Универзитет у Београду
Математички факултет

Тања Д. Јовановић Спасојевић

УТАПАЊА ПРОСТОРА ХАРМОНИЈСКИХ ФУНКЦИЈА СА МЕШОВИТОМ НОРМОМ У ОГРАНИЧЕНИМ ОБЛАСТИМА У $\mathbb{R}^n$

Докторска дисертација

Београд, 2022.

University of Belgrade
Faculty of Mathematics

Tanja D. Jovanović Spasojević

EMBEDDINGS OF HARMONIC MIXED NORM SPACES IN BOUNDED DOMAINS IN $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$

Doctoral Dissertation

Beograd, 2022

Ментор:

проф. др Милош Арсеновић, редовни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

1. академик Миодраг Матељевић
2. проф. др Оливера Михић, редовни професор, Универзитет у Београду, Факултет огранизационих наука

Датум одбране:

..... 2022.

ЗАХВАЛНОСТ

Са пуним поштовањем и уважавањем желим пре свега да се захвалим свом ментору, проф. др Милошу Арсеновићу на стручној помоћи, разумевању и саветима у изради моје докторске дисертације. Захваљујем му што ми је својим огромним знањем, љубављу и посвећеношћу увео у чаробни свет математичке анализе у коме сам нашла себе и у коме желим да се и даље усавршавам.

Нећу заборавити сате проведене у тражењу најбољег решења и да будем најискренија, ова докторска дисертација је резултат нашег разумавања, његове стручне помоћи, уважавања и обостраног поштовања.

Изузетна ми је част што је уважени академик Миодраг Матељевић члан комисије за одбрану рада, као и проф. др Оливера Михић као познати и поштовани чланови у нашим академским круговима.

Наравно, нећу заборавити да се захвалим својим колегиницама и колегама са којима радим јер су веровали у мене и подржавали ме безрезервно.

Ипак, поред мог поштованог ментора, проф. др Милоша Арсеновића кога морам из дубоког пијетета још једном поменути, највећи ослонац, ветар у леђа подршка, била је моја породица која је увек и безусловно веровала у мене.

УТАПАЊА ПРОСТОРА ХАРМОНИЈСКИХ ФУНКЦИЈА СА МЕШОВИТОМ НОРМОМ У ОГРАНИЧЕНИМ ОБЛАСТИМА У R^n

У овом раду предмет разматрања су теореме утапања тежинских Бергманових простора у L^p - просторе, као и теореме утапања простора хармонијских функција са мешовитом нормом.
Први део тезе уопштава теореме утапања Бергманових простора у $L^p(\mu)$ - просторе, где је μ Борелова мера на релевантном домену. Раније су били испитавани на доменима као што су јединична лопта и горњи полупростор. Уопштење се односи на ограничене домене $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ са границом класе C^1. Ово утапање ће важити за било које $p > 0$, када год мера простора L^p задовољава услов Карлесона. Обрнути смер ће важити само у случају када је $p > 1 + \frac{\alpha+2}{n-2}$.
Други део дисертације такође уопштава теореме утапања простора мешовитих норми хармонијских функција на јединичној лопти, при томе се уопштење односи на домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничен са C^1 границом. Међутим, поред тога, долазимо и до још једног битног резултата који се односи на ограниченост максималног оператора у мешовитој норми на општем домену за класу QNS функција.

Кључне речи: хармонијске функције, Хардијеви простори, Бергманови простори, мешовити простори

Научна област: Математичка анализа

Ужа научна област: Хармонијска анализа

Abstract

In this thesis, subjects of consideration are the embeddings theorems of weighted Bergman spaces in L^p-spaces, as well as embeddings theorems of harmonic mixed norm spaces.

The first part of the thesis generalizes the theorems of embeddings Bergman spaces into $L^p(\mu)$-spaces, where μ is a Borel measure on a given domain. They have been earlier studied on domains such as unit ball and upper half-space. Generalization refers to bounded domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ with C^1 boundary. This embedding will be valid to any $p > 0$, whenever the measure of the spaces L^p satisfies the Carledon condition. Reverse the direction will be valid only in case if $p > 1 + \frac{\alpha+2}{n-2}$.

The second part of the dissertation also generalizes the embeddings theorems of mixed norm spaces of harmonic functions on a unit ball, where the generalization is applied to the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ with C^1 boundary. However, in addition we are obtaining another important result relating to the limitation of the maximum operators in the mixed norm on the general domain for the class of QNS functions.

Key words: harmonic function, Hardy spaces, Bergman spaces, Mixed norm spaces

Scientific field: Mathematical analysis

Scientific subfield: Harmonic analysis

Садржај

Глава 1

Увод

Хармонијске функције (решења Лапласове једначине) имају важну улогу у многим областима математике, физике и техничких наука. Теорија H^p простора (Хардијеви простори), настала је почетком прошлог века у радовима G. H. Hardy, J. E. Littlewood, I. I. Privalov, F. и M. Riesz, V. Smirnov и G. Szego. Независно, Stefan Bergman је увео просторе које данас зовемо Бергмановим (у случају $p = 2$). Крајем шездесетих година 20-ог века долази се до открића тежинских Бергманових простора, а потом се појављују и простори мешовитих норми. Сви ови простори су се у почетку проучавали у случају холоморфних и аналитичких функција, а потом хармонијских.

Докторска теза је састављена од пет глава, од којих су најзначајније трећа и пета. У трећој глави су описани простори хармонијских функција, тј. Хардијеви, Бергманови, тежински Бергманови простори и мера Карлесона. Као нов допринос теорији је дата теорема утапања тежинског Бергмановог простора у $L^p(\Omega, \mu)$ у случају ограничене области Ω са глатком границом. Четврта глава се односи на неке помоћне резултате и то: Витнијеву декомопозицију и QNS функције. У петој глави која је по доприносу и најзначајнија, дефинисани су простори мешовитих норми хармонијских функција, и дате неке од теорема утапања датих простора. Најзначајнији резултат није само теорема утапања која се уопштава када је у питању домен на коме се посматрају дати простори, него и ограниченост максималног оператора у мешовитој норми на општем домену за класу QNS функција.

Глава 2

Основни појмови и ознаке

На почетку дајемо кратак преглед неких основих појмова који ће се користити у наставку.

Простор и полупростор

Под реалним n-димензионалним простором $\mathbb{R}^n$ подразумевамо скуп уређених n-торки $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$.
Горњи полупростор у $\mathbb{R}^n$ означаваћемо са $\mathbf{H}^n$, односно $\mathbf{H}$, када није потребно нагласити димензију n, дакле $\mathbf{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, x_1, \ldots, x_n), x_n > 0\}$.

Јединични диск $\mathbf{D}$ *у* $\mathbb{R}^2$

Диск полупречника r, $r > 0$, са центром у тачки x комплексне равни $\mathbb{C}$, у ознаци $D(x, r)$, је скуп тачака за које важи $D(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\}$. У случају када је $r = 1$ и $x = 0$, за диск кажемо да је јединични и означаваћемо га са $\mathbf{D}$.

Јединична лопта $\mathbf{B}$ *у* $\mathbb{R}^n$

Отворену лопту полупречника r, $r > 0$, са центром у тачки $x \in \mathbb{R}^n$, означавамо са $\mathbf{B}^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$, а са $\partial\mathbf{B}^n = \mathbf{S}^{n-1}(x, r)$ њену границу, односно сферу, тј. $\partial\mathbf{B}^n(x, r) = \mathbf{S}^{n-1}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| = r\}$. Затворена лопта у ознаци $\overline{\mathbf{B}^n}(x, r)$ је унија отворене лопте $\mathbf{B}^n(x, r)$ и њене границе $\partial\mathbf{B}^n(x, r)$, тј. $\overline{\mathbf{B}^n}(x, r) = \mathbf{B}^n(x, r) \cup \partial\mathbf{B}^n(x, r)$. Када је $r = 1$ и $x = 0$, за лопту кажемо да је јединична и означаваћемо је са $\mathbf{B}^n$, а њену одговарајућу сферу са $\mathbf{S}^{n-1}$.
Запремину јединичне лопте означићемо са ω_n, а запремину лопте $\mathbf{B}^n(x, r)$ са $|\mathbf{B}^n(x, r)|$. Површину јединичне (анормализоване) сфере $\mathbf{S}^{n-1}$ означаваћемо са $\omega_{n-1} = n\omega_n$, а површина сфере $\mathbf{S}^{n-1}(x, r)$ је $Area(\mathbf{S}^{n-1}) = r^{n-1}n\omega_n$. Запремина лопте $\mathbf{B}^n(x, r)$ је $|\mathbf{B}^n(x, r)| = V(\mathbf{B}^n) = r^n\omega_n$.

Самерљивост величина

Величине A и B су самерљиве у запису $A \asymp B$ ако постоје константе $0 < c \leq$

$C < \infty$ тако да за разматране вредности A и B важи:

$$c|A| \leq |B| \leq C|A|. \tag{2.1}$$

Лебегова мера

Лебегову меру означавамо са m, или пак са dV (запремински елемент).

Борелова мера

Нека је $\mathcal{B}_\Omega$ Борелова σ алгебра отвореног скупа $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, тј. најмања σ- алгебра која садржи све отворене подскупове од Ω. Борелова мера на Ω је мера μ дефинисана на $\mathcal{B}_\Omega$ и за коју важи

$$\mu(K) < \infty,$$

за сваки компактан скуп $K \subset \Omega$.
Свака Борелова мера је регуларна, тј.

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, K \text{ компактан}\},\ \mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \text{ је отворен}\},$$

за било који Борелов скуп $A \subset \Omega$.
Површинску меру на $(n-1)$ - димензионој површи $M \subset \mathbb{R}^n$ класе C^1 означавамо са $d\sigma$.

Радијална максимална функција

Нека је u комплексна функција дефинисана на $\mathbf{B}$. Радијална максимална функција функције u је функција

$$(M_{rad}u)(\xi) = \sup_{0 \leq r < 1} |u(r\xi)|, \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Дифеоморфизам

Дифеоморфизам је C^1 пресликавање између два отворена скупа у $\mathbb{R}^n$ чији је инверз такође C^1.

Полунепрекидне функције

Дефиниција 2.1. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функција $u : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ је полунепрекидна одозго у тачки $a \in \Omega$ ако за било који број $C > u(a)$ постоји $\delta = \delta(a, C)$ тако да је $u(x) < C$ кад год је $|x - a| < \delta$ и $x \in \Omega$. Функција u је полунепрекидна одозго на Ω ако је полупрекидна одозго у свакој тачки на Ω.*

Доказује се да је функција u полунепрекидна одозго на Ω, ако и само ако су скупови $\{x \in \Omega : u(x) < C\}$ отворени у Ω за свако $C \in \mathbb{R}$. Може се доказати да је u полунепрекидна одозго ако је $\limsup_{x \to a} u(x) \leq u(a)$ за свако $a \in \Omega$.

Напомена 2.1. Приметимо да полунепрекидне одозго функције могу узимати вредности $-\infty$ и $+\infty$.

Лако се види, ако су f и g функције полунепрекидне одозго и $C \geq 0$, тада су и функције: Cf, $f+g$, $\max(f,g)$ и $\min(f,g)$ полунепрекидне одозго. Полунепрекидност одозго повлачи и локалну ограниченост одозго:

Теорема 2.1. *Нека је функција f полунепрекидна одозго на отвореном скупу $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тада је f ограничена одозго на компактним подскуповима и достиже супремум на сваком компактном скупу $K \subset \Omega$.*

L^p простори

Две мерљиве функције у односу на мерљив простор (X,μ), где је μ позитивна мера на некој σ-алгебри простора X, поистовећујемо, уколико се оне поклапају скоро свуда на простору X у односу на дату меру μ. Функција f, којом се репрезентује једна тако добијена класа еквиваленције припада простору $L^p(X,\mu)$ уколико важи

$$||f||_{L^p(X,\mu)} = ||f||_p = \left(\int\limits_X |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty, \text{ za } 0 < p < \infty,$$

$$||f||_{L^\infty(X,\mu)} = ||f||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|.$$

За $1 \leq p \leq +\infty$ ово је Банахов простор, а за $0 < p < 1$, $L^p(X)$ је комплетан метрички простор са метриком $d_p(f,g) = \int\limits_X |f-g|^p d\mu$. Када је $p=2$, $L^2(X)$ је и Хилбертов са скаларним производом дефинисаним на следећи начин

$$\langle u,v\rangle = \int\limits_X u(x)\overline{v(x)}d\mu(x).$$

Став 2.1. *Нека је $\mu(X) < \infty$ и $1 \leq p \leq r \leq \infty$. Ако $f \in L^r(X)$ тада је*

$$||f||_p \leq (\mu(X))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}||f||_r,$$

односно важи

$$L^r(X) \hookrightarrow L^p(X).$$

Доказ: За $p = r$ тврђење очигледно следи. Нека је $1 \leq p < r \leq \infty$ и $f \in L^r(X)$.

Тада је $|f|^p \in L^{\frac{r}{p}}(X)$ и Хелдерова неједнакост даје

$$\int\limits_X |f(x)|^p d\mu(x) \leq \left(\int\limits_X \left(|f(x)|^p\right)^{\frac{r}{p}} d\mu(x) \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int\limits_X d\mu(x) \right)^{1-\frac{p}{r}}$$

што је еквивалентно са

$$||f||_p \leq (\mu(X))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} ||f||_r.$$

Глава 3

Простори хармонијских функција

Ова глава је састављена од шест поглавља. У првом поглављу описујемо хармонијске и субхармонијске функције и дајемо неке њихове особине, потом уводимо максималне функције. У трећем и четвртом поглављу се бавимо Хардијевим и Бергмановим просторима, са посебним освртом на случај хармонијских функција. Пето поглавље се односи на меру Карлесона и теореме утапања Карлесона. У последњем, шестом поглављу излажемо резултат аутора [46] о утапању тежинских Бергманових простора хармонијских функција у L^p просторе, $b^p(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mu)$. Ово утапање се односи на опште домене, прецизније на ограничен домен $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ са C^1 границом.

3.1 Хармонијске и субхармонијске функције

Хармонијске функције се јављају у комплексној анализи, парцијалним диференцијалним једначинама, елекромагнетици, у теорији флуида и тако даље.

Нека је $n \geq 2$ фиксиран позитиван цео број и Ω отворен непразан подскуп од $\mathbb{R}^n$. Два пута непрекидно диференцијабилна функција u, тј. из простора $C^2(\Omega)$, је хармонијска на Ω, ако је

$$\Delta u \equiv 0,$$

где је $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, а $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ када $j = \overline{1, n}$, су други парцијални изводи. Оператор Δ је Лапласијан, а једначина $\Delta u \equiv 0$ Лапласова једначина. Једнодимензионални случај није интересантан, јер свака хармонијска функција на отвореном интервалу је линеарна.

Свака хармонијска функција је бесконачно диференцијабилна и сваки парцијални извод хармонијске функције је такође хармонијски. А како је Лапласијан линеаран на $C^2(\Omega)$, збир хармонијских функција као и производ хармонијске функције и скалара су опет хармонијске.

Скуп свих хармонијских функција је векторски простор који означавамо са $h(\Omega)$.

За $y \in \mathbb{R}^n$ и функцију u на Ω, y - транслација од u је функција на $\Omega + y$ и у тачки x њена вредност је $u(x-y)$. Очито, транслације хармонијских функција су хармонијске.

За позитиван број λ и функцију u на Ω, λ - дилатација у ознаци u_λ, је функција

$$(u_\lambda)(x) = u(\lambda x)$$

дефинисана за x из $\frac{1}{\lambda}\Omega = \{\frac{1}{\lambda}w : w \in \Omega\}$. Ако је $u \in C^2(\Omega)$, простим рачуном се показује да је $\Delta(u_\lambda) = \lambda^2(\Delta u)_\lambda$ на скупу $\frac{1}{\lambda}\Omega$. Одатле непосредно следи да су дилатације хармонијских функција такође хармонијске.

Бројна основна својства хармонијских функција произилазе из Гринове формуле:

$$\int\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)dm = \int\limits_{\partial\Omega}(uD_n v - vD_n u)d\sigma, \tag{3.1}$$

где Ω представља ограничен отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$ са C^1 границом, u и v су C^2- функције у околини $\overline{\Omega}$, а D_n означава извод по правцу спољашње нормале.

Значајан је специјалан случај Гринове формуле, када је u хармонијска функција и $v \equiv 1$, тј.

$$\int\limits_{\partial\Omega} D_n u d\sigma = 0. \tag{3.2}$$

Радијално решење Лапласове једначине је функција $v(x) = c|x|^{2-n}$ $(n > 2)$, односно $v(x) = c\log|x|$ $(n = 2)$. За погодан избор константе $c = \frac{1}{n\omega_n}$ добијамо фундаментално решење Лапласове једначине $\Gamma(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n = 2, \\ \frac{c}{n-2}\frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases}$

Веза између хармонијских функција и сфера заузима централно место у теорији хармонијских функција. Особина која најбоље показује ову повезаност је особина средње вредности у чијем доказу кључну улогу има Green-ова формула.

Особина средње вредности. Ако је $u \in h(\Omega)$ и $\overline{\mathbf{B}}(x,r) \subset \Omega$, тада је $u(x)$ једнака средњој вредности функције u на $\mathbf{S}(x,r)$. Прецизније,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}(0,1)} u(x+\rho\xi)d\sigma(\xi), \qquad 0 < \rho < r,$$

$$= \frac{1}{Area\mathbf{S}(x,r)} \int\limits_{\mathbf{S}(x,r)} ud\sigma.$$

Доказ: Прво, претпоставимо да је $n > 2$. Без губљења општости можемо претпоставити да је $\mathbf{B}(x,r) = \mathbf{B}$. Фиксирајмо $\epsilon \in (0,1)$. Применом Гринове формуле (3.1), по области $W = \{y \in \mathbb{R}^n : \epsilon < |y| < 1\}$ и $v(y) = |y|^{2-n}$ као и применом особина дилатације и транслације добијамо

$$0 = \int\limits_{W_\epsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dm = \int\limits_{\partial W_\epsilon} (uD_n v - vD_n u)\, d\sigma$$

$$= \int\limits_{\mathbf{S}} (uD_n v - vD_n u)\, d\sigma - \int\limits_{\epsilon\mathbf{S}} (uD_n v - vD_n u)\, d\sigma$$

$$= (2-n) \int\limits_{\mathbf{S}} u d\sigma - (2-n)\epsilon^{1-n} \int\limits_{\epsilon\mathbf{S}} u d\sigma - \int\limits_{\mathbf{S}} D_n u d\sigma - \epsilon^{2-n} \int\limits_{\epsilon\mathbf{S}} D_n u d\sigma.$$

На основу (3.2), последња два интеграла претходног израза су једнака нули, па добијамо

$$\int\limits_{\mathbf{S}} u d\sigma = \epsilon^{1-n} \int\limits_{\epsilon\mathbf{S}} u d\sigma,$$

што је исто као и

$$\int\limits_{\mathbf{S}} u d\sigma = \int\limits_{\mathbf{S}} u(\epsilon\xi) d\sigma(\xi).$$

Пуштајући да $\epsilon \to 0$ и користећи непрекиндост функције u у тачки 0, добијамо жељени резултат.

Специјално, ако је $u \in h(\Omega)$ и $\overline{\mathbf{B}}(0,1) \subset \Omega$, онда је

$$u(0) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}(0,1)} u(\xi) d\sigma(\xi).$$

Особина средње вредности, запреминска верзија. Ако је $u \in h(\Omega)$ и $\overline{\mathbf{B}}(x,r) \subset \Omega$, тада је $u(x)$ једнака средњој вредности функције u на $\mathbf{B}(x,r)$. Прецизније,

$$u(x) = \frac{1}{|\mathbf{B}(x,r)|} \int\limits_{\mathbf{B}(x,r)} u dm.$$

Важна последица ове особине је следећа теорема:

Теорема 3.1. *(Принцип максимума) : Нека је u реална хармонијска функција у повезаном домену $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ако функција u достиже минимум или максимум у Ω онда је она константна.*

Последица ове теореме говори о томе да ако су u и v непрекидне функције на затвореном домену $\overline{\Omega}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, које су хармонијске на домену Ω и ако је $u = v$ на граници домена онда је $u = v$ и на самом домену Ω.

Последица 3.1. *Нека је Ω ограничен домен и нека је u непрекидна реално вредносна функција на $\partial\Omega$, која је и хармонијска на Ω. Тада функција u посматрана на затвореном домену $\overline{\Omega}$, достиже своје минималне и максималне вредности на граници $\partial\Omega$.*

Нажалост, ово не важи за неограничене домене, и у том случају када је Ω неограничен, или када u није непрекидна на $\overline{\Omega}$, важи следећа последица:

Последица 3.2. *[7] Нека је u реално вредносна, хармонијска функција на Ω и нека је*

$$\lim_{k\to\infty} \sup u(a_k) \leq M$$

за сваки низ (a_k) у Ω који конвергира или ка некој тачки на $\partial\Omega$ или ка ∞. Тада је $u \leq M$ на Ω.

Теорема 3.1 и њене последице (Последица 3.1 и Последица 3.2) имају смисла само за реално вредносне функције. Следећа последица се односи на комплексно вредносне функције.

Последица 3.3. *[7] Нека је Ω повезан домен и нека је u хармонијска функција на Ω. Ако $|u|$ достиже максимум у Ω, тада је функција u константна.*

За комплексно вредносне функције Последица 3.3 је аналог Теореме 3.1, а такође важе и аналогне последице за Последицу 3.1 и Последицу 3.2.

Међутим, те аналогне последице важе само за максимум или $\lim\sup$ функције $|u|$, док ни један принцип за минимум не важи за функцију $|u|$.

У наставку, уводимо Поасоново језгро за јединичну лопту.

Наиме, постоји функција P на $\mathbf{B} \times \mathbf{S}$ таква да је

$$u(x) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}(0,1)} u(\xi) P(x,\xi) d\sigma(\xi)$$

за сваку тачку $x \in \mathbf{B}$ и сваку хармонијску функцију u на $\mathbf{B}$ и непрекидну на $\overline{\mathbf{B}}$.

Приликом одређивања функције P, полазимо од специјалног случаја када је $n = 2$, и применом Тејлоровог реда, долазимо до облика функције:

$$P_{\mathbf{B}}(x,\xi) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^2}.$$

Међутим, знатно компликованији поступак је у вишим димензијама. Па да би се одредила функција $P(x,\xi)$ када је $n>2$, потребно је помоћно тврђење, тзв. Лема симетрије:

Лема 3.1. *[7] За свако $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$, важи једнакост*

$$\left|\frac{y}{|y|} - |y|x\right| = \left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right|.$$

Примењујући ову Лему 3.1 и Гринову формулу (3.1), израчунавањем, долазимо до облика Поасоновог језгра P за димензију $n>2$ који гласи:

$$P_{\mathbf{B}}(x,\xi) = \frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}.$$

Када је у питању горњи полупростор, Поасоново језгро је облика:

$$P_{\mathbf{H}}(z,t) = c_n \frac{y}{(|x-t|^2+y^2)^{\frac{n}{2}}} \quad \text{или} \quad P_{\mathbf{H}}(z,t) = c_n \frac{y}{|z-t|^n}$$

где је

$$z=(x,y)\in \mathbf{H}, \quad t\in\mathbb{R}^{n-1}, \quad c_n = \frac{2}{w_{n-1}}.$$

Поступци ових доказа се могу видети у књизи [7]. Карактеристичан пример примене Поасоновог језгра је у решавању Дирихлеовог проблема.

Дирихлеов проблем

Једно од најзначајнијих питања у теорији хармонијских функција је: "Да ли, за дату непрекидну функцију f на $\partial\Omega$, постоји непрекидна функција u на $\overline{\Omega}$, која је хармонијска на Ω, тако да важи $u=f$ на $\partial\Omega$, при чему је Ω ограничен? Ако постоји, како наћи функцију u?" Ово је чувени Дирихлев проблем.

На основу принципа максимума, ако постоји решење овог проблема, онда је оно јединствено.

Нека је сада f рестрикција на $\mathbf{S}(0,1)$ функције u, при чему је u хармонијска на $\mathbf{B}(0,1)$ и нерекидна на $\overline{\mathbf{B}}(0,1)$, тада је

$$u(x) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{\partial\Omega} f(\xi)P(x,\xi)d\sigma(\xi)$$

за свако $x\in\mathbf{B}$. Полазећи од непрекидне функције f на $\partial\Omega$, и користећи Поасоново језгро дефинишемо продужења функције f на Ω.

За произвољну $f\in C(\mathbf{S})$, дефинишемо Поасонов интеграл функције f, у ознаци

$P_{\mathbf{B}}[f]$, за коју важи

$$P_{\mathbf{B}}[f](x) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}(0,1)} f(\xi) P_{\mathbf{B}}(x,\xi) d\sigma(\xi), \qquad x \in \mathbf{B}.$$

Теорема која показује да Поасонов интеграл решава Дирихлеов проблем за лопту $\mathbf{B}$ гласи:

Теорема 3.2. *Нека је функција f непрекидна на $\mathbf{S}$ и нека је u функција дефинисана са:*

$$u(x) = \begin{cases} P_{\mathbf{B}}[f](x), & \text{ако је } x \in \mathbf{B}; \\ f(x), & \text{ако је } x \in \mathbf{S}. \end{cases}$$

Тада је функција u непрекидна на $\overline{\mathbf{B}}$ и хармонијска на $\mathbf{B}$.

За Поасонов интеграл важи још једна теорема:

Теорема 3.3. *[7] Нека је функција u непрекидна на $\overline{\mathbf{B}}$ и хармонијска на $\mathbf{B}$, тада је $u = P[u|_{\mathbf{S}}]$ на $\mathbf{B}$.*

Сада, наводимо решење Дирихлеовог проблема за горњи полупростор:

Теорема 3.4. *[7] Нека је функција f непрекидна и ограничена на $\mathbb{R}^{n-1}$ и нека је u функција дефинисана на $\overline{\mathbf{H}}$ са:*

$$u(z) = \begin{cases} P_{\mathbf{H}}[f](z), & \text{ако је } z \in \mathbf{H}; \\ f(z), & \text{ако је } z \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases}$$

Тада је функција u непрекидна на $\overline{\mathbf{H}}$ и хармонијска на $\mathbf{H}$. Штавише, на $\overline{\mathbf{H}}$ важи

$$|u| \leq ||f||_{\infty}.$$

Аналог Теореми 3.3, у случају горњег полупростора је:

Теорема 3.5. *[7] Нека је функција u непрекидна и ограничена на $\overline{\mathbf{H}}$ и хармонијска на $\mathbf{H}$, тада је $u = P_{\mathbf{H}}[u|_{\mathbb{R}^{n-1}}]$ на $\mathbf{H}$.*

Наводимо наредну теорему која описује понашање равномерно конвергентних низова хармонијских функција.

Теорема 3.6. *[7] Нека је (u_m) низ хармонијских функција на Ω тако да u_m конвергира равномерно ка функцији u на сваком компактном подскупу од Ω. Тада је функција u хармонијска на Ω.*

Доказ: Нека је $\overline{\mathbf{B}}(x,r) \subset \Omega$, потребно је показати да је функција u хармонијска на $\mathbf{B}(x,r)$. Без губљења општости пишемо $\mathbf{B}(x,r) = \mathbf{B}$.

Како је

$$u_m(y) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}} u_m(\xi) P(x,\xi) d\sigma(\xi)$$

за свако $y \in \mathbf{B}$ и свако m, где је P функција на $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x,r)$, то применом граничне вредности на обе стране, добијамо

$$u(y) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}} u(\xi) P(x,\xi) d\sigma(\xi)$$

за свако $y \in \mathbf{B}$. Тиме је показано да је функција u хармонијска на $\mathbf{B}$.

Хармонијске функције су једине непрекидне функције које задовољавају особину средње вредности. Следећа теорема показује да непрекидна функција која задовољава слабији облик особине средње вредности мора бити хармонијска.

Теорема 3.7. *[7] Нека је функција u нейрекидна на Ω. Ако за свако $x \in \Omega$ йостоји низ йозитивних бројева $r_j \to 0$ тако да важи*

$$u(x) = \frac{1}{w_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}} u(x + r_j \xi) d\sigma(\xi),$$

за свако j, тада је функција u хармонијска на Ω.

Ако сада услов непрекидности функције u заменимо са слабијим условом, условом локалне интеграбилности, добијамо следећу теорему. (За функцију кажемо да је локално интеграбилна на Ω ако је Лебег интеграбилна на сваком компактном скупу $K \subset \Omega$.)

Теорема 3.8. *[7] Ако је функција u локално интеграбилна на Ω таква да је*

$$u(x) = \frac{1}{|\mathbf{B}(x,r)|} \int\limits_{\mathbf{B}(x,r)} u dm,$$

када год је $\overline{\mathbf{B}}(x,r) \subset \Omega$, тада је функција u хармонијска на Ω.

Осим претходног принципа максимума (Теорема 3.1), дајемо још једно тврђење које је општије од Теорема 3.1, тзв. локални принцип максимума:

Теорема 3.9. *[7] Нека је Ω йовезан домен и нека је u реално вредносна, хармонијска функција на Ω која достиже локални максимум у домену Ω. Тада је функција u константна.*

За ограничене хармонијске функције у простору $\mathbb{R}^n$ важе:

Теорема 3.10. *(Liouville) [7] Ограничена хармонијска функција у $\mathbb{R}^n$ је константна.*

Теорема 3.11. *(Шварцов принцип рефлексије) [7] Нека је Ω област симетрична у односу на хиперраван E. Ако је функција u непрекидна на $\Omega \cap \overline{E^+}$, хармонијска на $\Omega \cap E^+$ и $u = 0$ на $\Omega \cap E$, тада се u хармонијски продужава на Ω. E је хиперраван облика $E = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x\rangle = c\}$, а $E^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x\rangle > c\}$, где је c реални број, b ненула вектор у $\mathbb{R}^n$ и $\langle \cdot \rangle$ скаларни производ.*

Последица 3.4. *[7] Нека је $\mathbf{H}$ горњи полупростор и нека је функција u непрекидна и ограничена на $\overline{\mathbf{H}}$ која је хармонијска на $\mathbf{H}$. Ако је $u = 0$ на $\partial\mathbf{H}$, тада је $u \equiv 0$ на $\overline{\mathbf{H}}$.*

Субхармонијске функције

Дефиниција 3.1. *Реална функција u је субхармонијска на Ω ако је полунепрекидна одозго на Ω и задовољава неједнакост*

$$u(x) \leq \frac{1}{Area(\mathbf{S}(x,r))} \int\limits_{\mathbf{S}(x,r)} u d\sigma, \quad \overline{\mathbf{B}}(x,r) \subset \Omega.$$

Теорема 3.12. *Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен скуп и нека је $u : \Omega \to \mathbb{R}$ функција из $C^2(\Omega)$. Тада је функција u субхармонијска ако и само ако је $\Delta u \geq 0$ у Ω.*

За субхармонијске функције важи:

(i) Ако је функција u субхармонијска на Ω, тада је и Cu субхармонијска у Ω за било коју константу $C \geq 0$.

(ii) Ако су функције $u_1(x), \ldots, u_m(x)$ субхармонијске у $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, тада су и функције $\sum\limits_{i=1}^{m} u_i$ и $\max\limits_{1\leq i\leq m} u_i(x)$ такође субхармонијске у Ω.

(iii) Гранична вредност равномерно конвергентног низа субхармонијских функција је субхармонијска функција.

(iv) Гранична вредност монотоно опадајућег низа субхармонијска функција је субхармонијска функција.

Важно својство субхармонијских функција гласи: Ако је u хармонијска функција тада је $|u|^p$ субхармонијска за свако $p \geq 1$. То не мора да важи за $0 < p < 1$.

Међутим, у случају $0 < p < 1$ ипак важи слабије тврђење од горе наведеног. То су за $n = 2$ доказали Hardy и Littlewood [32], а уопштили су Fefferman и Stein [25] (Section 9, Lemma 2) за $n > 2$. Ово субхармонијско понашање за $|u|^p$ гласи:

Теорема 3.13. *[25],[32] Нека је $0 < p < \infty$. Тада постоји позитивна константа $C_{n,p}$ тако да је*

$$|u(x)|^p \leq \frac{C_{n,p}}{|\mathbf{B}(x,r)|} \int\limits_{\mathbf{B}(x,r)} |u(y)|^p dy,$$

за сваку хармонијску функцију $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ *и* $\overline{\mathbf{B}}(x,r) \subset \Omega$.

Доказ: Наравно, за $p \geq 1$, је $C_{n,p} = 1$. Зато претпоставимо да је $0 < p < 1$. Нека је $|\mathbf{B}(x,r)|$ запремина лопте $\mathbf{B}(x,r)$ и може се претпоставити да је $x = 0$ и $r = 1$.

$$u(y) = \frac{\varepsilon^2 - |y|^2}{\varepsilon\omega_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}_\varepsilon} \frac{u(z)}{|y-z|^n} d\sigma(z),$$

за $y \in \mathbf{B}_\varepsilon = \mathbf{B}(0,\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$. Следи да је

$$|u(y)| \leq \frac{\varepsilon^2 - \rho^2}{\varepsilon\omega_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}_\varepsilon} \frac{|u(z)|}{(\varepsilon-\rho)^n} d\sigma(z) = \frac{\varepsilon+\rho}{\varepsilon(\varepsilon-\rho)^{n-1}\omega_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}_\varepsilon} |u(z)| d\sigma(z),$$

за $0 \leq |y| = \rho < \varepsilon < 1$. Зато је

$$M_\infty(\rho) \leq \left(1 + \frac{\rho}{\varepsilon}\right) \frac{M_1(\varepsilon)}{\left(1 - \frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{n-1}} \leq 2\left(1 - \frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{1-n} M_1(\varepsilon), \qquad 0 < \rho < \varepsilon < 1 \tag{3.3}$$

а очигледна је неједнакост

$$M_1(t) \leq M_\infty^{1-p}(t) M_p^p(t), \qquad 0 < t < 1 \tag{3.4}$$

где је $M_p(\rho) = \left(\frac{1}{\rho^{n-1}\omega_{n-1}} \int\limits_{\mathbf{S}_\rho} |u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}$, $M_\infty(p) = \sup\limits_{\mathbf{S}_\rho} |u|$. (Као резултат овог доказа, треба добити на крају да је $|u(0)| \leq C_{n,p}$, уз услов нормализације

$$\int\limits_0^1 \rho^{n-1} M_p^p(\rho) d\rho \leq 1.)$$

Користећи (3.3) и (3.4) следи да је за $0 < t < \varepsilon < 1$

$$M_1(t) \leq M_p^p(t) M_\infty^{1-p}(t) \leq M_p^p(t) M_1^{1-p}(\varepsilon) 2^{1-p} \left(1 - \frac{t}{\varepsilon}\right)^{(1-p)(1-n)},$$

па је

$$\log M_1(t) \leq p \log M_p(t) + (1-p) \log M_1(\varepsilon) + (1-p)\log 2 + (1-p)(1-n)\log\left(1 - \frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Нека је $\varepsilon = t^x$ за неко $0 < x < 1$ (тада је $t < \varepsilon$) и

$$\log M_1(t) \leq p \log M_p(t) + (1-p)\log M_1(t^x) + (1-p)\log 2 + (1-p)(1-n)\log(1 - t^{1-x}),$$

зато је

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \log M_1(t)\frac{dt}{t} \leq (1-p)\log^2 2 + (1-p)(1-n)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \log(1-t^{1-x})\frac{dt}{t}$$

$$+p\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \log M_p(t)\frac{dt}{t} + (1-p)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \log M_1(t^x)\frac{dt}{t}$$

$$= C(p,n,x) + p\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \log M_p(t)\frac{dt}{t} + \frac{1-p}{x}\int\limits_{\left(\frac{1}{2}\right)^x}^{1} \log M_1(\rho)\frac{d\rho}{\rho}.$$

Сада, нека је $x = 1-p^2$. Ако је $M_1(2^{-x}) \leq 1$ тада је $|u(x)| \leq 1$. Зато узмимо да је $M_1(2^{-x}) > 1$.

Из горње неједнакости је

$$\frac{p}{1+p}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \log M_1(t)\frac{dt}{t} \leq C(p,n) + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \log M_p^p(t)\frac{dt}{t} \leq C(p,n) + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} M_p^p(t)\frac{dt}{t}$$

$$\leq C(p,n) + 2^n\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} t^{n-1}M_p^p(t)\frac{dt}{t},$$

и добијамо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \log M_1(t)\frac{dt}{t} \leq K(u,p).$$

Како је $M_1(t)$ растућа за $0 \leq t < 1$, добијамо жељени резултат

$$|u(0)| \leq C(u,p).$$

Напомена 3.1. :

(1) Овај доказ показује да теорема важи и за комплексно вредносне хармонијске функције u.

(2) Уопштеније, теорема важи ако се $|u|$ замени са произвољном ненегативном субхармонијском функцијом на Ω.

(3) Када је $0 < p < 1$ запремина $|\mathbf{B}(x,r)|$ се не може заменити са површином $Area(\mathbf{S}(x,r))$.

Последица 3.5. *Нека је* $0 < p < \infty$. *Постоји константа која зависи од* p, $C = C_p$, *тако да је*

$$|u(0)|^p \leq C_p \int\limits_{\mathbf{B}} |u|^p d\sigma$$

за сваку хармонијску функцију u *на јединичној лопти* $\mathbf{B}$. *Када је* $p \geq 1$, *неједнакост важи за* $C_p = 1$.

3.2 Максималне функције

Максимална функција је један од најзначајнијих појмова у хармонијској анализи и парцијалним диференцијалним једначинама. Најпознатија максимална функција је Hardy-Littlewood-ова 1930. године Hardy и Littlewood у раду [31] уводе појам и испитују особине максималне функције на реалној правој. Њена вишедимензионална верзија је први пут употребљена од стране Wiener-а 1939. године у раду [100] као и Marcinkiewicz-а и Zygmund-а у [57]. Максимална функција је класичан алат у хармонијској анализи, али се користи и у проучавању простора Sobolev-а и парцијалних диференцијалних једначина [8], [53].

Hardy-Littlewood-ова максимална функција $Mf : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ локално интеграбилне функције $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ је дефинисана са

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|\mathbf{B}(x,r)|} \int\limits_{\mathbf{B}(x,r)} |f(y)| dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Позната теорема Hardy-Littlewood-Wiener тврди да је максималан оператор ограничен у $L^p(\mathbb{R}^n)$ за $1 < p \leq \infty$, тј.

$$||Mf||_p \leq C_p ||f||_p,$$

где је C_p константа која зависи само од p и n, а $|| \cdot ||_p$ је норма дефинисана у L^p просторима, ([85],Theorem I.1).

За случај када је $p = 1$ ово не важи, али постоји константа $C(n) > 0$ тако да за свако $\lambda > 0$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ важи да је

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leq C(n) \frac{||f||_1}{\lambda}.$$

Осим ове, дефинишемо још једну максималну функцију $u^\times$ за хармонијску функцију u коју ћемо користити у Глави 5, приликом доказивање теореме утапања на домену са C^1 границом. Ту функцију у дводимензионалном случају уводи Павловић у раду [66], и дефинише је на јединичном диску $\mathbf{D}$ са:

$$u^{\times}(r\xi) = \sup_{r \leq \rho \leq \frac{1+r}{2}} |u(\rho\xi)|, \qquad \xi \in \partial\mathbf{D}.$$

Следећа максимална функција је послужила као мотивација за дефинисање максималне функције на домену $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ са глатком границом.

У Бергмановим просторима на јединичној лопти у $\mathbb{R}^n$, ова максимална функција нетангенцијалног типа, која се између осталог може видети код О. Михић у [59], дата је са:

$$u^{*}(\xi) = \sup_{z \in D_c(\xi)} |u(z)|,$$

где је

$$D_c(\xi) = \{z \in \mathbf{B}(0,1) : |\xi - z| < c(1 - |z|)\}, \qquad \xi \in \mathbf{S}(0,1), \quad c > 1.$$

Сада, нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограничен домен са C^1 границом, постоји дефинирајућа функција $\rho \in C^1(\mathbb{R}^n)$ таква да је

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > 0\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}, \nabla\rho(\xi) \neq 0,$$

за свако $\xi \in \partial\Omega$. На основу теореме о цевастој околини постоји околина U границе $\partial\Omega$ и C^1- дифеоморфизам $\chi : U \to \partial\Omega \times (-r_0, r_0)$ тако да је $\chi(\partial\Omega) = \partial\Omega \times \{0\}$, $\chi(U \cap \Omega) = \partial\Omega \times (0, r_0)$. Означимо са $\varphi = \chi^{-1}$ и за $-r_0 < t < r_0$, $\Gamma_t = \varphi(\partial\Omega \times \{t\})$.

На $\Omega \cap U$ максималну функцију $u^{\times}$ функције $u : \Omega \to \mathbb{R}^+$, дефинишемо на следећи начин:

$$u^{\times}(\varphi(\xi, t)) = \sup_{\frac{3t}{4} \leq \tau \leq t} |u(\varphi(\xi, \tau))|, \qquad (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, r_0), \tag{3.5}$$

а њена својства ћемо изучавати у Глави 5.

3.3 Хардијеви простори

Хардијеви простори су интензивно испитивани од 1915. године па надаље. У раној фази развоја те теорије најзначајнији допринос су дали G. H. Hardy, J. E. Littlewood, I. I. Privalov, F. и M. Riesz, V. Smirnov и G. Szego. Већина раних радова се бавила својствима појединих функција класе H^p. Откривено је да свака функција H^p простора има радијални лимес у скоро свакој тачки јединичног круга. Затим, ограничена аналитичка функција не може имати радијалне лимесе идентички једнаке нули на подскупу јединичне кружнице који је строго позитивне мере, осим у случају када је та функција константно једнака нули. Једна од почетних ствари као иницијатор за проучавање Хардијевих простора била је њихова примена на теорију Фуријеових и тригонометријских редова. Са појавом функционалне анализе, тридесетих година прошлог века, H^p простори су почели да се посматрају као примери Банахових простора, за $1 \leq p \leq \infty$. Ово је омогућило да се дефинишу нови проблеми, као и да се пронађу ефекасније методе решавања неких старих проблема. За $0 < p \leq \infty$, H^p се посматрају као линеарни простори. Када је $0 < p < 1$, H^p су комплетни метрички простори, при чему је

$$d_p(f, g) = ||f - g||_p^p, \tag{3.6}$$

где је

$$||f||_p^p = \sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

и нису Банахови нити локално конвексни, а могу се посматрати и као затворени потпростори L^p простора. Тврђења, докази и остали садржаји се могу наћи у књигама следећих аутора: Duren [19], Garnet [30], Koosis [49] и други.

Хардијеви простори (H^p) су простори аналитичких функција, али се могу разматрати и аналогни простори хармонијских функција (h^p).

Нека је Ω произвољна просто повезана област у комплексној равни са најмање две тачке на граници. Није тешко дефинисати простор $H^\infty(\Omega)$ ограничених аналитичких функција у Ω. То су Банахови простори са нормом

$$||f||_\infty = \sup_{z \in \Omega} |f(z)|.$$

Ако је $0 < p < \infty$, постоје две могућности. Једна од могућности захтева ограниченост интеграла функције $|f|^p$ преко одређених кривих које теже ка граници области Ω, а друга захтева да $|f|^p$ има хармонијску мајоранту. Друга могућност је једноставнија и прво њу разматрамо.

За аналитичку функцију f у облсти Ω кажемо да припада класи $H^p(\Omega)$ ако субхармонијска функција $|f(z)|^p$ има хармонијску мајоранту у Ω. Норма се онда може дефинисати као $||f|| = [u(z_0)]^{1/p}$, где је z_0 нека фиксирана тачка у Ω, а u најмања хармонијска мајоранта функције $|f|^p$.

Када је у питању прва, претходно наведна, могућност за аналитичку функцију $f \in \Omega$ кажемо да је класе $E^p(\Omega)$ ако постоји низ ректифицибилних Жорданових кривих $C_1, C_2, \ldots$ у Ω, које теже граници области Ω, у смислу да за сваки компактан скуп K постоји n_0, за које је $K \subset intC_n$ (овде $intC_n$ означава област коју ограничава Жорданова крива C_n), када год је $n \geq n_0$, тако да је

$$\int\limits_{C_n} |f(z)|^p |dz| \leq M < \infty.$$

Није одмах јасно да се $E^p(\Omega)$ своди на H^p простор када је $\Omega = \mathbf{D}$. Међутим, како се испоставило, довољно је узети у обзир криве C_n које представљају криве произвољног конформног пресликавања φ јединичног диска на Ω, тј. $C_n = \varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 - \frac{1}{n}\})$.

3.3.1 Хардијеви простори хармонијских функција

Наше интересовање је везано за хармонијске функције и то у областима у $\mathbb{R}^n$, па ћемо у наставку дефинисати и дати неке особине везане за Хардијеве просторе хармонијских функција.

Наводимо најједноставнији случај када је домен диск, и дефинишемо класу Хардијевих простора хармонијских функција на диску $\mathbf{D}$.

Дефиниција 3.2. *Хардијев простор $h^p(\mathbf{D})$, $0 < p < \infty$, је скуп свих хармонијских функција $u : \mathbf{D} \to \mathbb{R}$ за које важи*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int\limits_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty.$$

Простор $h^\infty(\mathbf{D})$ је скуп свих ограничених хармонијских функција, за које важи

$$\sup_{z \in \mathbf{D}} |u(z)| < \infty.$$

За $0 < p \leq \infty$,

$$||u||_{h^p} = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$||u||_{h^\infty} = \sup_{z \in \mathbf{D}} |u(z)|,$$

је (квази) норма и $h^p(\mathbf{D})$ је Банахов (нормиран линеаран) простор за $1 \leq p \leq +\infty$. За $0 < p < 1$ је само метрички са претходно дефинисаним растојањем (3.6). Ако је $0 < p < q < \infty$ тада важи

$$h^\infty(\mathbf{D}) \subset h^q(\mathbf{D}) \subset h^p(\mathbf{D}).$$

За $u \in h(\mathbf{D})$ постоји јединствена $v \in h(\mathbf{D})$ таква да важи $v(0) = 0$, и да је $u + iv$ аналитичка. Коришћењем класичне теореме M. Riesz-a, ако је $1 < p < \infty$ и $u \in h^p$, онда је и $v \in h^p$ и важи $M_p(v, r) \leq C_p M_p(u, r)$, за свако $u \in h^p$, и свако $0 \leq r < 1$, где је C_p константа која зависи само од p. Па је $\|v\|_p \leq C_p \|u\|_p$ за $1 < p < +\infty$. Једноставним геометријским разматрањем се показује да теорема не важи за $p = \infty$. Такође, не важи ни за $p = 1$, али ако је $u \in h^1$ онда следи да $v \in h^p$ за свако $p < 1$. Када је $0 < p < 1$ тврђење не важи. Дакле, функција u може припадати h^p за свако $p < 1$, али њена спрегнута функција можда неће бити у h^p за $p > 0$. Доказ и друге сродне информације се могу наћи код Duren-a [19].

Када је у питању класа Хардијевих простора хармонијских функција на лопти, прво дајемо неке неједнакости у виду теореме које ћемо користити за опис норми за класу h^p на јединичној лопти.

Теорема 3.14. *[7] а)Ако је $\mu \in M(\mathbf{S})$ и $u = P[\mu]$, тада је $||u_r||_{L^1(\mathbf{S})} \leq ||\mu||$ за свако $r \in [0, 1)$.*

б) Ако је $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbf{S})$ и $u = P[f]$, тада је $||u_r||_{L^p(\mathbf{S})} \leq ||f||_{L^p(\mathbf{S})}$, за свако $r \in [0, 1)$.

Овде $P[f]$ означава раније дефинисан Поасонов интеграл, а $P[\mu](x) = \int\limits_{\mathbf{S}} P(x, \xi) d\mu(\xi)$, при чему је μ комплексна Борелова мера на $\mathbf{S}$, $M(\mathbf{S})$ Банахов простор, где је $\|\mu\|$ тотална варијације комплексне Борелове мере μ.
Диференцирањем подинтегралне функције $P[\mu]$, види се да је $P[\mu]$ хармонијска на $\mathbf{B}$.

Следећа последица ове теореме показује да је $||u_r||_{L^p(\mathbf{S})}$ растућа функција по r за сваку хармонијску функцију u и свако $p \geq 1$.

Последица 3.6. *[7] Ако је u хармонијска функција на $\mathbf{B}$ и $0 \leq r \leq s < 1$, тада за свако $p \in [1, \infty)$ важи*

$$||u_r||_{L^p(\mathbf{S})} \leq ||u_s||_{L^p(\mathbf{S})}.$$

Доказ: Претпоставимо да је u хармонијска на $\mathbf{B}$ и $0 \leq r \leq s < 1$. Доказ се заснива на томе да се u_r посматра као дилатација Поасоновог интеграла u_s. Прецизније,

$$||u_r||_{L^p(\mathbf{S})} = ||P[u_s]_{\frac{r}{s}}||_{L^p(\mathbf{S})} \leq ||u_s||_p,$$

где једнакост следи из Теореме 3.3, а неједнакост из Теореме 3.14 (б).

Користећи до сада наведено, дефинишемо Хардијеву класу хармонијских функција на јединичној лопти ($h^p(\mathbf{B})$), на следећи начин:

$$h^p(\mathbf{B}) = \{u \in h(\mathbf{B}) : ||u||_{h^p} = \sup_{0 \le r < 1} M_p(u,r) < \infty\}, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

где је $\mathbf{B}$ јединична лопта, а $M_p(u,r) = \left(\int\limits_S |u(r,\xi)| d\sigma(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = ||u_r||_{L^p(S)}$.
То значи да се $h^p(\mathbf{B})$ састоји од хармонијских функција на $\mathbf{B}$ чије су L^p - норме по центрираним сферама равномерно ограничене.

$h^\infty(\mathbf{B})$ је простор ограничених хармонијских функција на $\mathbf{B}$ и тада је

$$||u||_{h^\infty} = \sup_{x \in \mathbf{B}} |u(x)|.$$

Хардијева класа $h^p(\mathbf{B})$ је Банахов простор са нормом $||\cdot||_p$, за $1 \le p \le \infty$.
За $p = 2$, $h^2(\mathbf{B})$ је Хилбертов простор.

Сада, као наставак Последице 3.6, можемо да кажемо да за сваку функцију $u \in h^p(\mathbf{B})$ важи

$$||u||_{h^p} = \lim_{r \to 1} ||u_r||_{L^p(\mathbf{S})}, \quad 1 \le p < +\infty.$$

Став 3.1. *[7] Нека је $1 \le p < \infty$. Ако $u \in h^p(\mathbf{B})$, тада за свако $x \in \mathbf{B}$ важи:*

$$|u(x)| \le \left(\frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}\right)^{\frac{1}{p}} ||u||_{L^p(\mathbf{S})}.$$

Лако се показује да је $h^p(\mathbf{B}) \neq h^q(\mathbf{B})$ кад год је $p \neq q$.

Када је у питању горњи полупростор $\mathbf{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $1 \le p \le \infty$ дефинишемо класу Хардијевих простора хармонијских функција $h^p(\mathbf{H})$ као нормирани векторски простор функција u хармонијских на $\mathbf{H}$ за које је

$$||u||_{h^p} = \sup_{y>0} M_p(u,y) < \infty, \qquad 1 \le p \le \infty,$$

где је

$$M_p(u,y) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad y > 0, \quad x = (x_1, \dots, y) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

h^∞ представља фамилију ограничених хармонијских функција на $\mathbf{H}$ и

$$||u||_{h^\infty} = \sup_{z \in \mathbf{H}} |u(z)|.$$

$h^p(\mathbf{H})$ је Банахов простор са нормом $||\cdot||_{h^p}$, за $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема 3.15. *[7] Нека је $1 \leq p < \infty$. Постоји константа C, која зависи само од p и n, тако да је*

$$|u(x,y)| \leq \frac{C||u||_{h^p}}{y^{\frac{n-1}{p}}},$$

за свако $u \in h^p(\mathbf{H})$ и свако $(x,y) \in \mathbf{H}$. Специјално, свака функција $u \in h^p(\mathbf{H})$ је ограничена на $\mathbf{H} + (0, y_0)$ за свако $y_0 > 0$.

Доказ: Нека је $(x_0, y_0) \in \mathbf{H}$ и нека је $\mathbf{B}\left(y_0, \frac{y_0}{2}\right)$ отворена лопта у $\mathbb{R}^n$. Запреминска верзија особине средње вредности заједно са Jensen-овом неједнакошћу даје

$$|u(x_0,y_0)|^p \leq \frac{1}{\left|\mathbf{B}\left(y_0, \frac{y_0}{2}\right)\right|} \int\limits_{\mathbf{B}\left(y_0, \frac{y_0}{2}\right)} |u|^p dm = \frac{2^n}{\left|\mathbf{B}\left(y_0, \frac{y_0}{2}\right)\right| y_0^n} \int\limits_{\mathbf{B}\left(y_0, \frac{y_0}{2}\right)} |u|^p dm.$$

Ставимо да је $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{H} : \frac{y_0}{2} < y < 3\frac{y_0}{2}\}$, онда је

$$\left|\mathbf{B}\left(y_0, \frac{y_0}{2}\right)\right| |u(x_0,y_0)|^p \leq \int\limits_{\mathbf{B}\left(y_0, \frac{y_0}{2}\right)} |u|^p dm \leq \int\limits_{\Omega} |u|^p dm = \int\limits_{y_0}^{3\frac{y_0}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(x,y)|^p dx dy \leq y_0 ||u||_p^p.$$

Чиме лако долазимо до жељеног резултата.

Као што је био случај код лопте, имамо сличан резултат за горњи полупростор, тј.да за функцију $u \in h^p(\mathbf{H})$ норме $||u_y||_{L^p}$ теже ка $||u||_{h^p}$, када $y \to 0$.

Последица 3.7. *[7] Нека је $1 \leq p \leq \infty$ и $u \in h^p(\mathbf{H})$. Тада*

$$||u_{y_2}||_{L^p} \leq ||u_{y_1}||_{L^p},$$

кадгод је $0 < y_1 \leq y_2$. Штавише, за $1 < p \leq +\infty$ важи

$$||u||_{h^p} = \lim_{y \to 0} ||u_y||_{L^p}.$$

3.4 Бергманови простори

Док је у току био развој Хардијевих простора, Стефан Бергман (1895-1977) је развио елегантну теорију Хилбертових простора аналитичких функција у областима у равни и областима у $\mathbb{C}^n$, ослањајући се у великој мери на интегрално језгро,

које постаје познато као Бергмано језгро. Бергманов рад фокусиран је био на просторе аналитичких функција које су квадратно интеграбилне на датом домену у односу на Лебегову запреминску меру.
Касније, када је пажња била усмерена на просторе B^p на јединичном диску, било је природно назвати их Бергмановим просторима. Како су на неки начин сродни са Хардијевим просторима, логично је било да се изучавају и аналогни проблеми. Међутим, ускоро је постало очигледно да су Бергманови простори у многим аспектима много компликованији од Хардијевих. Тако да, иако су многи проблеми у Хардијевим просторима били детаљно изучени до 1970-их, исти ти проблеми за Бергманове просторе сматрани су генерално нетакнутим (непознатим). Постојао је неки изоловани напредак, као што је рад Charles Horowitz-а [40, 41, 42] и Boris Korenblum-а [50, 51].
Све се то променило деведесетих година прошлог века. Проблеми који су се сматрали готово нерешивим, почели су да се решавају. Сва та напредовања у истаживању су привукла и друге научнике да се баве Бергмановим просторима и сродним темама. Међу првима који су почели истраживање, био је Hakan Hedenmalm [36] који је радио на простору B^2, а чије резултате су уопштили Duren, Khavnison, Shapiro, Sundberg [21, 22], за $0 < p < \infty$. Негде у исто време простором B^2 бави се и Kristian Seip [74, 75], чији резултати се касније уопштавају, и други.
Када су у питању тежински Бергманови простори, њима су се бавили различити аутори, нпр. Hedenmalm и Zhu [38], Hedenmalm [37], Shimorin [80, 81, 82, 83] и Weir [95, 96, 97, 98].
Проучавање Бергманових простора је кренуло у два смера. Један је истраживање аналитичких или структурних својстава појединих функција у Бергмановом простору. Други смер је проучавање посебних карактеристика B^2 као линеарног простора.

Нека је Ω произвољан домен (отворен повезан скуп) у комплексној равни $\mathbb{C}$. За $0 < p < \infty$, Бергманов простор $B^p(\Omega)$ састоји се од свих аналитичких функција f у Ω за које важи

$$||f||_p = \left(\int\limits_{\Omega} |f(z)|^p dA((z) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где $dA(z)$ означава стандардну Лебегову меру у (комплексној) равни. За $p \geq 1$, $||f||_p$ је права норма. У свим случајевима норма има следеће особине и то: $||\alpha f||_p = |\alpha| ||f||_p$ и $||f||_p = 0$ ако и само ако је $f = 0$, а за $p \geq 1$ је испуњена још и неједнакост троугла $||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$. Док за $0 < p < 1$, неједнакост троугла "прелази" у неједнакост $||f+g||^p \leq ||f||_p^p + ||g||_p^p$. Простор $B^p(\Omega)$ је увек линеаран метрички простор.

Ако је $p \geq 1$, $B^p(\Omega)$ је Банахов простор а $B^2(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним производом

$$\langle f, g\rangle = \int_{\Omega} f(z)\overline{g(z)}dA(\sigma).$$

$B^p(\Omega)$ је затворен потпростор од $L^p(\Omega)$ за свако $0 < p \leq +\infty$.

Како смо већ видели, код Хардијевих простора интеграли $\int_{\mathbf{S}} |f(r\xi)|^p d\sigma(\xi)$ су ограничени по $0 \leq r < 1$, а код Бергманових интеграл по Ω је конвергентан, па је очито $H^p \subset B^p$, односно када су у питању хармонијске функције, $h^p \subset b^p$.

3.4.1 Бергманови простори хармонијских функција

Бергманови простори хармонијских функција b^p на јединичном диску састоје се од свих комплексно вредносних функција u хармонијских на јединичном диску $\mathbf{D}$ за које је интеграл $\int_{\mathbf{D}} |u|^p dm$ коначан.

Као и код h^p простора, директно из теореме M. Riesz-а, следи да је класа b^p такође самоспрегнута за $1 < p < \infty$ и $||v||_p \leq C_p ||u||_p$ за свако $u \in b^p$. Изненађење настаје када се види да ово важи за Бергманове просторе када је $0 < p \leq 1$, што није случај са h^p просторима. Ову особину су доказали Hardy и Littlewood у раду [32].

Дајемо теорему која прецизно исказује претходно наведено.

Теорема 3.16. *([20]) За $0 < p < \infty$, класа b^p је самоспрегнута. Ако је u хармонијска функција из класе b^p, тада је њен хармонијски коњугат v је такође из b^p и*

$$||v||_p \leq C_p ||u||_p,$$

где је C_p је константа која зависи само од p.

Ово је један од неколико примера који показују да се Бергманови простори понашају "боље" од Хардијевих простора.

Дефинишемо сада класу Бергманових простора хармонијских функција u на општем домену на коме посматрамо дате функције.

Дефиниција 3.3. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $0 < p < \infty$. Бергманов простор хармонијских функција $b^p(\Omega)$ је скуп хармонијских функција u на Ω за које је*

$$||u||_{b^p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dm\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где је dm Лебегова мера. Очито је $||\cdot||_p$ норма за $1 \leq p < \infty$.

Стандардна процена добијена из особине средње вредности за хармонијске функције показује да важи:

Став 3.2. *([7]) Нека је $x \in \Omega$ и $p \geq 1$. Тада је*

$$|u(x)| \leq \frac{1}{|\mathbf{B}|^{\frac{1}{p}}} \frac{||u||_{b^p(\Omega)}}{d(x, \partial\Omega)^{\frac{n}{p}}}$$

за свако $u \in b^p(\Omega)$, где d представља еуклидско растојање.

Доказ: Нека је $r < d(x, \partial\Omega)$ позитиван број, применимо запреминску верзију особине средње вредности функције u на $\mathbf{B}(x, r)$. Након примене апсолутне вредности, Jensen-ова неједнакост даје

$$|u(x)|^p \leq \frac{1}{|\mathbf{B}(x,r)|} \int\limits_{\mathbf{B}(x,r)} |u|^p dm \leq \frac{1}{r^n |\mathbf{B}|} ||u||_{b^p}^p.$$

Жељену неједнакост добијамо када изведемо $p-$ти корен и пустимо да $r \to d(x, \partial\Omega)$.

Напомена 3.2. Став 3.2 ће важити за било које $p > 0$ и константу $C_{n,p}$ уместо 1, при чему се у доказу користи субхармонијско понашање уместо особине средње вредности.

Став 3.3. *[7] За било које $p > 0$, Бергманов простор хармонијских функција $b^p(\Omega)$ је затворен потпростор од $L^p(\Omega, dm)$.*

Доказ: Нека $u_j \to u$ у $L^p(\Omega, dm)$ где је (u_j) низ у $b^p(\Omega)$ и $u \in L^p(\Omega, dm)$. Потребно је показати да након одговарајуће модификације на скупу мере нула функција u јесте хармонијска на Ω.

Нека је сада $K \subset \Omega$ компактан скуп. На основу Става 3.2 постоји константа $C_{n,p} = C < \infty$ тако да важи

$$|u_j(x) - u_k(x)| \leq C||u_j - u_k||_{b^p}$$

за свако $x \in K$ и за свако j и k. Како је (u_j) Кошијев низ у $b^p(\Omega)$ из горње неједнакости следи да је (u_j) Кошијев низ у $C(K)$. Зато, (u_j) униформно конвергира на K.

Тако (u_j), на сваком компактном подскупу од Ω, униформно конвергира ка функцији v која је хармонијска на Ω (Теорема 3.6).

Како $u_j \to u$ у $L^p(\Omega, dm)$, то неки поднизови од (u_j) конвергирају ка u у скоро свакој тачки на Ω. То значи да је $u = v$ скоро свуда на Ω и тада $u \in b^p(\Omega)$ што је и било потребно доказати.

Специјално, $b^2(\Omega)$ је затворен потпростор Хилбертовог простора $L^2(\Omega, dm)$, са скаларним производом

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{\Omega} f\overline{g}dm, \qquad f, g \in L^2(\Omega, dm).$$

Последица 3.8. *[7] Бергманов простор $b^p(\Omega)$ је Банахов простор за $p \geq 1$.*

Напомена 3.3. Може се доказати да је простор $b^p(\mathbf{B})$ квази-Банахов за $0 < p < 1$.

Став 3.4. *[7] Ако је $1 \leq p < q < \infty$, тада је $b^q(\mathbf{B})$ прави подскуп од $b^p(\mathbf{B})$.*

Приметимо да је $h^p(\mathbf{B}) \subset b^p(\mathbf{B})$ за свако $1 \leq p < \infty$. Осим ових инклузија важи и инклузија $h^p(\mathbf{B}) \subset b^q(\mathbf{B})$ за свако $q < \frac{pn}{n-1}$. Међутим, сваки од простора $b^p(\mathbf{B})$ садржи функције које не припадају ниједном $h^q(\mathbf{B})$.

Очито, ако је $m(\Omega) < +\infty$ онда је $b^q(\Omega) \subset b^p(\Omega)$ за $0 < p < q \leq +\infty$.

Следеће две теореме се односе на горње полупросторе $\mathbf{H}$, при чему прва од ове две теореме важи и за лопту $\mathbf{B}$.

Теорема 3.17. *([71]) Ако је $p < q$, тада b^p није садржано у b^q.*

Теорема 3.18. *([71]) Ако је $1 < p < \infty$ тада је $(b^p)^* \cong b^q$, где је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Теорема 3.18 показује да се дуални простор Бергмановог простора хармонијских функција (b^p) може поистоветити са b^q, при чему је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, за $p > 1$.

3.4.2 Тежински Бергманови простори хармонијских функција

Функције у стандардним тежинским Бергмановим просторима настају неочекивано и то када се функција из H^p простора на полидиску сузи на дијагоналу; тј. када се све променљиве изједначе да формирају функцију једне комплексне променљиве. Овај феномен открио је Rudin [73], а даље су истраживали Horowitz и Oberlin [43], Duren и Shields [24].

У протеклим годинама су доста проучавани тежински Бергманови простори на јединичној лопти. Притом, више пажње је било усмерено ка проучавању ових простора за холоморфне функције него за хармонијске.

Нека је $-1 < \alpha < \infty$ дат реалан број. Тежинске Lebesgue-ове просторе на $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^n$ означавамо са $L^p_\alpha(\mathbf{B})$, и то су простори свих мерљивих функција f на $\mathbf{B}$ за које је

$$||f||_{L^p_\alpha} = \left(\int_{\mathbf{B}} |f(x)|^p (1-|x|^2)^\alpha dm(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 0 < p < \infty$$

где је $dm(x)$ Lebesgue-ова мера. Тежински Бергманови простори хармонијских функција $b^p_\alpha(\mathbf{B})$ се дефинишу са $b^p_\alpha(\mathbf{B}) = h(\mathbf{B}) \cap L^p_\alpha(\mathbf{B})$. Тежине се могу мењати на интервалу $[0,\sigma]$ за $\sigma < 1$, без промене Бергмановог простора, тј. одговарајуће норме су еквивалентне. Недавно је дошло до великог интересовања за проучавање тежинских Бергманових простора аналитичких или хармонијских функција са тежинама које нису класичне $dm_\alpha = C_\alpha(1-|x|^2)^\alpha dm(x)$, $\alpha > -1$, видети нпр.: [1, 52, 54, 56, 76, 87, 88, 89, 90, 91], као и њихове референце.

Став 3.5. *[67] За било коју функцију $u \in b^p_\alpha(\mathbf{B})$ и било коју тачку $x \in \mathbf{B}$ важи*

$$|u(x)| \leq \frac{2^{\frac{n}{p}}}{(1-|x|)^{\frac{n-1}{p}}} \left(w_{n-1} \int_{\frac{1+|x|}{2}}^{1} r^{n-1}(1-r^2)^\alpha dr \right)^{-\frac{1}{p}} ||u||_{b^p_\alpha}.$$

Доказ: Приметим да је, за $\xi \in \mathbf{S}$ и $x \in \mathbf{B}$:

$$P(x,\xi) = \frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n} \leq \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} \leq \frac{2}{(1-|x|)^{n-1}}. \tag{3.7}$$

Нека је $x \in \mathbf{B}$ и $|x| < R < 1$. Користећи чињеницу да је $|u(Rx)|^p$ субхармонијска функција у околини $\overline{\mathbf{B}}$ и релацију (3.7), добијамо

$$|u(Rx)|^p \leq w_{n-1} \int_{\mathbf{S}} |u(R\xi)|^p P(x,\xi) d\sigma(\xi) \leq \frac{2}{(1-|x|)^{n-1} w_{n-1}} \int_{\mathbf{S}} |u(R\xi)|^p d\sigma(\xi). \tag{3.8}$$

Ставимо да је $x = r\xi$, где је $r = |x|$, $\xi \in \mathbf{S}$. Како је применом поларних координата $dm(x) = w_{n-1} r^{n-1} dr d\sigma(\xi)$ и узимајући у обзир усредњење интеграла $M(R) = \frac{1}{w_{n-1}} \int_{\mathbf{S}} |u(R\xi)|^p d\sigma(\xi)$ која је нерастућа функција по R, добијамо

$$w_{n-1} \int_R^1 r^{n-1}(1-r^2)^\alpha dr \int_{\mathbf{S}} |u(R\xi)|^p d\sigma(\xi) \leq w_{n-1} \int_R^1 \int_{\mathbf{S}} |u(r\xi)|^p r^{n-1} (1-r^2)^\alpha dr d\sigma(\xi) =$$

$$= \int_{R<|x|<1} |u(x)|^p (1-|x|^2)^\alpha dm(x) \leq ||u||^p_{b^p_\alpha}. \tag{3.9}$$

Из релација (3.8) и (3.9)

$$|u(Rx)|^p \leq \frac{2}{(1-|x|)^{n-1}} \left(w_{n-1} \int\limits_R^1 r^{n-1}(1-r^2)^\alpha dr \right)^{-1} ||u||^p_{b^p_\alpha},$$

и променом променљиве $Rx \to x$ следи да је

$$|u(x)| \leq \frac{2^{\frac{1}{p}}}{(R-|x|)^{\frac{n-1}{p}}} \left(w_{n-1} \int\limits_R^1 r^{n-1}(1-r^2)^\alpha dr \right)^{-\frac{1}{p}} ||u||_{b^p_\alpha}.$$

Узимајући да је $R = \frac{1+|x|}{2}$ долазимо до жељеног резултата.

Став 3.6. *[67] Тежински Бергманов простори хармонијских функција $b^p_\alpha(\mathbf{B})$ је затворен у $L^p_\alpha(\mathbf{B})$ за свако $1 \leq p < \infty$.*

Доказ: Нека $||u_j - u||_{b^p_\alpha} \to 0$ када $j \to \infty$, где је u_j низ функција из $b^p_\alpha(\mathbf{B})$ и $u \in L^p(\mathbf{B}, dm_\alpha)$. Показујемо да је u еквивалентна некој хармонијској функцији на $\mathbf{B}$.

Нека је $K \subset \mathbf{B}$ компактан скуп. Из Става 3.5 следи да постоји константа $C = C(K, p, \alpha)$ тако да је

$$\max_{z \in K} |u(x)| \leq C||u||_{b^p_\alpha}$$

за било које $u \in b^p_\alpha(\mathbf{B})$. Отуда је $|u_j(x) - u_k(x)| \leq C||u_j - u_k||_{b^p_\alpha}$ за било које $x \in K$ и било које j, k. Низ u_j равномерно конвергира на компактним подскуповима јединичне лопте ка хармонијској функцији v. Осим тога, $u_j \to u$ у $L^p(B, dm_\alpha)$. Дакле, на основу теореме Riesz-а постоји подниз низа u_j који конвергира ка u скоро свуда у $\mathbf{B}$. Тако да је $u = v$ скоро свуда у $\mathbf{B}$ и $u \in b^p_\alpha(\mathbf{B})$.

Последица 3.9. *[67] Простор $b^p_\alpha(\mathbf{B})$ је Банахов простор за свако $1 \leq p < \infty$.*

Теорема која је аналогна Теореми 3.18 из претходног поглавља гласи:

Теорема 3.19. *[45] За $1 < p < \infty$ и $\alpha > -1$ важи $(b^p_\alpha)^*(\mathbf{B}) \cong b^p_\alpha(\mathbf{B})$, при чему је $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.*

Дефиниција 3.4. *Нека је $\mathbf{H}^n_+$, горњи полупростор. Са $dm(z) = dz = dxdt$ означићемо* Lebesgue-*ову меру, а са $dm_\alpha(z) = t^\alpha dxdt$ тежинску меру, где је $\alpha > -1$.*
$B^p_\alpha(\mathbf{H}^n_+)$ дефинише се као простор свих $f \in h(\mathbf{H}^n_+)$ таквих да је:

$$||u||^p_{b^p_\alpha} = \int\limits_{\mathbf{H}^n_+} |u(z)|^p dm_\alpha(z) < \infty.$$

Дефиниција 3.5. *Нека је* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ограничена област са* C^1 *границом. Тежински Бергманови простори хармонијских функција на* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, се дефинишу*

$$b_\alpha^p = b_\alpha^p(\Omega) = \left\{ u \in h(\Omega) : ||u||_{b_\alpha^p} = \left(\int_\Omega |u(x)| dm_\alpha(x) \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

где је $dm_\alpha(x) = \rho^\alpha(x)dx$ *тежинска мера,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *и* ρ *дефинирајућа функција на* Ω.

Лако је видети да су они тривијални за $\alpha \leq -1$, па надаље разматрамо само случај када је $\alpha > -1$. За $\alpha = 0$, $b_\alpha^p = b^p$, и јасно је да је $b_\alpha^p(\Omega) = L_\alpha^p(\Omega) \cap h(\Omega)$.

Додатни резултати о тежинским Бергмановим просторима се могу наћи у [3, 45, 47].

3.5 Мере Карлесона и теорема утапања Карлесона

Мере Карлесона имају важну улогу у комплексној анализи, хармонијској анализи, теорији BMO функција, теорији интегралних оператора и теорији парцијалних диференцијалних једначина. Lennart Carleson у радовима [10, 11] користи мере по коме су касније и добиле назив. Carleson-ова оригинална дефиниција добро функционише у теорији Хардијевих простора што се може видети у књигама аутора као што су Duren [19] и Garnet [30]. Карактеризација мера Карлесона за Хардијеве просторе на јединичној лопти се може наћи код Hörmander-а [39] и Power-а [69]. Затим, појам мере Карлесона примењује се на контекст Бергманових простора, међу првим ауторима који су се тиме бавили су: Cima-Wogen [13], Hastings [35], Luecking [55], Zhu [102]. Такође, мере Карлесона су проучаване и за холоморфне (од којих је Дирихлеов простор специјалан случај); видети Arcozzi-Rochberg-Sawyer [2], Kaptanoglu [48], Stegenga [84] и Wu [101].

Дефиниција 3.6. *Нека је* $\mathbf{D}$ *једнични диск у комплексној равни* $\mathbb{C}$ *и нека је* μ *коначна мера на* $\mathbf{D}$*. За* $\theta \in [0, 2\pi]$, $h \in (0,1)$ *нека је*

$$S = S(\theta, h) = \{ re^{i\theta} : 1 - h < r < 1, \theta_0 - h < \theta < \theta_0 + h \}.$$

Мера μ *је мера Карлесона ако постоји константа* $C > 0$ *тако да је*

$$\mu(S(\theta, h)) \leq Ch \qquad \forall \theta, h.$$

Године 1962. L. Carleson у свом раду [11] даје чувену теорему Карлесона и доказује утапање $H^p(\mathbf{D}) \hookrightarrow L^p(\mu)$ за $p \geq 1$, и као специјалан случај наводи утапање

$H^2(\mathbf{D}) \hookrightarrow L^2(\mu)$.

Теорема 3.20. *([11]) Нека је μ Борелова мера на $|z| < 1$, и претпоставимо да је $p \geq 1$. Неопходан и довољан услов да постоји константа C тако да је*

$$\left\{ \int\limits_{|z|<1} |f(z)|^p d\mu(z) \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C||f||_p \qquad \forall f \in H^p,$$

за свако $f \in H^p$, је да је μ Carleson-ова мера.

Доказ за опште p није тежи од специјалног случаја када је $p = 2$, па има смисла говорити о теореми Карлесона за било које $p > 0$.
Duren, у свом раду [18] из 1968. године, проширује теорему Карлесона и доказује утапање $H^p \hookrightarrow L^q(d\mu)$ за $0 < p \leq q < \infty$, под извесним условима Карлесоновог типа за меру μ и експоненте p и q.

Теорема 3.21. *([18]) Нека је μ Борелова мера на $|z| < 1$, и претпоставимо да је $0 < p < q \leq \infty$. Да би постојала константа C таква да је*

$$\left\{ \int\limits_{|z|<1} |f(z)|^q d\mu(z) \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C||f||_p \qquad \forall f \in H^p,$$

неопходан и довољан услов је да постоји константа A таква да је $\mu(S) \leq Ah^{q/p}$ где је S скуп облика, $S = \{re^{i\theta} : 1 - h \leq r < 1, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + h\}$.

Године, 1974., Carleson у свом раду [12] даје пример на коме показује да теорема Карлесона не важи за Хардијеве просторе на полидиску. Годину дана након тога, 1975. године Hastings у раду [35] је доказао теорему Карлесона за Бергманове просторе на полидиску. А потом, 1980. године, Stegenga [84] добија аналогне резултате за одређене тежинске Бергманове просторе.
Када су и даље у питању Бергманови простори, пре свега тежински Бергманови простори и теореме утапања, у зависности од домена на којима су посматране одређене функције (аналитичке или хармонијске) наводимо следећа позната тврђења.

Прва од следеће две теореме се односи на аналитичке функције у простору $\mathbb{C}^n$, а друга на хармонијске функције у $\mathbf{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$.

Теорема 3.22. *([104]) Нека је $\alpha > -(n+1)$, $0 < p \leq 1$ и μ позитивна Борелова мера на лопти $\mathbf{B}^n \subset \mathbb{C}^n$. Тада су следећа два услова еквивалентна.*

(a) *Постоји константа* $C > 0$ *тако да је*

$$\int\limits_{\mathbf{B}^n} |f(z)|^p d\mu(z) \leq C||f||^p_{p,\alpha},$$

за свако $f \in B^p_\alpha$.
(b) *Постоји константа* $C > 0$ *тако да је*

$$\mu(Q_r(\xi)) \leq Cr^{n+\alpha+1},$$

за свако $0 < r < 1$ *и* $\xi \in \mathbf{S}^n$, *где је*

$$Q_r(\xi) = \{z \in \mathbf{B}^n : |1 - \langle z, \xi\rangle| < r\}.$$

Теорема 3.23. *([3]) Претпоставимо* $0 < p < \infty$, $\alpha > -1$ *и нека је* μ *Борелова мера на* $\mathbf{H}$. *Тада су следећа два услова еквивалентна.*
(a) *Мера* μ *задовољава услов типа Карлесона*

$$\frac{\mu(\Delta_k)}{|\Delta_k|^{1+\frac{\alpha}{n+1}}} \leq C, \qquad k \geq 1$$

где су Δ_k *затворене коцке, са странама паралелним координатним осама (у наредном одељку је дато више објашњења).*
(b) b^p_α *се непрекидно утапа у* $L^p(\mathbf{H}, d\mu)$.

3.6 Теорема утапања тежинских Бергманових простора у $L^p(\mu)$-просторе

Као што је раније наведено, ово поглавље садржи формулацију и доказ теореме утапања тежинских Бергманових простора хармонијских функција у $L^p(d\mu)$ просторе на домену $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченом са C^1 границом. Овај резултат аутора је објављен у [46], видети Теорему 3.24. Приликом доказивања теореме биће нам потребна одговарајућа помоћна тврђења и у складу с тим пре самог доказа невешћемо их.
Када је у питању непрекидно утапање простора аналитичких или хармонијских функција у $L^p(\mu)$ просторе одлучујућу улогу имају услови типа Карлесона за меру μ. За случај аналитичких функција ово је описивао Kehe Zhu 2005. године у раду [103], случај тежинских Бергманових простора хармонијских функција на горњем полупростору описивали су Arsenović i Shamoyan 2013. године у раду [3].

На већ поменутој области Ω испитиваћемо када важи утапање

$$b^p_\alpha \hookrightarrow L^p = L^p(\mu).$$

Као резултат добијамо да ово утапање важи за било које $p > 0$ увек када мера μ задовољава услов

$$\frac{\mu(\Delta_k)}{|\Delta_k|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \leq C, \qquad k \geq 1,$$

где су Δ_k погодно одабрани, (детаљније описани у Леми 3.2).
Обрнуто, ако важи поменуто утапање простора за $p > 1 + \frac{\alpha+2}{n-2}$, тада мера μ задовољава претходни услов типа Карлесона.
Неочекивано, у изради доказа обрат је био тежи. Наиме, било је потребно наћи тест функцију чијом применом се доказује наведени обрат у теореми. Процена тест функције је у ствари Лема 3.8 и она има кључну улогу у доказу Теореме 3.24. У случају лопте и горњег полупростора до тест функције се долази елеметарним израчунавањем, што није био случај овде. Идеја процене тест функције, а самим тим и доказ Леме 3.8, састојала се у томе да се интеграл по области Ω подели на два интеграла по областима $\Omega \backslash V$ и $\Omega \cap V$, где је V околина границе $\partial\Omega$. Интеграл по $\Omega \backslash V$ се процењује константом која зависи од одређених параметара, а техника процене интеграла по $\Omega \cap V$ је комплетно описана у Леми 3.8, и то би био кључни део ове леме и показује како се функција понаша у близини границе $\partial\Omega$.
Један од основних техничких елемената је појам дефинирајуће функције $\rho(x)$, која је самерљива са растојањем унутрашње тачке x из области Ω до границе $\partial\Omega$. Таква функција за Ω постоји и њу ћемо означити са ρ, односно: $\rho \in C^1(\mathbb{R}^n)$, таква да је $\Omega = \{x : \rho(x) > 0\}$ и $\nabla\rho(x) \neq 0$ за $x \in \Omega$, и одатле следи $\rho(x) \asymp dist(x, \partial\Omega)$ за $x \in \Omega$. Константа C, као што је уобичајено, може мењати своју вредност у низу процена.

Тежинску меру и тежинске Бергманове просторе хармонијских функција на домену Ω дефинисанили смо у Поглављу 3.4.2 и то:

$$dm_\alpha(x) = \rho^\alpha(x)dx, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$b^p_\alpha = b^p_\alpha(\Omega) = \left\{ f \in h(\Omega) : ||f||_{b^p_\alpha} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)^p dm_\alpha(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Уведимо сада један дифеоморфизам, што нам могућава Теорема о цевастој околини. Тиме исправљамо границу $\partial\Omega$ па можемо дефинисати рефлексију тачке у близини границе у односу на саму границу $\partial\Omega$.

Наиме, постоји околина U од $\partial\Omega$ и C^1 дифеоморфизам $\chi : \partial\Omega \times (-\xi, \xi) \to U$, тако да $\chi(\xi, t)$ припада Ω (односно $\partial\Omega$) ако и само ако је $t > 0$ (односно ако и само ако је $t = 0$). За $z \in U$, $\chi^{-1}(z) = (\xi, t)$, постоји јединствена тачка $\overline{z} \in U$ тако да је $\chi^{-1}(\overline{z}) = (\xi, -t)$. Ово дефинише C^1 дифеоморфизам $z \to \overline{z}$ скупа U на самог себе.

Следећа лема, прилагођена потребама доказа теореме утапања, добијена је из Леме 4.1, у поглављу Витнијева декомпозиција.

Лема 3.2. *([86]) Постоји фамилија $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ затворених коцки у Ω са странама паралелним координатним осама и константа $l > 1$ тако да је*

(1) $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k = \Omega$ и $diam\ \Delta_k \asymp dist\ (\Delta_k, \partial\Omega)$.

(2) Унутрашњости коцки Δ_k су међусобно дисјунктне.

(3) Ако је Δ_k^* коцка са истим центром као и Δ_k, али увећана l пута, тада фамилија $\{\Delta_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ је коначан покривач од Ω, тј. постоји константа C тако да је $\sum_k \chi\Delta_k^*(x) \le C$. Овде је $\chi_{\Delta_k^*}$ представља карактеристичну функцију скупа Δ_k^*.

Наводимо неке већ познате процене као и оне које треба доказати, а све у циљу доказивања теореме утапања о којој говоримо у овом поглављу:

Лема 3.3. *([85]) Нека су $\Delta_k \subset U$ и Δ_k^* елементи као у претходној леми и нека је x_k центар коцке Δ_k. Тада имамо*

$$m_\alpha(\Delta_k) \asymp \rho(x_k)^{n+\alpha} \asymp m_\alpha(\Delta_k^*), \ \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

$$|\bar{z} - x| \asymp |\bar{x}_k - x|, \ \ z \in \Delta_k, \ \ x \in \Omega \tag{3.11}$$

$$\rho(x) \asymp \rho(x_k), \qquad x \in \Delta_k^*. \tag{3.12}$$

Лема 3.4. *([14]) Нека су Δ_k и Δ_k^* концентричне коцке из претходне леме и нека је (ξ_k, η_k) центар Δ_k. Тада за $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$ важи:*

$$\rho^{\alpha p-1}(x_k) \max_{\Delta_k} |f|^p \le \frac{C}{|\Delta_k^*|} \int\limits_{\Delta_k^*} \rho^{\alpha p-1}(x)|f(x)|^p dx,$$

и

$$\rho^{\alpha p-1}(x_k) \max_{\Delta_k} |f|^p \le \frac{C}{|\Delta_k^*|} \rho^{\alpha p-1}(x_k) \int\limits_{\Delta_k^*} |f(x)|^p dx, \qquad f \in (\Omega), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Сада, за свако $P \in \partial\Omega$, дефинишемо C^1 дифеоморфизам $\varphi_P : V_P \to U_P$ који пресликава околину V_P тачке P на околину U_P тачке 0 у $\mathbb{R}^n$ тако да је $\varphi_P(P) = 0$, $U_P = W_P \times (-\delta_P, \delta_P)$ и $\varphi_P(\xi)$ је елемент из $\mathbb{R}^n$ који припада $W_P \times \{0\}$ за свако $\xi \in \partial\Omega \cap V_P$, где је $W_P = \varphi_P(\partial\Omega \cap V_P) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и $\delta_P > 0$ је довољно мало.

У Леми 3.5 и Леми 3.6, ради лакшег писања изостављамо P из индекса.

Лема 3.5. *Нека је P тачка на $\partial\Omega$, и $\varphi = \varphi_P$ дефинисано са*

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)) \in \mathbb{R}^n,$$

за $x \in V$. Тада за сваки компактан скуп $K \subset V$ је $\rho(x) \asymp \varphi_n(x)$, $x \in K \cap \overline{\Omega}$.

Доказ: Реално-вредносне функције ρ и $\theta = \varphi_n$ су C^1 на скупу V, а по претпоставци је $\nabla\rho \neq 0$ на $V \cap \partial\Omega$, и притом, θ и ρ су једнаке 0 на $\partial\Omega$. Такође, $\nabla\theta = (J_\theta(x))_n = (\frac{\partial\phi_n}{\partial x_i})_{1 \le i \le n} \neq 0$ на $V \cap \partial\Omega$, где је $J_\theta(x)$ Јакобијева матрица од θ у тачки x. Дакле, $\rho \asymp \theta$ на компактном подскупу од V.

У следећој леми са $\overline{w}$ означавамо рефлексију тачке $w \in \mathbb{R}^n$ преко $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, тј. $\overline{w} = (w_1, \ldots, w_{n-1}, -w_n)$ за $w = (w_1, \ldots, w_{n-1}, w_n)$.

Лема 3.6. *Нека је P гранична тачка Ω и $\psi = \varphi^{-1}$. Тада за сваки компактан скуп $K \subset V \cap \overline{\Omega}$ постоји константа $C = C_K > 0$ тако да је*

$$|x - \overline{z}| \geq C|\varphi(x) - \widetilde{\varphi(z)}| \qquad x, z \in K.$$

Доказ: Како је раније наведено, за $z \in V \cap \Omega$ је $z = \chi(\eta, s)$, где је $\eta \in \partial\Omega$, $0 < s < \varepsilon$, и $w = \varphi(z) = (w_1, w_2, ..., w_{n-1}, w_n)$, где је $(w_1, w_2, ...w_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $w_n > 0$.

Дакле, важи

$$|x - \overline{z}| \asymp |x - z| + s. \tag{3.13}$$

Очито је

$$|\varphi(x) - \widetilde{\varphi(z)}| \asymp |\varphi(x) - \varphi(z)| + w_n. \tag{3.14}$$

Како је φ C^1 дифеоморфизам онда је

$$|x - z| \asymp |\varphi(x) - \varphi(z)|. \tag{3.15}$$

На основу дефиниције χ за $z = \chi(\eta, s)$ важи да је $2s = z - \overline{z} \asymp \rho(z)$. Применом Леме 3.5 добијамо $w_n(z) = \varphi_n(z) \asymp \rho(z)$, тј. $w_n(z) \asymp s(z)$. На крају, комбинацијом релација (3.13), (3.14), (3.15) долазимо до траженог резултата.

Следећа лема је доказана у [47], и њу користимо у процени одређених интеграла у Леми 3.8.

Лема 3.7. *([47]) Нека је $n+\alpha-2\gamma<0$ и $\alpha>-1$. Тада је*

$$\int\limits_H \frac{y_n^\alpha}{|y-\overline{w}|^{2\gamma}}dy \asymp w_n^{n+\alpha-2\gamma}, \qquad w\in \mathbf{H}. \tag{3.16}$$

Овде је са $\overline{w}=(w_1,\ldots,w_{n-1},-w_n)$ означена рефлексија тачке $w=(w_1,\ldots,w_{n-1},w_n)$ у горњем полупростору преко границе.

Лема 3.8. *Ако је $\alpha>-1$ и $n+\alpha<2\gamma$ тада је*

$$\int\limits_\Omega \frac{\rho^\alpha(x)}{|x-\overline{z}|^{2\gamma}} \le C\rho^{\alpha+n+2\gamma}(z), \qquad z\in\Omega.$$

Доказ: За свако $P\in\partial\Omega$ нека су V_P, U_P, W_P скупови и дифеоморфизам φ_r који смо раније дефинисали. Како је $\partial\Omega$ компактан, и $P_1,\ldots,P_k\in\partial\Omega$, при чему је $\partial\Omega\subset\bigcup_{j=1}^k V_{P_j}$. Штавише могу се изабрати релативно компактни отворени подскупови V_j за V_{P_j} тако да је $V_j\subset V_{P_j}$ за $1\le j\le k$ и $\partial\Omega\subset\bigcup_{j=1}^k V_j$. Ставимо да је $\varphi_j=\varphi_{P_j}, \psi_j=\varphi_j^{-1}$ и $U_j=\psi_j(V_j)$. Тада, како је $\overline{V_j}$ компактан подскуп од V_{P_j} за свако j, постоји константа C тако да је $|\det J\psi_j(y)|\le C$ за $y\in U_j$, $1\le j\le k$, где је $J\psi_j(y)$ Јакобијева матрица од ψ_j у тачки y. Сада је $V=\bigcup_{j=1}^k V_j$ околина од $\partial\Omega$ и

$$\int\limits_\Omega \frac{\rho^\alpha(x)dx}{|x-\overline{z}|^{2\gamma}} = \int\limits_{\Omega\setminus V} \frac{\rho^\alpha(x)dx}{|x-\overline{z}|^{2\gamma}} + \int\limits_{\Omega\cap V} \frac{\rho^\alpha(x)dx}{|x-\overline{z}|^{2\gamma}}.$$

Процењујемо први сабирак:

$$\int\limits_{\Omega\setminus V} \frac{\rho^\alpha(x)}{|x-\overline{z}|^{2\gamma}}dx \le d(\Omega\setminus V,\partial\Omega)^{-2\gamma}\mathrm{diam}(\Omega)^\alpha \mathrm{Vol}(\Omega) = C(\Omega,\alpha,\gamma),$$

где је C константа која зависи само од Ω,α,γ, али не од z.

А затим и други:

$$\int\limits_{\Omega\cap V} \frac{\rho^\alpha(x)}{|x-\overline{z}|^{2\gamma}}dx \le \sum_{j=1}^k \int\limits_{V_j\cap\Omega} \frac{\rho^\alpha(x)}{|x-\overline{z}|^{2\gamma}}dx.$$

Нека је фиксирано j, $1\le j\le k$, процењујемо интеграл $I_j=\int_{V_j\cap\Omega}\frac{\rho^\alpha(x)}{|x-\overline{z}|^{2\gamma}}dx$. Након смене промењљивих $x=\psi_j(y)$, $y=\varphi_j(x)$ важи да је:

$$I_j=\int\limits_{W_j}\int\limits_0^{\delta_j} \frac{\rho^\alpha(\psi_j(y))}{|\psi_j(y)-\overline{z}|^{2\gamma}}|detJ\psi_j(y)|dy \le C\int\limits_{W_j}\int\limits_0^{\delta_j} \frac{\rho^\alpha(\psi_j(y))}{|\psi_j(y)-\overline{z}|^{2\gamma}}dy.$$

Сада, применом Леме 3.5 и Леме 3.6, добијамо:

$$\int\limits_{W_j}\int\limits_0^{\delta_j} \frac{\rho^\alpha(\psi_j(y))}{|\psi_j(y)-\overline{z}|^{2\gamma}}dy \le C\int\limits_{W_j}\int\limits_0^{\delta_j} \frac{y_n^\alpha}{|\psi_j(y)-\overline{z}|^{2\gamma}}dy \le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^{\delta_j} \frac{{y_n}^\alpha}{|\psi_j(y)-\overline{z}|^{2\gamma}}dy \le C\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^{\infty} \frac{{y_n}^\alpha}{|y-\overline{w}|^{2\gamma}}dy,$$

где је y_n, n-та координата од y и $\overline{w}=(0,...,0,\rho(z))$.

Коначно, применом процене из Леме 3.7, добијамо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_0^{+\infty} \frac{y_n^\alpha}{|y-\overline{w}|^{2\gamma}}dy \le Cw_n^{n+\alpha-2\gamma} \le C_1 y_n^{n+\alpha-2\gamma} \le C_2\rho(z)^{n+\alpha-2\gamma}.$$

Сада формулишемо теорему која описује утапање описано у овом поглављу а која је објављена у раду [46].

Теорема 3.24. *Нека је* Δ_k, $k\in\mathbb{N}$, $Whitney$*-јев тип покривача* Ω, $\alpha>-1$, *и* μ *позитивна Борелова мера:*

(1) Мера μ *задовољава услов типа Карлесона*

$$\frac{\mu(\Delta_k)}{|\Delta_k|^{1+\frac{\alpha}{n}}}\le C, \qquad k\ge 1.$$

(2) b_α^p *се непрекидно утапа у* $L^p(\Omega,d\mu)$.

За свако $p>0$ *услов (2) следи из (1). Ако је* $p>1+\frac{\alpha+2}{n-2}$, *наведени услови су еквивалентни.*

Доказ: Прво доказујемо импликацију: $(1)\Rightarrow(2)$. Нека је $f\in b_\alpha^p$, вршимо поделу домена Ω на коцке Δ_k са центром у x_k, као у Леми 3.2, и добијамо

$$||f||^p_{L^p(\mu)} = \int\limits_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) = \sum_{k=1}^\infty \int\limits_{\Delta_k} |f(x)|^p d\mu(x) \le \sum_{k=1}^\infty \mu(\Delta_k)\sup_{z\in\Delta_k}|f(x)|^p. \quad (3.17)$$

Применом Леме 3.4 и Леме 3.3 важи

$$\sup_{x\in\Delta_k}|f(x)|^p \le \frac{C}{|\Delta_k^*|}\int\limits_{\Delta_k^*}|f(x)|^p dm_\alpha(x) \le \frac{C}{\rho(x_k)^n}\int\limits_{\Delta_k^*}|f(x)|^p dm_\alpha(x), \qquad k\ge 1. \quad (3.18)$$

А комбинацијом релација (3.18), (3.17) и (3.12) добијамо

$$||f||^p_{L^p(\mu)} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(\Delta_k)}{\rho(x_k)^n} \int\limits_{\Delta_k^*} |f(z)|^p dm(z) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(\Delta_k)}{\rho(x_k)^{n+\alpha}} \int\limits_{\Delta_k^*} |f(z)|^p dm_\alpha(z).$$

На крају, користећи особине коначног покривача Δ_k^* (Лема 3.2) имамо да је

$$||f||^p_{L^p(\mu)} \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k^*} |f(z)|^p dm_\alpha(z) \leq C \int\limits_{\Omega} |f(z)|^p dm_\alpha(z),$$

из чега следи услов (2). Тиме смо доказали да важи прва импликација.

Сада доказујемо да важи и друга импликација $(2) \Rightarrow (1)$.

По претпоставци, постоји константа C тако да је $||f||_{L^p(\mu)} \leq C||f||_{b^p_\alpha}$ за свако $f \in b^p_\alpha(\Omega)$. Нека је коцка Δ_k са центром у тачки x_k фиксирана и нека је тест функција облика $f(x) = \frac{1}{|x-\overline{x}_k|^{n-2}}$. Постоје константе $0 < c \leq C < \infty$ тако да је $c\rho(x_k) \leq |x - \overline{x}_k| \leq C\rho(x_k)$, $x \in \Delta_k$, (Лема 3.3). Онда је

$$||f||^p_{b^p_\alpha} = \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dm_\alpha(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(x)^\alpha |f(x)|^p dx = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(x)^\alpha}{|x - \overline{x}_k|^{p(n-2)}} dx,$$

и на основу Леме 3.8 имамо

$$||f||^p_{b^p_\alpha} \leq C\rho(x_k)^{\alpha+n-p(n-2)}.$$

Затим, користећи неједнакост $|x - \overline{x}_k| \leq C\rho(x_k)$ важи да је

$$||f||^p_{L^p(\Omega,\mu)} = \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Delta_k} |f(x)|^p d\mu \geq \int\limits_{\Delta_k} |f(x)|^p d\mu =$$

$$= \int\limits_{\Delta_k} \frac{d\mu}{|x - \overline{x}_k|^{p(n-2)}} \geq \frac{\mu(\Delta_k)}{\rho(x_k)^{p(n-2)}}.$$

Односно,

$$\frac{\mu(\Delta_k)}{\rho(x_k)^{p(n-2)}} \leq ||f||^p_{L^p(\Omega,\mu)} \leq C||f||^p_{B^p_\alpha} \leq C\rho(x_k)^{\alpha+n-p(n-2)},$$

и тиме долазимо до траженог резултата: $\frac{\mu(\Delta_k)}{|\Delta_k|^{1+\frac{\alpha}{n}}} \leq C$, $k \geq 1$.

Остаје нерешен проблем: Да ли су услови (1) и (2) еквивалентни за свако $p > 0$?

Глава 4

Неки помоћни резултати

4.1 Витнијева декомпозиција

Витнијева декомпозиција је специјално разлагање отвореног скупа у Еуклидском простору. Име је добила по Hassler Whitney-ју 1934. године [99].
Нека је $F \subset \mathbb{R}^n$ затворен скуп. Поставља се питање да ли се комплемент F^c, скупа F, може представити као дисјунктна унија коцки са погодно одабраним условима? У случају $n = 1$, одговор је свакако позитиван. Сваки отворен скуп је јединствена унија дисјунктних отворених интервала. За случај када је $n \geq 2$, ситуација више није тако једноставна, јер произвољан отворен скуп можемо посматрати на бесконачно много различитих начина као унију дисјунктних коцки (под коцкама подразумевамо затворене коцке, а под дисјунктним коцкама подразумевамо дисјунктност њихових унутрашности).

Прва од таквих је Витнијева декомпозиција.

Теорема 4.1. *[85] Нека је F непразан и затворен подскуп од $\mathbb{R}^n$. Тада је његов комплемент, F^c, унија коцки Δ_k чије су стране паралелне осама, унутрашњости дисјунктне и пречници самерљиви са растојањем коцки од скупа F. Прецизније:*

(i) $\Omega = F^c = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$.

(ii) $\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset$, *ако је* $j \neq k$.

(iii) Постоје константе $c_1, c_2 > 0$ *(може се узети* $c_1 = 1, c_2 = 4$*), тако да је* $c_1 diam(\Delta_k) \leq dist(\Delta_k, F) \leq c_2 diam(\Delta_k)$.

Доказ: Посматрамо решетку тачака у $\mathbb{R}^n$ чије су координате целе. Ова решетка одређује мрежу $\mathcal{M}_0$, чије су фамилије коцке, тј. све јединичне коцке чији су врхови тачке горње решетке. Мрежа $\mathcal{M}_0$ води до двосмерног бесконачног ланца таквих мрежа $\{\mathcal{M}_k\}_{-\infty}^{\infty}$, где је $\mathcal{M}_k = 2^{-k}\mathcal{M}_0$.

Тако свака коцка $\mathcal{M}_{k-1}$ садржи 2^n коцки мреже $\mathcal{M}_k$. Даље, свака коцка мреже $\mathcal{M}_k$ има страницу дужине 2^{-k} и зато јој је пречник $\sqrt{n}2^{-k}$.

Поред мрежа $\mathcal{M}_k$ посматрамо и слојеве Ω_k, дефинисане са

$$\Omega_k = \{x : c2^{-k} < dist(x, F) \leq c2^{-k+1}\},$$

где је c позитивна константа. Очигледно је $\Omega = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k$.

Посматрамо даље, коцке мреже $\mathcal{M}_k$ и фамилију $\mathcal{F}_0$, при чему се $\mathcal{F}_0$ састоји од коцки мреже $\mathcal{M}_k$ које имају заједничких тачака са Ω_k, односно:

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_k (\Delta \in \mathcal{M}_k : \Delta \cap \Omega_k \neq 0).$$

Тада је $\bigcup\limits_{Q \in \mathcal{F}_0} \Delta = \Omega$.

Доказујемо прво услов (iii).

Нека је $\Delta \in \mathcal{M}_k$, тада $diam(\Delta) = \sqrt{n}2^{-k}$. Како је $\Delta \in \mathcal{F}_0$, па постоји $x \in \Delta \cap \Omega_k$. Тада је

$$dist(\Delta, \Omega) \leq dist(x, \Omega) \leq c2^{-k-1},$$

$$dist(\Delta, \Omega) \geq dist(x, \Omega) - diam(\Delta) > c2^{-k} - \sqrt{n}2^{-k}.$$

Ако ставимо да је $c = 2\sqrt{n}$ добијамо (iii).

Из (iii) коцке $\delta \in \mathcal{F}_0$ и скуп F су дисјунктни и јасно је да покривају Ω. Дакле, и (i) је доказана.

Приметимо да фамилија коцки $\mathcal{F}_0$ има сва тражена својства из теореме, осим да коцке нису неопходно међусобно дисјунктне. Да бисмо завршили доказ потребно је неке изборне елементе поправити, уклањајући неке коцке које нису потребне.

Претпоставимо да су Δ_1 и Δ_2 коцке, узете редом из мреже $\mathcal{M}_{k_1}$ односно $\mathcal{M}_{k_2}$. Тада, ако Δ_1 и Δ_2 нису дисјунктне, онда једна мора бити садржана у другу. Нека је нпр. $\Delta_1 \subset \Delta_2$ ако је $k_1 \geq k_2$.

Нека је сада, $\Delta \in \mathcal{F}_0$ нека коцка. Посматрамо максималну коцку Δ' те фамилије која садржи Δ. Из (iii) имамо да је $diam(\Delta') \leq 4\, diam(\Delta)$. Штавише, било које две коцке Δ' и Δ'' које садрже Δ имају не тривијалан пресек. На основу овога следи да свака коцка $\Delta \in \mathcal{F}_0$ има јединствену максималну коцку из исте фамилије која садржи Δ. Тиме се добија дисјунктност максималних коцки из $\mathcal{F}_0$. Ако са $\mathcal{F}$ означимо фамилију максималних коцки, тада важи:

(i) $\bigcup\limits_{\Delta \in \mathcal{F}} \Delta = \Omega$,

(ii) коцке из $\mathcal{F}$ су међусобно дисјунктне,

(iii) $diam(\Delta) \leq dist(\Delta, \Omega) \leq 4\, diam(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{F}$.

Овим је доказ теореме завршен.

Проширење ове теореме се односи на позитивне константе c^* и c^{**} $(1 < c^* < c^{**})$, које зависе само од структурних константи а не и од скупа Ω.

За било коју лопту B полупречника r дефинишемо лопте B^* и B^{**} са истим центрима као B, и полупречницима c^*r и $c^{**}r$, редом.

Лема 4.1. *[86] Нека је $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ непразан отворен скуп. Тада постоји фамилија лопти $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ за које важи:*

(i) B_k су међусобно дисјунктне,

(ii) $\bigcup\limits_k B_k^* = \Omega$,

(iii) $B_k^{**} \cap \Omega^c \neq \emptyset$, за свако k.

Напомена 4.1.

(a) Из фамилије $\{B_k\}$ се лако конструише фамилија скупова $\{Q_k\}$ тако да су Q_k дисјунктни, $B_k \subset Q_k \subset B^*$ и $\bigcup\limits_k Q_k = \Omega$. На пример,

$$Q_k = B_k^* \cap \left(\bigcup_{j<k} Q_j \right)^c \cap \left(\bigcup_{j>k} B_j \right)^c, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Скупови Q_k се могу узети као замена за стандардне коцке које се појављују у Витнијевој теореми.

(b) Иако B_k^* нису неопходно дисјунктни, они имају својство ограниченог пресека, што значи: постоји N такво да се ниједна тачка не садржи у више од N скупова B_k^*

Доказ леме: Фиксирамо произвољно довољно мало ϵ, видећемо касније да је $\epsilon = \frac{1}{8c_1^2}$, где је c_1 константа из Теореме 4.1. Посматрамо покривач $\{B(x, \epsilon r(x))\}_{x\in\Omega}$, где је $r(x)$ растојање од x до Ω^c, тако да је $r(x) = \sup\{r : B(x,r) \subset \Omega\}$. Тада је за свако $x \in \Omega$ функција $r(x)$ строго позитивна и коначна.

Узимамо сада максималну, у смислу инклузије, подфамилију међусобно дисјунктних лопти дате фамилије $\{B(x, \epsilon r(x))\}$. За ову подфамилију $B_1, \ldots, B_k, \ldots$ где је $B_k = B(x_k, \epsilon r(x_k))$, показујемо особине $(i), (ii), (iii)$ леме. Дефинишемо:

$$B_k^* = B\left(x_k, \frac{r(x_k)}{2}\right), \qquad B_k^{**} = B(x_k, 2\,r(x)),$$

(при чему је $c^* = \frac{1}{2\epsilon}$ и $c^{**} = \frac{2}{\epsilon}$). Особине (i) и (iii) из леме важе аутоматски на основу избора B_k. Такође је јасно да је $B_k^* \subset \Omega$. Оно што остаје да се покаже да је $\bigcup\limits_k B_k^* \supset \Omega$.

Нека је сада, $x \in \Omega$, тада на основу максималности фамилије $\{B_k\}$, је

$$B(x_k, \epsilon r(x_k)) \cap B(x, \epsilon r(x)) \neq \emptyset,$$

за неко k.

Показујемо да је $r(x_k) \geq \frac{r(x)}{4c_1}$. У супротном, узмимо да је $\epsilon < \frac{1}{2c_1}$ (< 1), добијамо:

$$B(x_k, r(x_k)) \cap B\left(x, \frac{r(x)}{2c_1}\right) \neq \emptyset.$$

Како је $2r(x) < \frac{r(x)}{2c_1}$, тада важи

$$B(x_k, 2r(x_k)) \subset B\left(x, \frac{r(x)}{2}\right),$$

што је контрадикција јер $B(x_k, 2r(x)) \cap \Omega^c \neq \emptyset$, док је $B\left(x, \frac{r(x)}{2}\right) \subset \Omega$.

И сада, коришћењем услова $4c_1\epsilon r(x_k) \geq \epsilon r(x)$ добијамо

$$x \in B(x_k, c_1 4c_1 \epsilon r(x_k)).$$

Па је $B(x_k, c_1 4c_1 \epsilon r(x_k)) = B^* = B\left(x, \frac{r(x_k)}{2}\right)$, тј. $c^* = 4c_1^2$, $\epsilon = \frac{1}{2c^*} = \frac{1}{8c_1^2}$, $c^{**} = 4c^* = 16c_1^2$. И овим је доказ завршен.

4.2 QNS функције

QNS функције су почеле да се јављају крајем 20-ог и почетком 21-ог века. Први рад у коме се појављују је рад М. Павловића из 1994. године [63]. Класа QNS функција је природна и велика, има важне и занимљиве особине, која између осталог укључује ненегативне субхармонијске функције, ненегативне nearly субхармонијске функције, функције које задовољавају одређене природне услове раста, својствене функције неких елиптичких диференцијалних оператора и полихармонијске функције.

Нека је Ω домен у $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. За Борел мерљиву функцију $u : \Omega \to [0, \infty]$ кажемо да је quasi-nerly subharmonic (краће QNS), ако постоји константа $K \geq 1$ тако да важи

$$u(x) \leq \frac{K}{r^n} \int\limits_{\mathbf{B}(x,r)} u\,dm \tag{4.1}$$

за било коју лопту $\mathbf{B}(x, r) \subset \Omega$.

Класу функција које задовољавају неједнакост (4.1) (за фиксирано K) означавамо са $QNS_K(\Omega)$, док класу свих QNS функција дефинисаних на Ω, означавамо са $QNS(\Omega)$, тј.

$$QNS(\Omega) = \bigcup_{K \geq 1} QNS_K(\Omega).$$

Став 4.1. *([65]) 1) Ако је $u \in QNS(\Omega)$, тада је u локално ограничена у Ω. Штавише, ако је $u \in QNS_K(\Omega)$ и $\lambda > 1$, тада постоји константа K_1 која зависи само од K, λ и n тако да важи*

$$\sup_{y \in \mathbf{B}\left(x, \frac{r}{\lambda}\right)} u(y) \leq \frac{K_1}{r^n} \int\limits_{\mathbf{B}(x,r)} u(y) dm(y)$$

кад год је $\mathbf{B}(x, r) \subset \Omega$.

2)Збир и максимум коначног низа QNS функција су QNS функције.

3) Ако је $u_j \in QNS_K(\Omega)$ за $j = 1, 2, \ldots$ и $u = \sum\limits_{j=1}^{\infty} u_j \in L^1_{loc}(\Omega)$ тада $u \in QNS_K(\Omega)$.

Теорема 4.2. *([63]) Ако је u локално интеграбилна функција и полунепрекидна одозго на Ω и испуњава услов (4.1) за неко K, тада и за функцију $|u|^p$ $(p > 0)$ важи неједнакост (4.1) за неку константу K_1 која зависи само од K, p и n.*

Доказ: Претпоставимо да u задовољава услов (4.1) за неко $K \geq 1$ и нека је $p < 1$. (Ако је $p \geq 1$, користимо Jensen-ову неједнакост). Посматрајући функцију $z \to u(x + rz)$, дефинисану на јединичној лопти ако је $\mathbf{B}(x, r) \subset \Omega$, видимо да се доказ, заправо, своди на доказивање да важи неједнакост

$$u^p(0) \leq \frac{K_1}{w_n} \int\limits_{\mathbf{B}} u^p dm,$$

под условом да $\mathbf{B} \subset \Omega$, где K_1 зависи само од K, p и n и при чему је у овом доказу dm нормализована Лебегова мера, тј. $m(\mathbf{B}) = 1$, $\mathbf{B} = \{x : |x| < 1\}$. Доказујући ово можемо претпоставити да је лопта затворена у Ω и да је

$$\int\limits_{\mathbf{B}} u^p dm = 1. \tag{4.2}$$

Како је u полунепрекидна одозго, тада можемо изабрати $x \in \mathbf{B}$ тако да је

$$u^p(z)(1 - |z|)^n \leq 2u^p(x)(1 - |x|)^n \tag{4.3}$$

за свако $x \in \mathbf{B}$. Нека је сада $r = \frac{1-|x|}{2}$. Из релације (4.1) следи да је

$$u(x)(1-|x|)^n \leq 2^n K \int\limits_{\mathbf{B}(x,r)} u^p u^{1-p} dm. \tag{4.4}$$

С друге стране, из релације (4.3) следи да је $u^p(z) \leq 2^{n+1} u^p(x)$ за $z \in \mathbf{B}(x,r)$ и према томе на основу релација (4.2) и (4.4) добијамо да је

$$u(x)(1-|x|)^n \leq K_2 u(x)^{1-p},$$

где K_2 зависи само од K, p и n. Стога из (4.3) ($z = 0$)

$$u(0) \leq 2u^p(x)(1-|x|)^n \leq 2K_2,$$

чиме је доказ завршен.

Став 4.2. *([65]) За QNS функције u_j, $1 \leq j \leq m$ и $p, q > 0$ важи да је и*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} u_j^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

QNS функција.

У Глави 5 дајемо резултат о ограничености извесног оператора типа максималне функције у класи QNS, у односу на мешовиту норму: видети Теорему 5.4.

Глава 5

Простори хармонијских функција са мешовитом нормом у B^n и H^n

У овој глави дајемо кратак опис простора са мешовитом нормом, а пре свега простора хармонијских функција са мешовитом нормом.

Просторе са мешовитом нормом за холоморфне функције на једничном диску уводе први Hardy и Littlewood у [33, 34]. Djrbashian у својим радовима [15, 16] уводи мешовиту норму у Бергмановим просторима. Затим аутори се баве дуалношћу простора са мешовитом нормом међу којима су, Shields и Wiliams [78, 79], Duren, Romberg и Shields [23], Flett [29], Shapiro [77], Mateljević и Pavlović [58], Pavlović [61, 62].

Ricci и Taibleson, у свом раду [72], проширују резултате рада Coifman-а и Rochberg-а [14] на општију класу Лебегових простора холоморфних и хармонијских функција са мешовитом нормом дефинисаних на горњој полуравни.

Утапања са различитим индексима, су међу првим резултатима добијеним за просторе са мешовитом нормом. Неки од резултата у овој области се могу наћи у монографији од Duren-а, [19]. Flet у радовима [26], [27] знатно проширује, ојачава и даје неколико доказа за оригиналне резултате Hardy-ја и Littlewood-а. Касније, проширења на више димензије, Hardy и Littlewood-их и Flet-овых резултата, су добијена за домене у $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$.

У Поглављима 5.1 и Поглављу 5.2 дефинишемо просторе са мешовитом нормом хармонијских функција на јединичној лопти у $\mathbb{R}^n$ и горњем полупростору, редом. Осим тога у Поглављу 5.1 наводимо и познату теорему утапања коју су Avetisyan и Tonoyan доказали за различите вредности параметара p, q, $0 < p, q \leq \infty$ и тежине $\alpha \in \mathbb{R}$. Делови (3) и (4) ове теореме се у Поглављу 5.3 уопштавају на ограничену област $\Omega \in \mathbb{R}^n$ са C^1 границом, (Теорема 5.2).

5.1 Простори хармонијских функција са мешовитом нормом на јединичној лопти у $\mathbb{R}^n$

Нека је $\mathbf{B}$ отворена јединична лопта у $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{S} = \partial\mathbf{B}$ њена граница, тј. јединична сфера. Интеграл реда p хармонијске функције $u(x) = u(r\xi)$ на сфери $\mathbf{S}$ означавамо са

$$M_p(u,r) = ||u(r,\cdot)||_{L^p(S,d\sigma)}, \qquad 0 \leq r < 1, \qquad 0 < p \leq \infty,$$

где $d\sigma$ представља $(n-1)$-димензионалну нормализовану површинску Лебегову меру на $\mathbf{S}$, тј. $\sigma(\mathbf{S}) = 1$. Као што смо и раније видели, скуп свих хармонијских функција на јединичној лопти $\mathbf{B}$ означавамо са $h(\mathbf{B})$, као и то да за функције из хармонијске Хардијеве класе $h^p(\mathbf{B}^n)$ по дефиницији важи

$$||u||_{h^p} = \sup_{0<r<1} M_p(u,r) < +\infty.$$

Сада, просторе хармонијских функција са мешовитом нормом на јединичној лопти, $h(p,q,\alpha)$ $(0 < p,q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R})$, дефинишемо као простор горе наведених хармонијских функција $u \in h(\mathbf{B})$ за које је квази-норма

$$||u||_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(u,r)dr\right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty \\ \\ \sup\limits_{0<r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(u,r), & q = \infty, \end{cases}$$

коначна. Ако је $(1-r)^{\alpha} M_p(u,r) = o(1)$ за $r \to 1^-$, тада кажемо да хармонијска функција $u(x)$ припада "малом" простору $h_0(p,\infty,\alpha)$. Приметимо да за $p = q < \infty$ простор $h(p,q,\alpha)$ се поклапа са тежинском Бергмановом класом, а за $q = \infty$ ови простори се називају тежински Хардијеви простори.

Простори $h(p,p,\alpha)$, $h(p,q,\alpha)$ на једничној лопти у $\mathbb{R}^n$ могу се видети у [45], [64], [67], [68], [92], [93] и њиховим рефернцама. Као што смо већ видели, за $0 < p \leq 1$ Хардијева класа $h^p(\mathbf{B})$ има компликованију структуру и у суштини се разликује од Хардијеве класе $h^p(\mathbf{B})$ за $p > 1$. Слична ситуација се јавља и код простора $h(p,q,\alpha)$. Ако је $1 \leq p,q \leq \infty$, тада су $h(p,q,\alpha)$ Банахови простори са нормом $||\cdot||_{p,q\alpha}$. За $0 < p < 1$ или $0 < q < 1$, простори $h(p,q,\alpha)$ су комплетни метрички простори са инваријантном метриком $d(x,y) = ||u-v||_{p,q,\alpha}^{\min\{p,q\}}$.

Утапањима хармонијских простора са мешовитом нормом на јединичној лопти бавили су се K. Avetisyan и Y. Tonoyan [5], њихов резултат је следећа теорема:

Теорема 5.1. *За $\alpha,\beta > -1$, $0 < p,q \leq \infty$ следећа утапања простора хармонијских* *функција са мешовитом нормом у* B^n *су непрекидна:*

(1) $h(p,q,\alpha) \subset h(p,q,\beta)$, $\quad \beta > \alpha$,

(2) $h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\alpha)$, $\quad 0 < p_0 < p \leq \infty$,

(3) $h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\alpha)$, $\quad 0 < q < q_0 \leq \infty$,

(4) $h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\beta)$, $\quad \beta \geq \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}, p \leq p_0 \leq \infty$,

(5) $h(p,q,\alpha) \subset h(\infty,q_0,\beta)$, $\quad \beta > \alpha + \frac{n-1}{p}, 0 < q_0 \leq \infty$,

(6) $h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\beta)$, $\quad \beta > \alpha, 0 < q_0 \leq \infty$,

(7) $h^p \subset h(p_0,\infty,\frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0})$, $\quad 0 < p < p_0 \leq \infty$,

(8) $h^p \subset h(p_0,q,\frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0})$, $\quad 1 < p < p_0 \leq \infty, p \leq q \leq \infty$

(9) $h^p \subset h(p_0,q,\beta)$, $\quad \beta > \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}, 0 < p < p_0 \leq \infty$,

(10) *Ако је* $u \in h(p,q,\alpha), 0 < q < \infty$ $\quad$ *onda* $u \in h_0(p,\infty,\alpha)$.

Као што смо већ напоменули, релације (3) и (4) уопштавамо у Глави 5 (Теорема 5.2).

5.2 Простори мешовите норме хармонијских функција у горњем полупростору

Квази-нормирани простор $L(p,q,\alpha)$ $(0 < p,q \leq \infty, \alpha > 0$ је скуп Борел мерљивих функција $f(x,y)$ у горњем полупростору $\mathbb{R}^{n+1}_+$, за које је квази-норма дефинисана са:

$$||f||_{p,q,\alpha} = \begin{cases} (\int_0^\infty y^{\alpha q-1} M_p^q(f,y)dy)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty \\ \\ \operatorname{esssup}_{y>0} y^\alpha M_p(f,y), & q = \infty, \end{cases}$$

коначна, при чему је $M_p(f,y) = ||f(\cdot,y)||_{L^p(dx)}, y > 0, 0 < p \leq \infty$.

Потпростор $h(p,q,\alpha)$ простора $L(p,q,\alpha)$ саствађен од хармонијких фукција је простор хармонијских функција са мешовитом нормом.

Ове просторе су многи проучавали: $Taibleson$ [94], $Flett$ [26]- [28], $Bui\ Huy\ Qui$ [9], *Ricci* и $Taibleson$ [72], $A.E.Djrbashian$ [17], *Ramey* и Yi [71]. Када је $p = q < \infty$ простори $h(p,q,\alpha)$ су тежински Бергманови простори.

5.3 Теореме утапања простора хармонијских функција

У овој глави излажемо нове резултате, засноване на раду [4], о утапањима простора хармонијских функција са мешовитом нормом на ограниченим доменима у $\mathbb{R}^n$ са глатком границом.

Теореме утапања за просторе хармонијских или аналитичких функција са мешовитом нормом су детаљно проучаване, посебно у случају јединичног диска, где прве резултате дају *Hardy* и *Littlewood* [33], [34]. У случају аналитичких функција, такве теореме су доказане за опште ограничене стриктно псеудоконвексне домене у $\mathbb{C}^n$, [60]. Простори хармонијских и аналитичких функција са мешовитом нормом у горњој полуравни су проучавани у [72, 70], и неке од тих метода су коришћене у доказу теореме на општем домену са C^1 границом. За хармонијске функције неки аутори су утапања за просторе са мешовитом нормом посматрали на $\mathbf{B}^n$, [5] или у горњем полупростору $\mathbf{H}^n$, [6]. Међутим, случај општег домена није разматран, све до сада.

И зато, као главни резултат, описујемо непрекидно утапање на ограниченом домену $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ са C^1 границом. Утапање, $h^{p,q}_{\alpha} \hookrightarrow h^{p_1,q_1}_{\alpha_1}$, које описујемо није једини резултат који је добијен. Као нови резултат добијамо ограниченост максималног оператора $u^{\times}$ у прострима са мешовитом нормом на општем домену за функције класе QNS, при чему су до сада били познати и ограниченост максималног оператора и утапања, када је домен јединични диск, јединична лопта или горњи полупростор.

Оператор кога овде помињемо, $u^{\times}$, је разматран у случају јединичног диска у [66], а повезан резултат за тежинске Бергманове просторе хармонијских функција на $\mathbf{B}^n$ се може видети у [59].

Пре него што почнемо са самим доказима и формулацијама, што помоћних тврђења што главних резултата, потребно је да ближе опишемо домен, као и нека геометријска разматрања. Осим тога за одговарајуће домене и функције дефинисаћемо одговарајуће норме.

На основу Теореме о цевастој околини постоји околина U на $\partial\Omega$ и постоји C^1-дифеоморфизам $\chi : U \to \partial\Omega \times (-r_0, r_0)$ тако да је $\chi(\partial\Omega) = \partial\Omega \times \{0\}$, $\chi(U \cap \Omega) = \partial\Omega \times (0, r_0)$. Нека је $\varphi = \chi^{-1}$ и $\Gamma_t = \varphi(\partial\Omega \times \{t\}) \subset U$. За мерљиву комплексно вредносну функцију f дефинисану на $\Omega \cap U$ (или Ω), дефинишемо функцију $\widetilde{f} : \partial\Omega \times (0, r_0) \to \mathbb{C}$ са $\widetilde{f}(\xi, t) = f(\varphi(\xi, t))$.

Ако су $u_1, u_2 \in h(\Omega)$ и $u_1 = u_2$ на $\Omega \cap U$, тада је $u_1 = u_2$ на Ω. Означимо са $\widetilde{u} = \widetilde{(u|_{\Omega\cap U})}$, при чему из $\widetilde{u_1} = \widetilde{u_2}$, следи $u_1 = u_2$ за $u_1, u_2 \in h(\Omega)$.

Сада, дефинишемо просторе са мешовитом нормом на Ω и на $\partial\Omega \times (0, r_0)$. За

Борел мерљиву функцију f на Ω или на $\Omega \cap U$ уводимо

$$M_p(f,t) = \left\{ \int\limits_{\partial\Omega} |\widetilde{f}(\xi,t)|^p d\sigma(\xi) \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty, \quad 0 < t < r_0,$$

са уобичајеном конвенцијом за $p = \infty$. Такође, за Борел мерљиву функцију g на $\partial\Omega \times (0, r_0)$ нека је

$$\widetilde{M_p}(g,t) = \left\{ \int\limits_{\partial\Omega} |g(\xi,t)|^p d\sigma(\xi) \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty, \quad 0 < t < r_0,$$

опет са уобичајеном конвенцијом за $p = \infty$. Сада се простор са мешовитом нормом

$$\mathcal{L}^{p,q}_\alpha = \mathcal{L}^{p,q}_\alpha(\partial\Omega \times (0, r_0)), \quad 0 < p, q \leq \infty, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

посматра као простор Борел мерљивих функција g на $\partial\Omega \times (0, r_0)$ чија је (квази) норма

$$||g||_{\mathcal{L}^{p,q}_\alpha} = ||t^\alpha \widetilde{M_p}(g,t)||_{L^q((0,r_0),\frac{dt}{t})},$$

коначна.

Следеће, дефинишемо простор хармонијских функција са мешовитом нормом

$$h^{p,q}_\alpha(\Omega) = \{u \in h(\Omega) : \widetilde{u} \in \mathcal{L}^{p,q}_\alpha(\partial\Omega \times (0, r_0))\}$$

и (квази) нормом

$$||u||_{h^{p,q}_\alpha(\Omega)} = ||\widetilde{u}||_{\mathcal{L}^{p,q}_\alpha}.$$

Овде су $0 < p, q \leq \infty$ и $\alpha > -1$. За $\alpha \leq -1$ простори су тривијални. Различити избори дефинирајуће функције ρ и различити избори пресликавања χ дају различите али еквивалентне норме и исте просторе мешовитих норми.

У наставку, дефинишемо "лопте" са центром на граници домена Ω и "цилиндар" са центром у унутрашњој тачки домена Ω. При томе користимо дифеоморфизам φ.

За сваку тачку ξ на граници од Ω и $t > 0$ дефинишемо "лопту" $B^{\partial\Omega}_t(\xi) \subset \partial\Omega$ са центром у тачки $\xi \in \partial\Omega$ и полупречника $t > 0$ са

$$B^{\partial\Omega}_t(\xi) = \{\eta \in \partial\Omega : |\xi - \eta| \leq t\},$$

за коју важи процена:

$$\sigma\left(B_t^{\partial\Omega}(\xi)\right) \asymp t^{n-1}, \quad 0 < t \leq diam(\partial\Omega). \tag{5.1}$$

Такође, посматрамо "цилиндар" у Ω са центром у тачки $\varphi(\xi, t)$:

$$Q(\xi, t) = \{z \in \Omega \cap U : \chi(z) \in B_t^{\partial\Omega}(\xi) \times \left[\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}\right]\}, \quad \xi \in \partial\Omega, \quad 0 < t < \frac{2r_0}{3},$$

за који важи процена:

$$|Q(\xi, t)| \asymp t^n, \quad 0 < t \leq diam(\partial\Omega). \tag{5.2}$$

Метрику на $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ дефинишемо са

$$d_{\partial\Omega\times\mathbb{R}}((\xi_1, t_1), (\xi_2, t_2)) = \sqrt{|\xi_1 - \xi_2|^2 + |t_1 - t_2|^2},$$

за $(\xi_1, t_1), (\xi_2, t_2)$ из $\partial\Omega \times \mathbb{R}$. Лако се види да су $\chi : U_1 \to \partial\Omega \times [-r_1, r_1]$ и $\varphi : \partial\Omega \times [-r_1, r_1] \to U_1$, Липшиц непрекидне за било које $r_1 \in (0, r_0)$ где је $U_1 = \varphi(\partial\Omega \times [-r_1, r_1])$. Ови C^1 дифеоморфизми имају непрекидне и ограничене парцијалне изводе. Сада, без губљења оштости, можемо претпоставити да су χ и φ Липшиц непрекидне, тј. да постоје константе $0 < l \leq L < \infty$ тако да је

$$l|z - w| \leq d_{\partial\Omega\times\mathbb{R}}(\chi(z), \chi(w)) \leq L|z - w|,$$

за свако $z, w \in U$. Такође, постоје константе $0 < c \leq C < \infty$ тако да за било који мерљив скуп $E \subset U$ имамо да је

$$c(d\sigma \times dt)(\chi(E)) \leq |E| \leq C(d\sigma \times dt)(\chi(E)).$$

Дакле, за било коју ненегативну и мерљиву функцију f на $\Omega \cap U$ је

$$\int\limits_{\Omega\cap U} f dm \asymp \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_0^{r_0} \widetilde{f} d\sigma dt. \tag{5.3}$$

Нека је $r_2 = \min(\frac{2r_0}{3}, \frac{r_0}{2L})$. Доказујемо сада инклузије:

$$\overline{B}\left(\varphi(\xi, t), \frac{t}{2L}\right) \subset Q(\xi, t) \subset B\left(\varphi(\xi, t), \frac{2t}{l}\right), \quad \xi \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq r_2. \tag{5.4}$$

Прва инклузија је еквивалента са

$$\chi\left(\overline{B}\left(\varphi(\xi,t),\frac{t}{2L}\right)\right)\subset\chi(Q(\xi,t))=B_t^{\partial\Omega}\xi(\xi)\times[\frac{t}{2},\frac{3t}{2}].$$

Сада, за $z\in\overline{B}(\varphi(\xi,t),\frac{t}{2L})$ је

$$d_{\partial\Omega\times\mathbb{R}}(\chi(z),(\xi,t))=d_{\partial\Omega\times\mathbb{R}}(\chi(z),\chi(\varphi(\xi,t)))\leq L|z-\varphi(\xi,t)|\leq L\frac{t}{2L}=\frac{t}{2},$$

што доказује инклузију

$$\chi\left(\overline{B}\left(\varphi(\xi,t),\frac{t}{2L}\right)\right)\subset B_{\frac{t}{2}}^{\partial\Omega}(\xi)\times\left[\frac{t}{2},\frac{3t}{2}\right].$$

Слично се доказује $Q(\xi,t)\subset B(\varphi(\xi,t),\frac{2t}{l})$.

Нека је

$$V=\varphi(\partial\Omega\times(0,r_2))\subset\Omega\cap U.$$

Комбинација Теореме 3.13 са релацијама (5.2),(5.4) даје следећи резултат:

Лема 5.1. *Нека је $Q(\xi,t)$ цилиндар у Ω, где је $\xi\in\partial\Omega$, $0<t\leq r_2$, и претпоставимо да је u хармонијска у Ω. Тада за свако $p>0$ постоји константа $C>0$ која зависи само од p, n и Ω тако да је*

$$|u(\varphi(\xi,t))|^p\leq\frac{C}{|Q(\xi,t)|}\int\limits_{Q(\xi,t)}|u|^p dm.$$

Главни резултат ове главе је следећа теорема:

Теорема 5.2. *Нека је $0<p\leq p_1\leq\infty$ и $0<q\leq q_1\leq\infty$. Тада је*

$$h_{\alpha}^{p,q}(\Omega)\hookrightarrow h_{\alpha_1}^{p_1,q_1}(\Omega),$$

непрекидно утапање простора, при чему је $\alpha_1=\alpha+(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)$.

Доказ теореме утапања о којој говоримо, се изводи у два корака. Први корак се односи само на повећање параметра q до q_1 за које важи $0<q\leq q_1\leq\infty$, што ће бити лакши део посла и који ће бити дат као издвојено тврђење, (Лема 5.2). А други корак се односи на повећање параметра p до p_1, за који важи $0<p\leq p_1\leq\infty$, што узрокује и повећање тежине α за вредност израза $(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)$. Овај корак је знатно компликованији и ту користимо резултат о $u^{\times}$, (Теорема 5.4).

И сада, наводимо и доказујемо утапање простора хармонијских функција са мешовитом нормом када се параметар q повећава до q_1, тј. $0<q\leq q_1\leq\infty$.

Лема 5.2. *Нека је* $0 < q \leq \infty$ *и* $\alpha > -1$, *тада је* $h^{p,q}_{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow h^{p,\infty}_{\alpha}(\Omega)$.

Користимо идеју доказа из рада Ricci и Taibleson [72], који је дат у случају горње полуравни.

Доказ: Фиксирамо $u \in h^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$. Посматрамо два одвојена случаја $0 < p \leq q < \infty$ и $0 < q \leq p < \infty$.

Претпоставимо да је $0 < p \leq q < \infty$. За $0 < t < r_2$ на основу Леме 5.1 и релације (5.3) важи неједнакост

$$|\widetilde{u}(\xi,t)|^p \leq \frac{C}{|Q(\xi,t)|} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^p d\sigma(\eta) d\tau. \tag{5.5}$$

Интеграцијом по $\xi \in \partial\Omega$ и применом Фубинијеве теореме добијамо

$$\int_{\partial\Omega} |\widetilde{u}(\xi,t)|^p d\sigma(\xi) \leq \frac{C}{|Q(\xi,t)|} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{\partial\Omega} \int_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^p d\sigma(\eta) d\sigma(\xi) d\tau. \tag{5.6}$$

Фиксирано τ, и поновно применом Фубинијеве теореме и релације (5.1) долазимо до неједнакости:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \int_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\xi,t)|^p d\sigma(\eta) d\sigma(\xi) &= \int_{\partial\Omega} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^p \int_{\partial\Omega} \chi_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} d\sigma(\xi) d\sigma(\eta) \\ &\leq C\tau^{n-1} \int_{\partial\Omega} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^p d\sigma(\eta) d\sigma(\xi) d\tau.\end{aligned}$$

Коришћењем задњем неједнакости и релације (5.2) за процену унутрашњег интеграла у релацији (5.5) добијамо:

$$M_p^p(u,t) \leq \frac{C}{t^n} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \tau^{n-1} \int_{\partial\Omega} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^p d\sigma(\eta) d\tau \leq C \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^p(u,\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

такође смо искористили да је $\tau \asymp t$ за $\frac{t}{2} \leq \tau \leq \frac{3t}{2}$. Сада, употребом Хелдерове неједнакости са степеном $\frac{q}{p} \geq 1$ долазимо до неједнакости:

$$M_p^p(u,\tau) \leq C \left(\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^q(u,\tau) \frac{d\tau}{t} \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1-\frac{p}{q}} = C \left(\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^q(u,\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Дакле,

$$M_p(u,t) \le C \left(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^q(,\tau)\frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}}, \qquad 0 < t < r_2. \tag{5.7}$$

Следећи циљ је да добијемо процену (5.7) за други случај. тј. када је $0 < q \le p < \infty$. Нека је $r = \frac{p}{q} \ge 1$. Фиксирамо $0 < t < r_2$ и применом Леме 5.1 добијамо следећу процену:

$$|\widetilde{u}(\xi,t)|^q \le \frac{C}{|Q(\xi,t)|} \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int\limits_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^q d\sigma(\eta) d\tau. \tag{5.8}$$

Ова неједнакост са релацијом (5.2) даје

$$|\widetilde{u}(\xi,t)|^p \le \left(\frac{C}{t^n}\right)^r \left(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int\limits_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^q d\sigma(\eta) d\tau \right)^r.$$

Сада, интеграцијом по ξ долазимо до неједнакости:

$$M_p^p(u,t) \le \left(\frac{C}{t^n}\right)^r \int\limits_{\partial\Omega} \left(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int\limits_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^q d\sigma(\eta) d\tau \right)^r d\sigma(\xi),$$

односно

$$M_p^q(u,t) \le \left(\frac{C}{t^n}\right)^r \left(\int\limits_{\partial\Omega} \left(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int\limits_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^q d\sigma(\eta) d\tau \right)^r d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Применом интегралне неједнакости Минковског са експонентом $r = \frac{p}{q}$ добијамо

$$M_p^q(u,t) \le \frac{C}{t^n} \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \left(\int\limits_{\partial\Omega} \left(\int\limits_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\eta,\tau)|^q d\sigma(\eta) \right)^r d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{r}} d\tau.$$

Нека је

$$\varphi_r(\xi) = \int\limits_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |\widetilde{u}(\eta,\tau)^q| d\sigma(\eta), \tag{5.9}$$

па претходна неједнакост сада изгледа

$$M_p^q(u,t) \leq \frac{C}{t^n} \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \left(\int\limits_{\partial\Omega} \varphi_\tau^r(\xi) d\sigma(\xi) \right)^{\frac{1}{r}} d\tau = \frac{C}{t^n} \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} ||\varphi_\tau||_{L^r(\partial\Omega, d\sigma(\xi))} d\tau. \tag{5.10}$$

У циљу процене $L^r(\partial\Omega, d\sigma)$ норме функције φ_τ где је $\frac{t}{2} \leq \tau \leq \frac{3t}{2}$, дефинишемо функцију $\theta : \partial\Omega \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ са

$$\theta(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & |\xi - \eta| \leq t \\ 0, & |\xi - \eta| > t, \end{cases}$$

при чему је јасно да је $\theta(\xi, \eta) = \theta(\eta, \xi)$ и

$$\varphi_\tau(\xi) = \int\limits_{\partial\Omega} \theta(\xi, \eta) |\widetilde{u}(\eta, \tau)|^q d\sigma(\eta).$$

Фиксирамо $\psi \in L^s(\partial\Omega, d\sigma(\xi))$, $||\psi||_s \leq 1$, где је $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$. Тада је

$$\left| \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_\tau(\xi)\psi(\xi) d\sigma(\xi) \right| = \left| \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} |\widetilde{u}(\eta, \tau)|^q \theta(\xi, \eta) |\psi(\xi)| d\sigma(\eta) d\sigma(\xi) \right|$$

$$\leq \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} |\widetilde{u}(\eta, \tau)|^q \theta^{\frac{1}{r}}(\xi, \eta) |\psi(\xi)| d\sigma(\xi) d\sigma(\eta) \leq AB,$$

где је

$$A = \left(\int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} (\widetilde{u}(\eta, \tau))^{rq} \theta(\xi, \eta) d\sigma(\xi) d\sigma(\eta) \right)^{\frac{1}{r}} \leq t^{\frac{n-1}{r}} \left(\int\limits_{\partial\Omega} |\widetilde{u}(\eta, \tau)|^p d\sigma(\eta) \right)^{\frac{q}{p}},$$

$$B = \left(\int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} |\psi(\xi)|^s \theta(\xi, \eta) d\sigma(\xi) d\sigma(\eta) \right)^{\frac{1}{s}} \leq t^{\frac{n-1}{s}} ||\psi||_s \leq t^{\frac{n-1}{s}}.$$

Комбинацијом горњих процена добијамо

$$\left| \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_\tau(\xi)\psi(\xi) d\sigma(\xi) \right| \leq t^{n-1} M_p^q(u, \tau), \qquad ||\psi||_s \leq 1,$$

а на основу дуалности имамо да је $||\varphi_\tau||_{L^p(\partial\Omega, d\sigma(\xi))} \leq t^{n-1} M_p^q(u, \tau)$. Применом релације (5.10) и $t \asymp \tau$ за $\frac{t}{2} \leq \tau \frac{3t}{2}$ долазимо до

$$M_p^q(u,t) \leq C \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^q(u,\tau)\frac{d\tau}{\tau},$$

при чему је доказана неједнакост (5.7) и у случају $0 < q \leq p$. Поновном применом $\tau \asymp t$ у оба случаја добијамо

$$t^\alpha M_p^q(u,t) \leq C \int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \tau^\alpha M_p^q(u,\tau)\frac{d\tau}{\tau} \leq C||u||^q_{h_\alpha^{p,q}(\Omega)}, \qquad 0 < t < r_2,$$

и следи да је $||h||_{h_\alpha^{p,\infty}(\Omega)} \leq C||u||_{h_\alpha^{p,q}(\Omega)}$.

Следећа теорема је сродна Теореми 4.2.

Теорема 5.3. *Нека је $0 < p < \infty$ и нека је $u \in QNS(W)$, тада је $u^p \in QNS(W)$. Прецизније, ако је $u \in QNS_K(W)$, тада је $u^p \in QNS_{K_1}(W)$, где K_1 зависи само од K, n и p.*

Користимо оператор максималне функције већ дефинисан релацијом (3.5) у поглављу Максималне функције.

Применом релација (5.1) и (5.2) лако се показује да је:

$$\sup_{\frac{3}{4}t \leq \tau \leq t} |\widetilde{u}(\xi,\tau)| \leq \frac{K_1}{|Q(\xi,t)|} \int\limits_{Q(\xi,t)} udm, \qquad u \in QNS_K(\Omega), \quad \xi \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq r_2,$$

где K_1 зависи само од K, n и Липшицових константи L, l за χ, φ. Ово значи да за $u \in QNS_K(\Omega)$ важи:

$$u^\times(\varphi(\xi,t)) \leq \frac{K_1}{|Q(\xi,t)|} \int\limits_{Q(\xi,t)} udm, \qquad \xi \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq r_2. \tag{5.11}$$

Простор $L_\alpha^{p,q}(\Omega \cap U)$ чине мерљиве функције $f : \Omega \cap U \to \mathbb{C}$ за које важи

$$||f||_{L_\alpha^{p,q}} = \left(\int\limits_0^{r_0} \left(\int\limits_{\partial\Omega} |\widetilde{f}(\xi,t)|^p d\sigma(\xi) \right)^{\frac{q}{p}} t^{\alpha q} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Другим речима, $||f||_{L_\alpha^{p,q}} = ||\widetilde{f}||_{\mathcal{L}_\alpha^{p,q}}$.

Дајемо сада резултат о ограничености максималног оператора $u^\times$ у класи QNS

функција.

Теорема 5.4. *Нека је* $0 < p, q \leq \infty$. *Функција* $u \in QNS_K(\Omega \cap U)$ *припада* $L^{p,q}_\alpha(\Omega \cap U)$ *ако и само ако* $u^\times$ *припада* $L^{p,q}_\alpha(V)$. *Штавише важи*

$$||u^\times||_{L^{p,q}_\alpha(V)} \leq C||u||_{L^{p,q}_\alpha(\Omega \cap U)},$$

где C *зависи само од* K, p, q, n *и* Ω, *али не зависи од* u.

Доказ: Како је функција u локално ограничена, потребно је само доказати импликацију $u \in L^{p,q}_\alpha \Rightarrow u^\times \in L^{p,q}_\alpha$. Претпоставимо да је $0 < p < q < \infty$. Како је u^p, на основу Теореме 5.3, QNS функција и применом релације (5.11) добијамо

$$(u^\times(\varphi(\xi,t)))^p \leq \frac{C}{|Q(\xi,t)|} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} u^p(\varphi(\eta,\tau)) d\sigma(\eta) d\tau. \tag{5.12}$$

Интеграцијом по $\xi \in \partial\Omega$ добијамо:

$$\int_{\partial\Omega} (u^\times(\varphi(\xi,t)))^p d\sigma(\xi) \leq \frac{C}{|Q(\xi,t)|} \int_{\partial\Omega} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} u^p(\varphi(\eta,\tau)) d\sigma(\eta) d\tau d\sigma(\xi).$$

Поступком као у доказу Леме 5.2 је:

$$M_p^p(u^\times, t) \leq \frac{C}{t^n} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \tau^{n-1} \int_{\partial\Omega} |u(\varphi(\eta,\tau))|^p d\sigma(\eta) d\tau \leq C \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^p(u,\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Применом Хелдерове неједнакости са експонентом $\frac{q}{p}$ добијамо

$$M_p(u^\times, t) \leq C \left(\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^q(u,\tau) \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Слично као код релације (5.12), ако је $q < p < \infty$, имамо да је

$$|u^\times(\varphi(\xi,t))|^q \leq \frac{C}{|Q(\xi,t)|} \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} \int_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} |u(\varphi(\eta,\tau))|^q d\sigma(\eta) d\tau,$$

што даје неједнакост

$$M_p^q(u^\times,t) \le \frac{C}{t^n}\left(\int\limits_{\partial\Omega}\left(\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}}\int_{B_t^{\partial\Omega}(\xi)} u^q(\varphi(\eta,\tau))d\sigma(\eta)d\tau\right)^{\frac{p}{q}} d\sigma(\xi)\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Опет поступком као у Леми 5.2 добијамо

$$M_p^q(u^\times,t) \le C\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^q(u,\tau)\frac{d\tau}{\tau}, \qquad 0<t<r_2.$$

Множењем са t^α и интеграцијом по $0<t<r_2$ долазимо до траженог резултата:

$$\begin{aligned}
||u^\times||^q_{L^{p,q}_\alpha} &= \int\limits_0^{r_2} t^{\alpha q}M_p^q(u^\times,t)\frac{dt}{t} \le C\int\limits_0^{r_2}\left(t^{\alpha q}\int\limits_{\frac{t}{2}}^{\frac{3t}{2}} M_p^q(u,\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right)\frac{dt}{t}\\
&\le C\int\limits_0^{r_2} t^{\alpha q}\int\limits_0^{r_0}\chi_{[\frac{t}{2},\frac{3t}{2}]}(\tau)M_p^q(u,t)\frac{d\tau}{\tau}\frac{dt}{t} \le C\int\limits_0^{r_0}\tau^{\alpha q}M_p^q(u,\tau)\frac{d\tau}{\tau}\\
&= C||u||^q_{L^{p,q}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Сада, дајемо доказ утапања простора $QNS\cap L^{p,q}_\alpha$ у $L^{p_1,q}_{\alpha_1}$, што представља други корак доказа теореме утапања на општем домену, о чему смо говорили на почетку овог поглавља.

Теорема 5.5. *Neka je* $0<p<p_1\le\infty$, $0<q\le\infty$ *i* $\alpha>-1$. *Ako funkcija* u *pripada* $QNS_K(\Omega\cap U)\cap L^{p,q}_\alpha$, *tada ona pripada i* $L^{p_1,q}_{\alpha_1}(\Omega\cap U)$ *gde je* $\alpha_1=\alpha+(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)$ *i pritom je* $||u||_{L^{p_1,q}_{\alpha_1}}\le C||u||_{L^{p,q}_\alpha}$, *gde konstanta* C *ne zavisi od* u.

Доказ: Нека је $u\in QNS_K\cap L^{p,q}_\alpha$. Тада, на основу Теореме 5.3, $u^p\in QNS_{K_1}$ и важи

$$M_\infty(u,t) \le \frac{C}{t^{\frac{n-1}{p}}}\sup_{\frac{t}{2}\le\tau\le\frac{3t}{2}} M_p(u,\tau), \qquad \frac{3t}{2}<r_0.$$

Одатле следи:

$$M_{p_1}^{p_1}(u,t) = \int\limits_{\partial\Omega} u^{p_1-p}(\varphi(\xi,t))u^p(\varphi(\xi,t))d\sigma(\xi) \le M_\infty^{p_1-p}(u,t)M_p^p(u,t).$$

Тада је

$$M_{p_1}(u,t) \le \frac{C}{t^{\frac{n-1}{p}\frac{p_1-p}{p_1}}} \sup_{\frac{t}{2}\le\tau\le\frac{3t}{2}} M_p(u,\tau) = \frac{C}{t^{(n-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})}} \sup_{\frac{t}{2}\le\tau\le\frac{3t}{2}} M_p(u,\tau). \tag{5.13}$$

Како је $[\frac{t}{2}, \frac{3t}{2}] \subset \bigcup_{j=1}^4 \Delta_j$, где је $\Delta_j = \left[(\frac{3}{4})^j \frac{t}{2}, (\frac{3}{4})^{j-1}\frac{3t}{2}\right]$ онда је

$$\sup_{\frac{t}{2}\le\tau\le\frac{3t}{2}} M_p(u,\tau) \le \sum_{j=1}^{4} \sup_{\tau\in\Delta_j} M_p(u,\tau) \le \sum_{j=1}^{4} M_p\left(u^\times, \frac{3^{j-1}}{4^{j-1}}\frac{3t}{2}\right). \tag{5.14}$$

И на крају применом релација (5.13), (5.14) добијамо процену

$$M_{p_1}(u,t)t^{\alpha+(n-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1})} \le C\sum_{j=1}^{4} t^\alpha M_p\left(u^\times, \frac{3^{j-1}}{4^{j-1}}\frac{3t}{2}\right). \tag{5.15}$$

Комбинацијом релације (5.15) и Теореме 5.4 долазимо до жељеног резултата и тиме је доказ ове теореме завршен.

Сада имамо све што је потребно за доказ наше теореме утапања хармонијских функција са мешовитом нормом на ограниченом домену Ω са глатком границом.

Доказ Теореме 5.2:

Нека је функција $u \in h_\alpha^{p,q}(\Omega)$. Тада је функција $|u|$ субхармонијска и припада $QNS_1(\Omega)$ и $|u| \in L_\alpha^{p,q}$. На основу Теореме 5.5 $|u| \in L_{\alpha_1}^{p_1,q}$. Како је функција u хармонијска, то значи да је $u \in h_{\alpha_1}^{p_1,q}(\Omega)$. Из Леме 5.2 следи ако је $u \in h_{\alpha_1}^{p_1,q_1}(\Omega)$ онда је $u \in h_{\alpha_1}^{p_1,\infty}(\Omega)$. Дакле $h_\alpha^{p,q}(\Omega) \subset h_{\alpha_1}^{p_1,q_1}(\Omega)$. Непрекидност утапања $h_\alpha^{p,q}(\Omega) \hookrightarrow h_{\alpha_1}^{p_1,q_1}(\Omega)$ следи из процене дате у Теореми 5.5 и Леми 5.2.

Литература

[1] A. Aleman, A. Siskakis, *Integration operators on Bergman spaces*, Indiana Univ. Math. J., 46, 337356, (1997).

[2] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, *Carleson measures and interpolating sequences for Besov spaces on complex balls*, Memoirs Amer. Math. Soc. 859, (2006).

[3] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, *On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces*, Kragujevac Journal of Mathematics, 37(1), 4564, (2013).

[4] M. Arsenović, T. Jovanović, *Embeddings of harmonic mixed norm saces on smoothly bounded domains in* $\mathbb{R}^n$, Open Mathematics, 17, 1260-1268, (2019).

[5] K. Avetisyan, Y. Tonoyan, *Continuous Embeddings in Harmonic Mixed Norm Spaces on the Unit Ball in* $\mathbb{R}^n$, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, Volume 47, Issue 5, 209-220 (2012).

[6] K. Avetisyan, *Fractional integro-differentiation in harmonic mixed norm spaces on a half-space*, Comment.Math.Univ.Carolin., Volume 42, Issue 4, 691-709 (2001).

[7] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, New York (2000).

[8] B. Bojarski, P. Hjlasz, *Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications*, Studia Marh. 106 (1), 77-92, (1993).

[9] B. H. Qui, *Harmonic functions, Reisz pontetials, and the Lipschitz spaces od Herz*, Hiroshima Math. J. 9, 245-295, (1979).

[10] L. Carleson, *An Interpolation Problem for Bounded Analytic Functions*, American Journal of Mathematics, 80 (4)921-930, (1958).

[11] L. Carleson, *Interpolations by Bounded Analytic Functons and the Corona Problem*, The Annals of Mathematics, Second Series, 76 (3), 547-559, (1962).

[12] L. Carleson, *A counterexample for measures bounded on H^p for the bi-disc*, Report No. 7, Mittag-Leffler, 1974.

[13] J. Cima, W. Wogen,, *A Carleson measure theorem for the Bergman space of the ball*, J. Operator Theory 7, 157-165, (1982).

[14] R. Coifman, R. Rochberg, *Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p*, Asterisque, 77, 1166, (1980).

[15] M. M. Djrbashian, *Canonical representation of meromorphic function in the unit disc*, Dokl. Akad. Nauk Arm. SSR 3, 3-9 (Russian), (1945).

[16] A. E. Djrbashian, *On the problem of representation of analytic functions*, Sobšč. Inst. Math. Meh. Akad. Nauk Arm. SSR 2, 3-40 (Russian), (1949).

[17] A. E. Djrbashian, *The classes A^p_α of harmonic functions in half-spaces and an analoque of M. Reisz' theorem*, Izv. Akad. Nauk Arm. SSR, Matematika 22 (4), 386-398, (1987), (in Russian); English transl.: Soviet J. Contemp. Math. Anal. (Armenian Academy of Sciences) 22 (4), 74-85, (1987).

[18] P. L. Duren, *Extension of a theorem of Carleson*, Bull. Amer. Math. Soc., 1 (75), 143-146, (1969).

[19] P. Duren, *Theory of H^p Spaces* Academic Press, New York, London, 1970.

[20] P. Duren, A. Schuster, *Theory of Bergman Spaces*, American Mathematical Society, 2004.

[21] P. Duren, D. Khavinson, H. S. Shapiro, C. Sundberg, *Contractive zero-divisors in Bergman spaces*, Pacific J. Math. 157, 37-56, (1993).

[22] P. Duren, D. Khavinson, H. S. Shapiro, C. Sundberg, *Invariant subspaces in Bergman spaces and the biharmonic equation*, Michigan Math. J. 41, 247-259, (1994).

[23] P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, *Linear functional on H^p spaces with* $0 < p < 1$, J. Reine Angew. Math. 238, 32-60, (1969).

[24] P. L. Duren, A. L. Shields, *Restrictions of H^p functions to the diagonal of the polydisc*, Duke Math. J. 42, 751-753, (1975).

[25] C. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of Several Variable*, Acta Math 129, 137-193, (1972).

[26] T. M. Flett, *Inequalities for the pth mean values of harmonic and subharmonic functions with $p \leq 1$*, Proc. London Math. Soc. 20 (3), 249-275, (1970).

[27] T. M. Flett, *On the rate of qrowth of mean values of holomorphic and harmonic functions*, Proc. London. Math. Soc. 20 (3), 749-768, (1970).

[28] T. M. Flett, *The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities*, J. Math. Anal. Appl. 38, 746-765, (1972).

[29] T. M. Flett, *Lipschitz spaces of functions on the circle and the disc*, J. Math. Anal. Appl. 39, 125-158, (1972).

[30] J. Garnett, *Bounded Analytic Function*, Academic Press, New York, 1981.

[31] G. H Hardy, J. E. Littlewood, *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. 54, 81-116, (1930).

[32] G. H Hardy, J. E. Littlewood, *Some properties of conjugate functions*, J.Reine Angew. Math. 167, 405-423, (1931).

[33] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals (II)*, Math. Z., 34, 403-439, (1932).

[34] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions*, Quart. J. Math. (Oxford), 12, 221-256, (1941).

[35] W. Hastings, *A Carleson measure theorem for Bergman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 52, 237-241, (1975).

[36] H. Hedenmalm, *A factorization theorem for square area-integrable analytic functions*, J. Reine Angew. Math. 422, 45-68, (1991).

[37] H. Hedenmalm, *A factoring theorem for a weighted Bergman space*, Algebra i Analiz 4 (1992), no. 1, 167-176 = St. Petersburg Math. J. 4, 163-174, (1993).

[38] H. Hedenmalm, K. Zhu, *On the failure of optimal factorization for certain weighted Bergman spaces*, Complex Variables Theory Apll. 19, 165-176, (1992).

[39] L. Hörmander, *L^p estimates for (pluri-)subharmonic functions*, Math. Scand. 20, 65-78, (1967).

[40] C. Horowitz, *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Ph. D. thesis, University of Michigan, 1974.

[41] C. Horowitz, *Zeros of functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. 41, 693-710, (1974).

[42] C. Horowitz, *Factorization theorems for functions in the Bergman spaces*, Duke Math. J. 44, 201-2013, (1977).

[43] C. Horowitz, D. M. Oberlin, *Restriction of H^p functions to the diagonal of* $\mathbb{U}^n$, Indiana Univ. Math. J. 24, 767-772, (1975).

[44] Z. J. Hu, *Estimates for the integral means of harmonic functions on bounded domains in R^n*, Sci. China Ser. A, 38(1), 3646, (1995).

[45] M. Jevtić, M. Pavlović, *Harmonic Bergman functions on the unit ball in R^n*, Acta Math. Hungar., 85, 81-96, (1999).

[46] T. Jovanović, *On Carleson-type embeddings for Bergman spaces of harmonic functions*, Analysis Math., 44 (4), 493-499, (2018).

[47] S. H. Kang, J. Y. Kim, *Harmonic Bergman spaces of the half-space and their some operators*, Bull. Korean Math. Soc. 4 (38), 773786, (2001).

[48] T. Kaptanoglu, *Carleson measures for Besov spaces on the ball*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343, 453456, (2006).

[49] P. Koosis *Introduction to H^p Spaces*, Cambridge, Univ. Press, London, 1980; Second Edition, 1999.

[50] B. Korenblum, *An extension of the Nevanlinna theory*, Acta Math. 135, 187-219, (1975).

[51] B. Korenblum, *A Beurling-type theorem*, Acta Math. 138, 265-293, (1977).

[52] T. L. Kriete, B. D. MacCluer, *Composition operators on large weighted Bergman spaces*, Indiana Univ. Math. J., 41, 755788, (1992).

[53] J. L. Lewis, *One very weak solutions of certain elliptic systems*, Comm. Partial Diferential Equations 18(9,10), 1515-1537, (1993).

[54] P. Lin, R. Rochberg, *Hankel operators on the weighted Bergman spaces with exponential weights*, Integral Equations Operator Theory, 21, 460483, (1995).

[55] D. Luecking, *A technique for characterizing Carleson measures on Bergman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 87, 656-660, (1983).

[56] D. Luecking, *Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives*, Amer. J. Math., 107, 85111, (1985).

[57] J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, *On the summabiity of double Fourier series*, Fund. Math 32, 122-132, (1939).

[58] M. Mateljević, M. Pavlović, *L^p-behaviour of the integral means of analytic functions*, Studia Math. 77, 309-306, (1983).

[59] O. R. Mihić, *Some Properties of Quasinearly Subharmonic Functions and Maximal Theorem for Bergman Type Spaces*, Hindawi Publishing Corporation, ISRN Mathematical Analysis, Volume 2103

[60] J. M. Ortega, J. Fabrega, *Mixed norm spaces and interpolation*, Studia Mathematica 109 (3), 233-254, (1994).

[61] M. Pavlović, *Mixed norm spaces of analytic and harmonic functions I*, Publ. De L'Inst. Math. 40 (54), 117-141, (1986).

[62] M. Pavlović, *Mixed norm spaces of analytic and harmonic functions II*, Publ. De L'Inst. Math. 41 (55), 97-110, (1987).

[63] M. Pavlović, *On subharmonic behaviour and oscillation of functions on balls in R^n*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 55 (69), 18-22, (1994).

[64] M. Pavlović, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl., 2016, 499-509, (1997).

[65] M. Pavlović, J. Riihentaus, *Classes of quasi-neraly subharmonic functions*, Potential Anal 29:89104 (2008).

[66] M. Pavlović, *Function classes on the unit disc*, De Gruyter Studies in Mathematics 52, (2013).

[67] A. I. Petrosyan, *On weighted harmonic Bergman spaces*, Demonstratio Math., 41, 73-83, (2008).

[68] A. I. Petrosyan, *On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of* $\mathbb{R}^n$, Complex Variables Theory Appl., 50, 953-966, (2005).

[69] S. Power, *Hormanders Carleson theorem for the ball*, Glasg. Math. J. 26, 13-17, (1985).

[70] M. A. Raguse, A. Scapellato, *Mixed Morrey spaces and their applications to partial diferential equations*, Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications, 151, 51-65, (2017).

[71] W. C. Ramey, H. Yi, *Harmonic Bergman functions on half-spaces*, Trans. Awer. Math. Soc. 348, 633-660, (1996).

[72] F. Ricci, M. Taibleson, *Boundary values of harmonic functions in mixed norm spaces and their atomic structure*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, 1 (10), 1-54, (1983).

[73] W. Rudin, *Function Theory in Polydiscs*, Benjamin, New York, 1969.

[74] K. Seip, *Regular sets of sampling and interpolation for weighted Bergman spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 117, 213-220, (1993).

[75] K. Seip, *Beurling type density theorems in the unit disk*, Invent. Math. 113, 21-39, (1994).

[76] A. Siskakis, *Weighted integrals of analytic functions*, Acta Sci. Math., 66, 651-664, (2000).

[77] J. H. Shaapiro, *Mackey topologies, reroducing kernels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces*, Duke Mat. J. 43, 187-202, (1976).

[78] A. L. Shields, D. L. Wiliams, *Bounded projections, duality and multipliers in spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 162, 287-203, (1971).

[79] A. L. Shields, D. L. Wiliams, *Bounded projections, duality and multipliers in spaces of harmonic functions*, J. Reine Angew. Math. 299/300, 256-279, (1982).

[80] S. M. Shimorin, *Factorization of analytic functions in weighted Bergman spaces*, Algebra i Analiz 5 (5), 155-177, (1993), (in Russian) = St.Petersburg Math. J. 5, 1005-1022, (1994).

[81] S. M. Shimorin, *On a family of conformally invariant operators*, Algebra i Analiz 2 (7), 133-158 (1995), (in Russian) = St.Petersburg Math. J. 7, 287-306 (1996).

[82] S. M. Shimorin, *The Green function for the weighted biharmonic operator* $\Delta(1-|z|^2)^{-\alpha}\Delta$*, and factorization of analytic functions*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Math. Inst. Steklov. (POMI) 222 (1995), Issled. po Linein. Oper. i Teor. Funktsii 23, 203-221 (in Russian) = J. Math. Sci. (New York) 5 (87), 3912-3924, (1997).

[83] S. M. Shimorin, *Single-point extremal functions in weighted Bergman spaces*, Probl. Mat. Anal. 15, 241-252, (1995), (in Russian) = J. Math. Sci. (New York) 6 (80), 2349-2356, (1996).

[84] D. Stegenga, *Multipliers of the Dirichlet space*, Illinois J. Math. 24, 113-139, (1980).

[85] E.M.Stein, *Singular Integrals and Diferentiability Properties of Functions*, PrincetonUniv. Press (Princeton, NJ, 1970).

[86] E. M. Stein, *Harmonic Analysis, Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press (Princeton, NJ, 1993).

[87] S. Stević, *A note on weighted integrals of analytic functions*, Bull. Greek Math. Soc., 46, 3-9, (2002).

[88] S. Stević, *On an area inequality and weighted integrals of analytic functions*, Result. Math., 41, 386-393, (2002).

[89] S. Stević, *Weighted integrals of harmonic functions*, Studia Sci. Math. Hung., 39, 87-96, (2002).

[90] S. Stević, *Weighted integrals of holomorphic functions in* C^n, Complex Variables, 47, 821-838, (2002).

[91] S. Stević, *Composition operators on the generalized Bergman space*, J. Indian Math. Soc., 69, 61-64, (2002).

[92] S. Stević, *On harmonic Hardy spaces and area integrals*, J. Math. Soc. Japan, 56, 339-347, (2004).

[93] S. Stević, *On harmonic function spaces. II*, J. Comput. Anal. Appl., 10, 205-228, (2008).

[94] M. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space, Principal properties*, J. Math. Mech. 13, 407-479, (1964).

[95] R. Weir, *Canonical divisors and invariant subspaces in weighted Bergman spaces*, Ph. D. thesis, University of Michigan, 2001.

[96] R. Weir, *Canonical divisors in weighted Bergman spaces and hypergeometric functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 130, 707-713, (2002).

[97] R. Weir, *Zeros of extremal functions in weighted Bergman spaces*, Pacific. J. Math. 208, 187-199, (2003).

[98] R. Weir, *Construction of Green functions for weighted biharmonic operator*, J. Math. Anal. Appl. 288, 383-396, (2003).

[99] H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Transactions of the American Mathematical Society, 36 (1), 6389, (1934).

[100] N. Wiener, *The ergodic theorem*, Duke Math. J. 5, 1-18, (1939).

[101] Z. Wu, *Carleson measures and multipliers for the Dirichlet space*, J. Funct. Anal. 169, 148-163, (1999).

[102] K. Zhu, *Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains*, J. Operator Theory 20, 329-357, (1988).

[103] K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Function in the Unit Ball*, Springer-Verlag (BerlinNewYork, 2005).

[104] R. Zhao, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$*, arXiv:math/0611093v1 [mathCV] 3 Nov 2006.

Биографија

Тања Јовановић Спасојевић је основну школу "Вук Стефановић Караџић" завршила у Сочаници 2004. године, након чега је уписала природно математички смер гимназије у Лепосавићу. Након завршене гимназије, 2008. године, уписује Природно-математички факултет у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици (Одсек математика), на коме дипломира 2012. године са дипломским радом под називом " Gauss-Christoffelove квадратурне формуле". Исте године, уписује докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду (Катедра за математику).

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписана: Тања Јовановић Спасојевић

број уписа: 2014/2012

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом:

Утапања простора хармонијских функција са мешовитом нормом у ограниченим областима у R^n

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 04. 05. 2022. год.

Тања Ј.С

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Тања Јовановић Спасојевић

Број уписа : 2014/2012

Студијски програм: Математика

Наслов рада: Утапања простора хармонијских функција са мешовитом нормом у ограниченим областима у R^n

Ментор: проф. Др Милош Арсеновић

Потписана: Тања Јовановић Спасојевић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 04. 05. 2022. год.

Тања Ј.С.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Утапања простора хармонијских функција са мешовитом нормом у ограниченим областима у R^n,

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 04.05.2022. год.

Тања Ј.С.

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора

или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.