

UNIVERZITET U PRIŠTINI
Prirodno-matematički fakultet

mr Vladica Stojanović

**VREMENSKE SERIJE KAO NELINEARNI
STOHAISTIČKI MODELI
DINAMIKE FINANSIJSKIH NIZOVA**

-doktorska disertacija-

Kosovska Mitrovica, 2007.

N e m ě i, A c i, . . .
i o s t a l i m a

MENTOR

Prof. dr Biljana Popović

redovni profesor

Prirodno-matematički fakultet, Niš

ČLANOVI KOMISIJE

Prof. dr Zagorka Lozanov-Crvenković

redovni profesor

Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Prof. dr Stana Cvejić

vanredni profesor

Prirodno-matematički fakultet, K. Mitrovica

Sadržaj

Predgovor	1
1 Uvod u terminologiju	6
1.1 Finansijsko tržište u uslovima neodređenosti	6
1.2 Stohastički modeli dinamike cena	8
1.2.1 Osnovni modeli cena	9
1.2.2 Gausovska interpretacija modela	12
1.3 Martingalne reprezentacije finansijskih indeksa	14
1.3.1 Martingali. Definicija i osobine	15
1.3.2 Stohastički model (B, S) tržišta	19
1.4 Pojam volatilnosti	21
2 Modeli uslovne heterogenosti	25
2.1 ARCH-modeli	26
2.1.1 Stacionarnost	28
2.1.2 Ocene parametara	32
2.1.3 Ekstrapolacija i primena modela	38
2.2 GARCH-modeli	40
2.2.1 Stacionarnost	42
2.2.2 ARCH(∞) reprezentacija modela	45
2.2.3 Ocene parametara. Primena GARCH-modela	47
2.3 Split-ARCH model	52
2.3.1 Definicija i osnovne karakteristike	54
2.3.2 Stacionarnost	55
2.3.3 Ocenjivanje parametara	61
2.3.4 Primena modela	65

3	STOPBREAK procesi	70
3.1	Osnovni pojmovi	71
3.2	Pragovni STOPBREAK proces	73
3.2.1	Definicija i osobine	73
3.2.2	Analiza priraštaja Split-BREAK procesa	76
3.3	Ocenjivanje kritične vrednosti	78
3.3.1	Ocena \tilde{c}	78
3.3.2	Ocena \hat{c}	82
3.3.3	Monte Carlo simulacija Split-MA(1) modela	86
3.4	Primena Split-BREAK modela	89
3.5	Opšti model Split-BREAK procesa	93
3.5.1	Definicija i osnovne osobine	94
3.5.2	Analiza priraštaja. Opšti model Split-MA procesa	98
3.5.3	Ocene parametara	102
3.5.4	Monte Carlo simulacija. Primena modela	107
4	Modeli cena u zaustavnom vremenu	110
4.1	Opšte napomene	110
4.1.1	Pojam zaustavnog vremena	112
4.1.2	Tačkasti procesi	116
4.2	D-AST model	120
4.2.1	Definicija i osnovne karakteristike modela	120
4.2.2	Ocene parametara	124
4.2.3	Monte Carlo simulacija. Primena modela	129
4.3	D-ACD model	132
4.3.1	Definicija i osnovne karakteristike modela	133
4.3.2	Ocene parametara	136
4.3.3	Primena modela	138
5	Zaključna razmatranja o modelima	141
	Literatura	146

Predgovor

Predmet ovog rada jeste istraživanje najznačajnijih finansijsko-stohastičkih modela kojima se mogu opisati različiti elementi tržišta, pre svega dinamika finansijskih indeksa i cena, kao osnovnih kategorija ekonomskog poslovanja. Imajući u vidu relevantne dostupne informacije koje mogu biti od značaja za kretanje cena i njihovo eventualno opisivanje matematičkim modelom, osnovne kategorije od kojih polazimo jesu *vreme* i *dinamika*, odnosno promene vrednosti posmatranih nizova koje se odvijaju u vremenu. U cilju utvrđivanja osnovnih zakonitosti dinamike finansijskih nizova, modeliramo ih vremenskim serijama (slučajnim procesima) koji, u slobodnoj interpretaciji, predstavljaju različite modele "neodređenosti koja protiče u vremenu". Na taj način, sa matematičke tačke gledišta, neodređenost koja se javlja na tržištu može se opisati modelom prostora verovatnoća (Ω, \mathcal{F}, P) na kome se cena određenog proizvoda prikazuje familijom slučajnih veličina koje zavise od određenog vremenskog parametra. Naravno, ovde će biti razmatrana posebna klasa slučajnih procesa diskretnog vremenskog parametra, tj. *vremenske serije* kao najzastupljeniji stohastički modeli dinamike finansijskih nizova. Uvođenje vremenskih serija zasnovano je na činjenici da se u konkretnim, berzanskim uslovima cena S registruje u tačno propisanim vremenskim trenucima, tj. u određenim vremenskim razmacima, pa se sve promene cena mogu posmatrati diskretnim skupom (nizom) slučajnih veličina. Međutim, postoje pogodnosti modeliranja cena u neprekidnom vremenu koje će ovde takođe biti korišćene, a odnose se, pre svega, na modeliranje cena u tzv. zaustavnom vremenu.

Koristeći standardne metode u analizi vremenskih serija ovde su izloženi najvažniji modeli koji se koriste u izučavanju finansijskih nizova, sa posebnim naglaskom na njihovu eventualnu primenu. Zato je celokupan sadržaj rada,

iako podređen strogom matematičkom zaključivanju, odnosno deduktivnom načinu izlaganja osnovnih činjenica i rezultata, u znatnoj meri posvećen istraživanju empirijskih podataka, njihovoj obradi i praktičnoj primeni teoretskih rezultata. Dakle, iako sva metodologija izlaganja jeste zasnovana na standardno prihvaćenim matematičkim principima (važniji rezultati i osobine modela formulisani su u obliku teorema i dokazivani deduktivnim metodom), svi opisani modeli, naročito oni originalni, motivisani su isključivo empirijskom primenom. Kao ilustracija, biće opisana primena navedenih teoretskih modela u analizi dinamike različitih vrsta realnih finansijskih podataka, počev od cena sirovina na svetskom tržištu (npr. zlata i nafte), pa do analize dinamike ukupnog obima i vrednosti trgovanja akcijama na našem, domaćem tržištu hartija od vrednosti. Na taj način, glavni akcent je stavljen na originalne autorske rezultate koji se odnose na tri bitna segmenta istraživanja:

1. Novu interpretaciju postojećih rezultata, odnosno poznatih, važnijih modela sa njihovom praktičnom primenom;

2. Formiranje novih, originalnih modela u smislu njihovog strogo formalnog definisanja u obliku odgovarajućih vremenskih serija, odnosno nizova slučajnih veličina. Opisivanje osnovnih osobina takvih modela izvršeno je sa različitih aspekata savremene Teorije verovatnoća (stacionarnost, korelaciona struktura, osnovni parametri raspodele, itd.), kao i savremene Matematičke statistike (ocenjivanje parametara modela uz ispitivanje kvaliteta dobijenih ocena, pre svega, utvrđivanje njihove postojanosti i asimptotske tendencije ka normalnoj raspodeli).

3. Praktična primena novih modela u konkretnim situacijama i njihovo formiranje nad empirijskim, realnim podacima.

U prvom, uvodnom poglavlju, dat je pregled osnovnih pojmova i termina koji su korišćeni u daljem radu. Najpre su izloženi neki od osnovnih modela dinamike cena koji će biti korišćeni, pre svega model cena zasnovan na tzv. *neprekidnom kamaćenju*. Zatim je dat poseban kritički osvrt na *hipotezu gausovnosti*, odnosno interpretaciju ovakvih modela sa aspekta normalnih raspodela. Kao posebno važan, definisan je pojam *uslovne-gausovnosti* modela koji umanjuje nedostatke standardnih modela u kojima se nalaze normalno raspodeljeni nizovi slučajnih veličina. U narednom poglavlju opisan je

pojam *martingala* kao važnih stohastičkih modela dinamike finansijskih indeksa. Oni nas, takođe, uvode u posebnu vrstu *martingalnih tržišta* (*tržišta neutralnog rizika*) u kojima je ispunjen uslov o nearbitražnom delovanju svih finansijskih subjekata na njemu. Na kraju poglavlja prikazane su neke od osnovnih definicija najvažnijih pojmova finansijske analize, pre svih *volatilnost* kao mera izmenljivosti finansijskih indeksa.

U daljem izlaganju dat je osnovni sadržaj istraživanja i rada u celini, gde su opisani neki od najvažnijih nelinearnih stohastičkih modela, koji se, u pogledu svoje strukture, mogu grupisati u sledeće tri kategorije.

(a) *Modeli uslovne heterogenosti*

Ovi modeli predstavljaju, sasvim sigurno, fundamentalne modele koji, kao svoju važnu karakteristiku, opisuju pojavu klasternosti, odnosno grupisanje podataka sa izraženom, odnosno niskom volatilnošću. Modeli uslovne heterogenosti, koji su u stanju da opišu pojavu klasternosti, samu volatilnost iskazuju u obliku vremenskih serija, čime se ukazuje na njenu promenljivost i zavisnost u odnosu na samu strukturu određenog finansijskog niza. Istorijski posmatrano, rodonačelnik i tvorac ove grupe modela jeste Robert Engle koji je 1982. godine definisao tzv. *autoregresivne modele uslovne heterogenosti*, kraće, *ARCH-modele* pomoću kojih je dao veoma uspešnu analizu inflacionih kratanja u Velikoj Britaniji. Na ovaj način, on uvodi korenite promene u dotadašnjoj stohastičkoj analizi finansijskih nizova i daje osnovu za izgradnju niza drugih, srodnih modela. Naime, uspešnost u konkretnim primenama ARCH-modela imala je kao posledicu stvaranje novih, složenijih modela koji omogućavaju opisivanje različitih efekata ponašanja na finansijskim tržištima. Zato, pored standardnih ARCH-modela, postoji veliki broj tzv. uopštenih modela tipa ARCH koji se, u većoj ili manjoj meri, zasnivaju na sličnim idejama i pretpostavkama. Prvo takvo uopštavanje uvedeno je od strane Tima Boldersleva, koji je 1986. godine definisao tzv. *uopšteni ARCH-model*, sa dva parametra, poznat kao *GARCH* (p, q). Osnovna prednost ovakvog modela jeste u tome da pri statističkoj obradi podataka (i njihovom modeliranju) modeli tipa GARCH daju zadovoljavajuće ocene i dobro "prilagođavanje" realnim podacima već za male vrednosti p i q , za razliku od modela ARCH, koji zahtevaju relativno velike vrednosti parametra p . U našem istraživanju ove dve grupe nelinearnih modela biće ponovo razmotrene u novom svetlu, gde će, pored poznatih, fundamental-

nih činjenica, biti izloženi i neki novi rezultati koje su V. Stojanović i B. Popović već opisali u svojim radovima [47] i [57]. Pored toga, isti autori su već dali značajan naučni doprinos formiranjem novog, originalnog modela uslovne heterogenosti, nazvanog *Split-ARCH*, koji u slučaju naglašeno velikih realizacija određenog finansijskog niza pravilnije reaguje na nagle i neočekivane "skokove" u dinamici volatilnosti. Ovaj model je prvi put predstavljen naučnoj javnosti na međunarodnoj konferenciji ISCPs održanoj u Sozopolju (Bugarska) 2004 godine, a obrađen je i u radovima B. Popović i V. Stojanovića [48] i [49]. Pored osnovnih stohastičkih osobina, ovde je prikazana praktična primena *Split-ARCH* modela zasnovana na konkretnoj primeni u ispitivanju empirijskih vremenskih serija (cene nafte na svetskom tržištu i sojine sačme na Produktnoj berzi u Novom Sadu).

(b) *STOPBREAK procesi*

Ova grupa stohastičkih modela novijeg je datuma i prevashodno je vezana za fundamentalni rad Engle-a i Smith-a (1999), a u novije vreme i Gonzáles-a (2004). *STOPBREAK* procesi našli su uspešnu primenu kao stohastički modeli finansijskih nizova sa izraženim, permanentnim fluktuacijama. Ovde će biti razmotrene originalne modifikacije ovih procesa, dobijene, pre svega, uvođenjem tzv. indikatora šuma koji su Popović i Stojanović [48] primenili u analizi nelinearnih vremenskih serija *ARCH*-tipa. Početni rezultati iz ove oblasti predstavljeni su na konferencijama *SYM-OP-IS 2005* i *ALA 2005*, dok je opštiji model ovog procesa prezentiran na međunarodnoj konferenciji *ISCPs 2006*. U narednom periodu, dalja ispitivanja i analiza pragovnih *STOPBREAK* procesa izložena je u radovima V. Stojanovića i B. Popović [58], kao i V. Stojanovića, B. Popović i P. Popovića [59].

Ovde će biti opisana osnovna stohastička struktura *pragovnog STOPBREAK procesa (Split-BREAK modela)*, sa naglaskom na njegovu empirijsku, praktičnu primenu. Kako je nestacionarnost ovog procesa jedna od otežavajućih okolnosti u njegovom ispitivanju, posebna pažnja posvećena je tzv. *nizu priraštaja (Split-MA model)*, koji poseduje stohastičku strukturu sličnu standardnim linearnim vremenskim serijama pokretnih proseka. Na ovaj način, navedeni stohastički modeli biće detaljnije proučeni i korišćeni u praktičnom modelovanju dinamike kretanja vrednosti trgovanja akcijama na domaćem tržištu hartija od vrednosti. Inače, neka upoređivanja ovog procesa sa standardnim modelima uslovne heterogenosti ukazuju na

upešnost predloženog STOPBREAK modela u primenama koja se, između ostalog, ogleda i u malom broju ocenjenih parametara, o čemu je opet dat prikazu u radu Stojanović, Popović i Popović [59].

(c) *Modeli cena u zaustavnom vremenu*

Prateći promene u empirijskoj analizi finansijskih podataka uočava se nova, savremena mogućnost njihovog prikupljanja, obrade i statističke analize. Primenom računarskih tehnologija svi podaci i informacije o stanju finansijskih indeksa mogu se smatrati procesom koji protiče u neprekidnom (kontinualnom) vremenu. Evolucija finansijskog indeksa posmatra se tada najčešće kao slučajni proces sa trajektorijama u obliku stepenastih, deo po deo konstantnih funkcija, pa je od posebnog značaja tzv. diskretni uticaj slučaja opisan nizom *zaustavnih momenata* (τ_k), odnosno vremenskih trenuta u kojima se dešavaju promene cene.

Ovde ćemo, koristeći ideje Engle-a i Russel-a (1997), izložiti neke od mogućnosti nelinearnog modeliranja vremenskih "skokova" cene koji su slučajnog karaktera i mogu se interpretirati kao realizacije zaustavnog niza (τ_k). Njime se izražava svojstvo *neregularnosti* dinamike cene jer, za razliku od standardnih modela diskretnog vremenskog parametra, ovde se kao diskretni skup vrednosti cene uzima niz čiji su vremenski indeksi slučajne veličine. Od posebnog je interesa, stoga, opisati takav vremenski niz i njegove stohastičke osobine. U ovom radu biće uglavnom analizirane dve klase autoregresivnih modela koji opisuju neregularnu dinamiku cena. Prvi od njih jeste tzv. *D-AST model*, uveden od strane V. Stojanovića i B. Popović [61], koji se zasniva na pretpostavci o nezavisnim priraštajima zaustavnog niza. Nasuprot njemu, biće opisan i poseban oblik modela uslovnog trajanja (*D-ACD model*) namenjen modeliranju zaustavnih momenata vremenskih serija sa koreliranim priraštajima. Prvi važniji rezultati vezani za ovaj model objavljeni su na konferenciju o operacionim istraživanjima SYM-OP-IS 2005, u radu V. Stojanovića [56], dok su neka uopštenja izložena u radu V. Stojanovića i B. Popović [60]. Inače, sama priroda posmatranih empirijskih serija sa "sporom frekvencijom" ukazuje da je kao osnovni oblik njihovih raspodela pogodno koristiti neke od poznatih raspodela diskretnog tipa, pre svega uniformnu i Poisson-ovu raspodelu. Otuda i zajednički naziv ovakvih modela: *diskretni autoregresivni modeli*.

Glava 1

Uvod u terminologiju

1.1 Finansijsko tržište u uslovima neodređenosti

Finansijsko tržište predstavlja sveukupnost novčanih, valutnih i ostalih tržišta različitih ekonomskih kategorija - aleta. Najvažnija među njima su sigurno tržišta novca i kapitala, tržišta plemenitih metala, tržišta hartija od vrednosti, itd. U skladu sa savremenim shvatanjima o načinu i pravilnostima funkcionisanja tržišta, *Teorija finansija i finansijski inženjering* kao svoj osnovni zadatak imaju da, uz pomoć raznih instrumenata, istraže osnovna svojstva finansijskih struktura i odrede najbolji mogući način raspolaganja finansijskim resursima. Pritom se uzimaju u obzir, pre svega, faktori *rizika* i *vremena* koji se javljaju na tržištu, i koji, s druge strane, predstavljaju obavezne "pratioce" svakog učesnika prilikom operisanja na njemu. Ova dva činioca jesu i osnovni podsticaj za formiranje različitih matematičko-stohastičkih modela koji imaju za cilj da, korišćenjem aparata *Teorije verovatnoća*, daju, donekle, odgovore na fundamentalna pitanja koja se odnose na ponašanje cena i drugih finansijskih indeksa na tržištu, opisanje njihove promenljivosti i prognozu kretanja u budućnosti itd.

Ne ulazeći detaljnije u različite koncepcije i načine formalnog definisanja samog tržišta, naš cilj biće da, u duhu *Teorije verovatnoća*, istražimo osnovne finansijsko-statističke modele kojima se mogu opisati različiti elementi tržišta. Na ovaj način, pretpostavljamo da se problem neodređenosti može, sa stohastičkog stanovišta, opisati *prostorom verovatnoća* (Ω, \mathcal{F}, P) , pri čemu je

Ω - prostor elementarnih ishoda (događaja) na datom tržištu;

\mathcal{F} - σ -algebra podskupova (događaja) u Ω ;

P - verovatna mera (verovatnoća) definisana na (Ω, \mathcal{F}) .

Često se σ -algebra \mathcal{F} proširuje *potokom (filtrom) σ -algebri*

$$F = (\mathcal{F}_n), \quad n \in D,$$

gde je, na primer $D = \mathbb{N}$ ili $D = \mathbb{Z}$. U osnovnoj interpretaciji, niz (\mathcal{F}_n) predstavlja skup "informacija" o stanju na tržištu koje su dostupne svakom njegovom učesniku, zaključno sa momentom n . Reč je, dakle, o nizu σ -algebri za koji važi uslov neopadanja

$$\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m, \quad \forall n \leq m,$$

čime se polazni prostor (Ω, \mathcal{F}, P) transformiše u tzv. *filtrirani prostor verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ koji ćemo zvat *stohastički bazis*.

Osnovni predušlov za funkcionisanje efikasnog tržišta ogleda se u pretpostavci o *nearbitraži*, odnosno nemogućnosti delovanja ma kog učesnika tržišta u cilju sticanja bezrizičnog profita (engl. *free-lunch*). Naime, sav profit, kao i eventualni gubitak, ostvaruje se ulaganjem (investiranjem) na tržištu uz odgovarajući rizik. Naravno, u praksi neće uvek biti zadovoljeni svi navedeni uslovi. Česta je pojava spekulativnog, hazardnog i iracionalnog ponašanja određenih struktura na tržištu. Ipak, sa matematičkog stanovišta, model efikasnog tržišta trebalo bi da onemogući takve pojave i da, pre svega mogućnost arbitražnog delovanja prikaže događajima "male verovatnoće". S tim u vezi jeste pojam posebnih, važnih stohastičkih modela finansijskih indeksa - *martingala* koji će predstavljati jednu od važnih poluga u našem daljem radu. Zato će, između ostalog, njima biti posvećeno najviše pažnje u ovom uvodnom delu.

S druge strane, vreme i dinamika, kao osnovna merila dešavanja svih pojava na tržištu, omogućavaju da se za utvrđivanje zakonitosti koje na njemu vladaju koristi *Teorija slučajnih procesa*, preciznije, slučajne funkcije vremena definisane na prostoru verovatnoća (Ω, \mathcal{F}, P) . Kako se u većini slučajeva vrednosti finansijskih indeksa na tržištu određuju u odvojenim, diskretnim vremenskim intervalima, njihova najčešća interpretacija biće u

obliku slučajnih procesa *diskretnog vremena*, tj. vremenskih serija oblika

$$X = \{X_n : n \in D\}.$$

Za članove niza (X_n) uobičajena je pretpostavka o njihovoj adaptiranosti u odnosu na filter F . To znači da, za svako $n \in D$, slučajna veličina X_n predstavlja \mathcal{F}_n merljivu slučajnu veličinu, pisaćemo $X_n \in M(\mathcal{F}_n)$. Nadalje, niz $X = (X_n)$ zvaćemo *finansijski indeks (cena)*, a parametar $n \in D$ *vreme* u kome se dati niz slučajnih veličina posmatra. Ovakav način posmatranja finansijskih indeksa zadržaćemo i u daljem radu, kada ćemo se detaljnije pozabaviti nekim njihovim konkretnim osobinama. Prvi korak koji ćemo učiniti u tom smeru biće opisivanje uslova pod kojima je, sa stohastičkog stanovišta, moguće opisati efikasnost tržišta u gore navedenom smislu, odnosno formiranje odgovarajućih stohastičkih modela koji će opisati dinamiku cena i njihovu promenljivost u vremenu.

1.2 Stohastički modeli dinamike cena

Osnovna kategorija ekonomskog poslovanja jeste *cena*. Sama uspešnost poslovanja najčešće se zasniva na mogućnosti da se na osnovu trenutnih fluktuacija, odnosno evolucije cene predvidi njeno kretanje u budućnosti. U tom smislu, polazi se od svih relevantnih, dostupnih informacija koje mogu biti od značaja za kretanje cena i njihovo eventualno opisivanje odgovarajućim matematičkim modelom.

Utvrđivanje osnovnih zakonitosti dinamike cena, kao što smo već istakli, može se izvršiti slučajnim vremenskim serijama (slučajnim procesima) koji, u slobodnoj interpretaciji, predstavljaju različite modele "neodređenosti koja protiče u vremenu". U ovom delu opisaćemo, stoga, neke od najinteresantnijih i najzastupljenijih stohastičkih modela dinamike cena koje ćemo kasnije koristiti u daljem radu. Takođe, izozićemo i neke od mogućnosti formiranja odgovarajućih modela sa aspekta normalnih raspodela, gde ćemo posebno definisati pojam *uslovno-gausovske raspodele*, kao posebno važan u formiranju, pre svega, modela zasnovanih na tzv. uslovnoj heterogenosti, o kojima govorimo već u narednoj glavi.

1.2.1 Osnovni modeli cena

Prvi od ovakvih modela dao je Luis Bašelije¹ u svojoj disertaciji "*Théorie de la spéculation*". On je, analizirajući kretanja vrednosti akcija na pariskom tržištu, zaključio da se cena akcija može prikazati slučajnim procesom

$$S = (S_t), \quad t \geq 0$$

definisanim na ekvidistantnim vremenskim intervalima $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$

Osnovne pretpostavke o osobinama niza koje je Bašelije dao zasnivaju se na činjenici da na intervalima dužine Δt priraštaji $S_{t+\Delta t} - S_t$ imaju srednju vrednost 0 i odstupanja reda $\pm \sigma\sqrt{\Delta t}$. Drugim rečima, u narednom trenutku $t + \Delta t$ podjednako je moguć "skok" ili "pad" cene, nezavisno od njene trenutne vrednosti u datom vremenskom trenutku t . Ovakva osobina može se opisati jednim od najpoznatijih modela "haotičnog kretanja", poznatim kao *Braunovo kretanje*. Pri navedenim pretpostavkama, osnovni oblik ovakvog modela glasi

$$(1.2.1) \quad S_t = S_0 + \sum_{k=1}^N \xi_k^{(\Delta)}$$

gde je $N = [t/\Delta t]$, S_0 početna cena, formirana u trenutku $t = 0$, a $\xi_k^{(\Delta)}$ niz nezavisnih jednakoraspodeljenih slučajnih veličina sa raspodelom

$$\xi_k^{(\Delta)} : \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{\Delta t} & -\sigma\sqrt{\Delta t} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Tada je $E(S_t) = S_0$ i $Var(S_t) = N\sigma^2\Delta t$ pa, u graničnom slučaju kada $\Delta t \rightarrow 0$, primenom centralne granične teoreme možemo zaključiti da se cena $S = (S_t)$ aproksimativno može prikazati modelom

$$S_t = S_0 + \sigma W_t, \quad t \geq 0$$

gde je $W = (W_t)$, $t \geq 0$ poznati *Vinerov proces*. Reč je o slučajnom procesu sa nezavisnim priraštajima koji, pored toga, poseduje sledeća svojstva

- (a) $W_0 \stackrel{s.i.}{=} 0$;
- (b) $W_t : \mathcal{N}(0, t)$.

¹Louis Bachelier, 1870-1946

Na ovaj način, model cene $S = (S_t)$ prikazan vremenskom serijom (1.2.1) bio bi, sa stohastičkog stanovišta, u potpunosti određen. Ipak, istraživanja su pokazala da se empirijski rezultati u velikoj meri razlikuju od gore navedenih, pri čemu je "ključ" nepodudaranja pretpostavka o gausovnosti (o čemu govorimo već u narednom odeljku ovog poglavlja), kao i pretpostavka nezavisnosti priraštaja članova niza (S_t) . Zato se ovaj model veoma retko koristi u praktičnim primenama i, kao takav, ima pre svega istorijski karakter.

Navešćemo sada još neke od modela reprezentovanja cene kojima ćemo se češće baviti u daljem izlaganju. U tu svrhu, prostor verovatnoća (Ω, \mathcal{F}) , kao i ranije, proširićemo potokom σ -algebri

$$F = (\mathcal{F}_n), \quad n \in D.$$

Ako je S_n cena neke ekonomske kategorije, formirane, kao tržišni predmet, u trenutku n , onda se njena istorija može prikazati nizom slučajnih veličina

$$S = (S_n), \quad n \in D$$

koji ćemo nadalje koristiti za njeno označavanje. Naravno, pretpostavićemo $S_n > 0, \forall n \in D$. Ovakav koncept cene odgovara modelu filtriranog prostora verovatnoća

$$(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$$

o kome je bilo reči u prethodnom poglavlju. Za slučajne veličine S_n pretpostavićemo da su \mathcal{F}_n -merljive, tj. $S_n \in M(\mathcal{F}_n)$, što je u skladu sa činjenicom da se cena u datom momentu n usklađuje sa događajima registrovanim do tog momenta, a koji su, s druge strane, opisani σ -algebrom \mathcal{F}_n . Pri navedenim pretpostavkama, u praksi se uglavnom koriste sledeća dva stohastička modela reprezentovanja cene.

(i) *Prvi model (prostih kamatnih stopa)* zasniva se na modelu cene

$$(1.2.2) \quad S_n = S_{n-1} (1 + \rho_n)$$

pri čemu je $\rho_n = \Delta S_n / S_{n-1}$, $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ relativna promena cene neke ekonomske kategorije (aseta), koju ćemo, slično standardnom ekonomskom terminu, zvati *tržišna kamatna stopa*. Ona određuje slučajnost u dinamici cene S_n , pa pretpostavljamo $\rho_n \in M(\mathcal{F}_n)$, tj. vrednost tržišne stope ρ_n određuje se u momentu vremena n .

(ii) *Drugi model (složenih kamatnih stopa)* daleko je rasprostranjeniji i kao takav biće u samom centru naše pažnje. On je takođe okrenut "prihodu" koji nastaje promenama cene S i često se primenjuje u situacijama kada je potrebno odrediti relativnu cenu, tj. cenu koja se posmatra u odnosu na cenu drugih proizvoda - aseta. Ideja za njegovo formiranje zasniva se na tzv. kontinualnom kamaćenju, pa se cena S prikazuje u obliku niza

$$(1.2.3) \quad S_n = S_0 e^{H_n}$$

gde je

$$H_n = \sum_{k=0}^n h_k, \quad (h_0 = 0)$$

suma \mathcal{F}_n merljivih slučajnih veličina h_n , koju nazivamo *složeni prihod*. Veličine h_n obično se nazivaju *logaritmi promene cena* ili, jednostavno, *logaritmi prihoda*. Ovakva interpretacija opravdana je time da se h_n može izraziti kao

$$(1.2.4) \quad h_n = \ln \frac{S_n}{S_{n-1}} = \ln \left(1 + \frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} \right), \quad \Delta S_n = S_n - S_{n-1},$$

odakle je $h_n > 0 \Leftrightarrow \Delta S_n > 0$, tj. promena cene S , odnosno niza S_n , prikazuje se odgovarajućom promenom sabiraka h_n , pa samim tim i ukupnom sumom H_n .

Ovde je od posebnog značaja slučaj kada je

$$E(H_{n+1} | \mathcal{F}_n) \stackrel{s.i.}{=} H_n, \quad n \in D$$

tj. kad niz (H_n) predstavlja *martingal* u odnosu na filter F . Tada niz (h_n) predstavlja niz nekoreliranih slučajnih veličina koji se obično naziva *martingalni priraštaj* (detaljnije o martingalima i njihovoj ulozi u definisanju modela finansijskih nizova govorimo već u narednom poglavlju). U daljem radu daćemo još neke modifikacije koje se, pre svega, odnose na model (1.2.4), a odnose se na ispitivanja mogućnosti njegovih daljih transformacija. Ovaj model ćemo i najčešće koristiti u narednim izlaganjima, a poseban deo posvetićemo i problemu raspodela gore navedenih nizova, mogućnosti predviđanja (prognoze) članova niza na osnovu poznatih, realizovanih vrednosti u "prošlosti" itd.

1.2.2 Gausovska interpretacija modela

Osnovni interes u analizi finansijskih nizova jeste u pronalaženju odgovarajućih modela koji bi, recimo, opisali raspodelu niza $h = (h_n)$ čime je, sa stohastičkog stanovišta, u potpunosti opisano ponašanje cene S . Naravno, tu se javljaju brojni problemi najčešće vezani za izbor odgovarajućih raspodela, ispitivanja njihovih osobina itd. Jedan od klasičnih načina interpretacije većine empirijskih podataka zasniva se na tzv. *hipotezi gausovnosti* koja, na osnovu centralne granične teoreme, pretpostavlja da niz (h_n) ima, bar u graničnom smislu, normalnu raspodelu za čije je potpuno opisivanje dovoljno znati matematičko očekivanje

$$\mu = E(h_n)$$

i kovarijansu

$$\text{Cov}(h_n, h_m) = E(h_n h_m) - E(h_n)E(h_m).$$

Pretpostavka o normalnosti niza (h_n) znatno će pojednostaviti mnoga pitanja vezana za osobine niza (S_n) , pre svih problem ekstrapolacije (predviđanja) kretanja cene u budućnosti. Ako je, recimo, S_{n+m} cena u nekom budućem vremenskom trenutku koju treba oceniti na osnovu poznate vrednosti S_n , odnosno realizacija logaritama prihoda h_1, \dots, h_n , onda je u tu svrhu dovoljno naći ocenu za h_{n+m} u obliku zadate funkcije

$$\tilde{h}_{n+m} = \varphi(h_1, \dots, h_n).$$

Optimalnu ocenu \tilde{h}_{n+m} , u smislu minimizacije tzv. *srednje-kvadratne greške*

$$\Delta_{n+m} = E[h_{n+m} - \varphi(h_1, \dots, h_n)]^2,$$

predstavlja, kao što znamo, uslovno matematičko očekivanje

$$\tilde{h}_{n+m} = E(h_{n+m} | h_1, \dots, h_n)$$

pri čemu je, na osnovu hipoteze normalnosti, $h_{n+m} - \tilde{h}_{n+m} \sim \mathcal{N}(0, \Delta_{n+m})$. Na ovaj način za zadati nivo značajnosti $\alpha \in (0, 1)$ možemo odrediti $z_\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je

$$P \left\{ \left| \frac{h_{n+m} - \tilde{h}_{n+m}}{\sqrt{\Delta_{n+m}}} \right| \leq z_\alpha \right\} = 1 - \alpha$$

pa će $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -ni interval poverenja cene S_{n+m} biti

$$S_n e^{\tilde{h}_{n+m} - z_\alpha \sqrt{\Delta_{n+m}}} \leq S_{n+m} \leq S_n e^{\tilde{h}_{n+m} + z_\alpha \sqrt{\Delta_{n+m}}}.$$

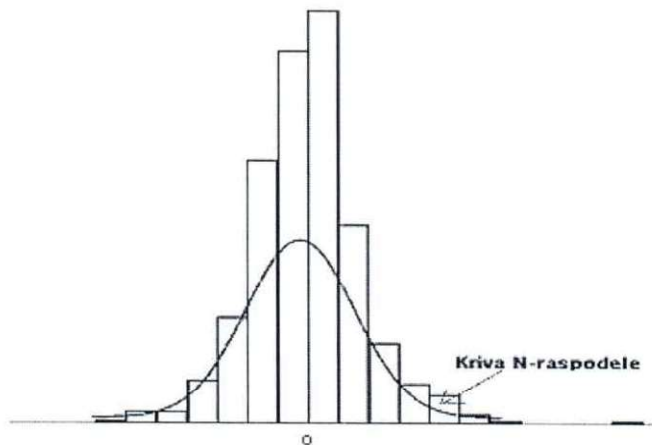
Ipak, prema ovakvim rezultatima treba se odnositi izuzetno oprezno. Analiza empirijskih vrednosti većine finansijskih nizova ukazuje da pretpostavka o gausovnosti ne daje pravu sliku ponašanja cena na tržištu. Tu se, pre svega, naglašavaju sledeće dve činjenice:

(a) Broj *realizovanih vrednosti* koje ne pripadaju intervalima poverenja gore navedenog tipa znatno je veći od onog koji bi mogao da se očekuje pri hipotezi normalnosti;

(b) *Koeficijent spljoštenosti*

$$K = \frac{E(h_n^4)}{[E(h_n^2)]^2}$$

za koji u slučaju normalne raspodele važi $K = 3$, ovde uzima znatno veće vrednosti, na šta ukazuju naglašeni pikovi ("vrhovi") velikog broja empirijskih raspodela (slika 1.1.)



Slika 1.1: Empirijska gustina-histogram cene zlata (London Fix: 2001-2003). Upoređenje sa krivom normalne raspodele.

Iz tih razloga, umesto uobičajene pretpostavke o normalnosti bezuslovnih raspodela niza kao alternativa se uzima nova pretpostavka da je uslovna

raspodela verovatnoća Gausovog tipa, tj.

$$P\{h_n \leq x | \mathcal{F}_{n-1}\} = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(y-\mu_n)^2}{2\sigma_n^2}} dy$$

gde je

$$\mu_n(\omega) = E(h_n | \mathcal{F}_{n-1}), \quad \sigma_n^2(\omega) = D(h_n | \mathcal{F}_{n-1}), \quad \omega \in \Omega.$$

Na taj način, raspodela niza h_n predstavlja kombinaciju uslovnih gausovskih raspodela, sa srednjom vrednošću μ_n i disperzijom σ_n^2 . Ipak, ovako definisana klasa raspodela *uslovno-gausovskog tipa* je dosta velika pa je neophodno uvesti neke dodatne pretpostavke koje se, pre svega, odnose na konkretnu strukturu raspodela niza h_n .

Naš osnovni cilj biće, između ostalog, opisivanje nekih od rekurzivnih postupaka koji se mogu primeniti upravo na dati niz slučajnih veličina, a koji su uglavnom uspešno primenjeni poslednjih godina unutar familije tzv. modela uslovne heterogenosti (ARCH i GARCH modeli). U tu svrhu, saglasno većini empirijskih rezultata, pretpostavićemo da je $\mu_n \equiv 0$, dok će poseban značaj u konstrukciji ovakvih modela imati tzv. *volatilni niz* $\sigma = (\sigma_n)$ koji, prirodno, predstavlja meru izmenljivosti (volatilnosti) cene, o čemu će takođe biti nešto više reči u kasnijem izlaganju.

1.3 Martingalne reprezentacije finansijskih indeksa

Jedan od osnovnih preduslova za funkcionisanje efikasnog tržišta jeste, kako smo već istakli, u tome da sve strane (učesnici na njemu) imaju isti, ravnopravan pristup svim relevantnim informacijama koje su, s druge strane, opisane filtrom $F = (\mathcal{F}_n)$. S tim u vezi, evolucija finansijskog indeksa (X_n) posmatrana unutar nekog vremenskog horizonta $\{0, \dots, N\}$ trebalo bi da bude takva da sva "saznanja" o njegovim promenama i stanju u momentu $T > N$ zavise isključivo od informacija iz skupa \mathcal{F}_n , tj. nalaze se u samom skupu $\{0, \dots, N\}$. Time dolazimo do pojma martingala kao važnih stohastičkih modela dinamike finansijskih indeksa.

1.3.1 Martingali. Definicija i osobine

Daćemo najpre formalnu definiciju martingala kao posebnih, specifičnih nizova slučajnih veličina.

Definicija 1.3.1. Niz slučajnih veličina $X = (X_n)$ naziva se *martingal* (u odnosu na potok σ -algebri $F = (\mathcal{F}_n)$) ako su za svako $n \in \mathbb{N}$ ispunjeni sledeći uslovi:

- (i) $X_n \in M(\mathcal{F}_n)$, tj. X_n jeste \mathcal{F}_n merljiva slučajna veličina²;
- (ii) $E|X_n| < \infty$;
- (iii) Za svako $m \in \mathbb{N}$, $m < n$ važi

$$E(X_n | \mathcal{F}_m) \stackrel{s.i.}{=} X_m. \quad \triangle$$

U slobodnoj interpretaciji, martingal predstavlja stohastički model finansijskog indeksa za koji ne postoji mogućnost arbitraže niti bilo kakvog spekulativnog dejstva ma kojeg učesnika na tržištu. Naime, uslov (iii) koji je naveden u gornjoj definiciji ukazuje na činjenicu da je očekivana vrednost indeksa u "budućem" trenutku $n > m$ jednaka "sadašnjoj" vrednosti X_n . Time je, između ostalog, opisano i svojstvo *markovnosti* martingala (X_n) . Uočimo, takođe, da (iii) možemo, na osnovu teoreme Radon-Nikodima, napisati u ekvivalentnom obliku

$$\int_B X_n dP = \int_B X_m dP, \quad \forall m, n \in D, m < n$$

gde je $B \in \mathcal{F}_m$. Takođe, uzimanjem srednjih vrednosti dobijamo

$$E[E(X_n | \mathcal{F}_m)] = E(X_n) = E(X_m)$$

pa zaključujemo da je srednja vrednost martingala konstantna funkcija vremena $n \in D$. U tom slučaju definicija martingala dobija na jednostavnosti jer je tada, umesto (iii), dovoljno uzeti

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \stackrel{s.i.}{=} X_n.$$

²Uređen par $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ zvaćemo *stohastički niz*.

Zaista, za proizvoljno $k > 1$ tada je, skoro izvesno,

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}|\mathcal{F}_n) &= E[E(X_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k-1})|\mathcal{F}_n] \\ &= E(X_{n+k-1}|\mathcal{F}_n) \\ &\vdots \\ &= E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n. \end{aligned}$$

S druge strane, uslov (ii) naveden u prethodnoj definiciji može se zameniti slabijim

$$|X_n| \stackrel{s.i.}{<} \infty.$$

Ako, za proizvoljno $n \in D$, označimo

$$X_n^+ = \sup(X_n, 0), \quad X_n^- = \sup(-X_n, 0)$$

biće

$$X_n = X_n^+ - X_n^-, \quad |X_n| = X_n^+ + X_n^-,$$

odnosno, na osnovu (iii),

$$\begin{aligned} E(|X_{n+1}||\mathcal{F}_n) &= E(X_{n+1}^+|\mathcal{F}_n) + E(X_{n+1}^-|\mathcal{F}_n) \\ &= X_n^+ + X_n^- \stackrel{s.i.}{<} \infty. \end{aligned}$$

Ovakve martingale, za koje uslov (ii) nije obavezno ispunjen, zvaćemo *uopšteni martingali*, a u daljem radu ćemo ukazati na njihovu ulogu u ispitivanju (pravih) martingala.

Radi ilustracije, konstrukciju matingalnih nizova opisaćemo sledećim situacijama.

Primer 1. (*Martingal Levija*) Neka je ξ slučajna veličina sa $E|\xi| < \infty$. Definišimo vremensku seriju

$$X_n = E(\xi|\mathcal{F}_n), \quad n \in D.$$

Očito, skoro izvesno važi

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E[E(\xi|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n] = E(\xi|\mathcal{F}_n) = X_n$$

tj. $X = (X_n)$ predstavlja martingal. ∇

Primer 2. Neka je $h = (h_n)$ niz nezavisnih slučajnih veličina sa $E(h_n) = 0$ i \mathcal{F}_n σ -algebra generisana veličinama h_k , $k \leq n$. Formirajmo niz suma

$$X_n = \sum_{k \leq n} h_k.$$

Kako je, skoro izvesno,

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_n + h_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n + E(h_{n+1}) = X_n$$

zaključujemo da niz $X = (X_n)$ takođe predstavlja martingal. ∇

Primer 3. Neka je (X_n) , $E(X_n) = 0$ niz slučajnih veličina sa nezavisnim priraštajima. Ako je, kao u prethodnom primeru, $\mathcal{F}_n = \text{Gen}\{X_k : k \leq n\}$, onda, zbog nezavisnosti priraštaja niza X_n , za proizvoljno $k > 0$ imamo

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}|\mathcal{F}_n) &= E[X_n + (X_{n+k} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= X_n + E(X_{n+k} - X_n) \\ &= X_n \end{aligned}$$

pa je (X_n) martingal. ∇

Primer 4. Ako je $\{X_n : n \in D\}$ martingal u odnosu na potok σ -algebri $\mathcal{F}_n = \text{Gen}\{X_k : k \leq n\}$, onda, za proizvoljno $n > m > k$ imamo

$$\begin{aligned} E[(X_n - X_m)(X_m - X_k)] &= E\left\{(X_m - X_k) E[(X_n - X_m) | \mathcal{F}_m]\right\} \\ &= E\left\{(X_m - X_k) E[(X_n | \mathcal{F}_m) - X_m]\right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Znači, (X_n) je niz sa nekoreliranim priraštajima. ∇

Poslednja dva primera ukazuju na činjenicu da, pri određenim uslovima, martingali "leže" između vremenskih serija sa nezavisnim i nekoreliranim priraštajima. Uloga priraštaja martingalnih nizova može biti veoma korisna za karakterizaciju samog martingala, pa ćemo se detaljnije zadržati na tome.

Definicija 1.3.2. Stohastički niz (h_n, \mathcal{F}_n) naziva se *martingalni priraštaj* (*martingalna razlika*) ako za svako $n \in D$ važi:

- (i) $E|h_n| < \infty$;
- (ii) $E(h_{n+1}|\mathcal{F}_n) \stackrel{s.i.}{=} 0$. \triangle

Na osnovu same definicije sledi da, za proizvoljno $k > 0$, skoro izvesno važi

$$\begin{aligned} E(h_{n+k}|\mathcal{F}_n) &= E[E(h_{n+k}|\mathcal{F}_{n+k-1})|\mathcal{F}_n] \\ &= E(h_{n+k-1}|\mathcal{F}_n) \\ &\vdots \\ &= E(h_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0, \end{aligned}$$

odakle je

$$E(h_{n+k} h_n) = E[h_n E(h_{n+k} | \mathcal{F}_n)] = 0.$$

Dakle, (h_n) predstavlja niz nekoreliranih slučajnih veličina. Uvođenje ovakvog niza biće sasvim jasno nakon sledećeg tvrđenja.

Teorema 1.3.1. *Stohastički niz $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ je martingal akko postoji martingalni priraštaj $h = (h_n, \mathcal{F}_n)$ takav da je*

$$(1.3.1) \quad X_n = \sum_{k \leq n} h_k, \quad \forall n \in D.$$

Dokaz. Ako je X martingal, onda možemo uzeti

$$h_n = \Delta X_n = X_n - X_{n-1}, \quad n \in D.$$

Tada, očito, važi (1.3.1), kao i uslov stohastičnosti $h_n \in M(\mathcal{F}_n)$. Takođe,

$$E|h_n| \leq E|X_n| + E|X_{n-1}| < \infty$$

a, na osnovu definicije martingala X_n ,

$$E(h_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - X_n \stackrel{s.i.}{=} 0$$

pa zaključujemo da je niz (h_n) zaista martingalni priraštaj.

S druge strane, ako je $h = (h_n, \mathcal{F}_n)$ martingalni priraštaj kao u definiciji 1.3.2, a niz (X_n) definisan sa (1.3.1), onda je, za svako $n \in D$, očito ispunjen uslov $X_n \in M(\mathcal{F}_n)$. Takođe, na osnovu definicije niza h_n važi

$$E|X_n| \leq \sum_{k \leq n} E|h_k| < \infty$$

kao i, skoro izvesno,

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(X_n + h_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n + E(h_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$$

tj. X zaista predstavlja martingal. □

Pojmovi martingala (X_n) i odgovarajućeg priraštaja (h_n) , kao što smo videli, u tesnoj su vezi. Kao i u slučaju samih martingala, i ovde se uslov (i) može zameniti slabijim

$$E(|h_n| | \mathcal{F}_{n-1}) \stackrel{s.i.}{<} \infty$$

kada se dobija uopšteni martingalni priraštaj.

U daljem radu često ćemo koristiti navedene činjenice, pa će rad sa martingalima, odnosno odgovarajućim priraštajima, biti osnovni mehanizam u konstrukciji i stohastičkoj analizi različitih modela finansijskih nizova.

1.3.2 Stohastički model (B, S) tržišta

Izložićemo sada neka elementarnija zaključivanja o ponašanju finansijskih indeksa jednostavnijeg tipa. Ova razmatranja imaju za cilj da ukažu na prirodnost uvođenja martingala kao stohastičkih modela u kojima se javlja odsustvo arbitraže. Uočićemo da se, na taj način, Teorija arbitraže i ostali finansijsko-stohastički modeli o kojima će biti reči nalaze u tesnoj vezi sa koncepcijom efikasnog tržišta opisanog u prethodnom delu.

Kao najjednostavniji primer takvog racionalnog tržišta biće izložen tzv. (B, S) -model u kome pretpostavljamo da se kao osnovni elementi tržišta i svih dešavanja na njemu javljaju dva finansijska niza:

- (a) Stanje na bankovnom računu: $B = (B_n)_{n \in D}$
- (b) Vrednost cena (akcija, sirovina itd): $S = (S_n)_{n \in D}$.

Dinamika kretanja i promena ovih dveju veličina opisane su stohastičkim modelom (B, S) -tržišta, koje će biti u središtu naše pažnje. Ta kretanja mogu biti iskazana na različite načine. Tako se npr. kao osnovni modeli evolucije niza (B_n) obično koriste *modeli prostih kamatnih stopa*

$$(1.3.2) \quad B_n = B_{n-1} (1 + r_n) = \prod_{k \leq n} (1 + r_k), \quad n \in D$$

gde je $r_n = \Delta B_n / B_{n-1}$, $\Delta B_n = B_n - B_{n-1}$ *kamatna stopa*, izražena kao relativna promena stanja na bankovnom računu, u vremenskom trenutku n . Ovde se, prirodno, pretpostavlja da je $r_n \in M(\mathcal{F}_{n-1})$, čime se ukazuje na činjenicu da je vrednost kamatnog iznosa poznata već u prethodnom momentu $n - 1$. Na taj način biće i $B_n \in M(\mathcal{F}_{n-1})$, tj. stanje bankovnog računa smatra se, uobičajeno, bezrizičnom poznatom aktivom.

S druge strane, niz (S_n) koji će, uzgred rečeno, biti od značajnog interesa u daljem izučavanju, predstavlja rizičnu nepoznatu aktivu. Zato je $S_n \in M(\mathcal{F}_n)$, odnosno vrednosti S_n određuju se u "sadašnjem" trenutku n .

Analogno prethodnom postupku, njih možemo prikazati u obliku

$$(1.3.3) \quad S_n = S_{n-1} (1 + \rho_n) = \prod_{k \leq n} (1 + \rho_k), \quad n \in D$$

gde je $\rho_n = \Delta S_n / S_{n-1}$, $\Delta S_n = S_n - S_{n-1}$ relativna promena cene, koju ćemo, slično prethodnom, zvati *tržišna kamatna stopa*. Ako sada pretpostavimo da je

$$E(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) \stackrel{s.i.}{=} r(const)$$

tj. da je očekivana vrednost kamatne stope (recimo, prodaje i kupovine akcija) konstantna veličina, biće, na osnovu (1.3.3),

$$E(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1} E[(1 + \rho_n) | \mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1} (1 + r).$$

Ovaj rezultat ima realnu interpretaciju koja se vrlo često dešava u praksi, u slučajevima kada se nastoji da se bezrizična fluktuirajuća kamatna stopa r_n zameni konstantnom vrednošću $r_n \equiv r$. Tada je

$$(1.3.4) \quad B_n = B_{n-1} (1 + r) = B_0 (1 + r)^n, \quad n \in D$$

pri čemu je sa B_0 označen *tz. početni (inicijalni) iznos* na računu. Najzad, ako sada uvedemo normirani niz vrednosti cena

$$(1.3.5) \quad \tilde{S}_n = \frac{S_n}{B_n}, \quad n \in D$$

važiće

$$(1.3.6) \quad E(\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E\left[\frac{S_{n-1}(1 + \rho_n)}{B_{n-1}(1 + r_n)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} = \tilde{S}_{n-1}$$

tj. niz (\tilde{S}_n) predstavlja *martingal u odnosu na potok σ -algebri (\mathcal{F}_n)* . Sa finansijskog aspekta, može se reći da se očekivana vrednost relativne promene cene (akcija) u odnosu na stanje bankovnog računa investitora neće bitnije izmeniti u odnosu na prethodni odnos. Preciznije, za cenu akcija i stanje na računu očekivani odnos, opisan nizom (\tilde{S}_n) , jeste konstantna, nepromenljiva veličina, jer na osnovu poznate osobine martingala važi

$$E(\tilde{S}_n) = const.$$

Sve razlike u odnosu na ovu, očekivanu vrednost nastaju slučajnim fluktuacijama, odnosno, posledica su nestabilnosti na tržištu. Ovakva interpretacija takođe je u vezi sa uslovom nearbitraže, jer je povećanje vrednosti cene akcija uslovljeno odgovarajućim povećanjem stanja na bankovnom računu i obratno. Ipak, u slučaju narušavanja uslova martingalnosti (1.3.6) dolazi se u neku od sledećih dveju situacija

$$E(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) \stackrel{s.i.}{>} r$$

ili

$$E(\rho_n | \mathcal{F}_{n-1}) \stackrel{s.i.}{<} r.$$

U prvom slučaju investitoru je pogodnije ulaganje u akcije, a u drugom raspoređivanje sredstava na "sigurnim" računima u bankama. U obe situacije dolazi do dominiranja jedne vrste novca nad drugom koja, u skladu sa principom efikasnosti, mora "nestati" sa tržišta. Rešenje ovakve paradoksalne situacije leži u usklađivanju kamatnih i tržišnih stopa, tj. u ispunjenju gore navedenih uslova (1.3.3) i (1.3.4).

1.4 Pojam volatilnosti

Verovatno nijedan pojam savremene finansijske matematike ne poseduje, s jedne strane, tako važnu i raznovrsnu primenu, ali i tako različite interpretacije kao pojam volatilnosti. U savremenoj finansijsko-stohastičkoj teoriji volatilnost je moguće definisati na različite načine, iako se sam termin obično koristi kao *mera izmenljivosti (disperzije)* određenog finansijskog indeksa. Naime, prilikom rada na tržištu svaki njegov učesnik (investitor) mora poći i voditi računa ne samo o ceni datog aleta, već i o stepenu rizika sa kojim ulazi u investiciju. Volatilnost tada predstavlja osnovu za određivanje tog rizika. Ipak, da bi se definisao bilo kakav metod i način za izračunavanje stepena rizika, odnosno volatilnosti, mora se poći od odgovarajućeg matematičkog modela formiranja cene.

Kao što smo već istakli, mi ćemo pretpostaviti da je cena S zadata nizom

$$S_n = S_0 e^{H_n}$$

gde je $\Delta H_n = h_n = \ln(S_n/S_{n-1})$ logaritam prihoda niza (H_n) . Jedna od najčešćih (kao i najjednostavnijih) interpretacija koje se odnose na raspodele niza (h_n) obično se zasnivaju na modelu

$$(1.4.1) \quad h_n = \sigma \varepsilon_n$$

gde je (ε_n) beli Gausov šum, odnosno niz nezavisnih slučajnih veličina sa $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom. Tada se pod volatilnošću podrazumeva standardno odstupanje σ , odnosno smatra se da je izmenljivost finansijskog indeksa, u našem slučaju cene S , konstantna (nepromenljiva) slučajna veličina.

Ovakva koncepcija volatilnosti je, naravno, daleko od mnogih realnih situacija. Naime, ovde je $h_n : \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, tj. niz h_n ima standardnu normalnu raspodelu, koja, kao što smo već istakli ranije, nije od velikog interesa u konkretnim primenama. U praksi se volatilnost najčešće opisuje kao *promenljiva (slučajna) veličina*, pa ćemo u daljem radu pretpostaviti da je logaritam prihoda (h_n) opisan ne kao Gausov, već *uslovno-gausovski* raspodeljen niz oblika

$$(1.4.2) \quad h_n = \sigma_n \varepsilon_n$$

gde je (σ_n) niz slučajnih \mathcal{F}_{n-1} merljivih slučajnih veličina, a (ε_n) gausovski niz koji smo definisali malopre, uz dodatnu pretpostavku $\varepsilon_n \in M(\mathcal{F}_n)$. Ovde filter $F = (\mathcal{F}_n)$ ima istu ulogu i interpretaciju kao i u prethodnom delu, tj. predstavlja skup svih informacija dostupnih bilo kom učesniku na tržištu, u trenutku n . Tada za niz (σ_n) kažemo da je *stohastički volatilni niz* ili, jednostavno, *stohastička volatilnost* prihoda (h_n) , odnosno cene S .

Kako je, dalje, na osnovu (1.4.2),

$$(1.4.3) \quad E(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n E(\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$$

kao i

$$(1.4.4) \quad \text{Var}(h_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(h_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2 E(\varepsilon_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \sigma_n^2$$

to niz (H_n) , pod uslovom $E|h_n^2| < \infty$, predstavlja *martingal* (u odnosu na filter σ -algebri F), sa martingalnim priraštajem $h = (h_n)$. Stoga, (h_n) predstavlja niz nekoreliranih slučajnih veličina sa matematičkim očekivanjem

$$E(h_n) = E[E(h_n | \mathcal{F}_{n-1})] = 0$$

i disperzijom

$$\text{Var}(h_n) = E(h_n^2) = E[E(h_n^2|\mathcal{F}_{n-1})] = E(\sigma_n^2)$$

pa kao takav nije od posebnog interesa u daljim razmatranjima. Obično se umesto njega posmatra niz (h_n^2) koji, na osnovu prethodnih jednakosti, predstavlja optimalnu ocenu volatilnog niza (σ_n^2) , u ranije pomenutom srednje-kvadratnom smislu. Ova činjenica omogućava da se, kao takođe slučajna mera izmenljivosti martingala H , a samim tim i cene S , definiše tzv. *kvadratna karakteristika*

$$(1.4.5) \quad \langle H \rangle_n = \sum_{k=1}^n \text{Var}(h_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n E(h_k^2|\mathcal{F}_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2.$$

U skladu s prethodnom terminologijom, ovaj niz zvaćemo *volatilnost* niza $H = (H_n)$. Kako je, na osnovu nekoreliranosti niza (h_n) ,

$$E(H_n^2) = \sum_{k=1}^n E(h_k^2) = \sum_{k=1}^n E(\sigma_k^2) = E\langle H \rangle_n$$

zaključujemo da je očekivana vrednost volatilnosti $\langle H \rangle_n$, u stvari, disperzija martingala (H_n) . U skladu s tim, ovaj model volatilnosti koristi se kao mera izmenljivosti na martingalnim tržištima neutralnog rizika, o kojima je bilo reči u prethodnom poglavlju.

Na kraju, navedimo i to da se u praksi obično, kao ocena volatilnosti (σ_n) , koristi uzoračka standardna devijacija

$$(1.4.6) \quad \hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h}_n)^2}$$

gde je \bar{h}_n uzoračka srednja vrednost realizacije h_1, \dots, h_n niza logaritama prihoda. Reč je, naravno, o dobro poznatoj statistici koja se najčešće koristiti samo kao polazna osnova za određivanje "rasipanja", odnosno disperzije posmatranog empirijskog skupa podataka.

U skladu sa tim, a u kontekstu terminologije promena cena, niz $(\hat{\sigma}_n)$ zvaćemo *empirijska volatilnost*. Ona se, kao i sama cena S , može posmatrati kao neki finansijski indeks, odnosno pokazatelj za čiju analizu koristimo istu

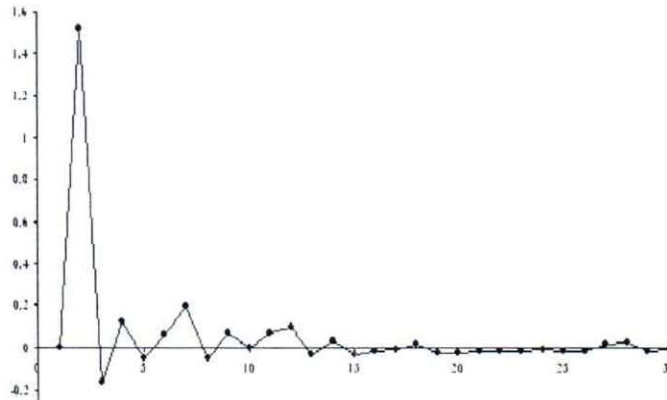
metodologiju kao i pri ispitivanju ponašanja cena. U tom cilju veoma se korisnim pokazuje statistika

$$\hat{r}_n = \ln \frac{\hat{\sigma}_n}{\hat{\sigma}_{n-1}}$$

za koju je eksperimentalno pokazano da veoma "brzo" menja svoju vrednost. Kao ilustracija, na slici 1.2 prikazana je tipična realizacija ove statistike, pri čemu empirijski skup podataka predstavlja cena nafte na svetskom tržištu u periodu 2002-2003 godine. Najzad, uočimo da samu empirijsku volatilnost, na osnovu niza (\hat{r}_n) , možemo, po analogiji sa cenom, prikazati modelom

$$\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma}_0 e^{\sum_{k=1}^n \hat{r}_k}$$

gde je $\hat{\sigma}_0$ početna, inicijalna vrednost volatilnog niza $(\hat{\sigma}_n)$.



Slika 1.2: Grafikon realizovane vrednosti statistike \hat{r}_n .

Glava 2

Modeli uslovne heterogenosti

Važna informacija, sa stanovišta statističke analize, jeste o *klasternosti*, odnosno odgovarajućem grupisanju podataka, pre svega, volatilnosti. Naime, obično se u praksi javljaju periodi sa izraženom odnosno niskom volatilnošću. Ovo je za posledicu imalo razvoj grupe takozvanih *nelinearnih modela uslovne heterogenosti* koji su u stanju da opišu pojavu klasternosti, jer je volatilnost i sama iskazana kao vremenska serija. U daljem izlaganju opisaćemo neke od najvažnijih modela ove grupe (ARCH i GARCH-modeli) kao "uopštene" modele volatilnosti, koji imaju veliku popularnost i široku primenu u praksi. Pored već ranije poznatih modela, opisaćemo i novi, originalni model uslovne heterogenosti, nazvan *Split-ARCH*, koji spada u grupu tzv. pragovnih modela i uspešno je primenjen u ispitivanju nelinearnog ponašanja volatilnosti cene nekih konkretnih finansijskih indeksa.

Uobičajena koncepcija izlaganja zasniva se na opisivanju najznačajnijih stohastičkih karakteristika pomenutih modela. Dakle, biće opisani potrebni i dovoljni uslovi stacionarnosti (u slabom i strogom smislu), ocenjivanje nepoznatih parametara modela, sa posebnim osvrtoma na kvalitet dobijenih ocena, kao i praktična primena u ispitivanju dinamike realnih podataka. Na kraju će biti ukazano na neke od prednosti, ali i nedostatke modela koji su obrađeni u ovom poglavlju.

2.1 ARCH-modeli

U pokušaju da volatilitnost finansijskih indeksa izrazi slučajnim procesima, preciznije, vremenskim serijama diskretnog vremenskog parametra, Robert Engle (1982) uvodi tzv. *autoregresivne modele uslovne heterogenosti* ili, kraće, *ARCH-modele*.¹ Njihova osnovna karakteristika jeste rekurzivni način određivanja volatilnog niza, na osnovu ranijih, poznatih vrednosti. U tom cilju, radi preciznosti izlaganja, uvešćemo sledeće pretpostavke.

Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoća, a $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ beli Gausov šum, tj. niz nezavisnih slučajnih veličina sa $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom. Pretpostavimo, takođe, da je filter $F = (\mathcal{F}_n)$ generisan nizom (ε_n) , tj. da važi:

$$\mathcal{F}_n = \text{Gen}\{\varepsilon_k : k \leq n\}.$$

Za model cene

$$(2.1.1) \quad S_n = S_0 e^{H_n}, \quad H_n = \sum_{k=1}^n h_k$$

odnosno logaritme prihoda h_n moguće je, koristeći uslovno-gausovski model

$$(2.1.2) \quad h_n = \sigma_n \varepsilon_n$$

volatilitnost (σ_n) izraziti kao funkciju prethodnih vrednosti niza $h = (h_n)$. U opštem slučaju,

$$(2.1.3) \quad \sigma_n = \phi(h_{n-1}, \dots, h_{n-p}), \quad p \in \mathbb{N}$$

pri čemu se vrednosti h_{n-1}, \dots, h_{n-p} smatraju poznatim i obično se određuju eksperimentalnim putem. Ovo je sa praktičnog stanovišta veoma pogodno jer se buduće vrednosti preračunavaju rekurentnim postupkom, na osnovu ranijih. Ipak, osnovni problem koji se ovde javlja jeste način izbora funkcije ϕ i broja $p > 0$.

Kako niz (h_n) predstavlja martingalni priraštaj (martingala (H_n)), pa stoga i niz nekoreliranih slučajnih veličina, reprezentacija (2.1.3) u obliku, recimo, linearne funkcije bila bi nezadovoljavajuća. Ipak, linearni oblik

¹AutoRegressive Conditional Heteroscedastic.

zavisnosti prenosi se na njihove kvadrate h_n^2 , pa se na taj način dobijaju ARCH(p) modeli oblika

$$(2.1.4) \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{n-j}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_j \geq 0.$$

Volatilnost se na ovaj način dobija kao prognoza na osnovu prethodnih vrednosti $h_{n-1}^2, \dots, h_{n-p}^2$ i, kao takva, prati njihovu veličinu. Na osnovu toga može se (donekle) objasniti efekat klasternosti kao grupisanja podataka oko velikih, odnosno malih vrednosti niza (h_n). Ipak, ove vrednosti određuju se samo u smislu apsolutne vrednosti, jer znak zavisi od realizacija šuma (ε_n). Stoga, ARCH(p) model ne može ukazati na to da li će vrednost za h_n biti pozitivna ili negativna.

U daljem izlaganju, navešćemo osnovne karakteristike ARCH modela koje se, pre svega, odnose na potrebne i dovoljne uslove koji obezbeđuju egzistenciju stacionarne vremenske serije koja zadovoljava jednakosti (2.1.2) i (2.1.4). Kao što znamo, stacionarnost volatilnog niza predstavlja osnovni interes u skoro svim analizama finansijskih nizova. Ovo svojstvo omogućava da se na jednostavniji način opiše promenljivost cene i uoče eventualne pravilnosti u njenoj dinamici.

Polazeći od prethodno navedenih pretpostavki ARCH modela može se lako uočiti da je niz σ_n^2 stacionaran akko je stacionaran niz logaritama prihoda (h_n), odnosno niz njegovih kvadrata (h_n^2), koji će biti osnovni predmet našeg izučavanja. Stoga ćemo pokušati da ukažemo na neke od potrebnih i dovoljnih uslova pod kojima će važiti stacionarnost niza h_n^2 , u smislu *konstantne srednje vrednosti*

$$E(h_n^2) = \text{const}$$

kao i *homogenosti korelacione funkcije*

$$\rho(k) = \text{Corr}(h_n^2, h_{n+k}^2)$$

koja zavisi samo od razlike argumenata vremenskih indeksa $k \geq 0$.

Takođe, razmotrićemo i neke od potrebnih i dovoljnih uslova stacionarnosti u užem smislu, kao i neke oblike ocenjivanja parametara koji se mogu koristiti u statističkoj analizi empirijskih finansijskih podataka, odnosno praktičnoj primeni u formiranju ARCH modela na osnovu konkretnih, realnih podataka. Na kraju, poslednji deo ovog poglavlja posvećen je problemu

ekstrapolacije (prognoze) kretanja cena u budućnosti, na osnovu prethodno formiranog modela, što i jeste jedan od osnovnih ciljeva mnogih primenjenih istraživanja.

2.1.1 Stacionarnost

Stacionarnost ARCH(p) modela definisanog jednakostima (2.1.2) i (2.1.4), slično standardnim linearnim ARMA modelima, u tesnoj je vezi sa veličinom korena karakterističnog polinoma

$$(2.1.5) \quad P(\lambda) = \lambda^p - \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda^{p-j}.$$

Pored toga, ARCH(p) model možemo napisati u obliku stohastičke diferencne jednačine I reda

$$(2.1.6) \quad Y_n = A_{n-1}Y_{n-1} + B$$

gde je:

$$Y_n = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 \\ h_{n-1}^2 \\ \vdots \\ h_{n-p+1}^2 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \varepsilon_n^2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ \varepsilon_n^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha_o \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovakva reprezentacija ARCH modela pokazaće se veoma korisnom u dokazivanju uslova njegove stacionarnosti. Konkretno, potrebni i dovoljni uslovi stacionarnosti u slabom smislu mogu se formulisani sledećim tvrđenjem.

Teorema 2.1.1. *Neka je ARCH(p) model definisan jednakostima (2.1.2) i (2.1.4). Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *Koreni $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ karakterističnog polinoma $P(\lambda)$ zadovoljavaju uslov:*

$$|\lambda_j| < 1 \quad , \quad \forall j = 1, \dots, p;$$

(ii) Niz (h_n^2) je stacionaran sa matematičkim očekivanjem

$$(2.1.7) \quad E(h_n^2) = \alpha_0 \left(1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j \right)^{-1}$$

i korelacionom funkcijom $\rho(k)$ koja zadovoljava diferencnu jednačinu

$$(2.1.8) \quad \rho(k) - \sum_{j=1}^p \alpha_j \rho(k-j) = 0, \quad k \geq p$$

sa početnim uslovima

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(k) - \sum_{j=1}^p \alpha_j \rho(k-j) = 0, \quad 1 \leq k < p.$$

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j < 1.$$

Dokaz. (i) \Rightarrow (ii):

Na osnovu (2.1.6), za proizvoljno $k > 0$, važi

$$(2.1.9) \quad E(Y_{n+k}) = (I + M + M^2 + \dots + M^{k-1})B + M^k E(Y_n)$$

pri čemu je

$$M = E(A_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na jednostavan način pokazuje se

$$\det(M - \lambda I) = (-1)^p P(\lambda)$$

tj. sopstvene vrednosti matrice M jesu koreni karakterističnog polinoma $P(\lambda)$. Tada, na osnovu poznate činjenice², sledi konvergencija

$$\sum_{j=0}^{k-1} M^j \rightarrow (I - M)^{-1}, \quad k \rightarrow \infty$$

²Videti, na primer, Milovanović [42], teoreme 1.7.5. i 1.7.6.

kao i

$$M^k \rightarrow \mathbb{O}_{p \times p}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Jednakost (2.1.9) tada postaje

$$E(Y_n) = (I - M)^{-1} B = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

tj. važi (2.1.7).

Na sličan način pokazuje se i (2.1.8). Naime, korelaciona funkcija $\rho(k)$ dobija se na osnovu jednakosti

$$\rho(k) = \frac{R(k) - E(h_n^2)^2}{R(0) - E(h_n^2)^2}, \quad k \geq 0$$

pri čemu je

$$R(k) = E(h_n^2 h_{n+k}^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j} + \sum_{j=1}^p \alpha_j R(k-j), \quad R(0) = E(h_n^4).$$

(ii) \Rightarrow (iii): Kako je $\alpha_0 > 0$ i, na osnovu (ii),

$$E(h_n^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j} > 0$$

očito sledi (iii).

(iii) \Rightarrow (i): Neka je

$$\mathcal{S}_r(M) = \max_j \{\lambda_j\}$$

spektralni radijus matrice M , definisane kao u prethodnom delu. Tada važi³

$$\mathcal{S}_r(M) \leq \|M\|$$

³G. Milovanović [42], teorema 1.7.3.

gde možemo uzeti

$$\|M\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^p \alpha_j, 1 \right\} = 1.$$

Ako pretpostavimo da je $\mathcal{S}_r(M) = 1$, onda za neko $\varphi \in [0, 2\pi]$ postoji sopstvena vrednost oblika $\lambda' = e^{i\varphi}$ za koju je

$$P(\lambda') = e^{ip\varphi} - \sum_{j=1}^p \alpha_j e^{i(p-j)\varphi} = 0.$$

Tada, na osnovu

$$|e^{ip\varphi}| \leq \sum_{j=1}^p \alpha_j |e^{i(p-j)\varphi}|$$

sledi $\sum_{j=1}^p \alpha_j \geq 1$, što je u suprotnosti sa (iii). Dakle,

$$\mathcal{S}_r(M) < 1$$

što, na osnovu prethodnog dela dokaza, jeste ekvivalentno sa (i). \square

Rekurentna reprezentacija (2.1.6) pokazuje se i kao korisno sredstvo u ispitivanju uslova stroge stacionarnosti ARCH-modela. Kao ilustraciju, pokazaćemo sledeće tvrđenje koje predstavlja direktnu primenu rezultata koji se mogu naći, recimo, u [7] i [8]. Osnov u dokazivanju jeste uvođenje tzv. *Lyapoun-ovljevog eksponenta*

$$\gamma = \inf_{n \in D} \left\{ n^{-1} E(\ln \|A_1 \dots A_n\|) \right\}$$

za koji, očito, važi

$$\gamma \leq E(\ln \|A_1\|).$$

Teorema 2.1.2. *Stohastička diferencna jednačina (2.1.6) ima jedinstveno, strogo stacionarno rešenje oblika*

$$(2.1.10) \quad Y_n = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1} \dots A_{n-k} \right) B, \quad n \in D$$

akko Lyapoun-ovljev eksponent zadovoljava uslov $\gamma < 0$.

Dokaz. Na osnovu (2.1.6) važi, za proizvoljno $m \in D$,

$$\begin{aligned} \left\| Y_n - \left(I + \sum_{k=1}^{m-1} A_{n-1} \dots A_{n-k} \right) B \right\| &= \left\| \left(\prod_{k=1}^m A_{n-k} \right) Y_{n-m} \right\| \\ &= \|Y_{n-m}\| e^{m(m^{-1} \ln \|A_{n-1} \dots A_{n-m}\|)}. \end{aligned}$$

Tada, primenom tzv. subaditivne teoreme Kingman-a [34] dobijamo skoro izvesnu konvergenciju

$$m^{-1} \ln \|A_{n-1} \dots A_{n-m}\| \rightarrow \gamma, \quad n \rightarrow \infty$$

odakle, zbog $\gamma < 0$, očito sledi tvrđenje teoreme. \square

2.1.2 Ocene parametara

Formiranje modela tipa ARCH, na osnovu empirijskih podataka, zasniva se na oceni koeficijenata $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ u jednakosti

$$(2.1.11) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{t-j}^2, \quad p < t < n$$

gde je $h_t = \sigma_t \varepsilon_t$, a h_1, \dots, h_n poznate vrednosti, odnosno deo jedne realizacije procesa (h_n) .

Ako sada označimo $\theta = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)'$, onda nepoznati parametar θ možemo posmatrati unutar otvorenog skupa

$$\Theta = \left\{ \theta \in \mathbb{R}^{p+1} : \sum_{j=1}^p \alpha_j < 1 \right\}$$

koji, na osnovu teoreme (2.1.1), predstavlja skup vrednosti za koje je niz kvadrata (h_n^2) stacionaran u slabom smislu. Koristeći ovu činjenicu, izlažemo metod ocenjivanja parametra θ koji su B. Popović i V. Stojanović koristili u [47].

Najpre ocenjujemo vrednost volatilnog niza (σ_n^2) poznatim postupkom *uslovne maksimalne verodostojnosti* koji ćemo u daljem tekstu jednostavno

zvati *UMV-metod*⁴, a opisan je u [41], odnosno [43]. On se zasniva na činjenici da je (h_n) uslovno-gausovski niz slučajnih veličina, pa se njegova uslovna gustina, posmatrana u odnosu na prethodne, realizovane vrednosti h_1, \dots, h_{n-1} može napisati u obliku

$$(2.1.12) \quad f(h_n|h_1, \dots, h_{n-1}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_n^2}{2\sigma_n^2}}.$$

Kako je $\sigma_n \in M(\mathcal{F}_{n-1})$, vrednosti (σ_n^2) su poznate pa se n -dimenzionalna gustina $f_{\theta,n}$ vektora $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)'$ može napisati kao

$$f_{\theta,n}(h_1, \dots, h_n) = f_{\theta,n-1}(h_1, \dots, h_{n-1}) f(h_n|h_1, \dots, h_{n-1}).$$

Sada, sukcesivnom primenom ove jednakosti i (2.1.12), imamo

$$f_{\theta,n}(h_1, \dots, h_n) = (2\pi)^{-n/2} \prod_{t=p+1}^n \sigma_t^{-1} e^{-h_t^2/2\sigma_t^2}$$

odakle se dobija *logaritam funkcije verodostojnosti*

$$(2.1.13) \quad L_n(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^n \left(\ln \sigma_t^2 + \frac{h_t^2}{\sigma_t^2} \right).$$

Očito, funkcija $L_n(\theta)$ zavisi od θ samo preko vrednosti volatilnosti σ_t^2 , pa možemo definisati statistiku $\hat{\sigma}_t^2$ za koju (2.1.13) dostiže maksimum. Na osnovu

$$\frac{\partial L_n(\theta)}{\partial \sigma_t^2} \equiv -\frac{1}{2\sigma_t^2} \left(1 - \frac{h_t^2}{\sigma_t^2} \right) = 0$$

dobija se UMV-ocena volatilnosti

$$(2.1.14) \quad \hat{\sigma}_t^2 = h_t^2, \quad t \geq p+1,$$

pa se dalje ocenjivanje θ vrši na sledeći način.

Ako je θ_0 "prava" vrednost parametra, niz ocena $\hat{\theta}_n$ može se posmatrati kao vrednost koja minimizira funkciju:

$$(2.1.15) \quad Q_n(\theta) = \sum_{t=p+1}^n (\hat{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2)^2 = \sum_{t=p+1}^n \left(h_t^2 - \alpha_0 - \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{t-j}^2 \right)^2.$$

⁴Koristimo isti način skraćivanja engleskog termina *QMLE (Quasi Maximum Likelihood Estimation) method*.

Na taj način, ocene parametra θ dobijaju se rešavanjem sistema jednačina

$$\frac{\partial Q_n(\theta)}{\partial \alpha_j} = 0, \quad 0 \leq j \leq p$$

ili, u razvijenom obliku,

$$\begin{aligned} (n-p)\alpha_0 + \alpha_1 \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \sum_{t=p+1}^n h_{t-p}^2 &= \sum_{t=p+1}^n h_t^2 \\ \alpha_0 \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^2 + \alpha_1 \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^4 + \dots + \alpha_p \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^2 h_{t-p}^2 &= \sum_{t=p+1}^n h_t^2 h_{t-1}^2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_0 \sum_{t=p+1}^n h_{t-p}^2 + \alpha_1 \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^2 h_{t-p}^2 + \dots + \alpha_p \sum_{t=p+1}^n h_{t-p}^4 &= \sum_{t=p+1}^n h_t^2 h_{t-p}^2. \end{aligned}$$

Kako je $\sigma_t^2 = E(h_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})$, ocena

$$\hat{\theta}_n = \min_{\theta \in \Theta} Q_n(\theta) = \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta)$$

jeste niz UMV-ocena, ali, s druge strane, predstavlja i ocenu dobijenu po metodu *uslovnih najmanjih kvadrata* (*conditional least squares*), o kome je dat iscrpan prikaz u [36]. Koristeći ove činjenice, analiziraćemo sada asimptotska svojstva dobijenih ocena.

Teorema 2.1.3. (Stojanović, Popović) *Ako je, za proizvoljno $n \in D$, zadovoljen uslov $\hat{\theta}_n \in \Theta$, onda je niz $(\hat{\theta}_n)$ strogo postojan i asimptotski normalan niz ocena parametra θ .*

Dokaz. Neko je θ_0 prava vrednost nepoznatog parametra θ . Posmatrajmo niz

$$v_t = h_t^2 - \sigma_t^2, \quad t = 1, \dots, n,$$

za koji, očito, važi

$$E(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(h_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - \sigma_t^2 = 0,$$

tj. (v_t) je martingalni priraštaj, pa stoga i nekorelirani niz slučajnih veličina (videti deo 1.3.1). Štaviše,

$$h_t^2 = \sigma_t^2 + v_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{t-j}^2 + v_t$$

predstavlja autoregresivnu vremensku seriju sa negausovskim "šumom" (v_t).

Koristeći ovu reprezentaciju možemo sada odrediti spektralnu gustinu niza h_t^2

$$f(\omega) = \frac{Var(v_t)}{2\pi} \prod_{j=1}^p \frac{1}{1 - 2\lambda_j \cos \omega + \lambda_j^2}$$

odakle je

$$f(0) = \frac{Var(v_t)}{2\pi} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(1 - \lambda_j)^2}.$$

Kako je $|\lambda_j| < 1$ za sve $\theta \in \Theta$, funkcija $f(\omega)$ je neprekidna u tački $\omega = 0$. Stoga (h_t^2), kao i (v_t), jesu ergodični i stacionarni nizovi slučajnih veličina.

S druge strane, primenom Taylor-ovog razvoja funkcije $\partial Q_n / \partial \theta$ u okolini $\theta = \theta_0$ imamo

$$\frac{\partial Q_n(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial Q_n(\theta_0)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 Q_n(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \cdot (\theta - \theta_0) + o(\theta - \theta_0)$$

odakle, zamenom $\theta = \hat{\theta}_n$ i koristeći da je $\partial Q_n(\hat{\theta}_n) / \partial \theta = 0$ imamo

$$(2.1.16) \quad \hat{\theta}_n - \theta_0 = - \left[\frac{\partial^2 Q_n(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]^{-1} \frac{\partial Q_n(\theta_0)}{\partial \theta} + o(\hat{\theta}_n - \theta_0).$$

Ako sada primenimo ergodičku teoremu na nizove (v_t) i (h_t^2) dobijamo skoro izvesnu konvergenciju

$$\frac{1}{-2(n-p)} \frac{\partial Q_n(\theta_0)}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n v_t \\ \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n v_t h_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n v_t h_{t-p}^2 \end{bmatrix} \rightarrow 0 \quad \text{kada } n \rightarrow \infty$$

kao i

$$2(n-p) \left[\frac{\partial^2 Q_n(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^2 & \cdots & \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n h_{t-p}^2 \\ \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^2 & \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^4 & \cdots & \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^2 h_{t-p}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n h_{t-p}^2 & \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n h_{t-1}^2 h_{t-p}^2 & \cdots & \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^n h_{t-p}^4 \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \Gamma^{-1}$$

pri čemu moment-matrica

$$\Gamma = E(\mathbf{h}_t \mathbf{h}_t'), \quad \mathbf{h}_t = (1, h_{t-1}^2, \dots, h_{t-p}^2)'$$

ne zavisi od t za sve θ koji zadovoljavaju uslove slabe stacionarnosti, odnosno sve $\theta \in \Theta$.

Gore dobijene konvergencije daju, opet, skoro izvesnu konvergenciju

$$\hat{\theta}_n - \theta_0 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

tj. ocena ($\hat{\theta}_n$) je zaista strogo postojan niz ocena za θ .

Sada pokazujemo asimptotsku normalnost za ($\hat{\theta}_n$). Koristeći reprezentaciju (2.1.16) možemo pisati

$$\sqrt{n-p} (\hat{\theta}_n - \theta_0) = A_n^{-1} M_n$$

gde je

$$A_n = \frac{1}{2(n-p)} \cdot \frac{\partial^2 Q_n(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'}, \quad M_n = \frac{-1}{2\sqrt{n-p}} \cdot \frac{\partial Q_n(\theta_0)}{\partial \theta}.$$

Za proizvoljan nenula vektor $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_p)' \in \mathbb{R}^{p+1}$ niz

$$\sqrt{n-p} \mathbf{c}' M_n = \sum_{t=p+1}^n v_t (c_0 + \sum_{j=1}^p c_j h_{t-j}^2)$$

jestе martingal pa, primenom centralne granične teoreme za martingale (Billingsley [4]), imamo

$$\mathbf{c}' M_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbf{c}' \Lambda \mathbf{c})$$

gde je

$$\Lambda = E(\mathbf{g}_t \mathbf{g}_t'), \quad \mathbf{g}_t = v_t (1, h_{t-1}^2, \dots, h_{t-p}^2)'$$

i Λ ne zavisi od t .

Koristeći ovu konvergenciju i Cramer-Wald-ovu dekompoziciju, dobijamo

$$M_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Lambda),$$

a kako važi $A_n^{-1} \rightarrow \Gamma^{-1}$ kada $n \rightarrow \infty$, naravno, u skoro izvesnom smislu, dokaz je ovim završen

$$\sqrt{n-p} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Gamma^{-1} \Lambda \Gamma^{-1}).$$

□

Gore navedeni metod ocenjivanja može se jednostavno primeniti u analizi empirijskih finansijskih nizova. Kao ilustracija, u narednoj tabeli prikazani su rezultati ocene ARCH-modela na osnovu empirijskog niza - cene zlata na svetskom tržištu, a na osnovu baze podataka London Fix (period 2001-2003):

p	Jednačine modela ($h_n = \sigma_n \varepsilon_n$)
1	$\sigma_n^2 = 7,48 \cdot 10^{-5} + 0,108h_{n-1}^2$
2	$\sigma_n^2 = 6,95 \cdot 10^{-5} + 0,101h_{n-1}^2 + 0,067h_{n-2}^2$
3	$\sigma_n^2 = 6,55 \cdot 10^{-5} + 0,098h_{n-1}^2 + 0,06h_{n-2}^2 + 0,061h_{n-3}^2$
4	$\sigma_n^2 = 6,26 \cdot 10^{-5} + 0,095h_{n-1}^2 + 0,058h_{n-2}^2 + 0,056h_{n-3}^2 + 0,046h_{n-4}^2$

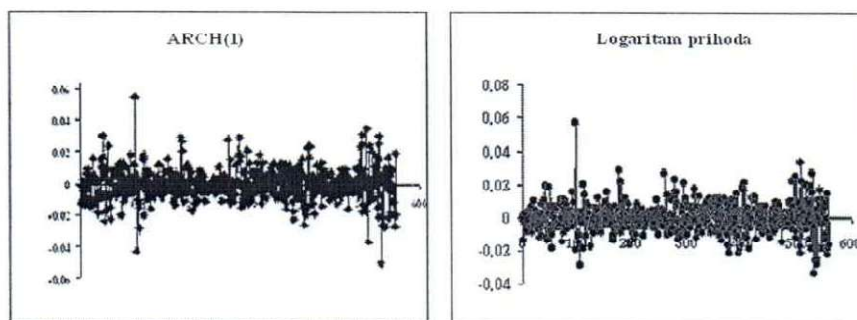
Lako je uočiti da dobijeni rezultati ocenjivanja ARCH-modela pokazuju visok stepen korelacije sa empirijskim podacima, o čemu svedoči i empirijski koeficijent proste linearne korelacije koji u skoro svim slučajevima iznosi (približno) 0,986. Takođe, na slici 2.1 može se i vizuelno uporediti stepen slaganja empirijskih i modeliranih podataka.

Ipak, mnogi autori ukazuju na nedostatke ovakvog načina ocenjivanja koji posebno dolaze do izražaja kod "malih" uzoraka (videti, na primer, Hwang i Pereira [32]), a posledica su spore konvergencije dobijenih ocena ka istinskoj vrednosti parametra. Takođe, egzistencija i jedinstvenost ocena, koja ovde nije analizirana, pokazuje se, zavisi od pretpostavki o kompaktnosti parametarskog skupa Θ . Ovaj uslov, kao i u slučaju standardnih autoregresivnih procesa, nije uvek zadovoljen.

Najzad, UMV-ocena volatilnog niza opisana jednakošću (2.1.14), često je nepogodna za ocenjivanje jer srednje-kvadratna greška ocene

$$E(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_n^2)^2 = E(h_n^2 - \sigma_n^2)^2 = E(h_n^4)$$

može biti dosta velika. Zato se u savremenim istraživanjima sve češće javljaju noviji pravci u ocenjivanju i formiranju ARCH-modela, ali i ostalih srodnih tipova vremenskih serija. Kao interesantnije izdvajamo [43] i [33] gde se, različitim postupcima, dobijaju ocenjene vrednosti parametara ARCH-modela koje pokazuju znatno bržu konvergenciju od, recimo, standardnih UMV-ocena koje je dobio Engle.



Slika 2.1: Usporedni grafikoni modela ARCH(1) i logaritama prihoda cene zlata.

2.1.3 Ekstrapolacija i primena modela

U ovom delu posmatramo problem predviđanja kretanja cena u budućim vremenskim trenucima, smatrajući da je niz logaritama prihoda (h_n) poreden ARCH(p) modelu. Pretpostavimo da je h_{n+m} vrednost u momentu $n+m > n$ za koju treba odrediti prognozu na osnovu poznatih vrednosti, tj. realizacije h_1, \dots, h_n . Kako je (h_n) niz nekoreliranih slučajnih veličina to će optimalna ocena u srednje-kvadratnom smislu biti trivijalna

$$\hat{h}_{n+m} = E(h_{n+m} | \mathcal{F}_n) = 0,$$

pa je od interesa tražiti optimalne ocene u klasi (nelinearnih) funkcija od h_{n+m} , npr. h_{n+m}^2 . Tada, imamo

$$\hat{h}_{n+m}^2 = E(h_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n) = E(\sigma_{n+m}^2 | \mathcal{F}_n) = \hat{\sigma}_{n+m}^2$$

pa se ekstrapolacija budućih vrednosti h_{n+m}^2 svodi na prognozu volatilnog niza σ_{n+m}^2 .

U opštem slučaju, koristeći reprezentaciju (2.1.6), možemo pisati

$$Y_{n+m} = \left(I + \sum_{k=1}^{m-1} A_{n+m-1} \cdots A_{n+m-k} \right) B + \left(\prod_{k=1}^m A_{n+m-k} \right) Y_n$$

pa se optimalna ocena za Y_{n+m} dobija na sledeći način

$$(2.1.17) \quad \hat{Y}_{n+m} = E(Y_{n+m} | \mathcal{F}_n) = (I - M^m)(I - M)^{-1} B + M^m Y_n.$$

Tada, u najjednostavnijem ARCH(1) slučaju, jednačina (2.1.17) omogućava nalaženje ocene volatilnosti

$$\hat{\sigma}_{n+m} = \alpha_0 \frac{1 - \alpha_1^m}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^m h_n^2$$

koja se može koristiti za rešavanje praktičnih problema. Naime, neka je

$$S_{n+m} = S_n e^{h_{n+1} + \cdots + h_{n+m}}$$

buduća vrednost cene (S_n) u momentu $n + m$. Ako niz (h_n) u graničnom smislu ima normalnu raspodelu⁵ onda se, na osnovu

$$E \left[(h_{n+1} + \cdots + h_{n+m})^2 | \mathcal{F}_n \right] = \sum_{k=1}^m E(h_{n+k}^2 | \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^m \hat{\sigma}_{n+k}^2,$$

dobija $(1 - \alpha)\%$ -interval poverenja buduće cene S_{n+m} oblika

$$(2.1.18) \quad S_n e^{-z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \hat{\sigma}_{n+k}^2}} \leq S_{n+m} \leq S_n e^{z_{\alpha/2} \sqrt{\sum_{k=1}^m \hat{\sigma}_{n+k}^2}},$$

gde je

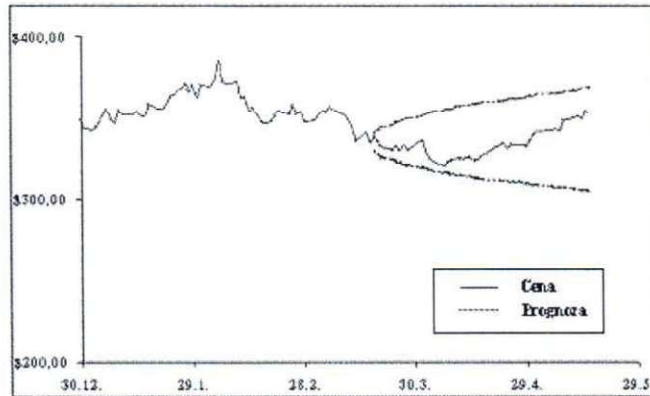
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_{\alpha/2}} e^{-x^2/2} dx = 1 - \alpha/2.$$

⁵Takva pretpostavka je opravdana primenom centralne granične teoreme.

Na slici 2.2 prikazana je primena ovakvog postupka. Dinamika kretanja cene zlata u toku 2003. godine data je zajedno sa 90%-intervalom poverenja oblika (2.1.18). Ocene su dobijene na osnovu ARCH(1)-modela

$$\sigma_n^2 = 7,478 \cdot 10^{-5} + 0,108 \cdot h_{n-1}^2$$

koji je formiran na način opisan u prethodnom odeljku. Iako, teoretski posmatrano, gore opisane intervalne ocene sadrže određene slabosti, sasvim su primenljive jer, kao što vidimo na slici, dinamika kretanja cene zlata nalazi se u granicama intervala. Naravno, one su pogodnije za "bliže" vremenske prognoze jer, zbog uvećanja sume $\sum_{k=1}^m \hat{\sigma}_{n+k}^2$ sa povećavanjem vremenske distance, interval postaje dosta širok i neprecizan.



Slika 2.2: Ekstrapolacija kretanja cene zlata na osnovu intervala poverenja.

2.2 GARCH-modeli

Uslovno-gausovski modeli tipa ARCH dali su objašnjenje celom nizu pojava vezanim za ponašanje finansijskih indeksa (klasternost, izduženost gustina raspodele itd.). Njihova uspešnost u konkretnim primenama imala je za posledicu stvaranje novih, složenijih modela koji omogućavaju opisivanje i drugih efekata otkrivenih metodama statističke analize. Zato, pored ARCH

modela, danas postoji ogroman broj tzv. uopštenih ARCH modela koji se, u većoj ili manjoj meri, zasnivaju na sličnim idejama i pretpostavkama.

Istorijski posmatrano, prvo uopštavanje ARCH-modela uvedeno je od strane Tima Bollersleva [5], koji je 1986. godine definisao uopšteni ARCH model, sa dva parametra p i q , kraće, GARCH(p, q) model.⁶ U njemu, kao i obično, uzima se

$$(2.2.1) \quad h_n = \sigma_n \varepsilon_n$$

ali volatilni niz (σ_n) rekurentno zavisi i od svojih prethodnih realizacija, tj. opisan je relacijom

$$(2.2.2) \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{n-j}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{n-k}^2$$

gde je $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j, \beta_k \geq 0$.

Osnovna prednost ovakvog modela, kao što ćemo videti, jeste u tome da pri statističkoj obradi podataka i njihovom praktičnom modeliranju modeliranju, modeli tipa GARCH, za razliku od ARCH modela, daju zadovoljavajuće ocene i dobro prilagođavanje realnim podacima već za male vrednosti p i q . Uobičajenu analizu ovih modela izvršićemo, kao i ranije, ispitivanjem osnovnih karakteristika (matematičko očekivanje, disperzija i korelaciona funkcija). Kako je, na isti način kao i u slučaju modela ARCH,

$$(2.2.3) \quad E(h_n) = E[\sigma_n E(\varepsilon_n | \mathcal{F}_{n-1})] = 0$$

kao i

$$(2.2.4) \quad Var(h_n) = E(h_n^2) = E[\sigma_n^2 E(\varepsilon_n^2 | \mathcal{F}_{n-1})] = E(\sigma_n^2)$$

to $h = (h_n)$ predstavlja niz nekoreliranih slučajnih veličina i, kao takav, nije od velikog interesa u daljim ispitivanjima. Stoga će opet značajne karakteristike ovog modela dati niz (h_n^2), za koji ćemo najpre odrediti uslove pod kojima važi stacionarnost, u slabom i strogom smislu.

⁶Generalized AutoRegressive Conditional Heteroscedstic

2.2.1 Stacionarnost

Posmatrajmo GARCH(p, q) model definisan jednakostima (2.2.1) i (2.2.2). Kao i obično, ovde je od interesa slučaj kada je (h_n^2) stacionaran niz slučajnih veličina. Slično ARCH modelu, stacionarnost modela GARCH u tesnoj je vezi sa njegovom reprezentacijom u obliku stohastičke diferencne jednačine I reda

$$(2.2.5) \quad Y_{n+1} = A_n Y_n + B$$

gde je

$$Y_n = (\sigma_n^2, \dots, \sigma_{n-q+1}^2, h_{n-1}^2, \dots, h_{n-p+1}^2)'$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \varepsilon_n^2 + \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_q & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon_n^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = (\alpha_0, 0, \dots, 0)'$$

pri čemu je $n \geq \max\{p, q\}$.

Prateći zaključke iz prethodnog dela, definišimo i ovde karakteristični polinom

$$(2.2.6) \quad P(\lambda) = \lambda^M - \sum_{k=1}^M \Gamma_k \lambda^{M-k}$$

gde je $M = \max\{p, q\}$, i

$$\Gamma_k = \begin{cases} \alpha_k + \beta_k, & 0 < k \leq \min\{p, q\}; \\ \alpha_k, & q < k \leq p; \\ \beta_k, & p < k \leq q. \end{cases}$$

Ako su $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ koreni polinoma $P(\lambda)$, onda će stacionarnost niza (h_n^2) , kao i u slučaju ARCH modela, zavisiti od njihove veličine. Naime, važi:

Teorema 2.2.1. *Slučajni niz (h_n^2) opisan stohastičkim modelom (2.2.1) i (2.2.2) je stacionaran (u slabom smislu) akko koreni $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ karakteristične jednačine $P(\lambda) = 0$ zadovoljavaju uslov*

$$(2.2.7) \quad |\lambda_k| < 1, \quad k = 1, \dots, M$$

odnosno, ekvivalentno,

$$(2.2.8) \quad \sum_{k=1}^M \Gamma_k = \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1.$$

Tada je

$$(2.2.9) \quad E(h_n^2) = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j \right)^{-1}$$

dok korelaciona funkcija $\rho(k)$ zadovoljava jednačinu

$$(2.2.10) \quad \rho(k) = \sum_{j=1}^M \Gamma_k \rho(k-j), \quad k \geq M$$

sa početnim uslovima

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(k) - \sum_{j=1}^M \Gamma_k \rho(k-j) = 0, \quad 0 < k < M.$$

Dokaz. Na osnovu jednakosti (2.2.2) i (2.2.4) dobija se rekurentna relacija

$$E(h_n^2) = E(\sigma_n^2) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^M \Gamma_k E(h_{n-k}^2)$$

koja se, smenom $\xi_n = E(h_n^2)$, svodi na diferencnu jednačinu reda M

$$\xi_n - \sum_{k=1}^M \Gamma_k \xi_{n-k} = \alpha_0$$

sa karakterističnim polinomom $P(\lambda)$.

Jedinstveno rešenje ove jednačine ($\xi_n \equiv const$), kao što smo pokazali u Teoremi 2.1.1, postoji akko za korene polinoma $P(\lambda)$ važi uslov (2.2.7), odnosno (2.2.8). Ovo rešenje određeno je izrazom

$$E(h_n^2) = \alpha_0 \left(1 - \sum_{k=1}^M \Gamma_k \right)^{-1}$$

i, jasno, predstavlja jednakost (2.2.9).

Na sličan način kao u teoremi 2.1.1, korelaciona funkcija $\rho(k)$ dobija se na osnovu izraza

$$\rho(k) = \frac{R(k) - E(h_n^2)^2}{R(0) - E(h_n^2)^2}, \quad k \geq 0$$

pri čemu je

$$R(k) = E(h_n^2 h_{n+k}^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{j=1}^M \Gamma_j} + \sum_{j=1}^M \Gamma_j R(k-j), \quad R(0) = E(h_n^4).$$

□

Na kraju, ukazaćemo kao i kod modela tipa ARCH, na potrebne i dovoljne uslove stroge stacionarnosti GARCH modela, koji kasnije omogućavaju njegovu dalju primenu.

Sledeće tvrđenje, koje predstavlja direktnu primenu rezultata koji su pokazani u prethodnom, ARCH slučaju i mogu se naći, recimo, u [41], odnosi se na potrebne i dovoljne uslove stroge stacionarnosti GARCH(p, q) modela.

Teorema 2.2.2. *Neka je GARCH model definisan jednakostima (2.2.1) i (2.2.2). Stohastička diferencna jednačina (2.2.5) ima jedinstveno, strogo stacionarno rešenje oblika*

$$(2.2.11) \quad Y_n = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1} \dots A_{n-k} \right) B, \quad n \in D.$$

akko važi

$$\gamma = \inf_{n \in D} \left\{ n^{-1} E(\ln \|A_1 \dots A_n\|) \right\} < 0.$$

2.2.2 ARCH(∞) reprezentacija modela

Analogno modelima ARCH tipa, GARCH modeli se mogu prikazati u linearnom obliku, čime je donekle objašnjena njihova međusobna povezanost. Ako, kao i u slučaju ARCH modela, stavimo

$$v_n = h_n^2 - \sigma_n^2,$$

onda je

$$h_n^2 = \sigma_n^2 + v_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^M \Gamma_k h_{n-k}^2 + v_n - \sum_{j=1}^q \beta_j v_{n-j},$$

tj. GARCH(p, q) model, preciznije, niz kvadrata logaritama prihoda (h_n^2), prikazali smo u obliku linearnog ARMA procesa, sa negausovskim šumom (v_n).

Ovakva reprezentacija ukazuje na mogućnost primene identičnih metoda u daljoj karakterizaciji GARCH procesa kao i u slučaju linearnih modela. Kao ilustraciju, opisaćemo uslove pod kojima GARCH(p, q) model ima reprezentaciju u obliku beskonačnog ARCH procesa. U tu svrhu, posmatraćemo novu karakterističnu jednačinu

$$(2.2.12) \quad \lambda^q - \sum_{k=1}^q \beta_k \lambda^{q-k} = 0$$

definisane koeficijentima članova volatilnog niza. Ako su r_1, \dots, r_q koreni ove jednačine, onda važi:

Teorema 2.2.3. *Ako koreni jednačine (2.2.12) zadovoljavaju uslov*

$$|r_k| < 1, \quad k = 1, \dots, q$$

onda se volatilni niz (σ_n^2) može napisati u obliku sume

$$(2.2.13) \quad \sigma_n^2 = \delta_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j h_{n-j}^2$$

gde je

$$\delta_0 = \alpha_0 \left(1 - \sum_{k=1}^q \beta_k\right)^{-1}, \quad \delta_j = \begin{cases} \alpha_j + \sum_{k=1}^{\min(j,q)} \beta_k \delta_{j-k}, & 0 < j \leq p; \\ \sum_{k=1}^{\min(j,q)} \beta_k \delta_{j-k}, & j > p. \end{cases}$$

Dokaz. Na osnovu jednakosti (2.2.2), koju možemo napisati u obliku

$$\sigma_n^2 - \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{n-k}^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{n-j}^2$$

i efektivnim postupkom, odnosno razvojem niza (σ_n^2) u obliku beskonačne sume ponderisanih kvadrata logaritama prihoda oblika (2.2.13) dobijamo sledeći razvoj

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 - \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{n-k}^2 &= \delta_0 \left(1 - \sum_{k=1}^q \beta_k\right) + \sum_{j=1}^q \left(\delta_j - \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \delta_{j-k}\right) h_{n-j}^2 + \\ &+ \sum_{j=q+1}^{\infty} \left(\delta_j - \sum_{k=1}^q \beta_k \delta_{j-k}\right) h_{n-j}^2. \end{aligned}$$

Odavde, izjednačavanjem koeficijenata uz h_{n-j}^2 , dobija se tvrđenje teoreme. Naravno, razvoj (2.2.13) biće opravdan ako je red konvergentan (u smislu neke od stohastičkih konvergencija). Kako, za $j > \max\{p, q\}$, niz (δ_j) zadovoljava diferencnu jednačinu

$$\delta_j - \sum_{k=1}^q \beta_k \delta_{j-k} = 0$$

sa opštim rešenjem

$$\delta_j = c_1 \omega_1 + \dots + c_q \omega_q,$$

gde je $c_k \in \mathbb{R}$, $\omega_k = j^{m_k-1} r_k^j$, a m_k višestrukost korena r_k , to, na osnovu pretpostavke teoreme, postoji $\lambda \in (0, 1)$ takvo da je $\max_{1 \leq k \leq q} |r_k| \leq \lambda$. Tada je

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\delta_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^q |c_k| |\omega_k| \right) \leq q \left(\max_{1 \leq k \leq q} |c_k| \right) \sum_{j=1}^{\infty} j^q \lambda^j < \infty.$$

Dakle, red $\sum_{j=1}^{\infty} \delta_j$ je apsolutno konvergentan, a, s druge strane, niz $E(h_{n-j}^2)$ je na osnovu (2.2.9) konstantan, pa stoga i uniformno ograničen, te sledi konvergencija reda (2.2.13) u srednje kvadratnom smislu⁷. \square

2.2.3 Ocene parametara. Primena GARCH-modela

Gotovo sva izlaganja navedena u prethodnom poglavlju, koja se odnose na ocenjivanje i primene modela ARCH, mogu se uopštiti i primeniti i u slučaju GARCH modela. Tako se na primer UMV-ocenjivanje parametara θ , kao i kod modela ARCH, vrši na osnovu iste funkcije verodostojnosti

$$(2.2.14) \quad L_n(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\ln \sigma_t^2 + \frac{h_t^2}{\sigma_t^2} \right)$$

s tom razlikom što se volatilni niz (σ_t^2) opisuje na osnovu (2.2.2), tj. rekurentno zavisi i od svojih prethodnih vrednosti $\sigma_{t-1}^2, \dots, \sigma_{t-q}^2$, $t \geq q$. Zato se sistem jednačina

$$\frac{\partial L_n}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \frac{\partial L_n}{\partial \beta_j} = 0, \quad (0 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)$$

ne može eksplicitno rešiti po θ , pa se u praksi obično koriste neki od iterativnih postupaka za aproksimativno nalaženje ocenjenih vrednosti. Osnovna ideja tih metoda jeste formiranje niza $\theta = (\theta_k)$, $k \geq 0$ koji će konvergirati ka optimalnoj vrednosti parametara, za koju funkcija verodostojnosti dostiže svoj maksimum.

Jedan od najpoznatijih metoda numeričkog određivanja parametara jeste *Newton-Raphson-ov iterativni metod* koji se zasniva na sledećim pretpostavkama.

Neka je θ_0 inicijalna, početna vrednost nepoznatog parametara $\theta \in \mathbb{R}^m$, $m = p + q + 1$. Uočimo *gradijentni vektor* funkcije verodostojnosti

$$g(\theta_0) = \left. \frac{\partial L_n(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0}$$

⁷Reč je o poznatoj teoremi čiji se dokaz može naći, recimo, u [25]. Naglasimo da se, slično linearnim ARMA modelima, može pokazati i obrat navedenog tvrdjenja.

kao i tzv. Hessian

$$H(\theta_0) = - \left. \frac{\partial^2 L_n(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta=\theta_0}$$

tj. matricu sa negativnim vrednostima parcijalnih izvoda drugog reda funkcije $L_n(\theta)$. Na osnovu Tejlorovog razvoja ove funkcije u okolini tačke $\theta = \theta_0$ imamo

$$L_n(\theta) \approx L_n(\theta_0) + g(\theta_0)'(\theta - \theta_0) - \frac{1}{2} [(\theta - \theta_0)' H(\theta_0)(\theta - \theta_0)]$$

odakle, diferenciranjem po θ dobijamo

$$\frac{\partial L_n(\theta)}{\partial \theta} = g(\theta_0) - H(\theta_0)(\theta - \theta_0) + o(\|\theta - \theta_0\|^2).$$

Ako je $\theta = \hat{\theta}$ optimalna vrednost parametra za koju funkcija $L_n(\theta)$ dostiže maksimum, biće

$$\frac{\partial L_n(\hat{\theta})}{\partial \theta} = 0,$$

odnosno, zamenom u poslednju jednakost,

$$\hat{\theta} \approx \theta_0 + [H(\theta_0)]^{-1} g(\theta_0).$$

Poslednji izraz sugerise sledeći iterativni metod nalaženja parametra $\hat{\theta}$

$$(2.2.15) \quad \theta_{k+1} = \theta_k + [H(\theta_k)]^{-1} g(\theta_k), \quad k \geq 0$$

za koji se, pod izvesnim uslovima, može pokazati konvergencija

$$\theta_k \rightarrow \hat{\theta}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Naravno, niz (θ_k) , sa stohastičkog stanovišta, predstavlja niz slučajnih veličina, pa je neophodno opisati uslove koji obezbeđuju konvergenciju u nekom od poznatih stohastičkih oblika. Navešćemo sada jedan od rezultata koji su, pri navedenim pretpostavkama, V. Stojanović i B. Popović pokazali u [57].

Teorema 2.2.4. (Stojanović, Popović [57]) *Neka je $\theta = \hat{\theta}$ jedinstveno rešenje jednačine verodostojnosti*

$$g(\theta) = \frac{\partial L_n(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

i matrica $H^{-1}(\theta)$ skoro izvesno uniformno ograničena na kompaktu $K \subseteq \mathbb{R}^m$, tj. postoji konačna brojeva konstanta $c > 0$ takva da je

$$P\left\{\sup_{\theta \in K} \|H^{-1}(\theta)\| \leq c\right\} = 1.$$

Tada je ispunjen uslov skoro izvesne konvergencije iterativnog metoda (2.2.15), odnosno važi

$$P\left\{\theta_k \rightarrow \hat{\theta}, k \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

Dokaz. Na osnovu Tejlorove formule, primenjene na razvoj funkcije $g(\theta)$ u okolini tačke $\theta = \hat{\theta}$, možemo napisati:

$$g(\hat{\theta}) = g(\theta) - H(\theta)(\hat{\theta} - \theta) + \xi(\hat{\theta}, \theta) = 0$$

gde je, skoro izvesno,

$$\|\xi(\hat{\theta}, \theta)\| \leq r \|\hat{\theta} - \theta\|, \quad 0 \leq r < \frac{1}{c}, \quad \theta \in K.$$

Ako operator $T : R^m \rightarrow R^m$ definišemo na sledeći način

$$T(\theta) = \theta + H^{-1}(\theta) g(\theta)$$

onda je

$$T(\theta) - \hat{\theta} = H^{-1}(\theta)[g(\theta) - H(\theta)(\hat{\theta} - \theta)] = -H^{-1}(\theta) \xi(\hat{\theta}, \theta)$$

pa je, konačno,

$$\|T(\theta) - \hat{\theta}\| \leq q \|\hat{\theta} - \theta\|$$

pri čemu je $q = rc < 1$. Kako je, na osnovu (2.2.15),

$$\theta_k = T(\theta_{k-1}), \quad k \geq 1,$$

poslednja nejednakost može se napisati u obliku

$$\|\theta_k - \hat{\theta}\| \leq q^k \|\theta_0 - \hat{\theta}\|$$

odakle se, prelaskom na graničnu vrednost kada $k \rightarrow \infty$, dobija tvrđenje teoreme. \square

Gore izložene rezultate primenićemo sada na slučaj GARCH modela, pri čemu, zbog jednostavnosti, pretpostavimo da je reč o njegovom najjednostavnijem obliku, modelu GARCH(1,1). Kako je tada

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

odnosno $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)'$, funkcija verodostojnosti daje sledeće vrednosti gradijenta

$$g(\theta) = \left[\sum_{t=1}^n A_t \quad \sum_{t=1}^n A_t h_{t-1}^2 \quad \sum_{t=1}^n A_t \sigma_{t-1}^2 \right]'$$

gde je $A_t = \frac{h_t^2 - \sigma_t^2}{2\sigma_t^4}$, $t = 1, \dots, n$. S druge strane, Hessian predstavlja matrica

$$H(\theta) = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^n B_t & \sum_{t=1}^n B_t h_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n B_t \sigma_{t-1}^2 \\ \sum_{t=1}^n B_t h_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n B_t h_{t-1}^4 & \sum_{t=1}^n B_t h_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 \\ \sum_{t=1}^n B_t \sigma_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n B_t h_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2 & \sum_{t=1}^n B_t \sigma_{t-1}^4 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $B_t = \frac{\sigma_t^2 - 2h_t^2}{2\sigma_t^6}$, $t = 1, \dots, n$. Članovi niza B_t , kao funkcije parametra θ , očito su skoro izvesno neprekidne, pa je, stoga, ispunjen uslov uniformne ograničenosti Hessian-a na nekom kompaktu $\Theta \subseteq \mathbb{R}^3$. Tada, primenom iterativnog metoda (2.2.15), sa određenom tačnošću, dobijaju se UMV-ocene koeficijenata $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$. Naravno, poseban problem predstavlja izbor početnih vrednosti ovih koeficijenta koji bi trebalo da omoguće početak (konvergentne) iteracije. Tako možemo, na primer, uzeti koeficijente ARCH(1) modela⁸ koje smo prethodno odredili standardnim UMV-metodom, opisanim u prethodnom delu.

Kao ilustracija primene takvog postupka formiranja GARCH(1,1) modela, nad već pomenutom empirijskom vremenskom serijom - cenom zlata na svetskom tržištu, ocenjene vrednosti parametara GARCH(1,1) modela prikazane su u tabeli 2.1. Kao što se može lako uočiti, iterativni proces pokazuje znake konvergencije, pa kao ocenjene vrednosti parametara modela

⁸Biće naravno $\beta_1 = 0$.

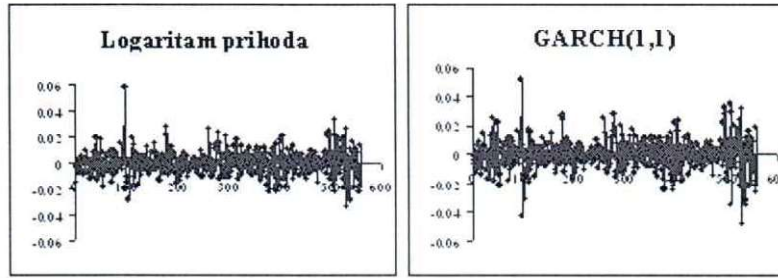
možemo uzeti poslednju iteraciju, tj. formirati GARCH(1,1) model

$$h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad \sigma_n^2 = 2,505 \cdot 10^{-5} + 0,100 h_{n-1}^2 + 0,596 \sigma_{n-1}^2.$$

Iteracija	Ocene za $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1)$		
	α_0	α_1	β_1
0	$7,478 \cdot 10^{-5}$	0,108	0,000
1	$1,857 \cdot 10^{-5}$	0,133	0,600
2	$2,283 \cdot 10^{-5}$	0,098	0,666
3	$1,528 \cdot 10^{-5}$	0,100	0,694
4	$2,328 \cdot 10^{-5}$	0,099	0,621
5	$2,420 \cdot 10^{-5}$	0,098	0,607
6	$2,483 \cdot 10^{-5}$	0,099	0,599
7	$2,502 \cdot 10^{-5}$	0,099	0,596
8	$2,511 \cdot 10^{-5}$	0,100	0,596
9	$2,510 \cdot 10^{-5}$	0,100	0,597
10	$2,505 \cdot 10^{-5}$	0,099	0,592
11	$2,506 \cdot 10^{-5}$	0,100	0,594
12	$2,505 \cdot 10^{-5}$	0,100	0,595
13	$2,505 \cdot 10^{-5}$	0,100	0,596
14	$2,504 \cdot 10^{-5}$	0,099	0,596
15	$2,505 \cdot 10^{-5}$	0,100	0,596
16	$2,505 \cdot 10^{-5}$	0,100	0,596

Tabela 2.1: Iterativne vrednosti ocena parametara GARCH(1,1) modela, dobijene na osnovu Newton-Raphson-ovog metoda.

Na isti način kao i kod ARCH modela, ”provera” ovog modela i poređenje sa originalnom vremenskom serijom pokazuje visok stepen slaganja empirijskih vrednosti sa teoretskim, kao što se može uočiti i na slici 2.3. Recimo još samo to da je empirijski koeficijent korelacije dosta visok (98,52%) kao i da dobijeni GARCH-model daje preciznu sliku ponašanja niza logaritama prihoda. Naravno, problemi koji se ovde javljaju a odnose se na veličinu srednje-kvadratne greške i, uopšte, optimalnost dobijenih ocena, identični su kao i u ARCH slučaju.



Slika 2.3: Usporedni grafikoni logaritama prihoda cene zlata i odgovarajućeg GARCH modela.

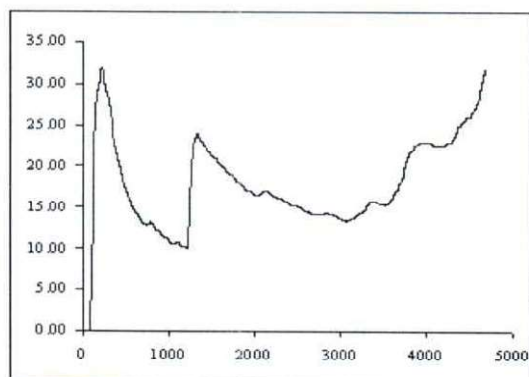
2.3 Split-ARCH model

Modeli ARCH/GARCH tipa dali su objašnjenje nizu pojava vezanih za ponašanje finansijskih indeksa (navodimo, opet, pojavu klasternosti i izduženost gustina raspodele). Ipak, jedan od njihovih osnovnih nedostataka jeste nedovoljno precizno opisivanje "smera" kretanja i veličine volatilnog niza (σ_n). Mnoge analize empirijskih podataka ukazuju na izrazitu nelinearnost u ponašanju empirijske volatilnosti

$$(2.3.1) \quad \hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (h_k - \bar{h}_n)^2}$$

koja se može manifestovati na različite načine. (Kao ilustraciju, na slici 2.4 prikazali smo jednu od čestih situacija: nagli porast empirijske varijanse kao posledicu skoka cene u određenom, relativno kratkom vremenskom periodu.)

Odgovor na rešavanje ovakvih problema dat je u obliku uopštavanja standardnih ARCH/GARCH modela. Posebno ističemo rad Zakoian-a [67] koji, po uzoru na odgovarajuće linearne modele, definiše *pragovne (TGARCH) modele*, kao i Fornarija i Mele-a [20] koji su definisali tzv. *izborni ARCH-model* sa idejom da se vrednost volatilnog niza povećava ili smanjuje u zavisnosti od znaka članova niza (h_n).



Slika 2.4: Empirijska disperzija cene nafte. (Izvor: WTI Posted, Wall Street Journal)

Ovi modeli opisuju, donekle, asimetričnu reakciju uslovne varijanse uzrokovanu naglim promenama cena, ali u osnovi ne mogu precizno odrediti vrednosti koje bi odgovarale veličini promene niza (h_n) kao i same volatilnosti. Zato su u praktičnim primenama moguća znatna odstupanja i razlike teoretskih vrednosti u odnosu na empirijske. Sa osnovnom idejom da se formira model u kome će volatilnost zavisiti od veličine i intenzivnosti promene samog niza (h_n), B. Popović i V. Stojanović u radovima [48] i [49] uvode novi, originalni model uslovne heterogenosti, koji funkcioniše po principu ARCH modela, ali samo za male vrednosti prethodnih realizacija belog šuma. S druge strane, u slučaju naglašeno velikih realizacija on, uvođenjem dodatnih vrednosti volatilnog niza, pravilnije reaguje na nagle i neočekivane skokove u dinamici volatilnosti. Zbog ovakve "podeljene" reakcije, model je nazvan *Split-ARCH* [48].

Split-ARCH model zasnovan je na konkretnoj primeni u ispitivanju empirijskih vremenskih serija i nastao je kao nadgradnja već postojećih, srodnih modela. Osnovna primena zasniva se na opisivanju nelinearnog ponašanja volatilnosti koja je uzrokovana naglim promenama (fluktuacijama) cene. Ove promene utiču na to da i tržište reaguje na sličan način, pa dolazi do većih skokova i u dinamici same volatilnosti. Split-ARCH model stoga ima za zadatak da prati takve skokove i opiše ih na adekvatan način. U narednom delu dajemo definiciju i osnovne karakteristike ovog modela. Zatim, kao i u slučaju prethodno izloženih modela, opisaćemo potrebne i dovoljne uslove

njegove stacionarnosti, u slabom i strogom smislu, kao i specifičan metod ocena njegovih parametara, zasnovan na stratifikaciji posmatranog empirijskog skupa podataka. Na kraju, primena Split-ARCH modela u analizi dinamike nekih empirijskih vremenskih serija izložena je na primeru cene nafte na svetskom tržištu, kao i cene sojine sačme na našem, domaćem tržištu.

2.3.1 Definicija i osnovne karakteristike

U opštem obliku Split-ARCH model definisaćemo jednakošću

$$(2.3.2) \quad h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \quad n \geq 0$$

i rekurentnom relacijom

$$(2.3.3) \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j h_{n-j}^2 + \sum_{k=1}^q f_k(\sigma_{n-k}^2) I(\varepsilon_{n-k}^2 > c), \quad n \geq 0$$

koja, slično stanadardnom modelu tipa GARCH, zavisi od dva parametra p i q .

Uobičajeno, pretpostavljamo nenegativnost koeficijenata $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j \geq 0$, dok će $f_k = f_k(u)$, $u \geq 0$ biti nenegativna, \mathcal{F}_{n-k} merljiva preslikavanja volatilnog niza koja predstavljaju reakciju na naglašeno velike vrednosti niza (ε_n) . Naravno, zadate u ovako opštem obliku, funkcije $f_k(u)$ otežavaju dalja ispitivanja stohastičkih osobina modela. Zato pretpostavljamo da je reč o linearnim funkcijama oblika:

$$(2.3.4) \quad f_k(u) = \beta_0^{(k)} + \beta_1^{(k)} u, \quad k = 1, \dots, q$$

gde je $\beta_0^{(k)}, \beta_1^{(k)} \geq 0$.

S druge strane $c > 0$ jeste tzv. *kritična vrednost reakcije*, tj. nivo koji će odrediti realizacije šuma koje su dovoljno statistički značajne da bi se vrednost prethodne volatilnosti uključila u (2.3.3). Na osnovu činjenice da niz (ε_n^2) poseduje χ_1^2 -raspodelu biće

$$(2.3.5) \quad m_c = P(\varepsilon_n^2 > c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^\infty x^{-1/2} e^{-x/2} dx$$

pa ova jednakost može poslužiti kao polazna osnova za određivanje kritične vrednosti c . Naime, za zadati nivo značajnosti $\alpha : 0 < \alpha < 1$, iz jednakosti

$$m_c = \alpha$$

dobija se vrednost koeficijenta c . Naravno, može se pretpostaviti da je parametar c nepoznat, pa se tada ocenjuje na osnovu uzorka.

2.3.2 Stacionarnost

Izložićemo sada neke od osnovnih činjenica vezanih za stacionarnost Split-ARCH modela, koje će biti od koristi i prilikom ispitivanja asimptotskih osobina ocena njegovih koeficijenata. Sama stacionarnost, potpuno analogno modelima ARCH/GARCH tipa, u tesnoj je vezi sa njegovom reprezentacijom u obliku stohastičke diferencne jednačine I reda:

$$(2.3.6) \quad Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$$

gde je:

$$Y_n = (\sigma_n^2, \dots, \sigma_{n-q+1}^2, h_{n-1}^2, \dots, h_{n-p+1}^2)'$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \varepsilon_n^2 + \beta_1^{(1)} \psi_n(c) & \beta_1^{(2)} \psi_{n-1}(c) & \dots & \beta_1^{(q)} \psi_{n-q+1}(c) & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon_n^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_n = \left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^q \beta_0^{(k)} \psi_{n-k+1}(c), 0, \dots, 0 \right)', \quad \psi_n(c) = I(\varepsilon_n^2 > c),$$

pri čemu je $n \geq \max\{p, q\}$.

Navodimo, sada, tvrđenje koje opisuje potrebne i dovoljne uslove stacionarnosti Split-ARCH modela (u slabom smislu).

Teorema 2.3.1. (Popović, Stojanović [48]) *Neka je Split-ARCH model opisan jednakostima (2.3.2), (2.3.3) i (2.3.4). Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(i) *Polinom*

$$P(\lambda) = \lambda^M - \sum_{j=1}^M \gamma_j \lambda^{M-j},$$

gde je

$$M = \max\{p, q\}, \quad \gamma_j = \begin{cases} \alpha_j + m_c \beta_1^{(j)}, & j \leq \min\{p, q\} \\ \alpha_j, & q < j \leq p \\ m_c \beta_1^{(j)}, & p < j \leq q \end{cases},$$

ima korene $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ koji zadovoljavaju uslov

$$(2.3.7) \quad |\lambda_j| < 1, \quad \forall j = 1, \dots, M.$$

(ii) *Niz (h_n^2) je stacionaran (u slabom smislu) sa srednjom vrednošću:*

$$(2.3.8) \quad E(h_n^2) = \left(\alpha_0 + m_c \sum_{k=1}^q \beta_0^{(k)} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j - m_c \sum_{k=1}^q \beta_1^{(k)} \right)^{-1}$$

i korelacionom funkcijom $\rho(k) = \text{Corr}(h_n^2, h_{n+k}^2)$, $k \geq 0$ koja zadovoljava diferencnu jednačinu:

$$(2.3.9) \quad \rho(k) = \sum_{j=1}^M \gamma_j \rho(k-j), \quad k \geq M$$

sa početnim uslovima:

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(k) - \sum_{j=1}^M \gamma_j \rho(k-j) = 0, \quad 0 < k < M.$$

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^M \gamma_j \left(= \sum_{j=1}^p \alpha_j + m_c \sum_{k=1}^q \beta_1^{(k)} \right) < 1.$$

Dokaz. (i) \Rightarrow (ii): Na osnovu (2.3.6), za proizvoljno $n, k > 0$ važi

$$(2.3.10) \quad E(Y_{n+k}) = (I + A + A^2 + \dots + A^{k-1})B + A^k E(Y_n)$$

pri čemu je:

$$A = E(A_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1^{(1)} m_c & \beta_1^{(2)} m_c & \dots & \beta_1^{(q)} m_c & \alpha_2 & \dots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = E(B_n) = \left(\alpha_0 + m_c \sum_{j=1}^q \beta_0^{(j)}, 0, \dots, 0 \right)'$$

Pokazuje se da je

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^{p+q-1} \left(\lambda^{p+q-1} - \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda^{p+q-i-1} - \sum_{j=1}^q \beta_1^{(j)} m_c \lambda^{p+q-j-1} \right),$$

tj.

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^{p+q-1} \lambda^m P(\lambda),$$

gde je $m = \min\{p-1, q-1\}$. Dakle, matrica A ima tačno m trivijalnih sopstvenih vrednosti ($\lambda_1^{(t)} = \dots = \lambda_m^{(t)} = 0$), dok su ostale sopstvene vrednosti ($\lambda_1, \dots, \lambda_M$) koreni karakterističnog polinoma $P(\lambda)$. Stoga, na osnovu pretpostavke (2.3.7) sledi konvergencija:

$$\sum_{j=0}^{k-1} A^j \rightarrow (I - A)^{-1}, \quad A^k \rightarrow \mathbb{O}, \quad \text{kada } k \rightarrow \infty.$$

Jednakost (2.3.10) tada postaje:

$$E(Y_n) = (I - A)^{-1} B = \left(\alpha_0 + m_c \sum_{j=1}^q \beta_0^{(j)} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - m_c \sum_{j=1}^q \beta_1^{(j)} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

tj. važi (2.3.8).

Na sličan način pokazuje se i (2.3.9). Naime, korelaciona funkcija $\rho(k)$ dobija se na osnovu jednakosti:

$$\rho(k) = \frac{R(k) - E(h_n^2)^2}{R(0) - E(h_n^2)^2}, \quad h \geq 0$$

pri čemu je:

$$R(k) = E(h_n^2 h_{n+k}^2) = E(h_n^2) + \sum_{j=1}^M \gamma_j R(k-j), \quad R(0) = E(h_n^4).$$

(ii) \Rightarrow (iii): Kako je $\alpha_0 > 0$ i $\beta_0^{(j)} \geq 0, j = 1, \dots, q$, na osnovu

$$E(h_n^2) = \left(\alpha_0 + m_c \sum_{j=1}^q \beta_0^{(j)} \right) \left(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - m_c \sum_{j=1}^q \beta_1^{(j)} \right)^{-1} > 0$$

sledi

$$1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - m_c \sum_{j=1}^q \beta_1^{(j)} > 0$$

a to je, očito, (iii).

(iii) \Rightarrow (i): Neka je

$$\mathcal{S}_r(A) = \max_j \{\lambda_j\}$$

spektralni radijus matrice A , definisane kao u (i). Tada važi:

$$\mathcal{S}_r(A) \leq \|A\|$$

gde možemo uzeti:

$$\|A\| = \max \left\{ \sum_{j=1}^M \gamma_j, 1 \right\} = 1.$$

Ako pretpostavimo da je $\mathcal{S}_r(A) = 1$, onda za neko $\varphi \in [0, 2\pi)$ postoji sopstvena vrednost oblika $\lambda' = e^{i\varphi}$ za koju je:

$$P(\lambda') = e^{iM\varphi} - \sum_{j=1}^M \gamma_j e^{i(M-j)\varphi} = 0.$$

Tada, na osnovu:

$$|e^{iM\varphi}| \leq \sum_{j=1}^M \gamma_j |e^{i(M-j)\varphi}|$$

sledi $\sum_{j=1}^M \gamma_j \geq 1$, što je u suprotnosti sa (iii). Dakle,

$$\mathcal{S}_r(A) < 1$$

što, na osnovu prethodnog dela dokaza, jeste ekvivalentno sa (i). \square

Ispitivanje uslova stroge stacionarnosti na osnovu rekurentne reprezentacije (2.3.6) izvršeno je od strane različitih autora ([7] i [8]). Na žalost, te rezultate, u opštem slučaju, nije moguće primeniti i ovde jer, za $p+q-1 \geq 2$, matricni nizovi (A_n) i (B_n) nisu nezavisni nizovi slučajnih veličina. Jedini slučaj kada je ispunjen uslov nezavisnosti jeste najjednostavniji slučaj Split-ARCH modela, kada je $p = q = 1$. Zato smo isključivo njemu posvetili dalju pažnju.

Neka je, dakle,

$$f_1(u) = \beta_0 + \beta_1 u,$$

tj. $f_1(\sigma_n^2)$ predstavlja linearnu funkciju volatilnosti, koja volatilni niz definiše kao pragovni model

$$(2.3.11) \quad \sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + (\beta_0 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2) \psi_{n-1}(c),$$

odnosno

$$(2.3.12) \quad \sigma_n^2 = \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2, & \varepsilon_{n-1}^2 \leq c; \\ \alpha_0 + \beta_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2, & \varepsilon_{n-1}^2 > c. \end{cases}$$

Lako se može uočiti da relacija (2.3.11) daje mogućnost izračunavanja volatilnog niza standardnim ARCH odnosno GARCH postupkom, u zavisnosti od veličine šuma (ε_n^2) . Na taj način, mogu se ispitati i osnovne stohastičke karakteristike niza (h_n^2) . Na osnovu teoreme 2.3.1 zaključujemo da je niz (h_n^2) stacionaran (u slabom smislu) akko važi $\alpha_1 + m_c \beta_1 < 1$, kada je

$$(2.3.13) \quad E(h_n^2) = \frac{\alpha_0 + \beta_0 m_c}{1 - \alpha_1 - \beta_1 m_c}.$$

Takođe, iz jednakosti

$$E(h_n^4) = 3E(\sigma_n^4) = \frac{3(\alpha_0^2 + \beta_0^2 m_c^2)(1 + \alpha_1 + \beta_1 m_c)}{(1 - \alpha_1 - \beta_1 m_c)(1 - 3\alpha_1^2 - \beta_1^2 m_c^2 - 2\alpha_1 \beta_1 m_c)}$$

dobija se stacionarna vrednost koeficijenta konveksnosti

$$K = \frac{E(h_n^4)}{(E(h_n^2))^2} = \frac{3(1 - (\alpha_1 + \beta_1 m_c)^2)}{1 - 3\alpha_1^2 - \beta_1^2 m_c^2 - 2\alpha_1 \beta_1 m_c} \geq 3$$

čime je, kao i kod ARCH-modela, opisana izduženost gustina raspodela niza (h_n) . Takođe, važi: $K = 3 \iff \alpha_1 = 0$, kada se Split-ARCH-model svodi na beli šum.

Najzad, korelaciona funkcija $\rho(k)$ dobija se na gotovo identičan način kao i kod modela tipa (G)ARCH. Pokazuje se da je

$$(2.3.14) \quad \begin{cases} \rho(1) = \alpha_1 (1 - \alpha_1 \beta_1 m_c - \beta_1^2 m_c^2) (1 - 2\alpha_1 \beta_1 m_c - \beta_1^2 m_c^2)^{-1} \\ \rho(k) = (\alpha_1 + \beta_1 m_c)^{k-1} \rho(1), \quad k > 1 \end{cases}$$

tj. ima isti geometrijski karakter opadanja ka 0, kao i u slučaju modela standardnog ARCH/GARCH tipa.

Na kraju, pokazaćemo sledeće tvrđenje koje predstavlja direktnu primenu rezultata koji se mogu naći, recimo, u [41], a odnosi se na potrebne i dovoljne uslove stroge stacionarnosti Split-ARCH (1,1) modela.

Teorema 2.3.2. *Neka je Split-ARCH model definisan jednakostima (2.3.2) i (2.3.11). Stohastička diferencna jednačina (2.3.6) ima jedinstveno, strogo stacionarno rešenje oblika*

$$(2.3.15) \quad Y_n = B_n + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n-1} \dots A_{n-k} B_{n-k-1}, \quad n \in D.$$

akko važi $E(\ln(\alpha_1 \varepsilon_n^2 + \beta_1 \psi_n(c))) < 0$.

Dokaz. Na osnovu $A_n = \alpha_1 \varepsilon_n^2 + \beta_1 \psi_n(c)$, $B_n = \alpha_0 \varepsilon_n^2 + \beta_0 \psi_n(c)$ i $Y_n = \sigma_n^2$ tvrđenje je direktna posledica teoreme 2.4 u [7]. \square

2.3.3 Ocenjivanje parametara

Formiranje Split-ARCH modela na osnovu empirijskih podataka dajemo opet u slučaju najjednostavnijeg modela, reda $p = q = 1$, mada se sam postupak može uopštiti i na slučaj Split-ARCH modela proizvoljnog reda⁹. Uobičajeno, za niz (h_n) pretpostavićemo da predstavlja logaritam prihoda određenog finansijskog indeksa (cene) (S_n) , tj. da je definisan izrazom

$$h_n = \ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right), \quad n > 0.$$

Pritom, smatramo da je poznata jedna njegova vremenska realizacija

$$(2.3.16) \quad h_t, \quad t = 1, \dots, N \quad (h_0 = 0)$$

na osnovu koje vršimo ocenjivanje. Dodatno, za $\theta = (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1)' \in \mathbb{R}^4$ pretpostavimo da pripada skupu

$$\Theta = \{ \theta \mid \alpha_1 + \beta_1 m_c < 1 \}$$

svih vrednosti parametara za koje je Split-ARCH model stacionaran (u slabom smislu).

Kao osnovni postupak ocenjivanja koristićemo metod uslovnih najmanjih kvadrata koji se zasniva na minimizaciji sume

$$(2.3.17) \quad S_N = \sum_{t=1}^N [h_t^2 - E(h_t^2 \mid \mathcal{F}_{t-1})]^2.$$

U našem slučaju ovaj metod ćemo dodatno modifikovati zbog činjenice da sam model funkcioniše u dva različita režima. Zato ćemo najpre izvršiti stratifikaciju uzorka (2.3.16) skupovima

$$A_{N,c} = \{h_t \mid \varepsilon_{t-1}^2 \leq c\}, \quad B_{N,c} = \{h_t \mid \varepsilon_{t-1}^2 > c\}.$$

⁹U svom radu [49] B. Popović i V. Stojanović izložili su opšti postupak ocenjivanja parametara Split-ARCH modela, sa posebnim naglaskom na kvalitet dobijenih ocena i praktičnu primenu ovog modela. U njemu je, između ostalog, opisana primena Split-ARCH modela u analizi dinamike cena plemenitih metala na svetskom tržištu. Zbog opširnosti izlaganja, taj deo primene našeg modela biće izostavljen iz sadržaja ove disertacije.

Označimo, dalje,

$$(2.3.18) \quad \mathbf{a} = (\alpha_0, \alpha_1)', \quad \Theta_1 = \{\mathbf{a} \mid 0 < \alpha_1 < 1\}$$

$$(2.3.19) \quad \mathbf{b} = (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1)', \quad \Theta_2 = \{\mathbf{b} \mid 0 < \alpha_1 + \beta_1 < 1\}$$

Ako, sada, primenimo gore opisani metod, zasnovan na regresiji niza (h_t) u odnosu na volatilitnost $\sigma_t^2 = E(h_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})$, dobijamo sledeći postupak ocenjivanja.

Na skupu $A_{N,c}$ Split-ARCH model potčinjen je standardnom ARCH-modelu

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{t-1}^2$$

pa suma kvadrata (3.2) postaje

$$(2.3.20) \quad S'_N(\alpha_0, \alpha_1) = \sum_{h_t \in A_{N,c}} (h_t^2 - \alpha_0 - \alpha_1 h_{t-1}^2)^2.$$

Odavde dobijamo ocenjene vrednosti parametara

$$(2.3.21) \quad \hat{\mathbf{a}}_N = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_1 & \sum h_{t-1}^2 \\ \sum h_{t-1}^2 & \sum h_{t-1}^4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum h_t^2 \\ \sum h_t^2 h_{t-1}^2 \end{pmatrix}$$

gde je $N_1 = |A_{N,c}| = \sum_{t=1}^N I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c)$ i sumiranje se vrši, naravno, za $h_t \in A_{N,c}$.

S druge strane, na skupu $B_{N,c}$ važi

$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \beta_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \beta_1 \sigma_{n-1}^2$$

tj. model je tipa GARCH, pa je ocenjivanje moguće izvršiti nekim od standardnih iterativnih metoda, recimo, Newton-Raphson-ovim algoritmom. Međutim, koristeći opet ocenu volatilitnosti

$$\hat{\sigma}_t^2 = h_t^2, \quad 1 \leq t \leq N$$

moгу se odrediti regresione ocene zbirnih parametara \mathbf{b} dobijene iz uslova minimizacije funkcije

$$(2.3.22) \quad S''_N(\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1) = \sum_{h_t \in B_{N,c}} [h_t^2 - (\alpha_0 + \beta_0) - (\alpha_1 + \beta_1)h_{t-1}^2]^2.$$

Odavde je

$$(2.3.23) \quad \widehat{\mathbf{b}}_N = \begin{pmatrix} N_2 & \sum h_{t-1}^2 \\ \sum h_{t-1}^2 & \sum h_{t-1}^4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum h_t^2 \\ \sum h_t^2 h_{t-1}^2 \end{pmatrix}$$

gde je $N_2 = |B_{N,c}| = N - N_1$ i $h_t \in B_{N,c}$. Najzad, dobijene ocene daju

$$\begin{pmatrix} \widehat{\beta}_0 \\ \widehat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \widehat{\mathbf{b}}_N - \widehat{\mathbf{a}}_N.$$

Na osnovu ovog, dvoetapnog načina ocenjivanja, dobijene ocene sadrže osnovna asimptotska svojstva koja su zajednička svim ocenama ovog tipa, a koje možemo formulisati sledećim tvrđenjem.

Teorema 2.3.3. (Popović, Stojanović [48]) *Neka su, za neko $N_0 > 0$ i svako $N \geq N_0$, ispunjeni uslovi*

$$\widehat{\mathbf{a}}_N \in \Theta_1, \quad \widehat{\mathbf{b}}_N \in \Theta_2, \quad \widehat{\boldsymbol{\theta}}_N = (\widehat{\mathbf{a}}_N', \widehat{\mathbf{b}}_N' - \widehat{\mathbf{a}}_N')' \in \Theta.$$

Tada su $\widehat{\mathbf{a}}_N$ i $\widehat{\mathbf{b}}_N$ strogo konzistentni i asimptotski normalni nizovi ocena parametara \mathbf{a} i \mathbf{b} , respektivno.

Dokaz. Ako, opet, posmatramo niz

$$v_t = h_t^2 - \sigma_t^2, \quad t = 1, \dots, N$$

onda imamo

$$E(v_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(h_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - \sigma_t^2 = 0$$

tj. (v_t) , kao martingalni priraštaj, jeste niz nekoreliranih slučajnih veličina. Tada je

$$h_t^2 = \sigma_t^2 + v_t = \alpha_0 + \beta_0 \psi_{t-1}(c) + (\alpha_1 + \beta_1 \psi_{t-1}(c)) h_{t-1}^2 + v_t - \beta_1 \psi_{t-1}(c) v_{t-1}$$

linearna ARMA vremenska serija sa slučajnim koeficijentima i negausovskim "šumom" (v_t) . Ovu reprezentaciju koristimo za izračunavanje spektralne gustine niza h_t^2 :

$$f(\omega) = \frac{\text{Var}(v_t)}{2\pi} \cdot \frac{1 - 2\beta_1 m_c \cos \omega + \beta_1^2 m_c^2}{1 - 2(\alpha_1 + \beta_1 m_c) \cos \omega + (\alpha_1 + \beta_1 m_c)^2}.$$

Oдавде, imamo

$$f(0) = \frac{\text{Var}(v_t)}{2\pi} \left(\frac{1 - \beta_1 m_c}{1 - \alpha_1 - \beta_1 m_c} \right)^2$$

pa, kako je $\alpha_1 + \beta_1 m_c < 1$ za sve $\theta \in \Theta$, funkcija $f(\omega)$ je neprekidna za $\omega = 0$. Tada, (h_t^2) i (v_t) jesu ergodični i stacionarni nizovi slučajnih veličina.

S druge strane, koristeći reprezentaciju (2.3.21) imamo

$$\hat{\mathbf{a}}_N - \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{N_1} \sum h_{t-1}^2 \\ \frac{1}{N_1} \sum h_{t-1}^2 & \frac{1}{N_1} \sum h_{t-1}^4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{N_1} \sum v_t \\ \frac{1}{N_1} \sum v_t h_{t-1}^2 \end{pmatrix},$$

gde je $h_t, h_{t-1} \in A_{N,c}$. Kako je,

$$N_1 \xrightarrow{s.i.} \infty, \quad \text{kada } N \rightarrow \infty,$$

to možemo primeniti ergodičnu teoremu za slučajne sume nizova (v_t) i (h_t^2) (videti, na primer, [16]). Imamo, kada $N \rightarrow \infty$,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{N_1} \sum v_t \\ \frac{1}{N_1} \sum v_t h_{t-1}^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{s.i.} 0, \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{N_1} \sum h_{t-1}^2 \\ \frac{1}{N_1} \sum h_{t-1}^2 & \frac{1}{N_1} \sum h_{t-1}^4 \end{pmatrix}^{-1} \xrightarrow{s.i.} \Gamma^{-1}$$

gde je $X_t, X_{t-1} \in A_{N,c}$ i moment-matrica

$$\Gamma = E(\mathbf{h}_t \mathbf{h}_t'), \quad \mathbf{X}_t = (1, h_{t-1}^2)'$$

ne zavisi od t , za sve \mathbf{a} iz skupa stacionarnosti Θ_1 . Ove dve konvergencije, najzad, daju

$$\hat{\mathbf{a}}_N - \mathbf{a} \xrightarrow{s.i.} 0, \quad N \rightarrow \infty$$

tj. ocena $(\hat{\mathbf{a}}_N)$ jeste strogo postojana.

Pokazujemo sada asimptotsku normalnost niza $(\hat{\mathbf{a}}_N)$. Neka je

$$\sqrt{N_1} (\hat{\mathbf{a}}_N - \mathbf{a}) = \mathbf{U}_{N_1}^{-1} \mathbf{V}_{N_1}$$

gde je

$$\mathbf{U}_{N_1} = \frac{1}{N_1} \cdot \begin{pmatrix} N_1 & \sum h_{t-1}^2 \\ \sum h_{t-1}^2 & \sum h_{t-1}^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_{N_1} = \frac{1}{\sqrt{N_1}} \cdot \begin{pmatrix} \sum v_t \\ \sum v_t h_{t-1}^2 \end{pmatrix}.$$

Za svaki vektor $\mathbf{v} = (v_0, v_1)' \in \mathbb{R}^2$ slučajni niz

$$\sqrt{N}\mathbf{v}'\mathbb{V}_N = \sum_{t=1}^N v_t(v_0 + v_1 h_{t-1}^2)$$

jeste martingal, pa primenom Billingsley-eve centralne granične teoreme za martingale imamo

$$\mathbf{v}'\mathbb{V}_N \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbf{v}'\Lambda\mathbf{v}),$$

gde je

$$\Lambda = E(\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t'), \quad \mathbf{Y}_t = v_t (1, h_{t-1}^2)'$$

i Λ ne zavisi od t . Odavde, koristeći Cramer-Wold-ovu dekompoziciju, dobijamo:

$$\mathbb{V}_N \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Lambda).$$

S druge strane, važi

$$\frac{N_1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c) \xrightarrow{s.i.} F(c), \quad N \rightarrow \infty$$

gde je $F(c) = P\{\varepsilon_t^2 \leq c\} < \infty$ funkcija raspodele za (ε_t^2) . Ako sada primenimo centralnu graničnu teoremu za slučajne sume imamo

$$\mathbb{V}_{N_1} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Lambda)$$

i konačno, zbog $A_{N_1}^{-1} \xrightarrow{s.i.} \Gamma^{-1}$, dobijamo

$$\sqrt{N_1}(\hat{\mathbf{a}}_N - \mathbf{a}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Gamma^{-1}\Lambda\Gamma^{-1}).$$

Na sličan način može se pokazati stroga postojanost i asimptotska normalnost niza $\hat{\mathbf{b}}_N$. \square

2.3.4 Primena modela

Navedeni metod ocenjivanja koeficijenata Split-ARCH modela može se primeniti u praktičnim analizama finansijskih nizova. U narednoj tabeli prikazani su rezultati takvog ocenjivanja, pri čemu je kao empirijski skup

uzet niz od 2 500 realizacija logaritama prihoda cene nafte na svetskom tržištu (WTI Posted, na osnovu baze podataka *Scotia Group* i *Wall Street Journal-a*).

Model	ARCH	Split-ARCH (stratumi)	
		I	II
Uzorak (N)	2500	1853	647
Parametri	0.000548	0.000619	0.000843
	0.306	0.0108	0.319
Korelacija	98.48%	98.81%	

Tabela 2.2: Ocenjene vrednosti parametara ARCH(1) i Split-ARCH(1,1) modela.

Kvalitet dobijenih modela može se uočiti i vizuelnim putem, kao što je prikazano na slici 2.5. Radi poređenja, najpre smo, metodom uslovnih najmanjih kvadrata, ocenili koeficijente ARCH(1)-modela:

$$\begin{cases} h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \\ \sigma_n^2 = 5,482 \cdot 10^{-4} + 0,306 \cdot h_{n-1}^2 \end{cases},$$

koji pokazuje dosta veliki stepen korelacije sa empirijskom serijom (98,48%). Zatim je, na osnovu statistike (reziduala):

$$\hat{\varepsilon}_n = h_n / \hat{\sigma}_n, \quad n = 1, \dots, N$$

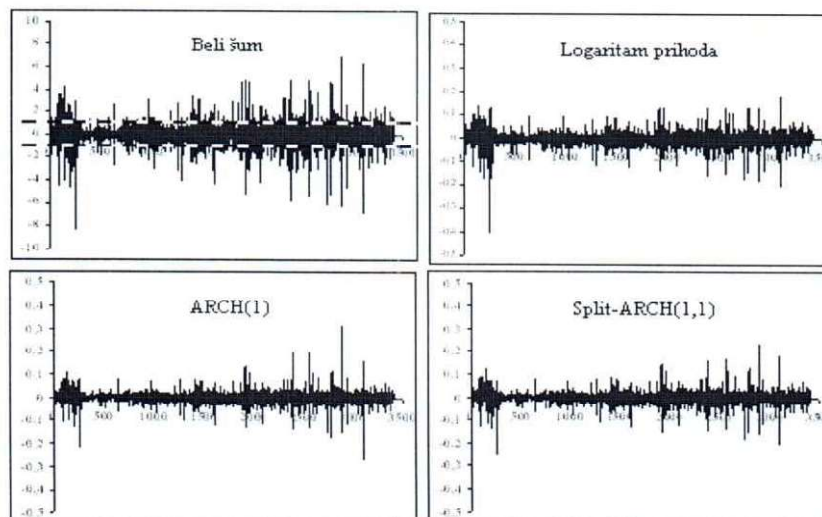
izvršena stratifikacija uzorka, na način prikazan na slici 2.5 (gore levo). Inače, niz $(\hat{\varepsilon}_n)$ se može smatrati "dobrom" ocenom vrednosti belog šuma (ε_n) , zasnovanoj na empirijskoj standardnoj devijaciji $(\hat{\sigma}_n)$. Kao kritična vrednost reakcije uzeta je srednja vrednost χ_1^2 raspodele:

$$c = E(\varepsilon_n^2) = 1$$

mada je, naravno, moguć i drugačiji izbor parametra c . Na taj način, formiran je Split-ARCH model:

$$\begin{cases} h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \\ \sigma_n^2 = 6,187 \cdot 10^{-4} + 0,0108 \cdot h_{n-1}^2 + (2,243 \cdot 10^{-4} + 0,3082 \cdot \sigma_{n-1}^2) \psi_{n-1}(1) \end{cases}$$

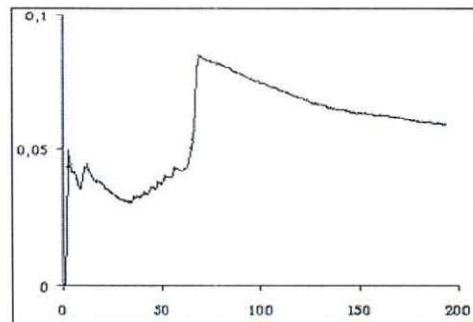
koji, čini se, predstavlja bolji izbor u praktičnom modelovanju vremenske serije. Pre svega, koeficijent empirijske korelacije je neznatno veći u odnosu na ARCH-model (98,81%), tj. Split-ARCH model pokazuje bolje slaganje sa originalnim podacima.



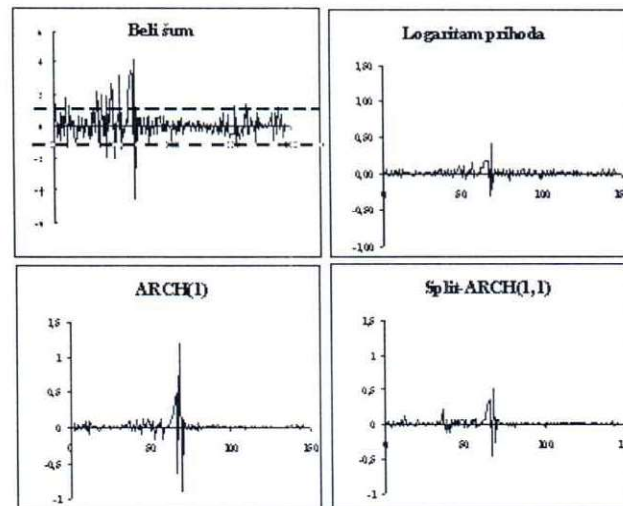
Slika 2.5: Upporedni grafikoni reziduala, originalne serije, ARCH i Split-ARCH modela.

Takođe, lako je uočiti da ARCH-model (slika 2.5, dole levo), zbog pojedinih naglašeno većih vrednosti svojih realizacija u odnosu na veličinu originalnih podataka, ne ilustruje na najbolji mogući način datu vremensku seriju. S druge strane, Split-ARCH model, čije realizacije vidimo na poslednjoj slici, pokazuje znatno ujednačenije fluktuacije koje su "bliže" originalnim, empirijskim podacima.

Slični rezultati dobijeni su i na "malom" uzorku od 190 realizacija logaritama prihoda cene sojine sačme, na osnovu podataka Produktne berze iz Novog Sada. Kretanje empirijske varijanse datog skupa podataka prikazano je na slici 2.6 i ima, slično kao i u prethodnom slučaju, izrazito nelinearan karakter koji se uočava njenim naglim rastom kao posledicom skoka cene u određenom, relativno kratkom, vremenskom periodu.



Slika 2.6: Empirijska volatilnost cene sojine sačme. (Izvor: Produktna berza, Novi Sad)



Slika 2.7: Uporedni grafikon priraštaja cene sojine sačme u odnosu na ARCH i Split-ARCH model.

S druge strane, odgovarajuće realizacije ARCH i Split-ARCH modela, na osnovu ocenjenih vrednosti njihovih parametara, prikazane su na slici 2.7. Može se opet uočiti da standardna ARCH aproksimacija

$$\begin{cases} h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \\ \sigma_n^2 = 1.2835 \cdot 10^{-3} + 0.6278 \cdot h_{n-1}^2 \end{cases}$$

posедуje fluktuacije koje su znatno izraženije u odnosu na originalnu vremensku seriju, dok Split-ARCH model, definisan jednakostima

$$\begin{cases} h_n = \sigma_n \varepsilon_n, \\ \sigma_n^2 = 7.453 \cdot 10^{-4} + 0.4572 \cdot h_{n-1}^2 + (6.1687 \cdot 10^{-3} + 0.1215 \cdot \sigma_{n-1}^2) \psi_{n-1}(1) \end{cases}$$

pokazuje znatno bolje prilagođavanje datom empirijskom skupu i čini se da je on adekvatniji izbor u praktičnom statističkom modelovanju.

Glava 3

STOPBREAK procesi

U prethodnom izlaganju opisali smo jednu od najvažnijih klasa nelinearnih modela dinamike finansijskih nizova. Ogroman značaj koji modeli uslovne heterogenosti imaju ogleda se, između ostalog, i u stvaranju novih, manje ili više srodnih modela koji se koriste u istraživanju finansijskih struktura na tržištu. Ipak, mnogi od njih ne mogu biti posmatrani samo unutar pomenute klase uslovne heterogenosti. Stoga, ovde opisujemo još jednu klasu nelinearnih modela koji se koriste u analizama vremenskih serija sa naglašenim, permanentnim fluktuacijama.

Polazeći od fundamentalnih rezultata R. Engle-a i A. Smith-a [19], koji su 1999. godine prvi uveli stohastički proces permanentnih fluktuacija, popularno nazvan STOPBREAK proces¹, u prvom delu ovog poglavlja dajemo osnovne pojmove i definicije neophodne za razumevanje samog procesa. Sami autori STOPBREAK proces istražuju u svetlu poređenja sa nekim njemu sličnim modelima. Tako je jedna od zanimljivijih osobina ovog procesa konstantna volatilitnost koja naizgled stoji u suprotnosti sa pomenutim naglašenim i stalnim promenama u samom procesu. Pored toga, u opštem obliku, ovakvi procesi nisu stacionarni što dodatno otežava ispitivanje njihovih stohastičkih osobina. Ipak, primenljivost u analizama empirijskih serija jeste osnovni motiv zbog koga je ovakva vrsta stohastičkih modela našla svoje mesto u ovom radu.

¹Naziv ovog procesa dobijen je skraćivanjem njegovog potpunog, izvornog naziva STOchastic Permanent BREAKing process.

Prateći, dakle, radove Engle-a i Smith-a [19], kao i González-a [27], ovde će biti izložena modifikacija STOPBREAK procesa, dobijena uvođenjem pragovnog indikatora, na način sličan kao kod Split-ARCH modela o kome je bilo reči u prethodnom poglavlju. Znači, u ovom slučaju je pragovni oblik samog procesa dobijen uvođenjem indikatora šuma koji su Popović i Stojanović [48] primenili u analizi nelinearnih vremenskih serija ARCH tipa. Sam proces nazvan je *pragovni STOPBREAK proces*, odnosno *Split-BREAK proces* i njemu je uglavnom posvećen veći deo narednog izlaganja. Uporedo sa ispitivanjem osnovnih stohastičkih osobina ovog procesa dat je prikaz i njegove praktične primene u analizi kretanja ukupne vrednosti obima trgovanja akcijama na domaćem tržištu hartija od vrednosti.

3.1 Osnovni pojmovi

Neka je (y_t) vremenska serija sa skupom vrednosti $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ adaptirana u odnosu na filter $F = (\mathcal{F}_t)$. Reći ćemo da (y_t) predstavlja STOPBREAK proces ako važi aditivno razlaganje

$$(3.1.1) \quad y_t = m_t + \varepsilon_t$$

gde je (m_t) niz tzv. *martingalnih proseka*, a (ε_t) beli šum, odnosno niz nezavisnih slučajnih veličina koje su adaptirane u odnosu na filter F i takve da je, za svako $t = 1, \dots, T$,

$$E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad Var(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2.$$

Štaviše, pretpostavićemo, kao i u prethodnom poglavlju, da za svako $t \in T$ važi

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}en\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_t\}$$

kao i da je martingalni prosek m_t definisan rekurentnom relacijom

$$(3.1.2) \quad m_t = m_{t-1} + q_{t-1} \varepsilon_{t-1} = m_0 + \sum_{j=0}^{t-1} q_j \varepsilon_j$$

gde je q_t , u opštem slučaju, slučajna veličina koja zavisi od realizacija šuma (ε_t) . Na ovaj način je obezbeđena \mathcal{F}_t merljivost slučajnih veličina y_t , odnosno \mathcal{F}_{t-1} merljivost za m_t .

S druge strane, dodatno pretpostavljamo da je, za sve $t = 0, 1, \dots, T$,

$$P\{0 \leq q_t \leq 1\} = 1,$$

čime slučajni niz (q_t) predstavlja (*permanentnu*) *reakciju* STOPBREAK procesa, jer njegove vrednosti određuju veličinu učešća prethodnih realizacija šuma unutar vrednosti niza (m_t) , odnosno (y_t) . Drugim rečima, vrednosti $q_t \approx 0$ daju "male" promene martingalnih proseka unutar određenog vremenskog perioda, dok za $q_t \approx 1$ dolazi do naglašenih, permanentnih fluktuacija. Na taj način, sama struktura niza (q_t) određuje karakter i osobine STOPBREAK procesa.

U prvom, osnovnom obliku STOPBREAK procesa, Engle i Smith uvode sledeći funkcionalni oblik zavisnosti permanentne reakcije

$$q_t(\gamma) = \frac{\varepsilon_t^2}{\gamma + \varepsilon_t^2}$$

koji zavisi od nepoznatog parametra $\gamma > 0$. Na ovaj način važi $q_t(\gamma) = 0$ akko je $\varepsilon_t = 0$ i tada fluktuacija u samom procesu nema. Naravno, u slučaju neprekidne raspodele šuma ε_t ovakvi događaju realizuju se sa verovatnoćom nula. S druge strane, ukoliko je (ocenjena) vrednost parametra $\gamma \approx 0$, onda je $q_t(\gamma) \approx 1$ i proces poseduje naglašene, permanentne fluktuacije.

Kao još jedan zanimljiv oblik zavisnosti $q_t = q_t(\varepsilon_t)$ istaknimo rad A. González-a [27] koji definiše "izgladenu" permanentnu reakciju

$$q_t(\varepsilon; \gamma, c) = 1 - \theta_1 - \frac{\theta_2}{1 + e^{-\gamma(\varepsilon_t - c_1)(\varepsilon_t - c_2)}}$$

gde je $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$, $\gamma > 0$ i $c_1 \leq c_2$. Ovako opšti oblik reakcije q_t daje znatne mogućnosti u samom modeliranju ovakvog STOPBREAK procesa.² Ona, kao što sam autor uočava, aproksimativno sadrži i izvornu funkciju Engle-a i Smith-a, ukoliko je $c_1 = c_2 = 0$, $\theta_1 = -1$ i $\theta_2 = 2$. Takođe, kao što ćemo uskoro videti, i Split-BREAK proces, o kome će biti reči u narednom delu, predstavlja specijalan oblik ovog procesa. Ipak, veliki broj nepoznatih parametara bitno otežava praktičnu primenu ovakvog modela, tako da se na njemu nećemo detaljnije zadržavati.

²U samom radu autor ovaj proces naziva *Stochastic Permanent Surge* ili, kraće, *SPS-process*.

3.2 Pragovni STOPBREAK proces

Ovde ćemo izložiti jednu od mogućih modifikacija STOPBREAK procesa, koja je opisana najpre u radu V. Stojanovića i B. Popović [58], a zatim i u Stojanović, Popović i Popović [56]. Osnovna zamisao jeste da se uvođenjem pragovnog, višestrukog režima unutar reakcije q_t dobije nova, bogatija struktura u dinamici samog procesa. Kao što smo već istakli, korišćićemo ideje slične kao u definiciji Split-ARCH modela o kome je bilo reči u ranijem izlaganju.

3.2.1 Definicija i osobine

Pretpostavimo najpre da je, zajedno sa jednakostima (3.1.1) i (3.1.2), ispunjen uslov

$$(3.2.1) \quad q_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 > c) = \begin{cases} 1, & \varepsilon_{t-1}^2 > c; \\ 0, & \varepsilon_{t-1}^2 \leq c. \end{cases}$$

čime je definisan *pragovni STOPBREAK proces*, odnosno *Split-BREAK proces*. Ovde je, kao i ranije, $c > 0$ kritična vrednost reakcije, tj. nivo koji će odrediti realizacije šuma koje su statistički dovoljno značajne da bi se njihove vrednosti uključile (3.1.2). Na osnovu (3.2.1) dalje važi

$$(3.2.2) \quad E(q_t \varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = q_t E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

pa niz $(q_t \varepsilon_t)$ predstavlja martingalni priraštaj, odnosno niz nekoreliranih slučajnih veličina. Sada se na jednostavan način mogu odrediti osnovne stohastičke karakteristrike niza (y_t) . Kako je, na osnovu (3.1.1) i (3.1.2),

$$(3.2.3) \quad E(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = m_t + E(\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = m_t$$

zaključujemo da su realizacije niza (y_t) "bliske" nizu proseka (m_t) . Takođe, srednje vrednosti ova dva niza daju jednake, konstantne vrednosti jer, na

osnovu prethodnih jednakosti važi

$$\begin{aligned}
 E(y_t) &= E(m_t) \\
 &= E(m_{t-1}) + E(q_{t-1} \varepsilon_{t-1}) \\
 (3.2.4) \quad &= E(m_{t-1}) \\
 &\vdots \\
 &= E(m_0) = \mu \text{ (const)}.
 \end{aligned}$$

Odredimo sada disperziju Split-BREAK procesa. Kako je

$$(3.2.5) \quad \text{Var}(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(y_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) - m_t^2 = \sigma^2$$

zaključujemo da je uslovna disperzija (volatilnost) niza (y_t) konstantna veličina, jednaka disperziji samog šuma (ε_t) . Uočimo, takođe, da jednakosti (3.2.3) i (3.2.5) dosta govore o stohastičkoj prirodi aditivnog razlaganja (3.1.1) niza (y_t) . Kako je $m_t \in M(\mathcal{F}_{t-1})$ to je niz (m_t) predvidljiv i predstavlja komponentu stabilnosti samog procesa. S druge strane, niz (ε_t) jeste faktor odstupanja STOPBREAK procesa u odnosu na (m_t) . Dekompozicija (3.1.1) je stoga slična poznatom Doobe-ovom razlaganju, detaljno opisanom, recimo, u monografiji Широков-а [61]. Ipak, ova dva razlaganja nisu identična jer niz (m_t) , u opštem slučaju, nije martingal. S druge strane, dodatnu otežavajuću okolnost predstavlja nestacionarnost samog niza (y_t) . Potvrdu te činjenice daje, recimo, izračunavanje osnovne disperzije ovog niza

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(y_t) &= E(y_t^2) - \mu^2 \\
 (3.2.6) \quad &= E(m_t^2) + 2E(m_t \varepsilon_t) + E(\varepsilon_t^2) - \mu^2 \\
 &= \text{Var}(m_t) + \sigma^2.
 \end{aligned}$$

Kako je, za $t = 1, \dots, T$,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(m_t) &= E(m_t^2) - \mu^2 \\
 &= E(m_{t-1}^2) + 2E(m_{t-1} q_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + E(q_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2) - \mu^2 \\
 &= \text{Var}(m_{t-1}) + a_c \sigma^2
 \end{aligned}$$

gde je $a_c = P\{\varepsilon_t^2 > c\}$, disperziju martingalnih proseka (m_t) , pod pretpostavkom $m_0 \equiv \text{const}$, možemo izraziti na sledeći način

$$(3.2.7) \quad \text{Var}(m_t) = \sigma^2 t a_c, \quad t \geq 0.$$

Odavde, primenom jednakosti (3.2.6), dobija se disperzija niza (y_t)

$$(3.2.8) \quad \text{Var}(y_t) = \sigma^2(ta_c + 1), \quad t \geq 0.$$

Dakle, disperzije nizova (y_t) i (m_t) imaju nekonstantne vrednosti koje zavise od vremenskog trenutka t u kome se one posmatraju. Na sličan način dobijaju se i korelacione funkcije ovih nizova. Korelaciona funkcija za (y_t) , dobijena standardnim izračunavanjem, glasi

$$(3.2.9) \quad K(s, t) = \text{Corr}(y_s, y_t) = \begin{cases} \frac{a_c [\min(s, t) + 1]}{\sqrt{(a_c s + 1) \cdot (a_c t + 1)}}, & s \neq t; \\ 1, & s = t. \end{cases}$$

S druge strane, za svako $s > t \geq 0$ važi

$$\begin{aligned} \text{Cov}(m_t, m_s) &= E(m_t m_s) - \mu^2 \\ &= E(m_t m_{s-1}) + E(m_t q_{s-1} \varepsilon_{s-1}) - \mu^2 \\ &= \text{Cov}(m_t, m_{s-1}) \end{aligned}$$

pa je lako uočiti da je kovarijansa niza (m_t)

$$(3.2.10) \quad \text{Cov}(m_t, m_s) = \text{Var}(m_t), \quad s > t \geq 0.$$

Odavde se, konačno, dobija korelaciona funkcija martingalnih proseka

$$(3.2.11) \quad \tilde{K}(s, t) = \text{Corr}(m_s, m_t) = \begin{cases} \frac{\min(s, t)}{\sqrt{s \cdot t}}, & s \neq t; \\ 1, & s = t. \end{cases}$$

Dakle, korelacione funkcije $K(s, t)$ i $\tilde{K}(s, t)$ zavise od oba vremenska argumenta t, s i ukazuju na nestacionarnost nizova (y_t) i (m_t) . Ipak, za razliku od korelacije niza (y_t) , korelaciona funkcija martingalnih proseka zadovoljava uslov L^2 -neprekidnosti, jer je

$$\lim_{s \rightarrow t} \tilde{K}(s, t) = \tilde{K}(t, t) = 1.$$

Neprekidnost funkcije $\tilde{K}(s, t)$ u dijagonalnim tačkama, kao što znamo,³ potreban je i dovoljan uslov za srednje-kvadratnu neprekidnost niza (m_t) .

³Neprekidnost L^2 -procesa u srednje-kvadratnom smislu ekvivalentna je neprekidnosti srednje vrednosti i korelacione funkcije datog procesa u dijagonalnim tačkama. Detaljnije o tome videti, recimo, u Mališić [37], str. 132-138.

3.2.2 Analiza priraštaja Split-BREAK procesa

U ovom delu posvetićemo se detaljnijem istraživanju niza priraštaja Split-BREAK procesa, opisanih jednakošću

$$X_t = y_t - y_{t-1}.$$

Važnost niza (X_t) istaknuta je od strane gotovo svih autora koji su izučavali STOPBREAK procese, i to sa razlogom. Ovaj niz, kao što se lako može uočiti, možemo zadati u obliku jednakosti

$$(3.2.12) \quad X_t = \varepsilon_t - \theta_{t-1} \varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T$$

gde je $\theta_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c)$, a (ε_t) beli šum koji smo definisali ranije. Niz (X_t) zvaćemo *pragovni pokretni prosek (reda 1)*, odnosno *Split-MA(1) proces*. On deluje, dakle, u dvostrukom režimu. Ukoliko su fluktuacije šuma u ranijem vremenskom trenutku naglašene važiće jednakost $X_t = \varepsilon_t$, tj. priraštaji su jednaki samom šumu. S druge strane, fluktuacije šuma koje ne prelaze kritičnu vrednost reakcije c daju MA(1) reprezentaciju niza (X_t) .

Na ovaj način, (X_t) je blizak standardnom linearnom MA(1) modelu, tako da se mnogi od već postojećih rezultata mogu primeniti u njegovom istraživanju. U svom radu Engle i Smith [17], kao i González [27], govore uglavnom o dovoljnim uslovima invertibilnosti niza (X_t) koja, opet, zavisi od izbora reakcije (q_t) . Mi ćemo otići korak dalje, detaljnije ćemo se posvetiti ispitivanju osnovne stohastičke strukture ovog niza, daćemo još neka moguća uopštenja i, naravno, ukazati na mogućnost ocenjivanja parametara i primene ovakvog modela u praksi.

Posvetimo se sada određivanju osnovnih parametara priraštaja (X_t) . Pri ranijim pretpostavkama, jednostavnim izračunavanjem dobijamo srednju vrednost i disperziju ovog niza

$$(3.2.13) \quad E(X_t) = 0, \quad Var(X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2(b_c + 1)$$

pri čemu je $b_c = 1 - a_c = P\{\varepsilon_t^2 \leq c\}$. Takođe, kovarijansa ovog niza je

$$(3.2.14) \quad Cov(X_s, X_t) = \begin{cases} \sigma^2(b_c + 1), & s = t \\ -b_c \sigma^2, & |s - t| = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i, jasno, poseduje strukturu identičnu standardnim MA(1) serijama. Takođe, na osnovu nje lako uočavamo i stacionarnost niza (X_t) , tako da korelaciju funkciju možemo napisati u obliku

$$(3.2.15) \quad \rho(h) = \text{Corr}(X_{t+h}, X_t) = \begin{cases} 1, & h = 0 \\ -b_c/(b_c + 1), & h = \pm 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pokazaćemo sada i invertibilnost Split-MA(1) modela.

Teorema 3.2.1. *Neka je vremenska serija (X_t) definisana rekurentnom relacijom (3.2.12), pri čemu je $t \in \mathbb{Z}$ i $b_c = P\{\varepsilon_t^2 \leq c\} \in (0, 1)$. Tada za seriju (ε_t) važi*

$$(3.2.16) \quad \varepsilon_t = X_t + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{t,j} X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

gde je $\alpha_{t,j} = \prod_{k=1}^j \theta_{t-k}$. Pritom, gore navedena reprezentacija je skoro izvesno jedinstvena, a red konvergira u srednje-kvadratnom i skoro izvesnom smislu.

Dokaz. Neka je, za proizvoljno $n \in \mathbb{Z}$,

$$A_n = E \left| \varepsilon_t - X_t - \sum_{j=1}^n \alpha_{t,j} X_{t-j} \right|^2 = E \left| \left(\prod_{j=1}^{n+1} \theta_{t-j} \right) \varepsilon_{t-n-1} \right|^2.$$

Kako je, za svako $n \in \mathbb{Z}$,

$$A_n \leq \sigma^2 \prod_{j=1}^n E(\theta_{t-j}) = \sigma^2 b_c^n$$

sledi $A_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, tj. važi srednje-kvadratna konvergencija reda u (3.2.16).

Na osnovu

$$E(\alpha_{t,j} X_{t-j}) \leq \sigma^2 b_c^{j-1}, \quad E(\alpha_{t,j} X_{t-j})^2 \leq \sigma^2 (b_c^j + b_c^{j-1})$$

kao i konvergencije brojnih redova $\sum_{j=1}^{\infty} b_c^{j-1}$ i $\sum_{j=1}^{\infty} (b_c^j + b_c^{j-1})$ sledi, na osnovu Teoreme Kolmogorova o dva reda, skoro izvesna konvergencija reda u (3.2.16).

Na kraju, pokazujemo jedinstvenost, u skoro izvesnom smislu, reprezentacije (3.2.16), koristeći postupak identičan kao u Popović [46]. Naime, pretpostavimo da pored (ε_t) postoji još jedan niz nekoreliranih \mathcal{F}_t adaptiranih slučajnih veličina, označimo ga sa (ξ_t) , koji predstavlja rešenje jednačine (3.2.12), tj.

$$X_t = \xi_t - \theta_{t-1} \xi_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Tada je $\lambda_t = \xi_t - \varepsilon_t$ takođe niz nekoreliranih slučajnih veličina za koji važi

$$E(\lambda_t^2) = b_c E(\lambda_{t-1}^2), \quad t = 1, \dots, T.$$

Kako je $b_c \in (0, 1)$, a, na osnovu stacionarnosti niza (λ_t) važi $E(\lambda_t^2) \equiv \text{const.}$, poslednja jednakost važi akko je $E(\lambda_t^2) \equiv 0$ za sve $t = 0, \dots, T$, odnosno $\xi_t \stackrel{s.i.}{=} \varepsilon_t$, čime je dokaz teoreme završen. \square

3.3 Ocenjivanje kritične vrednosti

Razmotrimo sada problem ocenjivanja (nepoznate) kritične vrednosti c Split-MA(1) modela. Postupak koji ovde izlažemo jeste analogan nekim od standardnih metoda ocenjivanja koeficijenata linearnih MA modela, opisanih, recimo, u monografijama Fuller-a [25] ili Mališića [38]. Ipak specifičnost Split-MA(1) modela zahteva i neka dodatna ispitivanja i analize, pre svega kvaliteta dobijenih ocena.

3.3.1 Ocena \tilde{c}

Neka je Split-MA(1) model definisan jednačinom (3.2.12). Kao što smo već pokazali, koeficijent prve korelacije ovog modela glasi

$$\rho(1) = -\frac{b_c}{1 + b_c}, \quad 0 < b_c < 1$$

pa rešavanjem po b_c dobijamo ocenu ovog parametra

$$(3.3.1) \quad \tilde{b}_c = -\frac{\hat{\rho}_T(1)}{1 + \hat{\rho}_T(1)}$$

gde je

$$\hat{\rho}_T(1) = \left(\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1} \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T X_t^2 \right)^{-1}$$

ocenjena, empirijska vrednost prve korelacije. Na osnovu ocene \tilde{b}_c može se odrediti odgovarajuća ocena kritične vrednosti $c = \tilde{c}$, kao rešenje jednačine

$$P\{\varepsilon_t^2 \leq c\} = \tilde{b}_c.$$

Naravno, ocene \tilde{b}_c i \tilde{c} jesu odgovarajuće ako je $-0,5 < \hat{\rho}_T(1) < 0$. Pokazujemo sada konzistentnost ovih ocena.

Teorema 3.3.1. *Neka su \tilde{b}_c i \tilde{c} ocene nepoznatih parametara b_c i c , respektivno. Tada važi*

$$(3.3.2) \quad \tilde{b}_c \xrightarrow{s.i.} b_c, \quad T \rightarrow \infty.$$

Ako je, pritom, raspodela slučajnih veličina (ε_t) apsolutno-neprekidnog tipa važi

$$(3.3.3) \quad \tilde{c} \xrightarrow{s.i.} c, \quad T \rightarrow \infty.$$

Dokaz. Spektralna gustina niza (X_t) glasi

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 - 2 \cos \omega b_c + b_c)$$

i očito je neprekidna u tački $\omega = 0$. Niz (X_t) je stoga stacionaran, ergodičan niz slučajnih veličina. Na osnovu ergodičke teoreme tada važi

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} X_t X_{t+1} \xrightarrow{s.i.} \gamma(1), \quad T \rightarrow \infty$$

kao i

$$(3.3.4) \quad \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} X_t^2 \xrightarrow{s.i.} \gamma(0), \quad T \rightarrow \infty$$

pri čemu je $\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h})$ kovarijaciona funkcija niza (X_t) . Poslednje dve konvergencije daju

$$\hat{\rho}_T(1) \xrightarrow{s.i.} \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \rho(1), \quad T \rightarrow \infty$$

a odavde, na osnovu poznate osobine neprekidnosti skoro izvesne kovergencije (videti Serfling [53], str. 24), sledi konvergencija (3.3.2), tj. važi postojanost ocene \tilde{b}_c .

Pretpostavimo sada da je raspodela niza (ε_t^2) apsolutno-neprekidnog tipa sa funkcijom raspodele $F(x) = P\{\varepsilon_t^2 \leq x\}$. Na osnovu prethodno pokazane konvergencije (3.3.2) i iste osobine neprekidnosti primenjene na funkciju $F^{-1}(x)$ važi

$$\tilde{c} - c = F^{-1}(\tilde{b}_c) - F^{-1}(b_c) \xrightarrow{s.i.} 0, \quad T \rightarrow \infty$$

čime je dokaz teoreme završen. \square

Sledećim tvrđenjem pokazaćemo asimptotsku normalnost datih ocena.

Teorema 3.3.2. *Neka su \tilde{b}_c i \tilde{c} ocene nepoznatih parametara b_c i c , respektivno, pri čemu je raspodela niza (ε_t) simetrična u odnosu na nulu i važi:*

$$(i) \quad E(\theta_t^2 \varepsilon_{t-1}^2) = \int_0^c x dF(x) = L\sigma^2$$

$$(ii) \quad E(\varepsilon_t^4) = \eta\sigma^4$$

$$(iii) \quad E(\varepsilon_t^6) = \phi\sigma^6$$

gde je $L = L(c) > 0$, $\eta > 0$, $\phi > 0$ i $F(x) = P\{\varepsilon_t^2 \leq x\}$ funkcija raspodele za ε_t^2 . Tada važi

$$(3.3.5) \quad \sqrt{T}(\tilde{b}_c - b_c) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_1), \quad T \rightarrow \infty$$

gde je $V_1 = (1 + b_c)^2 [1 + b_c(1 + \eta + 5L) - 3b_c^2]$. Dodatno, u slučaju apsolutno-neprekidne raspodele niza (ε_t) važi

$$(3.3.6) \quad \sqrt{T}(\tilde{c} - c) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_2), \quad T \rightarrow \infty$$

gde je $V_2 = V_1/f^2(c)$, a $f(x) = F'(x)$ funkcija gustine raspodele slučajnih veličina ε_t^2 .

Dokaz. Pokazujemo najpre asimptotsku normalnost ocene $\hat{\rho}_T$. U tom cilju uočimo najpre niz slučajnih veličina

$$Z_t = X_t X_{t+1}, \quad t = 0, \dots, T-1$$

koji je 1-zavistan (u smislu Definicije 6.3.1, Fuller [25], str. 245). Na osnovu uslova (iii) i osnovnih nejednakosti (Cauchy-Swartz-Minkowski) pokazuje se da je

$$\begin{aligned} E|Z_t + b_c\sigma^2|^3 &\leq \left[\left(E|Z_t|^3 \right)^{1/3} + b_c\sigma^2 \right]^3 \leq \left[\left(E|X_t|^6 E|X_{t+1}|^6 \right)^{1/6} + b_c\sigma^2 \right]^3 \\ &\leq (4\phi^{1/3} + b_c)^3 \sigma^6 < \infty. \end{aligned}$$

Pritom, poslednja nejednakost dobija se ponovnom primenom nejednakosti Minkovskog na šesti moment zbira $X_t = \varepsilon_t + (-\theta_{t-1}\varepsilon_{t-1})$, odakle dobijamo

$$E|X_t|^6 \leq \left[(E|\varepsilon_t|^6)^{1/6} + (E|\varepsilon_{t-1}|^6)^{1/6} \right]^6 = (2\sigma)^6 \phi.$$

Tada, na osnovu teoreme Hoeffding-Robbins-a, važi

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=0}^{T-1} [Z_t - \gamma(1)] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, A), \quad T \rightarrow \infty$$

gde je

$$A = \text{Var}(Z_t) + 2\text{Cov}(Z_t Z_{t+1}) = \sigma^4 \left[1 + b_c(1 + \eta + 5L) - 3b_c^2 \right].$$

Dalje, primenom skoro izvesne konvergencije (3.3.4) imamo

$$\sqrt{T} [\hat{\rho}_T - \rho(1)] \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_0), \quad T \rightarrow \infty$$

gde je

$$V_0 = A \cdot \gamma^{-2}(0) = \left[1 + b_c(1 + \eta + 5L) - 3b_c^2 \right] \cdot (1 + b_c)^{-2}.$$

Sada, koristeći teoremu o neprekidnosti konvergencije u raspodeli (Serfling [53], str. 118) dobijamo, konačno, konvergenciju (3.3.5), pri čemu smo koristili jednakost

$$V_1 = \left[\frac{d\rho(1)}{db_c} \right]^{-2} \cdot V_0.$$

Na sličan način pokazujemo i asimptotsku normalnost ocene \tilde{c} . Ukoliko je raspodela slučajnih veličina (ε_t) apsolutno-neprekidnog tipa, onda je, zbog

$$\tilde{c} = F^{-1}(\tilde{b}_c),$$

slučajna veličina \tilde{c} neprekidna funkcija ocene \tilde{b}_c . Primenivši istu teoremu o neprekidnosti konvergencije u raspodeli, kao i činjenicu

$$V_2 = \left[\frac{dF(c)}{dc} \right]^{-2} \cdot V_1,$$

dobijamo konvergenciju (3.3.6). \square

3.3.2 Ocena \hat{c}

Prethodna tvrđenja ukazuju na kvalitet i "dobre" stohastičke osobine ocena \tilde{b}_c i \tilde{c} . Ipak, može se pokazati da \tilde{b}_c , slično linearnim MA-serijama, nije efikasna ocena za b_c (asimptotska efikasnost ocene \tilde{b}_c , opisana disperzijom V_1 , u slučaju gausovskog šuma analizirana je na kraju ovog odeljka). U cilju dobijanja efikasnijih ocene datih parametara izvršićemo modifikaciju poznatog Gauss-Newton-ovog metoda ocenjivanja parametara nelinearnih funkcija, detaljno opisanom, na primer, u monografiji Fuller-a [25].

Najpre uočimo da jednakost (3.2.12) možemo napisati u obliku

$$\varepsilon_t = X_t + \theta_{t-1} \varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, \dots, T$$

ili, u funkcionalnom obliku,

$$\varepsilon_t(X, \theta) = X_t + \theta_{t-1} \varepsilon_{t-1}(X, \theta)$$

na osnovu kojeg ocenjujemo parametar $b_c \in (0, 1)$. Neka je sada \tilde{b}_c inicijalna (ocenjena) vrednost datog parametra, dobijena prethodno opisanim postupkom, $\tilde{\theta}_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq \tilde{c})$ i $\varepsilon_0(X, \theta) \equiv 0$. Na osnovu ovih ocenjenih vrednosti u mogućnosti smo da formiramo vrednosti za $\varepsilon_t(X, \tilde{\theta})$ iterativnim postupkom

$$\varepsilon_t(X, \tilde{\theta}) = X_t + \tilde{\theta}_{t-1} \varepsilon_{t-1}(X, \tilde{\theta}).$$

S druge strane, definišimo niz slučajnih veličina

$$W_t(X, \theta) = \theta_t W_{t-1}(X, \theta) + \varepsilon_{t-1}(X, \theta)$$

i, u skladu sa prethodnom notacijom, označimo $W_t(X, \tilde{\theta}) = W_t(X, \theta) \Big|_{\theta=\tilde{\theta}}$. Lako je uočiti da slučajne veličine $W_t(X, \theta)$ jesu \mathcal{F}_{t-1} adaptirane, za svako

$t = 1, \dots, T$, kao i nezavisne od ε_t i θ_{t+1} . Na osnovu teoreme u Popović [46] sledi da niz $(W_t(X, \theta))$ jeste stacionaran, ergodičan niz slučajnih veličina. Ovom nizu, postupkom opisanim u Lawrence i Lewis [35], možemo pridružiti tzv. rezidualni niz

$$R_t(X, \theta) = W_t(X, \theta) - b_c W_{t-1}(X, \theta), \quad t = 1, \dots, T$$

za koji se na jednostavan način pokazuje nekoreliranost. Poslednja jednakost definiše niz $(W_t(X, \theta))$ kao linearan AR proces sa šumom $(R_t(X, \theta))$, pa standardnim regresionim postupkom možemo formirati ocenu parametra b_c u obliku

$$(3.3.7) \quad \hat{b}_c = \left[\sum_{t=0}^{T-1} W_{t+1}(X, \tilde{\theta}) W_t(X, \tilde{\theta}) \right] \cdot \left[\sum_{t=0}^{T-1} W_t^2(X, \tilde{\theta}) \right]^{-1}.$$

Na isti način kao ranije, na osnovu ocene \hat{b}_c moguće je odrediti odgovarajuću ocenu kritične vrednosti $c = \hat{c}$, kao rešenje jednačine

$$(3.3.8) \quad P\{\varepsilon_t^2 \leq c\} = \hat{b}_c$$

po nepoznatoj c . Pokazujemo sada, kao i u prethodnom izlaganju, konzistentnost ocena \hat{b}_c i \hat{c} .

Teorema 3.3.3. *Neka su \hat{b}_c i \hat{c} , definisane kao u (3.3.7) i (3.3.8), ocene nepoznatih parametara b_c i c , respektivno. Tada važi*

$$(3.3.9) \quad \hat{b}_c \xrightarrow{s.i.} b_c, \quad T \rightarrow \infty.$$

Ako je, dodatno, raspodela niza (ε_t^2) aspotlutno-neprekidnog tipa sa funkcijom raspodele $F(x)$ važi i

$$(3.3.10) \quad \hat{c} \xrightarrow{s.i.} c, \quad T \rightarrow \infty.$$

Dokaz. Kako je, na osnovu (3.3.7) i definicije rezidualnog niza,

$$(3.3.11) \quad \hat{b}_c - b_c = \left[\sum_{t=0}^{T-1} R_{t+1}(X, \tilde{\theta}) W_t(X, \tilde{\theta}) \right] \cdot \left[\sum_{t=0}^{T-1} W_t^2(X, \tilde{\theta}) \right]^{-1},$$

primenom ergodičke teoreme imamo skoro izvesnu konvergenciju

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} R_{t+1}(X, \tilde{\theta}) W_t(X, \tilde{\theta}) \rightarrow A_t, \quad T \rightarrow \infty$$

gde je $A_t = E \left[R_{t+1}(X, \theta) \cdot W_t(X, \theta) \right] = 0$. Na sličan način važi skoro izvesna konvergencija

$$(3.3.12) \quad \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} W_t^2(X, \tilde{\theta}) \longrightarrow B_t, \quad T \longrightarrow \infty$$

pri čemu je $B_t = \text{Var} \left[W_t(X, \theta) \right] = \sigma^2(1 - b_c)^{-1}$. Primenom dobijenih konvergencija na jednakost (3.3.11) dobijamo (3.3.9).

Drugi deo tvrđenja teoreme pokazuje sa na identičan način kao u Teoremi 3.3.1. Naime, kako je $\hat{c} = F^{-1}(\hat{b}_c)$ neprekidna funkcija postojane ocene \hat{b}_c , jednostavno se pokazuje da važi (3.3.10). \square

Na kraju ovog dela, narednim tvrđenjem pokazujemo asimptotsku normalnost ocena \hat{b}_c i \hat{c} .

Teorema 3.3.4. *Neka su $\hat{b} = \hat{b}_c$ i \hat{c} ocene nepoznatih parametara b_c i c , respektivno, a raspodela niza (ε_t) simetrična u odnosu na nulu i važi:*

$$(i) \quad E(\theta_t \varepsilon_{t-1}^2) = \int_0^c x dF(x) = L\sigma^2$$

$$(ii) \quad E(\varepsilon_t^4) = \eta\sigma^4$$

gde je $L = L(c) > 0$, $\eta > 0$ i $F(x)$ funkcija raspodele za ε_t^2 . Tada važi

$$(3.3.13) \quad \sqrt{T}(\hat{b}_c - b_c) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_3), \quad T \longrightarrow \infty$$

gde je $V_3 = (1 - b_c)[1 + 6Lb_c + \eta b_c(1 - b_c)]$. Ako je, dodatno, raspodela niza (ε_t^2) aspolutno-neprekidnog tipa onda važi

$$(3.3.14) \quad \sqrt{T}(\hat{c} - c) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_4), \quad T \longrightarrow \infty$$

gde je $V_4 = V_3/f^2(c)$, a $f(x) = F'(x)$.

Dokaz. Na osnovu jednakosti (3.3.11) važi razlaganje

$$(3.3.15) \quad \sqrt{T}(\hat{b}_c - b_c) = \frac{T^{-1/2} \cdot \mathbb{U}_{T-1}}{T^{-1} \cdot \mathbb{V}_{T-1}}$$

gde je

$$\mathbb{U}_{T-1} = \sum_{t=0}^{T-1} R_{t+1}(X, \tilde{\theta}) \cdot W_t(X, \tilde{\theta}), \quad \mathbb{V}_{T-1} = \sum_{t=0}^{T-1} W_t^2(X, \tilde{\theta}).$$

Kako niz (\mathbb{U}_T) predstavlja martingal, primenom Billingsley-eve centralne granične teoreme za martingale (videti Billingsley [4]), imamo

$$T^{-1/2} \cdot \mathbb{U}_T \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D_1), \quad T \rightarrow \infty,$$

gde je $D_1 = \text{Var} [R_{t+1}(X, \theta) \cdot W_t(X, b_c)] = \sigma^4 [1 + 6Lb_c + \eta b_c(1 - b_c)](1 - b_c)^{-1}$. Tada, na osnovu skoro izvesne konvergencije (3.3.12) i jednakosti (3.3.15), neposredno se dobija (3.3.13).

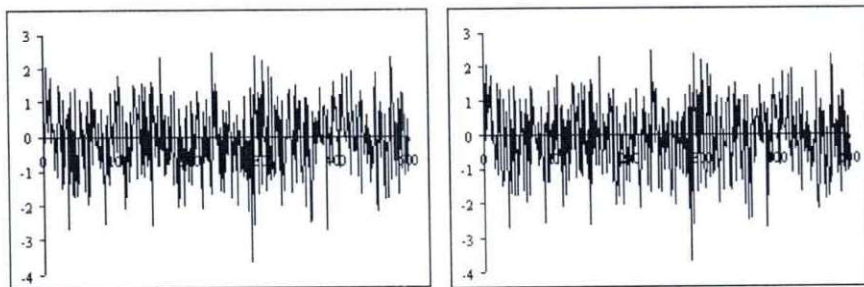
Najzad, dokaz konvergencije (3.3.14) potpuno je analogan kao u Teoremi 3.3.2. \square

Na kraju ovog odeljka uočimo još par činjenica koje neposredno slede na osnovu gore opisanog postupka ocenjivanja kritične vrednosti c , kao i pokazanih tvrđenja.

1. Na osnovu dobijenih ocena \tilde{b}_c i \hat{b}_c , odnosno modelovanih vrednosti šuma (ε_t) može se oceniti i vrednost njihove disperzije σ^2 . Klasičan postupak ocenjivanja zasniva se, recimo, na uzoračkoj disperziji

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2(X, \tilde{\theta}) \quad \text{ili} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2(X, \hat{\theta})$$

gde su $\varepsilon_t(X, \tilde{\theta})$ i $\varepsilon_t(X, \hat{\theta})$ modelovane vrednosti belog šuma dobijene na osnovu ocena \tilde{b}_c i \hat{b}_c , respektivno. U slučaju gausovnosti šuma (ε_t) ove ocene

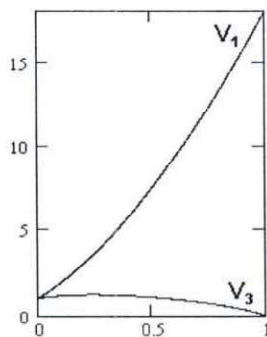


Slika 3.1: Upporedne vrednosti belog šuma (slika levo) u odnosu na modelirane vrednosti (desno).

identične su ocenama maksimalne verodostojnosti, kao što je pokazano u Stojanović i Popović [58]. Na jednostavan način tada se pokazuje postojanost i asimptotska normalnost ocena $\tilde{\sigma}$ i $\hat{\sigma}$. Kao ilustraciju, na slici 3.1

možemo uočiti "dobro" slaganje realizacija belog šuma (ε_t) sa standardnom $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom, dobijenog Monte Carlo simulacijom (videti naredno poglavlje), u odnosu na vrednosti modelovanog šuma $(\varepsilon_t(X, \tilde{\theta}))$, generisanog na osnovu ocene \tilde{b}_c .

2. Vrednosti asimptotskih disperzija V_1 i V_3 uobičajeno tumačimo kao mere "rasipanja" ocena \tilde{b}_c i \hat{b}_c , respektivno, od stvarne vrednosti parametra b_c . Posmatrane kao funkcije po $b_c \in (0, 1)$, vrednosti za V_1 i V_3 mogu se uporediti i time uočiti kvalitet posmatranih ocena.



Slika 3.2: Uporedne vrednosti asimptotskih disperzija $\tilde{b}_c - b_c$ i $\hat{b}_c - b_c$.

Na slici 3.2 prikazani su grafikoni funkcija $V_1 = V_1(b_c)$ i $V_3 = V_3(b_c)$ u slučaju $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodele belog šuma (ε_t) . U ovom slučaju važi

$$V_3(b_c) < V_1(b_c), \quad \forall b_c \in (0, 1),$$

tj. ocena \hat{b}_c je (znatno) efikasnija od \tilde{b}_c , čime se i opravdava njeno uvođenje.

3.3.3 Monte Carlo simulacija Split-MA(1) modela

U ovom delu izložićemo neke praktične primene gore opisanog postupka ocenjivanja kritične vrednosti Split-MA(1) modela. Najpre smo, koristeći Monte Carlo simulacije modela

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_{t-1} \varepsilon_{t-1}, \quad t = 1, \dots, 500$$

pri čemu je $\theta_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq 1)$ i $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = 0$, dobili odgovarajuće ocene kritične vrednosti $c = 1$, odnosno verovatnoće $b_c = P\{\varepsilon_t^2 \leq 1\}$. Kao beli šum uzet je prost slučajani uzorak iz populacije sa $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom, pa članovi niza (ε_t^2) imaju χ_1^2 raspodelu, koja je i korišćena u određivanju ocena kritične vrednosti reakcije \tilde{c} i \hat{c} . Prikaz ocenjenih vrednosti svih parametara koji su opisani u prethodnom delu, na osnovu 25 nezavisnih Monte Carlo simulacija, dat je zajedno sa njihovom prosečnom vrednošću u narednoj tabeli:

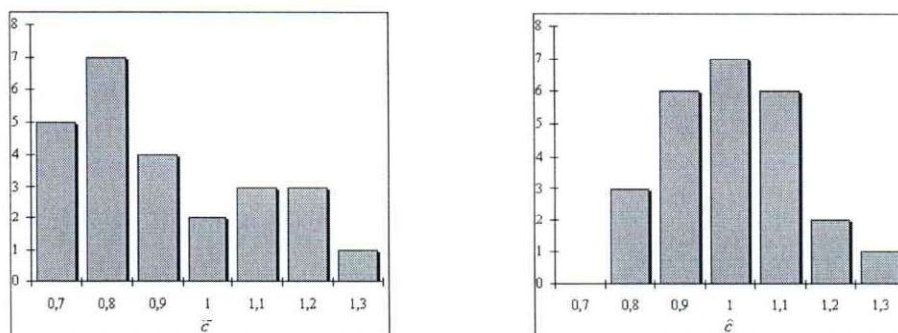
Redni broj	$\hat{\rho}_T(1)$	\tilde{b}_c	\tilde{c}	\hat{b}_c	\hat{c}	$\tilde{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}^2$
1.	-0,384	0,624	0,784	0,682	0,999	1,125	1,032
2.	-0,370	0,587	0,669	0,655	0,893	1,231	1,105
3.	-0,385	0,627	0,793	0,693	1,045	1,125	1,063
4.	-0,418	0,717	1,153	0,714	1,138	1,143	1,115
5.	-0,415	0,709	1,113	0,703	1,087	1,013	1,093
6.	-0,399	0,664	0,927	0,616	0,757	1,130	0,956
7.	-0,411	0,697	1,062	0,640	0,840	1,136	1,147
8.	-0,418	0,719	1,160	0,706	1,101	1,082	1,036
9.	-0,391	0,641	0,841	0,683	1,001	1,106	0,989
10.	-0,382	0,618	0,765	0,649	0,870	1,167	1,169
11.	-0,427	0,744	1,292	0,745	1,297	1,145	1,145
12.	-0,380	0,612	0,745	0,646	0,859	1,159	1,004
13.	-0,375	0,601	0,712	0,660	0,911	1,295	1,058
14.	-0,371	0,589	0,675	0,653	0,886	1,166	1,084
15.	-0,409	0,692	1,039	0,700	1,073	0,946	0,950
16.	-0,399	0,663	0,923	0,720	1,169	1,043	1,051
17.	-0,390	0,638	0,823	0,658	0,903	1,043	1,035
18.	-0,397	0,658	0,901	0,680	0,989	1,148	1,077
19.	-0,402	0,672	0,957	0,680	0,990	0,990	0,984
20.	-0,392	0,644	0,851	0,707	1,106	1,387	1,246
21.	-0,423	0,732	1,228	0,742	1,280	1,216	1,304
22.	-0,384	0,624	0,783	0,646	0,860	1,049	1,038
23.	-0,388	0,633	0,814	0,632	0,810	1,165	1,130
24.	-0,371	0,590	0,678	0,698	1,065	1,204	1,086
25.	-0,416	0,711	1,124	0,678	0,982	1,081	1,002
Prosečne vrednosti:	-0,396	0,656	0,921	0,679	1,000	1,132	1,076

Kao što možemo uočiti, u tabelu smo najpre uneli ocenjene vrednosti empirijskog koeficijenta prve korelacije $\hat{\rho}_T(1)$. Njihova prosečna vrednost -0,396 donekle se razlikuje od stvarne, teoretske vrednosti prve korelacije koja u ovom slučaju iznosi

$$\rho(1) = -\frac{b_c}{1 + b_c} = -0,406.$$

U narednim dvema kolonama prikazane su vrednosti ocena \tilde{b}_c i \tilde{c} dobijene na osnovu koeficijenta proste linearne korelacije $\hat{\rho}_T$, formule (3.3.1) i tabličnih vrednosti χ_1^2 raspodele. Njihova prosečna vrednost je manja od stvarnih vrednosti ovih parametara koje iznose, redom, $b_c = 0,682689\dots$, odnosno $c = 1$.

Naravno, u slučaju Gauss-Newton-ovih ocena postoji bolje, izraženije slaganje ocena ova dva parametra. Realizovane vrednosti ocena \hat{b}_c i \hat{c} u većini slučajeva znatno su bliže stvarnim vrednostima parametara b_c i c . Tako je, recimo, prosečna vrednost ocene $\hat{b}_c = 0,679$ bliža stvarnoj vrednosti funkcije raspodele χ_1^2 raspodeljene slučajne veličine, a prosečna vrednost za \hat{c} je jednaka stvarnoj vrednosti parametra $c = 1$. Na slici 3.3 možemo uočiti i stepen "rasejanja" \tilde{c} i \hat{c} u odnosu na stvarnu vrednost parametra c . Kao što vidimo, realizacije ocena \tilde{c} znatno su neujednačenije u odnosu na ocenjene vrednosti \hat{c} , koje već i na ovako malom uzorku pokazuju pravilnije ponašanje i tendenciju ka normalnoj raspodeli.



Slika 3.3: Histogrami empirijskih raspodela ocena \tilde{c} i \hat{c} .

Najzad, u poslednjim dvema kolonama tabele prikazane su ocenjene vrednosti disperzije σ^2 , na osnovu modeliranih vrednosti belog šuma (ε_t) o kojima je bilo reči u prethodnom odeljku. Njihova prosečna vrednost je veća od stvarne vrednosti $\sigma^2 = 1$ što tumačimo dvoetafnim postupkom ocenjivanja ovog parametra: najpre ocenjujemo b_c i c , a zatim, na osnovu njih, modeliranjem vrednosti za (ε_t) dobijamo ocenu disperzije. Naravno, i ovde je prosečna vrednost ocene $\hat{\sigma}^2$ bliža stvarnoj vrednosti disperzije u odnosu na ocenu $\tilde{\sigma}^2$.

3.4 Primena Split-BREAK modela

Na kraju, kao ilustraciju praktične primene pragovnog STOPBREAK procesa, pokazaćemo da on može biti adekvatan stohastički model dinamike vrednosti obima trgovanja akcijama na domaćem tržištu hartija od vrednosti. Polazeći od sličnih pretpostavki kao i Hafner [31], kao osnovni finansijski niz posmatramo realizacije tzv. *log-volumena*

$$(3.4.1) \quad y_t = \ln(S_t \cdot H_t), \quad t = 0, 1, \dots, T$$

gde je S_t cena akcija, a H_t fizički obim njihovog trgovanja⁴ u momentu t .

Na osnovu dobijenih vrednosti niza (y_t) najpre smo metodom uslovne maksimalne verodostojnosti ocenili njegovu nepoznatu uslovnu disperziju σ^2 . Pri pretpostavci o gausovnosti šuma (ε_t) , koji ima istu disperziju, logaritmovani oblik funkcije verodostojnosti glasi

$$L(y_1, \dots, y_T; \sigma^2) = -\frac{T}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=1}^T (y_t - m_t)^2$$

odakle se dobija ocenjena vrednost disperzije

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - m_t)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2$$

identična uzoračkoj disperziji niza (ε_t) . Na osnovu nje, u mogućnosti smo da primenom jednakosti

$$(3.4.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_t = y_t - m_t \\ m_t = m_{t-1} + \varepsilon_{t-1} I(\varepsilon_{t-2}^2 > \hat{c}) \end{cases}, \quad t = 1, \dots, T$$

generišemo odgovarajuće vrednosti kako za niz (ε_t) , tako i za (m_t) . Pritom, kao ocene kritične vrednosti reakcije uzimamo ocene \hat{c} opisane u prethodnom delu. Najzad, kao početne vrednosti iterativnog postupka (3.4.2) uzećemo

$$m_0 = y_0 = \bar{y}_T, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = 0,$$

⁴Cena akcija iskazana je u dinarima, dok je obim njihovog trgovanja iskazan ukupnim brojem akcija kojima se trgovalo tog dana. Kao susedni podaci uzeti su dani trgovanja akcijama.

gde smo sa \bar{y}_T označili empirijsku srednju vrednost niza (y_t).

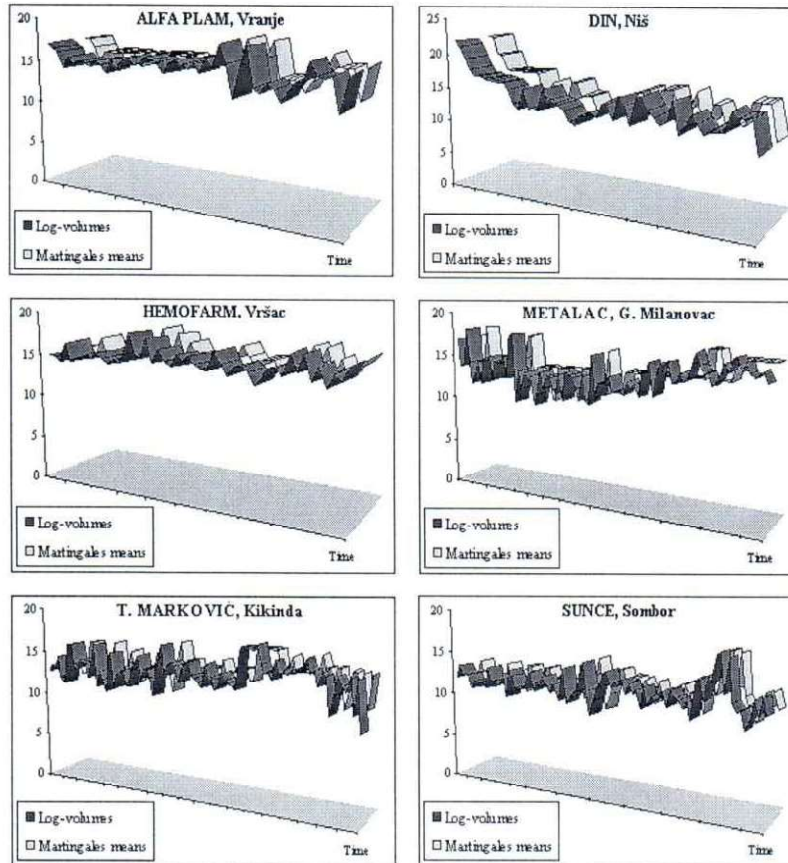
Na ovaj način dobijaju se modelirane vrednosti nizova (m_t) i (ε_t) na osnovu kojih se formira odgovarajući stohastički model dinamike datog finansijskog niza. Pritom, osnovni empirijski nizovi su log-volumeni definisani jednakošću (3.4.1), na osnovu kojih se jednostavno određuju vrednosti niza priraštaja (X_t), odnosno realizacije Split-MA(1) procesa o kome je bilo reči u ranijem izlaganju. U narednoj tabeli prikazane su, za odgovarajuća preduzeća, najpre ocenjene vrednosti kritične vrednosti reakcije Split-BREAK procesa (\hat{c}), a zatim srednje vrednosti i disperzije svih ranije opisanih nizova: log-volumena (y_t), martingalnih proseka (m_t), Split-MA(1) procesa (X_t), kao i belog šuma (ε_t):

Firme	\hat{c}	Log-volumeni		Mar. proseci		Split-MA(1)		Beli šum	
		Mean	Var	Mean	Var	Mean	Var	Mean	Var
ALFA PLAM Vranje	0.753	15.320	1.505	15.354	1.457	-0.011	2.460	-0.034	2.510
DIN Niš	3.292	14.485	4.998	14.628	6.071	0.003	4.116	-0.143	5.016
HEMOFARM Vršac	0.836	15.250	0.814	15.310	0.694	0.030	1.741	-0.042	1.576
METALAC G. Milanovac	5.223	13.665	2.788	13.798	2.731	0.001	4.002	-0.133	4.376
T. MARKOVIĆ Kikinda	0.965	13.816	2.295	13.830	1.977	-0.016	2.442	0.026	3.982
SUNCE Sombor	3.132	12.748	2.282	12.730	2.151	-0.024	1.978	-0.005	2.052

Detaljnijom analizom dobijenih serija, odnosno upoređivanjem empirijskih vrednosti njihovih parametara, uočava se zanimljiva veza koja se može objasniti prethodnim teoretskim rezultatima. Naime, empirijska srednja vrednost log-volumena je "bliska" srednjoj vrednosti martingalnih proseka, što je u skladu sa jednakostima (3.2.3) i (3.2.4).

Dobro slaganje ova dva niza može se uočiti na slici 3.4 gde su, uporedo sa empirijskim vrednostima log-volumena, date i modelirane vrednosti martingalnih proseka. Dobijene realizacije ovih nizova jasno ukazuju na njihovu

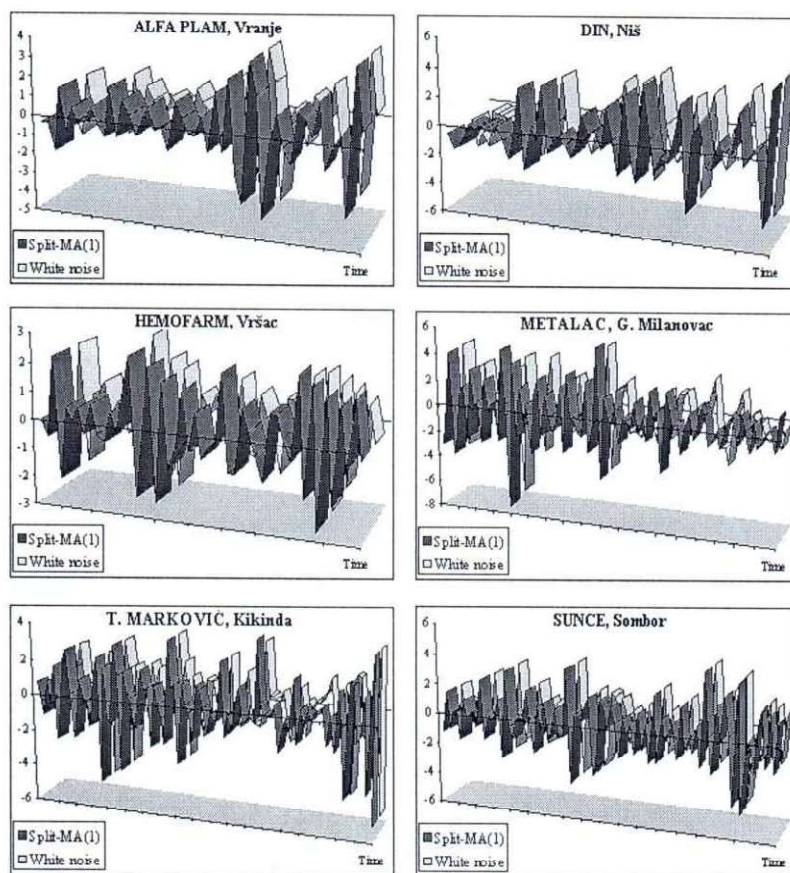
naglašenu, visoku korelaciju, u skladu sa samom definicijom STOPBREAK procesa, odnosno jednakošću (3.1.1). Ovim se i opravdava izbor pragovnog STOPBREAK procesa kao odgovarajućeg stohastičkog modela.



Slika 3.4: Uporedni grafikoni realizacija log-volumena i modeliranih podataka (martingalnih proseka).

S druge strane, slaganje belog šuma (ε_t) sa priraštajima (X_t) prikazano je na slici 3.5. Visok stepen korelacije ova dva niza može se i teoretski objasniti, na način na koji je to učinjeno u odeljku 3.2.2. Naime, ukoliko u nekom vremenskom trenutku niz (X_t) ima naglašenu fluktuaciju, on u narednom trenutku postaje jednak šumu (ε_t). Jasno je da će jednakost u

realizacijama ova dva biti utoliko veća ukoliko, pored naglašenih fluktuacija niza (X_t), i kritična vrednost reakcije c bude relativno mala. Takav je slučaj, recimo, sa ocenjenom vrednošću ovog parametra koji odgovara preduzećima ALFA iz Vranja, HEMOFARM iz Vršca ili TOZA MARKOVIĆ iz Kikinde.



Slika 3.5: Uporedni grafikoni realizacija Split-MA(1) procesa i modeliranih podataka (belog šuma)

Male vrednosti parametra c ukazuju, dakle, na moguću hipotezu o tome da je stvarna vrednost ovog parametra $c = 0$, kada se niz priraštaja (X_t) u potpunosti izjednačava sa šumom (ε_t). Osnovni niz (y_t) tada predstavlja niz sa nezavisnim priraštajima i celokupna statistička analiza njegove dinamike

dobija na jednostavnosti. Naravno, u slučaju realizacija ovih nizova koje su većeg obima, testiranje nulte hipoteze

$$H_0 : c = 0 \quad (\text{odnosno } b_c = 0)$$

moguće je, na osnovu ranije pokazanih asimptotskih osobina ocena \tilde{c} i \hat{c} , izvršiti standardnim, poznatim testovima zasnovanim na normalnoj raspodeli.

3.5 Opšti model Split-BREAK procesa

Pragovni STOPBREAK proces, kao i njemu odgovarajući Split-MA proces koje smo dosad razmatrali, mogu se interpretirati kao najjednostavniji slučajevi opštijeg stohastičkog modela. Opšti oblik STOPBREAK procesa dali su, u svom radu, Engle i Smith definišući ga izrazom

$$A(L)B(L)y_t = q_{t-1}A(L)\varepsilon_t + (1 - q_{t-1})B(L)\varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T$$

gde je $A(L) = 1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j L^j$, $B(L) = 1 - \sum_{k=1}^s \beta_k L^k$, a L tzv. *operator pomeraja*.⁵ Ovaj model, za $A(L) = 1$ i $B(L) = 1 - L$ daje osnovni STOPBREAK proces o kome je bilo ranije reči.

Međutim, čini se da ovakva formulacija opšteg STOPBREAK procesa jeste neadekvatna u našem slučaju, kada niz (q_t) predstavlja indikator šuma, definisan jednakošću (3.2.1). Razlog tome leži u činjenici da gore navedeni model Engle-a i Smith-a, u svojoj formulaciji, sadrži samo one realizacije niza (q_t) koje su dobijene u "neposredno prethodnom" vremenskom trenutku $t-1$. Na taj način, čak i u ovako opštem obliku, naš pragovni STOPBREAK proces funkcionisao bi opet u (samo) dva različita režima koje, koristeći oznake i pretpostavke iz prethodnog dela, možemo opisati na sledeći način

$$\varepsilon_t = \begin{cases} A(L)y_t, & q_{t-1} = 0 \text{ (s.v. } b_c) \\ B(L)y_t, & q_{t-1} = 1 \text{ (s.v. } a_c). \end{cases}$$

U oba gore navedena slučaja niz (y_t) predstavlja standardni linearni autoregresivni niz, pa gornja jednakost definiše poznati *pragovni autoregresivni*

⁵Po definiciji je $Ly_t = y_{t-1}, \dots, L^k y_t = L^{k-1}(Ly_t) = y_{t-k}$, itd.

model (TAR model) uveden od strane Tong-a [63] i detaljno proučen, recimo, u radovima Chan-a [13], Hansen-a [29] i ostalih brojnih autora.

Iz ovih razloga mi ćemo, u daljem izlaganju, dati donekle drugačije uopštenje STOPBREAK procesa koje, kao što ćemo videti, predstavlja opštiji oblik od gore opisanog. On u sebi sadrži, pored osnovnog, ranije definisanog Split-BREAK procesa, još niz drugih poznatih stohastičkih modela koji se mogu posmatrati kao njegovi posebni specijalni oblici.

3.5.1 Definicija i osnovne osobine

Opšti oblik pragovnog STOPBREAK procesa zadajemo formalno, sledećom definicijom.

Definicija 3.5.1. Neka je L operator pomeraja, (q_t) indikator šuma definisan sa (3.2.1), $A(L) = 1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i L^i$, $B(L) = 1 - \sum_{j=1}^n \beta_j L^j$ i $C(L) = 1 - \sum_{k=1}^p \gamma_k L^k$.

Izraz

$$(3.5.1) \quad A(L)y_t = B(L)q_t\varepsilon_t + C(L)(1 - q_t)\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

predstavlja *opšti model pragovnog STOPBREAK procesa* (y_t) . Niz

$$X_t = A(L)y_t$$

nazivamo *opšti pragovni MA proces*. \triangle

Na osnovu ove definicije jasno je da za $A(L) = C(L) = 1 - L$, $B(L) = 1$ stohastički model (3.5.1) daje prethodni, osnovni oblik pragovnog STOPBREAK procesa koji smo izučavali ranije. Štaviše, ovako uopšten model STOPBREAK procesa sadrži, kao posebne oblike, i niz drugih poznatih modela. Navedimo neke od njih:

$$A(L) = B(L) = C(L) = 1 : \quad y_t = \varepsilon_t \text{ (Beli šum)}$$

$$A(L) = 1, B(L) = C(L) \neq 1 : \quad y_t = B(L)\varepsilon_t \text{ (MA model)}$$

$$A(L) \neq 1, B(L) = C(L) = 1 : \quad A(L)y_t = \varepsilon_t \text{ (AR model)}.$$

U daljem radu pretpostavićemo da važi $A(L) = C(L) \neq 1$ i $B(L) = 1$. Tada model (3.5.1) možemo napisati u obliku

$$(3.5.2) \quad y_t - \sum_{j=1}^p \alpha_j y_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^p \alpha_j \theta_{t-j} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

gde je, kao i ranije, $\theta_t = 1 - q_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c)$. Lako je uočiti da je ovakva reprezentacija STOPBREAK procesa slična opštem modelu linearnih ARMA serija, s tom razlikom što se unutar nje nalaze odgovarajući indikatori šuma (ε_t). Oni ukazuju na to da li je neposredno prethodna realizacija šuma dovoljno statistički značajna da bi se našla unutar modela (3.5.2), na osnovu kojeg se izračunava naredna realizacija niza (y_t). Pojava ovakvih "povremenih" članova dovodi do promena u samoj ARMA strukturi modela (3.5.2), čime se dosta otežava i postupak ispitivanja njegovih stohastičkih osobina. Ipak, pokušaćemo da sledećim tvrđenjem definišemo, slično linearnim vremenskim serijama, potrebne i dovoljne uslove stacionarnosti navedenog modela.

Teorema 3.5.1. *Niz (y_t) definisan rekurentnom relacijom (3.5.2) jeste stacionaran (u slabom smislu) akko koreni λ_j , $j = 1, \dots, p$ karakterističnog polinoma*

$$P(\lambda) = \lambda^p - \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda^{p-j}$$

zadovoljavaju uslov $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, \dots, p$ ili, ekvivalentno, $\sum_{j=1}^p \alpha_j < 1$.

Tada je $E(y_t) = 0$, dok kovarijaciona funkcija $\gamma_Y(h) = E(y_{t+h} y_t)$, $h \geq 0$ zadovoljava diferencnu jednačinu

$$(3.5.3) \quad \gamma_Y(h) - \sum_{j=1}^p \alpha_j [\gamma_Y(h-j) - s(j-h)I(j-h > 0)] = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases},$$

gde je $s(h)$, $h \geq 0$ rešenje diferencne jednačine

$$s(h) - \sum_{j=1}^p \alpha_j s(h-j) = 0, \quad h \geq p$$

sa početnim uslovima $s(0) = b_c \sigma^2$, $s(k) = \sum_{j=1}^k \alpha_j s(k-j)$, $k = 1, \dots, p-1$.

Dokaz. Definišimo najpre nizove slučajnih veličina

$$U_t = y_t - \theta_t \varepsilon_t, \quad V_t = q_t \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Na osnovu jednakosti (3.5.2) tada važi

$$U_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j U_{t-j} + V_t$$

tj. (U_t) predstavlja linearni, autoregresivni niz slučajnih veličina sa šumom (V_t) . Primenom poznatih osobina AR modela (videti, recimo, Fuller [25]), zaključujemo da niz (U_t) jeste stacionaran (u slabom smislu) sa srednjom vrednošću $E(U_t) = 0$ i kovarijacionom funkcijom $\gamma_U(h)$, $h \geq 0$ koja zadovoljava rekurentnu jednačinu

$$(3.5.4) \quad \gamma_U(h) - \sum_{j=1}^p \alpha_j \gamma_U(h-j) = \begin{cases} a_c \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

akko koreni karakterističnog polinoma $P(\lambda)$ zadovoljavaju uslove navedene u teoremi. Kako je, sada,

$$E(y_t) = E(U_t) + E(\theta_t \varepsilon_t) = 0,$$

kao i

$$\gamma_Y(h) = \gamma_U(h) + s(h) + b_c \sigma^2 I(h=0),$$

gde je $s(h) = E(\theta_{t-h} \varepsilon_{t-h} U_t)$, $h \geq 0$, zamenom poslednje jednakosti u (3.5.4) dobija se relacija (3.5.3) i teorema je dokazana u potpunosti. \square

Pokazana teorema, odnosno sličnost, ali i razlika kovarijacionih funkcija (3.5.3) i (3.5.4), dobro ilustruje činjenicu o tome u kojoj je meri stacionaran STOBREAK proces (y_t) srodan odgovarajućem linearnom modelu. S druge strane, jednakost (3.5.2) omogućava da, slično definiciji osnovnog STOP-BRAK procesa, niz (y_t) prikažemo u obliku aditivnog razlaganja

$$y_t = m_t + \varepsilon_t$$

gde je

$$(3.5.5) \quad m_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j (y_{t-j} - \theta_{t-j} \varepsilon_{t-j}) = \sum_{j=1}^p \alpha_j (m_{t-j} + q_{t-j} \varepsilon_{t-j})$$

poznati niz *martingalnih proseka*. Jasno je da ova jednakost predstavlja opšti slučaj jednakosti (3.1.2), koja se, na osnovu nje, dobija za $p = \alpha_1 = 1$. U ovako opštem obliku, osnovne osobine niza (m_t) , pre svih stacionarnost, možemo opisati narednim tvrđenjem.

Teorema 3.5.2. *Niz martingalnih proseka (m_t) jeste stacionaran (u slabom smislu) akko koreni λ_j , $j = 1, \dots, p$ karakterističnog polinoma*

$$P(\lambda) = \lambda^p - \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda^{p-j}$$

zadovoljavaju uslov $|\lambda_j| < 1$, $j = 1, \dots, p$ ili, ekvivalentno, $\sum_{j=1}^p \alpha_j < 1$. Tada je $E(m_t) = 0$, dok kovarijaciona funkcija $\gamma_m(h)$ niza (m_t) zadovoljava diferencnu jednačinu

$$(3.5.6) \quad \gamma_m(h) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \left[\gamma_m(h-j) + \tilde{s}(j-h-1)I(j-h-1 \geq 0) \right],$$

gde je $\tilde{s}(h)$, $h \geq 0$ rešenje diferencne jednačine

$$\tilde{s}(h) - \sum_{j=1}^p \alpha_j \tilde{s}(h-j) = 0, \quad h \geq p$$

sa početnim uslovima $\tilde{s}(0) = \alpha_1 a_c \sigma^2$, $\tilde{s}(k) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \tilde{s}(k-j) + \alpha_{k+1} a_c \sigma^2$, $k = 1, \dots, p-1$.

Dokaz. Na sličan način kao i u prethodnom dokazu, uvodimo nizove

$$M_t = m_t + q_t \varepsilon_t, \quad V_t = q_t \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Tada, na osnovu jednakosti (3.5.5) imamo

$$M_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j M_{t-j} + V_t$$

i ceo postupak analogan je dokazu teoreme 4.1. □

3.5.2 Analiza priraštaja. Opšti model Split-MA procesa

U ovom delu opisaćemo detaljnije stohastičku stukturu niza priraštaja

$$(3.5.7) \quad X_t = y_t - \sum_{j=1}^p \alpha_j y_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

koji, na osnovu definicije 3.5.1 i ostalih pretpostavki datih u prethodnom odeljku, možemo napisati i u obliku rekurentne relacije

$$(3.5.8) \quad X_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^p \alpha_j \theta_{t-j} \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ovakav zapis niza (X_t) ukazuje na njegovu višerežimsku strukturu, koja zavisi od realizacija šumovnog indikatora (θ_t) , ali i sugeriše na "bliskost" ovog modela sa standardnim linearnim modelima pokretnih proseka. Stoga, niz (X_t) opisan modelom (3.5.8) uobičajeno zovemo *uopšteni pragovni MA proces (reda p)* ili, kraće, *Split-MA(p) proces*. Naravno, sasvim je jasno da on predstavlja uopštenje odgovarajućeg Split-MA(1) modela opisanog u ranijem izlaganju, pa se u ispitivanju osnovnih osobina niza (X_t) koristimo manje-više identičnim metodama kao u poglavlju 3.3. Tako se, recimo, jednostavnim preračunavanjima može pokazati sledeće tvrđenje.

Teorema 3.5.3. *Niz (X_t) , definisan jednakošću (3.5.8), jeste stacionaran, sa matematičkim očkivanjem $E(X_t) = 0$ i kovarijacionom funkcijom $\gamma_X(h) = E(X_t X_{t+h})$, $h \geq 0$ koja je oblika*

$$(3.5.9) \quad \gamma_X(h) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 + b_c \sum_{j=1}^p \alpha_j^2 \right), & h = 0 \\ \sigma^2 b_c \left(\sum_{j=1}^{p-h} \alpha_j \alpha_{j+h} - \alpha_h \right), & 1 \leq h \leq p \\ 0, & h > p. \end{cases}$$

Dokaz. Elementaran. □

Slično kao i u slučaju Split-MA(1) modela, može se i ovde, pod određenim uslovima, pokazati invertibilnost niza (X_t) . U narednoj teoremi opisaćemo potrebne i dovoljne uslove egzistencije ove osobine.

Teorema 3.5.4. Niz (X_t) , definisan jednakošću (3.5.8), jeste invertibilan akko koreni r_j , $j = 1, \dots, p$ karakterističnog polinoma

$$Q(\lambda) = \lambda^p - b_c \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda^{p-j}$$

zadovoljavaju uslov $|r_j| < 1$, $j = 1, \dots, p$ ili, ekvivalentno, $b_c \sum_{j=1}^p \alpha_j < 1$.

Tada važi

$$(3.5.10) \quad \varepsilon_t = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(t) X_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

gde je $(\omega_k(t))$ rešenje stohastičke diferencne jednačine

$$(3.5.11) \quad \omega_k(t) = \theta_{t-k} \sum_{j=1}^p \alpha_j \omega_{k-j}(t), \quad k \geq p, \quad t \in \mathbb{Z}$$

sa početnim uslovima

$$\omega_0(t) = 1, \quad \omega_k(t) = \theta_{t-k} \sum_{j=1}^k \alpha_j \omega_{k-j}(t), \quad 1 \leq k \leq p-1.$$

Pritom, gore navedena reprezentacija (3.5.10) je skoro izvesno jedinstvena, a red konvergira u skoro izvesnom i srednje-kvadratnom smislu.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti postupak sličan dokazivanju uslova stacionarnosti modela uslovne heterogenosti⁶. Ako, za proizvoljno $t \in \mathbb{Z}$, uvedemo vektore-matrice

$$\mathbf{V}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & \varepsilon_{t-1} & \cdots & \varepsilon_{t-p+1} \end{pmatrix}', \quad \mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} X_t & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}'$$

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 \theta_t & \alpha_2 \theta_{t-1} & \cdots & \alpha_{p-1} \theta_{t-p+2} & \alpha_p \theta_{t-p+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

⁶Videti, na primer, teoreme 2.1.1 i 2.3.1

onda model (3.5.8) možemo napisati u obliku stohastičke diferencne jednačine I reda

$$(3.5.12) \quad \mathbf{V}_t = \mathbf{A}_{t-1} \mathbf{V}_{t-1} + \mathbf{X}_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Daljim razvojem ove jednačine po $k = 1, 2, \dots$ dobijamo

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{X}_t + \sum_{j=1}^k \left(\mathbf{A}_{t-1} \cdots \mathbf{A}_{t-j} \right) \mathbf{X}_{t-j} + \left(\prod_{j=1}^{k+1} \mathbf{A}_{t-j} \right) \mathbf{V}_{t-k-1}.$$

Odavde se pokazuje (videti Francq et al. [21]) da je egzistencija skoro izvesno jedinstvenog, stacionarnog rešenja jednačine (3.5.12), oblika

$$(3.5.13) \quad \mathbf{V}_t = \mathbf{X}_t + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{A}_{t-1} \cdots \mathbf{A}_{t-k} \right) \mathbf{X}_{t-k}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

ekvivalentna konvergenciji

$$\prod_{j=1}^{k+1} \mathbf{A}_{t-j} \xrightarrow{s.i.} 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

odnosno činjenici da su sopstvene vrednosti matrice

$$\mathbb{A} = E(\mathbf{A}_t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_c & \alpha_2 b_c & \cdots & \alpha_{p-1} b_c & \alpha_p b_c \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

po modulu manje od 1. No, kako je

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = (-1)^p Q(\lambda)$$

to su, u stvari, sopstvene vrednosti r_j , $1 = 1, \dots, p$ nule karakterističnog polinoma $Q(\lambda)$, pa je uslov $|r_j| < 1$, $j = 1, \dots, p$ potreban i dovoljan za skoro izvesnu jedinstvenost reprezentacije (3.5.13), kao i skoro izvesnu konvergenciju odogovarajućeg reda. Na sličan način može se pokazati da su navedeni uslovi ekvivalentni i za srednje-kvadratnu konvergenciju reda u (3.5.13), odakle se jednostavnim preračunavanjem dobijaju jednakosti (3.5.10) i (3.5.11). \square

Na osnovu pokazanog tvrđenja jasno je da prisustvo šumovnih indikatora (θ_t) unutar reprezentacije (3.5.8) omogućava da postavljeni uslovi invertibilnosti budu slabiji od odgovarajućih uslova koji su se odnosili na stacionarnost nizova (y_t) i (m_t) . Na taj način, čak i nestacionarne vremenske serije (y_t) i (m_t) mogu formirati invertibilan Split-MA proces koji je uvek stacionaran. Ovakva situacija posebno je zanimljiva u graničnom slučaju, kod tzv. *integriranih (normiranih) vremenskih serija*, za koje je

$$(3.5.14) \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j = 1.$$

Ukoliko je vrednost parametra b_c netrivialna, tj. $b_c \in (0, 1)$, onda će niz (X_t) biti invertibilan, iako su tada (y_t) i (m_t) nestacionarne vremenske serije.⁷ Takav slučaj smo, naravno, imali kod Split-MA(1) modela, za koji smo pretpostavili da je $p = \alpha_1 = 1$. U daljem izlaganju pretpostavićemo upravo da je normiranost Split-BREAK i Split-MA modela uvek zadovoljena, jer će ona biti od dvojakog značaja u daljim ispitivanjima.

S jedne strane, uslov (3.5.14), koji definiše nizove (y_t) i (m_t) kao nestacionarne, omogućava nam, za razliku od stacionarnih slučajeva, da srednja vrednost ova dva niza može biti različita od nule. Ovo je posebno važno u primenama, jer ćemo, kao i u slučaju prethodnog, STOPBREAK modela reda $p = 1$, kao osnovni finansijski niz posmatrati (opet) log-volumene, odnosno logaritme ukupnih vrednosti trgovanja hartijama od vrednosti na Beogradskoj berzi.

Drugi razlog uvođenja uslova normiranosti leži u pojednostavljenju samog postupka ocenjivanja nepoznatih parametara pragovnog STOPBREAK modela. Kako nizovi (y_t) i (X_t) , u opštem slučaju, zavise ne samo od koeficijenata $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, već i od nivoa kritične vrednosti reakcije $c > 0$, to će pretpostavka (3.5.14) biti dodatna "funkcionalna" veza nepoznatih parametara koja će omogućiti njihovo jednoznačno određivanje. O ovakvoj ideji i samom postupku ocenjivanja normiranih STOPBREAK modela govorimo već u narednom odeljku.

⁷Trivialni slučajevi $b_c \in \{0, 1\}$ nisu posebno zanimljivi. Ako je $b_c = 0$, onda se niz (X_t) svodi na beli šum (ε_t) , a za $b_c = 1$ postaje obična linearna MA vremenska serija.

3.5.3 Ocene parametara

Sam postupak ocenjivanja nepoznatih parametara $\alpha_1, \dots, \alpha_p, c$ pragovnog STOPBREAK modela razmatramo, kao i ranije, na osnovu realizacija stacionarnog Split-MA(p) procesa (X_t) . U tu svrhu, pretpostavimo da je

$$X_1, \dots, X_T$$

deo jedne realizacije ove vremenske serije za koju ćemo, slično kao u poglavlju 3.3, definisati dve vrste ocena.

Najpre, izjednačavanjem kovarijacione funkcije $\gamma_X(h)$, $h = 0, \dots, p$, definisane jednakošću (3.5.9), sa njenom empirijskom vrednošću

$$\hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{T-h} \sum_{t=1}^{T-h} X_t X_{t+h}, \quad h = 0, \dots, p$$

dobijamo tzv. *inicijalne ocene* nepoznatih parametara. Ove ocene označimo sa $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_p$, odnosno, u slučaju kritične vrednosti, sa \tilde{c} . Kako one predstavljaju neprekidne funkcije ocena $\hat{\gamma}_X(h)$, može se, na sličan način kao i u slučaju Split-MA(1) procesa, pokazati njihova postojanost i asimptotska normalnost. Ipak, naša pažnja biće (opet) posvećena tzv. *regresionim ocenama* $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p, \hat{c}$ zasnovanim na regresiji niza

$$(3.5.15) \quad W_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j \theta_{t-j+1} W_{t-j} + \varepsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

u odnosu na njegove prethodne, realizovane vrednosti. U tom cilju, pokazaćemo najpre da su potrebni i dovoljni uslovi stacionarnosti niza (W_t) ekvivalentni odgovarajućim uslovima invertibilnosti niza (X_t) , opisanim u teoremi 3.5.4.

Teorema 3.5.5. *Niz (W_t) , definisan jednakošću (3.5.15), jeste stacionaran, ergodičan niz slučajnih veličina akko koreni r_j , $j = 1, \dots, p$ karakterističnog polinoma*

$$Q(\lambda) = \lambda^p - b_c \sum_{j=1}^p \alpha_j \lambda^{p-j}$$

zadovoljavaju uslov $|r_j| < 1$, $j = 1, \dots, p$ ili, ekvivalentno, $b_c \sum_{j=1}^p \alpha_j < 1$.

Dokaz. Uvođenjem vektora-matrice

$$\mathbf{W}_t = \begin{pmatrix} W_t & W_{t-1} & \cdots & W_{t-p+1} \end{pmatrix}', \quad \mathbf{E}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}'$$

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} \alpha_1 \theta_t & \alpha_2 \theta_{t-1} & \cdots & \alpha_{p-1} \theta_{t-p+2} & \alpha_p \theta_{t-p+1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jednakost (3.5.15) možemo napisati u obliku diferencne jednačine

$$(3.5.16) \quad \mathbf{W}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{W}_{t-1} + \mathbf{E}_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Odavde se, potpuno analogno kao u teoremi 3.5.4, pokazuje da jednačina (3.5.16) ima strogo stacionarno, skoro izvesno jedinstveno i ergodično rešenje

$$(3.5.17) \quad \mathbf{W}_t = \mathbf{E}_{t-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathbf{A}_t \cdots \mathbf{A}_{t-k+1} \right) \mathbf{E}_{t-k-1}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

akko su sopstvene vrednosti matrice

$$\mathbb{A} = E(\mathbf{A}_t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 b_c & \alpha_2 b_c & \cdots & \alpha_{p-1} b_c & \alpha_p b_c \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

po modulu manje od 1, tj. važi uslov $|r_j| < 1$, $j = 1, \dots, p$. □

Definišimo, sada, rezidualni niz

$$(3.5.18) \quad R_t = W_t - \sum_{j=1}^p a_j W_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

pri čemu smo označili $a_j = b_c \alpha_j$, $j = 1, \dots, p$. Na jednostavan način se pokazuje da je (R_t) nekoreliran niz slučajnih veličina, pa poslednja jednakost definiše niz (W_t) kao linearan autoregresivni proces reda p , sa šumom (R_t) . Tada, standardnim regresionim postupkom možemo dobiti ocenu

$$\hat{\mathbf{a}}_T = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p)'$$

parametra $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)'$, u obliku jednakosti

$$(3.5.19) \quad \hat{\mathbf{a}}_T = \mathbf{W}_T^{-1} \cdot \mathbf{b}_T,$$

gde je

$$\mathbf{W}_T = \begin{pmatrix} \sum_{t=p+1}^T W_{t-1}^2 & \sum_{t=p+1}^T W_{t-1}W_{t-2} & \cdots & \sum_{t=p+1}^T W_{t-1}W_{t-p} \\ \sum_{t=p+1}^T W_{t-1}W_{t-2} & \sum_{t=p+1}^T W_{t-2}^2 & \cdots & \sum_{t=p+1}^T W_{t-2}W_{t-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=p+1}^T W_{t-1}W_{t-p} & \sum_{t=p+1}^T W_{t-2}W_{t-p} & \cdots & \sum_{t=p+1}^T W_{t-p}^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_T = \begin{pmatrix} \sum_{t=p+1}^T W_t W_{t-1} & \sum_{t=p+1}^T W_t W_{t-2} & \cdots & \sum_{t=p+1}^T W_t W_{t-p} \end{pmatrix}'.$$

Na osnovu dobijene ocene $\hat{\mathbf{a}}_T$, ocene nepoznatih parametara Split-BREAK procesa, pri uslovu normiranosti (3.5.14), mogu se izraziti u obliku jednakosti

$$(3.5.20) \quad \begin{cases} \hat{b}_c = \sum_{j=1}^p \hat{a}_j \\ \hat{\alpha}_j = \frac{\hat{a}_j}{\hat{b}_c}, \quad j = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Sada smo u mogućnosti da pokažemo asimptotska svojstva dobijenih ocena. U tu svrhu, uočimo najpre skup

$$\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)' \in R^p \mid \sum_{j=1}^p a_j < 1 \right\}$$

koji, očito, predstavlja skup svih vrednosti parametra \mathbf{a} za koje je ispunjen uslov invertibilnosti Split-MA niza (X_t) , odnosno za koje važi stacionarnost niza (W_t) . Pri navedenim pretpostavkama važi sledeće tvrđenje.

Teorema 3.5.6. *Neka je, za neko $T_0 > 0$ i svako $T \geq T_0$, ispunjen uslov $\hat{\mathbf{a}}_T \in \mathcal{A}$. Tada je $\hat{\mathbf{a}}_T$ strogo postojana i asimptotski normalna ocena parametra $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$.*

Dokaz. Uočimo najpre da na osnovu jednakosti (3.5.19) važi

$$(3.5.21) \quad \hat{\mathbf{a}}_T - \mathbf{a} = \left(\frac{1}{T-p} \mathbf{W}_T \right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{T-p} \mathbf{r}_T \right),$$

gde je

$$\mathbf{r}_T = \left(\begin{array}{cccc} \sum_{t=p+1}^T R_t W_{t-1} & \sum_{t=p+1}^T R_t W_{t-2} & \cdots & \sum_{t=p+1}^T R_t W_{t-p} \end{array} \right)'.$$

Na osnovu ergodičnosti niza (W_t) , koja važi na skupu \mathcal{A} , sledi i ergodičnost rezidualnog niza (R_t) . Tada, pri uslovima navedenim u teoremi, primenom ergodičke teoreme imamo

$$\frac{1}{T-p} \mathbf{W}_T \xrightarrow{s.i.} D, \quad T \rightarrow \infty,$$

gde je $D = E(\mathbf{g}_t \mathbf{g}_t')$, $\mathbf{g}_t = \left(W_{t-1} \cdots W_{t-p} \right)'$ i moment-matrica D ne zavisi od $t \in \mathbb{Z}$, za sve \mathbf{a} iz skupa stacionarnosti \mathcal{A} . Na osnovu ergodičke teoreme takođe važi konvergencija

$$\frac{1}{T-p} \mathbf{r}_T \xrightarrow{s.i.} 0, \quad T \rightarrow \infty,$$

pa ove dve konvergencije, primenjene na jednakost (3.5.21), daju

$$(3.5.22) \quad \hat{\mathbf{a}}_T - \mathbf{a} \xrightarrow{s.i.} 0, \quad T \rightarrow \infty$$

čime je pokazana stroga postojanost ocene $\hat{\mathbf{a}}_T$.

Primitimo dalje da razlaganje (3.5.21) možemo napisati u obliku jednakosti

$$(3.5.23) \quad \sqrt{T-p} (\hat{\mathbf{a}}_T - \mathbf{a}) = \left(\frac{1}{T-p} \mathbf{W}_T \right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{T-p}} \mathbf{r}_T \right).$$

Kako za proizvoljno $\mathbf{c} = (c_1 \cdots c_p)' \in \mathbb{R}^p$ niz

$$\mathbf{c}' \mathbf{r}_T = \sum_{t=p+1}^T R_t \left(\sum_{j=1}^p c_j W_{t-j} \right)$$

predstavlja martingal, primenom centralne granične teoreme za martingale (Billingsley [4]), imamo

$$\frac{1}{\sqrt{T-p}} \mathbf{c}' \mathbf{r}_T \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbf{c}' \Lambda \mathbf{c})$$

gde je $\Lambda = E(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t')$, $\mathbf{u}_t = R_t (W_{t-1} \cdots W_{t-p})'$ i Λ ne zavisi od t , za sve $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Koristeći, sada, ovu konvergenciju i Cramer-Wald-ovu dekompoziciju, dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{T-p}} \mathbf{r}_T \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Lambda).$$

Najzad, kako smo pokazali da važi

$$(T-p) \mathbf{W}_T^{-1} \xrightarrow{s.i.} D^{-1}, \quad T \rightarrow \infty,$$

dobijamo, na osnovu jednakosti (3.5.23) i poslednje dve konvergencije,

$$(3.5.24) \quad \sqrt{T-p} (\hat{\mathbf{a}}_T - \mathbf{a}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D^{-1} \Lambda D^{-1}), \quad T \rightarrow \infty$$

čime je teorema dokazana u potpunosti. \square

Na osnovu pokazanih osobina ocene $\hat{\mathbf{a}}_T$ zaključujemo da će i ocene "pravih" parametara $\alpha_1, \dots, \alpha_p, c$ posedovati slična svojstva, koja ćemo formulirati narednim tvrđenjem.

Teorema 3.5.7. *Neka je $\hat{\vartheta}_T = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p, \hat{b}_c)$ ocena nepoznatog parametra $\vartheta = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, b_c) \in \mathbb{R}^{p+1}$, dobijena na osnovu ocene $\hat{\mathbf{a}}_T$ i jednakosti (3.5.20). Ukoliko je, za neko $T_0 > 0$ i svako $T \geq T_0$ ispunjen uslov*

$$\hat{b}_c \sum_{j=1}^p \hat{\alpha}_j < 1,$$

onda je $\hat{\vartheta}_T$ strogo postojana i asimptotski normalna ocena parametra ϑ .

Dokaz. Na osnovu konvergencije (3.5.22) i osobine neprekidnosti skoro izvesne konvergencije (Serfling [53], str. 24) očito važi

$$\hat{\vartheta}_T - \vartheta \xrightarrow{s.i.} 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Uočimo, sada, da za proizvoljno $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_p)' \in \mathbb{R}^p$, izraz (3.5.20) definiše preslikavanje $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$, jednakošću

$$\vartheta = g(\mathbf{a}) = \left(a_1 \left(\sum_{j=1}^p a_j \right)^{-1}, \dots, a_p \left(\sum_{j=1}^p a_j \right)^{-1}, \sum_{j=1}^p a_j \right)'.$$

Tada, primenivši konvergenciju (3.5.24) i teoremu o neprekidnosti asimptotski normalno raspodeljenih vektora (Serffling [53], str. 122) imamo

$$\sqrt{T-p} \left(\hat{\vartheta}_T - \vartheta \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V), \quad T \rightarrow \infty$$

gde je $V = GD^{-1} \Lambda D^{-1} G'$ i $G = \left(\frac{\partial g(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \right) \Big|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}}$. □

3.5.4 Monte Carlo simulacija. Primena modela

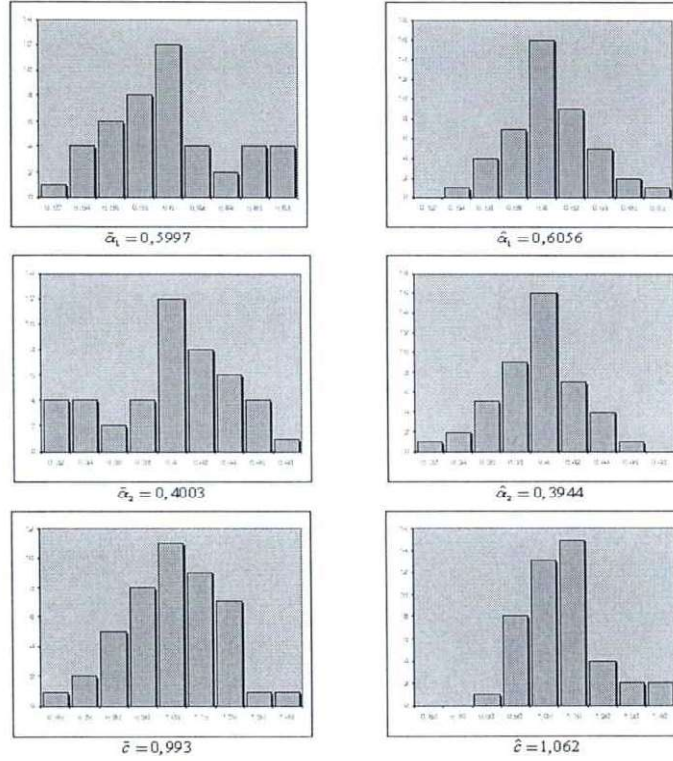
Kao i u slučaju Split-MA(1) procesa, u mogućnosti smo da gore navedeni postupak ocenjivanja nepoznatih parametara primenimo i u nekim konkretnim situacijama. Najpre ćemo izložiti neke od rezultata dobijenih ocenjivanjem Split-MA(2) niza

$$(3.5.25) \quad X_t = \varepsilon_t - \alpha_1 \theta_{t-1} \varepsilon_{t-1} - \alpha_2 \theta_{t-2} \varepsilon_{t-2}, \quad t = 1, \dots, T,$$

pri čemu je, uobičajeno, $\theta_t = I(\varepsilon_{t-1}^2 \leq c)$, a (ε_t) niz nezavisnih slučajnih veličina sa $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom. U tu svrhu, koristili smo 45 nezavisnih Monte Carlo simulacija ovog niza obima $T = 500$, sa vrednostima parametara $\alpha_1 = 0, 6$, $\alpha_2 = 0, 4$ i $c = 1$. Na osnovu činjenica iz prethodnog odeljka, sam postupak ocenjivanja zasnovan je na formiranju dveju vrsta ocena.

Najpre smo, izjednačavanjem korelacione funkcije $\gamma_X(h)$ gore navedenog modela sa njegovom empirijskom korelacijom $\hat{\gamma}_X(h)$, dobili ocene:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \frac{-\hat{\gamma}_X(1) - \sqrt{\hat{\gamma}_X^2(1) + 4\hat{\gamma}_X(1)\hat{\gamma}_X(2)}}{2\hat{\gamma}_X(2)}, \\ \tilde{\alpha}_2 &= 1 - \tilde{\alpha}_1 = \frac{2\hat{\gamma}_X(1) + \hat{\gamma}_X(1) + \sqrt{\hat{\gamma}_X^2(1) + 4\hat{\gamma}_X(1)\hat{\gamma}_X(2)}}{2\hat{\gamma}_X(2)}, \\ \tilde{b}_c &= \frac{\hat{\gamma}_X(2)}{\hat{\gamma}_X(2)(\tilde{\alpha}_1^2 + \tilde{\alpha}_2^2) + \tilde{\alpha}_2 \hat{\gamma}_X(0)}. \end{aligned}$$



Slika 3.6: Histogrami empirijske raspodele ocenjenih vrednosti parametara Split-MA(2) modela ($\alpha_1 = 0,6$, $\alpha_2 = 0,4$, $c = 1$).

S druge strane, koristeći $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$ i \tilde{c} kao inicijalne ocene za generisanje nizova

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t(X, \tilde{\theta}, \tilde{\alpha}) = X_t + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\theta}_{t-1} \varepsilon_{t-1}(X, \tilde{\theta}, \tilde{\alpha}) + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\theta}_{t-1} \varepsilon_{t-2}(X, \tilde{\theta}, \tilde{\alpha}) \\ \tilde{\theta}_t = I(\varepsilon_{t-1}^2(X, \tilde{\theta}, \tilde{\alpha}) \leq \tilde{c}) \\ W_t(X, \tilde{\theta}, \tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}_1 \tilde{\theta}_t W_{t-1}(X, \tilde{\theta}, \tilde{\alpha}) + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\theta}_{t-1} W_{t-2} + \varepsilon_{t-1}(X, \tilde{\theta}, \tilde{\alpha}) \end{array} \right. ,$$

gde je $t = 1, \dots, 500$ i, recimo, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = 0$, mogu se, primenom jednakosti (3.5.19) i (3.5.20), dobiti regresione ocene $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, \hat{c} odgovarajućih parametara Split-MA(2) modela. Histogrami empirijskih raspodela dobijenih ocena prikazane su na slici 3.6 gde su, takođe, date i prosečne vrednosti ocenjenih parametara za obe vrste ocena.

*
* *

Na samom kraju našeg izlaganja o uopštenom modelu Split-BREAK procesa izložemo i neke od mogućnosti njegove praktične primene u modeliranju dinamike finansijskih nizova. Preciznije rečeno, posmatraćemo Split-MA(2) model, opisan jednačom (3.5.25), kao stohastički model dinamike kretanja ukupne vrednosti trgovanja hartijama od vrednosti na domaćem tržištu hartija od vrednosti, na osnovu zvaničnih podataka Beogradske berze. U tu svrhu, slično kao i ranije, označimo sa S_t cenu akcija, a sa H_t ukupnu vrednost njihovog trgovanja u datom vremenskom trenutku $t = 1, \dots, T$. Kao osnovni finansijski niz posmatramo, ponovo, realizacije log-volumena

$$y_t = \log(S_t \cdot H_t), \quad t = 1, \dots, T$$

odakle se, naravno, dobija niz priraštaja $X_t = y_t - y_{t-1}$, ($X_0 = 0$).

Ako, sada, pretpostavimo da je niz (X_t) potčinjen Split-MA(2) modelu (3.5.25), možemo, na identičan način kao što je učinjeno i prilikom Monte Carlo simulacija ovog niza, oceniti njegove parametre, ocenama $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\alpha}_2$, \tilde{c} ili $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, \hat{c} . Na osnovu empirijske analize konkretnih, realnih podataka, u narednoj tabeli prikazali smo ocenjene vrednosti navedenih parametara za neka preduzeća čijim je akcijama trgovano na berzi, a imala su dinamiku koja, po svojoj strukturi, odgovara pragovnom STOPBREAK modelu:

Firme	Parametri					
	$\tilde{\alpha}_1$	$\tilde{\alpha}_2$	\tilde{c}	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	\hat{c}
ALFA PLAM Vranje	0,6398	0,3602	2,628	0,6904	0,3096	3,331
DIN Niš	0,7151	0,2849	1,393	0,8155	0,1845	1,202
T. MARKOVIĆ Kikinda	0,8239	0,1761	1,396	0,8297	0,1703	1,392

Glava 4

Modeli cena u zaustavnom vremenu

4.1 Opšte napomene

Kao što smo istakli na početku, neodređenost koja se javlja na tržištu može se opisati modelom filtriranog prostora verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ na kome se cena određenog proizvoda - aleta prikazuje slučajnim procesom

$$(4.1.1) \quad S = (S_n)$$

tj. familijom slučajnih veličina koje zavise od diskretnog vremenskog parametra $n \in D = \{0, 1, 2, \dots\}$. Za slučajne veličine S_n , uobičajeno, pretpostavljamo da su \mathcal{F}_n merljive što je u skladu sa činjenicom da se cena u datom momentu n usklađuje sa događajima registrovanim do tog momenta, a koji su opisani σ -algebrom \mathcal{F}_n . Na taj način, kretanje cene S_n tesno je povezano sa događajima iz \mathcal{F}_n , pa se oba niza posmatraju u obliku uređenog para (S_n, \mathcal{F}_n) koji se naziva *stohastički niz*.

Ipak, prateći promene u empirijskoj analizi finansijskih podataka uočava se nova, savremena mogućnost njihovog prikupljanja, obrade i statističke analize. Primenom računarskih tehnologija svi podaci i informacije o stanju finansijskih indeksa mogu se smatrati procesom koji protiče u neprekidnom

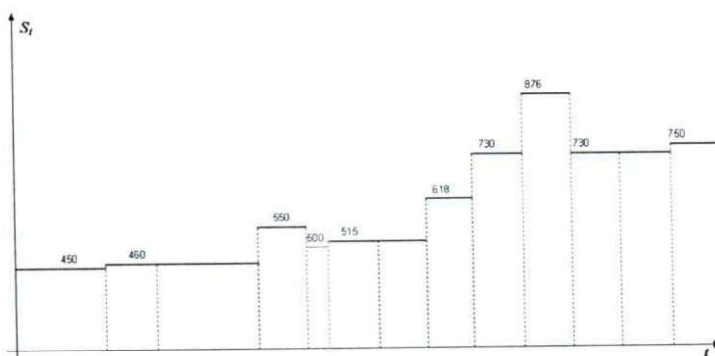
(kontinualnom) vremenu. Evolucija finansijskog indeksa posmatra se tada najčešće kao slučajni proces sa trajektorijama u obliku stepenastih, deo po deo konstantnih funkcija, prikazanim na slici 4.1. On ima konstantnu vrednost na određenom vremenskom intervalu $[\tau_{k-1}, \tau_k)$, a zatim, u trenutku τ_k , dolazi do njene promene (tika). Na taj način, ispitivanje dinamike kretanja cena obično se interpretira modelom

$$(4.1.2) \quad S_t = S_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k I(\tau_k \leq t), \quad t \geq 0$$

gde je S_0 početna cena formirana u trenutku $t = 0$, a ξ_k priraštaji promene cene u (slučajnom) momentu τ_k . Cena je ovde definisana kao slučajni proces neprekidnog vremena, pa se prethodni stohastički bazis \mathcal{B} proširuje novim bazisom sa neprekidnim vremenom

$$\tilde{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \tilde{F}, P)$$

gde je $\tilde{F} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ i $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{[t]}$. Na taj način, jedan od problema koji se ovde javlja jeste obezbeđivanje uslova kojima se postiže \mathcal{F}_t merljivost slučajnih veličina S_t .



Slika 4.1: Grafikon kretanja cena akcija AD Hemofarm iz Vršca u toku 2002. godine.

Ipak, ovde je od posebnog značaja tzv. *diskretni uticaj slučaja* opisan nizom priraštaja $\xi = (\xi_k)$ i nizom zaustavnih momenata $\tau = (\tau_k)$. Ovakvo modelovanje stoga zahteva dodatnu analizu koja se odnosi na ispitivanje stohastičkih osobina ova dva niza. Polazeći od prethodnih pretpostavki koje

cenu aleta prikazuju modelom diskretnog vremena

$$(4.1.3) \quad S_n = S_0 e^{H_n}$$

gde je $H_n = \sum_{k=0}^n h_k$, $h_0 = 0$, u mogućnosti smo da formiramo slučajni proces $\tilde{H} = (\tilde{H}_t, \mathcal{F}_t)$ kao

$$(4.1.4) \quad \tilde{H}_t = H_{[t]}, \quad t \geq 0$$

ili, na osnovu (4.1.2),

$$(4.1.5) \quad \tilde{H}_t = \sum_{k=1}^{\infty} h_k I(\tau_k \leq t).$$

Reč je, dakle, o slučajnom procesu neprekidnog vremenskog parametra $t \geq 0$ čije su trajektorije takođe stepenaste, deo po deo konstantne funkcije sa skokovima koji nastaju u trenucima promene cene S_t . Niz priraštaja (h_k) najčešće se modelira nekim od tzv. linearnih autoregresivnih modela ili, češće, nelinearnim modelima uslovne heterogenosti koje smo razmatrali u drugom poglavlju.

Koristeći slične ideje, ovde ćemo izložiti neke mogućnosti nelinearnog modelovanja vremenskih "skokova" cene. Ovi vremenski trenuci su slučajnog karaktera i mogu se interpretirati kao realizacije zaustavnog niza $\tau = (\tau_k)_{k \geq 1}$ koji ima posebnu ulogu u opisivanju modela (4.1.2), odnosno (4.1.5). Njime se izražava važno svojstvo *neregularnosti dinamike cene* jer, za razliku od standardnih modela diskretnog vremenskog parametra, ovde se kao diskretni skup vrednosti cene uzima niz čiji su vremenski indeksi slučajne veličine. Od posebnog interesa, stoga, jeste opisati takav vremenski niz i njegove stohastičke osobine.

4.1.1 Pojam zaustavnog vremena

U ovoj sekciji opisaćemo detaljnije strukturu niza $\tau = (\tau_k)_{k \geq 1}$ koji opisuje vremenske trenutke promena cena u tzv. zaustavnom vremenu i uobičajeno se naziva *zaustavni niz*. Kasnije će biti izloženi i neki originalni

modeli zasnovani na praktičnoj primeni zaustavnog niza u opisivanju dinamike kretanja cena akcija na domaćem tržištu hartija od vrednosti. Ipak, u cilju preciznije analize, definišaćemo najpre neke od osnovnih pojmova koji se odnose na niz (τ_k) , odnosno veličine kojima se opisuje tzv. *zaustavno vreme* u kome se posmatra evolucija cene.

Definicija 4.1.1. Neka je na prostoru verovatnoća (Ω, \mathcal{F}, P) zadata filtracija (\mathcal{F}_n) . Slučajna veličina $\tau = \tau(\omega)$, $\omega \in \Omega$ sa skupom vrednosti $D = \{0, 1, 2, \dots\}$ naziva se *markovski moment* (u odnosu na potok σ -algebri (\mathcal{F}_n)) ako za svako $n \in D$ važi

$$(i) \quad \{\omega | \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Ako je, dodatno, ispunjen i uslov

$$(ii) \quad P\{\omega | \tau(\omega) < \infty\} = 1$$

onda je τ *markovski zaustavni moment*. Δ

Markovski moment tumačimo kao vremenski trenutak kada je donešena neka finansijska odluka, recimo o kupovini ili prodaji akcija, ili, u našem slučaju, promena cene odnosno vrednosti finansijskog indeksa. Kako je, na osnovu (i) i definicije filtra F ,

$$\{\omega | \tau(\omega) \leq n\} = \bigcup_{k=1}^n \{\omega | \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_n$$

biće

$$\{\omega | \tau(\omega) > n\} = \{\omega | \tau(\omega) \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$$

pa možemo zaključiti da "prenos" odluke (o kupovini ili prodaji akcija) sa momenta n na neki kasniji vremenski trenutak zavisi samo od informacija iz \mathcal{F}_n . Time je iskazana *osobina markovnosti* momenta $\tau(\omega)$, jer kretanje cene ne zavisi od budućnosti.

S druge strane, termin *zaustavnost* direktno je povezan sa uslovom (ii) koji omogućava realizaciju ove veličine u konačnom vremenu. Ukoliko ovaj uslov ne bi bio ispunjen, tj. ako je $P\{\omega | \tau(\omega) = \infty\} > 0$, moguća bi bila situacija "ne donošenja nikakve odluke" koja bi se ticala evolucije datog finansijskog indeksa. Ovakva mogućnost obično nije od velikog interesa, pa treba biti veoma obazriv prilikom matematičko-stohastičkog modelovanja veličine $\tau(\omega)$. Sledeći jednostavan primer predstavlja dobru ilustraciju svega navedenog.

Primer 4.1.1. Neka je $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $X_n \in M(\mathcal{F}_n)$, $\forall n \in D$ i

$$\tau_B = \begin{cases} \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in B\}, & \{X_n \in B\} \neq \emptyset; \\ +\infty, & \{X_n \in B\} = \emptyset, \forall n \in D. \end{cases}$$

Tada je, za svako $n \in D$,

$$\{\tau_B = n\} = \{X_0 \notin B, \dots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n$$

tj. slučajna veličina τ_B predstavlja markovski moment. Ipak, u slučaju

$$\{X_n \in B\} = \emptyset, \quad \forall n \in D$$

uslov zaustavnosti (ii) nije ispunjen, pa događaj B nije od interesa kao skup mogućih vrednosti finansijskog indeksa (martingala) X . ∇

Zaustavni moment koristimo za opisivanje evolucije finansijskog indeksa u nekom slučajnom vremenskom trenutku. Naime, slučajna veličina $S_\tau(\omega)$ definiše vrednost cene S u slučajnom zaustavnom momentu $\tau = \tau(\omega)$, a njoj se može pridružiti i odgovarajuća σ -algebra

$$\mathcal{F}_\tau = \left\{ A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in D \right\}.$$

Na ovaj način, \mathcal{F}_τ predstavlja σ -algebru koja filter dopunjuje novim članom koji opisuje sistem informacija dostupan u nekom slučajnom vremenskom trenutku. Takođe, može se pokazati da za veličine $\tau(\omega)$ i $S_\tau(\omega)$ važe neke osobine koje "opravdavaju" uvođenje ovakve σ -algebre.

Teorema 4.1.1. *Za markovski zaustavni moment $\tau(\omega)$ i σ -algebru \mathcal{F}_τ ispunjeni su sledeći uslovi:*

- (i) *Slučajne veličine $\tau(\omega)$ i $S_\tau(\omega)$ su \mathcal{F}_τ merljive.*
- (ii) *Slučajni niz $S_n^\tau = S_{\tau \wedge n}$, gde je $\tau \wedge n = \min\{\tau, n\}$, predstavlja \mathcal{F}_n^τ merljiv niz slučajnih veličina.*
- (iii) *Za proizvoljnu slučajnu veličinu $X \in M(\mathcal{F})$ važi*

$$(4.1.6) \quad E(X|\mathcal{F}_\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} E(X|\mathcal{F}_k) \cdot I(\tau = k).$$

Dokaz. (i) Za svako $m, n \in D$ važi

$$\{\tau \leq m\} \cap \{\tau \leq n\} = \{\tau \leq m \wedge n\} \in \mathcal{F}_{m \wedge n} \subseteq \mathcal{F}_n$$

pa slučajna veličina τ jeste \mathcal{F}_τ merljiva. Za proveru \mathcal{F}_τ merljivosti slučajne veličine S_τ petpostavimo da je $x \geq 0$ proizvoljna vrednost cene S . Tada je

$$\{S_\tau = x\} \cup \{\tau = n\} = \{S_n = x\} \in \mathcal{F}_n, \quad n \in D$$

tj. $\{S_\tau = x\} \in \mathcal{F}_\tau$.

(ii) Slično kao (i).

(iii) Neka je $A \in \mathcal{F}_\tau$. Tada je, za proizvoljno $k \in D$, $\{\tau = k\} \cap A \in \mathcal{F}_k$ pa imamo

$$\begin{aligned} E(X \cdot I_A) &= E\left[X \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I(\{\tau = k\} \cap A)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[E(X|\mathcal{F}_k) \cdot I(\{\tau = k\} \cap A)\right] \\ &= E\left[I_A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} E(X|\mathcal{F}_k) I(\tau = k)\right]. \end{aligned}$$

Oдавде, na osnovu teoreme Radon-Nikodima, sledi jednakost (4.1.6). \square

Daćemo sada neophodne pretpostavke koje omogućavaju rad sa nizom markovskih zaustavnih momenata.

Definicija 4.1.2. Stohastički niz $\tau = (\tau_k)$, takav da su za svako $k \geq 1$ ispunjeni uslovi:

(i) τ_k je markovski zaustavni moment (u smislu prethodne definicije);

(ii) $\tau_k \stackrel{s.i.}{\leq} \tau_{k+1}$ i $\tau_k \stackrel{s.i.}{\rightarrow} \infty, k \rightarrow \infty$;

naziva se *niz markovskih zaustavnih momenata* ili, kraće, *zaustavni niz*. \triangle

Na jednostavan način, sličan prethodnom, može se pokazati i sledeće tvrđenje.

Teorema 4.1.2. *Neka je na stohastičkom bazisu $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ definisan niz markovskih zaustavnih momenata $(\tau_k)_{k \geq 1}$. Tada važi:*

(i) *Slučajne veličine $\tau_1 \vee \tau_2 = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ i $\tau_1 \wedge \tau_2 = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ su takođe markovski zaustavni momenti.*

(ii) *Slučajne veličine $\tau^* = \sup\{\tau_k \mid k \in D\}$ i $\tau_* = \inf\{\tau_k \mid k \in D\}$ su markovski (neobavezno zaustavni) momenti.*

(iii) *Ako je τ_* markovski zaustavni moment, onda je $\mathcal{F}_{\tau_*} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$.*

U daljem radu posebnu pažnju posvetićemo problemu stohastičkog modelovanja niza (τ_k) , čime bi model cene S bio u potpunosti opisan dvodimenzionalnim nizom (ξ_k, τ_k) , odnosno (h_k, τ_k) . Međutim, potrebno je izložiti još jedan važan pojam koji je u tesnoj vezi sa pojmovima slučajnog i zaustavnog vremena.

4.1.2 Tačkasti procesi

Tačkasti proces, grubo govoreći, predstavlja slučajnu kolekciju tačaka u nekom (topološkom) prostoru. Postoji nekoliko različitih načina zadavanja ovakvih procesa zasnovanih pre svega na brojnim i raznovrsnim primenama koje tačkasti procesi imaju u mnogim naučnim oblastima (geodeziji, meteorologiji, hidrostatici itd.). Ipak, vodeći računa o ekonometrijskim problemima i interpretacijama koje predstavljaju naš osnovni interes, osnovni metod definisanja tačkastog procesa biće njegovo uvođenje kao "brojača" eventualnih promena (skokova i padova) vrednosti posmatranog finansijskog indeksa. Naravno, ovakav pristup zahteva preciznije formulacije i, pre svega, izlaganje slučajnih procesa na neprekidnom stohastičkom bazisu

$$B = (\Omega, \mathcal{F}, F, P)$$

gde je $F = (\mathcal{F}_t)$ i $t \in [0, \infty)$. Kasnije ćemo opisati i diskretni karakter ovih procesa sadržan u realizacijama zaustavnog niza $(\tau_k)_{k \geq 1}$.

Definicija 4.1.3. Familija slučajnih veličina $N(t) : \Omega \rightarrow D$, $t \in T$, naziva se *tačkasti proces* ako važi:

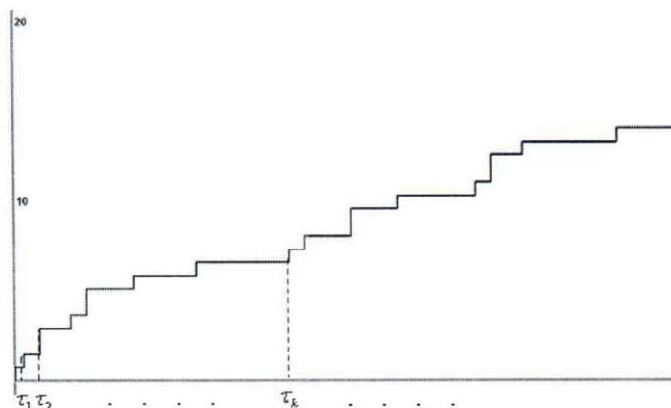
- (i) $N(0) \stackrel{s.i.}{=} 0$
- (ii) $s \leq t \implies N(s) \stackrel{s.i.}{\leq} N(t), \quad \forall s, t \in T$
- (iii) $P\{|N(t + \Delta t) - N(t)| > 0\} \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0.$

Ako pored ovih uslova važi i tzv. *uslov ordiniranosti*:

- (iv) $P\{|N(t + \Delta t) - N(t)| > 1\} = o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0$

slučajni proces $N(t)$ nazivamo *ordinirani (brojački) tačkasti proces*. Δ

Primetimo da uslovi (i)-(iii) ove definicije obezbeđuju da njegove trajektorije budu monotono neopadajuće, stepenaste funkcije sa konačnim brojem tačaka diskontinuiteta ("skokova"). Pored, recimo, stohastičke neprekidnosti tačkastog procesa opisane sa (iii), tek uslov ordiniranosti (iv) definiše, u skoro izvesnom smislu, veličinu skokova procesa $N(t)$. Naime, povećanje vrednosti trajektorija, skoro izvesno iznosi 1, pa otuda i naziv ovakvih procesa (slika 4.2.).



Slika 4.2: Realizacija tačkastog procesa na osnovu empirijskog skupa - cene sojine sačme.

Na osnovu (iii) i (iv) možemo dalje napisati:

$$P\{|N(t + \Delta t) - N(t)| = 1\} = \lambda(t) \Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0$$

gde je

$$(4.1.7) \quad \lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{|N(t + \Delta t) - N(t)| > 0\}}{\Delta t}$$

funkcija intenzivnosti tačkastog procesa $N(t)$. Ona predstavlja njegovu važnu karakteristiku. Ako je, recimo, $\lambda(t)$ deterministička funkcija, a proces $N(t)$ ima nezavisne priraštaje, onda je reč o poznatom Poisson-ovom (nehomogenom) procesu sa raspodelom

$$(4.1.8) \quad P\{N(t) = k\} = \frac{[\Lambda(t)]^k}{k!} \cdot e^{-\Lambda(t)}, \quad k \in D.$$

Ovde je $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ tzv. *integralna karakteristika Poisson-ovog procesa* za koju je, kao što znamo,

$$\Lambda(t) = E[N(t)] = Var[N(t)].$$

Međutim, u opštem slučaju, intenzivnost $\lambda(t)$ nije deterministička već stohastička funkcija koja zavisi i od σ -algebri filtra (\mathcal{F}_t) , generisanog sa

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{G}en\{N(s) : s \leq t\}, \quad t > 0; \quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

pa se obično definiše izrazom

$$(4.1.9) \quad \lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{N(t + \Delta t) - N(t) > 0 | \mathcal{F}_t\}}{\Delta t}$$

ili, u slučaju ordiniranosti,

$$(4.1.10) \quad \lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E\{N(t + \Delta t) - N(t) | \mathcal{F}_t\}}{\Delta t}.$$

Ovakva definicija funkcije omogućava njeno dalje ispitivanje stohastičkim metodama, pri čemu je od značaja opšti model u kome se ona zadaje kao infinitezimal tačkastog procesa $N(t)$. Kako realizacije tačkastog procesa zavise i od zaustavnog niza (τ_k) , sam proces $N(t)$ može se napisati u obliku funkcije

$$(4.1.11) \quad N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I(\tau_k \leq t)$$

odakle se dobija

$$\frac{dN(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - \tau_k) = \begin{cases} 1, & t = \tau_k; \\ 0, & t \neq \tau_k. \end{cases}$$

Za proizvoljan skup $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tada možemo definisati stohastički integral tačkastog procesa

$$\int_A dN(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I(\tau_k \in A)$$

pa se, na osnovu (4.1.10), funkcija intenzivnosti najčešće zadaje *Hawkes-ovim modelom*

$$(4.1.12) \quad \lambda(t) = \mu(t) + \int_0^t \nu(t-u) dN(u)$$

gde funkcije $\mu(t)$ i $\nu(t)$, redom, predstavljaju determinističku i stohastičku gustinu procesa $N(t)$. Deterministička funkcija $\mu(t)$ ocenjuje se standardnim metodama (ili se smatra konstantom), pa je od značaja ocenjivanje, odnosno formiranje odgovarajućeg modela stohastičke gustine $\nu(t)$. Najpoznatiji od njih jeste oblik Laguerre-ovih polinoma

$$\nu(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^{n-j} e^{-\theta t}$$

sa nepoznatim parametrima $c_j, \theta \in \mathbb{R}$ koji se ocenjuju na osnovu uzorka. Uopšte, ako funkcija intenzivnosti tačkastog procesa zavisi od parametra $\theta \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, onda je možemo pisati u obliku $\lambda = \lambda(t, \theta)$ i ocenjivanje vršiti maksimizacijom funkcije verodostojnosti

$$(4.1.13) \quad L(\theta) = \int_0^T \ln \lambda(t, \theta) dN(t) - \int_0^T \lambda(t, \theta) dt$$

gde je T dužina opserviranog uzoračkog intervala. Osnovni oblik ove funkcije direktna je posledica, preciznije, uopštavanje jednakosti (4.1.8)-(4.1.13). U brojnim radovima pokazana je postojanost, asimptotska normalnost i efikasnost ovako dobijenih ocena. Posebno ćemo istaći rad Brown-a [11] gde se ocenjivanje, na sličan način kao i u slučaju GARCH-modela, vrši primenom *modifikovanog Newton-Raphson-ovog algoritma*

$$(4.1.14) \quad \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - H_k^{-1}(\hat{\theta}_{k-1}) \cdot l_k(\hat{\theta}_{k-1})$$

pri čemu je

$$l_k(\theta) = \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \ln \lambda(k\Delta, \theta) dN(k\Delta) - \lambda(k\Delta, \theta)$$

$$H_k(\theta) = \frac{\partial^2 L(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} = \frac{1}{\lambda(k\Delta, \theta)} \frac{\partial \lambda(k\Delta, \theta)}{\partial \theta} dN(k\Delta) - \frac{\partial \lambda(k\Delta, \theta)}{\partial \theta}.$$

Interval $(0, T]$ podeljen je, za dovoljno veliko K , na podintervale dužine $\Delta = T/K$, pa se postupak ocenjivanja vrši u tačkama $k\Delta$, $k = 1, \dots, K$.

4.2 D-AST model

U pokušaju da ideju o zaustavnoj dinamici promena cena primenimo i na neke od konkretnih podataka, pre svega na vremensku dinamiku promena cena akcija kojima se trguje na domaćem tržištu hartija od vrednosti, ovde ćemo izložiti originalni model zasnovan na raspodelama slučajnih promenljivih diskretnog tipa. Ovaj model, prvi put uveden od strane V. Stojanovića i B. Popović [60], nazvan je, saglasno tipu raspodela koje se u njemu javljaju, D-AST model¹, a osnovni razlog njegovog uvođenja leži u činjenici da naše, domaće tržište, suprotno većini razvijenih zemalja, ima veoma sporu dinamiku u promenama cena. Naime, često se na berzi cene određenih portfolia ne menjaju tokom određenog, višednevnog vremenskog perioda, tako da se njihova iregularna dinamika može interpretirati celobrojnim vrednostima broja dana koji proteknu između dve uzastopne promene vrednosti cena akcija. Na taj način, osnovna uloga modela o kojem će ovde biti reči zasniva se na mogućnosti stohastičkog modelovanja vremenskih momenata promena cena koji se uobičajeno prikazuju zaustavnim nizom (τ_k) , ali i na dodatno opisivanje stepena intenziteta takvih promena. Zbog naglašene spore dinamike promena cena, raspodele diskretnog tipa jesu izuzetno pogodan stohastički aparat koji će, u tu svrhu, ovde biti korišćen.

U daljem tekstu izložemo definiciju i osnovne stohastičke karakteristike D-AST modela, dok je poseban akcenat dat njegovoj praktičnoj primeni.

¹Discrete Autoregressive Stopping Time model

U našem slučaju, prikazali smo primenu D-AST modela u opisivanju intenziteta dinamike promena cena akcija nekih od eminentnih srpskih preduzeća, koja već duži niz godina njima trguju na Beogradskoj berzi.

4.2.1 Definicija i osnovne karakteristike modela

Najpre dajemo sledeću, formalnu definiciju D-AST modela, zasnovanog na rekurentnoj, autoregresivnoj zavisnosti njegovih članova u odnosu na prethodne realizacije samog niza.

Definicija 4.2.1. Neka su, za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$, ispunjeni sledeći uslovi:

- (i) (ε_k) je niz nezavisnih slučajnih veličina sa skupom vrednosti $D = \{0, 1, 2, \dots\}$ i takav da je $E(\varepsilon_k) = 1$, $Var(\varepsilon_k) = \sigma^2$;
- (ii) (λ_k) je niz, takođe nezavisnih slučajnih veličina, nezavisan i od niza (ε_k) , sa uniformnom raspodelom definisanom na skupu $A = \{1, 2, \dots, a\}$, $a \in \mathbb{N}$;
- (iii) $\mathcal{F}_k = \mathcal{G}en\{(\varepsilon_j, \lambda_j) \mid j = 1, 2, \dots, k\}$, $\mathcal{F}_0 = \emptyset$.

Tada, niz slučajnih veličina (τ_k) predstavlja *diskretni autoregresivni model zaustavnog vremena* (kraće, *D-AST model*) ukoliko zadovoljava rekurentnu relaciju

$$(4.2.1) \quad \tau_k = \tau_{k-1} + \lambda_k \varepsilon_k, \quad k \geq 1 \quad (\tau_0 = 0). \quad \triangle$$

Kao što se vidi, navedena definicija zadaje zaustavni niz (τ_k) u obliku niza slučajnih veličina sa diskretnom raspodelom koja zavisi od raspodela dvaju nizova. Prvi od njih, niz (ε_k) sa "normiranom" raspodelom ima ulogu šuma i svojim vrednostima utiče na veličinu promene naredne realizacije zaustavnog niza. Ipak, prosečna vrednost takvih promena jednaka je vremenskoj jedinici u kojoj se posmatra dinamika promene vrednosti posmatranog finansijskog niza. To znači da će veličina njegovih promena, u proseku, biti jednaka jednoj vremenskoj jedinici, što je, kao što ćemo videti, izuzetno pogodno u praktičnom modelovanju.

S druge strane, niz (λ_k) predstavlja dodatni faktor promene u vrednostima (τ_k) , koje, za razliku od "normiranog" niza (ε_k) , imaju naglašenije, veće fluktuacije. Ovaj niz interpretiramo kao *intenzitet reakcije* D-AST modela u odnosu na njegove ranije, prethodne realizacije, pri čemu je posebno važna uloga parametra a koja se javlja u raspodeli niza (λ_k) . Kako je, u proseku, $\varepsilon_k \sim 1$, to će vrednost parametra a , u slobodnoj interpretaciji, predstavljati *gornju granicu intenziteta fluktuacija* zaustavnog niza. Na taj način, njegova uloga, zajedno sa parametrom σ^2 , kojim smo označili disperziju šuma (ε_k) , posebno je značajna u opisivanju iregularnosti u dinamici posmatranog finansijskog niza. Ukoliko je, recimo, $\lambda_k \equiv \varepsilon_k \equiv 1$, dinamika datog niza je *potpuno regularna*, tj. promene njegovih vrednosti dešavaju se svakog vremenskog trenutka u kome se posmatra njegovo ponašanje. Ovakva situacija može se opisati pomoću samih parametara, jer je tada $(a, \sigma^2) = (1, 0)$.

Ova činjenica može se, donekle, iskoristiti prilikom ispitivanja stepena iregularnosti u ponašanju nekog empirijskog finansijskog niza. Naime, moguća hipoteza o tome da je uniformna raspodela niza (λ_k) koncentrisana u tački $x = 1$, tj. da je $a = 1$, odgovara pretpostavci da dinamika posmatranog finansijskog niza *nema naglašenu iregularnost*, odnosno da su svi vremenski intervali $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ za koje važi $\tau_k - \tau_{k-1} > 1$ posledica šumovnih fluktuacija unutar vrednosti niza (ε_k) . Naravno, a i σ^2 predstavljaju nepoznate parametre D-AST modela, koje treba oceniti na osnovu realizacije τ_1, \dots, τ_N , tako da ćemo ovom problemu posvetiti znatan deo vremena u kasnijem izlaganju. No, pre toga, odredićemo osnovne stohastičke karakteristike niza (τ_k) .

Teorema 4.2.1. *Niz slučajnih veličina (τ_k) , definisan jednakošću (4.2.1), predstavlja zaustavni niz, u smislu definicije 4.1.2. Pritom, osnovne stohastičke karakteristike ovog niza glase:*

$$(i) \quad E(\tau_k) = \frac{k}{2} (a + 1);$$

$$(ii) \quad Var(\tau_k) = \frac{k}{12} (a + 1) [2(\sigma^2 + 1)(2a + 1) - 3(a + 1)];$$

$$(iii) \quad Corr(\tau_k, \tau_{k+h}) = \sqrt{\frac{k}{k+h}}, \quad h \geq 0.$$

Dokaz. Očito je ispunjen uslov (i) u definiciji zaustavnog niza (τ_k) , kao i nejednakost $\tau_k \leq \tau_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$ koja važi sa verovatnoćom 1. Uočimo,

dalje, da je

$$\{\tau_k \not\rightarrow \infty\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{\lambda_n \varepsilon_n = 0\}$$

pa oдавde, primenom poznate osobine neprekidnosti verovatnoće, imamo

$$P\{\tau_k \not\rightarrow \infty\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{n=k}^{k+m} P\{\lambda_n \varepsilon_n = 0\} \right) = 0.$$

Ovim je pokazana skoro izvesna konvergencija niza (τ_k) u uslovu (ii) njegove definicije, dok se njegove stohastičke karakteristike (srednja vrednost, disperzija i korelaciona funkcija) dobijaju standardnim preračunavanjem. \square

Na osnovu gore navedenog tvrđenja jasno je da je zaustavni niz (τ_k) nestacionaran niz slučajnih veličina što u praktičnim primenama predstavlja otežavajuću okolnost. Stoga, u daljem radu ćemo isključivo posmatrati niz priraštaja

$$(4.2.2) \quad X_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \lambda_k \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

koji predstavlja niz nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih veličina, dok je njegova raspodela dovoljna za potpuno opisivanje zaustavnog niza. Na jednostavan način mogu se odrediti osnovne stohastičke karakteristike niza (X_k) , srednja vrednost

$$(4.2.3) \quad E(X_k) = E(\lambda_k) = \frac{a+1}{2}$$

kao i disperzija

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} \text{Var}(X_k) &= E(\lambda_k^2)E(\varepsilon_k^2) - [E(\lambda_k)]^2 \\ &= \frac{a+1}{12} [2(\sigma^2 + 1)(2a+1) - 3(a+1)]. \end{aligned}$$

U praktičnim primenama, recimo, obično ćemo pretpostaviti da niz (ε_k) poseduje normiranu Poisson-ovu raspodelu, definisanu izrazom

$$(4.2.5) \quad P\{\varepsilon_k = m\} = \frac{1}{e \cdot m!}, \quad m, k \in D.$$

Tada je $\sigma^2 = 1$, dok se raspodela niza (X_k) , na osnovu definicije D-AST modela, može opisati na sledeći način

$$(4.2.6) \quad P\{X_k = m\} = \begin{cases} 1/e & , \quad m = 0 \\ 1/(ae) \sum_{d \in D(m)} 1/d! & , \quad m \geq 1 \end{cases}$$

pri čemu je sa $D(m)$ označen skup delilaca d broja m sa osobinom $m/d \leq a$. Poznavanje raspodele i gore navedenih osobina niza priraštaja (X_k) predstavlja, kao što ćemo videti, osnovnu polugu u daljem ispitivanju D-AST modela. To se, pre svega, odnosi na postupke ocenjivanja nepoznate granice reakcije a i, na osnovu toga, praktično modelovanje empirijskih, realnih podataka.

4.2.2 Ocene parametara

Osnovni problem u ocenjivanju i kasnijem formiranju D-AST modela nad empirijskim podacima jeste ocenjivanje nepoznatih parametara (a, σ^2) na osnovu realizacije τ_1, \dots, τ_N zaustavnog niza. Kako ovaj niz zamenjujemo stacionarnim nizom priraštaja $X_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, najjednostavniju mogućnost ocenjivanja nepoznatih parametara daju nam jednakosti (4.2.3) i (4.2.4), koje izražavaju srednju vrednost i disperziju niza (X_k) . Primenom metoda momenata, odnosno njihovim izjednačavanjem sa odgovarajućim empirijskim vrednostima

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k, \quad \bar{D}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X}_N)^2$$

dobijamo ocene

$$(4.2.7) \quad \begin{cases} \tilde{a} & = 2\bar{X}_N - 1 \\ \tilde{\sigma}^2 & = [12\bar{D}_N + 3(\tilde{a} + 1)^2] [2(\tilde{a} + 1)(2\tilde{a} + 1)]^{-1} - 1 \end{cases}$$

za koje se na jednostavan način pokazuju "dobre" stohastičke osobine.

Teorema 4.2.2. *Ocena \tilde{a} jeste nepristrasna, strogo postojana i asimptotski normalna ocena parametra a . Ocena $\tilde{\sigma}^2$ je strogo postojana i asimptotski normalna ocena parametra σ^2 .*

Dokaz. Lako je uočiti da je \tilde{a} nepristrasna i strogo postojana ocena parametra a , kao linearna funkcija nepristrasne i strogo postojane ocene srednje vrednosti \bar{X}_N . Takođe, na osnovu asimptotske normalnosti empirijske srednje vrednosti, odnosno konvergencije

$$\sqrt{N} \left(\bar{X}_N - \frac{a+1}{2} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_1),$$

gde je $V_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}(\sqrt{N} \bar{X}_N) = \text{Var}(X_k)$, primenom jednakosti (4.2.7) dobijamo

$$(4.2.8) \quad \sqrt{N}(\tilde{a} - a) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_2),$$

gde je $V_2 = 4 \text{Var}(X_k)$.

Slično, ocena $\tilde{\sigma}^2$, kao neprekidna funkcija $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ strogo postojanih ocena (\tilde{a}, \bar{D}_N) , jeste strogo postojana. Dalje, asimptotska normalnost za $\tilde{\sigma}^2$ sledi na osnovu asimptotske normalnosti ocene \tilde{a} , odnosno konvergencije (4.2.8), kao i konvergencije

$$\sqrt{N} \left(\bar{D}_N - \sigma^2 \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, M_4 - \sigma^4)$$

gde je $M_4 = E(X_k^4)$. Tada, primenom teoreme o neprekidnosti asimptotski normalno raspodeljenih vektora (Serfling [53], str. 122) imamo

$$(4.2.9) \quad \sqrt{N}(\tilde{\sigma}^2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V_3),$$

gde je

$$V_3 = 4\psi_1^2 V + \psi_2^2 (M_4 - \sigma^4)$$

$$\psi_1 = \left. \frac{\partial \psi(\tilde{a}, \bar{D}_N)}{\partial \tilde{a}} \right|_{(\tilde{a}, \bar{D}_N) = (a, \sigma^2)} = -\frac{3}{2(2a+1)^2} - \frac{6\sigma^2(4a+3)}{(a+1)^2(2a+1)^2},$$

$$\psi_2 = \left. \frac{\partial \psi(\tilde{a}, \bar{D}_N)}{\partial \bar{D}_N} \right|_{(\tilde{a}, \bar{D}_N) = (a, \sigma^2)} = \frac{6}{(a+1)(2a+1)}.$$

□

I pored navedenih osobina ocene $(\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2)$ jasno je da ona nije i najefikasnija ocena parametara (a, σ^2) , jer stepen disperzije i rasipanja, opisan disperzijama V_2 i V_3 , može biti dosta veliki, naročito za veće vrednosti $a \in \mathbb{N}$ i $\sigma^2 > 0$. Stoga je od interesa naći efikasnije ocene ovog parametra. U tom cilju, polazeći od ideje Lawrence-a i Lewis-a [36], definisaćemo najpre autoregresivni niz

$$(4.2.10) \quad W_k = bW_{k-1} + \eta_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

gde je $\eta_k = X_k - E(X_k)$ i $b = \varphi(a) \in (0, 1)$ neprekidno-diferencijabilna, monotona funkcija parametra a . Očito, niz (W_k) jeste stacionaran, ergodičan niz slučajnih veličina sa srednjom vrednošću $E(W_k) = 0$, disperzijom

$$\text{Var}(W_k) = E(W_k^2) = (1 - b^2)^{-1} V_1$$

i korelacionom funkcijom

$$\rho_W(h) = \begin{cases} 1, & h = 0; \\ b^{|h|}, & h \neq 0. \end{cases}$$

Koristeći, sada, standardni postupak regresije niza (W_k) u odnosu na svoje prethodne vrednosti u mogućnosti smo da najpre odredimo ocenu parametra b , izrazom

$$(4.2.11) \quad \hat{b} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} W_k W_{k+1} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{N-1} W_k^2 \right)^{-1}.$$

Odavde se dobija ocena za (a, σ^2) oblika

$$(4.2.12) \quad (\hat{a}, \hat{\sigma}^2) = \left(\varphi^{-1}(\hat{b}), \psi(\hat{a}, \bar{D}_N) \right)$$

za koju, kao i u prethodnom slučaju, možemo pokazati odgovarajuća asimptotska svojstva.

Teorema 4.2.3. *Ocena $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$ je strogo postojana i asimptotski normalna ocena parametra (a, σ^2) .*

Dokaz. Kako je niz (W_k) ergodičan i stacionaran niz slučajnih veličina, primenom ergodičke teoreme na izraz (4.2.11) imamo

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k W_{k+1} \xrightarrow{s.i.} bW, \quad N \rightarrow \infty,$$

gde je $W = Var(W_k)$. Takođe, važi i konvergencija

$$(4.2.13) \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k^2 \xrightarrow{s.i.} W, \quad N \rightarrow \infty,$$

pa je, odatle,

$$\hat{b} = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k W_{k+1} \right) \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_k^2 \right)^{-1} \xrightarrow{s.i.} b, \quad N \rightarrow \infty$$

tj. \hat{b} je strogo postojana ocene parametra b . Primenom teoreme o neprekidnosti skoro izvesne konvergencije (Serfling [53], str. 24) dobija se

$$\hat{a} - a = \varphi^{-1}(\hat{b}) - \varphi^{-1}(b) \xrightarrow{s.i.} 0, \quad N \rightarrow \infty$$

čime je pokazana postojanost ocene \hat{a} .

Pokazujemo, sada, najpre asimptotsku normalnost ocene \hat{b} . Na osnovu jednakosti (4.2.11) važi

$$(4.2.14) \quad \sqrt{N}(\hat{b} - b) = \frac{N^{-1/2} \cdot \mathbb{U}_N}{N^{-1} \cdot \mathbb{V}_N}$$

gde je

$$\mathbb{U}_N = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_{k+1} W_k, \quad \mathbb{V}_N = \sum_{k=0}^{N-1} W_k^2, \quad N = 1, 2, \dots$$

Kako niz (\mathbb{U}_N) predstavlja martingal, primenom Billingsley-eve centralne granične teoreme za martingale (Billingsley [4]), imamo

$$N^{-1/2} \cdot \mathbb{U}_N \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D_0), \quad N \rightarrow \infty$$

gde je $D_0 = Var(\eta_{k+1} W_k) = Var(X_{k+1}) Var(W_k) = V W$. Tada, na osnovu skoro izvesne konvergencije (4.2.13) i jednakosti (4.2.14), imamo

$$\sqrt{N}(\hat{b} - b) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D_1), \quad N \rightarrow \infty$$

gde je $D_1 = \frac{Var(X_{k+1})}{Var(W_k)} = 1 - b^2$. Najzad, kako je $b = \varphi(a)$ neprekidna funkcija parametra a , primenom teoreme o neprekidnosti konvergencije u raspodeli (Serfling [53], str. 118) dobijamo

$$\sqrt{N}(\hat{a} - a) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D_2), \quad N \rightarrow \infty$$

gde je $D_2 = [\varphi'(a)]^{-2} \cdot D_1$.

Stroga postojanost i asimptotska normalnost ocene $\hat{\sigma}^2$ pokazuje se na isti način kao i u slučaju ocene $\tilde{\sigma}^2$, odnosno postupkom analognim kao u teoremi 4.2.2. \square

Uočimo, na kraju, da posebno važno svojstvo ocene \hat{a} , a samim tim i ocene $\hat{\sigma}^2$, predstavlja njena asimptotska efikasnost, izražena disperzijom $D_2 = D_2(a)$. Ona, za razliku od odgovarajuće disperzije $V_2 = V_2(a, \sigma^2)$ ocene \tilde{a} , zavisi samo od parametra $a \in \mathbb{N}$, a ne i od $\sigma^2 > 0$. S druge strane, adekvatnim izborom funkcije $\varphi(a)$ moguće je dobiti strogo postojane i asimptotski normalne ocene parametra a koje će biti asimptotski efikasnije od ocene \tilde{a} , odnosno takve da je

$$D_2(a) < V_2(a, \sigma^2).$$

Neke od mogućnosti takvog modelovanja prikazane su u tabeli 4.1, gde su, zajedno sa odgovarajućom disperzijom $D_2(a)$, prikazani neki od mogućih izbora funkcija $\varphi(a)$ za koje će ocena \hat{a} biti efikasnija od ocene \tilde{a} .

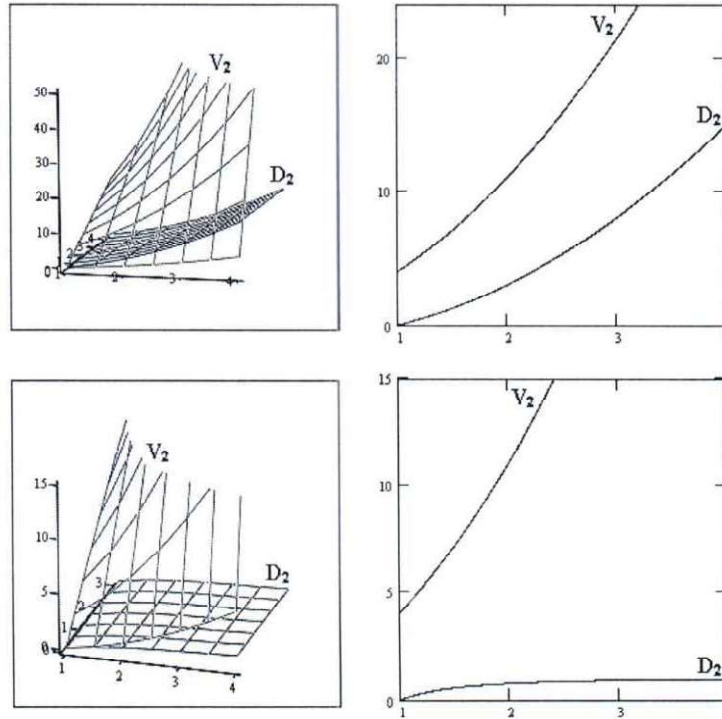
$b = \varphi(a)$	$D_2 = D_2(a)$
$\sin(\ln a)$	a^2
$\sin\left(\ln a + \sqrt{a^2 - 1} \right)$	$a^2 - 1$
$\sin(2\sqrt{a})$	a
$\sin a$	1
$\sin\sqrt{a^2 - 1}$	$\frac{a^2 - 1}{a^2}$

Tabela 4.1: Neki izbori funkcije $\varphi(a)$ sa odgovarajućom disperzijom.

Efikasnost ovih ocena se može uočiti i grafički, na način prikazan na slikama 4.3, gde su uporedo prikazani grafici disperzija $V_2(a, \sigma^2)$ ocene \tilde{a} , kao i grafikon ponašanja disperzije ocene \hat{a} , u slučajevima $D_2(a) = a^2 - 1$, odnosno $D_2(a) = (a^2 - 1)/a^2$. (Slike levo prikazuju funkcionalnu zavisnost ocena $V_2(a, \sigma^2)$ i $D_2(a, \sigma^2)$, dok je specijalan slučaj ove zavisnosti za $\sigma^2 = 1$ prikazan na slikama desno.)

Dakle, ocena \hat{a} , u slučaju kada je efikasnija u odnosu na \tilde{a} , omogućava preciznije ocenjivanje nepoznatog parametra a , pa samim tim i efikasnije

ocenjivanje disperzije σ^2 , tako da će biti u samom središtu naše pažnje prilikom praktične primene D-AST modela.



Slika 4.3: Usporedne vrednosti asimptotskih disperzija ocena \tilde{a} i \hat{a} .

Naravno, sam postupak konstrukcije ovakvih ocena zavisi, pre svega, od izbora odgovarajuće funkcije $\varphi(a)$, ali i od samih ocena \tilde{a} koje bi se mogle koristiti kao inicijalne ocene. Tako bi se, dakle, mogao formirati niz ocena

$$(4.2.15) \quad \hat{a}_{j+1} = \varphi^{-1}(\hat{b}_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots$$

gde je $\hat{a}_0 = \tilde{a}$, a \hat{b}_{j+1} ocena parametra $b = \varphi(a)$ dobijena prethodno opisanim regresionim postupkom, pri čemu je niz (W_k) generisan na osnovu ocene \hat{a}_j . Naravno, poseban problem koji se ovde javlja jeste obezbeđivanje uslova neophodnih za konvergenciju iterativnog metoda (4.2.15), u nekom od poznatih stohastičkih oblika.

4.2.3 Monte Carlo simulacija. Primena modela

U ovom delu opisujemo neke konkretne primene D-AST modela u analizi empirijskih vremenskih serija, odnosno realnih podataka.

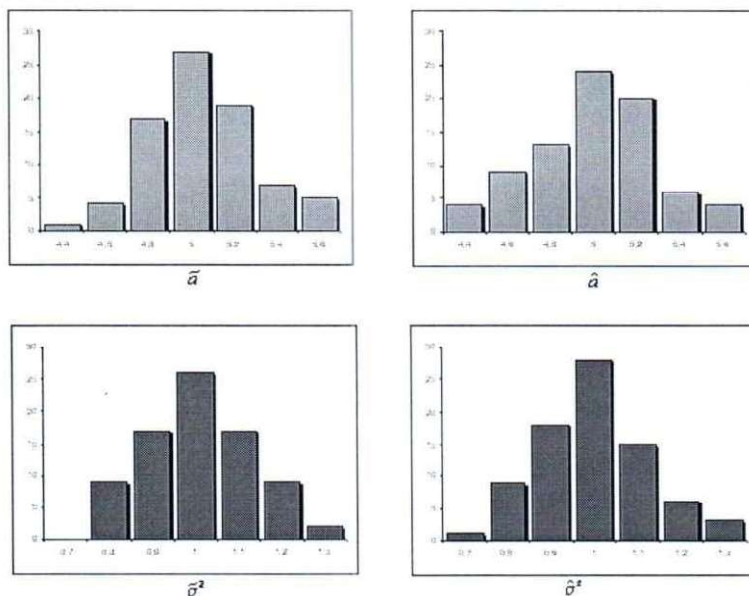
U tu svrhu, razmatramo najpre mogućnost ocenjivanja parametara a i σ^2 D-AST modela, odnosno zaustavnog niza (τ_k) , opisanog jednakošću (4.2.1), na osnovu Monte Carlo simulacija nizova (ε_k) i (λ_k) . Pri tom, pretpostavićemo da niz (ε_k) ima Poisson-ovu normiranu raspodelu opisanu jednakošću (4.2.5).

Tada, na osnovu simulacija ovog niza i niza (λ_k) možemo formirati odgovarajuće simulacije niza priraštaja $X_k = \lambda_k \varepsilon_k$ i, na taj način, postupkom opisanim u prethodnom odeljku, odrediti ocene $(\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2)$ i $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$. U tabeli 4.2 prikazane su prosečne vrednosti ovih ocena, zajedno sa odgovarajućim greškama ocenjivanja (vrednosti prikazane u zagradama) na osnovu 80 nezavisnih Monte Carlo simulacija niza (X_k) dužine $N = 500$. Kao stvarne vrednosti parametra a uzeli smo $a = 2$ i $a = 5$, dok je istinita vrednost disperzije šuma (ε_k) , na osnovu gore navedene pretpostavke o njegovoj raspodeli, $\sigma^2 = 1$.

Parametri	Ocene			
	$(a, \sigma^2) = (2, 1)$		$(a, \sigma^2) = (5, 1)$	
\tilde{a}	1,990	(0,0143)	5,049	(0,0514)
$\tilde{\sigma}^2$	1,009	(0,0917)	1,003	(0,1231)
\hat{a}	2,001	(0,0876)	5,009	(0,0581)
$\hat{\sigma}^2$	0,998	(0,0385)	1,007	(0,0682)

Tabela 4.2: Ocenjene vrednosti na osnovu Monte-Carlo simulacija.

Na slikama 4.4 prikazani su histogrami empirijskih raspodela navedenih ocena u slučaju $a = 5$, $\sigma^2 = 1$. Jasno se uočava grupisanje dobijenih ocena oko stvarne vrednosti parametra a , kao i njihova asimptotska tendencija ka normalnoj raspodeli. Na ovaj način, gore opisani postupci ocenjivanja granice reakcije a dobijaju svojevrsnu potvrdu.



Slika 4.4: Histogrami empirijskih raspodela ocena $(\tilde{a}, \tilde{\sigma}^2)$ i $(\hat{a}, \hat{\sigma}^2)$.

S druge strane, isti metod ocene parametara primenili smo i na realne podatke. Konkretno, kao empirijski skupovi su posmatrani vremenski trenuci promena cena akcija nekih preduzeća koja njima trguju na Beogradskoj berzi. Tada se na jednostavan način mogu odrediti realizacije niza priraštaja X_1, \dots, X_N na osnovu kojih se vrši ocenjivanje nepoznate granice reakcije a i disperzije σ^2 . Naravno, ocenjene vrednosti dobijamo ranije opisanim postupkom.

Koristeći zvanične podatke sa berze, ocenjene vrednosti parametara a i σ^2 za neke od vodećih domaćih firmi prikazane su u tabeli 4.3, pri čemu je očito, na osnovu prikazanih vrednosti, da sva preduzeća imaju "netrivijalne" ocenjene vrednosti parametra $a > 1$. Stoga je frekventnost njihovih promena sporija u odnosu na regularnu, svakodnevnu dinamiku promena cena unutar datog vremenskog intervala. Naravno, veće vrednosti granice a ukazuju na sporiju dinamiku promena cena, dok, s druge strane, visokoj učestanosti promena cena akcija odgovara manja ocenjena vrednost ovog parametra.

Najzad, analizom ocenjenih vrednosti parametra σ^2 uočava se mogućnost dodatnog ispitivanja stepena iregularnosti u dinamici promena posmatranih

Parametri	Preduzeća			
	Alfa Plam Vranje	Hemofarm Vršac	Metalac G. Milanovac	Sunce Sombor
\tilde{a}	4,826	5,000	3,928	6,171
$\tilde{\sigma}^2$	1,156	1,117	0,694	0,935
\hat{a}	4,228	5,387	3,824	6,218
$\hat{\sigma}^2$	1,505	0,953	0,587	1,037

Tabela 4.3: Ocenjene vrednosti parametara na osnovu realnih podataka.

nizova. Zanimljiv je, recimo, slučaj preduzeća Hemofarm i Sunce gde ocenjene vrednosti $\tilde{\sigma}^2$ i $\hat{\sigma}^2$ daju osnova za pretpostavku da je istinska vrednost ovog parametra $\sigma^2 = 1$. Na taj način, raspodela šuma (ε_k) može biti interpretirana Poisson-ovom normiranom raspodelom o kojoj je bilo ranije reći.

4.3 D-ACD model

Savremeni pravci u analizi zaustavnosti, kao što smo videli i u prethodnom odeljku, često se zasnivaju na uvođenju niza priraštaja

$$(4.3.1) \quad X_k = \tau_k - \tau_{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (\tau_0 = 0)$$

čija je raspodela, sa stohastičkog stanovišta, dovoljna za potpuno opisivanje zaustavnog niza (τ_k). U najjednostavnijem slučaju, kada (X_k) predstavlja niz jednako raspodeljenih i nezavisnih slučajnih veličina, ispitivanje njegovih osobina vrši se jednostavnim statističkim metodama (takav slučaj smo i imali kod D-AST modela). Ipak, postoje dobri razlozi koji idu u prilog pretpostavci o postojanju određenih korelacionih veza unutar članova niza (X_k), pa je neophodno formirati odgovarajući matematički model koji će opisati njihovu funkcionalnu zavisnost.

Koristeći ideje slične kao i u slučaju modela uslovne heterogenosti, Engle i Russel [18] formiraju tzv. *autoregresivni model uslovnog trajanja*, kraće,

ACD model². U njemu oni izražavaju *iregularnu dinamiku finansijskih indeksa* tako što niz priraštaja (X_k) iskazuju nelinearnom zavisnošću u odnosu na vrednosti svojih prethodnih realizacija. Osnovne pretpostavke vezane za ACD model zasnivaju se na tome da se niz priraštaja (X_k) definiše multiplikativnim izrazom

$$(4.3.2) \quad X_k = \lambda_k \varepsilon_k, \quad k \geq 1$$

gde je (λ_k) autoregresivni niz prethodnih realizacija niza (X_k) , tj. zadan je rekurentnom relacijom oblika

$$(4.3.3) \quad \lambda_k = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{k-j}, \quad \alpha_0, \alpha_j \geq 0.$$

S druge strane, (ε_k) predstavlja niz jednako raspodeljenih slučajnih veličina ("beli šum") za koji Engle i Russel pretpostavljaju eksponencijalnu raspodelu.³ Kasnije, neka od uopštenja osnovnog ACD modela dali su Bauwens i Giot [3], kao i Meitz i Teräsvirta [40]. U daljem tekstu biće opisan novi, originalan model ACD-tipa, prvi put izložen na konferenciji SYM-OP-IS 2005 u radu V. Stojanovića [56], ali sada u donekle opštijem obliku, koji ne zavisi od oblika raspodele belog šuma.

4.3.1 Definicija i osnovne karakteristike modela

Polazeći, dakle, od ideja Engle-a i Russel-a, ovde ćemo definisati novi, srodan model prevashodno namenjen opisivanju vremenskih trenutaka promena cene akcija na domaćem tržištu hartija od vrednosti. Kako ovo tržište, suprotno nekim razvijenijim zemljama, ima veoma sporu dinamiku u promenama cena, dolazi se do ideje o donekle drugačijoj strukturi niza (λ_k) u odnosu na originalni, izvorni ACD model. Naime, kako su sve promene cena akcija na našem tržištu registrovane dnevno, zvaničnom cenom na zatvaranju Beogradske berze, raspodela ovog niza, za razliku od klasičnih ACD modela, mora biti diskretnog tipa. Stoga će sama stohastička struktura ACD

²Autoregressive Conditional Duration model

³Ova pretpostavka je prirodna jer se eksponencijalna raspodela najčešće i koristi u stohastičkim modelima "čekanja".

modela kojeg ovde definišemo biti u znatnoj meri modifikovana, odnosno, koristeći prethodno izloženu ideju o sporim fluktuacijama cena na našem tržištu hartija od vrednosti, sve vrednosti nizova opisanih jednakošću (4.3.2) interpretiraćemo raspodelama diskretnog tipa.

Definicija 4.3.1. Niz (X_k) , definisan jednakošću (4.3.2), predstavlja *diskretni autoregresivni model uslovnog trajanja (D-ACD model)* ukoliko su za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ ispunjeni sledeći uslovi:

(i) (ε_k) je niz nezavisnih slučajnih veličina sa skupom vrednosti $D = \{0, 1, 2, \dots\}$ i takav da je $E(\varepsilon_k) = 1$, $Var(\varepsilon_k) = \sigma^2$;

(ii) (λ_k) je niz slučajnih veličina takav da je

$$(4.3.4) \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k + \eta_k \varepsilon_k,$$

gde je (η_k) niz nezavisnih slučajnih veličina, takođe nezavistan i od (ε_k) , sa uniformnom raspodelom definisanom na skupu

$$A = \{-a, -a+1, \dots, a-1, a\}, \quad a \in \mathbb{N};$$

(iii) $\mathcal{F}_k = \mathcal{G}en\{(\varepsilon_j, \lambda_j) \mid j = 1, 2, \dots, k\}$, $\mathcal{F}_0 = \emptyset$. △

Slično kao i kod D-AST modela, navedena definicija zadaje niz (X_k) u obliku niza slučajnih veličina sa diskretnom raspodelom koja zavisi od raspodela dvaju nizova. Prvi od njih, niz (ε_k) sa "normiranom" raspodelom ima identičnu interpretaciju kao i ranije. On predstavlja šum koji svojim vrednostima utiče na veličinu promene naredne realizacije zaustavnog niza, ali je prosečna vrednost takvih promena jednaka vremenskoj jedinici u kojoj se posmatra dinamika promene vrednosti posmatranog finansijskog niza. S druge strane, niz (η_k) interpretiramo kao *intenzitet reakcije* prethodnih realizacija koje utiču na veličinu naredne vrednosti niza (λ_k) . Na osnovu uniformne raspodele ovog niza, zaključujemo da je podjednako moguć rast ili smanjenje vrednosti λ_k , pri čemu je, zbog $E(\eta_k) = 0$, prosečna vrednosti takvih reakcija konstantna, odnosno

$$E(\lambda_k) = E(\lambda_{k-1}) = \dots = \lambda_0 \text{ (const.)}, \quad k \geq 1.$$

S druge strane, parametar a predstavlja *gornju granicu* promena niza (η_k) , odnosno susednih vrednosti niza (λ_k) . Naravno, vrednost ovog parametra, kao i vrednost disperzije šuma σ^2 smatramo nepoznatim i ocenjujemo

na osnovu realizacije samog niza (X_k) , o čemu će biti više reči u narednom odeljku. Najzad, uslov (iii) prethodne definicije obezbeđuje, za svako $k \in \mathbb{N}$, nezavisnost slučajnih veličina λ_k u odnosu na η_k i ε_k . Tada, na osnovu (4.3.2) i (4.3.4) zaključujemo da je slučajna veličina λ_k merljiva u odnosu na σ -algebru \mathcal{F}_{k-1} , pa je

$$E(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \lambda_k, \quad Var(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \sigma^2 \lambda_k^2.$$

Ovi rezultati identični su kao i u slučaju izvornog ACD modela Engle-a i Russela-a. Ipak, na osnovu jednakosti

$$Var(\eta_k) = E(\eta_k^2) = \frac{1}{3} a(a+1),$$

dobijamo disperziju niza (λ_k) na sledeći način

$$Var(\lambda_k) = \frac{k}{3} a(a+1) (\sigma^2 + 1).$$

Odavde, konačno, sledi

$$(4.3.5) \quad E(X_k) = E(\lambda_k) = \lambda_0(\text{const.}),$$

kao i

$$(4.3.6) \quad Var(X_k) = Var(\lambda_k) + \sigma^2 E(\lambda_k^2) = \frac{k}{3} a(a+1) (\sigma^2 + 1)^2 + \sigma^2 \lambda_0^2.$$

Na sličan način možemo odrediti i korelacionu strukturu nizova (X_k) i (λ_k) . Kako je, za proizvoljno $h \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Cov(\lambda_k, \lambda_{k+h}) &= E(\lambda_k \lambda_{k+h}) - E(\lambda_k)E(\lambda_{k+h}) \\ &= E[\lambda_k(\lambda_{k+h-1} + \eta_{k+h-1} \varepsilon_{k+h-1})] - \lambda_0^2 \\ &= Cov(\lambda_k, \lambda_{k+h-1}) \\ &\vdots \\ &= Var(\lambda_k), \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

korelacionu funkciju niza (λ_k) možemo napisati u obliku

$$Corr(\lambda_k, \lambda_{k+h}) = \sqrt{\frac{Var(\lambda_k)}{Var(\lambda_{k+h})}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{k}{k+h}}, & h \geq 1; \\ 1, & h = 0. \end{cases}$$

S druge strane, jednostavno se pokazuje da, za $h \in \mathbb{N}$, takođe važi

$$\text{Cov}(X_k, X_{k+h}) = \text{Var}(\lambda_k), \quad k \geq 1$$

pa se korelaciona funkcija za (X_k) dobija u obliku

$$\text{Corr}(X_k, X_{k+h}) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{(k+C)(k+h+C)}}, & h \geq 1; \\ 1, & h = 0. \end{cases}$$

gde je $C = \frac{3\sigma^2\lambda_0^2}{a(a+1)(\sigma^2+1)^2}$.

Na ovaj način, slično kao i kod STOPBREAK procesa, korelacione funkcije nizova (λ_k) i (X_k) jasno ukazuju na njihovu *nestacionaranost*. Pritom, niz (λ_k) , za razliku od (X_k) , zadovoljava uslov srednje-kvadratne neprekidnosti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Corr}(\lambda_k, \lambda_{k+h}) = 1,$$

o kojoj smo takođe govorili u prethodnom poglavlju. Dobijeni rezultati analogni su eksponencijalnom ACD modelu Engle-a i Russel-a. Ipak, u našem slučaju, nestacionarnost nizova (X_k) i (λ_k) , kao i u slučaju STOPBREAK procesa, predstavlja dodatnu, bitnu otežavajuću okolnost u praktičnim primenama D-ACD modela, kojima sada posvećujemo više pažnje.

4.3.2 Ocene parametara

Formiranje D-ACD modela nad empirijskim skupom podataka zasniva se, kao i u slučaju D-AST modela, na oceni parametara (a, σ^2) , a na osnovu dela jedne realizacije x_1, \dots, x_N niza (X_k) . Kako ovaj niz predstavlja nestacionaran niz slučajnih veličina, to je sam postupak ocenjivanja dosta otežan, pa ćemo ovde izložiti samo neke od mogućih ideja ocenjivanja, bez detaljnijeg ispitivanja kvaliteta dobijenih ocena. Inače, neke metode ocenjivanja granice reakcije a opisane su u radu V. Stojanovića [56], gde je razmatran slučaj diskretnog ACD-modela u kome šum (ε_k) ima normiranu Poisson-ovu raspodelu, definisanu izrazom

$$P\{\varepsilon_k = m\} = \frac{1}{e \cdot m!}, \quad m \in D, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Poznavanje raspodele šuma (ε_k) u znatnoj meri olakšava sam postupak ocenjivanja, dok je, s druge strane, poznata vrednost parametra $\sigma^2 = 1$, pa ovaj model, nazvan *Poisson-ov autoregresivni model uslovnog trajanja* (*P-ACDmodel*), predstavlja dosta pojednostavljen oblik opšteg D-ACD modela koji ovde posmatramo. Ipak, osnovni postupak ocenjivanja biće isti, s tom razlikom što će ovde osnovni problem biti nalaženje ocena nepoznate disperzije σ^2 , šuma (ε_k) čija je raspodela, u osnovi, nepoznata.

U tu svrhu, uočimo najpre tzv. rezidualni niz

$$R_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}, \quad k \geq 1$$

koji, na osnovu (4.3.4), predstavlja stacionaran niz nezavisnih slučajnih veličina sa srednjom vrednošću $E(R_k) = 0$ i disperzijom

$$(4.3.7) \quad \text{Var}(R_k) = \frac{1}{3} a(a+1)(\sigma^2 + 1).$$

Same vrednosti ovog niza možemo oceniti na osnovu (X_k) , koristeći, recimo, metod uslovnih najmanjih kvadrata i minimizaciju funkcije

$$Q_N(X_1, \dots, X_N; \Lambda) = \sum_{k=1}^N \left(X_k - E(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) \right)^2$$

po vrednostima $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Na ovaj način, dobijaju se ocene

$$\hat{\lambda}_k = X_k, \quad k = 1, \dots, N$$

pa vrednosti R_k , $k = 1, \dots, N$ možemo oceniti nizom

$$(4.3.8) \quad Y_k = \hat{\lambda}_k - \hat{\lambda}_{k-1} = X_k - X_{k-1}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Pritom, kao ocenu za λ_0 možemo, na osnovu (4.3.5), uzeti empirijsku srednju vrednost realizacije niza (X_k) , tj.

$$\hat{\lambda}_0 = \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k.$$

Niz (Y_k) jeste nestacionaran, sa $E(Y_k) = 0$, ali na osnovu

$$\text{Var}(Y_k) \sim \frac{2}{3} k a(a+1) \sigma^2 (\sigma^2 + 1), \quad k \rightarrow \infty$$

važi

$$\frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \text{Var}(Y_k) \longrightarrow S^2, \quad N \longrightarrow \infty,$$

gde je $S^2 = \sigma^2 \text{Var}(R_k)$. Oдавde, zamenom disperzije niza (Y_k) njenom ocenom

$$\bar{D}_Y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k - X_{k-1})^2$$

graničnu vrednost S^2 možemo oceniti izrazom

$$(4.3.9) \quad \hat{\mathbf{S}}_N^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N (X_k - X_{k-1})^2.$$

Sada, sličan postupak možemo primeniti i na niz

$$Z_k = X_k - X_{k-2}, \quad k = 2, \dots, N$$

za koji važi $E(Z_k) = 0$, kao i $\text{Cov}(Z_k, Z_{k+1}) = \text{Var}(R_k)$. Izjednačavanjem empirijske prve kovarijanse niza (Z_k) sa njenom teoretskom vrednošću, dobijamo ocenu disperzije rezidualnog niza (R_k) :

$$(4.3.10) \quad \hat{\mathbf{V}}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=2}^N (X_{k+1} - X_{k-1})(X_k - X_{k-2}).$$

Oдавde, uz korišćenje prethodno dobijene ocene (4.3.9), dobijamo ocenu disperzije šuma

$$(4.3.11) \quad \hat{\sigma}_N^2 = \frac{\hat{\mathbf{S}}_N^2}{\hat{\mathbf{V}}_N^2} = \frac{\sum_{k=1}^N (X_k - X_{k-1})^2}{N \sum_{k=2}^N (X_{k+1} - X_{k-1})(X_k - X_{k-2})}.$$

Najzad, ocena parametra a , dobijena na osnovu jednakosti (4.3.7) i prethodno dobijenih ocena (4.3.10) i (4.3.11), glasi

$$(4.3.12) \quad \hat{a}_N = \frac{-1 + \sqrt{1 + 12 \hat{\mathbf{V}}_N^2 (\hat{\sigma}_N^2 + 1)^{-1}}}{2}.$$

Nažalost, asimptotska svojstva, a samim tim i kvalitet dobijenih ocena⁴ nije jednostavno utvrditi. Osnovni razlog za to leži u činjenici da niz (X_k)

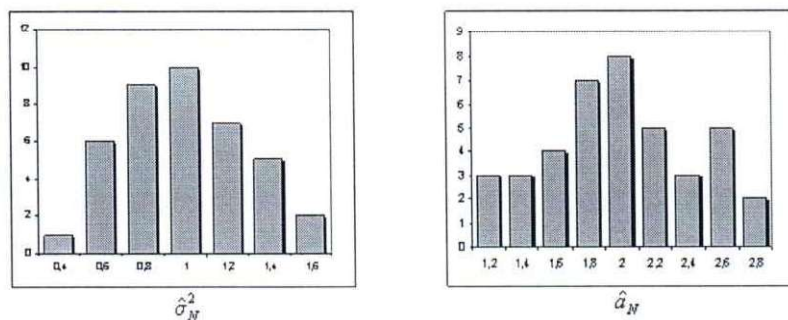
⁴Tu, naravno, pre svega mislimo na postojanost i asimptotsku tendenciju ka normalnoj raspodeli.

jeste nestacionaran, sa disperzijom koja se neograničeno uvećava povećanjem obima njegove realizacije. Ipak, ocena (4.3.12) daje izvesne mogućnosti praktične primene D-ACD modela, o čemu više govorimo već u narednom odeljku.

4.3.3 Monte Carlo simulacija. Primena modela

Kao ilustraciju gore opisanog postupka ocenjivanja, opisaćemo u kratkim crtama neke mogućnosti praktične primene D-ACD modela. Na slici 4.5 prikazan je histogram empirijske raspodele ocena parametra (a, σ^2) , na osnovu 40 nezavisnih Monte Carlo simulacija realizacija nizova (ε_k) i (η_k) dužine $N = 500$. U tu svrhu pretpostavili smo da niz (ε_k) ima Poisson-ovu normiranu raspodelu opisanu jednakošću (4.2.5), dok je raspodela niza (η_k) uniformna na skupu $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Dakle, stvarna vrednost parametara D-ACD modela iznosi $(a, \sigma^2) = (2, 1)$ i jasno se uočava grupisanje dobijenih ocena oko njihovih stvarnih vrednosti, kao i njihova asimptotska tendencija ka normalnoj raspodeli. Naravno, ova tendencija je nešto izraženija kod ocene $\hat{\sigma}_N^2$ (slika levo), jer se ocena \hat{a}_N , definisana izrazom (4.3.12), određuje tek na osnovu nje. Samim tim, njene osnovne stohastičko-asimptotske karakteristike, postojanost i asimptotska normalnost, biće slabije izražene, kao što se može uočiti i vizuelno, na slici desno.



Slika 4.5: Histogram empirijske raspodele ocena parametara a i σ^2 .

S druge strane, isti metod ocene parametara primenili smo i na realne podatke, konkretno, kao empirijski skupovi su posmatrani vremenski trenuci promena cena akcija nekih od preduzeća koja njima trguju na Beogradskoj berzi. Na osnovu zvaničnih podataka sa berze, ocenjene vrednosti parametara prikazane su tabelom 4.4.

Parametri	Preduzeća				
	Alfa Plam Vranje	DIN Niš	Hemofarm Vršac	Metalac G. Milanovac	Sunce Sombor
$\hat{\lambda}_0$	3,045	10,90	1,724	2,489	3,675
\bar{D}_Y	28,09	130,8	3,232	13,48	43,37
\hat{S}_N^2	1,221	4,088	0,108	0,139	1,058
\hat{V}_N^2	1,673	10,72	0,982	1,536	1,425
$\hat{\sigma}_N^2$	0,730	0,381	0,110	0,090	0,742
\hat{a}_N	1,275	4,352	1,204	1,616	2,144

Tabela 4.4: Ocenjene vrednosti empirijskih podataka.

U prvom redu tabele prikazane su ocenjene vrednosti empirijske disperzije niza (Y_k) , zatim ocene parametra S^2 , kao i disperzije rezidualnog niza (R_k) , o kojima smo govorili u prethodnom odeljku. Kako smo tamo već opisali, na osnovu njih određuju se ocene parametara D-ACD modela: granice reakcije a i disperzije šuma σ^2 , prikazane u poslednja dva reda tabele. Kao što se može uočiti, najveću vrednost granice reakcije poseduju akcije Duvanske industrije iz Niša, tj. frekventnost njihovih promena jeste najsporija unutar datog vremenskog intervala.

S druge strane, učestanost promena cena akcija ostalih preduzeća je relativno visoka, jer im odogovaraju manje ocenjene vrednosti parametra a . Male vrednosti granice reakcije a ukazuju na moguću hipotezu o tome da je uniformna raspodela niza (η_k) koncentrisana u tački $x = 0$, čime se, na osnovu (4.3.4), dobija

$$\lambda_k \equiv \lambda_0 (= const).$$

U tom slučaju niz (X_k) jeste niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih veličina i celokupna statistička analiza njegovog ponašanja dobija na jednostavnosti.⁵

Kao posebno zanimljiv istaknimo i slučaj preduzeća Metalac iz Gornjeg Milanovca čija je ocenjena vrednost disperzije šuma σ^2 bliska nuli. Takva činjenica ukazuje na to da bi niz (ε_k) mogao imati raspodelu koncentrisanu u tački $x = 1$. Na taj način, biće

$$X_k \equiv \lambda_k = \lambda_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \eta_j, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

pa niz (X_k) predstavlja sumu nezavisnih slučajnih veličina sa uniformnom raspodelom na skupu A , koji smo definisali u odeljku 4.3.1.

Konačno, da bi zaustavni niz (τ_k) imao potpuno regularnu dinamiku, odnosno promene cena odgovarajućeg finansijskog niza dešavale svakodnevno, potrebno je i dovoljno da, pored toga, bude ispunjen uslov $a \equiv 0$, koji smo ranije opisali, ali i $\lambda_0 \equiv 1$.

⁵U krajnjem slučaju, njegovo ponašanje tada može biti interpretirano ranije opisanim D-AST modelom.

Glava 5

Zaključna razmatranja o modelima

Uspeh nelinearnih stohastičkih modela dinamike finansijskih nizova zas-niva se, kao što smo istakli, na činjenici da su oni dali objašnjenje celom nizu pojava u njihovom ponašanju. Tako su, recimo, modeli uslovne heterogenosti imali izuzetno važnu primenu u opisivanju osobina klasternosti i izduženosti empirijskih gustina raspodela. Takođe, njima je uspešno opisan i karakter promenljivosti volatilnosti koja se, slično posmatranim nizovima, predstavlja nizom slučajnih veličina. Ipak, postoje mnogi fenomeni koje ovi modeli nisu u stanju da objasne. Obično se kao osnovni nedostatak svih modela ARCH tipa naglašava činjenica da je njihova korelaciona funkcija $\rho(k)$ geometrijski opadajuća, što se tumači kao "brzo zaboravljanje prošlosti". Naime, u stacionarnom slučaju je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho(k) < \infty$$

pa je $\rho(k)$ funkcija koja "brzo" konvergira ka 0. Nasuprot tome, na osnovu brojnih statističkih ispitivanja finansijskih nizova utvrđena je (ponekad) jača koreliranost članova niza (h_n^2) nego što je slučaj sa elementima ARCH-modela. Ovo je imalo za posledicu stvaranje tzv. modela "dugog pamćenja" kod kojih korelaciona funkcija ima hiperbolički karakter opadanja ka 0, tj.

$$\rho(k) \sim k^{-p} \quad , \quad 0 < p \leq 1.$$

Dalje, u mnogim savremenim istraživanjima brojni autori kritikuju, pre svega, samu *ideju gausovnosti* belog šuma i ona se čini dosta opravdanom. Tako se često u praktičnom modelovanju boljim pokazateljem fluktuacija pokazuju, recimo, slučajni nizovi sa nekom negausovskom (npr. Studentovom) raspodelom. Takva uopštavanja moguća su i u slučaju opisanih modela. Štaviše, pretpostavka o gausovnosti ima za cilj samo pojednostavljenje postupka ocenjivanja parametara modela, odnosno opisivanja raspodele rezidualnog niza (ε_n). Tako, recimo, u slučaju modela Split-ARCH gausovnost ovog niza omogućava određivanje nivoa značajnosti sa kojom se, na osnovu njegovih realizacija, vrši stratifikacija uzorka. Ipak, oprezni stavovi vezani za raspodelu belog šuma ukazuju na potrebu testiranja i provere njegove stohastičke prirode.

U poglavlju posvećenom pragovnim STOPBREAK procesima, opisani su modeli dinamike finansijskih indeksa koji imaju znatno drugačije karakteristike od prethodnih modela. Njihova osnovna karakteristika, kao što smo videli, ogleda se u samoj rekurentnoj vezi članova posmatranog niza, dok je uloga belog šuma dosta pojednostavljena i svedena na formu koja ne zavisi od njegove raspodele. Ova grupa stohastičkih procesa, istorijski posmatrano, novijeg je karaktera i pruža dovoljno osnova za dalja istraživanja. Naravno, bitna njihova karakteristika jeste *nestacionarnost* koja predstavlja otežavajuću okolnost u samoj analizi njihovih osobina i praktičnoj primeni. Ipak, čak i u takvoj situaciji moguće je formirati postojane, asimptotski normalne ocene nepoznatih parametara i, na taj način, uspešno primeniti opisane modele u praksi. Tako je u radu Stojanović, Popović i Popović [59] pokazano, između ostalog, da je model pragovnog Split-BREAK procesa uspešniji u opisivanju dinamike ukupnog obima trgovanja na domaćem tržištu hartijama od vrednosti u odnosu na većinu poznatih modela koji se u tu svrhu standardno koriste.

Naime, korišćenjem istih podataka izvršeno je poređenje efikasnosti Split-BREAK modela sa pomenutim modelima koji bi se, u tom slučaju, pokazali kao adekvatan izbor u analizi dinamike određenog finansijskog niza. Najpre je, korišćenjem autokorelacione i parcijalne autokorelacione funkcije, utvrđena dimenzija odgovarajućeg autoregresionog (AR) modela kojim se može oceniti uslovna srednja vrednost posmatranog finansijskog niza. Zatim, korišćenjem korelograma kvadrata standardizovanih reziduala, ocenjen je red ARCH modela, ukoliko je on adekvatan izbor. Najzad, izvršeno je

testiranje modela korišćenjem Ljung-Box-ove Q statistike. Na taj način, koristeći model

$$y_t = m_t + a_t, \quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

gde je m_t uslovno matematičko očekivanje, σ_t^2 volatilnost a ε_t beli šum, dobijeni su sledeći rezultati:

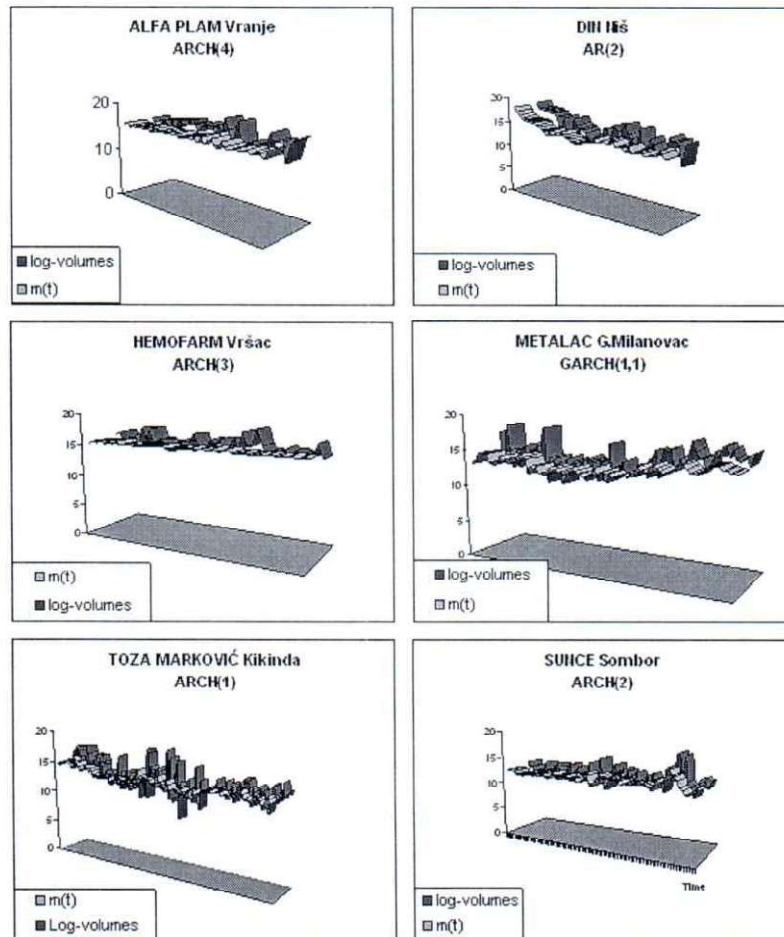
Preduzeće	Tip modela	Ocene	
		Sred. vrednost	Volatilnost
ALFA PLAM Vranje	ARCH(4)	$m_t = 12.47 + 0.16y_{t-1} - 0.22y_{t-2} + 0.24y_{t-3}$	$\sigma_t^2 = 0.78 - 0.07a_{t-1}^2 + 0.13a_{t-2}^2 - 0.04a_{t-3}^2 + 0.22a_{t-4}^2$
DIN Niš	AR(2)	$m_t = 6.18 + 0.23y_{t-1} + 0.33y_{t-2}$	-
HEMOFARM Vršac	ARCH(3)	$m_t = 14.00 - 0.07y_{t-1} + 0.16y_{t-2}$	$\sigma_t^2 = 0.83 - 0.10a_{t-1}^2 - 0.07a_{t-2}^2 + 0.14a_{t-3}^2$
METALAC G. Milanovac	GARCH(1,1)	$m_t = 5.39 + 0.20y_{t-1} + 0.14y_{t-2} + 0.27y_{t-3}$	$\sigma_t^2 = 0.46 + 0.31a_{t-1}^2 + 0.52\sigma_{t-1}^2$
T. MARKOVIĆ Kikinda	ARCH(1)	$m_t = 6.13 + 0.09y_{t-1} + 0.21y_{t-2} + 0.25y_{t-3}$	$\sigma_t^2 = 1.44 + 0.43a_{t-1}^2$
SUNCE Sombor	ARCH(2)	$m_t = 4.51 + 0.29y_{t-1} + 0.27y_{t-2} + 0.08y_{t-3}$	$\sigma_t^2 = 0.62 + 0.26a_{t-1}^2 + 0.32a_{t-2}^2$

Tabela 5.1: Ocenjene vrednosti realnih podataka na osnovu poznatih modela.

U skladu sa dobijenim rezultatima, lako je uočiti, recimo, da svi dobijeni modeli sadrže dosta veliki broj ocenjenih parametara. Tako će u slučaju preduzeća Alfa Plam iz Vranja biti korišćen ARCH(4) model pri čemu je ocenjeno čak 9 koeficijenata nizova m_t i σ_t^2 , za preduzeće Hemofarm iz Vršca ARCH(3) model sa 7 koeficijenata, itd. Najjednostavniji rezultat, linearni AR(2) model, dobijen je kod preduzeća DIN iz Niša gde je ocenjeno samo 3 koeficijenta.

Direktna posledica konstrukcije modela sa većim brojem parametara jeste činjenica da odgovarajući model neće u najboljoj meri objasniti dinamiku posmatranog finansijskog niza, što se lako može uočiti na slici 5.1. Drugim rečima, čak i najbolji rezultati dobijeni gore navedenim modelima jesu osetno slabiji u odnosu na prethodne koje smo dobili modelovanjem pomoću Split-BREAK procesa. Štaviše, primenom Split-BREAK modela

koji, u osnovnom obliku poseduje samo dva nepoznata parametra, kritičnu vrednost reakcije c i disperziju σ^2 , dobijeni su, kao što smo videli, mnogo bolji rezultati u modelovanju posmatranih empirijskih podataka.



Slika 5.1: Uporedne vrednosti realnih i modeliranih podataka.

Na kraju, istaknimo da poslednje poglavlje ove disertacije obrađuje posebno zanimljivo svojstvo ponašanja finansijskih nizova, osobinu iregularnosti u vremenskim trenucima promene njihovih vrednosti. Ova osobina uočena je u dinamici promena cena akcija nekih od eminentnih domaćih preduzeća

koja njima trguju na Beogradskoj berzi i poseduje znatne specifičnosti koje se ogledaju, pre svega, u naglašeno sporoj dinamici promena cena. Na taj način, u cilju opisivanja ovakve dinamike korišćeni su stohastički modeli zasnovani na nizovima slučajnih promenljivih sa raspodelama diskretnog tipa.

Kao posebnu zanimljivost prilikom izbora odgovarajućeg modela istaći ćemo međusobnu koreliranost susednih članova zaustavnog niza (τ_k), odnosno niza priraštaja $X_k = \tau_k - \tau_{k-1}$, kojima su opisani vremenski trenuci promena cena akcija. Ukoliko empirijska istraživanja ukazuju na slabu koreliranost članova niza (X_k), onda se kao adekvatan stohastički model može koristiti tzv. D-AST model koji je najpre opisan u pomenutom poglavlju. S druge strane, prisustvo naglašene korelacione veze susednih članova niza priraštaja ukazuje na njihovo drugačije ponašanje i, samim tim, drugačije stohastičko modelovanje. Jedna od mogućnosti tada jeste primena drugog, D-ACD modela zasnovanog na idejama uslovnog trajanja Engle-a i Russel-a.

Literatura

- [1] Amendola A., Storti G. (2000), *A Non-Linear Time Series Approach to Modelling Asymmetry in Stock Market Indexes*, Università di Salerno, Dipartimento di Scienze Economiche, WP 3.93
- [2] Baillie R. T., Chung H. (2001), *Estimation of GARCH Models From the Autocorrelations of the Squares of a Process*, Journal of Time Series Analysis, Vol. 22, No. 6, 631-650
- [3] Bauwens L., Giot P. (2000), *The Logarithmic ACD Model: An Application to the Bid-Ask Quote Process of Three NYSE Stocks*, Annales d' Économie et de Statistique, No. 60, 117-149
- [4] Billingsley P. (1961), *The Lindeberg–Levy Theorem for Martingales*, Proceedings of the American Mathematical Society **12**, No. 5, 788-792
- [5] Bollerslev T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Financial Economics 31, 307-327
- [6] Borkovec M. (2000), *Extremal behavior of the autoregressive process with ARCH(1) errors*, Stochastic Process and their Applications 85, 189-207
- [7] Bougerol P., Picard N. (1992), *Strict Stationarity of Generalized Autoregressive Processes*, The Annals of Probability Vool. 20 No. 4, 1714-1730
- [8] Brandt A. (1986), *The stochastic equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with stationary coefficients*, Applied Probability 18, 211-220

-
- [9] Brillinger D. R., Guttorp P. M., Schoenberg F. P. (2002), *Point Process, Spatial-Temporal*, Encyclopedia of Environmetrics, Vol. 3, 1571-1581, John Wiley & Sons, Ltd
- [10] Brock W. A., Lima P. J. F. (1995), *Nonlinear Time Series, Complexity, Theory and Finance*, Handbook of Statistics, Vol. 14, Statistical Methods in Finance, North-Holland, New York
- [11] Brown E. N. (2001), *The Time-Rescaling Theorem and Its Application to Neural Spike Train Data Analysis*, Neural Computation 14, 325-346
- [12] Cecconi M., Gallo G.M., Lombardi M. J. (2002), *GARCH-based Volatility Forecasts for Market Volatility Indices*, Dipartimento di Statistica "G. Parenti", WP 2002/06, Econometrics, Firenze
- [13] Chan K. S. (1993), *Consistency and Limiting Distribution of the Least Squares Estimator of a Threshold Autoregressive Model*, Annals of Statistics 21, 520-533
- [14] Chihwa K. (2001), *Bounded Influence Estimation for ARCH Models With Estimates of the Variances of Foreign Exchange Rates*, Center of Policy Research Working Paper No. 34, ISSN 1525-3066
- [15] Dufour A., Engle R. F. (2000), *Time and the Price Impact of a Trade*, The Journal of Finance, Vol. LV, No. 6, 2467-2498
- [16] Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. (2001), *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Application of Mathematics 33, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [17] Engle R. F. (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, Econometrica, Vol. 50, No. 4, 987-1007
- [18] Engle R. F., Russel J. R. (1997), *Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data*, Econometrica, Vol. 66, 1127-1162
- [19] Engle R. F., Smith A. D. (1999), *Stochastic Permanent Breaks*, The Review of Economics and Statistics 81, 553-574

-
- [20] Fornari F., Mele A. (1997), *Sign- And Volatility Switching- ARCH Models: Theory and Applications to International Stock Markets*, Journal of Appl. Econometrics, Vol. 12, 49-65
- [21] Francq C., Roussignol M., Zakoian J.M. (2001), *Conditional Heteroskedasticity Driven by Hidden Markov Chains*, Journal of Time Series Analysis, Vol. 22, No. 2, 197-220
- [22] Fernandes M., Grammig J. (2001), *A Family of Autoregressive Conditional Duration Models*, Economics Working Papers (Ensaaios Economicos da EPGE)
- [23] Fonseca G. (2004), *On the Stationarity of First-order Nonlinear Time Series Models: Some Developments*, Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, Vol. 8, Iss. 2, Article 12
- [24] Franses P. H., Dijk V. D. (2000), *Nonlinear Times Series Models in Empirical Finance*, Cambridge University Press, Cambridge
- [25] Fuller W. A. (1976), *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons, New York
- [26] Giraitis L., Leipus R., Surgailis D. (2003), *Recent Advances in ARCH modeling*, Vilnius University and Institute of Mathematics and Informatics
- [27] González A. (2004), *A Smooth Permanent Surge Process*, SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance No. 572, Stockholm
- [28] Hamilton D. J. (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press, New Jersey
- [29] Hansen B. (2000), *Sample Splitting and Threshold Estimation*, Econometrica, Vol. 68, No. 3, 575-603
- [30] Hansen B. (2004), *Instrumental Variable Estimation of a Threshold Model*, Econometric Theory, Vol. 20, 813-843
- [31] Hafner C. M. (1998), *Durations, Volume and Prediction of Financial Returns in Transaction Time*, Symposium on Microstructure and High Frequency Data, Paris

-
- [32] Hwang S., Pereira P. L. V. (2003), *Small Sample Properties of GARCH Estimates and Persistence*, FinanceLab Working Papers, FLPW-2003-1, 1-44
- [33] Jeantreau T. (2004), *A link between complete models with stochastic volatility and ARCH models*, Finance and Stochastics, Vol. 8, 111-131
- [34] Kingman J. F. C. (1973), *Subadditive Ergodic Theory*, Ann. Probability 1, 883-909
- [35] Lawrence A. J., Lewis P. A. W. (1992), *Reversed Residuals in Autoregressive Time Series Analysis*, Journal of Time Series Analysis 13, 253-266
- [36] Lawrence A. K., Nelson I. P. (1978), *On Conditional Least Squares Estimation for Stochastic Processes*, The Annals of Statistics, Vol. 6, No. 3, 629-642
- [37] Mališić J. (1991), *Slučajni procesi - teorija i primene*, Naučna knjiga, Beograd
- [38] Mališić J. (2002), *Vremenske serije*, Matematički fakultet, Beograd
- [39] Masry E. (2005), *Nonparametric Regression Estimation for Dependent Functional Data: Asymptotic Normality*, Stochastic Process and their Applications 15, 155-177
- [40] Meitz M., Teräsvirta T. (2004), *Evaluating Models of Autoregressive Conditional Duration*, SSE/EFI Working Papers Series in Economics and Finance, No. 557
- [41] Mikosch T. (2001), *Modelling Dependence and Tails of Financial Time Series*, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen
- [42] Milovanović G. (1986), *Numerička analiza I*, Naučna knjiga, Beograd
- [43] Muler N., Yohai V. J. (2002), *Robust Estimates for ARCH Processes*, Journal of Time Series Analysis, Blackwell Publishers Ltd., 341-375

-
- [44] Nicholls D., Quinn B. (1982), *Random coefficient autoregressive models: An introduction*, Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [45] Pliska S. R. (2003), *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell Publishing Ltd, Bodmin, Cornwall
- [46] Popović Č. B. (1992), *The first order RC autoregressive time series*, Scientific Review 21-22, 131-136
- [47] Popović B., **Stojanović V.** (2003), *Stacionarnost volatilnosti cene u ARCH modelima*, Zbornik radova SYM-OP-IS 2003, 575-578
- [48] Popović Č. B., **Stojanović S. V.** (2005), *Split-ARCH*, PLISKA Studia Mathematica Bulgarica, Vol. 17, 201-220
- [49] Popović Č. B., **Stojanović V.** (2005), *Estimation in Stationary Non-linear Models of Conditional Heteroscedasticity*, predat za štampu
- [50] Preda C., Saporta G. (2005), *PLS Regression on a Stochastic Process*, Computational Statistics & Data Analysis 48, 149-158
- [51] Sangjoon K., Shephard N., Siddhartha C. (1998), *Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models*, Review of Economic Studies 65, 361-393
- [52] Schönfeld P. (2004), *Least Squares in General Vector Spaces Revisited*, Journal of Econometrics, 118, 95-109
- [53] Serfling R. J. (1980), *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, Inc.
- [54] Shi G., Chaganty R. N. (2004), *Application of Quasy-Least Squares to Analyse Replicated Autoregressive Time Series Models*, Journal of Applied Statistics, Vol. 31, No. 10, 1147-1156
- [55] Skouras K. (2000), *Strong Consistency In Nonlinear Stochastic Regression Models*, The Annals of Statistics, Vol. 28, No. 3, 871-879
- [56] **Stojanović V.** (2005), *P-ACD model dinamike finansijskih nizova u zaustavnom vremenu*, Zbornik radova SYM-OP-IS 2005, 501-505

-
- [57] **Stojanović V.**, Popović B. (2004), *Iterativni metodi ocene parametara u modelima uslovne heterogenosti*, Zbornik radova SYM-OP-IS 2004, 513-516
- [58] **Stojanović V.**, Popović B. (2005), *Pragovni STOPBREAK proces kao stohastički model dinamike finansijskih nizova*, Zbornik radova SYM-OP-IS 2005, 505-508
- [59] **Stojanović V.**, Popović B., Popović P. (2006), *Noise-Indicator STOPBREAK model*, predat za štampu
- [60] **Stojanović V.**, Popović B. (2006), *Discrete Autoregressive Stopping Time Model*, predat za štampu
- [61] Ширяев А. Н. (1998), *Основы стохастической финансовой математики*, Фазис, Москва
- [62] Tong H. (1983), *Thresholds Models in Non-linear Time Series Analysis*, Lecture Notes in Statistics 21, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [63] Tse Y. K. (2001), *Residual Based Diagnostics for Conditional Heteroscedasticity Models*, Department of Economics, National University of Singapore
- [64] Whitley J. (2001), *Extremum Estimation Theory*, Economics 211/Spring, Lecture 6-8
- [65] Wu C. (2004), *Weighted Empirical Likelihood Inference*, Statistics & Probability Letters 66, 67-79
- [66] Zakoian J. M. (1994), *Threshold Heteroskedastic Models*, Journal of Economic Dynamics and Control 18, 931-955.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Владица Стојановић

број индекса _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ КАО НЕЛИНЕАРНИ СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ ДИНАМИКЕ
ФИНАНСИЈСКИХ НИЗОВА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

B. Stojanovic

У Косовској Митровици, 16.06.2023. године

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

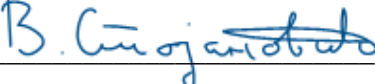
Име и презиме аутора Владица Стојановић

Број индекса _____

Студијски програм Математика

Наслов рада ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ КАО НЕЛИНЕАРНИ СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ
ДИНАМИКЕ ФИНАНСИЈСКИХ НИЗОВА

Ментор проф. Др Биљана Поповић

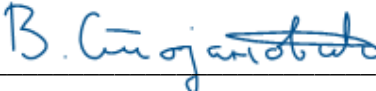
Потписани/а 

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици.

Потпис докторанда



У Косовској Митровици, 16.06.2023. године

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ВРЕМЕНСКЕ СЕРИЈЕ КАО НЕЛИНЕАРНИ СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ ДИНАМИКЕ
ФИНАНСИЈСКИХ НИЗОВА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

B. C. G. J. A. S. T. O. V. I. C. I. C.

У Косовској Митровици, 16.06.2023. године

1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.