УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марија Д. Микић

Асимптотска својства решења једначина Емден-Фаулера и њихових уопштења

докторска дисертација

Београд, 2017

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Marija D. Mikić

Asymptotic properties of solutions of Emden-Fowler equations and their generalizations

doctorial dissertation

Belgrade, 2017

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Ђорђе Кртинић,
доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Ђорђе Кртинић,
доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Небојша Лажетић,
редовни професор у пензији,
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Миодраг Спалевић,
редовни професор,
Машински факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Резиме

Предмет дисертације јесте испитивање асимптотских својстава решења једначина Емден-Фаулера и њихових уопштења. Област којој ова дисертација припада јесте Квалитативна анализа обичних диференцијалних једначина.

Једначина Емден-Фаулера јесте једначина облика

$$(t^\rho \cdot u'(t))' \pm t^\alpha \cdot u^\sigma(t) = 0\,,$$

где су ρ, α, $\sigma \in \mathbb{R}$. Ова једначина се сменом промењивих може свести на једначине облика $y'' - x^a y^\sigma = 0$ и $y'' + x^a y^\sigma = 0$. У овој дисертацији посматрана је прво диференцијална једначина

$$y'' = x^a y^\sigma, \text{ где су } a, \sigma \in \mathbb{R}\,.$$

Описани су услови који обезбеђују да посматрана диференцијална једначина има бесконачно много решења у некој околини нуле, као и услови који обезбеђују егзистенцију бесконачно много решења са одређеним асимптотским понашањем. Такође, приказана је комплетна слика асимптотског понашања решења једначине дуж позитивних делова оса. Показано је под којим условима ће бити обезбеђена егзистенција и јединственост решења Кошијевог проблема за једначину Емден-Фаулера у ситуацијама када позната теорија не даје резултате. У неким случајевима одређене су асимптотске формуле решења.

Затим је посматрана диференцијална једначина

$$y'' = -x^a y^\sigma, \text{ где } a \in \mathbb{R} \text{ и } \sigma < 0\,.$$

Описани су услови који обезбеђују егзистенцију бесконачно много решења горе наведене једначине која теже ка нули када $x \to 0+$.

Приказани су и услови који обезбеђују јединственост решења Кошијевог проблема

$$y'' = q(x) f(y(x)),\ \lim_{x\to 0+} y(x) = 0,\ \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lambda\,,$$

где је посматрана једначина уопштење једначине Емден-Фаулера, за неко $\lambda > 0$ и функције f и q које задовољавају одређене услове. Резултати, који су добијени, уопштавају резултате за сублинеарну једначину Емден-Фаулера (тј. случај када је $0 < \sigma < 1$) и случај када је $\sigma < 0$.

У литератури се ретко виђа да постоје обједињени резултати за различите вредности параметра σ који фигурише у једначинама Емден-Фаулера. У овој дисертацији су приказани резултати који су добијени за сублинеарну и суперлинеарну једначину Емден-Фаулера, као и случај када је $\sigma < 0$. Стога је прича о асимптотском понашању решења ове једначине „скоро заокружена”.

Кључне речи: диференцијална једначина Емден-Фаулера, суперлинеарна једначина, сублинеарна једначина, асимптотско понашање решења, Кошијев проблем.

Научна област: Математика.

Ужа научна област: Диференцијалне једначине.

УДК број: 517.911, 517.925.4(043.3).

AMS класификација: 34A34, 34E10.

Abstract

The subject of this dissertation is the investigation of asymptotic properties of solutions for differential equations of Emden-Fowler type and their generalizations. The field to which this dissertation belongs is a Qualitative theory of ordinary differential equations.

Emden-Fowler differential equation has the form

$$(t^\rho \cdot u'(t))' \pm t^\alpha \cdot u^\sigma(t) = 0\,,$$

where ρ, α, $\sigma \in \mathbb{R}$. With some changes of the variables, this differential equation can be reduced to the equations $y'' - x^a y^\sigma = 0$ and $y'' + x^a y^\sigma = 0$. Firstly, in this dissertation, the differential equation

$$y'' = x^a y^\sigma, \text{ where } a, \sigma \in \mathbb{R}$$

was observed. The conditions, which provide that this equation has infinitely many solutions defined in some neighborhood of zero, were described here, both with the conditions, which guarantee the existence of infinitely many solutions with certain asymptotic behavior. Also, a complete picture of asymptotic behavior of solutions of equation along the positive parts of both axes is given. The conditions, which assure existence and unique solvability of solution of the Cauchy problem for this equation, were shown in the cases when the familiar theory can't be applied. In some cases, asymptotic formulas for solutions were obtained.

The differential equation

$$y'' = -x^a y^\sigma, \text{ where } a \in \mathbb{R} \text{ i } \sigma < 0\,,$$

has also been taken into consideration. The conditions, which assure the existence of infinitely many solutions of observed equation tending to zero as $x \to 0+$, were obtained.

The conditions, which assure the unique solvability of the Cauchy problem for generalized Emden-Fowler equation

$$y'' = q(x) f(y(x)),\ \lim_{x\to 0+} y(x) = 0,\ \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lambda\,,$$

were described, for any $\lambda > 0$ and functions f and q which satisfy certain conditions. The given results generalize the results both for sublinear Emden-Fowler differential equation (i.e. case when $0 < \sigma < 1$) and the case when $\sigma < 0$.

In literature, it is very rare to find the conditions for different values of the parametar σ which appears in the equations of Emden-Fowler type. In this dissertation, the results for sublinear and superlinear differential equation Emden-Fowler, as well as the case when $\sigma < 0$, are presented. Therefore, the story of the asymptotic behavior of solutions of the observed equation is "almost complited".

Keywords: Emden-Fowler differential equation, superlinear equation, sublinear equation, asymptotic behavior of solutions, Cauchy problem.

Scientific field: Mathematics.

Scientific subfield: Differential equations.

UDC number: 517.911, 517.925.4(043.3).

AMS classification: 34A34, 34E10.

Велику захвалност дугујем свом ментору, професору Ђорђу Кртинићу, на преузетим обавезама ментора, увођењу у научни рад, издвојеном времену, посвећености, подршци, корисним саветима и сугестијама. Захваљујем се професорима Небојши Лажетићу и Миодрагу Спалевићу на корисним сугестијама. Захваљујем се породици, пријатељима и драгим колегама на подршци и толерантности према мени, јер су имали разумевања за све време које сам уложила у овај рад. Такође, желим да се захвалим некоме ко није више са нама, а допринео је, на одређен начин, овој дисертацији.

Београд, јул 2017. Марија Микић

Садржај

1 Увод

Квалитативна анализа обичних диференцијалних једначина, којој по свом садржају и резултатима припада ова дисертација, јесте област у којој се до закључака долази на основу анализа функција које фигуришу у самој једначини. Ова област је посебно битна у ситуацијама када једначину не можемо решити помоћу квадратура. Када су формулисане и доказане основне теореме о егзистенцији и јединствености решења, створени су услови за развој ове области. Квалитативна анализа обичних диференцијалних једначина у најједноставнијим случајевима омогућава нам да скицирамо интегралне криве решења, не знајући аналитички израз решења. Она се бави испитивањем ограничености решења, бројем и положајем нула решења, осцилаторношћу решења, асимптотама, понашањем решења у околини сингуларних тачака и бесконачности, итд.

Многи проблеми у физици моделирани су диференцијалним једначинама другог реда. Квалитативна анализа таквих једначина привлачила је и привлачи велику пажњу математичара који су се бавили и баве се теоријом обичних диференцијалних једначина. Једна од највише проучаваних диференцијалних једначина другог реда јесте једначина Емден-Фаулера. Ова једначина се први пут појавила крајем XIX века у радовима астрофизичара Емдена[1]. Резултати до којих је дошао Емден били су углавном интуитивни, док се након тога Фаулер[2] бавио решавањем једначине помоћу квадратура за све вредности параметара за које је то било могуће. Ова једначина појављује се у проучавању теорије динамике гасова у астрофизици, дистрибуције електрона у тешком атому, механике флуида, релативистичке механике, нуклеарне физике, као и проучавању хемијских реакција система.

Једначина Емден-Фаулера јесте диференцијална једначина облика

$$(t^\rho \cdot u'(t))' \pm t^\alpha \cdot u^\sigma(t) = 0\,, \tag{1.1}$$

где су ρ, α, $\sigma \in \mathbb{R}$. Ова једначина се сменом променљивих може свести на канонске облике једначина Емден-Фаулера $y'' - x^a y^\sigma = 0$ и $y'' + x^a y^\sigma = 0$. Наиме, ако је $\rho > 1$, сменом $x = \frac{t^{\rho-1}}{\rho-1}$, $u = \frac{y}{x} \cdot (\rho-1)^{\frac{\rho-\alpha-2}{(\rho-1)(\sigma-1)}}$ једначина

[1]Jacob Robert Emden (1862–1940), швајцарски астрофизичар

[2]Ralph Howard Fowler (1889–1944), британски физичар

(1.1) своди се на једначине $y'' \pm x^a y^\sigma = 0$, где је $a = \frac{\alpha+\rho}{\rho-1} - (\sigma+3)$. Ако је $\rho < 1$, сменом $x = \frac{t^{1-\rho}}{1-\rho}$, $u = y \cdot (1-\rho)^{-\frac{\rho+\alpha}{(1-\rho)(\sigma-1)}}$ једначина (1.1) своди се на једначине $y'' \pm x^a y^\sigma = 0$, где је $a = \frac{\alpha+\rho}{1-\rho}$. Стога, резултати који су добијени за канонске једначине дају одговарајуће резултате за једначину (1.1). У овој дисертацији посматрани су управо ови канонски облици и у даљем тексту под једначинама Емден-Фаулера подразумевамо те једначине.

Једначине Емден-Фаулера математички су јако интересантне. Оне су нелинеарне, имају велику класу решења и њихова решења се у општем случају не могу експлицитно одредити. Ове једначине посматране су у монографијама [2, 3, 4, 5] и радовима [6, 7, 8, 9, 16, 17]. У монографијама [2, 3] и радовима [6, 9] добијено је асимптотско понашање решења у бесконачности. У радовима [7, 8] добијена су нека асимптотска својства решења у околини нуле. Управо ти радови су нас мотивисали да даље испитамо понашање решења једначина Емден-Фаулера у околини нуле, у зависности од вредности параметара који се јављају у једначинама.

Кратак преглед садржаја дисертације

У другом поглављу проучавана је диференцијална једначина

$$y'' = x^a y^\sigma, \text{ где су } a, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Прво је посматран случај када је $\sigma < 0$. Добијени резултати су одговори на проблеме који су остали отворени у радовима [7, 8]. У овом случају добијени су услови који обезбеђују да решење посматране једначине буде дефинисано у околине нуле и показано је да се овај резултат не може обезбедити при слабијим претпоставкама. Проучавано је и асимптотско понашање решења ове једначине. Доказана је егзистенција бесконачно много решења ове једначине која задовољавају одређене услове. Такође, показана је јединственост решења при одређеним условима. Испитивано је понашање решења дуж позитивног дела y–осе. У тим ситуацијама добијени су услови који обезбеђују да одговарајући Кошијев проблем има решење (или нема решење). У ситуацијама када је егзистенција решења Кошијевог проблема добијена, испитивана је јединственост решења. Затим, испитивано је понашање решења дуж позитивног дела x–осе. У тим ситуацијама проучавана је егзистенција решења која се не могу продужити до нуле, као и егзистенција решења којима је x–оса тангента у некој тачки. Добијени су неопходни и довољни услови за егзистенцију и јединственост решења одговарајућег Кошијевог проблема.

У случају када $\sigma \in (0,1)$, добијени су неопходни и довољни услови који обезбеђују да се решења једначине могу непрекидно продужити у тачки $(0,0)$. Затим су посматрана решења која се не могу непрекидно продужити у тој тачки. Добијени су неопходни и довољни услови за постојање вертикалне асимптоте и описани су услови који обезбеђују егзистенцију решења одговарајућег Кошијевог проблема. У овом случају разматрана је такође и јединственост решења.

У случају када је $\sigma > 1$, добијене су асимптотске формуле за позитивна решења посматране једначине у околини нуле.

Резултати који су приказани у овом поглављу базирају се на резултатима радова [10, 11, 13, 14].

У трећем поглављу проучавана је диференцијална једначина

$$y'' = -x^a y^\sigma, \text{ где су } a, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Приказано је под којим условима је обезбеђена егзистенција бесконачно много решења која теже ка 0 када $x \to 0+$. Такође, показано је да се резултати не могу проширити за све вредности параметра a. Резултати приказани у овом поглављу јесу специјалан случај резултата добијених у раду [17], али је у овом поглављу приказана нешто другачија техника.

У четвртом поглављу проучавана је диференцијална једначина

$$y'' = q(x)f(y(x))$$

где су f и q функције које задовољавају одређене услове. Ова једначина уопштава једначине посматране у другом и трећем поглављу. У овом поглављу уопштавају се резултати приказани у раду [8], али добијени резултати се могу применити на ширу класу једначина. Резултати приказани у овом поглављу базирају се на резултатима рада [12].

2 Понашање решења једначине $y'' - x^a y^\sigma = 0$

У овом поглављу посматрана је диференцијална једначина Емден-Фаулера која је облика

$$y'' - x^a y^\sigma = 0, \text{ где су } a, \sigma \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Асимптотско понашање решења ове диференцијалне једначине у неким ситуацијама се битно разликује при малој промени вредности параметара a и σ који фигуришу у самој једначини. Из тог разлога понашање решења диференцијалне једначине (2.1) приказано је по случајевима у зависности од вредности параметара. У овом поглављу посматрана су искључиво решења која су позитивна. Добијени резултати се природно преносе и на продужење решења за оне вредности параметра σ за које то има смисла.

Посматрано је понашање решења у околини координатног почетка, постојање вертикалних асимптота, понашање решења дуж позитивних делова координатних оса, егзистенција и јединственост неких Кошијевих проблема, итд. Резултати приказани у овом поглављу јесу оригинални.

2.1 Случај $\sigma < 0$

У овом делу дисертације посматрана је једначина (2.1) у случају када је $\sigma < 0$, који је математички најзахтевнији. Овај део базиран је на резултатима радова [11, 13]. У даљем тексту под околином нуле подразумевамо интервал $(0, a)$, за неко $a > 0$.

2.1.1 Понашање решења у околини нуле

У овој секцији посматраћемо диференцијалну једначину (2.1) и разматраћемо случај када је $\sigma < 0$, $a \in \mathbb{R}$ и $x > 0$. У тексту, који следи у наставку, навешћемо нека својства решења диференцијалне једначине (2.1) која ће нам бити од значаја у испитивању њиховог асимптотског понашања.

За произвољно изабрану тачку (x_0, c, λ) из скупа

$$S = \{(x, y, y') \in \mathbb{R}^3 |\ x > 0,\ y > 0\}$$

на основу Пикар[3]-Линделефове[4] теореме следи да постоји јединствено позитивно решење $y = y(x)$ Кошијевог проблема

$$y'' = x^a y^\sigma,\ y(x_0) = c,\ y'(x_0) = \lambda\,,$$

које је дефинисано на неком интервалу $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \subset (0, +\infty)$, за неко $\alpha > 0$. Зато се као природно питање намеће налажење услова који би обезбедили да решење посматраног Кошијевог проблема буде дефинисано на неком ширем скупу.

Приметимо да из једначине (2.1) следи да је $y''(x) > 0$, стога је $y'(x)$ растућа функција. Како је $y(x)$ конвексна функција следи да је она или монотона или опадајућа па растућа. Стога, без умањења општости, можемо претпоставити да су решења, која су дефинисана у некој околини нуле, монотона јер се у ситуацији, у којој први извод мења знак, смањивањем околине може постићи монотоност.

Приметимо да за свако нерастуће решење једначине (2.1) не може бити $\lim\limits_{x \to x_0+} y'(x) = -\infty$, за неко $x_0 \in (0, +\infty)$. Претпоставимо супротно, нека је $y = y(x)$ нерастуће решење једначине (2.1) дефинисано на неком интервалу $(x_0, x_1]$, $0 < x_0 < x_1$, такво да је $\lim\limits_{x \to x_0+} y'(x) = -\infty$. Како је $y(x)$ нерастућа функција на $(x_0, x_1]$, следи да је

$$y^\sigma(x) \leqslant y^\sigma(x_1)$$

за $x \in (x_0, x_1]$. Стога се из једнакости (2.1) након интеграције добија

$$y'(x_1) - y'(\delta) = \int_\delta^{x_1} y''(x)\,dx = \int_\delta^{x_1} y^\sigma(x) \cdot x^a\,dx \leqslant y^\sigma(x_1) \int_\delta^{x_1} x^a\,dx\,,$$

за $\delta \in (x_0, x_1)$. Како је лева страна неједнакости тежи ка бесконачности, а десна страна ка коначној вредности, када $\delta \to x_0+$, долазимо до контрадикције.

Природно се намеће питање: Да ли ће свако позитивно решење посматране диференцијалне једначине бити дефинисано у некој околини нуле?

Лема 2.1. Ако је $\sigma \leqslant -1$ и ако постоји позитивно монотоно решење диференцијалне једначине (2.1), онда је то решење дефинисано на неком интервалу I таквом да важи $(0, x_1] \subset I$, за неко $x_1 > 0$.

[3]Charles Émile Picard (1856–1941), француски математичар
[4]Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946), фински математичар

Доказ. Ако је $\sigma < 0$, једино права $x = 0$ може бити вертикална асимптота решења посматране једначине (доказ овог резултата је аналоган доказу Теореме 2.2 или погледати рад [7]), стога је довољно посматрати само неопадајућа решења. Посматрајмо неопадајуће решење $y(x)$ такво да је $y(x_1) > 0$ и $y'(x_1) > 0$. Претпоставимо да је x_0 такво да је $0 < x_0 < x_1$ и да је $y(x)$ решење дефинисано на интервалу $(x_0, x_1]$, али да $y(x)$ није дефинисано на интервалу $(x', x_0]$, за произвољно x' за које важи $0 < x' < x_0$. Како је $y(x)$ неопадајућа функција, следи да лимес $\lim\limits_{x\to x_0+} y(x)$ постоји и на основу претходног следи да је $\lim\limits_{x\to x_0+} y(x) = 0$. Како је $y'(x)$ растућа функција, следи да постоји лимес $\lim\limits_{x\to x_0+} y'(x)$ и он је коначан. Стога је $y(x) \leqslant y(x_1)$ и $y'(x) \leqslant y'(x_1)$ за свако $x \in (x_0, x_1]$. Функција $y(x)$ може се непрекидно продужити у тачки x_0 тако да је $y(x_0) = 0$, стога за свако $x \in (x_0, x_1)$ и неко $\xi \in (x_0, x)$ неједнакост $\frac{y(x)-0}{x-x_0} = y'(\xi) \leqslant y'(x_1)$ важи на основу теореме Лагранжа[5]. Како је $\sigma < 0$, следи да је

$$y''(x) = x^a\big(y(x)\big)^\sigma \geqslant \big(y'(x_1)\big)^\sigma x^a (x - x_0)^\sigma,$$

за свако $x \in (x_0, x_1)$, тј. након интеграције добија се

$$y'(x_1) \geqslant y'(x_1) - y'(x) = \int_x^{x_1} y''(t)\,dt \geqslant \big(y'(x_1)\big)^\sigma \int_x^{x_1} t^a (t - x_0)^\sigma\,dt\,,$$

за $x \in (x_0, x_1)$. Како је $\sigma \leqslant -1$, када $x \to x_0+$, десна страна тежи ка бесконачности, али лева страна не тежи ка бесконачности. Из добијене контрадикције закључује се да такво решење мора бити дефинисано на интервалу $(0, x_1]$. □

Пример 2.1. Нека је

$$x(u) = x_0 \cdot e^{2\int\limits_0^u \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 8\cdot \frac{v^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}}\,,\ y(u) = \sqrt{x_0}\cdot u \cdot e^{\int\limits_0^u \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 8\cdot \frac{v^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}}\,,\ x_0 > 0,\ u \in (0, +\infty)\,,$$

где је $-1 < \sigma < 0$. Приметимо да су $x(u)$ и $y(u)$ добро дефинисане функције на интервалу $(0, +\infty)$. Такође, $x(u)$ је инјективна функција која пресликава интервал $(0, +\infty)$ у интервал $(x_0, +\infty)$, тако да можемо посматрати $x(u)$ и $y(u)$ као параметарску репрезентацију функције $y(x)$ која

[5] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), француски математичар

је дефинисана на интервалу $(x_0, +\infty)$. Једноставним рачуном добија се

$$\begin{aligned}
x'(u) &= \frac{2x_0 \cdot e^{2\int\limits_0^u \frac{dv}{\sqrt{v^2+8\cdot\frac{v^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}}}{\sqrt{u^2+8\cdot\frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}, \; y'(u) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{u\cdot\sqrt{x_0}}{\sqrt{u^2+8\cdot\frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}\right)\cdot e^{\int\limits_0^u \frac{dv}{\sqrt{v^2+8\cdot\frac{v^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}}, \\
x''(u) &= \frac{2x_0}{u^2+8\cdot\frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}}\cdot e^{2\int\limits_0^u \frac{dv}{\sqrt{v^2+8\cdot\frac{v^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}}\cdot\left(2 - \frac{u+4u^\sigma}{\sqrt{u^2+8\cdot\frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}\right), \\
y''(u) &= \frac{\sqrt{x_0}\cdot e^{\int\limits_0^u \frac{dv}{\sqrt{v^2+8\cdot\frac{v^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}}}{\sqrt{u^2+8\cdot\frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}\cdot\left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+8\cdot\frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}}} + \frac{\frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma}\cdot u^{\sigma+1}}{u^2+8\cdot\frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}}\right).
\end{aligned}$$

Како је

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}(u) &= \frac{1}{\big(x'(u)\big)^3}\big(y''(u)\cdot x'(u) - x''(u)\cdot y'(u)\big) \\
&= x_0^{-\frac{3}{2}}\cdot u^\sigma\cdot e^{-3\int\limits_0^u \frac{dv}{\sqrt{v^2+8\cdot\frac{v^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}}
\end{aligned}$$

и

$$\big(x(u)\big)^a\cdot\big(y(u)\big)^\sigma = \big(x(u)\big)^{-\frac{\sigma+3}{2}}\cdot\big(y(u)\big)^\sigma = x_0^{-\frac{3}{2}}\cdot u^\sigma\cdot e^{-3\int\limits_0^u \frac{dv}{\sqrt{v^2+8\cdot\frac{v^{\sigma+1}}{\sigma+1}}}},$$

где је $a = -\dfrac{\sigma+3}{2}$, следи да је са $x(u)$ и $y(u)$ дата параметарска репрезентација функције $y(x)$ која је решење диференцијалне једначине (2.1). Приметимо да

$$x(u) \to x_0, \; y(u) \to 0\,,$$

када $u \to 0+$. Следи да резултат Леме 2.1 не важи уколико је $-1 < \sigma < 0$.

Лема 2.1 имплицитно обезбеђује егзистенцију позитивних решења диференцијалне једначине (2.1) у некој околини нуле. Наиме, ако постоје монотона решења те једначине, она су дефинисана у околини нуле. Уколико не постоје монотона решења, онда су сва решења те једначине део по део монотона, а таква решења јесу дефинисана у околини нуле. Стога је природно испитивати асимптотско понашање таквих решења.

Теорема 2.1. Ако је $\sigma < 0$ и $a + \sigma + 1 \leqslant 0$, онда не постоје позитивна решења $y(x)$ диференцијалне једначине (2.1) дефинисана у некој околини нуле таква да $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$.

Доказ. Ако постоји позитивно решење $y(x)$ са карактеристикама наведеним у теореми, онда оно мора бити неопадајуће. Продужењем функције $y(x)$ тако да је $y(0) = 0$, добија се да је функција $y(x)$ непрекидна на сегменту $[0, x_1]$ и диференцијабилна у интервалу $(0, x_1)$, за неко $x_1 > 0$. Како је $y'(x)$ растућа функција, следи да за свако $x \in (0, x_1)$ важи неједнакост $\frac{y(x)-0}{x-0} = y'(\xi) \leqslant y'(x)$, за неко $\xi \in (0, x)$. Стога је $y(x) \leqslant xy'(x) \leqslant xy'(x_1)$ за $x \in (0, x_1)$. Из диференцијалне једначине (2.1) и из претходног реда, добија се

$$y''(x) = x^a\big(y(x)\big)^\sigma \geqslant x^{a+\sigma}\big(y'(x_1)\big)^\sigma,$$

за било које $x \in (0, x_1)$. Интеграцијом се добија

$$y'(x_1) \geqslant y'(x_1) - y'(x) = \int_x^{x_1} y''(t)\,dt \geqslant \big(y'(x_1)\big)^\sigma \int_x^{x_1} t^{a+\sigma}dt\,,$$

тј. $\big(y'(x_1)\big)^{1-\sigma} \geqslant \int_x^{x_1} t^{a+\sigma}dt$, што је немогуће јер за $a + \sigma \leqslant -1$ интеграл $\int_x^{x_1} t^{a+\sigma}dt \to +\infty$, када $x \to 0+$. $\square$

Ако је $\sigma < 0$ и $a + \sigma + 1 > 0$, онда постоји бесконачно много решења $y(x)$ диференцијалне једначине (2.1), таквих да $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$, тј. постоји бесконачно много решења таквих да њихови графици „теже ка тачки $(0, 0)$". То је резултат рада [8]. На овај начин комплетирана је слика понашања решења једначине Емден-Фаулера облика (2.1) у околини координатног почетка.

Пример 2.2. За $a = -1$ и $\sigma = 0$ решења $y(x) = x \ln x + C(x - x_0)$ једначине $y'' = x^a y^\sigma$ су неопадајућа на интервалу $(x_0, +\infty)$ за свако $x_0 \geqslant 0$, $C \geqslant 0$. Специјално за $x_0 = 0$ и свако $C \geqslant 0$, добија се да је $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$.

Пример илуструје да се резултати Леме 2.1 и Теореме 2.1 не могу проширити за свако $\sigma \leqslant 0$ и $a + \sigma \leqslant -1$.

2.1.2 Понашање решења дуж позитивног дела y–осе

У ситуацијама када су решења диференцијалне једначине (2.1) дефинисана у околини нуле, природно се намеће питање понашања решења када $x \to 0+$. Стога је од значаја да прво испитамо под којим условима права $x = 0$ није вертикална асимптота позитивних решења диференцијалне једначине (2.1).

Теорема 2.2. Ако je $\sigma < 0$, $a > -2$ и ако je $y(x)$ позитивно решење диференцијалне једначине (2.1) дефинисано на интервалу $(0, x_0]$, за неко $x_0 > 0$ такво да je $y'(x_0) \leqslant 0$, онда je

$$\lim_{x \to 0+} y(x) < +\infty \, .$$

Доказ. Како je $y'(x)$ растућа функција и како je $y'(x_0) \leqslant 0$, закључује се да je $y'(x) < 0$ за $x \in (0, x_0)$ и $y(x) \geqslant y(x_0)$ за $x \in (0, x_0]$. Добијени резултати, заједно са једначином (2.1) имплицирају неједнакост

$$y''(x) = x^a \big(y(x)\big)^\sigma \leqslant x^a \big(y(x_0)\big)^\sigma \, . \tag{2.2}$$

Посматрајмо прво случај када je $a \neq -1$. Из неједнакости (2.2), након интеграције добија се

$$y'(x_0) - y'(x) = \int_x^{x_0} y''(t)\, dt \leqslant \int_x^{x_0} t^a \big(y(x_0)\big)^\sigma dt = \frac{\big(y(x_0)\big)^\sigma}{a+1} \cdot \left(x_0^{a+1} - x^{a+1}\right) \, ,$$

за $x \in (0, x_0]$, тј. након још једне интеграције добија се

$$-y(x_0) + y(x) \leqslant \frac{\big(y(x_0)\big)^\sigma}{a+1} \left(x_0^{a+1}(x_0 - x) + \frac{x_0^{a+2} - x^{a+2}}{a+2} \right) - y'(x_0)(x_0 - x) \, .$$

Стога, важи

$$y(x) \leqslant \frac{\big(y(x_0)\big)^\sigma}{a+1} \left(x_0^{a+1}(x_0 - x) + \frac{x_0^{a+2} - x^{a+2}}{a+2} \right) - y'(x_0)(x_0 - x) + y(x_0) \, .$$

За $a \in (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$ закључујемо да je $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) < +\infty$.

Посматрајмо сада случај када je $a = -1$. Слично, интеграцијом обе стране неједнакости (2.2) добија се

$$y'(x_0) - y'(x) \leqslant \big(y(x_0)\big)^\sigma \cdot (\ln x_0 - \ln x) \, , \quad x \in (0, x_0] \, ,$$

тј. након још једне интеграције добија се

$$y(x) \leqslant \big(y(x_0)\big)^\sigma \cdot (x_0 - x) \cdot (\ln x_0 - \ln \bar{x}) - y'(x_0)(x_0 - x) + y(x_0) \, ,$$

за неко $\bar{x} \in (x, x_0)$. Стога, закључујемо да и у случају када je $a = -1$, следи да je $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) < +\infty$. $\square$

У раду [7] показано је да ако је $a \leqslant -2$, резултати претходне теореме не важе, тачније, онда сва позитивна решења једначине (2.1), која су дефинисана у околини нуле, имају вертикалну асимптоту $x = 0$. Такође, у том раду добијено је асимптотско понашање решења у околини нуле за свако позитивно решење једначине (2.1) када је $a \leqslant -2$ и $\sigma < 0$.

Посматрајмо сада Кошијев проблем

$$y'' - x^a y^\sigma = 0,\ y(0) = c,\ y'(0) = \lambda\,, \tag{2.3}$$

где је $\sigma < 0$, $a, \lambda \in \mathbb{R}$ и $c > 0$. Прво морамо прецизирати значење Кошијевог проблема у оваквој ситуацији. Једначина Емден-Фаулера дефинисана је у општем случају када је $x > 0$, али, на пример, под претпоставкама Леме 2.1 и Теореме 2.2 следи да $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = c$ постоји у скупу $[0, \infty)$, па ћемо то скраћено писати као $y(0) = c$. Слично, како је $y''(x) > 0$ за $x > 0$, следи да $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = \lambda$ постоји у $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Прво ћемо посматрати случај када $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.3. Ако је $\sigma < 0$ и $a > -1$, онда Кошијев проблем (2.3) има јединствено решење дефинисано на неком интервалу $(0, h]$, $h < 1$ (решење је дефинисано на $(0, h]$ и оно се може непрекидно диференцијабилно продужити у 0, тако да је $y(0) = c > 0,\ y'(0) = \lambda$), за довољно мало h.

Доказ. Посматрајмо прво случај када је $\lambda > 0$. Кошијев проблем (2.3) еквивалентан је интегралној једначини

$$y(x) = \lambda x + c + \int_0^x (x - t)t^a \big(y(t)\big)^\sigma\, dt\,, \tag{2.4}$$

и зато ћемо уместо Кошијевог проблема (2.3) посматрати интегралну једначину (2.4). Дефинишимо низ функција на следећи начин:

$$y_0(x) = \lambda x + c,\ \ y_{n+1}(x) = \lambda x + c + \int_0^x (x - t)t^a y_n^\sigma(t)\, dt\,. \tag{2.5}$$

Покажимо да за све функције $y_n(x)$ важе неједнакости

$$c + \lambda x \leqslant y_n(x) \leqslant c + 2\lambda x,\ \ x \in [0, h],\ \ n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2.6}$$

за неко h које не зависи од n. Докажимо ову претпоставку индукцијом. Ако је $n = 0$, онда је $c+\lambda x = y_0(x) \leqslant 2\lambda x+c$, за $x \in [0, h]$. Нека неједнакости

(2.6) важе, тада је

$$(c+\lambda x)^\sigma \geqslant y_n^\sigma(x) \geqslant (2\lambda x + c)^\sigma\,,$$

за $x \in [0,h]$. Онда је

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &\leqslant \lambda x + c + \int_0^x (x-t)t^a(c+\lambda t)^\sigma\,dt \\ &\leqslant \lambda x + c + x\int_0^h t^a(c+\lambda t)^\sigma\,dt \leqslant 2\lambda x + c\,, \end{aligned}$$

за довољно мало h. Како је

$$\lambda x + c \leqslant \lambda x + c + \int_0^x (x-t)t^a y_n^\sigma(t)\,dt = y_{n+1}(x)\,,$$

закључујемо да неједнакости (2.6) важе.

Покажимо сада равномерну конвергенцију низа $y_n(x)$ на сегменту $[0,h]$. Посматрајмо функционални ред $y_0(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(y_n(x)-y_{n-1}(x)\big)$. Низ парцијалних сума тог реда је $S_n(x) = y_0(x) + (y_1(x)-y_0(x)) + \ldots + (y_n(x)-y_{n-1}(x)) = y_n(x)$. Равномерна конвергенција функционалног низа $y_n(x)$ еквивалентна је равномерној конвергенцији посматраног функционалног реда.

Докажимо да је

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant x^n\lambda^n,\ \ x\in[0,h],\ \ n\in\mathbb{N}\,, \tag{2.7}$$

за неко h које не зависи од n. Ову претпоставку доказаћемо индукцијом. За $n=1$, добија се

$$|y_1(x)-y_0(x)| \leqslant x\int_0^x t^a(\lambda t + c)^\sigma\,dt \leqslant x\int_0^h t^a(\lambda t + c)^\sigma\,dt \leqslant \lambda x\,,$$

за довољно мало h. Нека неједнакост (2.7) важи, тада је

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x)-y_n(x)| &\leqslant x\int_0^x t^a\cdot|y_n^\sigma(t)-y_{n-1}^\sigma(t)|\,dt \\ &= x\cdot|\sigma|\int_0^x t^a\cdot|y_n(t)-y_{n-1}(t)|\cdot\xi^{\sigma-1}(t)\,dt, \end{aligned}$$

где је $\min\{y_{n-1}(x),y_n(x)\} \leqslant \xi(x) \leqslant \max\{y_{n-1}(x),y_n(x)\}$, за $x\in[0,h]$, па је

$c+\lambda x \leqslant \xi(x) \leqslant c+2\lambda x$, за $x \in [0,h]$, следи да је

$$(c+\lambda x)^{\sigma-1} \geqslant \xi^{\sigma-1}(x) \geqslant (2\lambda x + c)^{\sigma-1}\,.$$

Стога, за $x \in [0,h]$ добија се

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x)-y_n(x)| &\leqslant x\cdot|\sigma|\int_0^x t^a(c+\lambda t)^{\sigma-1}x^n\lambda^n\,dt \\ &\leqslant x^{n+1}\lambda^n\cdot|\sigma|\int_0^h t^a(c+\lambda t)^{\sigma-1}\,dt\,, \\ &\leqslant x^{n+1}\lambda^{n+1}\,, \end{aligned}$$

за довољно мало h. Закључујемо да је

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant x^n\lambda^n \leqslant (\lambda h)^n,\ \ x\in[0,h],\ \ n\in\mathbb{N}\,.$$

Дакле, за довољно мало h, општи члан посматраног функционалног реда може се мајорирати општим чланом бројног конвергентног реда, па применом Вајерштрасовог критеријума закључујемо да посматрани функционални ред равномерно конвергира на сегменту $[0,h]$, тј. низ $y_n(x)$ равномерно конвергира ка некој функцији $y(x)$ на сегменту $[0,h]$.

Нека је $y(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} y_n(x),\ \ x\in[0,h]$. Тада је $y(0)=c$. Како је

$$|y_n^\sigma(x)-y^\sigma(x)| \leqslant \xi^{\sigma-1}(x)\cdot|\sigma|\cdot|y_n(x)-y(x)|\,,$$

где је $c+\lambda x \leqslant \xi(x) \leqslant c+2\lambda x$ за $x\in[0,h]$, низ $y_n^\sigma(x)$ равномерно конвергира ка функцији $y^\sigma(x)$ на сегменту $[0,h]$. Зато важи

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x (x-t)t^a y_n^\sigma(t)\,dt = \int_0^x \lim_{n\to+\infty}((x-t)t^a y_n^\sigma(t))\,dt = \int_0^x (x-t)t^a y^\sigma(t)\,dt\,.$$

Стога, можемо закључити да низ $y_n(x)$ равномерно конвергира ка функцији $y(x)$ која је решење једначине (2.4). Одатле следи да је $y'(0)=\lambda$. Стога, $y(x)$ јесте решење Кошијевог проблема (2.3).

Покажимо сада јединственост. Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решења Кошијевог проблема (2.3). Тада је

$$|y_1(x)-y_2(x)| \leqslant x\cdot|\sigma|\int_0^x t^a\cdot|y_1(t)-y_2(t)|\cdot\xi^{\sigma-1}(t)\,dt\,,$$

где је $\min\{y_1(x), y_2(x)\} \leqslant \xi(x) \leqslant \max\{y_1(x), y_2(x)\}$ за $x \in [0,h]$, па како важи

$$y_1(x) \geqslant \lambda x + c, \;\; y_2(x) \geqslant \lambda x + c, \;\; x \in [0,h]\,,$$

и како је $y_1''(x) > 0$ и $y_2''(x) > 0$, за $x \in [0,h]$, можемо закључити да је

$$y_1^{\sigma-1}(x) \leqslant (\lambda x + c)^{\sigma-1}, \;\; y_2^{\sigma-1}(x) \leqslant (\lambda x + c)^{\sigma-1}, \;\; x \in [0,h]\,,$$

тј.

$$\xi^{\sigma-1}(x) \leqslant (\lambda x + c)^{\sigma-1}, \;\; x \in [0,h]\,.$$

Коначно, добија се

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant x \cdot \max_{x\in[0,h]} |y_1(x) - y_2(x)| \cdot |\sigma| \int_0^h t^a (\lambda t + c)^{\sigma-1}\, dt\,,$$

тј.

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant \frac{1}{2} \max_{x\in[0,h]} |y_1(x) - y_2(x)|, \;\; x \in [0,h]\,,$$

за довољно мало h. Закључујемо да је $y_1 \equiv y_2$.

Посматрајмо сада случај када је $\lambda \leqslant 0$. Уместо Кошијевог проблема (2.3) посматраћемо интегралну једначину (2.4), где је $x \in [0,h]$, за довољно мало h $(h\lambda + c > 0)$. Низ функција $y_n(x)$ дефинисан је као (2.5). Покажимо да за све функције $y_n(x)$ важе неједнакости

$$c + \lambda x \leqslant y_n(x) \leqslant c + x, \;\; x \in [0,h], \;\; n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2.8}$$

за неко h које не зависи од n. Докажимо претпоставку индукцијом. Ако је $n = 0$, онда је $c + \lambda x = y_0(x) \leqslant x + c$, за $x \in [0,h]$. Нека неједнакости (2.8) важе, тада је

$$(c + \lambda x)^\sigma \geqslant y_n^\sigma(x) \geqslant (x + c)^\sigma\,,$$

за $x \in [0,h]$. Следи да је

$$y_{n+1}(x) \leqslant c + \int_0^x (x - t) t^a (c + \lambda t)^\sigma\, dt \leqslant c + x \int_0^h t^a (c + \lambda t)^\sigma\, dt \leqslant x + c\,,$$

за довољно мало h. Како је

$$\lambda x + c \leqslant \lambda x + c + \int_0^x (x - t) t^a y_n^\sigma(t)\, dt = y_{n+1}(x)\,,$$

закључујемо да (2.8) важи.

Показаћемо равномерну конвергенцију низа $y_n(x)$ на сегменту $[0,h]$. За доказ равномерне конвергенције низа $y_n(x)$ на сегменту $[0,h]$ довољно је да докажемо равномерну конвергенцију функционалног реда $y_0(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\big(y_n(x)-y_{n-1}(x)\big)$ на сегменту $[0,h]$.

Покажимо да је

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)| \leqslant x^n,\ \ x\in[0,h],\ \ n\in\mathbb{N}\,, \tag{2.9}$$

за неко h које не зависи од n. Доказаћемо претпоставку индукцијом. За $n=1$, важи да је

$$|y_1(x)-y_0(x)| \leqslant x\int_0^x t^a(\lambda t+c)^\sigma\,dt \leqslant x\int_0^h t^a(\lambda t+c)^\sigma\,dt \leqslant x\,,$$

за неко довољно мало h. Нека неједнакост (2.9) важи, тада је

$$\begin{aligned}
|y_{n+1}(x)-y_n(x)| &\leqslant x\int_0^x t^a\cdot|y_n^\sigma(t)-y_{n-1}^\sigma(t)|\,dt\\
&= x\cdot|\sigma|\int_0^x t^a\cdot|y_n(t)-y_{n-1}(t)|\cdot\xi^{\sigma-1}(t)\,dt\,,
\end{aligned}$$

где је $\min\{y_n(x),y_{n-1}(x)\}\leqslant\xi(x)\leqslant\max\{y_n(x),y_{n-1}(x)\}$, за $x\in[0,h]$, па важи

$$(c+\lambda x)^{\sigma-1}\geqslant\xi^{\sigma-1}(x)\geqslant(x+c)^{\sigma-1}\,.$$

Стога је

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant x\cdot|\sigma|\int_0^x t^a(c+\lambda t)^{\sigma-1}x^n\,dt\leqslant x^{n+1}\cdot|\sigma|\int_0^h t^a(c+\lambda t)^{\sigma-1}\,dt\,,$$

тј.

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant x^{n+1}\,,$$

за довољно мало h. Закључујемо да је

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leqslant x^n\leqslant h^n,\ \ x\in[0,h],\ \ n\in\mathbb{N}\,.$$

За довољно мало h, из горњих редова следи равномерна конвергенција низа $y_n(x)$ ка некој функцији $y(x)$ на сегменту $[0,h]$.

На исти начин као у случају када је $\lambda>0$, може се показати да низ

$y_n^\sigma(x)$ равномерно конвергира ка функцији $y^\sigma(x)$ на сегменту $[0,h]$. Стога је

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x (x-t)t^a y_n^\sigma(t)\,dt = \int_0^x \lim_{n\to+\infty}((x-t)t^a y_n^\sigma(t))\,dt = \int_0^x (x-t)t^a y^\sigma(t)\,dt\,.$$

Следи да низ $y_n(x)$ равномерно конвергира ка функцији која је решење једначине (2.4). Доказ јединствености решења у овом случају аналоган је доказу у случају када је $\lambda > 0$. Закључујемо да је $y_1 \equiv y_2$. $\square$

У Теореми 2.2, показано је да ако је $\sigma < 0$ и $a > -2$, онда за сва позитивна решења једначине (2.1) која су дефинисана на интервалу $(0, x_0]$, за неко $x_0 > 0$, важи да њихов график „тежи ка некој коначној тачки на y–оси", када $x \to 0+$. У Теореми и Последици 1 у раду [7], показано је да ако је $\sigma < 0$ и $a \leqslant -2$, онда је права $x = 0$ вертикална асимптота за сва позитивна решења једначине (2.1) која су дефинисана у околини нуле. У Теореми 2.3, показано је да ако је $\sigma < 0$, $a > -1$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, онда Кошијев проблем (2.3) има јединствено решење. Природно се намећу два питања:
1. Који се закључци могу извести у случају када је $\sigma < 0$ и $-2 < a \leqslant -1$?
2. Може ли решење једначине (2.1), у случају када је $\sigma < 0$ и $a > -1$, тежити ка коначној тачки са позитивног дела y–осе када $x \to 0+$, са „нагибом $\lambda = -\infty$"?

Прецизирајмо израз из претходног питања. За решење $y(x)$ кажемо да има „нагиб $\lambda = -\infty$" када $x \to 0+$, ако је $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = -\infty$, тј. ако је y–оса тангента на интегралну криву решења.

Следећа лема, теорема и пример дају одговор на прво питање.

Лема 2.2. Ако је $\sigma < 0$, $-2 < a \leqslant -1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $c > 0$, онда Кошијев проблем (2.3) нема решења.

Доказ. Претпоставимо да постоји решење $y(x)$ и претпоставимо да је оно дефинисано на интервалу $(0,h]$, за неко $h > 0$. Интеграцијом обе стране једнакости (2.1), добија се

$$y'(h) - \lambda = \int_0^h x^a y^\sigma(x)\,dx\,.$$

Како $y \to c$, $c > 0$, када $x \to 0+$, онда $x^a y^\sigma \sim Cx^a$, где је $C > 0$, када $x \to 0+$ (где $f \sim g$ када $x \to a$ значи $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$). Стога, закључујемо да је десна страна једнакости бесконачна, а лева страна коначна, што доводи до контрадикције. $\square$

Теорема 2.4. Ако је $\sigma < 0$ и $-2 < a \leqslant -1$, онда за свако позитивно решење диференцијалне једначине (2.1) које је дефинисано на интервалу $(0, x_0]$, за неко $x_0 > 0$, такво да је $y'(x_0) \leqslant 0$, следи да

$$\lim_{x \to 0+} y'(x) = -\infty \,.$$

Доказ. Позитивна решења једначине (2.1) која су дефинисана у околини нуле теже ка коначној тачки са позитивног дела y–осе када $x \to 0+$ (јер на основу Теореме 2.1, знамо да ако је $\sigma < 0$ и $a + \sigma + 1 \leqslant 0$, онда $y \nrightarrow 0$ када $x \to 0+$), под неким нагибом λ, где је $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Претпоставимо да је $\lambda \neq -\infty$. Како је $y'(x)$ растућа функција за $x \in (0, x_0]$ следи да лимес $\lim\limits_{x \to 0+} y'(x)$ постоји. Интеграцијом обе стране једнакости (2.1) добија се да је

$$y'(h) - \lambda = \int_0^h x^a y^\sigma(x) \, dx \,.$$

Како $y \to c, c > 0$, када $x \to 0+$, онда $x^a y^\sigma \sim C x^a$, где је $C > 0$, када $x \to 0+$. Стога, лева страна једнакости је коначна, а десна страна је бесконачна, што доводи до контрадикције. □

Из Леме 2.2 и Теореме 2.4, закључујемо да сва позитивна решења диференцијалне једначине (2.1) која су дефинисана на интервалу $(0, x_0]$, за неко $x_0 > 0$, када је $\sigma < 0$ и $a \in (-2, -1]$, имају „нагиб $\lambda = -\infty$” када $x \to 0+$, тј. y–оса је тангента интегралних кривих решења посматране једначине. Природно се намеће питање јединствености решења Кошијевог проблема

$$y'' - x^a y^\sigma = 0, \;\; y(0) = c, \;\; y'(0) = -\infty \,, \tag{2.10}$$

где је $\sigma < 0$, $-2 < a \leqslant -1$ и $c > 0$. Следећи пример показује да Кошијев проблем (2.10) нема увек јединствено решење.

Пример 2.3. Нека је

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c^3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t(t-1)} + \ln\big(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}\big) + d} \,, \\ y(t) &= \frac{c \cdot t}{\sqrt{t(t-1)} + \ln\big(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}\big) + d} \,, \end{aligned}$$

где су c и d произвољне позитивне константе. Приметимо да су $x(t)$ и $y(t)$ добро дефинисане функције на интервалу $(1, \infty)$ и $x(t)$ је инјективна функција на интервалу $(1, \infty)$. Стога, можемо посматрати $x(t)$ и $y(t)$ као параметарску репрезентацију функције $y(x)$. Једноставним рачуном добија се

$$\begin{aligned}
x'(t) &= -\frac{c^3}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^2} \cdot \sqrt{\frac{t}{t-1}}\,, \\
y'(t) &= c \cdot \frac{\ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d - \sqrt{\frac{t}{t-1}}}{(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^2}\,, \\
x''(t) &= \frac{c^3}{4} \cdot \frac{1 + 4t + \frac{1}{\sqrt{t(t-1)}} \cdot (\ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)}{(t-1)(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^3}\,, \\
y''(t) &= \frac{c}{2} \cdot \frac{5t + (5-4t)\sqrt{\frac{t}{t-1}} \cdot (\ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)}{(t-1)(\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^3}\,.
\end{aligned}$$

Како је

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}(t) &= \frac{1}{(x'(t))^3}\,(y''(t) \cdot x'(t) - x''(t) \cdot y'(t)) \\
&= \frac{2}{c^5} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot (\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^3
\end{aligned}$$

и

$$(x(t))^{-1} \cdot (y(t))^{-2} = \frac{2}{c^5} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot (\sqrt{t(t-1)} + \ln(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}) + d)^3\,,$$

закључујемо да је са $x(t)$ и $y(t)$ задата параметарска репрезентација функције $y(x)$, која је решење једначине $y'' = \frac{1}{xy^2}$. Приметимо да

$$x(t) \to 0,\ y(t) \to c\,,$$

$$\frac{dy}{dx}(t) = \frac{2}{c^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{t}} \cdot \left(\ln\big(\sqrt{t} + \sqrt{t-1}\big) + d - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{t}}}\right) \to -\infty\,,$$

када $t \to \infty$, за произвољно $d \in (0, \infty)$. Следи да Кошијев проблем (2.10) нема јединствено решење када је $\sigma = -2$ и $a = -1$, тј. овај Кошијев проблем има бесконачно много решења.

Следећа лема даје одговор на друго питање са стране 15.

Лема 2.3. Ако је $\sigma < 0$, $a > -1$ и $c > 0$, онда Кошијев проблем (2.10) нема решења.

Доказ. Претпоставимо да постоји решење $y(x)$ Кошијевог проблема (2.10) и претпоставимо да је оно дефинисано на интервалу $(0,h]$, за неко $h>0$. Интеграцијом обе стране једнакости (2.1) добија се

$$y'(h)-y'(\delta)=\int_{\delta}^{h} y''(x)\,dx=\int_{\delta}^{h} x^a y^{\sigma}(x)\,dx\,,\ \delta>0\,.$$

Како $y\to c$, када $x\to 0+$, онда $x^a y^{\sigma}\sim Cx^a$, где $C>0$, када $x\to 0+$. Стога, како десна страна једнакости тежи ка коначној вредности, а лева страна ка бесконачности, када $\delta\to 0+$, долазимо до контрадикције. □

2.1.3 Понашање решења дуж позитивног дела x–осе

Посматрајмо Кошијев проблем

$$y''-x^a y^{\sigma}=0,\ \ y(x_0)=0,\ \ y'(x_0)=\lambda\,,x_0>0\,, \tag{2.11}$$

где је $\sigma<0$ и $a,\lambda\in\mathbb{R}$. Значење овако формулисаног Кошијевог проблема може се објаснити слично као у Одељку 2.1.2 и из тог разлога нећемо поново објашњавати.

У Леми 2.1, показано је да ако је $\sigma\leqslant -1$ и ако постоји позитивно монотоно решење диференцијалне једначине (2.1), онда је оно дефинисано на неком интервалу I таквом да је $(0,x_0]\subset I$, за неко $x_0>0$. Примером 2.1 показано је да за $a=-\frac{\sigma+3}{2}$ и $\sigma\in(-1,0)$ постоји решење једначине (2.1) такво да график тог решења „тежи ка некој тачки са x–осе". Природно се намеће питање: Да ли за свако $a\in\mathbb{R}$ и $\sigma\in(-1,0)$ таква решења постоје?

Теорема 2.5. Нека је $\sigma\in(-1,0)$ и $a,\lambda\in\mathbb{R}$. Тада, постоји решење Кошијевог проблема (2.11) које је дефинисано на $(x_0,x_0+h]$, за неко $h>0$ и $\lambda\geqslant 0$, односно на $[x_0-h,x_0)$ за неко $h>0$ и $\lambda\leqslant 0$.

Доказ. Приказаћемо доказ у случају када је $\lambda\geqslant 0$ (случај када је $\lambda<0$ добијамо када посматрамо функцију $y(2x_0-x)$). Посматрајмо фамилију решења $y_{\mu}(x)$ на сегменту $[x_0,x_0+h]$ такву да је

$$y_{\mu}(x_0)=\mu>0,\quad y'_{\mu}(x_0)=\lambda\,.$$

Како је $y''_{\mu}(x)=x^a y^{\sigma}_{\mu}(x)$, следи да је $y''_{\mu}(x)>0$ и $y'_{\mu}(x)\geqslant 0$ на сегменту $[x_0,x_0+h]$. Пресликавање $x\to x^a$ је непрекидно и позитивно на сегменту

$[x_0, x_0+h]$, стога, постоје константе m и M такве да је $0 < m \leqslant x^a \leqslant M$ за свако $x \in [x_0, x_0+h]$.

Нека је $0 < \alpha \leqslant h$. За $x \in (x_0, x_0+\alpha]$, важи да је

$$y''_\mu(x) = x^a y^\sigma_\mu(x) \geqslant m \cdot y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)\,.$$

Следи да је

$$\begin{aligned} y'_\mu(x) - \lambda &= y'_\mu(x) - y'_\mu(x_0) = \int_{x_0}^{x} y''_\mu(t)\,dt \\ &\geqslant m \cdot y^\sigma_\mu(x_0+\alpha) \int_{x_0}^{x} dt = m \cdot y^\sigma_\mu(x_0+\alpha) \cdot (x - x_0)\,, \end{aligned}$$

за свако $x \in [x_0, x_0+\alpha]$. Слично, следи да је

$$\begin{aligned} y_\mu(x) - \mu &= y_\mu(x) - y_\mu(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'_\mu(t)\,dt \\ &\geqslant \lambda(x - x_0) + \frac{m \cdot y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)}{2} \cdot (x - x_0)^2\,, \end{aligned}$$

за свако $x \in [x_0, x_0+\alpha]$.

Стога је $y_\mu(x_0+\alpha) \geqslant \mu + \lambda\alpha + \frac{m \cdot y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)}{2} \cdot \alpha^2 \geqslant \frac{m \cdot y^\sigma_\mu(x_0+\alpha)}{2} \cdot \alpha^2$, тј.

$$y_\mu(x_0+\alpha) \geqslant \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot \alpha^{\frac{2}{1-\sigma}}$$

и како је α $(0 < \alpha \leqslant h)$ произвољно, важи да је

$$y_\mu(x) \geqslant \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot (x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}} \tag{2.12}$$

за свако $x \in [x_0, x_0+h]$. Из претходних редова следи да је

$$y''_\mu(x) = x^a y^\sigma_\mu(x) \leqslant M \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \cdot (x - x_0)^{\frac{2\sigma}{1-\sigma}} = c_1 \cdot (x - x_0)^{\frac{2\sigma}{1-\sigma}}\,,$$

за свако $x \in (x_0, x_0+h]$ (где је c_1 константа која не зависи од μ). Након две интеграције, добија се

$$\begin{aligned} y'_\mu(x) - \lambda &= \int_{x_0}^{x} y''_\mu(t)\,dt \leqslant c_1 \cdot \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{\frac{2\sigma}{1-\sigma}}\,dt \\ &= c_1 \cdot \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \cdot (x - x_0)^{\frac{1+\sigma}{1-\sigma}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} y_\mu(x) - \mu - \lambda(x - x_0) &= \int_{x_0}^{x} y'_\mu(t)\,dt \leqslant c_1 \cdot \frac{(1-\sigma)^2}{2(1+\sigma)} \cdot (x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}} \\ &= c_2 \cdot (x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

за свако $x \in [x_0, x_0 + h]$ (где је c_2 константа која не зависи од μ). Из неједнакости (2.14) следи да је фамилија $y_\mu(x)$ равномерно ограничена на сегменту $[x_0, x_0 + h]$, а из неједнакости (2.13) следи да је та фамилија еквинепрекидна (скуп $\Phi \subset C[a, b]$ је еквинепрекидан ако за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ тако да је $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ за свако $f \in \Phi$ и свако $x_1, x_2 \in [a, b]$ за које важи $|x_1 - x_2| < \delta$). Из теореме Арзела[6]–Асколија[7] следи да постоји низ $\mu' \to 0$ такав да $y_{\mu'}(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[x_0, x_0 + h]$ ка некој функцији $y(x)$.

На основу претходног следи да $y_{\mu'}(x)$ конвергира равномерно ка $y(x)$ на сегменту $[x_0 + \alpha, x_0 + h]$ за свако $\alpha \in (0, h)$. Из неједнакости (2.12) (ограниченост одоздо) следи да $y^\sigma_{\mu'}(x)$ конвергира равномерно ка $y^\sigma(x)$ на сегменту $[x_0+\alpha, x_0+h]$. Како је $y''_{\mu'}(x) = x^a y^\sigma_{\mu'}(x)$, следи да је $y''(x) = x^a y^\sigma(x)$ на $[x_0 + \alpha, x_0 + h]$ (и како је α произвољно, ово је задовољено такође и на интервалу $(x_0, x_0 + h]$). Очигледно је да важи $y(x_0) = 0$ и $y'(x_0) = \lambda$. $\square$

Теорема 2.5 обезбеђује егзистенцију решења проблема (2.11). Намеће се питање јединствености решења овог проблема. У случају када је $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$), одговор је добијен на стандардан начин. То је приказано у теореми која следи.

Теорема 2.6. Ако је $-1 < \sigma < 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}^+$, онда Кошијев проблем (2.11) има јединствено решење дефинисано на неком интервалу $(x_0, x_0+h]$, $h > 0$.

Доказ. Кошијев проблем (2.11) еквивалентан је интегралној једначини

$$y(x) = \lambda(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x - t)t^a y^\sigma(t)\,dt\,.$$

Зато ћемо уместо Кошијевог проблема (2.11) посматрати ову интегралну једначину. Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решења Кошијевог проблема (2.11). Тада је

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x - x_0) \int_{x_0}^{x} t^a \cdot |y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\,dt\,. \tag{2.15}$$

Како је $y'(x)$ растућа функција, користећи почетне услове добија се да

[6]Cesare Arzelà (1847–1912), италијански математичар

[7]Giulio Ascoli (1843-1896), италијански математичар

важи $\lambda \leqslant y'(x) \leqslant 2\lambda$ на сегменту $[x_0, x_0+h]$, за неко мало $h > 0$. Следи

$$\lambda(x-x_0) \leqslant y_1(x) \leqslant 2\lambda(x-x_0) \text{ и } \lambda(x-x_0) \leqslant y_2(x) \leqslant 2\lambda(x-x_0) \tag{2.16}$$

на сегменту $[x_0, x_0+h]$. Користећи теорему Лагранжа и неједнакост (2.15), добија се

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x-x_0) \cdot |\sigma| \int_{x_0}^{x} t^a \cdot \xi^{\sigma-1}(t) \cdot |y_1(t) - y_2(t)| \, dt \,,$$

за $x \in (x_0, x_0+h]$, где је $\xi(x) \geqslant \lambda(x-x_0)$, за $x \in [x_0, x_0+h]$. Одатле следи

$$\xi^{\sigma-1}(x) \leqslant \lambda^{\sigma-1}(x-x_0)^{\sigma-1} \,,$$

за $x \in (x_0, x_0+h]$. Из неједнакости (2.16) следи да за $x \in (x_0, x_0+h]$ важи

$$\frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x-x_0} \leqslant \frac{y_1(x) + y_2(x)}{x-x_0} \leqslant 4\lambda < +\infty,$$

стога, закључујемо да је $\sup\limits_{x\in(x_0,\, x_0+h]} \frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x-x_0} < +\infty$. Коначно, добија се

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x-x_0) \cdot |\sigma| \cdot \lambda^{\sigma-1} \cdot \sup_{x\in(x_0,\, x_0+h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x-x_0} \int_{x_0}^{x} t^a (t-x_0)^{\sigma} \, dt \,,$$

тј. важи неједнакост

$$\frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x-x_0} \leqslant |\sigma| \cdot \lambda^{\sigma-1} \cdot \sup_{x\in(x_0,\, x_0+h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x-x_0} \int_{x_0}^{x_0+h} t^a (t-x_0)^{\sigma} \, dt$$

за $x \in (x_0, x_0+h]$. Како је интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_0+h} t^a (t-x_0)^{\sigma} \, dt$ коначан, за довољно мало h, добијамо да је

$$\sup_{x\in(x_0,\, x_0+h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x-x_0} < \sup_{x\in(x_0,\, x_0+h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x-x_0} \,.$$

Закључујемо да је $y_1 \equiv y_2$. □

Теорема 2.6 може се применити и у случају када је $\lambda < 0$ и тада ће јединствено решење бити дефинисано на неком интервалу $[x_0-h, x_0), h > 0$. Доказ у том случају је аналоган претходном доказу и из тог разлога он ће бити изостављен.

У случају када је $\lambda = 0$, претходна техника се не може применити. Следећа теорема даје одговор на питање јединствености решења Кошијевог проблема (2.11) у овом случају.

Теорема 2.7. Ако је $-1 < \sigma < 0$ и $\lambda = 0$, онда Кошијев проблем (2.11) има јединствено решење дефинисано на неком интервалу $(x_0, x_0+h]$, $h > 0$.

Доказ. Посматрајмо прво случај када је $a > 0$. Претпоставимо да је $y(x)$ решење Кошијевог проблема (2.11) дефинисано на интервалу $(x_0, x_0 + h]$, $h > 0$, за неко мало h. Из једначине (2.1) следи да је

$$y''(x) = x^a y^\sigma(x) \geqslant x_0^a \cdot y^\sigma(x) \tag{2.17}$$

за $x \in (x_0, x_0 + h]$. Како је $y'(x)$ растућа функција за $x \in [x_0, x_0 + h]$ и како је $y'(x_0) = 0$, закључујемо да је $y'(x) > 0$ за $x \in (x_0, x_0 + h]$. Множењем обе стране неједнакости (2.17) са $y'(x)$ и након интеграције, добија се

$$y'^2(x) \geqslant \frac{2x_0^a}{\sigma+1} \cdot y^{\sigma+1}(x)\,,$$

за $x \in [x_0, x_0 + h]$. Како је $y'(x) > 0$ за $x \in (x_0, x_0 + h]$, следи да је

$$y'(x) \geqslant \left(\frac{2x_0^a}{\sigma+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (y(x))^{\frac{\sigma+1}{2}}\,,$$

за $x \in [x_0, x_0 + h]$. Након дељења обе стране неједнакости са $(y(x))^{\frac{\sigma+1}{2}}$ и након још једне интеграције, добија се

$$(y(x))^{\frac{1-\sigma}{2}} \geqslant \frac{1-\sigma}{2} \cdot \left(\frac{2x_0^a}{\sigma+1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (x - x_0)\,,$$

тј.

$$y(x) \geqslant \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{\frac{2}{1-\sigma}} \cdot \left(\frac{2x_0^a}{\sigma+1}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot (x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}} \tag{2.18}$$

за $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Уместо Кошијевог проблема (2.11) посматрајмо интегралну једначину

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} (x - t) t^a y^\sigma(t)\, dt\,.$$

За $\lambda = 0$, Кошијев проблем (2.11) јесте еквивалентан горњој интегралној једначини. Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решења Кошијевог проблема (2.11).

Тада, за $x \in (x_0, x_0+h]$, добија се

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_2(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x} (x-t)\cdot t^a \cdot |y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\, dt \\ &\leqslant (x_0+h)^a \int_{x_0}^{x} (x-t)\cdot |y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)|\, dt\,. \end{aligned}$$

Користећи теорему Лагранжа и из неједнакости (2.18), следи да је

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x_0+h)^a \cdot |\sigma| \int_{x_0}^{x} (x-t)\cdot \xi^{\sigma-1}(t)\cdot |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \tag{2.19}$$

за $x \in (x_0, x_0+h]$, где је

$$\xi(x) \geqslant \min\{y_1(x), y_2(x)\} \geqslant \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{\frac{2}{1-\sigma}} \cdot \left(\frac{2x_0^a}{\sigma+1}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot (x-x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}\,,$$

за $x \in [x_0, x_0+h]$. Како је $\sigma \in (-1,0)$, следи да је

$$\xi^{\sigma-1}(x) \leqslant \frac{2(\sigma+1)}{(1-\sigma)^2 \cdot x_0^a} \cdot (x-x_0)^{-2}\,,$$

за $x \in (x_0, x_0+h]$. Из претходног реда и из неједнакости (2.19) добија се да је

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant (x_0+h)^a \cdot |\sigma| \cdot \frac{2(\sigma+1)}{(1-\sigma)^2 \cdot x_0^a} \int_{x_0}^{x} (x-t)(t-x_0)^{-2} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt$$

$$\leqslant \left(1+\frac{h}{x_0}\right)^a \cdot |\sigma| \cdot \frac{2(\sigma+1)}{(1-\sigma)^2} \cdot \sup_{x\in(x_0,x_0+h]} \frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}} \cdot \int_{x_0}^{x} (x-t)(t-x_0)^{-2+\frac{2}{1-\sigma}}\, dt$$

за $x \in (x_0, x_0+h]$. Супремум из претходног реда јесте коначан, јер из неједнакости (2.14) важи да је

$$\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{(x-x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}} \leqslant \frac{y_1(x)+y_2(x)}{(x-x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}} \leqslant 2c_2 < +\infty\,,$$

за $x \in (x_0, x_0+h]$. За $x \in (x_0, x_0+h]$, интеграл $\int_{x_0}^{x} (x-t)(t-x_0)^{-2+\frac{2}{1-\sigma}}\, dt$ конвергира, јер $-2+\frac{2}{1-\sigma} \in (-1,0)$ и једноставним рачуном добија се да је

$$\int_{x_0}^{x} (x-t)(t-x_0)^{-2+\frac{2}{1-\sigma}}\, dt = \frac{(1-\sigma)^2}{2(\sigma+1)}(x-x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}\,.$$

Коначно, за $x \in (x_0, x_0 + h]$ важи да је

$$\frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{(x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}} \leqslant |\sigma| \cdot \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^a \cdot \sup_{x \in (x_0, x_0+h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{(x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}}. \tag{2.20}$$

Како $\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^a \to 1$, када $h \to 0+$, и како $\sigma \in (-1, 0)$, следи да је

$$\sup_{x \in (x_0, x_0+h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0} < \sup_{x \in (x_0, x_0+h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{x - x_0},$$

за довољно мало позитивно h. Закључујемо да је $y_1 \equiv y_2$.

Посматрајмо сада случај када је $a < 0$. Доказ у овом случају аналоган је доказу у случају када је $a \geqslant 0$, тако да ће овде бити приказани само кључни кораци. Неједнакост $y''(x) = x^a y^\sigma(x) \geqslant (x_0 + h)^a \cdot y^\sigma(x)$ аналогна је неједнакости (2.17) за $x \in (x_0, x_0 + h]$. Примењујући исти метод као у случају када је $a \geqslant 0$, добијамо неједнакости које редом одговарају неједнакостима (2.18), (2.19) и (2.20)

$$y(x) \geqslant \left(\frac{1-\sigma}{2}\right)^{\frac{2}{1-\sigma}} \cdot \left(\frac{2(x_0 + h)^a}{\sigma + 1}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \cdot (x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}},$$

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant x_0^a \cdot |\sigma| \int_{x_0}^{x} (x - t) \cdot \xi^{\sigma-1}(t) \cdot |y_1(t) - y_2(t)|\, dt$$

и

$$\frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{(x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}} \leqslant |\sigma| \cdot \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{-a} \cdot \sup_{x \in (x_0, x_0+h]} \frac{|y_1(x) - y_2(x)|}{(x - x_0)^{\frac{2}{1-\sigma}}},$$

за $x \in (x_0, x_0 + h]$. Коначно, закључујемо да је $y_1 \equiv y_2$ и у овом случају. □

Теорема 2.7 може се применити и у случају када је $\lambda = 0$ али када је јединствено решење дефинисано на $[x_0 - h, x_0)$, $h > 0$, за мало h. Доказ у том случају аналоган је претходно приказаном доказу и из тог разлога је изостављен.

2.2 Случај $\sigma \in (0, 1)$

У овом делу дисертације посматрамо једначину (2.1), где $\sigma \in (0, 1)$ и $a \in \mathbb{R}$. Како је $\sigma > 0$, област дефинисаности једначине (2.1) може се проширити, стога не морамо посматрати искључиво позитивна решења. Резултати који су приказани у овом делу базирани су на резултатима рада [10].

2.2.1 Понашање решења у околини координатног почетка

Посматрајмо Кошијев проблем

$$y'' - x^a y^\sigma = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \lambda, \tag{2.21}$$

где је $\sigma \in (0,1)$ и $\lambda \in [0, +\infty)$. Главни резултат јесте да израз $a + \sigma$ директно одлучује о егзистенцији решења тог проблема.

Теорема 2.8. Нека је $0 < \sigma < 1$, $\lambda > 0$ и $a + \sigma + 1 \leqslant 0$, тада Кошијев проблем (2.21) нема позитивних решења.

Доказ. Претпоставимо да постоји решење $y(x)$ Кошијевог проблема (2.21) и да је дефинисано на интервалу $(0, x_1]$, за неко $x_1 > 0$. Онда оно мора бити неопадајуће. Продужењем функције $y(x)$ тако да је $y(0) = 0$, добијамо да је функција $y(x)$ непрекидна на сегменту $[0, x_1]$ и диференцијабилна у интервалу $(0, x_1)$. Како је $y'(x)$ растућа функција, следи да за свако $x \in (0, x_1)$ неједнакост $\lambda \leqslant y'(\xi) = \frac{y(x)-0}{x-0}$ важи за неко $\xi \in (0, x)$. Следи да је $y(x) \geqslant \lambda x$, тј. $y^\sigma(x) \geqslant \lambda^\sigma x^\sigma$ за свако $x \in (0, x_1]$. Интеграцијом обе стране једнакости (2.1) добија се

$$y'(x_1) \geqslant y'(x_1) - y'(x) = \int_x^{x_1} y''(t)\,dt = \int_x^{x_1} t^a y^\sigma(t)\,dt \geqslant \lambda^\sigma \int_x^{x_1} t^{a+\sigma}\,dt\,,$$

за свако $x \in (0, x_1]$, што је немогуће, јер је $a + \sigma \leqslant -1$, па $\displaystyle\int_x^{x_1} t^{a+\sigma} dt \to +\infty$, када $x \to 0+$. $\square$

Напомена 2.1. Ако је $\lambda = 0$, онда Кошијев проблем (2.21) има решење дефинисано у некој околини нуле. На пример, функција $y(x) = 0$ јесте решење које задовољава задате почетне услове.

Теорема 2.9. Ако је $a + \sigma + 1 > 0$ и $\sigma \in (0,1)$, онда за свако $\lambda > 0$ Кошијев проблем (2.21) има јединствено решење дефинисано на неком интервалу $(0, h]$, $h > 0$.

Доказ. Уместо Кошијевог проблема (2.21) посматрајмо интегралну једначину

$$y(x) = \lambda x + \int_0^x (x - t) t^a y^\sigma(t)\,dt\,.$$

Кошијев проблем (2.21) јесте еквивалентан горе наведеној интегралној једначини.

Низ функција дефинишемо на следећи начин:

$$y_0(x) = \lambda x, \;\; y_{n+1}(x) = \lambda x + \int_0^x (x-t)t^a y_n^\sigma(t)dt\,. \tag{2.22}$$

Покажимо да за све функције $y_n(x)$ важе неједнакости

$$\lambda x \leqslant y_n(x) \leqslant 2\lambda x, \;\; x \in [0, h_1], \;\; n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2.23}$$

за h_1 такво да важи $\displaystyle\int_0^{h_1} t^{a+\sigma}\,dt < \frac{\lambda^{1-\sigma}}{2^\sigma}$. Докажимо претпоставку индукцијом. Ако је $n = 0$, онда је $\lambda x \leqslant \lambda x = y_0(x) \leqslant 2\lambda x$, за $x \in [0, h_1]$. Ако неједнакости (2.23) важе, онда је $(\lambda x)^\sigma \leqslant y_n^\sigma(x) \leqslant (2\lambda x)^\sigma$, за $x \in [0, h_1]$. Како је

$$\lambda x \;\;\leqslant\;\; \lambda x + \int_0^x (x-t)t^a y_n^\sigma(t)\,dt = y_{n+1}(x),$$

и

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &\leqslant \lambda x + \int_0^x (x-t)t^a(2\lambda t)^\sigma\,dt \\ &\leqslant \lambda x + 2^\sigma\lambda^\sigma x\int_0^{h_1} t^{a+\sigma}\,dt \\ &\leqslant 2\lambda x\,, \end{aligned}$$

за $x \in [0, h_1]$, закључујемо да (2.23) важи.

Нека је h_2 такво да је $\displaystyle\int_0^{h_2} t^{a+\sigma}\,dt < \frac{\lambda^{1-\sigma}}{2\sigma}$ и нека је $h = \min\{h_1, h_2\}$. Нека је $\displaystyle\delta_n = \sup_{x\in(0,h]} \frac{\big|y_n(x) - y_{n-1}(x)\big|}{x}$. Како $y_n(x) \in [\lambda x, 2\lambda x]$ за $x \in [0, h]$, $n \in \mathbb{N}_0$, следи да је $\displaystyle\frac{\big|y_n(x) - y_{n-1}(x)\big|}{x} \leqslant \lambda$ за $x \in (0, h]$, $n \in \mathbb{N}_0$, стога је δ_n коначно. Из услова $\sigma \in (0,1)$ следи да је $(2\lambda x)^{\sigma-1} \leqslant y_n^{\sigma-1}(x) \leqslant (\lambda x)^{\sigma-1}$, за $x \in (0, h]$. Из теореме Лагранжа следи да је

$$\begin{aligned} \big|y_{n+1}(x) - y_n(x)\big| &\leqslant \sigma\cdot x\int_0^x t^a\cdot\xi^{\sigma-1}(t)\cdot\big|y_n(t) - y_{n-1}(t)\big|\,dt \\ &\leqslant \sigma\cdot x\int_0^h t^a\cdot(\lambda t)^{\sigma-1}\cdot\big|y_n(t) - y_{n-1}(t)\big|\,dt \\ &\leqslant x\cdot\frac{\delta_n}{2}\,, \end{aligned}$$

јер је $(2\lambda x)^{\sigma-1} \leqslant (\xi(x))^{\sigma-1} \leqslant (\lambda x)^{\sigma-1}$, за $x \in (0, h]$. Закључујемо да је

$\delta_{n+1} \leqslant \frac{\delta_n}{2}$, што имплицира равномерну конвергенцију низа $y_n(x)$ ка некој функцији $y(x)$. Како је

$$\int_0^x (x-t)\cdot t^a \cdot y_n^\sigma(t)\,dt \leqslant \int_0^h x^a \cdot y_n^\sigma(x)\,dx \leqslant 2^\sigma \lambda^\sigma \int_0^h x^{a+\sigma}\,dx < \infty\,,$$

на основу Лебегове[8] теореме о доминантној конвергенцији може се проћи лимесом под интеграл у релацији (2.22). Као резултат добијамо да је

$$y(x) = \lambda x + \int_0^x (x-t)t^a y^\sigma(t)dt\,.$$

Одатле следи да $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = \lambda$, $y'' = x^a y^\sigma$ и функција $y(x)$ јесте дефинисана на интервалу $(0,h]$.

Докажимо сада јединственост. Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решења Кошијевог проблема (2.21). Нека је $M = \max\{y_1'(h), y_2'(h)\}$. Како $y_i(x) \in [\lambda x, Mx]$ за $x \in (0,h]$, $i = 1,2$, следи да је $\frac{|y_1(x)-y_2(x)|}{x} < +\infty$, за $x \in (0,h]$. Користећи теорему Лагранжа добијамо неједнакости

$$\begin{aligned}
\big|y_1(x) - y_2(x)\big| &\leqslant x\int_0^x t^a \cdot \big|y_1^\sigma(t) - y_2^\sigma(t)\big|\,dt \\
&\leqslant \sigma \cdot x \int_0^x t^a \cdot \xi^{\sigma-1}(t) \cdot |y_1(t) - y_2(t)|\,dt\,,
\end{aligned}$$

где је $(2\lambda x)^{\sigma-1} \leqslant (\xi(x))^{\sigma-1} \leqslant (\lambda x)^{\sigma-1}$, за $x \in (0,h]$. Стога, за $x \in (0,h]$ важи

$$\begin{aligned}
\frac{\big|y_1(x) - y_2(x)\big|}{x} &\leqslant \sigma \cdot \lambda^{\sigma-1} \int_0^x t^{a+\sigma-1} \cdot \big|y_1(t) - y_2(t)\big|\,dt \\
&\leqslant \sigma \cdot \lambda^{\sigma-1} \sup_{x\in(0,h]} \frac{\big|y_1(x) - y_2(x)\big|}{x} \int_0^h t^{a+\sigma}\,dt\,,
\end{aligned}$$

следи да је

$$\sup_{x\in(0,h]} \frac{\big|y_1(x) - y_2(x)\big|}{x} \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x\in(0,h]} \frac{\big|y_1(x) - y_2(x)\big|}{x}\,.$$

Закључујемо да је $y_1 \equiv y_2$. $\square$

Јединственост решења Кошијевог проблема (2.21) не важи у случају када је $\lambda = 0$ и то је приказано у следећем примеру.

[8]Henri Léon Lebesgue (1875–1941), француски математичар

Пример 2.4. Посматрајмо једначину $y'' = x^a y^\sigma$, где је $a+\sigma+1>0$ и $\sigma \in (0,1)$. Приметимо да функција $y(x) = \omega x^\lambda$, $x \in (0,+\infty)$ јесте решење посматране једначине, где је $\omega = \left(\frac{(a+2)(a+\sigma+1)}{(\sigma-1)^2}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$ и $\lambda = \frac{a+2}{1-\sigma}$. Ово решење задовољава услове $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = 0$. Али и функција $y(x)=0$ такође јесте решење посматране диференцијалне једначине које задовољава исте услове.

2.2.2 Постојање вертикалних асимптота

У претходном делу посматрали смо асимптотско понашање решења диференцијалне једначине (2.1) у близини тачке $(0,0)$. Ако Кошијев проблем (2.21) нема решења, а одговарајућа решења једначине (2.1) су дефинисана у некој околини нуле, како су она монотона у некој околини нуле, постоји $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)$ у скупу $(0,+\infty)\cup\{+\infty\}$. Природно се намеће питање под којим условима ће решења једначине (2.1) тежити ка коначној тачки, а под којим условима ће имати вертикалну асимптоту, када $x\to 0+$.

Теорема 2.10. Нека је $\sigma \in (0,1)$, $a \leqslant -2$ и нека је $y(x)$ позитивно решење диференцијалне једначине (2.1) дефинисано на интервалу $(0,x_0]$, за неко $x_0>0$, такво да је $y'(x_0) \leqslant 0$, тада је

$$\lim_{x\to 0+} y(x) = +\infty.$$

Доказ. Из једначине (2.1) следи да је $y''(x) > 0$ за $x \in (0,x_0]$, $x_0>0$, тј. $y(x)$ јесте конвексна функција. Како је $y'(x_0) \leqslant 0$, закључујемо да је $y'(x) < 0$ за $x \in (0,x_0)$ и $y(x) \geqslant y(x_0)$ за $x \in (0,x_0]$. Ово, заједно са (2.1), имплицира неједнакост

$$y''(x) = x^a y^\sigma(x) \geqslant x^a y^\sigma(x_0)\,. \tag{2.24}$$

Посматрајмо прво случај када је $a \neq -2$. Из неједнакости (2.24), након интеграције, добија се

$$-y'(x) \geqslant y'(x_0) - y'(x) = \int_x^{x_0} y''(t)\,dt \geqslant \int_x^{x_0} t^a y^\sigma(x_0)\,dt = \frac{y^\sigma(x_0)}{a+1}\cdot\left(x_0^{a+1} - x^{a+1}\right),$$

за $x \in (0, x_0]$, тј. након још једне интеграције добија се

$$y(x) \geqslant -y(x_0) + y(x) \geqslant \frac{y^\sigma(x_0)}{a+1} \cdot \left(x_0^{a+1}(x_0 - x) - \frac{x_0^{a+2} - x^{a+2}}{a+2} \right).$$

Када $x \to 0+$, десна страна неједнакости тежи ка бесконачности, стога и лева страна такође мора тежити ка бесконачности.

Разматрајмо сада случај када је $a = -2$. Из неједнакости (2.24), након интеграције, добија се

$$-y'(x) \geqslant y'(x_0) - y'(x) = \int_x^{x_0} y''(t)\, dt \geqslant \int_x^{x_0} \frac{y^\sigma(x_0)}{t^2}\, dt = y^\sigma(x_0) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right),$$

за $x \in (0, x_0]$, тј. након још једне интеграције добија се

$$y(x) \geqslant -y(x_0) + y(x) \geqslant y^\sigma(x_0) \cdot \left(\ln x_0 - \ln x - \frac{1}{x_0} \cdot (x_0 - x) \right).$$

Када $x \to 0+$, десна страна неједнакости тежи ка бесконачности, стога, и лева страна такође мора тежити ка бесконачности. $\square$

Интересује нас да ли решења једначине (2.1) могу имати вертикалну асимптоту у случају када је $a > -2$. Одговор нам даје следећа теорема.

Теорема 2.11. Ако је $\sigma \in (0, 1)$, $a > -2$ и ако је $y(x)$ позитивно решење диференцијалне једначине (2.1) дефинисано на интервалу $(0, x_0]$, за неко $x_0 > 0$, такво да је $y'(x_0) \leqslant 0$, онда је

$$\lim_{x \to 0+} y(x) < +\infty.$$

Доказ. Из једначине (2.1) следи да је $y''(x) > 0$ за $x \in (0, x_0]$, тј. $y(x)$ јесте конвексна функција. Одавде и из услова $y'(x_0) \leqslant 0$, закључује се да је $y'(x) < 0$ за $x \in (0, x_0)$ и $y(x) \geqslant y(x_0)$ за $x \in (0, x_0]$. Ово, заједно са једначином (2.1), имплицира неједнакост

$$y''(t) = t^a y^\sigma(t) \leqslant t^a y^\sigma(x), \tag{2.25}$$

за свако $t \in [x, x_0]$.

Посматрајмо прво случај када је $a \neq -1$. Из неједнакости (2.25), после интеграције, добија се

$$y'(x_0) - y'(x) = \int_x^{x_0} y''(t)\,dt \leqslant \int_x^{x_0} t^a y^\sigma(x)\,dt = y^\sigma(x) \cdot \frac{x_0^{a+1} - x^{a+1}}{a+1},$$

за свако $x \in (0, x_0]$. Стога, за свако $t \in [x, x_0]$ следи да је

$$y'(x_0) - y'(t) \leqslant y^\sigma(t) \cdot \frac{x_0^{a+1} - t^{a+1}}{a+1} \leqslant y^\sigma(x) \cdot \frac{x_0^{a+1} - t^{a+1}}{a+1}.$$

Након још једне интеграције, за $x \in (0, x_0]$ добија се

$$y'(x_0)(x_0 - x) - y(x_0) + y(x) \leqslant \frac{y^\sigma(x)}{a+1} \cdot \Big[x_0^{a+1}(x_0 - x) - \frac{x_0^{a+2} - x^{a+2}}{a+2}\Big].$$

Закључујемо да за свако $x \in (0, x_0]$ важи да је

$$y^{1-\sigma}(x) \leqslant \frac{y(x_0) - y'(x_0)(x_0 - x)}{y^\sigma(x)} + \frac{1}{a+1} \cdot \Big[x_0^{a+1}(x_0 - x) - \frac{x_0^{a+2} - x^{a+2}}{a+2}\Big].$$

Претпоставимо да је права $x = 0$ вертикална асимптота функције $y(x)$ када $x \to 0+$. Тада, лева страна претходне неједнакости тежи ка бесконачности када $x \to 0+$, док десна страна не тежи ка бесконачности (први сабирак тежи ка нули, а други је ограничен). Из добијене контрадикције закључујемо да права $x = 0$ није вертикална асимптота функције $y(x)$. Стога, за $a \in (-2, -1) \cup (-1, \infty)$ следи да је $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) < +\infty$.

Посматрајмо сада случај када је $a = -1$. Слично, из неједнакости (2.25) добија се

$$y'(x_0) - y'(x) \leqslant y^\sigma(x) \cdot \big(\ln x_0 - \ln x\big),$$

за свако $x \in (0, x_0]$. Стога, за свако $t \in [x, x_0]$ следи да је

$$y'(x_0) - y'(t) \leqslant y^\sigma(t) \cdot \big(\ln x_0 - \ln t\big) \leqslant y^\sigma(x) \cdot \big(\ln x_0 - \ln t\big).$$

Након још једне интеграције, за $x \in (0, x_0]$ добија се

$$y'(x_0)(x_0 - x) - y(x_0) + y(x) \leqslant y^\sigma(x) \cdot \Big[\ln x_0 \cdot (x_0 - x) - x_0(\ln x_0 - 1) + x(\ln x - 1)\Big].$$

Закључујемо да за свако $x \in (0, x_0]$ важи да је

$$y^{1-\sigma}(x) \leqslant \frac{y(x_0) - y'(x_0)(x_0 - x)}{y^\sigma(x)} + \Big[\ln x_0 \cdot (x_0 - x) - x_0(\ln x_0 - 1) + x(\ln x - 1)\Big].$$

Претпоставимо да је права $x = 0$ вертикална асимптота функције $y(x)$ када $x \to 0+$. Тада, лева страна претходне неједнакости тежи ка бесконачности када $x \to 0+$, док десна страна не тежи ка бесконачности (први сабирак тежи ка нули, а други је ограничен, јер $\lim_{x\to 0+} x(\ln x - 1) = 0$). Из добијене контрадикције закључујемо да је $\lim_{x\to 0+} y(x) < +\infty$ и у случају када је $a = -1$. $\square$

2.2.3 Понашање решења дуж позитивног дела y–осе

На основу претходно добијених резултата следи да Кошијев проблем

$$y'' - x^a y^\sigma = 0,\ y(0) = c,\ y'(0) = \lambda, \tag{2.26}$$

где је $\sigma \in (0,1)$ и $c \in [0,+\infty)$ има смисла ако је $a > -2$. Како је $y'(x)$ растућа функција на интервалу $(0, x_0]$, за неко $x_0 > 0$, следи да $\lim_{x\to 0+} y'(x)$ постоји у скупу $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, зато ћемо разматрати такве вредности параметра λ. Добијени резултати показују да се понашање решења диференцијалне једначине (2.1) драстично разликује у случају када је $a \in (-2,-1]$ и у случају када је $a > -1$.

Лема 2.4. Ако је $0 < \sigma < 1$, $a \leqslant -1$ и $\lambda, c > 0$, онда Кошијев проблем (2.26) нема решења.

Доказ. Ако би постојало позитивно решење са наведеним особинама, онда би оно морало бити неопадајуће. Претпоставимо да такво решење постоји и да је оно дефинисано на интервалу $(0,h]$, за неко $h > 0$. Интеграцијом обе стране једнакости (2.1) добија се

$$y'(h) - \lambda = \int_0^h x^a y^\sigma(x)\, dx\,.$$

Како $y \to c$, када $x \to 0+$, онда $x^a y^\sigma \sim C x^a$, где је $C > 0$, када $x \to 0+$. Како је десна страна једнакости бесконачна, а лева страна коначна, долазимо до контрадикције. $\square$

Теорема 2.12. Ако је $0 < \sigma < 1$ и $a \leqslant -1$, онда за свако позитивно решење $y(x)$ диференцијалне једначине (2.1) дефинисано на интервалу $(0, x_0]$, за неко $x_0 > 0$, такво да је $y'(x_0) \leqslant 0$, следи да

$$\lim_{x\to 0+} y'(x) = -\infty\,.$$

Доказ. Како је $y'(x_0) \leqslant 0$ и како је $y'(x)$ је растућа функција, следи да је $y(x) \geqslant y(x_0)$ за $x \in (0, x_0]$. Како је $0 < \sigma < 1$, следи да је $y^\sigma(x) \geqslant y^\sigma(x_0)$ за $x \in (0, x_0]$. Интеграцијом обе стране једнакости (2.1) добија се

$$-y'(x) \geqslant y'(x_0) - y'(x) = \int_x^{x_0} y''(t)\, dt = \int_x^{x_0} t^a y^\sigma(t)\, dt \geqslant y^\sigma(x_0) \int_x^{x_0} t^a\, dt\,.$$

Када $x \to 0+$, десна страна једнакости тежи ка бесконачности, стога и лева страна такође мора тежити ка бесконачности. □

Из Леме 2.4 и Теореме 2.12 закључујемо да је y–оса тангента интегралних кривих решења посматране једначине (2.1), која су дефинисана у некој околини нуле, када $\sigma \in (0, 1)$ и $a \in (-2, -1]$.

Теорема 2.13. Ако $\sigma \in (0, 1)$, $a > -1$, $c > 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, онда Кошијев проблем (2.26) има јединствено решење дефинисано на интервалу $(0, h]$, $h > 0$.

Доказ. Посматрајмо прво случај када је $\lambda > 0$. Уместо Кошијевог проблема (2.26) посматраћемо интегралну једначину

$$y(x) = \lambda x + c + \int_0^x (x - t) t^a y^\sigma(t)\, dt\,, \tag{2.27}$$

јер је Кошијев проблем (2.26) еквивалентан интегралној једначини (2.27).

Низ функција је дефинисан на следећи начин:

$$y_0(x) = \lambda x + c, \;\; y_{n+1}(x) = \lambda x + c + \int_0^x (x - t) t^a y_n^\sigma(t)\, dt\,. \tag{2.28}$$

Покажимо да за све функције $y_n(x)$ важе неједнакости

$$c + \lambda x \leqslant y_n(x) \leqslant c + 2\lambda x, \;\; x \in [0, h], \;\; n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{2.29}$$

за неко h које не зависи од n. Доказаћемо индукцијом претпоставку. Ако је $n = 0$, онда $c + \lambda x = y_0(x) \leqslant 2\lambda x + c$, за $x \in [0, h]$. Нека важе неједнакости (2.29), тада је

$$(c + \lambda x)^\sigma \leqslant y_n^\sigma(x) \leqslant (2\lambda x + c)^\sigma\,,$$

за $x \in [0, h]$. Стога је

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &\leqslant \lambda x + c + \int_0^x (x - t) t^a (c + 2\lambda t)^\sigma dt \\ &\leqslant \lambda x + c + x \int_0^h t^a (c + 2\lambda t)^\sigma dt \leqslant 2\lambda x + c\,, \end{aligned}$$

за довољно мало h. Како је

$$\lambda x + c \leqslant \lambda x + c + \int_0^x (x-t)t^a y_n^\sigma(t)dt = y_{n+1}(x)\,,$$

закључујемо да (2.29) важи.

Покажимо равномерну конвергенцију низа $y_n(x)$ на сегменту $[0,h]$. Посматрајмо функционални ред $y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n(x) - y_{n-1}(x))$. Низ парцијалних сума тог реда је $S_n(x) = y_0(x) + \big(y_1(x) - y_0(x)\big) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) = y_n(x)$. Стога, равномерна конвергенција функционалног низа $y_n(x)$ еквивалентна је равномерној конвергенцији посматраног функционалног реда.

Покажимо да је

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant x^n\lambda^n, \;\; x \in [0,h], \;\; n \in \mathbb{N}\,, \tag{2.30}$$

за неко h које не зависи од n. Ову претпоставку доказаћемо индукцијом. За $n = 1$, добија се

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant x\int_0^x t^a(\lambda t + c)^\sigma\,dt \leqslant x\int_0^h t^a(\lambda t + c)^\sigma\,dt \leqslant \lambda x\,,$$

за довољно мало h. Нека неједнакост (2.30) важи, тада је

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leqslant x\int_0^x t^a\cdot|y_n^\sigma(t) - y_{n-1}^\sigma(t)|\,dt \\ &= \sigma\cdot x\int_0^x t^a\cdot\xi^{\sigma-1}(t)\cdot|y_n(t) - y_{n-1}(t)|\,dt, \end{aligned}$$

где је $\lambda x + c \leqslant \xi(x) \leqslant 2\lambda x + c$, за $x \in [0,h]$, стога је

$$(c + 2\lambda x)^{\sigma-1} \leqslant \xi^{\sigma-1}(x) \leqslant (\lambda x + c)^{\sigma-1},\; x \in [0,h]\,.$$

Следи да је

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &\leqslant \sigma\cdot x\int_0^x t^a(c+\lambda t)^{\sigma-1}x^n\lambda^n\,dt \\ &\leqslant \sigma\cdot\lambda^n\cdot x^{n+1}\int_0^h t^a(c+\lambda t)^{\sigma-1}dt\,, \\ &\leqslant x^{n+1}\lambda^{n+1}\,, \end{aligned}$$

за $x \in [0,h]$ и довољно мало h. Закључујемо да је

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant x^n \lambda^n \leqslant (\lambda h)^n, \ \ x \in [0,h], \ \ n \in \mathbb{N}.$$

За довољно мало h, из претходних редова закључујемо да низ $y_n(x)$ равномерно конвергира ка некој функцији $y(x)$ на сегменту $[0,h]$.

Нека је $y(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n(x)$, $x \in [0,h]$. Тада је $y(0) = c$. Низ $y_n^\sigma(x)$ равномерно конвергира ка функцији $y^\sigma(x)$ на сегменту $[0,h]$. Стога

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x (x-t)t^a y_n^\sigma(t)\,dt = \int_0^x \lim_{n\to+\infty}((x-t)t^a y_n^\sigma(t))\,dt = \int_0^x (x-t)t^a y^\sigma(t)\,dt\,.$$

Одавде закључујемо да низ $y_n(x)$ равномерно конвергира на сегменту $[0,h]$ ка функцији која је решење једначине (2.27). Одатле следи да је $y'(0) = 0$. Стога, $y(x)$ јесте решење Кошијевог проблема (2.26).

Покажимо сада јединственост. Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решења Кошијевог проблема (2.26). Тада је

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant \sigma \cdot x \int_0^x t^a \cdot |y_1(t) - y_2(t)| \cdot \xi^{\sigma-1}(t)\,dt\,,$$

где је $c + \lambda x \leqslant \xi(x) \leqslant c + 2\lambda x$, за $x \in [0,h]$, стога је $\xi^{\sigma-1}(x) \leqslant (\lambda x + c)^{\sigma-1}$, за $x \in [0,h]$.

Коначно, закључујемо да је

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant \sigma \cdot \max_{x\in[0,h]} |y_1(x) - y_2(x)| \cdot x \int_0^h t^a(\lambda t + c)^{\sigma-1}\,dt\,,$$

тј.

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leqslant \frac{1}{2} \max_{x\in[0,h]} |y_1(x) - y_2(x)|, \ \ x \in [0,h]\,,$$

за довољно мало h. Следи да је $y_1 \equiv y_2$.

Када је $\lambda \leqslant 0$, доказ се спроводи аналогно и зато је изостављен. □

Природно се намеће питање: Да ли могу решења, у случају када $\sigma \in (0,1)$ и $a > -1$, да теже ка коначној тачки са позитивног дела y–осе када $x \to 0+$, са нагибом „$\lambda = -\infty$”?

Лема 2.5. Ако је $0 < \sigma < 1$ и $a > -1$, онда Кошијев проблем $y'' = x^a y^\sigma$, $\lim\limits_{x\to0+} y(x) = c \in (0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to0+} y'(x) = -\infty$, нема решења која су дефинисана на интервалу $(0, x_0]$, за неко $x_0 > 0$.

Доказ. Претпоставимо да такво решење постоји. Довољно је посматрати само нерастућа решења, стога можемо претпоставити да је $y'(x_0) \leqslant 0$. Како је $y'(x)$ растућа функција, следи да је $y(x) \leqslant c$ за $x \in (0, x_0]$. Како је $0 < \sigma < 1$, следи да је $y^\sigma(x) \leqslant c^\sigma$, за $x \in (0, x_0]$. Интеграцијом обе стране једнакости (2.1) добија се

$$y'(x_0) - y'(x) = \int_x^{x_0} y''(t)\, dt = \int_x^{x_0} t^a y^\sigma(t)\, dt \leqslant c^\sigma \int_x^{x_0} t^a\, dt\,.$$

Када $x \to 0+$, десна страна неједнакости не тежи ка бесконачности, док лева тежи, што доводи до контрадикције. □

Приметимо да се решења једначине (2.1) понашају слично у случају када је $\sigma < 0$ и када $\sigma \in (0, 1)$ (постојање вертикалних асимптота, понашање решења у околини координатног почетка, као и понашање решења дуж позитивног дела y–осе).

2.3 Случај $\sigma > 1$

У овом делу дисертације посматрамо диференцијалну једначину (2.1), где $\sigma > 1$ и $a \in \mathbb{R}$. Резултати који су приказани у овом делу базирани су на резултатима рада [14].

2.3.1 Помоћни резултати

Посматрајмо диференцијалну једначину

$$u'' - Bu' + Au - |u|^{k-1}u = 0\,, \tag{2.31}$$

где је $u = u(t)$, $A \in \mathbb{R}$, $B > 0$ и $k > 1$. Резултати који приказују асимптотско понашање решења једначине (2.31) приказани су следећим лемама. Докази лема приказани су у раду [1].

Лема 2.6. Нека је $A < 0$. Тада за произвољно нетривијално решење $u(t)$ диференцијалне једначине (2.31), које је дефинисано у околини бесконачности, важи да је

$$u(t) = (C + o(1))\, e^{-mt}\,,$$

када $t \to +\infty$, где је $C \neq 0$ и $m = \sqrt{\frac{B^2}{4} - A} - \frac{B}{2} > 0$. Такво решење постоји за произвољно $C \neq 0$.

Лема 2.7. Нека је $A = 0$. Тада за произвољно нетривијално решење $u(t)$ диференцијалне једначине (2.31), које је дефинисано у некој околини бесконачности, важи да је

$$u(t) = \pm \left(\frac{k-1}{B} t \right)^{-\frac{\beta}{2}} \cdot (1 + o(1)) \, ,$$

када $t \to +\infty$, где је $\beta = \frac{2}{k-1} > 0$. Такво решење постоји.

Лема 2.8. Нека је $A > 0$. Тада за произвољно нетривијално решење $u(t)$ диференцијалне једначине (2.31), које је дефинисано у околини бесконачности, важи да је

$$u(t) = \pm A^{\frac{\beta}{2}} + o(1) \, ,$$

када $t \to +\infty$, где је $\beta = \frac{2}{k-1} > 0$. Такво решење постоји.

Посматрајмо сада диференцијалну једначину

$$u'' + B_1 u' + Au - |u|^{k-1} u = 0 \, , \tag{2.32}$$

где је $u = u(t)$, $A \in \mathbb{R}$, $B_1 > 0$ и $k > 1$. Резултати, који описују асимптотско понашање решења једначине (2.32), приказани су следећим лемама. Докази лема приказани су у раду [1].

Лема 2.9. Нека је $A < 0$. Тада за произвољно нетривијално решење $u(t)$ диференцијалне једначине (2.32), које је дефинисано у околини бесконачности, важи да је

$$u(t) = (C + o(1))\, e^{-Mt},$$

када $t \to +\infty$, где је $C \neq 0$ и $M = \sqrt{\frac{B_1^2}{4} - A} + \frac{B_1}{2} > 0$. Такво решење постоји за произвољно $C \neq 0$.

Лема 2.10. Нека је $A = 0$. Тада за произвољно нетривијално решење $u(t)$ диференцијалне једначине (2.32), које је дефинисано у околини бесконачности, важи да је

$$u(t) = (C + o(1))\, e^{-B_1 t} \, ,$$

када $t \to +\infty$, где је $C \neq 0$. Такво решење постоји за произвољно $C \neq 0$.

Лема 2.11. Нека је $0 < A < \frac{B_1^2}{4}$. Тада за произвољно нетривијално решење $u(t)$ диференцијалне једначине (2.32), које тежи ка нули када $t \to +\infty$, важи да је

$$u(t) = Ce^{-mt}\, (1 + o(1))$$

или

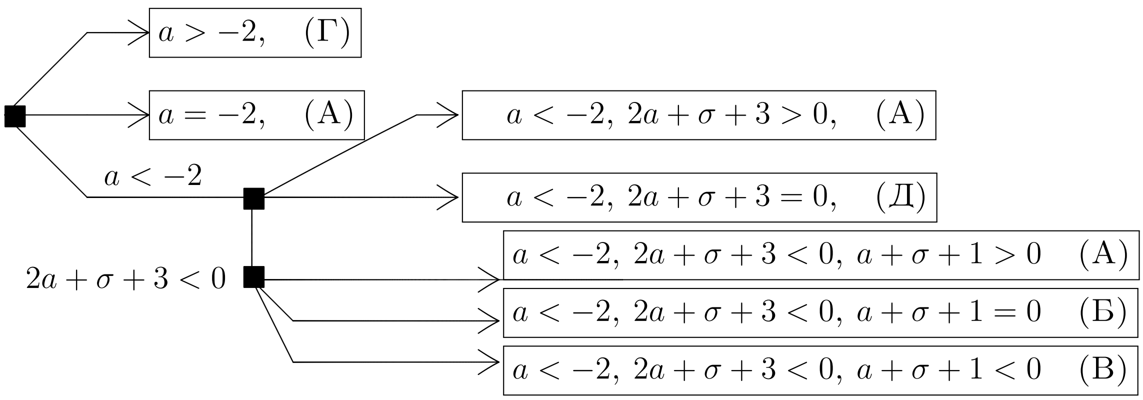
$$u(t) = Ce^{-Mt}\left(1 + o(1)\right),$$

где је $C \neq 0$ и $0 < m = \frac{B_1}{2} - \sqrt{\frac{B_1^2}{4} - A} < M = \sqrt{\frac{B_1^2}{4} - A} + \frac{B_1}{2}$. Такво решење постоји за произвољно $C \neq 0$.

2.3.2 Понашање решења у околини нуле

У овој секцији посматраћемо једначину Емден-Фаулера (2.1), у случају када је $\sigma > 1$ и $a \in \mathbb{R}$. Посматраћемо асимптотско понашање решења једначине (2.1) када $x \to 0+$. Може се приметити да већина лема и теорема које смо формулисали у случају када је $\sigma \in (0, 1)$ могу се применити и у случају када је $\sigma > 1$. Овде то неће бити приказано (лако се проверава), већ ће бити приказана веза између једначина (2.31) и (2.32) и једначине (2.1). Наиме, понашање решења једначина (2.31) и (2.32) даће нам значајне информације о понашању решења једначине (2.1).

Како би се лакше пратио доказ теореме која следи и да би се приметила комплетност посматраних случајева, посматрајмо слику 2.1.



Слика 2.1.

Теорема 2.14. Нека је $\sigma > 1$. Нека је $y(x)$ произвољно позитивно решење једначине (2.1) које је дефинисано у околини нуле. Разликујемо случајеве:

(А) Ако је $2a + \sigma + 3 < 0$, $a < -2$, $a + \sigma + 1 > 0$ или $a < -2$, $2a + \sigma + 3 > 0$ или $a = -2$, онда је

$$y(x) = (C + o(1)) \cdot x,$$

када $x \to 0+$, где је $C > 0$. Такво решење постоји за произвољно $C > 0$.
(Б) Ако је $a < -2$ и $a + \sigma + 1 = 0$, онда је

$$y(x) = ((a+2)\ln x)^{\frac{1}{a+2}} \cdot x \cdot (1 + o(1))\,,$$

када $x \to 0+$. Такво решење постоји.
(В) Ако је $a < -2$ и $a + \sigma + 1 < 0$, онда је

$$y(x) = \left(\left(\frac{(a+2)(a+\sigma+1)}{(1-\sigma)^2} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} + o(1) \right) \cdot x^{\frac{a+2}{1-\sigma}},$$

када $x \to 0+$. Такво решење постоји.
(Г) Ако је $a > -2$, онда за произвољно $C > 0$ постоје решења једначине (2.1) таква да је

$$y(x) = C\,(1 + o(1))\,,$$

или

$$y(x) = C\,(1 + o(1)) \cdot x,$$

када $x \to 0+$.
(Д) Ако је $2a + \sigma + 3 = 0$, онда решење једначине у параметарском облику јесте

$$x(\tau) = mC_2^2 e^{2\int \left(\frac{8}{\sigma+1}\tau^{\sigma+1} + \tau^2 + C_1\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau}$$

$$y(\tau) = nC_2 \tau e^{\int \left(\frac{8}{\sigma+1}\tau^{\sigma+1} + \tau^2 + C_1\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau}$$

где је $\left(\frac{m}{n^2}\right)^{\frac{\sigma-1}{2}} = 1$ и где су C_1 и C_2 константе, такве да $C_2 > 0$ и да су изрази добро дефинисани.

Доказ. У доказу ове теореме користићемо леме из претходног дела. Сменом $x = e^{-t}$, $y = ue^{-\lambda t}$, где је $\lambda = \frac{a+2}{1-\sigma}$ и $u = u(t)$, једначина (2.1) своди се на једначине (2.31) и (2.32), тј. на једначину облика

$$u'' - (2\lambda - 1)u' + \lambda(\lambda - 1)u - u^\sigma = 0\,.$$

Ово је специјалан случај једначине (2.32), где је $A = \dfrac{(a+2)(a+\sigma+1)}{(1-\sigma)^2}$ и $B = \dfrac{2a+\sigma+3}{1-\sigma}$. Приметимо да важи једнакост

$$\frac{B^2}{4} - A = \frac{1}{4}\,. \tag{2.33}$$

(A) Да бисмо доказали овај случај користићемо Лему 2.6, Лему 2.9 и Лему 2.10.

Ако је $2a+\sigma+3<0$, $a<-2$, $a+\sigma+1>0$, онда је $A<0$ и $B>0$. На основу Леме 2.6 добија се

$$u(t)=(C+o(1))\,e^{-mt}\,,$$

када $t\to+\infty$, где је $C>0$ и из једнакости (2.33) добија се да је $m=\frac{1-B}{2}>0$. У овом случају закључујемо да је $m=\frac{a+\sigma+1}{\sigma-1}$. Одавде се добија

$$y(t)=u(t)e^{-\lambda t}=(C+o(1))\,e^{-(m+\lambda)t}=(C+o(1))\,e^{-t}\,,$$

када $t\to+\infty$, где је $C>0$, тј.

$$y(x)=(C+o(1))\cdot x\,,$$

када $x\to 0+$, где је $C>0$.

Ако је $a<-2$ и $2a+\sigma+3>0$, онда је $B<0$ и $A<0$. Из Леме 2.9 следи

$$u(t)=(C+o(1))\,e^{-Mt},$$

када $t\to+\infty$, где је $C>0$ и $M=\sqrt{\frac{B_1^2}{4}-A}+\frac{B_1}{2}>0$ $(B_1=-B)$. У овом случају добија се да је $M=\frac{a+\sigma+1}{\sigma-1}$. Стога, следи

$$y(t)=u(t)e^{-\lambda t}=(C+o(1))\,e^{-(M+\lambda)t}=(C+o(1))\,e^{-t}\,,$$

када $t\to+\infty$, где је $C>0$, тј.

$$y(x)=(C+o(1))\cdot x\,,$$

када $x\to 0+$, где је $C>0$.

Ако је $a=-2$, онда је $B=-1$ и $A=0$. Из Леме 2.10 следи

$$u(t)=(C+o(1))\,e^{-B_1 t}\,,$$

када $t\to+\infty$, где је $C>0$ и $B_1=-B$. Одавде се добија

$$y(t)=u(t)e^{-\lambda t}=(C+o(1))\,e^{-(B_1+\lambda)t}=(C+o(1))\,e^{-t}\,,$$

када $t \to +\infty$, где је $C > 0$. Следи

$$y(x) = (C + o(1)) \cdot x,$$

када $x \to 0+$, где је $C > 0$.

(Б) Ако је $a < -2$ и $a + \sigma + 1 = 0$, онда је $A = 0$ и $B = \lambda = 1$. Из Леме 2.7 следи

$$u(t) = ((\sigma - 1)t))^{-\frac{\beta}{2}} (1 + o(1)),$$

када $t \to +\infty$, где је $\beta = \dfrac{2}{\sigma - 1} > 0$. Одавде се добија

$$y(t) = u(t)e^{-t} = (-(a+2)t)^{\frac{1}{1-\sigma}} (1 + o(1)) e^{-t},$$

када $t \to +\infty$. Следи

$$y(x) = ((a+2)\ln x)^{\frac{1}{a+2}} \cdot x \cdot (1 + o(1)) ,$$

када $x \to 0+$.

(В) Ако је $a < -2$ и $a + \sigma + 1 < 0$, онда је $A > 0$ и $B > 0$. Пошто нас занимају искључиво позитивна решења из Леме 2.8 добија се

$$u(t) = A^{\frac{\beta}{2}} + o(1),$$

када $t \to +\infty$, где је $\beta = \frac{2}{\sigma - 1} > 0$. Одавде, добија се

$$y(t) = u(t)e^{-\lambda t} = \left(\left(\frac{(a+2)(a+\sigma+1)}{(1-\sigma)^2} \right)^{\frac{1}{\sigma-1}} + o(1) \right) e^{-\lambda t},$$

када $t \to +\infty$, тј.

$$y(x) = \left(\left(\frac{(a+2)(a+\sigma+1)}{(1-\sigma)^2} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} + o(1) \right) x^{\frac{a+2}{1-\sigma}},$$

када $x \to 0+$.

(Г) Ако је $a > -2$, онда је $B < 0$ и $0 < A < \frac{B^2}{4}$. Тада је $m = \frac{B_1 - 1}{2} = -\lambda$ и $M = \frac{B_1 + 1}{2} = 1 - \lambda$. Из Леме 2.11 за свако нетривијално решење $u(t)$ једначине (2.32), које тежи ка 0 када $t \to +\infty$, важи

$$u(t) = Ce^{\lambda t} (1 + o(1))$$

или

$$u(t) = Ce^{(\lambda-1)t}\left(1+o(1)\right),$$

где је $C \neq 0$. Одавде, добија се

$$y(t) = u(t)e^{-\lambda t} = C + o(1)$$

или

$$y(t) = u(t)e^{-\lambda t} = \left(C + o(1)\right)e^{-t}$$

када $t \to +\infty$, тј.

$$y(x) = C\left(1+o(1)\right),$$

или

$$y(x) = C\left(1+o(1)\right)x,$$

када $x \to 0+$, где је $C > 0$.

(Д) Овај резултат је познат и овде је наведен искључиво због комплетности случаја када је $\sigma > 1$ (за више детаља погледати [15]). $\square$

3 Понашање решења једначине $y'' + x^a y^\sigma = 0$

У овом поглављу посматраћемо диференцијалну једначину Емден-Фаулера која је облика

$$y'' + x^a y^\sigma = 0, \ x > 0\,, \tag{3.1}$$

где је $\sigma < 0$ и $a \in \mathbb{R}$. Једначине Емден-Фаулера (2.1) и (3.1) на први поглед изгледају јако слично, међутим, асимптотско понашање решења ових једначина се доста разликује. Прво што се може приметити јесте да су сва позитивна решења једначине (2.1) конвексне функције, док су сва позитивна решења једначине (3.1) конкавне функције. Стога, техника која се примењује за испитивање понашања решења ових једначина битно се разликује.

Овде ће бити приказано понашање решења једначине (3.1) у околини координатног почетка. Једначина (3.1) је доста проучавана у литератури (видети на пример [9, 16, 17]) и из тог разлога она је доста мање проучавана у овој тези.

Резултати приказани у овом поглављу јесу специјалан случај резултата добијених у раду [17], али је у овом поглављу приказана нешто другачија техника.

3.1 Прираштај решења једначине Емден-Фаулера у случају $\sigma < 0$

Лема 3.1. Ако је $\sigma < 0$, $a \in \mathbb{R}$ и $0 < x_1 < x_2$, онда постоји позитивна константа $\lambda_1 = \lambda_1(a, \sigma, x_1, x_2)$ таква да за свако позитивно решење $y(x)$ једначине (3.1), које је дефинисано на сегменту $[x_1, x_2]$ и за које важи да је $y'(x_2) \geqslant 0$, следи да је $y(x_2) \geqslant \lambda_1$.

Доказ. Из једначине (3.1) следи да је $y''(x) < 0$ за $x \in [x_1, x_2]$, $x_2 > x_1 > 0$, тј. $y(x)$ јесте конкавна функција. Одавде и из услова да је $y'(x_2) \geqslant 0$, закључује се да је $y'(x) > 0$ за $x \in (x_1, x_2)$ и $y(x) \leqslant y(x_2)$ за $x \in [x_1, x_2]$. Ово, заједно са једначином (3.1), имплицира неједнакост

$$-\,y''(x) = x^a y^\sigma(x) \geqslant x^a y^\sigma(x_2)\,. \tag{3.2}$$

Посматрајмо прво случај када је $a \neq -1$. Из неједнакости (3.2) следи да је

$$y'(x) - y'(x_2) = -\int_x^{x_2} y''(t)\,dt \geqslant \int_x^{x_2} t^a y^\sigma(x_2)\,dt = \frac{y^\sigma(x_2)}{a+1} \cdot \left(x_2^{a+1} - x^{a+1}\right)\,,$$

за $x \in [x_1, x_2]$, тј.

$$y(x_2) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y'(x)\,dx \geqslant \frac{y^\sigma(x_2)}{a+1} \cdot (x_2 - x_1) \cdot \left(x_2^{a+1} - \bar{x}^{a+1}\right)\,,$$

за неко $\bar{x} \in (x_1, x_2)$. Следи да је

$$y(x_2) \geqslant C(a, x_1, x_2) \cdot y^\sigma(x_2)\,,$$

где је

$$C(a, x_1, x_2) = \frac{1}{a+1} \cdot (x_2 - x_1) \cdot \left(x_2^{a+1} - \bar{x}^{a+1}\right) > 0\,,$$

за неко $\bar{x} \in (x_1, x_2)$. Одавде се закључује да је

$$y(x_2) \geqslant (C(a, x_1, x_2))^{\frac{1}{1-\sigma}} = \lambda_1 > 0\,.$$

Посматрајмо сада случај када је $a = -1$. Из неједнакости (3.2) следи да је

$$y'(x) - y'(x_2) = -\int_x^{x_2} y''(t)\,dt \geqslant y^\sigma(x_2) \cdot (\ln x_2 - \ln x)\,, \quad x \in [x_1, x_2]\,,$$

тј.

$$y(x_2) - y(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} y'(x)\,dx \geqslant y^\sigma(x_2) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (\ln x_2 - \ln \bar{x})\,,$$

за неко $\bar{x} \in (x_1, x_2)$. Следи да је

$$y(x_2) \geqslant C(x_1, x_2) \cdot y^\sigma(x_2)\,,$$

где је $C(x_1, x_2) = (x_2 - x_1) \cdot (\ln x_2 - \ln \bar{x}) > 0$, $\bar{x} \in (x_1, x_2)$. Закључујемо да је

$$y(x_2) \geqslant (C(x_1, x_2))^{\frac{1}{1-\sigma}} = \lambda_1 > 0\,.$$

Стога је показано да резултат важи за свако $a \in \mathbb{R}$. □

3.2 Понашање решења у околини координатног почетка

Следећа теорема даје нам информацију о асимптотском понашању решења диференцијалне једначине (3.1). За доказ теореме која следи користићемо Лему 3.1 из претходне секције и Гронвол[9]-Белманову[10] лему. Следећа лема јесте Гронвол-Белманова лема и како је она једна од основних лема у квалитативној анализи диференцијалних једначина, наводимо је без доказа.

Лема 3.2. Нека су функције $u, v \in C[a,b]$, ненегативне и нека је k $(k > 0)$ произвољна константа. Тада, ако важи

$$v(x) \leqslant k + \int_a^x v(t)u(t)\,dt,\ \ x \in [a,b]\,,$$

онда је

$$v(x) \leqslant k e^{\int_a^x u(t)\,dt},\ \ x \in [a,b]\,.$$

Теорема 3.1. Ако је $\sigma < 0$, $a > -2$ и $x_0 > 0$, онда постоји бесконачно много решења једначине (3.1) која су дефинисана на интервалу $(0, x_0]$ и задовољавају услов

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = 0\,.$$

Доказ. Посматрајмо фамилију позитивних решења $y(x,\lambda)$ диференцијалне једначине (3.1), таквих да важи:

$$\frac{dy}{dx}(x_0,\lambda) = 0,\ \ y(x_0,\lambda) = \lambda > 0\,.$$

На основу Пеанове[11] теореме знамо да постоје решења $y(x,\lambda)$ једначине (3.1) дефинисана на интервалу $(x_0 - \delta, x_0]$, за неко $\delta > 0$. Из Леме 3.1 знамо да ако је $y(x,\lambda)$ решење једначине (3.1) дефинисано на интервалу $(x_0 - \delta, x_0]$, за неко $\delta > 0$, онда је $\lambda \geqslant \lambda_1(a, \sigma, x_0 - \delta, x_0)$.

Претпоставимо да су сва решења $y(x,\lambda)$ дефинисана на интервалу $(0, x_0]$. Нека је $y(x,\lambda)$ једно од тих решења. Како је решење $y(x,\lambda)$ дефинисано на интервалу $(0, x_0]$, следи да је онда дефинисано и на сегменту $\left[\frac{x_0}{2}, x_0\right]$. Ако је $\frac{dy}{dx}(x_0,\lambda) = 0$ и $y(x_0,\lambda) = \lambda < \lambda_1\left(a, \sigma, \frac{x_0}{2}, x_0\right)$, долазимо у контрадикцију са Лемом 3.1. Одатле закључујемо да постоје решења једна-

[9]Thomas Hakon Grönwall (1877–1932), шведски математичар
[10]Richard Ernest Bellman (1920–1984), амерички математичар
[11]Giuseppe Peano (1858–1932), италијански математичар

чине (3.1) која су дефинисана на интервалу $(x_1, x_0] \subset (0, x_0]$, $x_0 > x_1 > 0$, таква да се не могу продужити на интервал $(0, x_0]$.

Нека је сада $y(x,\lambda)$ решење диференцијалне једначине (3.1) које је дефинисано на интервалу $(x_1, x_0] \subset (0, x_0]$, $x_0 > x_1 > 0$, такво да се решење $y(x,\lambda)$ не може продужити на интервал $(0, x_0]$ и нека је $(x_1, x_0]$ максималан леви интервал егзистенције решења $y(x,\lambda)$. Како је $y(x,\lambda)$ растућа функција, онда постоји лимес $L = \lim_{x\to x_1+} y(x)$. Ако је $L \neq 0$, за $x \in (x_1, x_0]$ и $a \neq -1$, онда је

$$\begin{aligned} y'(x,\lambda) - y'(x_0,\lambda) &= -\int_x^{x_0} y''(t,\lambda)\,dt = \int_x^{x_0} t^a\big(y(t,\lambda)\big)^\sigma dt \leqslant L^\sigma \int_x^{x_0} t^a\,dt \\ &\leqslant L^\sigma \int_{x_1}^{x_0} t^a\,dt = L^\sigma \cdot \frac{x_0^{a+1} - x_1^{a+1}}{a+1}\,, \end{aligned}$$

и за $x \in (x_1, x_0]$ и $a = -1$, добија се

$$y'(x,\lambda) - y'(x_0,\lambda) \leqslant L^\sigma \int_{x_1}^{x_0} \frac{dt}{t} = L^\sigma \cdot (\ln x_0 - \ln x_1)\ ,$$

следи је $y'(x,\lambda)$ ограничена и онда не може бити $\lim_{x\to x_1+} y'(x) = +\infty$. Одатле, на основу Пеанове теореме можемо закључити да се решење $y(x,\lambda)$ може продужити, а то је у контрадикцији са претпоставком да је $(x_1, x_0]$ максималан леви интервал егзистенције решења. Из добијене контрадикције закључујемо да је $L = 0$. Стога, постоји $\bar{x}(\lambda) \in (x_1, x_0)$ такво да је $y(\bar{x}(\lambda),\lambda) = \dfrac{\lambda}{2}$.

За $x \in \big[\bar{x}(\lambda), x_0\big]$ и $a \neq -1$, добија се

$$y'(x,\lambda) = \int_x^{x_0} t^a\big(y(t,\lambda)\big)^\sigma dt \leqslant \int_x^{x_0} t^a\big(y(\bar{x}(\lambda),\lambda)\big)^\sigma dt = \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^\sigma}{a+1} \cdot \left(x_0^{a+1} - x^{a+1}\right).$$

Одатле, како је $a > -2$, следи да је

$$\frac{\lambda}{2} = y(x_0,\lambda) - y(\bar{x}(\lambda),\lambda) \leqslant \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^\sigma}{a+1} \cdot \left(x_0^{a+1}(x_0 - \bar{x}(\lambda)) - \frac{x_0^{a+2} - (\bar{x}(\lambda))^{a+2}}{a+2}\right)$$

$$\leqslant \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^\sigma}{|a+1|} \cdot \left(x_0^{a+2} + \frac{x_0^{a+2}}{a+2}\right) = x_0^{a+2} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^\sigma}{|a+1|} \cdot \left(1 + \frac{1}{a+2}\right)\ ,$$

тј.

$$0 \leqslant x_0^{a+2} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^\sigma}{|a+1|} \cdot \left(1 + \frac{1}{a+2}\right) - \frac{\lambda}{2}\,,$$

а ово не може бити тачно за довољно велико λ.

За $x \in \big[\bar{x}(\lambda), x_0\big]$ и $a = -1$, добија се

$$y'(x,\lambda) = \int_x^{x_0} \frac{\big(y(t,\lambda)\big)^\sigma}{t}\,dt \leqslant \int_x^{x_0} \frac{\big(y(\bar{x}(\lambda),\lambda)\big)^\sigma}{t}\,dt = \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^\sigma \cdot (\ln x_0 - \ln x)\ .$$

Стога, следи да је

$$\frac{\lambda}{2} = y(x_0,\lambda) - y(\bar{x}(\lambda),\lambda) \leqslant \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^\sigma \cdot \Big(\bar{x}(\lambda)\cdot(\ln \bar{x}(\lambda) - \ln x_0) - \bar{x}(\lambda) + x_0\Big)$$

$$= \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^\sigma \cdot \bigg(\bar{x}(\lambda)\cdot \ln\Big(\frac{\bar{x}(\lambda)}{x_0}\Big) - \bar{x}(\lambda) + x_0\bigg) \leqslant \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^\sigma \cdot x_0\,,$$

тј.

$$0 \leqslant \Big(\frac{\lambda}{2}\Big)^\sigma \cdot x_0 - \frac{\lambda}{2}\,,$$

а ово не може бити тачно да довољно велико λ. Следи да су решења једначине (3.1) дефинисана на интервалу $(0, x_0]$, за довољно велико λ.

Нека је Λ скуп свих λ таквих да је $y(x,\lambda)$ позитивно решење једначине (3.1) које је дефинисано на интервалу $(0,x_0]$. Скуп Λ је непразан и ограничен је одоздо. Нека је $\bar{\lambda} = \inf\Lambda$. Показаћемо да $\bar{\lambda} \in \Lambda$. Претпоставимо супротно. Нека је $y(x_1,\bar{\lambda}) = 0$, за неко $x_1 \in (0,x_0)$. Нека је $\lambda_i \in \Lambda$ такво да $\lambda_i \to \bar{\lambda}$, када $i \to +\infty$. Како су решења $y(x,\lambda_i)$ дефинисана на интервалу $(0,x_0]$, онда су она дефинисана и на сегменту $\Big[\frac{x_1}{2}, x_1\Big]$. Из Леме 3.1 знамо да је $0 < \lambda_1\Big(a,\sigma,\frac{x_1}{2},x_1\Big) \leqslant y(x_1,\lambda_i) \to y(x_1,\bar{\lambda}) = 0$ када $i \to +\infty$ и долазимо до контрадикције.

Ако је $\lambda < \bar{\lambda}$, онда постоји $\bar{x} \in (0,x_0)$ такво да је $y(\bar{x},\lambda) = 0$, где је $y(x,\lambda)$ решење дефинисано на $[\bar{x},x_0]$. Нека је $y(x_\delta,\bar{\lambda}-\delta) = 0$ за $\delta > 0$, $x_\delta \in (0,x_0)$, где је $y(x,\bar{\lambda}-\delta)$ решење дефинисано на сегменту $[x_\delta,x_0]$. Примењујући Фубинијеву[12] теорему за $x \geqslant x_\delta$, добија се

$$\begin{aligned} y(x_0,\bar{\lambda}) - y(x,\bar{\lambda}) &= \int_x^{x_0}\bigg(\int_t^{x_0} u^a y^\sigma(u,\bar{\lambda})\,du\bigg)\,dt = \int_x^{x_0}\bigg(\int_x^{u} u^a y^\sigma(u,\bar{\lambda})\,dt\bigg)\,du \\ &= \int_x^{x_0} (u-x)\cdot u^a \cdot y^\sigma(u,\bar{\lambda})\,du\,. \end{aligned}$$

[12]Guido Fubini (1879–1943), италијански математичар

Аналогно, добија се

$$y(x_0,\bar{\lambda}-\delta)-y(x,\bar{\lambda}-\delta)=\int_x^{x_0}(u-x)\cdot u^a\cdot y^\sigma(u,\bar{\lambda}-\delta)\,du\,.$$

Из горњих једнакости, за $x\geqslant x_\delta$ добија се

$$|y(x,\bar{\lambda})-y(x,\bar{\lambda}-\delta)|\leqslant\delta+\int_x^{x_0}u^{a+1}\cdot|y^\sigma(u,\bar{\lambda})-y^\sigma(u,\bar{\lambda}-\delta)|\,du\,. \tag{3.3}$$

Приметимо да графици функција које задовољавају једначину (3.1) и за које важи да је $\frac{dy}{dx}(x_0,\lambda)=0,\ y(x_0,\lambda)=\lambda>0$ се не секу када је $x\leqslant x_0$. На пример, нека је

$$\frac{dy_i}{dx}(x_0,\lambda_i)=0,\ y_i(x_0,\lambda_i)=\lambda_i>0\,,$$

за $i\in\{1,2\}$ и $\lambda_1>\lambda_2$. Означимо са $y_i(x)=y_i(x,\lambda_i)$, за $i\in\{1,2\}$. Ако је $y_1(x^*)=y_2(x^*)>0$ за неко $x^*<x_0$, онда је $y_1(x)>y_2(x)$ за $x\in(x^*,x_0]$. Дефинишимо функцију $f(x)=y_1(x)-y_2(x)$ за $x\in[x^*,x_0]$. Онда је $f(x^*)=0$, $f(x_0)=\lambda_1-\lambda_2>0$ и $f''(x)=y_1''(x)-y_2''(x)=x^a(y_2^\sigma(x)-y_1^\sigma(x))\geqslant 0$ (јер је $\sigma<0$, па из неједнакости $y_1(x)\geqslant y_2(x)$, следи $y_1^\sigma(x)\leqslant y_2^\sigma(x)$) за $x\in[x^*,x_0]$. Како је функција f' неопадајућа и како важи $f'(x_0)=0$, следи да је $f'(x)\leqslant 0$ за $x\in[x^*,x_0]$. Закључујемо да је $0=f(x^*)\geqslant f(x_0)>0$, што је контрадикција. Следи да ако су таква решења дефинисана на неком интервалу $[x',x_0]$ и ако је $\lambda_1>\lambda_2$, онда је

$$y_1^{\sigma-1}(x,\lambda_1)\leqslant y_2^{\sigma-1}(x,\lambda_2)\,.$$

На основу теореме Лагранжа, за свако $u>x_\delta$ добија се да важи

$$|y^\sigma(u,\bar{\lambda})-y^\sigma(u,\bar{\lambda}-\delta)|=y^{\sigma-1}(u,\lambda_0)\cdot|\sigma|\cdot|y(u,\bar{\lambda})-y(u,\bar{\lambda}-\delta)|\,,$$

где $\lambda_0\in(\bar{\lambda}-\delta,\bar{\lambda})$, следи да је

$$|y^\sigma(u,\bar{\lambda})-y^\sigma(u,\bar{\lambda}-\delta)|\leqslant y^{\sigma-1}(u,\bar{\lambda}-\delta)\cdot|\sigma|\cdot|y(u,\bar{\lambda})-y(u,\bar{\lambda}-\delta)|\,. \tag{3.4}$$

За $\varepsilon\in(0,\bar{\lambda})$ дефинишемо $\delta(\varepsilon)=e^{-2\cdot\frac{|\sigma|}{a+2}\cdot x_0^{a+2}\cdot\varepsilon^{\sigma-1}}$ (узимајући да је ε мало можемо претпоставити да је $\delta(\varepsilon)<\bar{\lambda}-\varepsilon$, јер $\delta(\varepsilon)\to 0$ када $\varepsilon\to 0$) и нека је $x_{1,\delta}=x_{1,\delta(\varepsilon)}$ такво да је $y(x_{1,\delta},\bar{\lambda}-\delta(\varepsilon))=\varepsilon$. Приметимо да такво $x_{1,\delta}$

постоји. Из неједнакости (3.3) и (3.4), следи да за свако $x \geqslant x_{1,\delta}$ важи

$$\left|y(x,\bar\lambda)-y(x,\bar\lambda-\delta(\varepsilon))\right| \leqslant \delta(\varepsilon)+\int\limits_x^{x_0} |\sigma|u^{a+1}\cdot y^{\sigma-1}(u,\bar\lambda-\delta(\varepsilon))\left|y(u,\bar\lambda)-y(u,\bar\lambda-\delta(\varepsilon))\right|du\,.$$

На основу Гронвол-Белманове леме и како је $y^{\sigma-1}(x,\bar\lambda-\delta(\varepsilon))$ нерастућа функција на сегменту $[x_{1,\delta},x_0]$, закључујемо да за $a\in(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$ важи

$$\begin{aligned}\left|y(x,\bar\lambda)-y(x,\bar\lambda-\delta(\varepsilon))\right| &\leqslant \delta(\varepsilon)\cdot e^{\frac{|\sigma|}{a+2}\cdot x_0^{a+2}\cdot y^{\sigma-1}(x_{1,\delta},\bar\lambda-\delta(\varepsilon))}\\ &= \delta(\varepsilon)\cdot e^{\frac{|\sigma|}{a+2}\cdot x_0^{a+2}\cdot\varepsilon^{\sigma-1}} = e^{-\frac{|\sigma|}{a+2}\cdot x_0^{a+2}\cdot\varepsilon^{\sigma-1}} = \omega(\varepsilon)\,,\end{aligned}$$

а за $a=-1$ важи

$$\begin{aligned}\left|y(x,\bar\lambda)-y(x,\bar\lambda-\delta(\varepsilon))\right| &\leqslant \delta(\varepsilon)\cdot e^{|\sigma|\cdot x_0\cdot y^{\sigma-1}(x_{1,\delta},\bar\lambda-\delta(\varepsilon))}\\ &= \delta(\varepsilon)\cdot e^{|\sigma|\cdot x_0\cdot\varepsilon^{\sigma-1}} = e^{-|\sigma|\cdot x_0\cdot\varepsilon^{\sigma-1}} = \omega(\varepsilon)\,.\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да за свако довољно мало ε постоји $\omega(\varepsilon)>0$ такво да је

$$|y(x,\bar\lambda)-y(x,\bar\lambda-\delta(\varepsilon))|\leqslant\omega(\epsilon)$$

за $x\geqslant x_{1,\delta}$. Како $\omega(\varepsilon)\to 0$ када $\varepsilon\to 0$, како је $y(x,\bar\lambda)$ неопадајућа функција и $y(x,\bar\lambda)>0$ за свако $x\in(0,x_0]$, следи да је $\lim\limits_{x\to 0+} y(x,\bar\lambda)=0\,.$

Ако су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решења диференцијалне једначине (3.1) таква да важи

$$y_1(x_1,\bar\lambda_1)=\bar\lambda_1>0,\quad \frac{dy_1}{dx}(x_1,\bar\lambda_1)=0,\ \lim_{x\to 0+} y(x,\bar\lambda_1)=0\,,$$

$$y_2(x_2,\bar\lambda_2)=\bar\lambda_2>0,\quad \frac{dy_2}{dx}(x_2,\bar\lambda_2)=0,\ \lim_{x\to 0+} y(x,\bar\lambda_2)=0\,,$$

где су x_1 и x_2 произвољни за које важи $x_0<x_1<x_2$, тада је $y_1'(x_1)<y_2'(x_1)$. Закључујемо да су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ различита решења. Она су дефинисана на интервалу $(0,x_0]$ и важи да $\lim\limits_{x\to 0+} y_1(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0+} y_2(x)=0\,.$ Како су x_1 и x_2 произвољни, закључујемо да постоји бесконачно много решења једначине (3.1) која су дефинисана на интервалу $(0,x_0]$ и за која важи да је

$$\lim_{x\to 0+} y(x)=0\,.$$

$\square$

Пример 3.1. Нека је $a < -2$ и $\sigma < 0$. Ако је $y(x)$ решење диференцијалне једначине (3.1) које задовољава Лему 3.1, онда је

$$y(x_0) > y(x_0) - y(x) \geqslant y^{\sigma}(x_0) \int_x^{x_0} \left(\int_t^{x_0} u^a \, du \right) dt, \quad x \in (0, x_0) \, .$$

Добија се да је

$$y^{1-\sigma}(x_0) > \frac{1}{a+1} \left(x_0^{a+1}(x_0 - x) - \frac{x_0^{a+2}}{a+2} + \frac{x^{a+2}}{a+2} \right), \quad x \in (0, x_0) \, ,$$

и када $x \to 0+$ долазимо до контрадикције. Одавде закључујемо да не постоје позитивна решења једначине (3.1) таква да $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) = 0$, у случају када је $a < -2$ и $\sigma < 0$.

Посматрајмо сада случај када је $a = -2$ и $\sigma < 0$. Како је

$$y(x_0) > y(x_0) - y(x) \geqslant y^{\sigma}(x_0) \int_x^{x_0} \left(\int_t^{x_0} \frac{1}{u^2} \, du \right) dt, \quad x \in (0, x_0) \, ,$$

следи да је

$$y^{1-\sigma}(x_0) > \frac{x}{x_0} - 1 + \ln x_0 - \ln x, \quad x \in (0, x_0)$$

и када $x \to 0+$ поново долазимо до контрадикције.

Пример 3.1 показује да резултати Теореме 3.1 не важе у случају када је $a \leqslant -2$.

4 Понашање решења уопштене једначине Емден-Фаулера

У овом поглављу посматраћемо уопштену једначину Емден-Фаулера која је облика
$$y'' = q(x)f(y(x))\,, \tag{4.1}$$
где функције f и q задовољавају одређене услове. Посматрана једначина уопштава једначине (2.1) и (3.1), које су посматране у другом и трећем поглављу. Такође, добијени резултати могу се применити на ширу класу једначина и то је приказано у Одељку 4.2. Резултати овог поглавља базирају се на резултатима рада [12].

4.1 Егзистенција и јединственост решења Кошијевог проблема за уопштену једначину Емден-Фаулера

У овом делу дисертације посматраћемо понашање решења једначине (4.1) у околини координатног почетка.

Теорема 4.1. Нека је $\lambda > 0$. Нека је $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ нерастућа конвексна диференцијабилна функција. Ако функција $q(x)$ задовољава услове
$$\int_0^1 f\Big(\frac{\lambda}{2}x\Big) \cdot \big|q(x)\big|\,dx < +\infty, \ \int_0^1 x \cdot \Big(-f'\Big(\frac{\lambda}{2}x\Big)\Big) \cdot \big|q(x)\big|\,dx < +\infty\,,$$
онда постоји јединствено решење једначине (4.1) које је дефинисано на неком интервалу $(0, h]$, $h \leqslant 1$, такво да је $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = \lambda$.

Доказ. Посматрајмо интегралну једначину
$$y(x) = \lambda x + \int_0^x (x - t)q(t)f(y(t))\,dt\,,$$
која је еквивалентна посматраном Кошијевом проблему.

Дефинишимо низ функција на следећи начин:
$$y_0(x) = \lambda x, \ \ y_{n+1}(x) = \lambda x + \int_0^x (x - t)q(t)f(y_n(t))\,dt\,. \tag{4.2}$$

Показаћемо да за све функције $y_n(x)$ важе неједнакости

$$\frac{\lambda}{2}x \leqslant y_n(x) \leqslant 2\lambda x, \;\; x \in [0, h_1], \;\; n \in \mathbb{N}_0\,, \tag{4.3}$$

за h_1 такво да је $\int_0^{h_1} \big|q(t)\big| f\big(\frac{\lambda}{2}t\big) < \frac{\lambda}{2}$. Доказаћемо претпоставку индукцијом. Ако је $n = 0$, онда је $\frac{\lambda}{2}x \leqslant \lambda x = y_0(x) \leqslant 2\lambda x$, за $x \in [0, h_1]$. Ако неједнакости (4.3) важе, следи да је $f\big(\frac{\lambda}{2}x\big) \geqslant f\big(y_n(x)\big) \geqslant f\big(2\lambda x\big)$, за $x \in [0, h_1]$. Онда је

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &\geqslant \lambda x - \int_0^x (x-t) f\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\big|q(t)\big|\,dt \\ &\geqslant \lambda x - x\int_0^{h_1} f\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\big|q(t)\big|\,dt \\ &\geqslant \frac{\lambda}{2}x\,. \end{aligned}$$

Приметимо да h_1 не зависи од n. Како је

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &\leqslant \lambda x + \int_0^x (x-t) f\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\big|q(t)\big|\,dt \\ &\leqslant \lambda x + x\int_0^{h_1} f\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\big|q(t)\big|\,dt \\ &\leqslant 2\lambda x\,, \end{aligned}$$

неједнакости (4.3) важе. Нека је h_2 такво да $\displaystyle\int_0^{h_2} t\cdot\big|q(t)\big|\cdot\Big(-f'\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\Big)\,dt < \frac{1}{2}$ и нека је $h = \min\{1, h_1, h_2\}$. Нека је $\delta_n = \displaystyle\sup_{x\in(0,\,h_2]} \frac{\big|y_n(x) - y_{n-1}(x)\big|}{x}$. Из теореме Лагранжа следи да је

$$\begin{aligned} \big|y_{n+1}(x) - y_n(x)\big| &\leqslant x\int_0^x \big|q(t)\big|\cdot\big|f'(\xi(t))\big|\cdot\big|y_n(t) - y_{n-1}(t)\big|\,dt \\ &\leqslant x\cdot\delta_n \int_0^{h_2} t\cdot\big|q(t)\big|\cdot\Big(-f'\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\Big)\,dt \\ &\leqslant x\cdot\frac{\delta_n}{2}\,, \end{aligned}$$

где је $\frac{\lambda}{2}x \leqslant \xi(x) \leqslant 2\lambda x$ за $x \in (0, h_2]$. Одавде, добијамо да је $\delta_{n+1} \leqslant \dfrac{\delta_n}{2}$, што имплицира равномерну конвергенцију низа функција $y_n(x)$ ка некој функцији $y(x)$. Како је

$$\int_0^x (x-t)\cdot q(t)\cdot f(y_n(t))\,dt \leqslant \int_0^1 \big|q(x)\big|\cdot f\Big(\frac{\lambda}{2}x\Big)\,dx < +\infty\,,$$

на основу Лебегове теореме о доминантној конвергенцији може се проћи лимесом под интеграл у релацији (4.2). Као резултат добијамо да је

$$y(x) = \lambda x + \int_0^x (x-t)q(t)f(y(t))\,dt\,.$$

Одавде, следи да је $\lim_{x\to 0+} y(x) = 0$, $\lim_{x\to 0+} y'(x) = \lambda$ и $y'' = q(t)f(y(t))$.

Докажимо сада јединственост. Нека су $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решења Кошијевог проблема: $y'' = q(t)f(y(t))$, $\lim_{x\to 0+} y(x) = 0$ и $\lim_{x\to 0+} y'(x) = \lambda$. Користећи теорему Лагранжа добијамо неједнакости

$$\begin{aligned} \big|y_1(x) - y_2(x)\big| &\leqslant x\int_0^x \big|q(t)\big| \cdot \big|f'(\xi(t))\big| \cdot \big|y_1(t) - y_2(t)\big|\,dt \\ &\leqslant x\int_0^x \big|q(t)\big| \cdot \Big(-f'\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\Big) \cdot |y_1(t) - y_2(t)|\,dt\,, \end{aligned}$$

где је $\frac{\lambda}{2}x \leqslant \xi(x) \leqslant 2\lambda x$ за $x \in (0, h]$. Следи да је

$$\begin{aligned} \frac{\big|y_1(x) - y_2(x)\big|}{x} &\leqslant \int_0^x \big|q(t)\big| \cdot \Big(-f'\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\Big) \cdot \Big|y_1(t) - y_2(t)\Big|\,dt \\ &\leqslant \sup_{x\in(0,\,h]} \frac{\big|y_1(x) - y_2(x)\big|}{x} \int_0^h t \cdot \big|q(t)\big| \cdot \Big(-f'\Big(\frac{\lambda}{2}t\Big)\Big)\,dt\,, \end{aligned}$$

тј.

$$\sup_{x\in(0,\,h]} \frac{\big|y_1(x) - y_2(x)\big|}{x} \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x\in(0,\,h]} \frac{\big|y_1(x) - y_2(x)\big|}{x}\,.$$

Закључујемо да је $y_1 \equiv y_2$. □

Напомена 4.1. Приметимо да конвергенција интеграла, који су задати у формулацији Теореме 4.1 за неко $\lambda_0 > 0$, обезбеђује конвергенцију тих интеграла за произвољно $\lambda \geqslant \lambda_0$, што представља практичнији резултат.

Напомена 4.2. Ако је $f(t) = t^{\sigma}$, $\sigma < 0$ услови за интеграле који су наведени у Теореми 4.1 се подударају, стога у том случају имамо само један услов за проверу.

Следећа два примера показују да у општем случају интеграли задати у Теореми 4.1 су неупоредиви, тј. конвергенција једног интеграла не повлачи конвергенцију другог, стога морамо захтевати конвергенцију оба интеграла, тј. услови теореме се не могу на овај начин ослабити.

Пример 4.1. Ако је $f(x) = e^{-\frac{2}{\lambda}x}$, $q(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, онда

$$\int_0^1 f\Big(\frac{\lambda}{2}x\Big) \cdot \big|q(x)\big|\, dx = \int_0^1 e^{-\frac{2}{\lambda}\frac{\lambda}{2}x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\, dx\,,$$

интеграл дивергира, док

$$\int_0^1 \Big(-f'\Big(\frac{\lambda}{2}x\Big)\Big) \cdot x \cdot \big|q(x)\big|\, dx = \int_0^1 \frac{2}{\lambda} \cdot e^{-\frac{2}{\lambda}\frac{\lambda}{2}x} \cdot x \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^1 e^{-x}\, dx\,,$$

интеграл конвергира.

Пример 4.2. Ако је $f(x) = -\ln\Big(\dfrac{2}{\lambda}x\Big)$, $\lambda > 2$, $q(x) = -\dfrac{1}{\ln x}$, $0 < x < 1$, онда

$$\int_0^1 f\Big(\frac{\lambda}{2}x\Big) \cdot \big|q(x)\big|\, dx = \int_0^1 \Big(-\ln\Big(\frac{2}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2}x\Big)\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{\ln x}\Big)\, dx = \int_0^1 dx\,,$$

интеграл конвергира, док

$$\int_0^1 \Big(-f'\Big(\frac{\lambda}{2}x\Big)\Big) \cdot x \cdot \big|q(x)\big|\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x \cdot \Big(-\frac{1}{\ln x}\Big)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{(-\ln x)}\,,$$

интеграл дивергира.

Теорема 4.2. Нека је $\lambda > 0$. Нека је $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ неопадајућа конкавна диференцијабилна функција. Ако функција $q(x)$ задовољава услове

$$\int_0^1 f\big(2\lambda x\big) \cdot \big|q(x)\big|\ dx < +\infty, \ \int_0^1 x \cdot f'\Big(\frac{\lambda}{2}x\Big) \cdot \big|q(x)\big|\, dx < +\infty\,,$$

онда постоји јединствено решење једначине (4.1) које је дефинисано на неком интервалу $(0, h]$, $h \leqslant 1$, такво да је $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0+} y'(x) = \lambda$.

Теорема 4.2 може се аналогно доказати као Теорема 4.1.

Напомена 4.3. Приметимо да конвергенција интеграла, који су задати у формулацији Теореме 4.2 за неко $\lambda_0 > 0$, обезбеђује конвергенцију тих интеграла за произвољно $\lambda \geqslant \lambda_0$, што чини резултат практичнијим.

Напомена 4.4. Ако је $f(t) = t^{\sigma}$, $\sigma > 0$ услови за интеграле који су наведени у Теореми 4.2 се подударају, стога у том случају имамо само један услов за проверу.

4.2 Примене

Следећи примери приказују примену Теореме 4.1 на неким диференцијалним једначинама.

Пример 4.3. Посматрајмо диференцијалну једначину облика

$$y'' = P(x)x^a y^\sigma,\ a \in \mathbb{R},\ \sigma < 0\,. \tag{4.4}$$

Знамо да је $f(t) = t^\sigma$ нерастућа конвексна функција. Ако функција $P(x)$ задовољава услов $\int_0^1 |P(x)| x^{a+\sigma}\, dx < +\infty$, онда су сви услови Теореме 4.1 задовољени, тј. Кошијев проблем

$$y'' = P(x)x^a y^\sigma,\ \lim_{x\to 0+} y(x) = 0,\ \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lambda\,,$$

има јединствено решење за свако $\lambda > 0$. Ово је главни резултат рада [8].

Напомена 4.5. Ако је $P(x) = \pm 1$, онда се добијају једначине (2.1) и (3.1), посматране у другом и трећем поглављу. Ако је $a+\sigma+1 > 0$, онда су сви услови Теореме 4.1 задовољени и онда одговарајући Кошијев проблем има јединствено решење за свако $\lambda > 0$.

Пример 4.4. Посматрајмо диференцијалну једначину

$$y'' = q(x)e^{\sigma y},\ a \in \mathbb{R},\ \sigma < 0\,.$$

Знамо да је $f(t) = e^{\sigma t}$ нерастућа конвексна функција. Ако функција $q(x)$ задовољава услов $\int_0^1 |q(x)| e^{\sigma x}\, dx < +\infty$, онда су сви услови Теореме 4.1 задовољени, тј. Кошијев проблем

$$y'' = q(x)e^{\sigma y},\ \lim_{x\to 0+} y(x) = 0,\ \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lambda\,,$$

има јединствено решење за свако $\lambda > 0$.

Следећи примери приказују примену Теореме 4.2.

Пример 4.5. Посматрајмо диференцијалну једначину

$$y'' = P(x)x^a y^\sigma,\ a \in \mathbb{R},\ 0 < \sigma < 1\,. \tag{4.5}$$

Знамо да је $f(t) = t^\sigma$ неопадајућа конкавна функција. Ако функција $P(x)$ задовољава услов $\int_0^1 |P(x)| x^{a+\sigma} dx < +\infty$, онда су сви услови Теореме 4.2

задовољени, тј. Кошијев проблем

$$y'' = P(x)x^a y^\sigma, \ \lim_{x\to 0+} y(x) = 0, \ \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lambda\,,$$

има јединствено решење за свако $\lambda > 0$.

Напомена 4.6. Ако је $P(x) = \pm 1$, онда се добијају једначине (2.1) и (3.1), посматране у другом и трећем поглављу. Ако је $a+\sigma+1 > 0$, онда су сви услови Теореме 4.2 задовољени и одговарајући Кошијев проблем има јединствено решење за свако $\lambda > 0$. Овај резултат представља уопштење резултата Теореме 2.9 из другог поглавља.

Пример 4.6. Посматрајмо диференцијалну једначину

$$y'' = \ln(y+1), \ x > 0\,.$$

Знамо да је $f(t) = \ln(t+1)$ неопадајућа конкавна функција. Сви услови Теореме 4.2 су задовољени, тј. Кошијев проблем

$$y'' = \ln(y+1), \ \lim_{x\to 0+} y(x) = 0, \ \lim_{x\to 0+} y'(x) = \lambda\,,$$

има јединствено решење за свако $\lambda > 0$.

Литература

[1] I.V. Astashova. On asymptotical behavior of solutions to a quasi-linear second order differential equation. *Functional Differential Equations*, 16: 93–115, 2009.

[2] R. Bellman. *Stability theory of differential equations.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

[3] T.A. Chanturiya, I.T. Kiguradze. *Asymptotic properties of solutions of non-autonomous ordinary differential equations (Russian).* Nauka, Moscow, 1990.

[4] O. Dosly, P. Rehak. *Half-linear differential equations.* Elselvier, 2005.

[5] P. Hartman. *Ordinary differential equations.* John Wiley & Sons, New York, 1964.

[6] J. Knežević-Miljanović. Asymptotic behavior of solutions of a singular Emden-Fowler equation. *Differential Equations*, 41(8): 1178–1180, 2005.

[7] J. Knežević-Miljanović. Vertical asymptotes of solutions of the Emden-Fowler equation. *Differential Equations*, 43(12): 1753–1755, 2007.

[8] J. Knežević-Miljanović. On the Cauchy problem for an Emden-Fowler equation. *Differential Equations*, 45(2): 267–270, 2009.

[9] J. Knežević-Miljanović. Asymptotic properties of solutions of the Emden-Fowler equation at infinity. *Differential Equations*, 47(1): 149–152, 2011.

[10] Đ. Krtinić, M. Mikić. Asymptotic behavior of solutions of Cauchy problem for sublinear Emden-Fowler equation (рад на рецензији).

[11] Đ. Krtinić, M. Mikić. Existence and uniqueness of solution of some Cauchy problems for Emden-Fowler equation (рад на рецензији).

[12] Đ. Krtinić, M. Mikić. On the Cauchy problem for a generalized Emden-Fowler type equation (рад на рецензији).

[13] Đ. Krtinić, M. Mikić. Note on asymptotical behavior of solutions of Emden-Fowler equation and the existence and uniqueness of solution of some Cauchy problem. *Miskolc Mathematical Notes*, 18(1): 285–294, 2017.

[14] M. Mikić. Note about asymptotic behaviour of positive solutions of superlinear differential equation of Emden-Fowler type at zero. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 40(1): 105–112, 2016.

[15] A. Polyanin, V. Zaitsev. *Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Chapman & Hall/CRC, New York, 2003.

[16] S.D. Taliaferro. On the positive solutions of $y'' + \phi(t)y^{-\lambda} = 0$. *Nonlinear Analysis, theory, methods and applications*, 2(4): 437–446, 1978.

[17] S.D. Taliaferro. A nonlinear singular boundary value problem. *Nonlinear Analysis, theory, methods and applications*, 3(6): 897–904, 1979.

Биографија

Марија Микић рођена је 12. маја 1987. године у Смедеревској Паланци. Завршила је Основну школу „Вук Караџић" у Смедеревској Паланци као носилац Вукове дипломе и ђак генерације. Паланачку гимназију завршила је као носилац Вукове дипломе.

Основне студије Математичког факултета, Универзитета у Београду, уписала је 2006. године и дипломирала на смеру Нумеричка математика и оптимизација 2010. године, са просечном оценом 9,50. Мастер студије, на студијском програму Математика–Теоријска математика и примене, завршила је 2011. године са просечном оценом 10,00. Докторске студије Математичког факултету у Београду, уписала је 2011. године.

Од 2010. године запослена је на Математичком факултету, прво као сарадник у настави (2010-2012), затим као асистент (од 2012. године до данас) за научну област Диференцијалне једначине. Током студија била је стипендиста Фонда за младе таленте.

Списак научних радова публикованих или прихваћених за штампу:

[1] Đ. Krtinić, M. Mikić: Note on asymptotical behavior of solutions of Emden-Fowler equation and the existence and uniqueness of solution of some Cauchy problem, Miskolc Mathematical Notes, 18(1):285–294, 2017. (M23)

[2] M. Mikić: Note about asymptotic behaviour of positive solutions of superlinear differential equation of Emden-Fowler type at zero, Kragujevac Journal of Mathematics, 40(1):105–112, 2016. (M51)

[3] J. Golubović, A. Protić, M. Zečević, B. Otašević, M. Mikić: Artificial neural networks modeling in ultra performance liquid chromatography method optimization of mycophenolate mofetil and its degradation products, Journal of Chemometrics, 28(7):567–574, 2014. (M21)

[4] J. Golubović, A. Protić, M. Zečević, B. Otašević, M. Mikić, Lj. Živanović: Quantitative structure retention relationships of azole antifungal agents in reversed-phase high performance liquid chromatography, Talanta, 100:329–337, 2012. (M21)

Списак радова у зборницима

[1] M. Mikić, M. Stamenković: Three parametric testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative balance of heavy material particle on eccentrically

rotating rough circle line, Scientific review (2013) series: Scientific And Engineering - Special Issue Nonlinear Dynamics S2: 325–332, 2013.

[2] M. Mikić, M. Stamenković: Testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative equilibrium of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line, with constant angular velocity, Proceedings of the 4th International Congress of Serbian Society of Mechanics: 983–988, 2013.

Списак саопштења на конференцијама

[1] Đ. Krtinć, M. Mikić: Note of some asymptotic properties of solutions of Emden-Fowler equation, Symposium mathematics and application, Faculty of Mathematics, Belgrade 2017.

[1] M. Mikić, J. Knežević-Miljanović: Some asymptotic properties of second order differential equations, XIII srpski matematički kongres, Vrnjačka banja 2014.

[2] M. Mikić, M. Stamenković: Testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative equilibrium of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line, with constant angular velocity, Fourth Serbian congress on theoretical and applied mechanics, Vrnjačka banja 2013.

[3] M. Mikić, M. Stamenković: Three parametric testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative balance of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line, with constant angular velocity, Symposium Nonlinear Dynamics Milutin Milanković, Multidisciplinary and Interdisciplinary Applications, Belgrade 2012.

[4] M. Mikić, M. Stamenković: Three parametric testing of singularity and position of nonlinear dynamics relative balance of heavy material particle on eccentrically rotating rough circle line, 8th European Nonlinear Dynamics Conference, Vienna 2014.

Учешће на пројектима

[1] „Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала", Министарство просвете, науке и технолошког развоја 174001, (2011-)

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Марија Микић

број уписа 2016 / 2011

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Асимптотска својства решења једначина Емден-Фаулера и

њихових уопштења

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 7.11.2017.

Марија Микић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Марија Микић

Број уписа 2016/2011

Студијски програм Математика

Наслов рада Асимптотска својства решења једначина Емден-Фаулера и њихових уопштења

Ментор др Ђорђе Кртинић

Потписани Марија Микић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 7.11.2017.

Марија Микић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Асимптотска својства решења једначина Емден-Фаулера и

њихових уопштења

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 7.11.2017.

Марија Микић

1. **Ауторство** - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство - некомерцијално – без прераде**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прераде**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство - делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.