

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Милош И. Седак

**ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКА  
ОПТИМИЗАЦИЈА ПЛАНЕТАРНИХ  
ПРЕНОСНИКА АДАПТИВНИМ  
ХИБРИДНИМ МЕТАХЕУРИСТИЧИМ  
АЛГОРИТМИМА**

докторска дисертација

Београд, 2021

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Miloš I. Sedak

**MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION OF  
PLANETARY GEARBOXES BASED ON  
ADAPTIVE HYBRID METAHEURISTIC  
ALGORITHMS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2021.

## **ПОДАЦИ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ**

### ***Ментор:***

др Божидар Б. Росић, редовни професор  
Универзитет у Београду – Машински факултет

### ***Чланови комисије:***

др Милета Ристивојевић, редовни професор  
Универзитет у Београду – Машински факултет

др Татјана Лазовић, редовни професор  
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Александар Маринковић, редовни професор  
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Лозица Ивановић, редовни професор  
Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу

Датум одбране:

## **Захвалница**

Посебну захвалност дугујем ментору проф. др Божидару Росићу на безрезервној подршци и стручним саветима током наше дугогодишње сарадње, који је својим знањем и искуством допринео дефинисању мојих научно-истраживачких интересовања и реализацији ове дисертације.

Такође, захваљујем се члановима Комисије за преглед и оцену докторске дисертације, проф. др Милети Ристивојевићу, проф. др Татјани Лазовић, проф. др Александру Маринковићу, и проф. др Лозици Ивановић који су својим корисним сугестијама и саветима допринели да ова дисертација буде садржајнија и квалитетнија.

Коначно, захваљујем се својој породици и пријатељима без чије подршке и разумевања свих ових година не бих успео да остварим свој циљ.

# Садржај

|  |     |
|--|-----|
| Резиме: .....  | vii |
| Abstract: .....  | x   |
| 1 Увод .....   | 1   |
| 1.1 Преглед досадашњих истраживања .....   | 7   |
| 2 Методе оптимизације .....  | 12  |
| 2.1 Метакхеуристички оптимизациони алгоритми .....                                 | 13  |
| 2.2 Генетски алгоритам .....   | 15  |
| 2.2.1 Кодирање .....   | 16  |
| 2.2.2 Селекција .....  | 17  |
| 2.2.3 Укрштање .....   | 18  |
| 2.2.4 Мутација .....   | 20  |
| 2.3 Алгоритам диференцијалне еволуције .....                                       | 21  |
| 2.3.1 Формирање иницијалне популације .....  | 22  |
| 2.3.2 Мутација .....   | 23  |
| 2.3.3 Укрштање .....   | 25  |
| 2.3.4 Селекција .....  | 26  |
| 2.4 Алгоритам оптимизације ројем честица .....                                     | 27  |
| 3 Вишекритеријумска оптимизација .....   | 32  |
| 3.1.1 Формулација вишекритеријумског оптимизационог проблема .....                 | 33  |
| 3.1.2 Конвексност и неконвексност вишекритеријумског оптимизационог проблема ..... | 35  |
| 3.1.3 Оптимизација у смислу Парета .....   | 36  |
| 3.1.4 Компромисно решење .....   | 38  |

---

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 3.2   | Метода тежинских коефицијената .....   | 40  |
| 3.3   | Еволутивни алгоритми за вишекритеријумску оптимизацију .....   | 42  |
| 3.4   | Концепт доминације .....   | 43  |
| 3.5   | Генетски алгоритам са сортирањем према концепту недоминације решења<br>( <i>Non-dominated Sorted Genetic Algorithm</i> ) ..... | 45  |
| 3.6   | PSO алгоритам за вишекритеријумску оптимизацију.....   | 50  |
| 3.6.1 | PSO алгоритми засновани на концепту Парето оптималности.....   | 50  |
| 4     | Модификације и унапређење метахеуристичких алгоритама.....   | 52  |
| 4.1   | Адаптивни механизми за постављање вредности управљачких параметара<br>53   |     |
| 4.1.1 | Адаптивна промена вредности управљачких параметара DE алгоритма<br>56  |     |
| 4.1.2 | Адаптивна промена управљачких параметара PSO алгоритма .....   | 59  |
| 4.2   | Хибридизација алгоритама .....   | 61  |
| 4.2.1 | Хибридизација алгоритма оптимизације ројем честица и алгоритма<br>диференцијалне еволуције.....                                | 61  |
| 5     | Формирање оптимизационог модела.....   | 66  |
| 5.1   | Функционална ограничења .....  | 67  |
| 5.1.1 | Услов равномерног хабања зубаца .....  | 67  |
| 5.1.2 | Интерференца врхова профила зубаца.....  | 78  |
| 5.1.3 | Радијална интерференца .....   | 83  |
| 5.1.4 | Услов суседности сателита.....   | 85  |
| 5.1.5 | Услов спрезања централног зупчаника и сателита .....   | 88  |
| 5.2   | Критеријумске функције .....   | 91  |
| 5.2.1 | Степен искоришћења .....   | 91  |
| 5.2.2 | Степен искоришћења планетарних преносника.....   | 105 |

|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 6     | Нумерички резултати .....                                | 110 |
| 6.1   | Анализа побољшања метахеуристичких алгоритама.....       | 110 |
| 6.1.1 | Вилкоксонов тест ранга .....                             | 111 |
| 6.1.2 | Фридманов тест .....                                     | 113 |
| 6.1.3 | Анализа предложених модификација МНPSODE алгоритама..... | 115 |
| 6.2   | Оптимизација параметара планетарног преносника .....     | 119 |
| 7     | Закључак.....  | 131 |
|       | Литература .....   | 136 |

## **ВИШЕКРИТЕРИЈУМСКА ОПТИМИЗАЦИЈА ПЛАНЕТАРНИХ ПРЕНОСНИКА АДАПТИВНИМ ХИБРИДНИМ МЕТАХЕУРИСТИЧИМ АЛГОРИТМИМА**

### **Резиме:**

Планетарни преносници спадају у групу механичких зупчастих преносника, који су широко заступљени за трансформацију и пренос снаге првенствено због компактности конструкције, високе поузданости и степена искоришћења. Полазећи од функције, коју треба да испуни у оквиру неке конструкције, као и све строжих захтева у погледу перформанси преносника, предмет истраживања ове докторске дисертације је развој вишекритеријумског оптимизационог модела планетарног преносника. Развијени модели који задовољавају низ строгих захтева у погледу: компактности конструкције, минимизације губитака у преносу снаге, равномерности расподеле оптерећења, као и поузданости у различитим експлоатационим условима.

За постављени проблем вишекритеријумске оптимизације планетарног преносника формиране су одговарајуће критеријумске функције и дефинисан је низ функционалних ограничења, као и одговарајући домени примене свих релевантних величина зупчастих парова са спољашњим и унутрашњим озубљењем и планетарног преносника као сложеног система, у циљу несметане монтаже, поузданог рада и спрезања зупчастих парова. У оквиру докторске дисертације, развијен је одговарајући механички модел за одређивање степена искоришћења истовремено спрегнутих зупчастих парова, у зависности од њихових геометријских параметара, као и од услова подмазивања. Критеријумске функције формираног вишекритеријумског оптимизационог проблема су нелинеарне и неконвексне па се



глобално оптимално решење не може нумерички одредити конвенционалним методама оптимизације.

Према томе, у циљу решавања овог комплексног оптимизационог проблема потребно је применити метахеуристичке оптимизационе алгоритме. Дакле, постоји стална потреба за побољшањем постојећих и развојем нових метахеуристичких алгоритама и то развојем адаптивних техника за подешавање управљачких параметара и хибридизацијом алгоритама. У складу са тим, у оквиру докторске дисертације детаљно су разматрани метахеуристички алгоритми, који припадају групи еволутивних алгоритама, као што су алгоритам диференцијалне еволуције (*Differential Evolution*, DE), генетски алгоритам (*Genetic Algorithm*, GA) као и алгоритми инспирисани биолошким системима у природи, и то алгоритам оптимизације ројем честица (*Partical Swarm Optimization*, PSO). У циљу отклањања недостатака метахеуристичких алгоритама који се јављају током оптимизационог процеса, алгоритми предложени у оквиру дисертације су модификовани кроз: развој адаптивних механизма за подешавање вредности управљачких параметара, и хибридизацију адекватних алгоритама. У циљу формирања ефикасног хибридног алгоритма, процесу хибридизације је претходила детаљна нумеричка симулација и статистичка анализа перформанси разматраних алгоритама. Према томе, хибридизацијом алгоритама постигнуто је адекватно искоришћење предности једног и истовремена елиминација недостатака другог алгоритма.

У оквиру ове дисертације извршена је статистичка анализа и поређење оптимизационих перформанси предложеног модификованог хибридног метахеуристичког алгоритма са скупом алгоритама широко примењених у литератури за решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема, применом два непараметарска статистичка теста: Вилкоксоновог теста ранга и Фридмановог теста. Резултати статистичке анализе указују да предложени модификовани хибридни метахеуристички оптимизациони алгоритам остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са алгоритмима који се у литератури широко примењују за решавање ове врсте проблема. Поред овог, у дисертацији је посебна пажња посвећена анализи резултата симулације која је извршена у циљу одређивања оптималних параметара планетарног преносника, минимизацијом

критеријумских функција и функционалних ограничења дефинисаних у дисертацији. Добијени резултати упоређени су са параметрима референтног планетарног преносника из стандарда, где се уочава побољшање у степену искоришћења, компактности и поузданости конструкције. Такође, у дисертацији је разматрано и време извршавања предложеног модификованог метахеуристичког алгоритма, као и конвенционалних оптимизационих алгоритама. На основу резултата нумеричких симулација, као и спроведене статистичке анализе произилази да предложени адаптивни хибридни метахеуристички алгоритам одликује тачност, ефикасност и робустност у односу на најбоље признате алгоритме из литературе при решавању постављеног сложеног вишекритеријумског оптимизационог проблема.

Научни доприноси, представљени у оквиру докторске дисертације верификовани су кроз низ радова на међународним конференцијама, као и кроз рад објављен у истакнутом међународном часопису .

**Кључне речи:** Планетарни преносници, ефикасност преносника снаге, вишекритеријумска оптимизација, метахеуристичке оптимизационе методе, хибридни алгоритми, глобална оптимизација

**Научна област:** Техничке науке, машинство

**Ужа научна област:** Опште машинске конструкције

**УДК број:** 621.833.6(043.3)

## **MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION OF PLANETARY GEARBOXES BASED ON ADAPTIVE HYBRID METAHEURISTIC ALGORITHMS**

### **Abstract:**

Planetary gearboxes have a wide application in the field of transformation and transmission of power from the drive to the working machine, due to the compact structure, high reliability and efficiency. Due to the increasingly stringent performance requirements, which planetary gearboxes must satisfy, the research in this dissertation is focused on the problem of multi-objective non-linear optimization of planetary gearbox based on hybrid metaheuristic algorithm, which satisfies a number of strict requirements, such as: compact construction, minimization of power loss, load distribution and reliability in different operating conditions.

In this work the formulations of the objective functions for the considered multi-objective optimization problem of planetary gearbox have been outlined along with the appropriate constraints. The formulated constraints have been analyzed and appropriate domains of practical applications of internal and external gear pairs have been formulated, with the aim to ensure proper working, mounting and meshing of considered gears. Furthermore, the theoretical formulation and numerical procedure for the calculation of the planetary gearbox power efficiency has been developed in this work. However, the objective functions and developed constraints of the considered Multiobjective planetary gearbox optimization problem are nonlinear and multimodal functions, and therefore the global optimal solution cannot be obtained using the conventional optimization methods.

Therefore, in order to solve this multiobjective and complex optimization problem, the research in this dissertation is focused on metaheuristic optimization

algorithms, which belong to the group of evolutionary algorithms, including: differential evolution algorithm and genetic algorithm, as well as the algorithms inspired by the biological systems, such as particle swarm optimization algorithm. To overcome difficulties in solving complex optimization problems, in this thesis the considered algorithms are modified with the development of adaptive techniques for setting the values of control parameters and hybridization of algorithms. In order to create an effective hybrid algorithm, the hybridization process has been preceded by extensive numerical simulations and statistical analysis of advantages and disadvantages of each algorithm. Therefore, the proposed hybridization of algorithms and introduction of adaptive control parameters can successfully combine the advantages and avoid disadvantages of each algorithm. In this way, the proposed modifications successfully combine the advantages of each algorithm and avoid their disadvantages, thus significantly expanding the scale of implementation of the proposed algorithms for complex optimization problems.

In this dissertation the statistical comparison using Friedman and Wicoxon test has been performed to compare the optimization performance of the proposed metaheuristic algorithm with well-known algorithms in literature for solving the multiobjective optimization problems. The results of the statistical comparison indicate that the proposed adaptive hybrid metaheuristic algorithm exhibits better optimization performance compared to well-known algorithms. In addition, the experimental analysis using the numerical simulations has been carried out to determine the Pareto optimal solutions of the considered MOO problem of the planetary gearbox optimization defined in this dissertation. The obtained parameters of the considered planetary gearbox have been compared to the reference gearbox parameters, defined in standards, where it can be concluded that It has been shown that the proposed algorithm successfully obtains the solutions of the non-convex Pareto set, and reveals key insights in reducing the weight, improving efficiency and preventing premature failure of gears. Furthermore, the average computation times of the proposed improved metaheuristic and other well-known algorithms has been considered and compared. Base on the results of the numerical simulations it can be concluded that compared to the well-known algorithms in the literature the proposed adaptive hybrid metaheuristic algorithm exhibits robustness,

improved accuracy and efficiency in solving complex problem of multiobjective optimization of planetary gearbox.

The contributions presented in this thesis have been verified through a number of scientific papers on international symposiums and in paper published in journal ranked on SCI list.

**Keywords:** Planetary gearboxes, mechanical transmission efficiency, multi-objective optimization, metaheuristic optimization methods, hybrid algorithms, global optimization

**Scientific area:** Technical sciences, mechanical engineering.

**Scientific subarea:** General mechanical constructions (general machine design).

**UDK code:** 621.833.6(043.3)

## Списак слика

|   |    |
|---|----|
| Слика 2.1 Приказ бинарног кодирања потенцијалних решења .....   | 16 |
| Слика 2.2 Илустрација селекције хромозома на основу принципа точка рулета .   | 18 |
| Слика 2.3 Илустрација оператора укрштања у једној тачки генетског алгоритма .....   | 19 |
| Слика 2.4 Илустрација оператора укрштања у две тачке генетског алгоритма  | 19 |
| Слика 2.5 Илустрација оператора униформног укрштања генетског алгоритма .....   | 19 |
| Слика 2.6 Илустрација оператора мутације генетског алгоритма.....   | 20 |
| Слика 2.7 Графичка интерпретација оптимизације <i>DE/rand/1</i> мутационог оператора .....  | 23 |
| Слика 2.8 Графичка интерпретација ажурирања вредности вектора брзине и вектора позиције <i>PSO</i> алгоритма .....                        | 29 |
| Слика 3.1 Приказ пресликавања простора управљачких променљивих у простор критеријумских функција за две критеријумске функције .....      | 34 |
| Слика 3.2 Приказ скупа недоминантних решења у простору две критеријумске функције.....  | 37 |
| Слика 3.3 Геометријска интерпретација варирања коефицијената у случају оптимизационог проблема са две критеријумске функције .....        | 41 |
| Слика 3.4 Геометријска интерпретација оптимизационог процеса методе тежинских коефицијената за а) конвексни критеријумски простор и ..... | 42 |
| Слика 3.5 Илустрација концепта Парето оптималности.....   | 43 |
| Слика 3.6 Илустрација концепта доминације <i>NSGA-II</i> алгоритма.....   | 46 |
| Слика 3.7 Илустрација поступка попуњавања новоформиране популације за следећу итерацију.....  | 47 |

|   |    |
|---|----|
| Слика 3.8 Графичка илустрација одређивања $CD$ метрике у дводимензионалном простору критеријумских функција.....  | 48 |
| Слика 4.1 Промена вредности предложеног фактора скалирања $F_i^{(G)}$ са порастом броја генерација.....   | 57 |
| Слика 4.2 Промена вредности предложеног фактора укритања $CR^{(G)}$ са променом броја итерација.....  | 58 |
| Слика 4.3 Промена разматраних коефицијената убрзања са порастом генерација.....   | 60 |
| Слика 5.1 Спрезање зупчастог пара са унутрашњим озубљењем.....  | 68 |
| Слика 5.2 Спрезање профила зупчаника са унутрашњим и спољашњим озубљењем у односу на одговарајуће координатне системе.....  | 75 |
| Слика 5.3 Специфична клизања дуж додирнице профила у карактеристичним тачкама.....  | 77 |
| Слика 5.4 Специфично клизање у тачкама најудаљенијим од тренутног пола $C$  | 78 |
| Слика 5.5 Приказ геометријских релација за дефинисање теме интерференце   | 79 |
| Слика 5.6 Зависност промене растојања истовремено спрегнутих врхова профила зубаца у односу на угао ротације $\varphi_1$ .....  | 81 |
| Слика 5.7 Илустрација промене минималног растојања врхова профила зубаца $\Delta r$ у зависности од померања профила спрегнутих зупчаника $\Delta x$ и разлике зубаца зупчастог пара $\Delta Z$ ..... | 82 |
| Слика 5.8 Радијално примицање зупчаника са спољашњим озубљењем у међузубљу зупчаника са унутрашњим озубљењем.....   | 84 |
| Слика 5.9 Расподела сателита у једној равни планетарног преносника.....   | 86 |
| Слика 5.10 Услов суседности сателита $s$ обзиром на промену укупног преносног односа и броја сателита у једној равни планетарног преносника.....  | 87 |
| Слика 5.11 Кинематски модел разматраног једностепеног планетарног преносника.....   | 88 |

|            |  |     |
|------------|--|-----|
| Слика 5.12 | Анализа дејства одговарајућих сила трења током спрезања .....  | 92  |
| Слика 5.13 | Оптерећење које делује на зупчасти пар за случај пола $C$ у домену једноструке спреге и тренутне тачке додир у домену двоструке спреге .....     | 96  |
| Слика 5.14 | Оптерећење које делује на зупчасти пар за случај пола $C$ и тренутне тачке додир у домену једноструке спреге .....                               | 97  |
| Слика 5.15 | Оптерећење које делује на зупчасти пар за случај пола $C$ у домену једноструке спреге и тренутне тачке додир у домену двоструке спреге .....     | 101 |
| Слика 5.16 | Оптерећење које делује на зупчасти пар за случај пола $C$ и тренутне тачке додир у домену једноструке спреге .....                               | 102 |
| Слика 5.17 | Шематски приказ једностепеног планетарног преносника .....   | 106 |
| Слика 5.18 | Приказ апсолутног степена искоришћења у функцији померања профила $x_3$ и $x_2$ .....  | 108 |
| Слика 5.19 | Приказ апсолутног степена искоришћења у функцији померања профила $x_3$ и $x_1$ .....  | 109 |
| Слика 6.1  | Критеријумски простор за осно растојање централног зупчаника и сателита $a_{ag}$ – степен искоришћења планетарног преносника $\eta_{ан}^b$ ..... | 124 |
| Слика 6.2  | Критеријумски простор за осно растојање централног зупчаника и сателита $a_{ag}$ – напон у подножју зупца $\sigma_F$ .....                       | 125 |
| Слика 6.3  | Критеријумски простор за осно растојање централног зупчаника и сателита $a_{ag}$ – напон на боковима зубаца $\sigma_H$ .....                     | 126 |
| Слика 6.4  | Критеријумски простор за запремину планетарног преносника $V$ – степен искоришћења планетарног преносника $\eta_{ан}^b$ .....                    | 127 |
| Слика 6.5  | Критеријумски простор за осно растојање $a_{ag}$ и запремину планетарног преносника $V$ .....  | 128 |
| Слика 6.6  | Критеријумски простор за осно растојање $a_{ag}$ и степен искоришћења планетарног преносника $\eta_{ан}^b$ за различите врсте уља .....          | 129 |



## Списак табела

|  |     |
|--|-----|
| Табела 6.1 Резултати поређења перформанси разматраних алгоритама у форми математичког очекивања и стандардне девијације метрике IGD [79]. .....  | 116 |
| Табела 6.2 Резултати Вилкоксеновог теста за MHPSODE и DEMO, MOPSO, NSGA-II за дати праг значајности $\alpha = 0,05$ [79]. .....  | 117 |
| Табела 6.3 Резултати примене Фридмановог теста компаративне анализе за разматране алгоритме и различите тест функције при прагу значајности $\alpha = 0,05$ [79]. .....                                | 118 |
| Табела 6.4 Упоредни приказ времена извршавања разматраних алгоритама [79]. .....   | 119 |
| Табела 6.5 Параметри разматраног планетарног преносника .....  | 122 |
| Табела 6.6 Оптималне вредности параметара планетарног преносника добијене на основу постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема за различите комбинације критеријумских функција [79] ..... | 123 |
| Табела 6.7 Карактеристике уља према ISO 3448 класификацији.....  | 129 |

# 1 Увод

Планетарни преносници спадају у групу механичких зупчастих преносника, који су широко заступљени у конструкцијама: енергетских машина, хеликоптера, аутомобила и других саобраћајних средстава [1]. Планетарни преносници, под истим задатим техничким условима, у поређењу са механичким преносницима са фиксним осама имају мању масу, односно габарите и већи степен искоришћења [2].

Полазећи од функције, коју треба да испуни у оквиру неке конструкције, за планетарни преносник, у општем случају постављају се следећи захтеви, и то: у погледу: компактности – минималних габарита, максималног степена искоришћења, коаксијалности улазног и излазног вратила, равномерности расподеле оптерећења са погонског зупчаника на истовремено спрегнуте зупчaste парове, као и поузданости у различитим експлоатационим условима. У општем случају, планетарни преносници раде на режиму екстремних оптерећења, што неминовно може довести до површинских оштећења зубаца зупчаника, ако се на одговарајући начин не изврши избор кинематских величина, материјала за израду зупчаника, термо-хемијске обраде и начина подмазивања спрегнутих зупчаника. Ради равномерног хабања бокова зубаца спрегнутих зупчаника, и испуњења услова радне способности планетарног преносника, неопходно је посебну пажњу посветити правилном избору услова подмазивања, кинематских величина зупчастих парова, као и поставке одговарајућих функционалних ограничења у фази конструисања преносника.

Различитим кинематским комбинацијама зупчастих парова са унутрашњим и спољашњим озубљењем могу се остварити планетарни преносници са изузетно великим вредностима преносног односа, а исто тако и планетарни преносници са

малим степеном искоришћења, далеко нижим него код преносника са фиксним осама. Зато је неопходно спровести детаљну анализу степена искоришћења планетарних преносника у функцији преносног односа, као и поређење са степеном искоришћења преносника са фиксним осама. У складу са тим, посебна пажња истраживача је фокусирана на анализу степена искоришћења планетарног преносника у току рада у зависности од кинематске комбинације истовремено спрегнутих зупчастих парова [2-6].

За разлику од зупчастих парова са спољашњим озубљењем, код зупчастих парова са унутрашњим озубљењем неопходно је поставити одговарајућа функционална ограничења са аспекта геометрије и кинематике, у циљу несметане монтаже и спрезања зупчастих парова у току њиховог рада. Овој проблематици није посвећена одговарајућа пажња и у доступним радовима, у којима су углавном дате препоруке у погледу избора бројева зубаца, без разматрања других релевантних величина, за посматрани зупчасти пар са унутрашњим озубљењем [1]. У складу са тим, неопходно је спровести детаљну анализу геометријских и кинематских ограничења, као и дефинисати домене практичне примене релевантних величина зупчастог пара са унутрашњим озубљењем. Такође, да би се донели одговарајући закључци о захтеваној тачности улазних параметара и тачности добијених резултата, неопходно је спровести анализу осетљивости функционалних ограничења с обзиром на промену улазних параметара.

Имајући у виду све строже захтеве у погледу перформанси у току рада преносника, један од основних циљева је вишекритеријумска оптимизација планетарних преносника, с обзиром на контрадикторне критеријуме и постављена функционална ограничења [7]. У циљу испуњења веома строгих техничких захтева у погледу перформанси планетарног преносника неопходно је поставити међусобно контрадикторне критеријуме као што су степен искоришћења и габарити преносника. Са аспекта радне способности, неопходно је дефинисати функционална ограничења и домене примене свих релевантних величина, зупчастих парова са спољашњим и унутрашњим озубљењем и планетарног преносника као сложеног система, код кога постоји одговарајућа интеракција између зупчастих парова. С обзиром на велики број функционалних захтева, као и

критеријума које планетарни преносници морају да испуне од изузетног значаја постаје формирање вишекритеријумског модела оптимизације преносника. У доступној литератури се углавном разматрају једнокритеријумски оптимизациони модели планетарних преносника [8-11]. Међутим, једнокритеријумски модели су непотпуни и неадекватни, пошто је практично немогуће једним критеријумом описати планетарни преносник у погледу жељених перформанси. Према томе, неопходно је у оквиру оптимизационог модела планетарног преносника формирати већи број критеријума, који међусобно могу бити и конфликтни (осно растојање - степен искоришћења). Постављање већег броја критеријума у погледу жељених карактеристика, и то конфликтних, представља значајан корак ка већој реалности модела планетарног преносника. С обзиром на то да су формиране критеријумске функције посматраног вишекритеријумског оптимизационог проблема нелинеарне и неконвексне, примена конвенционалних оптимизационих метода на решавање постављених проблема није могућа без претходног познавања региона глобалног минимума. Из наведеног произилази да је за решавање овог проблема потребно применити метахеуристичке оптимизационе алгоритме, које карактерише способност изналажења глобалног оптимума мултимодалних оптимизационих проблема [12-14]. Процес претраге метахеуристичких алгоритама започиње случајним генерисањем скупа тачака, које се током генерација усмеравају ка оптималном решењу одређеним развијеним механизмима. У складу са тим, принцип функционисања механизма претраге алгорита је конципиран на опонашању природних системима и процеса који се у њима јављају. Свака од развијених метахеуристичких оптимизационих метода доступних у литератури показује одређене предности али и слабости у решавању оптимизационих проблема. Због ових чињеница постоји стална потреба за модификацијом и комбиновањем постојећих, као и развојем нових оптимизационих алгоритама, у циљу успешног решавања нелинеарних и неконвексних оптимизационих проблема.

До данас, у релевантној литератури развијено је више популационих метахеуристичких метода, међу којима се најшире примењени оптимизациони алгоритми базирају на процесима инспирисаним природом, где се посебно истичу еволутивни алгоритми (*Evolutionary Algorithm*, EA) [15, 16]. Ради изналажења

глобалног оптимума посматраног оптимизационог проблема, оптимизациони процес еволутивних алгоритама конципиран је на опонашању природних процеса и појава који су инспирисани генетичким операторима у природи, као што су селекција, укрштање и мутација. Међу многобројним алгоритмима који припадају групи еволутивних алгоритама посебно се издваја генетски алгоритам (*Genetic Algorithm*, GA) [10], као метода која се употребљава веома дуго и у поређењу са осталим еволутивним алгоритмима доживела је највећу еволуцију од свог изворног облика. Такође, из ове групе алгоритама издваја се и алгоритам диференцијалне еволуције (*Differential Evolution*, DE) [17, 18]. Поред еволутивних алгоритама, новију групу алгоритама чине алгоритми интелигенције ројева (*Swarm intelligence algorithms*) који припадају групи популационих хеуристичких алгоритама чији су механизми инспирисани биолошким системима, као што су јата птица или колоније инсеката у потрази за храном [19-21]. Из групе алгоритама интелигенције ројева посебно се издвајају алгоритам оптимизације ројем честица (*Particle Swarm Optimization*, PSO), алгоритми инспирисани пчелињим колонијама (*Artificial Bee Colony*), претрага кукавице (*Cuckoo Search*), алгоритам свитаца (*Firefly algorithm*), алгоритам сивог вука (*Gray Wolf Optimization*) као и многи други [22-26].

У општем случају, процес претраге допустивог простора метахеуристичких алгоритама може се поделити у две фазе, и то: фаза глобалне претраге и фаза локалне претраге [15, 27]. Прва фаза односи се на истраживање простора допустивих решења у циљу изналажења региона глобалног оптималног решења. Друга фаза, фаза локалне претраге односи се на темељну претрагу региона локалног минимума, идентификованог у претходној фази, у циљу побољшања квалитета глобалног оптималног решења. Прегледом релевантне литературе и анализом перформанси доступних метахеуристичких алгоритама уочава се неусклађеност фаза глобалне и локалне претраге при решавању одређене класе проблема [16, 27]. Према томе, неопходно је успоставити ефикасну равнотежу између фаза локалне и глобалне претраге током решавања комплексних оптимизационих проблема у циљу постизања ефикасне претраге, посебно при решавању сложених проблема као што су проблеми оптимизације планетарних преносника.

Генерално, побољшање перформанси метахеуристичких алгоритама могуће је остварити модификацијом постојећих или развојем нових механизма претраге, односно модификацијом оператора као што су селекција, мутација и укрштање, као и формирањем препорука и развојем механизма за адекватан одабир вредности управљачких параметара алгорита [28-30]. Такође, побољшање перформанси може се остварити и хибридизацијом, односно комбиновањем делова два или више оптимизациона алгорита у оквиру новог хибридног алгорита [23]. У складу са тим, у литератури се уочавају два приступа хибридизацији [15]. Први приступ бави се хибридизацијом метахеуристичких алгоритама са добро познатим конвенционалним методама локалне претраге, где се најчешће у оквиру фазе локалне претраге хеуристичког алгорита усвајају механизми из конвенционалних алгоритама. Други приступ разматра међусобно комбиновање механизма два популациона метахеуристичка алгорита у циљу побољшања оптимизационих перформанси. У складу са тим, основни циљ ове дисертације је развој нових и побољшање постојећих популационих метахеуристичких алгоритама, кроз формирање адаптивних механизма за избор управљачких параметара током оптимизационог процеса, као и хибридизацију са другим алгоритмима у циљу формирања нове ефикасне методе за решавање комплексног проблема оптимизације планетарних преносника.

У општем случају, постојеће популационе метахеуристичке методе развијене су за решавање једнокритеријумских оптимизационих проблема без ограничења. Према томе, у циљу примене ових метода на решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема потребно је извршити модификацију разматраних алгоритама. У литератури широко примењене технике за решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема јесу технике скаларизације (*scalarization methods*), међу којима се посебно издваја приступ тежинске суме (*weighted sum method*) [31, 32]. Применом ове методе, све разматране критеријумске функције посматраног оптимизационог проблема се агрегирају у једну функцију циља, где се вредност сваке од критеријумских функција множи са одговарајућим тежинским коефицијентом. На тај начин се вишекритеријумски оптимизациони проблем своди на једнокритеријумски проблем, на који се без модификација могу

применити све претходно разматране популационе метахеуристичке методе. Међутим, ова метода има и својих недостатака, посебно по питању вредности тежинског коефицијента који треба доделити одређеној критеријумској функцији. Такође, у литератури је показано да се применом методе тежинске суме могу остварити само конвексни делови Парето скупа [33]. Осим ове технике, у литератури се за решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема примењује и техника хијерархије циљева. Ова техника се заснива на претходној рангирању критеријумских функција, тако да се прво оптимизује критеријум са највећим приоритетом, а затим онај са нижим, итд. У циљу превазилажења недостатака ових метода, у литератури се примењује низ техника које не захтевају претходно познавање параметара, и које директно оптимизују сваку критеријумску функцију, а засноване су на концепту Парето оптималности [34, 35].

У зависности од постојања ограничења у формулацији оптимизационог проблема, они се могу поделити на оптимизацију без ограничења (*unconstrained optimization*) и оптимизацију са ограничењима (*constrained optimization*)[36]. На основу изнетог, присуство ограничења у оптимизационом проблему значајно сужава допустиви регион и отежава решавање оваквих оптимизационих проблема. У циљу управљања ограничењима и решавања оптимизационог проблема у литератури је познат велики број метода, које се могу поделити у следеће групе: методе казних функција (*penalty functions*), декодери (*decoders*), методе које се заснивају на посебним операторима и методе које одвојено оптимизују функције циља и ограничења [37, 38]. Методе казних функција заснивају се на формулацији проширене функције циља где се на критеријумску функцију додају казнене функције за свако од постављених ограничења. У литератури је представљен низ казних функција, које казнене факторе држе константним током оптимизације или их мењају кроз одређени вид адаптивног процеса. Ова метода има једноставну имплементацију, међутим захтева пажљиви одабир вредности казних фактора у зависности од типа оптимизационог проблема и врсте ограничења. Техника декодера заснива се на мапирању простора претраге на декодирани простор, где се мапирање извршава тако да је свако допустиво решење укључено у декодирани простор и да сваком декодираном решењу одговара једно

допустиво решење. Међутим, ову методу карактерише компликована имплементација и велики број извршавања, па је њена примена ограничена. Методе које се заснивају на употреби посебних оператора могу се имплементирати на два начина, и то: методе које за циљ имају очување допустивих решења или као методе које усмеравају процес претраге простора тако да решења остану у границама допустивих решења. Код метода које одвојено оптимизују функције циља и ограничења, квалитет решења се одређује супротно од методе казних функција. У овом случају, квалитет решења узима вредност функције циља када је решење допустиво. У супротном, квалитет решења узима вредност која зависи од суме вредности прекорачења ограничења. Поред ових метода, у литератури често је заступљена и  $\epsilon$  метода ( *$\epsilon$ -method*) за рад са ограничењима, која проблем са ограничењима трансформише у проблем без ограничења [39]. Током последњих година, у литератури се јављају радови, који у случају директне вишекритеријумске оптимизације свако од ограничења постављеног оптимизационог проблема разматрају као додатну критеријумску функцију, и на тај начин симултано оптимизују ограничења и функције циља [38].

## 1.1 Преглед досадашњих истраживања

Током последњих деценија велики број радова у литератури разматра проблем оптимизације параметара механичких преносника снаге [8, 10, 11, 40-43]. Минимизација масе једноступеног механичког преносника са правим зупцима, са функционалним ограничењима као што су: гранична вредност напона у подножју зубаца, као и чврстоћа вратила преносника разматрана је у [8]. На основу добијених резултата, аутори су закључили да је однос између масе зупчастог преносника и његових димензија побољшан за 48,8% и 33,6%, следствено, чиме је потврђена ефикасност предложене методе. На сличан начин, у циљу оптимизације једноступеног механичког преносника, аутори у [10] су формулисали функцију циља која подразумева запремину зупчаника, вратила и лежаја. Аутори у раду [9] разматрали су оптимизацију масе хеликоидних цилиндричних зупчастих парова, при чему су за параметре оптимизације усвојени модул зупчастог пара, угао нагиба зубаца, број зубаца зупчаника, као и ширина зупчастих парова. У циљу решавања



постављеног оптимизационог проблема, аутори су применили модификован алгоритам случајне претраге (*random search algorithm*). Добијени резултати су показали да предложени алгоритам остварује боље перформансе у поређењу са конвенционалним оптимизационим алгоритмима, који захтевају познавање градијента функције циља.

Ради смањења димензија и масе једностепеног планетарног преносника, аутори у [11] предложили су оптимизациону методу засновану на метахеуристици вештачког имунолошког система (*Artificial immune system*). На основу резултата оптимизације, аутори су закључили да предложени оптимизациони алгоритам остварује задовољавајуће резултате на скупу функција које су коришћене за тестирање. Такође, уочено је да предложена метода остварује најбоље вредности параметара разматраног планетарног преносника у поређењу са добро познатим резултатима доступним у литератури.

Велики број претходно поменутих радова разматрају проблем једнокритеријумске оптимизације механичких преносника снаге. Међутим, једнокритеријумски модели су непотпуни и неадекватни, пошто је практично немогуће једним критеријумом описати планетарни преносник у погледу жељених перформанси. Реалистични оптимизациони модели планетарних преносника подразумевају истовремену оптимизацију више критеријумских функција, при чему су такве критеријумске функције међусобно контрадикторне. Зато је неопходно у оптимизациони модел планетарног преносника поставити већи број критеријума, који међусобно могу бити и конфликтни. Према томе, током последњих деценија посебна пажња у литератури посвећена је проблему вишекритеријумске оптимизације машинских система, посебно вишекритеријумске оптимизације механичких преносника снаге [5, 44-48]. С обзиром на сложеност проблема вишекритеријумске оптимизације, примена конвенционалних оптимизационих метода на решавање разматраних проблема није могућа, што је мотивисало развој нових и модификацију постојећих алгоритама оптимизације. Према томе, аутори у [49] разматрали су проблем оптимизације вишестепеног механичког преносника применом еволутивног алгоритма за вишекритеријумску оптимизацију. Анализирани су оптимизациони

модел са три и са четири критеријумске функције, као што су запремина зупчаника, енергетска ефикасност преносника, однос растојање између улазног и излазног вратила, као и брзина излазног вратила, у присуству ограничења са аспекта радне способности. Примењени еволутивни алгоритам NSGA-II (*Non dominated sorting Genetic Algorithm*) показао је ефикасност у остваривању Парето оптималних решења постављеног вишекритеријумског проблема мешовито целобројно нелинеарног програмирања (*Mixed Integer Nonlinear Programming*), истовремено задовољавајући више нелинеарних ограничења. Током последњих година, аутори у [50] разматрали су вишекритеријумску оптимизацију двостепеног механичког преносника са косим зупцима. Разматране су две међусобно контрадикторне критеријумске функције, и то: запремина комплетног механичког преносника и степен искоришћења преносника. У оквиру ове студије, аутори су формулисали више ограничења за постављени оптимизациони проблем, која поред напона на боковима и напона у корену зупца укључују и облике површинског разарања, као што су заједање (*scuffing*) и хабање (*wear*).

Аналогно претходно поменути истраживањима, аутори у [48] разматрали су проблем оптимизације двостепеног механичког преносника, при чему је вишекритеријумски оптимизациони проблем формулисан са три критеријумске функције, и то: запремина преносника, снага на излазу и однос растојање. Резултати вишекритеријумске оптимизације указују на то да предложени оптимизациони алгоритам изналази параметре који дају конструкциона решења са бољим карактеристикама, у поређењу са референтним конструкцијама у литератури. Током последњих година, проблем вишекритеријумске оптимизације планетарних преносника све више заокупља пажњу истраживача. У складу са тим, аутори у [14] формирали су вишекритеријумски оптимизациони проблем где су за функције циља постављене тежина и ефикасност планетарног преносника. За решавање формулисаног проблема примењена је модификовани NSGA-II алгоритам за рад са оптимизационим проблемима са целим бројевима. Формулисана ограничења постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема укључују ограничења са аспекта радне способности, заједања као и одабира одговарајућег котрљајног лежаја. У поређењу са параметрима референтног планетарног

преносника формулисаног у АГМА (*American Gear Manufacturers Association*) стандарду, добијени резултати указују на остваривање конструкције бољих карактеристика у погледу не само укупне масе и степена искоришћења, већ и боље отпорности према хабању.

Ова докторска дисертација организована је кроз седам поглавља и преглед коришћене литературе.

Уводно поглавље разматра проблем оптимизације конструкција преносника, са посебним освртом на публиковане научне и стручне радове, који разматрају вишекритеријумске оптимизационе проблеме. У оквиру овог поглавља, поред прегледа релевантне литературе, дефинисани су предмет и циљеви докторске дисертације.

Прво поглавље разматра оптимизационе методе и њихову примену на решавање оптимизационих проблема. Приказана је класификација оптимизационих метода, са посебним фокусом на метахеуристичке алгоритме и њихову класификацију. У оквиру овог поглавља, дата је математичка формулација, као и одговарајућа имплементација следећих алгоритама: Генетског алгорита, Алгорита диференцијалне еволуције и Алгорита оптимизације ројем честица.

У оквиру другог поглавља, дата је формулација вишекритеријумског оптимизационог проблема, као и преглед метода за решавање ове врсте оптимизационих проблема. Дефинисани су појмови Парето оптималности и компромисног решења. У циљу решавања постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема, приказана је формулација методе тежинских коефицијената, као и еволутивних алгоритама за вишекритеријумску оптимизацију, и то генетског алгорита са сортирањем према концепту недоминације решења и PSO алгорита за вишекритеријумску оптимизацију.

Треће поглавље разматра модификације метахеуристичких алгоритама, при чему је дат преглед релевантне литературе, која разматра модификације ових алгоритама. Такође, детаљно су приказане извршене модификације метахеуристичких алгоритама, и то кроз: развој адаптивних техника за промену вредности управљачких параметара, као и хибридизацију алгоритама.

У оквиру четвртог поглавља, за постављени проблем вишекритеријумске оптимизације планетарног преносника, формиране су одговарајуће критеријумске функције и дефинисан је низ функционалних ограничења, као и одговарајући домени примене свих релевантних величина зупчастих парова са спољашњим и унутрашњим озубљењем и планетарног преносника као сложеног система, у циљу несметане монтаже, поузданог рада и спрезања зупчастих парова. У оквиру овог поглавља, детаљно је приказана формулација одговарајућег механичког модела за одређивање степена искоришћења истовремено спрегнутих зупчастих парова, у зависности од њихових геометријских параметара, као и од услова подмазивања.

У оквиру петог поглавља, приказани су резултати нумеричке симулације и анализа доступних решења. Приказана је анализа оптимизационих перформанси предложеног алгорита са скупом алгоритама примењиваних у литератури за решавање ове класе проблема, применом два непараметарска статистичка теста. Такође, посебна пажња посвећена је анализи резултата симулације, која је извршена у циљу одређивања оптималних параметара планетарног преносника, минимизацијом критеријумских функција и функционалних ограничења дефинисаних у дисертацији.

У завршном шестом поглављу су изложена закључна разматрања ове дисертације.

## 2 Методе оптимизације

У општем случају оптимизација подразумева процес изналажења најбољег резултата, односно одређивање минималне или максималне вредности, под датим околностима. Процес оптимизације састоји се од фаза, које се секвенцијално извршавају и могу се поделити на: поставку оптимизационог проблема, дефинисање модела, имплементацију одговарајућег алгорита, евалуацију решења, као и валидацију добијених решења. До данашњих дана није развијена јединствена оптимизациона метода која се може применити за решавање свих оптимизационих проблема. Према томе, у доступној литератури развијен је велики број разноврсних оптимизационих алгорита које се могу поделити на: детерминистичке и стохастичке оптимизационе алгоритме [15]. Ако оптимизациони процес започне од истог почетног решења, детерминистички алгоритми увек воде ка истом оптималном решењу. С друге стране, стохастички алгоритми поседују механизме који уносе неодређеност, тако да се не гарантује конвергенција ка идентичном оптималном решењу, уколико оптимизациони процес започне из истог почетног решења. У општем случају, критеријумске функције практичних инжењерских оптимизационих проблема су нелинеарне и мултимодалне, па се за решавање ових проблема не могу успешно применити конвенционални детерминистички алгоритми. С друге стране, стохастички алгоритми процес претраге простора допустивих решења, заснивају на механизмима који се базирају на случајности. Једни од најчешће заступљених алгорита из ове класе су метахеуристички алгоритми, код којих су механизми претраге често инспирисани природним процесима и системима. Током последњих деценија уочава се нагли развој нових метахеуристичких алгорита [16]. Једна од многобројних области примене у којима су метахеуристичке оптимизационе

методе нашле широку примену, посебно током последњих година, су проблеми вишекритеријумске оптимизације. С обзиром на присуство више контрадикторних критеријума у оквиру оваквих оптимизационих проблема, потребно је одредити скуп Парето оптималних решења [31]. У складу са тим, метахеуристичке оптимизационе методе, посебно алгоритми који припадају групи Еволутивних алгоритама који оптимизују скуп (популацију) решења истовремено ,имају широку примену. Радом над скупом решења омогућава се проналажење читавог низа Парето оптималних решења у само једном оптимизационом циклусу, у поређењу са класичним методама које оптимизацију врше над једним решењем.

## 2.1 Метахеуристички оптимизациони алгоритми

Услед постојања великог броја различитих метахеуристичких алгоритама у литератури, као и разноврсних механизма које метахеуристички алгоритми користе у циљу претраге простора допустивих решења, тешко је извршити потпуну класификацију ове групе алгоритама. У наставку ће бити приказане најзначајније поделе метахеуристичких оптимизационих алгоритама, у зависности од њихових карактеристика при решавању оптимизационог проблема. Према томе, у зависности од броја решења који се посматра у оквиру једне итерације оптимизационог процеса, метахеуристички алгоритми се могу поделити на:

- Метахеуристике које су базиране на једном решењу (*single solution based*). У ову групу алгоритама спадају оне оптимизационе методе које током оптимизационог процеса манипулишу са једним решењем, које кроз итерације побољшавају и померају ка оптималном решењу применом дефинисаних механизма. Међу овом класом алгоритама издвајају се алгоритам симулираног каљења (*Simulated Annealing, SA* ), метода табу претраге (*Tabu search*), итеративна локална претрага (*Iterated local search*), и друге [15].
- Метахеуристике које се заснивају на оптимизацији скупа (популације) решења (*populations based*). Ова група метахеуристика заснива се на претраживању простора допустивих решења коришћењем скупа решења,

односно популације решења, које се применом механизма инспирисаних природним процесима усмеравају ка глобалном оптимуму. У ову групу метахеуристика спада велики број алгоритама из групе Еволутивних алгоритама, као што су генетски алгоритама, алгоритама диференцијалне еволуције, оптимизација ројем честица, оптимизација мрављим колонијама и друге [16, 22, 24].

Такође, метахеуристичке алгоритме је могуће класификовати, у зависности од тога да ли су механизми у оквиру оптимизационог процеса инспирисани природним системима или не, на следеће групе:

- Метахеуристички алгоритми који су инспирисани природним процесима и системима. Механизми претраге простора допустивих решења ове групе метахеуристичких оптимизационих алгоритама инспирисани су природним процесима и системима, као што су селекција, укрштање или мутација код генетичких оператора. Типични примери алгоритама који припадају овој групи су Еволутивни алгоритми и алгоритми интелигенције ројева [21].
- Алгоритми који нису инспирисани природним процесима. У оквиру ове групе алгоритама спадају метода табу претраге, метода променљивих околина (*Variable Neighbourhood Search*, VNS), итеративна локална претрага (*Iterated local search*) и друге [15].

У зависности од тога да ли имају могућност памћења претходних решења, метахеуристике се могу поделити на:

- Метахеуристике које користе меморију. Алгоритми из ове групе користе меморију у оквиру које се смештају информације о оптимизационој проблему, које су прикупљене током оптимизационог процеса. Типичан пример из ове групе је метода табу претраге, која у меморију смешта претходно пронађена решења која имају лошије карактеристике, са циљем да се више не посећују, тзв. „табу“ решења. Такође, у циљу остваривања примене на вишекритеријумске оптимизационе проблеме, велики број конвенционалних метахеуристичких алгоритама су проширени са

одговарајућом меморијом, у коју се смештају сва недоминантна решења [15, 31].

- Метакхеуристике које не користе меморију током оптимизационог процеса, и немају могућност памћења информација из претходног оптимизационог процеса. Међу многим алгоритмима из ове групе издваја се алгоритам симулираног каљења [15].

Поред претходно наведених подела, у литератури се налазе бројне друге поделе, зависно од специфичних особина које метакхеуристички алгоритми остварују током оптимизационог процеса. У наставку овог поглавља биће приказани метакхеуристички алгоритми за решавање оптимизационих проблема у машинским конструкцијама и системима и то: генетски алгоритам, алгоритам диференцијалне еволуције и алгоритам оптимизације ројем честица.

## 2.2 Генетски алгоритам

Генетски алгоритам представља један од најпознатијих алгоритама из групе еволутивних алгоритама, чији се механизми претрага простора допустивих решења заснивају на принципима еволуције и генетике [10]. Оптимизациони процес генетског алгоритма започиње формирањем скупа произвољно одабраних решења која припадају допустивом скупу. Овако одабрана потенцијална решења кодирају се у бинарне низове фиксне дужине. Над тако формираном иницијалном популацијом јединки, примењују се генетички оператори, и то селекција, укрштање над паровима јединки, и мутација у циљу случајне модификације решења и истраживања оптимизационог простора. У контексту генетског алгоритма, потенцијална решења посматраног оптимизационог проблема називају се хромозоми, а њихови делови, односно делови бинарних низова, називају се генима. Сваком хромозому из популације, додељује се одговарајући квалитет, који се одређује на основу функције подобности (*fitness function*), односно који је пропорционалан критеријумској функцији посматраног оптимизационог проблема. У наставку поглавља биће приказани механизми на којима су засновани оператори генетског алгоритма, као и процес оптимизације и услов заустављања.



### 2.2.1 Кодирање

Кодирање хромозома представља основни корак у примени генетског алгоритма на решавању оптимизационог проблема. Овај процес заснива се на трансформацији потенцијалних решења  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  из простора допустивих решења  $\mathbf{x} \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$  у бинарне низове фиксних дужина. На слици 2.1 приказан је бинарни низ фиксне дужине, који представља кодирано потенцијално решење посматраног проблема са  $n$  променљивих.

$$\text{хромозом: } \underbrace{1\ 0\ 0\ 1}_{x_1} \underbrace{1\ 0\ 1\ 0}_{x_2} \underbrace{1\ 1\ 0\ 0}_{\dots} \underbrace{0\ 1\ 0\ 1}_{x_n}$$

Слика 2.1 Приказ бинарног кодирања потенцијалних решења

На слици 2.1 се уочава да је компонента  $x_i$  произвољно одабраног вектора  $\mathbf{x}$  кодирана бинарним низом  $s_i$  који је дужине  $l_i$  битова. Према томе, укупан број бинарних представа ове променљиве је  $2^{l_i}$ . Уколико се минимална вредност компоненте вектора  $x_i$  у допустивом скупу  $\mathbb{D}$  означи са  $x_i^{\min}$ , а максимална вредност коју ова компонента може да узме са  $x_i^{\max}$ , тада су њима одговарајући бинарни низови  $[0, 0, \dots, 0]_n$  и  $[1, 1, \dots, 1]_n$ , респективно. Према томе, бинарни низ  $s_i$  декодира се у компоненту вектора  $x_i$  у допустивом скупу решења на основу следећег израза

$$x_i = x_i^{\min} + (x_i^{\max} - x_i^{\min}) \mathbf{s}_i^q, \quad (2.1)$$

где је са  $\mathbf{s}_i^q$  означена декодирана вредност бинарног низа  $\mathbf{s}_i$  која се може одредити на основу следећег израза

$$\mathbf{s}_i^q = \sum_{m=1}^{l_i} s_m 2^{-m} + 2^{-(n+1)}. \quad (2.2)$$

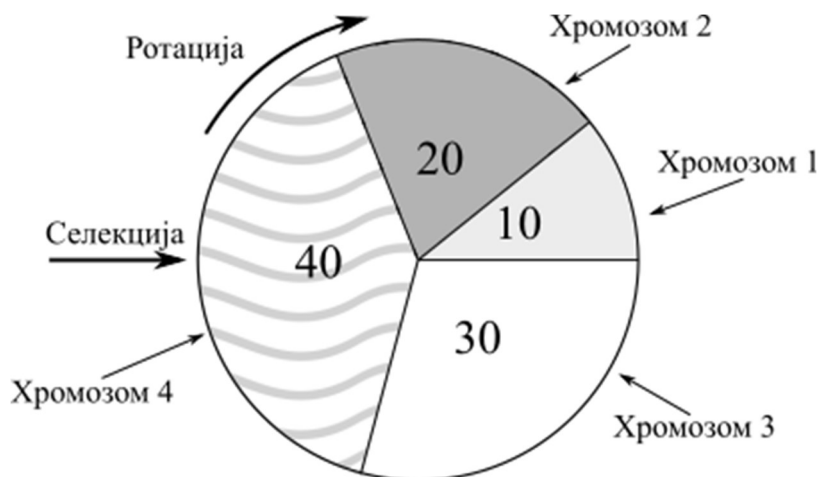
Када су вредности свих компонената вектора  $\mathbf{x}$  декодиране, може се приступити израчунавању критеријумске функције датог проблема  $f(\mathbf{x}) = f([x_1, \dots, x_n])$ .

### 2.2.2 Селекција

Оператор селекције преставаља први оператор генетског алгоритма који се примењује над популацијом хромозома у циљу издвајања из популације групе хромозома који поседују особине погодне за решавање постављеног оптимизационог проблема. Над овом групом хромозома, који поседују одговарајући квалитет у смислу критеријумске функције, односно над генима ових хромозома, примењују се оператори укрштања (репродукција) и мутације. У литератури најчешће коришћен оператор селекције је пропорционални оператор селекције (*fitness-proportional selection*), који се још и назива селекција коришћењем принципа точка рулета (*roulette-wheel selection*) [10]. Овај оператор заснива се на избору хромозома из текуће популације на основу вероватноће која је пропорционална вредности критеријумске функције датог хромозома, односно пропорционална квалитету хромозома. Према томе, ако се означи са  $p_i$  вероватноћа одабира  $i$ -тог хромозома из популације, која се одређује на основу вредности критеријумске функције у складу са следећим изразом

$$p_i = \frac{f(\mathbf{x}_i)}{\sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j)}, \quad (2.3)$$

где је са  $N$  означена величина тренутне популације хромозома. Дакле, према аналогiji принципа точка рулета може се објаснити принцип примене оператора селекције. Ради илустрације, на примеру максимизације биће представљен принцип селекције хромозома. Уз претпоставку да тренутну популацију сачињавају четири хромозома у популацији. Одређивањем вредности функције циља сваког од хромозома након декодирања, односно одређивањем квалитета, добијене су следеће вредности  $f(\mathbf{x}_1)=10$ ,  $f(\mathbf{x}_2)=20$ ,  $f(\mathbf{x}_3)=30$  и  $f(\mathbf{x}_4)=40$ . С обзиром да се разматра принцип максимизације, јасно је да хромозом  $\mathbf{x}_4$  има најбољи квалитет док хромозом  $\mathbf{x}_1$  има најгори квалитет. Могуће је креирати точак рулета код којег је величина сваког поља пропорционална квалитету посматраног хромозома. Дакле, точак рулета за посматрани пример приказан је на слици 2.2.

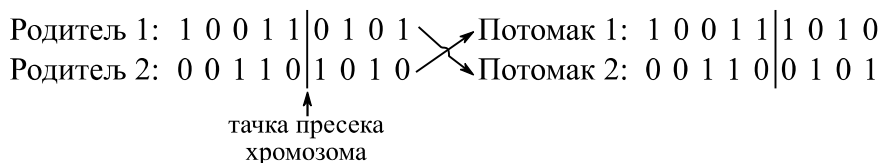


Слика 2.2 Илустрација селекције хромозома на основу принципа точка рулета

У циљу одабира хромозома за размножавање (укрштање) замишљени точак рулета се заврти, и на којој тачки се заустави одредиће који хромозом је одабран за укрштање. Јасно је да хромозом  $x_1$  има 10% вероватноће да буде изабран, хромозом  $x_2$  има 20% вероватноће, хромозом  $x_3$  има 30% док хромозом  $x_4$  има 40% вероватноће да буде изабран за укрштање. Другим речима, сваки хромозом има вероватноћу да буде одабран пропорционалну вредности функције циља. Након одабира хромозома приступа се оператору укрштања.

### 2.2.3 Укрштање

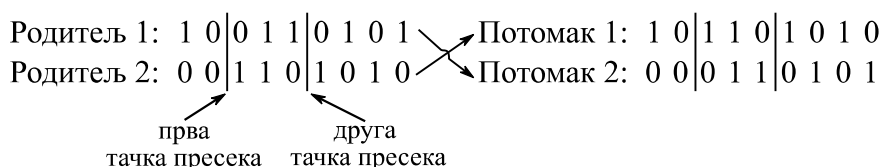
Укрштање се примењује након оператора селекције ради комбиновања постојећих јединки и добијања нових хромозома са потенцијално бољим својствима потребним за решавање посматраног оптимизационог проблема. Оператор укрштања изводи се над скупом хромозома добијених у процесу селекције. У литератури је представљено више различитих оператора укрштања, од којих је базични оператор који се често примењује, оператор укрштања у једној тачки. Поред овог оператора, разликује се и оператор укрштања у две тачке, као и оператор униформног укрштања. Оператор укрштања у једној тачки заснива се на пресецању бинарног низа два родитељска хромозома на одређеном месту. По пресецању, хромозоми међусобно размењују делове бинарног низа десно од тачке пресека. На тај начин формирају се два нова хромозома, као што је илустровано на слици 2.3.



Слика 2.3 Илустрација оператора укрштања у једној тачки генетског алгоритма

Тачка пресека два хромозома, односно место укрштања, бира се по принципу случајног избора. Са слике 2.3 уочава се да су родитељски хромозоми пресечени на шестој позицији бинарног низа. Све информације од шестог до деветог бита у низу од једног родитеља преносе се без измена у бинарни низ другог родитеља на истим позицијама, и обратно.

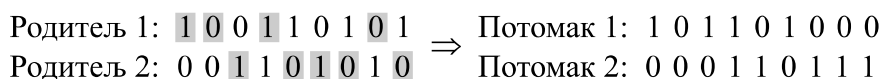
Оператор укрштања у две тачке заснива се на пресецању хромозома родитеља на два случајно одабрана места. По пресецању, хромозоми родитеља међусобно размењују делове бинарног низа између пресечних тачака. Принцип функционисања оператора укрштања у две тачке приказан је на слици 2.4.



Слика 2.4 Илустрација оператора укрштања у две тачке генетског алгоритма

На слици 2.4 уочава се да су родитељски хромозоми пресечени на трећој и шестој позицији бинарног низа. Све информације од трећег до шестог бита у низу од једног родитеља преносе се без измена у бинарни низ другог родитеља на истим позицијама, и обратно.

Такође, у литератури се јавља још и оператор униформног укрштања. Код овог оператора укрштања сваки бит у хромозому из оба родитеља у нове хромозоме бира се са вероватноћом 0.5, као што је илустровано на слици 2.5.

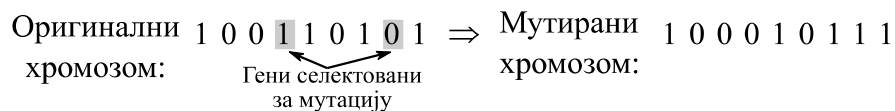


Слика 2.5 Илустрација оператора униформног укрштања генетског алгоритма

На слици 2.5 се уочава да битови у хромозомима родитеља који су осенчени формирају једног потомка, док неозначени битови формирају другог потомка. Битови који су осенчени одабрани су ако задовољавају следећу вредност  $\text{rand}(0,1) > 0.5$ .

## 2.2.4 Мутација

Оператор мутације је важан корак у генетском алгоритму, без чије примене долази до преране конвергенције и заглављивања у локалне оптимуме. Применом овог оператора извршава се случајна промена гена у оквиру хромозома, у циљу побољшања претраге и истраживања простора допустивих решења и очувања разноврсности популације. На тај начин, променом структуре хромозома остварују се нова решења, која не би била истражена применом само корака селекције и укрштања. Принцип функционисања оператора мутације приказан је на слици 2.6.



Слика 2.6 Илустрација оператора мутације генетског алгоритма

На слици 2.6 се уочава да оператор мутације мења бит 0 у бит 1 на случајно одабраној позицији у хромозому. Оператор мутације извршава се са вероватноћом мутације која мора бити мала вредност, у оквирима 0,001% до 0,01%, како се процес претраге не би свео на случајну стохастичку претрагу, односно како се не би избрисао квалитетан генетски материјал задржан у операцијама селекције и укрштања.

Генетски алгоритам се заснива на итеративном поступку примене оператора селекције, укрштања и мутације, при чему се једна оваква итерација назива генерацијом. Ове операције се понављају све док се не достигне унапред постављен критеријум заустављања или се не достигне максимални број итерација. Општа структура генетског алгоритма приказана је у оквиру псеудо кода датог у Алгоритму 1.

**Алгоритам 1** Псеудо-код генетског алгоритма

---

```

1: Поставити параметре  $N_P, G_{max}, p_c, c_r$ 
2: Формирати почетну популацију  $\mathbf{x}_i \in [x_i^{min}, x_i^{max}]$ ,  $\forall i = 1, \dots, N_P$ 
3: Одредити вредност функције циља целе популације
4:  $G = 0$ 
5: while  $G \leq G_{max}$  do
6:   for  $i = 1$  do  $N_P$  do
7:     Извршити селекцију у складу са пропорционалном селекцијом
8:      $f_i \rightarrow f(\mathbf{x}_i)$ 
9:      $p_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^{N_P} f_j}$ 
10:    Генерисати случајан број  $r \in [0, 1]$ 
11:     $j = 1$ 
12:    while  $r > 0$  do
13:       $r = r - p_i$ 
14:       $j ++$ 
15:    end while
16:     $parent\_index \rightarrow id(i - 1)$ 
17:  end for
18:  Извршити укрштање између хромозома селектованих у
    претходном кораку
19:  Извршити мутацију
20:   $G ++$ 
21: end while
22: Прикажи глобално оптимално решење

```

---

**2.3 Алгоритам диференцијалне еволуције**

Алгоритам диференцијалне еволуције (DE) је метахеуристички оптимизациони алгоритам који припада групи еволутивних алгоритама који није инспирисан природним процесима и системима [18]. Овај алгоритам је нашао широку примену у решавању практичних инжењерских и разноврсних научних проблема првенствено због једноставне структуре, лаке имплементације и способности избегавања локалних оптимума [29]. Алгоритам диференцијалне еволуције оригинално је формиран за решавање једнокритеријумских оптимизационих проблема чији је допустиви регион подскуп реалних бројева, али је са временом модификован на примену у решавању вишекритеријумских оптимизационих проблема, као и проблема мешовито целобројно нелинеарног програмирања [51]. Аналогно осталим метахеуристикама које се заснивају на

оптимизацији скупа (популације) решења, и алгоритам диференцијалне еволуције ради са популацијом решења, коју кроз итерације применом оператора: селекције, мутације и укрштања усмерава ка глобалном оптималном решењу. Ови оператори се примењују над популацијом, односно скупом решења, која се у контексту оптимизације диференцијалном еволуцијом називају векторима. У литератури су детаљно разматране перформансе оптимизационог процеса DE алгоритма и уочава се да је оптимизациони процес осетљив на избор управљачких параметара који контролишу оптимизациони процес што може да доведе до споре конвергенције или појаве преурађене конвергенције ка локалном оптимуму [52]. Према томе, ради успешног решавања оптимизационих проблема, аутори су предложили низ препорука у погледу избора вредности, као и развоја адаптивних механизма за постављање следећих параметара: број чланова популације ( $N_p$ ), фактора скалирања ( $F$ ) и фактора укрштања ( $CR$ ) [52]. У наставку поглавља биће приказани механизми на којима су засновани оператори DE алгоритма.

### 2.3.1 Формирање иницијалне популације

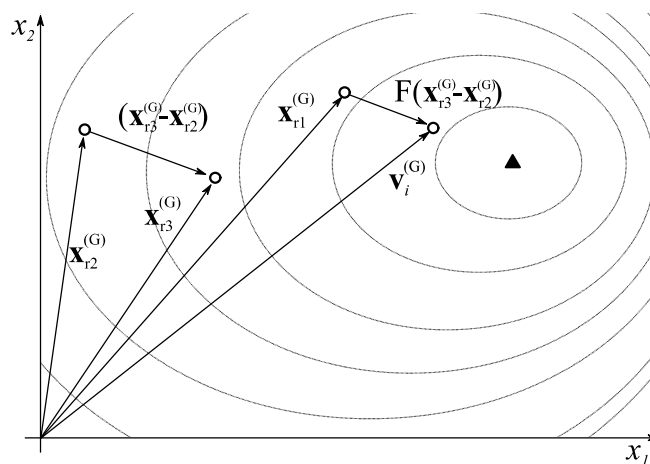
Оптимизациони процес алгоритма диференцијалне еволуције започиње формирањем иницијалне популације вектора. Популација DE алгоритма може се описати скупом  $\mathcal{P}^{(G)}$  који чине  $N_p$  вектора  $\mathcal{P}^{(G)} = \left\{ \mathbf{x}_i^{(G)} \mid x_{i,j}^{(G)} \in [x_{i,j}^{\min}, x_{i,j}^{\max}] \right\}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, N_p, \forall j = 1, 2, \dots, n$ , при чему се у генерацији  $G$  сваки члан из скупа  $\mathcal{P}^{(G)}$  представља као  $n$ -димензионални вектор  $\mathbf{x}_i^{(G)} = [x_{i,1}^{(G)}, x_{i,2}^{(G)}, \dots, x_{i,n}^{(G)}]^T$  који представља потенцијално решење посматраног оптимизационог проблема. Приликом генерисања иницијалне популације, све компоненте вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  из скупа  $\mathcal{P}^{(G)}$  налазе се унутар дозвољених граница  $x_{i,j}^{(G)} \in [x_{i,j}^L, x_{i,j}^U]$ , односно допустиве области, при чему  $x_{i,j}^{\min}$  и  $x_{i,j}^{\max}$  означавају доњу и горњу границу дозвољених вредности, респективно. Према томе, компоненте вектора  $\mathbf{x}_i^{(G=0)}$  које чине почетну популацију  $\mathcal{P}^{(G=0)}$ , у генерацији  $G = 0$ , можемо генерисати на основу израза:

$$x_{i,j}^{(G=0)} = x_{i,j}^{\min} + \text{rand}_j (x_{i,j}^{\max} - x_{i,j}^{\min}), \quad (2.4)$$

где је са  $\text{rand}_j$  означен равномерно распоређен случајни број из опсега  $[0,1]$ .

### 2.3.2 Мутација

У оквиру алгоритма диференцијалне еволуције, оператор мутације примењује се у циљу очувања диверсификације тренутне популације и откривања нових потенцијалних региона глобалног оптимума. У зависности од одабраног мутационог оператора, оптимизациони процес алгоритма диференцијалне еволуције остварује боље перформансе у погледу побољшане локалне или глобалне претраге. У складу са тим, у доступној литератури примењује се већи број различитих мутационих оператора, међу којима је најзаступљенији мутациони оператор DE/rand/1. Према томе, при извршавању мутационог оператора DE/rand/1 из тренутне популације произвољно се бирају три вектора  $\mathbf{x}_{r_1}^{(G)}, \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}, \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}$ , где се вектор  $\mathbf{x}_{r_1}^{(G)}$  назива основни вектор. Тада се одређује векторска разлика преостала два вектора  $\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}$ , која се затим множи фактором скалирања  $F$ , тако да важи следећи израз  $F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)})$ . У складу са тим, мутациони вектор  $\mathbf{v}_i^{(G)}$  добија се додавањем скалиране разлике случајно одабраних вектора на основни вектор, као што је приказано на слици 2.7.



Слика 2.7 Графичка интерпретација оптимизације DE/rand/1 мутационог оператора



Према томе, мутациони вектор  $\mathbf{v}_i^{(G)}$  формира се у складу са DE/rand/1 мутационим оператором према следећем изразу

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}), \quad (2.5)$$

где су  $r_1, r_2$  и  $r_3$  различити цели бројеви случајно генерисани из скупа целих бројева  $\{1, 2, \dots, N_p\} / i$ , тако да нису једнаки тренутном индексу  $i$ , и  $F$  означава фактор скалирања, одабран из скупа  $F \in (0, 2]$ , који представља један од основних управљачких параметара који контролишу оптимизациони процес DE алгоритма.

У доступној литератури јавља се велики број различитих мутационих оператора, формираних за потребе различитих типова оптимизационих проблема, међу којима се посебно издвајају [17, 28, 29, 52]:

DE/rand/2

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}) + F(\mathbf{x}_{r_4}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_5}^{(G)}), \quad (2.6)$$

DE/best/1

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{best}^{(G)} + F(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}), \quad (2.7)$$

DE/best/2

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{best}^{(G)} + F(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}) + F(\mathbf{x}_{r_3}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_4}^{(G)}), \quad (2.8)$$

DE/current-to-best/1

$$\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + F(\mathbf{x}_{best}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + F(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}), \quad (2.9)$$

где су  $r_1, r_2, r_3, r_4$  и  $r_5$  различити цели бројеви случајно генерисани из скупа  $\{1, 2, \dots, NP\} \setminus \{i\}$  и  $\mathbf{x}_{best}^{(G)}$  представља вектор из тренутне популације који има најповољнију вредност критеријумске функције за потребе решавања посматраног оптимизационог проблема.

### 2.3.3 Укрштање

Оператор укрштања се изводи након генерисања мутационог вектора у циљу копирања произвољно одабраних делова мутационог и базног вектора и креирања новог пробног вектора. Према томе, резултат оператора укрштања је пробни вектор  $\mathbf{u}_i^{(G)} = [u_{i,1}^{(G)}, u_{i,2}^{(G)}, \dots, u_{i,n}^{(G)}]^T$ , који настаје мешањем компоненти вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  и  $\mathbf{v}_i^{(G)}$ . У доступној литератури налази се више различитих приступа у извођењу укрштања као што су експоненцијално укрштање и униформно укрштање [29]. Најчешће примењиван оператор укрштања у литератури је униформно (биномно) укрштање, где се компоненте пробног вектора формирају на основу следећих услова

$$\mathbf{u}_{i,j}^{(G)} = \begin{cases} \mathbf{v}_{i,j}^{(G)} & \text{ако је } (rand_{i,j} \leq CR \vee j = j_{rand}) \\ \mathbf{x}_{i,j}^{(G)} & \text{у супротном} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\},$$

где је са  $rand_{i,j}$  означена функција која генерише бројеве у интервалу  $(0,1)$  применом униформне расподеле,  $CR$  представља вероватноћу укрштања, управљачки параметар у опсегу  $CR \in [0,1]$ , и  $j_{rand}$  означава случајно одабрани цео број из скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Дакле, применом оператора униформног укрштања на један пар вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$  и  $\mathbf{v}_i^{(G)}$ , потребно је генерисати равномерном расподелом  $n$  случајних бројева у интервалу  $(0,1)$  као и случајно генерисани цео број  $j_{rand}$  из скупа  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Ако је за  $j$  ти параметар испуњен услов  $rand_{i,j} \leq CR$  тада се  $j$  ти параметар узима из мутираног вектора, у супротном узима се параметар циљног вектора. Поред тога, код униформног укрштања бира се параметар  $j_{rand}$  који параметар из мутационог вектора директно пребацује у пробни вектор без обзира да ли је претходни услов испуњен. На тај начин се обезбеђује да се у оквиру пробног вектора нађе барем један параметар мутационог вектора како би се осигурала разноликост популације и избегло дуплирање базног вектора.

### 2.3.4 Селекција

Оператор селекције примењује се као последњи оператор у једној генерацији DE алгорита у циљу одређивања који од новонасталих вектора из популације, пробних вектора  $\mathbf{u}_i^{(G)}$  и базних вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, N_P$ , ће бити задржани за следећу генерацију. Према томе, упоређивањем вредности критеријумске функције пробног вектора  $\mathbf{u}_i^{(G)}$  и критеријумске функције базног вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$ , за наредну генерацију се задржава вектор који има повољнију вредност критеријумске функције (нижу вредност у случају минимизације), односно записано следећим изразом

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \begin{cases} \mathbf{u}_i^{(G)}, & \text{ако је } f(\mathbf{u}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \\ \mathbf{x}_i^{(G)}, & \text{у супротном} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_P,$$

где  $\mathbf{x}_i^{(G+1)}$  означава вектор који се задржава у популацији  $\mathcal{P}^{(G+1)}$  за следећу генерацију.

Процес оптимизације посматране функције циља применом алгорита диференцијалне еволуције итеративно примењује претходно описане операторе мутације, укрштања и селекције у свакој генерацији све док се не испуни унапред дефинисан критеријум конвергенције.

У складу са претходно изложеним операторима алгорита диференцијалне еволуције, одговарајући псеудо-код приказан је у Алгоритму 2.

---

#### Алгоритам 2 Алгоритам диференцијалне еволуције

---

- 1: Поставити параметре  $N_P, G_{max}, F, CR$
- 2: Формирати иницијалну популацију  $\mathbf{x}_i^{(0)} \in [x_{i,j}^{min}, x_{i,j}^{max}]$ ,  $\forall i = 1, \dots, N_P$
- 3: Одредити вредност функције циља целе популације
- 4:  $G = 0$
- 5: **while**  $G \leq G_{max}$  **do**
- 6:     **for**  $i = 1$  **do**  $N_P$  **do**
- 7:         Генерисати три цела броја  $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i$
- 8:         Применити мутациони оператор
- 9:          $\mathbf{v}_i^{(G)} = \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} + F (\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)})$

---

```

10:      Извршити укрштање
11:      for  $j = 1$  do  $n$  do
12:          if  $\text{rand}_{i,j} \leq CR \vee j = j_{\text{rand}}$  then
13:               $u_{i,j}^{(G)} = v_{i,j}^{(G)}$ 
14:          else
15:               $u_{i,j}^{(G)} = x_{i,j}^{(G)}$ 
16:          end if
17:      end for
18:      Изабрати јединке за следећу генерацију
19:      if  $f(\mathbf{u}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{x}_i^{(G)})$  then
20:           $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{u}_i^{(G)}$ 
21:      else
22:           $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{v}_i^{(G)}$ 
23:      end if
24:  end for
25:   $G++$ 
26: end while
27: Прикажи глобално оптимално решење

```

---

## 2.4 Алгоритам оптимизације ројем честица

Алгоритам оптимизације ројем честица (PSO) припада групи метахеуристичких алгоритама чији су механизми за решавање оптимизационих проблема инспирисани понашањем јата риба, ројева инсеката и јата птица у потрази за извором хране [53]. Према томе, вођено инстинктима у потрази за храном јато размењује социјалну информацију и креће се ка јединки из јата која је потенцијално пронашла највећи извор хране. Међутим, у потрази за храном јединка може бити вођена и сопственим инстинктом и на тај начин да истражи извориште хране независно од читавог јата.

Аналогно метахеуристикама које се заснивају на оптимизацији популације решења, оптимизациони процес PSO алгоритма започиње формирањем иницијалне популације, односно јата, решења које се у контексту PSO алгоритма називају честице. За сваку честицу у јату, у свакој генерацији  $G$ , познат је вектор положаја  $\mathbf{x}_i^{(G)} = [x_{i,1}^{(G)}, x_{i,2}^{(G)}, \dots, x_{i,n}^{(G)}]^T$  и брзина честице  $\mathbf{s}_i^{(G)} = [s_{i,1}^{(G)}, s_{i,2}^{(G)}, \dots, s_{i,n}^{(G)}]^T$ . Према томе, популацију PSO алгоритма описује се скупом  $\mathcal{P}^{(G)}$  који чине  $N_p$  вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$ ,

односно  $\mathcal{P}^{(G)} = \left\{ \mathbf{x}_i^{(G)} \mid x_{i,j}^{(G)} \in [x_{i,j}^{\min}, x_{i,j}^{\max}] \right\}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, N_p, \forall j = 1, 2, \dots, n$ , и њима придружени вектори  $\mathbf{s}_i^{(G)}$ , при чему  $x_{i,j}^{\min}$  и  $x_{i,j}^{\max}$  означавају доњу и горњу границу допустивих вредности компоненти вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$ , респективно. Дакле, применом униформне расподеле, могуће је генерисати компоненте вектора положаја за иницијално јато честица помоћу израза:

$$x_{i,j}^{(G=0)} = x_{i,j}^{\min} + \text{rand}_j (x_{i,j}^{\max} - x_{i,j}^{\min}), \quad \forall i = 1, \dots, N_p \wedge \forall j = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

где је са  $\text{rand}_j$  означен униформно распоређен случајни број из опсега  $[0,1]$ .

У циљу истраживања простора допустивих решења и изналажења глобалног оптимума, у свакој генерацији се положај честица ажурира се у складу са вредношћу брзине у тренутној генерацији. Брзина честице у тренутној генерацији се формира на основу вредности најбољег решења које су оствариле све честице јата  $\mathbf{g}^{(G)} = [g_1^{(G)}, g_2^{(G)}, \dots, g_n^{(G)}]^T$  у претходној генерацији, и вредности најбољег решења које је истражено од стране сваке честице појединачно  $\mathbf{p}_i^{(G)} = [p_{i,1}^{(G)}, p_{i,2}^{(G)}, \dots, p_{i,n}^{(G)}]^T$ .

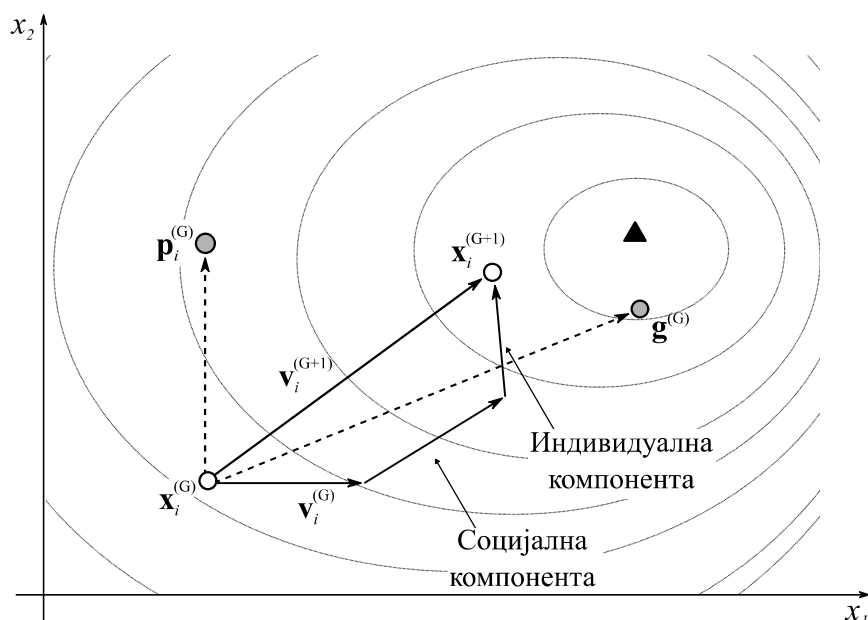
Уколико током процеса оптимизације, већи утицај на формирање вектора  $\mathbf{s}_i^{(G)}$  има вектор  $\mathbf{p}_i^{(G)}$ , тада је интензивираан процес претраге простора допустивих решења. Међутим, уколико већи утицај на формирање вектора брзине има вектор  $\mathbf{g}^{(G)}$ , тада доминира социјална компонента која усмерава кретање ка бржој конвергенцији ка локалном оптимуму.

Дакле, у свакој генерацији  $G$ , за сваку честицу из јата  $i$  врши се ажурирање вредности вектора брзине и вектора позиције, у складу са изразима

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 \text{rand}_{1,i} (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2 \text{rand}_{2,i} (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \mathbf{s}_i^{(G)}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_p, \quad (2.14)$$

где су са  $\text{rand}_{1,i}$  и  $\text{rand}_{2,i}$  означени различити бројеви генерисани на основу униформне расподеле у опсегу  $[0,1]$ , док су са  $c_1$  и  $c_2$  означени коефицијенти когнитивног и социјалног убрзања, респективно. Као што је претходно указано, у зависности од утицаја вектора  $\mathbf{g}^{(G)}$  и  $\mathbf{p}_i^{(G)}$  на формирање вредности вектора брзине зависе и оптимизационе перформансе PSO алгоритма. Анализом израза (2.13) произилази да се променом вредности параметара  $c_1$  и  $c_2$  може ефикасно успоставити равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге. Наиме, већа вредност коефицијента  $c_1$  поспешује глобалну претрагу, док већа вредност коефицијента  $c_2$  убрзава претрагу у региону у околини честице  $\mathbf{g}^{(G)}$ . Према томе, у литератури је развијен велики број механизма за адаптивну промену вредности ових параметара током оптимизационог процеса, од употреба временски променљивих коефицијента убрзања до нелинеарних динамичких коефицијената убрзања [22]. На слици 2.8 дат је графички приказ израза за ажурирање вредности вектора брзине и вектора позиције, датих једначинама (2.13) и (2.14), при решавању дводимензионалног оптимизационог проблема са контурним графиком функције циља.



Слика 2.8 Графичка интерпретација ажурирања вредности вектора брзине и вектора позиције PSO алгоритма

Такође, у циљу спречавања проблема споре конвергенције ка оптималном решењу, у литератури је предложено коришћење фактора инерције  $w^{(G)}$  [54]. Према томе, израз за одређивање вредности вектора брзине постаје

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = w^{(G)} \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 \text{rand}_{1,i} \left( \mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right) + c_2 \text{rand}_{2,i} \left( \mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right). \quad (2.15)$$

Вредност фактора инерције  $w^{(G)}$  ажурира се из генерације у генерацију у складу са одабраном законитошћу, тако да на почетку оптимизационог процеса вредност фактора инерције буде блиска 1. На тај начин се поспешује глобална претрага допустивог региона, јер нема ограничења вредности вектора брзине. Са порастом броја генерација, вредност фактора  $w^{(G)}$  опада и тежи ка вредности 0. На тај начин, вредност вектора брзине се ограничава и његов утицај на генерисање новог решења се постепено смањује и поспешује се локална претрага. Дакле, на основу ове анализе произилази низ законитости за промену вредности фактора  $w^{(G)}$ , од који се најшире примењује линеарна законитост, која је дата следећим изразом

$$w^{(G)} = w_{\max} - \frac{G}{G_{\max}} (w_{\max} - w_{\min}), \quad (2.16)$$

где су са  $w_{\min}$  и  $w_{\max}$  означене доња и горња граница вредности фактора инерције, респективно, а  $G_{\max}$  представља максимални број генерација PSO алгоритма.

У циљу одређивања вредности вектора брзине  $\mathbf{s}_i^{(G)}$  и усмеравања кретања честица у јату, на крају сваке итерације потребно је за сваку честицу у популацији одредити вредност најбољег решења које је истражено од стране сваке честице појединачно  $\mathbf{p}_i^{(G)}, \forall i = 1, 2, \dots, N_p$ , односно ажурирање скупа најбољих позиција честица  $\{\mathbf{p}_i^{(G)}\}$ , у складу са следећим изразом

$$\mathbf{p}_i^{(G+1)} = \begin{cases} \mathbf{x}_i^{(G+1)}, & \text{ако је } f(\mathbf{x}_i^{(G+1)}) \leq f(\mathbf{p}_i^{(G)}) \\ \mathbf{p}_i^{(G)}, & \text{у супротном} \end{cases} \quad (2.17)$$

$i = 1, 2, \dots, N_p.$

Према томе, из скупа најбољих позиција честица  $\{\mathbf{p}_i^{(G)}\}, \forall i = 1, 2, \dots, N_p$  одређује се вредност најбољег решења које су оствариле све честице јата, односно

$$\mathbf{g}^{(G)} = \underset{i}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{p}_i^{(G)}), \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N_p\}. \quad (2.18)$$

Током процеса оптимизације посматране критеријумске функције применом PSO алгоритма, итеративно се примењују претходно описани механизми у свакој генерацији, све док се не испуни унапред дефинисан критеријум конвергенције.

У складу са претходно изложеним, одговарајући псеудо-код PSO алгоритма приказан је у Алгоритму 3.

---

**Алгоритам 3** Алгоритам оптимизације ројем честица

---

- 1: Поставити параметре  $G_{max}, c_1, c_2, \omega_{max}, \omega_{min}$
  - 2: Формирати почетну популацију  $\mathbf{x}_i \in [x_i^{min}, x_i^{max}], \forall i = 1, \dots, N_p$
  - 3: Иницијализовати вредности брзине  $\mathbf{s}_i^{(0)}, \forall i \in \{1, 2 \dots N_p\}$
  - 4: Одредити вредност функције циља целе популације
  - 5: Поставити иницијалне вредности  $\mathbf{p}_i^{(0)}, \forall i \in \{1, 2 \dots N_p\}$  и  $\mathbf{g}^{(0)}$
  - 6:  $G = 0$
  - 7: **while**  $G \leq G_{max}$  **do**
  - 8: Срачунати фактор инерције  $w^{(G)}$  према линеарној законитости
  - 9: **for**  $i = 1$  **do**  $N_p$  **do**
  - 10: Ажурирати вредности вектора брзине
  - 11:  $\mathbf{s}_i^{(G+1)} = w^{(G)}\mathbf{s}_i^{(G)} + c_1\operatorname{rand}_{1,i}(\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2\operatorname{rand}_{2,i}(\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$ .
  - 12: Ажурирати вектор позиције
  - 13:  $\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \mathbf{s}_i^{(G+1)}$
  - 14: Ажурирати вредност  $\mathbf{p}_i^{(G)}$  и  $\mathbf{g}^{(G)}$
  - 15: **if**  $f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{p}_i^{(G)})$  **then**
  - 16: Поставити  $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{x}_i$
  - 17: **end if**
  - 18: **if**  $f(\mathbf{x}_i^{(G)}) \leq f(\mathbf{g}^{(G)})$  **then**
  - 19: Поставити  $\mathbf{g} \rightarrow \mathbf{x}_i$
  - 20: **end if**
  - 21: **end for**
  - 22:  $G++$
  - 23: **end while**
  - 24: Прикажи глобално оптимално решење
-



### 3 Вишекритеријумска оптимизација

Велики број оптимизационих проблема, који се јављају у модерним инжењерским апликацијама, не могу се моделовати једном критеријумском функцијом. Детаљно моделовање ових сложених проблема води до више критеријумских функција, које су често у супротности једна са другом, па је потребно донети одлуку као резултат компромиса између више критеријума. У зависности од тога у ком тренутку се при решавању користе претпоставке у односу на поједине критеријумске функције, разликују се три групе метода за решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема [31, 55, 56]. Прву групу сачињавају методе код којих се полазне претпоставке користе пре оптимизационе процедуре. Код ових метода, корисник мора да претходно квантификује релативни утицај појединих критеријумских функција. Из ове групе метода посебно се издвајају приступ тежинске суме (*weighted sum method*), лексикографски метод (*Lexicographic method*), као и метод мин-макс (*min-max method*), које се заснивају на трансформацији вишекритеријумског оптимизационог проблема у једнокритеријумски оптимизациони проблем [31, 32, 56]. Другу групу чине методе које претпоставке користе после оптимизационе процедуре. Дакле, код ових метода корисник претпоставке примењује директно на скуп потенцијалних решења оптимизационог проблема. Из ове групе метода издвајају се метода физичког програмирања као и еволутивни алгоритми засновани на оператору селекције недоминантних решења (*non dominated sorting operator*)[35, 57, 58]. Трећу групу чине методе које не користе претпоставке у односу на критеријумске функције вишекритеријумског оптимизационог проблема[59].

### 3.1.1 Формулација вишекритеријумског оптимизационог проблема

Проблем симултане оптимизације више критеријумских функција на задатом допустивом скупу може се математички формулисати на следећи начин:

Одредити вредност  $n$ -димензионалног вектора управљачких променљивих  $\mathbf{x}$ , за које векторска функција циља  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  добија екстремну вредност, односно за случај минимизације:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x})], \quad (3.1)$$

задовољавајући следећа функционална ограничења, типа неједнакости

$$g_k(\mathbf{x}) \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (3.2)$$

и типа једнакости

$$h_l(\mathbf{x}) = 0 \quad l = 1, \dots, L. \quad (3.3)$$

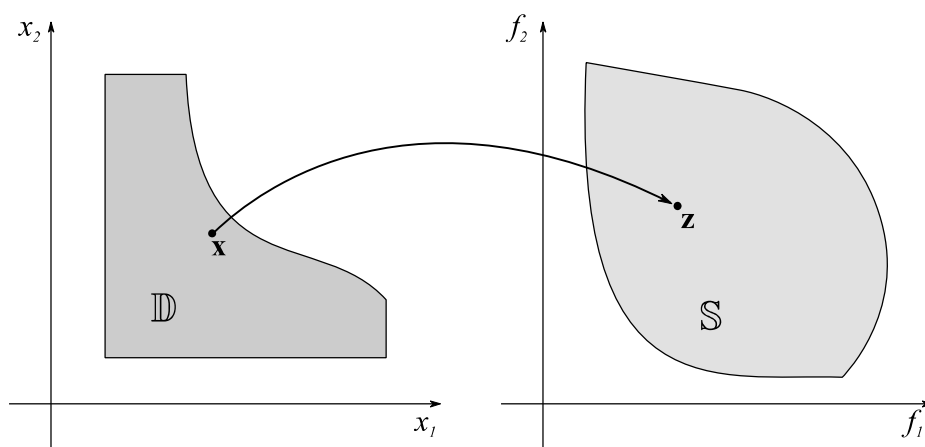
У општем случају, вишекритеријумски оптимизациони проблем може се описати следећим једначинама

$$\begin{aligned} \min f_m(\mathbf{x}_i) \quad m = 1, \dots, M \wedge i = 1, \dots, N_p \\ p.o. \\ g_k(\mathbf{x}_i) \geq 0, \quad k = 1, \dots, K \\ h_l(\mathbf{x}_i) = 0, \quad l = 1, \dots, L \\ x_{i,j} \in [x_j^{Lower}, x_j^{Upper}], \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $M$  представља укупан број критеријумских функција које треба оптимизовати,  $g_k(\mathbf{x}_i)$  представља  $k$ -то ограничење типа неједнакости, док  $h_l(\mathbf{x}_i)$  означава  $l$ -то ограничење типа једнакости, при чему је са  $K$  и  $L$  означен укупан број ограничења типа неједнакости и укупан број ограничења типа једнакости, респективно. Са  $x_j^D$  и  $x_j^G$  означене су доње и горње границе променљивих, респективно. Решење постављеног оптимизационог проблема  $\mathbf{x}$  је вектор управљачких променљивих димензије  $n$ . Према томе, скуп  $\mathbb{D}$  који задовољава сва претходно постављена

ограничења оптимизационог проблема назива се допустиви скуп управљачких променљивих, односно  $\mathbb{D} = \{ \mathbf{x} \mid g_k(\mathbf{x}_i) \geq 0 \wedge h_l(\mathbf{x}_i) = 0 \wedge x_{i,j} \in [x_j^D, x_j^G] \}$ , где је  $\mathbb{D}$  подскуп реалног  $n$  димензионалног простора, односно  $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ , при томе се претпоставља да  $\mathbb{D}$  није празан скуп.

За разлику од једнодимензионалне оптимизације, код вишекритеријумских оптимизационих проблема критеријумске функције сачињавају вишедимензионални простор који се назива критеријумски простор  $\mathbb{S}$ . Дакле, за свако решење из допустивог скупа  $\mathbb{D}$  постоји тачка у критеријумском простору која се може записати као  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{s} = [s_1, s_2, \dots, s_M]$ . Према томе, пресликавање између простора допустивих решења и критеријумског простора приказано на слици 3.1, представља пресликавање између  $n$ -димензионалног вектора управљачких променљивих и  $M$ -димензионог вектора критеријумских функција.



Слика 3.1 Приказ пресликавања простора управљачких променљивих у простор критеријумских функција за две критеријумске функције

Без губљења на општости, сваки разматрани вишекритеријумски оптимизациони проблем може се дефинисати као проблем минимизације векторске функције циља  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Дакле, уколико се тражи одређивање максимума неке од критеријумских функција, проблем минимизације може се трансформисати у проблем максимизације, множењем посматране критеријумске функције са  $-1$ , односно

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} f_i(\mathbf{x}) = -\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} (-f_i(\mathbf{x})), \quad i = 1, \dots, M. \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Конвексност и неконвексност вишекритеријумског оптимизационог проблема

При разматрању конвексности вишекритеријумских оптимизационих проблема полази се од дефиниције конвексне функције.

**Дефиниција 1.** *Конвексна функција:* Функција  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  је конвексна функција ако за било која два решења  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  важи следећи услов

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}_2), \quad (3.6)$$

за свако  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Према дефиницији, аналогно се проверава и неконвексност функције заменом знака у једначини (3.6). Такође за проверу конвексности функције примењује се Хесијан матрица  $\nabla^2 f$ . Ако је Хесијан матрица посматране функције позитивнодефинитна матрица тада је функција конвексна. Такође, потребно је дефинисати и појам конвексности скупа.

**Дефиниција 2.** *Конвексан скуп:* Кажемо да је скуп  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}^n$  конвексан скуп ако важи:

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}) \Rightarrow \{(1-\lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} : \lambda \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{K}. \quad (3.7)$$

Односно геометријски посматрано, скуп је конвексан ако за сваке две тачке из тог скупа садржи линијски сегмент који спаја те две тачке.

Треба приметити да, уколико су сва ограничења типа неједнакости  $g_l(\mathbf{x})$ ,  $\forall l = 1, \dots, L$  посматраног оптимизационог проблема неконвексна, скуп решења које задовољавају неједначину  $g_l(\mathbf{x}) \geq 0$  чине конвексан скуп. Према томе, допустиви скуп управљачких променљивих ограничен са неконвексним ограничењима типа неједнакости је конвексан скуп.

Дакле, услед постојања више критеријумских функција и више ограничења у оквиру вишекритеријумског оптимизационог проблема у циљу одређивања конвексности потребно је да се задовоље услови дати у оквиру дефиниције 3.

**Дефиниција 3.** *Конвексност вишекритеријумског оптимизационог проблема:* Вишекритеријумски оптимизациони проблем је конвексан ако су све критеријумске функције конвексне и ако је допустиви скуп управљачких променљивих  $\mathbb{D}$  конвексан скуп.

Према томе, конвексност вишекритеријумског оптимизационог проблема је значајано својство. У литератури постоји велики број алгоритама који се успешно могу применити на решавање конвексних вишекритеријумских оптимизационих проблема. Међутим ови алгоритми, често не могу да остваре оптимално решење када се примене на решавање неконвексних проблема. Ово представља значају мотивацију за развој нових и модификацију постојећих оптимизационих алгоритама у циљу успешног решавања сложених и неконвексних оптимизационих проблема. Такође треба напоменути да иако је посматрани вишекритеријумски оптимизациони проблем неконвексан, скуп Парето оптималних решења тада може бити конвексан.

### 3.1.3 Оптимизација у смислу Парета

Основна идеја примене концепта Парето оптималности састоји се у одређивању скупа недоминантних решења без укључивања претпоставки у односу на поједине критеријумске функције пре оптимизационог процеса. С обзиром да вишекритеријумски оптимизациони проблем подразумева истовремену оптимизацију више критеријумских функција, односно

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_n(\mathbf{x})]. \quad (3.8)$$

Скаларни концепт оптималности не може директно да се примени на овакве оптимизационе проблеме. Према томе, потребно је увести концепт Парето оптималност, која се дефинише на следећи начин:

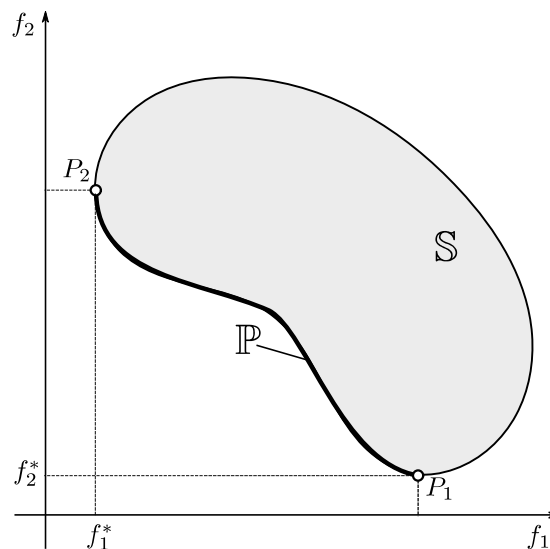
Решење  $\mathbf{x}^*$  је недоминантно за постављени оптимизациони задатак ако не постоји друго  $\mathbf{x}'$  тако да

$$\begin{aligned} f_m(\mathbf{x}') &\leq f_m(\mathbf{x}^*), \quad \forall m = 1, \dots, M \quad \wedge \\ f_m(\mathbf{x}') &< f_m(\mathbf{x}^*), \quad \text{bar za jedno } m. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Односно, за  $\mathbf{x}^*$  каже се да је недоминантно решење ако побољшање вредности једне критеријумске функције увек води ка погоршању вредности бар једне друге критеријумске функције.

**Дефиниција 4.** *Парето оптималност:* Тачка  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{D}$  је Парето оптимална ако и само ако не постоји друга тачка  $\mathbf{x}' \in \mathbb{D}$ , таква да за њу важи  $f_m(\mathbf{x}') \leq f_m(\mathbf{x}^*)$ ,  $\forall m = 1, \dots, M$ , и  $f_m(\mathbf{x}') < f_m(\mathbf{x}^*)$  за најмање једно  $m$ .

Означимо са  $\mathbb{P}$  скуп свих недоминантних решења која представљају решење постављеног вишекритеријумског оптимизационог задатка у смислу Парето оптималности. При томе, примећује се да све тачке из скупа  $\mathbb{P}$  леже на граници допустивог простора критеријумских функција  $\mathbb{S}$ . На слици 3.2 приказан је скуп недоминантних решења који се налази између тачака  $P_1$  и  $P_2$ , за случај минимизације две критеријумске функције.



Слика 3.2 Приказ скупа недоминантних решења у простору две критеријумске функције

Према томе, на слици 3.2 се уочава да скуп свих недоминантних решења  $\mathbb{P}$  чине све тачке на кривој  $\widehat{P_1 P_2}$ . Уочава се да кретањем од тачке  $P_1$  према тачки  $P_2$  опада

вредност критеријумске функције  $f_2$ , при чему истовремено расте вредност критеријумске функције  $f_1$ . Први корак при решавању постављеног оптимизационог проблема је изналажење скупа  $\mathbb{P}$ . Након тога, потребно је применити методе одлучивања, код којих се на основу преференције, односно претпоставки у односу на поједине критеријумске функције, доноси одлука о коначном решењу.

### 3.1.4 Компромисно решење

Као што је претходно указано, вишекритеријумску оптимизацију карактерише постојање већег броја критеријума који су међусобно контрадикторни. Код оваквих проблема смањивање вредности једног критеријума неминовно води ка повећању вредности другог критеријума. Дакле, постизање екстремума (минимума или максимума) по једном критеријуму негативно се одражава по остале критеријуме.

Према томе, решење овог проблема представља компромис, односно подразумева минимизацију разлике између потенцијалног оптималног и идеалног решења.

Претпоставимо да постоји оптимално решење  $\mathbf{x}_i^*$  по сваком  $i$ -том критеријуму, такво да за њега важи

$$f_i^* = \min f_i(\mathbf{x}) \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (3.10)$$

Тада вектор  $\mathbf{f}^* = [f_1^*, f_2^*, \dots, f_M^*]^T$  у критеријумском простору  $\mathbb{S}$  представља идеално или утопија решење вишекритеријумског оптимизационог проблема. Дакле, решење  $\mathbf{x}^*$  представља идеално решење оптимизационог проблема (3.4) ако и само ако  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{D} \wedge f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$ .

Међутим, услед контрадикторне природе критеријума, ова тачка је недостижна, и такво решење не припада допустивом скупу управљачких променљивих. Према томе, потребно је у критеријумском простору  $\mathbb{S}$  пронаћи

решење које припада скупу свих недоминантних решења  $\mathbb{P}$  које је најближе идеалној тачки.

Усвојимо за меру растојања између вектора  $\mathbf{f}^*$  и  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  у критеријумском простору  $\mathbb{S}$  следећу  $L_p$ ,  $p \in [1, \infty)$  метрику, која се може дефинисати изразом

$$L_p(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^*\|_p = \sum_{i=1}^M \left[ |f_i(\mathbf{x}) - f_i^*|^p \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.11)$$

Дакле, у циљу изналажења компромисног решења, поставља се оптимизациони задатак користећи усвојену  $L_p$  норму, у следећем облику

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^*\|_p, \quad p \geq 1. \quad (3.12)$$

Полазећи од постављеног оптимизационог задатка, компромисно решење  $\mathbf{x}^c$  добија се из следећег оптимизационог задатка

$$\mathbf{x}^c = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^*\|_p, \quad p \geq 1, \quad (3.13)$$

и представља решење које је, према усвојеној  $L_p$  метрици, најближе идеалном решењу  $\mathbf{x}^*$  у критеријумском простору  $\mathbb{S}$ .

При решавању практичних оптимизационих задатака, критеријумске функције су у општем случају различитих димензија. Према томе, пре него што се приступи одређивању компромисног решења потребно је спровести нормализацију вредности критеријумских функција. Дакле, оптимизациони задатак одређивања компромисног решења  $\mathbf{x}^c$  тада постаје

$$\mathbf{x}^c = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \sum_{i=1}^M \left[ \left| \frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^*}{f_i^*} \right|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1. \quad (3.14)$$

Отежавајући фактор код дефинисања компромисног решења јесте одабир параметра  $p$ , метрике дефинисане једначином (3.11). Уколико се за вредност



параметра усвоји  $p = 1$ , тада сва одступања на укупно растојање утичу пропорционално својим вредностима. Међутим, треба посебно напоменути да сва решења усвојена за  $p \in [1, \infty)$  припадају скупу  $\mathbb{P}$ , односно скупу свих недоминантних решења, која представљају решење постављеног вишекритеријумског оптимизационог задатка у смислу Парето оптималности.

### 3.2 Метода тежинских коефицијената

Основна идеја примене методе тежинских коефицијената огледа се у трансформацији вишекритеријумског оптимизационог задатка у једнокритеријумски проблем [31, 60]. Применом ове методе, све разматране критеријумске функције посматраног оптимизационог проблема се сумирају се у једну функцију циља, где се вредност сваке од критеријумских функција множи са одговарајућим тежинским коефицијентом. Према томе, почетни оптимизациони задатак (3.1), може се трансформисати на следећи начин

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} w_i f_i(\mathbf{x}), \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad (3.15)$$

где су  $f_i(\mathbf{x})$  конвексне критеријумске функције и  $w_i$  означавају претходно задате тежинске коефицијенте, одабране тако да важи

$$\sum_{i=1}^M w_i = 1, \quad w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (3.16)$$

Размотримо вишекритеријумски оптимизациони проблем са две критеријумске функције, тада за константне вредности тежинских коефицијената  $w_1$  и  $w_2$ , функција циља оптимизационог проблема (3.15) има облик:

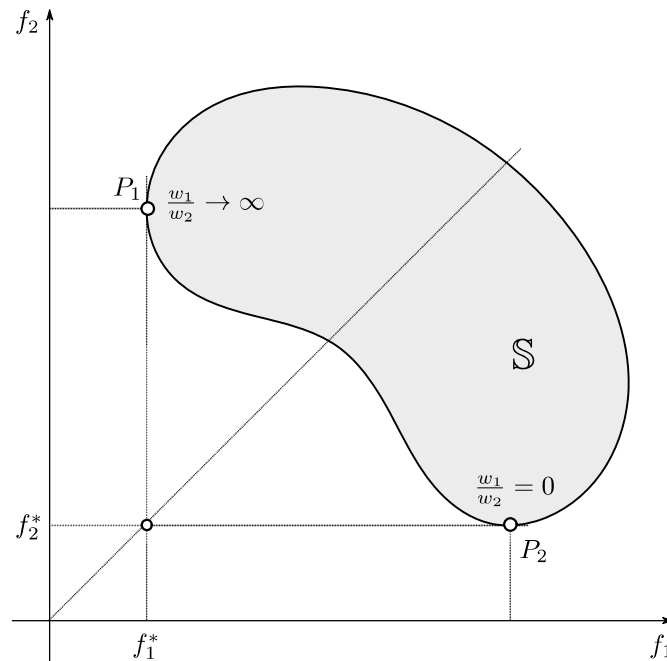
$$C = w_1 f_1(\mathbf{x}) + w_2 f_2(\mathbf{x}). \quad (3.17)$$

Односно, ради анализе у критеријумском простору, претходна једначина може да се напише у облику

$$f_2(\mathbf{x}) = -\frac{w_1}{w_2} f_1(\mathbf{x}) + \frac{C}{w_2}, \quad (3.18)$$

где је нагиб праве дефинисан са  $-\frac{w_1}{w_2}$ , одсечак на оси  $Of_2$  је дефинисан са  $\frac{C}{w_2}$ , док

$C$  означава константу. На слици 3.3 приказана је графичка интерпретација вишекритеријумског оптимizacionог проблема са две критеријумске функције у критеријумском простору.

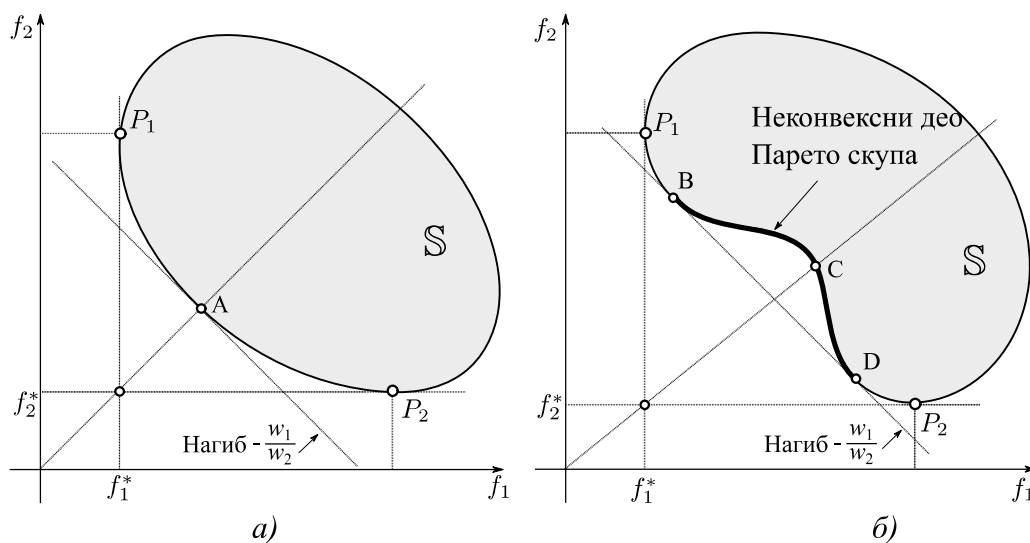


Слика 3.3 Геометријска интерпретација варирања коефицијената у случају оптимizacionог проблема са две критеријумске функције

Са слике произилази да се скуп  $\mathbb{P}$  свих недоминантних решења која представљају решења у смислу Парето оптималности налазе између тачака  $P_1$  и  $P_2$ . Ове тачке се добијају за граничне вредности односа тежинских коефицијената, односно

$$-\frac{w_1}{w_2} \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad -\frac{w_1}{w_2} \rightarrow 0. \quad (3.19)$$

На слици 3.4 приказана је графичка интерпретација оптимizacionог процеса са две критеријумске функције, за случаје када је критеријумски простор конвексан и када је критеријумски простор неконвексан.



Слика 3.4 Геометријска интерпретација оптимизационог процеса методе тежинских коефицијената за а) конвексни критеријумски простор и б) неконвексни критеријумски простор

Дакле, геометријска интерпретација оптимизационог процеса подразумева транслаторно померање праве дефинисане изразом (3.18) у негативном правцу  $Of_1$  осе све док више не постоји допустивих решења испод праве. Према томе на слици 3.4а приказано је одређивање недоминантне тачке  $A$  повлачењем тангенте на критеријумски простор  $S$ . Међутим, уколико је критеријумски простор неконвексан, као што је приказано на слици 3.4б, тада се тачке на неконвексном делу Парето фронта не могу добити ниједном комбинацијом тежинских коефицијената, што представља основни недостатак ове методе.

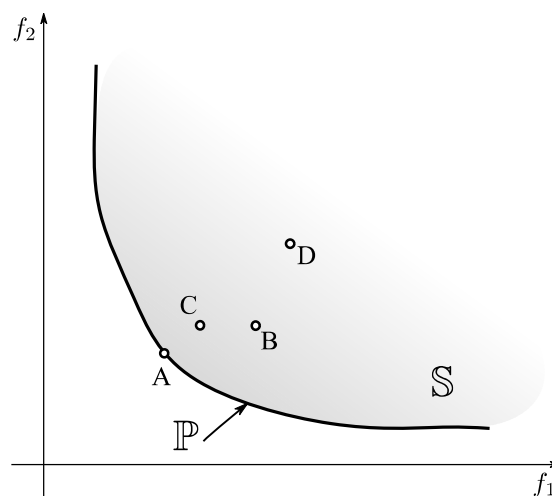
### 3.3 Еволутивни алгоритми за вишекритеријумску оптимизацију

Код метахеуристичких алгоритама за решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема примењују се исти појмови и оператори као и код алгоритама за једнокритеријумску оптимизацију. Тако се код GA и DE алгоритама примењују оператори селекције, укрштања и мутацији како су описани у другом поглављу. Међутим, разлика између алгоритама за једнокритеријумску и вишекритеријумску оптимизацију огледа се у примени концепта доминације при

решавању вишекритеријумског оптимизационог проблема [7, 57, 61]. Концепт доминације уведен је при дефинисању концепта Парето оптималности. У наставку, биће детаљније приказан концепт доминације као и приказ вишекритеријумских метахеуристичких оптимизационих алгоритама.

### 3.4 Концепт доминације

При решавању једнокритеријумских оптимизационих проблема, дефинисање мере за поређење квалитета два решења је очигледно, и заснива се на поређењу вредности функције циља између два решења. Према томе, за минимизацијски проблем, решење које има нижу вредност критеријумске функције постаје решење са најбољим карактеристикама за решавање постављеног оптимизационог проблема. С друге стране, приликом решавања вишекритеријумских оптимизационих проблема, који у општем случају подразумевају постојање две или више критеријумских функција које су међусобно контрадикторне, односно повећање вредности једне води до смањења вредности друге функције, дефинисање мере за поређење квалитета два решења постаје комплекснији проблем. Анализирајући решења вишекритеријумског оптимизационог проблема на примеру минимизације две критеријумске функције  $f_1$  и  $f_2$ , у критеријумском простору  $\mathbb{S}$  издвојимо два решења означена тачкама А и В, како је приказано на слици 3.5.



Слика 3.5 Илустрација концепта Парето оптималности

Уочава се да је решење означено тачком А боље у односу на решење означеног тачком В, односно решење А има ниже вредности обе критеријумске функције у односу на решење В. Упоређујући решења означена тачкама В и С, уочава се да решење С води ка унапређењу вредности само једне од критеријумских функција посматраног оптимизационог проблема. Према томе, тачка С има нижу вредност критеријумске функције  $f_1$  у односу на тачку В, док им је вредност по критеријумској функцији  $f_2$  једнака. Дакле, закључује се да је решење С боље од решења В. С друге стране, упоређујући даље решења у критеријумском простору, између решења означених тачкама В и D не може се јасно донети закључак које од два решења поседује боље карактеристике за решавање постављеног оптимизационог проблема.

Према томе, у циљу поређења квалитета два вектора  $\mathbf{x}_a$  и  $\mathbf{x}_b$  из допустивог простора,  $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \in \mathbb{D}$ , који представљају потенцијална решења посматраног оптимизационог проблема код вишекритеријумске оптимизације, потребно је увести концепт доминације на следећи начин

**Дефиниција 5.** За решење  $\mathbf{x}_a$  каже се да доминира над решењем  $\mathbf{x}_b$  ако су следећа тврђења испуњена:

1. Решење  $\mathbf{x}_a$  није лошије од решења  $\mathbf{x}_b$  за све критеријумске функције
2. Решење  $\mathbf{x}_a$  је строго боље од решења  $\mathbf{x}_b$  за бар једну критеријумску функцију.

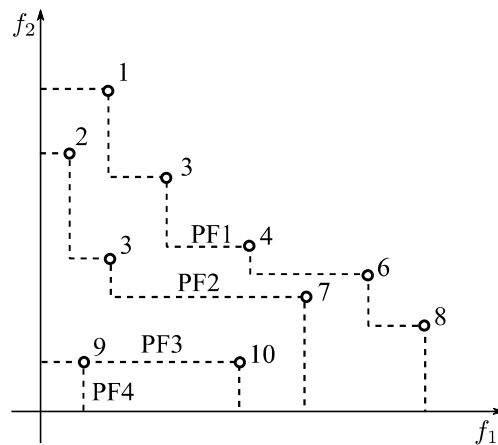
Применом концепта доминације у оквиру метахеуристичких алгоритама могуће је успешно решити комплексне вишекритеријумске оптимизационе проблеме.

### 3.5 Генетски алгоритам са сортирањем према концепту недоминације решења (*Non-dominated Sorted Genetic Algorithm*)

Генетички алгоритам са сортирањем према концепту недоминације решења, у ознаци NSGA-II, настао је као модификација NSGA алгоритма [62]. У оквиру овог алгоритма одговарајући квалитет решења  $x \in \mathbb{D}$ , који се дефинише на основу функције подобности, одређује се узимајући у обзир не само решења која доминирају над овим решењем, већ и решења над којима  $x$  доминира. Такође, за сваки хромозом из популације срачунава се растојање до нагомилавања (*crowding distance* - CD) које узима у обзир Еуклидско растојање посматраног решења од осталих решења у тренутној популацији у критеријумском простору. На тај начин, квалитет сваке од јединици у популацији се модификује узимајући у обзир CD метрику, у циљу очувања разноликости решења. За разлику од многих еволутивних алгоритама за вишекритеријумску оптимизацију, NSGA-II алгоритам не користи екстерну архиву, већ се оптимизациони процес заснива на елитизму.

Сортирањем по недоминантним фронтovima сви хромозоми из тренутне популације класификују се у различите фронтове према нивоу недоминантности. Према томе, за свако решење у допустивом региону  $x_i \in \mathbb{D}$  одређује се број решења која доминирају посматрано решење  $x_i$ , означено са  $n_i$ , као и скуп решења која су доминирана решењем  $x_i$ , означено са  $s_i$ . Сва решења над којима не доминира ниједан члан у популацији, називају се недоминантна решења, и припадају фронту првог нивоа (PF1). Даље се приступа формирању другог нивоа фронта недоминантних решења, где се за свако решење  $x_i$  које припада првом фронту PF1 пролази кроз скуп  $s_i$  и сваком решењу  $x_j$  из  $s_i$  се број доминација  $n_j$  умањује за један. Када је  $n_j = 0$ , тада решење  $x_j$  постаје члан другог недоминантног фронта PF2. Ова процедура се понавља над свим решењима из PF2 у циљу формирања трећег фронта. На слици 3.6, на примеру максимизације две конфликтне

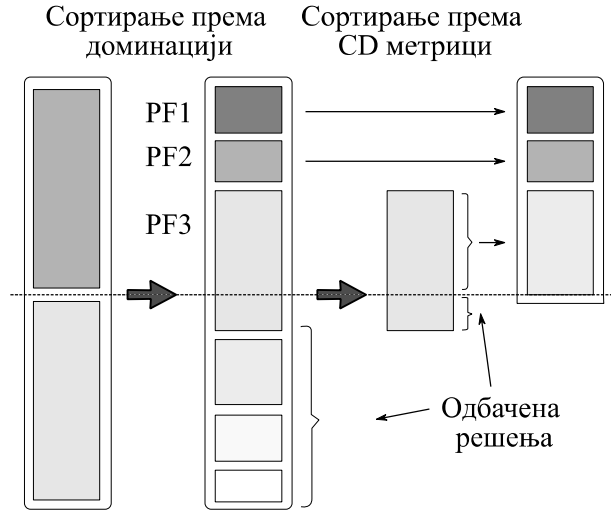
критеријумске функције, илустрован је процес одређивања фронтова недоминантних решења.



Слика 3.6 Илустрација концепта доминације NSGA-II алгоритма

На слици 3.6 уочава се да тачке означене са 1, 3, 4, 6 и 8 припадају првом, најбољем, фронту недоминантних решења PF1. Према томе, тим решењима не доминирају преостали чланови популације. У циљу одређивања другог фронта, решења из првог фронта се занемарују, и на преостала решења у популацији примењује се горе описани поступак сортирања. Дакле, други фронт недоминантних решења чине решења 2, 5 и 7. Ова процедура се понавља док се не обраде сви чланови из популације.

По извршавању процеса сортирања према доминацији, потребно је формирати нову популацију за следећу итерацију. Нова популација се попуњава решењима која припадају претходно одређеним фронтовима. Према томе, популација се најпре попуњава свим решењима која припадају најбољем фронту PF1, па затим фронтом PF2, итд. С обзиром на то да се тренутна популација састоји од  $2N_p$  решења, није могуће све чланове сместити у популацију чија је димензија  $N_p$ . Дакле, фронтови који се не могу сместити у нову популацију се бришу. У циљу избора потребног броја решења из последњег фронта који се задржава за нову популацију, над решењима у том фронту врши се сортирање према међусобној удаљености на основу CD метрике растојања до нагомилавања. На слици 3.7 приказан је поступак попуњавања новоформиране популације за следећу итерацију.



Слика 3.7 Илустрација поступка попуњавања новоформиране популације за следећу итерацију

Као што се види на слици 3.7, фронт PF3 има димензију која је већа од потребног броја решења, па се над њим врши сортирање према CD метрици. Растојање до нагомилавања – CD у оквиру NSGA-II алгоритма срачунава се за свако решење  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_p$  као средња вредност Еуклидског растојања између посматраног решења и њему околних решења дуж сваке од димензија у критеријумском простору, у циљу одређивања густине решења која окружују  $\mathbf{x}_i$ . Ако се претпостави да постоји  $N_p$  хромозома у популацији, и претпостави да решење  $\mathbf{x}_a$  има следећу вредност векторске функције циља  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_a)$ , односно

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_a) = [f_1(\mathbf{x}_a), \dots, f_m(\mathbf{x}_a)]^T. \quad (3.20)$$

За сваку критеријумску функцију, односно сваку димензију у критеријумском простору, одређује се максимална и минимална вредност најближих тачака у популацији, у складу са следећим изразима

$$f_i^{\min}(\mathbf{x}_a) = \max [f_i(\mathbf{x}_b) \text{ тако да } f_i(\mathbf{x}_b) < f_i(\mathbf{x}_a)], \quad (3.21)$$

$$f_i^{\max}(\mathbf{x}_a) = \min [f_i(\mathbf{x}_b) \text{ тако да } f_i(\mathbf{x}_b) < f_i(\mathbf{x}_a)], \quad (3.22)$$

Тада се метрика растојање до нагомилавања за решење  $\mathbf{x}_a$  срачунава у складу са изразом

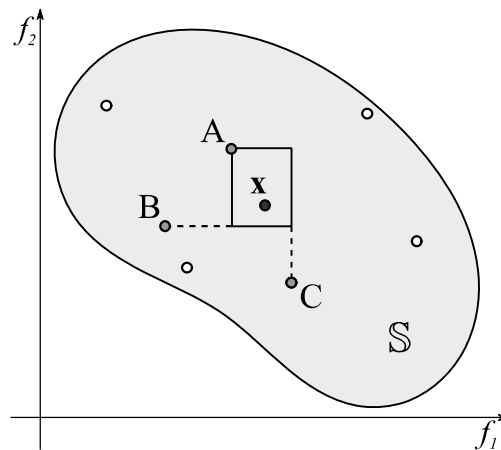


$$d(\mathbf{x}_a) = \sum_{i=1}^m (f_i^{\max}(\mathbf{x}_a) - f_i^{\min}(\mathbf{x}_b)). \quad (3.23)$$

Јединке из популације које се налазе у регионима у којима долази до нагомилавања хромозома у критеријумском простору имају мању вредност CD метрике. С друге стране, CD метрика за јединке из популације које се налазе на екстремним вредностима критеријумских функција тежи бесконачности, односно

$$d(\mathbf{x}_c) = \infty \text{ за } \mathbf{x}_c \in \left\{ \arg \min_{\mathbf{x}_b} f_i(\mathbf{x}_b) \cup \arg \max_{\mathbf{x}_b} f_i(\mathbf{x}_b) \forall i = 1, \dots, m \right\}. \quad (3.24)$$

Метрика растојање до нагомилавања одговара половини опсега највеће хипер коцке, чије границе не прелазе координате у критеријумском простору најближе јединке по свакој од димензија простора  $\mathbb{S}$ . На слици 3.8 приказана је графичка илустрација хиперкоцке у дводимензионалном простору, са две критеријумске функције, који представља CD метрику.



Слика 3.8 Графичка илустрација одређивања CD метрике у дводимензионалном простору критеријумских функција

На слици 3.8 уочава се да су јединке најближе јединки  $\mathbf{x}$  дуж димензије прве критеријумске функције  $Of_1$  означене са A и C. Такође, уочава се да су јединке у популацији које су најближе решењу  $\mathbf{x}$  по оси  $Of_2$  означене на слици са A и B. На овај начин, применом сортирања заснованог на CD метрици, обезбеђује се равномерна расподела решења по Парето фронту. Према томе, применом ових оператора формирана је нова популација са којом се приступа новој итерацији алгоритма. Ова итеративна процедура се понавља све док се не испуни неки од

унапред задатих услова заустављања. Псеудо код NSGA-II алгоритма приказан је у оквиру Алгоритма 4.

---

**Алгоритам 4** Псеудокод NSGA-II алгоритма

---

- 1: Поставити параметре  $N_P$ ,  $G_{max}$ ,  $p_c$ ,  $c_r$
  - 2: Формирати почетну популацију  $\mathbf{P}$  величине  $N_P$
  - 3: Сортирати популацију на основу концепта доминације
  - 4: Применити операторе селекције, укрштања и мутације за креирање  $N_P$  потомака у скупу  $\mathbf{Q}$
  - 5:  $G = 0$
  - 6: **while**  $G \leq G_{max}$  **do**
  - 7: Сјединити скупове  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$  у обједињену популацију димензија  $2N_P$
  - 8: Сортирати популацију на основу концепта доминације у циљу формирања скупова Парето фронтонва  $PF1, PF2, \dots, PFn$
  - 9: Инцијализовати празан скуп  $\mathbf{P}_n$
  - 10:  $i = 0$
  - 11: **while** постоји непопуњен простор у скупу  $\mathbf{P}_n$ ,  $\forall i \in \{PF1, PF2, \dots, PFn\}$  **do**
  - 12: Срачунати CD метрику за све елементе из  $PFi$
  - 13: Додати елементе из  $PFi$  у  $\mathbf{P}_n$
  - 14:  $i = i + 1$
  - 15: **end while**
  - 16: Сортирати елменте у PF1 према CD метрици
  - 17: Попунити преостала поља у  $\mathbf{P}_n$  са најбољим решењима из  $PFi$
  - 18: Креирати нове потомке у скупу  $\mathbf{Q}_n$
  - 19: Применити селекцију према CD метрици
  - 20: Извршити укрштање између хромозома
  - 21: Извршити мутацију
  - 22: Поставити  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n$  и  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_n$
  - 23: **end while**
  - 24: Прикажи глобално оптимално решење
-

### 3.6 PSO алгоритам за вишекритеријумску оптимизацију

Како је претходно указано у другом поглављу, способност претраге простора допустивих решења PSO алгоритма у великој мери зависи од постављених вредности вектора  $\mathbf{g}^{(G)}$  и  $\mathbf{p}_i^{(G)}$ , који чине саставни део једначине за ажурирање брзине (2.13). Вектор  $\mathbf{p}_i^{(G)}$  интензивира процес претраге простора допустивих решења, док вектор  $\mathbf{g}^{(G)}$  усмерава кретање честица ка бржој конвергенцији ка локалном оптимуму. У литератури се разликују два приступа у решавању вишекритеријумских оптимизационих проблема применом PSO алгоритма [58]. Први приступ подразумева засебно разматрање сваке од критеријумских функција. Дакле, код овог приступа свака честица се ажурира за сваку од критеријумских функција појединачно, а одабир најбоље позиције врши се на начин аналогно код једнокритеријумских оптимизационих проблема. Код ових метода, главни изазов је одговарајућа манипулација информацијама које долазе од сваке критеријумске функције у циљу усмеравања честица ка Парето оптималном решењу. Други приступ заснива се на алгоритмима који оптимизују симултано све критеријумске функције, при чему се најбоље решења, која усмеравају кретања честица у допустивом простору, одређују на основу примене концепта Парето оптималности.

#### 3.6.1 PSO алгоритми засновани на концепту Парето оптималности

Ова група PSO алгоритама заснива се на примени концепта Парето оптималности у циљу одређивања најбољих припадника јата (лидери) који усмеравају кретања честица током оптимизационог процеса. Један од првих алгоритама за вишекритеријумску оптимизацију који се заснива на механизмима PSO алгоритма и примењује концепт Парето оптималности је MOPSO (*Multi-objective PSO*) [57]. Основна модификација овог алгоритма се заснива се на коришћењу екстерне архиве у оквиру које свака јединка смешта сва недоминантна решења на крају сваке итерације. На тај начин, свака од јединки на основу екстерне архиве бира лидера, односно јединку која пружа информацију о глобално најбољој позицији, у циљу усмеравања кретања у допустивом простору. Према томе, након

иницијализације позиција и брзина свих честица у популацији, приступа се одређивању вредности критеријумских функција у свакој од честица из популације. Такође, иницијализују се вредности глобално и локално најбоље честице у јату. Затим се примењује концепт доминације над свим честицама у популацији у циљу смештања свих недоминантних честица у оквиру екстерне архиве, означене скупом  $\mathbb{E}$ . Један од основних принципа у функционисању MOPSO алгоритма је формирање хиперкоцки у оквиру простора допустивих решења. Према томе, допустиви простор дели се у хиперкоцке и одређује се припадност сваке од честица одређеној хиперкоцки. Након тога, могуће је извршити ажурирање позиције и брзине према изразима

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = w^{(G)}\mathbf{s}_i^{(G)} + rand_{1,i}c_1(\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + rand_{2,i}c_2(\mathbf{e}_k - \mathbf{x}_i), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \mathbf{s}_i^{(G)}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_p, \quad (3.26)$$

где су са  $\mathbf{e}_k$  означени  $k$  ти елементи из скупа  $\mathbb{E}$ , а индекс  $k$  се бира тако што се хиперкоцкама у допустивом простору, у оквиру којих се налази више од једне честице из популације, додаје квалитет који је једнак реципрочном броју честица садржаних у хиперкоцки. Према томе, квалитет хиперкоцки које садржи више хиперкоцки се смањује и вероватноћа за њихов избор је мања. Након тога, приступа се селекцији по принципу точка рулета у циљу одабира индекса  $k$  односно хиперкоцке из које ће се усвојити лидер јата. Уочава се да су једначине (3.25) и (3.26) аналогне једначинама које се користе конвенционалној PSO методи. Након формирања нове популације врши се ажурирање скупа  $\mathbb{E}$  према принципу доминације. Такође, потребно је одредити вредности најбољег решења које је истражено од стране сваке честице појединачно. Одређивање овог решења могуће је извршити према следећем услову

$$\mathbf{p}_i^{(G+1)} = \begin{cases} \mathbf{p}_i^{(G)}, & \text{ако } \mathbf{p}_i^{(G)} \prec \mathbf{x}_i^{(G)} \\ \mathbf{x}_i^{(G)}, & \text{у супротном} \end{cases}. \quad (3.27)$$

где је са  $\prec$  означен оператор доминације једног решења над другим. Уочава се да се решење  $\mathbf{p}_i^{(G+1)}$  за сваку честицу мења уколико је тренутна вредност најбољег решења које је истражено од стране сваке честице доминирано од стране тренутне позиције честице, у ознаци  $\mathbf{p}_i^{(G)} \prec \mathbf{x}_i^{(G)}$ . Овакав итеративни процес се понавља, све док се не испуни неки од претходно дефинисаних услова конвергенције.

## 4 Модификације и унапређење метахеуристичких алгоритама

Иако у односу на конвенционалне алгоритме поседују боља својства за решавање комплексних оптимизационих проблема, метахеуристички алгоритми, посебно у свом основном облику, нису идеални оптимизациони алгоритми и не могу се применити за успешно решавање низа сложених проблема. У доступној литератури уочавају се два главна проблема метахеуристичких алгоритама, и то: преурањена конвергенција, која се манифестује конвергенцијом алгоритма ка локалном оптималном решењу, које значајно одступа од глобалног оптимума, и спора конвергенција, која се манифестује недовољно брзим побољшањем решења у оквиру популације [63]. Ови проблеми су у директној корелацији са диверсификацијом честица у оквиру популације. У идеалном случају, диверсификација популације је велика на почетку оптимизационог процеса, у циљу истраживања простора допустивих решења и изналажења региона глобалног оптимума. Како оптимизациони процес алгоритма напредује, диверсификација се смањује како би се убрзала конвергенција ка оптималном решењу. Дакле, задржавање високе вредности диверсификације током читавог оптимизационог процеса значи вероватно откривање региона глобалног оптимума, али и истовремено и спору конвергенцију. С друге стране, мала диверсификација током читавог оптимизационог процеса води ка брзој конвергенцији, али истовремено и ка преурањеној конвергенцији ка локалном, субоптималном решењу. Према томе, у циљу креирања ефикасног метахеуристичког алгоритма, потребно је остварити ефективни баланс између конвергенције и квалитета решења. У складу са тим, постоји стална потреба за модификацијама и унапређењима перформанси

метахеуристичких алгоритама, што потврђује изузетно велики број обављених радова у релевантним научним часописима и међународним конференцијама који разматрају ову проблематику [29, 54, 64, 65]. У општем случају, унапређење перформанси метахеуристичких алгоритама могуће је остварити модификацијом постојећих или развојем нових механизма претраге, формирањем препорука и развојем адаптивних механизма за постављање вредности управљачких параметара алгорита, као и хибридизацијом, односно комбиновањем делова два или више оптимизационог алгорита у оквиру новог алгорита [23, 29, 30]. Према томе, у оквиру ове дисертације предложене су модификације метахеуристичких алгоритама кроз: адаптивно подешавање параметара ради контроле процеса оптимизације, као и развој нових алгоритама хибридизацијом два позната метахеуристичка алгорита.

#### **4.1 Адаптивни механизми за постављање вредности управљачких параметара**

У доступној литератури је указано да оптимизационе перформансе метахеуристичких алгоритама у великој мери зависе од постављања вредности управљачких параметара. У оквиру дисертације је указано на то да оптимизационе перформансе PSO алгорита зависе од вредности коефицијената когнитивног и социјалног убрзања, као и вредности фактора инерције који усмеравају процес претраге овог алгорита. С друге стране, DE алгорита користи вредности параметара, као што су број чланова популације ( $N_p$ ), вредност фактора скалирања ( $F$ ) и фактора укрштања ( $CR$ ), како би усмерио кретање јединки из популације ка оптималном решењу [17, 66]. Јасно је да се током оптимизационог процеса карактеристике региона критеријумске функције, као што су мултимодалност, унимодалност и постојање шума, итд., у оквиру којег се налазе чланови популације мењају, посебно када се алгорита приближи оптималном решењу. Према томе, усвајање фиксне вредности управљачких параметара за различите типове критеријумских функција, као и задржавањем ових параметара непромењивим током читавог оптимизационог процеса, може довести до

непожељних ефеката, као што су преурањена конвергенција, или немогућност изналажења региона глобалног оптимума [63]. У складу са тим, у литератури се може пронаћи велики број радова који се баве тематиком адекватног одабира вредности управљачких параметара метахеуристичких алгоритама. Прегледом литературе, технике за постављање вредности управљачких параметара се могу грубо класификовати у три групе: детерминистичке технике, адаптивне и самоадаптивне технике [29, 64]. Први радови који су разматрали побољшање оптимизационих перформанси метахеуристичких алгоритама дали су емпиријске препоруке у погледу домена вредности управљачких параметара у зависности од типа и сложености критеријумске функције посматраног оптимизационог проблема. Према томе, ови радови припадају групи детерминистичких техника, код којих се промена вредности заснива на унапред задатим правилима и не зависе од повратних информација из процеса претраге. Ако се посматра фактор укрштања алгорита диференцијалне еволуције, емпиријска истраживања су показала да се за решавање сепарабилних критеријумских функција препоручују вредности  $CR \in [0, 0.2]$ , док се у случајевима мултимодалних и несепарабилних функција препоручује усвојити  $CR \in [0.9, 1]$  [65]. Такође, уколико се при решавању примени експоненцијално укрштање, истраживачи су препоручили скуп параметара и то  $F = 0,5$  и  $CR = 0,9$ , док је за биномно укрштање препоручљиво усвојити  $F = 0,5$  и  $CR = 0,2$  [29]. С друге стране уколико се посматра алгоритама оптимизације ројем честица, опште препоруке у литератури нема, али се за иницијални покушај оптимизације препоручује усвајање  $c_1 = c_2 = 2$  [53]. С друге стране, више аутора указује на значај одабира величине популације PSO алгоритама и препоручује усвајање популације четири пута веће од димензије оптимизационог проблема, односно  $N_p = 4n$  [22].

Током последњих деценија, адаптивне технике за постављање вредности управљачких параметара заузимају значајно место у истраживању. Код ових техника, промена вредности заснива се на неком виду повратне информације из оптимизационог процеса, па се самим тим вредност прилагођава, адаптира, тренутним условима. Међу великим бројем адаптивних техника примењених у

оквиру DE алгоритма посебно се истиче JADE (*Adaptive Differential Evolution with Optional External Archive*) алгоритам, код којег се промена вредности управљачких параметара  $F$  и  $CR$  врши на основу Кошијеве и Гаусове расподеле [67]. Као надоградња овог алгоритма у литератури је предложен SHADE (*Success-History Based Parameter Adaptation for Differential Evolution*) алгоритам који за ажурирање вредности параметара  $F$  и  $CR$  користи архиву у оквиру које су смештене претходне вредности ових параметара, код којих је вредност критеријумске функције побољшана у односу на претходну генерацију [67]. Такође, често се као одлика тренутног стадијума оптимизације усваја и број тренутне генерације, у односу на максималан број генерација, па је у литератури доступан низ радова који промену вредности  $F$  и  $CR$  врши на основу овог параметра [64]. У циљу одржавања равнотеже између диверсификације и конвергенције, у литератури је предложена употреба временски променљивих коефицијента убрзања (*Time-Varying Acceleration Coefficients, TVAC*) у оквиру PSO алгоритма. Ове технике мењају вредности коефицијената убрзања са порастом броја итерација на основу експоненцијалне или неке сличне законитости [68]. Такође, у литератури је предложен и низ адаптивних техника за промену вредности фактора инерције PSO алгоритма [54, 69].

С друге стране, самоадаптивне технике се заснивају на истовременој оптимизацији чланова популације и управљачких параметара, који су усвојени за додатне промене посматраног оптимизационог проблема. Често ове технике захтевају постојање неке врсте екстерне архиве у оквиру које се смештају успешне вредности управљачких параметара. Анализирајући литературу која разматра DE алгоритам, посебно се издваја SaDE (*Self-adaptive Differential Evolution*) алгоритам код којег се почетне вредности фактора скалирања и укрштања генеришу на основу нормалне расподеле, а током итерација вредности се ажурирају на основу екстерне меморије у оквиру које су смештене успешне вредности  $F$  и  $CR$  из претходних генерација [70]. С друге стране, самоадаптивни PSOSAIC (*self-adaptive particle swarm optimization with individual coefficients adjustment*) алгоритам, настао као модификација PSO алгоритма мења вредности фактора инерције и коефицијената убрзања за сваку честицу у популацији појединачно на основу вредности



критеријумске функције те честице и релативног односа са глобално најбољом вредношћу критеријумске функције [71].

#### 4.1.1 Адаптивна промена вредности управљачких параметара DE алгоритма

У поглављу два је указано да оптимизационе перформансе DE алгоритма зависе од адекватног одабира параметара  $F$  и  $CR$ . Анализом израза (2.5) и из графичке интерпретације оператора мутације на слици 2.7 могу се извести следећи закључци. Повећањем вредности фактора скалирања на почетку оптимизационог процеса, повећава се диверсификација решења и побољшава способност откривања региона глобалног оптимума, с обзиром да је тада члан  $F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)})$  изразито доминантан. С друге стране, када је оптимизациони процес у поодмаклој фази, претпоставља се да је DE алгоритам успешно пронашао регион глобалног оптимума, па је потребно да параметар  $F$  узима мале вредности, како не би дошло до искакања из овог региона у циљу побољшања конвергенције и локалне претраге.

Према томе, на основу ове анализе, у оквиру ове докторске дисертације развијена је адаптивна техника за промену вредности фактора скалирања. У оквиру предложене адаптивне технике се за сваког члана популације, на основу релативног односа вредности критеријумске функције  $i$ -тог члана популације и најбоље остварене вредности критеријумске функције, одређује вредност фактора скалирања у складу са изразом

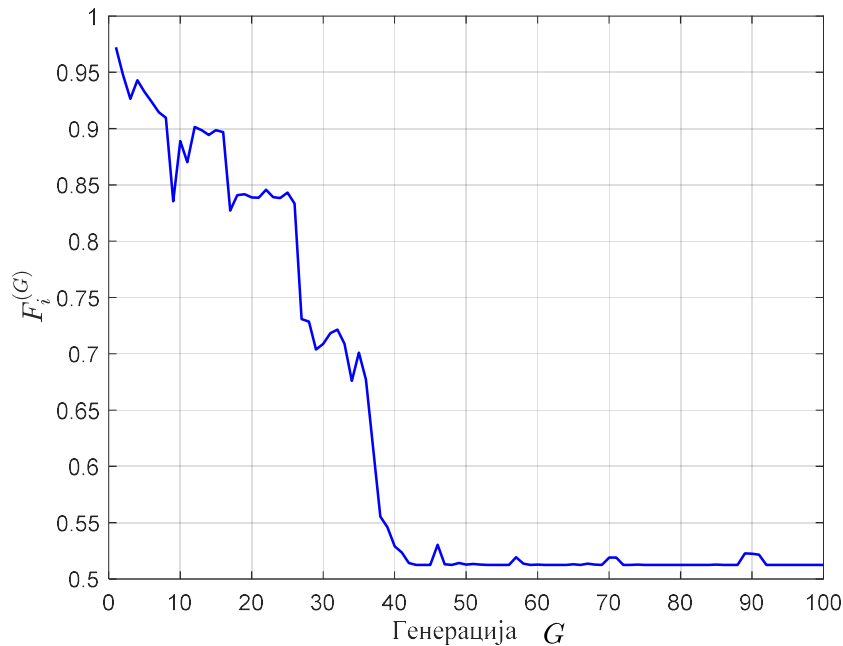
$$F_i^{(G)} = \frac{F_{\min}}{1 + \left( \frac{F_{\min}}{F_{\max}} - 1 \right) \exp(-\alpha^{(G)}G)}, \quad (4.1)$$

где су са  $F_{\min}$  и  $F_{\max}$  означене горња и доња граница жељених вредности фактора скалирања а параметар  $\alpha^{(G)}$  се одређује на основу израза

$$\alpha^{(G)} = 2 \frac{f_i^{(G)} - f_{\max}^{(G)}}{f_{\max}^{(G)} - f_{\min}^{(G)}}, \quad (4.2)$$

при чему  $f_i^{(G)}$ ,  $f_{\max}^{(G)}$  и  $f_{\min}^{(G)}$  представљају најбољу, најгору и  $i$ -ту вредности критеријумске функције.

У циљу анализе предложене модификације DE алгоритма, на слици 4.1 приказана је промена вредности предложеног фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  са порастом броја генерација, где су за задате домене овог фактора усвојени  $F_{\min} = 0,5$  и  $F_{\max} = 0,9$ .



Слика 4.1 Промена вредности предложеног фактора скалирања  $F_i^{(G)}$  са порастом броја генерација

Са слике 4.1 може се закључити да предложени адаптивни фактор скалирања  $F_i^{(G)}$  на почетку оптимизационог процеса узима велике вредности, чиме се омогућава боља претрага простора допустивих решења. С друге стране, са порастом броја генерација, вредност овог фактора опада, чиме се омогућава бржа конвергенција и могућност остваривања решења повишене тачности.

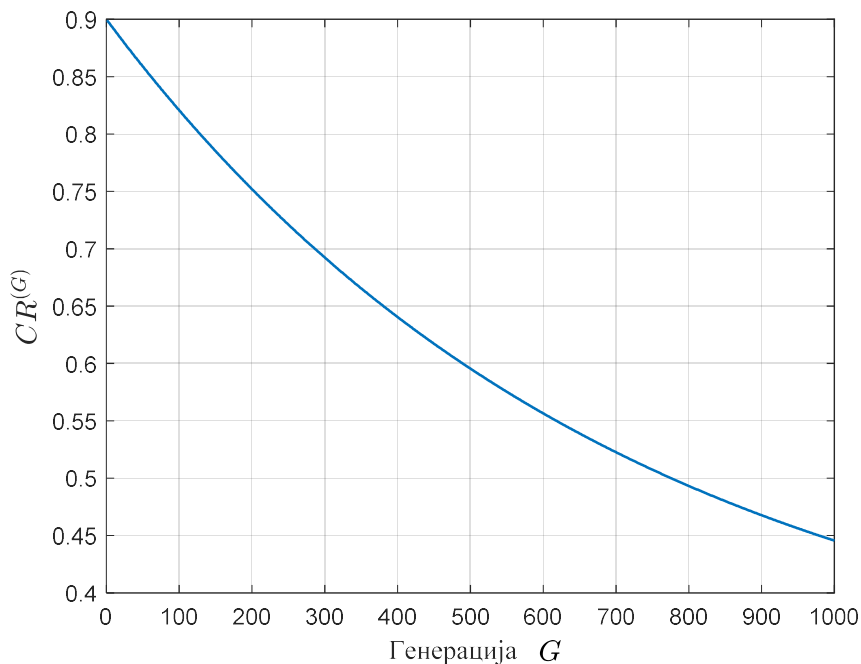
Поред фактора скалирања, фактор укрштања има велики утицај на исход процеса укрштања, а самим тим и на оптимизационе перформансе DE алгоритма. Анализом израза (2.10), уз фиксирање параметра  $j_{rand}$ , произилази да са повећањем вредности фактора  $CR$  расте вероватноћа придруживања елемената мутационог вектора  $\mathbf{v}_i^{(G)}$  одговарајућем пробном вектору  $\mathbf{u}_i^{(G)}$ . На тај начин се повећава

диверсификација популације, која је остварена у комбинацији са иницијално већом вредношћу фактора  $F_i^{(G)}$ . С друге стране, мања вредност фактора  $CR$  повећава вероватноћу задржавања оригиналних вредности базног вектора  $\mathbf{x}_i^{(G)}$ , чиме се додатно редукује диверсификација и побољшава конвергенција ка оптималном решењу.

Према томе, на основу спроведене анализе, у оквиру ове дисертације предложена је адаптивна техника за промену вредности фактора укрштања, где се у свакој генерацији вредност овог параметра мења у складу са следећом законитошћу

$$CR^{(G)} = rand \frac{G}{G_{\max}} (CR_{\max} - CR_{\min}) + CR_{\min}, \quad (4.3)$$

где  $CR^{\max}$  и  $CR^{\min}$  означавају горња и доња граница жељених вредности фактора укрштања. На слици 4.20 приказана је промена вредности предложеног фактора укрштања  $CR^{(G)}$  са променом броја итерација, где су за задате домене овог фактора усвојени  $CR^{\max} = 0,9$  и  $CR^{\min} = 0,4$ .



Слика 4.2 Промена вредности предложеног фактора укрштања  $CR^{(G)}$  са променом броја итерација

На основу графика на слици 4.20 произилази да у почетном стадијуму оптимизације параметар  $CR^{(G)}$  узима велике вредности, чиме се одржава диверсификација популације, док се при крају оптимизационог процеса ова вредност смањује и тежи  $CR^{\min}$ , чиме се побољшава конвергенција ка оптималном решењу. На тај начин, истовременом применом предложених фактора  $CR^{(G)}$  и  $F_i^{(G)}$  одржава се равнотежа између диверсификације и конвергенције, и поспешују оптимизационе перформансе DE алгоритма.

#### 4.1.2 Адаптивна промена управљачких параметара PSO алгоритма

Анализом једначине (2.13) уочава се да усмеравање претраге PSO алгоритма у великој мери зависи од адекватног одабира вредности коефицијената когнитивног и социјалног убрзања. Ако се претпостави да је усвојена већа вредност коефицијента  $c_1$ , тада се процес претраге PSO алгоритма усмерава ка вредности најбољег решења које је истражено од стране сваке честице појединачно, и на тај начин се интензивира диверсификација. С друге стране, ако се усвоји велика вредност коефицијента  $c_2$ , јасно је да се кретање честица у популацију усмерава ка тренутној глобално најбољој честици, односно поспешује се конвергенција. Дакле, у циљу остварења одговарајуће равнотеже између диверсификације и конвергенције, и побољшања оптимизационих перформанси посебно над мултимодалним критеријумским функцијама, у оквиру ове докторске дисертације предложено је коришћење адаптивних вредности коефицијената  $c_1$  и  $c_2$ .

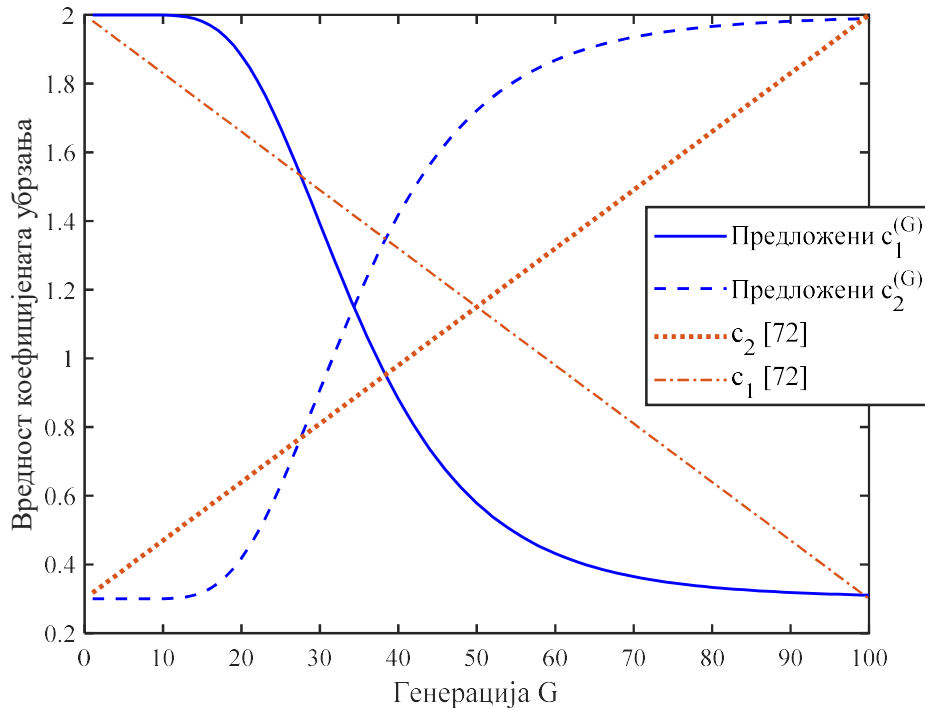
Према томе, у оквиру ове докторске дисертације предложена је модификација PSO алгоритма увођењем временски променљивих коефицијента убрзања који се могу записати следећим једначинама

$$c_1^{(G)} = (c_f - c_i) 2^{-\exp\left(\frac{G_{\max}}{G-1}\right)} + c_i, \quad (4.4)$$

$$c_2^{(G)} = (c_f - c_i) \left[ 1 - 2^{-\exp\left(\frac{G_{\max}}{G-1}\right)} \right] + c_i, \quad (4.5)$$

где су са  $c_i$  и  $c_f$  означене почетна и крајња вредност когнитивног  $c_1$  и социјалног коефицијената  $c_2$ , респективно.

У циљу анализе предложене модификације, на слици 4.30 приказана је промена вредности предложених временски променљивих коефицијента убрзања  $c_1^{(G)}$  и  $c_2^{(G)}$  са порастом броја генерација.



Слика 4.3 Промена разматраних коефицијената убрзања са порастом генерација

Са слике 4.30 уочава се да се применом предложених временски променљивих коефицијената убрзања, у поређењу са техником приказаном у литератури [72] остварује постепенија промена вредности. На почетку оптимизационог процеса, коефицијент  $c_1^{(G)}$  има велику вредност док  $c_2^{(G)}$  има малу вредност, што побољшава глобалну претрагу. С друге стране, при крају оптимизационог процеса, коефицијент  $c_1^{(G)}$  узима малу вредност док  $c_2^{(G)}$  има велику вредност, чиме се побољшава локална претрага. Дакле, применом предложене технике, остварује се ефикасна равнотежа између диверсификације и конвергенције.

## 4.2 Хибридизација алгоритама

Хибридизација алгоритама је процес формирања новог алгорита комбинавањем два или више оптимизационих алгоритама, у циљу адекватног искоришћења предности једних и истовремене елиминације недостатака других алгоритама. На тај начин, хибридни алгоритми дају боље перформансе које се првенствено огледају у побољшању квалитета оптималног решења. Велики број радова у релевантној литератури посвећен је формирању хибридних алгоритама за решавање комплексних оптимизационих проблема [23, 63, 73].

У наредном одељку биће описана извршена хибридизација алгорита оптимизације ројем честица и алгорита диференцијалне еволуције, у циљу успешног решавања комплексног проблема вишекритеријумске оптимизације планетарног преносника.

### 4.2.1 Хибридизација алгорита оптимизације ројем честица и алгорита диференцијалне еволуције

При решавању комплексних вишекритеријумских оптимизационих проблема, метахеуристички алгоритми показују одређене недостатке, као што су спора конвергенција, недовољна диверсификација решења и неусклађена равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге. У доступној литератури указано је да алгоритам оптимизације ројем честица за вишекритеријумску оптимизацију показује тенденцију преране конвергенције ка локалном оптимуму и брзи губитак диверсификације популације [29, 63]. Према томе, ради превазилажења ових недостатака у процесу оптимизације, у оквиру ове докторске дисертације предложена је хибридизација алгорита оптимизације ројем честица и алгорита диференцијалне еволуције, у ознаци МНPSODE (*Multi-objective Hybrid Particle Swarm Optimization and Differential Evolution algorithm*), за решавање комплексног проблема вишекритеријумске оптимизације планетарних преносника. Основна замисао предложене хибридизације алгоритама огледа се у побољшању оптимизационих перформанси основног PSO алгорита, увођењем адаптивног параметра базираног на мери диверсификације популације, у циљу инкорпорирања

оператора мутације и селекције из DE алгоритма у оквиру оптимизационе процедуре PSO алгоритма. У другом поглављу указано је да DE/rand/1 и DE/rand/2 мутациони оператори остварују изражену способност глобалне претраге, па се успешно примењују за истраживање допустивих простора у циљу изналажења региона глобалног оптимума [74]. С друге стране, мутациони оператори DE/best/1 и DE/current-to-best/1 усмеравају процес претраге у региону тренутно најбољег решења, и на тај начин остварују бољу локалну претрагу и бржу конвергенцију ка оптималном решењу. Према томе, у циљу одржавања диверсификације популације, брже конвергенције, као и избегавања тенденција заглављивања у локални оптимум предложене су две модификације.

У циљу побољшања глобалне претраге и спречавање тенденције заглављивања у локалне оптимуме, прва модификација се односи на инкорпорирање основних елемената DE/rand/1 мутационог оператора у оквиру израза за ажурирање брзине PSO алгоритма. У складу са тим, члан  $c_1(\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$  у изразу (2.15) за ажурирање брзине мења се са чланом  $F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)})$ , тако да израз за ажурирање брзине има следећи облик

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G+1)} + rand_{1,i} F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}) + c_2 rand_{2,i} (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}). \quad (4.6)$$

С друге стране, у циљу побољшања способности локалне претраге и брже конвергенције ка глобалном оптималном решењу у оквиру израза за ажурирање брзине PSO алгоритма уграђени су основни елементи DE/current-to-best/1 мутационог оператора. Према томе, у изразу (2.13) је члан  $c_2 rand_{2,i} (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$  замењен изразом  $F(\mathbf{x}_{best}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$  који је дат у једначини (2.9). Такође, у циљу задржавања одређеног нивоа диверсификације популације, члан  $F(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)})$  је инкорпориран у једначину (2.13) тако да израз за ажурирање вектора брзине има следећи облик

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + rand_{1,i} F(\mathbf{x}_{best}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2 rand_{2,i} (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + F(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)}). \quad (4.7)$$

На основу претходно изложеног, а у циљу успостављања равнотеже између диверсификације и конвергенције, чиме се одржава равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге, у оквиру ове дисертације предложен је адаптивни параметар  $PS^{(G+1)}$ . Овај параметар заснива се на нормализованој мери диверсификације популације, односно нормализованој мери растојања између чланова у популацији. Вредност параметара  $PS^{(G+1)}$  у  $(G+1)$  итерацији за  $i$  ту честицу у популацији одређује се у складу са изразом

$$PS^{(G+1)} = \sqrt{\frac{1}{N_p - 1} \sum_{i=1}^{N_p} (\bar{d}^{(G+1)} - d_i^{(G+1)})^2}, \quad (4.8)$$

где је са  $d_i^{(G+1)}$  означен минимум  $l_1$  норме растојања између  $i$  те честице и свих осталих честица у популацији, док је са  $\bar{d}^{(G+1)}$  означена средња вредност  $l_1$  норме растојања свих честица у популацији.

Дакле, применом уведеног адаптивног фактора диверсификације популације  $PS^{(G+1)}$  претходно модификовани изрази дати једначинама (4.6) и (4.7) могу се комбиновати у оквиру једног израза. Према томе, израз за ажурирање вредности вектора брзине хибридног МНPSODE алгоритма, представљен је псеудо кодом који је приказан Алгоритмом 5.

---

**Алгоритам 5** Псеудо-код израза за ажурирање вектора брзине хибридног МНPSODE алгоритма

---

```

1: if  $PS^{(G+1)} > 0.75$  then
2:   if  $rand > 0.5$  then
3:      $\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + rand_1 F(\mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)}) + c_2 rand_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$ 
4:   else
5:      $\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 rand_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2 rand_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$ 
6:   end if
7: else if  $PS^{(G+1)} \leq 0.75$  then  $rand > 0.5$ 
8:    $\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 rand_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$ 
9:    $+ c_2 F(\mathbf{x}_{best}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + F(\mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)})$ 
10:  else
11:     $\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 rand_1 (\mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)}) + c_2 rand_2 (\mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)})$ 
12:  end if

```

---



Анализом функционалности модификованог израза за ажурирање брзине датим у псеудо-коду у Алгоритму 5 уочава се да се на основу вредности адаптивног параметра диверсификације популације  $PS^{(G+1)}$  у току оптимизационог процеса примењује један од претходно модификованих израза. Према томе, за вредност параметра  $PS^{(G+1)} > 0,75$  диверсификација популације није остварена и потребно је побољшати глобалну претрагу. Према томе, биће примењен претходно модификован израз дат једначином (4.6) са вероватноћом 0,5, у супротном, биће примењен израз (2.13). С друге стране, мања вредност параметра  $PS^{(G+1)} \leq 0,75$  имплицира да је неопходно интензивирати локалну претрагу. Према томе, модификовани израз (4.7) биће примењен са вероватноћом 0,5, у супротном биће примењен израз (2.13). Предложена модификација у великој мери утиче на побољшање разноликости популације и брзину конвергенције алгорита, чиме се остварује адекватна равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге.

Такође, у циљу додатног унапређења оптимизационих перформанси предложеног хибридног алгорита, оператори укрштања и селекције из DE алгорита су инкорпорирани у оквиру PSO алгорита. Сходно овоме, псеудо-код предложеног хибридног MHPNODE алгорита приказан је у Алгоритму 6.

---

**Алгоритам 6** Псеудо-код предложеног хибридног MHPNODE алгорита

---

Иницијализовати параметере  $N_P, n, MaxIter$   
 Формирати почетну популацију  $\mathbf{x}_i \in [x_i^{min}, x_i^{max}]$ ,  $\forall i = 1, \dots, N_P$   
 Иницијализовати брзине честица  $\mathbf{s}_i^{(0)}$ ,  $\forall i \in 1, 2, \dots, N_P$   
 Поставити иницијалне вредности  $\mathbf{p}_i^{(0)}$  и  $\mathbf{g}^{(0)}$   
**while**  $iter < MaxIter$  **do**  
     Ажурирати вредност фактора инерције  $w^{(G)}$   
     **for**  $i = 1:N_P$  **do**  
         Ажурирати вредност брзине  
         **if**  $PS^{(G+1)} > 0.5$  **then**  
             **if**  $rand > 0.5$  **then**  
                  $\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + rand_1 F \left( \mathbf{x}_{r_2}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_3}^{(G)} \right) + c_2 rand_2 \left( \mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right)$   
             **else**  
                  $\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 rand_1 \left( \mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right) + c_2 rand_2 \left( \mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right)$   
             **end if**  $PS^{(G+1)} \leq 0.5$   
         **if**  $rand > 0.5$  **then**

---


$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 \text{rand}_1 \left( \mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right) + c_2 F \left( \mathbf{x}_{best}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right) + F \left( \mathbf{x}_{r_1}^{(G)} - \mathbf{x}_{r_2}^{(G)} \right)$$

else  

$$\mathbf{s}_i^{(G+1)} = \mathbf{s}_i^{(G)} + c_1 \text{rand}_1 \left( \mathbf{p}_i^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right) + c_2 \text{rand}_2 \left( \mathbf{g}^{(G)} - \mathbf{x}_i^{(G)} \right)$$

end if  
end if  
Модификовати позицију честица  

$$\mathbf{x}_i^{(G+1)} = \mathbf{x}_i^{(G)} + \mathbf{s}_i^{(G+1)}$$
Извршити оператор укрштања DE алгоритма према (3.34)  
Одредити вредност најбољег решења које је истражено од стране сваке честице појединачно  

$$\mathbf{p}_i^{(G+1)} = \begin{cases} \mathbf{p}_i^{(G)}, & \text{ако је } \mathbf{p}_i^{(G)} \prec \mathbf{x}_i^{(G)} \\ \mathbf{x}_i^{(G)}, & \text{у супротном} \end{cases}$$
Одредити вредност најбољег решења које су оствариле све честице јата  
end for  
end while

---

## 5 Формирање оптимизационог модела

У циљу испуњења веома строгих техничких захтева у погледу перформанси планетарног преносника, неопходно је формирати одговарајући вишекритеријумски оптимизациони модел, који укључује више контрадикторних критеријума. Са аспекта радне способности, у оквиру оптимизационог модела, неопходно је дефинисати скуп функционалних ограничења и одредити домене примене свих релевантних величина, зупчаних парова са спољашњим и унутрашњим озубљењем и целокупног планетарног преносника. Не губећи на општости, проблем оптимизације више критеријумских функција на задатом допустивом скупу може се формулисати као проблем одређивања  $n$ -димензионалног вектора  $\mathbf{x}$  за које векторска функција циља  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  добија екстремну вредност, односно за случај минимизације:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{D}} [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_M(\mathbf{x})], \quad (5.1)$$

задовољавајући следећа функционална ограничења, типа неједнакости

$$g_k(\mathbf{x}) \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (5.2)$$

и типа једнакости

$$h_l(\mathbf{x}) = 0 \quad l = 1, \dots, L. \quad (5.3)$$

Циљ наредне анализе је аналитичка дефиниција функционалних ограничења која је неопходно поставити у оквиру оптимизационог модела, у циљу несметаног спрезања зупчаника са унутрашњим озубљењем и зупчаника са спољашњим

озубљењем у току рада преносника. У наставку поглавља биће дефинисана функционална ограничења за зупчасти пар са унутрашњим озубљењем у току рада преносника, као што су:

- Остваривање равномерности хабања бокова зубаца
- Елиминисања интерференце врхова профила зубаца у спрези
- Спречавање радијалне интерференце
- Услови суседности и монтаже сателита
- Услови спрезања сателита и централног зупчаника

Овој проблематици није посвећена одговарајућа пажња и у доступним радовима, у којима су углавном дате препоруке у погледу избора бројева зубаца, без разматрања других релевантних величина, за посматрани зупчасти пар са унутрашњим озубљењем. Према томе, у оквиру овог поглавља биће анализирани негативне појаве које се могу јавити у току спрезања зупчаника са унутрашњим озубљењем и дефинисати домени практичне примене свих релевантних величина зупчастог пара. Такође, у циљу формулисања сложеног вишекритеријумског оптимизационог модела, у оквиру овог поглавља биће формиран одговарајући механички модел за одређивање степена искоришћења истовремено спрегнутих зупчастих парова, као једног од најзначајнијих критеријума посматраног вишекритеријумског оптимизационог проблема.

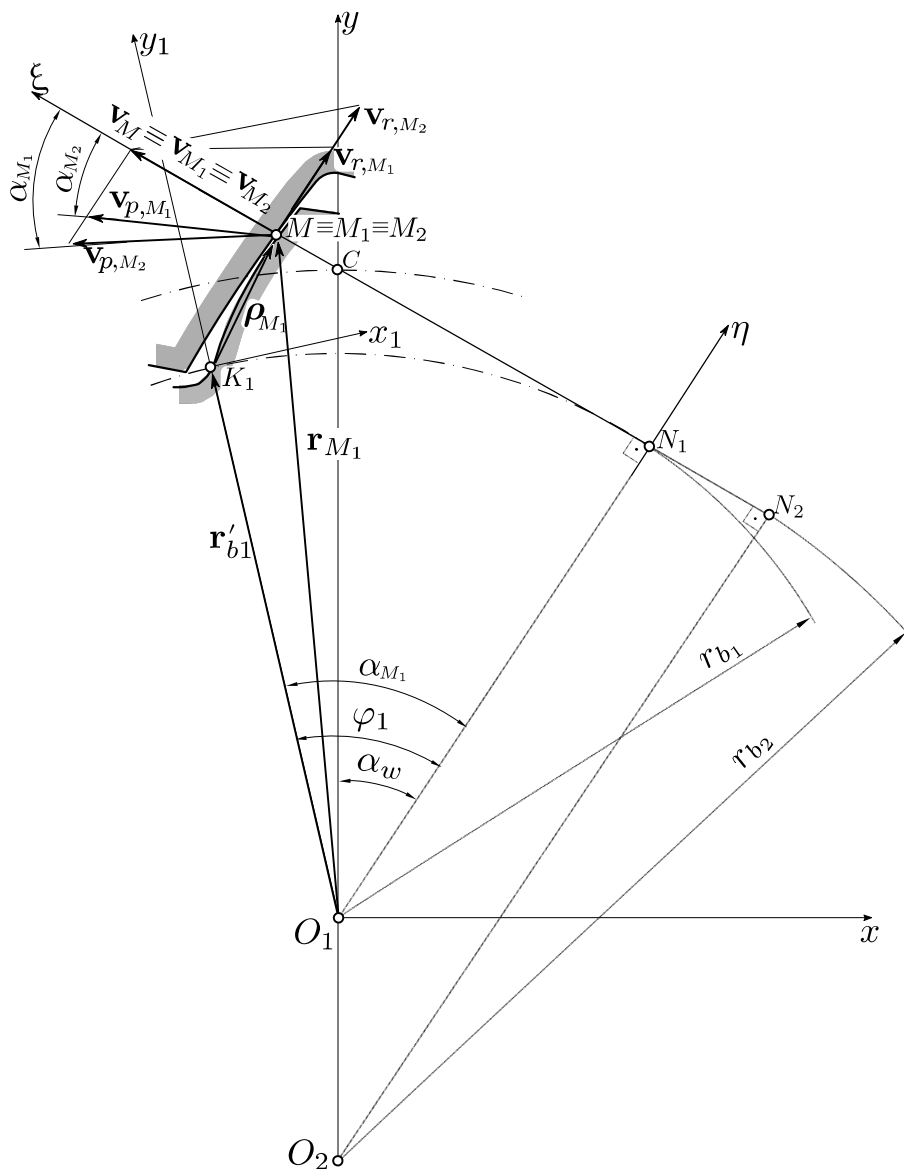
## **5.1 Функционална ограничења**

### **5.1.1 Услов равномерног хабања зубаца**

Хабање зубаца зупчаника у току њиховог рада, за последицу има промену облика и димензија зубаца. Услед тога долази до низа непожељних појава у раду преносника, као што су вибрације у току рада, бука и шум. У циљу остваривања равномерног хабања бокова зубаца спрегнутих зупчастих парова, потребно је остварити истоветност специфичних клизања у тачкама које су најудаљеније од тренутног пола релативних брзина. Дакле, у циљу дефинисања ових услова неопходно је са аспекта кинематике размотрити спрезање зупчастих парова са

унутрашњим и спољашњим озубљењем, као и зупчастих парова са спољашњим озубљењем.

Најпре се размотри спрезање зупчаника са унутрашњим озубљењем и зупчаника са спољашњим озубљењем, као што је приказано на слици 5.1.



Слика 5.1 Спрезање зупчастог пара са унутрашњим озубљењем

Анализа спрезања зупчастог пара са унутрашњим озубљењем врши се посредством тачака  $M_1$  и  $M_2$ , које се налазе на профилима зупчаника са спољашњим и зупчаника са унутрашњим озубљењем, респективно. Тачке  $M_1$  и  $M_2$  за време додирног периода врше сложено кретање по профилима респективних

зупчаника. У циљу анализе кретања тачке  $M_1$  по профилу зупца погонског зупчаника, уведени су следећи координатни системи:  $O_1xy$  непокретни апсолутни координатни систем који је везан за осу обртања погонског зупчаника, покретни релативни координатни систем  $K_1x_1y_1$  који је везан за погонски зупчаник и обрће се по претходно дефинисаном закону у односу на координатни систем  $O_1xy$ , као и непокретни координатни систем  $N_1\xi\eta$  који је усвојен тако да оса  $N_1\xi$  тангира основну кружницу погонског зупчаника у тачки  $N_1$  а оса  $N_1\eta$  пролази кроз тачке  $O_1$ , која представља координатни почетак непокретног координатног система, и тачку  $N_1$ .

Дакле, анализом спрезања приказаног на слици 5.1 уочава се да тачка  $M_1$  у односу на  $O_1xy$  координатни систем врши апсолутно кретање по профилу зупца зупчаника са спољашњим озубљењем, док се у односу на покретни координатни систем  $K_1x_1y_1$  врши релативно кретање. Из геометријских релација са слике 5.1 произилази да се вектор положаја тачке  $M_1$  у непокретном координатном систему може написати у следећем облику

$$\mathbf{r}_{M_1} = \mathbf{r}_{b_1} + \mathbf{p}_{M_1}, \quad (5.4)$$

где  $\mathbf{r}_{b_1}$  означава вектор положаја тачке  $K_1$  у непокретном координатном систему  $O_1xy$ , док је са  $\mathbf{p}_{M_1}$  представљен вектор положаја тачке  $M_1$  у координатном систему  $K_1x_1y_1$ . Такође, вектор положаја тачке  $M_1$  може се изразити на следећи начин

$$\mathbf{r}_{M_1} = \mathbf{r}_{b_1} + \mathbf{r}_{aM_1}, \quad (5.5)$$

при чему је са  $\mathbf{r}_{b_1}$  означен вектор положаја тачке  $K_1$  додира тангенте на основни круг погонског зупчаника у односу на координатни систем  $O_1xy$ , и  $\mathbf{r}_{aM_1}$  представља вектор положаја тачке  $M_1$  у односу на координатни систем  $N_1\xi\eta$ .

Дакле, вектор апсолутне брзине тачке  $M_1$  одређује се из првог извода вектора положаја тачке, односно

$$\mathbf{v}_{M_1} = \frac{d\mathbf{r}_{M_1}}{dt}, \quad (5.6)$$

односно узимајући у обзир израз (5.4), произилази

$$\frac{d\mathbf{r}_{M_1}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{b_1}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\rho}_{M_1}}{dt}. \quad (5.7)$$

У односу на непокретни координатни  $O_1x_1y_1$  извод по времену вектора положаја  $\mathbf{r}_{b_1}$  представља брзину координатног почетка  $K_1$  која има правац тангенте на основну кружницу, и може се одредити на основу израза

$$\frac{d\mathbf{r}_{b_1}}{dt} = \frac{d(r_{b_1} \mathbf{r}_{b_{10}})}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{b_1}, \quad (5.8)$$

где је са  $\boldsymbol{\omega}_1$  означен вектор тренутне угаоне брзине преносног кретања покретног координатног система  $K_1x_1y_1$  у односу на непокретни систем  $O_1x_1y_1$ , односно  $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\varphi}_1 \mathbf{k}$ , где  $\mathbf{k}$  представља јединични вектор  $O_1z_1$  осе, а  $\mathbf{r}_{b_{10}}$  представља јединични вектор вектора положаја  $\mathbf{r}_{b_1}$ . С друге стране, извод по времену вектора положаја  $\boldsymbol{\rho}_{M_1}$  одређује се на основу израза

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_{M_1}}{dt} = \frac{d(\rho_{M_1} \boldsymbol{\rho}_{01})}{dt} = \dot{\rho}_{M_1} \boldsymbol{\rho}_{01} + \rho_{M_1} \frac{d\boldsymbol{\rho}_{01}}{dt}, \quad (5.9)$$

при чему је са  $\boldsymbol{\rho}_{01}$  означен јединични вектор усмерен дуж вектора положаја  $\boldsymbol{\rho}_{M_1}$ . Из геометријских односа са слике 5.1 произилази да је извод вектора  $\boldsymbol{\rho}_{01}$  дат следећим изразом

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_{01}}{dt} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\varphi}) \mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_{01}. \quad (5.10)$$

Према томе, апсолутна брзина тачке  $M_1$  на профилу зупца зупчаника са спољашњим озубљењем дата је изразом

$$\mathbf{v}_{M_1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{b_1} + \dot{\rho}_{M_1} \boldsymbol{\rho}_{01} + \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_{M_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\rho}_{M_1}. \quad (5.11)$$

Груписањем одговарајућих чланова и заменом једначине (5.4), израз за апсолутну брзину тачке  $M_1$  постаје

$$\mathbf{v}_{M_1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{M_1} + \dot{\rho}_{M_1} \boldsymbol{\rho}_{01} + \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_{M_1}. \quad (5.12)$$

Релативна брзина тачке  $M_1$  може се одредити диференцирањем вектора положаја  $\boldsymbol{\rho}_{M_1}$  у покретном координатном систему  $K_1 x_1 y_1$ , при чему се добија следећи израз

$$\mathbf{v}_{rel, M_1} = \frac{d\boldsymbol{\rho}_{M_1}}{dt} = \frac{d(\rho_{M_1} \boldsymbol{\rho}_{01})}{dt} = \dot{\rho}_{M_1} \boldsymbol{\rho}_{01} + \dot{\theta}_1 \mathbf{k} \times \boldsymbol{\rho}_{M_1}. \quad (5.13)$$

Анализом израза за апсолутну брзину тачке  $M_1$  и израза (5.13) уочава се да преносна брзина тачке  $M_1$  има следећу вредност

$$\mathbf{v}_{pre, M_1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{M_1}. \quad (5.14)$$

Дакле, апсолутна брзина тачке  $M_1$  може да се запише као збир преносне и релативне брзине, односно

$$\mathbf{v}_{M_1} = \mathbf{v}_{pre, M_1} + \mathbf{v}_{rel, M_1}. \quad (5.15)$$

Према основном закону спрезања зупчаника, за остваривање континуалног спрезања профила зубаца апсолутне вредности, брзина тачака  $M_1$  и  $M_2$  на профилима зубаца морају бити једнаке, односно

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{M_1} &= \mathbf{v}_{M_2}, \\ \mathbf{v}_{pre, M_1} + \mathbf{v}_{rel, M_1} &= \mathbf{v}_{pre, M_2} + \mathbf{v}_{rel, M_2}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из разлике вектора преносних брзина произилази вектор брзине клизања профила погонског зупчаника у односу на профил гоњеног зупчаника

$$\mathbf{v}_{kl, 1-2} = \mathbf{v}_{pre, M_1} - \mathbf{v}_{pre, M_2}. \quad (5.17)$$

Заменом у израз (5.16) брзина клизања може се одредити следећим изразом



$$\mathbf{v}_{kl,1-2} = \mathbf{v}_{rel,M_2} - \mathbf{v}_{rel,M_1}. \quad (5.18)$$

У свакој тачки додира профила зубаца могуће је поставити одговарајућу нормалу и тангенту. Пројектовањем векторске једначине (5.16) на правац тангенте у тачки додира добија се следећи израз

$$v_{rel,M_1} - v_{pre,M_1} \sin \alpha_{M_1} = v_{rel,M_2} - v_{pre,M_2} \sin \alpha_{M_2}, \quad (5.19)$$

одакле произилази брзина клизања профила погонског зупчаника у односу на профил гоњеног зупчаника

$$v_{kl,1-2} = v_{pre,M_2} \sin \alpha_{M_2} - v_{pre,M_1} \sin \alpha_{M_1}. \quad (5.20)$$

Такође, пројекцијом векторске једначине (5.16) на правац заједничке нормале добија се

$$v_{pre,M_1} \cos \alpha_{M_1} = v_{pre,M_2} \cos \alpha_{M_2}. \quad (5.21)$$

Тада се однос угаоних брзина може одредити заменом израза за преносне брзине, односно

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{M_2} \cos \alpha_{M_2}}{r_{M_1} \cos \alpha_{M_1}}. \quad (5.22)$$

Са геометријских релација на слици 5.1 произилази следеће

$$\frac{r_{M_2} \cos \alpha_{M_2}}{r_{M_1} \cos \alpha_{M_1}} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}} = \frac{\overline{CN_2}}{\overline{CN_1}}, \quad (5.23)$$

одакле следи једнакост преносних брзина тачака  $M_1$  и  $M_2$  у посматраној тачки додира  $C$ , односно

$$\omega_1 \cdot \overline{O_1C} = \omega_2 \cdot \overline{O_2C}. \quad (5.24)$$

Може се закључити да се у посматраној тачки додира остварује котрљање без клизања, односно тачка  $C$  представља тренутни пол релативних брзина.

Из геометријских релација са слике 5.1, узимајући у обзир изразе (5.20), (5.23) и (5.24), брзина клизања у посматраној тачки  $M \equiv M_1 \equiv M_2$  може се изразити као

$$v_{kl,1-2} = \overline{CM} \cdot (\omega_1 + \omega_2), \quad (5.25)$$

Уочава се да је интензитет брзине клизања профила зупца погонског зупчаника у односу на профил зупца гоњеног зупчаника пропорционалан растојању посматране тачке додира  $M \equiv M_1 \equiv M_2$  од тренутног пола релативних брзина  $C$ . Може се закључити да брзина клизања при проласку кроз тачку  $C$  мења свој смер, а максималну вредност интензитета остварује у тачкама које су најудаљеније од тренутног пола релативних брзина.

На основу познатих вредности брзине клизања, може се дефинисати специфично клизање профила зубаца спрегнутих зупчаника, као однос интензитета брзине клизања посматраног пара зубаца и интензитета релативне брзине, односно у посматраној тачки додира  $M \equiv M_1 \equiv M_2$

$$v_M = \frac{v_{kl,1-2}}{v_{rel,M}} = \frac{v_{rel,2}}{v_{rel,1}} - 1, \quad (5.26)$$

Из геометријских релација са слике 5.1 произилази да се релативне брзине тачака  $M_1$  и  $M_2$ , на профилима погонског и гоњеног зупца, респективно, могу одредити на основу следећих израза

$$v_{rel,M_1} = v_{M_1} \tan \alpha_{M_1}, \quad (5.27)$$

$$v_{rel,M_2} = v_{M_2} \tan \alpha_{M_2}. \quad (5.28)$$

Као што је претходно указано, за остваривање континуалног спрезања профила зубаца, апсолутне вредности брзина тачака  $M_1$  и  $M_2$  на профилима зубаца морају бити једнаке, одакле на основу геометријских релација са слике 5.1 произилази

$$\begin{aligned} v_M \equiv v_{M_1} \equiv v_{M_2} &\Rightarrow \\ \omega_1 r_{b1} &= \omega_2 r_{b2} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Нападни углови профила зупчаника са спољашњим и унутрашњим озубљењем, у тачкама  $M \equiv M_1 \equiv M_2$ , одређују се према изразима

$$\tan \alpha_{M_1} = \frac{\rho_{M_1}}{r_{b1}}, \quad (5.30)$$

$$\tan \alpha_{M_2} = \frac{\rho_{M_2}}{r_{b2}}, \quad (5.31)$$

где су са  $\rho_{M_1}$  и  $\rho_{M_2}$  означени одговарајући полупречници кривине на профилу зупца. Према томе, заменом у израз (5.26) добија се коначни израз за специфично клизање на профилу зупчаника са спољашњим озубљењем у тачки  $M_1$

$$v_{M_1} = -1 + \frac{\rho_{M_2}}{u\rho_{M_1}}. \quad (5.32)$$

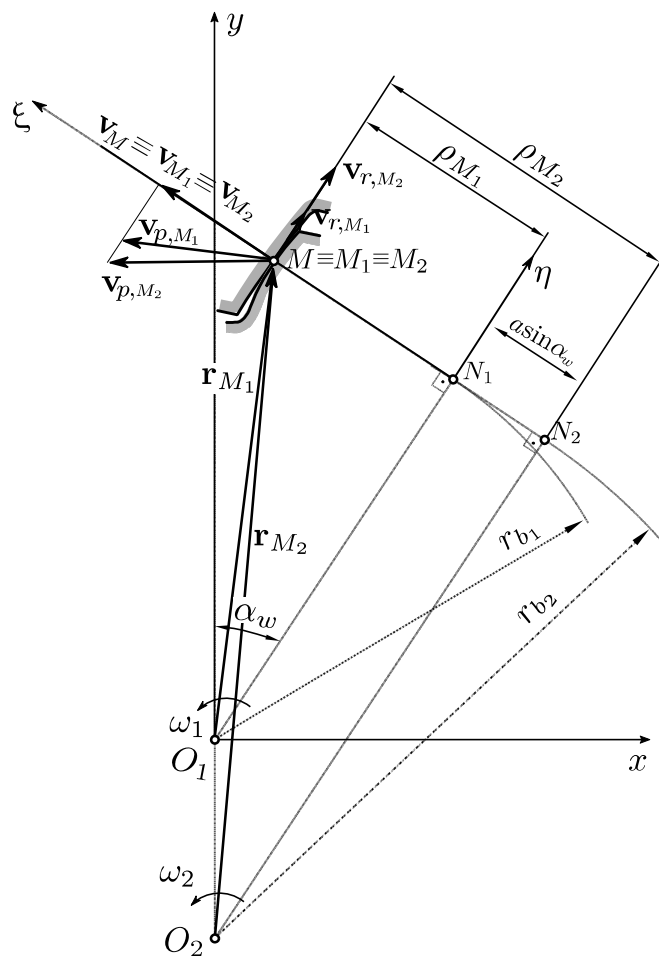
На сличан начин, полазећи од израза

$$v_{M_2} = \frac{v_{kl,1-2}}{v_{rel,M_2}}, \quad (5.33)$$

одређује се вредност специфичног клизања на профилу зупчаника са унутрашњим озубљењем

$$v_{M_2} = u \frac{\rho_{M_1}}{\rho_{M_2}} - 1. \quad (5.34)$$

Узимајући у обзир да током спрезања зупчаника посматрана тачка додира  $M \equiv M_1 \equiv M_2$  у односу на непокретни координатни систем  $Oxy$  описује праву линију (додирницу), за даљу анализу тока специфичног клизања погодно је усвојити координатни систем  $N_1\xi\eta$  такав да се његова апсцисна оса  $N_1\xi$  поклапа са додирницом профила, а друга оса пролази кроз центар зупчаника са спољашњим озубљењем, као што је приказано на слици 5.2.



Слика 5.2 Спрезање профила зупчаника са унутрашњим и спољашњим озубљењем у односу на одговарајуће координатне системе

На основу геометријских релација са слике 5.2 произилази да се специфично клизање на профилу погонског зупчаника може се изразити следећим изразом

$$v_{M_1} = -1 + \frac{1}{u} + \frac{a \sin \alpha_w}{u \rho_{M_1}} \quad (5.35)$$

Ради анализе специфичног клизања током додирног периода уводи се смена  $\rho_{M_1} = \xi_1$ , тако да израз (5.35) постаје

$$v_{M_1} = -1 + \frac{1}{u} + \frac{a \sin \alpha_w}{u \xi_1} \quad (5.36)$$

На сличан начин се одређује и специфично клизање током додирног периода на профилу зупца са унутрашњим озубљењем, у складу са изразом

$$v_{M_2} = u - 1 - \frac{u a \sin \alpha_w}{a \sin \alpha_w + \xi_1}. \quad (5.37)$$

Анализом израза (5.36) и (5.37) произилази да је интензитет специфичних клизања спрегнутих профила зубаца највећи у тачкама које су најудаљеније од тренутног пола релативних брзина  $C$ .

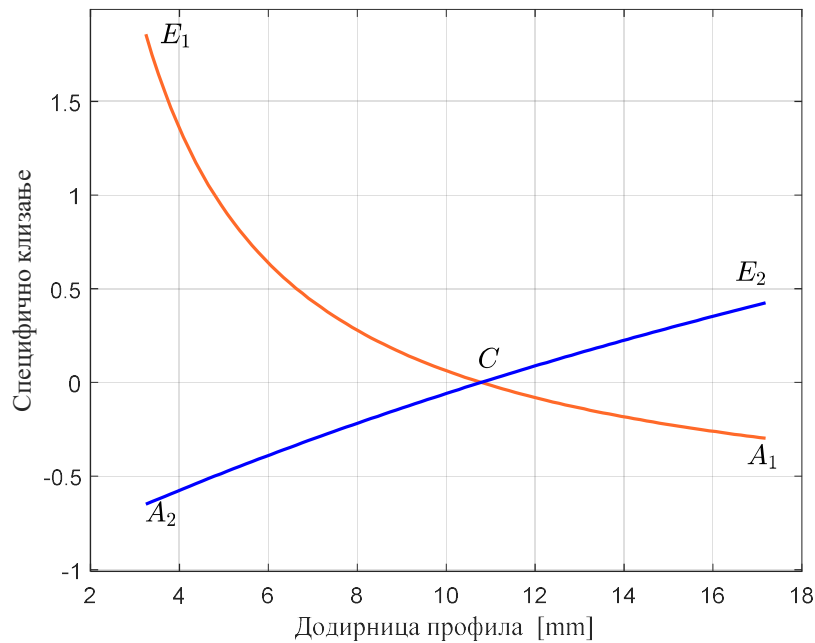
У циљу обезбеђивања равномерног хабања бокова зубаца спрегнутих зупчаника потребно је да интензитети специфичних клизања у крајњим тачкама, које су најудаљеније од тренутног пола релативних брзина, буду једнаки. Анализом спрезања зупчаника са унутрашњим и спољашњим озубљењем, утврђене су карактеристичне тачке еволвентног профила које су најудаљеније од тренутног пола релативних брзина. Заменом одговарајућих вредности полупречника кривина еволвентног профила у тачкама  $A_1$  и  $E_2$ , следи максимална вредност интензитета специфичног клизања зупчаника са унутрашњим озубљењем

$$v_{A_1} = \frac{\rho_{E_2}}{u \rho_{A_1}} - 1. \quad (5.38)$$

С друге стране, максимална вредност интензитета специфичног клизања зупчаника са унутрашњим озубљењем одређује се у тачки  $A_2$ , у складу са изразом

$$v_{A_2} = u \frac{\rho_{E_1}}{\rho_{A_2}} - 1. \quad (5.39)$$

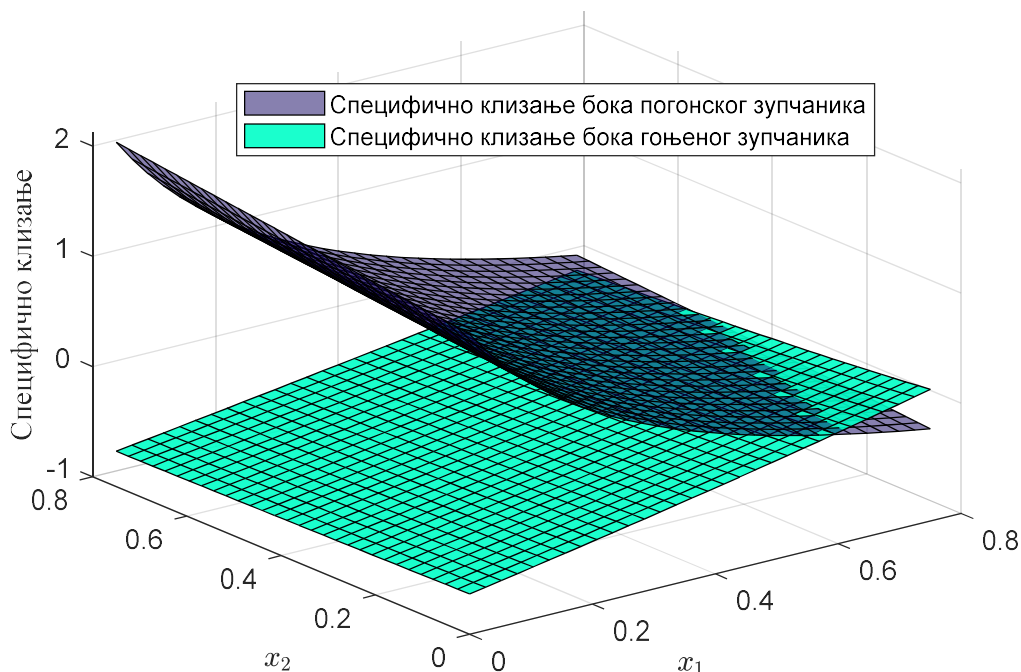
Ради анализе специфичних клизања у карактеристичним тачкама на еволвентном профилу зупчаника у спреси, на слици 5.3 приказана је зависност специфичних клизања истовремено спрегнутих профила зубаца у односу на додирницу профила, за зупчасти пар са параметрима:  $z_1 = 20$ ,  $z_2 = 100$ ,  $m_n = 3$  mm,  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $\alpha = 20^\circ$ .



Слика 5.3 Специфична клизања дуж додирнице профила у карактеристичним тачкама

На основу геометријске интерпретације добијених резултата, на слици 5.3, произилази да су специфична клизања највећа на почетку спрезања на подножју профила погонског зупчаника  $E_1$  и врху профила зупца гоњеног зупчаника  $A_2$ . У кинематском полу (тачка С) специфична клизања једнака су нули. При проласку спрегнутих профила кроз пол С брзине клизања мењају смер до одговарајућих тачака на врху профила зупца погонског и подножја ( $E_2$ ) гоњеног зупчаника. На основу ове анализе произилази неопходност постављања функционалног ограничења у облику једнакости за истоветност специфичних клизања на врху и подножју профила спрегнутих зубаца, како би се обезбедила равномерност хабања спрегнутих бокова зубаца зупчаника, са аспекта кинематике, односно геометрије.

Циљ наредне анализе је провера осетљивости постављеног функционалног ограничења специфичног клизања у подножју профила погонског, у односу на врх профила гоњеног зупчаника, у зависности од померања профила спрегнутих зупчаника. Према томе, на слици 5.4 приказан је интензитет специфичног клизања у тачкама које су најудаљеније од пола С, за скуп вредности померања профила  $x_1$  и  $x_2$ .



Слика 5.4 Специфично клизање у тачкама најудаљенијим од тренутног пола  $C$

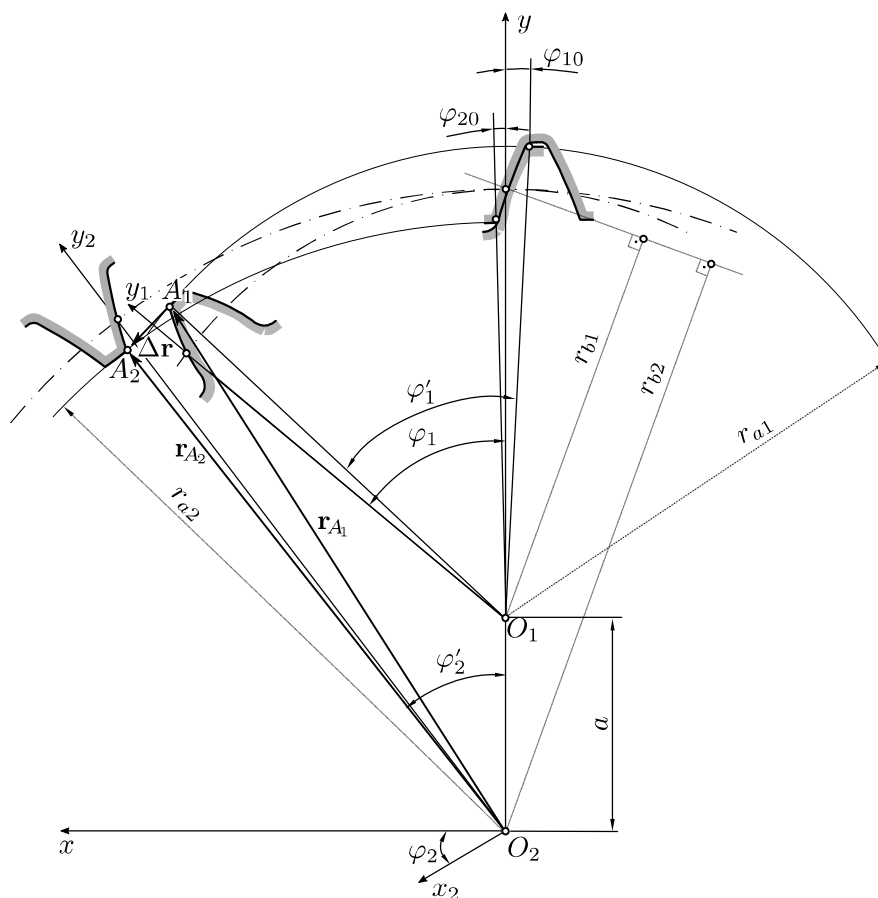
На основу анализе специфичних клизања спрегнутих профила, са слике 5.4 произилази да су вредности специфичних клизања спрегнутих профила највеће на профилу погонског зупчаника у тачки  $E1$ , и да са порастом коефицијента померања вредности специфичног клизања опадају до тачке  $A1$ . Ова анализа указује да је неопходна корекција профила зубаца, како би се остварила истоветност хабања спрегнутих бокова зубаца, са аспекта геометрије.

### 5.1.2 Интерференца врхова профила зубаца

Ако се на адекватан начин не изврши избор геометријских величина посматраног зупчастог пара са унутрашњим озубљењем, током спрезања врха профила зупца зупчаника са спољашњим озубљењем у међузубљу зупчаника са унутрашњим озубљењем може се јавити интерференца посматраних профила зубаца.

Према томе, темена интерференца зупчастих парова се анализира од тренутка изласка врха профила зупца зупчаника са спољашњим озубљењем из међузубља зупчаника са унутрашњим озубљењем. Централни угао ротације зупчаника је угао између праве која пролази кроз центар погонског зупчаника и

тачке пресека темених кружница зупчастог пара, као и праве која пролази кроз тренутни пол ротације  $S$ , као што је илустровано на слици 5.5.



Слика 5.5 Приказ геометријских релација за дефинисање темене интерференце

На основу геометријских релација са слике 5.5 произилази да се интерференца врхова профила спрегнутих зупчаника проверава у домену централног угла  $\varphi_1' \in [0, \varphi_{1,\max}']$ , где се угао ротације врха профила зупчаника са спољашњим озубљењем при изласку из конкавне области  $\varphi_{1,\max}'$  може одредити у складу са изразом

$$\varphi_{1,\max}' = \arccos \frac{r_{a2}^2 - r_{a1}^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot r_{a1}}, \quad (5.40)$$

где су са  $r_{ai}$ ,  $i=1,2$  означени одговарајући полупречници темених кружница зупчаника са спољашњим и унутрашњим озубљењем, респективно.



Ако се са  $A_{10}$  и  $A_{20}$  означе тачке на врховима профила зубаца зупчаника у спреси у почетном тренутку, као што је приказано на слици 5.5, тако да се у односу на координатни систем  $O_1x_1y_1$  њихов угаони положај одређује на основу израза

$$\varphi_{10} = \text{inv}\alpha_{a1} - \text{inv}\alpha_w, \quad (5.41)$$

$$\varphi_{20} = \text{inv}\alpha_w - \text{inv}\alpha_{a2}, \quad (5.42)$$

где су са  $\alpha_{ai}$ ,  $i=1,2$  означени нападни углови у тачкама  $A_{10}$  и  $A_{20}$  на теменим кружницама зупчаника са спољашњим и унутрашњим озубљењем, респективно.

Полазећи од претпоставке да се тачка  $A_1$  на врху профила зупчаника са спољашњим озубљењем налази у међузубљу зупчаника са унутрашњим озубљењем, у произвољном тренутку положај овог зупчаника може се дефинисати углом  $\varphi_1$  у односу на координатни систем  $O_1x_1y_1$ . Тада се вектори положаја тачке  $A_1$  и тачке  $A_2$ , на врху профила зупчаника са унутрашњим озубљењем могу одредити на основу

$$\mathbf{r}_{A_1} = r_{a1} \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) \mathbf{i} + (r_{a1} \cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) + a) \mathbf{j}, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{r}_{A_2} = r_{a2} \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) \mathbf{j} + r_{a2} \cos\left(\frac{r_{w1}}{r_{w2}} + \varphi_{20}\right) \mathbf{j}. \quad (5.44)$$

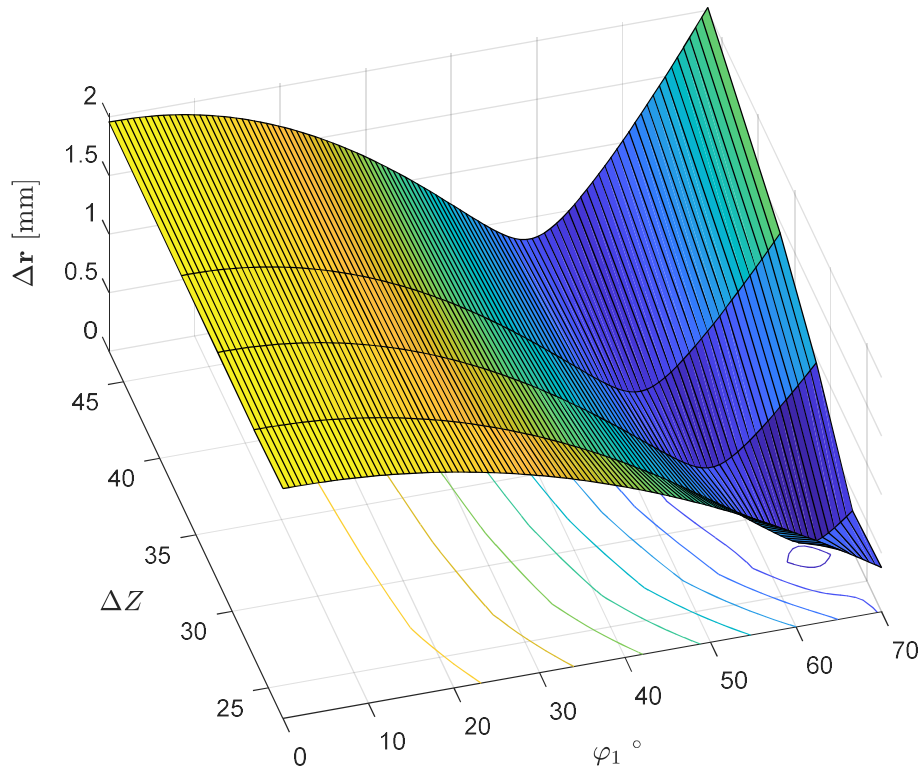
Разликом вектора положаја  $\mathbf{r}_{A_1}$  и  $\mathbf{r}_{A_2}$ , може се одредити вектор растојања врхова профила зубаца

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{A_1} - \mathbf{r}_{A_2} \\ &= \left( r_{a2} \sin\left(\frac{r_{w1}}{r_{w2}} + \varphi_{20}\right) - r_{a1} \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) \right) \mathbf{i} \\ &\quad + \left( r_{a2} \cos\left(\frac{r_{w1}}{r_{w2}} + \varphi_{20}\right) - (r_{a1} \cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) + a) \right) \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

Односно, укупно растојање врхова профила зубаца добија се као интензитет вектора  $\Delta \mathbf{r}$

$$\|\Delta \mathbf{r}\| = \sqrt{\left( r_{a2} \sin\left(\frac{r_{w1}}{r_{w2}} + \varphi_{20}\right) - r_{a1} \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) \right)^2 + \left( r_{a2} \cos\left(\frac{r_{w1}}{r_{w2}} + \varphi_{20}\right) - (r_{a1} \cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) + a) \right)^2}. \quad (5.46)$$

У циљу анализе осетљивости растојања између врхова профила зубаца, с обзиром на промену улазних параметара, на слици 5.6 приказана је зависност промене растојања истовремено спрегнутих врхова профила зубаца  $\|\Delta r\|$  у односу на угао ротације зупчаника са спољашњим озубљењем  $\varphi_1$  у функцији разлике зубаца зупчастог пара  $\Delta Z$ .



Слика 5.6 Зависност промене растојања истовремено спрегнутих врхова профила зубаца у односу на угао ротације  $\varphi_1$

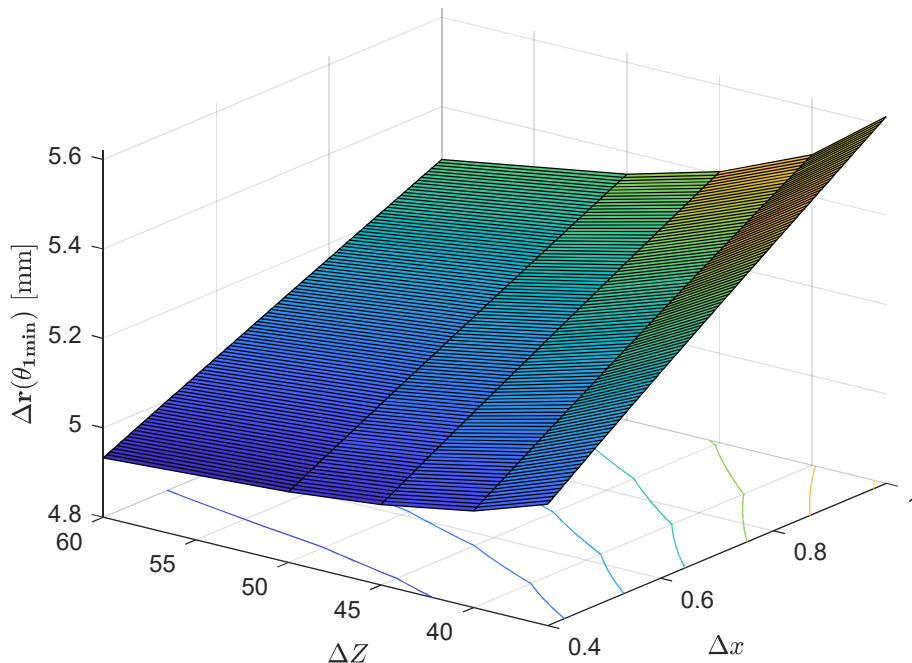
На основу графичке интерпретације функционалног ограничења приказаног на слици 5.6 произилази да је укупно растојање врхова профила зубаца  $\|\Delta r\|$  изузетно осетљиво на промену угла ротације  $\varphi_1$ . Уочава се да се најмање растојање између врхова профила веће уколико је  $\Delta Z$ , разлика зубаца зупчастог пара већа.

С обзиром на непожељне ефекте које интерференца профила носи, потребно је одредити одговарајуће вредности померања профила зубаца, у циљу повећања растојања између зубаца. Према томе, потребно је одредити вредност минималног растојања врхова профила зубаца  $\|\Delta r_{\min}\|$ , односно угао  $\varphi_{1,\min}$  за које се остварује

минимално растојање. Према томе, из услова да је парцијални извод израза (5.46) по независној промењивој  $\varphi_1$  једнак нули произилази угао  $\varphi_{1,\min}$ , односно

$$\frac{\partial \|\Delta \mathbf{r}\|}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{\Delta r} \left[ \Delta r_x \frac{\partial (\Delta r_x)}{\partial \varphi_1} + \Delta r_y \frac{\partial (\Delta r_y)}{\partial \varphi_1} \right] = 0, \quad (5.47)$$

Циљ наредне анализе је провера осетљивости постављеног функционалног ограничења минималног растојања врхова профила зубаца  $\|\Delta \mathbf{r}_{\min}\|$ , у зависности од померања профила спрегнутих зупчаника  $\Delta x$  и у функцији разлике зубаца зупчастог пара  $\Delta Z$ , као што је приказано на слици 5.7.



Слика 5.7 Илустрација промене минималног растојања врхова профила зубаца  $\Delta r$  у зависности од померања профила спрегнутих зупчаника  $\Delta x$  и разлике зубаца зупчастог пара  $\Delta Z$

На основу графичке интерпретације резултата са слике 5.7, закључује се да је постављено функционално ограничење осетљиво на промену прираштаја коефицијента померања профила зубаца зупчаника са унутрашњим озубљењем, као и на разлику броја зубаца унутрашњег зупчастог пара. Уочава се да се са порастом разлике зубаца зупчастог пара и порастом коефицијента померања расте и вредност минималног растојања врхова профила зубаца  $\|\Delta \mathbf{r}_{\min}\|$ .

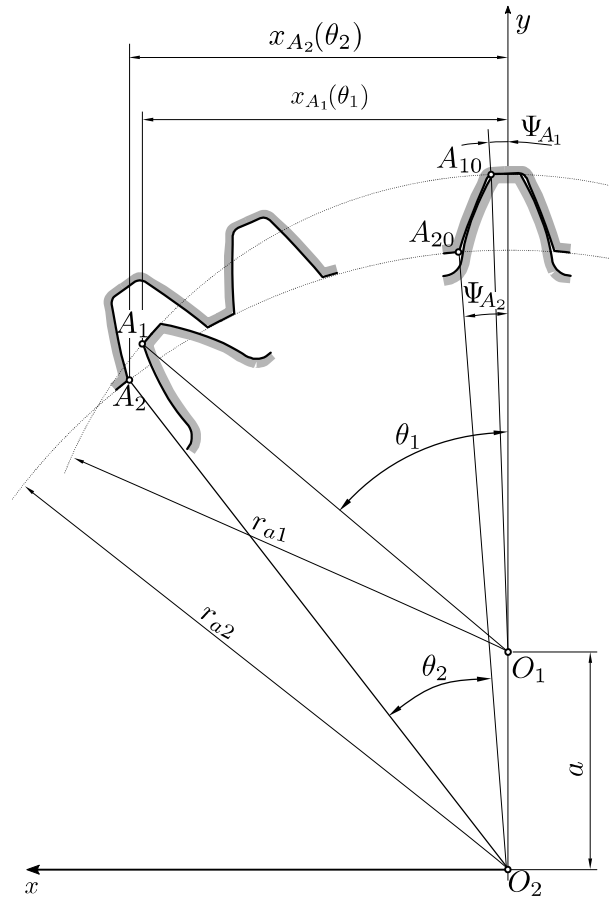
### 5.1.3 Радијална интерференца

При радијалном примицању зупчаника са спољашњим озубљењем у односу на осу непокретног зупчаника са унутрашњим озубљењем може доћи до одстрањивања једног дела активног профила зупца, што се назива радијална интерференца. Ова појава за последицу има знатно смањење степена спрезања профила.

У општем случају услов за одстрањивање појаве радијалне интерференце може се исказати следећим функционалним ограничењем типа неједнакости

$$\Delta_x = x_{A_2}(\theta_2) - x_{A_1}(\theta_1) > 0, \quad (5.48)$$

где је са  $\Delta_x$  означено међусобно растојање тачака на врху профила зубаца одговарајућих зупчаника у правцу  $Ox$  осе, док су са  $x_{A_1}(\theta_1)$  и  $x_{A_2}(\theta_2)$  означене координате одговарајућих тачака на врху профила зубаца зупчаника са спољашњим и зупчаника са унутрашњим озубљењем, респективно. На слици 5.8 приказано је радијално примицање зупчаника са спољашњим озубљењем, са одговарајућим геометријским величинама.



Слика 5.8 Радијално примицање зупчаника са спољашњим озубљењем у међузубљу зупчаника са унутрашњим озубљењем

На основу геометријских релација са слике 5.8 произилази да се параметар  $\Delta_x$  може изразити

$$\Delta_x = r_{a2} \sin\left(\frac{z_1}{z_2} \theta_1 + \psi_{A_2}\right) - r_{a1} \sin(\theta_1 + \psi_{A_1}), \quad (5.49)$$

где је  $\theta_2 = \frac{z_1}{z_2} \theta_1$ , и са  $\psi_{A_1}$  је означен централни угао зупчаника са спољашњим озубљењем, који се одређује из релације

$$\psi_{A_1} = \text{inv} \gamma_1 - \text{inv} \alpha_{A_1}. \quad (5.50)$$

Нападни угао на теменом кругу, чија је лучна дебљина профила једнака нули, добија из услова

$$\text{inv}\gamma_1 = \text{inv}\alpha_n + \frac{0.5\pi + 2x_1 \tan \alpha_n}{z_1}. \quad (5.51)$$

Минимално растојање између врхова профила зубаца посматраног зупчастог пара добија се из услова да је парцијални извод по  $\theta_1$  израза (5.49) једнак нули, односно

$$\frac{\partial \Delta_x}{\partial \theta_1} = \frac{z_1}{z_2} r_{a2} \cos\left(\frac{z_1}{z_2} \theta_1 + \psi_{A_2}\right) - r_{a1} \cos(\theta_1 + \psi_{A_1}) = 0. \quad (5.52)$$

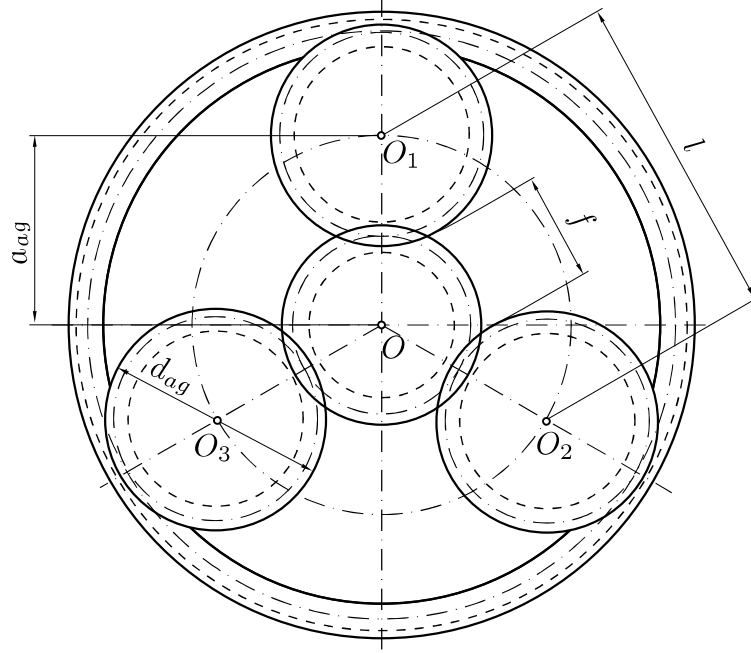
Нумеричким решавањем ове трансценденталне једначине одређује се угао  $\theta_{1,\min}$ , за који је растојање између врхова профила зубаца посматраног зупчастог пара минимално, односно

$$\Delta_{x,\min} = x_{A_2}(\theta_{1,\min}) - x_{A_1}(\theta_{1,\min}). \quad (5.53)$$

#### 5.1.4 Услов суседности сателита

У општем случају, конструкције планетарних преносника подразумевају уградњу већег броја сателита, ради расподеле оптерећења на већи број истовремено спрегнутих зупчаника. Међутим, услед физичких ограничења, број сателита који се могу монтирати у једној равни планетарног преносника зависи од зазора који се мора остварити између темених кругова сателита

Без губљења у општости, на слици 5.9 шематски је приказан једноступени планетарни преносник, где је илустровано спрезање три сателита са централним зупчаником и одговарајућим зупчаником са унутрашњим озубљењем.



Слика 5.9 Расподела сателита у једној равни планетарног преносника

На слици 5.9 приказан је зазор  $f$  између суседних сателита, одакле из геометријске интерпретације произилази да овај зазор представља услов суседности сателита. Из геометријских односа са слике 5.9 произилази да се услов суседности сателита може изразити следећом неједначином

$$l = 2a_{a-g} \sin \frac{\pi}{n_w} \geq f + d_{ag}, \quad (5.54)$$

где су  $a_{a-g}$  осно растојање између централног зупчаника и сателита,  $d_{ag}$  темена кружница сателита и  $n_w$  укупан број сателита у једној равни планетарног преносника. Заменом одговарајућих израза за осно растојање и темени пречник сателита произилази следећи израз:

$$\left( z_a + z_g \right) \frac{\cos \alpha_{a-g}}{\cos \alpha_{wa-g}} \cdot \sin \frac{\pi}{n_w} \geq z_g + 2u_n + 2x_g + 0,5, \quad (5.55)$$

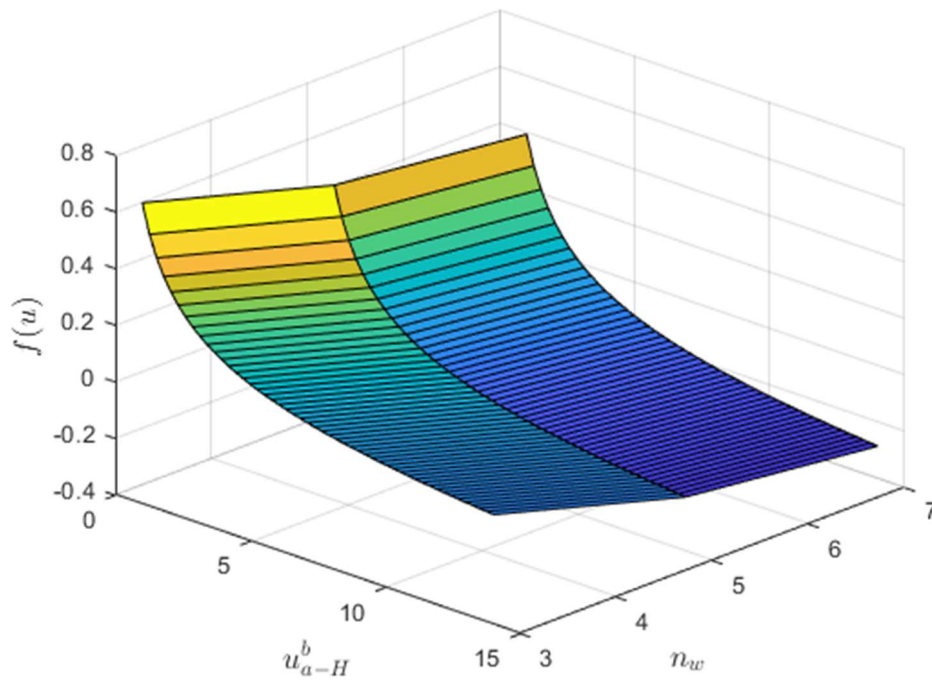
где су  $u_n$  коефицијент висине зупца,  $x_g$  коефицијент померања профила сателита. За случај када је збир коефицијената померања једнак нули, тј.  $(x_g + x_a) = 0$ , израз (5.55) се додатно поједностављује

$$(z_a + z_g) \sin \frac{\pi}{n_w} \geq z_g + 2u_n + 0,5. \quad (5.56)$$

Узимајући у обзир укупни преносни однос планетарног преносника,  $u_{a-H}^b = 1 + \frac{z_b}{z_a}$ , и услов коаксијалности  $z_a + z_g = z_b - z_g$ , уз примену одговарајућих тригонометријских операција, услов (5.56) постаје

$$\sqrt{\frac{z_a - 2,5}{z_a \cdot u_{a-H}^b}} - \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2 \cdot n_w} \right) \geq 0. \quad (5.57)$$

Циљ наредне анализе је провера осетљивости постављеног функционалног ограничења, с обзиром на промену укупног преносног односа у функцији броја сателита у једној равни планетарног преносника, као што је приказано на слици 5.1.



Слика 5.10 Услов суседности сателита с обзиром на промену укупног преносног односа и броја сателита у једној равни планетарног преносника

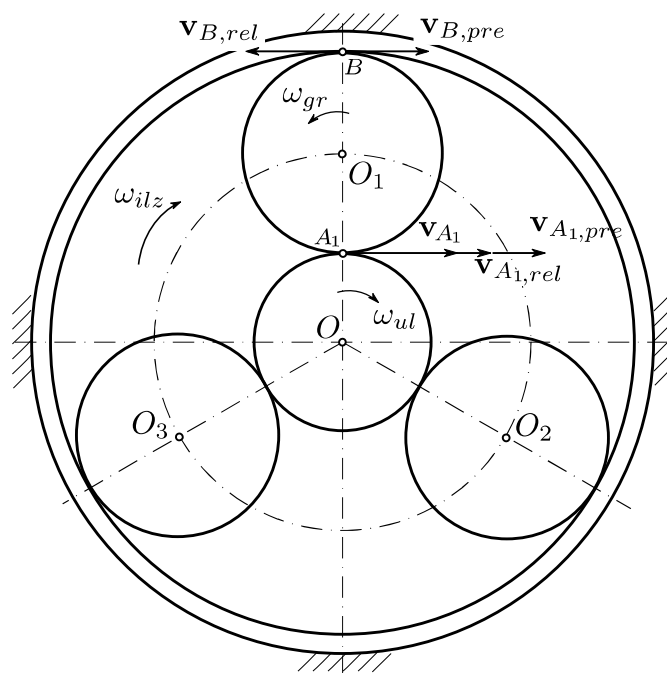
На слици 5.10 уочава се да је постављено функционално ограничење услова суседности сателита осетљиво на промену преносног односа. Са порастом броја



сателита постављених у једној равни планетарног преносника, опада вредност зазора  $f$ .

### 5.1.5 Услов спрезања централног зупчаника и сателита

У циљу формирања ограничења које обезбеђује истовремено спрезање централног зупчаника са сателитима, неопходно је анализирати спрезање зупчастих парова формирањем одговарајућег кинематског модела планетарног преносника у једној равни, уз претпоставку да кинематски кругови одговарајућих зупчастих парова врше узајамно котрљање без клизања, као што је приказано на слици 5.11.



Слика 5.11 Кинематски модел разматраног једноступеног планетарног преносника

Ако се претпостави да се у произвољном тренутку тачке  $A_1$  и  $A_2$ , које припадају профилима зубаца централног зупчаника и сателита, респективно, додирују, тако да  $A \equiv A_1 \equiv A_2$ . Тада се одговарајућа апсолутна брзина у тачки  $A$  на сателиту може изразити као збир релативне и преносне брзине, односно

$$\mathbf{v}_{A=A_2} = \mathbf{v}_{A,rel} + \mathbf{v}_{A,pre}, \quad (5.58)$$

где су интензитети одговарајућих релативних и преносних брзина  $v_{A_2,rel} = r_g \omega_{gr}$  и  $v_{A_2,pre} = r_g \omega_H$ , респективно,  $\omega_{gr}$  означава релативну угаону брзину сателита,  $\omega_H$  представља угаону брзину носача сателита, тако да је вредност апсолутне угаоне брзине сателита  $\omega_{ga} = \omega_{gr} - \omega_H$ . Пројектовањем једначине (5.58) на правац тангенте кинематских кругова у тачки додира  $A$ , произилази

$$v_{A_2} = r_g \omega_{ga} + (r_a + r_g) \omega_H. \quad (5.59)$$

Апсолутна брзина тачке на централном зупчанику може се изразити

$$v_{A=A} = r_a \omega_a. \quad (5.60)$$

Из услова котрљања без клизања кинематских кружница, произилази једнакост брзина

$$\begin{aligned} v_{A_1} &= v_{A_2}, \\ r_a \omega_a &= r_a \omega_H + r_g (\omega_{ga} + \omega_H). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Сателит се додирује са кинематском кружницом непокретног сателита у тачки  $B$ . С обзиром на то да зупчаник са унутрашњим озубљењем мирује, његова апсолутна брзина је  $v_B = 0$ . Пројектовањем брзина на заједничку тангенту у тачки  $B$ , произилази

$$r_g \omega_{gr} - r_b \omega_H = 0, \quad (5.62)$$

одакле произилази апсолутна угаона брзина сателита

$$\omega_{ga} = \omega_H \left( \frac{r_b}{r_g} - 1 \right). \quad (5.63)$$

Такође, заменом израза (5.63) у (5.61) произилази угаона брзина носача сателита, односно

$$\omega_H = \omega_a \frac{r_a}{r_a + r_b}. \quad (5.64)$$

Ако се изразе одговарајући полупречници кинематских кружница преко бројева зубаца кореспондентних зупчаника, израз (5.64) постаје

$$\omega_H = \omega_a \frac{z_a}{z_a + z_b}. \quad (5.65)$$

Ако се претпостави да се носач сателита ротирао из положаја (а) у положај (б), приказан на слици 5.11 за централни угао

$$\theta_H = \frac{2\pi}{n_w}. \quad (5.66)$$

У исто време, услед услова котрљања без клизања произилази да се централни зупчаник заокренуо за угао  $\theta_a$  за целобројни умножак корака  $\theta_{1a}$ , односно  $\theta_a = C\theta_{1a}$ . При томе је угаони корак на кинематском кругу централног зупчаника

$$\theta_{a1} = \frac{2\pi}{z_a}. \quad (5.67)$$

На основу израза (5.65) произилази однос између углова ротације, односно

$$\theta_H = \theta_a \frac{z_a}{z_a + z_b}. \quad (5.68)$$

Заменом израза (5.66) и (5.67) у (5.68) произилази услов којим се обезбеђује истовремено спрезање централног зупчаника са сателитима, у виду ограничења типа једнакости

$$C = \frac{z_a + z_b}{n_w}. \quad (5.69)$$

Анализом израза (5.69) може се закључити да се несметано истовремено спрезање централног зупчаника са сателитима остварује у условима када је збир зубаца централног и стационарног зупчаника дељив без остатка са бројем сателита инсталираних у једној равни планетарног преносника.

## **5.2 Критеријумске функције**

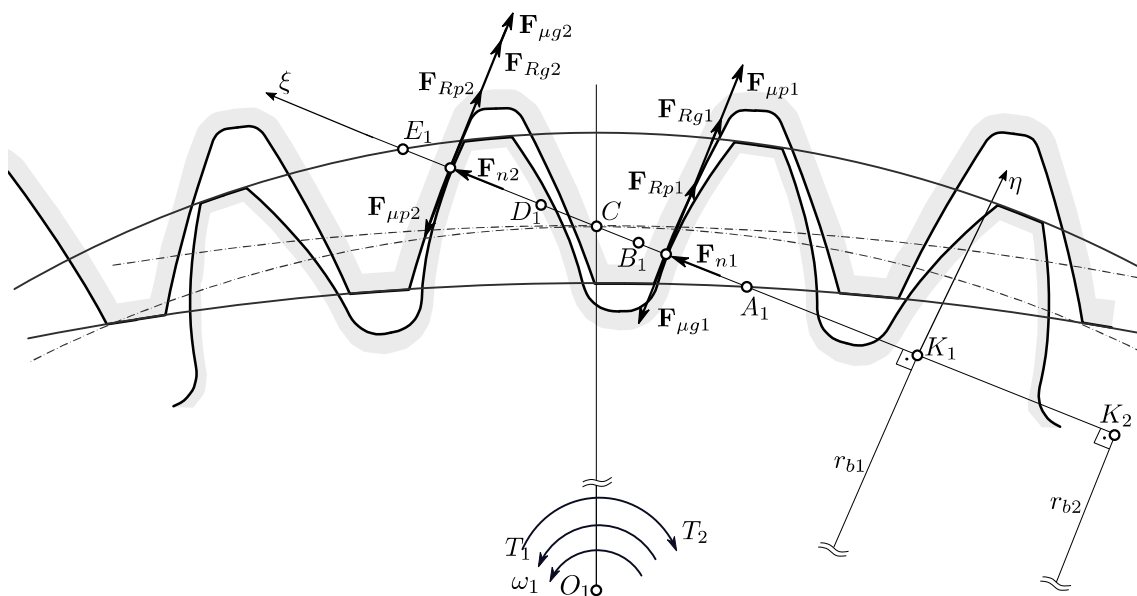
### **5.2.1 Степен искоришћења**

Релативно кретање профила зубаца у спреси током додирног периода, под дејством нормалне силе карактерисано је котрљањем и клизањем, односно трењем које се јавља између бокова зубаца. С обзиром на то да се трење током спрезања зубаца не може се у потпуности елиминисати, део снаге који се преноси са погонског зупчаника на гоњени неминовно се троши на савладавање отпора трења. Ефикасност зупчастог пара се изражава кроз степен искоришћења, који се може дефинисати као однос предате и снаге на излазу, односно као мера до које је систем успешан у трансформисању механичке енергије.

Као што је претходно указано, познавање кинематски величина од значаја је не само при одређивању радне способности зупчастих парова, већ и при одређивању степена искоришћења, с обзиром на то да је познато да губици енергије који настају као последица трења котрљања и трења клизања, зависе од интензитета и смера брзине клизања посматраних профила зубаца у захвату. У складу са тим, радови различитих истраживача фокусирани су на анализу степена искоришћења зупчастих парова [75-78]. Степен искоришћења цилиндричних зупчастих парова са правим зупцима и одговарајући математички модели за анализу степена искоришћења зупчастих парова са унутрашњим озубљењем формиран су у [79]. Такође, примењена су два приступа за израчунавање вредности коефицијента трења дуж активног дела додирнице профила зубаца, у циљу одређивања енергетске ефикасности цилиндричних зупчастих парова са правим зупцима, у раду [5]. Први приступ подразумева примену израза [80] за одређивање тренутне вредности коефицијента трења у свакој тачки активног дела додирнице, док се други приступ заснива на примени средње вредности коефицијента трења у складу са [5].

Ради анализе степена ефикасности зупчастог пара, неопходно је размотрити дејства одговарајућих сила при спрезању зупчастих парова са унутрашњим и

спољашњим озубљењем, као и зупчастих парова са спољашњим озубљењем, као што је приказано на слици 5.12.



Слика 5.12 Анализа дејства одговарајућих сила трења током спрезања

У циљу наредне анализе уведен је координатни систем  $K_1\xi\zeta$ , као непокретни координатни систем, чија се апсциса  $K_1\xi$  поклапа са додирницом, док оса  $K_1\zeta$  пролази кроз центар погонског зупчаника и управна је на додирницу. У општем случају, за константну угаону брзину погонског зупчаника,  $\omega_1$ , степен искоришћења зупчастог пара дуж активне дужине додирнице  $l_a$  може се добити интегралнењем

$$\eta_{gb}^H = \frac{1}{l_a} \int_A^D \eta_t(\xi) d\xi, \quad (5.70)$$

где је са  $\xi$  означена координата дуж апсцисе координатног система  $O\xi\zeta$ , док се активна дужина додирнице  $l_a = \overline{A_2E_2}$  одређује се на основу израза

$$l_a = 0.5 \left( \sqrt{d_{a1}^2 - d_{b1}^2} + \sqrt{d_{a2}^2 - d_{b2}^2} \right) - a \sin \alpha_{wt}. \quad (5.71)$$

У изразу (5.70) тренутна вредност степена искоришћења у свакој тачки на активном делу додирнице одређује се из односа

$$\eta_i(\xi) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1}{u}, \quad (5.72)$$

где је са  $T_1$  означен константан обртни момент на погонском зупчанику, док је са  $T_2$  означен обртни момент на гоњеном зупчанику, чији интензитет је потребно одредити, и  $u$  представља релативни кинематски преносни однос посматраног зупчастог пара.

На основу Кулоновог закона, произилази да је интензитет силе трења клизања која делује на  $i$ -ти пар бокова зубаца у спреси одређен на основу израза

$$\begin{aligned} F_{\mu pi} &= \mu_i(\xi) F_{ni}(\xi) \operatorname{sgn}(V_{si}(\xi)), \quad i=1,2, \\ F_{\mu gi} &= -\mu_i(\xi) F_{ni}(\xi) \operatorname{sgn}(V_{si}(\xi)), \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (5.73)$$

где су са  $F_{\mu pi}$  и  $F_{\mu gi}$  означени интензитети сила трења клизања које делују на бок зупца погонског, односно гоњеног зупчаника, респективно,  $\mu(\xi)$  представља коефицијент трења у посматраној тачки на активној додирници,  $\operatorname{sgn}(\bullet)$  означава сигнум функцију, и  $F_{ni}(\xi)$  означава интензитет нормалне силе која делује на истовремено спрегнуте профиле зубаца. Из геометријске интерпретације слике 5.12 произилази да је смер силе трења клизања супротан у односу на смер релативне брзине клизања између површина два бока зупца у контакту и увек је управна на додирницу профила.

У доступној литератури је описан велики број истраживања која се тичу експериментално-теоријског одређивања израза за израчунавање коефицијента трења дуж бокова зубаца. На основу теорије еластохидродинамичког подмазивања (*elasto-hydrodynamic lubrication*, EHL) [81], анализиран је ефекат појаве трења између зубаца у контакту, и на бази експерименталних истраживања добијен је аналитички израз за одређивање вредности коефицијента трења, који се може изразити на следећи начин

$$\mu_i(\xi) = C_1 \log_{10} \left( \frac{C_2 \cdot F_{ni}(\xi)}{b} \eta_o V_{si}(\xi) V_{ei}^2(\xi) \right) \quad i=1,2, \quad (5.74)$$

где је са је са  $b$  означена ширина зупчаника,  $\eta_0$  означава динамичку вискозност уља за подмазивање, док су коефицијенти  $C_1$  и  $C_2$  усвојени на следећи начин  $C_1 = 0,0127$  и  $C_2 = 29,66$ ,  $v_{si}$  означава интензитет брзине клизања погонског зупчаника у односу на гоњени и  $v_{ei}$  представља брзину котрљања профила зубаца зупчаника. Анализом израза (5.74) уочава се да вредност коефицијента трења зависи од интензитета нормалне силе, брзина клизања и котрљања, динамичке вискозности уља и ширине зупчаника. С друге стране, аутори у раду [82] су разматрали храпавост површина бокова у циљу формирања израза за одређивање коефицијента трења. Према томе, одговарајућа вредност коефицијента трења одређује се на основу израза

$$\mu_i = 0.048 \left( \frac{F_{ni}(\xi) / b}{V_{si}(\xi) R} \right)^{0.2} \eta_0^{0.05} R_a^{0.25} X_L, \quad (5.75)$$

где је са  $R_a$  означен параметар површинске храпавости,  $R$  представља средњи полупречник кривине спрегнутих профила, док фактор подмазивања  $X_L$  зависи од типа уља који се користи за подмазивање зупчаника.

Одговарајуће брзине клизања и котрљања, могу се одредити на основу израза

$$\begin{aligned} v_{si}(\xi) &= v_{pi}(\xi) - v_{gi}(\xi) \quad i = 1, 2, \\ v_{ei}(\xi) &= \frac{1}{2} [v_{pi}(\xi) + v_{gi}(\xi)] \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.76)$$

при чему се интензитети обимних брзина  $v_{pi}(\xi)$  и  $v_{gi}(\xi)$ , погонског и гоњеног зупчаника, респективно у свакој посматраној тачки на активној додирници, могу одредити на основу следећих релација

$$\begin{aligned} v_{pi}(\xi) &= l_{pi}(\xi) \omega_1 \quad i = 1, 2, \\ v_{gi}(\xi) &= l_{gi}(\xi) \omega_2 \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.77)$$

где су са  $\omega_1$  и  $\omega_2$  означене одговарајуће угаоне брзине погонског и гоњеног зупчаника, респективно, а дужине  $l_{pi}(\xi)$  и  $l_{gi}(\xi)$  се одређују из следећих израза

$$\begin{aligned}
 l_{p1}(\xi) &= \xi + p_b, \\
 l_{p2}(\xi) &= a \sin \alpha_w + l_{p1}(\xi), \\
 l_{p3}(\xi) &= a \sin \alpha_w + \xi, \\
 l_{gi}(\xi) &= l_a - l_{pi}(\xi), \quad i=1,2,
 \end{aligned}
 \tag{5.78}$$

Осим силе трења клизања, током спрезања зубаца зупчаника јавља се и трење котрљања. Интензитет силе трења котрљања  $F_{Rpi}$  која делује на погонски зупчаник, одређује се на основу израза

$$F_{Rpi}(\xi) = C \cdot h_i(\xi) \cdot b \cdot \text{sgn}(V_{ei}), \quad i=1,2, \tag{5.79}$$

при чему је са  $b$  означена ширина зупчаника,  $C = 9 \times 10^7 \text{ N/m}^2$  представља константу пропорционалности специфичног оптерећења, док  $h_i(\xi)$  означава дебљину уљног филма у посматраној тачки на активној додирници. Према Хигинсу [83] дебљина уљног филма која раздваја бокове зубаца спрегнутих зупчаника може се одредити у складу са изразом

$$h_i(\xi) = 1.6 \cdot \alpha_0^{0.6} \cdot (\eta_o \cdot V_{ei})^{0.7} \cdot E^{0.003} \frac{R^{0.43}}{F_n^{0.13}}, \tag{5.80}$$

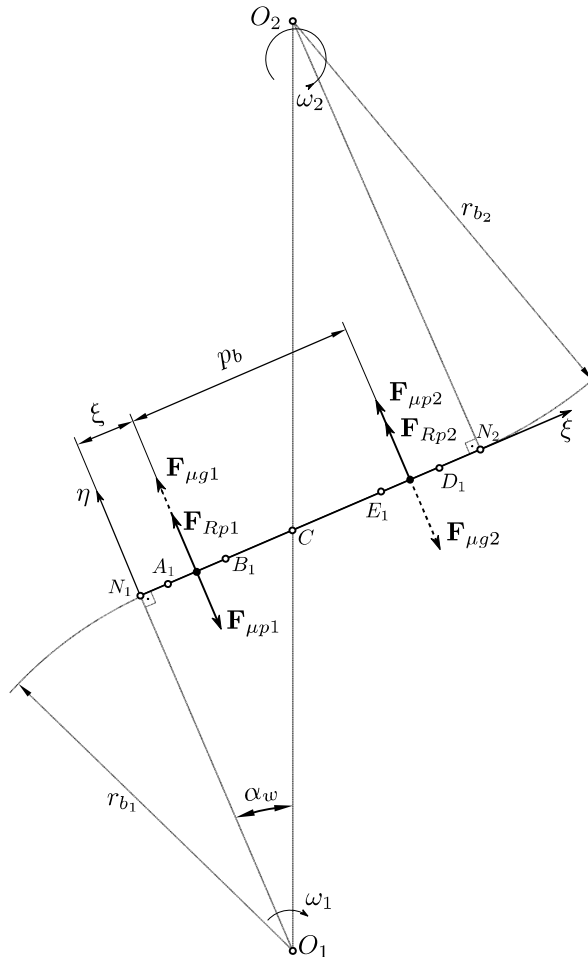
где је са  $\alpha_0$  означен пиезо коефицијент вискозности,  $R$  представља средњи полупречник кривине спрегнутих профила, и  $E$  означава редуковани модул еластичности материјала.

### 5.2.1.1 Степен искоришћења зупчаника са спољашњим озубљењем

Анализира се случај спрезања два зупчаника са спољашњим озубљењем, при чему су параметри зупчастог пара одабрани тако да се тренутни пол релативних брзина налази у домену једноструке спреге, односно  $\rho_{B_1} \leq \rho_{C_1} \leq \rho_{E_1}$ . При томе тренутна тачка додира бокова зубаца се налази у области двоструке спреге, као што је приказано на слици 5.13. Уочава се да се преношење обртног момента  $T_1$ , са погонског зупчаника на гоњени зупчаник остварује силом  $F_n$  којом бок зупца првог зупчаника делује на бок зупца другог зупчаника. Такође, у тачкама додира



спрегнутих бокова јављају се и одговарајуће силе котрљања и клизања, које су приказане на слици 5.13. Нападне линије сила трења леже у заједничкој тангенцијалној равни спрегнутих бокова и њихови смерови мењају се при проласку тачке додира кроз тренутни пол релативних брзина.



Слика 5.13 *Оптерећење које делује на зупчasti пар за случај пола C у домену једноструке спреге и тренутне тачке додира у домену двоструке спреге*

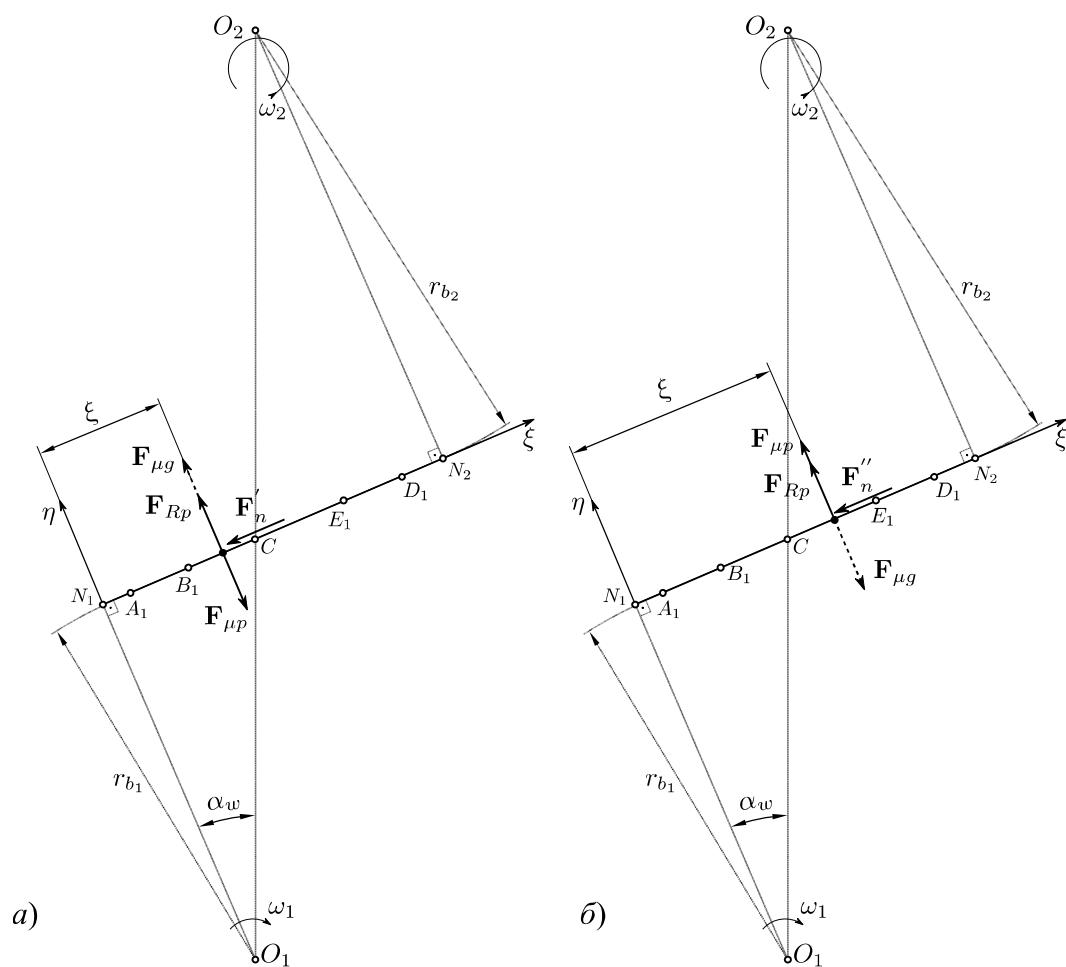
Из геометријских релација са слике 5.13, и услова да је сума обртних момената за осу  $O_1$ , која је везана за погонски зупчаник, једнака нули, произилази интензитет нормалне силе, која делује на бокове истовремено спрегнутих зубаца, односно

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp1}(\xi) - l_{p1} F_{Rp2}(\xi)}{d_{b1} - \xi \mu_1(\xi) + l_{p1} \mu_2(\xi)}. \quad (5.81)$$

Ако се претпостави да је вредност нормалне силе  $F_n$  позната, полазећи од услова да је сума обртних момената за осу  $O_2$  једнака нули, тада се интензитет обртног момента који делује на гоњени зупчаник може одредити на основу израза

$$T_2 = F_n d_{b_2} + l_{p_2} (\mu_2(\xi) F_n - F_{Rp_2}(\xi)) - l_{p_3} (\mu_1(\xi) F_n + F_{Rp_1}(\xi)). \quad (5.82)$$

На сличан начин одређује се интензитет нормалне силе и обртног момента, за случај када је у посматраној тачки само један пар зубаца у додиру, као што је приказано на слици 5.14.



Слика 5.14 Оптерећење које делује на зупчасти пар за случај пола  $C$  и тренутне тачке додира у домену једноструке спреге

На основу геометријских релација са слике 5.14а, када је тренутна тачка додира усвојена тако да важи  $\xi \leq \rho_{C_1}$  и из услова  $\sum M_{O_1}^{F_i} = 0$ , произилази израз за одређивање интензитета нормалне силе

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp}(\xi)}{0,5d_{b_1} - \xi\mu(\xi)}, \quad (5.83)$$

односно, из услова  $\sum M_{O_2}^{F_i} = 0$ , интензитет обртног момента  $T_2$ :

$$T_2 = 0,5F_n d_{b_2} - (\mu(\xi)F_n + F_{Rp}(\xi))l_{p3}. \quad (5.84)$$

За случај када тренутна тачка додира између профила прође кроз тренутни пол релативних брзина, као што је приказано на слици 5.14б, односно  $\rho_{C_1} < \xi$ , услед промене смера брзине клизања, изрази за интензитет нормалне силе и обртног момента постају

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp}(\xi)}{0,5d_{b_1} + \xi\mu(\xi)}, \quad (5.85)$$

$$T_2 = 0,5F_n d_{b_2} + (\mu(\xi)F_n - F_{Rp}(\xi))l_{p3}.$$

Разматра се случај спрезања два зупчаника, при чему су параметри зупчастог пара одабрани тако да се тренутни пол релативних брзина налази у домену двоструке спреге, између тачака  $D_1$  и  $E_1$ , односно када је  $\rho_{D_1} \leq \rho_{C_1} \leq \rho_{E_1}$ . Тада се, за случај два пара зубаца у спреси, одговарајући изрази за одређивање интензитета нормалне силе одређују у зависности од тога да ли тренутна тачка додира лежи испред или иза тренутног пола  $C$  посматрано у односу на осу  $N_1\xi$ . Према томе, за  $\xi \leq \rho_{C_1}$ , одговарајући изрази за интензитет нормалне силе и обртног момента постају

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp1}(\xi) - l_{p1} F_{Rp2}(\xi)}{d_{b_1} - \xi\mu_1(\xi) + l_{p1}\mu_2(\xi)}, \quad (5.86)$$

$$T_2 = F_n d_{b_2} + l_{p2} (\mu_2(\xi)F_n - F_{Rp2}(\xi)) - l_{p3} (\mu_1(\xi)F_n + F_{Rp1}(\xi)).$$

С друге стране, уколико је тренутна тачка додира бокова у области једноструке спреге, односно ако је  $\rho_{B_1} \leq \xi \leq \rho_{D_1}$ , одговарајући изрази постају

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp}(\xi)}{0,5d_{b_1} - \xi\mu(\xi)}, \quad (5.87)$$

$$T_2 = 0,5F_n d_{b_2} - (\mu(\xi)F_n + F_{Rp}(\xi))l_{p3}.$$

Коначно, ако се параметри зупчастог пара усвоје тако да се тренутни пол релативних брзина налази у домену двоструке спреге, између тачака  $A_1$  и  $B_1$ , односно када је  $\rho_{A_1} \leq \rho_{C_1} \leq \rho_{B_1}$ . Разматра се случај када приликом спрезања зупчаника налазе два пара зубаца у спреси. У зависности од тога да ли тренутна тачка додира лежи испред или иза тренутног пола  $C$  посматрано у односу на осу  $K\xi$ , одговарајући интензитет нормалне силе  $F_n$  и обртног момента  $T_2$  добијају се из услова равнотеже узимајући моментну тачку у  $O_1$  и  $O_2$ , респективно

$$F_n(\xi) = \begin{cases} \frac{T_1 - \xi F_{Rp1}(\xi) - l_{p1} F_{Rp2}(\xi)}{d_{b_1} + \xi\mu_1(\xi) + l_{p1}\mu_2(\xi)}, & \xi > \rho_{C_1} \\ \frac{T_1 - \xi F_{Rp1}(\xi) - l_{p1} F_{Rp2}(\xi)}{d_{b_1} - \xi\mu_1(\xi) + l_{p1}\mu_2(\xi)}, & \text{у супротном} \end{cases} \quad (5.88)$$

$$T_2 = \begin{cases} F_n d_{b_2} + l_{p2} (\mu_2(\xi)F_n - F_{Rp2}(\xi)) \\ + l_{p3} (\mu_1(\xi)F_n - F_{Rp1}(\xi)) & \xi > \rho_{C_1} \\ F_n d_{b_2} + l_{p2} (\mu_2(\xi)F_n - F_{Rp2}(\xi)) \\ - l_{p3} (\mu_1(\xi)F_n + F_{Rp1}(\xi)) & \text{у супротном} \end{cases} \quad (5.89)$$

Као што је претходно указано, брзина клизања при проласку кроз тренутни пол релативних брзина  $C$  мења свој смер. Према томе, у циљу формирања одговарајућих израза за израчунавање нормалне силе  $F_n$  и обртног момента  $T_2$  од интереса је познавати област у којој се налази тренутни пол релативних брзина за посматрани зупчasti пар. У зависности од тога да ли се тренутни пол брзина налази у области једноструке или области двоструке спреге, уводи се бездимензионални параметар  $\theta(\xi)$  у складу са изразом

$$\theta(\xi) = \begin{cases} 1, & \rho_{B_1} > \rho_{C_1} \vee \xi \geq \rho_{C_1} \\ -1, & \rho_{D_1} > \rho_{C_1} \vee \xi < \rho_{C_1} \end{cases} \quad (5.90)$$

где су  $\rho_{B_1}$ ,  $\rho_{C_1}$  и  $\rho_{D_1}$  полупречници кривина на профилу зупца у карактеристичним тачкама  $B_1$ ,  $C_1$  и  $D_1$  које су приказане на слици 5.13. Анализом добијених израза, и уважавајући бездимензионални параметар  $\theta(\xi)$ , уочава се да се изрази за одређивање нормалне силе и обртног момента могу записати следећим изразима

$$\begin{aligned} F_n(\xi) &= \frac{T_1 - \xi F_{Rp1}(\xi) - \lambda(\xi) l_{p1} F_{Rp2}(\xi)}{d_{b1} + \theta(\xi) \xi \mu_1(\xi) + \lambda(\xi) l_{p1} \mu_2(\xi)} \\ T_2 &= F_n d_{b2} + l_{p2} (\mu_2(\xi) F_n - F_{Rp2}(\xi)) \\ &+ \theta(\xi) l_{p3} (\mu_1(\xi) F_n + \theta(\xi) F_{Rp1}(\xi)), \end{aligned} \quad (5.91)$$

где је  $\lambda(\xi)$  бездимензионални параметар који указује на присуство једног или два пара зубаца у спреси, односно

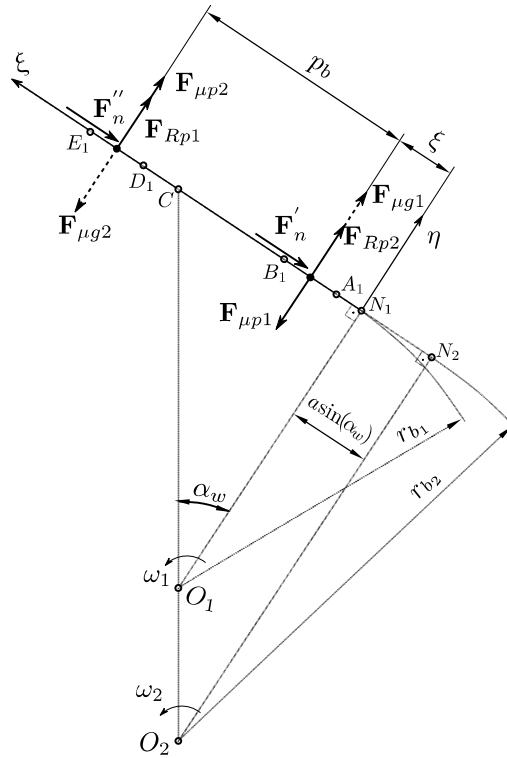
$$\lambda(\xi) = \begin{cases} 0, & l_a - p_b \leq \text{mod}(\xi, p_p) \leq p_b \\ 1, & \text{у супротном} \end{cases}. \quad (5.92)$$

Дакле, уколико се тренутна тачка додира налази у области двоструке спреге, параметар  $\lambda(\xi)$  узима вредност 1, у супротном има вредност 0.

### 5.2.1.2 Степен искоришћења зупчаника са унутрашњим озубљењем

Аналогно поступку анализе оптерећења код цилиндричних зупчаника са спољашњим озубљењем, при формирању одговарајућег модела за анализу тренутне вредности степена искоришћења зупчаника са унутрашњим озубљењем, полази се од анализе оптерећења које делује на спрегнуте парове зубаца у додиру. Разматра се случај када су параметри зупчастог пара одабрани тако да се тренутни пол релативних брзина налази у домену једноструке спреге, односно  $\rho_{B_1} \leq \rho_{C_1} \leq \rho_{D_1}$ , док се тренутна тачка додира налази у домену двоструке спреге, као што је приказано на слици 5.15. Као што је раније указано, поред нормалне силе, на месту додира спрегнутих бокова јављају силе трења клизања и котрљања, чије

нападне линије сила трења леже у заједничкој тангенцијалној равни спрегнутих бокова.



Слика 5.15 Оптерећење које делује на зупчasti пар за случај пола  $C$  у домену једноструке спреге и тренутне тачке додира у домену двоструке спреге

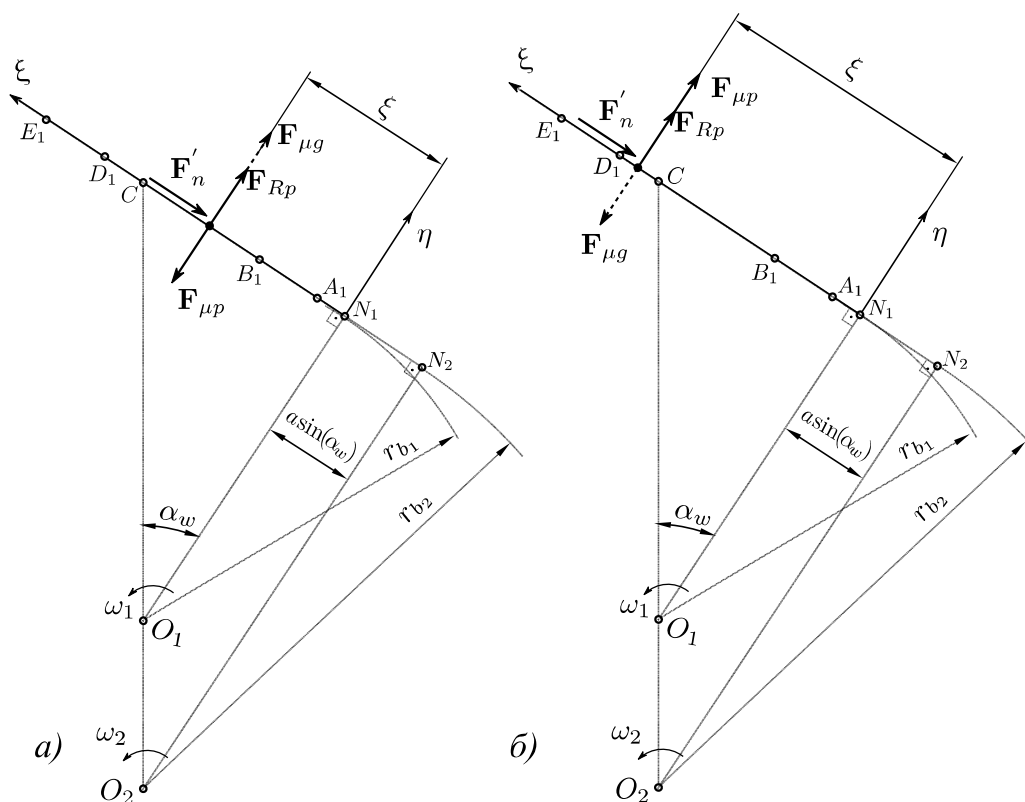
Из услова да је сума обртних момената за осу  $O_1$ , која је везана за зупчаник са спољашњим озубљењем, једнака нули, произилази интензитет нормалне силе која делује на бокове истовремено спрегнутих зубаца, односно

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - F_{Rp1}(\xi)\xi - F_{Rp2}(\xi)l_{p1}(\xi)}{d_{bp} - \mu_1(\xi)\xi + \mu_2(\xi)l_{p1}(\xi)}. \quad (5.93)$$

Претпоставимо да је вредност нормалне силе  $F_n$  позната, полазећи од услова да је сума обртних момената за осу  $O_2$  једнака нули, тада се интензитет обртног момента који делује на гоњени зупчаник може одредити на основу израза

$$T_2(\xi) = F_n d_{b2} + l_{p2}(\mu_2(\xi)F_n - F_{Rp2}(\xi)) - l_{p3}(\mu_1(\xi)F_n + F_{Rp1}(\xi)). \quad (5.94)$$

С друге стране, разматра се случај када се пол  $C$  налази у домену једноструке спреге и у посматраном тренутку имамо само један пар зубаца у спрези, као што је приказано на слици 5.16. Дакле, разликују се два случаја, у зависности да ли се тренутна тачка додира налази испред или иза тренутног пола  $C$  гледано у односу на координатну осу  $N_1\xi$ .



Слика 5.16 Оптерећење које делује на зупчасти пар за случај пола  $C$  и тренутне тачке додира у домену једноструке спреге

Према томе, за случај  $\xi \leq \rho_{c_1}$ , на основу геометријских релација на слици 5.16а из услова  $\sum M_{O_1}^{F_i^s} = 0$  произилази интензитет нормалне силе

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp}(\xi)}{0,5d_{b_1} - \xi\mu(\xi)}, \quad (5.95)$$

док се из услова  $\sum M_{O_2}^{F_i^s} = 0$  добија интензитет обртног момента

$$T_2 = 0,5F_n d_{b_2} - (\mu(\xi)F_n + F_{Rp}(\xi))l_{p3}. \quad (5.96)$$

С друге стране, када је  $\xi > \rho_{C_1}$  као што је приказано на слици 5.16б произилазе изрази за нормалну силу  $F_n$  и обртни момент  $T_2$ , односно

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp}(\xi)}{0,5d_{b_1} + \xi\mu(\xi)}, \quad (5.97)$$

$$T_2 = 0,5F_n d_{b_2} + (\mu(\xi)F_n - F_{Rp}(\xi))l_{p3}$$

Размотримо случај спрезања зупчаника са спољашњим озубљењем и зупчаника са унутрашњим озубљењем, при чему су параметри зупчастог пара одабрани тако да се тренутни пол релативних брзина налази у домену двоструке спреге, између тачака  $A_1$  и  $B_1$ , односно када је  $\rho_{A_1} \leq \rho_{C_1} \leq \rho_{B_1}$ . Тада, за случај два пара зубаца у спреси, интензитет нормалне силе  $F_n$  и обртног момента  $T_2$  одређује се из услова да равнотеже узимајући за моментне тачке  $O_1$  и  $O_2$ , респективно

$$F_n(\xi) = \begin{cases} \frac{T_1 + \xi F_{Rp1}(\xi) - l_{p1} F_{Rp2}(\xi)}{d_{b_1} - \xi\mu_1(\xi) + l_{p1}\mu_2(\xi)} & \xi \leq \rho_{C_1} \\ \frac{T_1 - \xi F_{Rp1}(\xi) - l_{p1} F_{Rp2}(\xi)}{d_{b_1} + \xi\mu_1(\xi) + l_{p1}\mu_2(\xi)} & \text{у супротном} \end{cases} \quad (5.98)$$

$$T_2 = \begin{cases} F_n d_{b_2} + l_{p2} (\mu_2(\xi)F_n - F_{Rp2}(\xi)) & \xi \leq \rho_{C_1} \\ -l_{p3} (\mu_1(\xi)F_n + F_{Rp1}(\xi)) & \\ F_n d_{b_2} + l_{p2} (\mu_2(\xi)F_n - F_{Rp2}(\xi)) & \text{у супротном} \\ +l_{p3} (\mu_1(\xi)F_n + F_{Rp1}(\xi)) & \end{cases} \quad (5.99)$$

С друге стране, уколико је тренутна тачка додира бокова у области једноструке спреге, односно ако је  $\rho_{A_1} \leq \xi \leq \rho_{B_1}$ , одговарајући изрази постају

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp}(\xi)}{0,5d_{b_1} + \xi\mu(\xi)}, \quad (5.100)$$

$$T_2 = 0,5F_n d_{b_2} + (\mu(\xi)F_n - F_{Rp}(\xi))l_{p3}$$



Конечно, разматра се случај када су параметри унутрашњег и спољашњег озубљења, посматраног зупчастог пара одабрани тако да се тренутни пол релативних брзина налази у области двоструке спреге, између тачака  $D_1$  и  $E_1$ , односно када је  $\rho_{D_1} \leq \rho_{C_1} \leq \rho_{E_1}$ . У зависности од тога да ли се тренутна тачка додира налази испред или иза тренутног пола  $C$  гледано у односу на координатну осу  $N_1\xi$ , из услова  $\sum M_{O_1}^{F_i^s} = 0$  произилази интензитет нормалне силе

$$F_n(\xi) = \frac{T_1 - \xi F_{Rp1}(\xi) - l_{p1} F_{Rp2}(\xi)}{d_{b_1} - \xi \mu_1(\xi) + l_{p1} \mu_2(\xi)}, \quad (5.101)$$

док из услова  $\sum M_{O_2}^{F_i^s} = 0$  произлази израз за интензитет обртног момента  $T_2$ , односно

$$T_2(\xi) = F_n d_{b_2} + l_{p2} (\mu_2(\xi) F_n - F_{Rp1}(\xi)) - l_{p3} (\mu_1(\xi) F_n + F_{Rp2}(\xi)). \quad (5.102)$$

Тренутна вредност степена искоришћења зупчаника са унутрашњим озубљењем у свакој тачки на додирници одређује се из односа

$$\eta_i(\xi) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1}{u}, \quad (5.103)$$

С обзиром на то да су коефицијент трења  $\mu(\xi)$  и сила трења котрљања функције нормалне силе, интензитет нормалне силе  $F_n$  се не може одредити експлицитно на основу претходно изведених израза. Дакле, неопходно је успоставити итеративну процедуру за одређивање вредности  $F_n$ , при чему се у првој итерацији може без губљења у општости претпоставити да је интензитет нормалне силе једнак

$$F_n^{(0)} = \frac{T_p}{2r_{bp}}. \quad (5.104)$$

Итеративни поступак за одређивање интензитета силе  $F_n$ , која делује на бокове зубаца спрегнутих зупчаника, се понавља све док се не задовољи услов конвергенције

$$\left| \frac{F_n^{(i+1)} - F_n^{(i)}}{F_n^{(i)}} \right| \leq \varepsilon, \quad (5.105)$$

где је са  $\varepsilon$  означена унапред жељена тачност. Када је познат интензитет нормалне силе, може се приступити одређивању обртног момента који делује на гоњени зупчаник, у складу са изразом (5.94) а затим и тренутне вредности степена искоришћења према (5.72). Итеративна процедура за одређивање степена ефикасности зупчастих парова, може се представити одговарајућим псеудо кодом датим у Алгоритму 7.

---

**Алгоритам 7** Нумеричка процедура за израчунавање степена искоришћења

---

Иницијализовати параметре као што су  $\eta_o, \alpha_o, F_n^{(0)}, \varepsilon$

**while**  $\xi \leq l_a$  **do**

**while**  $\left| \frac{F_n^{(i+1)} - F_n^{(i)}}{F_n^{(i)}} \right| \leq \varepsilon$  **do**

        Срчунати вредност коефицијента трења и дебљине уљног филма  $\mu_i(\xi)$  and  $h_i(\xi)$ , респективно

        Одредити вредност нормалне силе  $F_n^{(i)}$

$i \leftarrow i + 1$

**end while**

    Срчунати интензитет обртног момента  $T_2(\xi)$

    Одредити тренутну вредност степена искоришћења

$\eta_i(\xi) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1}{u_{gb}^H}$

**end while**

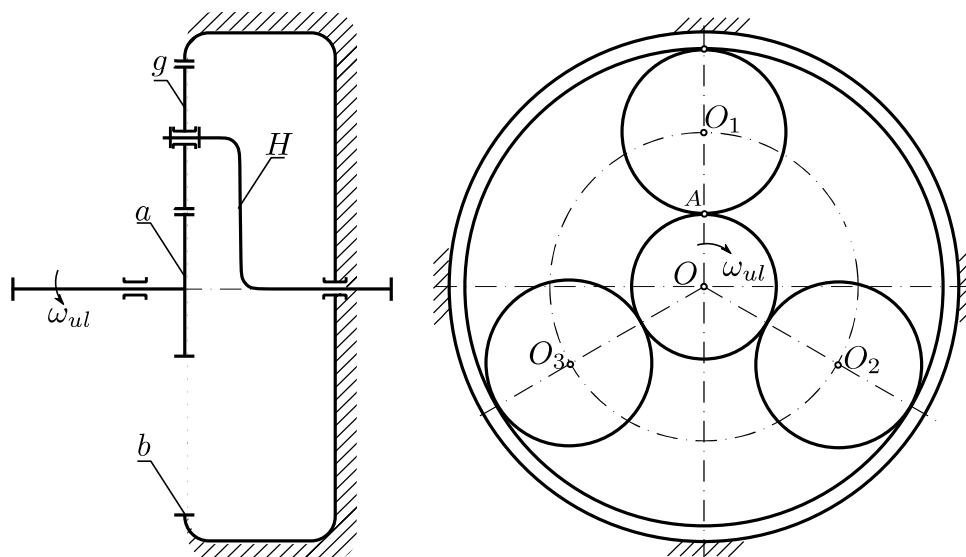
Срчунати укупни степен искоришћења

$\eta_{gb}^H = \frac{1}{l_a} \int_A^D \eta_i(\xi) d\xi$

---

### 5.2.2 Степен искоришћења планетарних преносника

При одређивању апсолутног степена искоришћења планетарног преносника приступиће се анализи једноступеног преносника приказаног на слици 5.2 за који је потребно одредити ток снаге. Дакле, за посматрани преносник уочава се да је централни зупчаник погонски, сателити гоњени елементи, а носач сателита везан за излазно вратило и радну машину. На основу геометријских релација, произилази да посматрани преносник остварује смањење угаоне брзине, па се закључује да је посматрани преносник редуктор.



Слика 5.17 Шематски приказ једноступеног планетарног преносника

За посматрани преносник, апсолутни степен искоришћења, одређује се као однос одговарајућих снага на излазном и улазном вратилу, односно

$$\eta_{aH}^b = \frac{P_{izl}}{P_{ul}}, \quad (5.106)$$

при чему је за посматрани преносник снага на улазу једнака снази на централном зупчанику, односно  $P_{ul} = P_a$ , док је снага на излазу једнака снази на излазном вратилу – носачу сателита, односно  $P_{izl} = P_H$ .

Такође, уколико се излазна снага изрази као разлика улазне снаге и снаге која се губи на савладавање различитих отпора у току рада преносника  $P_{gub}$ , односно

$$P_{izl} = P_a - P_{gub}, \quad (5.107)$$

тада, апсолутни степен искоришћења преносника постаје

$$\eta_{aH}^b = \frac{P_a - P_{gub}}{P_a} = 1 - \frac{P_{gub}}{P_a}. \quad (5.108)$$

С друге стране, релативни степен искоришћења може се дефинисати, као однос релативне снаге на излазном вратилу  $P_{izl,rel}$ , са релативном снагом на улазном вратилу  $P_{ul,rel} = T_a \omega_{a,rel}$ , односно

$$\eta_{ab}^H = \frac{P_{ul,rel} - P_{gub}}{P_{ul,rel}} = 1 - \frac{P_{gub}}{T_a \omega_{a,rel}}, \quad (5.109)$$

где је  $\omega_{a,rel} = \omega_a - \omega_H$  релативна угаона брзина централног зупчаника,  $\omega_a$  представља апсолутну брзину централног зупчаника и  $\omega_H$  је угаона брзина носача.

Одавде произилази израз за одређивање снаге губитака услед трења током рада преносника

$$P_{gub} = (1 - \eta_{ab}^H) T_a \omega_{a,rel}. \quad (5.110)$$

Заменом у израза (5.110) у (5.108) произилази да се апсолутни степен искоришћења може изразити у облику следећег израза

$$\eta_{aH}^b = 1 - (1 - \eta_{ab}^H) \frac{\omega_{a,rel}}{\omega_a}. \quad (5.111)$$

Узимајући у обзир претходне изразе, произилази да се однос одговарајућих угаоних брзина може исказати на следећи начин

$$\frac{\omega_{a,rel}}{\omega_a} = \frac{\omega_a - \omega_H}{\omega_a} = 1 - \frac{\omega_H}{\omega_a} = 1 - \frac{1}{u_{aH}^b} = \frac{u_{ab}^H}{u_{ab}^H - 1}, \quad (5.112)$$

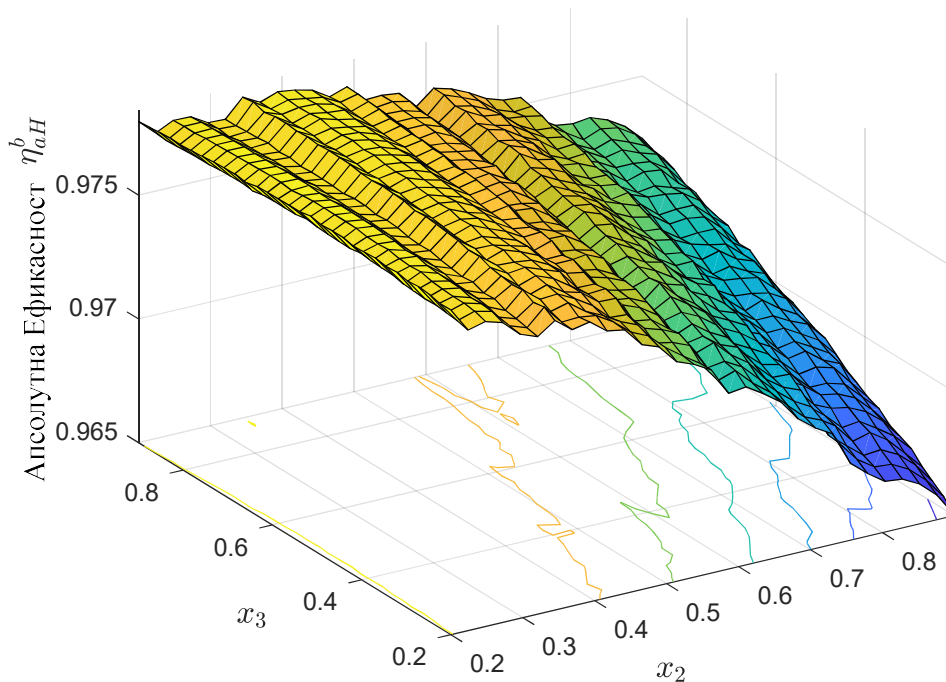
при чему је радни преносни однос  $u_{aH}^b = 1 - u_{ab}^H$ .

Дакле, на основу израза (5.111) и (5.112) произилази израз за апсолутни степен искоришћења једноступеног планетарног преносника, односно

$$\eta_{aH}^b = \frac{1 - \eta_{ag}^H \eta_{gb}^H u_{ab}^H}{1 - u_{ab}^H}, \quad (5.113)$$

при чему су са  $\eta_{ag}^H$  и  $\eta_{gb}^H$  означени релативни степени искоришћења централног зупчаника и сателита, и релативни степен искоришћења сателита и стационарног зупчаника, респективно.

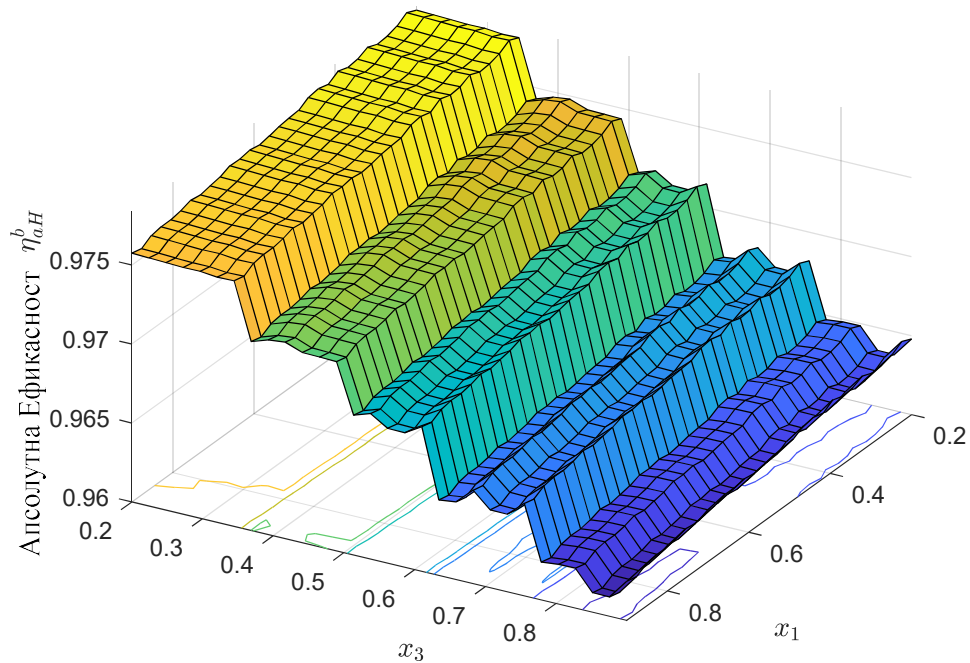
Циљ наредне анализе је провера осетљивости степена искоришћења једностепеног планетарног преносника, у зависности од померања профила спрегнутих зупчаника. На слици 5.18 приказан је апсолутни степен искоришћења планетарног преносника за скуп вредности померања профила  $x_2$  и  $x_3$ , и фиксирану вредност  $x_1 = 0$ .



Слика 5.18 Приказ апсолутног степена искоришћења у функцији померања профила  $x_3$  и  $x_2$ .

На основу анализе степена искоришћења планетарног преносника, са слике 5.18 произилази да вредност степена искоришћења опада са смањењем вредности коефицијента померања  $x_2$  и порастом коефицијента  $x_3$ .

С друге стране, за скуп вредности померања профила  $x_1$  и  $x_3$ , и фиксирану вредност  $x_2 = 0$ , на слици 5.19 приказана је промена вредности апсолутног степена искоришћења планетарног преносника.



Слика 5.19 Приказ апсолутног степена искоришћења у функцији померања профила  $x_3$  и  $x_1$

На слици 5.19 уочава се да вредност степена искоришћења опада са порастом вредности коефицијената померања  $x_1$  и  $x_3$ . Према томе, добијени резултати указују да поред геометријских параметара зупчастог пара, као што су број зубаца и модул, на вредност степена искоришћења у великој мери утиче и правилан одабир коефицијената померања профила. Дакле, ово указује на неопходност увођења параметара  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  у оквиру постављеног виšekритеријумског оптимизационог модела.

## 6 Нумерички резултати

У оквиру овог поглавља изложена су нумерички резултати анализе оптимизационих перформанси разматраних побољшаних метахеуристичких алгоритама у решавању формулисаног сложеног вишекритеријумског оптимизационог проблема планетарног преносника, извршени кроз симулације у програмском пакету MATLAB. Такође, у оквиру овог поглавља приказани су резултати поређења оптимизационих перформанси предложеног модификованог алгорита и скупа алгоритама широко примењиваних у литератури за решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема применом два непараметарска статистичка теста.

### 6.1 Анализа побољшања метахеуристичких алгоритама

У циљу поређења оптимизационих перформанси конвенционалних метахеуристика са предложеним модификованим метахеуристичким алгоритмима, који су модификовани кроз: имплементацију адаптивних техника за промену вредности управљачких параметара као и хибридизацију алгоритама развојем адаптивног оператора мутације, у оквиру овог поглавља биће извршена статистичка анализа. Према томе, поређење перформанси извршено је коришћењем два непараметарска статистичка теста, и то Вилкоксеновог теста ранга (*Wilcoxon signed-rank*) и Фридмановог теста (*Friedman test*). Ради примене статистичких тестова и поређења оптимизационих перформанси разматраних алгоритама, примењена је IDG (*Inverted Generational Distance*) [84, 85] метрика, која се може дефинисати следећим изразом

$$IGD = \frac{\sum_{v_i \in P_A} d(v_i, \mathbb{P})}{|P^*|}, \quad (6.1)$$

где је са  $d(v_i, \mathbb{P})$  означено минимално Еуклидско растојање између  $v_i$  и скупа тачака које припадају скупу  $\mathbb{P}$  свих недоминантних решења која представљају решење постављеног вишекритеријумског оптимизационог задатка у смислу Парето оптималности. У циљу срачунавања IDG метрике, из добијеног Парето фронта у свакој итерацији узорковано је 10000 тачака. Анализом израза (6.1) уочава се да IDG метрика представља меру растојања произвољне тачке од најближег решења из референтног скупа  $\mathbb{P}$ . Мање вредности IDG метрике указују на то да разматрани алгоритам остварује боље перформансе у решавању посматраног оптимизационог проблема. У циљу статистичке анализе и поређења перформанси, сваки примењени алгоритам покренут је 30 пута за све разматране анализе, при чему су на основу добијених вредности дати статистички резултати.

### 6.1.1 Вилкоксонев тест ранга

Вилкоксонев тест ранга примењује се за тестирање постојања статистички значајне разлике између два независна узорка добијена на основу извршавања алгоритама [86]. Овај тест представља један од широко примењиваних непараметарских статистичких тестова за анализу и поређење перформанси оптимизационих алгоритама. Полазећи од претпоставке да су узорци  $X$  и  $Y$ , извучени из две популације, респективно. Тада је нулта хипотеза  $H_0$  Вилкоксоненог теста: „не постоји разлика између средњих вредности два узорка“. Истовремено, алтернативна хипотеза  $H_1$  је: „постоји значајна статистичка разлика између средњих вредности два узорка“.

При примени Вилкоксоненог теста потребно је одредити разлику између IDG метрика узорака  $X$  и  $Y$ , односно

$$d_i = X - Y. \quad (6.2)$$



Да би се применио овај тест потребно је прво уредити разлике  $d_i$  у растући низ у складу са њиховим апсолутним вредностима, при чему се сваком елементу из уређеног низа придружује ознака „+“ или „-“ у зависности од знака разлике  $d_i$ . Означимо са  $R^+$  суму рангова елемената код којих је први алгоритам остварио боље перформансе него други алгоритам, и са  $R^-$  суму рангова елемената код којих је први алгоритам остварио лошије перформансе од другог, који се могу одредити у складу са изразима

$$R^+ = \sum_{d_i > 0} \text{rank}(d_i) + \frac{1}{2} \sum_{d_i = 0} \text{rank}(d_i), \quad (6.3)$$

$$R^- = \sum_{d_i < 0} \text{rank}(d_i) + \frac{1}{2} \sum_{d_i = 0} \text{rank}(d_i), \quad (6.4)$$

где је са  $\text{rank}(d_i)$  означен ранг разлике  $d_i$ . Поред тога, у случају  $d_i = 0$  ранг овог елемента равномерно се дели међу сумама  $R^+$  и  $R^-$ . Статистика овог теста, одређује се на основу вредности  $R^+$  и  $R^-$  [87], односно

$$W = \min(R^+, R^-). \quad (6.5)$$

За велике узорке ( $n > 20$ ) може се узети да статистика  $W$  има приближно нормалну расподелу, при чему су математичко очекивање

$$E[W] = \frac{n(n+1)}{4}, \quad (6.6)$$

и варијанса

$$\text{var}(W) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}, \quad (6.7)$$

где  $n$  означава број елемената у узорку. Тада се одлука о прихватању или одбацивању хипотезе  $H_0$  базира на статистици, која се одређује на основу израза

$$W^* = \frac{W - E[W]}{\sqrt{\text{var}(W)}} = \frac{W - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}}. \quad (6.8)$$

Када је хипотеза  $H_0$  тачна, и  $n \rightarrow \infty$ , статистика  $W^*$  тежи асимптотски ка расподели  $\mathcal{N}(0,1)$ . На основу вредности статистике  $W^*$  из одговарајућих таблица за функцију нормалне расподеле, произилази одговарајућа  $p$  вредност. Добијена вредност статистике  $p$  се пореди са критичном, за дефинисану нулту хипотезу и дати праг значајности  $\alpha$ , и доноси се одговарајући закључак. Дакле уколико је статистика мања од критичне  $p \leq \alpha$  одбацује се нулта хипотеза, и тада је први алгоритам успешнији од другог, са датом  $p$  вредношћу. У супротном, када је  $p > \alpha$  хипотеза  $H_0$  се не одбацује. У оквиру дисертације, овај непараметарски статистички тест примењен је са прагом значајности  $\alpha = 0,05$ . Такође, на основу добијених резултата статистичког теста, сваком елементу узорка придружује се један од три симбола (+, -,  $\approx$ ) у циљу поређења перформанси разматраних алгоритама. При томе, симбол (+) означава да први алгоритам остварује знатно боље перформансе од другог, симбол (-) означава да први алгоритам има значајно лошије перформансе од другог, док симбол ( $\approx$ ) означава непостојање разлике у перформансама два упоређена алгоритама.

### 6.1.2 Фридманов тест

Фридманов тест примењује се за међусобно поређење два или више зависних узорака истовремено, у циљу испитивања и проналажења значајне разлике између перформанси два или више алгоритама [86]. Овај непараметарски статистички тест базира се на рангирању узорака, који су добијени као резултат оптимизационог процеса разматраних алгоритама, при чему се сматра да алгоритам који има најмањи ранг остварује најповољније резултате у решавању оптимизационог проблема. С друге стране, алгоритам који остварује највиши ранг представља алгоритам са најлошијим перформансама. У складу са тим, могу се поставити нулта и алтернативна хипотеза Фридмановог теста. Нулта хипотеза  $H_0$ :

„Не постоји статистички значајна разлика између перформанси алгоритама“, док је алтернативна хипотеза  $H_1$ : „Постоје статистички значајне разлике између перформанси алгоритама“

У циљу одређивања Фридманове статистике, потребно је извршити следеће кораке:

1. Означити са  $m_{i,j}$  елемент матрице, који представља узорак који је добијен на основу израза (6.1). Подаци за све узорке дати су матрицом  $[m_{i,j}]_{k \times n}$  од  $k$  редова и  $n$  колона, код које сваки оптимизациони проблем има  $k$ -ту категорију и сваки алгоритам има  $n$ -ту категорију. Према томе, за сваки оптимизациони проблем  $k$ , треба уредити елементе у растући редослед према рангу. У складу са рангом формира се матрица  $[r_{i,j}]_{k \times n}$ , чији елемент  $r_{i,j}$  представља одговарајући ранг узорка  $m_{i,j}$ .
2. За сваки разматрани алгоритам  $\forall i=1,2,\dots,n$ , односно узорак, потребно је одредити средњу вредност ранга, у складу са изразом

$$R_i = \frac{1}{n} \sum_j r_{ij}. \quad (6.9)$$

3. Под претпоставком да је нулта хипотеза испуњена, и да у матрици  $[r_{i,j}]_{k \times n}$  нема узорака са једнаким рангом, статистика Фридмановог теста  $F_r$  [87] може се одредити на основу израза

$$F_r = \left[ \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{i=1}^k R_i^2 \right] - 3n(k+1). \quad (6.10)$$

У супротном, уколико постоје узорци са једнаким рангом,  $F_r$  се одређује из

$$F_r = \frac{n(k-1) \left[ \sum_{j=1}^k \frac{R_j^2}{n} - C_F \right]}{\sum r_{i,j}^2 - C_F}, \quad (6.11)$$

где  $C_F = (1/4)nk(k+1)^2$  представља фактор корекције ранга.

Када је број узорака велики, односно за  $n > 15$  и  $k > 4$ , Фридманова статистика  $F_r$  подвргава се Хи-квадрат расподели са  $(k-1)$  степени слободе.

Дакле, на основу таблице за Хи-квадрат расподелу може се одредити одговарајућа  $p$  вредност за израчунату статистику  $F_r$ . У складу са тим, добијена вредност статистике  $p$  се пореди са критичном, за дефинисану нулту хипотезу и дати праг значајности  $\alpha$ , и доноси се одговарајући закључак. Уколико је статистика мања од критичне  $p \leq \alpha$  одбацује се нулта хипотеза. У супротном, када је  $p > \alpha$  хипотеза  $H_0$  се не одбацује. У оквиру дисертације, овај непараметарски статистички тест примењен је са прагом значајности  $\alpha = 0,05$ .

### 6.1.3 Анализа предложених модификација МНPSODE алгоритма

У овом поглављу представљени су резултати нумеричке симулације, која је извршена у циљу поређења оптимизационих перформанси предложеног МНPSODE алгоритма са конвенционалним алгоритмима, као и са познатим алгоритмима за вишекритеријумску оптимизацију који се често примењују у литератури. Предложени алгоритам МНPSODE је модификован кроз хибридизацију између PSO и DE алгоритама, као и увођење одговарајућих адаптивних механизма за постављање управљачких параметара, па се статистичким тестовима потврђује оправданост уведених модификација.

#### 6.1.3.1 Поређење перформанси МНPSODE алгоритма на тест проблемима

У овом одељку извршено је поређење оптимизационих перформанси предложеног МНPSODE алгоритма са више у литератури често коришћених алгоритама за решавање вишекритеријумских проблема, као што су NSGA-II, MOPSO, *Differential Evolution for Multiobjective Optimization* (DEMO) [51], на скупу тест функција које су дефинисане на интернационалном конгресу CEC 2009 [85]. Разматрани скуп тест функција за вишекритеријумску оптимизацију састоји се од 10 оптимизационих проблема. За валидацију перформанси коришћена је и DTLZ-I [88] тест функција, која се широко примењује у литератури за евалуацију перформанси алгоритама вишекритеријумске оптимизације. У циљу статистичке

анализе перформанси разматраних алгоритама, оптимизациони процес сваког алгорита поновљен је 30 пута на свакој разматраној тест функцији.

Табела 6.1 приказује резултате нумеричке симулације предложеног МНPSODE алгорита и осталих разматраних алгоритама над скупом тест функција СЕС 2009 и DTLZ-I, при чему су резултати 30 понављања експеримента статистички обрађени и презентовани у форми математичког очекивања и стандардне девијације метрике IGD. У табели 6.1, најбољи резултати остварени од стране једног алгорита на одређеном тест проблему означени су подебљаним словима, а други најбољи резултат је подвучен.

Табела 6.1 *Резултати поређења перформанси разматраних алгоритама у форми математичког очекивања и стандардне девијације метрике IGD [79].*

| Тест функције | DEMO   | NSGA-II  | MOPSO  | MNPSODE  |
|---------------|--|--|--|--|
|               | mean(IGD) ± std(IGD)                               |  |  |  |
| MMF1          | <u>4,86×10<sup>-2</sup> ± 6,48×10<sup>-2</sup></u> | 8,75×10 <sup>-2</sup> ± 1,42×10 <sup>-1</sup>      | 6,43×10 <sup>-2</sup> ± 6,58×10 <sup>-2</sup>      | <b>3,35×10<sup>-2</sup> ± 3,86×10<sup>-2</sup></b> |
| MMF2          | 1,89×10 <sup>-1</sup> ± 9,18×10 <sup>-2</sup>      | <u>1,85×10<sup>-1</sup> ± 7,75×10<sup>-2</sup></u> | <b>1,59×10<sup>-2</sup> ± 5,32×10<sup>-3</sup></b> | 1,94×10 <sup>-1</sup> ± 7,17×10 <sup>-2</sup>      |
| MMF3          | 9,01×10 <sup>-1</sup> ± 2,98×10 <sup>-1</sup>      | 2,46×10 <sup>-1</sup> ± 8,67×10 <sup>-2</sup>      | 1,69×10 <sup>-1</sup> ± 1,40×10 <sup>-1</sup>      | <b>1,42×10<sup>-1</sup> ± 1,68×10<sup>-1</sup></b> |
| MMF4          | 2,48×10 <sup>-1</sup> ± 1,11×10 <sup>-1</sup>      | <b>7,37×10<sup>-2</sup> ± 3,07×10<sup>-2</sup></b> | 1,22×10 <sup>-1</sup> ± 6,79×10 <sup>-2</sup>      | <u>9,25×10<sup>-2</sup> ± 3,28×10<sup>-2</sup></u> |
| MMF5          | <b>9,64×10<sup>-3</sup> ± 1,56×10<sup>-2</sup></b> | 2,30×10 <sup>-2</sup> ± 3,01×10 <sup>-2</sup>      | 6,13×10 <sup>-2</sup> ± 1,33×10 <sup>-1</sup>      | <u>1,81×10<sup>-2</sup> ± 5,46×10<sup>-2</sup></u> |
| MMF6          | 4,62×10 <sup>-2</sup> ± 8,10×10 <sup>-2</sup>      | 4,92×10 <sup>-2</sup> ± 6,94×10 <sup>-2</sup>      | <u>4,43×10<sup>-2</sup> ± 8,14×10<sup>-2</sup></u> | <b>4,36×10<sup>-2</sup> ± 3,83×10<sup>-2</sup></b> |
| MMF7          | <u>1,23×10<sup>-2</sup> ± 4,06×10<sup>-3</sup></u> | 3,96×10 <sup>-2</sup> ± 5,86×10 <sup>-2</sup>      | 6,51×10 <sup>-2</sup> ± 7,11×10 <sup>-2</sup>      | <b>1,12×10<sup>-2</sup> ± 3,60×10<sup>-3</sup></b> |
| MMF8          | 2,40×10 <sup>-1</sup> ± 1,66×10 <sup>-1</sup>      | 1,45×10 <sup>-1</sup> ± 1,00×10 <sup>-1</sup>      | <b>8,58×10<sup>-2</sup> ± 9,26×10<sup>-2</sup></b> | <u>9,22×10<sup>-2</sup> ± 8,35×10<sup>-2</sup></u> |
| MMF9          | 2,06×10 <sup>-1</sup> ± 2,11×10 <sup>-1</sup>      | 1,25×10 <sup>-1</sup> ± 9,39×10 <sup>-2</sup>      | <u>7,44×10<sup>-2</sup> ± 4,93×10<sup>-2</sup></u> | <b>5,99×10<sup>-2</sup> ± 4,03×10<sup>-2</sup></b> |
| MMF10         | 4,57×10 <sup>-1</sup> ± 3,37×10 <sup>-1</sup>      | 2,50×10 <sup>-1</sup> ± 1,21×10 <sup>-1</sup>      | <u>1,21×10<sup>-1</sup> ± 1,34×10<sup>-1</sup></u> | <b>8,41×10<sup>-2</sup> ± 9,24×10<sup>-2</sup></b> |
| DTLZ-I        | <u>1,69×10<sup>0</sup> ± 1,97×10<sup>0</sup></u>   | 2,56×10 <sup>1</sup> ± 1,86×10 <sup>1</sup>        | 3,31×10 <sup>1</sup> ± 7,71×10 <sup>1</sup>        | <b>1,46×10<sup>0</sup> ± 1,80×10<sup>0</sup></b>   |

На основу резултата презентованих у табели 6.1, може се закључити да је предложени МНPSODE алгоритама остварује најбоље перформансе на функцијама  $f_1$ ,  $f_3$ ,  $f_6$ ,  $f_7$ ,  $f_9$  и  $f_{10}$ , док је друго најбоље решење статистички остварио на тест функцијама  $f_4$ ,  $f_5$  и  $f_8$ . Уочава се да само на тест проблему  $f_2$  предложени оптимизациони алгоритама није остварио задовољавајуће резултате, где је најбоље резултате остварио MOPSO алгоритама, а затим NSGA-II. Такође, уочава се да је

предложени МНPSODE алгоритам остварио најбоље оптимизационе резултате и на DTLZ-I тест функцији.

### 6.1.3.2 Поређење оптимизационих перформанси предложеног МНPSODE алгоритма

У циљу директног статистичког поређења оптимизационих перформанси предложеног алгоритма и једног од често коришћених алгоритама у литератури на резултате презентоване у табели 6.2 примењен је Вилкоксонев тест ранга. Табела 6.2 приказује статистичке резултате примене Вилкоксоневог теста поређења између предложеног МНPSODE алгоритма, као и алгоритама DEMO, NSGA-II и MOSPO.

Табела 6.2 Резултати Вилкоксоневог теста за МНPSODE и DEMO, MOPSO, NSGA-II за дати праг значајности  $\alpha = 0,05$  [79].

| Алгоритми               | $R^+$  | $R^-$  | $p$ -вредност | Симбол    |
|-------------------------|--------|--------|---------------|-----------|
| МНPSODE наспрам DEMO    | 30,818 | 14,333 | 0,00          | +         |
| МНPSODE наспрам MOPSO   | 24,799 | 20,352 | 0,1345        | $\approx$ |
| МНPSODE наспрам NSGA-II | 27,930 | 17,221 | 0,000         | +         |

На основу резултата поређења применом Вилкоксоневог теста датих у табели 6.2, закључује се да предложени МНPSODE алгоритам показује боље оптимизационе перформансе у поређењу са DEMO и NSGA-II алгоритмима. Такође, на основу поређења МНPSODE са MOPSO алгоритмом, произилази да алгоритми имају сличне перформансе, при чему предложени алгоритам остварује веће вредности  $R^+$  у односу на  $R^-$ . Ова запажања су у сагласности са закључцима који су произишли из анализе резултата у табели 6.2. Према томе, закључује се да хибридизација извршена у оквиру МНPSODE алгоритма омогућава боље решавање постављених вишекритеријумских оптимизационих проблема.

### 6.1.3.3 Статистичка компаративна анализа оптимизационих перформанси

У циљу статистичке компаративне анализе оптимизационих перформанси разматраних оптимизационих алгоритама, и одређивања статистичке значајности добијених резултата, при вишеструким поређењима, у оквиру овог одељка приказани су резултати одговарајуће статистичке анализе применом Фридмановог теста. У складу са тим, у табели 6.3 дати су резултати компаративне анализе оптимизационих перформанси применом Фридмановог теста, над скупом разматраних тест функција. Најбоље вредности ранга из сваке категорије у табели 6.3 означена су подебљаним словима, док су вредности за други најбољи ранг подвучене.

Табела 6.3 *Резултати примене Фридмановог теста компаративне анализе за разматране алгоритме и различите тест функције при прагу значајности  $\alpha = 0,05$  [79].*

| Алгоритам         | MMF1       | MMF2        | MMF3        | MMF4        | MMF5        | MMF6       | MMF7        | MMF8        | MMF9        | MMF10       | Ср.<br>ранг | Ранг |
|-------------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------|
| MHPSODE           | 2,93       | <b>1,43</b> | <b>1,66</b> | <u>2,13</u> | <u>2,5</u>  | <b>1,8</b> | 3,4         | <b>1,96</b> | <b>2,00</b> | <b>1,73</b> | 2,16        | 1    |
| MOPSO             | 2,76       | <u>1,56</u> | <u>2,00</u> | 2,47        | 3,13        | 2,63       | 3,26        | <u>2,00</u> | <u>2,3</u>  | <u>1,87</u> | 2,4         | 2    |
| DEMO              | <u>2,5</u> | 3,5         | 2,6         | <b>1,53</b> | 2,73        | <u>2,6</u> | <u>2,13</u> | 2,63        | 3,03        | 2,97        | 2,62        | 3    |
| NSGA-II           | <b>1,8</b> | 3,5         | 3,73        | 3,86        | <b>1,63</b> | 2,97       | <b>1,2</b>  | 3,4         | 2,66        | 3,43        | 2,82        | 4    |
| <i>p</i> вредност | 0,000      | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000      | 0,000       | 0,000       | 0,000       | 0,000       |             |      |

На основу резултата у табели 6.3, уочава се да су *p*-вредности које произилазе из Фридманове статистике, мање од прага значајности  $\alpha = 0,05$ , за све разматране тест функције. Према томе, с обзиром да је испуњено  $p \leq \alpha$  произилази да се одбацује нулта хипотеза  $H_0$ . Дакле, закључује се да постоји значајна статистичка разлика између оптимизационих перформанси посматраних алгоритама. Поред тога, на основу вредности ранга произилази да предложени MHPSODE алгоритам остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са осталим алгоритмима који су узети за компаративну анализу.

### 6.1.3.4 Поређење перформанси извршавања

У циљу компаративне анализе времена извршавања разматраних алгоритама, извршено је поређење просечног времена потребног за решавање разматране тест функције. У табели 6.4 су дата просечна времена извршавања MHPISODE, MOPSO, MODE и NSGA-II алгоритама за сваку разматрану тест функцију.

Табела 6.4 Упоредни приказ времена извршавања разматраних алгоритама [79].

| Алгоритам | MMF1               | MMF2               | MMF3               | MMF4               | MMF5               | MMF6               | MMF7               | MMF8               | MMF9               | MMF10              | Средње време       |
|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| MHPISODE  | $1,79 \times 10^2$ | $2,08 \times 10^2$ | $7,72 \times 10^1$ | $1,50 \times 10^1$ | $1,04 \times 10^1$ | $1,77 \times 10^1$ | $1,65 \times 10^2$ | $2,39 \times 10^1$ | $8,83 \times 10^1$ | $1,10 \times 10^1$ | $7,96 \times 10^1$ |
| NSGA-II   | $3,47 \times 10^1$ | $2,16 \times 10^1$ | $3,01 \times 10^1$ | $1,87 \times 10^1$ | $5,59 \times 10^1$ | $4,33 \times 10^1$ | $3,86 \times 10^1$ | $1,90 \times 10^1$ | $1,86 \times 10^1$ | $1,90 \times 10^1$ | $2,99 \times 10^1$ |
| DEMO      | $2,94 \times 10^0$ | $2,89 \times 10^0$ | $3,21 \times 10^0$ | $2,79 \times 10^0$ | $4,13 \times 10^0$ | $3,34 \times 10^0$ | $3,26 \times 10^0$ | $5,79 \times 10^0$ | $3,21 \times 10^0$ | $3,75 \times 10^0$ | $3,53 \times 10^0$ |
| MOPSO     | $2,25 \times 10^2$ | $1,86 \times 10^2$ | $1,61 \times 10^2$ | $1,39 \times 10^2$ | $2,50 \times 10^2$ | $2,60 \times 10^2$ | $2,38 \times 10^2$ | $1,88 \times 10^2$ | $1,93 \times 10^2$ | $1,76 \times 10^2$ | $2,02 \times 10^2$ |

На основу просечних времена извршавања приказаних у табели 6.4 закључује се да DEMO алгоритам у најкраћем временском интервалу проналази оптимално решење посматраног вишекритеријумског оптимизационог проблема у поређењу са осталим разматраним алгоритмима. С друге стране, MOPSO алгоритам захтева највише времена за изналагање оптималног решења. Узимајући у обзир претходне анализе, и на основу резултата у табели 6.4 произилази да предложеном MHPISODE алгоритам остварује компромис између времена извршавања и захтеване тачности, што је погодно са стране решавања оптимизационих проблема у машинству, с обзиром да се не захтева извршавање у реалном времену.

## 6.2 Оптимизација параметара планетарног преносника

У овом поглављу представљени су резултати нумеричке симулације, која је извршена у циљу одређивања оптималних параметара једностепеног планетарног преносника, приказаног на слици 5.17, минимизацијом критеријумских функција и функционалних ограничења дефинисаних у петом поглављу. У оквиру вишекритеријумског оптимизационог задатка, који је формулисан у поглављу 5, дат изразима (5.1)-(5.3) као критеријумске функције постављене су:



- Запремина посматраних зупчастих парова, односно

$$f_1 = V(x) = \frac{\pi}{4} b \left[ d_{(a)}^2 + n_w (d_{a(b)}^2 - D^2) + (d_{(g)}^2 - d_s^2) \right], \quad (6.12)$$

- Осно растојање између централног зупчаника и зупчаника сателита

$$f_2 = a = \frac{m_n z_a}{\cos \beta} (1 + u_{ag}^H) \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}}, \quad (6.13)$$

- Степен искоришћења планетарног преносника, који је формулисан у потпоглављу 5.2.2 и може се изразити

$$f_3 = \eta_{aH}^b = \frac{1 - \eta_{ag}^H \eta_{gb}^H u_{ab}^H}{1 - u_{ab}^H}, \quad (6.14)$$

- Степен сигурности против лома зубаца,

$$f_4 = S_{F(a)}(x) = \frac{[\sigma_F]_{M(a)}}{\sigma_{F(a)}}, \quad (6.15)$$

- Степен сигурности против разарања бокова

$$f_5 = S_{H(a)}(x) = \frac{[\sigma_H]_{M(a)}}{\sigma_{H(a)}}, \quad (6.16)$$

где су  $d_{(a)}$  и  $d_{(g)}$  пречници подеоних кружница централног зупчаника и сателита, респективно,  $d_{a(b)}$  пречник темене кружнице стационарног зупчаника,  $D$  спољашњи пречник стационарног зупчаника и  $d_s$  пречник главчине сателита.

У оквиру претходно наведених критеријумских функција,  $\sigma_{H(a)}$  и  $\sigma_{F(a)}$  напон на боковима и напон у подножју зубаца, респективно, као и сви неопходни фактори одређују се у складу са ISO стандардом [89, 90]. При разматрању контактеног напона између централног зупчаника и зупчаника сателита, усваја се минимална вредност напона, односно

$$\sigma_{H(a)} = \sigma_{H(g)} < [\sigma_H]_M = \min \{ [\sigma_H]_{(a)}, [\sigma_H]_{(g)} \}. \quad (6.17)$$

Са аспекта радне способности и монтаже планетарног преносника неопходно је у формирани вишекритеријумски модел увести одговарајућа функционална ограничења типа неједнакости, и то:

- Интерференцију врхова профила зубаца, дефинисана у потпоглављу 5.1.2,

$$g_2 = \|\Delta \mathbf{r}\| - \|\Delta \mathbf{r}_{\min}\| \geq 0, \quad (6.18)$$

при чему се  $\|\Delta \mathbf{r}\|$  одређује на основу израза

$$\|\Delta \mathbf{r}\| = \sqrt{\left( r_{a2} \sin\left(\frac{r_{w1}}{r_{w2}} + \varphi_{20}\right) - r_{a1} \sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) \right)^2 + \left( r_{a2} \cos\left(\frac{r_{w1}}{r_{w2}} + \varphi_{20}\right) - (r_{a1} \cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) + a) \right)^2} \quad (6.19)$$

- Радијална интерференцу, приказана у потпоглављу 5.1.3, дата изразом

$$g_3 = \Delta_{x,\min}(\theta_{1,\min}) = x_{A_2}(\theta_{1,\min}) - x_{A_1}(\theta_{1,\min}) \geq 0 \quad (6.20)$$

где се  $\theta_{1,\min}$  одређује решавањем по промењивој  $\theta_1$  следеће једначине

$$\frac{\partial \Delta_x}{\partial \theta_1} = \frac{z_1}{z_2} r_{a2} \cos\left(\frac{z_1}{z_2} \theta_1 + \psi_{A_2}\right) - r_{a1} \cos(\theta_1 + \psi_{A_1}) = 0 \quad (6.21)$$

- Услов суседности сателита, који се у складу са релацијама приказаним у потпоглављу 5.1.4 може изразити

$$g_4 = \sqrt{\frac{z_a - 2,5}{z_a \cdot u_{a-H}^b}} - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2 \cdot n_w}\right) \geq 0 \quad (6.22)$$

као и ограничења типа једнакости, и то:

- Услов спрезања централног зупчаника и сателита, формулисан у потпоглављу 5.1.2, који се може представити изразом

$$h_1 = \frac{z_a + z_b}{n_w} - C = 0. \quad (6.23)$$

- Услов равномерног хабања зубаца, полазећи од услова истоветности специфичних клизања на врховима профила спрегнутих зупчаника

дефинисан у потпоглављу 5.1.1 произилази следеће ограничење типа једнакости

$$h_2 = \rho_{E_2} \rho_{A_2} - u^2 \rho_{E_1} \rho_{A_1} = 0. \quad (6.24)$$

У циљу компарације резултата, оптимални параметри постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема пореде се са параметрима референтног планетарног преносника дефинисаног стандардом ISO/AGMA [91]. Према препорукама стандарда за разматрани референтни планетарни преносник, у оквиру извршених нумеричких симулација примењени су параметри ISO VG 220 уља, осим ако другачије није наглашено. Улазни параметри планетарног преносника, разматраног у нумеричким симулацијама чији резултати су изложени у наставку овог потпоглавља приказани су у табели 6.5 .

Табела 6.5 Параметри разматраног планетарног преносника

| Назив параметра                                  | Јединица          | Симбол       | Вредност |
|--|-------------------|--------------|----------|
| Улазна снага                                     | kW                | $P_a$        | 175      |
| Брзина улазног вратила                           | $\text{min}^{-1}$ | $n_a$        | 2750     |
| Угао нагиба                                      | °                 | $\alpha_n$   | 20       |
| Материјал зупчаника                              |                   | 18CrNi8      |          |
| Квалитет површинске обраде                       | $\mu\text{m}$     | $R_a$        | 0,8      |
| Минимални степен сигурности корена               | -                 | $S_{F \min}$ | 1,2      |
| Минимални степен сигурности против хабања бокова | -                 | $S_{H \min}$ | 1,25     |
| Број зупчаника сателита                          | -                 | $n_w$        | 3        |

У складу са наведеним, у табели 6.6 дате су оптималне вредности параметара планетарног преносника, као што су: број зубаца централног зупчаника, сателита и стационарног зупчаника, стандардни модул, као и коефицијенти померања профила разматраних зупчаника, који су добијени на основу постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема. У циљу поређења перформанси, упоредно су приказани резултати добијени применом предложеног MHPNODE алгоритма и у литератури широко примењиваног NSGA-II алгоритма. Услед контрадикторне природе критеријума, оптимално решење  $x_i^*$  по сваком  $i$ -том критеријуму, које се назива идеално решење, је недостижно. Према

томе, потребно је у критеријумском простору пронаћи решење које припада скупу свих недоминантних решења и које је најближе идеалној тачки. Компромисно решење представља решење које је, према усвојеној метрици, најближе идеалном решењу  $x^*$  у критеријумском простору. У табели 6.6 приказана су компромисна решења посматраног вишекритеријумског оптимизационог проблема, при чему је за меру близине усвојена  $L_2$  Еуклидска норма.

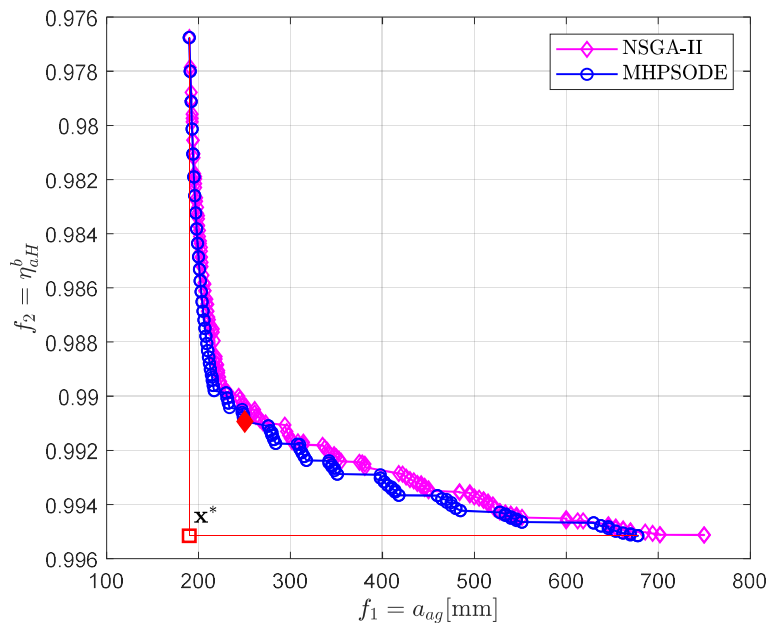
Табела 6.6 *Оптимальне вредности параметара планетарног преносника добијене на основу постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема за различите комбинације критеријумских функција [79]*

| Алгоритам   | $z_a$ | $z_g$ | $z_b$ | $m_n$ [mm] | $x_a$  | $x_g$ | $x_b$  | $\eta_{gb}^H$ | V [mm <sup>3</sup> ] | a [mm] |
|---|-------|-------|-------|------------|--------|-------|--------|---------------|----------------------|--------|
| Критеријумске функције осно растојање и степен искоришћења преносника |       |       |       |            |        |       |        |               |                      |        |
| MHPSODE   | 22    | 44    | 45    | 6          | 0,25   | 0,251 | 0,25   | 0,9908        | $2 \times 10^9$      | 150,5  |
| NSGA-II   | 21    | 52    | 56    | 6          | 0,25   | 0,25  | 0,2545 | 0,9887        | $2,2 \times 10^9$    | 221    |
| Критеријумске функције осно растојање и напон у подножју зупца        |       |       |       |            |        |       |        |               |                      |        |
| MHPSODE   | 22    | 32    | 102   | 6          | 0,25   | 0,25  | 0,4147 | 0,9735        | $2,99 \times 10^9$   | 140    |
| NSGA-II   | 22    | 37    | 105   | 6          | 0,25   | 0,25  | 0,274  | 0,9717        | $3,98 \times 10^9$   | 180    |
| Критеријумске функције осно растојање и напон на боковима зубаца      |       |       |       |            |        |       |        |               |                      |        |
| MHPSODE   | 18    | 22    | 45    | 10         | 0,5571 | 0,25  | 0,25   | 0,969         | $3 \times 10^9$      | 138    |
| NSGA-II   | 18    | 22    | 50    | 12         | 0,2848 | 0,25  | 0,494  | 0,965         | $3,86 \times 10^9$   | 245    |
| Критеријумске функције запремина и степен искоришћења преносника      |       |       |       |            |        |       |        |               |                      |        |
| MHPSODE   | 17    | 22    | 45    | 10         | 0,25   | 0,25  | 0,41   | 0,9912        | $2,45 \times 10^9$   | 199    |
| NSGA-II   | 18    | 23    | 45    | 12         | 0,25   | 0,25  | 0,25   | 0,9689        | $3,1 \times 10^9$    | 251    |
| Референтни преносник  |       |       |       |            |        |       |        |               |                      |        |
| -   | 20    | 37    | 94    | 9          | -      | -     | -      | 0,97          | $3,21 \times 10^9$   | 285    |

На основу резултата презентованих у табели 6.6, може се закључити да предложени MHPSODE алгоритам остварује најбоље перформансе у свакој разматраној комбинацији критеријумских функција. Најбоље решење у погледу степена ефикасности преносника остварено је за случај када су запремина зупчаника и степен ефикасности усвојени за критеријумске функције. У поређењу са референтним преносником из литературе [91], параметри преносника остварени MHPSODE алгоритмом дају 23,6% побољшања запремине преносника, 30% смањења у осном растојању, што је у директној корелацији са димензијама

преносника, као и 2,2% побољшања у ефикасности преносника. Такође, уочава се да се највећа редукција у осном растојању преносника добија у ситуацији када се за једну од критеријумских функција постављеног вишекритеријумског оптимizacionог проблема усвоји минимизација степена сигурности против разарања бокова.

Скуп Парето оптималних решења у критеријумском простору, добијен на основу примене предложеног МНPSODE и NSGA-II алгоритма, приказан је на слици 6.1, где су за критеријумске функције посматраног оптимizacionог проблема усвојени осно растојање централног зупчаника и сателита  $a_{ag}$  и апсолутни степен искоришћења планетарног преносника  $\eta_{aH}^b$ . Такође, у циљу одређивања компромисног решења на слици 6.1 је приказано и идеално решење  $\mathbf{x}^*$ , које минимизира сваку од посматраних критеријумских функција, али не припада скупу допустивих решења.

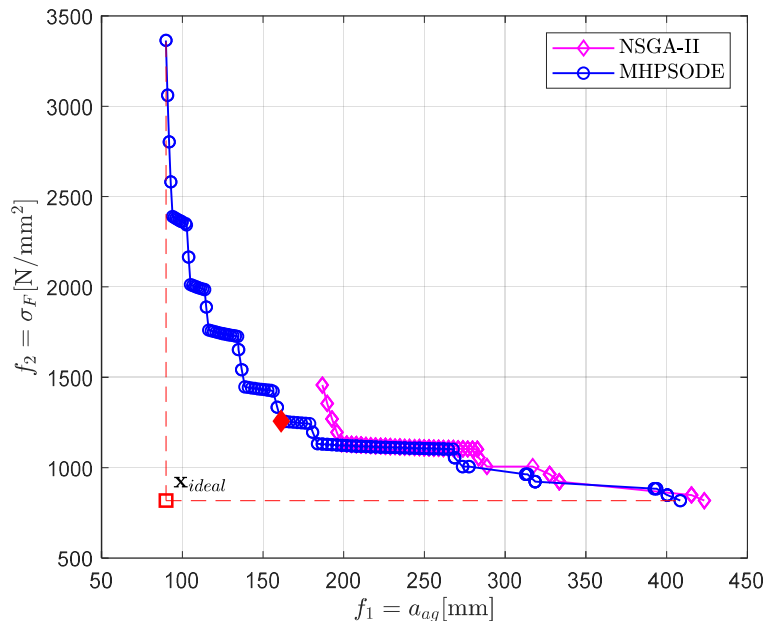


Слика 6.1 Критеријумски простор за осно растојање централног зупчаника и сателита  $a_{ag}$  – степен искоришћења планетарног преносника  $\eta_{aH}^b$

На основу резултата симулације приказаних на слици 6.1, произилази да су посматрани критеријуми  $f_1$  и  $f_2$  међусобно конфликтни, што значи да са порастом осног растојања опада степен искоришћења планетарног преносника, и обратно.

Уочава се да је идеално решење остварено за осно растојање 191 mm и степен искоришћења 0,995%. Према томе, за компромисно решење, предложеног МНPSODE алгоритма (означено црвеним ромбодом), које припада Парето скупу и најближе је решењу  $\mathbf{x}^*$  усваја се 150,5 mm за осно растојање и 0,9908% за степен искоришћења.

Такође, од интереса је размотрити међусобни утицај смањења осног растојања  $a_{ag}$  на напон у подножју зупца  $\sigma_F$ , односно посредно на степен сигурности против лома зубаца  $S_F$ . На слици 6.2 приказани су скупови Парето оптималних решења добијених применом МНPSODE и NSGA-II алгоритма, са посматраним величинама као критеријумским функцијама.

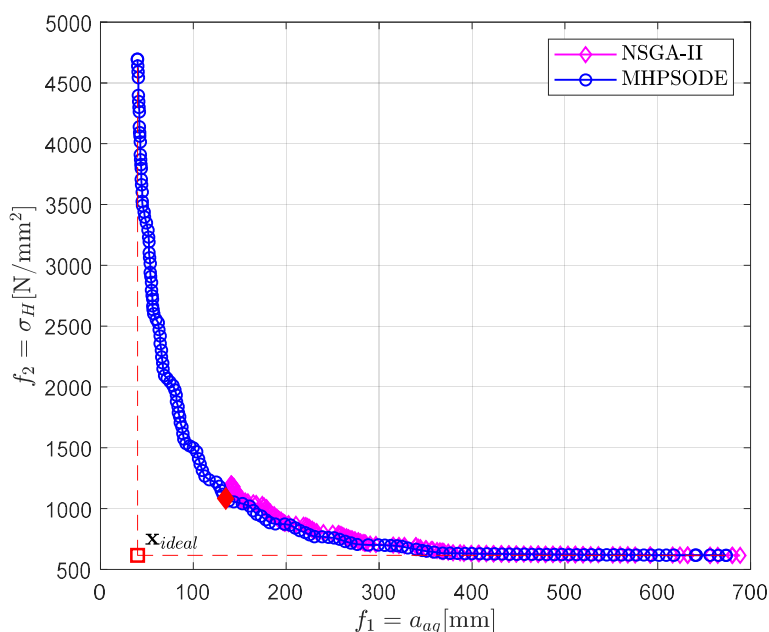


Слика 6.2 Критеријумски простор за осно растојање централног зупчаника и сателита  $a_{ag}$  – напон у подножју зупца  $\sigma_F$

Као што је било указано у претходном разматрању, са слике 6.2 произилази да су разматране критеријумске функције,  $f_1 = a_{ag}$  и  $f_2 = \sigma_F$  међусобно конфликтне. Према томе, у циљу одређивања компромисног решења потребно је најпре одредити идеално решење, за посматране критеријумске функције, осно растојање 80 mm и напон  $\sigma_F^* = 615 \text{ N/mm}^2$ . У складу са тим, одговарајуће компромисно

решење, приказано црвеним ромбом, је: осно растојање 160 mm и напон у подножју зупца  $1250 \text{ N/mm}^2$ .

Потребно је размотрити међусобни утицај смањења осног растојања  $a_{ag}$  и напона на боковима. На слици 6.3 приказани су скупови Парето оптималних решења добијених применом МНPSODE и NSGA-II алгорита, са посматраним величинама као критеријумским функцијама.

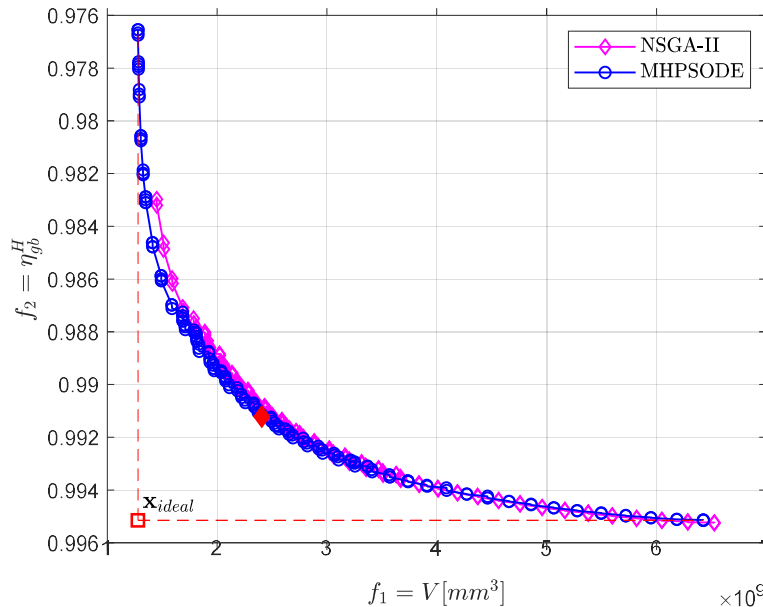


Слика 6.3 Критеријумски простор за осно растојање централног зупчаника и сателита  $a_{ag}$  – напон на боковима зубаца  $\sigma_H$

Сагласно резултатима приказаним на слици 6.3 посматране критеријумске функције су међусобно конфликтне. За вредност идеалног решења посматраних критеријумских функција усваја се: осно растојање 40 mm и напон  $\sigma_F^* = 615 \text{ N/mm}^2$ . У складу са тим, одговарајуће компромисно решење је: осно растојање 138 mm и напон у подножју зупца  $1070 \text{ N/mm}^2$ .

Такође, у практичним апликацијама, као што су примена у ваздухопловима и ветротурбинама, минимизација запремине планетарног преносника, односно његове масе, је од изузетног значаја у процесу конструисања планетарног преносника. Према томе, извршена је нумеричка симулација формулисаног вишекритеријумског оптимизационог проблема са запремином преносника и

степеном искоришћења усвојеним као критеријумске функције. Слика 6.4 приказује скуп Парето оптималних решења у критеријумском простору, добијен на основу примене МНPSODE и NSGA-II алгоритама.



Слика 6.4 Критеријумски простор за запремину планетарног преносника  $V$  – степен искоришћења планетарног преносника  $\eta_{an}^b$

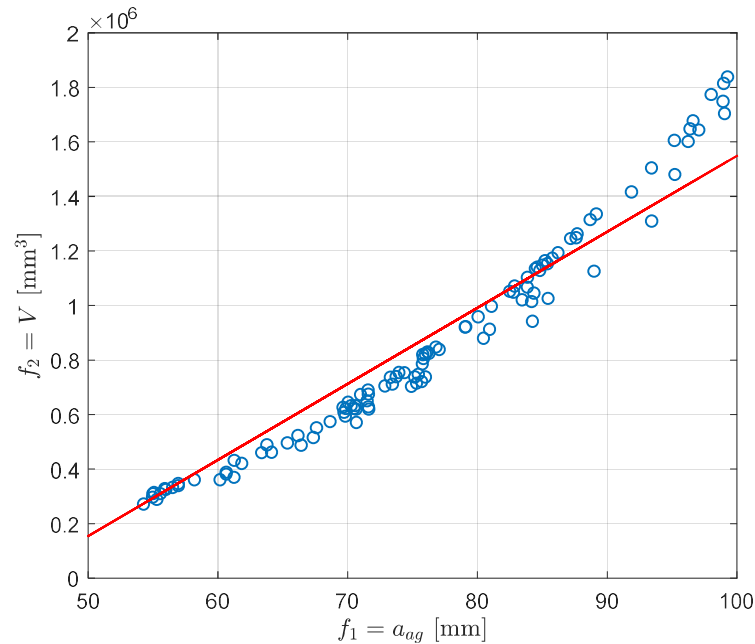
На основу резултата приказаних на слици 6.4, произилази да су посматране критеријумске функције конфликтне. При томе, идеално решење је: запремина планетарног преносника  $1,28 \times 10^9 \text{ mm}^3$  и степен искоришћења преносника 0,995%. Тачка која припада Парето скупу, и најближа је идеалном решењу, компромисно решење, је: запремина преносника  $2,45 \times 10^9 \text{ mm}^3$  и степен искоришћења 0,9912%.

Упоредном анализом резултата датих у табели 6.6, као и резултата приказаних на сликама 6.1 - 6.4, закључује се да је применом МНPSODE алгорита могуће остварити параметре зупчастог преносника који дају најповољније перформансе. Са слика 6.1 - 6.4 се уочава да у поређењу са МНPSODE алгоритмом, разматрани NSGA-II алгоритам не успева да формира комплетан Парето фронт посматраног оптимizacionог проблема, што је посебно уочљиво код неконвексних Парето фронтова на сликама 6.1 и 6.2. Поређењем најбољих компромисних решења МНPSODE и NSGA-II алгоритама приказаних у табели 6.6 уочава се да параметри преносника добијени применом МНPSODE алгорита дају конструкцију која има



30,4% мање осно растојање, смањење од 10% запремине преносника, и побољшање од 0,25% у степену искоришћења преносника. Такође, уочава се да је у процесу конструисања преносника од значаја познавање комплетног Парето фронта, с обзиром на то да пружа конструктору дијапазон решења из којих је могуће одабрати оно које одговара примени, и пружа бољи увид у анализу како промена једне критеријумске функције утиче на примену вредности друге.

Разматра се случај када је за критеријумске функције постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема усвојено осно растојање између централног зупчаника и сателита и запремина планетарног преносника. На слици 6.5 приказани су резултати нумеричке симулације за посматрани случај у критеријумском простору.



Слика 6.5 Критеријумски простор за осно растојање  $a_{ag}$  и запремину планетарног преносника  $V$

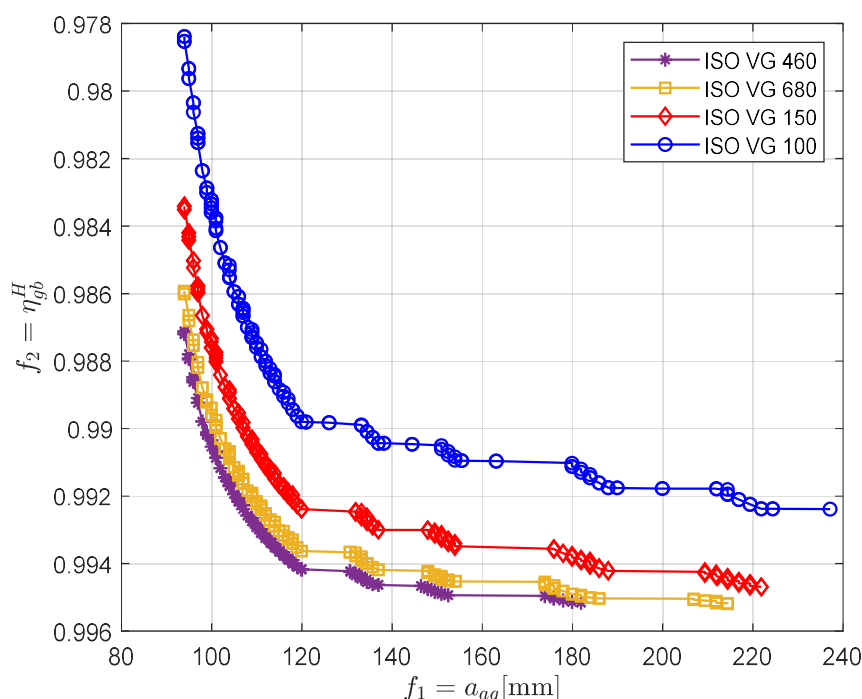
Анализом резултата приказаних на слици 6.5, може се закључити да између посматраних критеријумских функција постоји линеарна корелација, при чему је коефицијент корелације 0,96. Дакле, из овог закључка произилази да је у циљу смањења оптерећења у току оптимизационог процеса постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема довољно посматрати само једну од две разматране критеријумске функције.

Као што је указано у поглављу 5, степен искоришћења зупчастих парова зависи од коефицијента трења и дебљине уљног филма, односно од динамичке вискозности одабраног уља за помазивање. У циљу анализе утицаја одабира различитих врста уља, разматрана је нумеричка симулација посматраног вишекритеријумског оптимизационог проблема применом МНПСОДЕ алгоритма, при чему су за примењена уља одабрана ISO VG 100, ISO VG 150, ISO VG 680 и ISO VG 460, карактеристике дате у табели 6.7.

Табела 6.7 Карактеристике уља према ISO 3448 класификацији

| ISO 3448 Класе уља [40 °C] | Кинематска вискозност уља [mm <sup>2</sup> /s] |
|----------------------------|--|
| ISO VG 100                 | 100  |
| ISO VG 150                 | 150  |
| ISO VG 460                 | 460  |
| ISO VG 680                 | 680  |

Скуп Парето оптималних решења у критеријумском простору, добијен на основу примене МНПСОДЕ алгоритма, узимајући у обзир више различитих врста уља за подмазивање, приказан је на слици 6.6.



Слика 6.6 Критеријумски простор за осно растојање  $a_{ag}$  и степен искоришћења планетарног преносника  $\eta_{aH}^b$  за различите врсте уља

На основу резултата приказаних на слици 6.6 закључује се да је применом уља ISO VG 460 могуће остварити најбоље параметре планетарног преносника које имају потребне карактеристике. Поређењем добијених компромисних решења уочава се да се коришћењем ISO VG 460 уља остварује побољшање од 10% у осном растојању и 1,2% побољшања у степену искоришћења преносника у односу на решења добијена применом ISO VG 100 уља. Основни разлог лоших перформанси других разматраних врста уља су ниже вредности коефицијента динамичке вискозности, што доводи до мањег степена искоришћена и веће запремине преносника. Дакле, може се закључити да одабир врсте уља за подмазивање преносника може имати утицај како на степен искоришћења преносника тако и на укупне димензије.

На основу претходно изложених резултата, и из геометријске интерпретације у критеријумском простору, могу се извести следећи закључци:

- Критеријумске функције осно растојање и степен искоришћења су међусобно контрадикторне, што значи да повећањем осног растојања опада укупни степен искоришћења планетарног преносника, и обратно,
- Критеријуми запремина преносника и степен искоришћења су конфликтни критеријуми,
- Између критеријума запремине и критеријума осног растојања планетарног преносника, постоји јака линеарна корелација,
- Предложени адаптивни хибридни метахеуристички МНPSODE алгоритам успешно изналази комплетан Парето скуп решења, чак и код неконвексних Парето скупова. Ово је од изузетног значаја у процесу конструисања јер омогућава конструктору већи опсег компромисних решења и бољи увид у међусобни утицај посматраних критеријума,
- У поређењу са широко примењиваним NSGA-II алгоритмом, предложени МНPSODE алгоритам остварује решења повишене тачности за посматрани проблем вишекритеријумске оптимизације планетарног преносника,

## **7 Закључак**

Планетарни преносници спадају у групу механичких зупчастих преносника, који су широко заступљени у различитим машинским системима. Приступајући изради ове докторске дисертације пошло се од функције, коју планетарни преносник треба да испуни у оквиру неког машинског система, као и од све строжих захтева у погледу перформанси преносника. У циљу испуњења ових критеријума јавља се потреба за вишекритеријумском оптимизацијом планетарних преносника, с обзиром на контрадикторне критеријуме и велики број постављених функционалних ограничења.

Циљ ове докторске дисертације је формирање вишекритеријумског оптимизационог модела планетарног преносника који задовољава низ строгих захтева у погледу: компактности конструкције, максимизације степена искоришћења, коаксијалности улазног и излазног вратила, равномерности расподеле оптерећења са погонског зупчаника на истовремено спрегнуте зупчасте парове, као и поузданости у различитим експлоатационим условима. Посебно је указано на неопходност дефинисања функционалних ограничења и домене примене свих релевантних величина зупчастих парова са спољашњим и унутрашњим озубљењем и планетарног преносника као сложеног система, у циљу несметане монтаже, поузданог рада и спрезања зупчастих парова у току рада. С обзиром на то да су формиране критеријумске функције посматраног вишекритеријумског оптимизационог проблема нелинеарне и неконвексне, примена конвенционалних оптимизационих метода није могућа, па је за решавање овог проблема потребно применити метахеуристичке оптимизационе алгоритме.

У складу са тим, у оквиру ове докторске дисертације разматрани су метахеуристички алгоритми, који припадају групи еволутивних алгоритама, као што су алгоритам диференцијалне еволуције и алгоритам оптимизације ројем честица, у циљу успешног решавања сложеног вишекритеријумског оптимизационог проблема планетарног преносника. У доступној литератури, указано је да метахеуристички алгоритми демонстрирају одређене предности и недостатке при решавању вишекритеријумских оптимизационих проблема са мултимодалним критеријумским функцијама. Према томе, посебан допринос ове дисертације огледа се у модификацији метахеуристичких алгоритама увођењем адаптивних механизма за подешавање управљачких параметара, као и развојем нових алгоритама хибридизацијом ради успешног решавања сложеног вишекритеријумског оптимизационог проблема.

Приступајући решавању сложених мултимодалних оптимизационих проблема, применом конвенционалних метахеуристичких оптимизационих алгоритама, оптимизационе перформансе зависе од постављања одговарајућих вредности управљачких промењивих. У општем случају, унапређење оптимизационих перформанси метахеуристичких алгоритама могуће је остварити формирањем препорука и развојем адаптивних механизма за постављање вредности управљачких параметара алгорита, као и хибридизацијом, односно комбиновањем делова два или више оптимизациона алгорита у оквиру новог алгорита. Према томе, у оквиру ове дисертације предложене су модификације хеуристичких алгоритама кроз: адаптивно подешавање параметара ради контроле процеса оптимизације, као и развој нових алгоритама хибридизацијом два позната метахеуристичка алгорита ради превазилажења ових недостатака. У складу са тим, алгоритам диференцијалне еволуције је модификован увођењем адаптивних механизма за подешавање вредности фактора скалирања и фактора укрштања. Вредности ових фактора подешавају се на основу повратне информације из оптимизационог процеса која се огледа кроз вредност критеријумских функција у тренутној итерацији.

Такође, у оквиру ове докторске дисертације извршена је модификација алгорита оптимизације ројем честица, увођењем адаптивних параметара за подешавање вредности когнитивног и социјалног фактора убрзања. У ту сврху

развијени су временски променљива техника за промену коефицијента убрзања, у сладу са чим, у циљу побољшања диверсификације на почетку оптимизационог процеса, когнитивни фактор има велику вредност, а социјални фактор узима малу вредност. С друге стране, при крају оптимизационог процеса когнитивни фактор узима малу вредност, док социјални фактор има велику вредност, како би се убрзала конвергенција ка глобалном оптималном решењу.

У циљу додатног побољшања оптимизационих перформанси при решавању постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема у оквиру ове дисертације извршена је хибридизација модификованих алгоритама диференцијалне еволуције и оптимизације ројем честица. Хибридизација је извршена инкорпорацијом елемената израза за ажурирање вредности вектора брзине PSO алгорита у оквиру мутационог оператора DE алгорита. Такође, у циљу остварења адекватне равнотеже између диверсификације и конвергенције, у оквиру модификованог мутационог оператора уведен је адаптивни параметар заснован на мери диверсификације популације. Дакле, на основу уведеног адаптивног параметара бира се одговарајући модификовани мутациони оператор за тренутни стадијум оптимизације. Надаље, у оквиру оптимизационог процеса PSO алгорита уграђени су оператори укрштања и селекције DE алгорита у циљу додатног очувања диверсификације на почетку оптимизационог процеса и интензивирања конвергенције при крају оптимизационог процеса. На овај начин, увођењем предложених модификација у виду адаптивних механизма за подешавање параметара разматраних алгоритама и хибридизацијом успостављена је ефективна равнотежа између фаза глобалне и локалне претраге, и отклоњен један од основних недостатка разматраних алгорита. Извршене модификације валидиране су на основу нумеричких симулација и представљају један од основних доприноса ове дисертације.

У оквиру ове дисертације, извршена је анализа геометријских и кинематских ограничења и приказани су домени практичне примене релевантних величина зупчастог пара са унутрашњим озубљењем. Са аспекта кинематике разматрано је спрезање зупчастих парова са унутрашњим и спољашњим озубљењем, у циљу остварења истоветност специфичних клизања у тачкама које су најудаљеније од тренутног пола релативних брзина. На тај начин, остварује се истоветност хабања

спрегнутих бокова зубаца зупчаника у току њиховог рада, што за последицу има ублажавање низа непожељних карактеристика као што су вибрације у току рада, бука и шум. Нумеричким симулацијама извршена је анализа осетљивости специфичног клизања у тачкама у којима овај параметар има највећи интензитет, и указано је на неопходност увођења корекција профила зубаца, како би се остварила истоветност хабања спрегнутих бокова зубаца. Такође, на основу анализе кинематског модела планетарног преносника у једној равни, указано је на услов који обезбеђује истовремено спрезање централног зупчаника са сателитима. С обзиром на појаву интерференце у току спрезања врха профила зупца зупчаника са спољашњим озубљењем у међузубљу зупчаника са унутрашњим озубљењем, указано је на значај одабира геометријских параметара зупчастог пара. На основу резултата нумеричке симулације произилази да се повећањем вредности корекције профила зубаца повећава растојање између врхова профила. Са аспекта монтаже и функционалности планетарног преносника, разматрана је анализа осетљивости минималног зазора који се мора остварити између темених кругова сателита који се уграђују у једној равни планетарног преносника. Са порастом броја сателита постављених у једној равни опада вредност зазора, чиме је указано на неопходност правилног одабира геометријских параметара и броја сателита. Сва наведена разматрања извршена су у циљу дефинисања функционалних ограничења као и домене примене свих релевантних величина зупчастих парова са спољашњим и унутрашњим озубљењем ради практичне реализације постављеног вишекритеријумског оптимизационог проблема. Један од основних критеријума при формирању параметара и одабиру конструкције планетарног преносника је степен искоришћења преносника. Према томе, у оквиру ове докторске дисертације формиран је одговарајући механички модел за одређивање тренутне вредности степена искоришћења спрегнутих зупчастих парова, у функцији геометријских параметара зупчастих парова, коефицијената трења клизања, дебљине уљног слоја, који се формира између спрегнутих бокова зубаца и учестаности обртања посматраних зупчастих парова преносника. Такође, дефинисан је математички модел у циљу одређивања степена ефикасности планетарног преносника као целине.

У оквиру ове дисертације, извршена је статистичка анализа и поређење оптимизационих перформанси предложеног модификованог хибридног метахеуристичког алгоритма са скупом алгоритама широко примењених у литератури за решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема, применом два непараметарска статистичка теста: Вилкоксоновог теста ранга и Фридмановог теста. Резултати статистичке анализе указују да предложени модификовани хибридни метахеуристички оптимизациони алгоритам остварује боље оптимизационе перформансе у поређењу са алгоритмима који се у литератури широко примењују за решавање вишекритеријумских оптимизационих проблема. Дакле, применом непараметарских статистичких тестова, потврђена је ефикасност модификација метахеуристичког алгоритма предложених у оквиру ове докторске дисертације.

Поред овог, у дисертацији је посебна пажња посвећена анализи резултата симулације која је извршена у циљу одређивања оптималних параметара планетарног преносника, минимизацијом критеријумских функција и функционалних ограничења дефинисаних у дисертацији. Добијени резултати упоређени су са параметрима референтног планетарног преносника из стандарда, где се уочава побољшање у степену искоришћења, компактности и поузданости конструкције. Такође, у дисертацији је разматрано и време извршавања предложеног модификованог метахеуристичких алгоритама, као и конвенционалних оптимизационих алгоритама. На основу резултата нумеричких симулација, као и спроведене статистичке анализе, произилази да предложени адаптивни хибридни метахеуристички алгоритам одликује тачност, ефикасност и робустност у односу на најбоље признате алгоритме из литературе, при решавању постављеног сложеног вишекритеријумског оптимизационог проблема.

С обзиром на неминовно присуство динамичких оптерећења услед процеса спрезања зупчастих парова, будући правци рада укључивали би формирање динамичког модела планетарног преносника и одговарајућу динамичку оптимизацију постављеног оптимизационог проблема.



# Литература

- [1] Kiril Borisov Arnaudov and Dimitar Petkov Karaivanov. *Planetary gear trains*. CRC Press/Taylor & Francis Group, CRC Presse is an imprint of Taylor & Francis Group, an informa business, Boca Raton, 2019. ISBN 978-0-429-85799-7 978-0-429-85797-3 978-0-429-85798-0.
- [2] Charles Nutakor, Adam Kodowski, Jussi Sopanen, Aki Mikkola, and José I. Pedrero. Planetary gear sets power loss modeling: Application to wind turbines. *Tribology International*, 105: 42–54, January 2017. ISSN 0301679X. doi: [10.1016/j.triboint.2016.09.029](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.09.029). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301679X16303371>.
- [3] E.L. Esmail, E. Pennestrì, and A. Hussein Juber. Power losses in two-degrees-of-freedom planetary gear trains: A critical analysis of Radzimovskys formulas. *Mechanism and Machine Theory*, 128: 191–204, October 2018. ISSN 0094114X. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2018.05.015](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.05.015). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X18306694>.
- [4] Su-chul Kim, Sang-gon Moon, Jong-hyeon Sohn, Young-jun Park, Chan-ho Choi, and Geun-ho Lee. Macro geometry optimization of a helical gear pair for mass, efficiency, and transmission error. *Mechanism and Machine Theory*, 144: 103634, February 2020. ISSN 0094114X. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2019.103634](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.103634). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X19316258>.
- [5] Daniel Miler, Dragan Žeželj, Antonio Loncar, and Krešimir Vuckovic. Multi-objective spur gear pair optimization focused on volume and efficiency. *Mechanism and Machine Theory*, 125: 185–195, July 2018. ISSN 0094114X. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2018.03.012](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.03.012). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X17317421>.
- [6] Miloš Sedak, Božidar Rosić, Mileta Ristivojević, Radivoje Mitrović, Aleksandar Dimić, Žarko Mišković. Efficiency analysis of planetary gears. *Machine design*, 10 (4), 2018.
- [7] Yaliang Wang, Qijing Qian, Guoda Chen, Shousong Jin, and Yong Chen. Multi-objective optimization design of cycloid pin gear planetary reducer. *Advances in Mechanical Engineering*, 9 (9): 168781401772005, September 2017. ISSN 1687-8140, 1687-8140. doi: [10.1177/1687814017720053](https://doi.org/10.1177/1687814017720053). URL <http://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1687814017720053>.
- [8] Takao Yokota, Takeaki Taguchi, and Mitsuo Gen. A solution method for optimal weight design problem of the gear using genetic algorithms. *Computers & Industrial Engineering*, 35 (3-4): 523–526, December 1998. ISSN 03608352. doi: [10.1016/S0360-8352\(98\)00149-1](https://doi.org/10.1016/S0360-8352(98)00149-1). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0360835298001491>.

- [9] H. Zarefar and S.N. Muthukrishnan. Computer-aided optimal design via modified adaptive random-search algorithm. *Computer-Aided Design*, 25 (4): 240–248, April 1993. ISSN 00104485. doi: [10.1016/0010-4485\(93\)90055-S](https://doi.org/10.1016/0010-4485(93)90055-S). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/001044859390055S>.
- [10] Faruk Mendi, Tamer Baskal, Kurtulus Boran, and Fatih Emre Boran. Optimization of module, shaft diameter and rolling bearing for spur gear through genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 37 (12): 8058–8064, December 2010. ISSN 09574174. doi: [10.1016/j.eswa.2010.05.082](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.05.082). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0957417410004938>.
- [11] M.W. Yaw. Optimize Volume for Planetary Gear Train by using Algorithm Based Artificial Immune System. *International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering*, 9 (3): 3757–3762, June 2020. ISSN 22783091. doi: [10.30534/ijatcse/2020/191932020](https://doi.org/10.30534/ijatcse/2020/191932020). URL <http://www.warse.org/IJATCSE/static/pdf/file/ijatcse191932020.pdf>.
- [12] Liu Yang and Hanxin Chen. Fault diagnosis of gearbox based on RBF-PF and particle swarm optimization wavelet neural network. *Neural computing and applications*, 31 (9): 4463–4478, 2019. Publisher: Springer.
- [13] Kaoutar Daoudi, El Mosthapha Boudi, and Mohsine Abdellah. Genetic Approach for Multiobjective Optimization of Epicyclical Gear Train. *Mathematical Problems in Engineering*, 2019: 1–10, November 2019. ISSN 1024-123X, 1563-5147. doi: [10.1155/2019/9324903](https://doi.org/10.1155/2019/9324903). URL <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/9324903/>.
- [14] Abhishek Parmar, P. Ramkumar, and K. Shankar. Macro geometry multi-objective optimization of planetary gearbox considering scuffing constraint. *Mechanism and Machine Theory*, 154: 104045, December 2020. ISSN 0094114X. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2020.104045](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2020.104045). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X20302664>.
- [15] Dan Simon. *Evolutionary optimization algorithms*. John Wiley & Sons, 2013.
- [16] Ali Riza Yildiz, Hammoudi Abderazek, and Seyedali Mirjalili. A Comparative Study of Recent Non-traditional Methods for Mechanical Design Optimization. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 27 (4): 1031–1048, September 2020. ISSN 1134-3060, 1886-1784. doi: [10.1007/s11831-019-09343-x](https://doi.org/10.1007/s11831-019-09343-x). URL <http://link.springer.com/10.1007/s11831-019-09343-x>.
- [17] Bilal, Millie Pant, Hira Zaheer, Laura Garcia-Hernandez, and Ajith Abraham. Differential Evolution: A review of more than two decades of research. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 90: 103479, April 2020. ISSN 0952-1976. doi: [10.1016/j.engappai.2020.103479](https://doi.org/10.1016/j.engappai.2020.103479). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S095219762030004X>.
- [18] Rainer Storn. Differential Evolution A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces. *DIFFERENTIAL EVOLUTION*, page 19.

- [19] Xin-She Yang. *Nature-inspired metaheuristic algorithms*. Luniver press, 2010.
- [20] Yudong Zhang, Shuihua Wang, and Genlin Ji. A comprehensive survey on particle swarm optimization algorithm and its applications. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 2015. Publisher: Hindawi.
- [21] Michalis Mavrovouniotis, Changhe Li, and Shengxiang Yang. A survey of swarm intelligence for dynamic optimization: Algorithms and applications. *Swarm and Evolutionary Computation*, 33: 1–17, April 2017. ISSN 2210-6502. doi: [10.1016/j.swevo.2016.12.005](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2016.12.005). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210650216302541>.
- [22] Dongshu Wang, Dapei Tan, and Lei Liu. Particle swarm optimization algorithm: an overview. *Soft Computing*, 22 (2): 387–408, January 2018. ISSN 1432-7643, 1433-7479. doi: [10.1007/s00500-016-2474-6](https://doi.org/10.1007/s00500-016-2474-6). URL <http://link.springer.com/10.1007/s00500-016-2474-6>.
- [23] Hui Wang, Wenjun Wang, Laizhong Cui, Hui Sun, Jia Zhao, Yun Wang, and Yu Xue. A hybrid multi-objective firefly algorithm for big data optimization. *Applied Soft Computing*, 69: 806–815, August 2018. ISSN 15684946. doi: [10.1016/j.asoc.2017.06.029](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.06.029). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1568494617303721>.
- [24] Murat Dörterler, Ismail Sahin, and Harun Gökçe. A grey wolf optimizer approach for optimal weight design problem of the spur gear. *Engineering Optimization*, 51 (6): 1013–1027, June 2019. ISSN 0305-215X, 1029-0273. doi: [10.1080/0305215X.2018.1509963](https://doi.org/10.1080/0305215X.2018.1509963). URL <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0305215X.2018.1509963>.
- [25] Dervis Karaboga and Bahriye Basturk. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm. *Journal of Global Optimization*, 39 (3): 459–471, November 2007. ISSN 1573-2916. doi: [10.1007/s10898-007-9149-x](https://doi.org/10.1007/s10898-007-9149-x). URL <https://doi.org/10.1007/s10898-007-9149-x>.
- [26] M. Mareli and B. Twala. An adaptive Cuckoo search algorithm for optimisation. *Applied Computing and Informatics*, 14 (2): 107–115, July 2018. ISSN 2210-8327. doi: [10.1016/j.aci.2017.09.001](https://doi.org/10.1016/j.aci.2017.09.001). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2210832717301679>.
- [27] Matej Crepinšek, Shih-Hsi Liu, and Marjan Mernik. Exploration and exploitation in evolutionary algorithms: A survey. *ACM Computing Surveys*, 45 (3): 35:1–35:33, July 2013. ISSN 0360-0300. doi: [10.1145/2480741.2480752](https://doi.org/10.1145/2480741.2480752). URL <https://doi.org/10.1145/2480741.2480752>.
- [28] Karol Opara and Jaroslaw Arabas. Comparison of mutation strategies in differential evolutiona probabilistic perspective. *Swarm and Evolutionary Computation*, 39: 53–69, 2018. Publisher: Elsevier.

- [29] Swagatam Das, Sankha Subhra Mullick, and P.N. Suganthan. Recent advances in differential evolution: An updated survey. *Swarm and Evolutionary Computation*, 27: 1–30, April 2016. ISSN 22106502. doi: [10.1016/j.swevo.2016.01.004](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2016.01.004). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2210650216000146>.
- [30] Essam H Houssein. Major Advances in Particle Swarm Optimization: Theory, Analysis, and Application. *Swarm and Evolutionary Computation*, page 40, 2021.
- [31] Kaisa Miettinen. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer US, 1998. ISBN 978-0-7923-8278-2. doi: [10.1007/978-1-4615-5563-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5563-6). URL <https://www.springer.com/gp/book/9780792382782>.
- [32] Michael T. M. Emmerich and André H. Deutz. A tutorial on multiobjective optimization: fundamentals and evolutionary methods. *Natural Computing*, 17 (3): 585–609, September 2018. ISSN 1567-7818, 1572-9796. doi: [10.1007/s11047-018-9685-y](https://doi.org/10.1007/s11047-018-9685-y). URL <https://link.springer.com/10.1007/s11047-018-9685-y>.
- [33] D.A.G. Vieira and A.C. Lisboa. A cutting-plane method to nonsmooth multiobjective optimization problems. *European Journal of Operational Research*, 275 (3): 822–829, June 2019. ISSN 03772217. doi: [10.1016/j.ejor.2018.12.047](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.12.047). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221719300013>.
- [34] Matthias Ehrgott. *Multicriteria optimization*. Springer, Berlin ; New York, 2nd edition, 2005. ISBN 978-3-540-21398-7.
- [35] E. Miglierina, E. Molho, and M.C. Recchioni. Box-constrained multi-objective optimization: A gradient-like method without a priori scalarization. *European Journal of Operational Research*, 188 (3): 662–682, August 2008. ISSN 03772217. doi: [10.1016/j.ejor.2007.05.015](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.05.015). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221707004900>.
- [36] Zhun Fan, Yi Fang, Wenji Li, Jiewei Lu, Xinye Cai, and Caimin Wei. A comparative study of constrained multi-objective evolutionary algorithms on constrained multi-objective optimization problems. In *2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pages 209–216. IEEE, 2017.
- [37] Efrén Mezura-Montes. Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future. *Swarm and Evolutionary Computation*, page 22, 2011.
- [38] Rituparna Datta and Kalyanmoy Deb. *Evolutionary constrained optimization*. Springer, 2014.
- [39] Jing-Yu Ji, Wei-Jie Yu, Yue-Jiao Gong, and Jun Zhang. Multiobjective optimization with  $\epsilon$ -constrained method for solving real-parameter constrained optimization problems. *Information Sciences*, 467: 15–34, October 2018. ISSN 00200255. doi: [10.1016/j.ins.2018.07.071](https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.07.071). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0020025518305978>.

- [40] Daniel Miler, Antonio Loncar, Dragan Žeželj, and Zoran Domitran. Influence of profile shift on the spur gear pair optimization. *Mechanism and Machine Theory*, 117: 189–197, November 2017. ISSN 0094114X. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2017.07.001](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.07.001). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X17306535>.
- [41] Edmund Shingirayi Maputi and Rajesh Arora. Design Optimization of a Gearbox: Problem Formulation Procedure. In *2018 International Conference on Automation and Computational Engineering (ICACE)*, pages 107–112, Greater Noida, India, October 2018. IEEE. ISBN 978-1-5386-5464-4. doi: [10.1109/ICACE.2018.8686944](https://doi.org/10.1109/ICACE.2018.8686944). URL <https://ieeexplore.ieee.org/document/8686944/>.
- [42] Zhen Qin, Yu-Ting Wu, and Sung-Ki Lyu. A review of recent advances in design optimization of gearbox. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 19 (11): 1753–1762, 2018. Publisher: Springer.
- [43] Martin Hofstetter, Dominik Lechleitner, Mario Hirz, Martin Gintzel, and Andreas Schmidhofer. Multi-objective gearbox design optimization for xEV-axle drives under consideration of package restrictions. *Forschung im Ingenieurwesen*, 82 (4): 361–370, 2018. Publisher: Springer.
- [44] Tamás Orosz, Anton Rassolkin, Ants Kallaste, Pedro Arsénio, David Pánek, Jan Kaska, and Pavel Karban. Robust Design Optimization and Emerging Technologies for Electrical Machines: Challenges and Open Problems. *Applied Sciences*, 10 (19): 6653, January 2020. doi: [10.3390/app10196653](https://doi.org/10.3390/app10196653). URL <https://www.mdpi.com/2076-3417/10-19/6653>. Number: 19 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [45] Jian Dong, Yingjuan Li, and Meng Wang. Fast Multi-Objective Antenna Optimization Based on RBF Neural Network Surrogate Model Optimized by Improved PSO Algorithm. *Applied Sciences*, 9 (13): 2589, January 2019. doi: [10.3390/app9132589](https://doi.org/10.3390/app9132589). URL <https://www.mdpi.com/2076-3417/9/13/2589>. Number: 13 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [46] Wan Zhong, Alan Palazzolo, and Xiao Kang. Multi-Objective Optimization Design of Nonlinear Magnetic Bearing Rotordynamic System. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139 (1), February 2017. ISSN 1048-9002. doi: [10.1115/1.4034844](https://doi.org/10.1115/1.4034844). URL <https://asmedigitalcollection.asme.org/vibrationacoustics/article/139/1/011011/392335/-Multi-Objective-Optimization-Design-of-Nonlinear>. Publisher: American Society of Mechanical Engineers Digital Collection.
- [47] Ying Xu, Ou Ding, Rong Qu, and Keqin Li. Hybrid multi-objective evolutionary algorithms based on decomposition for wireless sensor network coverage optimization. *Applied Soft Computing*, 68: 268–282, July 2018. ISSN 15684946. doi: [10.1016/j.asoc.2018.03.053](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2018.03.053). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1568494618301868>.
- [48] Edmund S. Maputi and Rajesh Arora. Multi-objective optimization of a 2-stage spur gearbox using NSGA-II and decision-making methods. *Journal of the Brazilian*

---

*Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 42 (9): 477, September 2020. ISSN 1678-5878, 1806-3691. doi: [10.1007/s40430-020-02557-2](https://doi.org/10.1007/s40430-020-02557-2). URL <http://link.springer.com/10.1007/s40430-020-02557-2>.

[49] Kalyanmoy Deb and Sachin Jain. Multi-Speed Gearbox Design Using Multi-Objective Evolutionary Algorithms. *Journal of Mechanical Design*, 125 (3): 609–619, September 2003. ISSN 1050-0472, 1528-9001. doi: [10.1115/1.1596242](https://doi.org/10.1115/1.1596242). URL <https://asmedigitalcollection.asme.org/mechanicaldesign/article/125/3/609/476024/-MultiSpeed-Gearbox-Design-Using-MultiObjective>.

[50] Maruti Patil, P. Ramkumar, and K. Shankar. Multi-objective optimization of the two-stage helical gearbox with tribological constraints. *Mechanism and Machine Theory*, 138: 38–57, August 2019. ISSN 0094114X. doi: [10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.037](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2019.03.037). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X19302265>.

[51] Tea Robic and Bogdan Filipic. Differential evolution for multiobjective optimization. In *International conference on evolutionary multi-criterion optimization*, pages 520–533. Springer, 2005.

[52] Rammohan Mallipeddi, Ponnuthurai N Suganthan, Quan-Ke Pan, and Mehmet Fatih Tasgetiren. Differential evolution algorithm with ensemble of parameters and mutation strategies. *Applied soft computing*, 11 (2): 1679–1696, 2011. Publisher: Elsevier.

[53] James Kennedy' and Russell Eberhart. Particle Swarm Optimization. page 7.

[54] Kyle Robert Harrison, Andries P. Engelbrecht, and Beatrice M. Ombuki-Berman. Self-adaptive particle swarm optimization: a review and analysis of convergence. *Swarm Intelligence*, 12 (3): 187–226, September 2018. ISSN 1935-3812, 1935-3820. doi: [10.1007/s11721-017-0150-9](https://doi.org/10.1007/s11721-017-0150-9). URL <http://link.springer.com/10.1007/s11721-017-0150-9>.

[55] Jürgen Branke, Jurgен Branke, Kalyanmoy Deb, Kaisa Miettinen, and Roman Slowinski. *Multiobjective optimization: Interactive and evolutionary approaches*, volume 5252. Springer Science & Business Media, 2008.

[56] Ioannis Giagkiozis and Peter J Fleming. Methods for multi-objective optimization: An analysis. *Information Sciences*, 293: 338–350, 2015. Publisher: Elsevier.

[57] Shuxin Ding, Chen Chen, Bin Xin, and Panos M Pardalos. A bi-objective load balancing model in a distributed simulation system using NSGA-II and MOPSO approaches. *Applied Soft Computing*, 63: 249–267, 2018. Publisher: Elsevier.

[58] Margarita Reyes-Sierra, CA Coello Coello, and others. Multi-objective particle swarm optimizers: A survey of the state-of-the-art. *International journal of computational intelligence research*, 2 (3): 287–308, 2006.

- [59] Walter J Gutjahr and Alois Pichler. Stochastic multi-objective optimization: a survey on non-scalarizing methods. *Annals of Operations Research*, 236 (2): 475–499, 2016. Publisher: Springer.
- [60] Rui Wang, Zhongbao Zhou, Hisao Ishibuchi, Tianjun Liao, and Tao Zhang. Localized Weighted Sum Method for Many-Objective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 22 (1): 3–18, February 2018. ISSN 1089-778X, 1089-778X, 1941-0026. doi: [10.1109/TEVC.2016.2611642](https://doi.org/10.1109/TEVC.2016.2611642). URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/7572016/>.
- [61] Carlos A Coello Coello, Gary B Lamont, David A Van Veldhuizen, and others. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*, volume 5. Springer, 2007.
- [62] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6 (2): 182–197, April 2002. ISSN 1089778X. doi: [10.1109/4235.996017](https://doi.org/10.1109/4235.996017). URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/996017/>.
- [63] TO Ting, Xin-She Yang, Shi Cheng, and Kaizhu Huang. Hybrid metaheuristic algorithms: past, present, and future. *Recent advances in swarm intelligence and evolutionary computation*, pages 71–83, 2015. Publisher: Springer.
- [64] Rawaa Dawoud Al-Dabbagh, Ferrante Neri, Norisma Idris, and Mohd Sapiyan Baba. Algorithmic design issues in adaptive differential evolution schemes: Review and taxonomy. *Swarm and Evolutionary Computation*, 43: 284–311, 2018. Publisher: Elsevier.
- [65] Ali Wagdy Mohamed and Ali Khater Mohamed. Adaptive guided differential evolution algorithm with novel mutation for numerical optimization. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 10 (2): 253–277, 2019. Publisher: Springer.
- [66] Tarik Eltaeib and Ausif Mahmood. Differential evolution: A survey and analysis. *Applied Sciences*, 8 (10): 1945, 2018. Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [67] Ryoji Tanabe and Alex Fukunaga. Success-history based parameter adaptation for differential evolution. In *2013 IEEE congress on evolutionary computation*, pages 71–78. IEEE, 2013.
- [68] B Mohammadi-Ivatloo, A Rabiee, A Soroudi, and M Ehsan. Iteration PSO with time varying acceleration coefficients for solving non-convex economic dispatch problems. *International journal of electrical power & energy systems*, 42 (1): 508–516, 2012. Publisher: Elsevier.
- [69] Mojtaba Taherkhani and Reza Safabakhsh. A novel stability-based adaptive inertia weight for particle swarm optimization. *Applied Soft Computing*, 38: 281–295, 2016. Publisher: Elsevier.

- [70] A Kai Qin, Vicky Ling Huang, and Ponnuthurai N Suganthan. Differential evolution algorithm with strategy adaptation for global numerical optimization. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 13 (2): 398–417, 2008. Publisher: IEEE.
- [71] Zhengjia Wu and Jianzhong Zhou. A Self-Adaptive Particle Swarm Optimization Algorithm with Individual Coefficients Adjustment. In *2007 International Conference on Computational Intelligence and Security (CIS 2007)*, pages 133–136, December 2007. doi: [10.1109/CIS.2007.95](https://doi.org/10.1109/CIS.2007.95).
- [72] Asanga Ratnaweera, Saman K Halgamuge, and Harry C Watson. Self-organizing hierarchical particle swarm optimizer with time-varying acceleration coefficients. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, 8 (3): 240–255, 2004. Publisher: IEEE.
- [73] Saptarshi Sengupta, Sanchita Basak, and Richard Alan Peters. Particle Swarm Optimization: A survey of historical and recent developments with hybridization perspectives. *Machine Learning and Knowledge Extraction*, 1 (1): 157–191, 2019. Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [74] Laizhong Cui, Genghui Li, Qiuzhen Lin, Jianyong Chen, and Nan Lu. Adaptive differential evolution algorithm with novel mutation strategies in multiple sub-populations. *Computers & Operations Research*, 67: 155–173, 2016. Publisher: Elsevier.
- [75] Bernd-Robert Hoehn, Klaus Michaelis, and Michael Hinterstoißer. Optimization of gearbox efficiency. *GOMABN*, 488330184301821134: 441–480, January 2009.
- [76] Pedro M.T. Marques, Raquel Camacho, Ramiro C. Martins, and Jorge H.O. Seabra. Efficiency of a planetary multiplier gearbox: Influence of operating conditions and gear oil formulation. *Tribology International*, 92: 272–280, December 2015. ISSN 0301679X. doi: [10.1016/j.triboint.2015.06.018](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2015.06.018). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301679X1500256X>.
- [77] C. Sequeira, A. Pacheco, P. Galego, and E. Gorbeña. Analysis of the efficiency of wind turbine gearboxes using the temperature variable. *Renewable Energy*, 135: 465–472, May 2019. ISSN 09601481. doi: [10.1016/j.renene.2018.12.040](https://doi.org/10.1016/j.renene.2018.12.040). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S096014811831471X>.
- [78] I. Kakavas, A.V. Olver, and D. Dini. Hypoid gear vehicle axle efficiency. *Tribology International*, 101: 314–323, September 2016. ISSN 0301679X. doi: [10.1016/j.triboint.2016.04.030](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2016.04.030). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301679X16300846>.
- [79] Miloš Sedak and Božidar Rosic. Multi-Objective Optimization of Planetary Gearbox with Adaptive Hybrid Particle Swarm Differential Evolution Algorithm. *Applied Sciences*, 11 (3): 1107, January 2021. doi: [10.3390/app11031107](https://doi.org/10.3390/app11031107). URL <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/3/1107>. Number: 3 Publisher: Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [80] Hai Xu. *Development of a generalized mechanical efficiency prediction methodology for gear pairs*. PhD Thesis, The Ohio State University, 2005.



- [81] G. H. Benedict and B. W. Kelley. Instantaneous Coefficients of Gear Tooth Friction. *A S L E Transactions*, 4 (1): 59–70, January 1961. ISSN 0569-8197. doi: [10.1080/05698196108972420](https://doi.org/10.1080/05698196108972420). URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/05698196108972420>.
- [82] Bernd-Robert Höhn. Improvements on noise reduction and efficiency of gears. *Meccanica*, 45 (3): 425–437, June 2010. ISSN 1572-9648. doi: [10.1007/s11012-009-9251-x](https://doi.org/10.1007/s11012-009-9251-x). URL <https://doi.org/10.1007/s11012-009-9251-x>.
- [83] D. Dowson and G. R. Higginson. *Elasto-hydrodynamic lubrication*. International series on materials science and technology ; v. 23. Pergamon Press, Oxford [Eng.] ; New York, si ed edition, 1977. ISBN 978-0-08-021303-3.
- [84] Xiaobing Yu. Differential evolution mutation operators for constrained multi-objective optimization. *Applied Soft Computing*, page 15, 2018.
- [85] Qingfu Zhang, Aimin Zhou, Shizheng Zhao, Ponnuthurai Nagarathnam Suganthan, Wudong Liu, and Santosh Tiwari. Multiobjective optimization Test Instances for the CEC 2009 Special Session and Competition. page 30, 2009.
- [86] Joaquín Derrac, Salvador García, Daniel Molina, and Francisco Herrera. A practical tutorial on the use of nonparametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms. *Swarm and Evolutionary Computation*, 1 (1): 3–18, March 2011. ISSN 22106502. doi: [10.1016/j.swevo.2011.02.002](https://doi.org/10.1016/j.swevo.2011.02.002). URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2210650211000034>.
- [87] Gregory W Corder and Dale I Foreman. *Nonparametric statistics for non-statisticians*. John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [88] Kalyanmoy Deb, Lothar Thiele, Marco Laumanns, and Eckart Zitzler. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization. In *Evolutionary multiobjective optimization*, pages 105–145. Springer, 2005.
- [89] Calculation of load capacity of cylindrical gears. Standard, German Institute for Standardization - DIN, Berlin, Germany, 1987.
- [90] Calculation of load capacity of spur and helical gears. Standard, International Organization for Standardization, Geneva, CH, 1996.
- [91] AGMA Standard. Design manual for enclosed epicyclic gear drives. *Alexandria, VA: American Gear Manufacturers Association*, pages 1–104, 2006.

## Биографија

Милош Седак је рођен 06. октобра 1991. године у Смедереву. Основну школу „Димитрије Давидовић“ завршио је у Смедереву са одличним успехом. Средњошколско образовање стекао је у Техничкој школи у Смедереву, смер Машински техничар за компјутерско управљање, где је за изузетне остварене резултате у току школовања награђен дипломом „Вук Стефановић Караџић“. Машински факултет у Београду уписао је школске 2010/2011 године. Основне академске студије завршио је у року, 19. јуна 2013. године, са просечном оценом 9,81 и тако стекао академски степен инжењер машинства. Мастер академске студије уписао је школске 2013/14 године на Машинском факултету у Београду, смер Аутоматско управљање и завршио 19. марта 2015. године са просечном оценом 9,85. Мастер рад одбранио је са оценом 10 на тему „Стабилност посебних класа система аутоматског управљања у смислу Љапунова“ и тако стекао академски степен мастер инжењер машинства.

Докторске академске студије на Машинском факултету у Београду, смер Опште машинске конструкције, уписао је школске 2015/16 године.

Током студија био је стипендиста Фонда за младе таленте Републике Србије за завршне године основних и мастер академских студија. Такође у периоду од 2011-2015 године био је стипендиста Фонда за младе таленте града Смедерева. Добитник је награде за студента генерације који је први дипломирао на Машинском факултету у Београду. Као одличан студент, награђиван је за изузетан успех током студија на Машинском факултету 2010/11, 2011/12, 2012/13, 2013/14, 2014/15 године.

Течно говори енглески језик, а служи се и немачким језиком. Успешно примењује на решавање инжењерских проблема следеће програмске језике и софтверске пакете: C/C++, Python, PHP, JavaScript, HTML, CSS, SQL, LaTeX, Microsoft Office

(Word, Excel, Power Point), MATLAB, LabView, AutoCAD, CATIA, NASTRAN/PATRAN, ANSYS, SolidWorks.

Од 22.01.2016. године запослен је на Машинском факултету Универзитета у Београду по уговору о раду као асистент на Катедри за Опште машинске конструкције. У току свог досадашњег наставног рада на Машинском факултету у Београду држао је аудиторне и лабораторијске вежбе на Катедри за Опште машинске конструкције и то на предметима: Машински елементи 1, Машински елементи 2, Оптимизација конструкција, Интерактивно моделирање и конструисање као и Поузданост преносника.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а \_\_\_\_\_ Милош И. Седак \_\_\_\_\_

број индекса \_\_\_\_\_ Д2/2015 \_\_\_\_\_

### Изјављујем

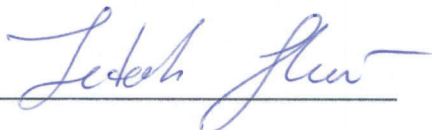
да је докторска дисертација под насловом

Вишекритеријумска оптимизација планетарних преносника адаптивним  
хибридним метахеуристичким алгоритмима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 18.6.2021

  
\_\_\_\_\_

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_ Милош И. Седак \_\_\_\_\_

Број индекса \_\_\_\_\_ Д2/2015 \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_

Наслов рада \_\_\_\_\_ Вишекритеријумска оптимизација планетарних преносника  
адаптивним \_\_\_\_\_ хибридним \_\_\_\_\_ метахеуристичким  
алгоритмима \_\_\_\_\_

Ментор \_\_\_\_\_ проф. др Божидар Росић \_\_\_\_\_

Потписани/а \_\_\_\_\_ Милош И. Седак \_\_\_\_\_

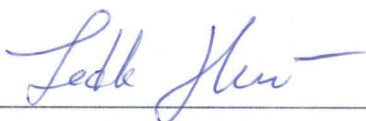
Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

у Београду, \_\_\_\_\_ 18.6.2021 \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

### **Вишекритеријумска оптимизација планетарних преносника адаптивним хибридном метакеуристичким алгоритмима**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 18.6.2021

