УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милан М. Перић

ПОЛИНОМИЈАЛНА ЕНТРОПИЈА ЗА МОРСОВЕ ГРАДИЈЕНТНЕ СИСТЕМЕ И ЛОГИСТИЧКО ПРЕСЛИКАВАЊЕ

докторска дисертација

Београд, 2021.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Milan M. Peric

POLYNOMIAL ENTROPY FOR MORSE GRADIENT SYSTEMS AND LOGISTIC MAP

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2021.

Ментор:

др Јелена Катић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

Чланови комисије:

др Дарко Милинковић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Миљан Кнежевић, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Божидар Јовановић, научни саветник
Математички институт САНУ

др Јована Николић, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Јелена Катић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

Датум одбране: _____

Наслов дисертације: Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе и логистичко пресликавање

Резиме: У овој тези је приказан метод за израчунавање полиномијалне ентропије тополошког динамичког система који има коначан број нелутајућих тачака. Уведено је специјално кодирање које је прилагођено оваквим системима. Захваљујући овом кодирању полиномијална ентропија се може ограничити бројем специфичних међусобно сингуларних тачака у затворењима стабилних многострукости нелутајућих тачака. Затим је овај метод примењен на Морсове градијентне системе. Показано је да је полиномијална ентропија Морсовог градијентног система ограничена са $n(F)-1$, где је $n(F)$ број различитих Морсових индекса критичних тачака Морсове функције F. За Морсове градијентне системе на многострукости димензије n који имају критичне тачке само индекса 0 и n доказано је да је полиномијална ентропија једнака 1, а за системе који имају индексе критичних тачака 0, $n/2$ и n доказано је да је полиномијална ентропија једнака 2. Израчуната је и полиномијална ентропија за различите вредности параметра код логистичког пресликавања, и показано да полиномијална ентропија разликује системе ниске комплексности са драстично различитим понашањем, које тополошка ентропија не разликује. Дат је и пример хомеоморфизма компактног повезаног метричког простора који није еквинепрекидан, а полиномијална ентропија се анулира.

Кључне речи: Динамички системи, полиномијална ентропија, Морсови градијентни системи, логистичко пресликавање.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Математичка анализа

Dissertation title: Polynomial entropy for Morse gradient systems and logistic map

Abstract: This thesis presents a method for calculating the polynomial entropy of the topological dynamic system with finitely many non-wandering points. A special coding is adapted for such systems. Thanks to this coding the polynomial entropy can be bounded by the number of specific mutually singular points in the closures of stable manifolds of non-wandering points. This method was applied to Morse gradient systems. It is shown that the polynomial entropy of the Morse gradient system is bounded by $n(F) - 1$, where $n(F)$ is the number of different Morse indices of critical points of the Morse function F. If Morse gradient systems on manifolds of dimension n has only critical points of indices 0 and n, it is proved that the polynomial entropy is equal to 1, and if the system has critical points of indices 0, $n/2$ and n, it is proved that polynomial entropy is equal to 2. The polynomial entropy for different parameter values in logistic map has also been calculated, and it has been shown that the polynomial entropy distinguishes the systems of low complexity with drastically different behaviours, which cannot be distinguished by the topological entropy. The example of the homeomorphism of the connected compact metric space that is not equicontinuous and with vanishing polynomial entropy is also given.

Keywords: Dynamical systems, polynomial entropy, Morse gradient systems, logistic map.

Research area: Mathematics

Research sub-area: Mathematical analysis

Садржај

Увод **1**

1 Основни појмови **3**

1.1 Тополошка динамика 3
1.2 Тополошка ентропија 11
1.3 Полиномијална ентропија 23
1.4 Морсови градијентни системи 28
1.5 Кодирање у лутајућој динамици 40
1.6 Логистичко пресликавање 53

2 Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе **57**

3 Полиномијална ентропија за логистичко пресликавање **67**

4 Даља размишљања **75**

Литература **81**

Биографија аутора **84**

Увод

Проучавање комплексности тополошких динамичких система је једна од централних тема ове области већ више од пола века. Разликовање понашања динамичких система и њихова квалитативна анализа је важна како у теоријском раду тако и применама. Са циљем класификовања система уведене су бројни појмови. Теорија хаоса се развила у засебну област која је доста актуелна и занимљива. Једна од класичних величина која региструје неуређеност система је и тополошка ентропија. За разлику од већине других карактеризација тополошка ентропија је квантитативна величина и може добро разликовати системе високе комплексности. Можемо рећи да она мери број суштински различитих орбита са експоненцијалним растом. Повезаност тополошке ентропије са другим тополошким особинама динамичког система је добро проучена. Показало се да тополошка ентропија има значајне лепе особине као што је на пример варијациони принцип који је повезује са просторима са мером и ергодичком теоријом. Такође израчуната је вредност тополошке ентропије разних система и развијени су алгоритми за њену процену у случајевима када тачно израчунавање није могуће. Ипак тополошка ентропија, као и већина других мера хаотичности, не разликује системе ниске комплексности. Најбољи пример су можда хармонијски и нехармонијски осцилатор, који су очигледно значајно различити, а тополошка ентропија се на њима анулира. Ипак, системи ниске комплексности су значајни и присутни како у теоријској математици тако и у применама. Са циљем разликовања таквих система пре десетак година је уведена полиномијална ентропија, која се природно појавила у истраживањима. Модификацијом дефиниције тополошке ентропије уведена је ова величина која мери полиномијални раст броја суштински различитих орбита, уместо експоненцијалног раста као што је то био случај у тополошкој ентропији. Овако уведена величина се показала као корисна за разликовање динамичких система код којих је тополошка ентропија нула. Разумевање полиномијалне ентропије за сада није велико, објављен је мали број радова о њој и истраживања су још на почетку. Полиномијална ентропија је израчуната за релативно мали број нетривијалних система. Такође, многе њене особине нису још увек добро проучене. Мерењем полиномијаланог раста суштински различитих орбита, уместо експоненцијалног раста, уочене су битне разлике. Једна од најзначајнијих је та што је тополошка ентропија садржана у нелутајућем делу динамичког система и лутајући део система занемарује. Полиномијална ентропија је баш насупрот добро прилагођена лутајућој динамици и већ само постојање лутајуће тачке говори да полиномијална ентропија није мања од 1. У лутајућој динамици је уведено специфично кодирање које смо ми прилагодили динамичком систему са коначно много нелутајућих тачака. Ово смо искористили како бисмо израчунали полиномијалну ентропију за значајне примере: Морсове градијентне системе и логистичко пресликавање.

У Глави 1 су дати основни појмови који су нам били неопходни за рад. Дефинисани су основни појмови тополошке динамике. Затим је дат приказ тополошке ентропије

и основних особина које су нам биле неопходне. Следи дефинисање полиномијалне ентропије и преглед до сада познатих резултата. Дали смо и кратак опис Морсових градијентних система и логистичког пресликавања. У овој глави нема оригиналних резултата, сем у 1.5 где је познато кодирање за системе са једном нелутајућом тачком прилагођено системима са коначно много нелутајућих тачака и у ком су објашњене карактеристике овог кодирања. Показано је да је полиномијална ентропија ограничена бројем специфичних међусобно сингуларних скупова који се могу наћи у затворењу инваријантних подскупова.

Глава 2 доноси оригиналне резултате. Кодирање система са коначно много нелутајућих тачака примењено је на Морсове градијентне системе. Наиме код ових система су нелутајуће тачке заправо критичне тачке Морсове функције и има их коначно много, па је ова примена оправдана. Помоћу описа границе модулских простора показано је да је полиномијална ентропија негативног Морсовог градијентног система ограничена са $n(F)-1$, где је $n(F)$ број различитих Морсових индекса критичних тачака Морсове функције F. Специјално, за Морсове градијентне системе на многострукости димензије n који имају критичне тачке само индекса 0 и n доказано је да полиномијална ентропија једнака 1, а за системе који имају индексе критичних тачака 0, $n/2$ и n доказано је да је полиномијална ентропија 2. Из претходног је изведен закључак за Морсове градијентне системе на површи да је полиномијална ентропија 1 у случају када немају критичну тачку индекса 1, односно 2 када постоји критична тачка чији је индекс 1.

У Глави 3 је разматрана полиномијална ентропија логистичког пресликавања у зависности од параметра. За вредности параметра за које је логистичко пресликавање хаотично полиномијална ентропија је бесконачна. Међутим у делу где систем није хаотичан добијен је нов резултат. За вредности параметра које нису веће од 1 добијено је да је полиномијална ентропија једнака нули, а за вредности параметра које су веће од 1 а и даље се налазимо у нехаотичној области израчунато је да је полиномијална ентропија једнака 1. Ове две области вредности параметра имају потпуно различито асимптотско понашање. Наиме, за вредности параметра које нису веће од 1 систем колапсира у тачку, а за вредности параметра веће од 1 систем има нетривијалан инваријантан скуп, а понашање је доста правилно, постоји периодична орбита ка којој конвергирају орбите свих тачака сем коначно много. Овим је још једном оправдано увођење полиномијалне ентропије. Логистичко пресликавање се често назива и популациона једначина и има доста примена у другим наукама, рецимо биологији. Може да се очекује да наши резултати моги имати примену у практичним наукама. Наиме, проценом полиномијалне ентропије могла би се, на пример, предвидети будућност популације.

У Глави 4 је дат преглед многих отворених питања и проблема везаних за полиномијалну ентропију. На примеру Мебијусових трансформација Риманове сфере показано је да треба пажљиво одабрати систем на којем примењујемо уведене методе како би се могли добити резултати који нам дају нове информације и унапређују знање. У циљу карактеризације полиномијалне ентропије дат је и пример хомеоморфизма компактног повезаног простора који није еквинепрекидан а чија је полиномијална ентропија нула.

Надамо се да ће наши резултати допринети бољем разумевању како полиномијалне ентропије, тако и динамике Морсових градијентних система и логистичког пресликавања.

Глава 1

Основни појмови

1.1 Тополошка динамика

У овој глави дефинисаћемо појмове тополошке динамике који су нам били потребни у нашем раду и дати најосновније особине. Резултати ове главе су познати (осим уопштења из Поглавља 1.5) и наведени су ради комплетности. Од обимне литературе највише смо се ослањали на [8], [16] и [26].

Дискретан тополошки динамички систем подразумева метрички простор (X, d) заједно са непрекидним пресликавањем $f : X \to X$, док континуални тополошки динамички систем подразумева метрички простор заједно са током $\phi_t(x)$ (или полутоком) непрекидним по x и t на простору X. Користићемо углавном скраћени назив динамички систем, подразумевајући да је јасно о ком од ових система се говори у конкретном случају. Већину дефиниција и теорема даћемо за дискретан динамички систем, а у случају када се не преносе аналогно на континуални динамички систем даћемо посебне дефиниције и тврђења. У циљу једноставности излагања подразумеваћемо да је простор X локално компактан и да задовољава другу аксиому пребројивости. (Понекад се тополошки динамички систем дефинише и општије као дејство тополошке групе на тополошком простору, али таква уопштења нису од интереса за наше истраживање.)

Итерације пресликавања f означаваћемо са

$$f^n(x) = f \circ \cdots \circ f(x)$$

подразумевајући да је $f^0 = id$. Како важи да је

$$f^n \circ f^m = f^{n+m}$$

итерације пресликавања чине полугрупу, односно групу у случају када је f инвертибилно пресликавање.

Дефиниција 1. *Позитивна орбита* тачке $x \in X$ дефинисана је са

$$\mathcal{O}^+(x) = \left\{ f^n(x) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Ако је систем инвертибилан дефинишемо и *негативну орбиту*

$$\mathcal{O}^-(x) = \left\{ f^{-n}(x) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Орбита тачке је унија негативне и позитивне орбите у случају инвертибилног система

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^{+}(x) \cup \mathcal{O}^{-}(x)$$

У случају неинвертибилног система позитивну орбиту некад називамо само орбитом.

Дефиниција 2. Тачка $x \in X$ се назива *фиксном* уколико је $f(x) = x$. Скуп фиксних тачака пресликавања f означаваћемо са $\mathrm{Fix}(f)$.

Дефиниција 3. Тачка $x \in X$ се назива *периодичном* уколико постоји $p \geqslant 1$ тако да је $f^{p}(x) = x$. Најмање p за које претходно важи називаћемо *периодом* периодичне тачке x. Скуп периодичних тачака пресликавања f означаваћемо са $\mathrm{Per}(f)$.

Дефиниција 4. За подскуп $A \subset X$ кажемо да је *унапред инваријантан* ако је

$$f^{n}(A) \subseteq A, \qquad \text{за све } n \in \mathbb{N}.$$

Ако је систем инвертибилан за подскуп $A \subset X$ кажемо да је *уназад инваријантан* ако је

$$f^{-n}(A) \subseteq A, \qquad \text{за све } n \in \mathbb{N},$$

и *инваријантан* ако је и унапред и уназад инваријантан.

И овде код неинвертибилних система унапред инваријантан скуп некад називамо само инваријантним.

Дефиниција 5. Нека су $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ два динамичка система. Непрекидно и сурјективно пресликавање

$$\pi : Y \to X$$

које задовољава да је

$$f \circ \pi = \pi \circ g$$

се назива *тополошком семиконјугацијом* из g у f. Другим речима, π је тополошка семиконјугација из f у g ако дијаграм

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \arrow[d, "\pi"'] \\ X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

комутира. Ако важи претходно, f називамо *фактором* од g, а g *екстензијом* од f.

Инвертибилна тополошка семиконјугација се назива *тополошком конјугацијом*, а системи се у том случају називају *тополошки конјугованим.*

Није тешко утврдити да је тополошка конјугација релација еквиваленције. Многе значајне особине динамичких система су инваријанте тополошке конјугације. Рецимо тополошка конјугација чува орбите, па ћемо видети да су и тополошка и полиномијална ентропија инваријанте тополошке конјугације.

Циљ нам је и да уочимо тачке и подскупове система који имају извесна карактеристична понашања, или поседују околину која је специфична у неком смислу. Са том идејом дефинисаћемо најпре атракторе.

Дефиниција 6. Компактан скуп $C \subset X$ се назива *атрактором* ако постоји отворен скуп U, такав да је $C \subset U$, $f\left(\overline{U}\right) \subset U$ и

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} f^n(U).$$

Није тешко видети да је тада $f(C) = C$ и да у компактном простору X орбита сваке тачке $x \in U$ конвергира ка C, односно да $d\left(f^n(x), C\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Најједноставнији примери атрактора су пресек слика целог простора, атрактујућа фиксна тачка (фиксна тачка која је атрактор) и атрактујућа периодична орбита (периодична орбита која је атрактор). Многи атрактори имају јако компликовану и занимљиву структуру. Проучавање атрактора се развило у целу област динамике, али су нама потребна само основна својства и примери.

Пример 7. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ пресликавање класе C^1, p фиксна тачка тог пресликавања и $|f'(p)| < 1$. Тада је тачка p атрактор (атрактујућа фиксна тачка).

Заиста, како је $|f'(p)| < 1$ постоји интервал $[p-\delta, p+\delta]$ и $m \in (0,1)$ тако да за свако $x \in [p-\delta, p+\delta]$ важи да је $|f'(x)| < m$. На основу Лагранжове теореме постоји ξ између x и p тако да је

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(\xi)|\,|x-p| \leqslant m\,|x-p|.$$

Међутим тада важи да је и

$$|f^n(x) - p| \leqslant m^n\,|x-p|$$

Пустивши да n тежи бесконачно добијамо да

$$|f^n(x) - p| \to 0,\ n \to \infty.$$

Слично се може показати да у случају када је p периодична тачка са периодом k и $\left|\left(f^k(p)\right)'\right| < 1$ следи да је орбита тачке p атрактујућа периодична орбита, односно скуп $\mathcal{O}^+(p)$ је атрактор у смислу Дефиниције 6.

Аналогно атрактору можемо дефинисати и репелер за инвертибилне системе. За компактан скуп R кажемо да је репелер ако постоји отворен скуп $U \supset R$ тако да је $f^{-1}\left(\overline{U}\right) \subseteq U$ и

$$R = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(U).$$

Интересантно нам је и понашање орбита тачака при великом броју итерација. Такође занима нас да ли тачке којима се орбита приближава, или у околини којих се нагомилава, имају неке специфичности.

Дефиниција 8. Нека је $f : X \to X$ тополошки динамички систем. За произвољну тачку $x \in X$, тачка y је *ω-гранична тачка* ако постоји низ природних бројева $n_k \to \infty$ таквих да је

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y.$$

Скуп свих ω-граничних тачака неке тачке називамо њеним *ω-граничним скупом* $\omega(x)$, односно

$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i \geqslant n} f^i(x)}.$$

У случају да је систем инвертибилан можемо аналогно дефинисати *α-гранични скуп*

$$\alpha(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geqslant n} f^{-i}(x)}.$$

Тачка из $\alpha(x)$ се назива *α-гранична тачка.*

Тврђење 9. *За свако $x \in X$ скуп $\omega(x)$ је затворен и инваријантан подскуп од X. Уколико је простор X компактан, скуп $\omega(x)$ мора бити непразан.*

Доказ. Нека је y_k низ тачака из $\omega(x)$ који конвергира ка тачки y. Тада је за произвољно $\varepsilon > 0$ и довољно велико k растојање $d(y_k, y) < \varepsilon/2$. Такође постоји подниз $f^{k_j}(x)$ такав да за довољно велико j важи $d\left(f^{k_j}(x), y_k\right) < \varepsilon/2$. Тада је на основу неједнакости троугла за довољно велико j и $d\left(f^{k_j}(x), y\right) < \varepsilon$, односно $y \in \omega(x)$, те је скуп $\omega(x)$ затворен.

Инклузија $f(\omega(x)) \subseteq \omega(x)$ је очигледна.

Ако је простор X компактан низ тачака $f^n(x)$ мора имати конвергентан подниз чија је гранична тачка у $\omega(x)$. □

Посебно су занимљиве тачке које су елемент свог ω-граничног скупа па ћемо њих дефинисати.

Дефиниција 10. Тачка се назива *рекурентна* ако је

$$x \in \omega(x).$$

Скуп рекурентних тачака означаваћемо са $\mathcal{R}(f)$. Овај скуп је такође инваријантан и садржи све периодичне (па самим тим и фиксне) тачке динамичког система.

Уопштење појма рекурентних тачака су нелутајуће тачке.

Дефиниција 11. Скуп $U \subset X$ се назива *лутајућим* ако за свако $n \geqslant 1$ важи да је

$$f^n(U) \cap U = \emptyset.$$

Тачка се назива *лутајућом* ако постоји њена околина која је лутајући скуп.

Тачка која није лутајућа се назива *нелутајућа.* Другим речима тачка $x \in X$ је нелутајућа ако за сваку околину $U \ni x$ постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Скуп свих нелутајућих тачака динамичког система обележаваћемо са $\mathrm{NW}(f)$.

Тврђење 12. *Ако је $f : X \to X$ тополошки динамички систем тада је*

1. *скуп $\mathrm{NW}(f)$ затворен и инваријантан,*
2. *за свако $x \in X$ важи $\omega(x) \subseteq \mathrm{NW}(f)$,*
3. *важи да је $\overline{\mathcal{R}(f)} \subseteq \mathrm{NW}(f)$,*
4. *и ако је систем инвертибилан $\mathrm{NW}(f^{-1}) = \mathrm{NW}(f)$.*

Доказ. 1. Како бисмо показали затвореност уочимо тачку $x \notin \mathrm{NW}(f)$. Тада постоји околина $U \ni x$ таква да је $f^n(U) \cap U = \emptyset$ за свако n. Али тада је и свака тачка $y \in U$ лутајућа тачка па је комплемент $\mathrm{NW}(f)$ отворен, односно скуп $\mathrm{NW}(f)$ затворен.

Изаберимо тачку $x \in \mathrm{NW}(f)$ и околину њене слике $V \ni f(x)$. Дефинишимо околину $U \ni x$ са $U = f^{-1}(V)$. Тачка x је нелутајућа па постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Дакле постоји тачка $y \in f^n(U) \cap U$. Из тога што је $y \in U$ следи да је $f(y) \in V$. Такође је $y \in f^n(U)$, па је $f(y) \in f^n(V)$. Следи да је $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$, па је и тачка $f(x)$ нелутајућа, односно скуп $\mathrm{NW}(f)$ је инваријантан.

2. Нека је сада $y \in \omega(x)$ за неко $x \in X$ и нека је $U \ni y$ произвољна околина тачке y. Тад постоји низ $n_k \to \infty$ тако да $f^{n_k}(x) \to y$, па постоји $z = f^{n_{k_1}}(x) \in U$. Али из конвергенције низа $f^{n_k}(x)$ мора постојати и $k_2 > k_1$ тако да је $f^{n_{k_2}}(x) \in U$. Дакле нашли смо тачку $z \in U$ тако да је $f^{n_{k_2}-n_{k_1}}(z) \in U$, односно $f^{n_{k_1}-n_{k_2}}(U) \cap U \neq \emptyset$, па је тачка y нелутајућа.

3. По дефиницији све рекурентне тачке су ω-граничне тачке и како је скуп $\mathrm{NW}(f)$ затворен, инклузија затворења рекурентних тачака у нелутајућим је очигледна.

4. Ако је систем инвертибилан и тачка x нелутајућа за сваку околину $U \ni x$ постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Али тада је

$$f^{-n}(f^n(U) \cap U) = U \cap f^{-n}(U)$$

односно $U \cap f^{-n}(U)$ је непразан, те је $x \in \mathrm{NW}(f^{-1})$. Дакле добили смо да је $\mathrm{NW}(f) \subseteq \mathrm{NW}(f^{-1})$. Заменом улога f и f^{-1} добија се и обрнута инклузија, па скупови морају бити једнаки.

□

На основу претходног скупови фиксних, периодичних, рекурентних и нелутајућих тачака пресликавања f су повезани инклузијама датим у следећем тврђењу.

Тврђење 13. *За тополошки динамички систем $f : X \to X$ важе следеће инклузије*

$$\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Per}(f) \subseteq \mathcal{R}(f) \subseteq \overline{\mathcal{R}(f)} \subseteq \mathrm{NW}(f).$$

Пример 14. Даћемо пример да скуп рекурентих тачака не мора бити затворен.

Посматрајмо кружницу

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

и на њој задато пресликавање

$$x \mapsto 2x \pmod 1.$$

За сваку тачку облика $x = k/(2^n - 1)$ важи да је $f^n(x) = x$, па је тачка x рекурентна. Скуп рационалних бројева датог облика је густ па можемо закључити да је у овом случају

$$\overline{\mathcal{R}(f)} = \mathbb{S}^1.$$

Ако уочимо тачку $1/2$ важи да је $f(1/2) = 0$, али и $f^n(1/2) = 0$ за свако n, па тачка $1/2$ није рекурентна. Овим смо показали да скуп рекурентних тачака не мора бити затворен.

Даћемо још једно тврђење у вези са нелутајућим тачакама, које ће нам бити корисно у даљем раду.

Тврђење 15. *Нека је $f : X \to X$ непрекидно пресликавање компактног метричког простора чије се скуп нелутајућих тачака састоји само од коначно много фиксних тачака, односно*

$$\mathrm{NW}(f) = \mathrm{Fix}(f) = \{p_1, \ldots, p_k\}.$$

Тада за свако $x \in X$ важи

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p_i, \qquad p_i \in \mathrm{Fix}(f).$$

Доказ. Како је простор компактан низ $f^n(x)$ има конвергентан подниз $f^{n_k}(x) \to y$. Како је $y \in \omega(x) \in \mathrm{NW}(f)$ мора бити $y = p_j$ за неко j.

Пресликавање f је непрекидно па за свако $\varepsilon > 0$ можемо изабрати $\delta > 0$ тако да

$$d(x, p_j) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p_j)) = d(f(x), p_j) < \varepsilon, \quad \forall j = 1, \ldots, k.$$

Нека је

$$\varepsilon < \min\left\{d(p_i, p_l) \;\middle|\; p_i, p_l \in \mathrm{Fix}(f)\right\}.$$

Како је скуп фиксних тачака коначан можемо изабрати и да је δ довољно мало да за кугле $U_i = B(p_i, \delta)$ са центром у фиксним тачкама важи

$$d(U_i, U_m) \geqslant \varepsilon, \qquad i \neq m.$$

Приметимо да само за коначно много n важи

$$f^n(x) \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_i$$

иначе би постојао подниз који конвергира ка тачки $p \notin \mathrm{NW}(f)$. Нека је

$$N = \max\left\{n \;\middle|\; f^n(x) \notin \bigcup_{i=1}^{k} U_i\right\}.$$

Из конвергенције подниза који конвергира ка тачки $p_j \in \mathrm{NW}(f)$ можемо изабрати $n_k > N$ тако да је

$$d(f^{n_k}(x), p_j) < \delta.$$

Како је $n_k > N$ знамо да је $f(f^{n_k}(x)) \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$. Са друге стране из непрекидности не може бити $f(f^{n_k}(x)) \in U_i$, за $i \neq j$. На основу претходног мора важити

$$f(f^{n_k}(x)) \in U_j,$$

па можемо закључити да је

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p_j.$$

□

На компактном метричком простору (X, d) можемо увести и динамичку метрику за свако $n \in \mathbb{N}$ са

$$d_n(x, y) = \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} d\left(f^k(x), f^k(y)\right).$$

Тврђење 16. *Динамичке метрике d_n су тополошки еквивалентне са метриком d.*

Доказ. Ако уочимо отворену куглу $B_n(x,\varepsilon)$ у метрици d_n на основу дефиниције динамичке метрике важи

$$B_n(x,\varepsilon) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \left\{ y \in X \mid d\left(f^k(x), f^k(y)\right) < \varepsilon \right\}.$$

Како је за свако k пресликавање f^k непрекидно инверзна слика отворених скупова је отворен скуп, па је сваки скуп који учествује у пресеку отворен у топологији генерисаној са d. Пресек коначно много отворених скупова је отворен па је кугла $B_n(x,\varepsilon)$ отворен скуп и у топологији генерисаној метриком d.

Са друге стране, нека је U произвољан отворен скуп у топологији која је задата метриком d. За $x \in U$ тада постоји r тако да је $B(x,r) \subset U$. Али како је растојање у метрици d_n веће од растојања у метрици d следи да је

$$x \in B_n(x,r) \subset U,$$

па је скуп U отворен и у топологији задатој метриком d_n. □

Приметимо да за супремум по природним бројевима не мора претходно важити, користили смо коначност броја индекса.

Претходна особина је јако значајна, јер многе карактеристике динамичких система (на пример тополошка и полиномијална ентропија) не зависе од метрике, већ само од топологије простора, што ћемо видети у Тврђењу 32 и Тврђењу 43.

За крај овог поглавља дефинисаћемо и неке глобалне особине тополошких динамичких система, које омогућавају извесна разликовања и класификацију система у односу на њихово понашање при великом броју итерација.

Дефиниција 17. Нека је $f : X \to X$ хомеоморфизам компактног метричког простора. За пар тачака $x, y \in X$ кажемо да је *проксималан* ако постоји низ $n_k \in \mathbb{Z}$ такав да $d\left(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)\right) \to 0$ кад $k \to \infty$.

Пар тачака $x, y \in X$ које нису проксималне називају се *дисталне.* Хомеоморфизам коме је сваки пар тачака дисталан се назива *дисталан.*

Другим речима хомеоморфизам називамо дисталним ако за сваки пар тачака $x, y \in X$ важи да постоји $\delta > 0$ тако да је

$$d\left(f^n(x), f^n(y)\right) > \delta, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Дефиниција 18. Хомеоморфизам компактног метричког простора $f : X \to X$ се назива *еквинепрекидним* ако је фамилија итерација $\left\{ f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ еквинепрекидна фамилија, односно ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ тако да

$$d(x,y) < \delta \Longrightarrow d\left(f^n(x), f^n(y)\right) < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Приметимо да је у претходној дефиницији $n \in \mathbb{Z}$, тако да је еквивалентно да је f еквинепрекидан хомеоморфизам и да је f^{-1} еквинепрекидан хомеоморфизам.

Изометрије су очигледно еквинепрекидни хомеоморфизми и овакви хомеоморфизми деле многе особине изометрија.

Тврђење 19. *Сваки еквинепрекидан хомеоморфизам је дисталан.*

Доказ. Претпоставимо, супротно тврђењу, да хомеоморфизам $f : X \to X$ јесте еквинепрекидан, а није дисталан. Тада постоји пар проксималних тачака $x, y \in X$, односно постоји низ $n_k \in \mathbb{Z}$ такав да $d\left(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)\right) \to 0$ кад $k \to \infty$. Нека је $\varepsilon = d(x, y)$ и

$$x_k = f^{n_k}(x), \quad y_k = f^{n_k}(y).$$

Тада за свако $\delta > 0$ постоји $n_k \in \mathbb{N}$ тако да је $d(x_k, y_k) < \delta$ али и

$$d\left(f^{-n_k}(x_k), f^{-n_k}(y_k)\right) = \varepsilon.$$

Дакле можемо пронаћи две тачке које су произвољно близу, а чије растојање је у некој (допуштамо и негативној) итерацији није мање од ε. Закључујемо да дати хомеоморфизам није еквинепрекидан, што је контрадикција са претпоставком. □

Иако имају донекле слично понашање дистални хомеоморфизми су ипак шира класа, што нам говори следећи пример.

Пример 20. Посматраћемо раван торус $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ са наслеђеном Еуклидском метриком и на њему задато пресликавање

$$f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2 \qquad f(x, y) = (x + \alpha \pmod 1,\ x + y \pmod 1)$$

где је α произвољна реална константа.

Уочимо две произвољне тачке $(x, y), (x', y') \in \mathbb{T}^2$. Ако је $x = x'$ тада је

$$d\left(f^n(x, y), f^n(x', y')\right) = d\left((x, y), (x', y')\right),$$

а ако је $x \neq x'$ онда је

$$d\left(f^n(x, y), f^n(x', y')\right) \geqslant d\left((x, 0), (x', 0)\right) > 0.$$

Како је почетно растојање тачака, односно почетно растојање по првој координати, константа следи да је пресликавање дистално.

Да бисмо показали да пресликавање није еквинепрекидно уочимо тачке $(0, 0)$ и $(\delta, 0)$, где је $\delta < 1/2$. Пресликавање на првој координати можемо схватити као ротацију на кругу за константан угао, па је растојање по првој координати константно у итерацијама и једнако δ. Растојање по другој координати у итерацијама ових тачака је $n\delta$ докле год је $n\delta < 1/2$. За довољно мало δ можемо изабрати n тако да је $1/4 \leqslant n\delta < 1/2$. Из овога можемо закључити да постоје тачке које су произвољно близу и чије ће растојање после n итерација бити најмање $1/4$, па пресликавање није еквинепрекидно.

Уведимо још једну занимљиву класу пресликавања.

Дефиниција 21. Хомеоморфизам метричког простора $f : X \to X$ се назива *експанзивним* ако постоји $\delta > 0$ тако да за сваке две различите тачке $x, y \in X$ постоји $n \in \mathbb{Z}$ тако да је $d\left(f^n(x), f^n(y)\right) \geqslant \delta$. Овако изабрано δ се назива *експанзивном константом* пресликавања f.

Овако дефинисани експанзивни хомеоморфизми су значајно различити од дисталних, о чему говори следеће тврђење чији доказ се може видети у [8].

Тврђење 22. *Експанзиван хомеоморфизам компактног метричког простора са бесконачно тачака не може бити дисталан.*

1.2 Тополошка ентропија

Процењивање неуређености тополошког динамичкиг система и оцењивање његовог понашања је у последњих пола века једна од централних тема проучавања у тополошкој динамици. Тополошка ентропија је квантитативна мера неуређености која одређује експоненцијални раст броја орбита које се суштински разликују. Тополошка ентропија је данас већ класичан појам и огроман број радова о њој је објављен, тако да изгледа немогуће дати чак и преглед свих значајних резултата. У овом поглављу дефинисаћемо тополошку ентропију и доказати најосновније и најзанимљивије особине. Дефиницију тополошке ентропије коју ћемо ми користити дали су независно један од другог Бовен у [5] и Динабург у [11], седамдесетих година двадесетог века. Резултати које ћемо презентовати су делови већине уџбеника из динамичких система и могу се наћи на многим местима, а ми ћемо у основи пратити излагања дата у [8] и [16]. Иако су урађена уопштења и за некомпактне просторе концентрисаћемо се на компактан случај, тј. подразумеваћемо да је (X, d) компактан метрички простор и пресликавање $f : X \to X$ непрекидно кад и то није посебно напоменуто.

Дефиниција 23. Минималан број скупова дијаметра мањих од ε у метрици d_n који могу покрити простор X означаваћемо са

$$\operatorname{cov}(n, \varepsilon).$$

Приметимо да када је простор X компактан број $\operatorname{cov}(n, \varepsilon)$ мора бити коначан.

Уведимо сада величину

$$h_\varepsilon(f) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{cov}(n, \varepsilon)}{n}.$$

Како је вредност $\operatorname{cov}(n, \varepsilon)$ неопадајућа по ε оправдана је следећа дефиниција.

Дефиниција 24. *Тополошку ентропију* пресликавања f дефинишемо са

$$h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} h_\varepsilon(f) \in [0, \infty].$$

У литератури се често користи и ознака само $h(f)$, међутим ми ћемо задржати суфикс како бисмо разликовали од друге ентропије коју ћемо увести.

Напомена 25. *Можемо приметити и да*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{cov}(n, \varepsilon)}{n}$$

постоји и да је коначан. Како бисмо ово доказали потребна нам је једна лема.

Лема 26. *(Фекете) За субадитиван низ реалних ненегативних бројева $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, тј. низ за који важи да је за свако m и n $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$, постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ и једнак је $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$.*

Доказ. За произвољна два природна броја $p < n$ можемо записати $n = pq + r$ где су q и r природни бројеви и $0 \leqslant r < p$. Тада из субадитивности следи

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_{pq}}{n} + \frac{a_r}{n} \leqslant \frac{a_{pq}}{pq} + \frac{a_r}{n} \leqslant \frac{q\, a_p}{pq} + \frac{a_r}{n} = \frac{a_p}{p} + \frac{a_r}{n}.$$

Сада на ове неједнакости можемо применити $\limsup$ по n, а затим $\inf$ по p. Добијамо

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{a_p}{p}.$$

Како је сигурно

$$\inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{a_p}{p} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

следи да је

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \inf_{p\in\mathbb{N}} \frac{a_p}{p} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

па су, због тога што смо добили да је горњи лимес мањи од доњег лимеса, све неједнакости заправо једнакости. □

Дакле, на основу Леме 26 довољно је доказати да је низ $\log \operatorname{cov}(n,\varepsilon)$ *субадитиван као бисмо знали да лимес постоји. Фиксирајмо* $\varepsilon > 0$. *Нека је* $\mathcal{U}$ *покривање минималне кардиналности у метрици* d_m *скуповима дијаметра мањег од* ε, *а* $\mathcal{V}$ *покривање минималне кардиналности у метрици* d_n *скуповима дијаметра мањег од* ε. *Дефинишимо сада покривање*

$$\mathcal{W} = \left\{ U \cap f^{-m}(V) \;\middle|\; U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V} \right\}.$$

Ако је $W \in \mathcal{W}$ *тада је* W *подскуп неког* $U \in \mathcal{U}$ *па је и његов дијаметар у метрици* d_m *мањи од* ε. *Такође по дефиницији је и* $f^m(W)$ *подскуп неког* $V \in \mathcal{V}$ *па има дијаметар мањи од* ε *у метрици* d_n. *Следи да скупови покривања* $\mathcal{W}$ *имају дијаметар мањи од* ε *у метрици* d_{m+n}. *Кардиналност покривања* $\mathcal{W}$ *мора бити мања од производа кардиналности покривања* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$, *па то мора важити и за минимално покривање у метрици* d_{m+n}. *Следи да је*

$$\operatorname{cov}(m+n,\varepsilon) \leqslant \operatorname{cov}(m,\varepsilon)\operatorname{cov}(n,\varepsilon),$$

одакле применом логаритма добијамо потребно

$$\log \operatorname{cov}(m+n,\varepsilon) \leqslant \log \operatorname{cov}(m,\varepsilon) + \log \operatorname{cov}(n,\varepsilon).$$

И поред овога стандардна дефиниција тополошке ентропије укључује горњи лимес, због аналогије са еквивалентним дефиницијама које ћемо дати у Последици 30.

Напомена 27. *Тополошка ентропија се може дефинисати и општије у случају компактног, непразног Хауздорфовог простора. Ова општија дефиниција историјски претходи нашој, а дали су је Адлер, Конхајм и Мекендрју у [1]. Нека је* $\mathcal{V}$ *отворено покривање простора* X, *а* $N(\mathcal{V})$ *минимална кардиналност потпокривања. Из компактности следи да је* $N(\mathcal{V})$ *увек коначан број. За два покривања* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{V}$ *дефинишемо*

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \left\{ U \cap V \;\middle|\; U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V} \right\}.$$

Нека је

$$\mathcal{U}^n = \mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \ldots f^{-n+1}(\mathcal{U})$$

где је

$$\mathcal{U}^{-k} = \left\{ f^{-k}(U) \;\middle|\; U \in \mathcal{U} \right\}.$$

Из субадитивности се може показати да за свако отворено покривање $\mathcal{U}$ постоји гранична вредност

$$\tilde{h}\left(\mathcal{U}, f\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N\left(\mathcal{U}^n\right)}{n}.$$

Ентропију сада можемо дефинисати са

$$\tilde{h}\left(f\right) = \sup_{\mathcal{U}} \left\{\tilde{h}\left(\mathcal{U}, f\right)\right\}$$

где је супремум узет по свим отвореним покривањима. Еквиваленцију овакве дефиниције ентропије са Дефиницијом 24 доказао је Бовен у [6].

Супремуму по свим отвореним покривањима у дефиницији $\tilde{h}\left(f\right)$ одговара лимес кад ε тежи нули у Дефиницији 24, јер је и то супремум по $\varepsilon \geqslant 0$. Профињењем покривања $\mathcal{U}$ се повећава $\tilde{h}\left(\mathcal{U}, f\right)$. За најгрубље покривање $\mathcal{U} = \{X\}$ добија се да је $\tilde{h}\left(\{X\}, f\right) = 0$. Смањивање ε у Дефиницији 24 одговара у ствари профињењу покривања.

Дефиниција дата у овој напомени је инспирисана ентропијом у простору са мером, која се назива и Колмогоров-Синајевом ентропијом. Динамички систем у простору са мером се дефинише као $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$, где је X скуп, $\mathcal{B}$ σ алгебра на X, $\mu : \mathcal{B} \to [0, 1]$ вероватносна мера и $T : X \to X$ мерљива трансформација која чува меру.

За дату партицију $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_k\}$ скупа X можемо дефинисати

$$T^{-1}\mathcal{Q} = \left\{T^{-1}Q_1, \ldots, T^{-1}Q_k\right\}.$$

Ако имамо и партицију $\mathcal{R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ дефинишемо

$$\mathcal{Q} \vee \mathcal{R} = \left\{Q_i \cap R_j \;\middle|\; \in \{1, \ldots, k\},\ j \in \{1, \ldots, m\},\ \mu\left(Q_i \cap R_j\right) > 0\right\}.$$

Ентропија партиције $\mathcal{Q}$ се дефинише као

$$\mathrm{H}\left(\mathcal{Q}\right) = -\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \mu\left(Q\right) \log \mu\left(Q\right),$$

а ентропија динамичког система у односу на партицију $\mathcal{Q}$

$$h_\mu\left(T, \mathcal{Q}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{H}\left(\bigvee_{k=0}^{n} T^{-k}\mathcal{Q}\right)}{n}.$$

Колмогоров-Синај ентропија динамичког система у простору са мером је

$$h_\mu\left(T\right) = \sup \mathcal{Q}\left\{h_\mu\left(T, \mathcal{Q}\right)\right\}$$

где је супремум узет по свим коначним мерљивим партицијама $\mathcal{Q}$.

Можемо видети да су дефиниције из два различита контекста аналогне, али постоји и дубља повезаност. Наиме у раду [12] доказан је варијациони принцип за ентропију

$$h_{top}\left(f\right) = \sup_{\mu} \left\{h_\mu\left(f\right)\right\}$$

где је супремум узет по свим f инваријантним Бореловим вероватносним мерама простора на коме је задато пресликавање. Занимљива и бројна истраживања су урађена у проучавању под којим условима се супремум достиже, и у којим случајевима је јединствена мера на којој се достиже супремум.

Из практичних разлога, тј. лакшег израчунавања тополошке ентропије у конкретним случајевима уводе се и друге еквивалентне дефиниције. Али најпре морамо дефинисати неке специјалне врсте скупова.

Дефиниција 28. *За скуп $E \subseteq X$ кажемо да је $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен ако за сваке две различите тачке $x, y \in E$ важи да је $d_n(x, y) \geqslant \varepsilon$. Из компактности следи да је сваки $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп коначне кардиналности. Максималну кардиналност $(n, \varepsilon; f)$-раздвојеног скупа означавамо са* $\operatorname{sep}(n, \varepsilon; f)$.

Скуп $F \subseteq X$ називамо $(n, \varepsilon; f)$-мрежом ако за сваку тачку $x \in X$ постоји $y \in F$ тако да је $d_n(x, y) < \varepsilon$. Из компактности следи да је и свака $(n, \varepsilon; f)$-мрежа скуп коначне кардиналности. Минималну кардиналност $(n, \varepsilon; f)$-мреже означавамо са $\operatorname{span}(n, \varepsilon; f)$.

Када је јасно о ком пресликавању се говори изостављаћемо f из нотације, ради краћег записа и користити ознаке $\operatorname{sep}(n, \varepsilon)$ и $\operatorname{span}(n, \varepsilon)$.

За овако уведене величине показује се да имају слично понашање са $\operatorname{cov}(n, \varepsilon)$, наиме важи наредна лема.

Лема 29. *Важи следећи низ неједнакости*

$$\operatorname{cov}(n, 2\varepsilon) \leqslant \operatorname{span}(n, \varepsilon) \leqslant \operatorname{sep}(n, \varepsilon) \leqslant \operatorname{cov}(n, \varepsilon).$$

Доказ. Нека је $F \subseteq X$ $(n, \varepsilon; f)$-мрежа минималне кардиналности. Тада је фамилија кугли $\{B(x, \varepsilon) \mid x \in F\}$ покривање простора X скуповима дијаметра 2ε па је

$$\operatorname{cov}(n, 2\varepsilon) \leqslant \operatorname{span}(n, \varepsilon).$$

Нека је сада $E \subseteq X$ $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп максималне кардиналности. Тада је овај скуп и $(n, \varepsilon; f)$-мрежа. Наиме ако би постојало $x \in X$ такво да је $d_n(x, y) \geqslant \varepsilon$ за свако $y \in E$ тада би скуп $E \cup \{x\}$ био $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен што је у супротности са тим да је E $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп највеће кардиналности. Дакле, добили смо и другу неједнакост

$$\operatorname{span}(n, \varepsilon) \leqslant \operatorname{sep}(n, \varepsilon).$$

На крају, ако је $\mathcal{U}$ покривање X скуповима дијаметра мањег од ε и E $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп тада је за свако $U \in \mathcal{U}$ пресек $U \cap E$ једночлан или празан скуп (скуп U је дијаметра мањег од ε па не може садржати два елемента скупа E). Одавде следи и последња неједнакост

$$\operatorname{sep}(n, \varepsilon) \leqslant \operatorname{cov}(n, \varepsilon).$$

□

На основу претходне леме видимо да тополошку ентропију можемо дефинисати на три еквивалентна начина, тако да можемо примењивати дефиницију која је у датом тренутку најзгоднија за доказивање особина и израчунавање.

Последица 30. *На основу претходне леме тополошку ентропију можемо дефинисати на три еквивалентна начина*

$$h_{top}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{cov}(n, \varepsilon)}{n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{span}(n, \varepsilon)}{n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{sep}(n, \varepsilon)}{n}.$$

Напомена 31. *Иако граничне вредности* $\lim_{n\to\infty} (\log \operatorname{cov}(n,\varepsilon))/n$ *и* $\lim_{n\to\infty} (\log \operatorname{cov}(n,2\varepsilon))/n$ *постоје оне могу бити различите функције промењиве* ε*. Може се догодити да низови* $(\log \operatorname{span}(n,\varepsilon))/n$ *и* $(\log \operatorname{sep}(n,\varepsilon))/n$ *не конвергирају, па морамо користити горњи лимес. Међутим гранична вредност кад* $\varepsilon \to 0^+$ *постоји и једнака је у свим датим случајевима.*

Докажимо најпре да је тополошка ентропија заиста тополошка особина, односно да не зависи од метрике, већ само од топологије простора.

Тврђење 32. *Тополошка ентропија не зависи од избора метрике које генеришу исту топологију на* X*.*

Доказ. Ово тврђење следи из резултата у [6] споменутог у Напомени 27. Овде ћемо изложити доказ који се не ослања на резултате из [6].

Претпоставимо да су d^1 и d^2 две метрике на простору X које генеришу исту топологију. Тада ће и метрике d_n^1 и d_n^2 генерисати исту топологију. Како генеришу исту топологију метрика d_n^1 је равномерно непрекидна у метрици d_n^2. За произвољно $\varepsilon > 0$ постојаће $\delta > 0$ тако да кад год је $d_n^1(x,y) < \delta$ мора бити и $d_n^2(x,y) < \varepsilon$. Закључујемо да скуп који има дијаметар мањи од δ у метрици d_n^1 мора имати дијаметар мањи од ε у метирици d_n^2. На основу овога произвољан покривач простора скуповима дијаметра мањег од δ у метрици d_n^1 биће и покривач простора скуповима дијаметра мањег од ε у метрици d_n^2,па следи да је

$$\operatorname{cov}^2(n,\varepsilon) \leqslant \operatorname{cov}^2(n,\delta).$$

Како је увек $h_\delta^1(f)$ мање од $h_{top}^1(f)$ из претходног добијамо неједнакости

$$h_\varepsilon^2(f) \leqslant h_\delta^1(f) \leqslant h_{top}^1(f),$$

одакле следи да је

$$h_{top}^2(f) \leqslant h_{top}^1(f).$$

Заменом улога d^1 и d^2 добија се и обратна неједнакост из чега следи тврђење.

□

На основу овог тврђења тополошка ентропија је добро дефинисана на класама пресликавања, односно не зависи од представника класе тополошки конјугованих пресликавања.

Последица 33. *Тополошка ентропија на компактном метричком простору је инваријанта тополошке конјугације.*

Доказ. Претпоставимо да имамо два динамичка система

$$f : X \to X, \qquad g : Y \to Y$$

који су тополошки конјуговани, са конјугацијом

$$\Phi : Y \to X.$$

Ако је d метрика на простору X тада на простору Y можемо задати метрику d' са

$$d'(x,y) = d(\Phi(x), \Phi(y)).$$

Метрика d' генерише полазну топологију на Y. Како је Φ изометрија два дата простора и на основу Тврђења 32 тополошка ентропија не зависи од избора метрике следи да је

$$h_{top}(f) = h_{top}(g).$$

□

Најзначајније даље особине тополошке ентропије дајемо у следећем тврђењу.

Тврђење 34. *Нека је $f : X \to X$ непрекидно пресликавање компактног метричког простора у себе. Тада важе следећа тврђења:*

1. $h_{top}\left(f^k\right) = k\ h_{top}(f)$ *за сваки природан број* k,
2. *Ако је f инвертибилно пресликавање* $h_{top}(f^{-1}) = h_{top}(f)$,
3. *ако су $A_1, A_2, \ldots, A_k$ затворени и унапред инваријантни скупови такви да њихова унија даје цео простор X тада је*

$$h_{top}(f) = \max\left\{ h_{top}\left(f\big|_{A_i}\right) \mid 1 \leqslant i \leqslant k \right\}.$$

   Специјално, за затворен инваријантан скуп A важи да је $h_{top}\left(f\big|_A\right) \leqslant h_{top}(f)$.

4. *Ако је и (Y, d') компактан метрички простор, $g : Y \to Y$ непрекидно пресликавање и $X \times Y$ схватамо као метрички простор са било којом метриком која генерише топологију производа, важи да је*

$$h_{top}(f \times g) = h_{top}(f) + h_{top}(g).$$

Доказ. 1. Фиксирајмо $k \in \mathbb{N}$. Тада за сваке две произвољне тачке $x, y \in X$ и произвољно $n \in \mathbb{N}$ важи да је

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} d\left(f^{ki}(x), f^{ki}(y)\right) \leqslant \max_{0 \leqslant j \leqslant kn-1} d\left(f^{j}(x), f^{j}(y)\right)$$

одакле следи да је

$$\operatorname{sep}\left(n, \varepsilon; f^k\right) \leqslant \operatorname{sep}(kn, \varepsilon; f)$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{sep}\left(n, \varepsilon; f^k\right)}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} k \frac{\log \operatorname{sep}(kn, \varepsilon; f)}{kn}.$$

Овим смо добили неједнакост

$$h_{top}\left(f^k\right) \leqslant k\ h_{top}(f).$$

Са друге стране, за свако $\varepsilon > 0$ можемо дефинисати $\delta(\varepsilon)$, као у доказу Тврђења 32, тако да је $d_k(x, y) < \delta(\varepsilon)$ кад год је $d(x, y) < \varepsilon$, користећи чињеницу да су d и d_k еквивалентне метрике. Следи да је

$$\operatorname{span}\left(n, \varepsilon; f^k\right) \geqslant \operatorname{span}(kn, \delta(\varepsilon); f) \geqslant \operatorname{cov}(kn, 2\delta(\varepsilon); f)$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{span}\left(n, \varepsilon; f^k\right)}{n} \geqslant \limsup_{n\to\infty} k \frac{\log \operatorname{cov}(kn, 2\delta(\varepsilon); f)}{kn}.$$

Пушатњем граничних вредности добијамо и обратну неједнакост

$$h_{top}\left(f^k\right) \geqslant k\ h_{top}(f).$$

2. За фиксирано $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ нека је E $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп. Из дефиниције оваквог скупа имамо да је за свако $x, y \in E$

$$d_n(x, y) > \varepsilon,$$

док је са друге стране

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left\{ d\left(f^i(x), f^i(y)\right) \right\} = \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \left\{ d\left(f^{-j}\left(f^{n-1}(x)\right), f^{-j}\left(f^{n-1}(y)\right)\right) \right\}.$$

Следи да је $f^{n-1}(E)$ $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп за f^{-1}. Међутим, како је f бијекција, ова два скупа су исте кардиналности.

Слично, ако је E_1 $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп за f^{-1} тада је $f^{-n+1}(E_1)$ $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп за f. Из овога следи да мора бити и

$$\operatorname{sep}(n, \varepsilon; f) = \operatorname{sep}\left(n, \varepsilon; f^{-1}\right)$$

па следи тврђење.

3. Приметимо да је сваки $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп у A_i $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен и у X, па лако следи да је

$$h_{top}\left(f\big|_{A_i}\right) \leqslant h_{top}(f).$$

Такође унија $(n, \varepsilon; f)$-мрежа за A_i је $(n, \varepsilon; f)$-мрежа за X. Следи да важи неједнакост

$$\operatorname{span}(n, \varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \operatorname{span}_i(n, \varepsilon) \leqslant k \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \left\{ \operatorname{span}_i(n, \varepsilon) \right\},$$

где смо са $\operatorname{span}_i(n, \varepsilon)$ означили минималну кардиналност $(n, \varepsilon; f)$-мреже за A_i. Одавде је

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{span}(n, \varepsilon)}{n} \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\log k}{n} + \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \left\{ \operatorname{span}_i(n, \varepsilon) \right\}}{n}.$$

Како је k фиксирано први сабирак са десне стране неједнакости тежи нули, па пуштањем лимеса да ε тежи нули добија се тврђење.

4. Приметимо прво да метрика задата са

$$\widetilde{d}((x, x'), (y, y')) = \max\left\{ d(x, x'), d'(y, y') \right\}$$

генерише топологију производа на $X \times Y$ и да важи за сваки природан број n да је

$$\widetilde{d}_n((x, x'), (y, y')) = \max\left\{ d_n(x, x'), d'_n(y, y') \right\}.$$

Ако скупови $U \subset X$ и $V \subset Y$ имају дијаметар мањи од ε тада ће и $U \times V$ имати дијаметар мањи од ε у метрици $\widetilde{d}$ па је

$$\operatorname{cov}(n, \varepsilon; f \times g) \leqslant \operatorname{cov}(n, \varepsilon; f) \operatorname{cov}(n, \varepsilon; g)$$

односно

$$h_{top}(f \times g) \leqslant h_{top}(f) + h_{top}(g).$$

Са друге стране ако су $E_1 \subset X$ и $E_2 \subset Y$ $(n, \varepsilon; f)$-раздвојени скупови онда је и њихов производ $E_1 \times E_2$ $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен у метрици $\widetilde{d}$ па је

$$\operatorname{sep}(n, \varepsilon; f \times g) \geqslant \operatorname{sep}(n, \varepsilon; f) \operatorname{sep}(n, \varepsilon; g)$$

односно

$$h_{top}(f \times g) \geqslant h_{top}(f) + h_{top}(g).$$

чиме смо доказали једнакост, односно последњи део тврђења.

□

Веома је занимљив однос тополошке ентропије према лутајућем односно нелутајућем делу динамичког система. Наиме тополошка ентропија уопште не види лутајући део система за разлику од полиномијалне ентропије што ћемо видети касније у Тврђењу 45.

Тврђење 35. *Тополошка ентропија зависи само од скупа свих нелутајућих тачака пресликавања f, односно важи да је*

$$h_{top}(f) = h_{top}\left(f\big|_{\mathrm{NW}(f)}\right).$$

Доказ. Како је $\mathrm{NW}(f) \subseteq X$ инваријантан и затворен на основу Тврђења 34 знамо да је

$$h_{top}\left(f\big|_{\mathrm{NW}(f)}\right) \leqslant h_{top}(f)$$

па је потребно само доказати другу неједнакост.

Фиксирајмо $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Изаберимо F_1 $(n, \varepsilon; f)$-мрежу минималне кардиналности за $\mathrm{NW}(f)$. Можемо формирати отворену околину $\mathrm{NW}(f)$ са

$$\mathcal{U} = \left\{x \in X \;\middle|\; (\exists y \in F_1)\ d_n(x, y) < \varepsilon\right\}.$$

Из компактности простора X следи да је и скуп $K = X \setminus \mathcal{U}$ компактан и састоји се само од лутајућих тачака. Можемо K покрити лутајућим околинама тачака. Тада је сваки скуп дијаметра мањег од Лебеговог броја покривача садржан у неком елементу покривача, па је самим тим лутајући. На основу тога постоји η такво да је $0 < \eta \leqslant \varepsilon$ и да за сваку тачку са центром у $x \in K$, полупречника η и за свако $k \in \mathbb{N}$ важи да је

$$f^k(B(x, \eta)) \cap B(x, \eta) = \emptyset.$$

Изаберимо и минималну $(n, \eta; f)$-мрежу F_2 за K. Унијом $F = F_1 \cup F_2$ добијамо и $(n, \varepsilon; f)$-мрежу за цео простор X.

Сада за природан број l и дато n дефинишемо пресликавање

$$\phi_l^n : X \to F^l, \qquad \phi_l^n(x) = (y_0, y_1, \ldots, y_{l-1}).$$

Ако је $f^{in}(x) \in \mathcal{U}$ нађемо $y_i \in F_1$ тако да је $d_n(f^{in}(x), y_i) < \varepsilon$, односно ако је $f^{in}(x) \in K$ нађемо $y_i \in F_2$ тако да је $d_n(f^{in}(x), y_i) < \eta$. Ово пресликавање можемо дефинисати јер је F $(n, \varepsilon; f)$-мрежа за простор X. Особине овако задатог пресликавања, које су нам потребне, можемо издвојити у неколико лема.

Лема 36. *У l-торки $\phi_l^n(x) = (y_0, y_1, \ldots, y_{l-1})$ не може се два пута појавити исто $y_i \in F_2$.*

Доказ. Тврђење следи из тога што су за $y_i \in F_2 \subset K$ кугле $B(y_i, \eta)$ лутајући скупови. □

Лема 37. *Пресликавање ϕ_l^n је инјективно за тачке које су $(m, 2\varepsilon; f)$-раздвојене ако је $m \leqslant ln$.*

Доказ. Претпоставимо, супротно тврђењу леме, да постоје две тачке x и x' које су $(m, 2\varepsilon; f)$-раздвојене, односно $d_m(x, x') > 2\varepsilon$, и за које важи да је

$$\phi_l^n(x) = \phi_l^n(x').$$

Тада за i и j које задовољавају неједнакости $0 \leqslant j < n$ и $0 \leqslant i < l$ следи

$$d\left(f^{in+j}(x), f^{in+j}(x')\right) \leqslant d_n\left(f^{in}(x), f^{in}(x')\right)$$

$$\leqslant d_n\left(f^{in}(x), y_i\right) + d_n\left(y_i, f^{in}(x')\right) < 2\varepsilon.$$

Највећа вредност израза $in + j$ је $ln - 1$, па за $m \leqslant ln - 1$ важи да је $d_m(x, x') < 2\varepsilon$ што је контрадикција са претпоставком. □

За кардиналност произвољног скупа A користићемо ознаку $\sharp A$.
Означимо са $q(n) = \sharp F_2$ и са $p(n) = \sharp F_1$.

Лема 38. *За произвољан подскуп $E \subset X$ важи*

$$\sharp\{\phi_l^n(E)\} \leqslant (q(n)+1)!\, l^{q(n)}\, p(n)^l.$$

Доказ. Нека је A_j скуп свих елемената $\phi_l^n(E)$ таквих да је у слици тачке из E на тачно j координата налазе тачке из F_2. На основу Леме 36 овакви y_i се не могу понављати у $\phi_l^n(E)$, па знамо да је $j \leqslant q(n)$. За скуп A_j знамо да можемо j тачака из F_2 да изаберемо на $\binom{q(n)}{j}$ начина и можемо да их распоредимо на $\frac{l!}{(l-j)!}$ начина. Такође имамо $p(n)^{l-j} \leqslant p(n)^l$ начина за избор остатка l-торке тачкама из F_1. Следи да је

$$\sharp A_j \leqslant \binom{q(n)}{j} \frac{l!}{(l-j)!}\, p(n)^l.$$

Како је

$$\sharp\phi_l^n(E) = \sum_{A_j} \sharp A_j \leqslant \sum_{j=0}^{q(n)} \binom{q(n)}{j} \frac{l!}{(l-j)!}\, p(n)^l$$

проценама

$$\frac{l!}{(l-j)!} \leqslant l^{q(n)}, \qquad \binom{q(n)}{j} \leqslant q(n)!$$

добијамо

$$\sharp\phi_m(E) \leqslant (q(n)+1)!\, l^{q(n)} p(n)^l.$$

□

Изаберимо E да је $(m, 2\varepsilon; f)$-раздвојен скуп максималне кардиналности у целом простору X, где је $m = n(l-1) < nl$. Тада на основу Леме 37 важи

$$\frac{\log \operatorname{sep}(m, 2\varepsilon)}{m} = \frac{\log \sharp E}{m} = \frac{\log \sharp\phi_l^n(E)}{m}.$$

На основу Леме 38 имамо

$$\frac{\log \sharp \phi_l^n(E)}{m} \leqslant \frac{\log\left((q(n)+1)!\, l^{q(n)}\, p(n)^l\right)}{n(l-1)} = \frac{\log\left((q(n)+1)!\right) + q(n)\log l + l\log(p(n))}{n(l-1)}.$$

Са друге стране знамо на основу Леме 29 да је

$$\frac{\log \operatorname{cov}(m, 4\varepsilon)}{m} \leqslant \frac{\log \operatorname{sep}(m, 2\varepsilon)}{m}.$$

Напомена 25 нам говори да лимес

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log \operatorname{cov}(m, 4\varepsilon)}{m}$$

постоји, па је

$$h_{4\varepsilon}(f) = \lim_{m\to\infty} \frac{\log \operatorname{cov}(m, 4\varepsilon)}{m} = \limsup_{l\to\infty} \frac{\log \operatorname{cov}(n(l-1), 4\varepsilon)}{n(l-1)}.$$

На основу претходног добили смо да је

$$h_{4\varepsilon}(f) \leqslant \limsup_{l\to\infty} \frac{\log\left((q(n)+1)!\right) + q(n)\log l + l\log(p(n))}{n(l-1)} = \frac{\log(p(n))}{n}.$$

Одакле пуштањем да n тежи бесконачно добијамо

$$h_{4\varepsilon}(f) \leqslant h_\varepsilon\left(f\big|_{\mathrm{NW}(f)}\right).$$

Коначно пуштањем да ε тежи нули добијамо тражену неједнакост

$$h_{top}(f) \leqslant h_{top}\left(f\big|_{\mathrm{NW}(f)}\right)$$

чиме је тврђење доказано. □

На основу Тврђења 12 скуп $\mathrm{NW}(f)$ садржи ω-граничне скупове свих тачака, па не може бити празан. У случају када је скуп $\mathrm{NW}(f)$ коначан имамо следећу последицу претходног тврђења.

Последица 39. *Уколико је скуп* $\mathrm{NW}(f)$ *коначне кардиналности тада је* $h_{top}(f) = 0$.

Доказ. Скуп $\mathrm{NW}(f)$ је инваријантан и коначан па се састоји само од коначног броја периодичних орбита. Периодичне орбите су инваријантни и затворени скупови, па на основу Тврђења 34 тополошка ентропија скупа $\mathrm{NW}(f)$ биће максимум тополошке ентропије на периодичним орбитама. Међутим тополошка ентропија периодичне орбите је једнака нули, па ће и тополошка ентропија целог система бити једнака нули. □

За крај овог поглавља даћемо примере израчунавања тополошке ентропије.

Пример 40. Ако је $f : X \to X$ изометрија важи да је $h_{top}(f) = 0$.

Заиста, како је f изометрија следи да за свако n важи $d_n(x, y) = d(x, y)$. Из компактности простора знамо да је $\operatorname{cov}(n, \varepsilon)$ коначан број, који не зависи од n. Одавде следи да је и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{cov}(n, \varepsilon)}{n} = 0$$

односно следи закључак.

Пример 41. Нека је $\widetilde{A}$ целобројна 2×2 матрица са детерминантом ± 1 и сопственим вредностима λ и λ^{-1}, $|\lambda| > 1$. Ако је $A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ придружени торални аутоморфизам тада је $h_{top}(A) = \log|\lambda|$.

Познато је да торус $\mathbb{T}^n$ можемо посматрати као количнички простор $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Свака целобројна матрица $\widetilde{A}$ са сопственим вредности различитим по апсолутној вредности од један индукује ендоморфизам групе $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Ово пресликавање је инвертибилно ако и само ако је $\widetilde{A}^{-1}$ такође целобројна матрица, а ово је еквивалентно са тиме да је детерминанта матрице једнака ± 1. Ако је $\widetilde{A}$ инвертибилна матрица са сопственим вредностима чија је апсолутна вредност различита од 1 тада придружено пресликавање $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ има потпросторе у којима је експанзивно и контракција, и чија је димензија комплементарна. Овако задато пресликавање се назива хиперболичким торусним аутоморфизмом, а ми ћемо га посматрати у димензији 2.

Означимо са v_1 и v_2 јединичне сопствене векторе који одговарају сопственим вредностима λ и λ^{-1} ($\lambda \neq \lambda^{-1}$ јер смо претпоставили да је $|\lambda| > 1$). Познато је да су сопствени вектори линеарно независни и чине базу $\mathbb{R}^2$. Тада за свако $x, y \in \mathbb{R}^2$ можемо њихову разлику записати као

$$x - y = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

Потражићемо мрежу за јединични квадрат $[0,1]^2$. Фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и N тако да је $1/N < \varepsilon/2$. Посматрајмо сада дужи које спајају ивице квадрата које су у правцу вектора v_1. Претпоставимо да тих дужи има довољно тако да је њихово растојање у правцу вектора v_2 мање од $1/N$. Изаберимо сада тачке на свакој од тих дужи тако да су на растојању мањем од $\varepsilon/2\,|\lambda|^{n-1}$. Овако добијен скуп тачака означићемо са F и показаћемо да је ово једна мрежа.

За произвољну тачку $x \in \mathbb{T}^2$ нека је $y \in F$ њој најближа тачка датог скупа. Из конструкције скупа можемо ограничити коефицијенте у линеарној комбинацији

$$x - y = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

Добијамо да је

$$|\alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,|\lambda|^{n-1}}, \qquad |\beta| \leqslant \frac{1}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Надаље показујемо да итерацијом пресликавања растојање ових тачака остаје мало. Уочимо да је

$$\widetilde{A}^k(x - y) = \alpha \widetilde{A}^k v_1 - \beta \widetilde{A}^k v_2 = \alpha \lambda^k v_1 - \beta \lambda^{-k} v_2.$$

Из неједнакости троугла имамо

$$d\left(f^k(x), f^k(y)\right) \leqslant d\left(f^k(x), f^k(x - \alpha v_1)\right) + d\left(f^k(y + \beta v_2), f^k(y)\right).$$

Ограничимо сад сабирке са десне стране неједнакости

$$d\left(f^k(x), f^k(x - \alpha v_1)\right) = d\left(\widetilde{A}^k(x), \widetilde{A}^k(x) - \alpha \lambda^k v_1\right) \leqslant |\alpha|\,|\lambda|^k,$$

и слично

$$d\left(f^k(y + \beta v_2), f^k(y)\right) \leqslant |\beta|\,|\lambda|^{-k}.$$

Можемо закључити да је

$$d\left(A^k(x), A^k(y)\right) \leqslant |\alpha|\,|\lambda|^k + |\beta|\,|\lambda|^{-k} \leqslant |\lambda|^k \frac{\varepsilon}{2\,|\lambda|^{n-1}} + |\lambda|^{-k} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Како је $|\lambda| > 1$ можемо видети да је за свако $k \leqslant n-1$

$$d\left(A^k(x), A^k(y)\right) \leqslant \varepsilon,$$

односно F јесте $(n, \varepsilon; A)$-мрежа. Проценимо сад његову кардиналност. Није тешко видети да је

$$\sharp F \leqslant \frac{LNC}{\varepsilon} |\lambda|^{n-1},$$

где је L дужина највеће од дужи које смо дефинисали, C константа која зависи од угла између вектора v_1 и v_2 која нам говори колико дужи смо морали повући да би биле на растојању мањем од $1/N$ у правцу вектора v_2. Како је F мрежа мора бити

$$\operatorname{span}(n, \varepsilon) \leqslant \sharp F.$$

Добили смо да је

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{span}(n,\varepsilon)}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{LNC}{\varepsilon}|\lambda|^{n-1}\right)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\frac{LNC}{\varepsilon} + \log|\lambda|^{n-1}}{n}$$

одакле пуштањем граничних вредности добијамо неједнакост

$$h_{top}(A) \leqslant \log|\lambda|.$$

Конструисаћемо сада $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп. Изаберимо дуж највеће дужине L у правцу вектора v_1. Нека је E скуп тачака са ове дужи које су на растојању $\varepsilon/|\lambda|^{n-1}$. Ако су $x, y \in E$ две тачке овог скупа на најмањем растојању тада је

$$x - y = v_1 \frac{\varepsilon}{|\lambda|^{n-1}}.$$

Применом пресликавања A k пута добијамо

$$\widetilde{A}^k(x-y) = \frac{\varepsilon}{|\lambda|^{n-1}} \widetilde{A}^k v_1 = \frac{\varepsilon}{|\lambda|^{n-1}} |\lambda|^k v_1.$$

Видимо да је највећа вредност за $k = n-1$ па ове две тачке јесу $(n, \varepsilon; f)$-раздвојене. Како су тачке и после итерација на већем растојању од ε закључујемо да је E $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен скуп. Из претходног је

$$\operatorname{sep}(n, \varepsilon) \geqslant \sharp E \geqslant \frac{L|\lambda|^{n-1}}{\varepsilon}.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{sep}(n,\varepsilon)}{n} \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\frac{L|\lambda|^{n-1}}{\varepsilon}}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\frac{L}{\varepsilon} + \log|\lambda|^{n-1}}{n}.$$

На основу овога следи и друга неједнакост

$$h_{top}(A) \geqslant \log|\lambda|.$$

1.3 Полиномијална ентропија

За разлику од тополошке ентропије, која је доста истраживана и чије су бројне карактеристике и понашања добро изучени, полиномијална ентропија је релативно нов појам и о њој се још увек не зна много, тако да постоје многи отворени проблеми и питања у вези са њом. Овај појам се појавио природно у жељи да се системи ниске комплексности раздвоје. Наиме код многих динамичких система је тополошка ентропија нула, а они се ипак значајно разликују. Класа система чија је тополошка ентропија једнака нули обухвата и не сасвим једноставне системе као што су: хомеоморфизми круга, хармонијски, нехармонијски осцилатор и клатно, Брауверови хомеоморфизми, елиптички и полигонијални билијари, билијарска пресликавања у конвексном полиедру у $\mathbb{R}^3$, многи (не сви) интеграбилни геодезијски токови... Са циљем да се боље проуче разлике оваквих система тражила се величина која ће мерити полиномијални раст броја суштински различитих орбита, за разлику од тополошке ентропије која мери експоненцијални раст броја оваквих орбита. Показало се да је полиномијална ентропија добро прилагођена лутајућој динамици, за разлику од тополошке ентропије која лутајуће делове динамичког система не примећује, што смо видели у Тврђењу 35.

Полиномијална ентропија се дефинише врло слично тополошкој, с тим да је прилагођена споријем расту различитих орбита. Захваљујући Леми 29 можемо дефинисати полиномијалну ентропију на три еквивалентна начина.

Дефиниција 42. *Нека је (X, d) компактан метрички простор и $f : X \to X$ непрекидно пресликавање. Полиномијална ентропија пресликавања f је*

$$h_{pol}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{cov}(n, \varepsilon)}{\log n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{span}(n, \varepsilon)}{\log n} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{sep}(n, \varepsilon)}{\log n}.$$

Овако уведена полиномијална ентропија има доста особина које су аналогне особинама тополошке ентропије и доказују се истим техникама, па те доказе нећемо изводити. Најпре је Марко у [23] доказао да је и полиномијална ентропија тополошка особина и не зависи од избора тополошки еквивалентних метрика.

Тврђење 43. *Полиномијална ентропија не зависи од избора метрика које генеришу исту топологију на X. Полиномијална ентропија је инваријанта тополошке конјугације.* □

У истом раду [23] се може пронаћи доказ и осталих основних особина полиномијалне ентропије, датих у следећем тврђењу.

Тврђење 44. *Нека је $f : X \to X$ непрекидно пресликавање компактног метричког простора у себе. Тада важе следећа тврђења:*

1. $h_{pol}\left(f^k\right) = h_{pol}(f)$ *за сваки природан број* k.
2. *Ако је f инвертибилно пресликавање* $h_{pol}(f^{-1}) = h_{pol}(f)$.
3. *Ако су $A_1, A_2, \ldots, A_k$ затворени и унапред инваријантни скупови такви да њихова унија даје цео простор X тада је*

$$h_{pol}(f) = \max\left\{ h_{pol}\left(f\big|_{A_i}\right) \mid 1 \leqslant i \leqslant k \right\}.$$

Специјално, за затворен инваријантан скуп A важи да је $h_{pol}\left(f\big|_A\right) \leqslant h_{pol}(f)$.

4. *Ако је и* (Y, d') *компактан метрички простор,* $g : Y \to Y$ *непрекидно пресликавање и на* $X \times Y$ *подразумевамо топологију производа важи да је*

$$h_{pol}(f \times g) = h_{pol}(f) + h_{pol}(g).$$

5. *Важе следеће неједнакости*

$$0 \leqslant h_{top}(f) \leqslant h_{pol}(f).$$

□

Можемо приметити да је једина разлика, у односу на тополошку ентропију, у томе што се заменом пресликавања f пресликавањем f^k полиномијална ентропија не мења. Ово у неким ситуацијама може бити корисно ако добијамо једноставнији систем за рачунање. На пример код пресликавања које има коначно много периодичних тачака можемо посматрати f^k за добро изабрано k, тако да су све периодичне тачке заправо фиксне тачке овог пресликавања.

У раду [19] примећена је чињеница коју смо већ поменули о вези лутајућих скупова и полиномијалне ентропије. Само постојање лутајуће тачке обезбеђује позитивну полиномијалну ентропију, односно важи следеће тврђење.

Тврђење 45. *Нека је* (X, d) *компактан метрички простор и* $f : X \to X$ *хомеоморфизам тог простора. Ако* f *има лутајућу тачку следи да је*

$$h_{pol}(f) \geqslant 1.$$

Доказ. Нека је $x \in X$ лутајућа тачка пресликавања f. Тада постоји $\varepsilon_0 > 0$ такво да за свако $k \in \mathbb{N}$ важи да је

$$f^k(B(x, \varepsilon_0)) \cap B(x, \varepsilon_0) = \emptyset.$$

Из овога следи да је за свако $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и за свако $k \in \mathbb{N}$

$$d\left(x, f^k(x)\right) \geqslant \varepsilon.$$

Фиксирајмо сада природан број n. Тада за свако k такво да је $1 \leqslant k \leqslant n$ важи

$$d_n\left(x, f^{-k}(x)\right) \geqslant d\left(f^k(x), x\right) \geqslant \varepsilon.$$

Дакле за свако $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ скуп тачака

$$\left\{x, f^{-1}(x), \ldots, f^{-n}(x)\right\}$$

је $(n, \varepsilon; f)$-раздвојен. Закључујемо да је

$$\operatorname{sep}(n, \varepsilon) \geqslant n,$$

односно важи да је $h_{pol}(f) \geqslant 1$. □

Напоменимо само да обрат овога тврђења не важи. Претпоставимо да имамо систем са позитивном тополошком ентропијом. Како је скуп $\mathrm{NW}(f)$ затворен и инваријантан можемо као динамички систем гледати $f : \mathrm{NW}(f) \to \mathrm{NW}(f)$. Тополошка ентропија овог система је позитивна па је полиномијална ентропија бесконачна, а систем не садржи

лутајуће тачке. Дакле, системи са позитивном тополошком ентропијом могу бити без лутајућих тачака, са полиномијалном ентропијом једнаком чак бесконачно.

Као што видимо из претходног тврђења занимљиво питање је како неке особине динамичког система утичу на вредност полиномијалне ентропије, а и обрнуто питање шта о неком динамичком систему можемо знати на основу вредности полиномијалне ентропије. Рецимо, еквинепрекидност повлачи анулирање полиномијалне ентропије, односно важи следеће тврђење.

Тврђење 46. *Ако за хомеоморфизам f важи да је фамилија $\left\{f^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ еквинепрекидна тада је $h_{pol}(f) = 0$.*

Доказ. За еквинепрекидан хомеоморфизам f можемо задати тополошки еквивалентну метрику са

$$\widetilde{d}(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} d\left(f^n(x), f^n(y)\right).$$

У овако заданој метрици сваки еквинепрекидан хомеоморфизам је изометрија. (У случају када f није еквинепрекидан хомеоморфизам не следи да је овако задата тополошки еквивалентна метрика у којој је f изометрија.) Као у Примеру 40 уколико је f изометрија скуп $\operatorname{cov}(n,\varepsilon)$ не зависи од n, те се полиномијална ентропија анулира. □

Поставило се питање да ли у овом случају важи обрнуто тврђење да анулирање полиномијалне ентропије повлачи еквинепрекидност. У раду [2] је дат пример да ово не мора важити и дата је хипотеза да ово важи уз додатни услов повезаности простора. Малом прерадом датог примера показаћемо у Примеру 122 да ни тада еквиваленција не мора важити, већ су потребни додатни строжи услови.

У поменутом раду [2] дата су и следећа тврђења, које показује да се из вредности полиномијалне ентропије могу сазнати неке карактеристике динамичког система.

Тврђење 47. *Ако за хомеоморфизам $f : X \to X$ важи да је $h_{pol}(f) < 1$ тада је свака тачка из простора X рекурентна.*

Доказ овог тврђења следи из наредног општијег тврђења.

Тврђење 48. *Ако за хомеоморфизам $f : X \to X$ важи да је $h_{pol}(f) < 1$ тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји $m > 0$, тако да за свако $x \in X$ постоји n за које важи да је $0 < n \leqslant m$ и важи да је $f^n(x) \in B(x,\varepsilon)$.*

Доказ. Претпоставимо, супротно тврђењу, да је $h_{pol}(f) < 1$ и да постоји $\varepsilon > 0$ такво да за свако $m \geqslant 1$ постоји $x \in X$ са особином да је $f^n(x) \notin B(x,\varepsilon)$ за свако n које је $1 \leqslant n \leqslant m$. Дефинишимо скуп

$$E = \left\{x, f^{-1}(x), \ldots, f^{-m}(x)\right\}.$$

Изаберимо сада две тачке из овог скупа

$$a = f^{-j}(x), \quad b = f^{-k}(x), \qquad 0 \leqslant j < k \leqslant m.$$

За ове две тачке важи

$$f^k(a) = f^k\left(f^{-j}(x)\right) = f^{k-j}(x), \qquad f^k(b) = f^k\left(f^{-k}(x)\right) = x.$$

Како је $0 < k - j \leqslant m$ следи, на основу дефиниције скупа E, да

$$f^k(a) \notin B(x, \varepsilon) = B\left(f^k(b), \varepsilon\right),$$

па је

$$d_m(a, b) > \varepsilon.$$

Овим смо показали да је скуп E $(m, \varepsilon; f)$-раздвојен. Скуп E има $m+1$ елемент па следи да је

$$\operatorname{sep}(m, \varepsilon) \geqslant m + 1$$

односно $h_{pol}(f) \geqslant 1$ што је контрадикција са условом. □

Доказ. (Тврђења 47)

Нека је $x \in X$ произвољна тачка. Изаберимо ε_1. На основу претходног тврђења постоји n_1 тако да је $f^{n_1}(x) \in B(x, \varepsilon_1)$. Нека је сада $\varepsilon_2 = \min\left\{d(x, f^i(x)) \mid i = 1, \ldots, n_1\right\}$. Поново на основу претходног тврђења постоји n_2 тако да је $f^{n_2}(x) \in B(x, \varepsilon_2)$. Овим поступком добијамо низ n_k за који важи да је $\lim\limits_{k\to\infty} f^{n_k}(x)$. Следи да је $x \in \omega(x)$, односно тачка x је рекурентна. □

Приметимо да се као последица претходног може добити Тврђење 45.

Као што смо нагласили, полиномијална ентропија је још увек недовољно проучен појам и потребно је још доста радити на њеном разумевању. За крај овог поглавља даћемо кратак преглед неких значајнијих досадашњих резултата, а у Поглављу 4 нека отворена питања и проблеме.

Појам полиномијалне ентропије се први пут појавио у радовима Марка [23] и [21]. Он је проучавао полиномијалну ентропију у контексту Лиувилових интеграбилних Хамилтонових система на површи, и доказао основне особине. Као последицу добио је да је полиномијална ентропија хармонијског осцилатора мања од полиномијалне ентропије нехармонијског осцилатора, а ова мања од полиномијалне ентропије клатна, иако се тополошка ентропија на овим системима анулира и не разликује их. Такође у [22] добијено је да је полиномијална ентропија строго конвексног билијара са аналитичком границом једнака 1 ако и само ако је та граница круг, а у случају када је граница елипса полиномијална ентропија је једнака 2.

У раду [19] је показано да вредност полиномијалне ентропије хомеоморфизама круга који чувају оријентацију може узимати вредности само 0 или 1 и да је такав хомеоморфизам конјугован ротацији ако му је полиномијална ентропија 0. Такође је показано да ако је X C^1 ненула векторско поље на торусу $\mathbb{T}^2$ са придруженим током ϕ^t важи да је $h_{pol}(\phi^t) \in [0, 1]$. Даље, ако ϕ^t има периодичне орбите тада је $h_{pol}(\phi^t) \in \{0, 1\}$, а $h_{pol}(\phi^t) = 0$ ако и само ако је ток ϕ^t конјугован ротацији.

У раду [4] је проучавана веза метрике g на торусу $\mathbb{T}^2$ и полиномијалне ентропије геодезијског тока дате метрике. Добијено је да ако је полиномијална ентропија геодезијског тока мања од 2 она мора бити једнака 1 и тада је метрика g равна метрика. За метрику револуције је добијено да је полиномијална ентропија геодезијског тока једнака 2.

У раду [2] поред поменутих резултата показано је да за експанзиван хомеоморфизам компактног метричког простора који има бесконачно тачака важи да је $h_{pol}(f) \geqslant 1$. Такође у овом раду је показано да је скуп позитивних реалних бројева који могу бити вредност полиномијалне ентропије неког пресликавања на компактном простору густ у $\mathbb{R}^+$.

У раду [14] је уведено једно специфично кодирање за хомеоморфизам са тачно једном нелутајућом тачком, чије смо уопштење дали у [15]. Поред тога проучавана је полиномијална ентропија Брауверових хомеоморфизама (хомеоморфизама равни без фиксне тачке). Показано је да је полиномијална ентропија транслације једнака 1, а да је полиномијална ентропија Брауверовог хомеоморфизма који није конјугован транслацији није мања од 2. Такође за свако $\alpha \in [2, +\infty]$ конструисан је Брауверов хомеоморфизам f тако да је $h_{pol}(f) = \alpha$.

1.4 Морсови градијентни системи

Морсова теорија, која се развија већ стотинак година, представља моћну везу анализе и топологије. Наиме омогућава нам проучавање топологије простора анализом генерички изабраних глатких функција на њој. Критичне тачке генеричке глатке функције дају информацију о CW декомпозицији и хомологији простора. У нашем раду нећемо детаљније улазити у диференцијално-тополошки аспект, већ више у динамички. Морс-Смејлови системи (чији су специјалан случај Морсови) су доста проучавани и разумевање тих система је прилично добро. Њихова комплексност је релативно ниска, па је из тог разлога полиномијална ентропија погодан алат за њихово изучавање. Испоставиће се да су Морсови индекси који се достижу у критичним тачкама од суштинске важности за израчунавање полиномијалне ентропије. Од обимне литературе о овој области највише смо се ослањали на [27], [3], [34], [36] и [29].

Ако другачије не нагласимо посматраћемо глатку затворену (компактну и без границе) многострукост M коначне димензије n и глатку функцију

$$F : M \to \mathbb{R}.$$

Скуп критичних тачака овакве функције означаваћемо са

$$\mathrm{Crit}\,(F) = \left\{ p \in M \;\middle|\; dF\,(p) = 0 \right\}.$$

У првом делу овог поглавља бавићемо се током који се може формирати градијентом глатке функције и трајекторијама таквог тока.

Дефиниција 49. Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ глатка функција на Римановој многострукости (M, g). Тада је *градијент векторског поља* функције F у односу на метрику g јединствено векторско поље $\bigtriangledown F$ за које важи да је

$$g\,(\bigtriangledown F, X) = dF\,(X) = X \cdot F$$

за произвољно глатко векторско поље X на M.

Нека је $\phi_t : M \to M$ локална једнопараметарска група дифеоморфизама генерисана негативним градијентом $-\bigtriangledown F$:

$$\frac{d}{dt}\phi_t\,(x) = -\bigtriangledown F\,(\phi_t\,(x)), \qquad \phi_0\,(x) = x.$$

Интегралне криве γ_x за које важи да је

$$\gamma_x\,(t) = \phi_t\,(x)$$

називају се трајекторије негативног градијентног тока.

Тврђење 50. *Свака глатка функција $F : M \to \mathbb{R}$ на глаткој, коначнодимензионој, Римановој многострукости (M, g) опада дуж трајекторија негативног градијентног тока.*

Доказ.

$$\frac{d}{dt}F\,(\gamma_x\,(t)) = \frac{d}{dt}\,(F \circ \phi_t\,(x)) = dF_{\phi_t(x)} \circ \frac{d}{dt}\phi_t\,(x) =$$
$$= dF_{\phi_t(x)}\,(-\bigtriangledown F\,(\phi_t\,(x))) = -g\,(\bigtriangledown F, \bigtriangledown F) = -\parallel \bigtriangledown F\,(\phi_t\,(x))\parallel^2 \leqslant 0.$$

□

Приметимо и да, на основу јединствености решења (неконстантно решење не може да прође кроз критичну тачку), имамо строгу неједнакост уколико x није критична тачка.

Слично као и у дискретном случају и за ток ћемо дефинисати α-гранични скуп и ω-гранични скуп.

Дефиниција 51. Нека је $\phi_t : M \to M$ једнопараметарска група дифеоморфизама на многострукости M.

За произвољну тачку $x \in M$ тачка y је *ω-гранична тачка* уколико постоји низ реалних бројева t_n такав да $t_n \to \infty$ и да је

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x) = y.$$

Скуп свих ω-граничних тачака тачке x назваћемо њеним *ω-граничним скупом* и означавати са $\omega(x)$.

За произвољну тачку $x \in M$ тачка y је *α-гранична тачка* уколико постоји низ реалних бројева t_n такав да $t_n \to -\infty$ и да је

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x) = y.$$

Скуп свих α-граничних тачака тачке x назваћемо њеним *α-граничним скупом* и означавати са $\alpha(x)$.

Захваљујући Тврђењу 50 за α и ω-граничне скупове негативног градијентног тока добијамо корисна ограничења.

Тврђење 52. *Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ глатка функција на компактној многострукости M и ϕ_t придружени негативни градијентни ток. Тада за свако $x \in M$ важи*

$$\omega(x),\ \alpha(x) \subset \mathrm{Fix}(\phi_t),$$

где је

$$\mathrm{Fix}(\phi_t) = \mathrm{Crit}(F) = \left\{x \mid \phi_t(x) = x \ \ (\forall t)\right\}.$$

Доказ. На основу јединствености решења диференцијалне једначине са почетним условима знамо да је

$$\mathrm{Fix}(\phi_t) = \mathrm{Crit}(F).$$

Претпоставимо, супротно тврђењу, да постоји тачка $y \in M$ која није критична тачка функције F и $y \in \omega(x)$ за неко $x \in M$. Како y није критична тачка на основу тврђења 50 знамо да је $F(y) > F(\phi_t(y))$ за свако $t > 0$.

Фиксирајмо t_0 и нека је $\delta = F(y) - F(\phi_{t_0}(y))$.

Како је $y \in \omega(x)$ постоји растући низ $t_n \to \infty$ тако да $\phi_{t_n}(x) \to y$. На основу непрекидности добијамо

$$\lim_{n\to\infty} F(\phi_{t_n}(\phi_{t_0}(x))) = F(\phi_{t_0}(y)) = F(y) - \delta.$$

Специјално постоји n_0 тако да је за свако $n \geqslant n_0$

$$F(\phi_{t_n}(\phi_{t_0}(x))) \leqslant F(y) - \frac{\delta}{2}.$$

Како је низ t_n растући и функција опада дуж негативног градијентног тока следи да је

$$F\left(\phi_t\left(x\right)\right) \leqslant F\left(\phi_{t_n}\left(\phi_{t_0}\left(x\right)\right)\right) \leqslant F\left(y\right) - \frac{\delta}{2}$$

за довољно велико t. Међутим ово је контрадикција са тим да је

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}\left(x\right) = y.$$

За скуп $\alpha\left(x\right)$ тврђење се показује аналогно посматрајући функцију $-F$. □

Тврђење 53. *Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ глатка функција на компактној многострукости M и ϕ_t придружени негативни градијентни ток. Тада скуп $\omega\left(x\right)$ садржи само једну тачку или је бесконачан.*

Доказ. Како је многострукост компактна знамо да $\omega\left(x\right)$ није празан скуп. Претпоставимо да постоје две различите тачке $y, z \in \omega\left(x\right)$. Дакле знамо да постоје два низа t_n и s_n таква да је

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}\left(x\right) = y, \quad \lim_{n\to\infty} \phi_{s_n}\left(x\right) = z.$$

Нека је $\varepsilon = d\left(y, z\right)/2$ и уочимо куглу $B\left(y, \varepsilon\right)$. Позитивна орбита $\mathcal{O}^+\left(x\right)$ тачке x

$$\mathcal{O}^+\left(x\right) = \left\{\phi_t \;\middle|\; t \geqslant 0\right\}$$

је крива у M која улази и излази из кугле бесконачно пута, па пресек $\mathcal{O}^+\left(x\right) \cap S\left(y, \varepsilon\right)$ позитивне орбите са сфером полупречника ε мора бити бесконачан скуп. (У дискретном случају пресек може бити празан, док у континуалном случају мора бити непразан.) Сфера је компактна, па овај пресек мора имати тачку нагомилавања која очигледно припада $\omega\left(x\right)$, а различита је од y и z. □

Хесијан $\mathrm{H}_p\left(F\right)$ дате глатке функције у критичној тачки p је симетрична билинеарна форма

$$\mathrm{H}_p\left(F\right) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

За два вектора $X_p, Y_p \in T_pM$ можемо изабрати векторска поља X, Y која су њихова проширења редом у некој отвореној околини тачке p и дефинисати Хесијан са

$$\mathrm{H}_p\left(F\right)\left(X_p, Y_p\right) = X_p\left(YF\right).$$

Како је диференцијал у критичној тачки нула следи да је

$$X_p\left(YF\right) - Y_p\left(XF\right) = \left[X, Y\right]_p F = dF\left(p\right)\left[X, Y\right]_p = 0,$$

односно

$$X_p\left(YF\right) = Y_p\left(XF\right).$$

На основу претходног можемо закључити да Хесијан не зависи од векторских поља X и Y већ само од тангентних вектора X_p и Y_p. Такође видимо да је форма симетрична.

Ако у околини U критичне тачке p изаберемо локалне координате

$$\varphi\left(x\right) = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$$

тада је база тангентног простора у тачки p дата са

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

и матрица Хесијана у односу на ту базу је

$$[\mathrm{H}_p(F)] = \left[\frac{\partial^2 (F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i \, \partial x_j} (\varphi(p))\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Матрица Хесијана је симетрична, па је на основу тога дијагонализабилна и има реалне сопствене вредности. Број негативних сопствених вредности се назива Морсовим индексом тачке p и означава са $\mathrm{ind}_F(p)$, уз изостављање индекса F ако је јасно о којој функцији се ради. Приметимо да знак сопствених вредности не зависи од избора координатне карте (величина сопствених вредности се мења). Другачије, индекс можемо видети и као димензију потпростора од T_pM на коме је Хесијан негативно дефинитан.

Ако је $\mathrm{H}_p(F)$ недегенерисано пресликавање, односно ако је детерминанта Хесијана различита од нуле, критична тачка p се назива недегенерисана.

Дефиниција 54. Глатка функција $F : M \to \mathbb{R}$ којој су све критичне тачке недегенерисане назива се *Морсовом функцијом.*

За Морсову функцију можемо приметити одмах две особине скупа критичних тачака: да се не могу нагомилавати и да их је коначан број, односно важе следећа тврђења.

Лема 55. *Недегенерисане критичне тачке су изоловане.*

Доказ. Нека је $p \in M$ критична тачка и изаберимо карту у околини U ове тачке

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(p) = 0.$$

Посматрајмо глатко пресликавање

$$g : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n, \quad g(x) = dF\left(\varphi^{-1}(x)\right) = \left(\frac{\partial (F \circ \varphi^{-1}(x))}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial (F \circ \varphi^{-1}(x))}{\partial x_n}\right).$$

Знамо да је $g(0) = 0$ и да је $dg(0)$ несингуларна, па је g дифеоморфизам у некој околини V тачке 0. Како је g инјективно за свако $x \in V \setminus \{0\}$ мора важити да је $g(x) \neq 0$, те x није критична тачка, чиме је тврђење доказано. □

Последица 56. *Ако је многострукост M затворена и F Морсова функција тада је број критичних тачака коначан.*

Доказ. Претпоставимо да број критичних тачака није коначан. Тада можемо формирати низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ различитих критичних тачака. Како је простор компактан овај низ мора имати конвергентан подниз $x_{n_k} \longrightarrow x$. Међутим из непрекидности пресликавања dF мора и тачка x бити критична. Ово је контрадикција са тим да су критичне тачке изоловане, односно са Лемом 55. □

Пример 57. Посматрајмо функцију висине на n сфери

$$F : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}, \qquad F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}.$$

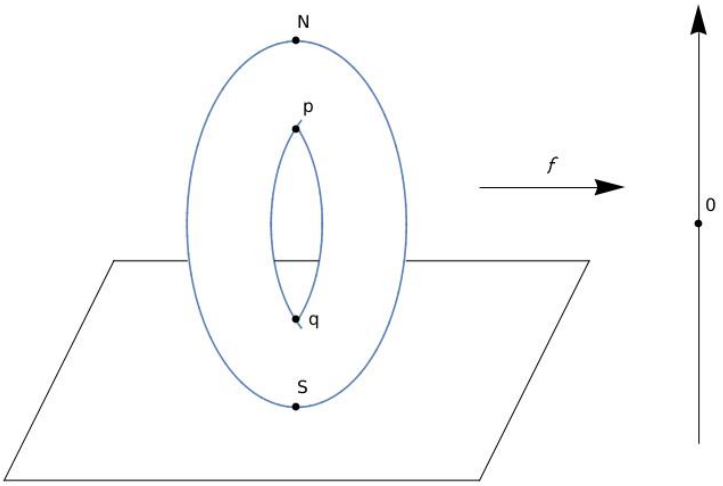
У овом примеру критичне тачке су северни N и јужни S пол сфере. Обе критичне тачке су недегенерисане и важи да је $\mathrm{ind}(N) = n$ и $\mathrm{ind}(S) = 0$.

Пример 58. Пример функције која није Морсова може бити квадрат висине на n сфери

$$F^2 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}, \qquad F^2(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1}^2.$$

Сада су све тачке са екватора критичне. Како су на основу Леме 55 код Морсове функције све критичне тачке изоловане функција F^2 не може бити Морсова.

Пример 59. Још један важан пример Морсове функције је функција висине на торусу $\mathbb{T}^2$ који је постављен вертикално у односу на раван $z = 0$ у $\mathbb{R}^3$. Сада имамо четири критичне тачке N, S, p, q. Све критичне тачке су недегенерисане и важи да је $\operatorname{ind}(N) = 2$, $\operatorname{ind}(p) = \operatorname{ind}(q) = 1$ и $\operatorname{ind}(S) = 0$. Овај пример је илустрован на слици 1.1.



Слика 1.1: Функција висине на торусу

Напомена 60. *Другачијим приступом можемо видети dF као сечење котангентног раслојења T^*M. Овако гледано недегенерисаност можемо дефинисати као трансверзалност пресека затворених подмногострукости графика dF и M (односно нултог сечења). Приметимо да је трансверзалност генеричко својство.*

На први поглед се не види колико су Морсове функције значајне и присутне. Међутим на основу тога што је трансверзалност генеричко својство може се доказати следећа битна теорема, чији се доказ може видети у [3].

Теорема 61. *Ако је многострукост M затворена тада је скуп Морсових функција локално стабилан, отворен и густ у $C^\infty(M, \mathbb{R})$ са супремум нормом.*

Морсове функције се понашају јако правилно у околини критичних тачака и у добро изабраном координатном систему могу се задати у канонској форми, о чему говори наредна лема која се назива Морсова и чији доказ се може видети у [27].

Лема 62. *Нека је $p \in M$ недегенерисана критична тачка глатке функције $F : M \to \mathbb{R}$ и $\operatorname{ind}(p) = k$. Тада постоји отворена околина $U \ni p$ и глатка карта $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, тако да је $\varphi(p) = 0$ и ако је $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ за $x \in U$ тада је*

$$\left(F \circ \varphi^{-1}\right)(x_1, \ldots, x_n) = F(p) - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

Иако нам у нашем раду нису биле потребне навешћемо неколико теорема које илуструју дубоку повезаност Морсових функција и топологије многострукости, чији се докази могу наћи такође у [27] и [3].

Теорема 63. *Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ глатка функција задана на коначнодимензионој затвореној глаткој многострукости. За $a \in \mathbb{R}$ дефинишимо скуп*

$$M^a = F^{-1}\left((-\infty, a]\right).$$

Претпоставимо да је $a < b$ и да је скуп $F^{-1}\left([a,b]\right)$ компактан и не садржи критичне тачке функције F. Тада су M^a и M^b дифеоморфни и M^a је деформациони ретракт скупа M^b.

Последица 64. *Ако затворена многострукост M димензије n допушта Морсову функцију $F : M \to \mathbb{R}$ са само две критичне тачке тада је многострукост M хомеоморфна сфери $\mathbb{S}^n$.*

Претходна последица је позната као Ребова теорема. Следећа теорема нам даје могућност конструисања CW декомпозиције простора на основу критичних тачака.

Теорема 65. *Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ глатка функција задана на коначнодимензионој затвореној глаткој многострукости. Претпоставимо да је $a < b$ и да је скуп $F^{-1}\left([a,b]\right)$ компактан и садржи тачно једну критичну тачку функције F. Претпоставимо и да је критична тачка недегенерисана индекса k. Тада M^b има хомотопски тип M^a са залепљеном једном k ћелијом. Постоји скуп $e^k \subseteq M^b$ дифеоморфан затвореном k диску тако да је $M^a \cup e^k$ деформациони ретракт M^b.*

За даљи рад потребне су нам карактеристике негативног градијентног тока Морсове функције.

Тврђење 66. *Нека је дата Морсова функција $F : M \to \mathbb{R}$ на глаткој, затвореној, коначнодимензионој, Римановој многострукости (M, g). Тада свака трајекторија негативног градијентног тока почиње и завршава се у критичној тачки, односно постоје граничне вредности*

$$\lim_{t\to+\infty} \gamma_x(t), \qquad \lim_{t\to-\infty} \gamma_x(t)$$

и припадају скупу $\mathrm{Fix}\left(\phi_t\right)$.

Доказ. Уколико x није фиксна тачка знамо из компактности простора M да је $\omega(x) \neq \emptyset$. Како је функција Морсова на компактној многострукости мора имати коначан број критичних тачака, па је на основу Тврђења 53 скуп $\omega(x)$ једночлан. Из овог можемо закључити да постоји гранична вредност $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma_x(t)$, иначе бисмо имали низ који конвергира ка тачки која није из $\omega(x)$. На основу Тврђења 52 гранична вредност мора бити у скупу $\mathrm{Fix}\left(\phi_t\right)$.

Постојање граничне вредности $\lim\limits_{t\to-\infty} \gamma_x(t)$ се показује истим поступком. □

У случају када је функција Морсова следи карактеризација фиксних, односно нелутајућих тачака.

Тврђење 67. *Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција на затвореној глатској многострукости M. Ако је ϕ_t ток негативног градијентног система тада је за свако t*

$$\mathrm{Crit}\,(F) = \mathrm{Fix}\,(\phi_t) = \mathrm{NW}\,(\phi_t)\,.$$

Доказ. Како је свака фиксна тачка нелутајућа треба још само видети да тачка која није критична, тј. фиксна мора бити лутајућа. Међутим ово следи из тога што за произвољну тачку $x \notin \mathrm{Fix}\,(\phi_t)$ постоји $\lim\limits_{t\to+\infty} \gamma_t\,(x) \in \mathrm{Fix}\,(\phi_t)$. □

Дефинисаћемо сада стабилну и нестабилну многострукост на стандардан начин.

Дефиниција 68. Нека је $p \in M$ недегенерисана критична тачка функције F.

Стабилна многострукост тачке p је

$$W^s\,(p) = \left\{ x \in M \;\middle|\; \lim_{t\to+\infty} \phi_t\,(x) = p \right\}.$$

Нестабилна многострукост тачке p је

$$W^u\,(p) = \left\{ x \in M \;\middle|\; \lim_{t\to-\infty} \phi_t\,(x) = p \right\}.$$

Ови скупови су инваријантни у односу на ток, односно важи следеће тврђење.

Тврђење 69. *Стабилна и нестабилна многострукост су инваријантни скупови у односу на ток ϕ_t.*

Доказ. Доказ следи из тога што је ток једнопараметарска група дифеоморфизама. Нека је дата произвољна тачка $x \in M$ тако да је $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi_t\,(x) = p$, односно $x \in W^s\,(p)$. Тада за свако t_0 важи

$$\lim_{t\to+\infty} \phi_t\,(\phi_{t_0}\,(x)) = \lim_{t\to+\infty} \phi_{t+t_0}\,(x) = p,$$

односно

$$\phi_{t_0}\,(x) \in W^s\,(p)\,.$$

Следи закључак

$$\phi_t\,(W^s\,(p)) \subseteq W^s\,(p)\,.$$

□

Показало се да овако дефинисани скупови имају значајну улогу у разумевању Морсових функција. Најпре важи следећа битна теорема, која и оправдава назив многострукости.

Теорема 70. *Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција на глатској Римановој многострукости (M, g) коначне димензије n. Тангентни простор у критичној тачки p се може записати као*

$$T_pM = T_p^sM \oplus T_p^uM$$

где је Хесијан позитивно дефинитан на T_p^sM и негативно дефинитан на T_p^uM. Стабилна и нестабилна многострукост су сурјективне слике глатког улагања

$$E^s : T_p^sM \to W^s\,(p) \subseteq M, \qquad E^u : T_p^uM \to W^u\,(p) \subseteq M.$$

Стабилна многострукост у тачки p је глатко уложен отворени диск чија је димензија $n - \mathrm{ind}\,(p)$, а нестабилна многострукост је глатко уложен отворени диск димензије $\mathrm{ind}\,(p)$.

Доказ Теореме 70 се може наћи у [3].

Напомена 71. *Нека је $\varphi : M \to M$ дифеоморфизам на глатској Римановој многострукости. Нека је фиксна тачка p таква да се тангентни простор у тој тачки T_pM дели на директну суму два потпростора $E^s(p) \oplus E^u(p)$ који су инваријантни у односу на диференцијал $d\varphi$, тако да је $d\varphi$ контракција на стабилном потпростору $E^s(p)$ и екстензија на нестабилном потпростору $E^u(p)$. Тада се фиксна тачка назива хиперболичка. За Морсову функцију F свака критична тачка p је хиперболичка фиксна тачка тока ϕ_t за свако $t \neq 0$.*

На основу претходног показаћемо да се комплетна многострукост може реконструисати из стабилних, односно нестабилних многострукости критичних тачака.

Тврђење 72. *Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција на глатској затвореној Римановој многострукости (M, g) коначне димензије n. Тада је многострукост M коначна дисјунктна унија стабилних многострукости критичних тачака функције F, односно коначна дисјунктна унија нестабилних многострукости критичних тачака функције F*

$$M = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Crit}(F)} W^s(p), \qquad M = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Crit}(F)} W^u(p).$$

Доказ. Скупови су очигледно дисјунктни, јер је гранична вредност јединствена. На основу Тврђења 66 свака тачка која није критична конвергира ка критичној тачки функције F, односно фиксној тачки тока ϕ_t , па на основу тога следи тврђење.

□

Надаље желимо да задамо додатне услове на Морсове функције како бисмо добили неке јаче резултате.

Дефиниција 73. За Морсову функцију $F : M \to \mathbb{R}$ на глаткој Римановој многострукости (M, g) коначне димензије n кажемо да задовољава *Морс-Смејлов услов трансверзалности* ако се нестабилне и стабилне многострукости секу транзитивно, односно ако је

$$W^s(p) \pitchfork W^u(q), \qquad \forall\, p, q \in \mathrm{Crit}(F),\ p \neq q.$$

Морсова функција која задовољава овај услов (за фиксирано g) се назива *Морс-Смејловом функцијом.*

Иако смо на први поглед задали доста рестриктиван услов нисмо много изгубили, јер су функције које задовољавају овако задат услов и даље густе, односно важи следећа теорема позната као Купка-Смејлова, чији доказ се може наћи у [3].

Теорема 74. *Ако је (M, g) коначно димензиона, компактна, глатка Риманова многострукост, тада је скуп свих Морс-Смејлових функција, за фиксирано g, класе C^k густ у скупу свих C^k функција на многострукости M.*

Следеће тврђење је директна последица Морс-Смејлових услова.

Тврђење 75. *Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ Морс-Смејлова функција на затвореној Римановој многострукости (M, g). Ако су $p, q \in \mathrm{Crit}(F)$ и важи да је $W^s(p) \cap W^u(q) \neq \emptyset$ тада је $W^s(p) \cap W^u(q)$ подмногострукост M димензије $\mathrm{ind}(q) - \mathrm{ind}(p)$.*

Доказ. На основу Теореме 70 већ знамо да је $W^s(p)$ подмногострукост чија је димензија $n - \operatorname{ind}(p)$ и такође $W^u(q)$ подмногострукост димензије $\operatorname{ind}(q)$. Услов да се ове подмногострукости секу трансверзално можемо записати да је инклузија $i : W^u(q) \to M$ трансверзална на $W^s(p)$. Тада је инверзна слика скупа $W^s(p)$ заправо пресек који тражимо

$$i^{-1}(W^s(p)) = W^s(p) \cap W^u(q).$$

За однос димензија важи

$$\dim W^u(q) - \dim(W^s(p) \cap W^u(q)) = n - \dim(W^s(p))$$

односно добијамо тражено

$$\dim(W^s(p) \cap W^u(q)) = \operatorname{ind}(q) - \operatorname{ind}(p).$$

□

Пресек стабилне и нестабилне многострукости означаваћемо са

$$\mathcal{M}(q,p) = W^u(q) \cap W^s(p).$$

На основу претходног тврђења добијамо даље особине.

Последица 76. *Ако је $F : M \to \mathbb{R}$ Морс-Смејлова функција на затвореној глатској Римановој многострукости (M,g) коначне димензије, и ако за две различите тачке $p, q \in \operatorname{Crit}(F)$ важи да је $\mathcal{M}(q,p) \neq \emptyset$, тада је*

$$\operatorname{ind}(q) > \operatorname{ind}(p).$$

Доказ. Из услова да је $\mathcal{M}(q,p) \neq \emptyset$ знамо да постоји бар једна трајекторија негативног градијентног тока од q до p. Та једна трајекторија прави подмногострукост димензије 1 и не може се десити да је $\dim(\mathcal{M}(q,p)) = 0$. На основу Тврђења 75 знамо да је $\mathcal{M}(q,p) \neq \emptyset$ подмногострукост димензије $\operatorname{ind}(q) - \operatorname{ind}(p)$, па је

$$\operatorname{ind}(q) - \operatorname{ind}(p) = \dim(\mathcal{M}(q,p)) \geqslant 1.$$

□

Лако се могу на основу претходног добити још нека својства.

Последица 77. *Ако је $F : M \to \mathbb{R}$ Морс-Смејлова функција на затвореној Римановој многострукости (M,g) коначне димензије тада важи и*

1. *Ако је $\operatorname{ind}(p) > \operatorname{ind}(q)$ следи да је $\mathcal{M}(q,p) = \emptyset$.*
2. *$\mathcal{M}(p,p) = \{p\}$.*
3. *Ако је $\operatorname{ind}(p) = \operatorname{ind}(q)$ и $p \neq q$ тада је $\mathcal{M}(q,p) = \emptyset$.*

Приметимо да на основу ове последице функција висине на торусу из Примера 59 није Морс-Смејлова, јер постоји трајекторија која повезује седласте тачке индекса 1. Међутим ако мало „искривимо” торус ова опструкција нестаје и немамо више трајекторија које спајају ове тачке.

Увешћемо још једну многострукост трајекторија које повезују критичне тачке са

$$\widehat{\mathcal{M}}(q,p) = \mathcal{M}(q,p) \cap F^{-1}(a)$$

за регуларну вредност $a \in (F(p), F(q))$. Приметимо да су овако дефинисане многострукости дифеоморфне за различите изборе тачке a, јер за различите регуларне вредности из одговарајућег интервала постоји природна идентификација негативним градијентним током. Ово је у ствари простор трајекторија негативног градијентног тока које повезују тачке q и p, јер свака трајекторија ниво $F^{-1}(a)$ сече једном. Може се показати да се простор $\widehat{\mathcal{M}}(q,p)$ добија слободним и дискретним дејством групе $\mathbb{R}$ на $\mathcal{M}(q,p)$, из чега закључујемо да је то многострукост димензије

$$\dim\left(\widehat{\mathcal{M}}(q,p)\right) = \operatorname{ind}(q) - \operatorname{ind}(p) - 1.$$

У случају када је $\operatorname{ind}(q) - \operatorname{ind}(p) = 1$ простор $\widehat{\mathcal{M}}(q,p)$ је коначан скуп тачака.

Проучавање простора $\mathcal{M}(p,q)$ и $\widehat{\mathcal{M}}(p,q)$, који се називају модулски простори, води ка увођењу Морсове хомологије и другим значајним резултатима, али их ми овде нећемо наводити. За наше истраживање нам је била потребна само структура ових простора. У том циљу нам је потребна следећа дефиниција, где ћемо са $U_\varepsilon(A)$ означити околину скупа A, односно

$$U_\varepsilon(A) = \left\{x \in M \;\middle|\; d(x,A) < \varepsilon\right\}.$$

Дефиниција 78. За скуп $K \subset \widehat{\mathcal{M}}(q,p)$ кажемо да је *компактификован додавањем изломљених трајекторија* ако за сваки низ тачака $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ постоје критичне тачке

$$q = x_0, \ldots, x_l = p$$

и постоје повезујуће трајекторије

$$\gamma^i \in \mathcal{M}(x_{i-1}, x_i), \quad i \in \{1, 2, \ldots, l\}$$

тако да за свако $\varepsilon > 0$ постоји k_0 тако да за све $k \geqslant k_0$ важи

$$\gamma(p_k) \subset U_\varepsilon\left(\gamma^1 \cup \cdots \cup \gamma^l\right),$$

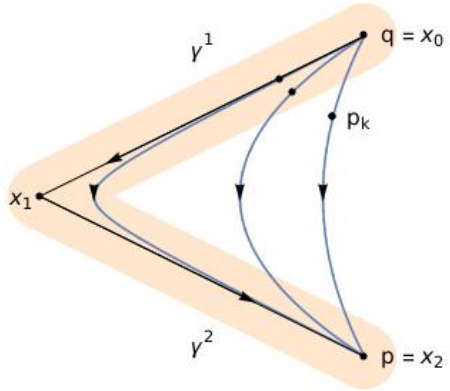
где је $\gamma(p_k)$ трајекторија кроз тачку p_k.

Геометријска конвергенција низа скупова C_n ка неком скупу C значи да растојање чланова низа до скупа C тежи нули, односно да за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да за свако $n \geqslant n_0$ важи $d(C_n, C) < \varepsilon$.

Ако подразумевамо геометријску конвергенцију претходну дефиницију можемо исказати да трајекторија кроз p_k конвергира ка унији трајекторија. Подразумевајући претходно можемо краће записати

$$\gamma(p_k) \longrightarrow \left(\gamma^1, \ldots, \gamma^l\right), \; k \to \infty$$

односно рећи да $\gamma(p_k)$ конвергира ка изломљеној трајекторији $\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^l\right)$ реда l. Под редом изломљене трајекторије подразумевамо број повезујућих трајекторија γ^i у њој. Илустрација претходног је дата на Слици 1.2.



Слика 1.2: Геометријска конвергенција

Теорема 79. *Претпоставимо да су за функцију F испуњени Морс-Смејлови услови. Тада се простор $\widehat{\mathcal{M}}(q,p)$ може компактификовати додавањем изломљених трајекторија чији је ред највише* $\operatorname{ind}(q) - \operatorname{ind}(p)$.

Доказ ове теореме се може видети у [36].

Ову компактификацију можемо и прецизније да опишемо, а то нам је баш и потребно за наше истраживање. Модулски простор $\widehat{\mathcal{M}}(q,p)$, када није празан скуп, је многострукост која се састоји од трајекторија негативног градијентног система које почињу у тачки q и завршавају се у тачки p. Тополошка граница ове многострукости је на основу претходне теореме

$$\partial\widehat{\mathcal{M}}(q,p) = \bigcup \widehat{\mathcal{M}}(q,x_1) \times \widehat{\mathcal{M}}(x_1,x_2) \times \cdots \times \widehat{\mathcal{M}}(x_l,p)$$

где је унија узета по свим $x_i \in \operatorname{Crit}(F)$ таквим да је

$$\operatorname{ind}_F(q) > \operatorname{ind}_F(x_1) > \cdots > ind_F(x_l) > \operatorname{ind}_F(p).$$

У случају када је разлика индекса један модулски простор $\mathcal{M}(q,p)$ се састоји од коначно много изолованих трајекторија.

За сваку трајекторију $\gamma^i \in \mathcal{M}(x_{i-1},x_i)$ постоји строго монотон низ s_n^i и низ трајекторија $\gamma_n \in \mathcal{M}(q,p)$ тако да

$$\widetilde{\gamma}_n^i \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} \gamma^i,$$

где је

$$\widetilde{\gamma}_n^i(t) = \gamma_n\left(t + s_n^i\right).$$

Са $\overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows}$ означавамо равномерну конвергенцију са свим изводима на сваком компактном подскупу $\mathbb{R}$.

За крај овог поглавља даћемо пример који илуструје ово понашање.

Пример 80. Посматраћемо раван торус $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ са стандардном метриком. Задајмо пресликавање

$$F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R} \qquad F(x,y) = \cos(2\pi x) + \cos(2\pi y).$$

Пресликавање је добро дефинисано на торусу и глатко је. Можемо израчунати да пресликавање има 4 критичне тачке

$$A(0,0), \quad B\left(\frac{1}{2},0\right), \quad C\left(0,\frac{1}{2}\right), \quad D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

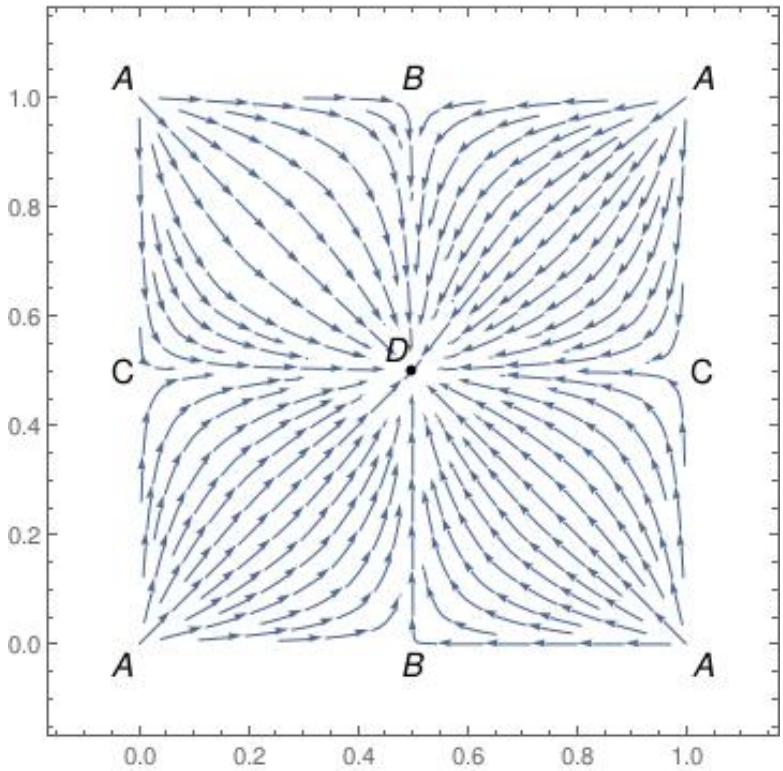
Ако израчунамо Хесијан у овим тачкама добијамо њихове индексе

$$\operatorname{ind}(A)=2, \quad \operatorname{ind}(B)=\operatorname{ind}(C)=1, \quad \operatorname{ind}(D)=0.$$

Овај систем представља у ствари две независне диференцијалне једначине првог реда, за чија решења се добија

$$x(t)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(e^{4\pi^2 t}\operatorname{ctg}(\pi x(0))\right), \quad y(t)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\left(e^{4\pi^2 t}\operatorname{ctg}(\pi y(0))\right).$$

Добијамо да трајекторије из $\mathcal{M}(A,D)$ попуне скоро цео квадрат, изузев тачака са трајекторија које спајају тачке A и C, A и B, B и D, C и D. Другим речима, $\mathcal{M}(A,D)$ се може комактификовати изломљеном трајекторијом која спаја тачке A, C и D, односно A, B и D што се може видети на Слици 1.3.



Слика 1.3: Трајекторије на торусу

1.5 Кодирање у лутајућој динамици

Као што смо већ приметили, полиномијална ентропија је уско повезана са лутајућим делом динамичког система. Ово нам омогућава увођење нових техника, као што је једно специфично кодирање. У даљем излагању у овом поглављу пратићемо конструкцију из нашег рада [15]. Неки делови су инспирисани радом [14].

Максималну кардиналност скупа тачака које припадају $(n, \varepsilon; f)$-раздвојеном скупу простора X и које су садржане у подскупу $Y \subset X$ означимо са

$$\operatorname{sep}(n, \varepsilon; Y).$$

Дефиниција 81. *Полиномијалну ентропију пресликавања f на скупу $Y \subset X$ дефинишемо са*

$$h_{pol}(f; Y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{sep}(n, \varepsilon; Y)}{\log n}.$$

Аналогно можемо дефинисати скупове $\operatorname{cov}(n, \varepsilon; Y)$ и $\operatorname{span}(n, \varepsilon; Y)$ и помоћу њих дефинисати полиномијалну ентропију пресликавања f на скупу Y.

У раду [23] је доказано следеће тврђење.

Тврђење 82. *Ако простор X можемо представити као $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$, где су скупови X_i инваријантни важи да је*

$$h_{pol}(f; X) = \max \left\{ h_{pol}(f; X_i) \;\middle|\; i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Уочимо да се у последњем тврђењу не захтева затвореност скупова X_i, па је овакав приступ погодан за некомпактане подскупове.

Посматраћемо компактан метрички простор (X, d) и на њему дефинисано непрекидно пресликавање $f : X \to X$, такво да је скуп нелутајућих тачака коначан, односно

$$\operatorname{NW}(f) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}.$$

Ова конструкција је уопштење конструкције дате у [14], где је урађена за само једну нелутајућу, дакле фиксну тачку, и за f које је хомеоморфизам (овде допуштамо да је f произвољно непрекидно пресликавање).

Приметимо да у случају када је $\operatorname{NW}(f)$ коначан скуп све нелутајуће тачке су периодичне. Ово је последица тога што је на основу Тврђења 12 скуп $\operatorname{NW}(f)$ инваријантан. Специјално, у случају када је скуп $\operatorname{NW}(f)$ једночлан нелутајућа тачка мора бити и фиксна.

Претпоставићемо надаље да је скуп $Y \subseteq X$ инваријантан и да садржи тачно једну нелутајућу тачку

$$Y \cap \operatorname{NW}(f) = \{p_j\}.$$

Нека је $\mathcal{F} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_l\}$ коначна фамилија непразних подскупова $X \setminus \operatorname{NW}(f)$. Нека је $\cup\mathcal{F} = Y_1 \cup \cdots \cup Y_l$ и

$$Y_\infty = Y \setminus \cup\mathcal{F}.$$

Сада за фиксирани природан број n означимо са

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

произвољан низ тачака из Y, а са

$$\underline{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$$

означимо низ елемената из $\mathcal{F} \cup \{Y_\infty\}$ такав да је

$$x_k \in \omega_k, \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

У овом случају називамо $\underline{\omega}$ кодирањем низа $\underline{x}$ релативно фамилији $\mathcal{F}$. Често ћемо и $\underline{\omega}$ називати реч, а елементе ω_i словима. Приметимо да, како скупови фамилије $\mathcal{F}$ нису априори дисјунктни, кодирање није јединствено. Означимо са $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)$ скуп свих кодирања свих орбита $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ тачака из Y дужине n. Дефинисаћемо полиномијалну ентропију скупа Y релативно фамилији $\mathcal{F}$ са

$$h_{pol}(f, \mathcal{F}; Y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \sharp \mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)}{\log n}.$$

Уколико нема могућности забуне изостављаћемо f из нотације и користићемо скраћени запис $h_{pol}(\mathcal{F}; Y)$. Ако се фамилија $\mathcal{F}$ састоји од само једног скупа, односно $\mathcal{F} = \{K\}$, користићемо и ознаку $h_{pol}(K; Y)$ уместо $h_{pol}(\{K\}; Y)$.

За скуп $Z \subseteq X \setminus \mathrm{NW}(f)$ са $M(Z)$ означавамо максималан број тачака неке орбите који припадају скупу Z, односно

$$M(Z) = \sup_{x\in X} \sharp \left\{ n \;\middle|\; f^n(x) \in Z \right\}.$$

На овом месту можемо приметити две чињенице. Прво ако је скуп Z компактан тада је $M(Z)$ коначан број. Ово следи из тога што компактан скуп можемо покрити коначним бројем отворених лутајућих скупова и тога што орбита сваког елемента сече лутајући скуп највише једном. На основу претходног следи и да је за довољно велико n већина слова у кодирању произвољне орбите једнака Y_∞.

Под условом да је $M(Z)$ коначан број можемо добити корисне особине полиномијалне ентропије фамилије $\mathcal{F}$, наиме важи наредна лема.

Лема 83. *Нека су $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ две коначне фамилије подскупова $X \setminus \mathrm{NW}(f)$ за које знамо да је $M(\cup\mathcal{F}) < \infty$. Претпоставимо и да је Y инваријантан подскуп X са тачно једном нелутајућом тачком. Тада важе следећа тврђења:*

1. *монотоност*

   Ако за свако $Y_i' \in \mathcal{F}'$ постоји $Y_i \in \mathcal{F}$ тако да је $Y_i' \subset Y_i$ тада је

   $$h_{pol}(\mathcal{F}'; Y) \leqslant h_{pol}(\mathcal{F}; Y).$$

2. *адитивност*

   $$h_{pol}(\cup\mathcal{F}; Y) = h_{pol}(\mathcal{F}; Y).$$

3. *лутајућа адитивност*

   Ако је фамилија $\mathcal{F} = \{Y_1, Y_2, \ldots Y_k\}$ таква да је скуп $Y_1 \cup Y_2$ лутајући тада важи

   $$h_{pol}(\mathcal{F}; Y) = \max\left\{ h_{pol}(\{Y_1, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y), h_{pol}(\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y) \right\}.$$

Доказ. 1. Фиксираћемо n и дефинисаћемо пресликавање

$$\Phi : \mathcal{A}_n(\mathcal{F}'; Y) \to \mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y).$$

За произвољну реч $\underline{\omega'}$ из $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}'; Y)$ изаберимо x такво да је $\underline{\omega'}$ кодирање орбите тачке x дужине n релативно фамилији $\mathcal{F}'$. Дефинишимо сада да је $\Phi(\underline{\omega'}) = \underline{\omega}$ кодирање исте орбите, али релативно фамилији $\mathcal{F}$. Потражићемо сада број тачака у инверзној слици речи $\underline{\omega}$ при оваквом пресликавању. Ако је i-то слово у речи $\underline{\omega}$ једнако Y_∞ то значи да $f^i(x) \notin \cup\mathcal{F}$. Али тада и $f^i(x) \notin \cup\mathcal{F}'$, па је и i-то слово у реч $\underline{\omega'}$ такође Y_∞. Приметимо да има највише $M(\cup\mathcal{F})$ слова у $\underline{\omega}$ која су различита од Y_∞ и да је $\underline{\omega'}$ реч у алфабету од $\sharp\mathcal{F}' + 1$ слова што нам даје неједнакост

$$\sharp\mathcal{A}_n(\mathcal{F}'; Y) \leqslant (\sharp\mathcal{F}' + 1)^{M(\cup\mathcal{F})} \sharp\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y).$$

Како израз $(\sharp\mathcal{F}' + 1)^{M(\cup\mathcal{F})}$ не зависи од n логаритмовањем и пуштањем да n тежи бесконачно добијамо тражену неједнакост

$$h_{pol}(\mathcal{F}'; Y) \leqslant h_{pol}(\mathcal{F}; Y).$$

2. Применом првог тврђења леме на фамилије $\mathcal{F}$ и $\{\cup\mathcal{F}\}$ добијамо неједнакост

$$h_{pol}(\mathcal{F}; Y) \leqslant h_{pol}(\cup\mathcal{F}; Y).$$

Међутим није тешко увидети да за свако n важи

$$\sharp\mathcal{A}_n(\cup\mathcal{F}; Y) \leqslant \sharp\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y),$$

одакле добијамо обрнуту неједнакост

$$h_{pol}(\mathcal{F}; Y) \geqslant h_{pol}(\cup\mathcal{F}; Y).$$

3. Применом првог тврђења леме два пута добијамо неједнакост

$$h_{pol}(\mathcal{F}; Y) \geqslant \max\{h_{pol}(\{Y_1, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y), h_{pol}(\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y)\}.$$

Са друге стране како знамо да је скуп $Y_1 \cup Y_2$ лутајући скуп ниједна реч не може садржати и Y_1 и Y_2 па следи закључак да је

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y) \subset \mathcal{A}_n(\{Y_1, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y) \cup \mathcal{A}_n(\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y).$$

Односно можемо закључити да је

$$\begin{aligned}\sharp\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y) &\leqslant \sharp\mathcal{A}_n(\{Y_1, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y) + \sharp\mathcal{A}_n(\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y) \\ &\leqslant 2\max\{\sharp\mathcal{A}_n(\{Y_1, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y), \sharp\mathcal{A}_n(\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y)\}\end{aligned}$$

одакле пуштањем граничне вредности добијамо и другу неједнакост

$$h_{pol}(\mathcal{F}; Y) \leqslant \max\{h_{pol}(\{Y_1, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y), h_{pol}(\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_k\}; Y)\}$$

чиме смо доказали тврђење.

□

Надаље тежимо томе да смањимо скуп на коме израчунавамо полиномијалну ентропију, односно да видимо од којих тачака она зависи. Са тим циљем уводимо локалну полиномијалну ентропију. Нека је $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ коначан скуп тачака у $X \setminus \mathrm{NW}(f)$. Изаберимо за свако x_i из овог скупа опадајући низ околина $\{U_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ који чине базу околина x_i. На основу Леме 83, односно монотоности, низ $\left\{h_{pol}\left(\left\{U_n^1, U_n^2, \ldots, U_n^k\right\}; Y\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ је опадајући и како је ограничен мора конвергирати. Такође, опет на основу монотоности, гранична вредност низа неће зависти од избора околина, већ само од скупа $\mathcal{S}$, чиме је оправдана следећа дефиниција.

Дефиниција 84. Нека је $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ коначан скуп тачака у $X \setminus \mathrm{NW}(f)$, и за свако x_i $\{U_n^i\}_{n\in\mathbb{N}}$ опадајући низ околина који формирају базу околина. *Локалну полиномијалну ентропију у тачкама* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ дефинишемо са

$$h_{pol}^{loc}\left(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}; Y\right) = h_{pol}^{loc}\left(\mathcal{S}; Y\right) = \lim_{n\to\infty} h_{pol}\left(\left\{U_n^1, U_n^2, \ldots, U_n^k\right\}; Y\right).$$

Како бисмо повезали овако уведену локалну полиномијалну ентропију са полиномијалном ентропијом целог система биће нам неопходно најпре неколико лема.

Лема 85. *([14]) За сваки компактан скуп $K \subseteq X \setminus \mathrm{NW}(f)$ и за свако $\varepsilon > 0$ постоје дисјунктни, лутајући, компактни подскупови $Y_1, Y_2, \ldots, Y_l \subseteq K$ дијаметра мањег од ε такви да важи*

$$h_{pol}\left(\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_l\}; Y\right) = h_{pol}\left(K; Y\right).$$

Доказ. На основу претпоставке свака тачка из K има лутајућу околину, те можемо направити покривање оваквим скуповима. Како је K компактан сваки скуп довољно малог дијаметра (мањег од Лебеговог броја покривача) је подскуп неког елемента покривача, па је самим тим лутајући скуп. Дакле за довољно мало ε сваки скуп дијаметра мањег од 2ε је лутајући. Такође на основу компактности постоји коначно покривање $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ компактним скуповима дијаметра мањег од ε. Тада је унија свака два подскупа из овог покривања са непразним пресеком лутајући скуп.

Сада конструишемо опадајућу фамилију $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ подскупова скупа K са истом полиномијалном ентропијом. Кренућемо од фамилије $\mathcal{F}_0 = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$ коју смо добили из коначног покривања. Ако су њени скупови дисјунктни поступак је готов. Ако пак постоје Y_i и Y_j такви да је $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ на основу конструкције њихова унија је лутајући скуп. Тада на основу Леме 83, односно лутајуће адитивности, можемо одредити да је $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \setminus \{Y_i\}$ или $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \setminus \{Y_j\}$ тако да важи

$$h_{pol}\left(\mathcal{F}_1; Y\right) = h_{pol}\left(\mathcal{F}_0; Y\right).$$

Ако су сад скупови из $\mathcal{F}_1$ дисјунктни поступак је завршен, а ако нису понављамо претходни корак. На основу коначности почетне фамилије поступак се мора завршити у коначном броју корака n, и тако добијамо фамилију $\mathcal{F}_n$ компактних, дисјунктних подскупова таквих да је

$$h_{pol}\left(\mathcal{F}_n; Y\right) = h_{pol}\left(K; Y\right).$$

□

Лема 86. *([14]) За сваки компактан скуп $K \subseteq X \setminus \mathrm{NW}(f)$ важи*

$$h_{pol}\left(K; Y\right) \leqslant h_{pol}\left(f; Y\right).$$

Доказ. Приметимо да на основу Леме 85 постоји фамилија дисјунктних, лутајућих скупова $\mathcal{F} = \{Y_1, \ldots, Y_l\}$ чија је полиномијална ентропија једнака полиномијалној ентропији скупа K па доказујемо

$$h_{pol}(\mathcal{F}; Y) \leqslant h_{pol}(f; Y).$$

Изаберимо дисјунктне лутајуће околине $U_1, \ldots, U_l$ елемената $Y_1, \ldots, Y_l$ фамилије $\mathcal{F}$. Изаберимо сада ε као најмање растојање скупа Y_i до комплемента скупа U_i за $i \in \{1, \ldots, l\}$, и фиксирајмо број n.

За сваку подфамилију $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ означимо са

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y)$$

скуп елемената $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)$ чији је скуп слова тачно $\mathcal{F}' \cup \{Y_\infty\}$ (сва слова фамилије $\mathcal{F}'$ се појављују). Специјално у елементима $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}; Y)$ се појављују сва слова фамилије $\mathcal{F}$.

За изабрану подфамилију $\mathcal{F}'$ изаберимо две речи $\underline{\omega} = (\omega_0, \ldots, \omega_{n-1})$ односно $\underline{z} = (z_0, \ldots, z_{n-1})$ у $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y)$ које представљају орбите тачака $x, y \in Y$. Ако су ове речи различите тада тачке морају бити $(n, \varepsilon; f)$-раздвојене. Наиме, претпоставимо да се разликују на i-том месту. Ако су оба слова ω_i и z_i различита од Y_∞ тада $f^i(x)$ и $f^i(y)$ припадају различитим Y_j па су за више од ε удаљени. У другом случају нека је рецимо $\omega_i = Y_\infty$ и $f^i(y) \in Y_j$. Тада на основу дефиниције $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y)$ постоји неко p такво да је $f^p(x) \in Y_j$. Како је Y_j лутајући скуп $f^p(y) \notin U_j$, па су опет $f^p(x)$ и $f^p(y)$ удаљени за више од ε. На основу претходног следи

$$\sharp \mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y) \leqslant \operatorname{sep}(n, \varepsilon; Y).$$

Можемо приметити да $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y)$ дели $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)$ на 2^l делова па је

$$\sharp \mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y) = \sum_{\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}} \sharp \mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y) \leqslant 2^l \operatorname{sep}(n, \varepsilon; Y),$$

односно

$$h_{pol}(K; Y) = h_{pol}(\mathcal{F}; Y) \leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{sep}(n, \varepsilon; Y)}{\log n}.$$

Како горња неједнакост важи за свако довољно мало ε следи тврђење леме.

□

Сада, на основу претходних лема, можемо доказати да се приликом израчунавања полиномијалне ентропије можемо концентрисати само на коначне подскупове, односно важи следеће тврђење.

Тврђење 87. *За скуп $Y \subseteq X$ који је инваријантан и садржи тачно једну нелутајућу тачку важи*

$$\begin{aligned} h_{pol}(f; Y) &\overset{(1)}{=} \sup\left\{h_{pol}(K; Y) \;\middle|\; K \subseteq X \setminus \mathrm{NW}(f),\ K \text{ је компактан}\right\} \\ &\overset{(2)}{=} \sup\left\{h_{pol}(K \cap Y; Y) \;\middle|\; K \subseteq X \setminus \mathrm{NW}(f),\ K \text{ је компактан}\right\} \\ &\overset{(3)}{=} \sup\left\{h_{pol}^{loc}(\mathcal{S}; Y) \;\middle|\; \mathcal{S} \subseteq X \setminus \mathrm{NW}(f),\ \mathcal{S} \text{ је коначан}\right\} \\ &\overset{(4)}{=} \sup\left\{h_{pol}^{loc}(\mathcal{S}; Y) \;\middle|\; \mathcal{S} \subseteq \overline{Y} \setminus \mathrm{NW}(f),\ \mathcal{S} \text{ је коначан}\right\}. \end{aligned}$$

Доказ. Из дефиниције се директно види да важи друга једнакост, односно да је

$$h_{pol}\left(\mathcal{F};Y\right)=h_{pol}\left(\mathcal{F}_Y;Y\right)$$

где смо за коначну фамилију скупова $\mathcal{F}=\{Y_1,\ldots,Y_l\}$ користили ознаку $\mathcal{F}_Y$ за фамилију $\mathcal{F}_Y=\{Y_1\cap Y,\ldots,Y_l\cap Y\}$.

Покажимо сада прву једнакост. Из Леме 86 једна неједнакост важи за сваки компактан скуп, па директно следи да важи и за супремум по свим компактним скуповима

$$h_{pol}\left(f;Y\right)\geqslant\sup\left\{h_{pol}\left(K;Y\right)\;\middle|\;K\subseteq X\setminus\mathrm{NW}\left(f\right),\;K\text{ је компактан}\right\}.$$

Како бисмо показали и обрнуту неједнакост потражићемо компактне подскупове са великом полиномијалном ентропијом који не садрже тачке из $\mathrm{NW}\left(f\right)$. Изаберимо $\varepsilon>0$ и $\mathcal{F}=\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_l\}$ фамилију подскупова скупа $X\setminus\mathrm{NW}\left(f\right)$ који су дијаметра мањег од ε. Нека је $Y_\infty=Y\setminus\{Y_1\cup Y_2\cup\cdots\cup Y_l\}$. Како скуп Y садржи само једну нелутајућу тачку могли смо фамилију $\mathcal{F}$ изабрати тако да покрива цео скуп Y осим околине једине нелутајуће тачке чији је дијаметар мањи од ε. Односно претходну фамилију смо могли одабрати тако да важи да је скуп Y_∞ дијаметра мањег од ε.

Фиксирајмо сада и n, и посматрајмо скуп E који је $(n,\varepsilon;f)$-раздвојен. За тачку $x\in E$ изаберимо кодирање $\underline{\alpha}$ дужине n у односу на фамилију скупова $\{Y_1,\ldots,Y_l,Y_\infty\}$. Како су скупови $Y_1,\ldots,Y_l,Y_\infty$ дијаметра мањег од ε, и за скуп E важи да је $(n,\varepsilon;f)$-раздвојен две различите тачке овог скупа не могу имати исто кодирање. Закључујемо да је

$$\mathrm{sep}\left(n,\varepsilon;Y\right)\leqslant\sharp\mathcal{A}_n\left(\mathcal{F};Y\right).$$

Последњу неједнакост можемо поделити са $\log n$ и пустити да n тежи бесконачности чиме добијамо

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\mathrm{sep}\left(n,\varepsilon;Y\right)}{\log n}\leqslant h_{pol}\left(\mathcal{F};Y\right),$$

Елементе фамилије $\mathcal{F}$ смо могли изабрати тако да буду компактни, па пуштајући лимес да ε тежи 0 добијамо и другу неједнакост

$$h_{pol}\left(f;Y\right)\leqslant\sup\left\{h_{pol}\left(K;Y\right)\;\middle|\;K\subseteq X\setminus\mathrm{NW}\left(f\right),\;K\text{ је компактан}\right\}.$$

Пређимо на трећу једнакост. За произвољан компактан скуп K можемо изабрати фамилију дисјунктних компактних подскупова $Y_1,\ldots,Y_l$ такву да важи једнакост $h_{pol}\left(K;Y\right)=h_{pol}\left(\{Y_1,\ldots,Y_l\};Y\right)$. Сада можемо смањити сваки од Y_i на Y_i^1 тако да се полиномијална ентропија не промени ако заменимо Y_i са Y_i^1. На исти начин можемо добити Y_i^2 смањивањем Y_i^1 без промене ентропије. Овим поступком добијамо низ $\{Y_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Можемо изабрати да дијаметри скупова Y_i^n теже нули и дефинисати тачке

$$x_i=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}Y_i^n.$$

Очигледно је

$$h_{pol}^{loc}\left(\{x_1,\ldots,x_l\};Y\right)=h_{pol}^{loc}\left(K;Y\right),$$

па узимањем супремума добијамо тражену једнакост.

При доказивању четврте једнакости, са једне стране је очигледно да је

$$\sup\left\{h_{pol}^{loc}\left(\mathcal{S};Y\right)\ \middle|\ \mathcal{S}\subseteq X\setminus \mathrm{NW}\left(f\right),\ \mathcal{S}\text{ је коначан}\right\}$$

$$\geqslant \sup\left\{h_{pol}^{loc}\left(\mathcal{S};Y\right)\ \middle|\ \mathcal{S}\subseteq \overline{Y}\setminus \mathrm{NW}\left(f\right),\ \mathcal{S}\text{ је коначан}\right\}.$$

Међутим, са друге стране за $x_i\in\mathcal{S}\setminus\overline{Y}$ можемо формирати скупове Y_i^n, као у претходном поступку, тако да је $Y_i^n\cap Y=\emptyset$. Следи да је

$$h_{pol}^{loc}\left(\mathcal{S};Y\right)=h_{pol}^{loc}\left(\mathcal{S}\setminus\left\{x_i\right\};Y\right)$$

чиме завршавамо доказ овог тврђења.

□

У вези са претходним тврђењем можемо приметити две занимљиве чињенице.

Напомена 88. *Ако је $\mathcal{F}=\{Z\}$, где је $Z\subset Y$ лутајући скуп, и пресликавање f хомеоморфизам можемо закључити да је $\sharp\mathcal{A}_n\left(\mathcal{F};Y\right)=n+1$ и да је $h_{pol}\left(\mathcal{F};Y\right)=1$. На основу Тврђења 87 можемо закључити да је полиномијална ентропија f није мања од 1. Ово смо већ и раније показали у Тврђењу 45 (хомеоморфизам са лутајућом тачком има полиномијалну ентропију бар 1), а сада видимо и другачији доказ ове важне чињенице.*

Напомена 89. *Знамо да се слово Z у кодирању појављује највише $M\left(Z\right)$ пута па је $\sharp\mathcal{A}_n\left(Z;Y\right)\leqslant n^{M(Z)}$. Из овога следи и да је $h_{pol}\left(Z;Y\right)\leqslant M\left(Z\right)$. Из доказа тврђења се види да је за свако $\varepsilon>0$ раст $\mathrm{sep}\left(n,\varepsilon;Y\right)$ највише полиномијалан. Примећујемо да је полиномијална ентропија заиста добро прилагођена лутајућој динамици, јер је раст орбита увек најмање линеаран, а највише полиномијалан. Овим се може и оправдати назив овога појма.*

Завршавајући део излагања о локалној полиномијалној ентропији даћемо још једну занимљиву и могуће корисну лему из [14], иако је не користимо за конкретне оригиналне резултате дате у тези.

Лема 90. *У случају када је f хомеоморфизам тада за произвољне тачке $x_1,\ldots,x_k$ у $X\setminus\mathrm{NW}\left(f\right)$ важи*

$$h_{pol}^{loc}\left(\left\{x_1,\ldots,x_k\right\};Y\right)=h_{pol}^{loc}\left(\left\{f^{n_1}\left(x_1\right),\ldots,f^{n_k}\left(x_k\right)\right\};Y\right).$$

Доказ. Доказаћемо прво да се локална полиномијална ентропија коначног скупа $\mathcal{F}$ не мења ако овом скупу додамо коначно много тачака које се налазе у орбитама тачака из $\mathcal{F}$.

Претпоставимо прво да смо додали једну тачку из орбите тачке x_1, односно докажимо најпре да важи једнакост

$$h_{pol}^{loc}\left(\left\{x_1,f^{n_1}\left(x_1\right),x_2,\ldots,x_k\right\};Y\right)=h_{pol}^{loc}\left(\left\{x_1,\ldots,x_k\right\};Y\right).$$

Ако је $f^{n_1}\left(x_1\right)$ једнака некој другој тачки из $\mathcal{F}$ једнакост је очигледна. У супротном је такође очигледно из монотоности да десна страна једнакости не може бити већа. Изаберимо сада дисјунктне околине $U_1,f^{n_1}\left(U_1\right),U_2,\ldots U_k$ одговарајућих тачака $x_1,f^{n_1}\left(x_1\right),x_2,\ldots,x_k$ и дефинишимо пресликавање

$$\Phi:\mathcal{A}_n\left(\left\{U_1,f^{n_1}\left(U_1\right),U_2,\ldots,U_k\right\};Y\right)\to\mathcal{A}_{n+n_1}\left(\left\{U_1,U_2,\ldots,U_k\right\};Y\right).$$

За произвољну реч $\underline{\omega} \in \mathcal{A}_n\left(\left\{U_1, f^{n_1}\left(U_1\right), U_2, \ldots, U_k\right\}; Y\right)$ можемо изабрати x такво да је $\underline{\omega}$ кодирање орбите $x, \ldots, f^{n-1}(x)$. Дефинишемо сада пресликавање Φ тако да је $\Phi(\underline{\omega})$ кодирање $f^{-n_1}(x), f^{-n_1+1}(x), f^{-n_1+2},(x) \ldots, f^{n-1}(x)$ у односу на $\mathcal{A}_{n+n_1}\left(\left\{U_1, U_2, \ldots U_k\right\}; Y\right)$. Овако дефинисано пресликавање је инјективно. Наиме слова у $\Phi(\underline{\omega})$ се поклапају са словима у $\underline{\omega}$, осим можда једног слова које је било $f^{n_1}(U_1)$. Слово $f^{n_1}(U_1)$, које се можда разликује у слици, због дисјунктности околина је Y_∞ у $\Phi(\underline{\omega})$. Међутим ова разлика се може уочити тиме што проверимо да ли се појављује слово U_1 у првих n слова $\Phi(\underline{\omega})$. Овим је доказана неједнакост

$$\sharp\mathcal{A}_n\left(\left\{U_1, f^{n_1}\left(U_1\right), U_2, \ldots, U_k\right\}; Y\right) \leqslant \sharp\mathcal{A}_{n+n_1}\left(\left\{U_1, U_2, \ldots, U_k\right\}; Y\right)$$

из које следи друга неједнакост која нам је потребна.

Овим смо показали да се полиномијална ентропија не мења додавањем једне тачке из орбите неке тачке из $\mathcal{F}$. Даље индукцијом следи исти закључак и за додавање коначно много тачака које се налазе у орбити неког елемента $\mathcal{F}$.

Сада можемо доказивати лему под претпоставком да важи да су орбите свих тачака $x_1, \ldots, x_k \in X \setminus \mathrm{NW}(f)$ дисјунктне. Доказаћемо прво за замену само једне тачке x_1 њеном сликом $f(x_1)$. Можемо изабрати дисјунктне околине $U_1, \ldots, U_k$ такве да је и $f(U_1)$ дисјунктна од свих. Исто као и у претходном доказивању следи да је

$$\sharp\mathcal{A}_n\left(\left\{f\left(U_1\right), U_2, \ldots, U_k\right\}; Y\right) \leqslant \sharp\mathcal{A}_{n+1}\left(\left\{U_1, U_2, \ldots, U_k\right\}; Y\right)$$

па је на основу тога и

$$h_{pol}^{loc}\left(\left\{f\left(x_1\right), \ldots, x_k\right\}; Y\right) \leqslant h_{pol}^{loc}\left(\left\{x_1, \ldots, x_k\right\}; Y\right).$$

Обрнуту неједнакост добијамо применом претходног на f^{-1}. И на крају због коначног броја тачака закључак леме следи индукцијом.

□

У тежњи да ближе одредимо скупове који су круцијални за полиномијалну ентропију, и на основу којих је можемо израчунавати, дефинисаћемо сингуларне скупове.

Дефиниција 91. За коначну колекцију скупова $U_1, \ldots, U_k \in X \setminus \mathrm{NW}(f)$ кажемо да су *међусобно сингуларни* ако за сваки реалан број R постоји тачка x и времена $n_1, \ldots, n_k$ таква да за свако i важи да је $f^{n_i}(x) \in U_i$, и такође важи да за $i \neq j$ следи да је $\left|n_i - n_j\right| > R$.

За коначан скуп тачака $\left\{x_1, \ldots, x_k\right\} \in X \setminus \mathrm{NW}(f)$ кажемо да је *сингуларан* ако им је свака фамилија одговарајућих околина међусобно сингуларна.

Није тешко видети да, ако су $U_1, \ldots, U_k$ међусобно сингуларни и компактни скупови, онда постоји сингуларан скуп $\left\{x_1, \ldots, x_k\right\}$ такав да за свако i важи $x_i \in U_i$. Приметимо још да је једна тачка увек сингуларан скуп из дефиниције сингуларних скупова. Следеће тврђење нам даје могућност израчунавања полиномијалне ентропије које користи само сингуларне скупове.

Тврђење 92. *Нека је $Y \subset X$ f-инваријантан скуп који садржи тачно једну нелутајућу тачку. Тада је*

$$h_{pol}(f; Y) = \sup\left\{h_{pol}^{loc}(\mathcal{S}; Y) \;\middle|\; \mathcal{S} \subset \overline{Y},\ \mathcal{S} \text{ је сингуларан}\right\}.$$

Доказ. Претпостављајући да је $\mathcal{S} \subset \overline{Y}$ коначан подскуп $X \setminus \mathrm{NW}(f)$ који није сингуларан показаћемо да постоји његов прави подскуп $\mathcal{S}'$ са једнаком полиномијалном ентропијом. То значи да можемо смањивати број тачака у скупу док не добијемо сингуларан скуп (једна тачака је увек сингуларан скуп), а да се полиномијална ентропија не промени. Доказ онда следи из Тврђења 87.

Нека је $\mathcal{S} = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Уочимо фамилију $\mathcal{F}$ која се састоји од лутајућих околина $U_1, \ldots, U_k$ одговарајућих тачака које су дисјунктне и нису међусобно сингуларне (на основу претпоставке овакве околине постоје). Подсетимо се да са $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y)$ означавамо елементе дужине n који се састоје од свих слова из $\mathcal{F}' \cup \{Y_\infty\}$ за неки подскуп $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$. Како су скупови U_i лутајући знамо да се сва слова изузев Y_∞ појављују највише једном у речи.

За фиксирано n скуп $\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)$ можемо представити као

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y) = \bigcup_{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}} \mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y).$$

Како скупови нису међусобно сингуларни постоји R такво да ако орбита неке тачке сече сваки од скупова U_i тада се појављује у два од ових скупова са разликом у времену највише R.

Означимо за $i \neq j$ са

$$\mathcal{A}_n(\{i, j\}; Y)$$

скуп елемената $\underline{\omega} \in \mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}; Y)$ таквих да се U_i и U_j појављују на удаљености највише R.

Тада је

$$\mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y) = \bigcup_{\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}} \mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y) \cup \bigcup_{(i,j)} \mathcal{A}_n(\{i, j\}; Y).$$

Горња једнакост важи јер смо претпоставили да скуп $\mathcal{S}$ није сингуларан. Број правих подксупова фамилије $\mathcal{F}$ је $2^k - 1$. Индексе i и j можемо изабрати на $k(k-1)/2$ начина. Следи да број скупова које учествују у једначини није већи од $c = \left(2^k - 1\right) + (k-1)\,k/2$. Можемо закључити да бар један од скупова

$$\bigcup_{\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}} \mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y) \text{ и } \bigcup_{(i,j)} \mathcal{A}_n(\{i, j\}; Y)$$

има кардиналност најмање $\sharp \mathcal{A}_n(\mathcal{F}; Y)/c$.

Како је број скупова који учествују у једначини коначан важиће једна од следеће две могућности.

1. Можемо пронаћи подниз $n_k \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ такав да је $\sharp \mathcal{A}_{n_k}(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y) \geqslant \sharp \mathcal{A}_{n_k}(\mathcal{F}; Y)/c$.

   У овом случају важи следеће

$$\begin{aligned} h_{pol}(\mathcal{F}; Y) &= \limsup_{n_k \to \infty} \frac{\log \sharp \mathcal{A}_{n_k}(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y)}{\log n_k} \\ &\leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \sharp \mathcal{A}_n(\mathcal{F}, \mathcal{F}'; Y)}{\log n} \\ &\leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \sharp \mathcal{A}_n(\mathcal{F}'; Y)}{\log n} = h_{pol}(\mathcal{F}'; Y). \end{aligned}$$

Како из Леме 83 знамо да је $h_{pol}(\mathcal{F};Y) \geqslant h_{pol}(\mathcal{F}';Y)$ следи да важи једнакост

$$h_{pol}(\mathcal{F}';Y) = h_{pol}(\mathcal{F};Y).$$

2. Можемо пронаћи подниз $n_k \in \mathbb{N}$ такав да је $\sharp\mathcal{A}_{n_k}(\{i,j\};Y) \geqslant \sharp\mathcal{A}_{n_k}(\mathcal{F};Y)/c$. Истим поступком као у првом случају може се показати да је тада

$$h_{pol}(\mathcal{F};Y) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \sharp\mathcal{A}_n(\{i,j\};Y)}{\log n}$$

Међутим у овом случају можемо пронаћи пронаћи пар (i,j) такав да је $i \neq j$ и фамилију $\mathcal{F}'$ тако да постоји подниз $n_k \in \mathbb{N}$ за који важи

$$\sharp\mathcal{A}_{n_k}(\mathcal{F},\mathcal{F}';Y) \geqslant \sharp\mathcal{A}_{n_k}(\{i,j\};Y)/c.$$

Дефинишимо $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{U_i\}$ и пресликавање

$$\phi : \mathcal{A}(\{i,j\};Y) \to \mathcal{A}(\mathcal{F},\mathcal{F}';Y), \quad \underline{\omega} \mapsto \underline{\omega}'$$

које замењује слово U_i у $\underline{\omega}$ са Y_∞. Нека је $\underline{\omega}$ инверзна слика речи $\underline{\omega}'$ при овом пресликавању. Како је

$$\underline{\omega} \in \mathcal{A}_n(\{i,j\};Y) \subset \mathcal{A}_n(\mathcal{F},\mathcal{F};Y)$$

где $\mathcal{A}_n(\mathcal{F},\mathcal{F};Y)$ садржи сва слова, U_i може да се појави на местима која су највише M удаљена од U_j. Закључујемо да за свако $\underline{\omega}'$ постоји највише $2M$ речи $\underline{\omega}$ таквих да је $\phi(\underline{\omega}) = \underline{\omega}'$. Следи да је

$$\sharp\mathcal{A}_n(\{i,j\};Y) \leqslant 2M\sharp\mathcal{A}_n(\mathcal{F},\mathcal{F}';Y).$$

Исто као у првом случају закључујемо да је

$$h_{pol}(\mathcal{F}';Y) = h_{pol}(\mathcal{F};Y).$$

На основу добијене једнакости можемо извести потребан закључак. Наиме за сваку тачку x_i можемо изабрати опадајући низ околина $\{U_i^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ које чине базу околина тачке x_i, уз услов да је $U_i^0 = U_i$. Како скупови $U_1,\ldots,U_k$ нису међусобно сингуларни ни овако дефинисани скупови U_i^n такође нису међусобно сингуларни. За свако n можемо направити описану конструкцију и редуковати фамилију $\mathcal{F}$ на неку фамилију $\mathcal{F}'$ тако да је $h_{pol}(\mathcal{F}';Y) = h_{pol}(\mathcal{F};Y)$. Како скупови $\{U_1^n,\ldots,U_k^n\}$ имаји исту кардиналност за свако n можемо издвојити подниз $U_i^{n_k}$, такав да је редуковани скуп $\mathcal{F}'$ који одговара поднизу $U_i^{n_k}$ из конструкције коју смо дали једнак, односно не зависи од n_k. Дакле добили смо да је

$$h_{pol}(\mathcal{S};Y) = h_{pol}(\mathcal{S}';Y),$$

где је $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{x_0\}$ и $x_0 \in U_0 \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$.

□

Последица 93. *Полиномијална ентропија $h_{pol}(f;Y)$ је ограничена максималном кардиналношћу сингуларног скупа садржаног у $\overline{Y}$.*

Доказ. Образложење ове последице следи из тога што полиномијална ентропија коначног скупа $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset X \setminus \mathrm{NW}(f)$ не може бити већа од његове кардиналности. Наиме, можемо изабрати лутајуће околине $Y_i \ni x_i$ тако да свако слово Y_i учествује у кодирању произвољне орбите $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ највише једанпут. Примећујемо да има мање од $n(n-1)\cdots(n-k+1) \leqslant n^k$ кодирања. Следи закључак

$$h_{pol}^{loc}(\{x_1, \ldots, x_k\}; Y) \leqslant h_{pol}^{loc}(\{Y_1, \ldots, Y_k\}; Y)$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \sharp \mathcal{A}_n(\{Y_1, \ldots, Y_k\}; Y)}{\log n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n^k}{\log n} = k.$$

□

Напомена 94. *Претходно показано може бити јако корисно при израчунавању полиномијалне ентропије за непрекидна пресликавања на компактном простору са коначно много нелутајућих тачака. У том случају све нелутајуће тачке морају бити периодичне. Како их је коначно много мора постојати $m \in \mathbb{N}$ такав да су све нелутајуће тачке и фиксне тачке пресликавања f^m. Како важи да је $h_{pol}(f) = h_{pol}(f^m)$ можемо сматрати да посматрамо систем са коначно много фиксних тачака, док су све остале тачке лутајуће. Међутим, тада за свако x важи да низ $f^n(x)$ конвергира ка некој фиксној тачки на основу Тврђења 15.*

Следи да цео простор можемо поделити на

$$X = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Fix}(f)} W^s(p),$$

где је

$$W^s(p) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p \right\}.$$

Знамо да су скупови $W^s(p)$ инваријантни и садрже само једну фиксну, односно нелутајућу, тачку па на основу Тврђења 82 следи да је

$$h_{pol}(f) = \max\left\{ h_{pol}(f; W^s(p)) \;\middle|\; p \in \mathrm{Fix}(f) \right\}.$$

Напомена 95. *Приликом израчунавања полиномијалне ентропије као супремума локалних полиномијалних ентропија сингуларних скупова битно је да супремум узимамо по сингуларним подскуповима затворења $\overline{Y}$. Наиме могуће је да се сингуларни скупови кључни за полиномијалну ентропију нагомилавају близу границе скупа Y, па у случају кад граница не припада скупу можемо добити погрешан закључак. Ово је јасније из примера који следи.*

Пример 96. Посматраћемо у овом примеру најпре пресликавање задато са

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = \left(2x, \frac{y}{2}\right).$$

Простор који посматрамо биће $X = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, тј. компактификација равни тачком бесконачно уз природно продужење пресликавања са $f(\infty) = \infty$. Овако продужено пресликавање је и даље непрекидно. Није тешко уочити да се скуп нелутајућих тачака састоји само из две тачке

$$NW(f) = \{0, \infty\}.$$

Како бисмо применили претходно доказано поделићемо простор X на инваријантне подскупове са једном нелутајућом тачком

$$Y_1 = X \setminus \left\{(0,y) \;\middle|\; y \in \mathbb{R}\right\} \quad Y_2 = X \setminus Y_1.$$

У скупу Y_2, односно y оси, не постоје две лутајуће међусобно сингуларне тачке. Наиме ако посматрамо лутајуће околине две овакве тачке, све тачке из тих околина ће тежити тачки $(0,0)$, па ће све трајекторије које полазе из околине прве тачке после коначног времена напустити и околину друге тачке. На основу тога што у скупу Y_2 не постије две међусобно сингуларне тачке следи да полиномијална ентропија овог скупа није већа од 1. Са друге стране знамо да скуп са лутајућом тачком мора имати полиномијалну ентропију бар 1, па важи

$$h_{pol}\left(f; Y_2\right) = 1.$$

Посматрајмо сада скуп Y_1. Ни у овом скупу не постоје две међусобно сингуларне тачке, из сличних разлога као и у првом скупу.

Међутим, са друге стране уочимо два диска

$$B_1 = \left(\left(x_1, 0\right), r_1\right), \qquad B_2 = \left(\left(0, y_1\right), r_2\right)$$

која не садрже координатни почетак и довољно су малог дијаметра да буду лутајући скупови. Тада важи да је

$$h_{pol}\left(\left\{B_1, B_2\right\}; Y_1\right) = 2.$$

Заиста, приметимо да су све речи из $\mathcal{A}_n\left(\left\{B_1, B_2\right\}; Y_1\right)$ облика

$$\left(Y_\infty, \ldots, Y_\infty, B_1, Y_\infty, \ldots, Y_\infty, B_2, Y_\infty, \ldots, Y_\infty\right),$$

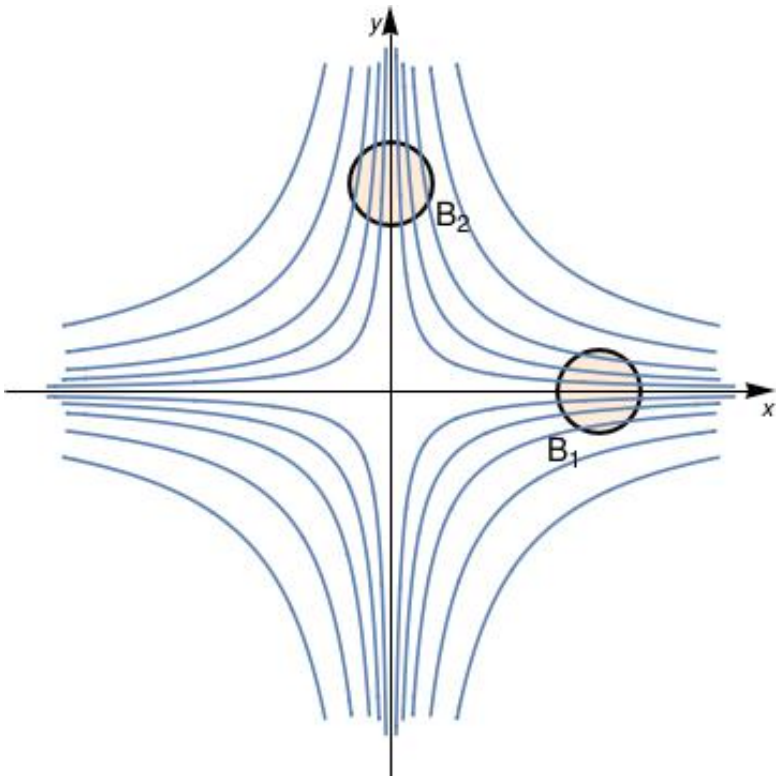
где је $Y_\infty = \left(X \setminus \mathrm{NW}\left(f\right)\right) \setminus \left(B_1 \cup B_2\right)$.

Из овога можемо закључити да овај скуп може имати највише $n\left(n-1\right)$ елемената што нам даје да је 2 горња граница полиномијалне ентропије. Можемо уочити и да постоји $R \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n \geqslant R$ важи да је $f^n\left(B_1\right) \cap B_2 \neq \emptyset$. Дакле скуп $\mathcal{A}_n\left(\left\{B_1, B_2\right\}; Y_1\right)$ садржи све речи чији средњи део садржи $k \geqslant R-1$ елемената. Сада можемо проценити

$$\mathcal{A}_n\left(\left\{B_1, B_2\right\}; Y_1\right) \geqslant \sum_{k=R-1}^{n-2} \left(n-k-1\right) \sim \frac{1}{2}n^2.$$

Ово нам даје доње ограничење и можемо закључити да је полиномијална ентропија једнака 2. На Слици 1.4 дата је илустрација овог примера.

На први поглед смо добили контрадикцију, јер је супремум полиномијалних ентропија по скуповима Y_1 и Y_2 једнак 1, па би и полиномијална ентропија целог простора била 1, а са друге стране нашли смо подскуп полиномијалне ентропије 2, па из монотоности и полиномијална ентропија целог простора мора бити већа од 2. Међутим, нисмо добро закључили о полиномијалној ентропији скупа Y_1, јер нисмо рачунали супремум броја међусобно сингуларних тачака у $\overline{Y}_1$. Није тешко уочити да ако узмемо две тачке из $\overline{Y}_1$, такве да једна припада x оси а друга y оси, оне јесу међусобно сингуларне, односно имамо две међусобно сингуларне тачке. Следи закључак да је полиномијална ентропија целог простора једнака 2.



Слика 1.4: Пример

1.6 Логистичко пресликавање

Логистичко пресликавање је пример прилично једноставног дискретног, нелинеарног динамичког система чија динамика може бити прилично компликована. Проучавање овог дискретног система је постало актуелно након рада биолога May-а ([24]) 1976. године, коме се ово пресликавање појавило природно у склопу проучавања популације инсеката. Логистичко пресликавање се популарно назива и популациона једначина и показало се да има доста примена у разним практичним истраживањима. Прва примена је била у процени раста или опадања биолошке популације и процени могућности преживљавања различитих еколошких система.

Иако је проучавано већ дуго, логистичко пресликавање је и даље веома актуелно. Објављени су многи радови у којима се испитују и рачунају циклови, тачке бифуркација и њихови полиноми, као и везе са теоријом хаоса. Логистичко пресликавање и његове модификоване верзије још увек имају значајне примене како у биологији, тако и у другим наукама, рецимо енкрипцији, рачунарству (генерисање псеудо-случајних бројева), економији.

Посебна занимљивост овог пресликавања је што динамика јако зависи од вредности параметра и што се за различите вредности параметра добијају системи који показују драстично различите особине, почевши од система који колапсирају у једну тачку до потпуно хаотичних система који имају велику сензитивност од почетних услова.

Логистичко пресликавање је задато као пресликавање интервала $[0,1]$ на себе једначином

$$f(x) = \mu x\,(1-x)$$

где је μ реалан параметар. Није тешко проверити да ово пресликавање достиже максималну вредност $\mu/4$, те је добро дефинисано као пресликавање из $[0,1]$ у $[0,1]$ за вредности параметра $\mu \in [0,4]$.

Потражимо прво фиксне тачке логистичког пресликавања, односно решења једначине $f\,(x) = x$. Добијамо две тачке 0 и $1 - 1/\mu$. Друга тачка се налази у интервалу $[0,1]$ за вредности параметра веће од 1. Ово је илустровано и на Слици 1.5.

Дакле, у случају када је $\mu \leqslant 1$ систем има само једну фиксну тачку 0. Како је

$$f'\,(x) = \mu\,(1-2x)$$

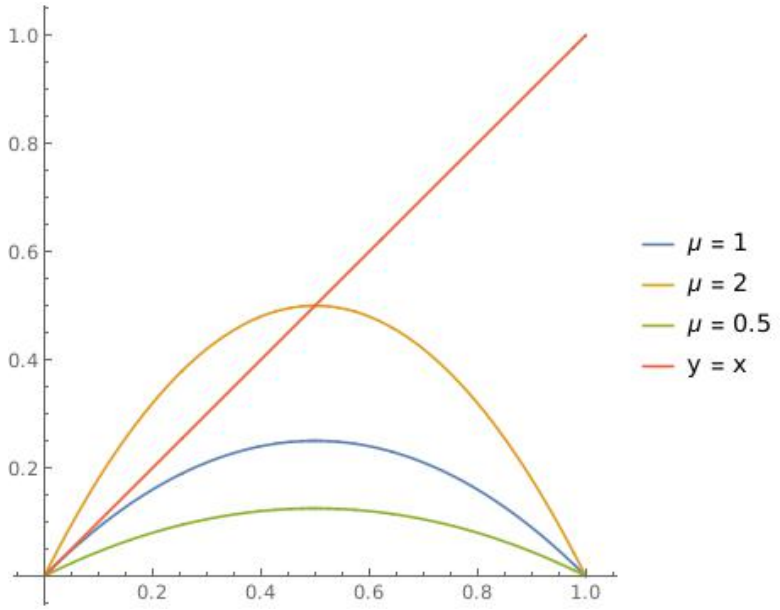
за овакве вредности параметра тачка 0 ће бити атрактор. Тада за свако $x \in [0,1]$ важи да је

$$\lim_{n\to\infty} f^n\,(x) = 0.$$

У овом случају систем показује прилично једноставну динамику, све тачке ће тежити ка јединој фиксној тачки 0. Биолошки говорећи популација изумире без обзира на почетно стање.

Под бифуркацијом се подразумева појава да мале промене вредности параметра изазивају драстичне разлике у понашању динамичког система. Један од типова бифуркације је и бифуркација дуплирања периода. Код логистичког пресликавања за специјалне вредности параметра долази до овог специфичног феномена.

Прва бифуркација код логистичког пресликавања (која није типа дуплирања периода) се појављује за вредност параметра $\mu = 1$. Наиме, када вредност параметра порасте изнад један систем почиње да показује другачије понашање. Поред тачке 0 појављује се још једна фиксна тачка пресликавања $1 - \frac{1}{\mu}$. Тачка 0 сада постаје репелер док је нова



Слика 1.5: Фиксне тачке логистичког пресликавања

фиксна тачка атрактор за вредности параметра мање од 3. Може се показати да ће за све тачке различите од нуле важити да је

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

Динамика система је и даље врло једноставна, али ипак значајно различита од оне за вредности параметра μ мање од 1. Популација у овом случају преживљава и приближава се стабилној ненула вредности.

Када вредност параметра достигне 3 долази до нове бифуркације, систем опет мења понашање и појављује се орбита са периодом 2. Наиме, сада се поред фиксних тачака пресликавања f појављују и фиксне тачке пресликавања f^2. Другим речима решавањем једначине

$$f^2(x) = \mu^2 x(1-x)\left(1 - \mu x + \mu x^2\right) = x$$

добијамо поред 0 и $1 - \frac{1}{\mu}$ још два решења

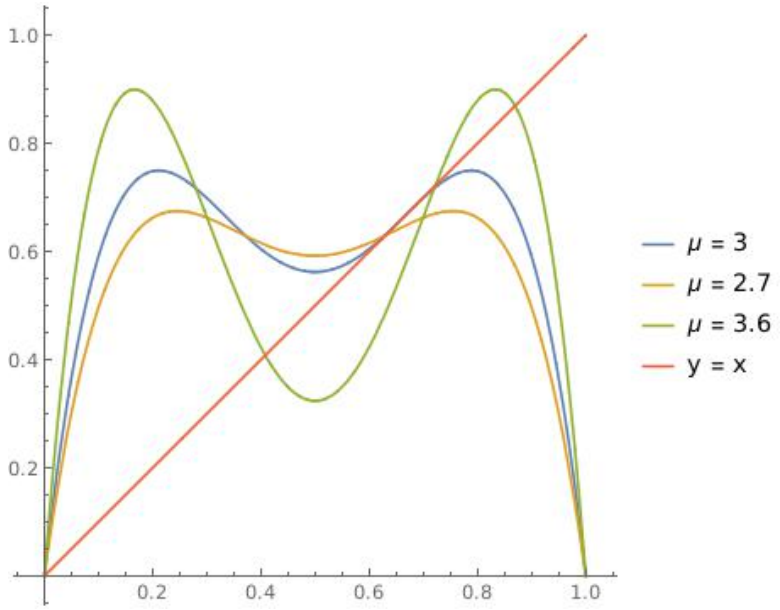
$$p = \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}, \quad q = \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}$$

која постоје за вредности параметра веће од 3. Очигледно је $f(p) = q$ и $f(q) = p$ односно добили смо 2-периодичну орбиту. Ова појава је илустрована на Слици 1.6. Може се уочити да се повећавањем вредности параметра кад он достигне вредност 3 долази до ситуације када је права $y = x$ тангента на пресликавање f^2. Даљим повећавањем вредности параметра из ове тангентне тачке настаје 2-периодична орбита.

Можемо потражити извод пресликавања f^2 у тачкама нове орбите периода 2

$$\left(f^2(p)\right)' = \left(f^2(q)\right)' = f'(p)\, f'(q) = -\mu^2 + 2\mu + 4.$$

Закључујемо да су обе тачке исте природе, тј. обе су атрактори или су обе репелери. За вредност параметра $\mu = 3$ важи да је $\left(f^2(p)\right)' = 1$ и ова вредност опада растом вредности



Слика 1.6: Појављивање орбите периода 2

параметра да би стигла до вредности -1 за вредност параметра $\mu = 1 + \sqrt{6}$. Дакле ове тачке су атрактори пресликавања f^2 , односно добили смо атрактујућу 2-периодичну орбиту пресликавања f за вредноси параметра

$$\mu \in \left(3, 1 + \sqrt{6}\right).$$

У исто време тачка $1 - \frac{1}{\mu}$ је постала репелер. Једноставно се може показати да све нефиксне тачке конвергирају ка периодичној орбити.

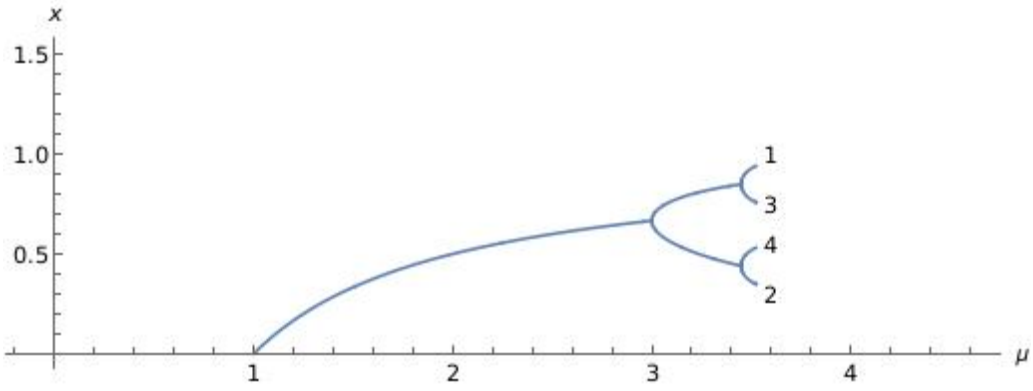
Овај тип бифуркације као у тачки 3 надаље се понавља растом параметра. Кад параметар достигне вредност $1 + \sqrt{6}$ долази до нове бифуркације дуплирања периода, рађа се нова 4-периодична орбита која је атрактујућа, док 2-периодична орбита постаје репелер. Тако се појављују нове и нове 2^n-периодичне орбите. Другим речима, када вредност параметра достигне вредност μ_n појављује се периодична орбита периода 2^{n+1} и периодична орбита са тим периодом постоји за свако $\mu > \mu_n$. Из претходног разматрања је $\mu_1 = 3$ и $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$. Растојање између тачака бифуркација се смањује и појавиће се периодичне орбите чији је период 2^n за сваки природан број n док вредност параметра не достигне вредност $\mu = \mu_\infty = 3,5699\ldots$. На Слици 1.7 је приказан почетак овог процеса појављивања периодичних орбита. Представљена је зависност периодичних атрактујућих тачака од вредности параметра.

Занимљива је чињеница да количник

$$\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$$

тежи ка универзалној Фајгенбаумовој констати која приближно износи 4.6692. За вредности параметра изнад μ_∞ систем постаје хаотичан.

Постојање Фајгенбаумове константе је показано коришћењем рачунарских метода седамдесетих година двадесетог века. Почетком осамдесетих година дат је и математички доказ постојања ове константе, која се назива и универзалном. Ова константа је



Слика 1.7: Бифуркације

једнака за сва S унимодална пресликавања која ћемо дефинисати на страни 70. Доказ се заснива на теорији ренормализације која користи технике комплексне анализе и хиперболичке геометрије. Излагање ове теорије, као и докази тврђења се могу пронаћи у [25]. Теорија ренормализације примећује чињеницу да централни део графика пресликавања f и пресликавања f^2 изгледају слично, с тим да је график f^2 рескалиран и окренут на доле. Слично се дешава и са графицима f^4, f^8 и надаље. Тако добијамо све мање и мање регионе са сличним понашањем система. Може се дефинисати

$$\mathcal{R}(f) = L \circ f^2 \circ L^{-1}$$

где је L линеарно пресликавање које рескалира реалну праву и помера координатни почетак. Вишеструким понављањем $\mathcal{R}$ f се пресликава све ближе функцији F која задовољава функционалну једначину

$$F = L \circ F^2 \circ L^{-1}.$$

Показује се да постоји јединствен линеаран функционал L и холоморфна функција степена 2 који задовољавају ову једначину. На основу тога се показује да се у близини тачака у којима се дуплира период функције понашају слично и доказује се постојање универзалне константе.

Тополошка ентропија логистичког пресликавања је једнака нули за вредности параметра које су мање од μ_∞. Наиме, може се показати да је за ове вредности параметра скуп нелутајућих тачака коначан; изузев тачака са периодичних орбита и фиксних тачака којих има коначно много, све остале тачке теже јединој атрактујућој орбити и самим тим су лутајуће (Тврђење 114). Како је тополошка ентропија концентрисана на нелутајућим тачкама (Тврђење 35) следи претходни закључак. Показано је да је тополошка ентропија растућа функција параметра ([10]) и да је позитивна за вредности параметра μ које су веће од μ_∞. График зависности тополошке ентропије од параметра и вредности за конкретну вредност параметра се још увек израчунавају нумеричким методама и предмет су разних истраживања.

Глава 2

Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе

У овом поглављу нам је циљ да конструкцију из поглавља 1.5 прилагодимо и искористимо за процену полиномијалне ентропије Морсових градијентних система. Дакле, морамо модификовати нотацију како бисмо је применили на токове и покушати у оваквим случајевима да одредимо кардиналност сингуларног скупа.

Дефиниција 97. Нека је дат ток $\phi_t : X \to X$. За скупове $U_1, U_2, \ldots, U_k \subset X \setminus NW(\phi_t)$ кажемо да су *међусобно сингуларни* у односу на ток ϕ_t ако за свако $R > 0$ постоји x и времена $t_1, t_2, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ таква да је

$$\phi_{t_i}(x) \in U_i, \quad |t_i - t_j| > R, \quad \text{за } i \neq j.$$

За тачке $x_1, x_2, \ldots, x_k$ кажемо да су *међусобно сингуларне* ако су све фамилије одговарајућих околина међусобно сингуларне.

У случају када је $f = \phi_1$ ако су тачке $x_1, x_2, \ldots, x_k$ међусобно сингуларне за хомеоморфизам f оне су очигледно међусобно сингуларне и за ток ϕ_t. Са друге стране, ако можемо пронаћи реалне бројеве t_k који испуњавају услове Дефиниције 97 није очигледно да можемо наћи природне бројеве који испуњавају аналогну Дефиницију 91 за хомеоморфизам $f = \phi_1$. Није јасно да ли тачке које су међусобно сингуларне за ток ϕ_t морају бити међусобно сингуларне за хомеоморфизам ϕ_1. Међутим, истим поступком као у Тврђењу 92, доказује се и следеће тврђење.

Тврђење 98. *Нека је $f = \phi_1$. Тада за инваријантан скуп Y важи да је*

$$h_{pol}(f; Y) = \sup \left\{ h_{pol}^{loc}(\mathcal{S}; Y) \right\}$$

при чему супремум узимамо по свим $\mathcal{S} \subset \overline{Y}$ који су међусобно сингуларни у односу на ток ϕ_t.

Имајући на уму претходно, посматрајмо затворену n-димензиону многострукост M и Морсову функцију $F : M \to \mathbb{R}$. Нека је g Риманова метрика таква да је пар (F, g) Морс-Смејлов, односно задовољени су услови Дефиниције 73. Нека је f пресликавање у тренутку $t = 1$ негативног градијентног система

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -\nabla_g F(\phi_t(x)), \quad \phi_0 = Id, \quad f = \phi_1.$$

Подсетимо се да са $\mathrm{Crit}\,(F)$ означавамо скуп свих критичних тачака глатке функције F, а са $\mathrm{ind}_F\,(p)$ Морсов индекс критичне тачке p. Дефинишимо сада

$$n\,(F) = \sharp\left\{k \in \{0,1,\ldots,n\} \;\middle|\; \exists p \in \mathrm{Crit}\,(F)\,,\ \mathrm{ind}_F\,(p) = k\right\}.$$

Како је M компактна многострукост функција на њој мора достизати минимум и максимум, па знамо да је

$$2 \leqslant n\,(F) \leqslant n+1.$$

При овим условима важе следеће теореме.

Теорема 99. *Нека је $n(F)$ кардиналност скупа Морсових индекса функције F. Претпоставимо да је за свака два различита Морсова индекса $k_1 > k_2$ и за све тачке p_j, $\mathrm{ind}_F\,(p_j) = k_j$ скуп $\mathcal{M}\,(p_1,p_2)$ непразан. Тада је максимална кардиналност сингуларног скупа негативног Морсовог градијентног система већа од $n(F)-1$.*

Доказ. Подсетимо се структуре модулског простора

$$\mathcal{M}\,(p,q) = W^u\,(p) \cap W^s\,(q) = \left\{ \gamma\,(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \gamma \in C^\infty\,(\mathbb{R},M) \\ \dot{\gamma}\,(t) = -\bigtriangledown F\,(\gamma\,(t)) \\ \gamma\,(-\infty) = p,\ \gamma\,(+\infty) = q \end{array} \right\}.$$

Како смо претпоставили да је (F,g) Морс-Смејлов пар за свако $p,q \in \mathrm{Crit}\,(F)$ за које је $\mathrm{ind}_F\,(p) > \mathrm{ind}_F\,(q)$ скуп $\mathcal{M}\,(p,q) = W^u\,(p) \cap W^s\,(q)$ је или празан скуп или глатка многострукост димензије $\mathrm{ind}_F\,(p) - \mathrm{ind}_F\,(q)$. Њена тополошка граница је облика

$$\partial\mathcal{M}\,(p,q) = \bigcup \mathcal{M}\,(p,r_1) \times \mathcal{M}\,(r_1,r_2) \times \cdots \times \mathcal{M}\,(r_m,q)$$

где је, на основу претпоставке да је $\mathcal{M}\,(r_i,r_j) \neq \emptyset$ за $\mathrm{ind}_F(r_i) > \mathrm{ind}_F(r_j)$, унија узета по свим $r_i \in \mathrm{Crit}\,(F)$ таквим да је

$$\mathrm{ind}_F\,(p) > \mathrm{ind}_F\,(r_1) > \cdots > \mathrm{ind}_F\,(r_m) > \mathrm{ind}_F\,(q)\,.$$

Приметимо да у случају када је разлика $\mathrm{ind}_F\,(p) - \mathrm{ind}_F\,(q)$ једнака један $\mathcal{M}\,(p,q)$ се састоји од коначно много изолованих трајекторија.

За свако $j = 1,\ldots,m+1$ и за сваку $\gamma^j \in \mathcal{M}\,(r_{j-1},r_j)$ постоји низ $s_n^j \to +\infty$ и низ трајекторија $\gamma_n \in \mathcal{M}\,(p,q)$ тако да

$$\tilde{\gamma}_n^j \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} \gamma^j$$

где је

$$\tilde{\gamma}_n^j\,(t) = \gamma_n\left(t + s_n^j\right).$$

Подразумевамо да је $r_0 = p$ и $r_{m+1} = q$. Ознака $\overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows}$ подразумева равномерну конвергенцију заједно са свим изводима на сваком компактном подскупу скупа $\mathbb{R}$.

Ограничимо сада одоздо број сингуларних тачака

Означимо, ради једноставности, $L = n\,(F) - 1$. Нека је $p_L \in \mathrm{Crit}\,(F)$ апсолутни минимум, а $p_0 \in \mathrm{Crit}\,(F)$ апсолутни максимум F. Можемо изабрати $L-1$ критичну тачку $p_1,p_2,\ldots,p_{L-1}$ такву да важи

$$n = \mathrm{ind}_F\,(p_0) > \mathrm{ind}_F\,(p_1) > \cdots > \mathrm{ind}_F\,(p_L) = 0.$$

Постојање оваквог избора тачака је обезбеђено из дефиниције $n(F)$.

Нека је $\gamma^j \in \mathcal{M}(p_{j-1}, p_j)$ за $j = 1, 2, \ldots, L$ и $q_j = \gamma^j(0)$. Показаћемо да су тачке $q_1, q_2, \ldots, q_L$ међусобно сингуларне.

Нека је $\gamma_n \in \mathcal{M}(p_0, p_L)$, $s_n^j \in \mathbb{R}$ и $\tilde{\gamma}_n^j$ дефинисано као у претходном излагању. Како $\tilde{\gamma}_n^j(t) \overset{C^\infty_{loc}}{\rightrightarrows} \gamma^j$ то специјално значи да $\gamma_n(s_n^j) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma^j(0) = q_j$. Из овога следи да за све одговарајуће околине $U_1, U_2, \ldots, U_L$ тачака $q_1, q_2, \ldots, q_L$ и за довољно велико n и $x = \gamma_n(0)$ важи $\phi_{s_n^j}(x) \in U_j$. Такође знамо да су сви низови $\{|s_n^j - s_n^i|\}_{n\in\mathbb{N}}$ неограничени за свако $i, j = 1, 2, \ldots, L$, $i \neq j$. Наиме, ако постоји ограничење рецимо

$$\left|s_n^1 - s_n^2\right| \leqslant R$$

тада постоји подниз $s_n^1 - s_n^2$ (можемо га исто означити) који конвергира ка неком $s_0 \in \mathbb{R}$. Како $\tilde{\gamma}_n^1$ равномерно конвергира на $[-R, R] \ni s_n^2 - s_n^1$ добијамо

$$\tilde{\gamma}_n^1\left(s_n^2 - s_n^1\right) \to \gamma^1(s_0).$$

Али, са друге стране имамо и да

$$\tilde{\gamma}_n^1\left(s_n^2 - s_n^1\right) = \gamma_n\left(s_n^2 - s_n^1 + s_n^1\right) = \gamma_n\left(s_n^2\right) = \tilde{\gamma}_n^2(0) \to \gamma^2(0).$$

Међутим ово није могуће јер су $\gamma^1(\mathbb{R})$ и $\gamma^2(\mathbb{R})$ дисјунктни.

Овим поступком смо пронашли $L = n(F) - 1$ међусобно сингуларних тачака.

□

Теорема 100. *Нека је $n(F)$ кардиналност скупа Морсових индекса функције F. Тада је максимална кардиналност сингуларног скупа негативног Морсовог градијентног система мања од $n(F) - 1$.*

Доказ. Нека су $r_1, r_2, \ldots, r_m \in M \setminus NW(f)$ произвољних m међусобно сингуларних тачака. Приметимо најпре да постоји $q \in \mathrm{Crit}(F)$ тако да је $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} \subseteq \overline{W^s(q)}$. Наиме, на основу дефиниције међусобно сингуларних тачака постоји трајекторија која пролази кроз сваку од m кугли $B(r_j, 1/n)$. Трајекторија која сече све кугле припада стабилној многострукости неке критичне тачке, тј. за свако n све кугле $B(r_j, 1/n)$ секу $W^s(p)$ за неко $p \in \mathrm{Crit}(F)$. Како имамо коначно много критичних тачака можемо пронаћи подниз n_k скупа природних бројева и $q \in \mathrm{Crit}(F)$ тако да све кугле $B(r_j, 1/n_k)$ секу $W^s(q)$.

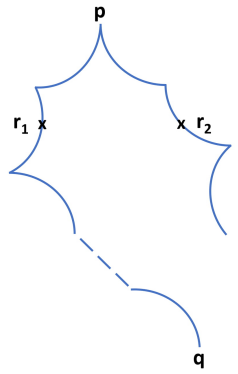
Истим поступком могли бисмо показати да мора постојати критична тачка p таква да је $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} \subseteq \overline{W^u(p)}$. Међутим, и ако покажемо да је $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} \subseteq \overline{\mathcal{M}(p, q)}$, из тога не бисмо добили довољно добро ограничење, односно из тога не следи да је број сингуларних тачака мањи од $n(F) - 1$. Оваква ситуација је илустрована на Слици 2.1. Доказ који дајемо не дозвољава ситуацију као на слици и показује да морају постојати изломљене трајекторије које се надовезују и на којима се налазе међусобно сингуларне тачке са различитим вредностима функције F на њима.

Циљ нам је да докажемо да у случају кад постоји m међусобно сингуларних тачака $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \overline{W^s(q)}$ мора да важи да је $m \leqslant n(F) - 1$. Претпоставићемо и да је $m \geqslant 2$ (за $m = 1$ тврђење тривијално важи).

Доказаћемо прво да је $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} \subset \partial(W^s(q))$. Претпоставимо, супротно тврђењу, да постоји

$$r \in \{r_1, r_2, \ldots, r_m\} \cap \mathrm{int}(W^s(q)).$$

Размотримо сада две могућности:



Слика 2.1: Пример $\mathcal{M}(p,q)$

(а) постоји друго $r' \in \{r_1, r_2, \ldots, r_m\} \cap \overline{W^s(q)}$ такво да r и r' нису на истој орбити ϕ_t,

(б) постоји друго $r' \in \{r_1, r_2, \ldots, r_m\} \cap \overline{W^s(q)}$ такво да r и r' јесу на истој орбити ϕ_t.

Размотримо прво могућност да важи (а).

Показаћемо да постоје околине $U \ni r$ и $U' \ni r'$ такве да је $\phi_t(U) \cap U' = \emptyset$ за свако $t \in \mathbb{R}$. Ово је контрадикција са тим да су тачке међусобно сингуларне.

На основу Морсове леме знамо да постоји околина V тачке q и локалне координате $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ у V тако да негативни градијентни ток има облик

$$\phi_t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(e^{-\lambda_1 t}x_1, e^{-\lambda_2 t}x_2, \ldots, e^{-\lambda_n t}x_n\right)$$

где су λ_i сопствене вредности Хесијана функције F у тачки q. Метрика у којој ток има дати облик не мора бити једнака полазној метрици. Негативно градијентно векторско поље за које ток има локално дати облик назива се локално тривијално. Векторска поља X_1 и X_2 се називају тополошки еквивалентним ако постоји тополошка конјугација између одговарајућих токова која пресликава орбите поља X_1 у орбите поља X_2 и чува им смер. У раду [32] је доказана следећа теорема.

Теорема 101. *Нека је M глатка компактна многострукост и F Морс-Смејлова функција на њој. Тада постоји тополошка еквиваленција између негативног градијентног поља функције F и векторског поља Y које је локално тривијално.*

Поље Y из претходне теореме је и градијентно поље функције F, али у некој другој метрици.

Теорема 101 нам омогућава да можемо радити у Морсовим координатама без обзира на промену метрике.

У нашем случају за $\mathrm{ind}_F(q) = k$ имамо

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k < 0 \qquad \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n > 0.$$

Можемо закључити да пресликавање f у Морсовој карти може бити задано са

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_k x_k, \beta_{k+1} x_{k+1}, \ldots, \beta_n x_n)$$

где су $\alpha_i > 1$, а $\beta_i < 1$. Постоји околина $U \ni r$ таква да је $\phi_t(U \cap W^s(q)) \subseteq V$ за $t \geqslant t_0$. Изаберимо околину $U' \ni r'$ такву да је $U' \cap V = \emptyset$. Како је интервал $[0, t_0]$ компактан,

смањујући по потреби U и U', важи да је $\phi_t(U) \cap U' \cap W^s(q) = \emptyset$ за свако $t \in [0, t_0]$. Претходно нам даје да и $\phi_t(U) \cap U' \cap W^s(q) = \emptyset$ за $t \geqslant 0$. Исти поступак можемо поновити и за $t \leqslant 0$, тако да имамо

$$\phi_t(U) \cap U' \cap W^s(q) = \emptyset \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Претпоставимо да $\phi_t(U) \cap U' \neq \emptyset$ за неко $t \in \mathbb{R}$, односно да постоји $x \in \phi_t(U) \cap U'$. Како је $W^s(q)$ подмногострукост у M на основу теореме о цевастој околини постоји отворен скуп $W \ni x$, $W \subset \phi^t(U) \cap U'$, $W \cong (W \cap W^s(q)) \times (-1,1)^k$. Али тада важи и да је

$$\pi(x) \in \phi_t(U) \cap U' \cap W^s(q)$$

где је π природна пројекција

$$\pi : W \cong (W \cap W^s(q)) \times (-1,1)^k \to W \cap W^s(q).$$

Размотримо сада могућност (б).

Претпоставимо да је $F(r) > F(r')$. Тада за довољно мале околине $U \ni r$ и $U' \ni r'$ важи да је за довољно велико l

$$\phi_l(U) \cap U' = \emptyset.$$

Из овога можемо закључити да ако постоји орбита неке тачке x таква да је

$$\phi_s(x) \in U, \quad \phi_t(x) \in U'$$

мора бити $|s - t| \leqslant l$, па следи да тачке r и r' нису међусобно сингуларне, односно скуп $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ није сингуларан.

Дакле закључили смо да је $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} \subset \partial(W^s(q))$.

Како је

$$W^s(q) = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Crit}(F)} W^s(q) \cap W^u(p) = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Crit}(F)} \mathcal{M}(p,q)$$

можемо закључити да је

$$\partial(W^s(q)) \subseteq \bigsqcup_{p \in \mathrm{Crit}(F)} \partial\mathcal{M}(p,q).$$

Знамо да се граница скупа $\mathcal{M}(p,q)$ састоји од уније скупова истог типа, односно скупова $\mathcal{M}(p_i, q_k)$, где су $p_i, q_k \in \mathrm{Crit}(F)$. Претпоставимо да је

$$r_1 \in \mathcal{M}(p_1, q_1), \qquad r_2 \in \mathcal{M}(p_2, q_2).$$

Тада важи да је $\mathrm{ind}_F(q_1) \geqslant \mathrm{ind}_F(p_2)$ или $\mathrm{ind}_F(q_2) \geqslant \mathrm{ind}_F(p_1)$. Наиме, претпоставимо да важи

$$\mathrm{ind}_F(q_1) \leqslant \mathrm{ind}_F(q_2) < \mathrm{ind}_F(p_1) \leqslant \mathrm{ind}_F(p_2).$$

Остале могућности се могу размотрити аналогно.

Нека је γ_n трајекторија која пресеца обе кугле $B_1^n = B(r_1, 1/n)$ и $B_2^n = B(r_2, 1/n)$. Тада γ_n припада скупу $\mathcal{M}(u_n, u_n)$ за неке критичне тачке u_n и v_n. Али како скупова $\mathcal{M}(u_n, v_n)$ има коначно много постоји подниз, за који можемо користити исту ознаку γ_n, који припада само једном $\mathcal{M}(u, v)$.

Две међусобно сингуларне тачке не могу припадати истом модулском простору, па бар један од парова (p_1, q_1) и (p_2, q_2) мора бити различит од (u, v). Претпоставимо да је $(p_1, q_1) \neq (u, v)$.

Знамо да свака функција строго опада дуж сваке негативне градијентне криве која није константна. Како γ_n сече обе кугле B_1^n и B_2^n за свако n видимо да је

$$F(u) > F(r_j) > F(v) \quad \text{за } j = 1, 2.$$

Поново имамо две могућности:

(i) низ γ_n равномерно конвергира на свим компактним подскуповима $\mathbb{R}$ ка $\gamma \in \mathcal{M}(u, v)$,

(ii) низ γ_n конвергира у смислу Теореме 79 ка некој изломљеној трајекторији.

У случају (i) орбита $\gamma(\mathbb{R})$ не може сећи B_1^n за довољно велико n.

Заиста, како је $\gamma(-\infty) = u$ и $\gamma(+\infty) = v$ за произвољно изабрано и довољно мало ε постоји довољно велико R да је

$$F(\gamma(R)) < F(r_1) - \varepsilon \qquad F(\gamma(-R)) > F(r_1) + \varepsilon.$$

За довољно велико n важи

$$F(\gamma_n(R)) < F(r_1) - \varepsilon \qquad F(\gamma_n(-R)) > F(r_1) + \varepsilon.$$

Како је интервал $[-R, R]$ компактан и $\gamma([-R, R])$ је компактан скуп и његово растојање до тачке r_1 је строго позитивно. За довољно велико n дијаметар кугле B_1^n је мањи од овог растојања па за довољно велико n је $\gamma([-R, R]) \cap B_1^n = \emptyset$. За довољно велико n важиће и да је $\gamma_n([-R, R]) \cap B_1^n = \emptyset$.

За $t > R$ имамо

$$F(\gamma_n(t)) < F(\gamma_n(R)) < F(r_1) - \varepsilon$$

што је могуће једино ако $\gamma_n(R, +\infty)$ не сече B_1^n за довољно велико n, јер знамо да је за довољно велико n дијаметар кугле B_1^n довољно мали па важи да је

$$F(B_1^n) \subseteq [R(r_1) - \varepsilon, +\infty).$$

Исти поступак можемо применити на $t < -R$.

Размотримо сада случај (ii). За довољно велико n, γ_n не сече бар једну од B_j^n. Наиме, приметимо да је за довољно велико n слика γ_n близу неке изломљене трајекторије $\tilde{\gamma} = (\gamma^1, \ldots, \gamma^m)$. Знамо да је

$$\operatorname{ind}_F\left(\gamma^j(+\infty)\right) < \operatorname{ind}_F\left(\gamma^j(-\infty)\right).$$

Нека од трајекторија у $\tilde{\gamma}$ може бити трајекторија кроз r_1, али тада све остале трајекторије не могу бити трајекторије кроз r_2. Дакле, γ_n не може пресећи $B(r_2, 1/n)$ за довољно велико n. Слично као у случају (ii) се доказују детаљи. Можемо констатовати да сингуларне тачке r_j имају редослед

$$r_j \in \mathcal{M}(p_j, q_j) \Longrightarrow \operatorname{ind}_F(q_j) < \operatorname{ind}_F(p_j) \leqslant \operatorname{ind}_F(q_{j-1}) < \operatorname{ind}_F(p_{j-1}).$$

На основу претходног можемо закључити да постоји највише $n(F) - 1$ сингуларних тачака.

□

На основу Теореме 99 и Теореме 100 можемо израчунати полиномијалну ентропију за неке Морсове градијентне системе.

Теорема 102. *Нека је M затворена n-димензиона многострукост и $F : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Нека је $f = \phi_1$ где је ϕ_t ток негативног Морсовог градијентног система*

$$\frac{d}{dt}\phi_t t\left(x\right) = -\bigtriangledown_g F\left(\phi_t\left(x\right)\right), \quad \phi_0 = Id.$$

Ако F има критичне тачке индекса само 0 и n тада је $h_{pol}\left(f\right) = 1$. ($M$ је у овом случају унија сфера $\mathbb{S}^n$.)

Ако F има критичне тачке индекса $0, k$ и n тада је $h_{pol}\left(f\right) = 2$. (На основу Поенкареове дуалности у овом случају је n парно и $k = n/2$)

Доказ. Пре свега, покажимо да је резултат из Тврђења 99 задовољен у овом случају, без претпоставке да важи: постоји $\gamma \in \mathcal{M}\left(p, q\right)$ за свако $p, q \in \mathrm{Crit}\left(F\right)$, $\mathrm{ind}_F\left(p\right) > \mathrm{ind}_F\left(q\right)$.

1. У случају када постоје само критичне тачке индекса 0 и n на основу Тврђења 99 постоји највише једна сингуларна тачка (за горње ограничење није нам био потребан додатни услов да је скуп $\mathcal{M}\left(p_1, p_2\right)$ непразан). Али како увек постоји једна сингуларна тачка следи закључак да у овом случају имамо тачно једну сингуларну тачку.

2. У случају када постоје критичне тачке индекса 0, $n/2$ и n потребна нам је Хартман-Гробманова теорема.

   Теорема 103. *Претпоставимо да је p хиперболички еквилибријум динамичког система $\frac{d\phi_t}{dt} = X\left(\phi_t\right)$ (тј. $X\left(p\right) = 0$ и $dX\left(p\right)$ је хиперболичка матрица, односно не постоји сопствена вредност чији је реални део једнак нули). Тада важи да је динамички систем ϕ_t локално тополошки конјугован линеарном динамичком систему $\frac{d\psi_t}{dt} = A\psi_t$ где је $A = dX\left(p\right)$, односно постоји околина $U \ni p$ и хомеоморфизам $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ тако да је $\varphi \circ \phi_t \circ \varphi^{-1} = \psi_t$.*

   Доказ претходне теореме се може пронаћи у [31].

   Нека је $p_0 \in \mathrm{Crit}\left(F\right)$, $\mathrm{ind}_F\left(p_0\right) = n/2$. Тада постоје трајекторије система ψ_t, задатог са $\frac{d\psi_t}{dt} = A\psi_t$ где је $A = dX\left(p\right)$, које теже ка p_0 када $t \to +\infty$, али и оне које теже ка p_0 када $t \to -\infty$ (тај систем се експлицитно решава у $\mathbb{R}^n$). Како су системи локално, односно у околини критичне тачке p_0, тополошки конјуговани можемо закључити да постоје трајекторије и система ϕ_t које теже ка p_0 када $t \to +\infty$, и оне које теже ка p_0 када $t \to -\infty$. Али индекс већи од $n/2$ је n, а мањи је 0. Следи да за сваку тачку

   $$p_0 \in \mathrm{Crit}\left(F\right), \quad \mathrm{ind}_F\left(p_0\right) = \frac{n}{2}$$

   постоје тачке

   $$p_1, p_2 \in \mathrm{Crit}\left(F\right), \quad \mathrm{ind}_F\left(p_1\right) = n, \quad \mathrm{ind}_F\left(p_2\right) = 0$$

   тако да важи

   $$\mathcal{M}\left(p_1, p_0\right) \neq \emptyset, \quad \mathcal{M}\left(p_0, p_2\right) \neq \emptyset, \quad \mathcal{M}\left(p_1, p_2\right) \neq \emptyset.$$

   У доказу Тврђења 99 можемо тачке апсолутног максимума и минимума заменити тачкама p_1 и p_2 редом.

Подсетимо се да смо у Тврђењу 67 показали да су све нелутајуће тачке пресликавања f заправо фиксне тачке тог пресликавања, односно критичне тачке функције F

$$\mathrm{NW}(f) = \mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Crit}(F).$$

На основу Тврђења 72 имамо поделу многострукости M

$$M = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Crit}(F)} W^s(p).$$

За свако $p \in \mathrm{Crit}(F)$ стабилна многострукост је f инваријантан скуп са тачно једном фиксном, односно нелутајућом тачком, па можемо применити технике које смо увели у поглављу 1.5, па знамо да полиномијалну ентропију можемо да израчунамо као

$$h_{pol}(f) = \max\left\{h_{pol}(f; W^s(p)) \;\middle|\; p \in \mathrm{Crit}(F)\right\}.$$

Ако Морсова функција F има критичне тачке само индекса 0 и n на основу Тврђења 99 можемо закључити да постоји само једна сингуларна тачка, па је $h_{pol}(f) \leqslant 1$ на основу Последице 93. Са друге стране како знамо да постоји лутајућа тачка можемо закључити да је $h_{pol}(f) \geqslant 1$ на основу Тврђења 45. Тиме је први део теореме доказан.

Претпоставимо сада да постоји критична тачка p_0 Морсовог индекса $n/2$. Нека је тачка p_1 тачка апсолутног максимума и p_2 тачка апсолутног минимума F. Изаберимо две криве $\gamma_1 \in \mathcal{M}(p_1, p_0)$ и $\gamma_2 \in \mathcal{M}(p_0, p_2)$. Морсову околину критичне тачке p_0 означимо са V. Изаберимо сада $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ такве да је

$$q_1 = \gamma_1(t_1), \; q_2 = \gamma_2(t_2) \in V.$$

Хоћемо да покажемо да је

$$h_{pol}^{loc}(\{q_1, q_2\}; W^s(p_2)) = 2.$$

У Морсовом координатном систему стабилна и нестабилна многострукост су дате са

$$W^s(p_1) = \{(0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)\}$$

$$W^u(p_1) = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)\},$$

па имамо да је

$$q_1 = (0, \ldots, 0, b_{k+1}, \ldots, b_n), \quad q_2 = (a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0).$$

Нека су $Y_1 \subset V$ и $Y_2 \subset V$ две лутајуће кугле са центром у q_1, односно q_2. Из записа пресликавања f у Морсовим координатама видимо да постоји n_0 такво да за све $n \geqslant n_0$ важи да је $f^n(Y_1) \cap Y_2 \neq \emptyset$. Можемо закључити да за свако $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и свако $n \geqslant n_0$ постоји x тако да је $f^m(x) \in Y_1$ и $f^{m+n}(x) \in Y_2$. Ово заправо значи да, ако означимо са Y_∞ комплемент уније $Y_1 \cup Y_2$, за свако $n \geqslant n_0$ постоји кодирање облика

$$\left(\underbrace{Y_\infty, \ldots, Y_\infty}_{m}, Y_1, \underbrace{Y_\infty, \ldots, Y_\infty}_{n}, Y_2, Y_\infty, \ldots, Y_\infty\right).$$

Можемо видети да је

$$\sharp\mathcal{A}_n(\{Y_1, Y_2\}; W^s(p_1)) = \sum_{m=0}^{n-n_0-1} (n - n_0 - m) \sim \frac{1}{2}n^2.$$

Одавде следи да је $h_{pol}\left(\{Y_1, Y_2\}; W^s\left(p_1\right)\right) \geqslant 2$, а како су Y_1 и Y_2 произвољне кугле са центрима у q_1 и q_2 садржане у V следи да је и

$$h_{pol}^{loc}\left(\{q_1, q_2\}; W^s\left(p_2\right)\right) \geqslant 2.$$

Са друге стране на основу Тврђења 99 и Последице 93 знамо да важи да је и

$$h_{pol}^{loc}\left(\{q_1, q_2\}; W^s\left(p_2\right)\right) \leqslant 2.$$

Овим смо завршили доказ ове теореме.

□

Напомена 104. *Претходна теорема нам даје вредност полиномијалне ентропије за једну класу Морсових градијентних система. Та класа садржи многе значајне системе као што су све криве и површи у свим димензијама са функцијом висине, затворене површи сем сфере димезије 2 и $\mathbb{C}P^2$ са Ботовом савршеном Морсовом функцијом...*

За многострукости ниских димензија, на основу претходног, имамо прецизније резултате. Наиме важе следеће последице:

Последица 105. *Ако је M глатка затворена површ, $F : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција и ако је f пресликавање у тренутку $t = 1$ негативног Морсовог градијентног система тада важи*

- *Ако F има критичну тачку индекса један онда је $h_{pol}(f) = 2$.*
- *Ако F нема критичну тачку индекса један онда је $h_{pol}(f) = 1$.*

Слично претходном у случају Морсовог градијентног система на једнодимензионој многострукости, односно кругу, добијамо резултат који је већ познат из [19].

Последица 106. *Ако је M глатка затворена једнодимензиона многострукост (унија кружница $\mathbb{S}^1$), $F : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција и ако је f пресликавање у тренутку $t = 1$ негативног Морсовог градијентног система онда је $h_{pol}(f) = 1$.*

Глава 3

Полиномијална ентропија за логистичко пресликавање

Тополошка ентропија логистичког пресликавања је доста проучавана. Показали смо да је тополошка ентропија концентрисана на скуп нелутајућих тачака у Тврђењу 35, а овај скуп је за логистичко пресликавање и вредности параметра мање од μ_∞ коначан, те се лако добија да је у том случају тополошка ентропија нула. Познати су резултати да је тополошка ентропија за вредности параметра веће од μ_∞ растућа функција параметра ([10]). Подаци о тополошкој ентропији се добијају углавном нумеричким методама. Међутим системи за вредности параметра мање од 1 и већег од те вредности се суштински разликују, иако их тополошка ентропија не разликује. У првом случају цео систем колапсира у 0, док се у другом случају то не дешава. Ако посматрамо систем као биолошку популацију то би значило да у првом случају популација нестаје, док у другом преживљава. (Ово би могло бити значајно у применама. На пример, актуелно, ако бисмо посматрали популацију вируса, проценом вредности полиномијалне ентропије могли бисмо предвидети будућу популацију вируса. Ако бисмо имали могућност смањивања вредности параметра испод 1 то би довело до изумирања вируса.)

У даљем тексту показаћемо да је полиномијална ентропија једнака нули за вредности параметра мање од 1 и већа од 1 у супротном случају. За вредности параметра веће од μ_∞ тополошка ентропија је позитивна, па је полиномијална тривијално бесконачна. Другим речима доказаћемо следећу теорему:

Теорема 107. *За логистичко пресликавање $f(x) = \mu x(1-x)$ важи:*

$$\mu \in [0,1] \Longrightarrow h_{pol}(f) = 0$$

$$\mu \in (1, \mu_\infty) \Longrightarrow h_{pol}(f) = 1$$

$$\mu \in (\mu_\infty, 4] \Longrightarrow h_{pol}(f) = \infty.$$

У доказивању резултата послужиће нам наредне две леме, које су интересантне и као независна тврђења, па их доказујемо у општијем случају произвољног метричког простора. Тврђење Леме 108 важи и у случају израчунавања тополошке ентропије.

Лема 108. *Нека је (X,d) компактан метрички простор и $f : X \to X$ непрекидно пресликавање такво да је $f(X) \subseteq A$. Тада је $h_{pol}(f) = h_{pol}(f; A)$.*

Доказ. Како је $A \subseteq X$ инваријантан скуп неједнакост

$$h_{pol}(f) \geqslant h_{pol}(f; A)$$

следи из монотоности полиномијалне ентропије.

Фиксирајмо сада $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ и нека су дати скупови

$$U_1, U_2, \ldots, U_k$$

дијаметра мањег од ε у метрици d_n који припадају покривачу простора X и у чијој унији је садржан скуп A и важи да је

$$\operatorname{cov}(n, \varepsilon; A) = k.$$

Можемо из покривача простора X скуповима дијаметра мањег од ε у метрици d издвојити скупове

$$V_1, V_2, \ldots, V_l$$

који покривају $X \setminus A$.

Дефинишимо сада

$$\mathcal{C} = \left\{ V_j \cap f^{-1}(U_i) \;\middle|\; j = 1, \ldots, l,\ i = 1, \ldots, k \right\} \cup \{U_1, \ldots, U_k\}.$$

Приметимо да је кардиналност $\mathcal{C}$ ограничена са

$$\sharp\, \mathcal{C} \leqslant (l+1)\, k.$$

Скупови $V_j \cap f^{-1}(U_i)$ су дијаметра мањег од ε у метрици d_n. Наиме за две тачке $x, y \in V_j \cap f^{-1}(U_i)$ важи да је

$$d(x, y) < \varepsilon,$$

јер се налазе у скупу V_j. За ове тачке важи и да је $f(x), f(y) \in U_i$ па како је скуп U_i дијаметра мањег од ε у метрици d_n следи

$$d\left(f^m(f(x)), f^m((y))\right) < \varepsilon, \quad m = 0, \ldots, n-1,$$

односно

$$d\left(f^m(x), f^m(y)\right) < \varepsilon, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Како је $\mathcal{C}$ покривање простора X и на основу ограничења кардиналости $\mathcal{C}$ добијамо неједнакост

$$\operatorname{cov}(n, \varepsilon; X) \leqslant (l+1) \operatorname{cov}(n, \varepsilon; A).$$

Константа l не зависи од n па пуштањем граничне вредности добијамо

$$h_{pol}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \operatorname{cov}(n, \varepsilon; X)}{\log n} \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{\log\left((l+1) \operatorname{cov}(n, \varepsilon; A)\right)}{\log n} = h_{pol}(f; A).$$

□

Како је слика логистичког пресликавања интервал $[0, \mu/4]$ имамо последицу претходне леме за логистичко пресликавање.

Последица 109. *Полиномијалну ентропију логистичког пресликавања можемо израчунати као*

$$h_{pol}(f) = h_{pol}\left(f; \left[0, \frac{\mu}{4}\right]\right).$$

Лема 110. *Нека је (X, d) компактан метрички простор, $f : X \to X$ непрекидно пресликавање и $\gamma \in X$ такво да за свако $x \in X$ важи да је $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \gamma$. Тада је $h_{pol}(f) = 0$.*

Доказ. Фиксирајмо $\varepsilon > 0$.

Како је X компактан простор и $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \gamma$ можемо закључити да постоји n_0 тако да је за свако $n \geqslant n_0$ и свако $x \in X$

$$f^n(x) \in B\left(\gamma, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Како је X компактан он је такође компактан и у топологији која је генерисана метриком d_{n_0}. Компактан простор има коначну $(n_0, \varepsilon; f)$-мрежу. За $n \geqslant n_0$ и за свако $x, y \in X$ важи да је $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$, па је та мрежа такође $(n, \varepsilon; f)$-мрежа за свако $n \geqslant n_0$. Закључујемо да је $\operatorname{span}(n, \varepsilon)$ ограничен коначном кардиналношћу $(n_0, \varepsilon; f)$-мреже. Дакле добили смо

$$h_{pol}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{span}(n, \varepsilon)}{\log n} = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{span}(n_0, \varepsilon)}{\log n} = 0.$$

□

Тврђење 111. *За вредности параметра $\mu \in [0, 1]$ код логистичког пресликавања важи да је $h_{pol}(f) = 0$.*

Доказ. За произвољно $x \in [0, 1]$ и дате вредности параметра μ лако се види да важи

$$\mu x(1 - x) \leqslant x, \text{ тј. } \quad f(x) \leqslant x.$$

Можемо закључити да је низ $f^n(x)$ опадајући, и како је ограничен мора конвергирати. За овако изабране вредности μ једина фиксна тачка пресликавања f је 0, те следи да за све x у $[0, 1]$ важи

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = 0.$$

Закључак тврђења сада следи из Леме 110. □

Како бисмо израчунали полиномијалну ентропију за веће вредности параметра искористићемо неке познате резултате из теорије унимодалних пресликавања. Унимодална пресликавања су можда и највише проучавана пресликавања у теорији једнодимензионих динамичких система и дефинишу се као непрекидна пресликавања $f : [0, 1] \to [0, 1]$ која имају јединствен максимум у $(0, 1)$ и важи $f(0) = f(1) = 0$. Иако су на први поглед веома једноставна на примерима ових пресликавања су дефинисани и проучени многи појмови тополошких динамичких система.

Шварцов извод пресликавања класе C^3 је дефинисан са

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2, \text{ ако је } f'(x) \neq 0,$$

односно

$$Sf(x) = -\infty, \text{ ако је } f'(x) = 0.$$

Специјалну класу унимодалних пресликавања чине S унимодална пресликавања која се дефинишу као унимодална пресликавања са додатном особином да постоји Шварцов извод пресликавања и да је за свако x

$$Sf(x) < 0.$$

Овако дефинисана пресликавања су доста проучавана и познате су бројне њихове особине. Приметимо најпре да је логистичко пресликавање S унимодално. Наиме, за логистичко пресликавање можемо израчунати Шварцов извод

$$Sf(x) = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0, \quad x \neq \frac{1}{2},$$

односно

$$Sf\left(\frac{1}{2}\right) = -\infty.$$

Периодична орбита се назива стабилном ако постоји околина те орбите таква да итерације сваке тачке из те околине теже ка тој периодичној орбити.

Доказ следећег тврђења се може пронаћи у [35].

Тврђење 112. *За S унимодално пресликавање f важи да има највише једну стабилну периодичну орбиту у $(0,1)$. Ако таква орбита постоји она је ω-гранични скуп једине критичне тачке (тачке у којој се извод анулира).*

Доказ следећег тврђења које ћемо користити је дат у [9].

Тврђење 113. *За S унимодално пресликавање f скуп тачака које не теже стабилној периодичној орбити има Лебегову меру 0.*

Проучавањем логистичког пресликавања добијени су прецизнији резултати који се могу видети у [13] и које можемо формулисати као у следећа два тврђења.

Тврђење 114. *За вредности параметра $\mu < \mu_\infty$ код логистичког пресликавања орбита сваке тачке конвергира ка фиксној тачки или периодичној орбити којих има коначно много. За вредности параметра $\mu \in (\mu_n, \mu_{n+1}]$ постоје периодичне орбите периода 2^m за свако $m \leqslant n+1$ и то су једине периодичне орбите.*

Тврђење 115. *Логистичко пресликавање има тачно једну стабилну периодичну орбиту.*

У Тврђењу 45 видели смо да полиномијална ентропија хомеоморфизама при којима постоје лутајуће тачке није мања од један. Очекивано је да сличан резултат важи за шире класе пресликавања које поседују лутајуће тачке или тачке са сличним особинама. Међутим не важи сличан закључак за сва логистичка пресликавања. На пример у Тврђењу 111 тачка $x = 1$ је лутајућа, а полиномијална ентропија је нула. Међутим за логистичка пресликавања при вредности параметра $1 < \mu \leqslant 4$ важи исти закључак, који се добија малим прилагођавањем доказа за хомеоморфизме.

Лема 116. *За вредности параметра $\mu \in (1,4]$ код логистичког пресликавања важи да је*

$$h_{pol}(f) \geqslant 1.$$

Доказ. На основу Тврђења 113 за скоро свако x важи да $f^n(x)$ конвергира ка стабилној периодичној орбити

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}.$$

У довољно малој околини нуле можемо изабрати $x \notin S$ тако да $f^n(x)$ конвергира ка орбити S.

За $x < \min\{1/2, 1 - 1/\mu\}$ постоји $x_1 < x$ тако да је $f(x_1) = x$. Истим закључивањем постоји $x_2 < x_1$ тако да је $f(x_2) = x_1$. Оваквим индуктивним поступком добијамо $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Дефинишимо сада скуп

$$O(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \cup \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

Очигледно је

$$\overline{O(x)} \subset O(x) \cup S \cup \{0\}.$$

Како је $\overline{O(x)}$ инваријантан скуп знамо да је

$$h_{pol}(f) \geqslant h_{pol}\left(f; \overline{O(x)}\right),$$

па је довољно доказати

$$h_{pol}\left(f; \overline{O(x)}\right) \geqslant 1.$$

Нека је

$$\varepsilon_0 = \min_{s_j \in S}\{d(x, s_j)\}.$$

Како важи да $f^n(x) \to S$ постоји n_0 тако да је

$$d(x, f^n(x)) > \frac{\varepsilon_0}{2}, n \geqslant n_0.$$

За $n < n_0$ знамо да је

$$f^n(x) \neq x$$

јер x није периодична тачка, па постоји

$$\min_{1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1} d(f^n(x), x) = \varepsilon_1.$$

Изаберимо сада

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_1\right\}.$$

За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $d(f^n(x), x) > \varepsilon$.

Фиксирајмо сада $n \in \mathbb{N}$.

Нека су $k, l \in \mathbb{N}$ такви да је $1 \leqslant l < k \leqslant n - 1$. Тада је

$$d_n(x_k, x_l) \geqslant d(f^k(x_k), f^k(x_l)) = d(x, f^{k-l}(x)) > \varepsilon.$$

На основу претходног можемо закључити да су тачке $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(n, \varepsilon; f)$-раздвојене, па је

$$\operatorname{sep}\left(n, \varepsilon; \overline{O(x)}\right) \geqslant n$$

и као последица тога

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log \operatorname{sep}\left(n, \varepsilon; \overline{O(x)}\right)}{\log n} \geqslant 1,$$

односно

$$h_{pol}\left(f; \overline{O(x)}\right) \geqslant 1.$$

□

Тврђење 117. *За вредности параметра $\mu \in (1, \mu_\infty)$ код логистичког пресликавања важи да је $h_{pol}(f) = 1$.*

Доказ. Знамо да у овом случају полиномијална ентропија не може бити мања од 1 на основу Леме 116.

На основу Тврђења 114 све периодичне орбите имају период 2^n за неко n и има их коначно много па постоји m тако да су све тачке периодичних орбита фиксне тачке пресликавања f^m. На основу Тврђења 44 знамо да је $h_{pol}(f) = h_{pol}(f^m)$ па можемо израчунати полиномијалну ентропију пресликавања f^m. На основу Тврђења 114 свака орбита при пресликавању f конвергира ка фиксној тачки или некој периодичној орбити. Орбите пресликавања f^m су поднизови орбита пресликавања f, па из непрекидности пресликавања f^m следи да орбите свих тачака при овом пресликавању конвергирају фиксним тачкама. На основу претходног можемо закључити да су све тачке које нису фиксне лутајуће тачке пресликавања f^m. Из Тврђења 112 и Тврђења 115 тачно једна периодична орбита је стабилна и тачке те орбите су атрактори за f^m.

Можемо поделити интервал

$$[0,1] = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant l} W^s(p_i),$$

подразумевајући да су p_i фиксне тачке пресликавања f^m, где је

$$W^s(p_i) = \left\{x \in [0,1] \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} (f^m)^n(x) = p_i\right\}.$$

Како су $W^s(p_i)$ инваријантни скупови, добијамо

$$h_{pol}(f) = h_{pol}(f^m) = \max\left\{h_{pol}\left(f^m; \overline{W^s(p_i)}\right) \;\middle|\; p_i \text{ је фиксна тачка пресликавања } f^m\right\}.$$

Ако лутајућа тачка x конвергира ка некој фиксној тачки тада постоји околина $U \ni x$ таква да свака тачка из U конвергира ка истој фиксној тачки. Заиста, скуп лутајућих тачака је отворен па за довољно малу околину U све тачке конвергирају ка некој фиксној тачки. Како фиксних тачака има коначно оне су на позитивној удаљености, те из непрекидности пресликавања f^m тачке из околине U не могу тежити различитим фиксним тачкама. На основу тога у повезаним компонентама скупа лутајућих тачака важи да све теже истој фиксној тачки, односно за свако $x, y \in (p_i, p_j)$, где су p_i и p_j суседне фиксне тачке пресликавања f^m, важи да је

$$\lim_{n\to\infty} (f^m)^n(x) = \lim_{n\to\infty} (f^m)^n(y).$$

Можемо закључити да су лутајуће тачке у унутрашњости $W^s(p_i)$.

Сваки од скупова $W^s(p_i)$ је инваријантан и садржи тачно једну нелутајућу тачку, па можемо на њих применити Последицу 93. Дакле, знамо да је полиномијална ентропија оваквих скупова ограничена бројем сингуларних тачака у њиховом затворењу. Међутим, ми сингуларне тачке тражимо само у лутајућем скупу, односно унутрашњости $W^s(p_i)$. У унутрашњости ових скупова не постоје две међусобно сингуларне тачке. Претпоставимо супротно, односно да постоје две међусобно сингуларне тачке x_1, x_2. Изаберимо сада околине $U_1 \ni x_1$ и $U_2 \ni x_2$ такве да за свако $x \in U_j$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = p_i$. Тада постоји n_0 такво да за свако $n \geqslant n_0$ важи

$$f^n(x) \notin U_1, \quad f^n(x) \notin U_2.$$

То значи да ако је $f^{n_1}(x) \in U_1$, $f^{n_2}(x) \in U_2$ тада разлика $|n_1 - n_2|$ мора бити ограничена. Дакле x_1 и x_2 нису међусобно сингуларне тачке, односно

$$h_{pol}(f) \leqslant 1.$$

□

Тврђење 118. *За вредности параметра $\mu \in (\mu_\infty, 4]$ код логистичког пресликавања важи да је $h_{pol}(f) = \infty$.*

Доказ. За дате вредности параметра познато је да је тополошка ентропија позитивна ([10]), па следи закључак о бесконачности полиномијалне ентропије. □

Занимљиво питање које је преостало је израчунавање полиномијалне ентропије за вредност параметра $\mu = \mu_\infty$. Тополошка ентропија јесте нула, па полиномијална може бити коначна. Међутим, број периодичних орбита није коначан, па нам резоновања која смо претходно применили нису дала резултат.

Глава 4

Даља размишљања

Полиномијална ентропија је још увек релативно нов појам, који није довољно проучен и многе особине су још увек непознате или нејасне. То омогућава теме за разне правце даљих истраживања. У овој глави дајемо идеје које су се појавиле као логичан наставак наших истраживања.

- Појављују се системи на којима се не види како бисмо могли применити методе које смо за сада открили за израчунавање полиномијалне ентропије. Метод кодирања има смисла само у лутајућој динамици, а полиномијална ентропија може бити позитивна и код система без лутајућих тачака. Било би занимљиво видети да ли се у таквим случајевима може наћи метод за израчунавање различит од израчунавања по дефиницији. Питање је и какви могу бити системи без лутајућих тачака и код којих је тополошка ентропија једнака нули а полиномијална ентропија позитивна.

  Можемо доћи и у ситуацију да релативно лако израчунамо полиномијалну ентропију а да нам резултати не дају нове информације и класификације система. Рецимо, могуће је да се и полиномијална ентропија анулира и резултат је незанимљив.

  Пример 119. Једна од идеја би могла бити и да се израчуна полиномијална ентропија за Мебијусове трансформације Риманове сфере. Како су и тополошка и полиномијална ентропија инваријанте тополошке конјугације довољно би било израчунати их на представницима класа. Позната је тополошка класификација Мебијусових трансформација.

  Тврђење 120. *Свака неидентичка Мебијусова трансформација Риманове сфере $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ је тополошки конјугована једној од следеће три*

  1. $z \mapsto 2z$,
  2. $z \mapsto \mu z,\ |\mu| = 1$,
  3. $z \mapsto z + 1$.

  Доказ овог тврђења се може видети у [33]. Ротација је изометрија па се и тополошка и полиномијална ентропија у том случају анулирају.

  Није тешко видети да је код транслације и хомотетије број нелутајућих тачака коначан. Како, на основу Тврђења 35, можемо тополошку ентропију израчунати на скупу нелутајућих тачака закључујемо да је $h_{top}(f) = 0$.

Међутим у овом случају није тешко израчунати ни полиномијалну ентропију. Ова два пресликавања јесу прилагођена кодирању које смо увели у поглављу 1.5. У оба случаја не постоје две међусобно сингуларне тачке. Како постоје лутајуће тачке закључујемо да је $h_{pol}(f) = 1$.

У претходном примеру нисмо добили значајне резултате у разликовању динамичких система. И поред тога мислимо да овај правац истраживања има потенцијала за даљи рад. Један логичан наставак нашег рада би могло бити проучавање ентропије Морс-Смејлових система.

Ако је M глатка компактна многострукост и $f : M \to M$ дифеоморфизам за инваријантан скуп Λ кажемо да је хиперболички ако постоје $\lambda \in (0,1)$ и $c > 0$ такви да за свако $p \in \Lambda$ важи:

$$T_pM = E_p^s \oplus E_p^u,$$

где су E_p^s и E_p^u потпростори простора T_pM за које важи да је:

$$df_p\left(E_p^s\right) = E_{f(p)}^s, \quad df_p\left(E_p^u\right) = E_{f(p)}^u$$

и за свако $n \geqslant 0$ је

$$\| df_p^n(v) \| \leqslant c\lambda^n \| v \|, \ v \in E_p^s$$
$$\| df^{-n}p(v) \| \leqslant c\lambda^n \| v \|, \ v \in E_p^u.$$

За периодичну орбиту периода n може се показати да је хиперболички скуп ако и само ако у свакој тачки орбите df^n нема сопствену вредност чија је апсолутна вредност једнака један.

Дефиниција 121. Дифеоморфизам $f : M \to M$ глатке многострукости M се назива *Морс-Смејловим* уколико постоји коначан број периодичних орбита (укључујући и фиксне тачке) $p_1, \ldots, p_k$ које су све хиперболичке, унија стабилних, односно нестабилних многострукости периодичних орбита даје цео простор

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(p_i), \qquad M = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(p_i)$$

и пресеци нестабилних и стабилних многострукости су трансверзални

$$W^s(p_i) \pitchfork W^u(p_j).$$

Иако у овом случају немамо коначан број нелутајућих тачака већ периодичних орбита природно је питање да ли је могуће пронаћи прилагођавање кодирања за овакав случај уз неке модификације, рецимо да се гледа f^k.

- Друга линија размишљања би била о томе шта нам одређена вредност полиномијалне ентропије говори о динамичком систему, да ли из тога можемо извући неке даље закључке о понашању система или дела система. Такође било би занимљиво знати да ли одређена карактеристика динамичког система обезбеђује да полиномијална ентропија узима одређене вредности. У том правцу Тврђење 45 каже да постојање лутајуће тачке имплицира да полиномијална ентропија није мања од један.

Посебно би било занимљиво видети шта о динамичком систему говори анулирање полиномијалне ентропије. У Тврђењу 46 видели смо да је полиномијална ентропија еквинепрекидног хомеоморфизма једнака нули. У раду [2] постављено је питање да ли важи и обрнуто тврђење да анулирање полиномијалне ентропије обезбеђује еквинепрекидност. Дат је и пример да то не мора бити случај и постављена је хипотеза да тврђење важи на повезаним просторима. Дорадом примера из тог рада показаћемо да и уз тај додатни услов тврђење не мора важити.

Пример 122. Даћемо пример повезаног, компактног метричког простора и хомеоморфизма овог простора чија је полиномијална ентропија нула, а хомеоморфизам није еквинепрекидан.

Како бисмо конструисали простор дефинишимо прво скупове

$$X_k = \left\{ (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ z = e^{-k} \right\},$$

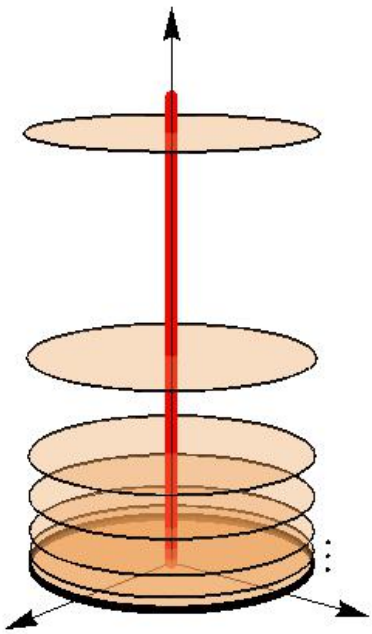
$$X_0 = \left\{ (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \right\},$$

$$Y = \left\{ (0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \leqslant z \leqslant 1 \right\}.$$

Простор који посматрамо биће

$$X = Y \cup X_0 \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$$

са метриком d наслеђеном из $\mathbb{R}^3$. Овај простор је приказан на Слици 4.1.



Слика 4.1: Простор X

Дефинишимо сада и пресликавање $f : X \to X$ на скуповима X_k са

$$f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z) = (\rho\cos(\varphi + z), \rho\sin(\varphi + z), z),$$

односно пресликавање је ротација за угао који је једнак висини диска. На скуповима Y и X_0 дефинишимо да је f идентитета. На појединим тачкама z-осе пресликавање је дефинисано на два начина, али се дефиниције поклапају. Како је пресликавање хомеоморфизам затворених подскупова чија унија даје цео простор можемо закључити да је овако дефинисано пресликавање хомеоморфизам целог простора.

Хомеоморфизам који смо задали није еквинепрекидан. Претпоставимо, супротно тврђењу, да дати хомеоморфизам јесте еквинепрекидан и изаберимо ε такво да је $0 < \varepsilon < 1$. За произвољно мало $\delta > 0$ уочимо тачку $A\,(1,0,0)$ и тачку $B\left(1,0,e^{-l}\right)$ уз услов да је $e^{-l} < \delta$. Тада је $d\,(A,B) < \delta$. Међутим, тада постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да је

$$\frac{\pi}{2} \leqslant n\, e^{-l} \leqslant \frac{3\pi}{2}$$

односно

$$d_n\,(A,B) = d\,(A, f^n\,(B)) \geqslant \sqrt{2} > \varepsilon$$

што је контрадикција са тим да је f еквинепрекидан хомеоморфизам.

Остало је још да покажемо да је полиномијална ентропија овако задатог хомеоморфизма једнака нули. Фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Конструисаћемо сада $(n,\varepsilon;f)$-мрежу за простор X. За дато n изаберимо минимално $l \in \mathbb{N}$ такво да је

$$n\, e^{-l} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поделимо сада простор X на три инваријантна подскупа

$$\widetilde{X}_1 = \bigcup_{k \leqslant l} X_k, \quad \widetilde{X}_2 = X_0 \cup \bigcup_{k \geqslant l} X_k, \quad Y.$$

Сваки од дискова X_k је компактан па постоји $(0,\varepsilon;f)$-мрежа M_1 коначне кардиналности, и можемо изабрати да на сваком диску имамо $(0,\varepsilon;f)$-мрежу исте кардиналности. На сваком од дискова X_k пресликавање f је изометрија па је свака $(0,\varepsilon;f)$-мрежа и $(n,\varepsilon;f)$-мрежа за свако n. Дискова у скупу $\widetilde{X}_1$, односно на висини већој од e^{-l}, има мање од $\log(4/\varepsilon) + \log n$. Дакле за скуп $\widetilde{X}_1$ можемо пронаћи $(n,\varepsilon;f)$-мрежу кардиналности $(\log(4/\varepsilon) + \log n)\,\sharp M_1$.

Посматрајмо сада подскуп $\widetilde{X}_2$. На скупу X_0 из компактности постоји $\left(0,\frac{\varepsilon}{4};f\right)$-мрежа M_2 коначне кардиналности. Ова мрежа ће бити и $(n,\varepsilon;f)$-мрежа за скуп $\widetilde{X}_2$. Наиме изаберимо тачку D са неког диска X_k, где је $k \geqslant l$. Тада је њено растојање d до скупа X_0 мање од $\varepsilon/4$, па је из неједнакости троугла растојање дате тачке до неке тачке скупа M_2 мање од $\varepsilon/2$. Али како важи да је $e^{-k} \leqslant \varepsilon/(4n)$ тачка D налази на довољно малој висини тако да важи $d\,(D, f^n\,(D)) < \varepsilon/2$. Тачке скупа M_2 су фиксне, па је на основу неједнакости троугла и растојање d_n тачке D од изабране тачке скупа M_2 мање од ε.

Скуп Y, опет из компактности, има $(0,\varepsilon;f)$-мрежу M_3 коначне кардиналности, која је и $(n,\varepsilon;f)$-мрежа, јер је f на скупу Y изометрија.

Како кардиналности скупова M_1, M_2 и M_3 као и $\log(4/\varepsilon)$ не зависе од n коначно добијамо

$$h_{pol}(f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{\log \operatorname{span}(n,\varepsilon)}{\log n}$$
$$\leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\left(\left(\log\frac{4}{\varepsilon}+\log n\right)\sharp M_1+\sharp M_2+\sharp M_3\right)}{\log n}=0.$$

Упркос Примеру 122, можда има смисла наставити истраживање у овом правцу, али уз наметање неког другог додатног услова (локална повезаност, локална полуповезаност...). Можемо приметити да су и систем из датог рада и из нашег примера дистални. Намеће се питање да ли системи са нула полиномијалном ентропијом морају бити дистални, или да ли морају бити дистални ако задовољавају још неки услов. У раду [2] је дат и пример хомеоморфизам из кога се види да дисталност не условљава да се полиномијална ентропија анулира.

Занимљиво је и питање које вредности полимијална ентропија може уопште имати. У раду [14] је показано да су могуће све вредности из интервала $[2,+\infty]$ на повезаном простору. За сада није познат одговор да ли сви бројеви из интервала $(0,2)$ могу бити вредност полиномијалне ентропије неког пресликавања. У [2] је показано само да је скуп могућих вредности полиномијалне ентропије густ у $\mathbb{R}_+$, па и у овом скупу.

Поставља се и питање у каквој су вези вредности полиномијалне ентропије и друге мере неуређености система. На пример у раду [28] је показано да глатко пресликавање које је хаотично у Ли-Јорковом смислу може имати тополошку ентропију нула.

Дефиниција 123. Непрекидно пресликавање компактног метричког простора (X,d) се назива *хаотичним у смислу Ли-Јорка* ако постоји непребројив подскуп $S\subset X$ (назван *scrambled*) са својствима да је за све $x,y\in S$ и сваку периодичну тачку $p\in X$

$$\limsup_{n\to\infty} d_n(x,y)>0,$$
$$\liminf_{n\to\infty} d_n(x,y)=0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} d_n(x,p)>0.$$

Природно се поставља питање везе Ли-Јорк хаотичности и полиномијалне ентропије. Рецимо, да ли постоји пресликавање са бесконачном ентропијом а да није Ли-Јорк хаотично? Да ли Ли-Јорк хаотичност имплицира неке вредности полиномијалне ентропије? Да ли постојање било каквог подскупа који задовољава услове дефиниције условљава неко ограничење за полиномијалну ентропију.

- Још једна класа потенцијалних проблема може бити преношење познатих резултата за тополошку ентропију у контекст полиномијалне. Тополошка ентропија је дуго проучавана и познати су многи резултати и уопштења. Није на први поглед јасно која питања треба поново поставити у новој поставци како би се добили занимљиви резултати.

  У раду [21] је показано да за полиномијалну ентропију не може важити тврђење аналогно варијационом принципу, које би повезало полиномијалну ентропију са

ентропијом у простору са мером. Природно се поставља питање да ли се може дати тврђење које повезује полиномијалну ентропију са неком другом величином ергодичке или неке друге теорије. Није јасно како би то тврђење уопште могло изгледати и у ком правцу трагати.

За тополошку ентропију Бовен је урадио и уопштење за некомпактне просторе у [7]. Свакако би било занимљиво размислити да ли увођење неког оваквог уопштења за полиномијалну ентропију има смисла и да ли доводи до нових разумевања.

Непрекидно пресликавање f на компактном метричком простору X на природан начин индукује пресликавање на простору $\mathcal{K}(X)$ свих непразних компактних подскупова X, који се назива хиперпростор. У радовима [20], [30] и [18] је проучавана тополошка ентропија на хиперпросторима и њена веза са тополошком ентропијом самог простора. Занимљиво би било проучити какве вредности може имати полиномијална ентропија на хиперпростору за неке класе пресликавања, и у каквој вези мора бити са полиномијалном ентропијом простора.

Тополошка ентропија је проучавана и на неаутономним системима, на пример у раду [17]. Природно је поставити питање могућности оваквих уопштења и у случају полиномијалне ентропије.

Поред наведених има сигурно још доста проблема који се могу поставити о полиномијалној ентропији и на чијем решавању вреди радити. На основу изложеног мислимо да смо започели проучавање теме која има доста потенцијала за даљи рад и која може донети многе занимљиве резултате са циљем бољег и потпунијег разумевања тополошких динамичких система.

Литература

[1] R.L. Adler, A.G. Konheim, and M.H. McAndrew. “Topological entropy”. In: Trans. Amer. Math. Soc. 114(2) (1965), pp. 309–319.

[2] A. Artigue, D. Carrasco-Olivera, and I. Monteverde. “Polynomial entropy and expansivity”. In: Acta Mathematica Hungarica 152 (2017), pp. 140–149.

[3] A. Banyaga and D. Hurtubise. Lectures on Morse homology. Kluwer Academic Publishers, 2004.

[4] P. Bernard and C. Labrousse. “An entropic characterization of the flat metric on the two torus”. In: Geom. Dedicata 180 (2016), pp. 187–201.

[5] R. Bowen. “Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces”. In: Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), pp. 401–414.

[6] R. Bowen. “Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms”. In: Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), pp. 377–397.

[7] R. Bowen. “Topological entropy for noncomact sets”. In: Trans. Amer. Math. Soc. 184 (1973), pp. 125–136.

[8] M. Brin and G. Stuck. Introduction to dynamical systems. Cambridge University Press, 2003.

[9] P. Collet and J.P. Eckmann. Iterated maps on the interval as dynamical systems. Birkhäuser, Boston, 1980.

[10] R. Dilão and J.M. Amigó. “Computing the topological entropy of unimodal maps”. In: International Jouranal of Bifircation and Chaos 22(6) (2012).

[11] E.I. Dinaburg. “The relation between topological entropy and metric entropy”. In: Dokl. Akad. Nauk SSSR 190(1) (1970), pp. 19–22.

[12] T.N.T. Goodman. “Relating Topological Entropy and Measure Entropy”. In: Bulletin of the London Mathematical Society 3 (1971), pp. 176–180.

[13] J. Guckenheimer, G. Oster, and A. Ipatkchi. “The dynamics of density dependent population models”. In: J. Mat. Biology 4 (1977), pp. 101–147.

[14] L. Hauseux and F. Le Roux. “Entropie polynomiale des homéomorphismes de Brouwer”. In: Annales Henri Lebesgue 2 (2019), pp. 39–57.

[15] J. Katić and M. Perić. “On the polynomial entropy for Morse gradient systems”. In: Mathematica Slovaca 69(3) (2019), pp. 611–624.

[16] A. Katok and B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Cambridge University Press, 1995.

[17] S. Kolyada and L. Snoha. “Topological entropy of nonautonomous dynamical systems”. In: Random & Computational Dynamics 4(2&3) (1996), pp. 205–233.

[18] D. Kwietniak and P. Oprocha. “Topological entropy and chaos for maps induced on hyperspaces”. In: Chaos, Solitons & Fractals 33(1) (2007), pp. 76–86.

[19] C. Labrousse. “Polynomial entropy for the circle homeomorphisms and for C^1 nonvanishing vector fields on $\mathbb{T}^2$”. arXiv:1311.0213. 2013.

[20] M. Lampart and P. Raith. “Topological entropy for set valued maps”. In: Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 73(6) (2010), pp. 1533–1537.

[21] J.P. Marco. “Dynamical complexity and symplectic integrability”. arXiv:0907.5363. 2009.

[22] J.P. Marco. “Entropy of billiard maps and a dynamical version of the Birkhoff conjecture”. In: Journal of Geometry and Physics 124 (2018), pp. 413–420.

[23] J.P. Marco. “Polynomial entropies and integrable Hamiltonian systems”. In: Regular and Chaotic Dynamics 18(6) (2013), pp. 623–655.

[24] R.M. May. “Simple mathematical models with very complicated dynamics”. In: Nature 261 (1976), pp. 459–467.

[25] W. de Melo and S. van Strien. One-dimensional dynamics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993, pp. 422–537.

[26] W.J. Merry. Dynamical systems. 2019. URL: https://www.merry.io/courses/dynamical-systems/.

[27] J. Milnor. Morse Theory. Princeton University Press, Princeton, 1963.

[28] M. Misiurewicz and J. Smítal. “Smooth chaotic maps with zero topological entropy”. In: Ergod. Th. Dynam. Sys. 8(3) (1988), pp. 421–424.

[29] A. Pellegrini. Morse Theory. 2017. URL: https://www.merry.io/students/morse-theory/.

[30] J.S. Ćanovas Peña and G.S. López. “Topological entropy for induced hyperspace maps”. In: Chaos, Solitons & Fractals 28(4) (2006), pp. 979–982.

[31] L. Perko. Differential Equations and Dynamical Systems. Springer-Verlag, 2001.

[32] L. Qin. “An application of topological equivalence to Morse thory”. In: Journal of Fixed Point Theory and Applications 23(1) (2021).

[33] T.V. Rybalkina and V.V. Sergeichuk. “Topological classification of Möbius transformations”. In: Journal of Mathematical Sience 193(5) (2013), pp. 769–774.

[34] M. Schwarz. Morse homology. Birkhäuser Verlag Basel, 1993.

[35] D. Singer. “Stable orbits and bifurcation of maps of the interval”. In: Siam J. Appl. Math. 35(2) (1978), pp. 260–267.

[36] J. Weber. “The Morse-Witten complex via dynamical sistems”. In: Expocitiones Mathematicae 24(2) (2006), pp. 127–159.

Биографија аутора

Милан Перић рођен је 22.05.1972. у Београду. Завршио је основну школу „Карађорђе” а затим Једанаесту београдску гимназију. Затим је 1997. завршио Вишу електротехничку школу у Београду. Математички факултет у Београду је уписао 2007. и завршио 2011. са просечом оценом 9,62 на смеру Теоријска математика и примене. Исте 2011. уписао је мастер студије на Математичком факултету у Београду, модул Теоријска математика и примене, и положио све испите са просечном оценом 10. Мастер рад *Симплектоморфизми и флукс-хипотеза* је одбранио 2012. под вођством ментора др Јелене Катић. Докторске студије на Математичком факултету у Београду, модул Теоријска математика и примене, уписао је 2012. и положио све испите предвиђене програмом са просечном оценом 9,88. Од 2011. је био запослен на Математичком факултету у Београду, најпре у звању сарадника у настави, а затим и асистента за научну област Математичка анализа.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Милан Перић

број индекса *2008/2012*

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе
и логистичко пресликавање

- *р*езултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 17.05.2021.

Милан Перић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милан Перић

Број индекса 2008/2012

Студијски програм Математика

Наслов рада Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе и логистичко пресликавање

Ментор др Јелена Катић

Потписани/а Милан Перић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 17.05.2021.

Милан Перић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Полиномијална ентропија за Морсове градијентне системе

и логистичко пресликавање

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 17.05.1972.

Милан Перић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.