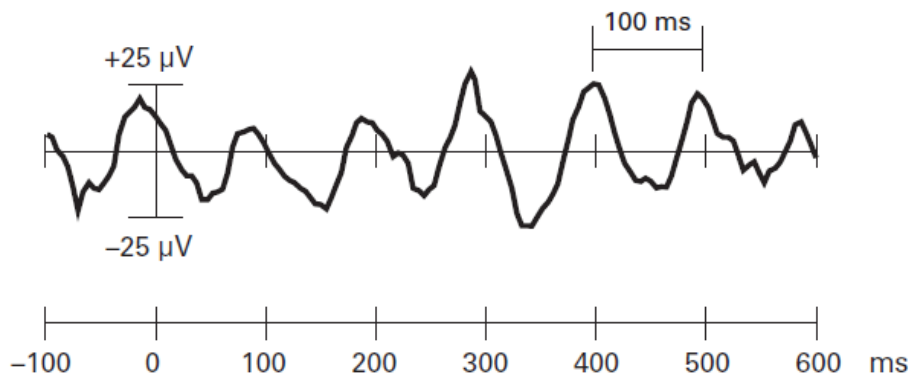
Talasi sa pozitivnim i negativnim devijacijama, predstavljaju osnove komponente ERP signala. Prema usvojenoj konvenciji, talasi sa rastućom voltažom se obeležavaju sa P (pozitivni), dok se negativno usmereni talasi obeležavaju slovom N. Pored slova P/N sledi broj koji označava poziciju komponente. Ovaj broj će ili biti predstavljen kroz milisekunde ili kao redni broj talasa. Na primer, Slika 3.2 prikazuje komponentu P1, gde P označava pozitivan talas dok broj 1 govori da je to prvi talas sa rastućim kretanjem. Ova komponenta je mogla biti i označena kao P100, budući da prvi pozitivni talas dostiže maksimum oko 100 ms nakon izlaganja stimulusu. Druga označena komponenta je prvi negativni talas koji nastaje oko 170 ms nakon stimulusa, odnosno komponenta N170. Sledeća komponenta na slici bi bila P2 (koja ima maksimum oko 250 ms). Talazi će biti više ili manje izraženi, u zavisnosti od toga sa kog dela skalpa dolazi signal koji se analizira, koji tip stimulusa se koristi u eksperimentu, kao i psihološkog stanja samog ispitanika. Na primer, moguće je u određenim kontekstima imati nekoliko pozitivnih i negativnih talasa sa visokim amplitudama, a opet u drugim situacijama dva talasa sa niskim amplitudama. Ti različiti konteksti u relaciji sa različitim komponentama ERP talasa su upravo predmet istraživanja u analizama evociranih potencijala.

Interesantan primer je komponenta N170 (odnosno N1 u našem primeru) koja odražava stepen selektivne pažnje, obrađivanje poznatih predmeta i obrađivanje lica ljudi (Rossion & Jacques, 2008). U eksperimentu koji su sprovedli Rossion and Jacques (2008), ispitanicima su prikazivane slike ljudskih lica i automobila nasumičnim redom. Nakon prikazivanja slika, odvojenim računanjem proseka signala za epohe sa ljudskim licima i automobilima dobijena su dva signala (Slika 3.2 - crnom bojom označen ERP signal dobijen tokom gledanja ljudskih lica, sivom bojom tokom gledanja slika automobila). Komponenta N170 ima veću amplitudu kod obrađivanja slika, naročito u okcipitalnom delu korteksa, što govori o pojačanoj aktivnosti ovog dela mozga tokom gledanja lica drugih ljudi. Ukoliko smo eksperti u nekoj oblasti, onda ćemo generalno predmete sa kojima imamo često susret obraditi sa većom pažnjom nego one sa kojima nismo često u kontaktu. To se odražava kroz intenzitet N170 komponente. Na primer,

ekspert za ptice će imati veću amplitudu ove komponente kada gleda pticu u odnosu na bilo koju drugu životinju (Luck, 2014).

3.2.2.2 Frekvenciona analiza

Frekvenciona analiza neurosignala ima bitnu ulogu u primenjenim istraživanjima. Sam neurosignal može i ne mora biti oscilatorne prirode, ali poznavanje prirode signala, kao i lokacije na kojoj je signal registrovan ima veliki značaj za istraživače. Koliko je bitna brzina oscilacija neurosignala govori i činjenica da različiti domeni frekvencija signala imaju svoja imena, alfa, beta, gama, teta i gama talasi, koje smo ukratko objasnili u delu 3.2.1. Izvori nastanka ovih talasa su nedovoljno istražena oblast. Na primer, alfa talasi jednim delom reflektuju tok signala koji ide kroz petlju između korteksa i talamusa brzinom od oko 10 Hz (Klimesch et al., 2007). Primer signala sa izraženim alfa oscilacijama, snimljenog sa okcipitalnog dela skalpa ispitanika, ilustruje Slika 3.3. Na slici se vidi da električni potencijal raste i pada u proseku na svakih 100 ms, što znači da ovaj signal napravi oko 10 ciklusa u sekundi, odnosno osciluje brzinom od oko 10 Hz.

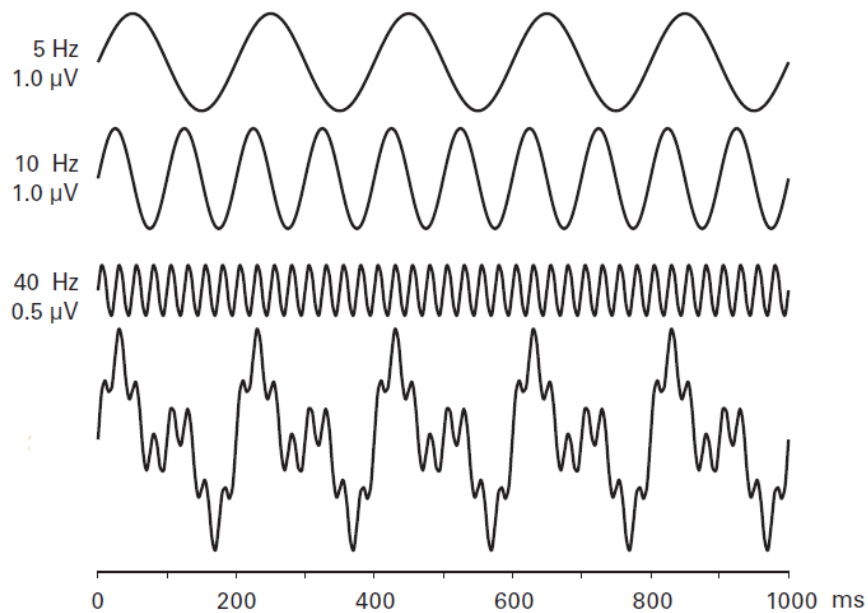


Slika 3.3 Primer EEG signala sa izraženom alfa aktivnošću.

Izvor: Luck (2014, 17).

Indeks mentalnog angažovanja osobe (koji uzima visoke vrednosti npr. tokom kupovine skupih proizvoda), dobijen korišćenjem alfa, beta i teta talasa, jedan je od primera korišćenja oscilatorne prirode neurosignala (Freeman et al., 1999).

Problem koji se javlja kod analize neurosignala je taj što se retko kada dobije jasna slika kao što je ona koju prikazuje signal koji ilustruje Slika 3.3, gde golim okom može da se ustanovi dominantna frekvenciju. Obično će signal biti zbir različitih signala sa različitim frekvencijama. Ako se na to još doda i činjenica da nisu svi signali oscilatorne prirode i da pored neuroaktivnosti u signalu imamo šum izazvan artefaktima, stvari se dodatno komplikuju. Slika 3.4 ilustruje kako izgleda mešavina tri signala sa različitim frekvencijama i amplitudama (četvrti signal na slici). Vidi se da se sabiranjem signala frekvencija od 5, 10 i 40 Hz dobija signal koji odražava oscilatornu prirodu sve tri frekvencije. Jedna od glavnih uloga frekvencione analize u neuroistraživanjima je dekomponovanje registrovanog signala sa skalpa ispitanika na osnovne frekvencije iz kojih je dobijen. Srećom po neuroistraživače, matematička procedura pod nazivom Furijeova transformacija omogućava bolje sagledavanje frekvencione strukture neurosignala. U nastavku će biti bliže objašnjena metodologija koja stoji iza Furijeove analize.



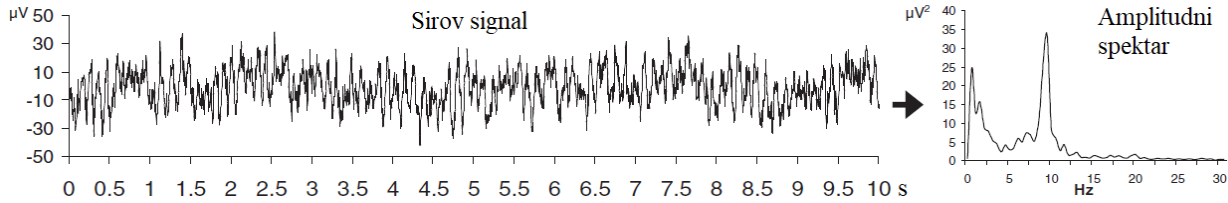
Slika 3.4 Primer sumiranja signala različitih frekvencija i amplituda. Četvrti signal predstavlja zbir prvih tri signala.

Izvor: Luck (2014, 18).

3.2.2.3 Furijeova analiza

Furijeove transformacije, nazvane u čast slavnog francuskog naučnika Žozefa Furijeja (1768-1830), igraju bitnu ulogu u frekvencionoj analizi neurosignala. EEG uređaj snima električnu aktivnost sa površine skalpa i kao izlazni rezultat dobija se električni potencijal meren u intervalu koji se meri milisekundama, za svaku lokaciju gde je postavljena elektroda. Ovakav signal tipično zovemo *sirov signal*. Furijeove transformacije omogućavaju da se tako dobijen sirov signal analizira u određenom frekvencionom opsegu. Slika 3.5 ilustruje primer transformacije sirovog signala u tzv. amplitudni spektar. U ovom trenutku je bitno istaći da postoji i fazni spektar, o kome će kasnije biti više reči. Radi pojednostavljenja, u nastavku izlaganja u ovom delu rada će se pod terminom spektar podrazumevati da se radi o amplitudnom spektru.

Spektar predstavlja prikaz signala iz ugla frekvencija. Na apscisi spektra imamo frekvencije (u hercima, Hz), dok je na ordinati data električna snaga (u mikrovoltima na kvadrat). Sa spektralnog prikaza koji daje Slika 3.5 se vidi da frekvencije od oko 10 Hz imaju skok u snazi u odnosu na ostale frekvencije. To sugeriše da alfa talasi dominiraju u posmatranom signalu. Spektar sumarnog signala koji prikazuje Slika 3.4 (četvrti red) imao bi tri skoka, na 5, 10 i 40 Hz, dok bi ostale frekvencije imale snagu nula. Na osnovu amplitudnog i faznog spektra možemo da rekonstruišemo signal u vremenskom domenu, što predstavlja inverznu Furijeovu transformaciju. Ovo može biti od značaja ako npr. želimo da uklonimo šum na određenim frekvencijama i da nadalje koristimo „očišćen“ sirov signal.



Slika 3.5 Transformacija sirovog signala iz vremenskog domena u frekvencioni.

Izvor: Smith et al. (2017).

Spektar predstavlja osnovni input mnogih primenjenih istraživanja, a naročito marketinških. Snaga kod različitih opsega frekvencija nam pruža uvid u moguće prisustvo različitih moždanih talasa koji govore o hroničnom i situacionom psihološkom stanju kupca (Ohme et al., 2009; Ramsøy et al., 2018; Ravaja et al., 2013). Koncentrisanje snage oko određenih frekvencija je dobar indikator neuralne oscilacije u korteksu koji se nalazi ispod posmatrane elektrode. Međutim, moramo imati u vidu potencijalno prisustvo artefakata, kao npr. šum na 50 Hz usled električnog prenosa, koji će se reflektovati kroz skok u snazi na datoj frekvenciji u spektru.

3.2.2.3.1 Transformacija signala Furijeovim transformacijama

U pozadini Furijeovih transformacija leži postavka da se svaki periodični signal može rekonstruisati kao suma sinusoidnih talasa. Furijeov red predstavlja reprezentaciju periodične funkcije i ima oblik

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t). \quad (3.1)$$

Leva strana jednakosti predstavlja periodičnu funkciju $f(t)$, dok desna strana predstavlja sumiranje sinusoidnih talasa. Član a_0 se naziva jednosmerna komponenta i jednak je srednjoj vrednosti signala. Koeficijenti Furijeovog reda su predstavljeni sa a_k i b_k i oni igraju bitnu ulogu u određivanju amplitudnog spektra o kome će više reči biti kasnije. Koeficijent ω_0 predstavlja osnovnu frekvenciju koja je data sa:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.2)$$

gde je T period signala. Opšti član Furijeovog reda, odnosno k -ti harmonik⁴ je dat sledećim izrazom:

$$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t. \quad (3.3)$$

Vidimo da su frekvencije harmonika, $k\omega_0$, multiplikatori osnovne frekvencije, ω_0 . Ukoliko uvedemo sledeće smene:

$$C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

$$\theta_k = \tan^{-1}(b_k/a_k),$$

onda harmonik možemo predstaviti kao:

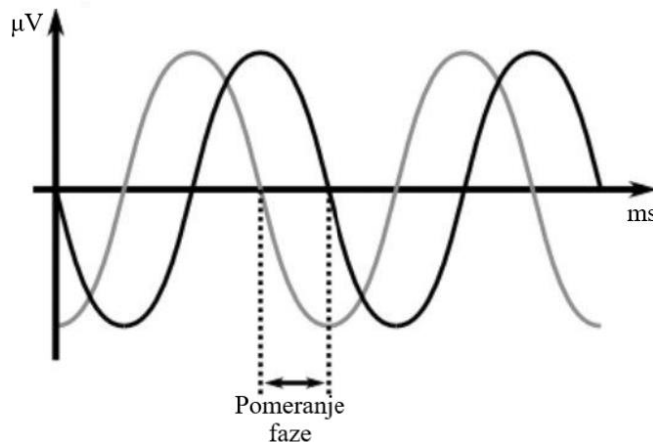
$$a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t = C_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k). \quad (3.4)$$

⁴ Harmonik (engl. *harmonic*) je talas sa frekvencijom koja je jednaka pozitivnom celom multiplikatoru osnovne frekvencije, tj. frekvencije originalnog periodičnog signala.

Na osnovu prethodnih jednakosti može se izvesti tzv. amplitudno-fazna reprezentacija Furijeovog reda, koja glasi:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k), \quad \text{za } t_1 \leq t \leq t_1 + T. \quad (3.5)$$

gde je sa C_k označena amplituda k -tog harmonika, dok je sa θ_k označena faza čiji se skup rešenja nalazi u intervalu $(-\pi, \pi)$. Za dva talasa iste amplitude i frekvencije ćemo reći da koincidiraju ukoliko su im faze jednake (ili se razlikuju za 2π). Ukoliko im se faze razlikuju, onda kažemo da postoji kašnjenje talasa. Na primer, kosinusoida predstavlja sinusoidu sa faznim pomeranjem za $\pi/2$ zbog čega kažemo da sinusna funkcija kasni za kosinusnom funkcijom za $\pi/2$. Geometrijski, promena faze predstavlja pomeranje signala po horizontali, kao što ilustruje Slika 3.6.



Slika 3.6. Prikaz faznog pomeranja signala.

Frekvenciona analiza kontinuelnog signala se sprovodi preko Furijeove transformacije koja je data sa:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (3.6)$$

gde argument ω označava frekvenciju merenu u radijanima po sekundi. Pod integralom se nalazi ulazni signal, $x(t)$, i sinusoida data u kompleksnoj formi sa frekvencijom ω . Jedan od načina na koji možemo da posmatramo izraz (3.6) je da je to kovarijansa ulaznog signala i sinusoide sa frekvencijom ω . Što je veće slaganje između ulaznog signala i posmatrane sinusoide, to će izraz (3.6) imati veću vrednost. Bitno je istaći da se kao izlazni rezultat datog izraza dobija kompleksan broj, tako da se uzimanjem apsolutne vrednosti kompleksnog broja $X(\omega)$ dobija amplitudni spektar, dok argument funkcije, $\arg X(\omega)$, predstavlja fazni spektar.

Iako mozak generiše kontinuelne neurosignale, podaci koji se dobijaju EEG uređajem su digitalizovani. Digitalizacija se može opisati kao uzorkovanje vrednosti analognog signala u pravilnim vremenskim intervalima, odnosno sa određenom frekvencijom. Prema tome, iz praktičnih razloga neophodno je izraz (3.6) prilagoditi diskretnom domenu. Furijeova transformacija diskretnog signala je data sledećim izrazom:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i\omega_N kn} \quad (3.7)$$

gde k označava redne brojeve frekvencionih intervala (engl. *frequency bins*), x_n predstavlja ulazni signal, N broj uzorkovanih jedinica signala, a ω_N je zamena za $2\pi/N$. Da bi se ovo razložilo na amplitudni i fazni spektar potrebno je osloboditi se kompleksnog eksponenta. To postizemo korišćenjem Ojlerove formule, date u opštem obliku sa:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (3.8)$$

Korišćenjem jednakosti (3.8) diskretna Furijeova transformacija iz (3.7) se može prebaciti u sledeći trigonometrijski izraz:

$$\begin{aligned} X(k) = & x_0[\cos(-\omega_N k(0)) + i \sin(-\omega_N k(0))] + \dots \\ & + x_n[\cos(-\omega_N k(n)) + i \sin(-\omega_N k(n))] + \dots \\ & + x_{N-1}[\cos(-\omega_N k(N-1)) + i \sin(-\omega_N k(N-1))] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Kada su vrednosti uzorkovanog signala (x_n) poznate, njih treba ubaciti u izraz (3.9) da bi se dobio kompleksan broj $X(k) = a_k + i b_k$ čiji realni i imaginarni deo, a_k i b_k , omogućavaju računanje amplitudnog i faznog spektra, odnosno $C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ i $\theta_k = \tan^{-1}(b_k/a_k)$.

Iako k označava redni broj frekvencionih intervala i uzima vrednosti od 0 do $N-1$, prilikom formiranja amplitudnog spektra na apscisi će se nalaziti frekvencije. Za $k=0$ kažemo da se naziva frekvencija jednosmerne struje i kod realnog signala⁵ ona iznosi 0 Hz. Širina frekvencionih intervala će zavisi od *frekvencione rezolucije*, odnosno preciznosti spektra. Frekvencionu rezoluciju dobijamo kao odnos uzoračke frekvencije (broj uzoračkih jedinica po sekundi) i ukupnog broja uzoračkih jedinica. Na primer, ako je uzoračka frekvencija 256 Hz, a ukupno je uzorkovano 128 jedinica, onda će frekvencionu rezolucija biti 2 Hz. Dakle, ukoliko bi se sirov signal sastojao iz mešavine frekvencija od 9 Hz i 10 Hz, diskretna Furijeova transformacija sa rezolucijom od 2 Hz ne bi mogla da detektuje oba signala u amplitudnom spektru.

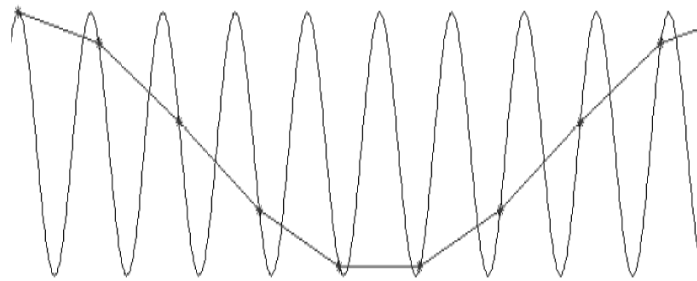
Diskretna Furijeova transformacija za N ulaznih vrednosti, kao izlazne vrednosti daje N kompleksnih brojeva iz kojih se izvodi amplitudni spektar. U praksi se ne koristi svih N izlaznih vrednosti Furijeove transformacije, budući da su one simetričan niz kompleksnih brojeva, odnosno postoji $N/2$ različitih vrednosti. Simetrija izlaznih vrednosti važi samo u situacijama kada su ulazne vrednosti realni brojevi, kao što je slučaj u neuroistraživanjima. Prema tome, drugu polovinu izlaznih vrednosti odbacujemo. Obično se amplitudni spektar prikazuje u jedinicama snage, odnosno mikrovoltima na kvadrat, μV^2 , o čemu će biti više reči u delu koji se odnosi na ocenjivanje spektra (3.2.2.3.3). Kada je broj ulaznih vrednosti mali, relativno je lako izračunati snagu signala po frekvencijama. Što je broj opservacija veći, to računanje snage signala po frekvencijama postaje sve teže, čak i za računare sa jakim procesorima. Stoga se, po pravilu, prilikom računanja diskretnih Furijeovih transformacija koriste algoritmi koji uprošćavaju broj operacija neophodnih za dobijanje spektra. Poznat i popularan algoritam je tzv. *brza Furijeova transformacija* (često se u literaturi obeležava skraćeno sa FFT; engl. *Fast Fourier transform*). Različite algoritme Furijeovih transformacija (uključujući i FFT) je moguće primeniti pomoću R programskog jezika, koristeći paket *stats v3.6.2* (R Core Team, 2019).

Uzoračka frekvencija EEG uređaja (broj uzoračkih jedinica po sekundi) ima veliki značaj u istraživanjima. U tekstu iznad je već rečeno da je frekvencionu rezolucija direktno proporcionalna

⁵ Želimo da skrenemo pažnju da, pored realnih, postoje i kompleksni signali, ali da u neuroistraživanjima kod ispitanika registrujemo samo realan signal.

uzoračkoj frekvenciji. Ono šta je dodatno važno napomenuti je da će i opseg frekvencija koje možemo da rekonstruišemo iz originalnog signala zavistiti od uzoračke frekvencije. Ovo sledi iz Nikvistove teoreme koja kaže da je najveća frekvencija koju možemo da rekonstruišemo iz signala jednaka polovini uzoračke frekvencije. Drugim rečima, sve frekvencije veće od tzv. Nikvistove frekvencije (polovina uzoračke frekvencije) će u rekonstruisanom signalu biti „lažno“ predstavljene signalima nižih frekvencija.

Slika 3.7 ilustruje situaciju gde je frekvencija signala veća od frekvencije uzorkovanja. To rezultira „lažno“ sporim signalom koji vidimo u registrovanim podacima. Distorzija signala nastala sporim uzorkovanjem se naziva vremenski alijasing (engl. *temporal aliasing*)⁶. Distorzija signala usled vremenskog alijasinga je jedan od razloga zašto su EEG uređaji sa većom frekvencijom uzorkovanja znatno skuplji.



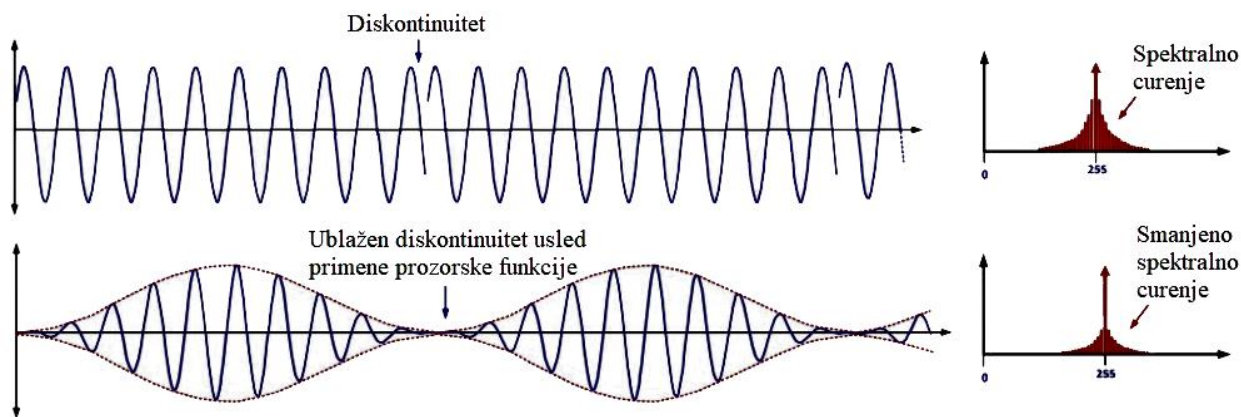
Slika 3.7 Primer uzorkovanja signala (predstavljeno zvezdicama) sa znatno manjom frekvencijom od signala koji se uzorkuje.

Izvor: Luck (2014, p. 179)

3.2.2.3.2 Prozorske funkcije i spektralno curenje

Bitna mana Furijeovih transformacija je ta što one pretpostavljaju beskonačnu periodičnost ulaznog signala. Kako uzorkovanje signala podrazumeva konačan broj vrednosti u određenom intervalu analognog signala, Furijeova transformacija će pretpostavljati da se uzorkovani signal ponavlja u beskonačnost pre i posle uzorkovanog intervala. Ovo će dovesti do pojave diskontinuiteta na krajevima uzorkovanog signala. Slika 3.8 (prvi red) pokazuje primer diskontinuiteta u signalu koji dovodi do distorzije u amplitudnom spektru. Ovakva distorzija se još naziva spektralno curenje (engl. *spectral leakage*) zbog osipanja snage na okolne frekvencije na amplitudnom spektru. Iako se sa slike vidi da se radi o pravilnom signalu sa jednom frekvencijom, amplitudni spektar pokazuje pozitivnu vrednost na „stvarnoj“, ali i na okolnim frekvencijama. Da nema diskontinuiteta, amplitudni spektar bi imao samo jednu vertikalnu liniju (engl. *spike*) na „stvarnoj“ frekvenciji, odnosno ne bi bilo spektralnog curenja (pod pretpostavkom da je frekvencija uzorkovanja bila dovoljno visoka da omogući da se izbegne vremenski alijasing).

⁶ Pored vremenskog, postoji i prostorni alijasing (engl. *spatial aliasing*) kod obrade prostorno uzorkovanih signala, kao što su na primer digitalne slike, ali ta tema prevazilazi okvire ovog rada.



Slika 3.8 Prikaz signala sa diskontinuitetom u vremenskom u frekvencionom domenu (prvi red) i njegove modifikovane verzije pomoću prozorske funkcije (drugi red).

Izvor: TI Precision Labs (2018).

Problem spektralnog curenja se može rešiti uz pomoć tzv. prozorskih funkcija. Primena prozorskih funkcija je *de facto* metod ponderisanja signala u vremenskom domenu. Medijalne vrednosti prozorskih funkcija imaju najveće vrednosti, koje zatim opadaju kako se kreće ka krajevima signala. To znači da se najveći značaj pridaje središnjim vrednostima u signalu, dok će vrednosti na levom i desnom kraju signala imati zanemarljiv uticaj pri formiranju spektra. Slika 3.8 (drugi red) najbolje ilustruje kako izgleda signal modifikovan prozorskom funkcijom. Vidimo da je diskontinuitet značajno ublažen zbog čega je i spektralno curenje značajno smanjeno u odnosu na amplitudni spektar nemodifikovanog signala. Postoji veliki broj prozorskih funkcija od kojih su najpoznatije: Hanova, Hemingova i Blekman-Harisova. Slika 3.9 daje prikaz amplitudnih spektara signala modifikovanih putem sve tri navedene prozorske funkcije.



Slika 3.9 Izgled amplitudnih spektara dobijenih nakon modifikacije sirovog signala određene frekvencije Hanovom (levi grafikon), Hemingovom (srednji grafikon) i Blekman-Harisovom (desni grafikon) prozorskom funkcijom.

Izvor: Niemitalo (2013).

Hanov prozor (engl. *Hann window*) je predstavljen izrazom (3.10) gde je sa n označena uzorkovana jedinica sirovog signala, dok N predstavlja veličinu ukupnog uzorka. Iz obrasca se može videti da vrednosti na krajevima signala imaju nulte pondere. U odnosu na nemodifikovan signal, Hanov prozor rezultira lakšim repovima (manje spektralno curenje). Sa druge strane, interval oko stvarne frekvencije sa visokim amplitudama biće širi, odnosno glavni lob će biti deblji (engl. *main lobe*). Slika 3.9 prikazuje primer spektra modifikovanog signala sa Hanovim prozorom. Dakle, kao rezultat se dobija smanjeno osipanje (lakši repovi), ali je cena toga slabija rezolucija (deblji lob) spektra.

$$w(n) = 0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.10)$$

Hemingov prozor (engl. *Hamming window*) je funkcija ponderisanja koja ima matematički oblik sličan Hanovom prozoru. Hemingov prozor vizuelno izgleda kao poplavljen Hanov prozor zbog „teže“ ponderacije na krajevima signala (Slika 3.9 - srednji grafikon). Odnosno, u ovom slučaju krajnje vrednosti signala nisu ponderisane nultim ponderima (kao kod Hanovog prozora), već im je ostavljeno prostora da utiču na formiranje amplitudnog spektra. Zbog nenultih pondera na krajevima, Hemingov prozor će generisati spektar sa težim repovima u odnosu na Hanov prozor, ali će repovi i dalje biti lakši nego u slučaju nemodifikovanog signala.

$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.11)$$

Blekman-Harisov prozor (engl. *Blackman-Harris window*) predstavljen je jednačinom (3.12), sa parametrima: $a_0=0,36$; $a_1=0,49$; $a_2=0,14$; $a_3=0,01$ (Nuttall, 1981). Ovaj prozor rezultira amplitudnim spektrom koji ima deblji glavni lob u odnosu na Hemingov i Hanov prozor, ali zato ima brže osipanje spektra. Kao što prikazuje Slika 3.9 (desni grafikon), Blekman-Harisov prozor karakteriše znatno manje spektralno curenje u odnosu na druge dve prozorne funkcije, ali i inferiorniju rezoluciju (deblji glavni lob).

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) - a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (3.12)$$

Ukratko, ne postoji najbolja prozorska funkcija. Izbor jednog od opisanih prozora predstavlja izbor između kvaliteta rezolucije i spektralnog curenja signala. U frekvencionim analizama EEG signala, gde moždani talasi imaju centralnu ulogu, čini se da je Hemingov prozor najbolji, odnosno najčešće preferiran izbor (Allen et al., 2004; Amodio et al., 2007; Smith et al., 2017a), dok je u ERP analizama (kod čišćenja signala) Blekman-Harisov prozor popularniji (Luck, 2014). Značajno je i skrenuti pažnju na to da podaci na kraju signala mogu nositi vredne informacije u istraživanju koje se sprovodi, dok se modifikacijom signala prozorskim funkcijama te informacije gube.

3.2.2.3.3 Spektar snage signala i njegovo ocenjivanje

Periodični signali mogu biti determinističkog ili stohastičkog tipa. Jednostavan signal determinističkog tipa se može predstaviti izrazom za sinusoidu:

$$x(n) = A \sin(n\omega + \phi), \quad (3.13)$$

gde su:

A – amplituda signala,

n – uzoračka jedinica,

ω – frekvencija, odnosno brzina signala u radijanima po sekundi, i

ϕ – početna faza oscilovanja.

Kod determinističkog signala ne postoji neizvesnost. Za svako t signal će imati realizaciju u skladu sa parametrima definisanim u (3.13). Međutim, u praksi u neuroistraživanjima signali koji se registruju EEG-om nisu determinističkog tipa. Neuron, čak i kad kada ispoljavaju oscilatornu aktivnosti, to čine

sa određenim stepenom slučajnosti. Dakle, signal koji registrujemo na skalpu ispitanika je stohastičkog tipa. Jednostavna forma stohastičkog signala se može predstaviti izrazom:

$$x(n) = A \sin(n\omega + \phi) + v(n) \quad (3.14)$$

gde su, imajući u vidu notaciju uvedenu za (3.13):

v - greška signala za koju obično pretpostavljamo da je Gausov beli šum sa varijansom σ_v^2 , i ϕ - početna faza oscilovanja koja prati uniformnu raspodelu na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Furijeovu transformaciju nije moguće direktno primeniti na signal oblika (3.14), tako da je potrebno zaobići stohastičku prirodu signala kako bismo dobili njegovu frekvencionu reprezentaciju. Ako pretpostavimo da je $x(n)$ stohastički proces koji je stacionaran u širem smislu (autokovarijansa za datu docnju i srednja vrednost signala su konstantne i ne zavise od n) onda snagu spektra možemo da definišemo sa:

$$S(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^N x(n) e^{-i\omega n} \right|^2 \right\} \quad (3.15)$$

gde je sa ω predstavljena ugaona frekvencija u radijanima po sekundi, dok je ostatak notacije isti kao u prethodnim izrazima. U ovom izrazu se unutar vertikalnih zagrada nalazi "problematična" Furijeova transformacija signala $x(n)$. Očekivana vrednost kvadrata Furijeove transformacije signala u slučaju beskonačno velike vremenske dužine signala je definisana kao snaga spektra. Za ovako definisanu snagu spektra važi *Viner-Hinčova teorema* (engl. *Wiener-Khinchine Theorem*) koja kaže da se gustina spektra snage stacionarnog stohastičkog signala može predstaviti Furijeovom transformacijom autokorelacione funkcije tog signala (Ricker, 2003, p. 23), odnosno:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) e^{-i\omega k} \quad (3.16)$$

gde je sa $r(k)$ označena autokorelaciona funkcija realnog signala $x(n)$ sa docnjom k data izrazom:

$$r(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n+k)x(n). \quad (3.17)$$

Viner-Hinčova teorema, data sa (3.16) i (3.17), omogućava da se prevaziđe problem koji se odnosi na Furijeovu transformaciju stohastičkog procesa. U izrazu (3.16) nema stohastičkih članova, budući da je autokorelaciona funkcija deterministički određena. Međutim, problem kod ovog pristupa je taj što pretpostavlja da postoji signal beskonačne dužine i da je taj signal stacionaran. U praksi ovi uslovi nisu zadovoljeni. Štaviše, u praksi smo često ograničeni na kratke intervale snimanja EEG signala tokom kojih različiti eksterni i/ili interni procesi kod ispitanika (npr. različite scene tokom gledanja reklame) sistematski menjaju dinamiku neuroaktivnosti tako da je stacionarnost na dužim intervalima u praksi gotovo sasvim nemoguća.

Bitna osobina snage spektra stohastičkih realnih signala je simetričnost izlaznih vrednosti snage spektra, odnosno $S(-\omega) = S(\omega)$. Sledi da se snaga signala u određenom frekvencionom opsegu $[\omega_1, \omega_2]$ može dobiti kao:

$$P(\omega_1, \omega_2) = 2 \sum_{\omega=\omega_1}^{\omega_2} S(\omega). \quad (3.18)$$

Drugim rečima, pošto je izlazni rezultat Furijeove transformacije simetričan, dovoljno je zadržati samo jednu polovinu dobijenih vrednosti. Kako bi ukupna snaga spektra ostala ista, množimo $S(\omega)$ sa dva i sumiramo za traženi frekvencioni domen. Bitno je istaći da frekvencije, ω_k , predstavljaju intervale dužine $1/T$, gde T predstavlja ukupnu dužinu signala u sekundama. Time se omogućava da se snaga spektra u određenom frekvencionom domenu dobije sumiranjem pojedinačnih $S(\omega_i)$, gde je $i=0, 1, \dots, N-1$. Geometrijski posmatrano, (3.18) predstavlja sabiranje pravougaonika sa osnovicom $1/T$ i visinom $2S(\omega_i)$, na intervalu $[\omega_1, \omega_2]$.

U nastavku će biti opisani osnovni metodi ocenjivanja snage spektra stohastičkog signala: periodogram, modifikovani periodogram, Bartletov metod i Velčov metod. Svi navedeni metodi predstavljaju neparametarske metode budući da nemaju nikakve pretpostavke osim da je signal $x(n)$ stacionaran. Za svakog od metoda ćemo komentarisati njegove performanse, odnosno preciznost i nepristrasnost ocene koju pružaju.

3.2.2.3.4 Periodogram

Metod periodograma se bazira na jednakostima (3.16) i (3.17). Furijeova transformacija autokorelacione funkcije je polazna tačka ovog metoda. Autokorelaciona funkcija procesa $x(n)$ u konačnom uzorku se ocenjuje sledećim izrazom:

$$\hat{r}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x(n); \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.19)$$

Za ovaj model je cena snage spektra, odnosno *periodogram*, data sa:

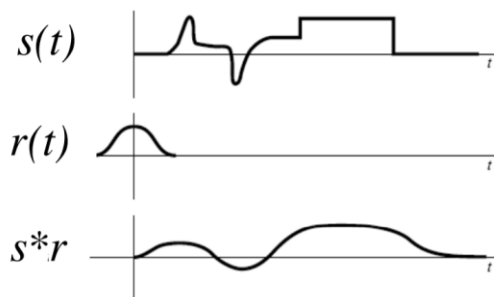
$$\hat{S}_{per}(\omega) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}(k) e^{-i\omega k}, \quad (3.20)$$

gde važi osobina simetričnosti autokorelacione funkcije, $\hat{r}(k) = \hat{r}(-k)$. Većina softverskih paketa koristi računski brži matematički ekvivalent nego što je onaj dat sa (3.20), koji umesto korelacione funkcije koristi Furijeovu transformaciju samog signala. Da bismo izveli periodogram gde figurira signal, najpre je potrebno definisati *operator konvolucije* i teoremu o konvoluciji. Teoremu o konvoluciji ćemo koristiti i prilikom ispitivanja performansi ostalih ocena snage spektra. Operator konvolucije, koji se označava sa $*$, za neke dve funkcije f i g se definiše u opštem obliku na sledeći način:

$$f(n) * g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-m)g(m) \quad (3.21)$$

Korisno je istaći geometrijsku interpretaciju konvolucije. Luck (2014, Chapter 11) kaže za konvoluciju da je to „fensi” metod pokretnih proseka. Konvolucija svakako nije metod pokretnih proseka, ali se može upotrebiti sa istim ciljem – kako bi se iz signala odstranili sitniji šumovi. Na primer, ako se sa $f(n)$ označi signal, a sa $g(n)$ pravougaona funkciju širine a i visine $1/a$, onda će $f(n)*g(n)$ biti ugláčana (engl.

smoothing) funkcija dobijena korišćenjem metode pokretnih proseka sa širinom prozora a . Prema tome, metod pokretnih proseka jeste specijalan slučaj primene konvolucije.



Slika 3.10 Ilustracija efekta ugaćavanja korišćenjem konvolucije funkcija $s(t)$ i $r(t)$.
Izvor: Graham (2009).

Teorema o konvoluciji kaže da je Furijeova transformacija konvolucije dve funkcije jednaka proizvodu Furijeovih transformacija tih funkcija. Formalno se teorema o konvoluciji može predstaviti sa:

$$\mathcal{F}\{f(n) * g(n)\} = \mathcal{F}\{f(n)\}\mathcal{F}\{g(n)\} \quad (3.22)$$

gde \mathcal{F} predstavlja operator Furijeove transformacije. Važi i obrnuto:

$$\mathcal{F}\{f(n)g(n)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{f(n)\} * \mathcal{F}\{g(n)\}. \quad (3.23)$$

Bitno je istaći da će faktor skaliranja $1/(2\pi)$ figurirati u izrazu (3.23) samo ako se kao argument funkcije Furijeove transformacije koristi ugaona frekvencija, kao što je bilo pretpostavljeno prilikom definisanja snage spektra u (3.15). Alternativno, da je argument funkcije Furijeja bila obična frekvencija, izražena u hercima, onda u (3.23) ne bismo imali faktor skaliranja $1/(2\pi)$ (Kammler, 2007, p. appendix).

Neka je $x_N(n)$ funkcija signala koja je definisana tako da je za $n=0, 1, \dots, N-1$ jednaka registrovanom signalu, $x(n)$, dok u ostalim slučajevima uzima vrednost 0. Samim tim $x_N(n)$ možemo predstaviti kao proizvod $x(n)w_P(n)$, gde je $w_P(n)$ tzv. funkcija pravougaonog prozora, koja za $n=0, 1, \dots, N-1$ ima vrednost 1, a 0 u ostalim slučajevima. Kasnije ćemo se vratiti na ovu alternativnu reprezentaciju signala. Sad je bitno samo primetiti da se signal $x(n)$, definisan na konačnom intervalu, može predstaviti u formi signala definisanom na neograničenom intervalu, $x_N(n)$, korišćenjem funkcije pravougaonog prozora. Sada ocenu autokorelacione funkcije iz (3.19) možemo predstaviti kao:

$$\hat{r}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n+k)x_N(n) = \frac{1}{N} x_N(k) * x_N(-k) \quad (3.24)$$

gde smo koristili operator konvolucije signala, što upravo predstavlja deo jednakosti koji se nalazi pod sumom. Koristeći teoremu o konvoluciji, možemo da primenimo Furijeovu transformaciju nad izrazom (3.24), odakle se dobija:

$$\mathcal{F}\{\hat{r}(k)\} = \frac{1}{N} \mathcal{F}\{x_N(k)\}\mathcal{F}\{x_N(-k)\} = \frac{1}{N} \mathcal{F}\{x_N(k)\}\mathcal{F}\{x_N(k)\}^*. \quad (3.25)$$

Ovde smo koristili svojstvo konjugovane simetričnosti i parnosti Furijeovih transformacija realnog signala, $\mathcal{F}\{x_N(-k)\} = \mathcal{F}\{x_N(k)\}^*$, gde je $\mathcal{F}\{x_N(k)\}^*$ konjugovani kompleksni broj Furijeove

transformacije. Imajući u vidu osobinu kompleksnih brojeva da je proizvod bilo kog kompleksnog broja i njegove konjugovane vrednosti kvadrat apsolutne vrednosti tog kompleksnog broja, kao i definicije ocene iz (3.20), *alternativni izraz za snagu spektra* se može predstaviti sa:

$$\mathcal{F}\{\hat{r}(k)\} = \hat{S}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i\omega n} \right|^2. \quad (3.26)$$

Iz (3.26) se vidi da je za dobijanje periodograma dovoljno sprovesti samo nekoliko koraka prilikom obrade registrovanog EEG signala. U prvom koraku se sprovodi Furijeova transformacija registrovanog signala kako bi se dobio vektor kompleksnih brojeva dužine N. U drugom koraku se računaju apsolutne vrednosti dobijenih kompleksnih brojeva. U trećem koraku se računa prosek kvadriranih vrednosti.

Poželjne osobine svake ocene su da je nepristrasna i da ima najmanju moguću grešku ocenjivanja. Glavna karakteristika periodograma je njegova jednostavnost. U nastavku ćemo analizirati nepristrasnost periodograma i njegovu standardnu grešku. Iz (3.19) se izvodi očekivana vrednost ocene autokorelacione funkcije, gde se dobija:

$$E(\hat{r}(k)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} E(x(n+k)x(n)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} r(k) = \frac{N-k}{N} r(k). \quad (3.27)$$

Iz gornjeg izraza sledi da je ocena autokorelacije pristrasna za konačne intervale signala. Služeći se jednakostima (3.20) i (3.27), dobija se očekivana vrednost ocene snage spektra, koja iznosi:

$$E(\hat{S}_{Per}(\omega)) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \frac{N-k}{N} r(k) e^{-i\omega k} \neq \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) e^{-i\omega k} = S(\omega). \quad (3.28)$$

Iz (3.28) sledi da je periodogram pristrasna ocena snage spektra za konačne signale. Pristrasnost se prenosi iz ocene korelacione funkcije signala. Međutim, za veliko N periodogram postaje nepristrasna ocena, što se vidi iz granične vrednosti razlomka u izrazu (3.28), odnosno $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-k}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} 1 - \frac{k}{N} = 1$.

Dakle, periodogram je pristrasna, ali asimptotski nepristrasna ocena snage spektra stohastičkog signala. Odnosno, važi da je:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\hat{S}_{Per}(\omega)) = S(\omega). \quad (3.29)$$

Kada je reč o varijansi periodograma, treba skrenuti pažnju da sa povećanjem N ona u opštem slučaju ne teži 0. Dokaz ove osobine za opštu formu stacionarnog stohastičkog signala prevazilazi okvire ovog rada tako da će samo biti izložen rezultat izveden u Hayes (1996, p. 403), a to je da važi sledeće:

$$Var(\hat{S}_{Per}(\omega)) \approx S^2(\omega). \quad (3.30)$$

Dakle, u opštem slučaju varijansa periodograma ne teži 0 sa povećanjem N, već je približno jednaka snazi spektra na kvadrat, nezavisno od N. U specijalnom slučaju kada je x(n) Gausov beli šum onda će umesto aproksimacije u izrazu (3.30) važiti znak jednakosti (videti u Hayes (1996, p. 405)).

3.2.2.3.5 Modifikovani periodogram

Prilikom ispitivanja periodograma podrazumevali smo funkciju signala, $x_N(n)$, koja predstavlja proizvod signala $x(n)$ i pravougaone funkcije prozora, $w_P(n)$, koja uzima 1 za $n=0,1,\dots,N-1$; a 0 u ostalim slučajevima. U praksi su signali uvek konačne dužine tako da se pravougaona funkcija prozora implicitno primenjuje kada god se Furijeova transformacija sprovodi nad sirovim signalom. Međutim, kao što je već bilo reči, postoje mnoge druge funkcije prozora koje se mogu koristiti umesto pravougaone. Glavna motivacija za izbor funkcije prozora leži, svakako, u smanjivanju spektralnog curenja.

Koristeći istu logiku koju smo primenili kod (3.24), pretpostavimo da je $x_N(n) = x(n)w(n)$, gde je sada $w(n)$ bilo koja funkcija prozora, izraz (3.26) možemo da generalizujemo tako da važi:

$$\hat{S}_m(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n) e^{-i\omega n} \right|^2 \quad (3.31)$$

čime smo definisali *modifikovani periodogram* bez korektivnog faktora. Može se primetiti da se uvođenjem prozorske funkcije omogućava da se pod sumom n kreće u beskonačnom intervalu. Ovu povoljnost ćemo iskoristiti za ispitivanje nepristrasnosti, pošto ćemo moći da primenimo konvoluciju (što ne bi bio slučaj da smo imali konačne granice kod sume). Da bismo ispitali nepristrasnost ocene (3.31) primenićemo očekivanu vrednost na obe strane jednakosti i razložiti desnu stranu na činioce imajući u vidu da su $x(n)$ i $w(n)$ realne funkcije, čime izbegavamo korišćenje konjugovanja. Sledi da je očekivana vrednost ocene snage spektra data sa:

$$\begin{aligned} E\{\hat{S}_m(\omega)\} &= \frac{1}{N} E \left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n) e^{-i\omega n} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)w(m) e^{-i\omega m} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{N} E \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)w(n)x(m)w(m)e^{-i\omega(n-m)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Kako su jedino signali $x(n)$ i $x(m)$ slučajne varijable u izrazu (3.32), operator očekivane vrednosti možemo da prebacimo unutar sume i dobijemo sledeću jednakost:

$$E\{\hat{S}_m(\omega)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{x(n)x(m)\}w(n)w(m)e^{-i\omega(n-m)}$$

Koristeći definiciju autokorelacione funkcije, gde je donja data sa $n-m$, sledi da je:

$$E\{\hat{S}_m(\omega)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r(n-m)w(n)w(m)e^{-i\omega(n-m)}$$

Uvođenjem smene $k=n-m$ i sređivanjem izraza dobijamo finalni izraz:

$$E\{\hat{S}_m(\omega)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(k) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} w(n)w(n-k) \right] e^{-i\omega k}. \quad (3.33)$$

Rezultujući izraz (3.33) predstavlja Furijeovu transformaciju proizvoda korelacione funkcije i izraza u uglastoj zagradi. Snagu spektra smo definisali kao Furijeovu transformaciju korelacione funkcije (3.16). Primenom teoreme o konvoluciji (3.23) i vodeći računa da u uglastoj zagradi u (3.33) imamo izraz koji predstavlja operaciju konvolucije nad $w(n)$, dobijamo sledeće:

$$E\{\hat{S}_m(\omega)\} = \frac{1}{2\pi N} S(\omega) * \mathcal{F}\{w(k) * w(-k)\} \neq S(\omega), \quad (3.34)$$

odakle sledi da je *modifikovani periodogram* pristrasna ocena snage spektra. Iz poslednjeg izraza takođe sledi da je očekivana vrednost ocene, zapravo, uglačana funkcija snage spektra. To se može zaključiti zato što je u izrazu (3.34) snaga spektra konvoluirana sa drugim delom izraza koji se odnosi na funkciju prozora (tačnije, Furijeova transformacija konvolucije funkcije prozora). Može se pokazati da je dobijena ocena i asimptotski pristrasna (Hayes, 1996, p. 410) zbog čega se obično izraz (3.31) deli sa korektivnim faktorom:

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n)^2, \quad (3.35)$$

pa sledi da je *modifikovani periodogram sa korektivnim faktorom*, koji predstavlja pristrasnu i asimptotski nepristrasnu ocenu snage spektra, dat izrazom:

$$\hat{S}_M(\omega) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n) e^{-i\omega n} \right|^2. \quad (3.36)$$

Ovakva definicija ocene predstavlja generalizaciju običnog periodograma. Kod običnog periodograma, $w(n)$ je pravougaona funkcija prozora za koju će korektivni faktor (3.35) imati vrednost 1 tako da se izraz (3.36), za $w(n)=w_p(n)$, svodi na (3.26). Prema tome, (3.26) je specijalan slučaj (3.36).

Kod računanja varijanse modifikovanog periodograma situacija se ne razlikuje u odnosu na običan periodogram. Aproksimacija varijanse modifikovanog periodograma (sa i bez korektivnog faktora) je u opštem slučaju data sa:

$$\text{Var}(\hat{S}_M(\omega)) \approx S^2(\omega). \quad (3.37)$$

U poređenju sa periodogramom, modifikovani periodogram ima slične performanse u odnosu na (ne)pristrasnost i varijansu ocene. Prednost modifikacije prozorskim funkcijama se ogleda u uticaju na bolju rezoluciju spektra, što može igrati bitnu ulogu ukoliko je preciznost frekvencije signala od posebnog značaja.

3.2.2.3.6 Bartletov metod

Bartletov metod, ili metod uprosečavanja periodograma, se bazira na rezultatu da je periodogram asimptotski nepristrasna ocena snage spektra. Problem sa periodogramom je taj što čak i za beskonačno dugačak signal varijansa neće težiti nuli. Međutim, ako bi snaga spektra bila ocenjena periodogramom K puta, onda se može očekivati da bi se uprosečavanjem K periodograma dužine L , za veliko K i L , dobila nulta varijansa. Formalno, neka je $x_j(n)$ j -ta realizacija stacionarnog slučajnog procesa $x(n)$, za $j=1, 2, \dots, K$. Tada je periodogram za j -tu realizaciju dat sa:

$$\hat{S}_{Per}^j(\omega) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_j(n) e^{-i\omega n} \right|^2 ; j = 1, 2, \dots, K. \quad (3.38)$$

Bartletova ocena je tada data kao prosek K periodograma, odnosno

$$\hat{S}_{Bartlet}(\omega) = \frac{1}{KL} \sum_{j=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_j(n) e^{-i\omega n} \right|^2 = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \hat{S}_{Per}^j(\omega). \quad (3.39)$$

Ako bismo pretpostavili da su $x_i(n)$ za $i=1, 2, \dots, K$ nekorelisane realizacije stacionarnog slučajnog procesa $x(n)$ onda je, koristeći rezultat iz (3.34), očekivana vrednosti Bartletove ocene data sa:

$$\begin{aligned} E\{\hat{S}_{Bartlet}(\omega)\} &= \frac{1}{2\pi KL} \sum_{j=0}^{K-1} S(\omega) * \mathcal{F}\{w_P(k) * w_P(-k)\} \\ &= \frac{1}{2\pi KL} KS(\omega) * \mathcal{F}\{w_P(k) * w_P(-k)\} \\ &= \frac{1}{2\pi L} S(\omega) * \mathcal{F}\{w_P(k) * w_P(-k)\} = E\{\hat{S}_{Per}(\omega)\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Iz (3.40) sledi da je Bartletova ocena pristrasna, ali asimptotski nepristrasna što direktno sledi iz osobina periodograma (3.28).

Da bismo izveli varijansu Bartletove ocene koristićemo osobinu varijanse periodograma. Iz jednakosti (3.39) sledi da je varijansa jednaka:

$$\begin{aligned} Var\{\hat{S}_{Bartlet}(\omega)\} &= Var\left\{\frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \hat{S}_{Per}^j(\omega)\right\} = \frac{1}{K^2} Var\left\{\sum_{j=0}^{K-1} \hat{S}_{Per}^j(\omega)\right\} \\ &= \frac{1}{K^2} \cdot K \cdot Var\{\hat{S}_{Per}(\omega)\} = \frac{1}{K} Var\{\hat{S}_{Per}(\omega)\} \approx \frac{1}{K} S^2(\omega). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Sa povećanjem K , sledi, Bartletova ocena će imati varijansu nula. Dakle, za beskonačno L i K , Bartletova ocena je konzistentna ocena snage spektra. Kako se ova ocena zasniva na pretpostavci da su realizacije $x_i(n)$ za $i=1, 2, \dots, K$ nekorelisane, a imajući u vidu da u neuroistraživanjima ovo nikad nije zadovoljeno, sledi da će rezultati (3.40) i (3.41) važiti samo aproksimativno. Pojedinačne realizacije, $x_i(n)$, se dobijaju segmentacijom jedne realizacije procesa $x(n)$ dužine $N=KL$ na K segmenata (epoha; engl. *epochs*), gde je svaki segment dužine L .

3.2.2.3.7 Velčov metod

Velčov metod predstavlja kombinaciju modifikovanog periodograma i Bartetovog metoda. Ovaj metod omogućava dobijanje konzistentne ocene snage spektra uz poboljšanu rezoluciju usled korišćenja funkcije prozora. Ocena Velčovim metodom se dobija uprosečavanjem modifikovanih periodograma, gde je dozvoljena mogućnost da se epohe, odnosno segmenti preklapaju. Primena funkcija prozora i

preklapanje epoha su dve modifikacije u odnosu na Bartletov metod. Kao što je objašnjeno u delu 3.2.2.3.2, primenom funkcije prozora se omogućava ublažavanje diskontinuiteta registrovanog signala i samim tim smanjuje spektralno curenje. To se postiže ponderisanjem funkcije prozora koja najveću važnost daje podacima na sredini (medijani) registrovanog signala, dok podaci na krajevima repova dobijaju najmanje pondere tako da imaju zanemarljiv uticaj prilikom ocenjivanja snage spektra. Sa preklapanjem epoha sve opservacije registrovanog signala dobijaju priliku da budu uključene u ocenjivanje spektra sa većim ponderima. Na primer, ako je neka opservacija imala zanemarljiv ponder u i -toj epohi, onda će u $i+1$ -oj epohi ista opservacija imati veći ponder. Samim tim, možemo reći da Velčov metod preklapanjem epoha onemogućava rasipanje informacija usled primene prozora, dok obezbeđuje veću preciznost ocenjivanja spektra usled uprosečavanja većeg broja periodograma nego što je to slučaj sa Bartletovom metodom.

Neka je $x(n)$ stacionarni slučajni proces, a $x_j(n)$ j -ta sekvenca tog procesa dužine L , gde $j=1, 2, \dots, K$ predstavljaju epohe koje se preklapaju. Ako svaka epoha kreće od D -te opservacije prethodne epohe, onda kažemo da postoji skok prozora veličine D (engl. *Window hop size*). Formalno, j -tu epohu možemo da predstavimo sa:

$$x_j(n) = x(n + jD) \text{ za } n=0, 1, \dots, L-1; j=1, 2, \dots, K, \quad (3.42)$$

gde je L dužina epohe, K ukupan broj epoha i D skok prozora. U slučaju kad je $D=L$ onda nema preklapanja epoha, što je slučaj segmentacije kod Bartletovog metoda. Obično se u neuroistraživanjima sa signalom dobijenim putem EEG uređaja uzima da je $D=L/2$ ili $D=L/4$ (Coan & Allen, 2003; Hagemann & Naumann, 2001; L. A. Schmidt & Trainor, 2001). Koristeći izraz za epohu koji smo definisali u (3.42) dobija se da je ocena dobijena Velčovim metodom data sa:

$$\hat{S}_{Velč}(\omega) = \frac{1}{KLU} \sum_{j=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x(n + jD) w(n) e^{-i\omega n} \right|^2 = \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \hat{S}_M^j(\omega), \quad (3.43)$$

gde smo sa U označili korektivni faktor koji koristimo kad primenjujemo funkciju prozora (3.35), a $w(n)$ je neka funkcija prozora. Krajnji izraz za Velčovu ocenu u (3.43) se dobija smenom, korišćenjem izraza za ocenu modifikovanog periodograma (3.36) gde se dobija da je ocena data kao prosek modifikovanih periodograma. Iz izraza za Velčovu ocenu (3.43) sledi da je njena očekivana vrednost data sledećim izrazom:

$$E\{\hat{S}_{Velč}(\omega)\} = E\left\{ \frac{1}{K} \sum_{j=0}^{K-1} \hat{S}_M^j(\omega) \right\} = E\{\hat{S}_M(\omega)\}. \quad (3.44)$$

Imajući u vidu da je očekivana vrednost modifikovanog periodograma pristrasna, a asimptotski nepristrasna ocena snage spektra (3.34), iz (3.44) sledi da isti zaključak mora da važi i za Velčovu ocenu.

Izvođenje varijanse ocene u ovom slučaju je znatno otežano pošto zbog preklapanja epoha nije smisleno pretpostaviti (čak ni aproksimativno) nekorelisanost realizacija signala između epoha kao što je to bio slučaj kod Bartletove ocene. Međutim, pod pretpostavkom skoka prozora $D=L/2$ i trougaone prozorske funkcije, pokazano je da važi da je varijansa Velčove ocene približno jednaka polovini varijanse Bartletove ocene (Hayes, 1996, p. 419; Welch, 1967). Ovo je rezultat toga što za skok prozora $L/2$ imamo duplo više periodograma koje možemo da uprosečimo u odnosu na Bartletovu ocenu. Iako je ovaj rezultat gruba procena odnosa varijansi ocena pomenutih metoda, on govori u prilog primeni Velčovog metoda

u neuroistraživanjima. Važno je skrenuti pažnju da bi bilo pogrešno sada zaključiti da je bolje imati što manji skok prozora kako bi se dobilo što više periodograma za uprosečavanje. Ovo je stoga što bi takav pristup generalno doveo do veće korelisanosti između odgovarajućih opservacija signala među epohama, pa samim tim i veće greške ocene.

4 BAJESOVA PARADIGMA

Preovlađujući pristup u statističkim analizama trenutno zauzima *frekvencionistička statistika*. Alternativu frekvencionističkom pristupu pruža *Bajesova statistika* čiji je osnivač Tomas Bajes (1702-1761). Poslednjih godina računari su postali znatno brži i pristupačniji istraživačima, što je uticalo na znatno veću rasprostranjenost u primeni Bajesovih metoda. Prema Kruschki (2011) prethodni vek je obeležio frekvencionistički pristup testiranju multih hipoteza, a 21. vek polako postaje doba Bajesove statistike. Još od svog nastanka, Bajesova statistika je trpela velike kritike koje su se mahom odnosile na neobjektivnost ovog pristupa. Sa druge strane, zagovornici primene Bajesove statistike smatraju da je Bajesov pristup jednako (ne)objektivan kao frekvencionistički budući da i sami frekvencionisti često pribegavaju različitim pretpostavkama, koje često nisu zadovoljene u praksi. Bajesov pristup podrazumeva korišćenje apriornih informacija dobijenih iz različitih izvora (druga istraživanja, iskustvo istraživača itd.), ali i prikupljenih podataka iz trenutnog istraživanja. Sa druge strane, frekvencionisti se oslanjaju samo na prikupljene podatke iz istraživanja. Ukoliko istraživač već ima neka saznanja o konkretnoj temi i pre početka prikupljanja podataka, onda, po Bajesovom pristupu takve informacije bi bile inkorporirane u istraživački okvir (dizajn). Upravo iz tog razloga smatramo da je Bajesov pristup znatno realističniji od frekvencionističkog prilikom modeliranja pojava iz stvarnog sveta. Skeptici mogu da tvrde da takav pristup ostavlja dosta prostora za manipulaciju rezultatima, budući da istraživač može da upravlja apriornim informacijama i tako diriguje krajnjim ishodom. Ipak, autor ovog rada podržava stav da pravilna primena Bajesovog metoda zapravo sužava prostor za manipulaciju (Schoot et al., 2014).

U nastavku će biti predstavljeni osnovni koncepti u Bajesovoj statistici, na čelu sa Bajesovom formulom koja predstavlja preduslov za razumevanje cele ove oblasti (deo 4.1). U delu 4.2 se objašnjavaju metode ocenjivanje parametara u kontekstu apriornih i aposteriornih informacija, gde se Bajesova logika poredi sa frekvencionističkom (4.2.1), ali i Bajesov pristup predviđanju zavisnih varijabli (4.2.2). Predviđanje i ocenjivanje u Bajesovoj statistici su konceptualno slični pojmovi zbog tretiranja parametara kao slučajnih varijabli. U delu 4.3 su opisane metode poređenja modela. Poslednji deo poglavlja, deo 4.4, se odnosi na izbor apriornih raspodela i uticaj stepena informativnosti na aposteriornu raspodelu, gde se informativna moć apriornih informacija posmatra kroz koncept regularizacije parametara.

4.1 Bajesova formula

Centralno mesto u Bajesovoj statistici ima *Bajesova formula* koju izvodimo na osnovu obrasca za uslovnu verovatnoću i korišćenjem osobine komutativnosti:

$$P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) = P(B, A), \quad (4.1)$$

gde su A i B događaji za koje važi da su $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$. Na osnovu (4.1) sledi da važi sledeća jednakost, koju nazivamo *Bajesovom formulom*:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}. \quad (4.2)$$

Obrasce (4.1) i (4.2) možemo da uopštimo na sledeći način. Neka je događaj A unija disjunktih događaja $\{A_i\}$ tako da može da se primeni formula *potpune verovatnoće*:

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n). \quad (4.3)$$

U tom slučaju, a koristeći istu logiku kao u (4.1) i (4.2), Bajesova formula se može izraziti sa:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}. \quad (4.4)$$

Sad možemo bliže da sagledamo elemente Bajesove formule kako bismo objasnili logiku Bajesove statistike. Događaj koji posmatramo je događaj A. Realizacija ovog događaja zavisi od realizacije događaja B. Pretpostavka je da ne znamo ništa o događaju B, a da raspolažemo *apriornim* informacijama o događaju A, što predstavljamo apriornom verovatnoćom $P(A)$. Saznanja koja nakon toga dobijamo o događaju B ažuriraju naša saznanja o verovatnoći događaja A što formalno predstavljamo kroz *aposteriornu verovatnoću* $P(A|B)$. Verovatnoća $P(B|A)$ je, kao i $P(A)$, poznata unapred i u tom smislu sadrži apriorne informacije istraživača. Imenilac u izrazu (4.4) ne zavisi od događaja A i njegova uloga je da, pre svega, obezbedi normiranost izraza zbog čega se Bajesova formula često zapisuje i u skraćenom obliku:

$$P(A|B) \propto P(B|A)P(A) \quad (4.5)$$

gde umesto znaka jednakosti, =, imamo znak proporcionalnosti, \propto . Dakle, aposteriorna verovatnoća događaja A, pod uslovom da se događaj B realizovao, proporcionalna je proizvodu apriorne verovatnoće događaja A i uslovne verovatnoće $P(B|A)$.

Ako bismo pretpostavili da su X i Y dve varijable apsolutno neprekidnog tipa, Bajesov obrazac se može predstaviti na sličan način kao i u diskretnom slučaju opisanom ranije. Iz obrazaca za zajedničku funkciju gustine X i Y, kao i uslovne gustine raspodela važi da je:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)f_X(x). \quad (4.6)$$

Iz (4.6) dobijamo *Bajesovu formulu* za slučaj apsolutno neprekidnih slučajnih promenljivih:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}. \quad (4.7)$$

U imeniocu se nalazi marginalna gustina promenljive Y, koju možemo izraziti i preko formule potpune verovatnoće za varijable apsolutno neprekidnog tipa:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx}. \quad (4.8)$$

Zanimljivo je da se izraz u imeniocu može posmatrati i kao uslovno očekivanje. Samim tim, svaka marginalna raspodela se može predstaviti kao *očekivana vrednost*:

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y,X}(y,x)dx = f_Y(y). \quad (4.9)$$

Po istoj analogiji se može izvesti obrazac za uslovnu očekivanu vrednost i u diskretnom slučaju. Kod korišćenja Monte Karlo metoda zasnovanim na Markovljevim lancima ovo je koristan rezultat, o čemu će biti reči u narednom poglavlju.

4.2 Bajesovo ocenjivanje parametara i predviđanje

Jedna od ključnih razlika između Bajesove i frekvencionističke statistike je način na koji se tretiraju parametri. Frekvencionisti parametre vide kao fiksne veličine koje se ocenjuju pomoću uzorka. Nasuprot tome, Bajesov pristup parametre tretira kao slučajne promenljive o kojima se zaključuje na osnovu uzorka i apriornih informacija o raspodeli tih istih parametara. U nastavku će biti elaborirano zašto je takva logika intuitivno superiornija kod interpretacije rezultata.

U daljem izlaganju ćemo parametre modela koji posmatramo označiti vektorom θ , apriorna saznanja o njima ćemo predstaviti raspodelom $p(\theta)$, a podatke koje opserviramo sa y . Neophodno je da pretpostavimo mehanizam generisanja podataka u zavisnosti od parametara θ , odnosno uslovnu raspodelu $p(y|\theta)$ ⁷. Kako se za realizovane vrednosti podataka, y , donose zaključci o θ , obično se $p(y|\theta)$ predstavlja putem *funkcije verodostojnosti*, $L(\theta|y)$ ili samo $L(\theta)$. U nastavku će se umesto funkcije verodostojnosti u tekstu koristiti skraćeni izraz *verodostojnost*.

Imajući u vidu upravo uvedenu nomenklaturu i pretpostavke, aposteriorna raspodela parametara θ se dobija primenom Bajesove formule i piše kao:

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p(\theta)}{p(y)} = \frac{L(\theta)p(\theta)}{p(y)}. \quad (4.10)$$

Oblik ove aposteriorne raspodele je u potpunosti određen verodostojnošću i apriornom raspodelom parametara te se obično izraz (4.10) predstavlja i bez $p(y)$, kao:

$$p(\theta|y) \propto L(\theta)p(\theta). \quad (4.11)$$

Verovatnoća $p(y)$ se u literaturi često naziva normirajućom konstantom ili marginalnom verodostojnošću (Rossi et al., 2005). Njeno računanje zahteva višestruku integraciju po svim parametrima modela, što je vremenski izuzetno skup proces koji se, stoga, u praksi obično preskače. Međutim, u nekim slučajevima pravilno izračunata vrednost ove verovatnoće može igrati veoma bitnu ulogu i biti opredeljujuća za kvalitet rezultata. To je posebno slučaj kada se vrši poređenje različitih modela, o čemu će biti reči u drugom delu ovog poglavlja (4.3).

Apriorna raspodela $p(\theta)$ obično predstavlja neku od poznatih raspodela verovatnoća koja i sama zavisi od određenih parametara. Tako, na primer, $p(\theta)$ može da predstavlja normalnu raspodelu koja je u funkciji parametara skaliranja, σ i lokacije, μ . Istraživač može ove parametre tretirati kao konstante, koristeći informacije iz ranijih istraživanja ili teorije, ali može i da pretpostavi da σ i μ imaju svoje sopstvene apriorne raspodele. Ako se polazi od ove druge pretpostavke, da parametri σ i μ imaju sopstvene (apriorne) raspodele, onda takve parametre nazivamo hiperparametrima. Ako sada vektor hiperparametara označimo sa ξ , onda izraz (4.10) može da se preformuliše na sledeći način:

⁷ Ovde je bitno skrenuti pažnju čitaocu da se i kod frekvencionističkog pristupa pravi pretpostavka o mehanizmu generisanja podataka. Konkretno, na primer, možemo pretpostaviti da određena varijabla prati eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ , odnosno $E(\lambda)$.

$$p(\boldsymbol{\theta}, \xi | y) = \frac{p(y | \boldsymbol{\theta}, \xi) p(\boldsymbol{\theta}, \xi)}{p(y)} = \frac{p(y | \boldsymbol{\theta}, \xi) p(\boldsymbol{\theta} | \xi) p(\xi)}{p(y)} \quad (4.12)$$

Obično se pretpostavlja da postoji nezavisnost između y i ξ uslovno po $\boldsymbol{\theta}$. To znači da je za opis ponašanja y dovoljno da je poznato $\boldsymbol{\theta}$, dok dodatne informacije o hiperparametrima ξ neće imati doprinos. Formalno, to može da se predstavi sa:

$$p(y | \boldsymbol{\theta}, \xi) = p(y | \boldsymbol{\theta}). \quad (4.13)$$

Imajući u vidu (4.12) i (4.13) sledi da je aposteriorna raspodela parametara i hiperparametara data sa:

$$p(\boldsymbol{\theta}, \xi | y) \propto p(y | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta} | \xi) p(\xi) \quad (4.14)$$

Ovakvu hijerarhijsku strukturu je, barem teorijski, moguće proširivati neograničeno. Dakle, raspodela vektorskog hiperparametra ξ može da zavisi od parametarskog vektora $\boldsymbol{\gamma}$ (hiperhiperparametar) koji može da ima svoju raspodelu itd.

4.2.1 Tačkaste i intervalne ocene parametara

U primenjenim Bajesovim istraživanjima $\boldsymbol{\theta}$ predstavlja vektor parametara, odnosno ishod je višedimenzionalna aposteriorna raspodela. Da bi se sumirala višedimenzionalna raspodela mogu se koristiti marginalne raspodele pojedinačnih parametara. Dva osnovna načina opisivanja rezultujućih aposteriornih raspodela su analogna frekvencionističkom pristupu, to su tačkaste i intervalne ocene, koje će biti objašnjene u tekstu koji sledi.

4.2.1.1 Tačkaste ocene

Najpoznatije tačkaste ocene parametara su mere centralne tendencije: modus, medijana i prosek. One su obično u radovima izložene zajedno sa merama disperzije. Međutim, raspodele parametara su neretko asimetrične, te iz tog razloga prosek i nije toliko dobro rešenje. Na primer, za parametar σ , koji uzima pozitivne vrednosti, kao apriorna raspodela najčešće se koristi neka asimetrična raspodela kao što je inverzna gama raspodela. Za funkciju verodostojnosti dobijenu iz normalne raspodele može se lako dokazati da je aposteriorna raspodela upravo inverzna gama. Sumiranje parametra σ preko proseka bi dalo dosta iskrivljenu sliku zbog izražene asimetrije inverzne gama raspodele. U takvoj situaciji bi robusnija mera centralne tendencije, kao što je medijana, bila prirodniji izbor.

Modus aposteriorne raspodele parametra ili MAP (engl. *maximum a posteriori estimate*) predstavlja vrednost parametra θ za koju aposteriorna raspodela ima najveću vrednost (a u diskretnom slučaju najveću verovatnoću). Ovaj tip ocene je analogan oceni maksimalne verodostojnosti ili MLE (engl. *maximum likelihood estimate*) kod frekvencionističkog pristupa i predstavlja najčešće korišćenu tačkastu ocenu u radovima koji koriste Bajesov pristup. Formalno MAP može da se predstavi kao:

$$\hat{\theta}_{MAP}(y) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} p(\theta | y). \quad (4.15)$$

U ovom obrascu se možemo osloniti na rezultat koji smo predstavili u (4.11) budući da oblik funkcije ne zavisi od $p(y)$, tako da se daljim razlaganjem dobija:

$$\hat{\theta}_{MAP}(y) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(\theta | y) p(\theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} (\log L(\theta | y) + \log p(\theta)), \quad (4.16)$$

gde je u drugom delu izraza primenjena logaritamska transformacija. Ako se MAP ocena uporedi sa MLE ocnom, vidi se da MAP ima dodatan izraz $\log p(\theta)$. U diskretnom slučaju, izraz $\log p(\theta)$ ima negativnu vrednost budući da je $p(\theta)$ verovatnoća pa se može interpretirati kao *penalizujući član*. Naime, ako pretpostavimo standardnu normalnu apriornu raspodelu parametra θ , MAP će „kažnjavati“ sve vrednosti θ koje su malo verovatne sa izraženim negativnim vrednostima $\log p(\theta)$. U slučaju kada je apriorna raspodela θ uniformna na intervalu (a, b) gde važi da je $P(\theta) > 0$, onda je penalizujući član konstanta. U tom slučaju važi:

$$\hat{\theta}_{MAP}(y) = \underset{\theta \in (a,b)}{\operatorname{argmax}} (\log L(\theta|y) + \text{konstanta}) = \underset{\theta \in (a,b)}{\operatorname{argmax}} (\log L(\theta|y)) = \hat{\theta}_{MLE}(y) \quad (4.17)$$

Ovaj rezultat je interesantan pošto nam govori da frekvencionisti implicitno prave apriorne pretpostavke o parametrima. Iako deluje da je najobjektivniji pristup pretpostaviti uniformnu raspodelu parametara i pustiti da „podaci govore“, to predstavlja iluziju istraživača. Na primer, ako pretpostavimo da varijansa varijable dohodak građana ima apriornu uniformnu raspodelu, to *de facto* znači da pretpostavljamo da varijansa dohotka pojedinca može podjednako verovatno biti 0 kao i 10^{25} evra. Znamo da ni jedna osoba na svetu nema toliki dohodak (barem ne u trenutku pisanja ovog rada), pa samim tim ni varijacije ne mogu biti tolike. Srećom po frekvencioniste, ovakva apriorna pretpostavka o raspodeli parametra nema veliki uticaj na konačnu ocenu zbog svog neinformativnog karaktera. O informativnim i neinformativnim apriornim raspodelama će biti više reči u delu koji se odnosi na izbor apriorne raspodele.

4.2.1.2 Intervalne ocene

Drugi način ocenjivanja parametara je preko intervalnih ocena koje se u Bajesovoj statistici zovu intervali prekrivanja ili kredibilni intervali (engl. *credible intervals*). Kredibilni intervali su pandan intervalima poverenja u frekvencionističkoj statistici. Za zadatu vrednost α , $100(1-\alpha)\%$ kredibilni interval predstavlja parametarski prostor gde je verovatnoća da θ bude u tom intervalu jednaka $1-\alpha$. Nasuprot tome, intervali poverenja pretpostavljaju fiksne vrednosti parametara, dok su sami intervali slučajne veličine. Ako bismo veliki broj puta izvlačili uzorak iz populacije i računali odgovarajuće intervale poverenja, onda bi $100(1-\alpha)\%$ tih intervala sadržalo parametar θ . Logika Bajesovog pristupa je znatno intuitivnija kod interpretacije intervalnih ocena. Kredibilni interval od $100(1-\alpha)\%$ u apsolutno neprekidnom slučaju⁸ se definiše na sledeći način:

$$1 - \alpha = \int_l^u p(\theta|y) d\theta \quad (4.18)$$

gde su granice kredibilnog intervala predstavljene sa l i u . One nisu jedinstveno određene i u tom smislu imamo više tipova kredibilnih intervala. Najčešće korišćeni su: intervali sa jednakim repovima i interval najveće aposteriorne gustine (koji će u daljem tekstu biti označen sa INAG). Kod intervala sa jednakim repovima verovatnoće da parametar θ bude ispod i iznad kredibilnog intervala su jednake i iznose po $\alpha/2$. U slučaju simetrične unimodalne aposteriorne raspodele ova dva intervala koincidiraju. Međutim u slučajju kada aposteriorna raspodela parametra ima više modusa onda se mogu značajno razlikovati. U višemodalnom slučajju INAG može biti unija intervala sa prekidima što može biti problematično za interpretaciju rezultata. U opštem slučajju, intervali sa jednakim repovima su znatno praktičniji i stoga mnogo popularniji u primenjenim istraživanjima.

⁸ U diskretnom slučajju obrazac je isti osim što umesto integrala stoji suma.

4.2.2 Predviđanje zavisne promenljive

Istraživanja često imaju za cilj predviđanje neke pojave, kao npr. prihod preduzeća. U takvim situacijama istraživača zanimaju vrednosti zavisne promenljive. U zavisnosti toga da li se uzimaju u obzir realizovane vrednosti y razlikuju se dva tipa predviđanja: apriorno predviđanje i aposteriorno predviđanje. Ako se predviđanje vrši pre opserviranja vrednosti y onda je to predviđanje sa apriornom prediktivnom raspodelom; kada se u predviđanju koriste opservirane vrednosti y , ono se naziva aposteriornim predviđanjem.

Kod apriornog predviđanja koristi se apriorna prediktivna raspodela koja predstavlja raspodelu zavisne promenljive na osnovu saznanja koja istraživač ima pre uključivanja bilo kakvih informacija dobijenih istraživanjem. Takva saznanja koja istraživač ima pre sprovođenja istraživanja, odnosno takve apriorne informacije, su predstavljene apriornom raspodelom parametra θ . Apriornu prediktivnu raspodelu možemo predstaviti sa:

$$p(\tilde{y}) = \int p(\tilde{y}|\theta) p(\theta) d\theta. \quad (4.19)$$

Znatno korisnija je aposteriorna prediktivna raspodela koja opisuje raspodelu zavisne promenljive nakon što su uključene aposteriorne informacije, odnosno realizovane vrednosti y :

$$p(\tilde{y}|y) = \int p(\tilde{y}|\theta, y) p(\theta|y) d\theta = \int p(\tilde{y}|\theta) p(\theta|y) d\theta, \quad (4.20)$$

gde je u poslednjoj jednakosti pretpostavljena uslovna nezavisnost y i \tilde{y} . Dakle, uslovno po θ , y ne može dodati ništa novo u objašnjavanju \tilde{y} . Bitno je primetiti da izrazi (4.19) i (4.20) uzimaju u obzir stohastičku prirodu parametra θ tako što se zavisna promenljiva ponderiše raspodelom parametra θ . Ukoliko bi se, umesto integraljenja po θ , uzela neka tačkasta ocena $\hat{\theta}$, time bi se ignorisala stohastička priroda parametara pa bi se dobila manja disperzija prediktivne raspodele⁹.

Upotrebna moć aposteriorne prediktivne raspodele bi bila intuitivno jasnija ukoliko bi se pretpostavilo da raspodela \tilde{y} zavisi i od nekog opserviranog vektora $\mathbf{x}'=[x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$. Na primer, neka je dat vektor regresionih koeficijenata $\boldsymbol{\beta}'=[\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_n]$, takav da je uzoračka raspodela data izrazom:

$$p(\tilde{y}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = p(\tilde{y}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\beta}'\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{x}), \quad (4.21)$$

gde smo pretpostavili lineranu zavisnost \mathbf{x} i $\tilde{\mathbf{y}}$. Iz (4.21) sledi da prediktivna raspodela promenljive y zavisi od opserviranih vrednosti prediktora \mathbf{x} , ali i od zadatih vrednosti prediktora, $\tilde{\mathbf{x}}$, koje koristimo za predviđanje. U ovom slučaju aposteriornu prediktivnu raspodelu predstavljamo izrazom:

$$p(\tilde{y}|\mathbf{y}, \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}) = \int p(\tilde{y}|\boldsymbol{\beta}, \mathbf{y}, \tilde{\mathbf{x}}) p(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y}, \mathbf{x}) d\boldsymbol{\beta}. \quad (4.22)$$

Vidi se da je kod aposteriorne raspodele korišćen opservirani vektor \mathbf{x} , dok je kod uzoračke raspodele korišćen nov set vrednosti za prediktore, $\tilde{\mathbf{x}}$. Iz uzoračke raspodele je izostavljen vektor \mathbf{x} budući da su sve informacije sadržane u njemu inkorporirane u $\boldsymbol{\beta}$. Bajesov linearni regresioni model ima ovakvu formu, o čemu će biti više reči kasnije.

⁹ Bajesov pristup gde se umesto apriorne raspodele koristi tačkasta ocena se naziva Empirijski Bajesov pristup.

4.3 Poređenje modela

Kao i kod frekvencionističkog pristupa, postoji veliku broj instrumenata za poređenje modela. U ovom poglavlju biće predstavljene dva tipa poređenja modela. Prvi pristup, koji je objašnjen u delu 4.3.1, modele poredi iz perspektive apriorne predikcije i naziva se Bajesov faktor. Drugi pristup, unakrsna validacija, poređenje posmatra iz ugla aposteriorne predikcije i objašnjen je u delu 4.3.2.

4.3.1 Bajesov faktor

Bajesov faktor predstavlja pandan frekvencionističkom testiranju hipoteza i ukazuje na stepen podrške koji podaci daju jednom modelu u odnosu na neki drugi model. Različiti modeli se mogu posmatrati kao alternativne hipoteze u istraživanju, a sam Bajesov faktor se dobija kao odnos marginalnih funkcija verodostojnosti, kao što će biti opisano u nastavku.

Aposteriorna raspodela parametra θ , pod pretpostavkom da važi neki model M_i se može predstaviti sa:

$$p(\theta|y, M_i) = \frac{p(y|\theta, M_i)p(\theta|M_i)}{p(y|M_i)}. \quad (4.23)$$

Imenilac izraza (4.23) pokazuje verodostojnost realizovanih podataka, pod pretpostavkom važenja modela M_i . Može se primetiti da on ne zavisi od parametra θ , kao i da je to zapravo skalarna vrednost. Ovaj izraz se naziva još i marginalna verodostojnost budući da se parametri gube u integraciji (engl. *marginalize/integrate out*):

$$p(y|M_i) = \int p(y|\theta, M_i)p(\theta|M_i)d\theta. \quad (4.24)$$

Poslednji izraz je sličan izrazu za apriornu prediktivnu raspodelu (videti (4.19)). Razlika je u tome što je kod apriorne raspodele cilj predstaviti raspodelu promenljive, dok je kod marginalne verodostojnosti cilj da se oceni koliko je dobro model usklađen sa podacima (koliko je dobar fit) u apriornom slučaju. Dakle, raspodela parametra θ nije ažurirana sa novim informacijama (opservacijama), već je kao takva uzeta da reprezentuje stohastičku prirodu parametra prilikom evaluacije modela.

Stavljanjem u odnos izraza (4.24) za dva alternativna modela, npr. model 1 naspram modela 0, dobija se Bajesov faktor, odnosno:

$$BF_{10} = \frac{\int p(y|\theta, M_1)p(\theta|M_1)d\theta}{\int p(y|\theta, M_0)p(\theta|M_0)d\theta}. \quad (4.25)$$

Što je Bajesov faktor veći od jedinice, to su dokazi u korist modela 1 jači. Za vrednosti preko 5 kažemo da je prvi model ubedljivo superioniji u odnosu na drugi (Jeffreys, 1998). Bitno je istaći da Bajesov faktor ima smisla koristiti samo ako verujemo da je apriorna verovatnoća alternativnih modela/hipoteza jednaka. Ako to nije slučaj, onda se moraju uzeti u obzir različite apriorne verovatnoće tako što će se porediti odnos aposteriornih verovatnoća alternativnih modela:

$$\frac{p(M_1|y)}{p(M_0|y)} = \frac{p(y|M_1)}{p(y|M_0)} \times \frac{p(M_1)}{p(M_0)}. \quad (4.26)$$

Ukoliko su apriorne verovatnoće modela jednake, onda je Bajesov faktor ekvivalentan odnosu aposteriornih verovatnoća modela.

4.3.2 Metod unakrsne validacije

Metodi unakrsne validacije se zasnivaju na aposteriornoj prediktivnoj raspodeli i podeli uzorka na dva podskupa, jednog koji se koristi za ocenjivanje modela i drugog za validaciju modela. Prilikom objašnjavanja metoda unakrsne validacije prvo je potrebno definisati tzv. funkciju korisnosti ili pravilo skorovanja za npr. model M_H . Postoje različite funkcije korisnosti gde optimalnost svake zavisi od tipa predviđanja koje se vrši, tačkasto ili probabilističko predviđanje (Vehtari & Ojanen, 2012). Kod tačkastog predviđanja rezultat je pojedinačna vrednost koja odražava naše verovanje o budućoj opservaciji. Kod probabilističkog predviđanja rezultat su raspodele verovatnoća mogućih realizacija neke pojave. Uobičajene funkcije korisnosti su kvadratna greška, apsolutna greška ili apsolutna procentualna greška. U probabilističkom predviđanju tipični primeri funkcija korisnosti su kvadratna i logaritamska funkcija, gde je logaritamska popularnija (Vehtari & Ojanen, 2012). Logaritamska funkcija korisnosti se koristi za procenu prediktivne moći aposteriorne prediktivne raspodele modela kandidata M_H sa opserviranim podacima zavisne i eksplanatorne varijable $\mathbf{D} = \{(x_j, y_j)\}_{j=1}^n$, gde n predstavlja broj opserviranih uzoračkih jedinica. Pretpostavlja se da su eksplanatorne varijable deterministički definisane. Ovakav pristup izbora modela uzima u obzir stepen nesigurnosti prilikom predviđanja. Ako je nova opservacija \tilde{y} dobro objašnjena posteriornom prediktivnom raspodelom, tada je gustina posteriorne prediktivne raspodele visoka, kao i njen logaritam. Logaritamsko pravilo skorovanja za uslovno aposteriorno predviđanje $\tilde{y}_i|x_i$ se predstavlja:

$$u(\mathbf{M}_H, \tilde{y}_i) = \log p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_H), \quad (4.27)$$

gde funkcija skora ne zavisi od parametra θ , a iz izraza za aposteriornu prediktivnu raspodelu (4.20) sledi da se θ gubi integracijom. Međutim, izraz (4.27) nije moguće evaluirati pošto vrednosti \tilde{y} nisu poznate. Ako bi raspodela verovatnoća budućih vrednosti zavisne promenljive od \tilde{y}_i (za dato x_i) istinitog modela M_* bila dostupna, onda bi se očekivanje od (4.27) moglo predstaviti:

$$u(\mathbf{M}_H) = E[\log p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_H)] = \int p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_*) \log p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_H) d\tilde{y}_i, \quad (4.28)$$

gde $p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_*)$ predstavlja istinitu raspodelu. Dobijen izraz predstavlja očekivanu log aposteriornu prediktivnu raspodelu modela, takođe poznatu kao ELPD (engl. *expected log predictive density of a model*). Ukoliko predviđamo $\tilde{y}_i|x_i$ za $i=1, 2, \dots, N$, gde je N broj opservacija koje predviđamo, onda izraz za ELPD postaje:

$$ELPD = \sum_{i=1}^N \int p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_*) \log p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_H) d\tilde{y}_i. \quad (4.29)$$

Problem koji se javlja u praksi je da $p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_*)$ nije poznato. Da jeste, ne bi postojala potreba za traženjem najboljeg modela. Metodi unakrsne validacije predstavljaju metode aproksimacije $p(\tilde{y}_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_*)$ i u nastavku će biti predstavljeni osnovni tipovi.

Najjednostavniji metod unakrsne validacije je LPD metod, odnosno metod *log aposteriorne prediktivne raspodele* (engl. *log pointwise predictive distribution*) nad opserviranim podacima. Ovaj metod podrazumeva ocenjivanje i testiranje modela na istim podacima zbog čega, tehnički gledano, nije pravi metod unakrsne validacije.

Neka je S predstavljen broj iteracija korišćen za ocenjivanje modela, M_H model sa ocenjenim parametrima u slučaju hipoteze H , n predstavlja broj opserviranih uzoračkih jedinica, y realizovane

vrednosti zavisne promenljive i D skup opservacija objašnjavajućih varijabli korišćen za ocenjivanje M_H . Onda imamo da je ocena ELPD po ovom metodu

$$\widehat{ELPD}_{LPD} = \sum_{i=1}^N \log p(y_i|x_i, \mathbf{D}, \mathbf{M}_H) = \sum_{i=1}^N \log \int p(y_i|x_i, \theta, \mathbf{M}_H) p(\theta|\mathbf{D}, \mathbf{M}_H) d\theta, \quad (4.30)$$

gde je zbog uslovne nezavisnosti y_i i \mathbf{D} za dato θ izostavljeno \mathbf{D} iz $p(y_i|\theta, \mathbf{M}_H)$. U praksi se izračunavanje integrala vrši simuliranjem parametara θ^s iz aposteriorne raspodele $p(\theta|\mathbf{D}, \mathbf{M}_H)$, gde je $s=1,2,\dots,S$ broj simulacija. Sledi da se ocena ELPD po ovom metodu može predstaviti sa:

$$\widehat{ELPD}_{LPD} = \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_i|x_i, \theta^s, \mathbf{M}_H) \right) \quad (4.31)$$

LPD metod daje pristrasno veće ocene od ELPD zbog dvostrukog korišćenja podataka. Metod koja rešava ovaj problem je poznata pod imenom *LOO metod* ili *metod jednočlanog izostavljanja* (engl. *leave-one-out cross-validation - LOO*). Ovaj metod obavlja validaciju za svaku opservaciju sa modelom koji je ocenjen bez te opservacije. Na sličan način kao i prethodni metod, LOO može da se predstavi:

$$\widehat{ELPD}_{LOO} = \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_i|x_i, \theta^s, \mathbf{D}_{-i}, \mathbf{M}_H) \right) = \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_i|x_i, \theta^s, \mathbf{M}_H) \right), \quad (4.32)$$

gde y_i označava opservaciju za koju se vrši validacija, a \mathbf{D}_{-i} skup opservacija bez (y_i, x_i) koje se koriste za ocenu modela \mathbf{M}_H , a θ^s simulacije parametara iz aposteriorne raspodele $p(\theta|\mathbf{D}_{-i}, \mathbf{M}_H)$. U poslednjem delu izraza izostavljeno je \mathbf{D}_{-i} pošto y_i za dato θ ne zavisi od \mathbf{D}_{-i} . U slučaju velikog broja podataka, ovaj metod može biti spor čak i za najnaprednije računare budući da računar za svaki model/hipotezu \mathbf{M}_H mora da oceni model N puta. Dobra alternativa ovom metodu, a koja se često koristi u praksi kad su uslovi to dozvoljavaju, je PSIS-LOO (engl. *Pareto smoothed importance sampling leave-one-out*). PSIS-LOO predstavlja aproksimaciju *metoda jednočlanog izostavljanja* (Vehtari et al., 2017). PSIS-LOO je računski izuzetno efikasan, ali kod modela sa velikim brojem parametara i malim uzorcima, daje loše aproksimacije (Vehtari et al., 2017; Vehtari & Ojanen, 2012).

Problem sporog izračunavanja kod LOO metoda može se ublažiti tako što bi se umesto zadržavanja jedne opservacije i ocenjivanja modela bez te opservacije, uzorak delio na K jednakih poduzoraka i da se princip *metoda jednočlanog izostavljanja* vrši po poduzorcima. Ovaj metod se zove metod *K-tostruke unakrsne validacije* (engl. *K-fold cross-validation; u nastavku K validacija*). Primena ovog metoda je kompromis između pristrasnosti i računске efikasnosti. Pristrasnost nastaje samom činjenicom da model ocenjujemo bez dobrog dela uzorka.

Problem sporog izračunavanja kod standardne unakrsne validacije je da se umesto zadržavanja jedne opservacije i ocenjivanja modela bez te opservacije, uzorak N podeli na K jednakih poduzoraka i da se princip *metoda jednočlane validacije* vrši po poduzorcima:

$$\widehat{ELPD}_K = \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_i|x_i, \theta^{-k,s}, \mathbf{D}_{-k}, \mathbf{M}_H) \right) = \sum_{i=1}^N \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_i|x_i, \theta^{-k,s}, \mathbf{M}_H) \right) \quad (4.33)$$

gde su sa y_i označeni vrednosti zavisne varijable uzoračke jedinice i iz odgovarajućeg poduzorka k nad kojima se radi validacija, gde je $k=1, 2, \dots, K$. Sa \mathbf{D}_{-k} je predstavljen deo uzorka \mathbf{D} bez poduzorka k koji

se koristi za ocenjivanje modela, dok $\theta^{-k,s}$ predstavljaju simulacije parametara parametara iz aposteriorne raspodele $p(\theta|\mathbf{D}_{-k}, \mathbf{M}_H)$. U praksi se najčešće uzorak deli na 10 delova, odnosno za k se uzima vrednost 10 (Vehtari et al., 2017).

Da bismo poredili modele potrebno je da se definišu standarde greške ocena ELPD kao i razlike između ELPD za neka dva modela koja poredimo (Vehtari et al., 2017). Neka je komponenta i ocene ELPD u slučaju metoda k -tostruke validacije data sa:

$$\widehat{ELPD}_{K,i} = \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_i|x_i, \theta^{-k,s}, \mathbf{M}_H) \right). \quad (4.34)$$

Ako pretpostavimo da su komponente $\widehat{ELPD}_{K,i}$ nezavisne onda standardnu grešku ocene ELPD možemo da predstavimo izrazom:

$$se(\widehat{ELPD}_K) = \sqrt{N \sum_{i=1}^N \widehat{ELPD}_{K,i}}, \quad (4.35)$$

gde je sa V označena varijansa od $i=1,2,\dots,N$ komponentata $\widehat{ELPD}_{K,i}$. Standardna greška razlike ocena ELPD dva modela, \mathbf{M}_1 i \mathbf{M}_2 može se predstaviti na sledeći način:

$$se(\widehat{ELPD}_{K,M_2-M_1}) = \sqrt{N \sum_{i=1}^N (\widehat{ELPD}_{K,i,M_2} - \widehat{ELPD}_{K,i,M_1})} \quad (4.36)$$

gde je sa V , kao i u prethodnom izrazu predstavljena varijansa N komponentata. Pretpostavka o nezavisnosti $\widehat{ELPD}_{K,i}$ komponentata je suviše restriktivna, a naročito u slučaju malog N (Vehtari et al., 2017). U slučaju nezavisnosti, možemo da koristimo normalnu raspodelu za testiranje, ali sa određenom rezervom budući da normalnu raspodelu koristimo kao aproksimaciju. Preporuka prilikom poređenja modela je da ukoliko je razlika ocena ELPD dva modela, \mathbf{M}_1 i \mathbf{M}_2 manja od 4, onda dva modela imaju sličnu prediktivnu moć. Ukoliko je razlika veća od 4, broj uzoračkih jedinica veći od 100, onda možemo da koristimo normalnu raspodelu za donošenje zaključka o razlici u prediktivnoj moći (Vehtari, 2022).

4.4 Izbor apriorne raspodele

Pre primene modela istraživač već ima određenu predstavu o prirodi ponašanja parametara. U zavisnosti od informativne moći koju apriorne raspodele imaju, razlikujemo informativne i neinformativne apriorne raspodele. Ova kategorizacija se ne odnosi na vrstu raspodele, već na stepen uticaja koji apriorna raspodela ima na aposteriornu raspodelu. Stepem uticaja je u funkciji konteksta u kome se primenjuju konkretne apriorne raspodele. Kontekst, između ostalog, čine funkcija verodostojnosti i skala varijabli koje se koriste. Na primer, aposteriorna raspodela će biti slična funkciji verodostojnosti za velike uzorke. Sa druge strane, apriorne raspodele će imati neznatan uticaj na aposteriornu raspodelu, ukoliko je skala distribucije velika u odnosu na skalu varijabli u modelu. U nastavku će biti konkretizovana ova problematika i predstavljene apriorne raspodele, posmatrano iz ugla informativnosti i regularizacije ocena.

4.4.1 Regularizacija parametara

Stepem informativnosti apriorne raspodele određuje u kojoj meri će ocena parametra biti “skupljena” (engl. *shrinkage*) prema parametru lokacije apriorne raspodele. Skupljanje ili regularizacija su dva pojma koja se koriste kod opisivanja efekata apriornih raspodela na aposteriornu raspodelu. Kako bi se bliže

objasnili efekti regularizacije u kontekstu informativne moći apriornih raspodela, koristiće se model linearne regresije. Važno je naglasiti da isti principi delovanja regularizacije koji važe kod ocenjivanja linearnih, važe i kod ostalih Bajesovih modela.

4.4.1.1 L₂ regularizacija

U delu 4.2.1.1 opisan je princip dobijanja tačkastih ocena kod Bajesovih modela. Bitna stavka kod Bajesovog ocenjivanja je penalizujući član koji u izrazu (4.16) regularizuje ocenu parametra θ . Pretpostavimo da postoji realizovan uzorak varijable y_n , za $n=1, 2, \dots, N$, koja prati normalnu raspodelu uslovno po vektoru neke objašnjavajuće varijable \mathbf{x}_n . Sledi da se funkcija verodostojnosti može predstaviti sledeći izrazom:

$$L(\boldsymbol{\beta}|y) = \prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_n|\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_n, \sigma^2) \quad (4.37)$$

gde je parametar lokacije normalne raspodele dat sa $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_n$, odnosno parametri koje posmatramo su regresioni koeficijenti β_i za $i=1, 2, \dots, p$, gde je p dimenzija vektora $\boldsymbol{\beta}$. Regularizaciju parametara možemo da ostvarimo kroz nametanje apriorne raspodele:

$$p(\beta_i) = \mathcal{N}(\beta_i|0, \tau^2) \quad (4.38)$$

pretpostavljajući nezavisnost pojedinačnih regresionih koeficijenata, kao i jednaku varijansu datu sa τ^2 . Kombinujući prethodna dva izraza dobijamo nenormiranu aposteriornu raspodelu:

$$p(\boldsymbol{\beta}|\theta) \propto \left[\prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_n|\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_n, \sigma^2) \right] \left[\prod_{i=1}^p \mathcal{N}(\beta_i|0, \tau^2) \right]. \quad (4.39)$$

Da bismo dobili tačkastu MAP ocenu, izraz (4.39) možemo da logaritmujemo radi lakše preglednosti i zatim maksimiziramo po $\boldsymbol{\beta}$. Sledi da je MAP ocena parametra $\boldsymbol{\beta}$ data izrazom:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmax}} \log \left[\prod_{n=1}^N \mathcal{N}(y_n|\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_n, \sigma^2) \right] + \log \left[\prod_{i=1}^p \mathcal{N}(\beta_i|0, \tau^2) \right]. \quad (4.40)$$

Prebacivanjem izraza (4.40) u eksplicitnu formu dobijamo:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmax}} \log \left[\prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_n - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_n)^2}{2\sigma^2}} \right] + \log \left[\prod_{i=1}^p \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\beta_i^2}{2\tau^2}} \right]. \quad (4.41)$$

Uprošćavanjem izraza (4.41), koristeći se osnovnim zakonima aritmetičkih operacija, i izostavljanjem članova koji ne zavise od $\boldsymbol{\beta}$, dobijamo konačan izraz:

$$\underset{\boldsymbol{\beta}}{\operatorname{argmax}} \left[\sum_{n=1}^N -(y_n - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_n)^2 - \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^p \beta_i^2 \right]. \quad (4.42)$$

Iz (4.42) se jasno vidi da sa povećanjem τ^2 manje kažnjavamo izraz koji maksimizujemo. U slučaju kada je τ^2 beskonačno izraz se svodi na ocenu dobijenu metodom maksimalne verodostojnosti što je ekvivalentno korišćenju uniformne apriorne raspodele. Drugi ekstrem je kada je τ^2 jednaka 0. U tom scenariju vidimo da desna strana izraza (4.42) teži $-\infty$ za konačne vrednosti β . Na taj način optimalna vrednost β se povlači ka nultom vektoru. Jasno je da kod svake raspodele sa parametrizacijom koja uključuje parametar skaliranja, možemo da dirigujemo stepen regularizacije. U našem slučaju to postizemo zadavanjem različitih vrednosti τ^2 koja predstavlja varijansu normalne apriorne raspodele u izrazu (4.38). Desna strana izraza (4.42) se može predstaviti i kao kvadratna euklidska (ili L_2) vektorska norma, odnosno $\sum_{i=1}^p \beta_i^2 = \|\beta\|_2^2$. Iz tog razloga apriorna normalna raspodela regresionih koeficijenata se još zove i L_2 regularizacija, ili nazubljena regresija (engl. ridge regression).

4.4.1.2 L_1 regularizacija

Ukoliko se umesto normalne apriorne raspodele regresionih koeficijenata koristi *Laplasova raspodela* centrirana oko nule sa parametrom skaliranja b ,

$$p(\beta_i) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|\beta_i|}{b}}, \quad (4.43)$$

onda ubacivanjem (4.43) na desnu strani (4.41) dobijamo sledeći izraz za MAP ocenu:

$$\operatorname{argmax}_{\beta} \log \left[\prod_{n=1}^N \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_n - \beta'x_n)^2}{2\sigma^2}} \right] + \log \left[\prod_{i=1}^p \frac{1}{2b} e^{-\frac{|\beta_i|}{b}} \right]. \quad (4.44)$$

Analogno situaciji koju smo imali sa L_2 regularizacijom, daljim uprošćavanjem dobija se

$$\operatorname{argmax}_{\beta} \left[\sum_{n=1}^N -(y_n - \beta x_n)^2 - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^p |\beta_i| \right]. \quad (4.45)$$

U dobijenom izrazu stepen regularizacije zavisi od parametra skaliranja Laplasove raspodele, b . Više vrednosti parametra skaliranja odraziće se na blago povlačenje ocena β prema nuli pa će podaci imati glavnu reč u ocenjivanju. Niže vrednosti parametra b će se reflektovati kroz snažno skupljanje ocena. Slično kao kod L_2 regularizacije, desnu sumu možemo predstaviti preko L_1 vektorske norme, $\sum_{i=1}^p |\beta_i| = \|\beta\|_1$, poznatije kao *Menhetn ili taksi norma*. Iz ovog razloga, korišćenje Laplasove raspodele kod regresionih koeficijenata se zove L_1 regularizacija ili *LASSO regresija* (engl. least absolute shrinkage and selection operator).

4.4.1.3 Sličnosti i razlike L_1 i L_2 regularizacije

Glavna sličnost L_1 i L_2 regularizacije je da se informativna moć apriornih raspodela ogleda kroz parametre skaliranja. Njihova veličina je inverzno povezana sa stepenom regularizacije ocena. Sa druge strane, glavna razlike je priroda delovanja. L_2 regularizacija ne dozvoljava regresionim koeficijentima, koji nemaju jak uticaj na zavisnu varijablu, visoke vrednosti. Kad je L_1 regularizacija u pitanju, ona favorizuje nulte vrednosti za regresione koeficijente koji nisu dovoljno "jaki". Delovanje ova dva tipa apriornih raspodela na optimalne vrednosti ocena najbolje se vidi kroz poređenje različitih rešenja, $\beta=(1,0)$ i $\beta=(2^{-1/2}, 2^{-1/2})$ (Murphy, 2012). Kod L_2 važi da je euklidska norma jednaka za oba rešenja budući da je $\sum_{i=1}^2 \beta_i^2 = 1^2 + 0^2$ ekvivalentno $2^{-1/2} + 2^{-1/2}$. Dakle, kod L_2 se ne favorizuju nulta rešenja poput $\beta=(1, 0)$, dok kod L_1 regularizacije nulto rešenje ima znatno veći ponder jer je $\sum_{i=1}^2 |\beta_i| =$

$|1| + |0|$ manje od $2^{-1/2} + 2^{-1/2}$. To implicira da rešenje $\beta=(2^{-1/2}, 2^{-1/2})$ više penalizuje izraz koji maksimiziramo (4.45) nego što je to slučaj $\beta=(1, 0)$. Ovo može biti značajno u situacijama kada modeliramo pojavu sa velikim brojem regresora. L_1 regresija ima ugrađen automatski mehanizam eliminisanja regresionih koeficijenata sa slabim uticajem na zavisnu varijablu, dok je L_2 regresija korisna ukoliko ne želimo da vršimo selekciju regresora, već da “slabe” regresione koeficijente “dodatno oslabimo” ocenjivanjem bliže nuli. Na taj način sve varijable ostaju u modelu, ali se ostavlja veći prostor značajnijim regresorima u pogledu uticaja na zavisnu varijablu.

4.4.2 Neinformativne apriorne raspodele

Drugi naziv za ovu grupu raspodela su difuzne ili ravne raspodele. Najreprezentativniji predstavnik je uniformna raspodela. Uniformna raspodela polazi od toga da su sve dozvoljene vrednosti jednako verovatne, pa samim tim je aposteriorna raspodela u potpunosti određena funkcijom verodostojnosti. Moguće je i koristiti i druge tipove raspodela. Na primer, normalna raspodela sa varijansom preko milion će imati sličan efekat. Međutim, ako u drugom slučaju pretpostavimo da posmatrana varijabla ima jednako veliku varijansu, onda $N(0, 1000^2)$ neće biti toliko neinformativna, odnosno imaće snažan uticaj na oblik aposteriorne raspodele.

Sama apriorna raspodela ne mora biti *prava*, odnosno ne mora biti iz familije poznatih raspodela koje zadovoljavaju Kolmogorove aksiome. Jedna od najčešćih *nepravih* raspodela je uniformna raspodela bez granica, $p(\theta)\propto 1$. U tom slučaju važi sledeći odnos apriorne i aposteriorne raspodele:

$$p(\theta|y) \propto p(y|\theta)p(\theta) \propto p(y|\theta) \quad (4.46)$$

Moguće je postaviti ograničenja kod nepravne uniformne raspodele tako što bismo uveli, na primer, da je $p(\theta)\propto 1$ samo za $\theta>0$. U slučaju kada $p(y|\theta)$ uzima pozitivne vrednosti za $-\infty<\theta<+\infty$ onda aposteriorna raspodela θ takođe uzima isključivo pozitivne vrednosti pa samim tim vidimo da je korišćena apriorna raspodela itekako informativna.

Neizostavno pitanje prilikom odabira apriorne raspodele je parametrizacija raspodele generisanja varijable y . U slučaju normalne raspodele na raspolaganju nam stoji više mogućih parametrizacija, gde je najpopularnija $N(\mu, \sigma^2)$ gde su korišćeni parametar lokacije, μ , i parametar skaliranja, σ^2 . Ako pretpostavimo da je apriorna raspodela data sa $p(\mu, \sigma^2)\propto 1$, onda deluje da smo koristili neinformativnu raspodelu. Međutim, ukoliko koristimo parametrizaciju sa parametrom preciznosti umesto σ^2 , definisan kao $\tau=1/\sigma^2$, onda $p(\mu, \sigma^2)\propto 1$ zapravo i nije toliko neinformativna. Sledi da “neinformativna apriorna raspodela” ima relativno značenje u zavisnosti od parametrizacije. Pristup koji je dizajniran tako da apriorna raspodela ne zavisi od parametrizacije je *Džefrisov pristup* (Jeffreys, 1998). Po ovom pristupu apriorna raspodela je definisana kao

$$p(\theta) \propto |I(\theta)|^{0,5} \quad (4.47)$$

gde $I(\theta)$ predstavlja Fišerov informacioni kriterijum. Na ovaj način možemo za svaku parametrizaciju da primenimo isti princip računanja apriorne raspodele. Ukoliko izvedemo aposteriornu raspodelu θ koristeći se *Džefrisovom apriornom raspodelom*, možemo izvršimo transformaciju $\phi=h(\theta)$ i da sa sigurnošću znamo da je apriorna raspodela ϕ takođe neinformativna u smislu Džefrisa.

4.4.3 Slabo informativne apriorne raspodele

Ukoliko posedujemo neke apriorne informacije o samim parametrima, a ne želimo da apriorna raspodela bude bitan faktor u formiranju aposteriorne raspodele, onda koristimo slabo informativne raspodele.

Njihova uloga je da u „blagoj meri regularizuju ocene”, odnosno da onemoguće dobijanje nerealno velikih ili malih vrednosti parametara. Definisanje slabo informativne raspodele će zavisiti od konteksta. Postoje brojni radovi koji predlažu pogodne raspodele ovog tipa za različite kontekste. Na primer, za kovarijacionu matricu kod hijerarhijskih modela, Chung et al. (2015) predlaže Višartovu raspodelu. U situacijama jednodimenzionalnog parametra sa ograničenjem da bude pozitivan Chung et al. (2013) predlažu gama raspodelu, $\Gamma(2, c)$, gde za se za c uzima vrednost bliska nuli, pretpostavljajući da su varijable standardizovane. Za regresione koeficijente kod logističkih i drugih regresija Ghosh et al. (2018) predlažu Studentovu raspodelu sa većim brojem stepeni. Ne postoji precizne preporuke oko broja stepeni slobode, ali Gelman na svom blogu predlaže između 3 i 7 (Gelman, 2020), gde i sam tvrdi da je njegov prvobitni predlog Košijeve raspodele (Gelman et al., 2008) neadekvatan zbog predebelih repova. Kod modeliranja je bitno pristupiti sa velikom pažnjom imajući u vidu literaturu koja se bavila sličnom problematikom kao i prirodu samih podataka.

Da bi slabo informativne raspodele ispunile svoju ulogu „blage regularizacije ocena“, neophodno je uzeti u obzir skalu podataka. U suprotnom, apriorne raspodele mogu da *de facto* budu veoma informativne. Jedan pristup je da skaliramo varijable koje analiziramo. To se obično radi tako što se kao faktor skaliranja koristi standardna devijacija podataka, srednja vrednost ili neka tipična vrednost. Gelman et al. (2008) u svom radu predlažu da se sve apsolutno neprekidne varijable skaliraju tako da imaju srednju vrednost 0, a standardnu devijaciju 0,5. Na ovaj način se postiže uporedivost apsolutno neprekidnih varijabli i binarnih varijabli sa jednakim brojem kategorija (nakon centriranja uzimaju vrednosti +/-0,5 pa im je standardna devijacija 0,5). Postoje i druge vrste skaliranja gde se koriste netipične vrednosti. U Bajesovom modelu za predviđanje vremenskih serija kompanije Facebook, na primer, za skaliranje svih metričkih varijabli se koristi njihova maksimalna vrednost (Taylor & Letham, 2018). Drugi pristup bi bio da skalu varijable inkorporiramo u same apriorne raspodele kroz parametre skaliranja. Na primer, ako se kao apriorna raspodela koristi normalna raspodela, onda se može upotrebiti $\theta \sim N(0, sd(y))$, gde se kao parametar skaliranja uzima standardna devijacija posmatrane promenljive. U slučaju eksponencijalne raspodele, $\theta \sim \text{Exp}(\lambda)$ imamo da je standardna devijacija jednaka $1/\lambda$ pa u tom slučaju bi apriorna raspodela bila data sa $\theta \sim \text{Exp}(1/sd(y))$ (Gabry & Goodrich, 2020). Filozofski gledano, uključivanjem informacija iz podataka u apriorne raspodele nije u skladu sa Bajesovom paradigmom. Međutim, kod mnogih istraživača koji praktikuju Bajesove metode je to postao standard tako da postoji i ime za takav pristup, *empirijski Bajesovi metodi*.

5 MONTE KARLO METODE ZASNOVANE NA LANCIMA MARKOVA (MCMC)

Jedan od glavnih ciljeva u Bajesovoj statistici je opisivanje aposteriorne raspodele parametara. Simulacija aposteriorne raspodele parametara predstavlja Bajesov stil opisivanja karakteristika neke pojave, odnosno raspodele. Pored simuliranja raspodela verovatnoća moguće je koristiti i metode optimizacije, ali to neće biti tema ovog rada. Često postoji zainteresovanost samo za pojedinačne parametre vektora θ , odnosno marginalne aposteriorne raspodele. Problem koji se javlja u praksi je u tome što će aposteriorna raspodela najčešće imati komplikovani oblik koji nije lako ili nije moguće uzorkovati. Upravo kod ovakve problematike Monte Karlo metode zasnovane na lancima Markova (MCMC) imaju komparativne prednosti u odnosu na ostale metode aproksimacija raspodela. Ovo poglavlje počinje uvodom u Monte Karlo metode, kao bitne karike u funkcionisanju MCMC metoda. Sledi predstavljanje Markovljevih lanaca koji omogućavaju Monte Karlo metodima da funkcionišu u slučaju kompleksnih raspodela. Raspodele sa kompleksnom matematičkom formom koje možemo da evaluiramo, ali ne i da simuliramo, su česte u praktičnim istraživanjima prilikom primene Bajesove statistike. Tako se istraživačima nameću MCMC metode kao korisna aparatura koja će u nastavku biti opisana sa teorijskog i praktičnog aspekta. Akcenat će biti na Hamiltonovom Monte Karlo metodu koji polako preuzima vodeću ulogu u praktičnim Bajesovim istraživanjima zbog svoje superiornosti u odnosu na ostale MCMC metode (poput tradicionalnog Metropolis-Hejstings algoritma). U nastavku sledi predstavljanje Monte Karlo metoda, zatim koncept Markovljevih lanaca, da bi poglavlje bilo završeno integracijom prethodna dva kroz predstavljanje savremene paradigme u svetu statistike, Monte Karlo metoda zasnovanih na Markovljevim lancima.

5.1 Monte Karlo metode

Monte Karlo (MK) metode možemo definisati kao široku klasu algoritama koji se koriste za optimizaciju, numeričku integraciju i simulaciju raspodela verovatnoće. Iako je simulacija raspodela verovatnoća navedena kao posebna uloga ovih metoda, ona je usko povezana sa optimizacijom i integracijom. Noseći stub svih Monte Karlo metoda, ono na čemu se oni baziraju, je niz simuliranih vrednosti uniformne raspodele, koje su *nezavisne sa identičnom raspodelom verovatnoće* (engl. *iid – indentially and independently distributed*). Dakle, sve MK metode funkcionišu tako što koriste niz iid $U[0,1]$ na osnovu kog simuliraju određenu (neuniformnu) raspodelu verovatnoće preko koje možemo da računamo integrale ili vršimo optimizacije matematičkih problema.

Kao što je rečeno, preduslov simulacije neke raspodele verovatnoća MK metodom je raspolaganje simuliranim nizom iid slučajnih brojeva $U[0,1]$. Gotovo svi softveri, koji imaju ugrađene neke alate za analizu podataka, imaju obavezno i neki simulator slučajnih brojeva. Površno sagledavanje takve situacije može da nas navede na zaključak da je simulacija slučajnih brojeva jednostavan proces. Da to nije slučaj, govori sama činjenica da zapravo ni jedan softver ne koristi prave slučajne brojeve, već pseudoslučajne brojeve (engl. *PRNG – pseudorandom number generator*). Paradoksalno, slučajni brojevi su deterministički određeni. Iako zvuči da smo oštećeni zbog ovakvog načina funkcionisanja gotovo svih softvera, ovo je zapravo bolji način u odnosu na simuliranje „pravih“ slučajnih brojeva pošto je ovo računski značajno brži pristup i, osim toga, moguće je reprodukovati simulirane rezultate. Dakle, ako je neko koristio metod simulacija u svom istraživačkom radu zasnovanim na PRNG, možemo u potpunosti replikovati njegove rezultate. Razlog moguće replikacije je što se PRNG zasnivaju na tzv. *početnom*

semenu od kojeg se deterministički generiše niz brojeva. Postoje više metoda PRNG, među kojima je najpoznatiji Mersenne Twister metod (Matsumoto & Nishimura, 1998) koji ima i najrasprostranjeniju primenu (Marsland, 2015). Na primer, R softver kao standard koristi upravo ovaj PRNG metod.

5.1.1 Metod simulacije inverznom transformacijom

Ovaj metod koristi inverznu kumulativnu funkciju raspodele neke varijable, odnosno kvantilnu funkciju. Najpre simuliramo $U[0,1]$ nekim od metoda pseudoslučajnih brojeva. Simulirane slučajne brojeve koristimo kao input za kvantilnu funkciju iz koje generišemo vrednosti tražene raspodele. Formalno možemo to da predstavimo na sledeći način. Neka je $f(x)$ funkcija gustine neke raspodele i neka je $F(x)$ njena kumulativna funkcija raspodele. Onda izvlačenjem slučajnih brojeva $p \sim U[0,1]$, u prvom koraku, i primenom inverzne funkcije raspodele $F^{-1}(p)$ nad generisanim vrednostima p , u drugom koraku, dobijamo simulaciju tražene raspodele, odnosno:

$$x = F^{-1}(p), \text{ za } p \sim U[0,1] \quad (5.1)$$

Sledi demonstracija ovog metoda na primeru eksponencijalne raspodele korišćenjem R softvera. Eksponencijalna gustina verovatnoće i inverzna funkcija raspodele su, redom, dati sa:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F^{-1}(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda} \quad (5.2)$$

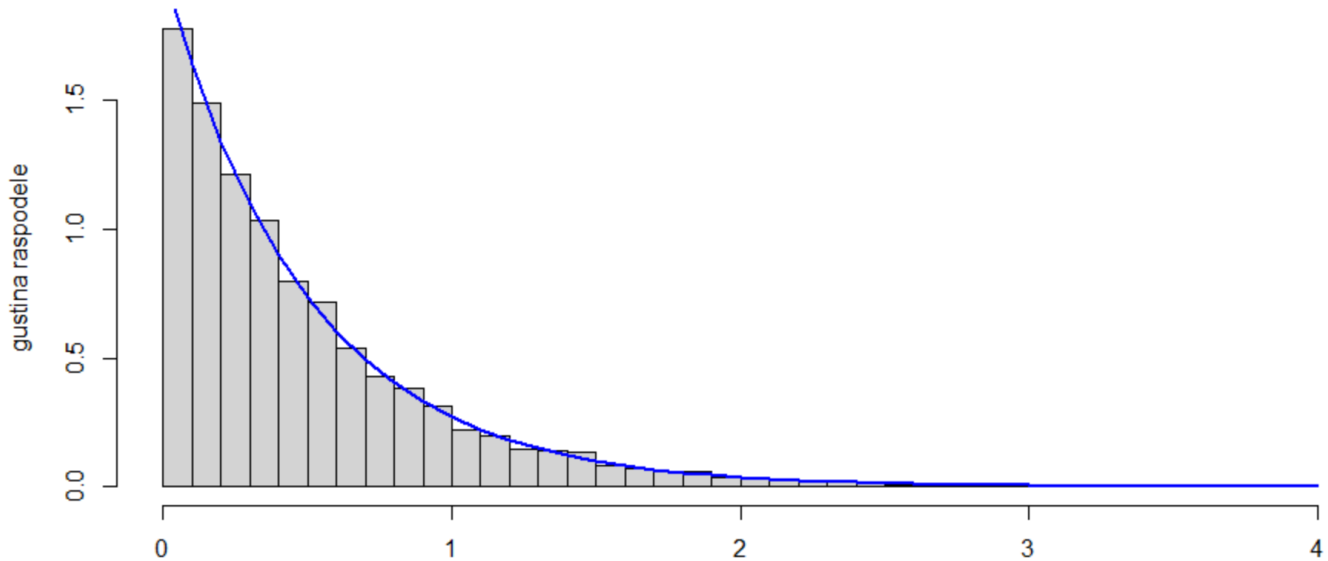
gde je sa λ označen tzv. parametar stope ili učestalosti (engl. *rate*). Sledi kod u R programskom jeziku gde je korišćen generator pseudoslučajnih brojeva sa početnim semenom tako da je moguće replikovati rezultate na identičan način. Simulirano je 10000 slučajnih vrednosti iz uniformne raspodele. Za parametar stope λ uzeta je vrednost dva, imajući u vidu da je očekivana vrednost raspodele jednaka inverznoj vrednosti λ . Dobijena simulirana raspodela je predstavljena grafički putem histograma zajedno sa teorijskom gustinom eksponencijalne raspodele.

Listing 5.1 Kod u R programskom jeziku za simulaciju eksponencijalne raspodele metodom inverzne simulacije

```
1 set.seed(1234)
2 p <- runif(10000)
3 lambda <- 2
4 x <- -log(1 - p) / lambda
5
6 hist(x, ylab = "frekvencija", xlab = "", freq = F,
7      main = "MK simulacija inverznim metodom",
8      breaks = 50,
8      xlim = c(0,4))
9 x_axis <- seq(0, 4, 0.1)
10 lines(x_axis, dexp(x_axis, rate = lambda), col = "blue", lty = 1, lwd = 2)
```

Metod inverzne transformacije je veoma efikasan – ukoliko je njegova primena moguća. Problem se javlja kod raspodela gde inverzna funkcija ili ne postoji ili ju je teško isvesti. Eksponencijalna raspodela, korišćena u gornjem primeru, predstavlja slučaj gde se inverzna funkcija raspodele može jednostavno izvesti. U slučajevima kada nije moguće izvesti inverznu transformaciju ovaj metod se ne može primeniti. Postoje i drugi metodi koji se mogu koristiti za aproksimaciju jednodimenzionalnih raspodela,

kao što su metod odbacivanja (engl. *acceptance-rejection method*) i metod uzorkovanja prema važnosti (engl. *importance sampling*), ali oni neće biti predmet izlaganja ove disertacije.



Slika 5.1 Simulacija funkcije gustine eksponencijalne raspodele po metodu inverzne transformacije (histogram) i teorijska gustina eksponencijalne raspodele (linija).

Izvor: autor.

5.1.2 Simulacija multivarijacione normalne raspodele

Normalna raspodela igra glavnu ulogu u velikom broju istraživanja, pa se stoga i simulacija gustine standardne normalne raspodele veoma često koristi. Jedan od pristupa simulaciji standardne normalne raspodele je metod inverzne transformacije. Osim toga, u skladu sa postavkama *centralne granične teoreme (CGT)* moguće je simulirati normalnu raspodelu sumiranjem simuliranih uniformnih raspodela. Drugim rečima, ako neku promenljivu definišemo kao sumu simuliranih uniformno raspodeljenih slučajnih varijabli, na primer:

$$S_n = \sum_{i=1}^n U_i,$$

onda važi *CGT*, čijom primenom se dobija da je:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{SD(S_n)} \sim N(0,1)$$

kada n teži beskonačnosti. Konvergencija je veoma brza tako da se već za $n=15$ dobija dobra aproksimaciju.

Za simuliranje multivarijacione normalne raspodele sa arbitrarno određenom kovarijacionom matricom, može se primeniti afina transformacija na nezavisne uzorke iz $N(0,1)$. Neka je slučajan vektor koji želimo da simuliramo dat sa:

$$X \sim N(\mu, \Sigma). \tag{5.3}$$

Ukoliko bismo simulirali slučajan vektor sa jediničnom kovarijacionom matricom:

$$Z \sim N(0, I) \quad (5.4)$$

i imajući u vidu da je kovarijacionu matricu moguće dekomponovati Čoleski metodom, tj:

$$\Sigma = LL' \quad (5.5)$$

gde matricu L možemo posmatrati kao kvadratni koren matrice, onda važi da je:

$$X = \mu + L \times Z \sim N(\mu, \Sigma). \quad (5.6)$$

Ovo je važan rezultat koji ćemo koristiti u daljem izlaganju.

5.1.3 Monte Karlo integracija

Monte Karlo integracija, kako samo ime kaže, omogućava računanje integrala putem simulacije slučajnih brojeva uz primenu zakona velikih brojeva. Neka je integral čiju vrednost želimo da izračunamo dat sa:

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (5.7)$$

Neka je, zatim, data slučajna promenljiva $X \sim U[a, b]$ koja ima funkciju gustine $1/(b-a)$ kada promenljiva uzima vrednosti iz $[a, b]$, a 0 u ostalim slučajevima. Tada izraz (5.7) može da se predstavi kao:

$$\int_a^b f(x) \frac{b-a}{b-a} dx = (b-a) \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a} dx = (b-a)E(f(X)). \quad (5.8)$$

Simuliranjem vrednosti $X_1, X_2, \dots, X_n \sim U[a, b]$ prema zakonu velikih brojeva, kad n teži beskonačnosti važi sledeće:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \rightarrow (b-a)E(f(X)). \quad (5.9)$$

Primenom ovog pristupa može da se dobije ocena vrednosti integrala za neko konačno n . Kako se radi o oceni, postojaće određena greška – dokle god je n konačno, dakle upravo u slučajevima kada se ovaj pristup primeni u praksi. Varijansu Monte Karlo ocene dobijamo kao:

$$\text{Var} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \right) = \frac{b-a}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(f(X_i)) = \frac{b-a}{n} \text{Var}(f(X)) \quad (5.10)$$

U slučaju neodređenog integrala, umesto uniformne raspodele koristila bi se neka raspodelu koja ima isti domen pokrivanja kao željeni integral, pa bi se umesto izraza (5.8) dobilo sledeće:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{g(x)}{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = E \left(\frac{f(X)}{g(X)} \right) \quad (5.11)$$

gde je simulacija slučajnih brojeva vršena iz $g(x)$ raspodele. Jasno je da će efikasnost ocenjivanja zavisiti od izbora $g(x)$. Do sličnih rezultata se dolazi i u slučaju generalizacije na višedimenzionalne varijable, odnosno kod višestrukih integrala. Osnovna razlika u slučaju višedimenzionalnih raspodela je u tome što se simulacija vrši na osnovu vrednosti iz višedimenzionalne raspodele. Tako bi se, na primer, u slučaju dvostrukog integrala kod izraza (5.8) umesto jednodimenzionalne, dobila dvodimenzionalna uniformna raspodela sa gustinom $1/(b-a)^2$.

Primenu Monte Karlo integracije u Bajesovoj statistici nalazimo kod aproksimacije aposteriorne raspodele parametra ili marginalne raspodele. Na primer, neka imamo vektor parametara $\theta = [\theta_1 \ \theta_2]^T$ i neka su nam poznate gustine marginalne raspodele $f(\theta_2)$ i uslovne raspodele $f(\theta_1|\theta_2)$, ali raspodela $f(\theta_1)$ nam nije poznata. Tada možemo koristiti MK integraciju da ocenimo ovu raspodelu koristeći izraz (5.9) simuliranjem vrednosti θ_2 iz raspodele $f(\theta_2)$:

$$\hat{f}(\theta_1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\theta_1|\theta_{2i}) \rightarrow E(f(\theta_1)). \quad (5.12)$$

Analogno (5.10) moguće je izračunati grešku ocene raspodele. Jasno je se sa višedimenzionalnim varijablama integrali mogu da postanu kompleksni tako da i MK simulacije i integracije nisu od pomoći *per se*. Neophodnost sofisticiranih metoda aproksimacije raspodela dovela je do razvoja MK algoritama koji se zasnivaju na Markovljevim lancima. Upravo će Markovljevi lanci biti predmet izlaganja sledeće tačke.

5.2 Markovljevi lanci

Markovljevi lanci (ML) predstavljaju stohastičke procese, odnosno familiju slučajnih varijabli uređenih u vremenskom prostoru. U zavisnosti od definisanosti vremenskog prostora imamo ML u diskretnom vremenskom prostoru i ML u vremenski neprekidnom prostoru. Predmet u ovoj disertaciji biće samo analiza stohastičkih procesa u diskretnom vremenskom prostoru. Kako je Markovljev lanac slučajan proces X_0, X_1, X_2, \dots to znači da u svakom (diskretnom) trenutku t imati slučajnu varijablu (ili slučajni vektor) X_t koja može da uzme određenu vrednost s_t koja predstavlja *stanje* Markovljevog lanca u trenutku t , a skup svih mogućih stanja zovem *prostor stanja*. I ovde pravimo podelu u zavisnosti od toga da li je prostor stanja prebrojiv ili neprebrojiv skup. Naš glavni interes u ovoj disertaciji su neprebrojivi skupovi stanja, ali će se u demonstriranju glavnih osobina ML koristiti primeri iz oba tipa prostora stanja radi jasnije prezentacije. Ono po čemu se ML značajno razlikuju od ostalih stohastičkih procesa je osobina Markova, odnosno:

$$P(X_t | X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots, X_0) = P(X_t | X_{t-1}) \quad (5.13)$$

što znači da ML predstavljaju stohastički proces koji nema memoriju (engl. *memorylessness*). Raspodela verovatnoća procesa u trenutku t je uslovno nezavisna od realizacije pre trenutka $t-2$. Drugim rečima, kod predviđanja pojava koje modeliramo preko ML dovoljno je da znamo samo realizaciju procesa u trenutku t da bismo vršili predviđanje X_{t+1} budući da su sve prethodne informacije akumulirane u X_t .

Dinamika ML definisana je *verovatnoćama prelaska* ili *tranzicionim kernelom*, u zavisnosti da li je prostor stanja prebrojiv ili neprebrojiv skup. Verovatnoće prelaska definišemo kao verovatnoću da Markovljev proces pređe iz stanja s_i u s_j u jednom vremenskom koraku. Formalno verovatnoće prelaska možemo da predstavimo kao:

$$P(s_i, s_j) = P(s_i \rightarrow s_j) = P(X_{t+1} = s_j | X_t = s_i). \quad (5.14)$$

Verovatnoća da u trenutku t proces bude u stanju s_j možemo da definišemo na sledeći način:

$$\pi_j(t) = P(X_t = s_j) \quad (5.15)$$

Samim tim verovatnoća da je proces u trenutku $t+1$ u stanju s_i se može predstaviti kao:

$$\pi_i(t+1) = P(X_{t+1} = s_i) = \sum_k P(X_{t+1} = s_i | X_t = s_k) P(X_t = s_k). \quad (5.16)$$

Za prebrojiv prostor stanja gde podrazumevam za tranziciona verovatnoću prelaza važi da je:

$$\sum_k P(X_{t+1} = s_i | X_t = s_k) = 1, \quad (5.17)$$

dok se u slučaju neprebrojivog prostora stanja dobija sledeća integralna funkcija:

$$P(X_{t+1} \in A) = \int_A P(X_t = s_k) K(s_k, A) ds_k, \quad (5.18)$$

gde je $K(s_k, A)$ *tranzicioni kernel* koji je definisan na sledeći način:

$$P(X_{t+1} \in A | X_t = s_k) = \int_A K(s_k, x) dx. \quad (5.19)$$

Ukoliko verovatnoće prelaska (ili kernel u neprekidnom slučaju) ne zavise od trenutka u kom se nalazi ML onda kažemo da je lanac vremenski homogen stohastički proces, odnosno tada je:

$$P(X_{t+1} = s_j | X_t = s_i) = P(X_t = s_j | X_{t-1} = s_i) \quad (5.20)$$

i upravo ovakvi ML će biti korišćeni u nastavku disertacije. Imajući u vidu vremensku homogenost ML procesa i ako bi sa P označili matricu tranzicionih verovatnoća, a sa vektorom vrste π_t raspodelu verovatnoća prostora stanja u trenutku t , onda važi sledeća relacija između verovatnoća stanja u različitim vremenskim trenucima:

$$\pi_t = \pi_{t-1}P = \pi_{t-2}P^2 = \pi_0P^t. \quad (5.21)$$

Izraz (5.21) važi i u neprekidnom slučaju gde bismo imali *gustine raspodela* i *tranzicione kernele* kao π_t i P . Ukoliko umesto (5.21) važi da je:

$$\pi = \pi P = \pi P^2 = \pi P^t \quad (5.22)$$

onda je takvo π *ravnotežna* ili *stacionarna raspodela*. Dakle, kad se ML nalazi u ravnotežnom stanju, tada važi da je $\pi_t = \pi_{t-1} = \dots = \pi_0$, odnosno raspodele verovatnoća u diskretnom slučaju (i gustina raspodela u neprekidnom slučaju) su jednake u svakom trenutku.

Međutim konkretan lanac Markova ne mora da ima stacionarnu raspodelu. Da bi ML imao svoje ravnotežno stanje dovoljan uslov je *uslov detaljne uravnoteženosti* (engl. *detailed balance*):

$$P(X_t = s_i, X_{t+1} = s_j) = P(X_{t+1} = s_i, X_t = s_j) \quad (5.23)$$

$$P(X_t = s_i)P(X_{t+1} = s_j | X_t = s_i) = P(X_t = s_j)P(X_{t+1} = s_i | X_t = s_j)$$

za bilo koji trenutak t . Izraz (5.23) možemo predstaviti u skraćenom obliku koristeći notaciju iz (5.14) i (5.15) na sledeći način:

$$\pi(s_i)P(s_i \rightarrow s_j) = \pi(s_j)P(s_j \rightarrow s_i) \quad (5.24)$$

Izraz (7.6) je noseći stub svih Monte Karlo metoda zasnovanih na Markovljevim lancima (MCMC). Upravo je *detaljna uravnoteženost* prva stepenica u konstruisanju različitih MCMC metoda, što će biti predmet prezentovanja u drugom delu ovog poglavlja. Ukoliko stohastički proces zadovoljava uslov detaljne uravnoteženosti kažemo još i da je sistem vremenski reverzibilan budući da je zajednička raspodela procesa jednaka nezavisno od smera u kom proces ide, odnosno:

$$P(X_0, X_1, \dots, X_t) = P(X_t, X_{t-1}, \dots, X_0). \quad (5.25)$$

U opštem slučaju Markovljev lanac ne mora da konvergira ka ravnotežnom stanju, pod pretpostavkom da ono uopšte postoji. Dakle, iako je zadovoljena *detaljna uravnoteženost* proces može sa beskonačnim protokom vremena t da nikada ne postigne svoju stacionarnu raspodelu. Ravnotežno stanje, odnosno stacionarna raspodela, za proizvoljni ML će biti postignuto u nekom vremenskom trenutku u zavisnosti od početnog stanja, X_0 , stohastičkog procesa. Određena početna stanja vodiće u ravnotežno stanje, dok će druga dovesti do „večnog lutanja“ stohastičkog procesa. Pretpostavimo da proces ML, pored detaljne uravnoteženosti, ima zadovoljene uslove *aperiodičnosti* i *nesvodljivosti*. Kod uslova *nesvodljivosti* imamo da za svaki podskup A iz skupa dopustivih vrednosti stohastičkog procesa Ω , za koji važi:

$$\pi(A) > 0, \quad (5.26)$$

postoji n tako da tranzicioni kernel nakon n koraka Markovljevog lanca zadovoljava sledeću jednakost:

$$K^n(x, A) > 0 \text{ za } \forall x \in \Omega \quad (5.27)$$

gde smo sa Ω označili skup svih dopustivih vrednosti stohastičkog procesa. Ovaj uslov omogućava pristup svakom podskupu (u diskretnom slučaju možemo govoriti i o pojedinačnim vrednostima) sa pozitivnom verovatnoćom u n koraka. Dakle, nezavisno od početno stanja svi delovi raspodele su dostupni sa pozitivnom verovatnoćom. Drugi uslov je *aperiodičnost Markovljevog lanca*. Ovaj uslov onemogućava procesu da ostane „zaglavljn“ u petlji samog procesa. Da bi se opisala logika ovog uslova, koristi se definicija njegove neispunjenosti. Sledeći tu logiku dobija se da je stanje i Markovljevog lanca *periodično* ako i samo ako važe sledeće jednakosti:

$$P_{ii}^t = 0 \text{ za } t \neq n, 2n, 3n, \dots \quad (5.28)$$

$$P_{ii}^t \neq 0 \text{ za } t = n, 2n, 3n, \dots$$

gde P_{ii}^t predstavlja verovatnoću da se lanac vrati u prvobitno stanje i nakon t perioda, dok n predstavlja skup celih brojeva većih ili jednakih od dva. Ako ne postoji n za koje je (5.28) zadovoljeno, onda je stanje i Markovljevog lanca *aperiodično*. Ukoliko su sva stanja *aperiodična*, sledi da je ceo Markovljev lanac *aperiodičan*. Ukoliko je lanac *nesvodljiv* i *aperiodičan* sa stacionarnom raspodelom π^* , kaže se da je takav lanac *ergodičan*. Ergodičan lanac sa stacionarnom raspodelom π^* konvergira ka ravnotežnom stanju nezavisno od početnog stanja, odnosno važi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi^t(i) \rightarrow \pi^*(i) \quad (5.29)$$

za svako stanje i u prostoru stanja. Dodatno, lanac *konvergira u ukupnoj varijaciji* ka ravnotežnoj raspodeli, što je strožiji rezultat od *konvergencije u raspodeli*. Mera rastojanja u ukupnoj varijaciji se može interpretirati kao najveća razlika između verovatnoća za isto stanje. Tako imamo da je:

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi^*(\cdot)\| \rightarrow 0 \text{ kad } t \rightarrow \infty \quad (5.30)$$

gde je leva strana izraz za distancu u ukupnoj varijaciji između $P^t(x, \cdot)$ i $\pi^*(\cdot)$. Verovatnoća, $P^t(x, \cdot)$, predstavlja raspodelu nakon t koraka počevši od stanja x . Izraz (5.30) važi za svako x , što znači da nije bitno iz kog početnog stanja kreće lanac da bi konvergirao ka ravnotežnoj raspodeli.

Problem koji se javlja u praksi je da je t uvek neki konačan broj. Konvergencije koje smo naveli važe u beskonačnom slučaju, što u praktičnim istraživanjima može da bude ograničenje imajući u vidu oskudne resurse sa kojima raspolažemo. Jasno je da je brzina konvergencije od presudne važnosti, ako znamo da istraživači nemaju neograničeno vreme na raspolaganju, kao ni svemoguće računare. Ono što bi bilo korisno kod zadovoljavajuće konvergencije je da je dovoljno brza tako da važe zakoni Centralne granične teoreme (CGT). Stoga nam je bitno da konvergencija bude geometrijska, odnosno da je ML *geometrijski ergodičan*. Geometrijski ergodičan lanac će imati poželjna svojstva koja važe u slučaju nezavisnih simulacija kod Monte Karlo metoda (Roberts & Rosenthal, 2004). Formalno geometrijsku ergodičnost predstavljamo izrazom nejednakosti:

$$\|P^t(x, \cdot) - \pi^*(\cdot)\| \leq M(x)a^t \quad (5.31)$$

tako da postoji neka konstanta $0 < a < 1$ i neka funkcija $M: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ za bilo koje x i za $t \in \mathbb{N}$. Neka je X_t lanac Markova koji je geometrijski ergodičan sa nekom ravnotežnom raspodelom π^* , i neka je g neka funkcija koja preslikava prostor stanja ML u realne brojeve, onda važi CGT prema kojoj imamo konvergenciju u raspodeli Markovljevog lanca:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g(X_t) \xrightarrow{d} N(E_{\pi}(g(X_t)), \sigma_g^2(X_t)/T) \quad (5.32)$$

gde je $\sigma_g^2(X_t) = \text{Var}_{\pi}(g(X_t)) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cov}_{\pi}(g(X_0), g(X_i))$. Rezultat u (5.32) još zovemo Centralna granična teorema Markovljevih lanaca. Korisna mera, dobijena iz varijanse ML je tzv. *intergrisana autokorelacija*:

$$\tau_g = \frac{\sigma_g^2(X_t)}{\text{Var}_{\pi}(g(X_t))}. \quad (5.33)$$

Ova mera nam omogućava da uporedimo ML sa procesom koji ima iid uzorak. Tako imamo da Markovljev lanac dužine $\tau_g T$ daje aproksimativno sličnu Monte Karlo varijansu kao uzorak veličine T sa nezavisnim opservacijama, odnosno iid proces. Jasno je da ćemo u slučaju $\tau_g = 1$ imati slučaj iid, dok će za jako korelisane ML ova mera biti jako visoka. U praksi ne možemo biti sigurni da je lanac geometrijski ergodičan, ali znamo da ako ovaj uslov nije zadovoljen ML neće moći u konačnom vremenskom prostoru da istraži prostor stanja i/ili će ostati „zaglavljen“ dugo u nekom potprostoru *prostora stanja* (Livingstone, 2021).

5.3 Monte Karlo metode zasnovane na Markovljevim lancima

MCMC metode podrazumevaju veći broj algoritama za simulaciju raspodela verovatnoća. Korišćenjem osnovnih svojstava Markovljevih lanaca, MCMC metodi polaze od neke ciljane raspodele π prema kojoj se formira tranzicioni kernel tako da važi *detaljna uravnoteženost*, o kojoj je bilo reči u prethodnoj tački.

Na taj način simuliranjem Markovljevog lanca, uz vađenje pretpostavki uravnoteženosti i ergodičnosti, lanac će težiti ravnotežnom stanju. Kada dođe u ravnotežno stanje svaka simulirana vrednost odražava raspodelu π . Nekad je potrebno i desetina hiljada iteracija da prođe pre nego što ML dođe u ravnotežno stanje. Čak i kad smo sigurni da se ML nalazi u ravnotežnom stanju, moramo obezbediti dovoljno iteracija kako bismo verodostojno simulirali ciljanu raspodelu imajući u vidu da simulirane opservacije nisu nezavisne kao što je to slučaj kod klasičnih Monte Karlo simulacija. Autokorelisanaost simuliranih opservacija povećava grešku ocenjivanja predstavljenog u (5.32) i (5.33). U nastavku sledi opis pojedinih MCMC metoda koji se koriste u praksi.

5.3.1 Metropolis-Hejstings algoritam (MH)

Neka je $q(x_t|x_{t-1})$ uslovna gustina verovatnoće koju možemo lako da simuliramo nekom od Monte Karlo metoda. Ova raspodela se još naziva *gustina predloga* ili *raspodela predloga*. Dalje, neka je sa $\pi(x_t)$ ciljana gustina raspodele koju hoćemo da simuliramo. MH algoritam funkcioniše tako što najpre biramo nasumično biramo neku vrednost x_0 za koju je gustina raspodele $f(x_0)$ veća od nule. Na osnovu te početne vrednosti simuliramo kandidata $q(x_1|x_0)$ koji će biti prihvaćen sa verovatnoćom:

$$\alpha(x_1|x_0) = \min \left\{ \frac{\pi(x_1)q(x_0|x_1)}{\pi(x_0)q(x_1|x_0)}, 1 \right\}. \quad (5.34)$$

Izraz (5.34) se još naziva i *količnik prihvatanja* (engl. *acceptance ratio*). U praksi će se ovo sprovesti tako što ćemo simulirati vrednost u iz uniformne raspodele sa granicama od nula do jedan. Ako je $u \leq \alpha(x_1|x_0)$ onda je u sledećoj iteraciji $x_1 = x_1'$, dok će u suprotnom važiti $x_1 = x_0$, odnosno u sledećoj iteraciji imaćemo istu vrednost kao u prethodnoj iteraciji. Opisani proces predstavlja *tranzicioni kernel* kod MH algoritma za koji važi uslov *detaljne uravnoteženosti*, odnosno važi da je:

$$K(x_1|x_0) = \alpha(x_1|x_0)q(x_1|x_0) \quad (5.35)$$

gde je bitno naglasiti da smo izostavili deo izraza koji se odnosi na stanje kada je $x_1' = x_0$ što u slučaju neprekidnih raspodela ima verovatnoću nula. Za detaljan dokaz koji obuhvata i ovu specifičnu situaciju, koja dobija na značaju kod prekidnih raspodela, dat je u radu (Roberts & Rosenthal, 2004). Koristeći uprošćenu formu tranzicionog kernela iz prethodnog se vidi da važi uslov detaljne uravnoteženosti:

$$\begin{aligned} K(x_1|x_0)\pi(x_0) &= K(x_0|x_1)\pi(x_1) \\ \alpha(x_1|x_0)q(x_1|x_0)\pi(x_0) &= \alpha(x_0|x_1)q(x_0|x_1)\pi(x_1) \\ \min \left\{ \frac{\pi(x_1)q(x_0|x_1)}{\pi(x_0)q(x_1|x_0)}, 1 \right\} q(x_1|x_0)\pi(x_0) &= \min \left\{ \frac{\pi(x_0)q(x_1|x_0)}{\pi(x_1)q(x_0|x_1)}, 1 \right\} q(x_0|x_1)\pi(x_1) \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\min\{\pi(x_1)q(x_0|x_1), q(x_1|x_0)\pi(x_0)\} = \min\{\pi(x_0)q(x_1|x_0), q(x_0|x_1)\pi(x_1)\}.$$

Jednakost u poslednjem redu dokaza (5.36) važi budući da je operator minimuma primenjen na jednake izraze. Iako je korišćena notacija za prva dva vremenska trenutka, isti rezultat važi za bilo koja dva sukcesivna trenutka t i $t-1$. Specijalan slučaj MH algoritma dobijamo kada pretpostavimo da je gustina predloga $q(x_t|x_{t-1})$ simetrična raspodela. U tom slučaju umesto izraza (5.34) imamo da važi:

$$\alpha(x'_1|x_0) = \min \left\{ \frac{\pi(x'_1)}{\pi(x_0)}, 1 \right\}. \quad (5.37)$$

MH algoritam koji podrazumeva simetričnu gustinu predloga se naziva Metropolis algoritam.

5.3.1.1 Metropolis-Hejstings sa slučajnim hodom

Najpopularniji MH algoritam je MH sa slučajnim hodom, gde je gustina predloga izražena preko slučajnog hoda. Formalno ovaj algoritam možemo da predstavimo na sledeći način:

$$y = x_{t-1} + \varepsilon \quad (5.38)$$

gde y predstavlja *kandidata* u MH algoritmu koji zavisi od vrednosti Markovljevo lanca iz prethodne iteracije i neke raspodele $g(\varepsilon)$ simetrične oko nule. Ovako definisana gustina predloga može se predstaviti sa:

$$q(y|x_{t-1}) = g(\varepsilon), \quad (5.39)$$

a imajući u vidu da je raspodela $g(\varepsilon)$ simetrične oko nule, onda važi da je:

$$q(y|x_{t-1}) = g(\varepsilon) = g(-\varepsilon) = q(x_{t-1}|y). \quad (5.40)$$

Sledi da je količnik prihvatanja, zbog simetrične gustine predloga dat izrazom (5.37). Samim tim ovaj algoritam predstavlja tip Metropolis algoritma. Listing 5.2 daje uvid u način funkcionisanja Metropolis algoritma gde je simulirana bivarijaciona normalna raspodela sa nenultim koeficijentom korelacije i jediničnim varijansama (8. red). Kao raspodela predloga je uzeta bivarijaciona normalna raspodela sa jediničnim varijansama i nultom korelacijom između komponenata (15. red). Parametri N i r predstavljaju broj iteracija i korelacioni koeficijent, redom, koje može da zada korisnik. Početno stanje je nulti vektor (11. i 12. red).

Listing 5.2 Kod u R programskom jeziku za simulaciju bivarijacione normalne raspodele putem Metropolis algoritma sa slučajnim hodom

```

1  library(mnormt)
2  library(ggplot2)
3  library(ggExtra)
4  library(cowplot)
5
6  set.seed(1234)
7  MH <- function(N, r) {
8    kovar <- matrix(c(1, r, r, 1), 2, 2)
9    sigma <- diag(rep(10, 2))
10   mat <- matrix(ncol = 2, nrow = N)
11   x1 <- 0
12   x2 <- 0
13   mat[1, ] <- c(x1, x2)
14   for(i in 2:N) {
15     epsilon <- rmnorm(1, c(0, 0), sigma)
16     kandidat <- mat[i-1, ] + epsilon # slucajni hod
17     alpha <- min(dmnorm(kandidat, c(0, 0), kovar) / dmnorm(mat[i-1, ], c(0, 0),
kovar), 1)
18     u <- runif(1, 0, 1)
19     if(u <= alpha)
20       mat[i, ] <- kandidat

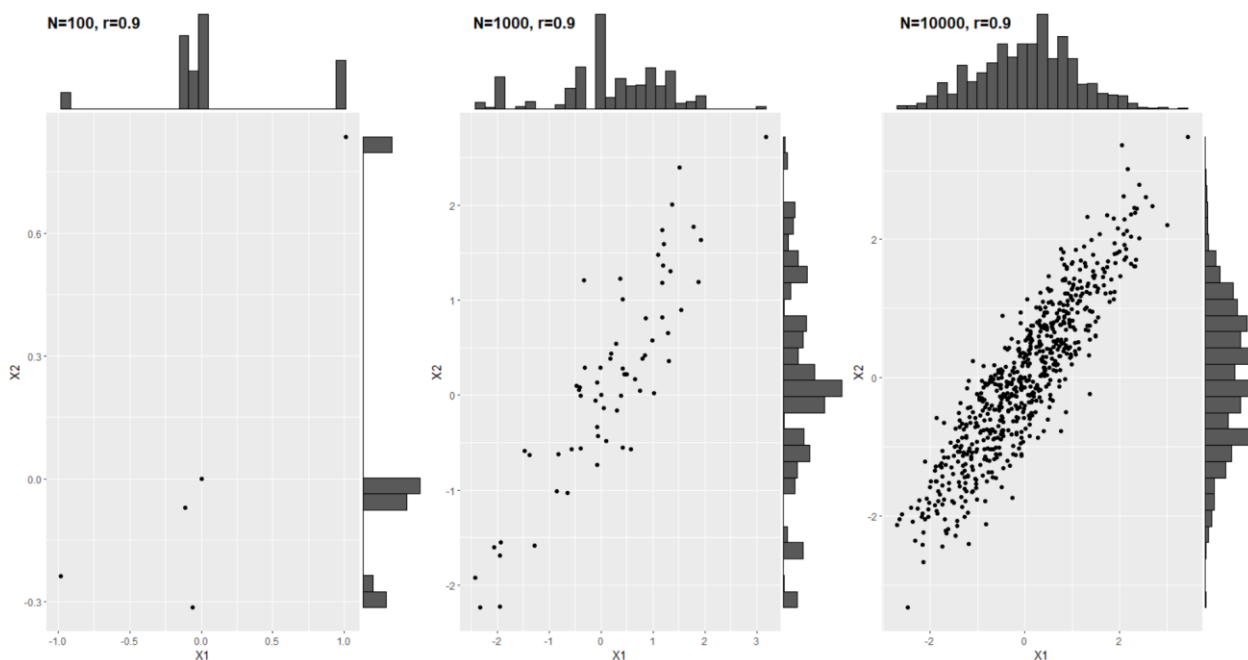
```

```

21   else
22     mat[i,] <- mat[i-1,]
23   }
24   data.frame(mat)
25   }
26
27   MHgraf100 <- ggplot(MH(100,0.9))+geom_point(aes(x=X1,y=X2))
28   MHgraf100 <-ggMarginal(MHgraf100, type = "histogram")
29   MHgraf1000 <- ggplot(MH(1000,0.9))+geom_point(aes(x=X1,y=X2))
30   MHgraf1000 <-ggMarginal(MHgraf1000, type = "histogram")
31   MHgraf10000 <- ggplot(MH(10000,0.9))+geom_point(aes(x=X1,y=X2))
32   MHgraf10000 <-ggMarginal(MHgraf10000, type = "histogram")
33
34   plot_grid(MHgraf100,MHgraf1000,MHgraf10000,
35             labels = c("N=100, r=0.9", "N=1000, r=0.9", "N=10000, r=0.9"),
36             ncol = 3, nrow = 1)

```

Simulacija bivarijacione raspodele može biti mnogo efikasnije izvedena putem nekog od Monte Karlo metoda, ali je u cilju demonstracije funkcionisanja MH algoritama korišćen ovaj primer. Listing 5.2 u redovima 27-36 pruža uvid u kod za kreiranje grafičkog prikaza simulacije normalne raspodele MH algoritmom u slučaju 100, 1000, 10000 iteracija, redom (Slika 5.2).

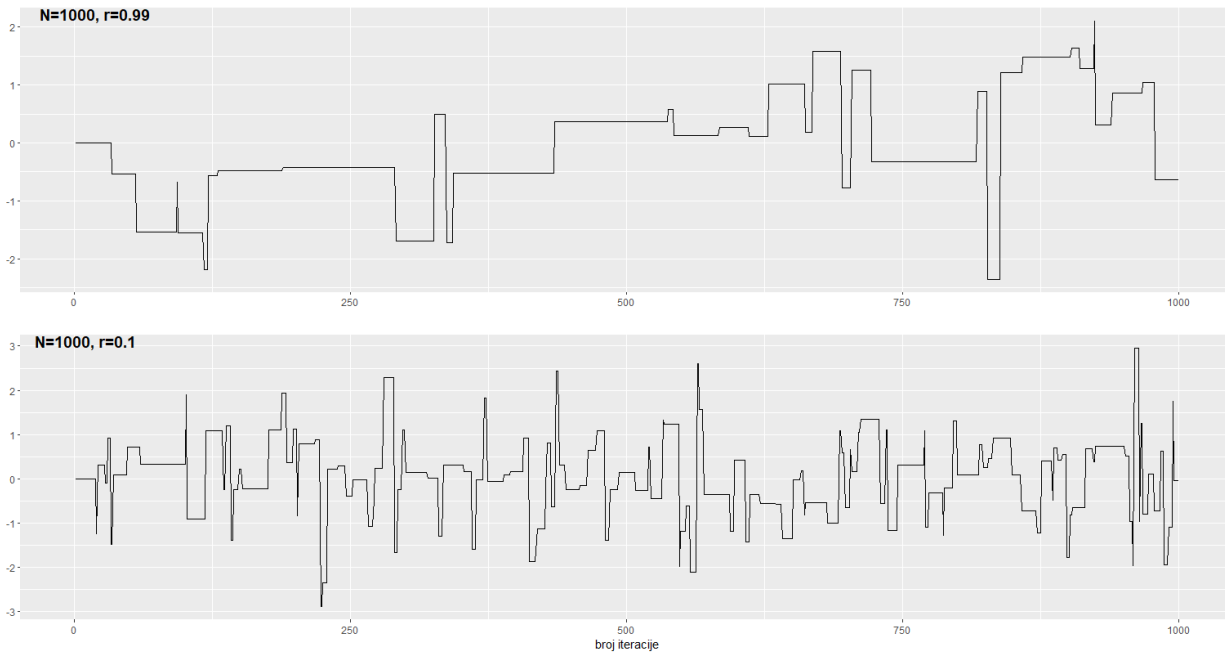


Slika 5.2 Simulacija dvodimenzionone normalne raspodele sa korelacijom 0,9 metodom Metropolis-Hejstingsa za različit broj iteracija (100, 1000, 10.000).

Izvor: autor.

Slika 5.2 dočarava kako sa povećanjem broja iteracija simulacija MH metodom postaje verodostojnija aproksimacija ciljane raspodele. Bitna osobina MH algoritma je da važi osobina detaljne uravnoteženosti koja se postiže kroz količnik prihvatanja. Ovo se jasno vidi na prvom grafikonu, gde iako imamo 100 iteracija, primećujemo samo pet tačaka. Listing 5.2 kroz redove 17-22 predstavlja deo koda koji diriguje

koji kandidati, generisani raspodelom predloga, će biti uzeti za novu vrednost lanca u sledećoj iteraciji. Ukoliko uslov nije zadovoljen, u sledećoj iteraciji zadržava se vrednost iz prethodne iteracije. Stopa odbijanja kandidata je velika, pre svega zbog velike korelisanosti komponenata u ciljanoj raspodeli. Dijagram traga predstavlja grafički prikaz kojim ispitujuemo valjanost konvergencije MCMC metoda. Ukoliko je MCMC metod uspešno konvergirao onda će dijagram traga imati oblik tzv. „čupave gusenice“ (engl. *hairy caterpillar*).

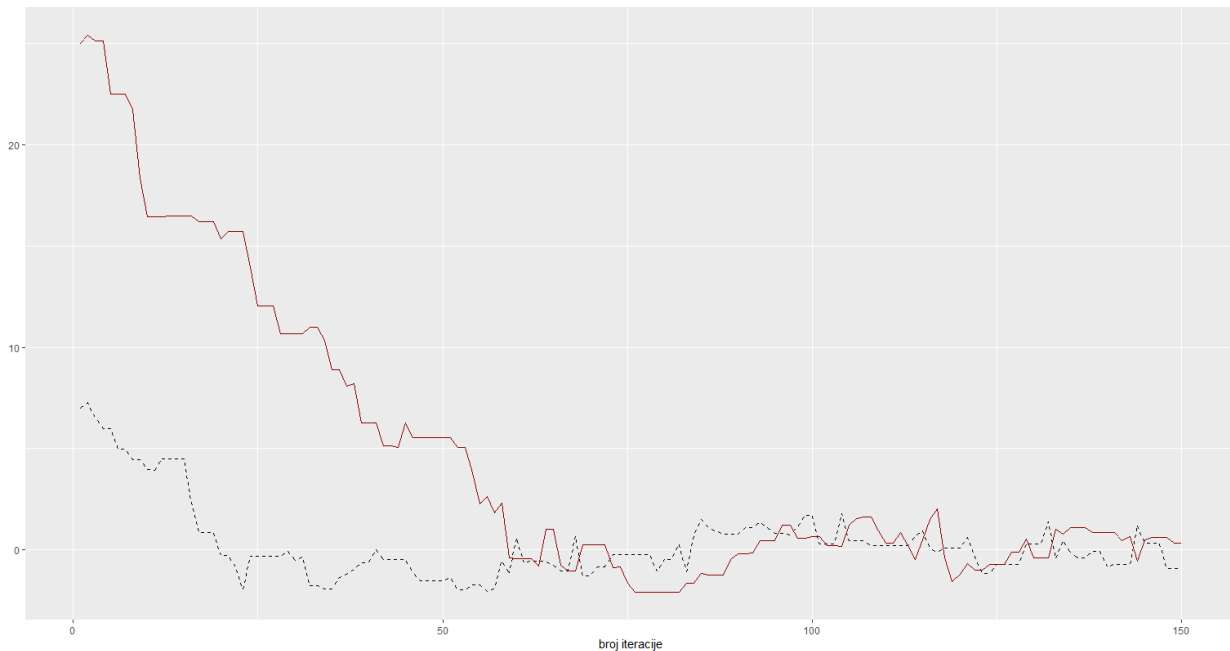


Slika 5.3 Dijagram traga za MH algoritam u prilikom simuliranja bivarijacione normalne raspodele u slučaju korelacionog koeficijenta $r=0,99$ i $r=0,10$ (gornji i donji grafikon, redom).

Izvor: autor.

Slika 5.3 prikazuje dijagram traga za prvu komponentu bivarijacione normalne raspodele u slučaju visoke korelacije (gornji graf) i niske korelacije (donji graf) ciljane raspodele. Obe komponente (slučajnog vektora) imaju slične osobine pa je zarad preglednosti prikazana samo prva dimenzija. Sa povećanjem korelacije, potrebno je znatno više iteracije kako bismo verodostojno aproksimirali ciljanu raspodelu. Vidimo da je dijagram traga zbog velike stope odbijanja kandidata dobrim delom ravan, odnosno sukcesivne iteracije uzimaju iste vrednosti. Stopa odbijanja je znatno smanjena u slučaju ciljane raspodele sa niskim korelacionim koeficijentom. U praksi bismo u slučaju velike stope odbijanja povećali broj iteracija MH algoritma i/ili smanjili varijansu raspodele predloga. Podsećam da je varijansa u ovom primeru fiksirana za vrednost jedan, isto kao i ciljane raspodele. Smanjivanjem varijansne raspodele predloga kandidati će imati male skokove pa će samim tim, dolaskom lanca u deo sa visokom gustinom verovatnoće, imati niske stope odbijanja, ali po cenu sporijeg pretraživanja ciljane raspodele. Kako je cilj obezbediti dobru aproksimaciju i razumnom vremenskom roku potrebno je odabrati optimalnu varijansu raspodele predloga koja će obezbediti dovoljno „široko“ pretraživanje raspodele, sa jedne strane, i dovojno precizno pretraživanje, sa druge strane. Veliki skokovi kandidata dovešće do velike stope odbijanja, dok će precizni kandidati imati nisku varijaciju što će uticati da MH algoritam bude izuzetno spor.

Bitan parametar u konvergenciji Markovljevih lanaca je početno stanje. Prilikom simulacije bivarijacione normalne raspodele korišćen je koordinatni početak kao početni vektor stanja, što odgovara parametru lokacije ciljane raspodele. Samim tim, algoritam je započeo simulaciju iz pozicije koja pripada ciljanoj raspodeli. Ukoliko bismo krenuli sa neke dalje pozicije, što je realniji slučaj u praksi, biće potreban određen broj iteracija dok Markovljev lanac ne dođe u ravnotežno stanje. U svakom slučaju, nezavisno od početne pozicije, uslov ergodičnosti obezbeđuje da MH algoritam uvek konvergira ka ravnotežnoj raspodeli. Slika 5.4 ilustruje situacije gde su početna stanja van koordinatnog početka. Isprekidana linije pokazuje slučaj početnog stanja $x=7$, dok neisprekidana linije pokazuje slučaj kad je početno stanje $x=25$. U oba slučaja stohastički proces je došao u ravnotežno stanje, ali različitom brzinom. Upravo stoga u praksi uvek odbacujemo prvih n iteracija prilikom primene MCMC metoda.



Slika 5.4 Dijagram traga za MH algoritam u prilikom simuliranja bivarijacione normalne raspodele u slučaju različitih početnih stanja.

Izvor: autor.

5.3.2 Gibsov metod

Gibsov metod predstavlja metod uzorkovanja gde u svakoj iteraciji aproksimiramo marginalnu raspodelu pojedinih komponenti multivarijacione raspodele koju posmatramo. Koristi se kod simuliranja raspodela koje je teško ili nemoguće direktno simulirati. Kao raspodelu predloga koristimo uslovne raspodele pojedinih komponenti ciljane raspodele uz fiksirane vrednosti ostalih komponenti. Dakle, uslov za primenu Gibsovog metoda je da je simuliranje uslovnih raspodela svake pojedinačne varijable izvodljivo. U nastavku sledi matematička formulacija Gibsovog algoritma.

Neka je $\pi(x_1, x_2, \dots, x_p)$ ciljana multivarijaciona raspodela koju hoćemo da simuliramo. Princip Gibsovog metoda se sastoji u cikličnom uzorkovanju iz uslovnih raspodela $\pi(x_i | x_{-i})$, gde x_{-i} predstavlja sve komponente raspodele π osim x_i . Primera radi, pretpostavimo da imamo raspodelu slučajnog vektora sa tri dimenzije $\pi(x_1, x_2, x_3)$ i neka n označava redni broj iteracije algoritma. Ako je trenutno stanje

stohastičkih procesa dato sa (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) , onda sledeća tri reda predstavljaju narednu iteraciju Gibsovog metoda:

$$\begin{aligned} x_{1,n+1} &\sim \pi(x_1 | x_{2,n}, x_{3,n}) \\ x_{2,n+1} &\sim \pi(x_2 | x_{1,n+1}, x_{3,n}) \\ x_{3,n+1} &\sim \pi(x_3 | x_{1,n+1}, x_{2,n+1}). \end{aligned} \tag{5.41}$$

(5.41) pokazuje da se u svakom koraku koriste najskorije vrednosti komponenti slučajnog vektora koje su dobijene uzorkovanjem iz prethodnog koraka. U slučaju kada broj iteracija, n , raste u beskonačnost, marginalne raspodele (x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) će težiti raspodeli $\pi(x_1, x_2, x_3)$ (Geman & Geman, 1984). Ako se uslovne raspodele iz (5.41) posmatraju kao raspodele kandidata, onda nije teško primetiti da je Gibsov metod zapravo specijalan slučaj MH algoritma gde je količnik prihvatanja uvek jednak jedinici. Listing 5.3 daje uvid u proces simuliranja bivarijacione normalne raspodele Gibsovim metodom. Početno stanje je nulti vektor (redovi 8 i 9). Kao i kod demonstracije MH algoritma, pretpostavljene su jedinične varijanse. Korišćeni su obrasci za uslovnu raspodelu (redovi 12 i 13) bivarijacione normalne raspodele (Zellner, 1996).

Listing 5.3 Kod u R programskom jeziku za simulaciju bivarijacione normalne raspodele putem Gibsovog algoritma

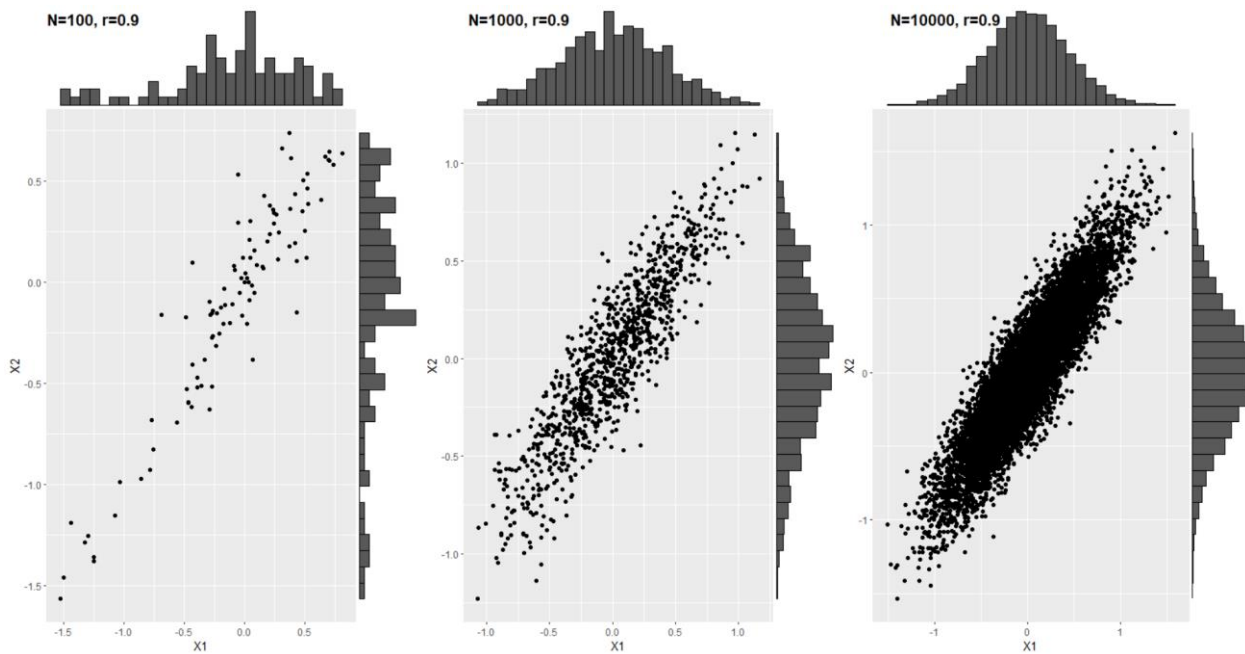
```

1  library(mnormt)
2  library(ggplot2)
3  library(ggExtra)
4  library(cowplot)
5
6  GIBS <- function(N, r){
7    mat <- matrix(ncol = 2, nrow = N)
8    x1 <- 0
9    x2 <- 0
10   mat[1, ] <- c(x1, x2)
11   for (i in 2:N) {
12     x1 <- rnorm(1, r * x2, 1 - r^2)
13     x2 <- rnorm(1, r * x1, 1 - r^2)
14     mat[i, ] <- c(x1, x2)
15   }
16   data.frame(mat)
17 }
18 set.seed(1234)
19 GIBSgraf100 <- ggplot(GIBS(100,0.9))+geom_point(aes(x=X1,y=X2))
20 GIBSgraf100 <-ggMarginal(GIBSgraf100, type = "histogram")
21 GIBSgraf1000 <- ggplot(GIBS(1000,0.9))+geom_point(aes(x=X1,y=X2))
22 GIBSgraf1000 <-ggMarginal(GIBSgraf1000, type = "histogram")
23 GIBSgraf10000 <- ggplot(GIBS(10000,0.9))+geom_point(aes(x=X1,y=X2))
24 GIBSgraf10000 <-ggMarginal(GIBSgraf10000, type = "histogram")
25
26 plot_grid(GIBSgraf100,GIBSgraf1000,GIBSgraf10000,
27           labels = c("N=100, r=0.9", "N=1000, r=0.9", "N=10000, r=0.9"),
28           ncol = 3, nrow = 1)

```

Redovi 19-28 koje prikazuje Listing 5.3 imaju za cilj grafičku demonstraciju Gibsovog metoda gde su korišćene različite veličine uzorka: 100, 1000, 10000 iteracija. Korelacija ciljane raspodele je postavljena

na 0,9. Slika 5.5 pokazuje da već sa 1000 iteracija imamo dobru aproksimaciju multivarijacione raspodele. U poređenju sa MH metodom, Gibs je nedvosmisleno efikasniji zbog verovatnoće prihvatanja kandidata jednakoj jedan. U tom smislu bitno je primeti razliku između dva grafikona (koje prikazuju Slika 5.5 i Slika 5.3, respektivno) za $N=100$ iteracije, gde se vidi da je Gibs još i tada uspeo da na zadovoljavajućem nivou aproksimira ciljanu raspodelu. MH algoritam nije ni približno dobro uspeo da aproksimira raspodelu zbog niske stope prihvatanja. Za jednostavnije raspodele (npr. kad je korelacija nula) razlika između efikasnosti MH i Gibsovog metoda se smanjuje. Osnovni nedostatak Gibsovog metoda je taj što u praksi nismo uvek u mogućnosti da simuliramo na osnovu uslovne raspodele. Stoga se Gibsov metod često kombinuje sa MH metodom. Uslovne raspodele varijabli, koje ne možemo da simuliramo direktnim metodama Monte Karla, možemo aproksimirati MH algoritmom. To bi praktično značilo da bi se u primeru koji predstavlja Listing 5.3 umesto redova 12 i 13 koristio pristup koji prikazuje Listing 5.2.



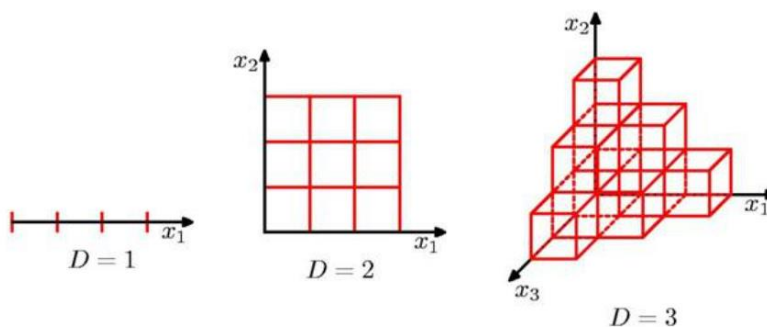
Slika 5.5 Simulacija bivarijacione normalne raspodele sa korelacijom 0,9 Gibsivim metodom za različit broj iteracija (100, 1000, 10000).

Izvor: autor.

5.3.3 Hamiltonov Monte Karlo metod

MCMC metod koji koristi Hamiltonove jednačine prilikom simulacije ciljane raspodele naziva se Hamiltonov Monte Karlo metod ili popularno HMC metod (engl. *Hamiltonian Monte Carlo*). Glavna motivacija za primenu HMC je neefikasnost MH metoda kod raspodela velikih dimenzija. MH metod predlaže nove korake po principu slučajnog hoda. U slučaju ciljane raspodele malih dimenzija, MH metod će u opštem slučaju pružiti zadovoljavajuće rešenje. Međutim, sa povećanjem dimenzionalnosti predlaganje novih kandidata postaje sve teže, što je indikovano visokim stopama odbijanja kandidata kod MH pristupa. U slučaju raspodele sa jednom dimenzijom nasumičnim predlaganjem kandidata znamo da se krećemo u dobrom smeru kao težištu raspodele. U slučaju dvodimenzionalne ciljane raspodele znatno

je teže nasumično pogoditi pravac ka modusu raspodele. Dobra ilustracija kompleksnosti uzorkovanja raspodela koju unosi dimenzionalnost je da zamislimo liniju podeljenu na tri dela, gde središnji deo možemo da posmatramo kao „tipičan skup“, odnosno skup vrednosti koji obuhvataju najveće težište raspodele (Slika 5.6). Ovaj „tipičan skup“ zauzima trećinu svih dostupnih vrednosti iz čega sledi da je to ujedno i verovatnoća da se predloženi kandidat nađe u tom skupu nasumičnim nagađanjem. Sa dodatnom dimenzijom dobio bi se kvadrat podeljen na devet celina, gde je samo središnji kvadrat „tipičan skup“. Verovatnoća da slučajnim nagađanjem dođemo do „tipičnog skupa“ je sada jedna devetina. Dodatna dimenzija prostor pretvara u kocku, gde tipičan skup zauzima tek 27-mi deo prostora. Iako ne možemo da vizualizujemo prostor sa više od tri dimenzije, jasno je da prostor postaje eksponencijalno veći pa pretraživanje prostora raspodele sve više liči na „traženje igle u plastu sena“ – ali u mraku pošto pretraživanje vršimo metodom slučajnog hoda.



Slika 5.6 Ilustracija širenja prostora sa dodatnim dimenzijama.

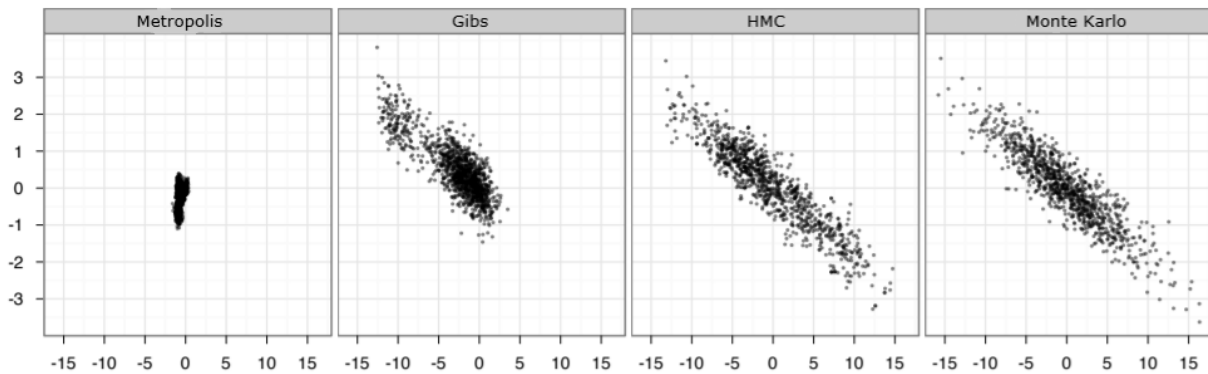
Izvor: Bishop (2006).

Podsećanja radi, rekli smo da MH algoritam funkcioniše po principu predlaganja kandidata pomoću neke raspodele predloga. Kandidati koji su bliži modusu raspodele, biće pre prihvaćeni od strane algoritma, dok će vrednosti daleko od modusa biti pre odbijene. Kod Gibsovog metoda uzorkovanje je znatno efikasnije. Zapravo, Gibbs je specijalan slučaj MH metoda gde svaki kandidat ima verovatnoću jedan i u tom smislu predstavlja efikasniji metod. Oba metoda postaju problematična po pitanju efikasnosti sa povećanjem dimenzionalnosti. Efektivna veličina uzorka se značajno smanjuje zbog visoke autokorelacije kandidata (pretraživanje slučajnim hodom). Da bi se postigla efikasnost uzorkovanja potrebno je da raspodela predloga generiše uzorke koji su reprezentativni u odnosu na ciljane raspodele. To znači da se želi postići što veća raspršenost kandidata u okviru prostora ciljane raspodele. Povećanje veličine skoka kod MH metoda deluje kao dobar pravac u razmišljanju. Problem je što se sa povećanjem skoka povećava i stopa odbijanja, budući da skokovi idu u nasumičnom smeru i stoga lako završavaju van tipičnog skupa.

HMC metod koristi „pametan“ (engl. *intelligent*) pristup predlaganja kandidata. Skokovi u predlaganju kandidata su dovoljno veliki da obezbeđuju reprezentativno uzorkovanje, dok pravac skoka nije nasumičan već uzima u obzir informacije o obliku ciljane raspodele. U nastavku sledi komparativna analiza HMC metoda u odnosu na Gibsov i MH metod gde je ilustrovana superiornost HMC. Nakon toga sledi detaljan opis HMC metoda.

Slika 5.7 prikazuje koliko je HMC algoritam (treći grafikon) superiorniji u odnosu na prva dva. Korišćena je 250-dimenzionalna multivarijaciona normalna raspodela sa visokom korelacijom. Četvrti grafikon koristi klasičan Monte Karlo metod koji koristi nezavisne uzorke izvučene direktno iz ciljane raspodele. Ovaj poslednji metod treba posmatrati kao referentni budući da MCMC metodi teže upravo ovakvoj

efikasnosti. Slika 5.7 pokazuje da je Metropolis izuzetno neefikasan pristup (prvi grafikon sa leve strane). Iako je bilo milion uzorkovanih jedinica, algoritam se „zaglavio“ u centralnom delu i nije uspeo da istraži čitavu oblast raspodele. Gibsov algoritam (drugi grafikon koji prikazuje Slika 5.7) je pružio bolje rezultate, ali takođe nije uspeo da istraži prostor na verodostojan način budući da je desni rep raspodele ostao u potpunosti neuzorkovan. Međutim, HMC algoritam sa 1000 puta manje uzoračkih jedinica uspeva da verodostojno uzorkuje (marginalnu) raspodelu posmatrane dve dimenzije. Njegova oblast pretraživanja je dosta slična Monte Karlo metodu (treći i četvrti grafikon, Slika 5.7). U slučaju kompleksnijih raspodela (na primer, visokodimenzionalnih multimodalnih raspodela), HMC metod neće biti efikasan kao Monte Karlo metod, ali je sa dijagrama raspršenosti jasna njegova superiornost u odnosu na MH i Gibsov metod.



Slika 5.7 Ilustracija efikasnosti uzorkovanja različitim metodama. Korišćena je multivarijaciona normalna raspodela dimenzionalnosti 250 sa visokom korelacijom između dimenzija. Samo prve dve dimenzije su prikazane za svaki metod. Za Metropolis i Gibsov metod korišćen je uzorak od 1.000.000 jedinica gde je svaka 1000-ta jedinica prikazana zarad lakše preglednosti. Za HMC i MK metod korišćen je uzorak veličine 1000.

Izvor: Hoffman i Gelman (2014).

HMC metod prilikom uzorkovanja koristi osnovne principe statističke mehanike. Prvi korak u definisanju HMC je uvođenje Gibsove raspodele:

$$p(\mathbf{x}) \propto e^{-E(\mathbf{x})/T} \quad (5.42)$$

koja predstavlja verovatnoću da će sistem biti u stanju \mathbf{x} u zavisnosti od energije, $E(\mathbf{x})$, i temperature. Iz izraza (5.42) sledi da će sistem težiti da bude u stanjima sa manjom energijom. Upravo komponenta energije Gibsove raspodele predstavlja upotrebnu moć uzorkovanja ciljane raspodele. Svaka raspodela verovatnoća se može predstaviti preko Gibsove raspodele. Tako, na primer, ako uzmemo negativan logaritam multivarijacione normalne raspodele dobićemo izraz za energiju sistema:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \mu), T = 1 \quad (5.43)$$

iz čega sledi da je:

$$p(\mathbf{x}) \propto e^{-E(\mathbf{x})} = N(\mu, \Sigma). \quad (5.44)$$

Na ovaj način se stiče nova perspektiva gde se umesto uzorkovanja određene raspodele verovatnoće, uzorkuje energetski prostor. Bivarijaciona normalna raspodela ima oblik zvona. Ukoliko bismo želeli da

uzorkujemo odgovarajući energetska prostor, na način koji prikazuje (5.43), onda bismo zapravo „okrenuli zvono naopačke“, budući da primenjujemo transformaciju negativnog logaritma (zbog logaritma, energetska prostor imaće oblik sličan, ali ne i identičan, obrnutom Gausovom zvonu).

Zamislimo da je energetska prostor u obliku lavaboa u kupatilu, i da izraz (5.43) predstavlja gravitacionu potencijalnu energiju. Dno lavaboa tada predstavlja centar gravitacionog polja. Ukoliko bismo pustili kliker sa ivice lavaboa, on bi u početnoj tački bio u stanju sa najvišom potencijalnom energijom i težio bi stanju niže energije. Ovo je slično kao kod Gausove raspodele, gde uzorkovane jedinice teže da budu bliže sredini raspodele.

Transformacija raspodele verovatnoća u energetska sistem, kako bi uzorkovali raspodelu verovatnoća deluje kao nepotrebna komplikacija. Međutim, to nije slučaj. Podsetimo se da je glavni nedostatak MH algoritma bilo „slepo“ pretraživanje prostora verovatnoće. Ono što se želi postići uvođenjem energetskog prostora je da pretraživanje uzme u obzir zakrivljenost prostora, te da predlaganje kandidata ne bude u potpunosti nasumično već usklađeno sa konkretnim prostorom ciljane raspodele (tj. da se koriste raspoložive informacije o konkretnom prostoru ciljane raspodele, odnosno da predlaganje bude pametno). Gorenavedeni primer sa lavaboom ilustruje kako gravitaciono polje može da bude korisno u predlaganju kandidata. Dobro „pretražen“ lavabo, kao energetska prostor, znači dobro opisanu raspodelu verovatnoća. Dovoljno je samo da izrazu za energiju dodamo negativan predznak i sve to eksponentujemo određenim stepenom.

Pretpostavimo da u posmatranom lavabou nema trenja i da smo nasumično izabrali neku početnu tačku odakle ćemo gurnuti kliker u nasumičnom pravcu. Kako se menja položaj klikera, tako se menja i potencijalna gravitaciona energija. Budući da smo pretpostavili da se radi o prostoru bez trenja, sledi da je ukupna energija jednaka sumi potencijalne energije, $U(\mathbf{x})$, i kinetičke energije, $K(\mathbf{p})$, odnosno:

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = U(\mathbf{x}) + K(\mathbf{p}) \quad (5.45)$$

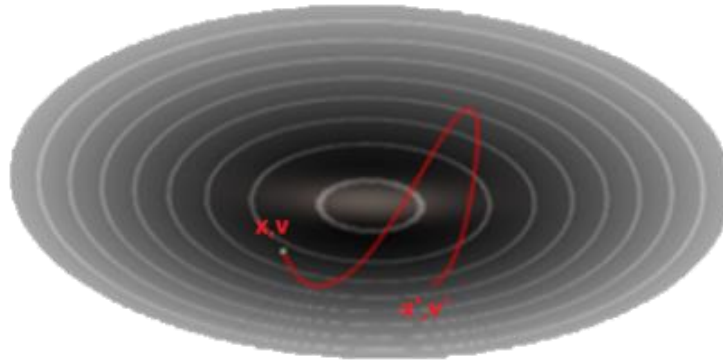
gde potencijalna energija zavisi od pozicije klikera, \mathbf{x} , dok kinetička zavisi od impulsa klikera, \mathbf{p} . Slika 5.8 ilustruje kretanje klikera za datu početnu poziciju i impuls, \mathbf{x} i \mathbf{p} . Vektor impulsa ima svoj pravac i intenzitet i definisan je kao proizvod mase tela i kvadrata brzine. Kliker je „gurnut“ ka dole gde se udaljava od centra gravitacionog polja zbog čega potencijalna energija raste, dok kinetička opada. U nekom momentu kliker će usporiti pod pritiskom gravitacione sile i promeniti smer ka centru gravitacionog polja. Kako je ukupna energija konstantna potencijalna i kinetička energija naizmenično rastu i padaju u zavisnosti od pozicije tela (klikera) u gravitacionom prostoru. Ovakvo kretanje tela u prostoru gde je ukupna energija konstantna nazivamo kretanjem u Hamiltonovom dinamičkom sistemu. Diferencijalne jednačine koje opisuju dinamiku kretanja vektorskog para $[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ u zavisnosti od vremena poznate su pod nazivom Hamiltonove jednačine, i glase:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial K}{\partial p} \quad (5.46)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Bitno je naglasiti da Hamiltonove jednačine opisuju kretanje tela u sistemu sa konstantnom ukupnom energijom. Iako potencijalna i kinetička energija variraju u zavisnosti od vremena t , ukupna energija ne zavisi od t , odnosno $E(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = E(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Često se u literaturi ukupna energija u Hamiltonovom sistemu obeležava sa H , odnosno $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Ideja kod HMC je da iz početnog stanja (\mathbf{x}, \mathbf{p}) kliker gurnemo nasumično i u nekom momentu ga zaustavimo na poziciji $(\mathbf{x}', \mathbf{p}')$. Na taj način smo uzorkovali novu vrednost ciljane

raspodele. U sledećoj iteraciji početna pozicija bi bila \mathbf{x}' , ali bismo pravac i intenzitet impulsa nasumično izabrali. Ako u pojedinačnim iteracijama kliker dovoljno dugo putuje, imaćemo veliku raspršenost između uzorkovanih vrednosti što znači i veću reprezentativnost. Ako bi putanja između \mathbf{x} i \mathbf{x}' bila izuzetno mala, opet bismo imali uzorkovanje po principu slučajnog hoda. Optimalna dužina putanje je posebno pitanje koje će takođe biti obrađeno. Ono što je bitno upamtiti iz predašnjeg izlaganja je pojam pametnog uzorkovanja, koje uzima u obzir zakrivljenost prostora koji želimo da uzorkujemo. Impuls sam po sebi nije bitan, ali bez njega ne bi bilo moguće pretražiti ciljane raspodele.



Slika 5.8 Ilustracija logike pretraživanja prostora energije kod HMC metoda.
Izvor: prilagođeno iz Rogozhnikov (2016).

Gibsovom raspodelom sada možemo da obuhvatimo potencijalnu i kinetičku energiju

$$p(\mathbf{x}) \propto e^{-(U(\mathbf{x})+K(\mathbf{x}))}. \quad (5.47)$$

Ciljana raspodela će biti implementirana kroz potencijalnu energiju, odnosno transformacijom negativnim logaritmom ciljane raspodele. Ciljana raspodela je tipično aposteriorna raspodela pa se izraz za potencijalnu energiju može uopšteno predstaviti na sledeći način:

$$U(\mathbf{x}) = -\log(P(\mathbf{x}|\mathbf{D})) = -\log(P(\mathbf{D}|\mathbf{x})P(\mathbf{x})) \quad (5.48)$$

gde \mathbf{x} predstavlja parametarski prostor (na primer, karakteristike ispitanika za koje smo zainteresovani), a \mathbf{D} opservacije iz uzorka jedinica posmatranja (na primer, podaci dobijeni anketiranjem ispitanika). Dodatna varijabla neophodna da bi HMC algoritam funkcionisao je impuls koji se može predstaviti kao proizvod mase i kvadrata brzine. Za svaku dimenziju parametarskog prostora moramo imati paralelnu dimenziju impulsa, pa se kinetička energija može predstaviti kao:

$$K(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \Sigma^{-1} \mathbf{p} \quad (5.49)$$

gde Σ predstavlja matricu mase (engl. *mass matrix*). U slučaju jednodimenzionalnog parametarskog prostora (pa samim tim i jednodimenzionalnog impulsnog prostora) uz pretpostavku da je masa tela jednaka jedan, izraz (5.49) može da se uprosti sa:

$$K(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2}. \quad (5.50)$$

Ovako definisana potencijalna i kinetička energija omogućavaju da se izraz Gibsove raspodele predstavi na sledeći način:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \propto P(\mathbf{D}|\mathbf{x})P(\mathbf{x})N(\mathbf{p}|\mathbf{0}, \Sigma) = p(\mathbf{x})p(\mathbf{p}). \quad (5.51)$$

Iz (5.51) postaje jasno zašto je za potencijalnu energiju uzeta negativna logaritamska transformacija i zašto je (5.49) podoban izraz za kinetičku energiju. Gibsova raspodela sada predstavlja proizvod aposteriorne raspodele parametara i multivarijacione normalne raspodele. Na ovaj način integracijom po \mathbf{p} dobija se sledeća marginalna raspodela:

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} \propto P(\mathbf{D}|\mathbf{x})P(\mathbf{x}) \int N(\mathbf{p}|\mathbf{0}, \Sigma) d\mathbf{p} \quad (5.52)$$

iz čega sledi da je

$$p(\mathbf{x}) \propto P(\mathbf{D}|\mathbf{x})P(\mathbf{x}) \quad (5.53)$$

budući da je integral multivarijacione normalne raspodele jednak jedinici. Zašto je značajno da imamo marginalnu raspodelu koja je jednaka aposteriornoj raspodeli posmatranih parametara? Ukoliko bismo mogli da uzorkujemo raspodelu $p(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ dovoljno bi bilo da odbacimo sve uzorkovane vrednosti \mathbf{p} da bi se dobila uzorkovana marginalna raspodela \mathbf{x} , odnosno aposteriorni parametarski prostor.

Korsiteći Hamiltonove jednačine iz izraza (5.46) možemo da uzorkujemo vektore \mathbf{x} i \mathbf{p} na udaljenosti koja omogućava nisku korelisanost sukcesivnih uzorkovanih jedinica. Bez dodatnog vektora \mathbf{p} ne bismo mogli da iskoristimo Hamiltonovo kretanje koje nam omogućava pametno uzorkovanje u parametarskom prostoru. Praktičan problem sa Hamiltonovim (diferencijalnim) jednačinama je u tome što neretko nismo u mogućnosti da ih rešimo analitičkim putem zbog čega se koristi numerička optimizacija. Jednostavan algoritam za rešavanje Hamiltonovih jednačina je *algoritam žabljeg skoka* (engl. *leapfrog algorithm*), gde se neprekidna putanja aproksimira putanjom sa prebrojivim brojem koraka, koji se može predstaviti na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) &\rightarrow \mathbf{p}(t) - (\varepsilon/2) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{x}(t + \varepsilon) &\rightarrow \mathbf{x}(t) + \varepsilon \Sigma^{-1} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}(t + \varepsilon) &\rightarrow \mathbf{p}(t + \varepsilon/2) - (\varepsilon/2) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (5.54)$$

gde je sa t označena fiktivna vremenska dimenzija, dok ε predstavlja dužinu koraka. Pre primene algoritma, potrebno je specificovati ε kao i broj koraka. U opštem slučaju kod Hamiltonovog kretanja imaćemo periodične putanje. Stoga je potrebno da broj koraka (za dato ε) ne bude prevelik kako bi se postigla efikasnost utroška vremenskih i računarskih resursa, ali i da ne bude premali kako se ne bi javio problem slučajnog hoda kao kod MH algoritma. Može se primetiti da kod (5.54) moramo da imamo početna stanja vektorskog para $\mathbf{p}(t)$ i $\mathbf{x}(t)$ na početku svake iteracije *algoritma žabljeg skoka*. Za $\mathbf{x}(t)$ se uzima vrednost iz prethodne iteracije, dok se za $\mathbf{p}(t)$ uvek simulira nova vrednost iz multivarijacione normalne raspodele. Ovo je neophodno kako bi se obezbedio uslov ergodičnosti Markovljevog lanca, konkretno uslov nesvodljivosti. Aperiodičnost se postiže odabirom broja koraka u *algoritmu žabljeg skoka* koji ne dovodi do periodičnog kretanja. Slika 5.8 pokazuje da, ukoliko bismo nastavili kretanje iz $(\mathbf{x}', \mathbf{p}')$ završili bismo na početnom stanju (\mathbf{x}, \mathbf{p}) . Kao i kod MH algoritma, na kraju svake iteracije prihvatamo ili odbijamo kandidata u zavisnosti od razlike u verovatnoći početnog i krajnjeg stanja vektorskog para (\mathbf{x}, \mathbf{p}) , odnosno gustine verovatnoće tih stanja u Gibsovoj raspodeli. Verovatnoća prihvatanja kandidata je data izrazom:

$$r = \min \left[1, e^{(H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - H(\mathbf{x}', \mathbf{p}'))} \cdot \frac{P(\mathbf{x}, \mathbf{p} | \mathbf{x}', \mathbf{p}')}{P(\mathbf{x}', \mathbf{p}' | \mathbf{x}, \mathbf{p})} \right] \quad (5.55)$$

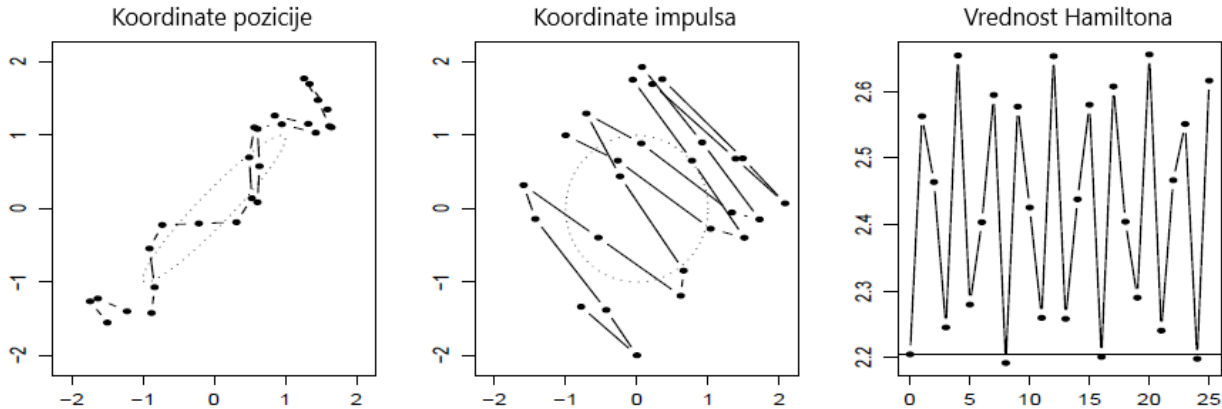
gde je korišćena ista logika kao i kod MH algoritma samo što u HMC slučaju stavljamo u odnos gustine Gibsove raspode za stanja na početku i kraju iteracije pomnožene Hejstingsovim količnikom (5.34). Izraz (5.55) možemo dalje da razložimo na sledeći način:

$$r = \min \left[1, \frac{P(\mathbf{D} | \mathbf{x}') P(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{p}' | \mathbf{0}, \Sigma)}{P(\mathbf{D} | \mathbf{x}) P(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{p} | \mathbf{0}, \Sigma)} \cdot \frac{P(\mathbf{x}, \mathbf{p} | \mathbf{x}', \mathbf{p}')}{P(\mathbf{x}', \mathbf{p}' | \mathbf{x}, \mathbf{p})} \right]. \quad (5.56)$$

Hejstingsov količnik proizilazi iz dinamike Hamiltonove putanje i algoritma žabljeg skoka, koji je determinističke prirode. To znači da će se za dato početno stanje, prostor stanja i dužinu putanje, uvek dostići isto krajnje stanje. Iz toga sledi da je $P(\mathbf{x}', \mathbf{p}' | \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 1$. Međutim, ukoliko krenemo iz stanja \mathbf{x}', \mathbf{p}' skoro je izvesno da nećemo završiti putanju u \mathbf{x}, \mathbf{p} (osim ako bismo dužinu putanje podesili tako da uvek napravi pun ciklus na kraju iteracije). Sledi da je $P(\mathbf{x}, \mathbf{p} | \mathbf{x}', \mathbf{p}') = 0$. Drugim rečima nije zadovoljena pretpostavka *detaljne uravnoteženosti* koja je neophodna za postizanje konvergencije HMC ka ciljanoj raspodeli. Ovaj problem se jednostavno rešava malom izmenom u algoritmu. Ukoliko bi se na kraju svake iteracije žabljeg skoka uzela negativna vrednost impulsa \mathbf{p} , onda bi važila vremenska reverzibilnost, odnosno važno bi sledeće: $P(-\mathbf{x}', \mathbf{p}' | \mathbf{x}, \mathbf{p}) = 1$ i $P(\mathbf{x}, \mathbf{p} | -\mathbf{x}', \mathbf{p}') = 1$. Na ovaj način se obezbeđuje ispunjenost uslova detaljne uravnoteženosti i ujedno uproštava izraz (5.56) budući da se kod Hejstingsovog količnika brojilac i imenilac potiru. Samim tim, verovatnoća prihvatanja kandidata sada postaje:

$$r = \min \left[1, \frac{P(\mathbf{D} | \mathbf{x}') P(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{p}' | \mathbf{0}, \Sigma)}{P(\mathbf{D} | \mathbf{x}) P(\mathbf{x}) \mathbf{N}(\mathbf{p} | \mathbf{0}, \Sigma)} \right]. \quad (5.57)$$

Primitimo da u slučaju kada se Hamiltonove jednačine mogu rešiti analitički, onda važi da je $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{x}', \mathbf{p}')$ prema samoj definiciji Hamiltonovog dinamičkog sistema kretanja čestica kada nema trenja (primer bacanja klikera u kadi). U tom slučaju verovatnoća prihvatanja kandidata bi bila uvek jednaka jedinici. Kako se u praksi koristi algoritam žabljeg skoka, postojaće odstupanja u energetsom nivou na početku i na kraju iteracije pa je neophodno primeniti verovatnoće prihvatanja (5.57) kako bi važila detaljna uravnoteženost. Slika 5.9 ilustruje kretanje klikera koje je aproksimirano algoritmom žabljeg skoka sa 25 iteracija, sa početnom pozicijom $\mathbf{x} = [-1,50 \ -1,55]^T$ i sa početnim impulsom $\mathbf{p} = [-1 \ 1]^T$.



Slika 5.9 Ilustracija algoritma žabljeg skoka na primeru kretanja klikera u lavabou. Na levom grafikonu su date pozicije klikera u 25 iteracija. Srednji grafikon pokazuje promenu impulsa tokom kretanja klikera po lavabou. Desni grafikon pokazuje varijacije u Hamiltonovoj vrednosti usled greške aproksimacije kod žabljeg algoritma.

Izvor: Neal (2012).

Specifikacija ϵ i broj koraka kod HMC metoda igra bitnu ulogu. Loše vrednosti mogu voditi ka neefikasnom pretraživanju prostora ili čak neergodičnom ponašanju, odnosno nemogućnosti pretraživanja svih delova prostora ciljane raspodele. Jedan od načina kako se to u praksi može rešiti je randomizacijom ϵ . Drugi način je korišćenjem NUTS (Hoffman & Gelman, 2014) algoritma (engl. *No-U-Turn-Sampler*). NUTS algoritam optimizuje broj koraka kod algoritma žabljeg skoka tako što zaustavlja translaciju kad započne „polukružno“ kretanje. Na taj način nema nepotrebnog preklapanja u Hamiltonovoj putanji usled prevelikog broja koraka, ali nema ni slučajnog hoda usled premalog broja koraka. Dobra osobina NUTS algoritma je da u slučaju izrazito zakrivljenih višedimenzionalnih raspodela gde nije moguće uzorkovanje i gde MH i Gibsov algoritam ne daju signale da nešto nije u redu, HMC i NUTS su u stanju da to otkriju signaliziranjem putem velikih odstupanja u Hamiltonovim vrednostima na početku i kraju pojedinačnih iteracija. Ovo je zapravo problem geometrijske neergodičnosti o kojoj je bilo reči. Na grafikonu koji ilustruje Slika 5.9 to bi se odrazilo kroz divergiranje Hamiltonovih vrednosti na desnoj slici. U normalnim okolnostima, kao što je to ovde slučaj, Hamiltonove vrednosti će imati varijacije koje liče na beli šum. Potencijalna rešenja u slučaju divergencija uključuju smanjivanje vrednosti ϵ kako bi algoritam uspeo da se provuče kroz izrazito zakrivljene delove prostora ili, ako to ne pomaže, onda je neophodna respecifikacija modela.

Matrica mase, Σ , takođe ima bitnu ulogu u efikasnosti HMC algoritma. Visoka korelisanost parametarskog prostora, \mathbf{x} , može dosta da uspori HMC ukoliko matrica mase nije optimizovana. U praksi ćemo obično oceniti kovarijacionu matricu posmatranih parametara i njenu inverznu verziju koristiti kao kovarijacionu matricu kod uzorkovanja impulsa (Neal, 2012). Međutim, na ovaj način možemo uspešno da neutrališemo samo linearne korelacije u aposteriorom prostoru parametara. U slučaju nelinearnih korelacija, imanentnih hijerarhijskim modelima, kovarijaciona matrica neće u potpunosti rešiti neefikasnost uzorkovanja (Stan Development Team, 2016). Čak i u slučaju linearnih korelacija, ocenjivanje Σ mora biti obavljeno u preliminarnoj fazi MCMC algoritma. Za ocenjivanje kovarijacione matrice neophodno je da postoji uzorkovan parametarski prostor, a da bismo uzorkovali parametarski prostor neophodno je da znamo Σ , pa ulazimo u „začarani krug“. Stoga se ova aproksimacija iterativno odigrava u fazi zagrevanja (engl. *warm-up*) algoritma. Obično će prvih nekoliko hiljada iteracija biti dovoljno za ocenjivanje Σ , uz paralelno konvergiranje HMC do ciljane raspodele. Kao meru konvergencije koristimo obično *Gelman-Rubinovu* statistiku. Ova mera poredi više paralelno generisanih

MCMC lanaca. Konvergencija se procenjuje poređenjem varijacija između i unutar lanaca. Ako su varijacije između i unutar lanaca približno jednake, onda je to pokazatelj da je MCMC konvergirao ka ciljanoj raspodeli.

6 EFIKASNOST EKSPERIMENTALNOG DIZAJNA I BAJESOV PRISTUP U EKONOMETRIJSKOM MODELIRANJU PREFERENCIJA

6.1 Otkrivene i iskazane preferencije

Modeliranje preferencija predstavlja atraktivnu oblast primenjenih i teorijskih istraživanja iz različitih oblasti. Koja je optimalna cena nekog proizvoda, koliko tržišni udeo ćemo izgubiti ako smanjimo kvalitet proizvoda, koliko će dodatni sat trajanja putovanja avionom uticati na nezadovoljstvo putnika, samo su neka od pitanja koja zahtevaju poznavanje preferencija ciljne populacije. Postoje dva metoda ocenjivanja preferencija pojedinaca i/ili grupe, *otkrivene* i *iskazane preferencije*.

Otkrivene preferencije istraživač procenjuje direktno na osnovu ponašanja pojedinca u realnom svetu. Dakle, istraživač nema uticaja na prikupljanje podataka, već ih dobija kao date. S druge strane, iskazane preferencije dobijaju se indirektno na osnovu anketnog metoda gde istraživač u veštačkom okruženju procenjuje preferencije pojedinca. Jasno je da u ovom slučaju postoji potpuna kontrola prilikom prikupljanja podata. Glavna prednost kod iskazanih preferencija je interna validnost, odnosno veća pouzdanost u donošenju zaključka o uzročnosti preferencija i određene varijable. Na primer, kako promena cene avio-karte neke kompanije utiče na broj putnika? Svakako možemo da prikupimo podatke o kretanju cena karata i broju putnika na datim linijama i ocenimo preferencije metodom otkrivenih preferencija. Problem koji se u toj situaciji može javiti je nepostojanje kontrole nad eksternim faktorima koji utiču na preferencije. Moguće je, na primer, da je loš dizajn veb-sajta preko kojeg su prodavane karte uticao nepovoljno na prodaju karata posmatrane kompanije. Neuzimanje u obzir ovako bitnog prediktora dovodi do pristrasnih ocena u modelu, pa samim tim i loše procene uticaja cene avio-karata na njihovu prodaju.

Kod iskazanih preferencija, pak, ispitanici iskazuju svoje preferencije u veštačkim uslovima gde može da se kontroliše uticaj eksterno uslovljenih varijabli poput dizajna veb-sajta. U takvim uslovima može da se ispita i uticaj faktora koje je teško opservirati u realnim okolnostima, poput psiholoških stanja pojedinaca u momentu kupovine avio-karte ili uticaja muzike koju slušaju u trenutku kupovine. U stvarnosti često nemamo dostupne ovakve podatke pa je merenje uticaja ovih faktora nemoguće, osim ako ih ne inkorporiramo u eksperimentalna istraživanja. Moguće je i da podaci budu dostupni za samo neke varijable, ali da varijacije tih varijabli nisu dovoljne za pouzdano zaključivanje. Jedan takav primer bi bile cene luksuznih automobila. Cene pojedinačnih modela luksuznih automobila ne variraju mnogo, ako uopšte i variraju, tako da nije moguće oceniti koeficijente modela.

Glavna prednost otkrivenih preferencija, i ujedno mana iskazanih, je eksterna validnost, odnosno mogućnost generalizacije rezultata istraživanja. U eksperimentu različiti faktori mogu dovesti do ugrožavanja validnosti podataka dobijenih od ispitanika. Na primer, svest ispitanika da učestvuje u istraživanju može u potpunosti da iskrivi sliku koju dobijamo o preferencijama ispitanika. Pojedinaac može da pruža informacije koje su društveno poželjne, a ne koje stvarno odražavaju njegove preferencije. Samim tim, ispitanici mogu da pokažu jedno ponašanje u eksperimentu, a drugo u realnosti zbog čega rezultate istraživanja ne možemo generalizovati, odnosno kažemo da istraživanje nema eksternu validnost. Dobro osmišljen eksperimentalni dizajn ima za cilj minimiziranje greške merenja, odnosno uticaj gorepomenutih faktora, čime istraživanje dobija na eksternoj validnosti. Sa druge strane, dobar dizajn mora da bude osmišljen tako da postoji velika pouzdanost o uzročno-posledičnoj vezi posmatranog

prediktora i zavisne varijable. Bitno je naglasiti da je nemoguće napraviti eksperimentalni dizajn za koji možemo da tvrdimo da postoji savršena eksterna i interna validnost. Na istraživaču je da teži minimiziranju nedostataka eksperimenta, a samim tim i maksimiziranju pouzdanosti rezultata istraživanja. Upravo je eksperimentalni dizajn i metod iskazanih preferencija predmet analize ovog dela disertacije.

6.2 Uloga eksperimentalnog dizajna u istraživanju i njeni elementi

U istraživačkom procesu na samom početku se definišu svrha i ciljevi istraživanja, koji dalje opredeljuju hipoteze koje treba ispitati. U zavisnosti od kompleksnosti ciljeva istraživanja i hipoteza definiše se eksperimentalni dizajn. Ukoliko u samim hipotezama figuriraju različite varijable i njihove interakcije, eksperiment mora biti dizajniran tako da obuhvati te faktore uticaja, kao i da obezbedi kontrolu eksterno uslovljenih faktora. Koliko je god to moguće, eksperimentalni dizajn bi trebalo približiti realnosti kako bi se postigla dovoljna eksterna validnost. Primera radi, analiza združenih efekata, koja koristi rejtinge proizvoda, ima nisku eksternu validnost kod istraživanja preferencija potrošača prema sladoledima. S druge strane, analiza združenih efekata zasnovana na izboru između alternativa ima veću eksternu validnost pošto bolje oponaša realnu situaciju gde potrošači prave izbor između više alternativa.

Prilikom dizajniranja eksperimenta potrebno je doneti više odluka o njegovoj strukturi, a te odluke dalje opredeljuju tok istraživanja nakon što su podaci prikupljeni. Osnovni element svakog dizajna predstavljaju proizvodi ili usluge koji su predmet istraživanja. Ispitanici se sukcesivno suočavaju sa izborom između više alternativa. Broj alternativa treba odrediti tako da u što je moguće većoj meri odražava realnost u kojoj bi se ispitanik našao u stvarnosti prilikom donošenja odluke o izboru između više alternativa. U realnosti, ispitanici nisu u stanju da istovremeno analiziraju previše alternativa. Najčešće se pribegava izboru između tri ili četiri alternative (Meissner et al., 2016). Prevelik broj alternativa može predstavljati ogroman kognitivni napor za ispitanika koji može reagovati tako što će koristiti različite heuristike prilikom odabira proizvoda i tako narušiti validnost informacija. Osim toga, broj alternativa može i da varira. Pojedina istraživanja pokazuju da se variranjem broja alternativa može povećati eksterna validnost, budući da potrošači nisu svesni svih brendova na tržištu prilikom izbora proizvoda sa police (Draganska & Klapper, 2011).

Sledeća stavka je odrediti broj situacija gde ispitanici biraju alternative, odnosno dužinu upitnika. Ako se povećava broj situacija gde ispitanik pravi izbor između alternativa, dobija se više informacija i statistički pouzdanije ocene. Na ovaj način se može ostvariti ušteda u troškovima istraživanja time što se gubitak količine informacija usled manjeg broja ispitanika kompenzuje većim upitnicima. Naravno, potrebno je voditi računa i o kognitivnoj opterećenosti ispitanika. Predugačak upitnik može dovesti do odustajanja ispitanika od učešća u istraživanju ili do pružanja nasumičnih odgovora. Opšta preporuka je da ne treba postavljati više od 20 pitanja po upitniku (Johnson & Orme, 1996). Moguće je postavljati više pitanja i uzimati u obzir različita psihološka stanja ispitanika tokom popunjavanja upitnika. Tokom popunjavanja upitnika ispitanici „sazrevaju“, oni postaju umorniji i iskusniji što utiče na promenu njihovih preferencija tokom trajanja eksperimenta. Stoga, uzimanje u obzir heterogenosti preferencija samih ispitanika doprinosi pouzdanijim informacijama (Otter, 2007).

6.3 Statistička i merna efikasnost

Eksperimentalni dizajn bi trebalo jasno da razlikuje *statističku* i *mernu efikasnost* (engl. *statistical and response efficiency*). Većina istraživanja se ne odnosi samo na jedan parametar pa je važno voditi računa

o preciznosti ocena više parametara. Statistička efikasnost dizajna se upravo odnosi na preciznost ocenjivanja svih parametara modela. Na primer, kod linearnih modela ocene parametara će imati najmanju standardnu grešku (postiže se najveća preciznost) kada su objašnjavajuće varijable međusobno nekorelisane i kada je varijabilitet svake pojedinačne objašnjavajuće varijable maksimiziran (Kuhfeld, 2010). Ovakav dizajn se naziva *ortogonalan dizajn* i o njemu će biti više reči u nastavku ove glave. Kod metode iskazanih preferencija istraživač ima mogućnost da utiče na kovarijacionu matricu objašnjavajućih varijabli, odnosno tzv. matricu dizajna (engl. *design matrix*). Kod otkrivenih preferencija to nije slučaj tako da istraživač mora da se suoči sa dosta izazova koje nameću realni podaci. Niska varijansa regresora dovodi do visoke standardne greške odgovarajućeg regresionog koeficijenta. Na primer, cena cigareta je ista na svim mestima prodaje, pa je nemoguće oceniti cenovnu elastičnost takvih proizvoda. Drugi primer bi mogao da bude ocenjivanje unakrsne cenovne elastičnosti dva proizvoda, A i B, različitih proizvođača. Proizvođači mogu da menjaju sve cene svojih proizvoda iz istog portfolija u isto vreme što dovodi do visoke multikolinearnosti cena. Iz tog razloga je teško ili gotovo nemoguće odvojiti efekat cene proizvoda A od drugih proizvoda iz tog portfolija na prodaju konkurentskog proizvoda B. Kod metoda iskazanih preferencija ovakvi problemi se mogu lako zaobići.

Greška merenja nastaje usled nepodudaranja informacija koje ispitanik daje i informacija koje se od njega traže, što može biti posledica brojnih razloga. Umor ispitanika, težina pitanja, nepažnja su samo neki od faktora koji utiču na grešku merenja (Reed Johnson et al., 2013). Neka istraživanja pokazuju da se sa povećanjem statističke efikasnosti smanjuje merna efikasnost (Louviere et al., 2008). Sa povećanjem statističke efikasnosti ispitanici dobijaju „teža“ pitanja gde prave izbor između alternativa sličnih po apriornoj korisnosti. Upravo situacija kada je teže napraviti izbor pruža mnogo više informacija prilikom modeliranja preferencija nego što je to slučaj kada je izbor lak, odnosno kada postoji dominantna alternativa (na primer, proizvod sa niskom cenom i visokim kvalitetom nasuprot proizvodu sa visokom cenom i niskim kvalitetom). Trošak „teških“, ali informativnih pitanja, je povećanje kognitivnih napora kod ispitanika što rezultuje manje konzistentnim izborima tokom eksperimenta (Louviere et al., 2008).

Istraživač može da utiče istovremeno i na mernu i na statističku efikasnost. Neki od načina da se to postigne su podela upitnika na odvojene delove, gde ispitanici dobijaju samo neke delove statistički efikasnog upitnika. Na taj način ispitanici dele teret „teških pitanja“ između sebe. Dok povećanje uzorka povoljno utiče na oba tipa efikasnosti, ono istovremeno povećava cenu istraživanja. Korišćenje ortogonalnog dizajna je generalno neoptimalno u statističkom smislu kod modela izbora. Modeli izbora su po pravilu nelinearni tako da je statistička optimizacija znatno kompleksnija nego što je to slučaj kod linearnih modela. Argument za korišćenje ortogonalnog dizajna kod nelinearnih modela bila bi njegova jednostavna primena, ali i manji kognitivni napor ispitanika. Bliemer i Ros (2011) su u svom istraživanju pokazali da je statistički optimiziran dizajn dao pouzdanije ocene od (statistički neefikasnog) ortogonalnog dizajna. U daljem toku ovog rada fokus će biti na statističkoj efikasnosti. Sledi opis ekonometrijskih Bajesovih modela gde će biti predstavljena njihova uloga i primena kod sprovođenja eksperimenata.

6.4 Ekonometrijski Bajesovi modeli u kontekstu eksperimentalnog dizajna

Kod modeliranja preferencija istraživačima stoji na raspolaganju spektar različitih ekonometrijskih modela. Iako može delovati da se izbor modela vrši tek u poslednjoj fazi istraživačkog procesa, ovu odluku je zapravo potrebno doneti pre početka prikupljanja podataka. Sam izbor modela bitno utiče na dizajn eksperimenta koji uključuje modeliranje preferencija. Drugi naziv za ekonometrijske modele koji će u nastavku biti predstavljeni je *analiza združenih efekata* (engl. *conjoint analysis*). Naziv proizilazi iz

načina na koji se ocenjuju preferencije. Ispitanici sagledavaju različite karakteristike proizvoda koje istraživač varira kroz eksperimentalni dizajn. Na taj način se „zduženi efekti“ različitih karakteristika proizvoda odražavaju kroz odgovore ispitanika (npr. skale za merenje rejtinga sviđanja ili izbor različitih alternativa). U procesu ocenjivanja modela preferencije se dekomponuju na pojedinačne karakteristike proizvoda što donosi odluka omogućava da, na primer, predvide tržišno učešće proizvoda ili usluga koje još ne postoje na tržištu, ili efekat promene cene na promenu tražnje. U nastavku će biti predstavljeni linearni i nelinearni modeli koji se koriste u analizi združenih efekata sa homogenom i heterogenom strukturom preferencija ispitanika. Nakon toga će biti objašnjena optimizacija eksperimentalnog dizajna u zavisnosti od pretpostavljenog ekonometrijskog modela.

6.4.1 Nehijerarhijski linearni model

Najjednostavniji model je linearni nehijerarhijski model. Ovaj model ima prednost u odnosu na ostale kada koristimo rejtinge prilikom elicitanje preferencija ispitanika. Na određenoj skali ispitanici izražavaju svoj stepen sviđanja (ili verovatnoću kupovine) prema određenom proizvodu ili usluzi. Svaki proizvod, predstavljen ispitaniku, je ilustrovan svojim konceptom, odnosno kombinacijom nivoa različitih atributa. Na primer, ako je predmet istraživanja izbor različitih mobilnih telefona, svaki od ponuđenih mobilnih telefona se može predstaviti putem tri atributa: cena, brend i dijagonala ekrana. Svaki atribut se, nadalje, može raščlaniti na više nivoa. Tako, na primer cena može da ima četiri različita nivoa: 250 evra, 350 evra, 500 evra i 700 evra. Bitno je paziti da broj atributa, kao i broj nivoa, ne bude preveliki. Ukoliko bismo imali pet atributa sa po četiri nivoa to bi značilo ukupno 1.024 kombinacija proizvoda. Dodavanjem dva nova atributa taj broj se povećava na 16.384. Sa druge strane, želimo da dizajn eksperimenta ima što veću eksternu validnost. Ukoliko posmatrana kategorija proizvoda na tržištu ima čitav dijapazon različitih cena, onda nije realistično da u eksperimentalnom dizajnu pretpostavimo samo dva nivoa cena. Kako nije moguće da ispitanik izrazi stepen sviđanja (ili verovatnoću kupovine) prema svim mogućim kombinacijama, eksperiment se dizajnira tako da se pojedinačnom ispitaniku prikazuje samo manji broj kombinacija, ali tako da se od njega dobije što je moguće više informacija koje se mogu generalizovati i na neprikazane kombinacije nivoa atributa.

Formalno linearni model koji se koristi za modeliranje preferencija koje su definisane skalama za merenje rejtinga predstavljamo na sledeći način:

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (6.1)$$

gde za grešku modela $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ obično pretpostavljamo iid

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \text{ kao i } E(\boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{X}_i) = \mathbf{0}. \quad (6.2)$$

U prikazanom modelu $\boldsymbol{\beta}$ koeficijenti odražavaju preferencije ispitanika prema različitim nivoima atributa. Na primer, koliku korisnost za potrošača ima proizvod sa garancijom (jedan nivo) u odnosu na proizvod bez garancije (drugi nivo). Matrica \mathbf{X}_i je matrica dizajna ispitanika i gde je broj redova jednak broju konceptata proizvoda (kombinacije različitih nivoa atributa predstavljenih po kolonama) koje ispitanik ocenjuje. Pretpostavljamo da su regresori deterministički određeni. Sa \mathbf{y}_i je predstavljen vektor rejtinga ispitanika i prema proizvodima datih matricom \mathbf{X}_i . Za potrebe softverskog programiranja tipično se koristi model u skraćenoj formi:

$$\mathbf{y}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}, \sigma). \quad (6.3)$$

U kontekstu Bajesove statistike svi parametri imaju definisanu apriornu raspodelu. Bitno je voditi računa o dopustivim vrednostima parametara. Na primer, parametar skaliranja σ ne može imati negativne vrednosti pa bismo za ovaj parametar mogli da definišemo apriornu raspodelu kao eksponencijalnu $\text{Exp}(1)$, odnosno:

$$f(\sigma) = e^{-\sigma} \text{ za } \sigma \geq 0, \text{ a } 0 \text{ u ostalim slučajevima,} \quad (6.4)$$

dok regresioni koeficijenti mogu da imaju normalnu apriornu raspodelu

$$\boldsymbol{\beta} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}). \quad (6.5)$$

Umesto normalne raspodele za \mathbf{y}_i smo mogli da koristimo i neku drugu raspodelu. Na primer, ukoliko bismo hteli da imamo robusniji model koji nije osetljiv na ekstremne vrednosti koristili bismo nestandardizovanu Studentovu t-raspodelu sa:

$$\mathbf{y}_i \sim T(\nu, \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta}, \sigma). \quad (6.6)$$

U slučaju Studentove raspodele dodatno postoji i parametar broja stepeni slobode ν koji definiše težinu repova i samim tim robusnost modela. U specijalnom slučaju kada je $\nu=1$ onda to postaje Košijeva raspodela. Ghosh et al. (2018) predlažu upotrebu Studentove raspodele kod logističke i linearne regresije. Za parametar broja stepeni slobode, ν , istraživač može da koristi fiksnu vrednost ukoliko poseduje predznanja iz predašnjih istraživanja ili teorije. U slučaju kada istraživač nema dovoljno informacija za određivanje parametra ν , onda se preporučuje upotreba apriorne gama raspodele (Juárez & Steel, 2010) sa parametrima oblika i stope, 2 i 0,1:

$$\nu \sim \Gamma(2; 0,1). \quad (6.7)$$

Juárez i Steel (2010) su pokazali da ovako definisana apriorna raspodela parametra ν daje slične rezultate kao Džefrisova apriorna raspodela koju karakteriše visok stepen neinformativnosti. To praktično znači da bi ocena parametra ν trebalo da bude pod značajnim uticajem podataka uz dovoljnu penalizaciju koja omogućava ocenjivanje modela. Gelman (2020) dodatno predlaže postavljanje donje vrednosne granice za parametar ν . U većini slučajeva donja granica bi bila 1, uz mogućnost da u određenim istraživanjima može da bude postavljena i na višu vrednost.

Kad su pitanju regresioni koeficijenti i njihova apriorna raspodela, često se koristi normalna raspodela. Popularan statistički paket koji je dizajniran baš za primenu Bajesovih modela, *rstanarm*, pretpostavlja sledeću raspodelu regresionih koeficijenata (Gabry & Goodrich, 2020):

$$\beta_k \sim \mathcal{N}(0; 2,5 \cdot s_y / s_x) \text{ za } k = 1, 2, \dots, K \quad (6.8)$$

gde je s_x uzoračka standardna devijacija odgovarajućeg regresora, a s_y uzoračka standardna devijacija zavisne varijable. Ako sa β_0 definišemo odsečak modela onda Gabry i Goodrich predlažu sledeću raspodelu:

$$\beta_0 \sim \mathcal{N}(\bar{y}; 2,5 \cdot s_y) \quad (6.9)$$

gde \bar{y} predstavlja uzoračku srednju vrednost zavisne varijable, a s_y njenu standardnu devijaciju. Drugi predlog apriorne raspodele regresionih koeficijenata je Studentova raspodela (Ghosh et al., 2018) sa lakšim repovima, odnosno većim brojem stepeni:

$$\beta \sim T(\nu, 0, s) \quad (6.10)$$

gde je predložen broj stepeni $3 < \nu < 7$, dok se za parametar skaliranja, s , preporučuje dovoljno velika vrednost koja bi obezbedila slabo-informativnu prirodu apriorne raspodele. Na primer, Gelman (2008) i Gelman et al. (2008) predlažu parametar skaliranja da bude 2,5 uz prethodnu standardizaciju varijabli u modelu. Ekvivalentan pristup bez prethodne standardizacije varijabli je definisanje parametra skaliranja kao u izrazu (6.8) gde je $s = 2,5 \cdot s_y/s_x$.

Model (6.1) podrazumeva nehijerarhijsku strukturu, odnosno svaki ispitanik ima iste regresione koeficijente, β . Ova pretpostavka je dosta restriktivna i ima smisla primenjivati je ukoliko verujemo da ispitanici predstavljaju uzorak izvučen iz relativno homogene populacije. Ispitanike u nehijerarhijskom modelu možemo da posmatramo kao klonove tipičnog ispitanika. Razlika u podacima koje ispitanici pružaju nastaju isključivo kao posledica slučajnosti. Iz tog razloga se ovako definisan model naziva i model sa potpunim grupisanjem (engl. *complete pooling model*) budući da se ispitanici praktično stavljaju na „jednu gomilu“. Kod dizajniranja eksperimenta svakom ispitaniku možemo da prikazemo različite proizvode, a moguće je i da svaki ispitanik ima istu matricu dizajna, odnosno $X_i = X$ za svako $i=1,2,\dots,N$.

6.4.2 Hijerarhijski linearni model

Hijerarhijski linearni model omogućava veću fleksibilnost prilikom modeliranja preferencija ispitanika. Iz ovog razloga hijerarhijski modeli su znatno popularniji, ali i znatno teži za primenu. Kod hijerarhijskih modela pretpostavljamo da svaki ispitanik ima zasebne preferencije, što se odražava kroz različite vrednosti regresionih koeficijenata za svakog ispitanika. Formalno hijerarhijski linearni model možemo da predstavimo:

$$y_i \sim \mathcal{N}(X_i \beta_i, \sigma) \quad (6.11)$$

gde se za svako i imamo različite regresione koeficijente. Ovde se podrazumeva da je prva kolona matrice dizajna jedinična pa samim tim vektor β uključuje i koeficijente odsečka. Sledi da je dimenzija vektora β data obrascem:

$$\text{dimenzija } \beta = \text{broj atributa proizvoda} \cdot (\text{broj nivoa svakog atributa} - 1) + 1. \quad (6.12)$$

Ovaj obrazac važi u slučaju kada sve attribute tretiramo kao nemetričke varijable. Kod metričkih varijabli se ne oduzima jedinica od ukupnog broja nivoa tog atributa za dati eksperimentalni dizajn.

6.4.2.1 Hijerarhijski model bez grupisanja

Apriorna raspodela za koeficijent skaliranja σ može biti, kao i kod nehijerarhijskog modela, eksponencijalna, uz napomenu da i odsečena normalna ili bilo koja druga raspodela mogu da daju slične rezultate uz uporedivo definisane hiperparametre. Definisane apriornih raspodela za regresione koeficijente igra bitnu ulogu u ponašanju ocena modela. Ukoliko pretpostavljamo da su ispitanici izrazito heterogeni, onda možemo da definišemo model tako da vektor regresionih koeficijenata za svakog ispitanika ima nezavisnu apriornu raspodelu, odnosno:

$$\beta_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma) \text{ za } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.13)$$

gde je kovarijaciona matrica Σ uzeta kao data, a svaki hiperparametar μ_i ima zasebnu raspodelu, odnosno

$$\mu_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I). \quad (6.14)$$

Ovo praktično znači da možemo da ocenimo model za svakog ispitanika nezavisno jedan od drugog. Ispitanici pružaju podatke koji nemaju preklapanja u informacionom sadržaju. Model kojim je definisano ponašanje regresionih koeficijenata (6.13) i (6.14) se naziva model bez povlačenja regresionih koeficijenata ili model bez grupisanja podataka (engl. *no pooling model*). Pod pojmom povlačenje misli se na povlačenje vrednosti regresionih koeficijenata pojedinaca ka srednjoj vrednosti regresionih koeficijenata uzorka. Ovde praktično nema grupisanja prilikom ocenjivanja, odnosno svaki ispitanik predstavlja zasebnu „grupu podataka“.

6.4.2.2 Hijerarhijski model sa delimičnim grupisanjem

Ako bismo pretpostavili da regresioni koeficijenti imaju apriornu raspodelu definisanu kao:

$$\beta_i \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma) \text{ za } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.15)$$

sa raspodelom hiperparametara definisanom sa:

$$\mu \sim \mathcal{N}(0, I) \quad (6.16)$$

onda na izgled mala izmena u izostavljanju indeksa kod hiperparametra μ zapravo dovodi do radikalno drugačijeg ponašanja modela prilikom ocenjivanja parametara β_i . Ocene će u ovakvoj konstelaciji biti povlačene ka prosečnim vrednostima regresionih koeficijenata u uzorku. Ovako definisan model regresionih koeficijenata (6.15) i (6.16) se naziva model sa delimičnim povlačenjem ili delimičnim grupisanjem (engl. *partial pooling model*). U kojoj meri će biti intenzitet povlačenja regresionih koeficijenata prema srednjim vrednostima zavisiće od količine informacija koju dobijamo od pojedinačnih ispitanika. Dobra strana ovog modela je ta što će moći da oceni regresione koeficijente za ispitanike koji nisu pružili puno odgovora (razlog za to mogu biti nedostajući podaci ili eksperimentalni dizajn koji nije izbalansiran). Regresioni koeficijenti za ispitanike koji su pružili manje informacija će biti pod velikim uticajem srednjih vrednosti iz uzorka. Na ovaj način, prilikom ocenjivanja dolazi do „pozajmljivanja“ informacija različitih ispitanika. Ispitanici kojim manjka informacija pozajmljuju od drugih informacije koje model inkorporira u ocene regresionih koeficijenata. Međutim, ukoliko ispitanici imaju puno pitanja pa samim tim doprinose ocenjivanju parametara sa puno informacija, onda će apriorne informacije imati mali uticaj. U situacijama sa velikom količinom informacija po ispitaniku, hijerarhijski model sa delimičnim grupisanjem neće imati veliku dodatnu vrednost u odnosu na model bez grupisanja.

6.4.2.3 Hijerarhijski model sa regresorima na nivou pojedinca

U određenim situacijama potrebe istraživanja zahtevaju još fleksibilniju strukturu samog ekonometrijskog modela. Kod hijerarhijskog modela sa delimičnim grupisanjem nedostatak informacija pojedinačnog ispitanika se kompenzuje time što se regresioni koeficijenti povlače ka uzoračkoj sredini. S druge strane, uzoračka sredina se formira na osnovu informacija svih ispitanika u uzorku. Sledi da će neki ispitanici više, a neki manje doprinostiti formiranju ocena vektorskog hiperparametra μ . Sama činjenica da je neki ispitanik imao više pitanja i/ili davao konzistentnije odgovore nije legitiman razlog da se od takvih ispitanika najviše „pozajmljuju“ informacije. Smisleniji pristup bi bio da svaki ispitanik dobije ocene na osnovu pruženih informacija i da povlačenje bude usmereno ka srednjim vrednostima parametara njemu sličnih ispitanika u uzorku. Ovakav pristup pretpostavlja postojanje segmenata unutar

uzorka. Prost primer segmentacije može da bude prema polu, tako da svaki ispitanik u nedostatku informacija dobija ocenu regresionih koeficijenata povučenu ka centroidu regresionih koeficijenata grupe kojoj pripada, odnosno polu. Formalno ovakav model se može predstaviti sa:

$$\beta_i \sim \mathcal{N}(\gamma \mathbf{u}_i, \Sigma) \text{ za } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.17)$$

gde γ predstavlja matricu efekata regresora na koeficijente β , a \mathbf{u}_i vektor vrednosti regresora na nivou pojedinca i . Ukoliko je regresor pol ispitanika, onda će \mathbf{u}_i biti skalar, dok će γ biti vektor dimenzija istih kao β . Vrednosti \mathbf{u}_i variraju između pojedinaca (engl. *between variation*) dok vrednosti matrice \mathbf{X}_i variraju unutar pojedinaca (engl. *within variation*). Karakteristike proizvoda ili usluge za koje modeliramo preferencije namerno variramo prilikom njihovog izlaganja pojedincima. Nasuprot tome, psiho-demografske karakteristike ne mogu varirati kod pojedinca tokom sprovođenja eksperimenta. Starost, pol i tip ličnosti su fiksirani za svakog ispitanika.

Vektorski hiperparametar γ mora imati zadatu apriornu raspodelu. Jednostavno rešenje može da bude multivarijaciona normalna raspodela

$$\gamma \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \text{ za } i = 1, 2, \dots, N. \quad (6.18)$$

U zavisnosti od toga koliko prostora želimo da pružimo podacima u ocenjivanja γ vektora, jediničnu matricu \mathbf{I} možemo da pomnožimo odgovarajućim skalarom, l . Što je veći skalar l to je će podaci više opredeljavati ocenu γ vektora. Kad je u pitanju Σ tu nam na raspolaganju stoje različite apriorne raspodele. Neke od opcija su Višartova raspodela, inverzna Višartova raspodela i LKJ raspodela (Gelman, 2006, 2020). U praksi se kovarijacione matrica dekomponuje na korelacionu i matricu skaliranja (Stan Development Team, 2019), kao što sledi:

$$\Sigma = \mathbf{diag}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{diag}(\boldsymbol{\tau}) \quad (6.19)$$

gde $\boldsymbol{\tau}$ predstavlja vektor parametara skaliranja, $\mathbf{diag}(\boldsymbol{\tau})$ dijagonalnu matricu sa parametrima skaliranja na dijagonali, $\boldsymbol{\Omega}$ korelacionu matricu. Pojedinačnim elementima parametarskog vektora $\boldsymbol{\tau}$ definišemo raspodelu sa težim repovima, poput odsečene Košijeve raspodele ili Studentove sa nekoliko nekoliko stepeni slobode zato što u slučajevima kada pojedinačni ispitanici ne pružaju previše informacija onda slabo informativne apriorne raspodele, poput odsečene Košijeve, mogu da dovedu do lošeg ponašanja MCMC algoritma. Informativnije apriorne raspodele poput odsečene Studentove, ili još informativnije odsečene normalne, omogućavaju verodostojno ocenjivanje modela čak i u slučajevima niskog nivoa informacija po ispitaniku (Gelman, 2020). Preporuka Gelmana (2020) u opštem slučaju je da svaki element j vektorskog parametra $\boldsymbol{\tau}$ ima sledeću raspodelu:

$$\tau_j \sim T^+(4, 0, 1) \quad (6.20)$$

dok za korelacionu matricu definišemo LKJ gustinu raspodele (Lewandowski et al., 2009), odnosno

$$\boldsymbol{\Omega} \sim \text{LKJ}(\eta) \propto \det(\boldsymbol{\Omega})^{\eta-1}. \quad (6.21)$$

U zavisnosti od parametra η , LKJ raspodela će više ili manje odstupati od uniformne raspodele. Za $\eta=1$ imamo da će raspodela korelacionih matrica imati uniformnu raspodelu u odnosu na sve dostupne korelacione matrice. Bitno je napomenuti da ovo ne znači da će marginalne raspodele imati uniformnu raspodelu od -1 do +1 budući da postoje ograničenja (matrica mora da je pozitivno definitna) u smislu vrednosti koje vandijagonalni elementi mogu imati. Što je $\eta > 1$, to će raspodela više favorizovati

jediničnu matricu, odnosno nisku korelaciju između regresionih koeficijenata vektora β . Što je η bliže nuli, to će raspodela više davati prednost (apsolutno) većim vandijagonalnim elementima, odnosno favorizovaće veću korelaciju između regresionih koeficijenata vektora β . Preporuka je da ovaj koeficijent uzima vrednosti koje su malo veće od jedinice (na primer dva) kako bi se omogućila korelacija između regresionih koeficijenata (Stan Development Team, 2019).

6.4.3 Nelinearni Bajesovi modeli višestrukog izbora

Linearni modeli podrazumevaju da potrošači evaluiraju proizvod ili uslugu u izolovanom okruženju bez prisutnih alternativa. Iako ovakav način modeliranja preferencija omogućava da se dobiju („izvuku“) značajne informacije od ispitanika, za mnoge kategorije proizvoda ili usluga ovaj pristup nije realističan. Na primer, verovatnoća kupovine čokoladne table će umnogome zavisiti od ponuđenih opcija. Nelinearni modeli višestrukog izbora pretpostavljaju da se potrošač uvek suočava sa izborom između više alternativa među kojima bira samo jednu. U poređenju sa linearnim modelima, ispitanici pružaju znatno manje informacija kod modela višestrukog izbora. Kod linearnih modela ispitanici iskazuju stepen sviđanja ili verovatnoću kupovine na određenoj skali, dok kod modela izbora oni pružaju samo informaciju o najviše preferiranoj alternativni među ponuđenim. Iz ovog razloga modeli višestrukog izbora zahtevaju veći uzorak i/ili pažljivije određivanje apriornih raspodela parametara.

6.4.3.1 Nehijerarhijski modeli višestrukog izbora

Nehijerarhijski modeli podrazumevaju homogene preferencije ispitanika zbog čega se takođe nazivaju i *agregiranim modelima izbora*. Najpoznatiji modeli izbora su logit i probit modeli. Razlika između ova dva modela je u načinu mapiranja linearne funkcije regresora u intervalu $(-\infty, +\infty)$ na prostor verovatnoća $(0, 1)$. Pođimo od toga da ispitanici imaju mogućnost izbora između dve alternative tako da je posmatrana varijabla y binarna i uzima vrednosti 0 ili 1. Formalno raspodelu verovatnoća zavisne varijable definišemo preko Bernulijeve raspodele:

$$y_i \sim \text{Bernuli}(\theta_i). \quad (6.22)$$

Parametar θ predstavlja očekivanu vrednost Bernulijeve raspodele i upravo preko njega pravimo vezu sa objašnjavajućim varijablama.

U slučaju logit modela imamo sledeće:

$$\alpha + X_i\beta = \text{logit}(\theta_i) = \log\left(\frac{\theta_i}{1 - \theta_i}\right). \quad (6.23)$$

Sledi da je inverzna logit funkcija data sa:

$$\theta_i = \text{logit}^{-1}(\alpha + X_i\beta) = \frac{1}{1 + e^{-(\alpha + X_i\beta)}} \quad (6.24)$$

pa izraz (6.22) možemo da predstavimo kao:

$$y_i \sim \text{Bernuli}\left(\frac{1}{1 + e^{-(\alpha + X_i\beta)}}\right). \quad (6.25)$$

Izraz (6.25) nam omogućava ocenjivanje parametara α i β tako što realizacije zavisne promenljive y , pod pretpostavkom nezavisnih uzoraka, daje funkciju verodostojnosti kao proizvod Bernulijevih gustina raspodela koja je data sa:

$$L(\mathbf{y}_i|\alpha, \beta) = \prod_i \left(\frac{1}{1 + e^{-(\alpha + X_i\beta)}} \right)^{y_i} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-(\alpha + X_i\beta)}} \right)^{1-y_i}. \quad (6.26)$$

Ukoliko postoji više od dve alternative onda umesto Bernulijeve raspodele koristimo njenu generalizaciju, kategorijsku raspodelu:

$$y_i \sim \prod_j p_j^{[y_i=j]}, \quad (6.27)$$

gde su korišćene Iversonove zagrade pa izraz $[y_i = j]$ daje vrednost 1 kada je $y_i = j$, a 0 u ostalim slučajevima. Verovatnoće izbora alternative (j), među mogućim alternativama ($j=1,2,\dots,J$) se mogu predstaviti putem softmax funkcije koja ima sledeći oblik:

$$\text{softmax}(u_{(j)}) = \frac{e^{u_{(j)}}}{\sum_j e^{u_j}} \quad (6.28)$$

gde $u_{(j)}$ predstavlja linearnu funkciju regresora koji opisuju izabranu alternativu (j). U slučaju J alternativa, gde y_i uzima vrednosti od 1 do J , funkciju verodostojnosti iz (6.26) sada može da se predstavi na sledeći način:

$$L(\mathbf{y}_i|\alpha, \beta) = \prod_i \frac{e^{\alpha + X_i y_i \beta}}{\sum_j e^{\alpha + X_i j \beta}}. \quad (6.29)$$

Kod probit modela koristimo mapiranje sa funkcijom normalne raspodele pa umesto izraza (6.23) i (6.24) se dobija da je:

$$\alpha + X_i \beta = \text{probit}(\theta_i) = \Phi^{-1}(\theta_i) \quad (6.30)$$

gde Φ predstavlja funkciju normalne raspodele pa samim tim njena inverzna funkcija predstavlja kvantilnu funkciju normalne raspodele što je upravo probit funkcija. Na osnovu toga onda zaključujemo da je inverzna probit zapravo funkcija normalne raspodele:

$$\theta_i = \text{probit}^{-1}(\alpha + X_i \beta) = \Phi(\alpha + X_i \beta). \quad (6.31)$$

Zamenom logit funkcije sa probitom u izrazima (6.25)-(6.29) dobijamo odgovarajuće funkcije verodostojnosti u slučaju dve i više alternativa. Bitno je napomenuti da bismo umesto softmax funkcije kod probit modela sa više alternativa imali kompleksan višestruki integral koji dosta usporava računanje modela. Budući da se dobijaju slični rezultati korišćenjem probit i logit modela, dok postoji navedena razlika u vremenskoj efikasnosti dobijanja ocene između ova dva pristupa, logit model je znatno popularniji u praktičnim i teorijskim istraživanjima.

Kao kod linearnih modela, i ovde istraživač ima fleksibilnost u izboru apriorne raspodele za (hiper)parametre modela, ali ne i potpunu slobodu. Loše izabrane apriorne raspodele mogu dovesti do nepravilne aposteriorne raspodele pa samim tim i nemogućnosti ocenjivanja modela. Sa druge strane, apriorne raspodele parametara mogu umnogome da olakšaju ocenjivanje modela, u poređenju sa

frekvencionističkim pristupom. Jedan od problema koji može da se javi je visoka multikolinearnost. U ekstremnom slučaju savršene korelisanosti dva prediktora u frekvencionističkom svetu ovakav model nije moguće oceniti. Inkorporiranjem apriornih raspodela sa dovoljnim stepenom informisanosti (na primer, normalna apriorna raspodela) omogućava se ocenjivanje regresionih koeficijenata korelisanih regresora. Ocene koeficijenata koriste apriorne informacije koje u određenoj meri povlače ocene ka srednjim vrednostima apriornih raspodela čineći ih statistički identifikovanim. Dodatan problem koji se lako može javiti kod modela izbora sa malim uzorcima (a može i sa velikim) je problem separabilnosti. Na primer, ako je regresor uvek pozitivan u slučajevima kada je birana alternativa A i negativan kada je birana alternativa B, tada ocena regresionog koeficijenta posmatranog regresora divergira ka beskonačnosti. Drugim rečima, ukoliko u modelu imamo regresor koji savršeno predviđa izbor, onda odgovarajući koeficijent ne možemo oceniti frekvencionističkim pristupom. Odbacivanje takvog regresora nema racionalno uporište zato što dovodi do pristrasnih ocena drugih regresora i odbacivanja vrednih informacija. Ocenjivanje modela po Bajesovom pristupu omogućava dobijanje ocena i u slučaju separabilnosti tako što apriorna raspodela spornog regresionog koeficijenta ne dozvoljava da njegova ocena ode u beskonačnost. Na taj način ocena će imati visoku apsolutnu konačnu vrednost čime će odraziti prediktivnu snagu regresora, ali i ocene ostalih regresora ostaju validne budući da smo zadržali bitnu varijablu u modelu.

6.4.3.2 Hijerarhijski modeli višestrukog izbora

Pretpostavka o homogenoj strukturi ispitanika u praksi nije realna. Fleksibilna struktura modela izbora omogućava istraživaču da preferencije pojedinačnih ispitanika zasebno modelira. Ovo će se ogledati u različitim regresionim koeficijentima za različite ispitanike, odnosno različitim pojedinačnim korisnostima atributa (engl. *part-worth utilities*). Pođimo od toga da imamo N ispitanika koji donose odluke o izboru između J alternativa u T situacija. Samim tim imali bismo $N \cdot T$ podataka u analizi i maksimalno $N \cdot T \cdot J$ različitih kombinacija nivoa atributa. Model slučajne korisnosti pruža uvid u logiku koja stoji iza modela izbora i formalno se može predstaviti na sledeći način:

$$U_{ijt} = \beta_i' x_{ijt} + \varepsilon_{ijt} \quad (6.32)$$

gde U_{ijt} predstavlja korisnost koju alternativa j u situaciji t ima za ispitanika i . β_i predstavlja vektor regresionih koeficijenata za ispitanika i . Ovo je bitna razlika u odnosu na nehijerarhijske modele izbora gde su regresioni koeficijenti bili isti za sve ispitanike. Vektor x_{ijt} daje informacije o nivoima atributa kojima su predstavljene alternative izbora. Konkretno u ovom slučaju x_{ijt} opisuje alternativu j koja stoji na raspolaganju ispitaniku i u situaciji t . Ukoliko bismo kreirali eksperimentalni dizajn tako da svaki ispitanik ima isti upitnik, onda bismo izostavili indeks n budući da tada x ne bi varirao među ispitanicima. Neopservirana komponenta ε_{ijt} predstavlja slučajnu varijablu za koju pretpostavljamo da poseduje neku raspodelu verovatnoća. Na primer, u slučaju logit modela ona će imati Gumbelovu raspodelu, dok će kod probit modela imati normalnu raspodelu. Razlika dve nezavisne promenljive sa Gumbelovom raspodelom ima logističku raspodelu. Ovo je samo drugi pristup definisanja logit modela u odnosu na prethodni odeljak, gde je korišćen uobičajen pristup predstavljanja generalizovanih linearnih modela (McCullagh & Nelder, 2019). Bitno je istaći da je neopservirana komponenta slučajna varijabla iz ugla istraživača. Za samog ispitanika ne postoji neizvesnost (Croissant, 2012). Alternativa koja ima najveću korisnost će biti preferirana od strane ispitanika. Komponente korisnosti $\beta_i' x_{ijt}$ i ε_{ijt} za ispitanika predstavljaju sistematsku i idiosinkratsku komponentu. Istraživač može oceniti sistematsku komponentu, ali idiosinkratsku ne može pa samim tim izbore između alternativa možemo da modeliramo samo kroz

modele verovatnoća. Kada ne bi postojala idiosinkratska komponenta, onda bi izbor između alternativa bio isključivo pod uticajem sistematske komponente i ne bi postojala neizvesnost iz ugla istraživača.

Imajući u vidu definisan model sa hijerarhijskom strukturom dat izrazom (6.32), i ako pretpostavimo da zavisna varijabla \mathbf{y}_{it} može da uzme vrednosti $j=1,2,\dots,J$, onda funkciju verodostojnosti za ispitanika i možemo da predstavimo na sledeći način (Train, 2001):

$$L(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\beta}_i) = \prod_t \frac{e^{\boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{iy_{it}}}}{\sum_j e^{\boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{ijt}}} \quad (6.33)$$

pa je samim tim funkcija verodostojnosti za ceo uzorak data izrazom:

$$LL(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}) = \prod_i \prod_t \frac{e^{\boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{iy_{it}}}}{\sum_j e^{\boldsymbol{\beta}_i' \mathbf{x}_{ijt}}}. \quad (6.34)$$

Parametri $\boldsymbol{\beta}_i$ imaju svoju apriornu raspodelu koja zavisi od određenih hiperparametara. Pretpostavimo da svaki vektorski parametar $\boldsymbol{\beta}_i$ ima multivarijacionu normalnu raspodelu datu sledećim izrazom:

$$\boldsymbol{\beta}_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \text{diag}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\Omega}\text{diag}(\boldsymbol{\tau})) \text{ za } i = 1, 2, \dots, N \quad (6.35)$$

dok hiperparametri mogu da imaju sledeće apriorne raspodele:

$$\boldsymbol{\mu} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}), \quad \boldsymbol{\Omega} \sim \text{LKJcorr}(2), \quad \boldsymbol{\tau} \sim T^+(4, 0, 1) \quad (6.36)$$

gde $\boldsymbol{\mu}$ prati multivarijacionu normalnu raspodelu sa jedničnom korelacionom matricom, korelaciona matrica $\boldsymbol{\Omega}$ ima **LKJ** raspodelu sa parametrom 2, i vektorski parametar skaliranja $\boldsymbol{\tau}$ prati odsečenu Studentovu raspodelu. Tada je zajednička aposteriorna raspodela data izrazom:

$$f(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_N, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\tau}|\mathbf{y}) \propto LL(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta}) \cdot \prod_n \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}_n|\boldsymbol{\mu}, \text{diag}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\Omega}\text{diag}(\boldsymbol{\tau})) \cdot \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{0}, \mathbf{I}) \cdot \text{LKJcorr}(\boldsymbol{\Omega}|2) \cdot T^+(\boldsymbol{\tau}|4, 0, 1). \quad (6.37)$$

Izraz (6.37) se koristi kod ocenjivanja parametara modela. Vidimo da je ovaj izraz isuviše komplikovan da bi se parametri ocenjivali analitičkim putem, te se ocenjivanje po pravilu izvodi nekim od MCMC metoda poput HMC metode uzorkovanja.

6.5 Eksperimentalni dizajn i njegova efikasnost

Prilikom kreiranja eksperimentalnog dizajna istraživač ima za cilj da izvuče što je moguće više informacija na datu temu, a uz minimalan kognitivan napor ispitanika. Kao što je već bilo reči, bitno je definisati atribute i odgovarajuće nivoe kojima su predstavljeni proizvodi ili usluge koji su predmet istraživanja. Kombinovanje različitih nivoa atributa i njihovo predstavljanje ispitanicima treba da omogućiti dobijanje ocena regresionih koeficijenata kao metrike koja bi govorila o preferencijama ispitanika. Optimalna kombinacija nivoa atributa, u smislu efikasnog ocenjivanja preferencija ispitanika, zavisi od pretpostavke modela koji opisuje preferencije (na primer, hijerarhijski linearni model), od

apriornih uverenja o raspodeli pojedinačnih regresionih koeficijenata, kao i hiperparametara tih raspodela.

Potpuni faktorijalni dizajn predstavlja dizajn koji obuhvata sve moguće kombinacije nivoa atributa. Pomoću ovakvog dizajna moguće je oceniti i glavne efekte svih varijabli, kao i njihove interakcije na svim nivoima. Primera radi, ukoliko istraživač polazi od hipoteze da je cenovna elastičnost tražnje različito senzitivna u zavisnosti od brenda proizvoda, onda se radi o interakciji drugog reda između atributa cene i brenda. Glavni problem kod potpunog faktorijalnog dizajna je to što sa povećanjem broja atributa i njihovih mogućih nivoa, užasno brzo raste obim aktivnosti koji treba obaviti što ovaj dizajn čini veoma nepraktičnim i često sasvim neupotrebljivim.

Kako ispitanici ne bi bili preopterećeni preglomaznim dizajnom moramo se odreći određenog broja kombinacija. Tada govorimo o frakciji potpunog faktorijalnog dizajna, te se ovakav eksperimentalni dizajn se naziva *frakcionim faktorijalnim dizajnom*. Problem kod ovog dizajna je što njegovom primenom nismo u mogućnosti da ocenimo sve efekte. Kod potpunog faktorijalnog dizajna svi efekti su ortogonalni pa samim tim nemamo problema sa identifikovanošću modela. Izbacivanjem određenog broja kombinacija nivoa atributa unosimo multikolinearnost među različite efekte. Ako su varijabla cena, sa jedne strane, i interakcija cene i brenda, sa druge strane, visoko korelisani onda je nemoguće razlučiti uticaj ova dva efekta jedan od drugog, odnosno model neće biti dobro identifikovan.

Frakcioni faktorijalni dizajn koji je ortogonalan i balansiran, je od naročito interesa. Ortogonalan znači da svaki par atributa ima jednaku frekvenciju različitih kombinacija nivoa, a balansiran znači da se kod svakog atributa nivoi pojavljuju isti broj puta. Dizajn koji je balansiran i ortogonalan se skraćeno naziva *ortogonalni dizajn*. Ovaj dizajn pretpostavlja da ne postoje interakcije između korišćenih atributa što je ujedno i njegov nedostatak. Drugi nedostatak je taj što sa dodavanjem novih atributa i/ili nivoa dizajn postoje previše glomazan i prezahtevan za ispitanike, pa se dovodi u pitanje kredibilnost njihovih odgovora.

6.5.1 Klasičan pristup merenju efikasnosti eksperimentalnog dizajna

Bitna stavka koja sve više dobija na popularnosti u marketinškim istraživanjima je *efikasnost dizajna*. Efikasnost dizajna se odražava kroz kovarijacionu matricu parametara. Što je greška regresionih koeficijenata manja, to će njihovo ocenjivanje biti pouzdanije. Kovarijaciona matrica parametara se obično predstavlja na sledeći način:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} se(\beta_1)^2 & \cdots & cov(\beta_1, \beta_K) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\beta_K, \beta_1) & \cdots & se(\beta_K)^2 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

gde K predstavlja broj parametara u modelu. Obično u praksi nismo u mogućnosti da izračunamo ovu matricu pa koristimo njenu aproksimaciju tzv. *AVC matricu* (engl. *asymptotic variance-covariance matrix*) koju koju dobijamo kroz računanje očekivane vrednosti Hesijanove matrice funkcije verodostojnosti, odnosno Fišerove informacione matrice:

$$\mathbf{\Omega}_N(\boldsymbol{\beta}|X, \mathbf{y}) = -E \left(\frac{\partial^2 L_N(\boldsymbol{\beta}|X, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \right)^{-1}. \quad (6.39)$$

Budući da vandijagonalni elementi matrice predstavljaju kovarijanse pojedinačnih parametara, postavlja se pitanje na koji način se u ovom slučaju meri efikasnost ocena parametara. Ovde postoje dva popularna pristupa koja se koriste: pristupa zasnovan na *A-grešci* i pristup zasnovan na *D-grešci*. Izbor pristupa zavisi od toga da li prilikom merenja efikasnosti želimo da uzmemo u obzir kovarijanse pojedinačnih parametara ili želimo da se fokusiramo samo na standardne greške parametara. A-efikasnost je funkcija aritmetičke sredine sopstvenih vrednosti matrice Ω , odnosno varijansi parametara:

$$A - greška = \frac{tr(\Omega)}{K}. \quad (6.40)$$

S druge strane, D-efikasnost je funkcija geometrijske sredine sopstvenih vrednosti matrice Ω , a kako je proizvod sopstvenih vrednosti matrice ekvivalentan njenoj determinanti onda ovaj tip efikasnosti možemo da predstavimo kao:

$$D - greška = det(\Omega)^{1/K}. \quad (6.41)$$

D-greška je popularniji pristup budući da je znatno lakši i brži za optimizaciju prilikom primene softverskih programa, kao i zato što ovaj pristup nije pod uticajem načina kodiranja varijabli – odnosno varijable mogu biti kodirane binarno (engl. *dummy coding*), efektno (engl. *effects coding*) ili ortogonalno (engl. *orthogonal coding*) (Kuhfeld, 2010).

Kod linearnih modela ne moramo da koristimo AVC budući da će i za male uzorke važiti da je:

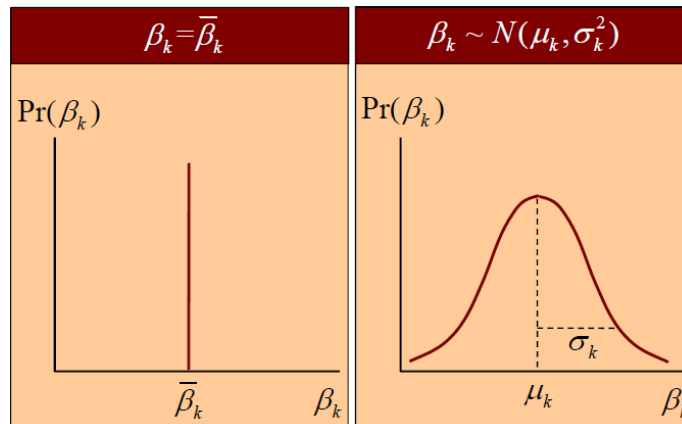
$$\Omega_N(\beta, X, y) = \Omega_N(X, y) = \sigma^2(X^T X)^{-1}, \quad (6.42)$$

a kako σ^2 ne zavisi od matrice dizajna možemo je tretirati kao konstantu. Minimiziranje izraza (6.42) u smislu D-greške znači maksimiziranje dijagonalnih elemenata $X^T X$ i smanjivanje vandijagonalnih elemenata na nulu. Drugim rečima, kod linearnih modela optimalan dizajn je ortogonalan dizajn, ukoliko postoji. Isti rezultat važi i u slučaju A-efikasnosti (Kuhfeld, 2010).

Kod nelinearnih modela neće važiti izraz (6.42), već će matrica varijansi i kovarijansi zavisiti od β parametara (Bliemer & Rose, 2011). To nas dovodi u začaran krug gde moramo da imamo poznate vrednosti parametra β da bismo mogli da optimizujemo eksperimentalni dizajn neophodan za ocenjivanje modela, odnosno ocena β . Računanje matrice varijansi i kovarijansi neophodno je da se sprovedi kroz njenu aproksimaciju, odnosno AVC. Kako je neophodno da imamo vrednosti β da bismo dobili Ω neophodno je da istraživač koristi apriorne informacije o parametrima modela. Rose (2012) predlaže da se apriorne informacije prikupljaju iz literature, pilot studija, fokus grupa i ekspertskih mišljenja. Ako navedeni izvori nisu dostupni istraživaču, onda 10% uzorka glavnog istraživanja treba da bude odvojeno za ocenjivanje apriornih informacija. Na ovom poduzorku autor sugerise da se koristi ortogonalan dizajn koji će poslužiti za optimizaciju eksperimentalnog dizajna namenjenog za glavno istraživanje.

Postavlja se pitanje kakvu efikasnost će imati dizajn sa pogrešno specifikovanim apriornim vrednostima β parametara? Kada je prisutna greška specifikacije apriornih vrednosti parametara, dizajn će tipično biti neefikasan. Potencijalni problemi koji mogu nastati usled loše izabranih apriornih vrednosti mogu dovesti do nepreciznih ocena, nego što bi to bio slučaj da smo imali dobre apriorne informacije. Preliminarna istraživanja su navedena kao jedno rešenje za prevazilaženje ovog problema. Drugi pristup je korišćenje Bajesovih apriornih raspodela. Ako postoji neizvesnost prilikom odabira apriornih vrednosti β parametara, možemo smanjiti rizik korišćenjem više apriornih vrednosti. Još bolji pristup bi bio da se koriste raspodele verovatnoća slučajnog vektora β . Na ovaj način ostavljamo mogućnost da

parametri uzmu vrednost iz beskonačnog skupa i to tako da dajemo prednost vrednostima za koje smatramo da su smislenije (npr. dobijene vrednosti iz nekih ranijih istraživanja). Vrednostima koje smatramo da nisu u skladu sa našim uverenjima možemo da dodelimo niže pondere, odnosno nižu gustinu raspodele. U ekstremnom slučaju, nelogične vrednosti isključujemo iz razmatranja tako što im dodeljujemo nulte verovatnoće. Na primer, kod cenovne elastičnosti tražnje možemo da isključimo pozitivne vrednosti iz apriorne raspodele pošto nisu u skladu sa racionalnim ponašanjem potrošača. Bajesov pristup u kreiranju efikasnog dizajna biće tema u narednom odeljku.



Slika 6.1 Specifikacija apriornih informacija parametara modela. Primer tačkastih vrednosti u klasičnom pristupu (slika levo) i primer apriorne normalne raspodele u Bajesovom pristupu (slika desno).

Izvor: Rose (2012).

6.5.2 Bajesov pristup merenju efikasnosti eksperimentalnog dizajna

Svaka mera efikasnosti (A-efikasnost, D-efikasnost) ima svoju Bajesovu verziju. Kako parametre modela definišemo kao slučajne varijable, sledi da će i mere efikasnosti biti slučajne varijable. Samim tim Bajesova mera efikasnosti će predstavljati očekivanu efikasnost. Za D-grešku definisanu izrazom (6.41) imamo da je Bajesova D-greška data na sledeći način:

$$\text{Bajesova D - greška} = \int_{\beta} \det(\Omega(\beta|X))^{-\frac{1}{2}} f(\beta|\alpha) d\beta \tag{6.43}$$

odakle sledi da AVC matrica zavisi od vrednosti β i dizajna X . Kako za β pretpostavljamo određenu raspodelu verovatnoća, onda definišemo hiperparametre α za datu apriornu raspodelu. Ovaj integral će imati dimenzionalnost jednaku dimenziji vektora β pa će njegovo izračunavanje analitičkim putem biti nepraktično ili nemoguće. Korišćenjem Monte Karlo simulacija možemo dovoljno precizno da aproksimiramo višestruki integral. Najpre simuliramo β vrednosti R puta prema definisanoj apriornoj raspodeli. Ne postoji konsenzus oko toga kolika bi trebalo da bude vrednost R , ali svakako mora biti dovoljno velika da bi aproksimacija bila verodostojna. Traets et al. (2019) u svom radu, gde su predstavili softverski paket *idefix* za optimizaciju Bajesovog efikasnog eksperimentalnog dizajna, koriste $R=500$. U narednom koraku za svaku pojedinačnu simulaciju $r=1,2,\dots,R$ možemo da izračunamo D-grešku. Računanjem proseka dobijenih D-grešaka dobijamo aproksimaciju Bajesove mere efikasnosti:

$$\text{Bajesova } D - \text{ greška} \approx \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \det \left(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\beta}^{(r)} | \mathbf{X}) \right)^{\frac{1}{R}} \quad (6.44)$$

Optimizacija izraza (6.44) se vrši kroz pretraživanje prostora matrice dizajna \mathbf{X} , gde težimo da nađemo dizajn koji će minimizirati Bajesovu D-grešku. Kod klasičnog i Bajesovog pristupa merenju efikasnosti ne možemo da sprovedemo optimizaciju analitičkim putem. Najpoznatiji algoritmi za optimizaciju dizajna su modifikovan Fedorov algoritam (engl. *modified Fedorov algorithm*) i CEA algoritam (engl. *coordinate exchange algorithm*) (Cook & Nachtsheim, 1980). Fedorov algoritam je znatno sporiji od CEA budući da pretražuje unapred zadat prostor matrica dizajna i bazira se na ubacivanju i izbacivanju redova (kombinacije nivoa atributa) iz matrice dizajna. Obično će taj prostor biti potpun faktorijalni dizajn gde svaki red predstavlja određen proizvod gde istraživač ima mogućnost da izbacuje određene redove. Na primer, ako ne želimo da određen brend uzima visoke nivoe cena, onda sve takve kombinacije možemo da izbacimo iz prostora za pretraživanje. CEA algoritam ne pretražuje unapred zadat prostor po redovima već pretragu zasniva na pojedinačnim atributima. Budući da nije temeljan kao Fedorov, ovaj algoritam će obično davati blago neefikasnije rezultate. Ipak, za glomazne eksperimente (veliki broj atributa i/ili nivoa), brzina CEA postaje komparativna prednost u odnosu na Fedorov algoritam (Traets et al., 2019).

Hipotetički gledano, ukoliko su nam unapred poznate vrednosti $\boldsymbol{\beta}$ parametara, onda će Bajesov dizajn biti neefikasniji od dizajna sa tačkastim apriornim informacijama. Međutim, u praksi to nije slučaj jer da znamo vrednosti parametara, ne bismo sprovodili istraživanje. Tačkasta pretpostavka o vrednosti parametara će generalno imati određenu grešku što će za posledicu imati nepouzdanije ocene modela. S druge strane, Bajesov dizajn će biti manje osetljiv na pogrešnu specifikaciju $\boldsymbol{\beta}$ parametara zbog toga što je neizvesnost već inkorporirana u sam dizajn. Stoga je preporuka da se uvek koristi Bajesov efikasni dizajn upravo zbog svoje robusnosti na pogrešnu specifikaciju apriornih informacija (Rose, 2012; Traets et al., 2019).

Na samom kraju ovog dela biće sumirane korisne smernice relevantne za praktična i teorijska istraživanja koja se tiču dizajniranja eksperimenta. Prilikom definisanja Bajesovog dizajna istraživač mora najpre da odluči koliki će biti broj pitanja po ispitaniku, zatim da definiše model koji po njegovom mišljenju dovoljno dobro opisuje preferencije ciljane populacije i, ukoliko je potrebno, sprovede preliminarno istraživanje koje bi pružilo informacije o hiperparametrima apriornih raspodela. Nakon toga istraživač može da sprovede optimizaciju dizajna (koristeći CEA ili Fedorov algoritam) čime se otvaraju vrata za naredne faze procesa istraživanja poput uzorkovanja i ocenjivanja modela.

7 EMPIRIJSKO ISTRAŽIVANJE

Predmet sprovedenog istraživanja je analiza efekata regulacionog fokusa na odlučivanje potrošača prilikom kupovine proizvoda. Različiti stimulusi primaju različita stanja regulacionog fokusa, ali isto tako pojedinci imaju sklonost da budu u različitim regulacionom stanjima (Čolić & Prica, 2022b). Muzika koja se čuje u pozadini utiče na psihološko stanje potrošača u zavisnosti od tempa i energičnosti date numere (Caldwell & Hibbert, 1999; Chebat et al., 2001; Milliman, 1982). Analiza efekata muzike, koja se čuje u pozadini, na psihološko stanje ispitanika biće merena putem elektroencefalografa. Osnovni cilj istraživanja je da objasni vezu pozadinske muzike i regulacionog stanja na odlučivanja potrošača o izboru proizvoda. Muzičku numeru je moguće posmatrati iz više dimenzija, ali je za potrebe ovog istraživanja od posebne važnosti tempo muzičke numere i njena energičnost (Das et al., 2020; L. A. Schmidt & Trainor, 2001). Uticaj ove dve dimenzije muzike na psihološko stanje pojedinca i, posledično, na njegovo ponašanje tokom kupovine će biti u fokusu ovog istraživanja. Imajući u vidu predmet i cilj istraživanja, u nastavku sledi opis hipoteza koje će biti testirane u ovom istraživanju.

Energičnija muzika se pokazala da kroz izazivanje stanja uzbuđenosti dovodi pojedinca u promociiono stanje (Das et al., 2020). Muzika bržeg tempa je generalno percipirana kao energičnija muzika, gde se pod energičnošću misli na tendenciju numere da izazove stanje uzbuđenosti kod slušaoca (Chebat et al., 2001). Cena kao komponenta proizvoda može se posmatrati kao količina novca od koje pojedinac treba da se odrekne da bi dobio tražen proizvod. U tom smislu, cena je gubitak koji potrošač žrtvuje u zamenu za proizvod ili uslugu. Kako potrošači u promociionom fokusu imaju manju senzitivnost na gubitke, a veću na dobitke (Tran et al., 2020), sledi da bi pojedinci trebalo da manje obraćaju pažnju na cenu (kao tipično negativnu komponentu proizvoda) prilikom izloženosti muzičkom stimulusu veće energičnosti. Prema teoriji regulacione usklađenosti individue lakše obrađuju stimuluse koji su u skladu sa njihovim regulacionim stanjem. U promociionom stanju, cena nije stimulus koji je u skladu sa potrebama za samounapređenjem individue, pa će zbog regulacione neusklađenosti potrošač biti nemotivisan da mentalno obradi ovakvu informaciju. Sa druge strane, istraživanja govore da muzika niske energičnosti pojačava kognitivnu aktivnost potrošača, što je karakteristika prevencionog stanja (Chebat et al., 2001). Iz ovoga sledi da bi sa “laganijom” muzikom cena trebalo da bude atribut čija je priroda u skladu sa prevencionim fokusom, gde su dominantno izražene potrebe za sigurnošću i odgovornošću. Kako regulaciona usklađenost dovodi do lakšeg obrađivanja cene, posledično se povećava cenovnu osetljivost tražnje potrošača.

H1: Energičnija pozadinska muzika smanjuje cenovnu osetljivost tražnje, dok je “laganija” muzika povećava.

Promociiono regulaciono stanje karakterišu intenzivnije emocije, odnosno pojedinci koje su primovani energičnijim muzičkim stimulusima biće u stanju veće emocionalne pobuđenosti (Das et al., 2020; Jiang et al., 2020; Kim et al., 2010). Sledi da će emocionalna pobuđenost, kao efekat izazvan muzičkim stimulusom, uticati na smanjenje cenovne osetljivost tražnje pojedinca (Čolić & Prica, 2022).

H2a: Emocionalna pobuđenost potrošača izazvana pozadinskom muzikom smanjuje njegovu cenovnu osetljivost tražnje.

Pojedinci usklađuju svoja ponašanja sa regulacionim stanjem ako nisu u stanju prevelike involviranosti tokom izvođenja zadatka, odnosno ako nisu motivisani da pažljivo obrađuju informacije. Drugim rečima, efekat regulacione usklađenosti važi samo pod uslovima niske involviranosti individue kada heurističko

odlučivanje postaje dominantno (Aaker & Lee, 2006; Wang & Lee, 2006). Muzički stimulus i izazvana emocionalna pobuđenost, kao periferni izvor informacija za pojedinca (centralni izvor informacija su karakteristike proizvoda koji se biraju), imaće efekat na cenovnu osetljivost samo u slučaju niske involviranost potrošača prilikom kupovine (Chebat et al., 2001; Čolić & Prica, 2022).

H2b: Sa većom involviranošću potrošača prilikom izbora proizvoda efekat emocionalne pobuđenosti na cenovnu osetljivost tražnje nestaje.

Pojedinci mogu isti stimulus da percipiraju na različite načine pa je očekivano da stimulusi nemaju isti efekat na svakog pojedinca. Mogući su i ekstremni slučajevi kada pojedinac izložen niskoenergičnim muzičkim stimulusom bude iz idiosinkratskih razloga primovan promocijnim regulacionim fokusom (npr. zato što neko laganu pesmu vezuje za neki uzbudljivi događaj). Neuromarketinške metrike, emocionalna pobuđenost i frontalna asimetrija, odražavaju regulaciono stanje pojedinca za koje pretpostavljamo da direktno utiče na cenovnu osetljivost (H2a i H2b), dok muzički stimulusi indirektno utiču na cenovnu osetljivost preko regulacionog stanja. Sledi da bi model koji koristi samo veštačke varijable, kao indikatore brzog i sporog muzičkog stimulusa, trebalo da bude inferioran u prediktivnoj moći u odnosu na model koji koristi neuromarketinške metrike.

H3: Bajesov model višestrukog izbora koji koristi neuromarketinške metrike imaće bolju prediktivnu validnost u odnosu na model koji za istu svrhu koristi veštačke varijable muzičkih stimulusa.

Kako isti mehanizam delovanja regulacione usklađenosti važi kod situacionog tako i kod hroničnog regulacionog fokusa, očekivano je da će hronična stanja imati isti efekat na cenovnu osetljivost tražnje. Kao tradicionalna mera regulacionog stanja korišćena je BIS/BAS skala (Dholakia et al., 2006; Haws et al., 2010).

H4: Hronični promotivni fokus regulacije (u odnosu na preventivni fokus), meren BIS/BAS skalom ispitanika, smanjuje cenovnu osetljivost tražnje.

Alternativa tradicionalnom merenju regulacionog fokusa je neuronaučni pristup. Pokazano je da bazna frontalna asimetrija dobro odražava hronično regulaciono stanje pojedinca (Amodio et al., 2004). Bitno je napraviti razliku između frontalne asimetrije kao momentalnog psihološkog stanja i baznog stanja pojedinca. U hipotezi H2b korišćena je metrika frontalne asimetrije kao situaciona mera involviranosti pojedinca, budući da je pokazano da ova metrika odražava motivaciono stanje privlačenja pojedinca (Avinash et al., 2018; Harmon-Jones & Gable, 2018b).

H5: Hronični promotivni fokus regulacije (u odnosu na preventivni fokus), meren baznom frontalnom asimetrijom ispitanika, smanjuje cenovnu osetljivost tražnje.

Frontalna asimetrija objektivnije odražava regulaciono stanje pojedinca u odnosu na BIS/BAS skalu. Kod BIS/BAS skale ispitanik vrši samo-ocenjivanje pa samim tim postoji prostor da ispitanik odgovara u društveno poželjnom maniru. Sa druge strane, frontalna asimetrija je merena kao neurološka reakcija ispitanika tokom trominutnog mirovanja ispitanika dok gleda u krstić na ekranu. Iz tog razloga očekivano je da je neuronaučni način objektivniji pa samim tim po manjim uticajem greške merenja. Dodatno, frontalna asimetrija odražava aktuelnije regulaciono stanje ispitanika, dok se BIS/BAS skala nije pod značajnim uticajem kontekstualnih faktora poput raspoloženja ispitanika usled učestvovanja u eksperimentu.

H6: Bajesov model višestrukog izbora koji koristi frontalnu asimetriju kao meru regulacionog fokusa imaće bolju prediktivnu validnost u odnosu na model koji za istu svrhu koristi BIS/BAS skalu.

Empirijsko istraživanje će biti sprovedeno u četiri faze, gde prve tri predstavljaju faze predistraživanja i poslednja faza predstavlja glavno istraživanje. Slika 7.1 prikazuje vizuelno izložene faze empirijskog istraživanja ove disertacije.



Slika 7.1 Faze empirijskog istraživanja u radu.

U prvom predistraživanju biće definisani atributi i njihovi nivoi. Drugo predistraživanje se bavi pronalaženjem muzičkih stimulusa koji bi trebalo da izazovu dovoljno jaku psihološku reakciju kod ispitanika kako bi mogla biti analizirana regulaciona stanja. Treće predistraživanje ima za cilj ocenjivanje hiperparametara modela. Hiperparametri su neophodni za optimizaciju eksperimentalnog dizajna glavnog eksperimenta. Glavno istraživanje će biti sprovedeno metodom ličnog intervjuisanja uz pomoć kompjutera (engl. *computer aided personal interviewing*, CAPI). Informacije koje se odnose na hronično regulaciono stanje i potrošačke preferencije biće prikupljen putem upitnika, dok će neurološke reakcije ispitanika na stimulus biti merene putem EEG uređaja. U glavnom istraživanju biće korišćen Bajesov eksperimentalni dizajn gde će optimalnost biti postignuta minimiziranjem D-greške. Na ovaj način će biti obezbeđeno ocenjivanje parametara konačnog modela uz minimalne greške ocena i samim tim pouzdanije testiranje hipoteza.

7.1 Predistraživanje 1 – definisanje nivoa atributa

Cilj prvog predistraživanja je bio da se definišu i provere nivoi atributa koji će biti korišćeni u glavnom istraživanju. Atribut koji je u fokusu istraživanja je cena. Da bi hipoteze bile testirane na verodostojan način potrebno je da pored cene postoji još atributa. Prisustvo više atributa, pored cene, onemogućavaju ili otežavaju ispitanicima da prepoznaju istraživačke hipoteze i shodno tome prilagode svoje ponašanje (efekat pristrasnosti tražnje – engl. *demand effect*). Drugi bitan razlog za korišćenje više atributa jeste da na taj način povećavamo eksternu validnost istraživanja, budući da potrošači ne analiziraju cenu izolovano od ostalih karakteristika proizvoda. Predviđeno je da u glavnom eksperimentu postoje četiri atributa (brend, zemlja proizvodnje *espresso* kafe, tip posluživanja, cena) za koje je potrebno definisati nivoe koji će omogućiti pouzdano testiranje hipoteza. Broj atributa, kao i broj nivoa po atributima, je određen arbitrarno tako da ispitanici ne budu preopterećeni tokom eksperimenta. Vođeno je računa da razlike u korisnosti između nivoa određenog atributa budu umerene. Drugim rečima, dovoljno velike da sam atribut ima značajan uticaj na ispitanike prilikom odabira proizvoda, ali i da ne budu prevelike kako atribut ne bi bio suviše dominantan u odnosu na ostale atribute prilikom izbora. Sledi opis svakog atributa.

Kod definisanja atributa brend predviđeno je da bude tri nivoa. Jedan koji ima veliku poznatost među studentskom populacijom, odlikuje ga visok nivo kvaliteta i koji kao takav predstavlja „siguran izbor“. Drugi brend je nov na tržištu i nije poznat, ali ga odlikuje visok nivo ekskluzivnosti, odnosno dostupan

je samo u pojedinim prodavnicama kvalitetne kafe. Treći brend je nov na tržištu, nije poznat i dostupan je u svim poznatim trgovinskim lancima. Kroz predistraživanje biće određen prvi brend, dok će preostala dva „nepoznata brenda“ biti fiktivna i definisana ispitanicima unutar ankete u glavnom istraživanju.

Kod zemalja proizvođača *espressa* predviđena su tri nivoa. Prvi je Srbija, kao nivo koji bi trebalo da dobije na važnosti prilikom izraženog potrošačkog etnocentrizma, ali za koji generalno ne očekujemo da bude dominantan. Drugi i treći nivo je predviđeno da predstavljaju zemlje proizvođače koje su percipirane među studentima kao zemlje čiji *espresso* ima visok nivo atraktivnosti, prestiža, ekskluzivnosti i kvaliteta. Na taj način bi trebalo da bude obezbeđena dovoljno velika razlika između pojedinačnih korisnosti da sam atribut bude relevantan.

Tip posluživanja predstavlja atribut sa dva nivoa, keramička šolja i kartonska čaša. Ova dva tipa posluživanja su odabrana kao reprezentivi hedonističkog i funkcionalnog konzumiranja kafe. Očekivano je da će keramička šolja generalno biti dominantniji nivo.

Cena *espresso* kafe je atribut za koji je u glavnom istraživanju predviđeno da ima četiri nivoa. Predistraživanje je trebalo da pruži informaciju o minimalnoj i maksimalnoj ceni koju su studenti spremni da plate za ovu kategoriju proizvoda.

7.1.1 Metod

7.1.1.1 Uzorak

Uzorkovani su studenti Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Anketu je na dobrovoljnoj bazi popunilo 25 studenata (15 devojaka) treće i četvrte godine nakon predavanja na predmetu Istraživanje tržišta. Instrukcija je bila da anketu popunjavaju samo studenti koji redovno konzumiraju *espresso* kafu. Anketiranje je sprovedeno u septembru 2021. godine.

7.1.1.2 Procedura istraživanja

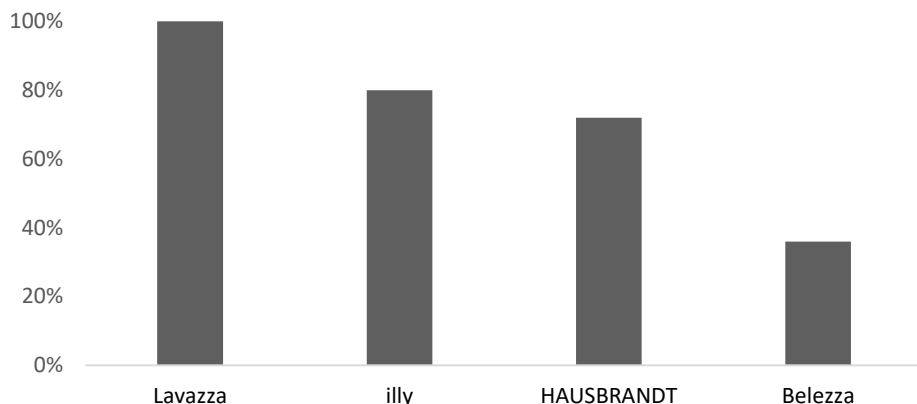
U periodu anketiranja predavanja su održavana onlajn putem Zoom platforme. Studenti su popunjavali anketu putem linka postavljenog na samoj platformi na kraju predavanja. Svi ispitanici su dobili ista pitanja, odnosno nije bilo eksperimentalnih grupa. Bitno je napomenuti da su kod određenih pitanja izostali odgovori ispitanika, što se odrazilo na različite frekvencije odgovora.

7.1.1.3 Varijable i merni instrumenti

Pitanja u upitniku su bila otvorenog i zatvorenog tipa. Kako bi se ispitala poznatost brendova, najpre je postavljeno otvoreno pitanje gde su ispitanici navodili brendove *espresso* kafa koji su im prvi pali na pamet. Nakon toga je ponuđeno četiri brenda *espresso* kafe gde su se ispitanici izjašnjavali o tome da li im je navedeni brend poznat ili nije.

Sa ciljem da se ispita kakvu percepciju imaju ispitanici prema svakom brendu, korišćeni su opisi na koje su ispitanici izražavali stepen slaganja na skali 1-5 (kvalitet, prestiž, atraktivnost, ekskluzivnost, siguran izbor). Postojala je i neutralna opcija „0 – nemam stav“ ukoliko ispitanik nije imao definisan stav prema datom brendu.

Sledeći odeljak se odnosio na percepciju uticaja zemlje proizvodnje *espresso* kafe. Analizirano je pet zemalja od kojih je trebalo izabrati tri za glavno istraživanje (Srbija, Brazil, Kolumbija, Italija, Poljska). Korišćeni su isti opisi kao kod brendova kafe, ali sada kao faktor uticaja na izbor kafe proizvedene u



Slika 7.3 Poznatost brenda sa podsećanjem.

Izvor: kalkulacija autora.

Kada je u pitanju imidž brenda Lavazza, primetno je da je studenti najviše povezuju sa kvalitetom i sigurnim izborom. Prestiž, atraktivnost i ekskluzivnost imaju niže vrednosti. Ovi rezultati sugerišu da je Lavazza jak brend među studentima koji su uzorkovani. Preostala dva (fiktivna) brenda će biti definisana ispitanicima kroz opis u anketi glavnog istraživanja.

Tabela 7.1 Intenzitet asocijacije koje brend Lavazza ima u odnosu na posmatarnih pet pojmovnih opisa.

	Kvalitet	Prestiž	Atraktivnost	Ekskluzivnost	Siguran izbor
Prosek	3,72	3,32	3,48	2,92	3,88
N	25	25	25	24	25
Standardna dev.	0,84	1,14	1,12	1,06	1,01

Izvor: kalkulacija autora.

7.1.2.2 Zemlja proizvođač espresso kafe

Srbija predstavlja nivo atributa koji će svakako biti uključen u glavni eksperiment. Druga dva nivoa bi trebalo da budu zemlje koje zadovoljavaju potrebe potrošača po pitanju percipiranog kvaliteta, ali koje su percipirane kao zemlje iz kojih dolazi kafa sa visokim nivoom percipirane ekskluzivnost, prestiža, atraktivnosti.

Kada je u pitanju kvalitet kafe, Brazil ima najveću vrednost u odnosu na ostale ponuđene zemlje. Sledi Italija, a zatim Srbija. Sve zemlje imaju prosek preko tri, što sugeriše da ni jedna zemlja nema percipiran loš kvalitet. Srbija ima solidan percipirani kvalitet kafe, sličan Kolumbiji koja važi, pored Brazila, za jednog od najvećih proizvođača kafe.

Tabela 7.2 Percipiran intenzitet kvaliteta kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla

	Srbija	Brazil	Kolumbija	Italija	Poljska
Prosek	3,72	4,20	3,71	3,88	3,44
N	25	25	24	25	18
Standardna dev.	1,20	0,86	1,12	0,92	1,24

Izvor: kalkulacija autora.

Zemlja sa najvećim percipiranim prestižom je Italija, praćena Brazilom. Srbija ima prosečnu vrednost 2,84 što sugerise da studenti ne vide Srbiju kao zemlju proizvođača prestižne kafe.

Tabela 7.3 *Percipiran intenzitet prestiža kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla*

	Srbija	Brazil	Kolumbija	Italija	Poljska
Prosek	2,84	3,42	3,30	4,00	2,76
N	25	24	23	24	17
Standardna dev.	1,17	1,06	0,87	0,97	1,03

Izvor: kalkulacija autora.

Italija i Brazil se izdvajaju kao vodeće zemlje i po pitanju atraktivnosti. Srbija je malo ispod srednjeg nivoa (2,96).

Tabela 7.4 *Percipiran intenzitet atraktivnosti kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla*

	Srbija	Brazil	Kolumbija	Italija	Poljska
Prosek	2,96	3,63	3,35	4,00	2,71
N	25	24	23	24	17
Standardna dev.	1,36	0,87	0,98	0,97	0,98

Izvor: kalkulacija autora.

Ekskluzivnost je najbitnija karakteristika u smislu glavnog istraživanja i testiranja hipoteza, za koju je a priori pretpostavljeno da ima slično značenje među studentskom populacijom kao i prestiž i atraktivnost. Samim tim je očekivano da će zemlje koje imaju visoke prosečne vrednosti na ova dva pojma, imati visoku vrednost i na ekskluzivnost, odnosno da će biti prisutna visoka korelacija ove tri varijable. Očekivanja su potvrđena u tabeli ispod, gde vidimo da Italija (3,96) i Brazil (3,75) imaju najviše vrednosti. Srbija ima percipiranu ekskluzivnost ispod srednjeg podeoka (2,84) i kao takva nije percipirana kao proizvođač kafe visoke ekskluzivnosti.

Tabela 7.5 *Percipiran intenzitet ekskluzivnosti kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla*

	Srbija	Brazil	Kolumbija	Italija	Poljska
Prosek	2,84	3,75	3,43	3,96	2,76
N	25	24	23	24	17
Standardna dev.	1,21	0,84	1,08	0,99	1,14

Izvor: kalkulacija autora.

Kad je u pitanju asocijacija sa pojmom “siguran izbor”, sve zemlje imaju vrednost preko srednjeg podeoka, gde se izdvajaju Brazil i Italija kao zemlje sa najvišim vrednostima. Srbija ima nižu vrednost od ove dve zemlje, ali značajno veću od srednjeg podeoka (3,52) što potvrđuje da je Srbija percipirana kao zemlja sa zadovoljavajućim nivoom kvaliteta i “dobrim izborom” *espresso* kafe.

Tabela 7.6 Percipiran intenzitet asocijacije sa pojmom “siguran izbor” kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla

	Srbija	Brazil	Kolumbija	Italija	Poljska
Prosek	3,52	3,88	3,57	3,84	3,12
N	25	25	23	25	17
Standardna dev.	1,26	1,16	1,16	0,89	1,26

Izvor: kalkulacija autora.

Krajnji zaključak je da Italija i Brazil treba da budu uključene u glavno istraživanje kao zemlje sa visokim percipiranim nivoom ekskluzivnosti i kvaliteta. Srbija ima zadovoljavajući percipirani kvalitet od strane studenata i nije viđena kao proizvođač ekskluzivne kafe. Na osnovu rezultata ovog predistraživanja očekivano je dobro razdvajanje preferencija po pitanju ovog atributa, pa samim tim i njegoa relevantnost prilikom izbora *espresso* kafe.

7.1.2.3 Tip posluživanja

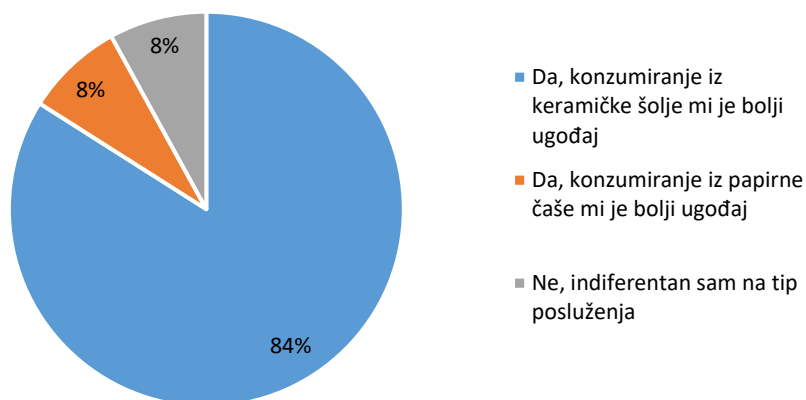
Kartonska čaša bi trebalo a priori da bude dominiran, a keramička šolja blago dominantan nivo ovog atributa. U slučaju da keramička čaša bude ekstremno dominantan nivo, ovaj atribut bi imao suviše veliku relevantnost, odnosno drugi atributi ne bi imali veliki značaj što bi onemogućilo testiranje hipoteza. To implicira da bi optimalan rezultat bio relativno izbalansirane pojedinačne korisnosti nivoa keramičkom šoljom kao dominantnim nivoom. Ovaj deo predistraživanja je imao za cilj da potvrdi ovu pretpostavku i eventualno sugerise određene modifikacije koje će omogućiti verodostojnije testiranje hipoteze u glavnom istraživanju.

Tabela 7.7 potvrđuje pretpostavku da je keramička šolja dominantan nivo, ali u znatno ekstremnijoj meri nego što je to bilo očekivano. Čak 84% ispitanika se opredelilo za opciju da je bolji ugođaj konzumiranje kafe iz keramičke šolje. Ostalih 16% ispitanika je bilo indiferentno (8%) ili se opredelilo za kartonske čaše (8%). Ovakvi rezultati sugerisu da bi u glavnom istraživanju lako moglo da se dogodi da 100% ispitanika bira isključivo opcije sa keramičkom šoljom. Imajući u vidu dobijene rezultate, u daljem toku istraživačkog procesa neće biti korišćen atributski nivo kartonska čaša, već samo keramička šolja budući da rezultati predistraživanja sugerisu da je studentskoj populaciji ova karakteristika bitna. U fazi predistraživanja prilikom ocenjivanja hiperparametara biće korišćene keramičke šolje sa i bez umetnički oblikovane pene prilikom posluživanja. Odluka za ovakav dizajn je donesena na osnovu argumenta da ovaj pristup ne bi trebalo da dovede do ekstremne favorizacije nivoa atributa, kao u slučaju keramičke naspram kartonske čaše. Sa druge strane, očekivano je da tip posluživanja sa umetničkom teksturom pene bude preferirano u odnosu na posluženje bez umetničke teksture. Ova pretpostavka će biti testirana u fazi predistraživanja prilikom ocenjivanja hiperparametara.

Tabela 7.7 Preferencije studenata prema različitom tipu posluživanja.

	Frekvencija	%
Da, konzumiranje iz keramičke šolje mi je bolji ugođaj.	21	84
Da, konzumiranje iz kartonske čaše mi je bolji ugođaj.	2	8
Ne, indiferentan sam na tip posluživanja.	2	8
Total	25	100

Izvor: kalkulacija autora.



Slika 7.4 Vizuelizacija raspodele tipa posluživanja.

Izvor: kalkulacija autora.

7.1.2.4 Definisanje minimalne i maksimalne cene espresso kafe

Kod definisanja cenovnih nivoa za glavni eksperiment potrebno je odrediti interval koji bi bio prihvatljiv studentima. Jako nizak nivo cena nije dobar budući da može komunicirati loš kvalitet kafe, dok previše visok nivo može biti neprihvatljiv studentima. Pitanja korišćena za ovu potrebu su prilagođena verzija Van Westendorpovog metoda (Van Westendorp, 1976). Temeljnim sagledavanjem podataka iz upitnika primetna je razlika između muškaraca i žena u uzorku kao što pokazuje Tabela 7.8. Ženski ispitanici su spremniji da plate veći iznos za šolju espresso kafe od muškaraca. Ovo sugerise da je neophodno kontrolisati uticaj pola u glavnom eksperimentu. Kako cilj istraživanja nije opisivanje spremnosti da se plati kafa u zavisnosti od pola i imajući u vidu ograničenu veličinu uzorka u glavnom istraživanju, korišćenje ženskog uzorka deluje kao legitiman način prevazilaženja ovog problema. Neuzimanje u obzir heterogene prirode preferencija između muškaraca i žena može uneti dodatne varijacije u glavnom eksperimentu i narušiti internu validnost eksperimenta. Iako je isključivanjem muške populaciju smanjena eksterna validnost, pretpostavka autora je da bi zaključci dobijeni u glavnom istraživanju trebalo da važe i u muškoj populaciji, što može biti predmet budućih istraživanja. Imajući u vidu cilj istraživanja i postavljene hipoteze, korišćenjem homogenog (ženskog) uzorka, kontrolišu se varijacije koje nisu povezane sa tretmanima merenja i tako povećava interna validnost istraživanja.

Tabela 7.8 Elicitacija cena (u RSD) koje su ispitanici spremni da plate za šolju espresso kafe

		Po kojoj ceni biste smatrali da je <i>espresso</i> kafa u kantini:			
		toliko niska da kvalitet ne može biti dobar?	povoljna - odlična kupovina?	skupa, ali i je dalje pristupačna?	toliko skupa da ne biste razmišljali o kupovini?
Muškarci	Medijana	45,00	75,00	105,00	150,00
	Prosek	49,00	78,00	112,00	156,00
	N	10	10	10	10
	Stand. dev.	17,92	22,01	30,84	36,27
Žene	Medijana	40,00	80,00	140,00	180,00
	Prosek	51,00	82,67	137,33	190,00
	N	15	15	15	15
	Stand. dev.	21,72	24,91	43,33	72,60

Izvor: kalkulacija autora.

U glavnom istraživanju ponuđene opcije kafe će varirati po različitim karakteristikama koje nisu bile uključene u predistraživanju (brend, tip poslužnja, zemlja porekla kafe, opcija dodavanja mleka). Ove dodatne opcije će nesumnjivo podići cenovni interval koji su studenti spremni da plate, što se videlo u komentarima ispitanika u sprovedenom predistraživanju. Na osnovu pretraživanja interneta i popularnih kafeterija u Beogradu, cene *espresso* kafe tipično koštaju od 100 RSD do 200 RSD. Kako mali broj kafeterija nudi *espresso* ispod 100 RSD i ako uzmemo u obzir mogućnost dodavanja mleka (produženi *espresso* sa mlekom ili kapučino) za donju granicu biće uzeta cena iznad 100 RSD. Za gornju granicu biće uzeta srednja vrednosti između cene za koju su studentkinje smatrale da je visoka, ali dostupna (140 RSD) i cene za koju smatraju da je neprihvatljivo visoka (180 RSD), odnosno 160 RSD. Zbog mogućnosti psiholoških efekata obrađivanja cena, izbegnuti su nivoi koji se završavaju ciframa 0 i 9 (Naipaul & Parsa, 2001; Wadhwa & Zhang, 2015). Imajući u vidu navedene argumente, predviđeno je da ovaj atribut ima sledeća četiri nivoa: 105 RSD, 125 RSD, 145 RSD, 165 RSD. Kako je u komentarima primećeno da jedan deo ispitanika pije *espresso* sa mlekom, ispitanici će u glavnom istraživanju imati dodatnu informaciju da po istoj ceni postoji mogućnost dodavanja mleko. U glavnom istraživanju nije fokus na preciznom ocenjivanju nivoa cenovne osetljivosti tražnje, već na efekte regulacionog fokusa na cenovnu osetljivost. Opcija dodavanja mleka bi trebalo da smanji frustriranost ispitanika prilikom izbora kafe i obezbedi logičan tok eksperimenta bez narušavanja interne validnosti.

7.2 Predistraživanje 2 – izbor muzičkih stimulusa

Cilj drugog predistraživanja je bio izbor optimalnih muzičkih stimulusa za glavno istraživanje. Ispitivana je efektivnost predstavnika moderne i klasične muzike. Muzički stimulusi su poređeni prema kriterijumima koji opisuju njihove efekte na motivaciono stanje ispitanika (promociono ili prevenciono). Prvi par kandidata su bile različite verzija moderne muzičke numere *Wake me up* koju je originalno izveo Švedski umetnik *Avicii*. Sporija verzija je obrada originalne gde dominira klavir i gde ritam ima znatno sporiji tempo od originalne verzije (PopUp Karaoke Instrumentals, 2019). Brža verzija je obrada originalne verzije od strane grupe *Simply Three* (Simply Three, 2014). U bržoj verziji dominiraju instrumenti sa visokom frekvencijom zvuka, violina, čelo, bas.

Drugi par kandidata su bile kompozicije klasične muzike, gde je jedna numera bila sporog, druga brzog tempa. Za kompoziciju sa sporim tempom je izabrana numera *Adađo za gudače* od *Samjuela Barbera* (Marshall J. Hendrickson, 2008). Za kompoziciju sa bržim tempom je izabrana numera *Antonia Vivaldia Četiri godišnja doba – Proleće* (HebaDeLioncourt, 2009).

7.2.1 Metod

7.2.1.1 Uzorak

Za potrebe predistraživanja uzorkovani su studenti Univerziteta u Beogradu onlajn putem. Uzorkovano je 139 studenata (120 žena). Anketiranje je sprovedeno u oktobru 2021. godine. Kako je anketirano malo studenata muške populacije (13,7%) i imajući u vidu uočene razlike prema polu iz prvog predistraživanja, u nastavku će biti analiziran samo ženski deo uzorka. Stoga, efektivan uzorak korišćen u analizi muzičkih stimulusa je veličine 120 žena, prosečne starosti 23 godine, gde je najmlađi ispitanik imao 19, a najstariji 31 godinu. Bitno je naglasiti da će u glavnom eksperimentu, zbog malog uzorka i težnje za što većom homogenošću ispitanika, ispitanici biti isključivo ženskog pola. Sledi da je uzorak u ovom predistraživanju u skladu sa potrebama glavnog istraživanja.

Tabela 7.9 *Struktura uzorka prema polu*

	Frekvencija	Procenat
Ženski	120	86,3
Muški	19	13,7

Izvor: kalkulacija autora.

7.2.1.2 Procedura istraživanja

Studenti Univerziteta u Beogradu su putem linkova postavljenih na studentskim grupama *Facebook* društvenih mreža pristupali anketi. Studenti su nasumično raspodeljeni na četiri grupe, gde je svaka grupa dobijala različit muzički stimulus.

Tabela 7.10 prikazuje struktura uzorka prema dodeljenom stimulusu. Na ovaj način je izbegnut efekat prenošenja (engl. *carry-over effect*) uticaja jedne muzičke kompozicije na evaluacije naredne. Ovaj problem je imanentan istraživanjima sa dizajnom ponovljenih merenja (engl. *within-subject design*). Svaki ispitanik je slušao odsečak jedne od četiri kompozicije u trajanju od približno 60 sekundi. Time je smanjen rizik zamora kod ispitanika i sledstveno obezbeđena veća pouzdanost odgovaranja.

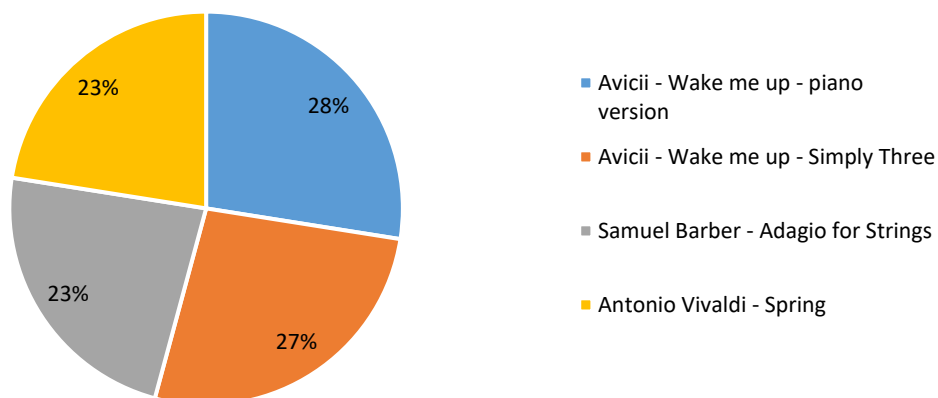
Tabela 7.10 *Struktura uzorka prema dodeljenom muzičkom stimulusu**

	Frekvencija	Procenat
Avicii - Wake me up - piano version	33	27,5
Avicii - Wake me up - Simply Three	32	26,7
Samuel Barber - Adagio for Strings	28	23,3
Antonio Vivaldi - Spring	27	22,5
Total	120	100,0

*Korišćen je samo ženski deo uzorka

Izvor: kalkulacija autora.

Budući da je korišćen slučajan dizajn, ispitanici su približno uniformno raspoređeni prema dodeljenoj muzičkoj kompoziciji, što jasno prikazuje Slika 7.5.



Slika 7.5 Vizuelizacija ženskog dela uzorka prema dodeljenom muzičkom stimulusu.

Izvor: kalkulacija autora.

7.2.1.3 Varijable i merni instrumenti

Upitnik je sastavljen iz četiri dela. U prvom delu upitnika ispitanici su davali informacije o polu i starosti. Nakon toga usledio je drugi deo upitnika gde su bili izloženi muzičkom stimulusu u trajanju od približno 60 sekundi. U trećem delu ispitanici su na skali od 1 do 5 izražavali stepen emocionalne reakcije na muzički stimulus. Mereno je stanje uzbuđenosti ispitanika, gde su na polovima skale bila stanja relaksacije i uzbuđenosti. Druga emocionalna reakcija je bila dopadljivost muzičkog komada. Treća stavka se odnosila na merenje prijemčivosti dobijene muzičke kompozicije tokom kupovine. U četvrtom delu ispitan je stepen asocijacije različitih pojmova prema zadatom muzičkom stimulusu. Stepenn asocijacije je bio meren na skali od 1 do 5 prema šest pojmova koji su opisivali prevenciono (relaksacija, sigurnost, mir) i promocio (energičnost, uspešnost, brz tempo) regulaciono stanje.

7.2.2 Rezultati i diskusija

Kako je percepcija ispitanika analizirana na parovima uporedivih stimulusa, rezultati su koncipirani u dva dela. Najpre su ispitane emocionalne reakcije i asocijacije u zavisnosti od muzičke kompozicije modernog pravca. Nakon toga je na sličan način sprovedena uporedna analiza prema muzičkim predstavnicima klasičnog pravca. Na kraju je diskutovan predlog muzičkih numera koje će biti korišćen u glavnom eksperimentu.

7.2.2.1 Moderna muzika

Kod modernih muzičkih kompozicija primetna je značajna razlika kad je u pitanju stepen uzbuđenosti koju izazivaju stimulusi (

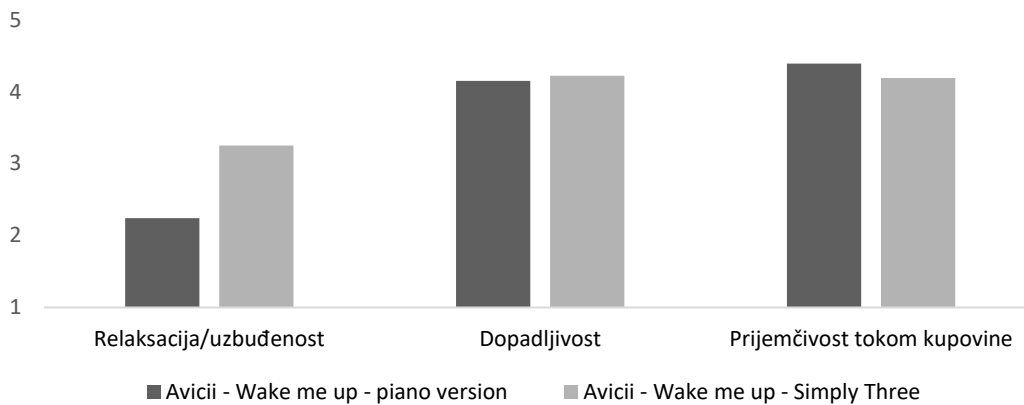
Tabela 7.II). Verzija *Wake me up* sa bržim tempom je izazvalo stanje uzbuđenosti u visini od 3,25 u odnosu na 2,24 koliko je iznosila prosečna vrednost kod verzije sa sporijim tempom. Ova razlika je statistički značajna, mereno t-testom, gde p-vrednost iznosi 0,001. Muzički stimulusi su ocenjeni kao dopadljivi i prijemčivi tokom kupovine sa prosečnim vrednostima preko 4. Razlike između brže i sporije verzije nisu značajne kod ove dve dimenzije ($p=0,77$ i $p=0,48$).

Tabela 7.11 Emocionalne reakcija ispitanika na muzički stimulus – moderna muzika

Muzički stimulus		Relaksacija/ uzbuđenost	Dopadljivost	Prijemčivost tokom kupovine
Avicii - Wake me up - piano version	Prosek	2,24	4,15	4,39
	N	33	33	33
	Stand. dev.	1,14	0,93	1,11
Avicii - Wake me up - Simply Three	Prosek	3,25	4,22	4,19
	N	32	32	32
	Stand. dev.	1,29	0,87	1,20

Izvor: kalkulacija autora.

Ovakvi rezultati sugerišu da su posmatrana dva stimulusa podobna za glavni eksperiment budući da izazivaju značajno različit nivo uzbuđenosti, a imaju sličnu dopadljivost kod studenata.



Slika 7.6 Poređenje emocionalnih reakcija na dva muzička stimulusa – moderna muzika.

Izvor: kalkulacija autora.

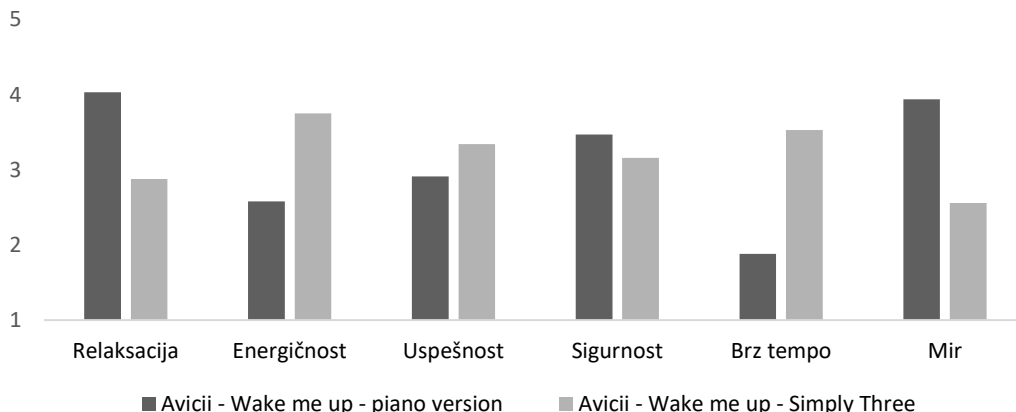
Brza i spora verzija stimulusa izaziva različite asocijacije u odnosu na promocione i prevencione pojmove. Dobijena je značajna razlika u stepenu asocijacije na pojmove „relaksacija“, „energičnost“, „sigurnost“ i „brz tempo“ (Tabela 7.12). Sve razlike imaju očekivan predznak.

Tabela 7.12 Asocijacije muzičkih stimulusa prema datim pojmovima – moderna muzika

Muzički stimulus		Relaksacija	Energičnost	Uspešnost	Sigurnost	Brz tempo	Mir
Avicii - Wake me up - piano version	Prosek	4,03	2,58	2,91	3,47	1,88	3,94
	N	33	33	33	32	33	33
	St.dev.	1,07	1,37	1,10	1,19	1,08	1,05
Avicii - Wake me up - Simply Three	Prosek	2,88	3,75	3,34	3,16	3,53	2,56
	N	32	32	32	32	32	32
	St.dev.	1,26	1,01	1,26	1,05	1,01	1,24

Izvor: kalkulacija autora.

Vizuelnim sagledavanjem rezultata koje ilustruje Slika 7.7 uočljivo je da je brža verzija *Wake me up* uzbudljivija, energičnija i da je percipirana kao numera brzog tempa. Sa druge strane, sporija verzija je relaksirajuća, umirujuća i percipirana kao numera laganog tempa.



Slika 7.7 Poređenje asocijacija dva muzička stimulusa u odnosu na date pojmove – moderna muzika.
Izvor: kalkulacija autora.

7.2.2.2 Klasična muzika

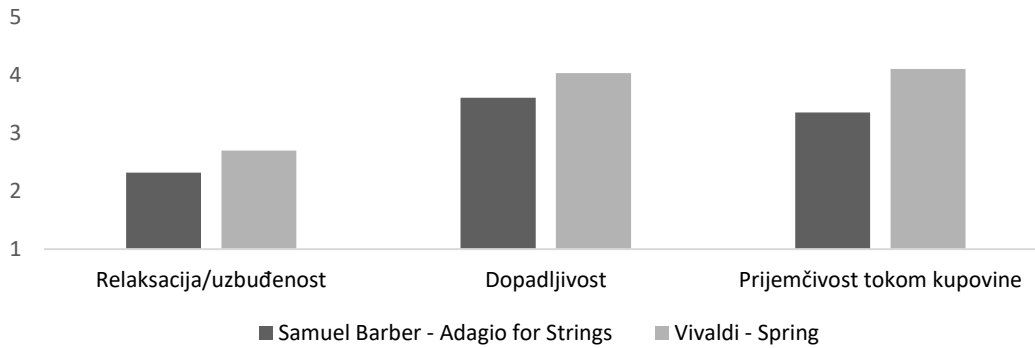
Kod klasičnih muzičkih kompozicija ne postoji značajna razlika u stepenu uzbuđenosti koju izazivaju stimulusi (Tabela 7.13). Verzija *Adađo za gudače* izazvalo stanje smirenosti od 2,32 u odnosu na 2,70 koliko je iznosila prosečna vrednost kod *Proleća*. Ova razlika nije statistički značajna, mereno t-testom, gde p-vrednost iznosi 0,215. Ova dva klasična muzička komada su imaju vrednosti 3,61 i 4,04 kod merenja stepena dopadljivosti, redom za sporu i bržu numeru. Iako ova razlika nema statističku značajnost ($p=0,13$), uočljivo je da *Adađo za gudače* ima prosečnu vrednost ispod četiri (3,61). Kad je u pitanju prijemčivost ovog para stimulusa u kontekstu kupovine, postoji statistički značajna razlika ($p=0,04$).

Tabela 7.13 Emocionalne reakcija ispitanika na muzički stimulus – klasična muzika

Muzički stimulus		Relaksacija/uzbuđenost	Dopadljivost	Prijemčivost tokom kupovine
Samuel Barber - Adagio for Strings	Prosek	2,32	3,61	3,36
	N	28	28	28
	Stand. dev.	1,090	1,100	1,420
Antonio Vivaldi - Spring	Prosek	2,70	4,04	4,11
	N	27	27	27
	Stand. dev.	1,171	0,980	1,281

Izvor: kalkulacija autora.

Ovakvi rezultati nisu ohrabrujući za glavni eksperiment budući da je bitno da muzički stimulusi izazivaju različit nivo uzbuđenosti, a da su jednako dopadljivi studentima.



Slika 7.8 Poređenje emocionalnih reakcija na dva muzička stimulusa – klasična muzika.

Izvor: kalkulacija autora.

Brza i spora verzija stimulusa izaziva različite asocijacije samo u odnosu na „energičnost“ i „brz tempo“ (

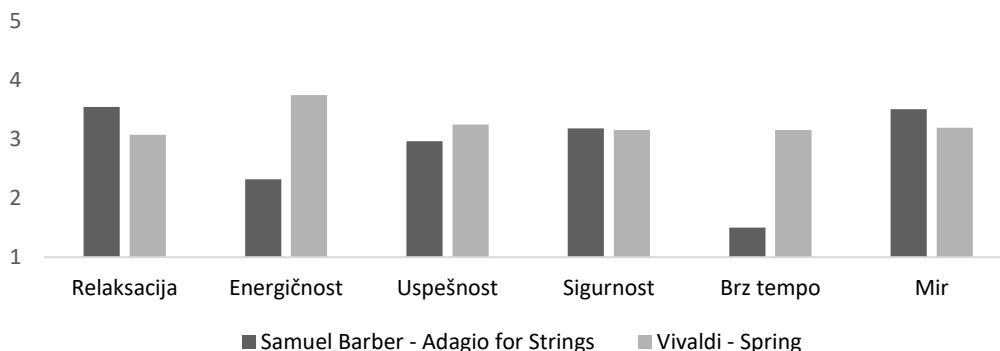
Tabela 7.14) iako razlike kod svih pojmova imaju očekivan predznak.

Tabela 7.14 Asocijacije muzičkih stimulusa prema datim pojmovima – klasična muzika

Muzički stimulus		Relaksacija	Energičnost	Uspešnost	Sigurnost	Brz tempo	Mir
Samuel Barber - Adagio for Strings	Prosek	3,54	2,32	2,96	3,18	1,50	3,50
	N	28	28	28	28	28	28
	St.dev	1,232	1,124	1,170	1,156	0,882	1,262
Antonio Vivaldi - Spring	Prosek	3,07	3,74	3,24	3,15	3,15	3,19
	N	27	27	25	26	26	27
	St.dev	1,412	1,259	1,393	1,190	1,317	1,145

Izvor: kalkulacija autora.

Vizuelnim sagledavanjem prikaza koji daje Slika 7.9 vidimo da je *Proleće* percipirano kao energičnija numera sa znatno bržim tempom u odnosu na *Adađo za gudače*. Po ostalim pojmovima postoji prilično ujednačen stepen asocijacije kod analiziranih stimulusa.



Slika 7.9 Poređenje asocijacija dva muzička stimulusa u odnosu na date pojmove – klasična muzika.

Izvor: kalkulacija autora.

7.2.2.3 Diskusija

Rezultati dobijeni iz drugog predistraživanja sugerišu da su moderne kompozicije znatno podobnije za glavni eksperiment u odnosu na klasične kompozicije. Iako razlike kod oba para kompozicija imaju logičan predznak u odnosu na posmatrane karakteristike, kod moderne muzike su te razlike izraženije, pa samim tim je očekivano da brza i spora verzija numere *Wake me up* efikasnija u izazivanju regulacionih stanja kod ispitanika u glavnom istraživanju. Kad je u pitanju dopadljivost muzičkih kompozicija, evidentno je da studenti znatno više vole modernu muziku u odnosu na klasičnu, kao i da im je moderna muzika prijemčivija tokom procesa kupovine. Ovo sugerise da je moderna muzika efektivniji stimulus u izazivanju regulacionih stanja kod studentske populacije, nego što je to klasična muzika.

7.3 Predistraživanje 3 – ocenjivanje hiperparametara modela

Cilj trećeg predistraživanja je ocenjivanje parametara apriornih raspodela parametara Bajesovog modela izbora, odnosno hiperparametara. Apriorne raspodele i hiperparametri su bitan deo glavnog istraživanja pošto omogućavaju generisanje efikasnog eksperimentalnog dizajna. Efikasan dizajn znači preciznije ocene parametara modela izbora i pouzdanije testiranje hipoteza. Efikasan dizajn ima značajnu ulogu u glavnom istraživanju imajući u vidu da je planiran mali uzorak. Preskakanjem ovog koraka i dalje bi bilo moguće sprovesti glavno istraživanje, ali upitnik bi imao znatno više neinformativnih pitanja. Neinformativna pitanja karakterise prisustvo dominantnih alternativa, pa samim tim troše značajno vreme ispitanicima. Primera radi, ako su ponuđene alternative iste po svim atributima osim po cenama, logičan izbor za sve racionalne ispitanike bi bio izabrati povoljniju alternativu. Međutim, pitanja na koja istraživač unapred zna odgovor ispitanika su neefikasna u odnosu na „teška“ pitanja u smislu dobijanja preciznijih ocena za isti broj pitanja po ispitaniku.

7.3.1 Metod

7.3.1.1 Uzorak

Uzorkovani su studenti Univerziteta u Beogradu onlajn putem linkova postavljenih na društvenim mrežama. Efektivan uzorak za ocenjivanje hiperparametra iznosio je 131 ženskih ispitanika prosečne starosti 22,7 godina, gde je najmlađa ispitanica imala 19, a najstarija 28 godina. Samo četiri ispitanika je popunjavalo upitnik putem personalnog računara, dok su ostali ispitanici to činili putem svojih pametnih telefona. Anketiranje je sprovedeno u novembru 2021. godine. Popunjavanju ankete je pristupljeno 311 puta, ali su iz analize izbačeni ispitanici koji su na pitanja odgovarali za manje od jedne sekunde i koji nisu skrolovali ekran kako bi videli sve ponuđene alternative. Na taj način dobijena su 153 validna upitnika, od koji su 22 (14%) muškog pola. Za potrebe homogenog uzorka u glavnom istraživanju, samo je ženska populacija uzeta u obzir, što je rezultiralo sa konačnim uzorkom od 131 ženskog ispitanika. Studenti koji su popunjavali upitnik su sa različitih fakulteta Univerziteta u Beogradu. Glavnim istraživanjem je planirano da se uzorkuju samo studenti Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, te ovakva heterogena struktura ispitanika može pružiti pristrasnu sliku po pitanju ocenjenih parametara. Međutim, cilj ovog predistraživanja je dobijanje efikasnog eksperimentalnog dizajna, a ne preciznih ocena, zbog čega je fokus usmeren ka dobijanju validnih odgovora ispitanika sa logičnim predznakom ocena parametara (npr. očekivano je da predznak cenovne parcijalne korisnosti bude negativan).

7.3.1.2 Procedura istraživanja i eksperimentalni dizajn

Na osnovu informacija dobijenih u predistraživanjima formirana je matrica atributa i njihovih nivoa koje prikazuje Tabela 7.15. Kod atributa Brend je korišćena Lavazza, kao brend koji je imao najveću poznatost među ispitanicima u predistraživanju, dok su druga dva brenda nasumično odabrana sa interneta tako da budu nepoznata studentskoj populaciji. Kako bi bila obezbeđena bolja diskriminacija između brendova, brend *Luccari* je u upitniku opisan kao nov brend na tržištu i dostupan samo u ekskluzivnijim kafeterijama. *Eight o'clock* je predstavljen kao brend koji je nov na tržištu namenjen široj populaciji, dostupan u svima kafeterijama. Na taj način, očekivan rezultat je da *Lavazza* i *Luccari* budu dominantne alternative, dok bi *Eight o'clock* trebalo da bude inferiorna alternativa u krajnjim rezultatima. Kod atributa Tip posluživanja korišćena su dva nivoa, tip posluživanja sa artističnom slikom napravljenom od pene i tip posluživanja bez slike od pene. Atribut Zemlja proizvodnje *espresso* kafe sadržao je tri nivoa dobijena iz predistraživanja: Srbija, Italija, Brazil. Fokalni atribut Cena sadržao je četiri cenovna nivoa dobijena iz predistraživanja.










Tabela 7.15 Eksperimentalni dizajn sa atributima i njihovim nivoima

Brend	Tip posluživanja*	Zemlja proizvodnje	Cena
Lavazza	Sa slikom	Srbija	105 RSD
Luccari	Bez slike	Italija	125 RSD
Eight o'clock		Brazil	145 RSD 165 RSD

*Tip posluživanja sa slikom se odnosu na *espresso* kafu posluženu sa artističkom slikom napravljenom od pene.

Za potrebe anketiranja korišćen je *Conjoint.ly* softver. Softver ne otkriva u svojoj tehničkoj dokumentaciji algoritam koji koristi prilikom definisanja eksperimentalnog dizajna. Sa druge strane, dokumentacija softvera naglašava da korišćen algoritam generiše približno D-optimalan dizajn sa nultim parametrima (Conjoint.ly, 2022). Mana ovakvog pristupa je što dizajn ne optimizuje pitanja tako da su sve moguće kombinacije nivoa atributa jednako verovatne. Imajući u vidu da je korišćen dovoljno veliki uzorak sa ispitanicima za koje je procenjeno da su validno popunjavali upitnik, ovakav pristup omogućava dobijanje ocena hiperparametara. Slika 7.10 prikazuje primer pitanja iz softvera koje su ispitanici dobijali u sklopu eksperimenta.

Koju ponudu espresso kafe biste izabrali?

Brend				
Tip posluživanja				✗ Ništa od navedenog
Zemlja proizvodnje				
Cena	125 rsd	165 rsd	145 rsd	

Slika 7.10 Primer pitanja koje su ispitanici dobijali u upitniku.

Conjoint.ly koristi Bajesov hijerarhijski multinomijalni logit model prilikom modeliranja preferencija. Ocenjivanje parametara parcijalne korisnosti (engl. *partworth utilities*) izvodi se za svakog pojedinačnog ispitanika. Izbor ispitanika n se može predstaviti generalizovnom Bernulijevom raspodelom prema sledećem modelu:

$$y_{nt} \sim \text{GenBernuli} \left(\frac{1}{1 + e^{-(\beta_n x_{njt})}} \right). \quad (7.1)$$

$$\beta_n \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}) \text{ za } n = 1, 2, \dots, N \quad (7.2)$$

gde se pretpostavlja da zavisna varijabla y_{nt} , koja odražava izbor alternative, može uzeti vrednosti $j=1, \dots, 4$ u t situacija, gde je $t=1, 2, \dots, 15$. Parcijalne korisnosti β_n apriori prate multivarijacionu normalnu raspodelu sa vektorom lokacije $\boldsymbol{\beta}$ i kovarijacionom matricom $\boldsymbol{\Sigma}$. *Conjoint.ly* ne precizira koje apriorne raspodele koristi za ove parametre. Vektor x_{njt} daje informacije o nivoima četiri atributa sa kojim su predstavljene alternative. Preciznije, x_{njt} opisuje alternativu j koja stoji na raspolaganju ispitaniku n u situaciji t . Svaki ispitanik ima dobija različitu verziju upitnika, tako da x varira među ispitanicima.

7.3.2 Rezultati i diskusija

Za potrebe ocenjivanja modela korišćen je *Conjoint.ly* softver. Kako je za potrebe ocenjivanja korišćen „dummy“ tip kodiranja, referentne kategorije svakog atributa imale su nulti parcijalni koeficijenti korisnosti. Izbor referentnih kategorija za potrebe predistraživanja su arbitrarno određene. Tabela 7.16 prikazuje aposteriorne ocene očekivanih vrednosti hiperparametara nereferentnih kategorija. Sagledavanjem koeficijenata moguće je sprovesti logički test validnosti (engl. *face validity*). Negativne vrednosti parcijalnih korisnosti za brendove *Eight o'clock* i *Luccari* znači da je referentni brend, *Lavazza*, bio najviše preferiran među ispitanicima. *Eight o'clock* ima najmanju vrednost, što znači i najmanju preferiranost, kao što je i bilo predviđeno dizajnom. Za atribut Tip posluživanja dobijena je parcijalna korisnost od -1,28 za nivo Bez slike, što govori da se ispitanicima više svidela *espresso* kafa poslužena sa umetničkom slikom od pene. Italija ima najvišu parcijalnu korisnost (0,61) što znači da su ispitanici najviše preferirali *espresso* proizveden u Italiji u odnosu na Srbiju i Brazil. Kod cenovnog atributa,

negativne vrednosti koeficijenata govore da referentna kategorija, 105 RSD, ima najveću korisnost, kao i da sa povećanjem nivoa cene ta korisnost opada, što je i očekivano.

Tabela 7.16 Tačkaste ocene očekivanja aposteriornih hiperparametara

	$E(\beta y)$	$Var(\beta y)$
Bez izbora	-8,13	9,29
Eight o'clock	-0,96	3,05
Luccari	-0,60	2,37
Bez slike	-1,28	4,67
Brazil	0,00	2,88
Italija	0,61	2,20
125 RSD	-0,33	0,37
145 RSD	-0,55	1,54
165 RSD	-1,65	3,06

Izvor: kalkulacija autora.

Ukratko, dobijene ocene parcijalnih korisnosti imaju očekivane predznake, kao i poretke vrednosti unutar atributa, što potkrepljuje logičku validnost dizajna. Dobijene ocene predstavljaju bitan input za narednu fazu istraživanja, gde generišemo optimalni eksperimentalni dizajn.

7.4 Glavno istraživanje

U glavnom istraživanju cilj je da se analiziraju efekti muzičkih stimulusa i regulacionog stanja na donošenje odluka o izboru proizvoda. Sagledavanje interakcije između regulacionog stanja i cenovne komponente proizvoda omogućice bolje razumevanje načina na koji potrošači donose odluke tokom kupovine, kao i načina na koji kontekst odlučivanja (poput pozadinske muzike) utiče na preferencije kod potrošača.

7.4.1 Metod

7.4.1.1 Uzorak

Izabran je uzorak su studenata Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Izvlačenje uzorka je sprovedeno u decembru 2021. godine. Studenti različitih godina studija su na času dobili link putem kog su mogli da se upoznaju sa prirodom istraživanja i da se na njega prijave, ukoliko to žele. Uslov za učešće u istraživanju je bio da ispitanik konzumira redovno espresso kafu i da je ženskog pola (kako bi se postigla veća homogenosti uzorka). Ukupno je učestvovalo 33 ispitanice prosečne starosti 20,3 godina, gde je najmlađa imala 18, a najstarija 26 godina. Rezultati koje smo dobili u jednom slučaju nisu uzeti u obzir prilikom analize rezultata, zbog tehničkih problema sa instalacijom elektroencefalografa i lošeg kvaliteta signala, tako da je efektivan uzorak imao 32 člana.

7.4.1.2 Proces istraživanja i eksperimentalni dizajn

Eksperiment je sproveden u prostoriji Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Beogradu koja je smeštena u tihom delu zgrade kako ispitanici ne bi bili ometani tokom ispitivanja. Rezultati su mereni metodom

ličnog intervjuisanja uz pomoć kompjutera. Informacije koje se odnose na hronično regulaciono stanje i potrošačke preferencije su prikupljene putem upitnika, dok su psihografski podaci dobijeni merenjem putem EEG uređaja.

Faze glavnog eksperimenta su prikazuje Slika 7.11. Eksperiment je u proseku efektivno trajao oko 30 minuta po ispitaniku, gde je najveći deo vremena odlazio na instaliranje EEG opreme i obezbeđivanje kvalitetnog signala.



Slika 7.11 Faze sprovođenja glavnog eksperimenta.

Po dolasku u prostoriju gde se sprovodi eksperiment, ispitanicima je detaljno objašnjen predviđen tok eksperimenta. Tokom celog eksperimenta u prostoriji su mogli biti prisutni samo ispitanik i istraživač. Svi ispitanici su bili podeljeni u dve eksperimentalne grupe, gde je svaka grupa imala različit muzički stimulus. Muzičke stimulse su predstavljale numere moderne muzike, budući da prema predistraživanju moderna muzika ima bolji efekat primovanja regulacionog stanja na ciljnu populaciju. Dva muzička stimulusa su odabrana tako da odražavaju različit nivo energičnosti. Energičnost je varijabla definisana kao percipiran nivo uzbuđenja koji određena muzička numera budi u ispitaniku i pozitivno je korelisana sa tempom muzike (Das et al., 2020). Prva numera je bila instrumentalna verzija Wake me up originalno izvedena od strane umetnika Avicii, ali za potrebe istraživanja korišćena verzija sa Youtube stranice PopUp Instrumentals. Druga numera je bila takođe Wake me up, ali izvedena od strane benda Simply Three. Validnost muzičkih stimulusa je potvrđena kroz odgovore 32 ispitanika na kraju glavnog eksperimenta na pitanje “Koliki nivo uzbuđenja je u Vama izazvala odslušana muzička numera? (na skali 1-7)”.

Tabela 7.17 prikazuje dobijene rezultate koji potvrđuju korelaciju percipirane mere energičnosti i objektivne mere tempa muzičkih numera.

Tabela 7.17 Muzički stimulusu korišćeni u eksperimentu

Numera	Tempo*	Energičnost**
Wake me up – piano	75	4,31
Wake me up – Simply three	136	4,86

*Meren u bitima po minutu;

**Subjektivna mera dobijena na skali od 1 do 7

Sve ispitanike je ispitala ista osoba, odnosno autor ovog doktorata. Neformalnim jezikom je predstavljen EEG uređaj, kao i njegove mogućnosti, a naglasak je bio stavljen na neinvazivnoj prirodi same opreme. Ključno je bilo ostvariti neformalan odnos kako bi ispitanici bili opušteni i sigurni da ne postoji nikakva pretnja po njihovu bezbednost usled korišćenja EEG uređaja.

U sledećem koraku ispitanicima je dat dokument Izjava o saglasnosti u učešću u elektroencefalografskom istraživanju gde su oni svojim potpisom potvrdili da svojevolejno učestvuju u naučnom eksperimentu i gde se istraživač, takođe svojim potpisom, obavezuje na obezbeđivanje anonimnosti podataka pojedinačnih ispitanika. Etička komisija Univerziteta u Beogradu – Ekonomskog fakulteta dala je pozitivno mišljenje o sprovedenom protokolu dizajna istraživanja čime je potvrđeno da su poštovana načela etike u skladu sa Kodeksom profesionalne etike Univerziteta u Beogradu („Glasnik Univerziteta u Beogradu“ br. 193-16 i 229-21). Kada su obe strane potpisale Izjavu o saglasnosti u učešću, pristupilo se instaliranju EEG opreme na glavama ispitanika i obezbeđivanju kvalitetnog signala. Ovaj deo eksperimenta je u proseku trajao 15 minuta. Najveći izazov je bio uspostaviti dovoljno kvalitetan signal između skalpa ispitanika i EEG uređaja. Otežavajuća okolnost je bila to što je većina ispitanika imala dugu kosu pa je zbog toga bilo naporno uspostaviti dobar kontakt svih elektroda. Kvalitet signala je opserviran preko softverske aplikacije EmotivPRO.

Po uspostavljanu dobrog kontakta svih elektroda, ispitanicima je putem računara omogućen pristup pitanjima o izboru različitih opcija espresso kafe, dok je istovremeno meren njihov EEG signal. Na ovaj način dobijene su bazne vrednosti preferencija, EEG signala i brzine odlučivanja koje su imale za cilj da obezbede normalizaciju opservacija nakon izlaganja muzičkom stimulusu. Izbor različitih opcija kafa je optimiziran korišćenjem softverskog paketa Idefix (Traets et al., 2019). D-optimizacija je vršena tako što je korišćen nehijerarhijski model izbora sa ocenjenim parametrima iz predistraživanja. Napravljeno je 10 verzija upitnika koji su podeljeni u dve korpe, pet je korišćeno za merenje baznih preferencija i pet za merenje preferencija tokom izloženosti muzičkom stimulusu. Svaki ispitanik je dobijao nasumično dve verzije upitnika. Razlog podele upitnika na dve korpe je bio da se ne bi dogodilo da jedan ispitanik dobije dve iste verzije upitnika. U proseku je za dobijanje pojedinačnog D-optimizovanog upitnika bilo potrebno oko 7 minuta korišćenjem softverskog paketa Idefix primenom modifikovanog Fedorovog algoritma na računaru srednjih performansi (8 GB RAM memorije).

Iako finalni model ima hijerarhijsku strukturu, ova nepodudarnost modela se opravdava pragmatičnim razlozima. D-optimizacija korišćenjem modela sa hijerarhijskom strukturom zahtevala bi optimizaciju nakon svakog obavljenog izbora od strane ispitanika i to tako da svi ispitanici odgovaraju na pitanja u isto vreme. Upravo iz tog razloga se ovakav dizajn naziva adaptivni dizajn (engl. *adaptive design*). Drugi razlog je problem endogenosti koji se može javiti kod ovakvog dizajna budući da optimizacija svakog n-tog pitanja zavisi delom od greške merenja na prethodnih n-1 pitanja, čime se generiše pristrasnost (Toubia et al., 2003). Takav problem je posebno izražen kod malih uzoraka što je slučaj u našem istraživanju. Rose (2012) je kroz simulaciju pokazao da D-optimalan dizajn ima sličan nivo efikasnosti kao adaptivni dizajn, ukoliko se optimizacija vrši na dovoljno preciznim ocenama hiperparametara.

U sledećoj fazi ispitanici su odgovarali na „filer“ pitanja (pitanja koja su se odnosila na merenje tipa ličnosti kroz skalu Velikih pet, engl. *Big five*), kao i pitanja iz BIS/BAS skale koja su imala za cilj da distanciraju ispitanike od prve faze eksperimenta i omogućće da podaci u narednoj fazi budu pouzdaniji.

Kada bi ispitanik završio sa odgovaranjem „filer“ pitanja, istraživač bi pustio predviđeni muzički stimulus na jačini zvuka koja nije previše glasna za ispitanika, ali ni previše tiha. Svaki ispitanik je prvo slušao muzički stimulus oko jedan minut kako bi se adaptirao na zvuk muzike i kako bi se opustio u

dovoljnoj meri za narednu fazu. Nakon što bi prošao taj minut adaptacije, počelo bi merenje EEG signala dok bi ispitanik paralelno pristupio drugom D-optimizovanom setu pitanja izbora različitih espresso kafa. Tokom ove faze u pozadini je sve vreme bila puštena muzička numera koja je po potrebi bila puštena iz početka, ukoliko bi ispitanik birao proizvode sporijim tempom. Nakon izmerenih preferencija ispitanici su odgovorili na par pitanja (u CAPI proceduri) koja su se odnosila na percepciju prema odslušanom muzičkom stimulusu, a zatim bi se istraživač zahvalio ispitanicima na učešću.

7.4.1.3 Varijable i merni instrumenti

7.4.1.3.1 Elektroencefalograf

Za potrebe istraživanja korišćen je EEG uređaj marke EMOTIV EPOC+ koji je dokazano pouzdan instrument kad su u pitanju istraživanja tipa kao u ovoj disertaciji (Giraldo & Ramirez, 2013; Ramele et al., 2021; Strmiska & Koudelkova, 2018). Uređaj spada u nisko-budžetne uređaje čija cena iznosi 800 USD plus mesečni troškovi licence za korišćenje uređaja. Kad su u pitanju tehničke specifikacije uređaj poseduje 14 elektroda postavljenih prema međunarodnom 10-20 sistemu lokacija (AF3, F7, F3, FC5, T7, P7, O1, O2, P8, T8, FC6, F4, F8, AF4) uz dodatne referentne P3/P4 lokacije. Stopa uzorkovanja iznosi 128 Hz, sa pojasno-propusnim filterom (engl. *band-pass filter*) na intervalu 0,16 Hz – 43 Hz uz korišćenje filtera na pojedinačnim frekvencijama od 50 Hz i 60 Hz (engl. *notch filters*). Da bi bio uspostavljan protok signala, EMOTIV uređaj koristi navlažene jastučiće na elektrodama primenom rastvora (tipično rastvora koji se koristi za kontaktna sočiva).



Slika 7.12 Model EEG uređaja korišćen u istraživanju – Emotiv EPOC+.

Sirovi podaci su prvo podeljeni u manje segmente, epohe, dužine 2 sekunde. Korišćena je Hemingova transformacija sa ciljem umanjivanja problema distorzije signala uzrokovano podacima na krajevima epoha. To je ostvareno putem sheme ponderacije koja umanjuje značaj ovim podacima. Posledično, podaci na krajevima epoha gube informativnu moć, što je značajno rasipanje podataka imajući u vidu da EMOTIV ima nisku stopu uzorkovanja od 128 Hz. Iz tog razloga korišćen je stepen preklapanja epoha od 87,5%. Dobijene epohe su zatim prebačene u frekvencioni domen korišćenjem brzih Furijeovih transformacija (FFT algoritam). Za potrebe ove disertacije korišćeni su sledeći frekvencioni pojasevi: θ (4 - 8 Hz) i α (8 - 12 Hz).

7.4.1.3.2 Neuromarketinške metrike

Teta i alfa frekvencioni pojasevi su korišćeni za formiranje neuroloških metrika za merenje psiholoških stanja. Posmatrane metrike su bile frontalna asimetrija (FA) i emocionalna pobuđenost (EP).

Frontalna asimetrija (FA) je metrika koja se zasniva na frekvencionoj analizi moždanih talasa. Dobija se kao razlika u aktivnosti levih i desnih frontalnih regiona. Iako je prvobitno bila vezivana za objašnjavanje emocija, danas preovlađuje mišljenje da frontalna asimetrija objašnjava motivaciju privlačenja i izbegavanja (Coan & Allen, 2003; Davidson, 1988; Smith et al., 2017a). Način na koji frontalna asimetrija utiče na motivaciju je još uvek oblast koja se istražuje. Postoje različita tumačenja o smeru uticaja frontalne asimetrije. Jedan način je da FA posmatramo kao uzročnika motivacionog ponašanja ljudi, dok se drugde smatra da se frontalna asimetrija javlja kao posledica izazvane motivacije. Ono što je sigurno je da frontalnu asimetriju možemo da posmatramo kao marker motivacije privlačenja i izbegavanja (Reznik & Allen, 2018). Upravo ova dva smera u motivaciji ljudi ima veliki potencijal u neuromarketingu budući da istraživačima daju uvid o psihološkom stanju ispitanika. Bitno je razlikovati *aktivaciju* od *aktivnosti* frontalne asimetrije (Reznik & Allen, 2018). Aktivacija nastaje kao reakcija ispitanika na stimulus (npr. izloženost brendu čokolade) pa samim tim nju možemo da registrujemo kao promenu u nivou FA. Tako imamo istraživanja koja pokazuju da se leva frontalna asimetrija pojačava kod ispitanika kad posmatraju atraktivne osobe, kao i da zastrašujuća muzika pojačava desnu FA, dok prijatna pojačava levu FA (L. A. Schmidt & Trainor, 2001). Aktivnost FA se odnosi na nivo FA izmerenom u toku određenog vremenskog perioda (npr. u toku gledanja reklame ili FA meren u stanju mirovanja ispitanika). Istraživanja pokazuju da se hronični regulacioni fokus odražava kroz FA meren u stanju mirovanja (Amodio et al., 2004), kao i da aktivnost frontalne asimetrije u stanju mirovanja predstavlja značajan prediktor preferencija prema različitim tipovima muzike (B. Schmidt & Hanslmayr, 2009). Najčešće se uzimaju F3 i F7 kao lokacije na levom frontalnom delu skalpa, dok se na desnom uzimaju F4 i F8. U slučaju da EEG uređaj ne meri neuroaktivnost na datim lokacijama, moguće je koristiti mesta u njihovoj okolini (iMotions, 2019). Postoje i radovi koji koriste druge lokacije u frontalnom regionu i podjednako dobro potvrđuju povezanost motivacije ispitanika sa FA (Coan & Allen, 2003). Obrazac za računanje FA indeksa najčešće koristi logaritamske transformacije moždanih talasa (Coan & Allen, 2003). Za formiranje FA metrike u ovoj disertaciji je korišćen opšteprihvaćen pristup iz nauke i prakse koji se može naći i u radovima (Allen et al., 2004; iMotions, 2019; Smith et al., 2017b). Za merenje frontalne asimetrije korišćen je teta frekvencijski pojas, po ugledu na radove koji su se bavili merenjem motivacionih stanja (Avinash et al., 2018; Dharmadhikari et al., 2018; Tandle et al., 2016). Frontalna teta asimetrija (FA) je računata po sledećem obrascu:

$$FA \text{ indeks} = \ln(\theta_{F8}) - \ln(\theta_{F7}) \quad (7.3)$$

koristeći snagu teta talasa na lokacijama F8 i F7 koje se tipično koriste u praktičnim istraživanjima (iMotions, 2019). Alternativno se mogu koristiti i druge lokacije u frontalnom domenu korteksa, poput F4 i F3. Pored teta talasa moguće je koristiti i alfa talase (Coan & Allen, 2003). F8 i F7 lokacije u kombinaciji sa teta frekvencionim talasima su se pokazale kao najdelotvornije u preliminarnim testiranjima.

Za merenje emocionalne pobuđenosti korišćen je pristup merenja emocionalnog intenziteta prema kom niska aktivacija alfa talasa u frontalnom korteksu odražava visok nivo emocionalne pobuđenosti (L. A. Schmidt & Trainor, 2001). Obrazac za računanje indeksa emocionalne pobuđenosti (EP) je dat sledećim izrazom:

$$EP \text{ indeks} = \ln(\alpha_{F8}) + \ln(\alpha_{F7}) + \ln(\alpha_{F4}) + \ln(\alpha_{F3}) \quad (7.4)$$

gde se koristi snaga alfa talasa na frontalnim lokacijama F8, F7, F4, F3. U radovima se koriste i druge frontalne lokacije, kao i metrike koje koriste modifikacije ovog obrasca (McMahan et al., 2015). Pristup

Schmidta i Trainora (2001) prema kom se koriste alfa talasi, uz korišćenje frontalnih lokacija F8, F7, F4, F3, se u preliminarnim testiranjima pokazao kao zadovoljavajuća aproksimacije stanja uzbuđenja.

FA i EP indeksi su računati za svaku epohu. Kako bi varijable bile uporedive između različitih ispitanika, izvršena je normalizacija varijabli po ugledu na metodologiju EmotivPro softverske aplikaciju (EmotivPRO, 2022). Vrednosti varijabli FA i EP su podeljene robusnom merom disperzije, interkvartalnom razlikom, kako skaliranje ne bi bilo pod uticajem ekstremnih vrednosti. Budući da je bilo potrebno dobiti sumarnu metriku FA i EP potrebno je koristiti meru centralne tendencije koja nije pod značajnim uticajem artefakata. Modus je odabran kao sumarna mera, budući da reflektuje najverovatniju vrednost među posmatranim epohama i nije osetljiva na ekstremne vrednosti koje su se javljale usled fizioloških artefakata kod pojedinih epoha (npr. treptaji i pomeranje vilice). Kontinuelna priroda varijabli onemogućava jednostavno računanje modusa, budući da se pojedinačne vrednosti *de facto* ne ponavljaju. Za računanje modusa kontinuelnih varijabli korišćena je mera poluuzoračkog modusa (engl. *half sample mode estimator*, HSM) za koju važi da je manje osetljiva na prisustvo ekstremnih vrednosti od ostalih mera za računanje modusa kontinuelnih varijabli (Bickel & Frühwirth, 2006; Robertson & Cryer, 1974). Metrike su računane u dva navrata, u periodu bez izloženosti muzičkom stimulusu i u periodu tokom izloženosti muzičkom stimulusu. Sledi da su za svakog ispitanika dobijene po dve vrednosti varijabli FA i EP koje su odražavale njihovo tipično stanje u baznom i eksperimentalnom periodu. Radi lakše interpretacije u kontekstu situacionog regulacionog fokusa, varijable FA i EP su centrirane tako da nulte vrednosti predstavljaju tipično stanje iz baznog perioda.

7.4.1.3.3 Cenovna osetljivost tražnje

Cenovna osetljivost tražnje je merena preko ocenjene parcijalne korisnosti hijerarhijskog Bajesovog modela izbora. Drugim rečima, regresioni koeficijenti koji se nalaze uz cenovni atribut odražavaju cenovnu osetljivost tražnje. Pretpostavka svih modela korišćenih prilikom testiranja hipoteza je da se cenovna osetljivost tražnje može dekomponovati na glavni cenovni efekat i efekat regulacionog fokusa.

$$\text{Cenovna osetljivost tražnje} = \beta_{gl. \text{ cenovni efekat}} + \beta_{\text{efekat regulacionog fokusa}} \cdot \text{Regulacioni Fokus} \quad (7.5)$$

Atribut cena je definisan kao metrička varijabla sa linearnom vezom u odnosu na korisnost ispitanika. Radi lakše konvergencije i interpretacije modela, cena je standardizovana tako da nulta vrednost predstavlja prosečnu cenu, sa standardnom devijacijom jednakom jedan. Tretman cene kao metričke varijable se razlikuje od njenog tretmana u predistraživanju, gde je cena bila kategorijska varijabla. Kategorijska varijanta atributa cena je korišćena za potrebe predistraživanja kako bi bila testirana logička validnost (viši nivo cene, manja parcijalna korisnost), što je i bilo potvrđeno rezultatima predistraživanja. Za potrebe glavnog istraživanja, pak, korišćena je linearna varijanta budući da je cenovna osetljivost tražnje u fokusu istraživanja. Svi ostali atributi su tretirani kao kategorijske varijable, što je standardan pristup u analizi združenih efekata.

7.4.1.3.4 BIS/BAS skala

Klasičan pristup merenja hroničnog regulacionog fokusa je takozvana BIS/BAS skala (Carver & White, 1994; Gray, 1990). Prema Džefriju Greju postoje dva neurofiziološka sistema koja regulišu interakciju pojedinca sa okruženjem: sistem bihejvioralne inhibicije (engl. *Behavioral Inhibition System*, BIS) i sistem bihejvioralne aktivacije (engl. *Behavioral Approach System*, BAS). Sistem bihejvioralne inhibicije (BIS) predstavlja regulacioni sistem koji kontroliše motivaciju izbegavanja negativnih ishoda i karakteriše ga pojačana senzitivnost prema kaznama. Sistem bihejvioralne aktivacije (BAS) predstavlja

regulacioni sistem koji kontroliše motivaciju privlačenja prema pozitivnim ishodima i karakteriše ga pojačana senzitivnost prema nagradama. Ovakva definicija BIS i BAS sistema se u znatnoj meri poklapa sa definicijama regulacionih fokusa, gde BIS odgovara fokusu prevencije, a BAS fokusu promocije (Dholakia et al., 2006; Haws et al., 2010). Bitno je naglasiti da su za potrebe merenja promociionog fokusa korišćene samo one stavke BAS komponente koje odražavaju reakciju pojedinca na nagrade. Sedam BIS stavki (prevencionni fokus) odražavaju zabrinutost u vezi sa mogućnošću negativne pojave ili osetljivosti na takve događaje kada se dogode. Pet BAS stavki (promociioni fokus) odražavaju reakciju pojedinca na nagrade, merene kao tendencije uzbuđenja ili emocionalne pobuđenosti povezane sa pozitivnim iskustvima.

Tabela 7.18 BIS/BAS skala za merenje hroničnog regulacionog fokusa

Kad nešto neprijatno treba da se desi, obično se jako uznemirim. (BIS)
Pazim da ne pravim greške. (BIS)
Kada vidim priliku za nešto što mi se sviđa, odmah se uzbudim. (BAS)
Kritike i grdnja me jako povređuju. (BIS)
Uzбудilo bi me da pobedim na nekom takmičenju. (BAS)
Osećam se jako zabrinuto i/ili uznemireno kada znam da je neko ljut na mene. (BIS)
Čak i kad nešto loše treba da mi se dogodi, retko kad osećam strah i nervozu. (R) (BIS)
Kada mi se dobre stvari događaju, to jako utiče na mene. (BAS)
Kada sam dobra u nečemu, onda volim da se bavim time. (BAS)
Osećam se zabrinuto kada znam da sam bio loš u nečemu. (BIS)
U poređenju sa mojim društvom, imam jako malo strahova. (R) (BIS)
Kada dobijem ono što želim, osećam se uzbuđeno i energično. (BAS)

BIS – stavke koja odražavaju BIS komponentu i aproksimiraju prevenciono stanja ispitanika; BAS – stavke koje odražavaju BAS komponentu i aproksimiraju promociiono stanje ispitanika; R – inverzno definisane stavke.

Izvor: preuzeto iz Haws et al. (2010).

7.4.2 Analiza efekata situacionog regulacionog fokusa na cenovnu osetljivost tražnje

U ovom delu istraživanja razvijen je model u cilju testiranja hipoteza H1, H2, H3. Najpre su testirane hipoteze prema kojima energičnost muzičke numere kojoj je ispitanik izložen smanjuje cenovnu osetljivost tražnje, ukoliko ispitanici nisu značajno motivisani u obrađivanju informacije prilikom izbora proizvoda (H1 i H2). Nakon toga je testirana hipoteza prema kojoj je prediktivna moć modela koji koristi neurološke metrike veća u odnosu na model koji samo uzima u obzir veštačke varijable muzičkih stimulusa (H3).

7.4.2.1 Specifikacija modela i metoda

Pojedinac $i \in 1: I$ bira između ponuđenih opcija $j \in 1: J$ u zadatku izbora $t \in 1: T$. Svaki opcija generiše korisnost u skladu sa linearnom kombinacijom atributa. Parcijalne korisnosti β variraju među pojedincima. Model korisnosti prema kome ispitanici biraju ponuđene opcije je dat izrazom:

$$u_{itj} = [BezIzbora_{tj}; Brend_{tj}; ZemljaPorekla_{tj}; Cena_{tj}; Cena_{tj} \cdot \lambda_{tj}] \beta_i \quad (7.6)$$

Svaki atribut u uglastoj zagradi je matrica sa kolonama koje predstavljaju varijable u modelu. Sve varijable su kodirane kao varijable efekata (engl. *effects coding*), dok je varijabla cena centrirana srednjom vrednošću i skalirana standardnom devijacijom. Strukturu varijabli modela H1 i H2 predstavlja

Tabela 7.19.

Tabela 7.19 Varijable korišćene u modelima H1 i H2

Atribut*	Varijable u modelu H1**	Varijable u modelu H2***
Bez izbora	Bez izbora	Bez izbora
Brend	Eight o'clock	Eight o'clock
Brend	Luccari	Luccari
Tip posluživanja	Bez slike	Bez slike
Zemlja proizvodnje	Brazil	Brazil
Zemlja proizvodnje	Italija	Italija
Cena	Metrička varijabla	Metrička varijabla
Cena·λ ₁	Cena·Stimulus1	Cena·FA·EP
Cena·λ ₂	Cena·Stimulus2	Cena·FA
Cena·λ ₃	/	Cena·EP

*Sve nemetričke varijable su kodirane kao varijable efekata (engl. effect coding), dok je cena standardizovana.

**Stimulus1 se odnosi na muzičku numeru sporijeg ritma; Stimulus2 se odnosi na numeru brzog ritma.

***FA – frontalna asimetrija; EP – emocionalna pobuđenost.

Cenovna osetljivost tražnje kod testiranja H1 se može predstaviti izrazom:

$$\text{Cenovna osetljivost tražnje} = \beta_{gl. cenovni\ efekat} + \beta_{ef. prevenc. fokusa} \cdot \text{Stim1} + \beta_{ef. promocij. fokusa} \cdot \text{Stim2} \quad (7.7)$$

dok kod H2 imamo da je:

$$\text{Cenovna osetljivost tražnje} = \beta_{gl. cenovni\ efekat} + (\beta_{efekat\ regulacionog\ fokusa} + \beta_{efekat\ involviranosti} \cdot \text{FA}) \cdot \text{EP} \quad (7.8)$$

Verovatnoća niza izbora osobe i je definisana u skladu sa logit modelom koristeći softmax funkciju veze korisnosti i i verovatnoće izbora, gde (j) predstavlja izabranu opciju tokom zadatka izbora t , odnosno:

$$L(\mathbf{y}_i | \boldsymbol{\beta}_i) = \prod_t p_{it(j)} \quad (7.9)$$

$$p_{it(j)} = \frac{\exp(u_{it(j)})}{\sum_{j=1}^4 \exp(u_{itj})} \quad (7.10)$$

Preferencije pojedinaca su definisane kroz parcijalne korisnosti koje prate apriornu multivarijacionu normalnu raspodelu sa vektorskim parametrom lokacije $\boldsymbol{\beta}$. Kovarijaciona matrica je definisana kroz parametrizaciju koja podrazumeva korelacionu matricu $\boldsymbol{\Omega}$ i vektorske parametre skaliranja $\boldsymbol{\tau}$. Ovakva parametrizacija omogućava lakše ocenjivanje hijerarhijskih modela, naročito u slučaju izražene heterogene strukture pojedinačnih preferencija (Betancourt & Girolami, 2013).

$$\boldsymbol{\beta}_i \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}, \text{diag}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\Omega} \text{diag}(\boldsymbol{\tau})) \text{ za } i = 1, 2, \dots, I \quad (7.11)$$

Parametar lokacije $\boldsymbol{\beta}$ prati apriornu studentovu raspodelu sa tri stepena sloboda. Ovaj izbor je pravdan činjenicom da dok deblji repovi omogućavaju fleksibilnije ocenjivanje, oni ipak ne bi trebalo da budu previše debeli kako ne bi došlo do problema prilikom ocenjivanja, kao što je to slučaj kod problema separacije (Ghosh et al., 2018). Korelaciona matrica prati LKJ apriornu raspodelu sa parametrom oblika jednakim 2. U slučaju potrebe za neinformativnom raspodelom bira se parametar 1 koji daje uniformnu raspodelu u dozvoljenom prostoru korelacionih matrica. Veće vrednosti favorizuju jediničnu korelacionu

matricu. Vektorski parametar skaliranja τ prati pozitivno odsečenu studentovu raspodelu po istom principu kao i parametar β .

$$\beta \sim T(3, \mu, \text{diag}(1)), \quad \Omega \sim LKJ\text{corr}(2), \quad \tau \sim T^+(3, 0, \text{diag}(1)) \quad (7.12)$$

Hiperparametarski vektor β ima apriorno definisan parametar lokacije iz predistraživanja datu izrazom (7.13). Jasno je da zbog testiranja hipoteza imamo dodatne parametre koji odražavaju efekte regulacionog fokusa. Kako te parametre koristimo u testiranju hipoteza, oni su definisani nulama (7.14).

$$\mu = [-4,06; -0,44; -0,08; -0,64; -0,21; 0,41; -0,58; \mathbf{0}^{\text{model H1 ili H2}}] \quad (7.13)$$

$$\mathbf{0}^{\text{model H1}} = [0; 0]; \quad \mathbf{0}^{\text{model H2}} = [0; 0; 0] \quad (7.14)$$

Listing 7.1 Kod modela H1 i H2 u Stan programskom jeziku.

```

1  data {
2    int N; // broj redova
3    int T; // broj zadataka
4    int I; // broj ispitanika
5    int P; // broj varijabli
6
7    vector<lower = 0, upper = 1>[N] choice; // varijabla izbora
8    matrix[N, P] X; // matrica sa atributima/varijablama
9
10   int task[T]; // broj pitanja/zadatke
11   int task_individual[T]; // index ispitanika u zavisnosti od zadatka
12   int start[T]; // red u bazi gde pocinje pitanje
13   int end[T]; // red u bazi gde se zavrsava pitanje
14 }
15 parameters {
16   vector[P] beta; // hiperparametri parcijalnih korisnosti
17   vector<lower = 0>[P] tau; // dijagonalni elementi kovarijacione matrice
18   individualnih parcijalnih korisnosti
19   matrix[I, P] z; // pomocna varijabla za transformaciju kod parametrizacije
20   cholesky_factor_corr[P] L_Omega;
21 }
22 transformed parameters {
23   // parametrizacija koja omogucava ocenjivanje hijerarhijskog modela
24   matrix[I, P] beta_individual = rep_matrix(beta', I) +
25   z*diag_pre_multiply(tau, L_Omega)';
26 }
27 model {
28   // lokalno definisana varijabla - samo u ovom bloku
29   vector[N] log_prob;
30
31   // apriorne raspodele
32   tau ~ student_t(3, 0, 1);
33   beta ~ student_t(3, [-4.06, -0.44,
34   -0.08, -0.64, -0.21,
35   0.41, -0.58,
36   0,0,0], 1); // u zavisnosti od modela H1 ili H2 bice dve, odnosno tri nule
37   to_vector(z) ~ normal(0, 1);
38   L_Omega ~ lkj_corr_cholesky(2);
39
40   // racunanje log verovatnoca svake opcije iz svakog zadatka

```

```

39   for(t in 1:T) {
40     log_prob[start[t]:end[t]] =
log(softmax(X[start[t]:end[t]]*beta_individual[task_individual[t]]));
41   }
42
43   // konacna funkcija verodostojnosti
44   target += log_prob' * choice;
45 }

```

Kod poređenja modela najpre je korišćen metod *log aposteriorne prediktivne raspodele* (engl. *log pointwise predictive distribution*; u nastavku LPD) nad opserviranim podacima. Ovaj metod podrazumeva ocenjivanje i testiranje modela na istim podacima zbog čega daje optimistične rezultate. Neka je sa S predstavljen broj iteracija korišćen za ocenjivanje modela, \mathbf{M}_H model sa ocenjenim parametrima u slučaju hipoteze H , n broj opservacije, y realizovane vrednosti zavisne promenljive i \mathbf{D} skup opservacija objašnjavajućih varijabli korišćen za ocenjivanje \mathbf{M}_H . Onda imamo da je

$$\widehat{LPD}_{n, \mathbf{M}_H} = \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_n | \mathbf{D}, \mathbf{M}_H) \right) \quad (7.15)$$

$$\widehat{LPD}_{\mathbf{M}_H} = \sum_{n=1}^N \widehat{LPD}_{n, \mathbf{M}_H} \quad (7.16)$$

Mera koja ima veću eksternu validnost je metod *10-slojne unakrsne validacije za ocenjivanje očekivane log aposteriorne prediktivne raspodele* (engl. *expected log pointwise predictive distribution*; u nastavku ELPD) modela koje poredimo. Uvodimo oznaku \mathbf{D}^{-k} koja predstavlja skup opservacija bez podskupa k za ocenjivanje modela \mathbf{M}_H^{-k} i y_n^k realizovanu vrednost n -te opservacije zavisne varijable iz podskupa k .

$$\widehat{ELPD}_{n, \mathbf{M}_H} = \log \left(\frac{1}{S} \sum_{s=1}^S p(y_n^k | \mathbf{D}^{-k}, \mathbf{M}_H^{-k}) \right) \quad (7.17)$$

$$\widehat{ELPD}_{\mathbf{M}_H} = \sum_{n=1}^N \widehat{ELPD}_{n, \mathbf{M}_H} \quad (7.18)$$

Listing 7.2 Kod modela za testiranje prediktivnosti modela H1 i H2 u Stan programskom jeziku korišćenjem LPD metoda.

```

1 generated quantities {
2   vector[N] log_prob;
3   vector[N] log_lik;
4   for(t in 1:T) {
5     log_prob[start[t]:end[t]] =
log(softmax(X[start[t]:end[t]]*beta_individual[task_individual[t]]));
6   }
7   log_lik = log_prob .* choice;
8   }

```

Da bi metod unakrsne validacije mogao biti korišćen, trebalo je modifikovati originalni model tako da uzme u obzir parcijalno korišćenje uzorka, za testiranje i za validaciju.

Listing 7.3 Kod modela za testiranje prediktivnosti modela H1 i H2 u Stan programskom jeziku korišćenjem ELPD metoda.

```

1  data {
2    int N;
3    int N_train; // redovi baze koji se koristi za treniranje modela
4    int T_train; // zadaci korisćeni za treniranje modela
5    int T;
6    int I;
7    int P;
8    int brojac_log_prob_train[T_train];
9    vector<lower = 0, upper = 1>[N_train] choice_train; // vektor izbora korisćen
za treniranje modela
10   matrix[N, P] X;
11   int task_individual[T];
12   int start[T];
13   int end[T];
14
15   int N_test;
16   int T_test;
17   int brojac_log_prob_test[T_test];
18   vector<lower = 0, upper = 1>[N_test] choice_test;
19 }
20 parameters {
21   vector[P] beta;
22   vector<lower = 0>[P] tau;
23   matrix[I, P] z;
24   cholesky_factor_corr[P] L_Omega;
25 }
26 transformed parameters {
27
28   matrix[I, P] beta_individual = rep_matrix(beta', I) +
z*diag_pre_multiply(tau, L_Omega)';
29 }
30 model {
31
32   vector[N_train] log_prob_train;
33
34   // apriorne raspodele
35   tau ~ student_t(3, 0, 1);
36   beta ~ student_t(3, [-4.06,   -0.44,
37   -0.08,   -0.64,   -0.21,
38   0.41, -0.58,
39   0,0,0], 1);
40   to_vector(z) ~ normal(0, 1);
41   L_Omega ~ lkj_corr_cholesky(2);
42
43   // log verovatnoće
44   for(t in 1:T_train) {
45     log_prob_train[start[t]:end[t]] =
log(softmax(X[start[brojac_log_prob_train[t]]:end[brojac_log_prob_train[t]]]*
46     beta_individual[task_individual[brojac_log_prob_train[t]]]'));
47   }

```

```

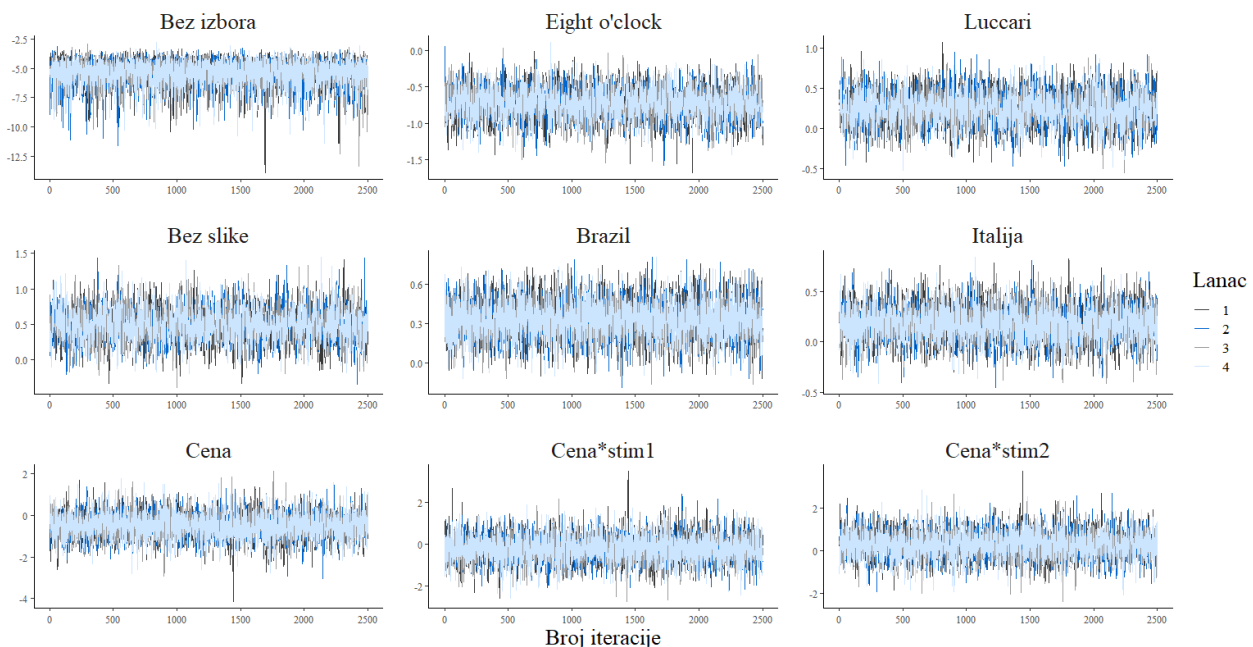
48
49 // konacna log funkcija verodostojnosti za ocenivanje modela
50 target += log_prob_train' * choice_train;
51 }
52 generated quantities { // deo koda koji se odnosi na reprodukciju uzoraka sa
setom podataka za testiranje
53   vector[N_test] log_prob_test;
54   vector[N_test] log_lik_test;
55   for(t in 1:T_test) {
56     log_prob_test[start[t]:end[t]] =
log(softmax(X[start[brojac_log_prob_test[t]]:end[brojac_log_prob_test[t]]]*
57 beta_individual[task_individual[brojac_log_prob_train[t]]]));
58   }
59   log_lik_test = log_prob_test .* choice_test; // vektor vrednosti log
funkcije verodostojnosti za svaki zadatak sa ponudnim opcijama kafe
60 }

```

7.4.2.2 Provera validnosti modela za testiranje hipoteze H1

Prilikom provere validnosti korišćeni su različiti metodi koji imaju za cilj da ispituju konvergenciju dobijenih ocena, kao i njihovu robustnost u odnosu na različito definisane apriorne raspodele. Bitno je naglasiti da ocenjeni model sadrži veliki broj ocenjenih parametara, tako da nije moguće svaki pojedinačno ispitivati. Akcenat je stavljen na parcijalne korisnosti, odnosno parametre β i β_i . Broj iteracija koji je korišćen je iznosio 20.000, od čega je polovina korišćena za zagrevanje modela (engl. *warm up period*), a ostatak na ocenjivanje (engl. *post-warm up*).

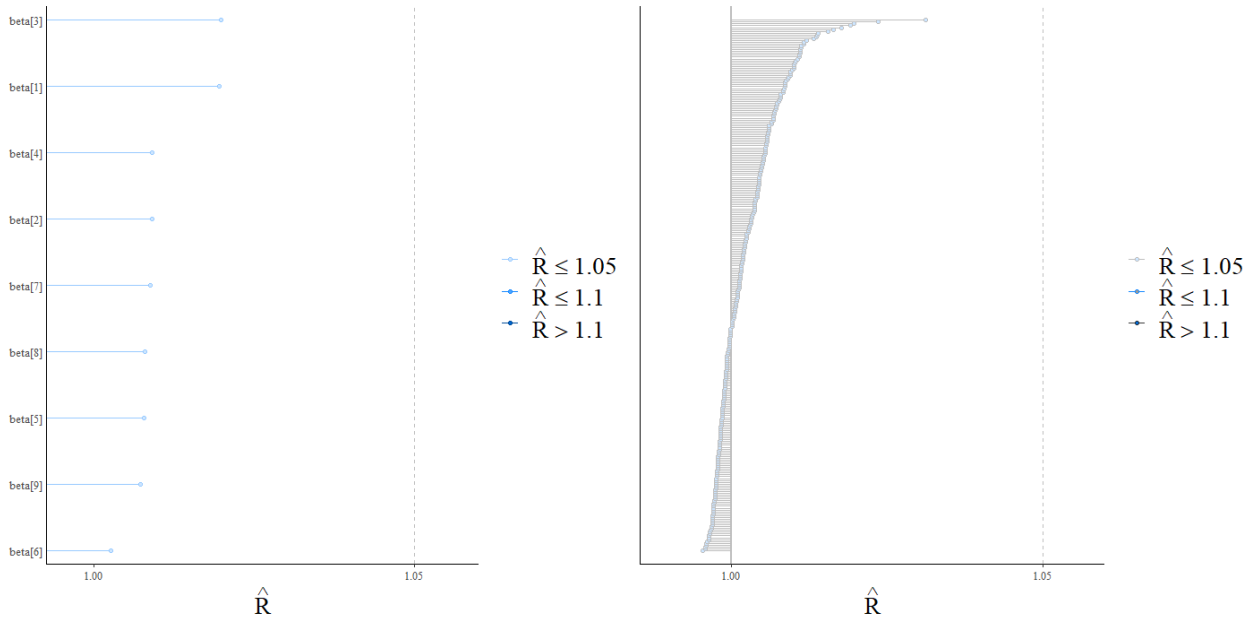
Posmatranje dijagrama traga za hiperparametre parcijalnih korisnosti pokazuje je da svi naliče na oblik gusenice što sugerise dobro mešanje lanaca. Izdvaja se hiperparametar za atribut “Bez izbora” koji nema tako dobro mešanje Markovljevih lanaca. Razlog za to je što je malo ispitanika biralo ovu opciju.



Slika 7.13 Dijagram traga za beta hiperparametre.

Izvor: kalkulacija autora.

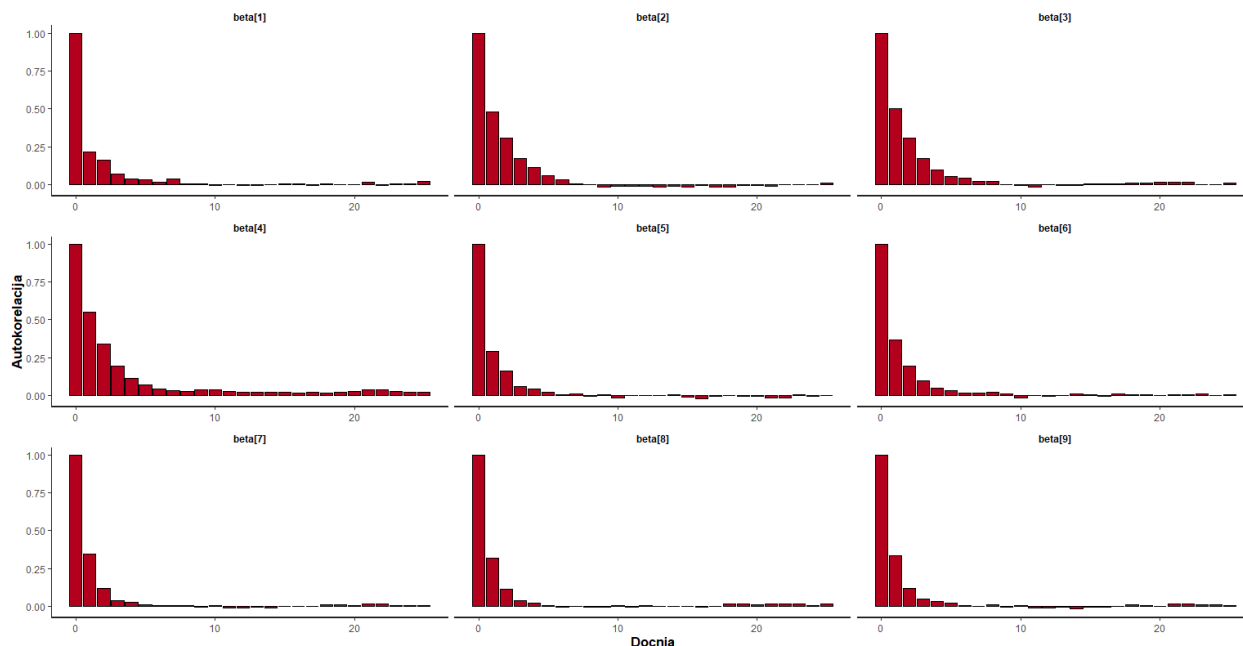
Gelman-Rubinova statistika predstavlja meru konvergencije Markovljevih lanaca. Vrednosti preko 1,1 govore o slabom mešanju. Slika 7.14 daje prikaz Gelman-Rubinovih statistika za sve parcijalne korisnosti, β i β_i . Vidimo da ni jedan parametar ne prelazi vrednost od 1,05.



Slika 7.14 Gelman-Rubinova statistika \hat{R} . Levo: \hat{R} za hiperparametre parcijalnih korisnosti svih atributa (9 hiperparametara); Desno: \hat{R} za parametre parcijalnih korisnosti pojedinačnih ispitanika (32·9 parametara).

Izvor: kalkulacija autora.

Autokorelacija govori o efikasnosti pretraživanja. Visoka autokorelacija znači da je pretraživanje aposteriornog prostora neefikasno. Kod hiperparametara parcijalnih korisnosti vidi se da autokorelacija nestaje posle 10-te docnje.



Slika 7.15 Autokorelacija za hiperparametre parcijalnih korisnosti.

Izvor: kalkulacija autora.

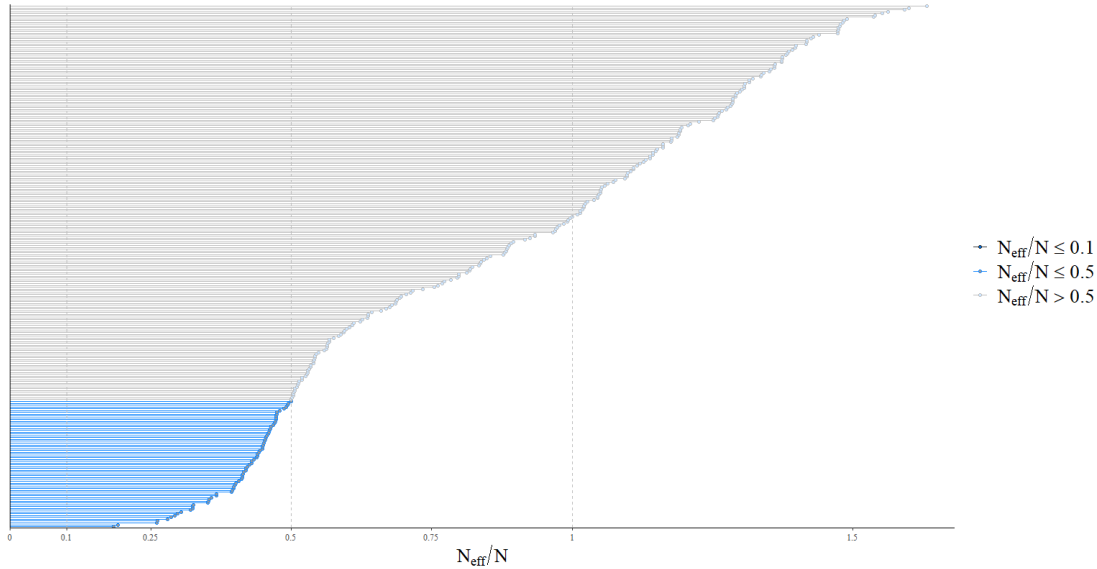
Efektivni uzorak aproksimativno prikazuje koliko je informativan uzorak koji je dobijen iz korišćenih 10.000 aposteriornih iteracija. Ako bi svi uzorci bili nezavisni, onda bismo imali nultu autokorelaciju i efikasno pretražen aposterioran prostor parametara. Gruba mera efikasnosti HMC algoritma je da je količnik efektivnog uzorka i broja iteracija veći od 0,1 (Gabry & Mahr, 2022). U nastavku ćemo ovaj odnos efektivnog uzorka i broja iteracija nazvati relativno efektivnim uzorkom. Iz priložene tabele se vidi da svi hiperparametri parcijalne korisnosti imaju relativni efektivni uzorak veći od 0,1.

Tabela 7.20 Ocene efektivnih uzoraka (apsolutna i relativna mera*) za hiperparametre parcijalnih korisnosti.

Atribut	N efekt. ^{apsol.}	N efekt. ^{relativ.}
Bez izbora	4632,38	0,46
Eight o'clock	3000,23	0,30
Luccari	2888,36	0,29
Bez slike	2130,92	0,21
Brazil	4493,54	0,45
Italija	3880,18	0,39
Cena	4738,70	0,47
Cena-stim1	5049,84	0,50
Cena-stim2	4720,34	0,47

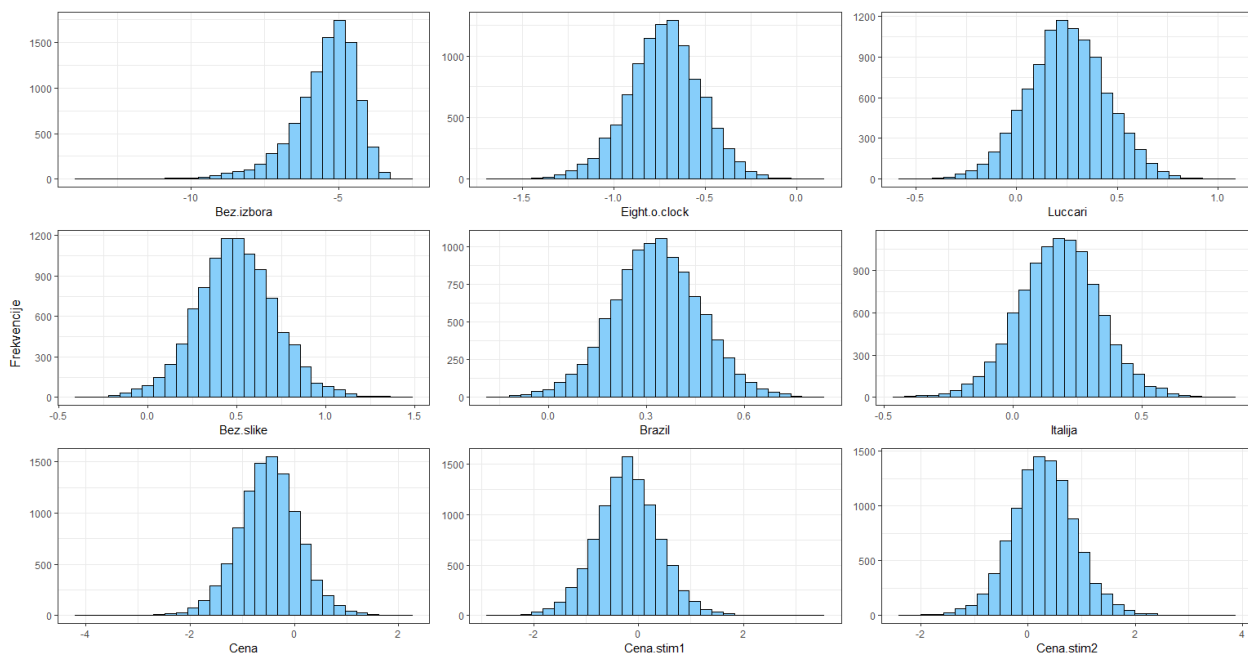
*Relativna mera efektivnog uzorka dobijena je kao količnik apsolutne mere i broja iteracija. Izvor: kalkulacija autora.

Parametre parcijalne korisnosti pojedinačnih ispitanika je najlakše sagledati grafički (Slika 7.16). Svi parametri imaju relativan efektivan uzorak veći od 0,1.



Slika 7.16 Relativna mera efektivnog uzorka za parametre parcijalnih korisnosti svih atributa pojedinačnih ispitanika (32x9 parametara).
Izvor: kalkulacija autora.

Histogrami hiperparametara daju vizuelni prikaz oblika raspodele. Prilikom testiranja je od važnosti da ove raspodele budu unimodalne, što je slučaj sa svih 9 hiperparametara. Primetno je da je samo hiperparametar atributa „Bez izbora“ sa asimetričnom raspodelom. Međutim, on nije od velikog značaja za ovo istraživanje.



Slika 7.17 Histogrami raspodela hiperparametara parcijalnih korisnosti.
Izvor: kalkulacija autora.

7.4.2.2.1 Analiza senzitivnosti modela za testiranje H1

Prilikom analize senzitivnosti modela korišćena su dva alternativna modela sa drugačije definisanim apriorni raspodelama. Glavni model (u nastavku M1) je poređen sa više informativnim/restriktivnijim modelom (u nastavku M2) i manje informativnim/fleksibilnijim modelom (u nastavku M3) modelom. M2 koristi restriktivnije apriorne raspodele. Hiperparametri β i τ umesto studentove, prate normalnu raspodelu (studentova sa beskonačno stepeni slobode) koja ima znatno oštrije repove i na taj način više restriktivna po pitanju dobijanja ocena koje odstupaju od lokacije raspodele. Korelaciona matrica ima parametar oblika jednak 5, što znači da će model favorizovati nulte korelacione koeficijente između parcijalnih korisnosti.

$$\beta \sim \mathcal{N}(\mu, \text{diag}(\mathbf{1})), \quad \Omega \sim \text{LKJcorr}(5), \quad \tau \sim \mathcal{N}^+(\mathbf{0}, \text{diag}(\mathbf{1})) \quad (7.19)$$

M3 koristi fleksibilnije apriorne raspodele, što omogućava da podaci imaju veće pravo glasa prilikom ocenjivanja modela. Hiperparametri β i τ prate studentovu raspodelu sa duplo većim parametrom skaliranja u odnosu na M1 model. Vektorski parametar lokacije kod parcijalnih korisnosti biće nulti vektor, što znači da će informacije iz predistraživanja biti ignorisane.

$$\beta \sim T(\mathbf{3}, \mathbf{0}, \text{diag}(\mathbf{2})), \quad \tau \sim T^+(\mathbf{3}, \mathbf{0}, \text{diag}(\mathbf{2})) \quad (7.20)$$

Rezultati koje prikazuje Tabela 7.21 sugerišu da je glavni model, M1, u odnosu na više restriktivni model M2 relativno robustan. Međutim, fleksibilniji model M3 dosta varira u odnosu na M1. Ovo je naročito izraženo kod parametara interakcije (Cena·stim1 i Cena·stim2) koji su od ključnog interesa. To nam govori da su apriorne informacije dobijene iz predistraživanja bitne prilikom ocenjivanja modela i da u dobroj meri utiču na rezultate testiranja hipoteza.

Tabela 7.21 Analiza senzitivnosti hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Atribut	M1	M2	$\frac{ M1 - M2 }{M1}$	M3	$\frac{ M1 - M2 }{M1}$
Bez izbora	-5,44	-4,93	9,38%	-7,07	29,96%
Eight o'clock	-0,72	-0,73	1,39%	-0,74	2,78%
Luccari	0,24	0,28	16,67%	0,26	8,33%
Bez slike	0,52	0,48	7,69%	0,55	5,77%
Brazil	0,33	0,32	3,03%	0,34	3,03%
Italija	0,18	0,18	0%	0,17	5,56%
Cena	-0,51	-0,49	3,92%	-0,29	43,14%
Cena·stim1	-0,21	-0,23	9,52%	-0,44	109,52%
Cena·stim2	0,30	0,28	6,67%	0,08	73,33%

M1 – osnovni model; M2 – restriktivniji model; M3 – fleksibilniji model.

Izvor: kalkulacija autora.

7.4.2.3 Rezultati i diskusija – hipoteza H1

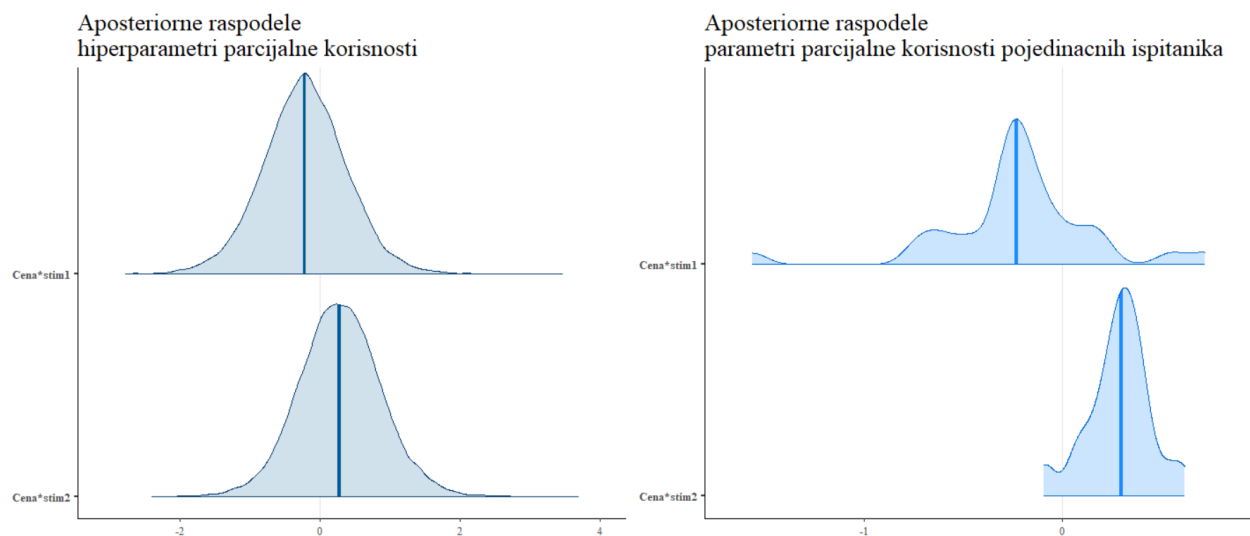
Dobijene ocene parcijalnih korisnosti prikazuje Tabela 7.22. Kod brendova neatraktivni brend *Eight o'clock* ima najmanju korisnost, dok najveću korisnost ima ekskluzivni brend *Luccari*. Espresso poslužen sa Latte artom (sa slikom) ima veću korisnost nego bez slike. Espresso proizveden u Italiji ili Brazilu ima veću korisnost nego ako je proizveden u Srbiji. Cena, definisana kao metrička varijabla, ima negativan predznak, kao što smo i očekivali. Sveukupno posmatrano, rezultati idu u prilog logičkoj validnosti modela.

Tabela 7.22 Ocene hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Atribut	prosek	2,5%	25%	50%	75%	97,5%
Bez izbora	-5,46	-8,27	-6,00	-5,25	-4,7	-3,85
Eight o'clock	-0,72	-1,14	-0,85	-0,72	-0,59	-0,34
Luccari	0,25	-0,14	0,12	0,25	0,38	0,63
Bez slike	0,50	0,06	0,35	0,49	0,64	0,94
Brazil	0,33	0,06	0,24	0,33	0,42	0,59
Italija	0,18	-0,13	0,07	0,18	0,28	0,50
Cena	-0,49	-1,65	-0,86	-0,49	-0,12	0,65
Cena*stim1	-0,22	-1,42	-0,60	-0,22	0,17	0,99
Cena*stim2	0,29	-0,87	-0,09	0,28	0,67	1,48

Izvor: kalkulacija autora.

Hipoteza H1 pretpostavlja da će cenovna osetljivost biti pojačana kod muzičke numere sporijeg tempa, dok će biti smanjena kod muzike bržeg tempa. Prilikom testiranja analizirane su raspodele parametara uz Cena*stim1, odnosno interakciju cene i sporijeg muzičkog stimulusa, kao i uz Cena*stim2, odnosno interakcije cene i bržeg muzičkog stimulusa. Slika 7.18 pokazuje da predznaci koeficijenata idu u smeru potvrđivanja hipoteza. U prvoj koloni se nalaze aposteriorne raspodele hiperparametara. Sredina raspodele Cena*stim1 je manja od nule, ali dobar deo raspodele se nalazi na pozitivnoj strani. Proporcije prikazuje Tabela 7.23. Vidimo da se 65% raspodele nalazi sa leve strane u odnosu na nulu. Kod Cena*stim2 je rezultat malo izraženiji u prilog pozitivnim vrednostima, odnosno 70% vrednosti je veće od nule. Desna kolona predstavlja raspodelu parcijalnih korisnosti pojedinačnih ispitanika, odnosno raspodelu medijana β_i , kao robusne mere centralne tendencije. Rezultati su u saglasnosti sa raspodelama hiperparametara, ali znatno ubedljiviji. Vrednost parcijalne korisnosti je kod 81% ispitanika manja od nule u slučaju sporije numere, dok je kod brže numere 94% ispitanika imalo pozitivnu vrednost parcijalne korisnosti.



Slika 7.18 Aposteriorne raspodele parcijalnih korisnosti. U prvom redu se nalaze gustine raspodele koeficijenta interakcije cene i prvog stimulusa (muzika sporog ritma), a u drugom interakcije cene i drugog stimulusa (muzika brzog ritma).

Izvor: kalkulacija autora.

Tabela 7.23 Proporcija negativnih vrednosti aposteriornih raspodela

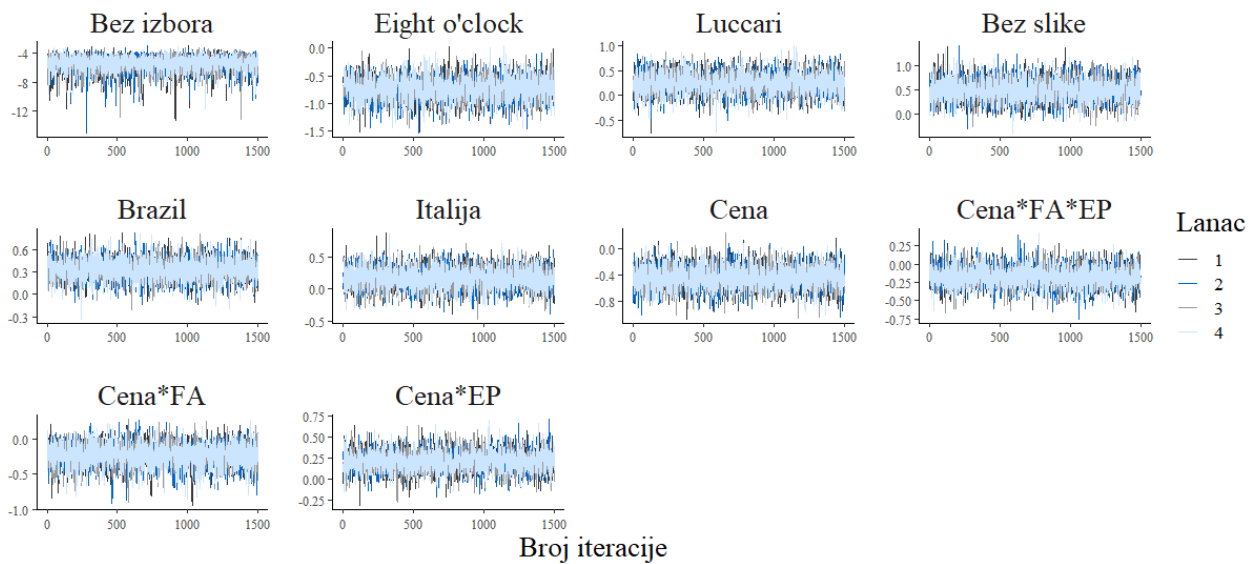
Numera	Cena:stim1	Cena:stim2
Hiperparametri	0,65	0,30
Pojedinačni ispitanici	0,81 (13/16)	0,06 (1/16)

Dobijeni rezultati govore u prilog hipotezi H1. Muzika sporog tempa je kod 81% ispitanika povećavala senzitivnost na cenu, dok je kod muzike bržeg tempa kod 94% ispitanika smanjivalo senzitivnost prema ceni.

7.4.2.4 Provera validnosti modela za testiranje hipoteze H2

Broj iteracija koji je korišćen je iznosio 12000, koliko je bilo potrebno da se stabilizuju dobijene ocene. Polovina iteracija je korišćena za period zagrevanja modela (engl. *warm-up period*), dok je ostatak korišćen za ocenjivanje aposteriornih raspodela.

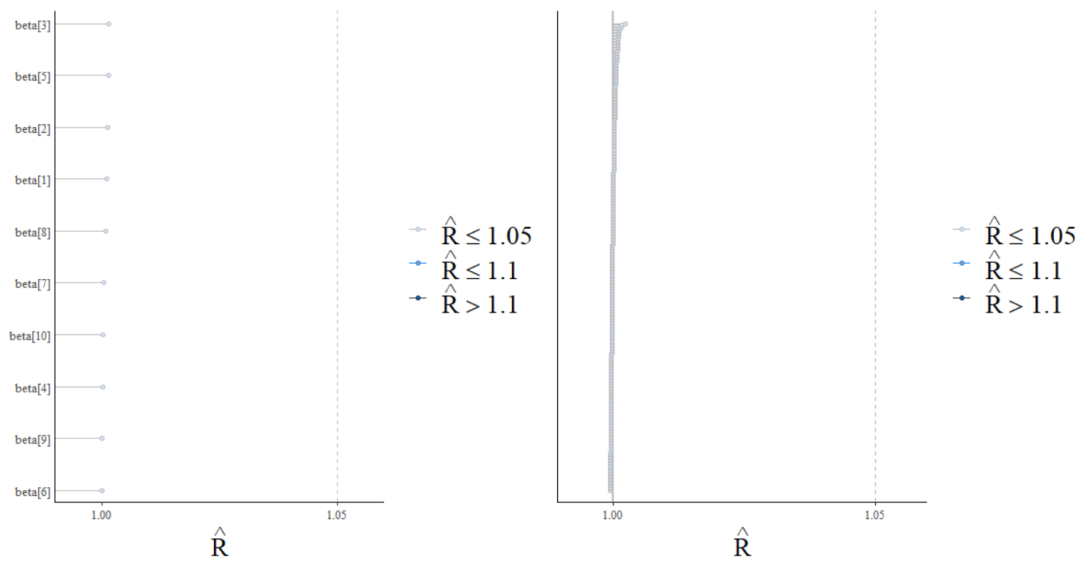
Posmatranjem dijagrama traga, osim atributa “Bez izbora”, svi hiperparametri parcijalnih korisnosti imaju oblik čupave gusenice što sugeriše dobro mešanje lanaca.



Slika 7.19 Dijagram traga za beta hiperparametre.

Izvor: kalkulacija autora.

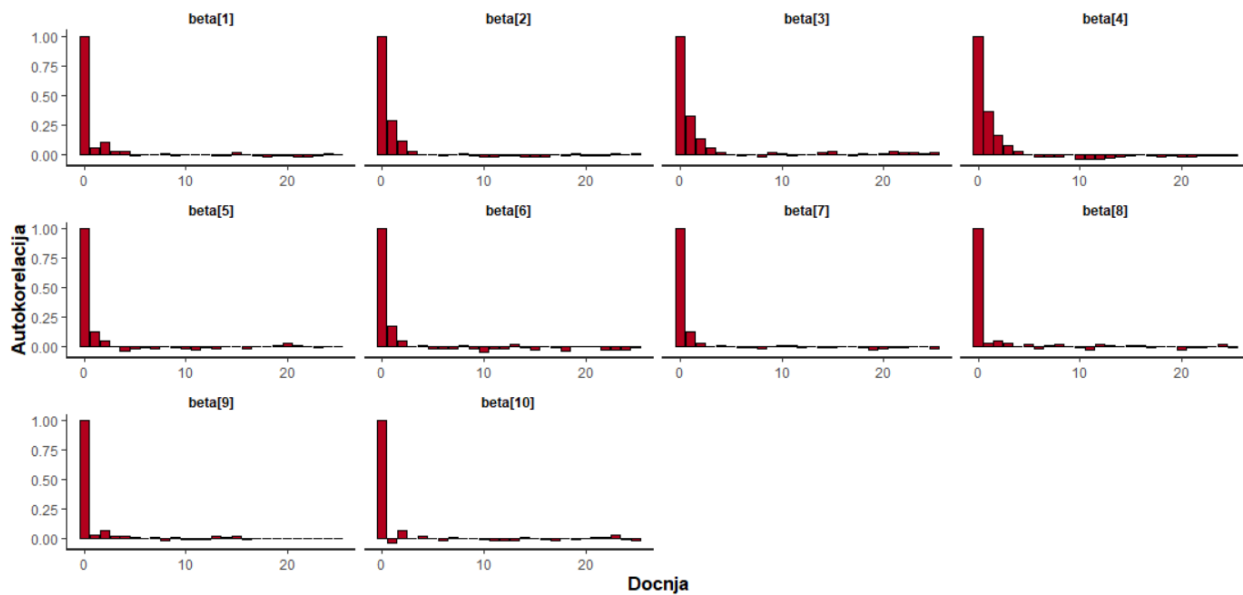
Gelman-Rubinova statistika je manja od 1,05 za sve parametre i hiperparametre parcijalnih korisnosti.



Slika 7.20 Gelman-Rubinova statistika \hat{R} . Levo: \hat{R} za hiperparametre parcijalnih korisnosti svih atributa (10 hiperparametara); Desno: \hat{R} za parametre parcijalnih korisnosti pojedinačnih ispitanika (32·10 parametara).

Izvor: kalkulacija autora.

Autokorelacija se ne zadržava dugo, i već posle 5 docnja iščezava kod svih hiperparametara.



Slika 7.21 Autokorelacija za hiperparametre parcijalnih korisnosti.

Izvor: kalkulacija autora.

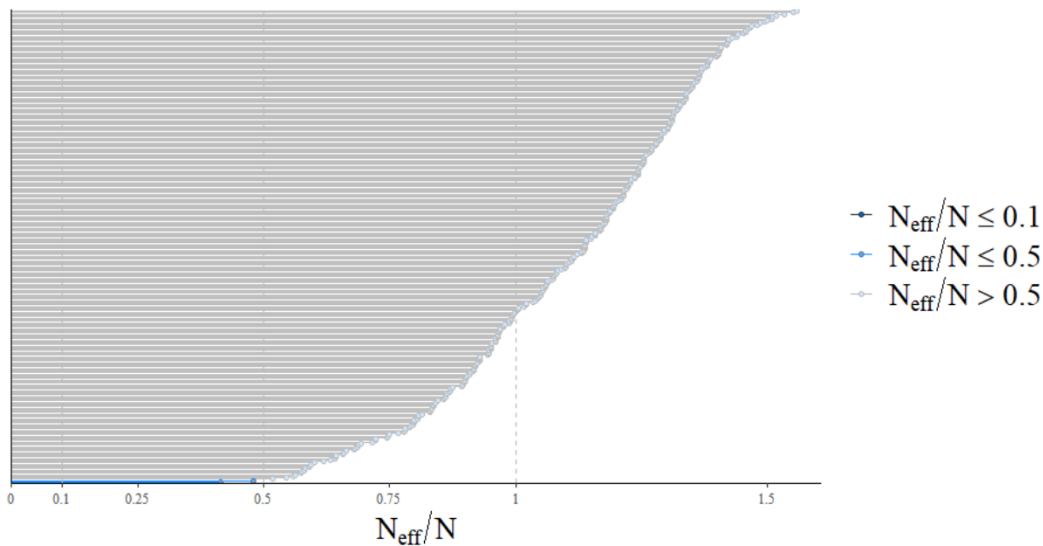
Sledstveno tome, efektivni uzorci imaju dobar količnik, odnosno relativni efektivni uzorci su visoki za hiperparametre parcijalnih korisnosti. Ovo sugeriše visoku efikasnost u ocenjivanju modela.

Tabela 7.24 Ocene efektivnih uzoraka (apsolutna i relativna mera*) za hiperparametre parcijalnih korisnosti.

Atribut	$N_{\text{efekt.}}^{\text{apsol.}}$	$N_{\text{efekt.}}^{\text{relativ.}}$
Bez izbora	3814,12	0,64
Eight o'clock	3103,08	0,52
Luccari	2855,59	0,48
Bez slike	2623,42	0,44
Brazil	4361,11	0,73
Italija	4126,08	0,69
Cena	4438,58	0,74
Cena·FA·EP	4752,78	0,79
Cena·FA	4397,74	0,73
Cena·EP	5311,39	0,89

*Relativna mera efektivnog uzorka dobijena je kao količnik apsolutne mere i broja iteracija. Izvor: kalkulacija autora.

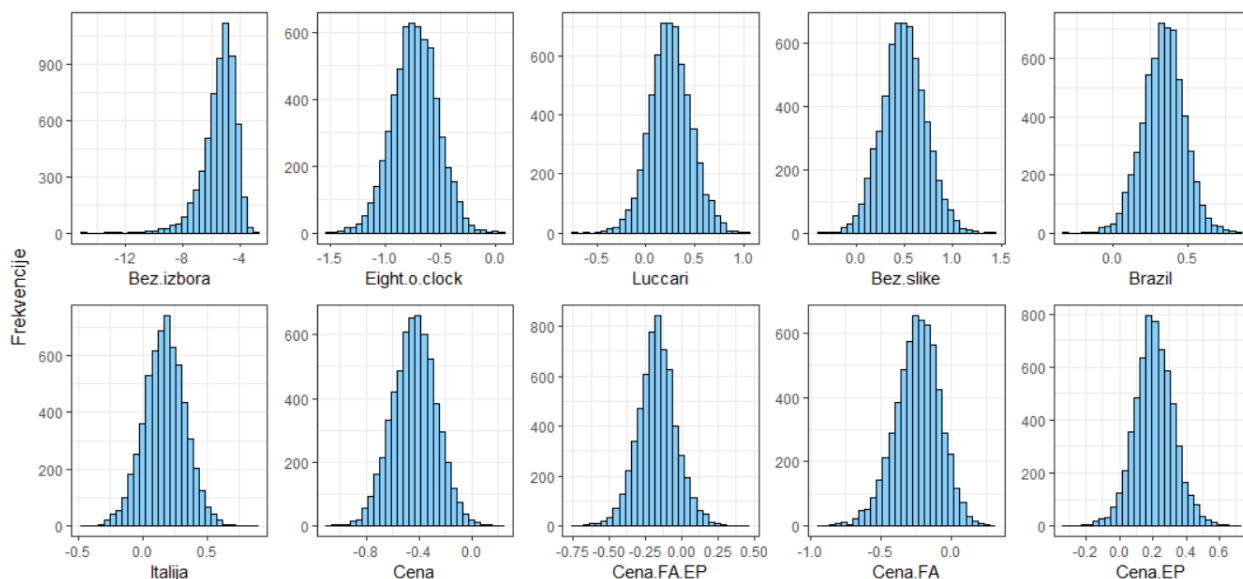
Posmatranjem rezultata koje prikazuje Slika 7.22 može se videti da su relativni efektivni uzorci visoki kod svih parametara parcijalnih korisnosti za sve ispitanike.



Slika 7.22 Relativna mera efektivnog uzorka za parametre parcijalnih korisnosti svih atributa pojedinačnih ispitanika (32·10 parametara).

Izvor: kalkulacija autora.

Osim atributa “Bez izbora” svi hiperparametri imaju simetrične unimodalne raspodele.



Slika 7.23 Histogrami raspodela hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Izvor: kalkulacija autora.

7.4.2.4.1 Analiza senzitivnosti modela za testiranje H2

Prilikom analize senzitivnosti modela korišćena su dva alternativna modela kao prilikom analize modela za testiranja H1. Glavni model (u nastavku M1) je poređen sa više informativnim/restrikivnijim modelom (u nastavku M2) i manje informativnim/fleksibilnijim modelom (u nastavku M3). M2 koristi restriktivnije apriorne raspodele, dok M3 koristi fleksibilnije apriorne raspodele, slično kao u (7.19) i (7.20).

Rezultati koje prikazuje

Tabela 7.25 sugerišu da je glavni model, M1, u odnosu na model M2 izuzetno robusan, Gotovo da nema razlike kod većine ocena parcijalne korisnosti. U odnosu na model M3 robusnost nije toliko jaka, ali znatno jača nego što je to bio slučaj u delu gde se testira H1.

Tabela 7.25 Analiza senzitivnosti hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Atribut	M1	M2	$\frac{ M1 - M2 }{M1}$	M3	$\frac{ M1 - M3 }{M1}$
Bez izbora	-5,46	-4,90	10,26%	-7,04	28,94%
Eight o'clock	-0,73	-0,74	1,37%	-0,76	4,11%
Luccari	0,25	0,25	0%	0,25	0%
Bez slike	0,49	0,49	0%	0,55	12,24%
Brazil	0,34	0,34	0%	0,35	2,94%
Italija	0,17	0,17	0%	0,17	0%
Cena	-0,44	-0,45	2,27%	-0,44	0%
Cena·FA·EP	-0,17	-0,17	0%	-0,19	11,76%
Cena·FA	-0,24	-0,24	0%	-0,26	8,33%
Cena·EP	0,21	0,21	0%	0,22	4,76%

M1 – osnovni model; M2 – restriktivniji model; M3 – fleksibilniji model.

Izvor: kalkulacija autora.

7.4.2.5 Rezultati i diskusija – hipoteza H2

Analiza ocena koje prikazuje

Tabela 7.26 pokazuje da model ocenjen za potrebe testiranja H2a i H2b prolazi test logičnosti budući da svi hiperparametri imaju logičan predznak. Ocene su dosta slične (ne uzimajući u obzir hiperparametre interakcije) kao kod modela za testiranje H1.

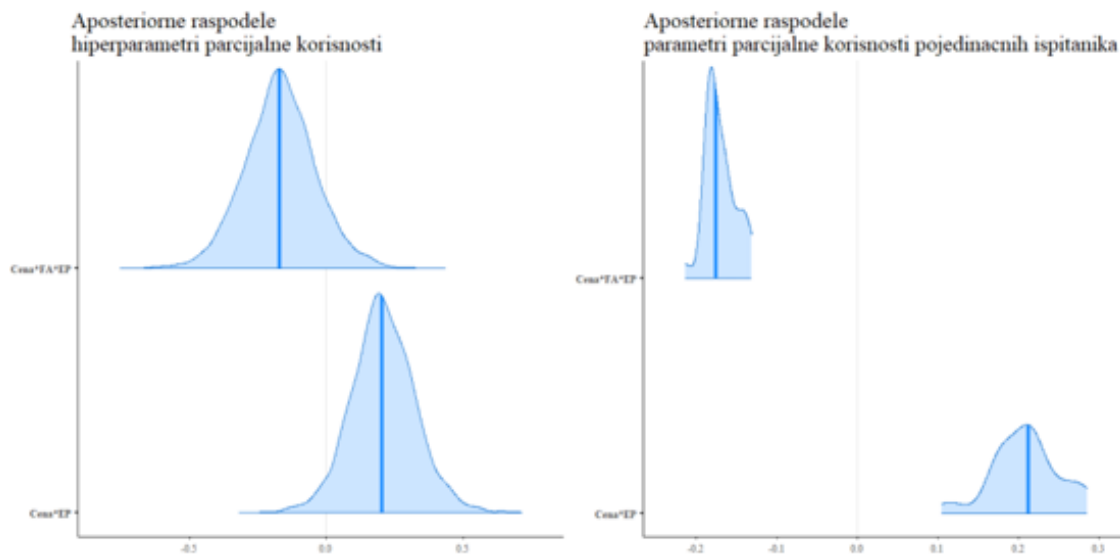
Tabela 7.26 Ocene hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Atribut	prosek	2,5%	25%	50%	75%	97,5%
Bez izbora	-5,46	-8,24	-6,00	-5,25	-4,67	-3,84
Eight o'clock	-0,73	-1,14	-0,87	-0,73	-0,60	-0,34
Luccari	0,25	-0,16	0,11	0,25	0,38	0,67
Bez slike	0,49	0,07	0,35	0,49	0,64	0,95
Brazil	0,34	0,06	0,25	0,34	0,43	0,60
Italija	0,17	-0,15	0,07	0,17	0,28	0,48
Cena	-0,44	-0,77	-0,55	-0,43	-0,33	-0,11
Cena·FA·EP	-0,17	-0,43	-0,25	-0,17	-0,09	0,10
Cena·FA	-0,24	-0,57	-0,34	-0,23	-0,13	0,06
Cena·EP	0,21	-0,02	0,13	0,21	0,28	0,45

Izvor: kalkulacija autora.

Hipoteza H2a pretpostavlja da će cenovna osetljivost biti smanjena prilikom veće emocionalne pobuđenosti. H2b pretpostavlja da će emocionalna pobuđenost imati efekat na cenovnu osetljivost, ako ispitanik nije kognitivno involviran prilikom odlučivanja o izboru proizvoda. Prilikom testiranja analizirane su raspodele parametara uz Cena·EP, odnosno interakcije cene i emocionalne pobuđenosti, kao i parametra uz Cena·FA·EP, odnosno interakcije cene i emocionalne pobuđenosti i frontalne asimetrije. Veće vrednosti frontalne asimetrije znače veću involviranost ispitanika prilikom izbora espresso kafa.

Tabela 7.27 prikazuje proporcije raspodela, dok Slika 7.24 daje vizuelan prikaz. Pozitivne vrednosti raspodele parametra uz Cena·EP govore da sa povećanjem emocionalne pobuđenosti smanjuje se cenovna osetljivost tražnje, uz prosečnu involviranost ispitanika (nulta vrednost FA). Ovaj rezultat je izražen i kod raspodele hiperparametra (96%) i kod raspodele parcijalnih korisnosti medijana pojedinačnih ispitanika (100%). Negativna vrednost raspodele parametra uz Cena·FA·EP govori da sa povećanjem involviranosti ispitanika (veće FA), efekat emocionalne pobuđenost na cenovnu osetljivost se anulira. Ovaj rezultat je takođe pouzdan, odnosno 91% vrednosti je negativno kod raspodele hiperparametra i 100% ispitanika je imalo negativnu medijanu za ovaj parametar).



Slika 7.24 Aposteriorne raspodele parcijalnih korisnosti. U prvom redu se nalaze gustine raspodele koeficijenta interakcije cene, frontalne asimetrije i emocionalne pobuđenosti, a u drugom interakcije cene i emocionalne pobuđenosti.

Izvor: kalkulacija autora.

Tabela 7.27 Proporcija negativnih vrednosti aposteriornih raspodela

Numera	Cena·FA·EP	Cena·EP
Hiperparametri	0,91	0,04
Pojedinačni ispitanici	1,00 (16/16)	0,00 (0/16)

Možemo zaključiti da rezultati govore u prilog hipoteza H2a i H2b, te da sa velikom pouzdanošću možemo reći da emocionalna pobuđenost smanjuje cenovnu osetljivost tražnje u uslovima kada potrošač nije značajno motivisan u obrađivanju informacija prilikom izbora proizvoda.

7.4.2.6 Rezultati i diskusija – hipoteza H3

Prema hipotezi H3, pretpostavka je da će model iz H2 imati bolju prediktivnu validnost, budući da koristi neuromarketiške metrike. Model H1 varijacije u cenovnoj senzitivnosti objašnjava korišćenjem varijabli stimulusa, odnosno varijablama indikatora sporije i brže numere. Kako je pretpostavka da anuliranje cenovne senzitivnosti ide preko mehanizma regulacionog fokusa, koji se manifestuje kroz emocionalnu pobuđenost, onda bi neuromarketiške varijable trebalo da bolje objašnjavaju preferencije ispitanika.

Najpre je korišćen metod *log aposteriorne prediktivne raspodele* (engl. *log pointwise predictive distribution*; u nastavku LPD) nad opserviranim podacima. Ovaj metod podrazumeva ocenjivanje i testiranje modela nad istim podacima zbog čega daje pristrasno veće ocene. Nakon toga je korišćen metod 10-slojne unakrsne validacije za ocenjivanje *očekivane log aposteriorne prediktivne raspodele* (engl. *expected log pointwise predictive distribution*; u nastavku ELPD).

Tabela 7.28 daje ocene *log aposteriorne prediktivne raspodele* (LPD) gde se vidi da model za testiranje H2 ima veću LPD nego model koji testira H1, odnosno -511,3 je veće od -527,9. Standardna greška ocene razlike je jako mala, 3,4. Ovi rezultati govore da model sa neuromarketiškim varijablama bolje objašnjava opservirane podatke.

Tabela 7.28 Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela modela iz H1 i H2

	Ocena	Stand. greška
LPD H1	-527,9	21,8
LPD H2	-511,3	21,5
LPD H1 – LPD H2	16,6	3,4

Tabela 7.29 prikazuje ocene očekivane log aposteriorne prediktivne raspodele (ELPD), kao meru koja ima veću eksternu validnost nego LPD. Model za testiranje H1 ima veću ELPD nego model koji testira H2, odnosno -1350,5 je veće od -1592,5. Razlika u ELPD oba modela ima veliku standardnu grešku, u odnosu na samu razliku, što sugerše da su modeli slične prediktivne moći.

Tabela 7.29 Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela modela iz H1 i H2

	Ocena	Stand. greška
ELPD H1	-1530,5	61,4
ELPD H2	-1592,5	61,1
ELPD H1 – ELPD H2	61,7	81,1

Dakle, hipoteza H3 je samo delimično potvrđena kroz LPD metod. Model korišćen za proveru H2 nije dobio potvrdu eksterne validnosti budući da ELPD sugerše da su modeli H1 i H2 jednake prediktivne moći.

7.4.3 Analiza efekata hroničnog regulacionog fokusa na cenovnu osetljivost tražnje

U ovom delu razvijen je model u cilju testiranja hipoteza H4, H5, H6. Najpre su ispitane hipoteze o efektima hroničnog regulacionog fokusa na cenovnu osetljivost tražnje (H4 i H5). Ovde je regulaciono stanje mereno kroz BIS/BAS skalu (H4) i neuralnim pristupom frontalne asimetrije (H5). Na kraju je testirana hipoteza da model koji koristi neuralnu metriku ima veću prediktivnu moć (H6).

7.4.3.1 Specifikacija modela i metoda

Korišćena je slična specifikacija modela kao u delu 7.4.2.1. U ovom delu analizira se regulaciono stanje koje odražava hroničnu predispoziciju pojedinca pa samim tim muzički stimulusi nisu uključeni u model.

Preferencije pojedinaca su definisane kroz parcijalne korisnosti koje prate apriornu multivarijacionu normalnu raspodelu sa vektorskim parametrom lokacije β koji zavisi od hroničnog regulacionog stanja, predstavljeno vektorom $\mathbf{X2}$ i efektom regulacionog fokusa predstavljenog sa $\mathbf{Cena_RF}$. Kovarijaciona matrica je definisana kroz parametrizaciju koja podrazumeva korelacionu matricu Ω i vektorske parametre skaliranja τ .

$$\beta_i \sim \mathcal{N}(\beta + \mathbf{X2} \cdot \mathbf{Cena_RF}, \text{diag}(\tau)\Omega\text{diag}(\tau)) \text{ za } i = 1, 2, \dots, I \quad (7.21)$$

Parametar lokacije β prati apriornu studentovu raspodelu sa tri stepena sloboda. Korelaciona matrica prati LKJ apriornu raspodelu sa parametrom oblika jednakim 2. Vektorski parametar skaliranja τ prati pozitivno odsečenu studentovu raspodelu po istom principu kao i hiperparametar β .

$$\beta \sim T(\mathbf{3}, \mu, \text{diag}(\mathbf{1})), \quad \Omega \sim \text{LKJcorr}(2), \quad \tau \sim T^+(\mathbf{3}, \mathbf{0}, \text{diag}(\mathbf{1})). \quad (7.22)$$

Hiperparametarski vektor β ima apriorno definisanu lokaciju iz predistraživanja datu vektorom

$$\mu = [-4,06; -0,44; -0,08; -0,64; -0,21; 0,41; -0,58]. \quad (7.23)$$

Listing 7.4 Kod modela H4 i H5 u Stan programskom jeziku.

```
1   data {
2     int N;
3     int T;
4     int I;
5     int P;
6
7     vector<lower = 0, upper = 1>[N] choice;
8     matrix[N, P] X;
9     vector[I] X2; // metrika regulacionog fokusa
10
11    int task_individual[T];
12    int start[T];
13    int end[T];
14  }
15  parameters {
16    real Cena_RF; // parametar uz metriku regulacionog fokusa
17    vector[P] beta;
18    vector<lower = 0>[P] tau;
19    matrix[I, P] z;
20    cholesky_factor_corr[P] L_Omega; 21  }
22  transformed parameters {
23    vector[P] Cena_RF_sa_nulama;
24    matrix[I, P] beta_individual;
25    Cena_RF_sa_nulama = append_row(rep_vector(0.0, P-1), Cena_RF);
26    beta_individual = rep_matrix(beta', I) +
27    X2 * Cena_RF_sa_nulama' + z*diag_pre_multiply(tau, L_Omega)';
28  }
29  model {
30    // lokalni vektor
31    vector[N] log_prob;
32
33    // apriorne raspodele
34    tau ~ student_t(3, 0, 1);
35    beta ~ student_t(3, [-4.06,   -0.44,
36    -0.08,   -0.64,   -0.21,
37    0.41, -0.58], 1);
38    to_vector(z) ~ normal(0, 1);
39    L_Omega ~ lkj_corr_cholesky(2);
40    Cena_RF ~ normal(0, 1); // vektorizovani parametri individualnih efekata
41
42    // log verovatnoce
43    for(t in 1:T) {
44      log_prob[start[t]:end[t]] =
45      log(softmax(X[start[t]:end[t]]*beta_individual[task_individual[t]]));
46    }
47
48    // log funkcija verodostojnosti
49    target += log_prob' * choice;
```

Prilikom poređenja modela najpre je korišćen metod *log aposteriorne prediktivne raspodele* (engl. *log pointwise predictive distribution*; u nastavku LPD) nad opserviranim podacima, a zatim metod 10-slojne unakrsne validacije za ocenjivanje *očekivane log aposteriorne prediktivne raspodele* (engl. *expected log pointwise predictive distribution*; u nastavku ELPD) dva modela koje poredimo. Za potrebe primene metoda LPD, korišćen je programski kod kao u delu 7.4.2.1.

Listing 7.5 Kod modela za testiranje prediktivnosti modela H4 i H5 u Stan programskom jeziku korišćenjem ELPD metoda.

```

1  data {
2    int N;
3    int N_train;
4    int T_train;
5    int T;
6    int I;
7    int P;
8    int brojac_log_prob_train[T_train];
9    vector<lower = 0, upper = 1>[N_train] choice_train;
10   matrix[N, P] X;
11   vector[I] X2;
12
13   int task_individual[T];
14   int start[T];
15   int end[T];
16
17   int N_test;
18   int T_test;
19   int brojac_log_prob_test[T_test];
20   vector<lower = 0, upper = 1>[N_test] choice_test;
21 }
22 parameters {
23   real Cena_RF;
24   vector[P] beta;
25   vector<lower = 0>[P] tau;
26   matrix[I, P] z;
27   cholesky_factor_corr[P] L_Omega;
28 }
29 transformed parameters {
30   vector[P] Cena_RF_sa_nulama;
31   matrix[I, P] beta_individual;
32   Cena_RF_sa_nulama = append_row(rep_vector(0.0, P-1), Cena_RF);
33   beta_individual = rep_matrix(beta', I) +
34   X2 * Cena_RF_sa_nulama' + z*diag_pre_multiply(tau, L_Omega)';
35 }
36 model {
37   // privemeni lokalni vektor
38   vector[N_train] log_prob_train;
39
40   // apriorne raspodele
41   tau ~ student_t(3, 0, 1);
42   beta ~ student_t(3, [-4.06,    -0.44,
43   -0.08,    -0.64,    -0.21,
44   0.41, -0.58], 1);
45   to_vector(z) ~ normal(0, 1);

```

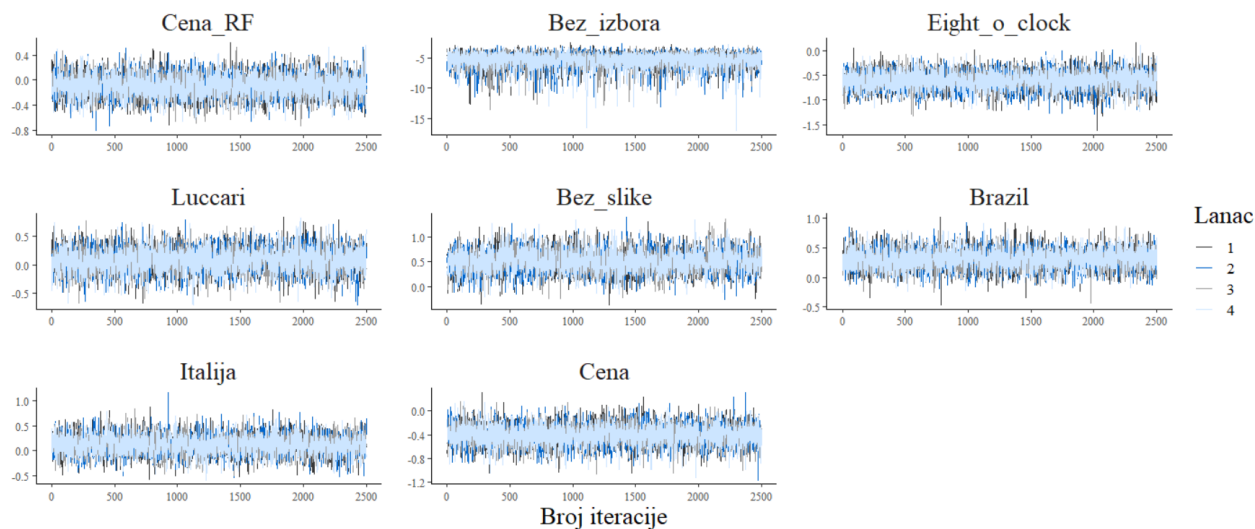
```

46 L_Omega ~ lkj_corr_cholesky(2);
47 Cena_RF ~ normal(0, 1); // vektorizovani parametri individualnih efekata
48
49 // log verovatnoce
50 for(t in 1:T_train) {
51   log_prob_train[start[t]:end[t]] =
52   log(softmax(X[start[brojac_log_prob_train[t]]:end[brojac_log_prob_train[t]]]*
53   beta_individual[task_individual[brojac_log_prob_train[t]]]));
54 }
55 // funkcija verodostojnosti
56 target += log_prob_train' * choice_train;
57 }
58 generated quantities {
59   vector[N_test] log_prob_test;
60   vector[N_test] log_lik_test;
61   for(t in 1:T_test) {
62     log_prob_test[start[t]:end[t]] =
63     log(softmax(X[start[brojac_log_prob_test[t]]:end[brojac_log_prob_test[t]]]*
64     beta_individual[task_individual[brojac_log_prob_train[t]]]));
65   }
66   log_lik_test = log_prob_test .* choice_test;

```

7.4.3.2 Provera validnosti modela za testiranje hipoteze H4

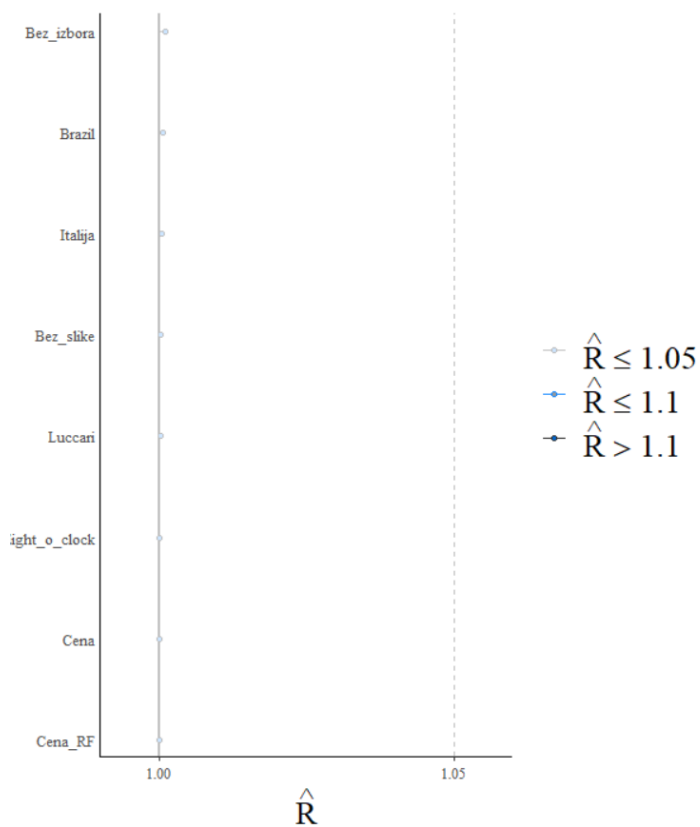
Prilikom provere validnosti korišćeni su različiti metodi koji imaju za cilj da ispitaju konvergenciju dobijenih ocena, kao i njihovu robusnost u odnosu na različito definisane apriorne raspodele. Fokus je na koeficijentu `Cena_RF`, odnosno uticaju regulacionog fokusa na cenovnu osetljivost tražnje. Broj iteracija koji je korišćen je iznosio 20000, od čega je polovina korišćena za zagrevanje modela (engl. *warm up period*), a ostatak na ocenjivanje (engl. *post-warm up*). Osim atributa “Bez izbora” svi dijagrami traga ukazuju na dobro mešanje Markovljevih lanaca.



Slika 7.25 Dijagram traga za beta hiperparametre.

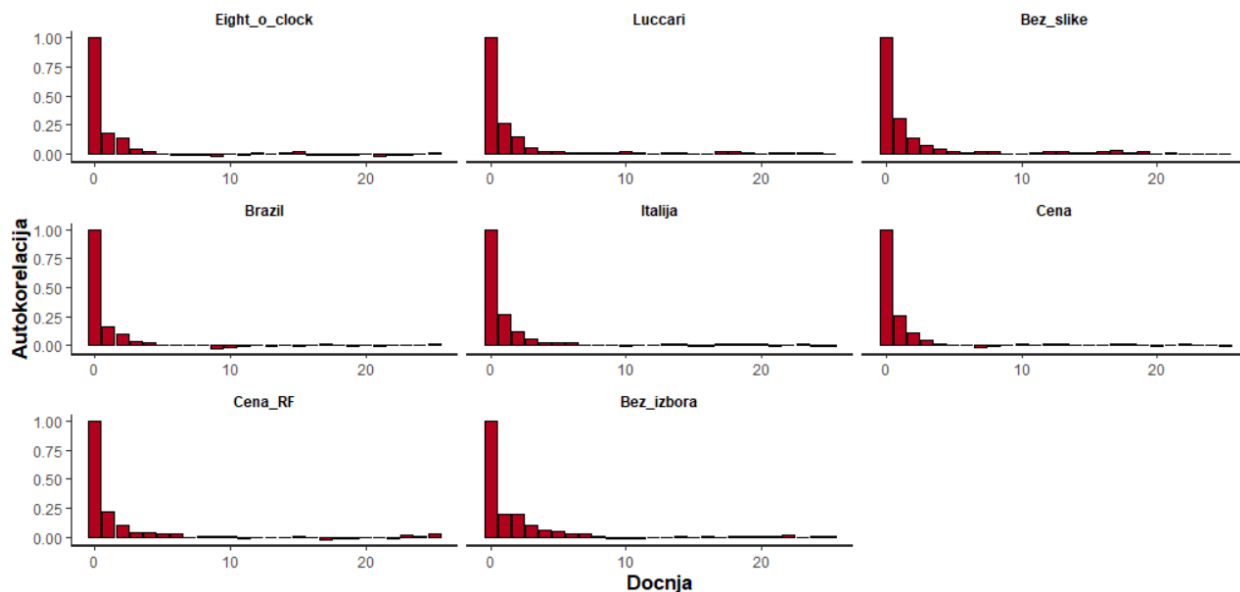
Izvor: kalkulacija autora.

Gelman-Rubinova statistika sugeriše da su svi hiperparametri postigli dovoljno dobru konvergenciju, odnosno ni jedan parametar ne prezali vrednost od 1,05.



Slika 7.26 Gelman-Rubinova statistika \hat{R} hiperparametre parcijalnih korisnosti i Cena_RF koeficijent. Izvor: kalkulacija autora.

Kod hiperparametara parcijalnih korisnosti autokorelacija postaje zanemarljiva počevši od pete docnje.



Slika 7.27 Autokorelacija za hiperparametre parcijalnih korisnosti.

Izvor: kalkulacija autora.

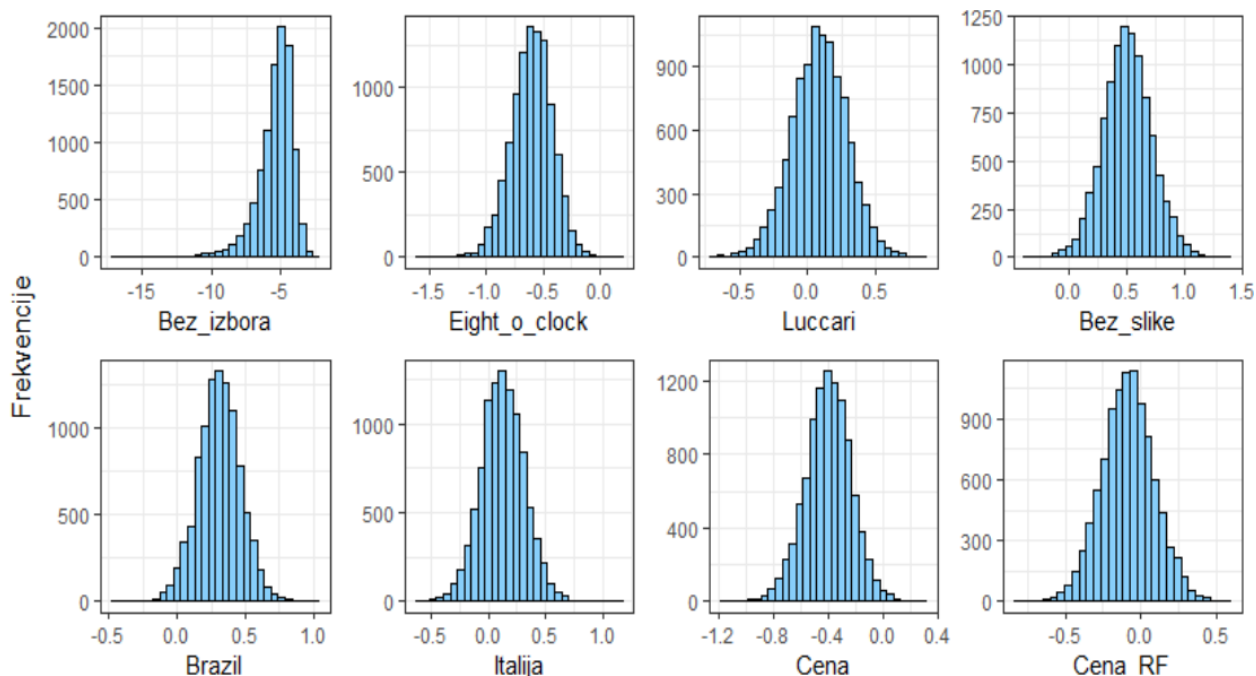
Iz priložene tabele efektivnih uzoraka se vidi da svi hiperparametri parcijalne korisnosti imaju relativni efektivni uzorak veći od 0,1 što sugerise da je broj iteracija bio dovoljno veliki za validno ocenjivanje modela (Tabela 7.30).

Tabela 7.30 Ocene efektivnih uzoraka (apsolutna i relativna mera*) za hiperparametre parcijalnih korisnosti.

Atribut	N efekt. ^{apsol.}	N efekt. ^{relativ.}
Bez izbora	4249,02	0,42
Eight o'clock	5765,46	0,58
Luccari	4578,44	0,46
Bez slike	4416,57	0,44
Brazil	6053,06	0,61
Italija	4930,32	0,49
Cena	5436,67	0,54
Cena_RF	5114,22	0,51

*Relativna mera efektivnog uzorka dobijena je kao količnik apsolutne mere i broja iteracija. Izvor: kalkulacija autora.

Histogrami hiperparametara vizuelizuju oblik raspodela. Prilikom testiranja je od važnosti da ove raspodele budu unimodalne, što je slučaj sa svih 8 hiperparametara. Primetno je da je samo hiperparametar atributa „Bez izbora“ sa asimetričnom raspodelom. Međutim, on nije od velikog interesa u ovom istraživanju.



Slika 7.28 Histogrami raspodela hiperparametara parcijalnih korisnosti.
Izvor: kalkulacija autora.

7.4.3.2.1 Analiza senzitivnosti modela za testiranje H4

Prilikom analiziranja senzitivnosti modela korišćena su dva alternativna modela sa drugačije definisanim apriornim raspodelama. Glavni model (u nastavku M1) je poređen sa više informativnim/restriktivnijim modelom (u nastavku M2) i manje informativnim/fleksibilnijim modelom (u nastavku M3). M2 i M3 su definisani po sličnom pristupu kao i kod prethodnih analiza senzitivnosti u ovoj disertaciji.

M2 koristi restriktivnije apriorne raspodele. Hiperparametri β i τ umesto studentove, prate normalnu raspodelu (studentova sa beskonačno stepeni slobode) koja ima znatno oštrije repove i na taj način je restriktivnija po pitanju dobijanja ocena koje odstupaju od lokacije raspodele. Korelaciona matrica ima parametar oblika jednak 5, što znači da će model favorizovati nulte korelacione koeficijente između parcijalnih korisnosti.

$$\beta \sim \mathcal{N}(\mu, \text{diag}(\mathbf{1})), \quad \Omega \sim \text{LKJcorr}(5), \quad \tau \sim \mathcal{N}^+(\mathbf{0}, \text{diag}(\mathbf{1})) \quad (7.24)$$

M3 koristi fleksibilnije apriorne raspodele, što omogućava da podaci imaju veće pravo glasa prilikom ocenjivanja modela. Hiperparametri β i τ prate studentovu raspodelu sa duplo većim parametrom skaliranja u odnosu na M1 model. Vektorski parametar lokacije kod parcijalnih korisnosti će biti nulti vektor, što znači da se informacije iz predistraživanja neće koristiti.

$$\beta \sim T(\mathbf{3}, \mathbf{0}, \text{diag}(\mathbf{2})), \quad \tau \sim T^+(\mathbf{3}, \mathbf{0}, \text{diag}(\mathbf{2})) \quad (7.25)$$

Rezultati koje prikazuje Tabela 7.31 sugerišu da je glavni model, M1, u odnosu na restriktivniji model M2 relativno robustan. Model M3 takođe ne odstupa značajno u odnosu na model M1. Parametar od ključnog interesa je Cena_RF i može se primetiti da je njegova ocena prilično robustna u ocenjena tri modela.

Tabela 7.31 Analiza senzitivnosti hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Atribut	M1	M2	$\frac{M1 - M2}{M1}$	M3	$\frac{M1 - M3}{M1}$
Bez izbora	-5,45	-4,80	11,93%	-7,45	-36,70%
Eight o'clock	-0,60	-0,61	-1,67%	-0,62	-3,33%
Luccari	0,08	0,08	0%	0,09	-12,50%
Bez slike	0,51	0,52	-1,96%	0,58	-13,73%
Brazil	0,31	0,31	0%	0,33	-6,45%
Italija	0,12	0,13	-8,33%	0,12	0%
Cena	-0,40	-0,41	-2,50%	-0,42	-5,00%
Cena_RF	-0,09	-0,10	-11,11%	-0,09	0%

M1 – osnovni model; M2 – više informativni model; M3 – manje informativni model.
Izvor: kalkulacija autora.

7.4.3.3 Rezultati i diskusija – hipoteza H4

Tabela 7.32 prikazuje ocene parcijalnih korisnosti. Dobijeni rezultati idu u prilog logičkoj validnosti modela.

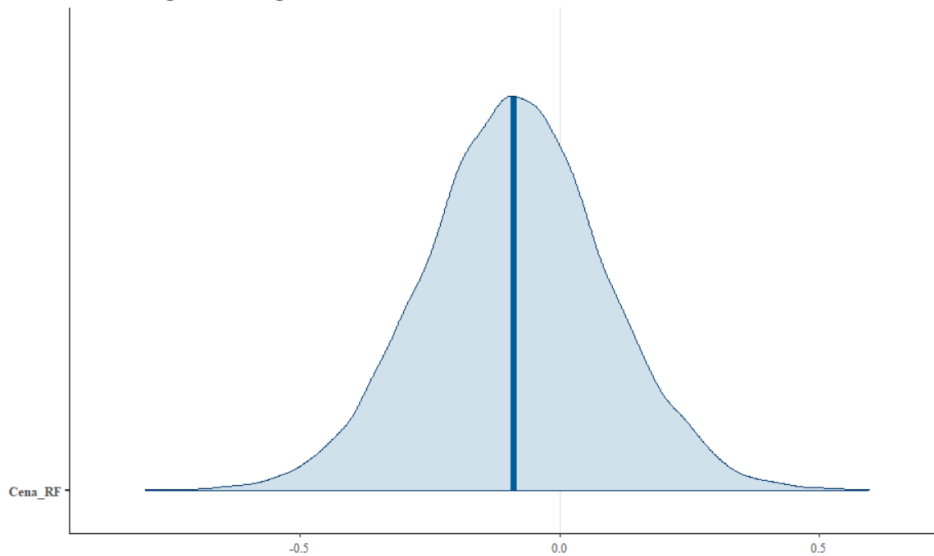
Tabela 7.32 Ocene hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Atribut	prosek	2,5%	25%	50%	75%	97,5%
Bez izbora	-5,45	-8,80	-6,00	-5,19	-4,58	-3,64
Eight o'clock	-0,60	-0,98	-0,72	-0,59	-0,48	-0,26
Luccari	0,08	-0,33	-0,05	0,09	0,22	0,48
Bez slike	0,51	0,10	0,37	0,50	0,64	0,93
Brazil	0,31	-0,01	0,20	0,31	0,41	0,62
Italija	0,12	-0,25	0,00	0,12	0,25	0,50
Cena	-0,40	-0,75	-0,51	-0,40	-0,29	-0,08
Cena_RF	-0,09	-0,43	-0,20	-0,09	0,03	0,26

Izvor: kalkulacija autora.

Hipoteza H4 pretpostavlja da će cenovna osetljivost biti smanjena kod osoba sa izraženim promociionim regulacionim fokusom, dok će biti povećana kod osoba sa izraženim prevencionim fokusom. Korišćena je BIS/BAS metrika gde su veće vrednosti odražavale veću sklonost ka promociionom fokusu, dok su manje održavale sklonost ka prevencionom. Prilikom testiranja analizirana je raspodela ocena parametra uz Cena_RF, odnosno koeficijent uz BIS/BAS varijablu. Slika 7.29 ilustruje kako se vrednosti parametara gomilaju oko nule. Kako je samo 31% vrednosti veće od nule, hipoteza H4 se može odbaciti.

Aposteriorna raspodela
efekat regulacionog fokusa - BIS/BAS metrika



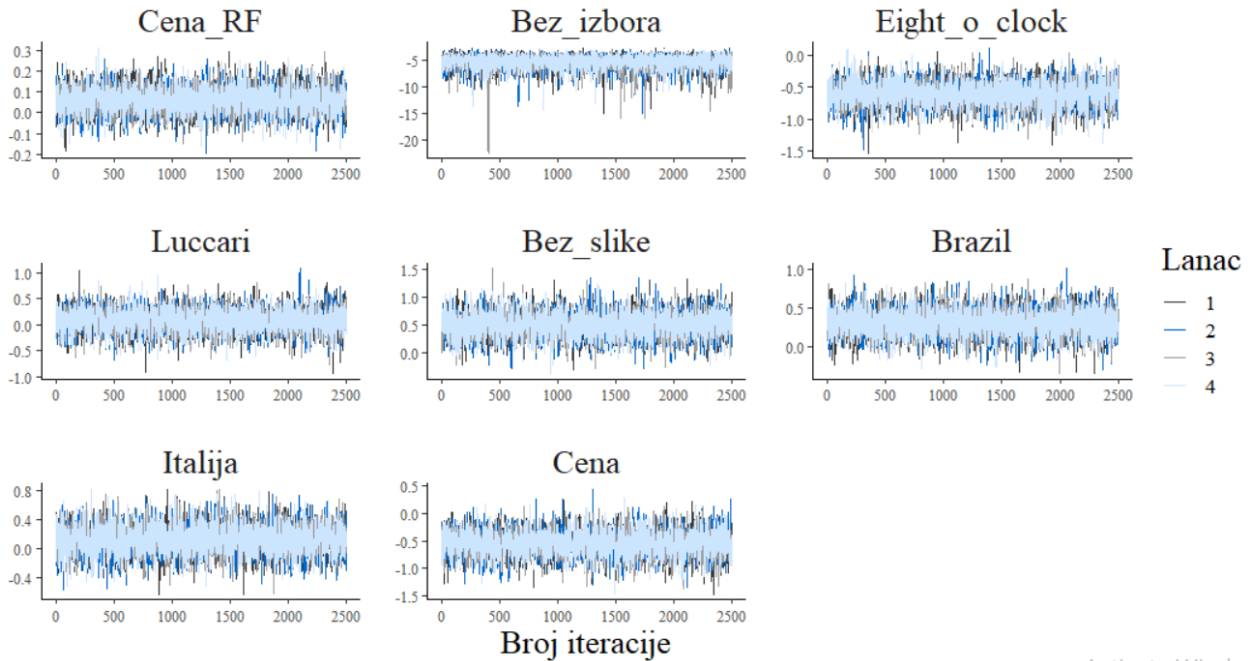
Slika 7.29 Aposteriorne raspodela parametra regulacionog fokusa - BIS/BAS.

Izvor: kalkulacija autora.

7.4.3.4 Provera validnosti modela za testiranje hipoteze H5

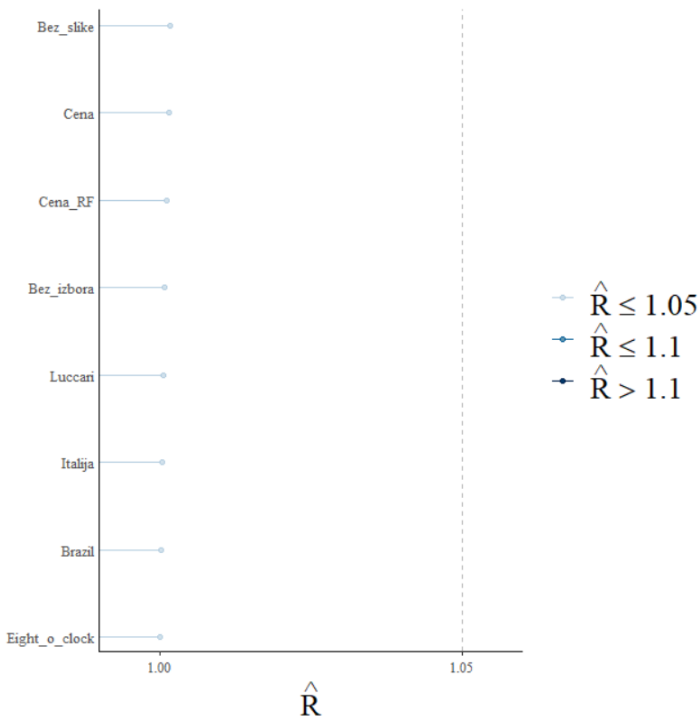
Broj iteracija koji je korišćen je iznosio 20.000, koliko je bilo potrebno da model dostigne stabilan nivo konvergencije. Polovina iteracija je korišćena za period zagrevanja modela (engl. *warm-up period*), dok je ostatak korišćen za ocenjivanje posteriornih raspodela.

Posmatranjem dijagrama traga, osim atributa "Bez izbora", svi ostali hiperparametri parcijalnih korisnosti pokazuju dobro mešanje lanaca.



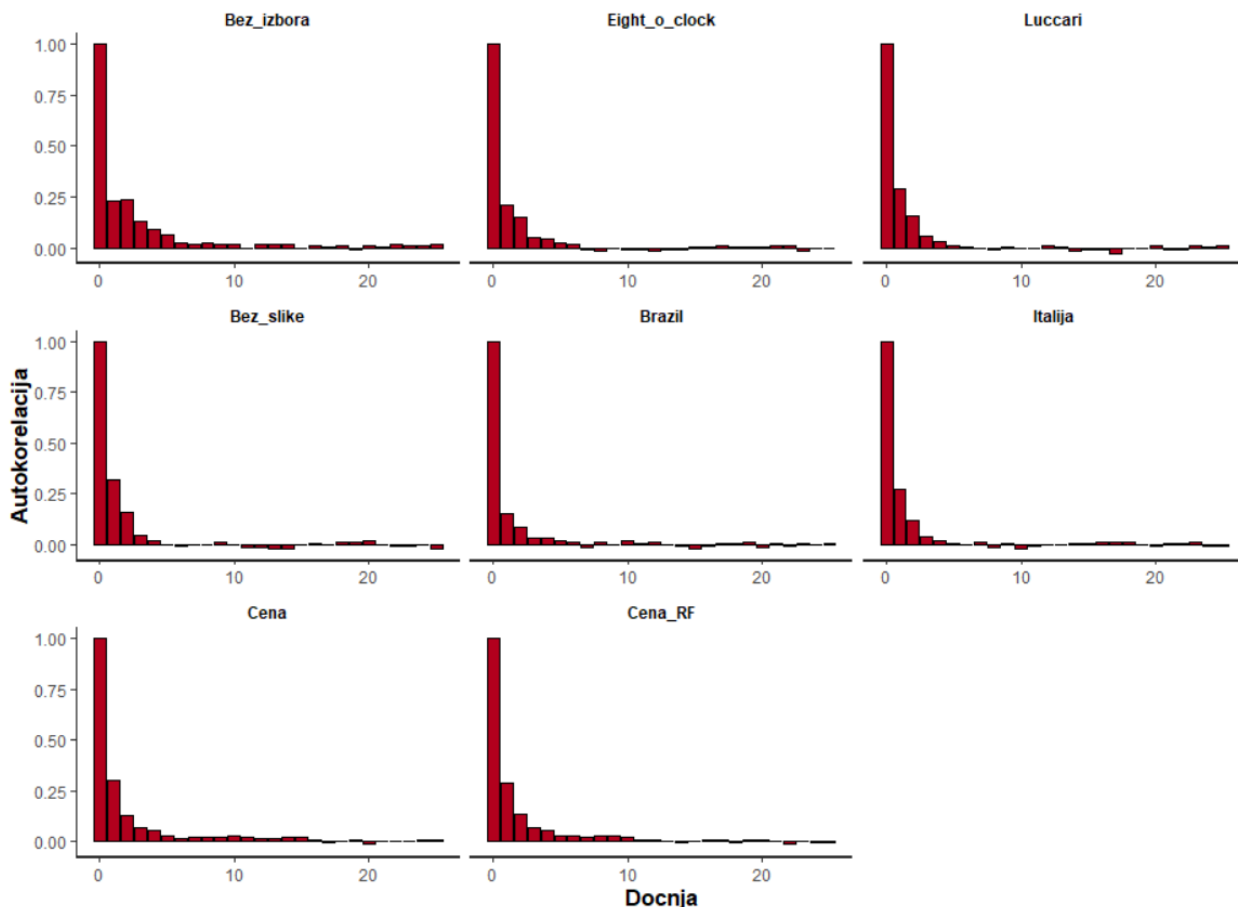
Slika 7.30 Dijagram traga za beta hiperparametre.
Izvor: kalkulacija autora.

Gelman-Rubinova statistika je manja od 1,05 za sve hiperparametre što znači da su ocene pouzdane.



Slika 7.31 Gelman-Rubinova statistika \hat{R} .
Izvor: kalkulacija autora.

Autokorelacija se ne zadržava dugo, i već posle 5 docnji postaje zanemarljiva kod svih hiperparametara.



Slika 7.32 Autokorelacija za hiperparametre parcijalnih korisnosti.

Izvor: kalkulacija autora.

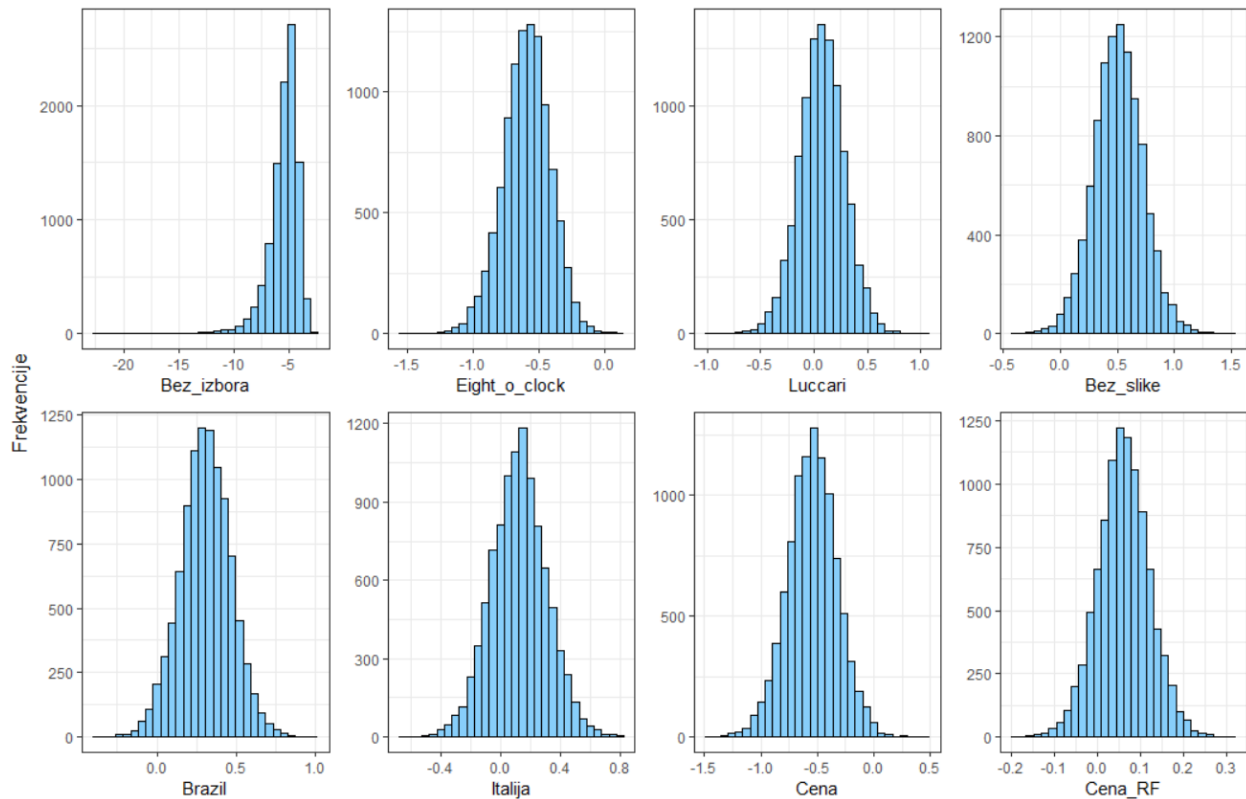
Efektivni uzorci sugerišu visoku efikasnost u ocenjivanju modela budući da količnik kod posmatranih parametara prelazi 0,1.

Tabela 7.33 Ocene efektivnih uzoraka (apsolutna i relativna mera*) za hiperparametre parcijalnih korisnosti.

Atribut	N efekt. ^{apsol.}	N efekt. ^{relativ.}
Bez izbora	3163,15	0,31
Eight o'clock	5058,54	0,50
Luccari	4675,15	0,46
Bez slike	4798,41	0,47
Brazil	5995,01	0,59
Italija	5137,03	0,51
Cena	3849,45	0,38
Cena_RF	4009,30	0,40

*Relativna mera efektivnog uzorka dobijena je kao količnik apsolutne mere i broja iteracija. Izvor: kalkulacija autora.

Osim atributa “Bez izbora” svi hiperparametri imaju simetrične unimodalne raspodele.



Slika 7.33 Histogrami raspodela hiperparametara parcijalnih korisnosti.
Izvor: kalkulacija autora.

7.4.3.4.1 Analiza senzitivnosti modela za testiranje H5

Prilikom analize senzitivnosti modela korišćena su dva alternativna modela sa drugačije definisanim apriornim raspodelama. Glavni model (u nastavku M1) je poređen sa više informativnim/restruktivnijim modelom (u nastavku M2) i manje informativnim/fleksibilnijim modelom (u nastavku M3). M2 i M3 su definisani po sličnom pristupu kao u delu 7.4.3.2.1.

Rezultati koje ilustruje Tabela 7.34 sugerišu da je glavni model, M1, u odnosu na modele M2 i M3, robustan.

Tabela 7.34 Analiza senzitivnosti hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Atribut	M1	M2	$\frac{M1-M2}{M1}$	M3	$\frac{M1-M2}{M1}$
Bez izbora	-5,48	-4,78	12,77%	-7,41	-35,22%
Eight o'clock	-0,60	-0,60	0%	-0,61	-1,67%
Luccari	0,07	0,08	-14,29%	0,08	-14,29%
Bez slike	0,51	0,51	0%	0,56	-9,80%
Brazil	0,31	0,32	-3,23%	0,32	-3,23%
Italija	0,12	0,13	-8,33%	0,12	0%
Cena	-0,55	-0,56	-1,82%	-0,56	-1,82%
Cena_RF	0,06	0,07	-16,67%	0,06	0%

M1 – osnovni model; M2 – restriktivniji model; M3 – fleksibilniji model.

Izvor: kalkulacija autora.

7.4.3.5 Rezultati i diskusija – hipoteza H5

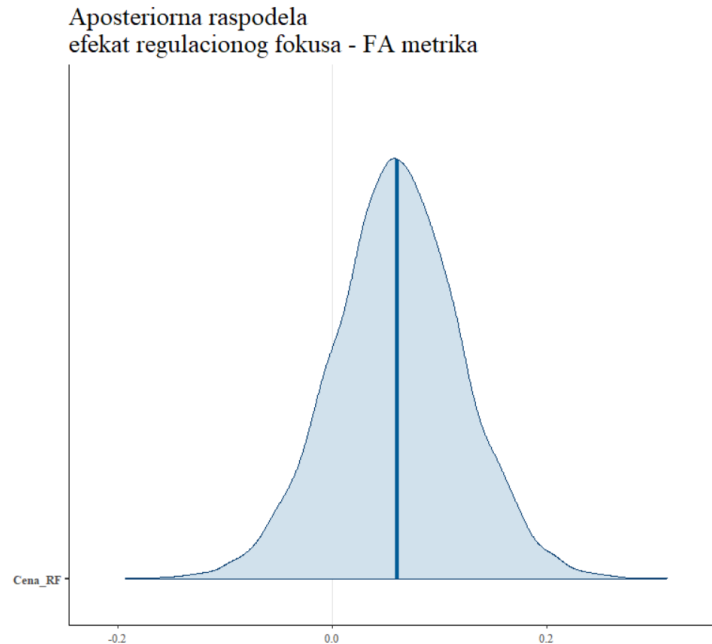
Analizom ocena, koje prikazuje Tabela 7.35, model ocenjen za potrebe testiranja H5 prolazi test logičnosti budući da svi hiperparametri imaju logičan predznak.

Tabela 7.35 Ocene hiperparametara parcijalnih korisnosti.

Atribut	prosek	2,5%	25%	50%	75%	97,5%
Bez izbora	-5,48	-8,85	-6,04	-5,21	-4,59	-3,68
Eight o'clock	-0,60	-0,97	-0,71	-0,59	-0,48	-0,26
Luccari	0,07	-0,35	-0,06	0,07	0,21	0,49
Bez slike	0,51	0,08	0,37	0,50	0,65	0,94
Brazil	0,31	-0,01	0,20	0,31	0,41	0,62
Italija	0,12	-0,24	0,00	0,13	0,24	0,49
Cena	-0,55	-0,99	-0,69	-0,54	-0,40	-0,11
Cena_RF	0,06	-0,06	0,02	0,06	0,10	0,18

Izvor: kalkulacija autora.

Hipoteza H5 pretpostavlja da će cenovna osetljivost biti smanjena prilikom pojačanog promociionog fokusa izraženog preko frontalne asimetrije. Prilikom testiranja analizirana je raspodela parametara uz varijablu frontalne asimetrije (u tabeli Cena_RF). Veće vrednosti frontalne asimetrije znače veću predispoziciju ka promociionom stanju, dok manje znače veću predispoziciju ka prevencionom. Slika 7.34 daje vizuelan prikaz raspodele. Pozitivne vrednosti raspodele parametra govore da sa povećanjem FA, smanjuje se cenovna osetljivost tražnje. Kako je 85% ocena parametra imalo pozitivnu vrednost, onda se može zaključiti da je hipoteza H5 dokazana sa određenom dozom rezerve, budući da značajan procenat raspodele leži ispod nule (15%).



Slika 7.34 Aposteriorna raspodele parametra regulacionog fokusa - frontalne asimetrije.
Izvor: kalkulacija autora.

7.4.3.6 Rezultati i diskusija – hipoteza H6

Prema hipotezi H6, pretpostavka je da će model iz H5 imati bolju prediktivnu validnost, budući da frontalna asimetrija objektivnije odražava regulaciono stanje pojedinca u odnosu na BIS/BAS skalu. Kod BIS/BAS skale ispitanik vrši samoocenjivanje i gde postoji prostor da ispitanik odgovara onako kako je društveno poželjno, a ne kako je objektivno. Drugi razlog je što frontalna asimetrija odražava aktuelnije regulaciono stanje ispitanika, dok se BIS/BAS skala odnosi na pitanja koja nisu pod velikim uticajem kontekstualnih faktora (izgled prostorije gde se sprovodi eksperiment, raspoloženje ispitanika itd.). Najpre je korišćen metod *log aposteriorne prediktivne raspodele* nad opserviranim podacima. Ovaj metod podrazumeva ocenjivanje i testiranje modela nad istim podacima zbog čega daje pristrasno veće ocene. Nakon toga je korišćen metod 10-slojne unakrsne validacije za ocenjivanje *očekivane log aposteriorne prediktivne raspodele*.

Tabela 7.36 prikazuje ocene *log aposteriorne prediktivne raspodele* gde se vidi da model za testiranje H4 i H5 imaju slične vrednosti LPD, -255,2 i -255,7. Standardna greška ocene razlike je slične vrednosti kao i razlika ocena LPD, 0,4. Ovi rezultati govore da oba modela jednako dobro fituju na opserviranim podacima, pa samim tim ne možemo tvrditi da je neki od ocenjenih modela bolji.

Tabela 7.36 Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela modela iz H4 i H5

	Ocena	Stand. greška
LPD H4	-255,2	14,1
LPD H5	-255,7	14,2
LPD H4 – LPD H5	0,5	0,4

Tabela 7.37 prikazuje ocene *očekivane log aposteriorne prediktivne raspodele*, kao meru koja ima veću eksternu validnost nego LPD. Oba modela imaju slične vrednosti ELPD, -755,4 i -757,7. Razlika u ELPD

oba modela ima veliku standardnu grešku u odnosu na samu razliku, što sugeriše da su modeli slične prediktivne moći. Na osnovu dobijenih rezultata zaključak je da se hipoteza H6 odbacuje.

Tabela 7.37 Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela modela iz H4 i H5

	Ocena	Stand. greška
ELPD H4	-755,4	43,1
ELPD H5	-757,7	43,2
ELPD H4 – ELPD H5	2,3	1,1

8 ZAKLJUČCI

Bolje razumevanje efekata kontekstualnih faktora, poput muzike, na regulaciono stanje potrošača i, posledično, na njegovo ponašanje je jedan od doprinosa ovog istraživanja. Manipulacija ljudskim umom je tema koja je aktuelna u mnogim oblastima, a marketinške i političke kapanje su samo neki od primera. Sa većim znanjem iz oblasti formiranja ljudskih preferencija, mehanizam donošenja odluka potrošača postaje jasniji, što predstavlja veliki korak za nauku i društvo. Ovo pre svega zato što na ovaj način stiču neophodna znanja za prevencija zloupotrebe potrošača. Drugi bitan doprinos odnosi se na oblast ekonometrijskog modeliranja izbora potrošača. Razvijen je metod koji kombinuje neuromarketinški pristup merenja psihološkog stanja pojedinca i Bajesov hijerarhijski metod u modeliranju preferencija potrošača. Na ovaj način ekonometrijski model uzima u obzir heterogenu prirodu potrošača na tržištu, kao i uticaj kontekstualnih faktora poput muzike na izbor potrošača. Na polju razvoja analize združenih efekata postoji velika praznina u objašnjavanju preferencija potrošača u laboratorijskim uslovima naspram realnog okruženja. U ovom doktoratu napravljen je korak ka poboljšanju eksterne validnosti na polju eksperimentalnog istraživanja potrošačkih preferencija uzimanjem u obzir kontekstualnih faktora, ali i hroničnog psihološkog stanja potrošača. Dobijeni rezultati u ovom doktoratu sugerišu značajnu vezu muzike i regulacionog stanja potrošača, kao i efekte interakcije ovih faktora na cenovnu osetljivost tražnje. Pokazano je da situaciono regulaciono stanja potrošača ima značajnu ulogu u formiranju preferencija potrošača. Kroz eksperimentalno istraživanje dokazano je da promociiono stanje smanjuje cenovnu osetljivost tražnje, dok prevenciono stanje pojačava cenovnu osetljivost. Definisane okolnosti pod kojima važe ovi efekti su poseban doprinos ovog doktorata.

Situaciona regulaciona stanja promocije i prevencije su primovana muzičkim stimulusima različitih nivoa energičnosti, odnosno korišćena je spora i brza verzija numere 'Wake me up' originalno izvedena od strane umetnika Avicii-a. Pokazano da energična muzika uvodi potrošače u promociiono regulaciono stanje, koje se reflektuje kroz veće stanje uzbuđenosti ispitanika (mereno EEG uređajem), što posledično kroz regulacionu (ne)usklađenost smanjuje cenovnu osetljivost tražnje. Sporija verzija muzičkog stimulusa je primovala prevenciono stanje, reflektovano kroz stanje relaksacije, što je kroz regulacionu usklađenost pojačavalo cenovnu osetljivost tražnje. Dobijeni veza regulacionog stanja i cenovne osetljivosti je važila samo u uslovima kada potrošači nisu bili preterano involvirani u obradi informacija prilikom izbora proizvoda, čime su potvrđeni rezultati iz ranijih istraživanja o uslovima pod kojima važi regulaciona usklađenost. Može se zaključiti da dobijeni rezultati ne bi trebalo da važe prilikom izbora proizvoda koji iziskuju veću kognitivnu angažovanost, poput izbora između proizvoda sa visokim cenama (npr. automobila), ili prilikom izbora proizvoda koji zahtevaju involviranost zarad boljeg sagledavanja proizvoda (npr. računara). Bitan rezultat istraživanja je da energičnost i tempo muzike koja se pušta u prodavnicama predstavlja relevantan instrument za donošenje odluke o ceni koji je potrošač spreman da plati, budući da rezultati ukazuju da izloženost energičnijoj muzici dovodi smanjuje cenovnu osetljivost tražnje ispitanika. Pored situacionog regulacionog fokusa, analizirano je i uticaj hroničnog regulaciono stanja na cenovnu osetljivost tražnje. Za merenje hroničnog regulacionog stanja korišćena je tradicionalna metrika dobijena na osnovu samopopunjavanja upitnika potrošača (BIS/BAS skala) i neuromarketinška metrika frontalne asimetrije. BIS/BAS skala nije imala značajan uticaj na cenovnu osetljivost, dok frontalna asimetrija je. Ovakvi rezultati sugerišu primenu neuromarketinških metrika u naučnim i praktičnim istraživanjima koja se tiču ponašanja potrošača i ocenjivanja njihovih preferencija.

Takođe, potvrđena je naučna i praktična upotrebna vrednost teorije regulacionog fokusa iz ranijih istraživanja.

Prilikom testiranja hipoteza razvijen je model koji koristi apriorne informacije iz predistraživanja. Hijerarhijska struktura ekonometrijskog modela je zbog svoje kompleksnosti izuzetno zahtevna po pitanju eksperimentalnog dizajna i izbora apriornih raspodela parametara. Loša specifikacija eksperimentalnog dizajna i apriornih raspodela parametara lako može dovesti do toga da model nije moguće oceniti. Pravilno korišćenje apriornih informacija iz predistraživanja je od vitalnog značaja za primenu kompleksnih modela na malim uzorcima. Za ocenjivanje hijerarhijskog Bajesovog modela izbora primenjen je Hamiltonov Monte Karlo metod korišćenjem NUTS algoritma (Hoffman & Gelman, 2014). Model je programiran u statističkom programskom jeziku Stan. Za potrebe elicitanje preferencija korišćen je Bajesov D-optimalan eksperimentalni dizajn, uz korišćenje apriornih informacija iz predistraživanja. Analiza senzitivnosti je pokazala da su modeli korišćeni za testiranje hipoteza robusni na apriorne raspodele različite informativnosti, što dodatno doprinosi kredibilitetu rezultata i specifikacije modela.

Razvijen metodološki okvir u ovoj disertaciji se može koristiti za testiranje drugih kontekstualnih faktora, poput mirisa, na preferencije potrošača. Pored EEG-a moguće je primeniti i druge neuromarketinške instrumente, poput uređaja za praćenje pogleda ispitanika, čime bi merenje psihološkog stanja bilo sveobuhvatnije. Kombinovanje neuromarketinških instrumenata može otvoriti nova istraživačka pitanja na polju objašnjavanja preferencija potrošača. Apriorne i aposteriorne raspodele korišćene prilikom ocenjivanja hijerarhijskih modela u ovom radu mogu poslužiti kao dodatne informacije istraživačima koji budu primenjivali hijerarhijske modele izbora.

LITERATURA

- Aaker, J. L., & Lee, A. Y. (2001). "I" Seek Pleasures and "We" Avoid Pains: The Role of Self-Regulatory Goals in Information Processing and Persuasion. *Journal of Consumer Research*, 28(1), 33–49. <https://doi.org/10.1086/321946>
- Aaker, J. L., & Lee, A. Y. (2006). Understanding Regulatory Fit. *Journal of Marketing Research*, 43(1), 15–19.
- Alex Rogozhnikov. (2016). *Hamiltonian Monte Carlo explained*. https://arogozhnikov.github.io/2016/12/19/markov_chain_monte_carlo.html
- Allen, J. J. B., Coan, J. A., & Nazarian, M. (2004). Issues and assumptions on the road from raw signals to metrics of frontal EEG asymmetry in emotion. *Biological Psychology*, 67(1), 183–218. <https://doi.org/10.1016/j.biopsycho.2004.03.007>
- Amodio, D. M., Devine, P. G., & Harmon-Jones, E. (2007). A Dynamic Model of Guilt: Implications for Motivation and Self-Regulation in the Context of Prejudice. *Psychological Science*, 18(6), 524–530. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.2007.01933.x>
- Amodio, D. M., Shah, J. Y., Sigelman, J., Brazy, P. C., & Harmon-Jones, E. (2004). Implicit regulatory focus associated with asymmetrical frontal cortical activity. *Journal of Experimental Social Psychology*, 40(2), 225–232. [https://doi.org/10.1016/S0022-1031\(03\)00100-8](https://doi.org/10.1016/S0022-1031(03)00100-8)
- Avinash, T., Dikshant, L., & Seema, S. (2018). Methods of Neuromarketing and Implication of the Frontal Theta Asymmetry induced due to musical stimulus as choice modeling. *Procedia Computer Science*, 132, 55–67.
- Avnet, T., & Higgins, E. T. (2006). How Regulatory Fit Affects Value in Consumer Choices and Opinions. *Journal of Marketing Research*, 43(1), 1–10.
- Baas, M., De Dreu, C. K. W., & Nijstad, B. A. (2008). A meta-analysis of 25 years of mood-creativity research: Hedonic tone, activation, or regulatory focus? *Psychological Bulletin*, 134(6), 779–806. <https://doi.org/10.1037/a0012815>
- Baek, T. H., & Reid, L. N. (2013). The Interplay of Mood and Regulatory Focus in Influencing Altruistic Behavior: MOOD AND REGULATORY FOCUS IN ALTRUISTIC BEHAVIOR. *Psychology & Marketing*, 30(8), 635–646. <https://doi.org/10.1002/mar.20634>
- Betancourt, M. J., & Girolami, M. (2013). Hamiltonian Monte Carlo for Hierarchical Models. *ArXiv:1312.0906 [Stat]*. <http://arxiv.org/abs/1312.0906>
- Bickel, D. R., & Frühwirth, R. (2006). On a fast, robust estimator of the mode: Comparisons to other robust estimators with applications. *Computational Statistics & Data Analysis*, 50(12), 3500–3530.
- Bishop, C. M. (2006). Pattern recognition. *Machine Learning*, 128(9).
- Bliemer, M. C. J., & Rose, J. M. (2011). Experimental design influences on stated choice outputs: An empirical study in air travel choice. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 45(1), 63–79. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2010.09.003>
- Brković, I. (2009). FOKUS REGULACIJE U RANOJ ODRASLOJ DOBI I RETROSPEKTIVNI IZVJEŠTAJI O RODITELJSKOM PONAŠANJU. *SUVREMENA PSIHOLOGIJA*, 11.

- Carver, C. S., & White, T. L. (1994). Behavioral inhibition, behavioral activation, and affective responses to impending reward and punishment: The BIS/BAS scales. *Journal of Personality and Social Psychology*, 67(2), 319.
- Cesario, J., Grant, H., & Higgins, E. T. (2004). Regulatory Fit and Persuasion: Transfer From “Feeling Right.” *Journal of Personality and Social Psychology*, 86(3), 388–404. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.86.3.388>
- Cesario, J., & Higgins, E. T. (2008). Making message recipients “feel right” how nonverbal cues can increase persuasion. *Psychological Science*, 19(5), 415–420.
- Cesario, J., Higgins, E. T., & Scholer, A. A. (2008). Regulatory fit and persuasion: Basic principles and remaining questions. *Social and Personality Psychology Compass*, 2(1), 444–463.
- Chebat, J.-C., Chebat, C. G., & Vaillant, D. (2001). Environmental background music and in-store selling. *Journal of Business Research*, 54(2), 115–123. [https://doi.org/10.1016/S0148-2963\(99\)00089-2](https://doi.org/10.1016/S0148-2963(99)00089-2)
- Chernev, A. (2006). *Goal-Attribute Compatibility in Consumer Choice*. <https://papers.ssrn.com/abstract=887576>
- Chung, Y., Gelman, A., Rabe-Hesketh, S., Liu, J., & Dorie, V. (2015). Weakly Informative Prior for Point Estimation of Covariance Matrices in Hierarchical Models. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 40(2), 136–157. <https://doi.org/10.3102/1076998615570945>
- Chung, Y., Rabe-Hesketh, S., Dorie, V., Gelman, A., & Liu, J. (2013). A Nondegenerate Penalized Likelihood Estimator for Variance Parameters in Multilevel Models. *Psychometrika*, 78(4), 685–709. <https://doi.org/10.1007/s11336-013-9328-2>
- Coan, J. A., & Allen, J. J. B. (2003). Frontal EEG asymmetry and the behavioral activation and inhibition systems. *Psychophysiology*, 40(1), 106–114. <https://doi.org/10.1111/1469-8986.00011>
- Čolić, L., & Prica, I. (2022a). *XLIX International Symposium on Operational Research*. The Publishing Centre of the Faculty of Economics in Belgrade.
- Čolić, L., & Prica, I. (2022b). ULOGA REGULACIONOG STANJA NA PONAŠANJE POTROŠAČA. *Ekonomске ideje i praksa*, 45, 1–13. <https://doi.org/10.54318/eip.2022.lc.321>
- Conjoint.ly. (2022). *Technical points on DCE with Conjoint.ly*. <https://conjointly.com/guides/conjoint-technical-notes/>
- Cook, R. D., & Nachtsheim, C. J. (1980). A Comparison of Algorithms for Constructing Exact D-Optimal Designs. *Technometrics*, 22(3), 315–324. <https://doi.org/10.2307/1268315>
- Cowie, R., Douglas-Cowie, E., Tsapatsoulis, N., Votsis, G., Kollias, S., Fellenz, W., & Taylor, J. G. (2001). Emotion recognition in human-computer interaction. *IEEE Signal Processing Magazine*, 18(1), 32–80.
- Croissant, Y. (2012). *Estimation of multinomial logit models in R : The mlogit Package*. 73.
- Das, G., Roy, R., & Spence, M. T. (2020). The mitigating effect of matching regulatory focus with arousal-inducing stimuli in service failure situations. *Psychology & Marketing*, 37(10), 1420–1432. <https://doi.org/10.1002/mar.21390>

- Davidson, R. J. (1988). EEG measures of cerebral asymmetry: Conceptual and methodological issues. *International Journal of Neuroscience*, 39(1–2), 71–89.
- Davies, J. (2021). *Word Cloud Generator*. <https://www.jasondavies.com/wordcloud/>
- Dharmadhikari, A. S., Tandle, A. L., Jaiswal, S. V., Sawant, V. A., Vahia, V. N., & Jog, N. (2018). Frontal theta asymmetry as a biomarker of depression. *East Asian Archives of Psychiatry*, 28(1), 17–22.
- Dholakia, U. M., Gopinath, M., Bagozzi, R. P., & Natarajan, R. (2006). The Role of Regulatory Focus in the Experience and Self-Control of Desire for Temptations. *Journal of Consumer Psychology*, 16(2), 163–175. https://doi.org/10.1207/s15327663jcp1602_7
- Draganska, M., & Klapper, D. (2011). Choice set heterogeneity and the role of advertising: An analysis with micro and macro data. *Journal of Marketing Research*, 48(4), 653–669.
- EmotivPRO. (2022). https://emotiv.gitbook.io/emotivpro-v3/?_ga=2.11769143.2059335827.1653572392-1184578009.1638053441
- Fazio, R. H. (2001). On the automatic activation of associated evaluations: An overview. *Cognition & Emotion*, 15(2), 115–141.
- Förster, J., & Higgins, E. T. (2005). How global versus local perception fits regulatory focus. *Psychological Science*, 16(8), 631–636.
- Förster, J., Higgins, E. T., & Bianco, A. T. (2003). Speed/accuracy decisions in task performance: Built-in trade-off or separate strategic concerns? *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 90(1), 148–164. [https://doi.org/10.1016/S0749-5978\(02\)00509-5](https://doi.org/10.1016/S0749-5978(02)00509-5)
- Forster, J., Higgins, E. T., & Idson, L. C. (1998). *Approach and Avoidance Strength During Goal Attainment: Regulatory Focus and the “Goal Looms Larger” Effect*. 17.
- Fortunato, V. C. R., Giraldo, J. D. M. E., & De Oliveira, J. H. C. (2014). A Review of Studies on Neuromarketing: Practical Results, Techniques, Contributions and Limitations. *Journal of Management Research*, 6(2), 201. <https://doi.org/10.5296/jmr.v6i2.5446>
- Freeman, F. G., Mikulka, P. J., Prinzel, L. J., & Scerbo, M. W. (1999). Evaluation of an adaptive automation system using three EEG indices with a visual tracking task. *Biological Psychology*, 50(1), 61–76. [https://doi.org/10.1016/S0301-0511\(99\)00002-2](https://doi.org/10.1016/S0301-0511(99)00002-2)
- Freitas, A. L., Liberman, N., Salovey, P., & Higgins, E. T. (2002). When to Begin? Regulatory Focus and Initiating Goal Pursuit. *Personality and Social Psychology Bulletin*, 28(1), 121–130. <https://doi.org/10.1177/0146167202281011>
- Gabry, J., & Goodrich, B. (2020). *Prior Distributions for rstanarm Models*. <https://cran.r-project.org/web/packages/rstanarm/vignettes/priors.html>
- Gabry, J., & Mahr, T. (2022). *bayesplot: Plotting for Bayesian Models*. 109.
- Gardner, W. L., Gabriel, S., & Lee, A. Y. (1999). “I” Value Freedom, but “We” Value Relationships: Self-Construal Priming Mirrors Cultural Differences in Judgment. *Psychological Science*, 10(4), 321–326. <https://doi.org/10.1111/1467-9280.00162>
- Gelman, A. (2006). *Prior distributions for variance parameters in hierarchical models*. 19.

- Gelman, A. (2008). Scaling regression inputs by dividing by two standard deviations. *Statistics in Medicine*, 27(15), 2865–2873. <https://doi.org/10.1002/sim.3107>
- Gelman, A. (2020). Prior Choice Recommendations. *GitHub*. <https://github.com/stan-dev/stan>
- Gelman, A., Jakulin, A., Pittau, M. G., & Su, Y.-S. (2008). A weakly informative default prior distribution for logistic and other regression models. *The Annals of Applied Statistics*, 2(4), 1360–1383. <https://doi.org/10.1214/08-AOAS191>
- Geman, S., & Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 721–741.
- Ghosh, J., Li, Y., & Mitra, R. (2018). On the use of Cauchy prior distributions for Bayesian logistic regression. *Bayesian Analysis*, 13(2), 359–383.
- Giraldo, S., & Ramirez, R. (2013). *BRAIN-ACTIVITY-DRIVEN REAL-TIME MUSIC EMOTIVE CONTROL*. 6.
- Graham, J. R. (2009). *Convolution, Correlation, & Fourier Transforms*. <http://ugastro.berkeley.edu/infrared09/PDF-2009/convolution2.pdf>
- Gray, J. A. (1990). Brain Systems that Mediate both Emotion and Cognition. *Cognition and Emotion*, 4(3), 269–288. <https://doi.org/10.1080/02699939008410799>
- Hagemann, D., & Naumann, E. (2001). The effects of ocular artifacts on (lateralized) broadband power in the EEG. *Clinical Neurophysiology*, 112(2), 215–231. [https://doi.org/10.1016/S1388-2457\(00\)00541-1](https://doi.org/10.1016/S1388-2457(00)00541-1)
- Harmon-Jones, E., & Gable, P. A. (2018a). On the role of asymmetric frontal cortical activity in approach and withdrawal motivation: An updated review of the evidence. *Psychophysiology*, 55(1), e12879. <https://doi.org/10.1111/psyp.12879>
- Harmon-Jones, E., & Gable, P. A. (2018b). On the role of asymmetric frontal cortical activity in approach and withdrawal motivation: An updated review of the evidence. *Psychophysiology*, 55(1), e12879. <https://doi.org/10.1111/psyp.12879>
- Haws, K. L., Dholakia, U. M., & Bearden, W. O. (2010). An Assessment of Chronic Regulatory Focus Measures. *Journal of Marketing Research*, 47(5), 967–982.
- Hayes, M. H. (1996). *Statistical digital signal processing and modeling*. John Wiley & Sons.
- HebaDeLioncourt (Director). (2009, May 31). *Vivaldi—Spring, Allegro*. <https://www.youtube.com/watch?v=znptyp4apW0>
- Higgins, E. T. (1987). Self-discrepancy: A theory relating self and affect. *Psychological Review*, 94(3), 319.
- Higgins, E. T. (1998). Promotion and Prevention: Regulatory Focus as A Motivational Principle. In *Advances in Experimental Social Psychology* (Vol. 30, pp. 1–46). Elsevier. [https://doi.org/10.1016/S0065-2601\(08\)60381-0](https://doi.org/10.1016/S0065-2601(08)60381-0)
- Higgins, E. T., Shah, J., & Friedman, R. (1997). Emotional responses to goal attainment: Strength of regulatory focus as moderator. *Journal of Personality and Social Psychology*, 72(3), 515–525. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.72.3.515>

- Hoffman, M. D., & Gelman, A. (2014). *The No-U-Turn Sampler: Adaptively Setting Path Lengths in Hamiltonian Monte Carlo*. 31.
- Hong, J., & Lee, A. Y. (2008). Be fit and be strong: Mastering self-regulation through regulatory fit. *Journal of Consumer Research*, *34*(5), 682–695.
- iMotions. (2019). *Electroencephalography: The compete pocket guide*.
<https://imotions.com/guides/electroencephalography-eeg/>
- Jeffreys, H. (1998). *The theory of probability*. OUP Oxford.
- Jiang, H., Tan, H., Liu, Y., Wan, F., & Gursoy, D. (2020). The impact of power on destination advertising effectiveness: The moderating role of arousal in advertising. *Annals of Tourism Research*, *83*, 102926. <https://doi.org/10.1016/j.annals.2020.102926>
- Johnson, R. M., & Orme, B. (1996). *How Many Questions Should You Ask in Choice-Based Conjoint Studies?* 24.
- Juárez, M. A., & Steel, M. F. J. (2010). Non-Gaussian dynamic Bayesian modelling for panel data. *Journal of Applied Econometrics*, *25*(7), 1128–1154. <https://doi.org/10.1002/jae.1113>
- Kammler, D. W. (2007). *A First Course in Fourier Analysis*.
- Kareklas, I., Carlson, J. R., & Muehling, D. D. (2012). The role of regulatory focus and self-view in “green” advertising message framing. *Journal of Advertising*, *41*(4), 25–39.
- Kark, R., & Van Dijk, D. (2007). Motivation to lead, motivation to follow: The role of the self-regulatory focus in leadership processes. *Academy of Management Review*, *32*(2), 500–528.
- Keller, J. (2008). On the development of regulatory focus: The role of parenting styles. *European Journal of Social Psychology*, *38*(2), 354–364.
- Kim, H., Park, K., & Schwarz, N. (2010). Will This Trip Really Be Exciting? The Role of Incidental Emotions in Product Evaluation. *Journal of Consumer Research*, *36*(6), 983–991.
<https://doi.org/10.1086/644763>
- Klimesch, W., Sauseng, P., & Hanslmayr, S. (2007). EEG alpha oscillations: The inhibition–timing hypothesis. *Brain Research Reviews*, *53*(1), 63–88.
<https://doi.org/10.1016/j.brainresrev.2006.06.003>
- Koenig, A. M., Cesario, J., Molden, D. C., Kosloff, S., & Higgins, E. T. (2009). Incidental experiences of regulatory fit and the processing of persuasive appeals. *Personality and Social Psychology Bulletin*, *35*(10), 1342–1355.
- Koudelková, Z., & Strmiska, M. (2018). Introduction to the identification of brain waves based on their frequency. *MATEC Web of Conferences*, *210*, 05012.
<https://doi.org/10.1051/mateconf/201821005012>
- Kruschke, J. K. (2011). Bayesian assessment of null values via parameter estimation and model comparison. *Perspectives on Psychological Science*, *6*(3), 299–312.
- Kuhfeld, W. F. (2010). Experimental Design: Efficiency, Coding, and Choice Designs. *Experimental Design*, 189.
- Latimer, A. E., Rivers, S. E., Rench, T. A., Katulak, N. A., Hicks, A., Hodorowski, J. K., Higgins, E. T., & Salovey, P. (2008). A field experiment testing the utility of regulatory fit messages for

- promoting physical activity. *Journal of Experimental Social Psychology*, 44(3), 826–832.
<https://doi.org/10.1016/j.jesp.2007.07.013>
- Lee, A. Y., & Aaker, J. L. (2004). Bringing the frame into focus: The influence of regulatory fit on processing fluency and persuasion. *Journal of Personality and Social Psychology*, 86(2), 205.
- Lee, A. Y., & Higgins, E. T. (2009). The persuasive power of regulatory fit. In *Social psychology of consumer behavior* (pp. 319–333).
- Lee, A. Y., Keller, P. A., & Sternthal, B. (2010). Value from Regulatory Construal Fit: The Persuasive Impact of Fit between Consumer Goals and Message Concreteness. *Journal of Consumer Research*, 36(5), 735–747. <https://doi.org/10.1086/605591>
- Lee, A. Y., & Labroo, A. A. (2004). The Effect of Conceptual and Perceptual Fluency on Brand Evaluation. *Journal of Marketing Research*, 41(2), 151–165. JSTOR.
- Lewandowski, D., Kurowicka, D., & Joe, H. (2009). Generating random correlation matrices based on vines and extended onion method. *Journal of Multivariate Analysis*, 100(9), 1989–2001.
- Livingstone, S. (2021). *Geometric Ergodicity of the Random Walk Metropolis with Position-Dependent Proposal Covariance*. 15.
- Lockwood, P., Chasteen, A. L., & Wong, C. (2005). Age and Regulatory Focus Determine Preferences for Health-Related Role Models. *Psychology and Aging*, 20(3), 376–389.
<https://doi.org/10.1037/0882-7974.20.3.376>
- Louviere, J. J., Islam, T., Wasi, N., Street, D., & Burgess, L. (2008). Designing discrete choice experiments: Do optimal designs come at a price? *Journal of Consumer Research*, 35(2), 360–375.
- Luck, S. J. (2014). *An introduction to the event-related potential technique* (Second edition). The MIT Press.
- Marshall J. Hendrickson (Director). (2008, July 4). *Samuel Barber—Adagio for Strings*.
<https://www.youtube.com/watch?v=izQsgE0L450>
- Marsland, S. (2015). *Machine learning: An algorithmic perspective*. CRC press.
- Maslow, A. H. (1943). A theory of human motivation. *Psychological Review*, 50(4), 370.
- Matsumoto, M., & Nishimura, T. (1998). Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 8(1), 3–30.
- McCullagh, P., & Nelder, J. A. (2019). *Generalized Linear Models* (2nd ed.). Routledge.
<https://doi.org/10.1201/9780203753736>
- McMahan, T., Parberry, I., & Parsons, T. D. (2015). Evaluating Player Task Engagement and Arousal Using Electroencephalography. *Procedia Manufacturing*, 3, 2303–2310.
<https://doi.org/10.1016/j.promfg.2015.07.376>
- Meissner, M., Oppewal, H., & Huber, J. (2016). *HOW MANY OPTIONS? BEHAVIORAL RESPONSES TO TWO VERSUS FIVE ALTERNATIVES PER CHOICE*. 16.

- Mogilner, C., Aaker, J. L., & Pennington, G. L. (2008). Time Will Tell: The Distant Appeal of Promotion and Imminent Appeal of Prevention: Table 1. *Journal of Consumer Research*, 34(5), 670–681. <https://doi.org/10.1086/521901>
- Morin, C. (2011). Neuromarketing: The New Science of Consumer Behavior. *Society*, 48(2), 131–135. <https://doi.org/10.1007/s12115-010-9408-1>
- Murphy, K. P. (2012). *Machine learning: A probabilistic perspective*. MIT press.
- Naipaul, S., & Parsa, H. G. (2001). Menu Price Endings that Communicate Value and Quality. *Cornell Hotel and Restaurant Administration Quarterly*, 42(1), 26–37. <https://doi.org/10.1177/0010880401421003>
- Neal, R. M. (2012). MCMC using Hamiltonian dynamics. *ArXiv:1206.1901 [Physics, Stat]*. <http://arxiv.org/abs/1206.1901>
- Niedermeyer, E., & da Silva, F. L. (2005). *Electroencephalography: Basic principles, clinical applications, and related fields*. Lippincott Williams & Wilkins.
- Niemitalo, O. (2013). *Iki.fi/o*. <http://yehar.com/blog/>
- Nuttall, A. (1981). Some windows with very good sidelobe behavior. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 29(1), 84–91.
- Ohme, R., Reykowska, D., Wiener, D., & Choromanska, A. (2009). Analysis of neurophysiological reactions to advertising stimuli by means of EEG and galvanic skin response measures. *Journal of Neuroscience, Psychology, and Economics*, 2(1), 21.
- Otter, T. (2007). HB-analysis for multi-format adaptive CBC. *Sawtooth Software Conference*, 111.
- Pham, M. T., & Avnet, T. (2004). Ideals and Oughts and the Reliance on Affect versus Substance in Persuasion. *Journal of Consumer Research*, 30(4), 503–518. <https://doi.org/10.1086/380285>
- PopUp Karaoke Instrumentals (Director). (2019, September 26). *Avicii—Wake Me Up Karaoke Slower Acoustic Piano Instrumental Cover Lyrics*. <https://www.youtube.com/watch?v=ZdiOhPtS9LI>
- R Core Team. (2019). *R: A language and environment for statistical computing*. [R]. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>
- Ramele, R., Villar, A. J., & Santos, J. M. (2021). Report: EPOC Emotiv EEG Basics. *TECHNICAL REPORT*, 15.
- Ramsøy, T. Z., Skov, M., Christensen, M. K., & Stahlhut, C. (2018). Frontal Brain Asymmetry and Willingness to Pay. *Frontiers in Neuroscience*, 12. <https://doi.org/10.3389/fnins.2018.00138>
- Ravaja, N., Somervuori, O., & Salminen, M. (2013). Predicting purchase decision: The role of hemispheric asymmetry over the frontal cortex. *Journal of Neuroscience, Psychology, and Economics*, 6(1), 1–13. <https://doi.org/10.1037/a0029949>
- Reed Johnson, F., Lancsar, E., Marshall, D., Kilambi, V., Mühlbacher, A., Regier, D. A., Bresnahan, B. W., Kanninen, B., & Bridges, J. F. P. (2013). Constructing Experimental Designs for Discrete-Choice Experiments: Report of the ISPOR Conjoint Analysis Experimental Design Good Research Practices Task Force. *Value in Health*, 16(1), 3–13. <https://doi.org/10.1016/j.jval.2012.08.2223>

- Reznik, S. J., & Allen, J. J. B. (2018). Frontal asymmetry as a mediator and moderator of emotion: An updated review. *Psychophysiology*, *55*(1), e12965. <https://doi.org/10.1111/psyp.12965>
- Ricker, D. W. (2003). *Echo Signal Processing*. Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0312-5>
- Roberts, G. O., & Rosenthal, J. S. (2004). General state space Markov chains and MCMC algorithms. *Probability Surveys*, *1*, 20–71.
- Robertson, T., & Cryer, J. D. (1974). An iterative procedure for estimating the mode. *Journal of the American Statistical Association*, *69*(348), 1012–1016.
- Rojas, G. M., Alvarez, C., Montoya, C. E., de la Iglesia-Vayá, M., Cisternas, J. E., & Gálvez, M. (2018). Study of Resting-State Functional Connectivity Networks Using EEG Electrodes Position As Seed. *Frontiers in Neuroscience*, *12*, 235. <https://doi.org/10.3389/fnins.2018.00235>
- Rose, J. (2012). *Workshop on experimental designs*. 124.
- Rossi, P. E., Allenby, G. M., & McCulloch, R. (2005). *Bayesian statistics and marketing*. John Wiley & Sons.
- Rossion, B., & Jacques, C. (2008). Does physical interstimulus variance account for early electrophysiological face sensitive responses in the human brain? Ten lessons on the N170. *NeuroImage*, *39*(4), 1959–1979. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2007.10.011>
- Rothman, A. J., Wlaschin, J. T., Bartels, R. D., Latimer, A., & Salovey, P. (2013). 28 How Persons and Situations Regulate Message Framing Effects: The Study of Health Behavior. *Handbook of Approach and Avoidance Motivation*, 475.
- Salminen, M., Kivikangas, J. M., Ravaja, N., & Kallinen, K. (2009). Frontal EEG asymmetry in the study of player experiences during competitive and cooperative dual play. *Proceedings of Game and Entertainment Technologies*, 44–55.
- Schmidt, B., & Hanslmayr, S. (2009). Resting frontal EEG alpha-asymmetry predicts the evaluation of affective musical stimuli. *Neuroscience Letters*, *460*(3), 237–240. <https://doi.org/10.1016/j.neulet.2009.05.068>
- Schmidt, L. A., & Trainor, L. J. (2001). Frontal brain electrical activity (EEG) distinguishes valence and intensity of musical emotions. *Cognition and Emotion*, *15*(4), 487–500. <https://doi.org/10.1080/0269993004200187>
- Schoot, R. van de, Kaplan, D., Denissen, J., Asendorpf, J. B., Neyer, F. J., & Aken, M. A. G. van. (2014). A Gentle Introduction to Bayesian Analysis: Applications to Developmental Research. *Child Development*, *85*(3), 842–860. <https://doi.org/10.1111/cdev.12169>
- Semin, G. R., Higgins, T., de Montes, L. G., Estourget, Y., & Valencia, J. F. (2005). Linguistic Signatures of Regulatory Focus: How Abstraction Fits Promotion More Than Prevention. *Journal of Personality and Social Psychology*, *89*(1), 36–45. <https://doi.org/10.1037/0022-3514.89.1.36>
- Shah, J., Higgins, E. T., & Friedman, R. S. (1998). *Performance Incentives and Means: How Regulatory Focus Influences Goal Attainment*. 9.

- Shulman, H. C., Dixon, G. N., Bullock, O. M., & Colón Amill, D. (2020). The Effects of Jargon on Processing Fluency, Self-Perceptions, and Scientific Engagement. *Journal of Language and Social Psychology*, 0261927X20902177. <https://doi.org/10.1177/0261927X20902177>
- Simply Three (Director). (2014, December 15). *Wake Me Up—Avicii (violin/cello/bass cover)—Simply Three*. <https://www.youtube.com/watch?v=XSs2cR2Tvuk>
- Smith, E. E., Reznik, S. J., Stewart, J. L., & Allen, J. J. B. (2017a). Assessing and Conceptualizing Frontal EEG Asymmetry: An Updated Primer on Recording, Processing, Analyzing, and Interpreting Frontal Alpha Asymmetry. *International Journal of Psychophysiology : Official Journal of the International Organization of Psychophysiology*, 111, 98–114. <https://doi.org/10.1016/j.ijpsycho.2016.11.005>
- Smith, E. E., Reznik, S. J., Stewart, J. L., & Allen, J. J. B. (2017b). Assessing and conceptualizing frontal EEG asymmetry: An updated primer on recording, processing, analyzing, and interpreting frontal alpha asymmetry. *International Journal of Psychophysiology*, 111, 98–114. <https://doi.org/10.1016/j.ijpsycho.2016.11.005>
- Solnais, C., Andreu-Perez, J., Sánchez-Fernández, J., & Andréu-Abela, J. (2013). The contribution of neuroscience to consumer research: A conceptual framework and empirical review. *Journal of Economic Psychology*, 36, 68–81. <https://doi.org/10.1016/j.joep.2013.02.011>
- Stan Development Team. (2016). *Stan Modeling Language*.
- Stan Development Team. (2019). *Stan User's Guide*. https://mc-stan.org/docs/2_26/stan-users-guide/index.html
- Strmiska, M., & Koudelkova, Z. (2018). Analysis of Performance Metrics Using *Emotiv EPOC +. MATEC Web of Conferences*, 210, 04046. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201821004046>
- Tandle, A., Jog, N., Dharmadhikari, A., & Jaiswal, S. (2016). Estimation of valence of emotion from musically stimulated EEG using frontal theta asymmetry. *2016 12th International Conference on Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (ICNC-FSKD)*, 63–68.
- Taylor, S. J., & Letham, B. (2018). Forecasting at scale. *The American Statistician*, 72(1), 37–45.
- TI Precision Labs – ADCs: Fast Fourier Transforms (FFTs) and Windowing*. (2018). <https://www.youtube.com/watch?v=dCeHOf4cJE0>
- Toubia, O., Simester, D. I., Hauser, J. R., & Dahan, E. (2003). Fast polyhedral adaptive conjoint estimation. *Marketing Science*, 22(3), 273–303.
- Traets, F., Sanchez, D. G., & Vandebroek, M. (2019). Generating Optimal Designs for Discrete Choice Experiments in R: The idfix Package. *Journal of Statistical Software*.
- Train, K. (2001). *A Comparison of Hierarchical Bayes and Maximum Simulated Likelihood for Mixed Logit*. 13.
- Tran, T. P., Guzmán, F., Paswan, A. K., & Blankson, C. (2020). National versus private brand: A regulatory focus perspective. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 57, 102198. <https://doi.org/10.1016/j.jretconser.2020.102198>
- Van Westendorp, P. H. (1976). NSS Price Sensitivity Meter (PSM)—A new approach to study consumer perception of prices. *Proceedings of the 29th ESOMAR Congress*, 139167.

- Vaughn, L. A., Childs, K. E., Maschinski, C., Paul Niño, N., & Ellsworth, R. (2010). Regulatory fit, processing fluency, and narrative persuasion. *Social and Personality Psychology Compass*, 4(12), 1181–1192.
- Vehtari, A. (2022, December 19). *Cross-validation FAQ*. [https://web.archive.org/web/20221219223947/https://avehtari.github.io/modelselection/CV-FAQ.html#16_How_to_interpret_in_Standard_error_\(SE\)_of_elpd_difference_\(elpd_diff\)](https://web.archive.org/web/20221219223947/https://avehtari.github.io/modelselection/CV-FAQ.html#16_How_to_interpret_in_Standard_error_(SE)_of_elpd_difference_(elpd_diff))
- Vehtari, A., Gelman, A., & Gabry, J. (2017). Practical Bayesian model evaluation using leave-one-out cross-validation and WAIC. *Statistics and Computing*, 27(5), 1413–1432.
- Vehtari, A., & Ojanen, J. (2012). A survey of Bayesian predictive methods for model assessment, selection and comparison. *Statistics Surveys*, 6(none). <https://doi.org/10.1214/12-SS102>
- Wadhwa, M., & Zhang, K. (2015). This Number Just Feels Right: The Impact of Roundedness of Price Numbers on Product Evaluations. *Journal of Consumer Research*, 41(5), 1172–1185. <https://doi.org/10.1086/678484>
- Wang, J., & Lee, A. Y. (2006). The role of regulatory focus in preference construction. *Journal of Marketing Research*, 43(1), 28–38.
- Welch, P. (1967). The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2), 70–73.
- Zellner, A. (1996). *Introduction to Bayesian inference in econometrics*.

SPISAK TABELA

Tabela 7.1 Intenzitet asocijacije koje brend Lavazza ima u odnosu na posmatarnih pet pojmovnih opisa.....	101
Tabela 7.2 Percipiran intenzitet kvaliteta kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla.....	101
Tabela 7.3 Percipiran intenzitet prestiža kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla.....	102
Tabela 7.4 Percipiran intenzitet atraktivnosti kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla.....	102
Tabela 7.5 Percipiran intenzitet ekskluzivnosti kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla.....	102
Tabela 7.6 Percipiran intenzitet asocijacije sa pojmom “siguran izbor” kafe (skala 1-5) u zavisnosti od zemlje porekla.....	103
Tabela 7.7 Preferencije studenata prema različitom tipu posluživanja.....	103
Tabela 7.8 Elicitacija cena (u RSD) koje su ispitanici spremni da plate za šolju espresso kafe.....	105
Tabela 7.9 Struktura uzorka prema polu.....	106
Tabela 7.10 Struktura uzorka prema dodeljenom muzičkom stimulusu*.....	106
Tabela 7.11 Emocionalne reakcija ispitanika na muzički stimulus – moderna muzika.....	108
Tabela 7.12 Asocijacije muzičkih stimulusa prema datim pojmovima – moderna muzika.....	108
Tabela 7.13 Emocionalne reakcija ispitanika na muzički stimulus – klasična muzika.....	109
Tabela 7.14 Asocijacije muzičkih stimulusa prema datim pojmovima – klasična muzika.....	110
Tabela 7.15 Eksperimentalni dizajn sa atributima i njihovim nivoima.....	112
Tabela 7.16 Tačkaste ocene očekivanja.....	114
Tabela 7.17 Muzički stimulusu korišćeni u eksperimentu.....	115
Tabela 7.18 BIS/BAS skala za merenje hroničnog regulacionog fokusa.....	120
Tabela 7.19 Varijable korišćene u modelima H1 i H2.....	120
Tabela 7.20 Ocene efektivnih uzoraka (apsolutna i relativna mera*).....	127
Tabela 7.21 Analiza senzitivnosti hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	129
Tabela 7.22 Ocene hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	130
Tabela 7.23 Proporcija negativnih vrednosti aposteriornih raspodela.....	131
Tabela 7.24 Ocene efektivnih uzoraka (apsolutna i relativna mera*).....	133
Tabela 7.25 Analiza senzitivnosti hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	134
Tabela 7.26 Ocene hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	135
Tabela 7.27 Proporcija negativnih vrednosti aposteriornih raspodela.....	136
Tabela 7.28 Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela modela iz H1 i H2.....	137
Tabela 7.29 Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela modela iz H1 i H2.....	137
Tabela 7.30 Ocene efektivnih uzoraka (apsolutna i relativna mera*).....	142
Tabela 7.31 Analiza senzitivnosti hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	144
Tabela 7.32 Ocene hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	144
Tabela 7.33 Ocene efektivnih uzoraka (apsolutna i relativna mera*).....	147
Tabela 7.34 Analiza senzitivnosti hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	149
Tabela 7.35 Ocene hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	149
Tabela 7.36 Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela modela iz H4 i H5.....	150
Tabela 7.37 Očekivana log aposteriorna prediktivna raspodela modela iz H4 i H5.....	151

SPISAK SLIKA

Slika 3.1 Pozicije elektroda prema međunarodnom 10-20 sistemu.....	22
Slika 3.2 Primer talasa u ERP istraživanju tokom posmatranja ljudskih lica (crna krivulja) i automobila (siva krivulja).	25
Slika 3.3 Primer EEG signala sa izraženom alfa aktivnošću.....	26
Slika 3.4 Primer sumiranja signala različitih frekvencija i amplituda. Četvrti signal predstavlja zbir prva tri signala.....	27
Slika 3.5 Transformacija sirovog signala iz vremenskog domena u frekvencioni.....	28
Slika 3.6. Prikaz faznog pomeranja signala.....	29
Slika 3.7 Primer uzorkovanja signala (predstavljeno zvezdicama) sa znatno manjom frekvencijom od signala koji se uzorkuje.....	31
Slika 3.8 Prikaz signala sa diskontinuitetom u vremenskom u frekvencionom domenu (prvi red) i njegove modifikovane verzije pomoću prozorske funkcije (drugi red).....	32
Slika 3.9 Izgled amplitudnih spektara dobijenih nakon modifikacije sirovog signala određene frekvencije Hanovom (levi grafikon), Hemingovom (srednji grafikon) i Blekman-Harisovom (desni grafikon) prozorskom funkcijom.	32
Slika 3.10 Ilustracija efekta uglačavanja korišćenjem konvolucije funkcija $s(t)$ i $r(t)$	36
Slika 5.1 Simulacija funkcije gustine eksponencijalne raspodele po metodu inverzne transformacije (histogram) i teorijska gustina eksponencijalne raspodele (linija).....	59
Slika 5.2 Simulacija dvodimenzione normalne raspodele sa korelacijom 0,9 metodom Metropolis-Hejstingsa za različit broj iteracija (100, 1000, 10.000).	67
Slika 5.3 Dijagram traga za MH algoritam u prilikom simuliranja bivarijacione normalne raspodele u slučaju korelacionog koeficijenta $r=0,99$ i $r=0,10$ (gornji i donji grafikon, redom).	68
Slika 5.4 Dijagram traga za MH algoritam u prilikom simuliranja bivarijacione normalne raspodele u slučaju različitih početnih stanja.	69
Slika 5.5 Simulacija bivarijacione normalne raspodele sa korelacijom 0,9 Gibsovim metodom za različit broj iteracija (100, 1000, 10000).....	71
Slika 5.6 Ilustracija širenja prostora sa dodatnim dimenzijama.	72
Slika 5.7 Ilustracija efikasnosti uzorkovanja različitim metodama. Korišćena je multivarijaciona normalna raspodela dimenzionalnosti 250 sa visokom korelacijom između dimenzija. Samo prve dve dimenzije su prikazane za svaki metod. Za Metropolis i Gibsov metod korišćen je uzorak od 1.000.000 jedinica gde je svaka 1000-ta jedinica prikazana zarad lakše preglednosti. Za HMC i MK metod korišćen je uzorak veličine 1000.....	73
Slika 5.8 Ilustracija logike pretraživanja prostora energije kod HMC metoda.	75
Slika 5.9 Ilustracija algoritma žabljeg skoka na primeru kretanja klikera u lavabou. Na levom grafikonu su date pozicije klikera u 25 iteracija. Srednji grafikon pokazuje promenu impulsa tokom kretanja klikera po lavabou. Desni grafikon pokazuje varijacije u Hamiltonovoj vrednosti usled greške aproksimacije kod žabljeg algoritma.	78
Slika 6.1 Specifikacija apriornih informacija parametara modela. Primer tačkastih vrednosti u klasičnom pristupu (slika levo) i primer apriorne normalne raspodele u Bajesovom pristupu (slika desno).	94
Slika 7.1 Faze empirijskog istraživanja u radu.....	98
Slika 7.2 Vizualizacija frekventnosti espresso brendova korišćenjem Word Cloud aplikacije.	100
Slika 7.3 Poznatost brenda sa podsećanjem.	101
Slika 7.4 Vizuelizacija raspodele tipa posluživanja.	104
Slika 7.5 Vizuelizacija ženskog dela uzorka prema dodeljenom muzičkom stimulusu.....	107

Slika 7.6 Poređenje emocionalnih reakcija na dva muzička stimulusa – moderna muzika.	108
Slika 7.7 Poređenje asocijacija dva muzička stimulusa u odnosu na date pojmove – moderna muzika.	109
Slika 7.8 Poređenje emocionalnih reakcija na dva muzička stimulusa – klasična muzika.	110
Slika 7.9 Poređenje asocijacija dva muzička stimulusa u odnosu na date pojmove – klasična muzika.	110
Slika 7.10 Primer pitanja koje su ispitanici dobijali u upitniku.....	113
Slika 7.11 Faze sprovođenja glavnog eksperimenta.....	115
Slika 7.12 Model EEG uređaja korišćen u istraživanju – Emotiv EPOC+.....	117
Slika 7.13 Dijagram traga za beta hiperparametre.	125
Slika 7.14 Gelman-Rubinova statistika R. Levo: R za hiperparametre parcijalnih korisnosti svih atributa (9 hiperparametara); Desno: R za parametre parcijalnih korisnosti pojedinačnih ispitanika (32·9 parametara).....	126
Slika 7.15 Autokorelacija za hiperparametre parcijalnih korisnosti.....	127
Slika 7.16 Relativna mera efektivnog uzorka za parametre parcijalnih korisnosti svih atributa pojedinačnih ispitanika (32x9 parametara).	128
Slika 7.17 Histogrami raspodela hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	128
Slika 7.18 Aposteriorne raspodele parcijalnih korisnosti. U prvom redu se nalaze gustine raspodele koeficijenta interakcije cene i prvog stimulusa (muzika sporog ritma), a u drugom interakcije cene i drugog stimulusa (muzika brzog ritma).	130
Slika 7.19 Dijagram traga za beta hiperparametre.	131
Slika 7.20 Gelman-Rubinova statistika R. Levo: R za hiperparametre parcijalnih korisnosti svih atributa (10 hiperparametara); Desno: R za parametre parcijalnih korisnosti pojedinačnih ispitanika (32·10 parametara).	132
Slika 7.21 Autokorelacija za hiperparametre parcijalnih korisnosti.....	132
Slika 7.22 Relativna mera efektivnog uzorka za parametre parcijalnih korisnosti svih atributa pojedinačnih ispitanika (32·10 parametara).	133
Slika 7.23 Histogrami raspodela hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	134
Slika 7.24 Aposteriorne raspodele parcijalnih korisnosti. U prvom redu se nalaze gustine raspodele koeficijenta interakcije cene, frontalne asimetrije i emocionalne pobuđenosti, a u drugom interakcije cene i emocionalne pobuđenosti.	136
Slika 7.25 Dijagram traga za beta hiperparametre.	140
Slika 7.26 Gelman-Rubinova statistika R hiperparametre parcijalnih korisnosti i Cena_RF koeficijent.	141
Slika 7.27 Autokorelacija za hiperparametre parcijalnih korisnosti.....	142
Slika 7.28 Histogrami raspodela hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	143
Slika 7.29 Aposteriorne raspodela parametra regulacionog fokusa - BIS/BAS.....	145
Slika 7.30 Dijagram traga za beta hiperparametre.	146
Slika 7.31 Gelman-Rubinova statistika R.....	146
Slika 7.32 Autokorelacija za hiperparametre parcijalnih korisnosti.....	147
Slika 7.33 Histogrami raspodela hiperparametara parcijalnih korisnosti.....	148
Slika 7.34 Aposteriorna raspodele parametra regulacionog fokusa - frontalne asimetrije.....	150

BIOGRAFIJA AUTORA

Lazar Čolić je rođen 24.02.1987. godine u Beogradu. Četvrtu beogradsku gimnaziju je završio 2006. godine (prirodno-matematički smer). Iste godine je upisao Ekonomski fakultet Univerziteta u Beogradu, smer Statistika, informatika i kvantitativne finansije, opciona grupa Statistika, koji je završio 2011. godine sa prosečnom ocenom 9,34. Školske 2011/12. godine Lazar Čolić upisuje master akademske studije na istom fakultetu, modul Kvantitativna analiza – podmodul Statistika, koje završava sa prosečnom ocenom 9,89 i odbranjenim master radom sa temom "Dinamički faktorski modeli: analiza i primena dvostepenog pristupa". Doktorske studije na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Beogradu upisao je marta 2014. godine na studijskom programu Statistika i položio sve ispite sa prosečnom ocenom 9,67.

Od 2012. godine zaposlen je na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Beogradu kao saradnik u nastavi na katedri za statistiku i matematiku, a od 2014. godine izabran je u zvanje asistenta. Nastavu izvodi na predmetu Istraživanje tržišta. Od 2022. godine je zaposlen u kompaniji IQVIA kao statistički programer.

Tokom osnovnih studija Lazar Čolić je bio nosilac stipendija zadužbine „Vlajko Kalinić“ i zadužbine „Milivoje Jovanović i Luka Čelović“. U periodu od marta 2010. godine do jula 2010. godine boravi u Beču na Wirtschafts Universität kao stipendista programa razmene studenata CEEPUS (Central European Exchange Program for University Studies). Školske 2010/11. godine, kao stipendista programa JoinEU-SEE finansiranog od strane Evropske komisije, odlazi na dvosemestralni program razmene studenata u Gracu na Karl-Franz Universität. Tokom 2016. boravio je na stručnom usavršavanju na Universität Zürich pod mentorstvom profesora Martina Natera.

Njegova istraživačka interesovanja su usmerena ka primeni kvantitativnih metoda u oblasti marketinških istraživanja i neuromarketinga. Lazar je objavio veći broj naučnih i stručnih radova samostalno i u koautorstvu i učestvovao na brojnim međunarodnim konferencijama. Koautor je udžbenika „Primena tehnika multivarijacione analize u marketinškim istraživanjima“. Ima višegodišnje iskustvo kao konsultant na brojnim projektima u Srbiji i inostranstvu.

IZJAVA O AUTORSTVU

Potpisania **Lazar Čolić**
broj indeksa **3044/2013**

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom
Neuromarketinški pristup i primena Bajesovih modela u analizi efekata regulacionog stanja na odlučivanje potrošača

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

U Beogradu, _____

IZJAVA O ISTOVETNOSTI ŠTAMPANE I ELEKTRONSKE VERZIJE DOKTORSKOG RADA

Ime i prezime autora **Lazar Čolić**

Broj indeksa **3044/2013**

Studijski program **Statistika**

Naslov rada **Neuromarketinški pristup i primena Bajesovih modela u analizi efekata regulacionog stanja na odlučivanje potrošača**

Mentor **dr Ivana Prica**

Potpisani **Lazar Čolić**

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao za objavljivanje na portalu **Digitalnog repozitorijuma Univerziteta u Beogradu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis doktoranda

U Beogradu, _____

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

Neuromarketinški pristup i primena Bajesovih modela u analizi efekata regulacionog stanja na odlučivanje potrošača

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo

2. Autorstvo – nekomercijalno

3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade

4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima

5. Autorstvo – bez prerade

6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci, kratak opis licenci dat je na poledini lista).

Potpis doktoranda

U Beogradu, _____
