

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Милан С. Цајић

**МОДЕЛИРАЊЕ СЛОЖЕНИХ ХИБРИДНИХ
СТРУКТУРА ФРАКЦИОНОГ ТИПА И
ПРИМЕНА У ДИНАМИЦИ СИСТЕМА
КРУТИХ И ДЕФОРМАБИЛНИХ ТЕЛА**

докторска дисертација

Београд, 2017.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Milan S. Cajić

**MODELING OF COMPLEX FRACTIONAL
ORDER HYBRID STRUCTURES AND
APPLICATION IN DYNAMICS OF SYSTEMS
OF RIGID AND DEFORMABLE BODIES**

doctoral dissertation

Belgrade, 2017.

ПОДАЦИ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

Ментор: **др Михаило Лазаревић**, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

Чланови комисије: **др Александар Обрадовић**, редовни професор
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Душан Зорица, виши научни сарадник
Математички институт САНУ

др Борислав Гајић, виши научни сарадник
Математички институт САНУ

др Немања Зорић, доцент
Универзитет у Београду, Машински факултет

Датум одбране: _____ 2017.

Резултате садржане у докторској дисертацији докторант је реализовао у оквиру више истраживачких тема на пројекту ОИ 174001 под називом *„Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала“*, руководиоца проф. др Катица (Стевановић) Хедрих, који је финансиран од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије и координиран преко Математичког института САНУ. Сва истраживања везана за докторску дисертацију урађена су уз консултације са ментором проф. др Михаилом Лазаревићем.

Изјаве захвалности

Користим ову прилику да се најсрдачније захвалим свом ментору професору др Михаилу Лазаревићу, чије су добронамерне критике, стручна помоћ и морална подршка током докторских студија и израде докторске дисертације пресудно утицале на избор теме и квалитет рада. Желим да се најтоплије захвалим професорки др Катици Стевановић Хедрих, руководиоцу пројекта ОИ 174001, која ме је увела у научно-истраживачки рад кроз бројна предавања намењена младим истраживачима докторантима и такође јој се захваљујем на корисним коментарима у вези текста докторске дисертације.

Захвалност дугујем и свим професорима Машинског факултета у Београду код којих сам одслушао предавања на докторским студијама и полагао испите, а који су тиме допринели мом усавршавању. Речи захвалности упућујем свим члановима комисије, др Душану Зорици, вишем научном сараднику на Математичком институту САНУ, др Бориславу Гајићу, вишем научном сараднику на Математичком институту САНУ, др Александру Обрадовићу, редовном професору на Машинском факултету у Београду и др Немањи Зорићу, доценту на Машинском факултету у Београду, који су својим конструктивним примедбама и препорукама допринели да завршна верзија дисертације буде боља.

Посебну захвалност дугујем колеги др Данилу Карличићу на изузетној сарадњи, несебичној помоћи и саветима који су допринели да садржај дисертације буде актуелан, као и на размени бројних идеја које су ме мотивисале да истрајем у свом раду.

Коначно, захвалио бих се супрузи Данки, родитељима и сестри на стрпљењу, разумевању и подршци у најтежим тренуцима. Мојим ћеркицама Милијани и Јулијани дугујем све радосне тренутке које сам пропустио у овом периоду.

“If you have an apple and I have an apple and we exchange apples, then you and I will still each have one apple. But if you have an idea and I have an idea and we exchange these ideas, then each of us will have two ideas.”

George Bernard Shaw

„Ако ја имам јабуку и ти имаш јабуку, па дамо један другом те јабуке и даље ћемо имати по једну јабуку. Али, ако разменимо идеје имаћемо по две.“

Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела

Резиме

Предмет ове докторске дисертације је истраживање у области моделирања и анализе динамичког понашања система крутих тела повезаних хибридниим елементима фракционог типа и сложених система наноструктура чија су вискоеластична својства описана изводима фракционог реда. Дати феноменолошки модели хибридних елемената и наноструктура представљају апстракције реалних елемената везаних у систем крутих тела или сложених система наноструктура са својствима дисипације механичке енергије, тако да омогућавају анализу динамике система крутих тела и осцилација наноструктура. Пасивни и полу-активни елементи, са пригушењем и адаптронским својствима у систему више крутих тела, су моделирани одговарајућим конститутивним једначинама фракционог типа. Једначине кретања система крутих тела дате су у облику Lagrange-ових једначина друге врсте у коваријантној форми, а једначине генералисаних сила везаних елемената добијене су применом одговарајуће нумеричке формуле за апроксимацију фракционог извода. Одређени су одзиви неуправљаног роботског система нумеричким решавањем система нелинеарних диференцијалних једначина фракционог реда. У случају комплексних система наноструктура, посматране су осцилације наноштапа, наногреде и сложених система више вискоеластично спрегнутих наногреда, применом конститутивних релација базираних на нелокалној теорији еластичности и фракционим моделима вискоеластичног тела. Једначине за такве механичке системе изведене су применом d'Alembert-овог принципа и датих конститутивних релација у оквиру одговарајућих теорија штапа, греде и плоче. Решења добијених парцијалних диференцијалних једначина фракционог реда линеарних система одређена су применом аналитичких

метода базираних на Laplace-овој и Mellin-Fourier-овој трансформацији и Cauchy-јевом рачуну остатака. Извршена је и детаљна параметарска анализа и испитани су утицаји различитих параметара модела, а у неким примерима и утицај броја и маса додатих наночестица и примењеног аксијалног магнетног поља, на кружне фреквенције, коефицијент гушења и временски одзив посматраних система. Нелинеарне диференцијалне једначине фракционог реда, добијене у случају наногреде са геометријском нелинеарношћу која осцилује на фракционој виско-Pasternak-овој подлози, решене су пертубационом методом више временских скала. Добијена су апроксимативна решења и аналитички изрази за амплитудно-фреквентни одзив система у случајевима комбиноване параметарске и спољашње суб-хармонијске и супер-хармонијске резонанце. За све приказане примере извршена је детаљна параметарска анализа, где су испитани утицаји различитих параметара модела на динамику система. Показано је да нелокални ефекти и пригушење фракционог типа имају значајан утицај на динамику система, тј. фреквенције и амплитуде осцилација линеарних система и амплитудно-фреквентни одзив нелинеарног система.

Кључне речи: фракциона вискоеластичност, нелокална теорија еластичности, сложени системи наноструктура, хибридни системи, теорија осцилација, адаптроника, систем више крутих тела, динамика робота.

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Механика

УДК: 531.36(043.3)

62-52(043.3)

Modeling of complex fractional order hybrid structures and application in dynamics of systems of rigid and deformable bodies

Abstract

The research subject of this doctoral dissertation is in the field of modeling and analysis of dynamic behavior of rigid multibody systems, connected with fractional order hybrid elements, and complex nanostructure based systems with fractional order viscoelastic properties. Given phenomenological models of hybrid elements and nanostructures represents real elements connected into rigid multibody systems or complex nanostructure based systems with dissipation properties, in such way, that enables us to analyze the dynamics of rigid body systems and vibration behavior of nanostructures. Passive and semi-active elements in a rigid multibody system, with damping and adaptronic properties, are modeled with corresponding fractional order constitutive relations. Equations of motion of a rigid multibody system are given as Lagrange equations of the second kind in covariant form, while equations for generalized forces of connected elements are obtained using the corresponding numerical formula for an approximation of fractional order derivatives. The response of a non-controlled robotic system is determined by finding the numerical solution of a system of nonlinear differential equations of fractional order. In the case of complex nanostructure based systems, vibration behavior of nanorods, nanobeams and complex systems of multiple nonhomogeneous viscoelastically coupled nanobeams are studied based on constitutive relations of nonlocal elasticity and fractional viscoelasticity theories. Governing equations of such systems are derived by using the d'Alembert's principle and given constitutive equations within the corresponding rod, beam and plate theories. Solutions of obtained fractional order partial differential equations are found using the analytical method based on the Laplace and Mellin-Fourier transforms and Cauchy residue theory. A parametric study is performed and influences of different model parameters, in some cases

also for different numbers and masses of nanoparticles and magnitudes of the axial magnetic field, on frequency, damping ratio and time response of observed systems are examined in details. The nonlinear differential equation of fractional order, which is obtained for the case of geometrically nonlinear oscillations of a nanobeam on fractional visco-Pasternak foundation, is solved by using the multiple scales perturbation method. Approximated analytical expressions for an amplitude-frequency response of a system are obtained for the combination parametric and external sub-harmonic and super-harmonic resonance conditions. For all given examples, a detailed parametric study is performed and influences of different model parameters on the dynamic behavior of systems are examined. It is shown that nonlocal effects and fractional order damping are having the significant influence on the system dynamics, i.e. on frequencies and oscillation amplitudes of linear systems and amplitude-frequency response of a nonlinear system.

Key words: fractional-order viscoelasticity, nonlocal elasticity theory, complex nanostructured systems, hybrid systems, vibration theory, adaptronics, rigid multibody system, dynamics of robots.

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Mechanics

UDC: 531.36(043.3)

62-52(043.3)

Садржај

Увод	1
1.1 Опште напомене	1
1.2 Преглед литературе	3
1.3 Дефиниције извода и интеграла фракционог реда	9
1.4 Фракциони модели вискоеластичног тела	14
1.5 Модели хибридних елемената	20
1.6 Нелокална теорија континуума	25
1.7 Махвелл-ове једначине и силе у наногреди под дејством лонгитудиналног магнетног поља	28
Хибридни елементи фракционог типа у динамици система крутих тела	31
2.1 Уводна разматрања	31
2.2 Хибридни елементи фракционог типа	35
2.3 Генералисане силе хибридних елемената	37
2.4 Апроксимација извода фракционог реда	38
2.5 Хибридни елементи у роботском систему са три степена слободе кретања	40
2.5.1 Генералисане силе различитих типова хибридних елемената	41
2.5.2 Одзив неуправљаног робота	42
2.6 Нумерички резултати и упоредна анализа	45
2.6.1 Генералисане силе током времена	45
2.6.2 Параметарска анализа и одзив неуправљаног робота	48
Осцилације наноштапа и наногреде са пригушењем фракционог типа	53
3.1 Уводна разматрања	53
3.2 Нелокална фракционо вискоеластична конститутивна једначина	54
3.3 Лонгитудиналне осцилације наноштапа	55
3.3.1 Решење фракционе диференцијалне једначине кретања наноштапа	57
3.3.2 Нумеричка анализа	60
3.4 Трансверзалне осцилације наногреде са наночестицом	64
3.4.1 Једначине кретања наногреде са наночестицом	64
3.4.2 Одређивање сопствених вредности и амплитудних функција наногреде са масом	67
3.4.3 Проста наногреда са наночестицом	69
3.4.4 Конзолна наногреда са наночестицом	70
3.4.5 Обострано уклештена наногреда са наночестицом	71
3.4.6 Понашање вискоеластичне наногреде у временском домену	72
3.4.7 Нумерички примери и упоредна анализа	73
Фракциони модели са два времена ретардације и два фракциона параметра	80

4.1	Уводна разматрања.....	80
4.2	Осцилације прсте наногреде на вискоеластичној подлози фракционог реда	81
4.2.1	Једначина слободних осцилација наногреде на вискоеластичној подлози	81
4.2.2	Решење једначине кретања наногреде на вискоеластичној подлози.....	82
4.2.3	Упоредна анализа	87
4.2.4	Нумерички резултати.....	90
4.3	Осцилације наногреде са више наночестица и утицајем аксијалног магнетног поља	96
4.3.1	Решење једначине кретања	98
4.3.2	Нумеричка анализа	100
	Осцилације система више спрегнутих нехомогених наногреда.....	107
5.1	Уводна разматрања.....	107
5.2	Једначине кретања система нехомогених наногреда	108
5.3	Решење система једначина	109
5.4	Нумеричка анализа	114
	Осцилације наноплоче на вискоеластичној подлози	121
6.1	Уводна разматрања.....	121
6.2	Једначина кретања наноплоче и њено решење	122
6.3	Нумеричка анализа	129
	Нелинеарна анализа наногреде на фракционој виско-Pasternak-овој подлози. Комбинована резонанца.....	132
7.1	Уводна разматрања.....	132
7.2	Једначина кретања наногреде на фракционој виско-Pasternak- овој подлози.....	132
7.3	Решење нелинеарне једначине кретања фракционог реда.....	136
7.3.1	Метода више временских скала	138
7.3.2	Суб-хармонијска резонанца.....	140
7.3.3	Супер-хармонијска резонанца.....	141
7.4	Нумерички резултати.....	142
7.4.1	Параметарска анализа за суб-хармонијску резонанцу.....	142
7.4.2	Параметарска анализа за супер-хармонијску резонанцу	145
	Закључна разматрања и научни допринос дисертације	148
	Литература.....	155
	Биографија.....	i
	Изјава о ауторству.....	ii
	Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада.....	iii
	Изјава о коришћењу.....	iv

Глава 1

Увод

1.1 Опште напомене

У литератури се може наћи више назива за математичку дисциплину „fractional calculus“ као што су фракциони рачун, рачун нецелобројног, или произвољног реалног реда, рачун рационалног или разломљеног реда, и други [1-3]. Ипак, у овој дисертацији користимо назив „фракциони рачун“, као и називе извод или интеграл фракционог реда који се усталио у међународној али и домаћој научној литератури. Фракциони рачун уопштава класична правила диференцирања или интеграљења целобројног реда на диференцирање и интеграљење произвољног реалног реда. Термин фракциони извод користиће се у смислу оператора фракционог извода у модификованим конститутивним релацијама вискоеластичних тела за континуалне и дискретне механичке системе, као и модификованог модалног пригушења Rayleigh-јевог типа.

Под термином хибридни елемент ћемо подразумевати механички елемент који је саставни део дискретног система крутих тела који може активно или пасивно утицати на динамику посматраног система. Сматраће се да је маса елемента занемарива, те ће утицај на систем зависити само од усвојене конститутивне релације сила-померање фракционог реда за дати хибридни елемент [134]. Конститутивна једначина може имати пасивни део, описан одговарајућим релацијама које су аналогне релацијама за вискоеластична тела и активни део у виду силе актуатора или пиезокерамике. Такође, као полу-активни елемент може се применити и пригушница са магнетнореолошким особинама. Посматраће се механички системи више крутих тела типа отвореног кинематичког ланца где суседна тела формирају кинематичке парове V класе, тј. њихова кретања су

ограничена холономно склерономним везама, где зглобови дозвољавају само један степен слободе кретања, ротацију или транслацију. Из наведеног следи да ће број степени слободе, а самим тим и број генералисаних координата у таквим системима, зависити од броја крутих тела у систему чији ће број бити ограничен. Хибридни елементи су везани у отворени кинематички ланац за два произвољна тела у систему тако да је деформација, тј. померање елемента сложена функција генералисаних координата.

Под појмом наноструктуре подразумеваћемо моделе оних деформабилних структура које представљају реалне физичке објекте чије се димензије мере на нанометарској скали (приближно у опсегу од 1-100 nm), а имају геометрију сличну макро-структурама као што су штапови, греде и плоче. Наноструктуре могу бити начињене од различитих материјала, као што су угљеничне нанотубе и графени, а затим и структуре сачињене од борон нитрида, цинк оксида, сребра, злата и др. Наноструктуре су описане моделима наноштапа, наногреде или наноплоче. Иако се описивање физичких особина и механичког понашања наноструктура тешко може извршити експерименталним испитивањима због високе цене коштања и слабе контроле параметара, у литератури се могу наћи експериментални резултати са мереним карактеристикама као што су Young-ов моду еластичности, граница лома или затезна чврстоћа. Алтернатива тој анализи наноструктура је могућа примена атомистичких метода, од којих је најпознатија молекуларна динамика. Овакве методе, базиране на физичким законима који важе на атомској скали, најчешће захтевају велике рачунарске ресурсе и дуго време прорачуна за анализу динамичког понашања или стабилности, нарочито када су димензије наноструктура веће или њихов састав сложенији, као што је у случају нанокомпозита. Из наведених разлога, последњих деценија и година интензивирана је примена модификованих метода и модела континуума у анализи нано и микро-структура. Овакве методе дају механичке моделе којима се на једноставнији начин може анализирати механичко понашање наноструктура и где се решења могу наћи применом аналитичких или нумеричких метода које не захтевају велико време прорачуна. Такође, таквим методама је могуће анализирати сложеније

системе наноструктура које се налазе у неком медијуму или нанокомпозите уз укључење бројних других физичких ефеката, као што је утицај магнетног или температурног поља. Последњих година, Eringen-ова нелокална теорија еластичности је примењена у великом броју радова који се баве анализом динамике и стабилности наноструктура, где су ефекти мале скале узети у обзир коришћењем нелокалног параметра.

Проблеми дисипације у наноструктурама су такође значајни за анализу и примену у бројним нано/микро електромеханичким, оптомеханичким и другим минијатурним уређајима. Дobar пример таквих уређаја су нано/микро резонатори који раде на високим фреквенцијама (GHz) у којима долази до појаве термо-механичког шума услед присуства дисипационих механизма спољашњег и унутрашњег порекла. Под спољашњом дисипацијом најчешће се мисли на интеракцију резонатора са флуидом или неким другим медијумом који га окружује. У унутрашње механизме дисипације спада запреминско и површинско трење и дисипација на местима на којима се резонатор учвршћује за основу. У сврху одређивања мере дисипације енергије по моду осциловања користи се тзв. фактор дисипације који је реципрочна вредност Q-фактора. Такође, дисипација механичке енергије код осцилација наноструктура се у моделима континуума може представити применом различитих реолошких модела, у случају унутрашњих извора дисипације, или Rayleigh-јевим пригушењем у случају спољашњих извора дисипације. Модификована верзија нелокалне конститутивне једначине Eringen-а је примењена тако да укључује и нелокалне ефекте и ефекте дисипације коришћењем различитих вискоеластичних модела фракционог реда.

1.2 Преглед литературе

Развој вискоеластичних модела фракционог типа започет је у пионирским радовима Gemant-а 1936, Blair-а 1944, Gross-а 1947, Gerasimov-а и Rabotnov-а 1948. године. Поновно интересовање за развој фракционог рачуна као засебне гране математичке анализе настаје седамдесетих година

двадесетог века. Књига Oldham-а и Spanier-а [4] је прва озбиљнија студија фракционог рачуна. Касније, публиковане су и бројне друге књиге из фракционог рачуна у којима се може наћи детаљан приказ ове теорије као што су Samko и остали [5], Kiryakova [6], Podlubny [7], Hilfer [8], Kilbas и остали [9], затим Diethelm [10] и др. Велики успех и препознатљивост у широј научној заједници фракциони рачун дугује својој примени у бројним научним дисциплинама: биоинжењерству [11], физици и инжењерству [12], моделирању и управљању [13, 14, 16], нанотехнологији [15], као и у теорији динамике честица, поља и медијума [17].

Током 60-тих и 70-тих година XX века, развој теорије вискоеластичности базиране на фракционом рачуну кретао се у два правца формулишући еквивалентне конститутивне једначине. Руски истраживачи су у конститутивним релацијама вискоеластичних тела најчешће користили Boltzmann-Volterra-ову интегралну једначину са сингуларним језгром наследних својстава, док су се западни истраживачи користили интегралним и диференцијалним операторима фракционог реда. Вреди истаћи резултате следећих руских истраживача: Meshkov-а, Shermergor-а и Rossikhin-а, као и резултате западних истраживача: Caputo-а и Mainardia, в. [18-20]. Bagley и Torvik [21-25] и Wharmby и Bagley [26] су показали везу између фракционих реолошких модела и механизма дисипације на молекуларном нивоу проистеклих из молекуларне теорије. Допринос у експерименталној верификацији фракционих модела, као и индентификацији параметара модела, дали су: Fenander [27, 28], Enelund и остали [29], Taylor и остали [30], Petrović и остали [31], Catania и Sorrentino [32], Lewandowski и Chorazyczewski [33], Grahovac и Žigić [3, 34]. У литератури се најчешће могу срести фракциони модели који су добијени генерализацијом Kelvin-Voigt-овог, Maxwell-овог или Zener-овог, односно стандарног вискоеластичног модела, коришћењем оператора фракционих извода, в. Rossikhin и Shitikova [35-38] и Atanacković [39, 40], или дистрибуираног реда, в. Atanacković [41]. Примена фракционих модела у дискретним системима са једним или више степени слободне кретања и континуалним системима (структурама) за описивање пригушених осцилација, једначинама дифузије, простирања таласа или

варијационом рачуну приказана је у радовима Rossikhin и Shitiokova [42-44], Vačlić и Atanacković [45], Hedrih и Filipovski [46], Hedrih [47] и Atanacković и остали [48, 49]. Осцилације структура са фракционим пригушењем и стохастичким побудама приказане су у раду Di-Lorenzo и остали [50]. Још један важан сегмент примене фракционог рачуна је у проблемима стабилности и пројектовању фракционих контролера, в. Lazarević [51], Lazarević и остали [52], Lazarević и Tzekis [53], Lazarević [54], Monje и остали [55], Li и Chen [56], Dadras и Momeni [57].

У литератури се могу наћи бројне нумеричке шеме за дискретизацију и решавање линеарних [58-61] и нелинеарних [62-64] фракционих диференцијалних једначина. У радовима Atanackovića и Stankovića [65, 66] дата је јединствена нумеричка шема за апроксимацију извода и интеграла фракционог реда. Бројни нумерички примери примене наведене шеме на различите функције и диференцијалне једначине фракционог реда дати су у радовима Pooseh и остали [67, 68].

Термини као што су паметни материјали, структуре и интелигентни системи су познати из литературе и користе се у разним техничким гранама. Мање познати технички назив адаптроника обједињује све претходно поменуте. Адаптронски системи се поред управљачког дела састоје и од различитих мултифункционалних елемената, као што су различити типови сензора или актуатора, в. Janocha [69] и Lazarević и остали [70]. У механици дискретних система крутих тела, применом различитих активно-пасивних мултифункционалних елемената, базираних на магнетнореолошким својствима флуида [71], затим пиезоелектричним, вискоеластичним или термоеластичним својствима материјала, може се значајно утицати на динамику таквих система и њихова адаптронска својства, Hedrih и Goroško [72]. Нарочиту примену у индустрији имају роботски системи чија се динамика може описати јединственим приступом и применом метода аналитичке механике, в. Shabana [73] и Čović и Lazarević [74]. Бројни решени задаци директног и инверзног кинематичког проблема и динамике роботских система типа отвореног и затвореног кинематичког ланца могу се наћи у Lazarević [75]. Модификовани модели претходно поменутих

мултифункционалних елемената са изводима фракционог реда примењени у роботским системима обрађени су у Сајић и остали [76, 77], у случају проблема одређивања генерализаних сила, односно у Сајић [78], у случају проблема одређивања одзива неуправљаног роботског система.

У литератури се такође може наћи значајан број радова где се фракциони вискоеластични модели примењују у динамици дискретних система. Тако је у раду Nedrih [79] предложен лаки елемент фракционог типа са својствима пужења материјала који је примењен у моделу који описује динамику контакта између зубаца зупчаника. Žigić [3] је разматрао проблем осцилација конструкција у облику стуба састављеног од два блока при дејству сеизмичких побуда, где је модел пригушених осцилација претпостављен као лаки вискоеластични штап фракционог реда и занемарљиве масе.

Настанак модификованих теорија континуума, као што су теорија спрегнутих напона [80], као и различите градијентне теорије [81], везује се за другу половину двадесетог века. Нарочиту пажњу је привукла нелокална теорија еластичности Eringen-а [82-84]. Eringen је у својим радовима предложио нелокалне конститутивне релације, базиране на постојању просторних нелокалних ефеката у материјалима и структурама. Изворно, нелокална конститутивна релација је дата у интегралном облику [83], коју је аутор у каснијим радовима избором одговарајућих функција језгра преформулисао у диференцијалну форму [84]. Диференцијална форма конститутивне релације нелокалне еластичности, за разлику од интегралне, има својства тзв. слабе нелокалности. Недавно, Challamel и остали [85, 86] су предложили генерализовани Eringen-ов модел на основу фракционих извода као просторно нелокалних оператора. На основу поређења једначина за простирање дисперзних таласа за фракциони генерализовани модел и једначине дисперзних таласа добијене из Born-Karman-овог модела динамике атомске решетке, аутори су показали да предложени фракциони модел даје боље резултате од класичне Eringen-ове теорије. У раду Peddieson и остали [87], нелокална теорија је први пут употребљена за конструкцију нелокалног Euler-Bernoulli-јевог модела греде, а у сврху описивања

механичког понашања конзолних нанограда. У литератури [88-92] постоје бројни примери решавања различитих проблема савијања, извијања, пропагације еластичних таласа, слободних и принудних осцилација наноструктура моделираних применом нелокалне Eringen-ове конститутивне релације. У раду Karličić и остали [93] анализиране су слободне осцилације угљеничних наноцеви, где је урађена упоредна анализа за Reddy и Hu-Tai модел нанограде применом нелокалне и градијентне теорије еластичности. Такође, у радовима Karličić и остали [94-99] анализирани су различити проблеми слободних осцилација и стабилности сложених, еластично или вискоеластично спрегнутих наноструктура као што су наноплоче, наноштапови и нанограде. Поред одређивања сопствених фреквенција и критичних сила извијања система, у наведеним радовима испитивани су и утицаји температурног и магнетног поља, или оштећења у виду прслине, на динамику и стабилност посматраних система. У раду Karličić и остали [100] предложен је нелокални модел наноплоче која је изложена дејству аксијалног магнетног поља за одређивање промене фреквенције и анализу динамике наносензора масе од графенског листића. Наноплоча је дата као механички модел који је еквивалентан моделу ортотропне плоче, добијеном применом Kirchhoff-Love-ове теорије плоче, тако да узима у обзир нелокалне ефекте, тј. ефекте који зависе од величине структуре. Већина наведених нелокалних модела наноструктура је заснована на диференцијалној форми нелокалне конститутивне релације, в. [84]. Ипак, оваква форма конститутивне релације има своје недостатке, тј. долази до парадокса код примене одређених граничних услова на нелокалним диференцијалним моделима наноструктура, посебно код нелокалних модела конзолних греда. Решење ових проблема је предложено у литератури [101-104] применом модификованих интегралних или интегро-диференцијалних нелокалних конститутивних релација.

Ефекти дисипације у нано електромеханичким системима који потичу од различитих извора описани су у раду Imboden-а и Mohanty-а [105]. Примена модификованих нелокално-еластичних и фракционо-вискоеластичних конститутивних релација напон-деформација је први пут

предложена у раду Сајић и остали [106] на проблему слободних осцилација вискоеластичног наноштапа. Касније, у раду Ansari и остали [107] је анализиран проблем слободних осцилација Timoshenko-овог модела фракционо вискоеластичне наногреде. Сајић и остали [108] су разматрали проблем слободних осцилација фракционе вискоеластичне наногреде са масом, применом модификоване нелокалне конститутивне релације и Euler–Bernoulli-јеве теорије греда. Касније, у раду [109] исти аутори су анализирали проблем слободних осцилација нелокалне наногреде на фракционој вискоеластичној подлози где су добијене једначине кретања система са два времена ретардације и два фракциона параметра.

Посебан случај у анализи динамике структура представљају геометријски нелинеарне осцилације греда и плоча, где су нелинеарне деформације структуре узете у обзир увођењем у модел von Kármán-ове нелинеарне релације деформација-померање. У случају када у таквим структурама постоји фракционо пригушење Rayleigh-јевог типа или пригушење које потиче од структура описаних фракционим вискоеластичним моделима, анализа нелинеарних осцилација захтева посебне методе решавања добијених нелинеарних диференцијалних једначина са фракционим изводима. Примена пертурбационе методе више временских скала, усвајањем одговарајућих претпоставки за изводе фракционог реда, показала се врло ефикасном у решавању таквих једначина, в. Rossikhin и остали [110-113].

У раду Ansari и остали [114], где је разматран проблем слободних осцилација наногреде са геометријском нелинеарношћу, предложена је примена нелокалне и фракционо вискоеластичне конститутивне релације. Нелинеарне диференцијалне једначине фракционог реда које описују систем су решене нумеричком предиктор-коректор методом и приказани су одзиви система за различите вредности параметара модела. У раду Ansari и остали [115] анализирани су линеарне и нелинеарне осцилације микро и нано Timoshenko-вих модела греда, применом модификоване теорије градијената деформације, фракционог Kelvin-Voigt-овог модела и von Kármán-ових релација за нелинеарне деформације. Фракционе нелинеарне

диференцијалне једначине су решене предиктор-коректор методом и временски одзив система приказан је за различите вредности параметара модела и различите граничне услове. Такође, у раду Oskouie и Ansari [116] спроведена је анализа линеарних и нелинеарних осцилација фракционих вискоеластичних Timoshenko-вих модела наногреда на основу Gurtin–Murdoch-ове теорије површинских напона. Коришћена је слична методологија решавања фракционих нелинеарних диференцијалних једначина и параметарска анализа као и у претходно наведеним радовима.

1.3 Дефиниције извода и интеграла фракционог реда

Фракциони рачун је математичка теорија која се бави изводима и интегралима нецелобројног реда, тј. представља уопштење класичне теорије интегралног и диференцијалног рачуна. Настанак ове теорије и њен први помен везује се за Leibniz-ов рад објављен 1695. године, где је први пут уведена ознака за извод n -тог реда. У писму које је касније поводом овог рада L'Hôpital упутио Leibniz-у са питањем шта би било када би се уместо n -тог разматрао извод реда $1/2$ тј. да је n разломак, уследио је добро познати одговор: „То ће довести до парадокса, од којих ће једног дана проистећи корисне последице“. Исте године, у писму које је Leibniz упутио Johann-у Bernoulli-ју спомиње се извод „општег реда“. Поред тога што се у фракционом рачуну уместо целобројног, n -тог реда извода или интеграла може јавити и реалан број, исто тако се може јавити и комплексан број. Општост новонастале теорије привукла је у предстојећем периоду и друге познате математичаре као што су Euler, Fourie, Liouville, Riemann, Abel, Lagrange, Laurent и Laplace.

Након Leibniz-а, Euler се такође заинтересовао за ову тему. Наиме, у својој дискусији о n -том изводу функције по променљивој x , констатовао је да се извод може наћи континуалним диференцирањем. Међутим, такав принцип се не би могао применити у случају да је n рационалан број. Даље је тврдио да би се могуће решење овог питања могло тражити у примени методе интерполације коју је он објаснио у својој дисертацији.

Lagrange је на индиректни начин дао свој допринос фракционом рачуну. Он је представио закон о експонентима диференцијалних оператора целобројног реда у форми

$$\frac{d^s}{dx^s} \frac{d^m}{dx^m} f = \frac{d^{s+m}}{dx^{s+m}} f. \quad (1.1)$$

Касније је овај закон проширен за произвољно s и m уз извесна ограничења на функцији $f(x)$.

Laplace је 1812. године дефинисао фракциони извод преко интеграла али се први помен фракционог извода произвољног реда помиње у раду Lascoix-а, који је даље разрадио идеју Euler-а скоро сто година касније. За n -ти извод функције $f = x^m$, где је m позитиван број, извео је следећи израз

$$D^n f = \frac{d^n}{dx^n} (x^m) = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n. \quad (1.2)$$

Заменом факторијела у једначини (1.2) одговарајућом Euler-овом гама функцијом, добија се следећа формула за фракциони извод

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (1.3)$$

где су m и n рационални бројеви а гама функција је дефинисана за $z > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx. \quad (1.4)$$

Специјални случај формуле (1.3) је Lascoix-а израчунао за вредности $f = x$, $n = 1/2$ и $m = 1$ добивши

$$D^{1/2} f = \frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} (x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}. \quad (1.5)$$

Добијени резултат не одступа од резултата који би за исти случај добили применом саврамених метода фракционог рачуна. Још један специјални случај који се може разматрати из посматране формуле је случај када је $m = 0$ и када је функција константа, одакле се добија да је извод реда α различит од нуле:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} (1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0. \quad (1.6)$$

Ипак, примена Lascoix-ве методе је била ограничена на неке функције, тако да овај метод није имао толико велики значај. У даљем развоју фракционог

рачуна допринос је дао и Fourier, представивши извод произвољног реда α уз помоћ интегралне репрезентације функције

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) d\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} t^\alpha \cos \left[t(x - \varepsilon) + \frac{1}{2} \alpha \pi \right] dt. \quad (1.7)$$

Прву примену фракционог рачуна нашао је Abel у решавању интегралне једначине која описује проблем таутохроне. Проблем таутохроне (изохрон или истовремени проблем) представља проблем одређивања криве у равни по којој се спушта материјална тачка без трења и под утицајем силе гравитације у најнижу тачку криве, тако да време спуста не зависи од почетног положаја тачке на кривој. Такође, Abel је решио општи случај интегралне једначине облика

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} y(t) dt = f(x), \quad x \geq a, 0 < \alpha < 1, \quad (1.8)$$

одакле се под претпоставком да је f непрекидна функција на $[a, b]$ добија решење облика

$$y(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha} dt. \quad (1.9)$$

За Abel-ову интегралну једначину у форми

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} y(t) dt = f(x), \quad x \leq b, 0 < \alpha < 1, \quad (1.10)$$

добија се решење облика

$$y(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^\alpha} dt. \quad (1.11)$$

Претходно наведени резултати, а нарочито Abel-ово решење, привукли су пажњу Liouville-а а касније Riemann-а и Holmgren-а, који су међу првима израдили обимније студије на тему фракционог рачуна. Користећи резултате за изводе целобројног реда и развој функције у експоненцијалне редове, Liouville је дао своју прву дефиницију фракционог извода у облику

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}, \quad (1.12)$$

где је функција $f(x)$ дата као

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}, \quad \operatorname{Re}(a_n) > 0. \quad (1.13)$$

Друга Liouville-ова формула облика

$$\frac{d^\alpha x^{-\beta}}{dx^\alpha} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}, \quad \beta > 0, \quad (1.14)$$

је добијена уз помоћ несвојственог интеграла уско везаног за гама функцију. Примена претходно наведених формула је ограничена и оне нису примењиве за широку класу функција. Ипак, нешто касније Liouville је дошао до нове формуле за интеграцију фракционог реда функције која личи на формуле које су данас актуелне

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(x-t) t^{\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.15)$$

где I^α означава интегрални оператор. Liouville се међу првима бавио решавањем линеарних диференцијалних једначина које садрже изводе фракционог реда. Дефиниције извода и интеграла које се данас користе у фракционом рачуну почињу да добијају форму која је и данас актуелна тек са резултатима које је у својим студентским данима добио Riemann а који су објављени постхумно. Riemann је дошао до различитих дефиниција које укључују одређени интеграл и примењиве су на степене редове са нецелобројним експонентима у облику

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \Psi(x), \quad (1.16)$$

где је $\Psi(x)$ комплементарна функција која је додата због неодређености у доњој граници c . Holmgren је био први који се у својој дефиницији фракционог извода одрекао комплементарне функције. Захваљујући доприносу Grünwald-a у обједињавању претходних резултата, као и радовима Sonin-a (1869) и Letnikov-a (1872) дошло се до једне од данас најпознатијих дефиниција *Riemann-Liouville*-овог интеграла, (в. [1]). Применом Cauchy-јеве интегралне формуле и заменом факторијела одговарајућом гама функцијом та формула је дата у облику

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (1.17)$$

где је I^α Riemann-Liouville-ов оператор фракционе интеграције, а избором $c = 0$ добија се Riemann-ова формула (1.16) без комплементарне функције, док се за $c = -\infty$ добија једначина еквивалентна Liouville-овој првој формули (1.12), в. [1]. За случај када је $c = 0$, дефиниција Riemann-Liouville-овог фракционог извода се може добити из претходне дефиниције као лева инверзија I^α на следећи начин

$${}^{RL}D^\alpha f(x) = \begin{cases} D^n I^{n-\alpha} f(x), & n-1 < \alpha < n, \\ D^n f(x), & \alpha = n, \end{cases} \quad (1.18)$$

где ${}^{RL}D^\alpha \equiv d^\alpha/dx^\alpha$ означава оператор Riemann-Liouville-овог фракционог извода и $n \in \mathbb{N}$. Riemann-Liouville-ов извод функције (1.18) се може приказати у развијеном облику као

$${}^{RL}D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (1.19)$$

када је $n-1 < \alpha < n$.

У нумеричким методама велики значај за решавање фракционих диференцијалних једначина има и Grünwald-Letnikov дефиниција фракционог извода у облику

$${}^{GL}D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh)}{h^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1.20)$$

где $\binom{\alpha}{k}$ означава генерализовани биномни коефицијент са гама функцијама уместо факторијела. Недостатак Riemann-Liouville дефиниције фракционог извода да у диференцијалним једначинама уместо класичних почетних услова са целобројним изводима користи почетне услове фракционог реда, модификацијом дефиниције фракционог извода отклонио је Caputo, в. [1]. И Rabotnov је годину дана пре Caputo-а употребио сличан диференцијални оператор у проблемима вискоеластичности [19], али је овај оператор у данашњој литератури познат као Caputo-в фракциони извод.

Дефиниција овог фракционог извода дата је у облику

$${}^c D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n f(t)}{dt^n} dt, \quad n-1 < \alpha < n, \quad (1.21)$$

где је $f(x)$ функција са $(n-1)$ непрекидних извода, где је $n \in \mathbb{N}$.

Све до седамдесетих година 20. века развој фракционог рачуна је текао веома споро, са малим бројем објављених радова. У овом периоду, свој допринос овој области дали су Н. Davis, А. Erdelyi, Н. Kober, G. Hardy, J. Littlewood, М. Riesz, S. Samko, I. Sneddon, А. Zygmund, Е. Love, в. [4] и [5]. Прва међународна конференција из фракционог рачуна одржана је 1974. године у САД. Од тада па до данашњих дана објављен је велики број научних радова и књига посвећених теорији и примени фракционог рачуна, а историјски преглед значајних публикација, конференција, курсева и семинара са овом темом може се наћи у [6].

1.4 Фракциони модели вискоеластичног тела

Фракциони рачун је примењен у многим научним областима, и у литератури се често среће у вискоеластичним моделима разних типова полимера, еластомера, биолошких материјала или у описивању модалног пригушења код осцилација структура. Оператори фракционог реда имају нелокална својства, те је њихова примена у конститутивним релацијама вискоеластичних материјала природна, с обзиром на њихова својства пригушења, релаксације, пузања и меморије. Применом фракционих вискоеластичних модела, који имају мањи број параметара у односу на моделе са целобројним изводима, може се постићи жељена тачност у предвиђању механичког понашања реалних материјала, Koeller [18]. У раду [22] показана је и веза фракционих вискоеластичних модела са молекуларним теоријама које описују макроскопско понашање вискоеластичних материјала.

Веза напона и деформације код реалних тела је најчешће у области између идеалних еластичних тела, где напон линеарно зависи од функције деформације, и идеалних вискозних флуида, где је напон функција првог извода функције деформације. У сврху моделирања реалних материјала

настали су бројни конститутивни модели код којих напон линеарно зависи од фракционог извода функције деформације, при чему је ред фракционог извода између нуле и јединице, тј. узима вредности чије се границе односе на идеална еластична тела и идеалне вискозне флуиде.

У Atanasković и остали [48] приказана је општа форма конститутивне једначине напон-деформација $\sigma - \varepsilon$ за линеарне фракционе моделе у облику

$$\sum_{n=0}^N a_n {}^{RL}D^{\alpha_n} \sigma(t) = \sum_{m=0}^M b_m {}^{RL}D^{\beta_m} \varepsilon(t), \quad t > 0, \quad (1.22)$$

где су $a_0, \dots, a_N, b_0, \dots, b_M, \alpha_0, \dots, \alpha_N$ и β_0, \dots, β_M реалне константе. У горњој једначини коефицијенти α_n и β_m представљају фракционе параметре тј. означавају ред извода у операторима ${}^{RL}D^{\alpha_n}$ и ${}^{RL}D^{\beta_m}$ Riemann-Liouville-ове дефиниције фракционог извода. Константе a_n и b_m имају физичко значење у чињеници да представљају уопштена времена релаксације (ретардације) у конститутивној једначини (1.22). Генерализована форма линеарне конститутивне једначине вискоеластичних тела фракционог реда (1.22), може се свести на многе од познатих модела одговарајућим избором параметара a_n, b_n, α_n и β_m . Опште познати Kelvin-Voigt модел може се добити из (1.22) усвајањем следећих вредности параметара: $a_0 = 1, a_i = 0, i = 1, \dots, N, b_0 \neq b_1 \neq 0, b_j = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 1, \beta_j = 0, j = 2, \dots, M$. Ограничења у вредностима параметара модела која проистичу из другог закона термодинамике, тачније из ентропијске неједнакости која се у случају изотермалних процеса своди на дисипациону неједнакост, одређују се применом Fourier-ове трансформације конститутивне једначине (1.22), тако да се добија комплексни модул у следећем облику

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{\sigma}(\omega)}{\hat{\varepsilon}(\omega)} = E'(\omega) + iE''(\omega), \quad \omega \in [0, \infty), \quad (1.23)$$

где су $\hat{\sigma}(\omega)$ и $\hat{\varepsilon}(\omega)$ Fourier-ове трансформације функција $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$. Даље, E'' представља имагинарни део комплексног модула или тзв. вискозни модул, док реални део E' представља еластични модул. Како би дисипациона неједнакост била задовољена потребно је да E' и E'' буду ненегативне за све вредности $\omega \in [0, \infty)$

$$\tan \delta(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \geq 0, \quad E'(\omega) \geq 0, \quad E''(\omega) \geq 0. \quad (1.24)$$

Пратећи процедуру описану у раду Bagley и Torvik [24], након Fourier-ове трансформације једначине (1.22) комплексни модул се добија у облику

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m (i\omega)^{\beta_m}}{\sum_{n=0}^N a_n (i\omega)^{\alpha_n}}, \quad \omega \in [0, \infty). \quad (1.25)$$

Нормализацијом једначине (1.25) као у [48] и приказивањем исте у следећем облику

$$\hat{E}_n(\omega) = \hat{E}(\omega) \left| \sum_{n=0}^N a_n (i\omega)^{\alpha_n} \right|^2 = E'_n(\omega) + iE''_n(\omega), \quad \omega \in [0, \infty), \quad (1.26)$$

добијамо имагинарну и реалну компоненту као што следи

$$\begin{aligned} E'_n(\omega) &= \left(\sum_{n=0}^N a_n \omega^{\alpha_n} \cos \frac{\alpha_n \pi}{2} \right) \left(\sum_{m=0}^M b_m \omega^{\beta_m} \cos \frac{\beta_m \pi}{2} \right) \\ &+ \left(\sum_{n=0}^N a_n \omega^{\alpha_n} \sin \frac{\alpha_n \pi}{2} \right) \left(\sum_{m=0}^M b_m \omega^{\beta_m} \sin \frac{\beta_m \pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} E''_n(\omega) &= \left(\sum_{n=0}^N a_n \omega^{\alpha_n} \cos \frac{\alpha_n \pi}{2} \right) \left(\sum_{m=0}^M b_m \omega^{\beta_m} \cos \frac{\beta_m \pi}{2} \right) \\ &- \left(\sum_{n=0}^N a_n \omega^{\alpha_n} \sin \frac{\alpha_n \pi}{2} \right) \left(\sum_{m=0}^M b_m \omega^{\beta_m} \sin \frac{\beta_m \pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ограничења на вредности параметара у моделу (1.22), тако да једначина задовољава услове (1.24), детаљно су описана у [48] за четири карактеристична случаја различитих односа параметара a_n , b_n , α_n и β_m .

Поред поменутих линеарних модела треба напоменути да су у литератури заступљени и фракциони модели дистрибуираног реда, [48]. Карактеристична конститутивна релација напон-деформација за дистрибуиране фракционе моделе има облик

$$\int_0^1 \phi_\sigma(\gamma) {}^{RL}D^\gamma \sigma(t) d\gamma = E \int_0^1 \phi_\varepsilon(\gamma) {}^{RL}D^\gamma \varepsilon(t) d\gamma, \quad t > 0, \quad (1.29)$$

где су $\phi_\sigma(\gamma)$ и $\phi_\varepsilon(\gamma)$ конститутивне функције позитивно интеграбилне за $\gamma \in [0, 1]$ или дистрибуције које карактеришу материјал, док E представља генерализовани Young-ов модул еластичности. Једначина (1.29) се може

представити у форми (1.22), уколико се $\phi_\sigma(\gamma)$ и $\phi_\varepsilon(\gamma)$ претпоставе у следећем облику

$$\phi_\sigma(\gamma) = \sum_{n=0}^N a_n \delta(\gamma - \alpha_n), \quad \phi_\varepsilon(\gamma) = \sum_{m=0}^M b_m \delta(\gamma - \beta_m), \quad (1.30)$$

где је δ Dirac-ова дистрибуција. Ограничења на вредности параметара у релацији (1.29) која проистичу из дисипационе неједнакости су описана у [48].

Акцентат ће бити стављен на примеру линеарних фракционих модела типа (1.22). Међутим, времена релаксације/ретардације биће дата у форми за моделе са једним и више фракционих параметара и једним или више времена релаксације/ретардације чија су својства и термодинамичка ограничења описана у радовима Rossikhin и Shitikova [35-38, 44].

Посматрајмо најпре најпростији фракциони Kelvin-Voigt модел у облику

$$\sigma(t) = E_0(\varepsilon(t) + \tau_\sigma^\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon(t)), \quad (1.31)$$

где је E_0 релаксирани модул еластичности, τ_σ је време ретардације, α је фракциони параметар и ${}^{RL}D^\alpha$ је оператор Riemann-Liouville-овог фракционог извода. Први помен овог модела везује се за рад Shermergor-a (в. Rossikhin [19]). Релација (1.31), као и специјални случај овог модела са целобројним изводом $\alpha = 1$, су најчешће примењивани модели у литератури у проблемима из области структурне динамике, [21-25, 44]. Модификовани Kelvin-Voigt-ов модел са два фракциона параметра је дат у облику

$$\sigma(t) = E_0 \left(\varepsilon(t) + \tau_\sigma^\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon(t) + \tau_\sigma^\beta {}^{RL}D^\beta \varepsilon(t) \right). \quad (1.32)$$

Генерализовани фракциони Maxwell-ов модел је приказан коришћењем релације напон-деформација

$$\sigma(t) + \tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \sigma(t) = E_\infty \tau_\varepsilon^\beta {}^{RL}D^\beta \varepsilon(t), \quad (1.33)$$

где је сада са E_∞ означен тренутни модул еластичности и τ_ε је време релаксације. Први модификовани фракциони Maxwell-ов модел је дат у облику

$$\sigma(t) + \tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \sigma(t) = E_\infty \left(\tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon(t) + \tau_\varepsilon^\beta {}^{RL}D^\beta \varepsilon(t) \right), \quad (1.34)$$

где је у односу на претходни случај са десне стране додат још један члан у коме фигурише извод функције деформације α -тог реда и α -ти степен времена релаксације τ_ε^α . Такође, у литератури се може наћи и нешто другачија модификација фракционог Maxwell-овог модела (1.33) у коме је додат још један члан на левој страни једначине у облику

$$\sigma(t) + \tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \sigma(t) + \tau_\varepsilon^\beta {}^{RL}D^\beta \sigma(t) = E_\infty \tau_\varepsilon^\beta {}^{RL}D^\beta \varepsilon(t). \quad (1.35)$$

На крају, трећа модификација Maxwell-овог модела је комбинација претходна два случаја и дата је у форми

$$\sigma(t) + \tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \sigma(t) + \tau_\varepsilon^\beta {}^{RL}D^\beta \sigma(t) = E_\infty \left(\tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon(t) + \tau_\varepsilon^\beta {}^{RL}D^\beta \varepsilon(t) \right). \quad (1.36)$$

Модификовани Kelvin-Voigt (1.31) и Maxwell (1.33) – (1.36) су модели са четири константе. За модификовани Kelvin-Voigt одређујемо вредности параметара E_0 , α , β и τ_σ док код Maxwell-ових модела задајемо вредности параметара E_∞ , α , β и τ_ε , где E_∞ означава тренутни моду еластичности и τ_ε је време релаксације.

Генерализовани стандардни вискоеластични модел фракционог реда има следећи облик

$$\sigma(t) + \tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \sigma(t) = E_0 \left(\varepsilon(t) + \tau_\sigma^\beta {}^{RL}D^\beta \varepsilon(t) \right), \quad (1.37)$$

где имамо два времена ретардације и релаксације као и два фракциона параметра. Модификовани стандардни модел са додатим чланом на десној страни има следећи облик

$$\sigma(t) + \tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \sigma(t) = E_0 \left(\varepsilon(t) + \tau_\sigma^\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon(t) + \tau_\sigma^\beta {}^{RL}D^\beta \varepsilon(t) \right). \quad (1.38)$$

Још један тип модификованог стандардног модела са по једним додатим чланом на левој и десној страни једначине (1.37) има облик

$$\sigma(t) + \tau_\varepsilon^\alpha {}^{RL}D^\alpha \sigma(t) + \tau_\varepsilon^\beta {}^{RL}D^\beta \sigma(t) = E_0 \left(1 + \tau_\sigma^\alpha {}^{RL}D^\alpha + \tau_\sigma^\beta {}^{RL}D^\beta \right) \varepsilon(t). \quad (1.39)$$

Фракциони стандардни вискоеластични модел (1.37) и његове модификације (1.38) и (1.39) су модели са пет параметара, тј. константе E_0 , E_∞ , α , β и τ_ε које се задају у моделу, док се однос времена ретардације τ_σ и релаксације τ_ε одређује из следећих једначина

$$E_\infty = E_{\infty(\beta)} = E_0 \vartheta_\beta^{-1}, \quad \vartheta_\beta = \tau_\varepsilon^\beta \tau_\sigma^{-\beta} \text{ for } \beta > \alpha, \quad (1.40)$$

$$E_\infty = E_{\infty(\alpha)} = E_0 \vartheta_\alpha^{-1}, \quad \vartheta_\alpha = \tau_\varepsilon^\alpha \tau_\sigma^{-\alpha} \text{ for } \alpha > \beta. \quad (1.41)$$

Општа форма фракционог стандардног вискоеластичног модела за једнодимензионални случај и са произвољним бројем чланова је предложена у раду Bagley-ја [24]

$$\sigma(t) + \sum_{i=1}^n \tau_{\varepsilon}^{\alpha_i} {}^{RL}D^{\alpha_i} \sigma(t) = E_0 \left(\varepsilon(t) + \sum_{j=1}^m \tau_{\sigma}^{\beta_j} {}^{RL}D^{\beta_j} \varepsilon(t) \right), \quad (1.42)$$

где су $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n)$ и $\beta_j (j = 1, 2, \dots, m)$ фракциони параметри. Зависно од усвојеног броја чланова у сумама са леве и десне стране могу се добити различите конститутивне једначине. Ипак, у литератури је доказано да се са релативно малим бројем чланова у овом моделу могу постићи одлични резултати у фитовању параметара модела са експерименталним подацима за комплексни модул различитих материјала у широком опсегу фреквенција.

Вискоеластични модели са фракционим операторима спадају такође у моделе са четири параметара и дати су у следећој форми

$$\sigma(t) = E_{\infty} \left[\varepsilon(t) - \xi_{\varepsilon} (1 + \tau_{\varepsilon}^{\alpha} {}^{RL}D^{\alpha})^{-\beta} \varepsilon(t) \right], \quad \xi_{\varepsilon} = \Delta E E_{\infty}^{-1}, \quad (1.43)$$

$$\varepsilon(t) = J_{\infty} \left[\sigma(t) + \xi_{\sigma} (1 + \tau_{\sigma}^{\alpha} {}^{RL}D^{\alpha})^{-\beta} \sigma(t) \right], \quad \xi_{\sigma} = \Delta J J_{\infty}^{-1}, \quad (1.44)$$

за $\Delta E = (E_{\infty} - E_0)$, $\Delta J = (J_0 - J_{\infty})$, $J_0 = E_0^{-1}$, $J_{\infty} = E_{\infty}^{-1}$ и $0 < \alpha, \beta < 1$. Карактеристика ових модела је непериодичност, в. [44]. Претходно наведени вискоеластични модели могу бити подељени у три групе: I) таласни, II) дифузиони и III) комбинација претходна два типа модела. Између осталог, ова подела је извршена на основу тога за који однос параметара модели задовољавају дисипациону неједнакост и како се понашају на примеру најпростијег осцилатора са једним степеном слободе и променљивом побудом (видети Табелу 1 у [44]). Модели из прве групе (1.37) и (1.42) за $\alpha_i, \beta_j (i, j = 1, 2, 3)$, и друге групе (1.33), (1.34) и (1.38), задовољавају дисипациону неједнакост за одређене односе фракционих параметара α/β . Такође, у механичким моделима, тачније код најпростијих осцилатора, за импулсне и нестационарне побуде модели из прве две групе задовољавају услове који проистичу из термодинамичких закона за одређене односе фракционих параметара. За разлику од прве две, вискоеластични и механички модели из треће групе (1.32), (1.42) и (1.43) су термодинамички

прихватљиви за све односе фракционих параметара. У овој дисертацији применићемо основни фракциони Kelvin-Voigt-ов модел (1.31), модификовани Kelvin-Voigt (1.32) и модел са фракционим оператором (1.43).

1.5 Модели хибридних елемената

Адаптроника (енг. „Adaptronics“) је реч која води порекло из немачког језика и представља општи израз за више дисциплина које се баве паметним материјалима, структурама и интелигентним системима. Адаптронске системе карактерише аутономност, прилагодљивост и мулти-функционалност која се може односити на цео систем или један део тог система. Код механичких система се за пригушење вибрација користи неколико метода које се могу поделити на пасивне, активне и полуактивне методе. Као елементи адаптронских система користиће се хибридни елементи који се састоје од пасивног и активног дела, којима се може утицати на динамику дискретног механичког система. Вискоеластични елементи са актуатором (ВА), магнетнореолошки (МР) и пиезовискоеластични (ПВ) елементи могу се користити као хибридни елементи у дискретним механичким системима. Оно што карактерише последња два типа елемената, као елементе адаптронског система, је да мењају механичка и реолошка својства са променом магнетног поља односно електричног напона.

Главни део МР елемената чине магнетнореолошки флуиди. Магнетнореолошки и електрореолошки флуиди откривени су четрдесетих година двадесетог века [71]. Због бољих карактеристика, магнетнореолошки флуиди се више примењују од електрореолошких. Основни састав магнетнореолошких флуида чине магнето-поларизујуће честице реда величине неколико микрометара које су распршене у носачу, тј. одговарајућем медијуму као што су силиконска или минерална уља. У присуству магнетног поља, у магнетнореолошком флуиду се формирају ланци честица због којих се флуид понаша као получврсто тело са вископластичним својствима, док се из настале конфигурације може вратити

у пређашње стање за пар милисекунди. Контрола реолошких особина магнетнореолошких флуида врши се ниским напонима и врло малим струјама, приближно 1-2 ампера. У раду [71], разни модели МР амортизера су поређени са експерименталним подацима добијеним испитивањем прототипа МР амортизера. Овде ће бити приказани неки од модела МР елемената који су до сада презентовани у литератури [71]. Најпре ћемо приказати Bingham-ов модел преко релације сила-дилатација у облику [3]

$$F_{mr} = F_c \cdot \text{sign}(\dot{x}) + c_0 \dot{x} + F_0, \quad (1.45)$$

где F_{mr} означава силу МР елемента, \dot{x} је брзина дилатације елемента, F_c је сила трења, c_0 је коефицијент пригушења и F_0 је нека константна сила пре дилатације елемента. Модел (1.45) је линеаран, те је његова примена код МР елемената ограничена јер они спадају у јако нелинеарне системе. Стога, већа пажња биће посвећена моделима са хистерезисом. Dahl-ов модел је дат у облику

$$F_{mr} = k\dot{x} + (k_{wa} + k_{wb}v)w \quad (1.46)$$

$$\dot{w} = \rho(\dot{x} - |\dot{x}|w), \quad (1.47)$$

где је v управљачки напон, w је динамички коефицијент хистерезиса, k , k_{wa} , k_{wb} и ρ су параметри који дефинишу облик хистерезисне криве.

Lugre-ов модел дат је у облику

$$F_{mr} = \sigma_0 z + \sigma_0 z v + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_2 \dot{x} + \sigma_b \dot{x} v \quad (1.48)$$

$$\dot{z} = \dot{x} - \sigma_0 a_0 |\dot{x}| z, \quad (1.49)$$

в. [70], где параметар σ_0 означава крутост променљиве z под утицајем напона $v(t)$, чија је јединица $[\text{N}/(\text{m} \cdot \text{V})]$, $\sigma_1 [\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}]$ је коефицијент пригушења променљиве z , $\sigma_2 [\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}]$ је коефицијент вискозног пригушења, $\sigma_a [\text{N}/\text{m}]$ је крутост променљиве z , $\sigma_b [\text{N} \cdot \text{s}/(\text{m} \cdot \text{V})]$ је коефицијент вискозног пригушења који зависи од променљиве v и $a_0 [\text{V}/\text{N}]$ је константа.

Вонс-Вен-ов модел је у [70] дат у следећој форми

$$F_{mr} = c_0 \dot{x} + k(x - x_0) + \alpha z \quad (1.50)$$

$$\dot{z} = -\gamma |\dot{x}| z |z|^{n-1} - \beta \dot{x} |z|^n + A \dot{x}, \quad (1.51)$$

где параметар $c_0 [\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}]$ означава коефицијент пригушења, $k [\text{N}/\text{m}]$ представља коефицијент крутости линеарне опруге у моделу, x_0 је почетна

дилатација МР елемента, која помножена крутошћу k даје тзв. акумулаторску силу f_0 пре дилатације елемента. Параметрима γ, β, A контролише се облик хистерезисне криве. Параметри $\alpha(i)$ и $k(i)$ су линеарно зависни од промене струје на електромагнету.

Релација сила-дилатација модификованог Bouc-Wen-овог модела дата је у облику

$$F_{mr} = c_1 \dot{y} + k_1(x - x_0), \quad (1.52)$$

$$c_1 \dot{y} = \alpha z + k(x - y) + c_0(\dot{x} - \dot{y}), \quad (1.53)$$

$$\dot{z} = -\gamma|\dot{x} - \dot{y}|z|z|^{n-1} - \beta(\dot{x} - \dot{y})|z|^n + A(\dot{x} - \dot{y}), \quad (1.54)$$

где је са k_1 означена крутост акумулатора, c_0 је вискозно пригушење на већим брзинама, c_1 вискозно пригушење на нижим брзинама док коефицијент k у овом случају представља крутост на већим брзинама и x_0 је почетна дилатација опруге крутости k_1 повезана са тзв. силом акумулатора.

Најчешће коришћена метода за одређивање параметара модела је метода најмањих квадрата. За потврду модела користе се графици сила-време, сила-померање и сила-брзина померања. Врши се поређење са резултатима добијених из модела са експерименталним подацима за МР амортизере подвргнуте елонгацији (померању) по некој синусној функцији одређене фреквенције и за задати напон или струју у електромагнету који ствара магнетно поље. Већина приказаних хистерезисних модела има задовољавајуће поклапање за прва два графика тј. сила-време и сила-дилатација али проблем са хистерезисом настаје код графика сила-померање. У том случају, најбољи резултати се постижу модификованим Bouc-Wen моделом [71].

МР елементи се увелико користе за пригушење нежељених вибрација и наглих удара или промене положаја у бројним транспортним системима, машинама и механизмима. Могућност управљања реолошким особинама МР флуида у реалном времену, или са врло малим кашњењем, довело је до тога да су МР елементи постали саставни део скоро свих модерних адаптронских система. Предложена је модификација Bouc-Wen модела изводима фракционог реда тако да чине хибридне елементе везане у системе више

крутих тела типа отвореног кинематичког ланца који представља роботску руку.

Пиезо-вискоеластични (ПВ) адаптронски елементи су сложени елементи који се састоје од вискоеластичног дела и пиезокерамике. Вискоеластични део елемента може представљати неки полимер у чврстом стању или пак пригушницу са флуидом одређених реолошких особина. Други део елемента представља пиезокерамика одређене крутости и дилатационих особина. Познато је да се код пиезокерамике јавља пиезо ефекат тј. керамика се деформише у одговарајућим правцима зависно од тога како је како је извршена поларизација, како су постављене електроде и колики се напон доведе на њих. Тада се пиезокерамика понаша као актуатор, чије способности дилатације линеарно зависе од напона и дилатационих константи, које се одређују експериментално за сваку врсту пиезокерамике. Мултифункционалност пиезокерамике се огледа и у томе што се може користити и као сензор, где се користи инверзно својство пиезо ефекта а то је способност генерисања напона услед дилатације изазване дејством спољашњих сила. Механизам пиезо-ефекта се одвија на нивоу кристалне решетке одређених група пиезокерамика, где се деформацијом решетке јавља електрични моменат и обратно. Такође, треба рећи да у општем случају вектор поларизације има три компоненте које се одређују уз помоћ осамнаест пиезо-модула. Ипак, у специјалним случајевима број модула се може смањити те је тако у даљем тексту коришћен најједноставнији случај где је вектор поларизације у правцу дилатације (померања) или управан на тај правац [72]. Добре особине ПВ елемената су могућност пасивног пригушења вибрација, захваљујући вискоеластичном елементу без утрешка спољашње енергије, као и активно деловање елемента на систем (пригушење вибрација у ширем опсегу фреквенција него код чисто пасивних елемената) захваљујући пиезокерамици, или са утрешком одређене количине енергије. У литератури постоји више модела пиезо-вискоеластичних елемената (за више детаља видети [72]) од којих ћемо овде приказати три типа таквих елемената са поједностављеним релацијама за

пиезо-поларизацију. Први модел [72] је пиезо-модификовани Kelvin-Voigt-ов модел, дат у облику

$$F_{PKV} = (c_K + c_{uK})y(t) + b_K \dot{y}(t) - c_{uK} a_{uK} U_K(t), \quad (1.55)$$

где је са c_K означена крутост опруге, c_{uK} је крутост пиезокерамике, b_K је коефицијент вискозног пригушења, a_{uK} је константа која одређује пиезо-дилатациона својства елемента, $U_K(t)$ је напон пиезо-поларизације на електродама пиезокерамике, који може бити функција времена или брзине. Са F_{PKV} и $y(t)$ су означени реактивна сила односно дилатација елемента. Нешто сложенији ПВ модел је пиезо-модификовани Maxwell-ов модел, у [72] дат у облику

$$\begin{aligned} F_{PM} = & \left(\frac{c_M c_{uM}}{c_M + c_{uM}} \right) \left\{ y(t) - y(0) e^{\frac{c_M c_{uM}}{b_M (c_M + c_{uM})} t} \right\} \\ & - \frac{1}{b_M} \left(\frac{c_M c_{uM}}{c_M + c_{uM}} \right)^2 \int_0^t y(\tau) e^{\frac{c_M c_{uM}}{b_M (c_M + c_{uM})} (t-\tau)} d\tau \\ & - a_{uM} \frac{c_M c_{uM}}{c_M + c_{uM}} \left\{ U_M(t) - U_M(0) e^{\frac{c_M c_{uM}}{b_M (c_M + c_{uM})} t} \right\} \\ & - \frac{a_{uM}}{b_M} \left(\frac{c_M c_{uM}}{c_M + c_{uM}} \right)^2 \int_0^t U_M(\tau) e^{\frac{c_M c_{uM}}{b_M (c_M + c_{uM})} (t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (1.56)$$

где су c_M и c_{uM} крутости елемента, b_M је коефицијент вискозног пригушења, a_{uM} је константа која одређује пиезо-дилатациона својства елемента, $U_M(t)$ су напони пиезо-поларизације на електродама пиезокерамичког елемента, F_{PM} сила реакције услед дилатације елемента и $y(t)$ је дилатација (померање) елемента. Пиезо-модификовани Burgers-ов елемент одређен је релацијом померање-сила

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \left(\frac{1}{c_M} + \frac{1}{c_{uM}} \right) \dot{F}_{PB}(t) + \left(\frac{1}{b_M} + \frac{1}{b_K} \right) F_{PB}(t) - \frac{c_K + c_{uK}}{b_K b_M} \int_0^t F_{PB}(\tau) e^{\frac{c_K + c_{uK}}{b_K} (t-\tau)} d\tau \\ & - a_{uM} \dot{U}_M(t) + a_{uM} \frac{c_{uK}}{b_K} U_K(t) - a_{uK} \frac{c_{uK}}{b_K^2} (c_K + c_{uK}) \int_0^t U_K(\tau) e^{\frac{c_K + c_{uK}}{b_K} (t-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (1.57)$$

где су c_K , c_{uK} , c_{uM} и c_M крутости елемента, b_M и b_K су коефицијенти вискозног пригушења, a_{uM} и a_{uK} су пиезо-дилатационе константе елемента, $U_M(t)$ и

$U_K(t)$ су напони пиезо-поларизације на електродама пиезокерамичких елемената, F_{PB} је сила реакције услед дилатације (померања) елемента и $x(t)$ је дилатација елемента.

Модели ПВ елемената могу се користити као модели везе између крутих тела у дискретним механичким системима, што омогућава да се у системима више крутих тела, какви су роботски и други системи, моделирају елементи који пригушују нежељене вибрације услед спољашњих ефеката, или делују као актуатори. Поред поменутих, у обзир се могу узети и модели који укључују утицај спољашње температуре на динамику система крутих тела са реолошким везама (за више детаља видети [72]). Такође, одређивање параметара модела оваквих хибридних елемената је посебан задатак, другачији од случаја до случаја, а најчешће се врши поређењем резултата добијених из модела са експерименталним подацима. Предложићемо напредни модел пиезо-модификованог Kelvin-Voigt елемента са фракционим изводима. За тако модификовани модел елемента, који је везан у роботски систем више тела, биће одређене одговарајуће генералисане силе.

1.6 Нелокална теорија континуума

Класична теорија еластичности, описана линеарним Hook-овим законом, је локална теорија еластичности, а овај назив потиче од локалне природе ове теорије тј. од својства да напон у тачки неког посматраног еластичног тела зависи само од деформације у тој тачки. Према томе, ова теорија је иста за све посматране објекте независно од њихове величине и ефеката који се у складу са тим димензијама јављају. Услед наведених недостатака класичне теорије еластичности, настале су бројне модификације ове теорије које узимају у обзир ефекте који се јављају на микро/нано-скали као што су теорија спрегнутих напона [80], теорија градијената деформација [81] и Eringen-ова нелокална теорија еластичности [83, 84]. У нелокалној теорији еластичности, напон у некој тачки домена је дефинисан као функција деформације не само у тој тачки, већ као функција деформације у свим тачкама посматраног домена. Таква формулација напона омогућава да

се у обзир узму и нелокални ефекти, као што је интеракција на даљину између атома и молекула, чији утицај долази до изражаја када су димензије посматраних објеката веома мале, тј. мерљиве дужинама међуатомских растојања у атомској решетки материјала. Модели базирани на нелокалној теорији широко су распрострањени у литератури за описивање бројних феномена везаних за микро/нано-структуре, дислокације у материјалима и др. Нарочито је изражена примена нелокалних конститутивних релација у надградњи класичних локалних теорија штапова, греда, плоча и љуски које су добиле своје нелокалне еквиваленте у виду наноштапова, наногреда, наноплоча и нанољуски. Поред нелокалности у просторном домену, Eringen је у својим радовима дефинисао и временски нелокалне моделе, тј. наследне моделе са предисторијом, в. [82]. Овако дефинисана нелокална теорија је у својој основи у блиској вези са теоријом фракционог рачуна, чији интегрални и диференцијални оператори су такође по дефиницији нелокални оператори.

На основу претпоставке да је напон у тачки функција деформације свих тачака посматраног еластичног тела, Eringen [83] је дао интегрални облик конститутивне једначине за нелокални еластични тензор напона. Нелокални ефекти су описани у једначини преко једног јединог материјалног параметра, тзв. нелокалног параметра. За случај тродимензионалног еластичног тела једначина, има облик

$$t_{ij}(x) = \int_V \alpha(|x - x'|, \tau) \sigma_{ij}(x') dV(x'), \quad \forall x \in V, \quad (1.58)$$

где је $t_{ij}(x)$ нелокални тензор напона и $\sigma_{ij}(x')$ је локални или макроскопски тензор напона у тачки x' . У горњој једначини члан $\alpha(|x - x'|, \tau)$ означава тзв. нелокални модул или функцију пригушења која узима у обзир нелокалне ефекте у некој референтној тачки x услед локалне деформације у тачки x' , где $|x - x'|$ означава растојање мерено у Euclid-ској норми. Материјална константа $\tau = (e_0 a)/l$ је функција параметра l , а представља спољашњу карактеристичну дужину (дужина прслине, таласна дужина), a означава унутрашњу карактеристичну дужину (параметар решетке, величину зрна или међуатомско растојање), док је e_0 константа која је различита за

различите материјале и може се одредити индентификацијом параметра на основу симулација атомистичким методама (молекуларна динамика), или преко Born–Karman-ове криве дисперзних таласа добијене из динамичке теорије кристалне решетке. Eringen је добио универзалну вредност константе $e_0 = 0.39$. У случају наноструктура вредности овог параметра су различите и зависе од конкретне геометрије структуре, материјалних особина и граничних услова. Нешто касније, Eringen [84] је преформулисао интегралну форму конститутивне једначине избором одговарајуће функције језгра у (1.58) и добио диференцијални облик једначине у облику

$$(1 - \tau^2 l^2 \nabla^2) t_{ij} = \sigma_{ij}, \quad (1.59)$$

где ∇^2 означава Laplace-ов оператор.

Познато је да је класични тензор напона $\sigma_{ij}(x')$ у тачки x' повезан са тензором $\varepsilon_{ij}(x')$ у тој тачки према Ноок-овом закону у следећој форми

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}, \quad (1.60)$$

где су са λ и G означене Lamé-ове константе и са δ_{ij} је означен Kronecker-ов делта симбол. Ако занемаримо нелокалне ефекте у правцу дебљине неког тела, за нелокалну изотропну еластичну греду добијају се следеће конститутивне релације

$$t_{xx} - \mu \frac{d^2 t_{xx}}{dx^2} = E \varepsilon_{xx}, \quad (1.61)$$

$$t_{xz} - \mu \frac{d^2 t_{xz}}{dx^2} = 2G \varepsilon_{xz}, \quad (1.62)$$

где је E Young-ов ов модул еластичности, G је модул смицања и $\mu = (e_0 a)^2$ нелокални параметар. Ако усвојимо да је нелокални параметар једнак нули $\mu = 0$, онда добијамо класичну конститутивну релацију изотропне еластичне греде.

У неким радовима, могу се наћи модификоване Eringen-ове конститутивне једначине нелокалне еластичности дате преко диференцијалног оператора фракционог реда, в. Challamel и остали [85], или као комбинација нелокалне и градијентне теорије еластичности, в. Challamel и остали [86].

Као главни недостатак диференцијалне форме нелокалне конститутивне релације (1.61)-(1.62) у литератури се наводи појава парадокса [101] који се јавља код нелокалног модела Euler–Bernoulli-јеве греде са граничним условима за конзолу. Ипак, за превазилажење овог недостатка многи аутори су предложили примену модификованих интегралних или интегро-диференцијалних форми конститутивних једначина нелокалне еластичности [101-104]. Треба истаћи да се поменути парадокс не јавља код нелокалне Euler–Bernoulli-јеве теорије греда за остале типове граничних услова. У тим случајевима, добијају се приближно иста решења код статичке и динамичке анализе нелокалних модела применом диференцијалне и интегралне форме конститутивних релација.

1.7 Махвелл-ове једначине и силе у наногреди под дејством лонгитудиналног магнетног поља

Из литературе је познато да Махвелл-ове једначине описују јединствену теорију електричних и магнетних појава. Махвелл-ове једначине, в. [146], су дате у облику

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.63)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.64)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.65)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.66)$$

где је $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ вектор јачине магнетног поља, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(x, y, z, t)$ је вектор магнетне индукције, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ је вектор јачине електричног поља, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}(x, y, z, t)$ је вектор електростатичке индукције, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(x, y, z, t)$ је вектор густине струје слободних носилаца и ρ је густина слободних наелектрисања. Једначине (1.63)-(1.66) ћемо допунити следећим линеарним везама

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.67)$$

$$\mathbf{B} = \eta \mathbf{H}, \quad (1.68)$$

које се односе на средине које се такође називају линеарним, а где је ϵ диелектрична константа, η је магнетна пермеабилност и σ је специфична проводност одговарајуће средине. Како ће се разматрати силе индуковане у једнодимензионалним наноструктурама облика греда тј. наногреда, наведене константе ће се односити на средине као што су различите наноцеви од угљеника, цинк-оксида, борон-нитрида и др. Узећемо да је електрично поље $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e}$ и јачина магнетног поља $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, где су \mathbf{e} и \mathbf{h} мали поремећаји око неких константних вредности електричног \mathbf{E}_0 и магнетног \mathbf{H}_0 поља. Овде ће се разматрати случај када је $\mathbf{E}_0 = 0$. На основу Ohm-овог закона имамо

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.69)$$

где је $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ вектор брзине, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ је одговарајуће поље померања наногреде (видети поглавље 3.4) и σ је специфична проводност средине. Ако претпоставимо да је материјал наногреде високо проводна средина (где је σ велико), можемо записати $\mathbf{e} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, где из једначине (1.68) имамо $\mathbf{e} = -\eta \mathbf{v} \times \mathbf{H}_0$, одакле под претпоставком да је $\mathbf{h} \ll \mathbf{H}_0$, и применом једначина (1.63) и (1.64), добијамо

$$\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0), \quad (1.70)$$

где је $\nabla \times (\cdot) \equiv \text{rot}(\cdot)$. Из једначине (1.70) можемо закључити да поремећај јачине магнетног поља потиче од деформација наногреде изазваних пропацијом трансверзалних таласа [91]. Према Lorentz-овој формули, електромагнетне силе по јединици запремине средине су $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Ако узмемо у обзир одговарајуће поље померања (поглавље 3.4), вектор јачине магнетног поља $\mathbf{H}_0 = H_x \mathbf{i}$ (где је \mathbf{i} јединични вектор у правцу x осе) које делује само у аксијалном правцу подужне осе наногреде и једначине (1.63)-(1.66), добијамо Lorentz-ову силу у развијеном облику

$$\mathbf{f}(f_x, f_y, f_z) = \eta \left(\nabla \times (\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0)) \right) \times \mathbf{H}_0 =$$

$$\eta \left[0\mathbf{i} + H_x^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{j} + H_x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{k} \right], \quad (1.71)$$

где су u , v и w померања, а f_x , f_y и f_z компоненте Lorentz-ове силе у правцима оса x , y и z

$$f_x = 0, \quad (1.72)$$

$$f_y = \eta H_x^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} \right), \quad (1.73)$$

$$f_z = \eta H_x^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right). \quad (1.74)$$

За наногреду претпостављамо да су померања u и v једнака нули и да је $w = w(x, t)$, па ћемо имати само компоненту Lorentz-ове силе у правцу z осе, што се може изразити једначином

$$f_z = \eta H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (1.75)$$

Силу по јединици дужине наногреде изражавамо следећом једначином

$$\tilde{q}(x, t) = \int_A f_z dA = \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1.76)$$

где је A површина попречног пресека наногреде.

Глава 2

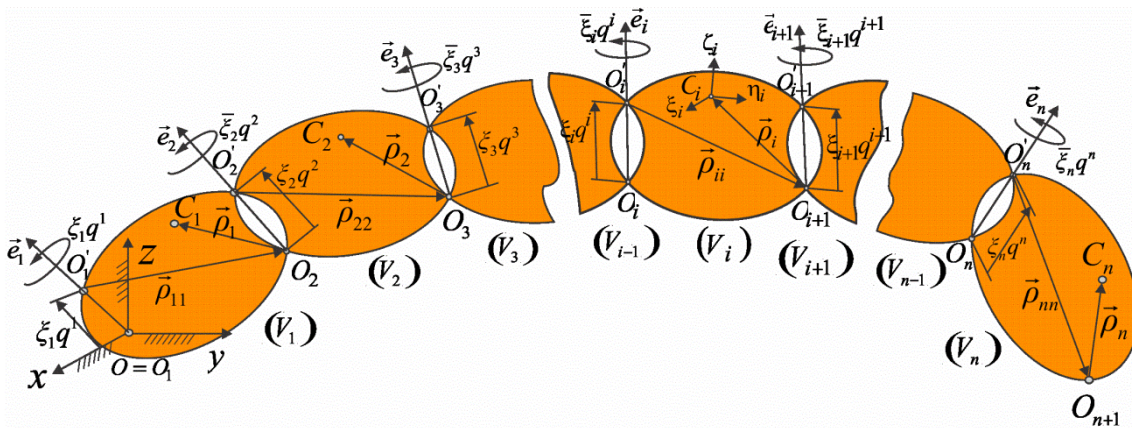
Хибридни елементи фракционог типа у динамици система крутих тела

2.1 Уводна разматрања

У овој глави, биће анализирана динамика система више крутих тела тј. роботских система, где су за два различита тела у систему крутих тела везани фракциони вискоеластични елементи са и без актуатора, затим пиезо-вискоеластични и магнетнореолошки елементи фракционог реда. Овакав систем може се сматрати адаптронским системом, у смислу како је то описано у поглављу 1.5, док се везани елементи могу сматрати адаптронским компоненетама, чија мултифункционалност и адаптивност пружају могућност утицаја на динамику целокупног система. Модели наведених елемената везаних у систем више крутих тела су унапређени класични реолошки модели са операторима извода фракционог реда. Посебно су приказани и добијени изрази у аналитичком облику за генералисане силе вискоеластичног елемента са и без актуатора, затим ПВ и МР елемента, где ће бити приказан утицај промене параметара датих елемената на динамику посматраног адаптронског система.

У динамици система више крутих тела а посебно роботских система, важан фактор који утиче на промену жељене динамике система су нежељене вибрације које се могу јавити услед спољашњих утицаја. Утицаји вибрација околине или паразитних вибрација због несавршености или хабања делова роботског система могу неповољно утицати на жељено позиционирање и динамику система. Да би се отклониле такве нежељене реакције на систем користи се више различитих приступа. Њихова подела се углавном врши на пасивне, активне и полу-активне методе. Код примене пасивних метода за пригушење вибрација углавном се користе елементи који имају својства пригушења вибрација, као што су разни полимерни материјали, амортизери

и др. Код активних метода углавном се примењују пиезо или други актуаторски елементи на које се активно делује у повратној спрези тако да пригушују нежељене вибрације. Код полу-активних метода користе се елементи који имају својства пригушења али се додатно може активно утицати на промену реолошких особина флуида или еластомера променом струје или напона на електромагнету. На динамику роботских система, система више крутих тела или флексибилних линкова може се утицати применом неке од поменутих метода везивањем пиезо елемената на сегменте система, применом зглобова са магнетнореолошким елементима или елементима од неког полимерног материјала. У овој дисертацији, за роботске системе састављене од крутих сегмената, овде је предложен другачији приступ где се у системе са структуром отвореног кинематичког ланца везују пасивни или полу-активни елементи као што су вискоеластични елемент са и без актуатора, магнетнореолошки или пиезо-вискоеластични елемент. У модификованим моделима ових елемената користе се изводи фракционог реда тако да унапређени модел може боље описати својства пригушења али уједно усложњава једначине кретања система. Овде ћемо приказати процедуру за одређивање генерализаних сила таквих елемената и испитати утицаје различитих параметара система на вредности генерализаних сила.



Слика 2.1. Систем крутих тела са структуром отвореног кинематичког ланца.

Посматрајмо систем више тела са коначним бројем сегмената и структуром отвореног кинематичког ланца као на слици 2.1. Нека се систем састоји од $n + 1$ сегмената означених као $(V_0), (V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ и повезаних са n зглобова без трења са по једним степеном слободе кретања и идеалним везама које нам омогућавају да имамо n независних генералисаних координата (q^1, q^2, \dots, q^n) . Генералисане координате представљају релативне углове ротације у случају ротационих зглобова, што је одређено вредношћу параметра $\xi_i = 0$, или релативна померања у случају призматичних зглобова за $\xi_i = 1$, где важи следећа једначина $\bar{\xi}_i = 1 - \xi_i$ (в. [74]). Геометрија система је дефинисана јединичним векторима \vec{e}_i , и векторима положаја $\vec{\rho}_i$ и $\vec{\rho}_{ii}$, који су дати у односу на локалне координатне системе $C_i \xi_i \eta_i \zeta_i$ и који су везани за центре маса одговарајућих сегмената. Јединични вектори $\vec{e}_i, i = 1, 2, \dots, j, \dots, n$ описују осе ротације (транслације) i -тог сегмента у односу на претходни, $\vec{\rho}_{ii} = \overrightarrow{O'_i O_{i+1}}$ означава вектор који спаја два суседна сегмента и вектор $\vec{\rho}_i = \overrightarrow{O'_{i+1} C_i}$ представља вектор положаја центра масе i -тог сегмента у односу на зглоб, који повезује i -ти и наредни сегмент. За одређивање динамике таквог једног система неопходно је одредити масе сегмената m_i и тензоре инерција J_{C_i} , чији су елементи аксијални моменти инерција маса односно центрифугални моменти маса сегмената, у односу на локални координатни систем. Ако нам је позната кинетичка енергија система у зависности од генералисаних координата и њених извода могу се написати диференцијалне једначине кретања система преко Lagrange-ових једначина друге врсте у коваријантном облику

$$\sum_{\alpha}^n a_{\alpha\gamma}(q)\ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma}(q)\dot{q}^{\alpha}\dot{q}^{\beta} = Q_{\gamma}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Са q^{α}, q^{β} смо означили генералисане координате, $a_{\alpha\gamma} = a_{\gamma\alpha}$ су елементи основног метричког тензора $[a_{\alpha\gamma}] \in R^{n \times n}$ и $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma}$ су Christoffelови симболи прве врсте, в. [74]. Елементи основног метричког тензора се одређују на основу израза

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{T}_{\alpha(i)}) \{ \vec{T}_{\beta(i)} \} + (\vec{\Omega}_{\alpha(i)}) [J_{C_i}] \{ \vec{\Omega}_{\beta(i)} \}, \quad (2.2)$$

где су $\vec{T}_{\alpha(i)}$ и $\vec{\Omega}_{\alpha(i)}$ тзв. квазибазни вектори

$$\vec{T}_{\alpha(i)} = \begin{cases} \bar{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \times \left(\sum_{k=\alpha}^i (\vec{\rho}_{kk} + \xi_k \vec{e}_k q^k) + \vec{\rho}_i \right) + \xi_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, & \forall \alpha \leq i, \\ 0, & \forall \alpha > i, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\vec{\Omega}_{\alpha(i)} = \begin{cases} \bar{\xi}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}, & \forall \alpha \leq i, \\ 0, & \forall \alpha > i. \end{cases} \quad (2.4)$$

Christoffel-ови симболи се одређују из следеће једначине

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial q^{\beta}} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial q^{\gamma}} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

или једначине

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i=\sup(\beta,\gamma)}^n m_i \bar{\xi}_{\alpha} (\vec{e}_{\alpha} \times \vec{T}_{i(\beta)}) \vec{T}_{i(\gamma)} + \bar{\xi}_{\alpha} \bar{\xi}_{\beta} \bar{\xi}_{\gamma} (\vec{e}_{\beta\gamma}^{(i)}) [\Pi_{C_i}^{(i)}] \{ \vec{e}_{\alpha}^{(i)} \}, \quad (2.6)$$

$$\alpha \leq \beta, \quad \vec{e}_{\alpha\beta} = \vec{e}_{\alpha} \times \vec{e}_{\beta}.$$

Једначина (2.1) је дата у форми која је погодна за аутоматско формирање диференцијалних једначина кретања посматраног система више крутих тела. Као што је показано у [74], аутоматско формирање једначина не зависи од теоријског приступа, који је коришћен у формирању тих једначина (општи принципи механике, d'Alembert-ов принцип, Lagrange-ове једначине друге врсте, Appell-ове једначине и др.). Једначине кретања роботског система се могу записати и у еквивалентној коваријантној форми (2.1). За овако дате једначине кретања биће искоришћен Rodrigues-ов начин формирања матрица трансформација координата који се показао погодним у овом случају. На десној страни једначине (2.1), генералисана сила Q_{γ} представља спољашње генералисане силе од сила гравитације Q_{γ}^g , погонских сила Q_{γ}^m или сила од спољашњих елемената Q_{γ}^{SE} везаних у систем крутих тела. Део резултата приказаних у овој глави објављен је у монографији [70], раду [76], као и на међународним конференцијама [77, 78].

2.2 Хибридни елементи фракционог типа

Примена адаптронских елемената у роботским и системима више крутих тела може бити значајна за допунско управљање овим системима и за смањење нежељених вибрација. Стога, вискоеластични елемент са актуатором, пиезо-вискоеластични и магнетнореолошки елементи интегрисани у такве системе пружају боља адаптронска својства. Њихова динамика се може симулирати уз примену адекватних модела и диференцијалних једначина кретања са одговарајућим конститутивним релацијама за адаптронске елементе. Када су у питању роботски системи и системи више крутих сегмената са додатим деформабилним елементима, у литератури се најчешће могу наћи конститутивне релације елемената у којима фигуришу целобројни изводи. Ипак, за описивање вискоеластичних својстава у конститутивним релацијама се могу применити и изводи фракционог реда. Модели вискоеластичног тела са изводима фракционог реда показали су се врло поузданим и погодним за описивање пригушења у материјалима и структурама са значајним предностима у односу на моделе са класичним изводима.

Најпре, посматрамо релацију сила-померање фракционог вискоеластичног елемента са актуатором

$$F_{FKVA} = E_S x(t) + E_\lambda {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + f_A, \quad (2.7)$$

где је $x(t)$ координата деформације елемента у правцу главне осе елемента, F_{FKVA} је сила настала издужењем елемента, E_S је коефицијент еластичности, $E_\lambda = E_S \tau_F^\lambda$ је коефицијент једнак производу коефицијента еластичности E_S и времена ретардације τ_F и f_A је сила од актуатора која може зависити од брзине или времена. Оператор ${}^{RL}D^\lambda$ је оператор Riemann-Liouville-овог извода фракционог реда λ , $x(t)$ је континуална функција на интервалу $[0, t]$ и $0 < \lambda < 1$. Издужење, тј. померање $x(t)$ елемента се врши у аксијалном правцу тако да генерише силу F_{FKVA} .

Ако у једначини (2.7) занемаримо силу актуатора, можемо добити релацију сила-померање пасивног вискоеластичног елемента у облику

$$F_{FKV} = E_S x(t) + E_\lambda {}^{RL}D^\lambda(x(t)), \quad (2.8)$$

која представља конститутивну релацију фракционог Kelvin-Voigt-овог модела вискоеластичности.

У даљем тексту представићемо релацију сила-померање фракционог пиезо-Kelvin-Voigt-овог (ФПКВ) елемента (заснована на сличном моделу са изводима целобројног реда [72]) у облику

$$F_{FPKV} = [E_s + E_p]x(t) + E_{\lambda p} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + E_p a_{up} U_p(t), \quad (2.9)$$

где је F_{FPKV} сила од ФПКВ елемента, $x(t)$ је померање елемента у правцу уздужне осе елемента, E_s и E_p су параметри крутости опруге односно пиезо-керамике, $E_{\lambda p} = [E_s + E_p]\tau_F^\lambda$, где је τ_F^λ време ретардације, a_{up} је параметар пиезо-дилатационих својстава и $U_p(t)$ је напон пиезо-поларизације.

Релација сила-померање фракционог магнетнореолошког (ФМР) елемента (заснована на сличном моделу са изводима целобројног реда [71]) је дата у облику

$$F_{FMR} = E_{mr}x(t) + E_{\lambda mr} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + \varphi z(t), \quad (2.10)$$

$$\dot{z} = -\phi|\dot{x}|z|z|^{n-1} - \chi\dot{x}|z|^n + A\dot{x}, \quad (2.11)$$

где су F_{MR} и $x(t)$ сила односно дилатација ФМР елемента, E_{mr} је крутост елемента, E_λ је за случај ФМР елемента $E_{\lambda mr} = E_{mr}(\tau_{F_0}^\lambda + i\tau_{F_1}^\lambda)$ где је $\tau_{F_0}^\lambda$ почетно време ретардације а $\tau_{F_1}^\lambda$ је време ретардације, које се мења линеарно са струјом i у електромагнету која ствара магнетно поље у ФМР елементу. Члан $\varphi z(t)$ одређује хистерезис где је променљива $z(t)$ дефинисана једначином (2.11), и параметар $\varphi = \varphi_0 + i\varphi_1$ је линеарно завистан од струје i на електромагнету, [71]. Параметри ϕ , χ и A су константни док параметар n дефинише ред нелинеарности једначине (2.11). Оператор ${}^{RL}D^\lambda$ у претходним једначинама означава Riemann-Liouville-ов извод фракционог реда λ који ћемо надаље писати у скраћеној форми D^λ .

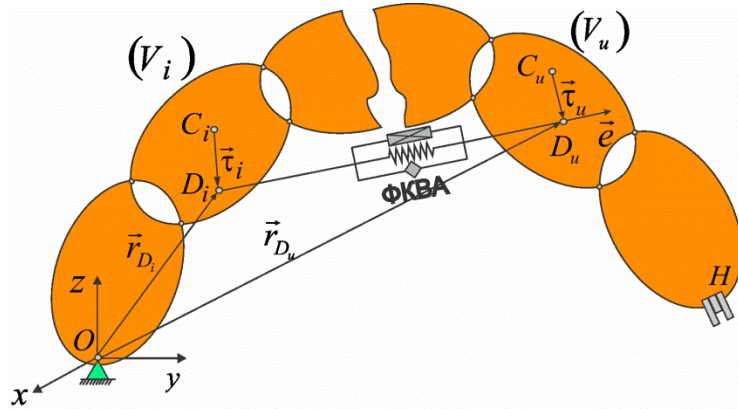
Померање елемента, тј. функција $x(q^i(t), q^{i+1}(t), \dots, q^k(t))$, је дата као разлика тренутне дужине елемента l и неке почетне недеформисане дужине l_0 у облику $x = l - l_0$ и сложена је функција генералисаних координата.

2.3 Генералисане силе хибридных елемената

Применом принципа виртуелног рада можемо извести изразе за генералисане силе елемената везаних у систем крутих тела. Најпре дефинишемо вектор силе која дејствује у правцу јединичног вектора \vec{e} у облику

$$\vec{F}_{wi} = -\vec{F}_{wu} = F_{FKV/FKVA}\vec{e}, \quad (2.12)$$

где је са $F_{FKV/FKVA}$ означена сила ФКВ или ФКВА елемента, слика 2.2.



Слика 2.2. Илустрација система крутих тела са везаним ФКВА елементом.

Вектор дужине \vec{l} елемента у правцу јединичног вектора \vec{e} је

$$\vec{l} = \overline{D_i D_u} = l(q^{i+1}, q^{i+2}, \dots, q^u)\vec{e}. \quad (2.13)$$

Варијацију вектора \vec{l} записујемо као

$$\delta(\vec{l}) = \vec{e}\delta(l) + l\delta(\vec{e}). \quad (2.14)$$

Израз за виртуелни рад је

$$\delta A^w = \vec{F}_{wi}\delta\vec{r}_{D_i} + \vec{F}_{wu}\delta\vec{r}_{D_u} = \vec{F}_w\delta(\vec{l}). \quad (2.15)$$

Из претходне две једначине добијамо

$$\delta A^w = -\vec{F}_w(\vec{e}\delta(l) + l\delta(\vec{e})) = -F_{FKV/FKVA}\vec{e}(\vec{e}\delta(l) + l\delta(\vec{e})). \quad (2.16)$$

Ако је $\vec{e} \cdot \delta(\vec{e}) = 0$ и $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$, једначина (2.16) се може записати у облику

$$\delta A^w = -F_{FKV/FKVA}\delta(l) = -F_{FKV/FKVA}\frac{\partial(l)}{\partial q^\alpha}\delta q^\alpha. \quad (2.17)$$

Ако узмемо у обзир следећу једнакост

$$\delta(l) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial(l)}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{\vec{l} \partial q^\alpha} \delta q^\alpha, \quad (2.18)$$

онда једначину за виртуелни рад можемо записати у следећој форми

$$\delta A^w = -F_{FKV/FKVA} \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{\vec{l} \partial q^\alpha} \delta q^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha^w \delta q^\alpha, \quad (2.19)$$

ако је $i < u$ за $l(q^{i+1}, q^{i+2}, \dots, q^u)$ и $\partial l / \partial q^\alpha$, следи

$$l(q^{i+1}, q^{i+2}, \dots, q^u) \Rightarrow \frac{\partial l}{\partial q^\alpha} = \begin{cases} 0, & u < \alpha \text{ or } \alpha \leq i, \\ \neq 0, & i < \alpha \leq u, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial l}{\partial q^\alpha} = \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{\vec{l} \partial q^\alpha}, \quad i < \alpha \leq u. \quad (2.21)$$

Из једначине (2.19) се могу добити једначине за генералисане силе у облику

$$Q_\alpha^w = -F_{FKV/FKVA} \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{\vec{l} \partial q^\alpha}, \quad i < \alpha \leq u \leq n, \quad (2.22)$$

$$Q_\alpha^w = 0, \quad u < \alpha \leq i. \quad (2.23)$$

2.4 Апроксимација извода фракционог реда

У једначинама (2.8), (2.9) и (2.22) јавља се извод фракционог реда функције померања ${}^{RL}D^\lambda(x(t))$. Треба рећи да код фракционих извода не важи класично правило извода сложене функције, [7, 117], а који се јавља у наведеним изразима у облику ${}^{RL}D^\lambda(x(t))$ за $0 < \lambda < 1$ и представља фракциони извод функције померања елемента $x(t) = l(q^{i+1}, q^{i+2}, \dots, q^u) - l_0 = x(q(t))$, која је сложена функција генералисаних координата q^i . Ако у горњим једначинама узмемо да је $\lambda = 1$, добија се класична једначина за генералисане силе са целобројним изводом сложене функције, чије је решење приказано за случај везане пригушнице у систему отвореног кинематичког ланца [74].

Такође, треба напоменути да за Riemann-Liouville-ову дефиницију фракционог извода важи правило да извод константе није једнак нули [9], одакле следи

$${}^{RL}D^\lambda(x) = {}^{RL}D^\lambda(l - l_0) = {}^{RL}D^\lambda(l) - {}^{RL}D^\lambda(l_0), \quad (2.24)$$

$${}^{RL}D^\lambda(l_0) \neq 0. \quad (2.25)$$

Како код фракционих извода не важи класично правило извода сложене функције, неопходно је применити апроксимационе методе како би се фракциони извод свео на класични целобројни извод. Једна таква нумеричка формула за апроксимацију фракционог извода је дата у [66, 68], која примењена на сложену функцију $x(q(t))$ има облик

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^\lambda x(t) &= A(\lambda, N)(t-a)^{-\lambda}x(q(t)) + B(\lambda, N)(t-a)^\lambda D^1 x(q(t)) \\ &\quad - \sum_{p=2}^N C(\lambda, p)(t-a)^{1-p-\lambda} M_p(t) + R_n(t), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где је $M_p(t)$ момент функције, $R_n(t)$ је остатак, док су параметри $A(\lambda, N)$, $B(\lambda, N)$ и $C(\lambda, p)$ дати изразима

$$A(\lambda, N) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \left[1 + \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p-1+\lambda)}{\Gamma(\lambda)(p-1)!} \right], \quad (2.27)$$

$$B(\lambda, N) = \frac{1}{\Gamma(2-\lambda)} \left[1 + \sum_{p=2}^N \frac{\Gamma(p-1+\lambda)}{\Gamma(\lambda-1)p!} \right], \quad (2.28)$$

$$C(\lambda, p) = \frac{1}{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(\lambda-1)} \frac{\Gamma(p-1+\lambda)}{(p-1)!}, \quad (2.29)$$

где Γ означава гама функцију. Момент функције $M_p(t)$, $p = 2, 3, \dots, N$ се добија као решење следећег система диференцијалних једначина

$$\dot{M}_p(t) = (1-p)(t-a)^{p-2}x(q(t)), \quad (2.30)$$

$$M_p(a) = 0, \quad p = 2, 3, \dots, N. \quad (2.31)$$

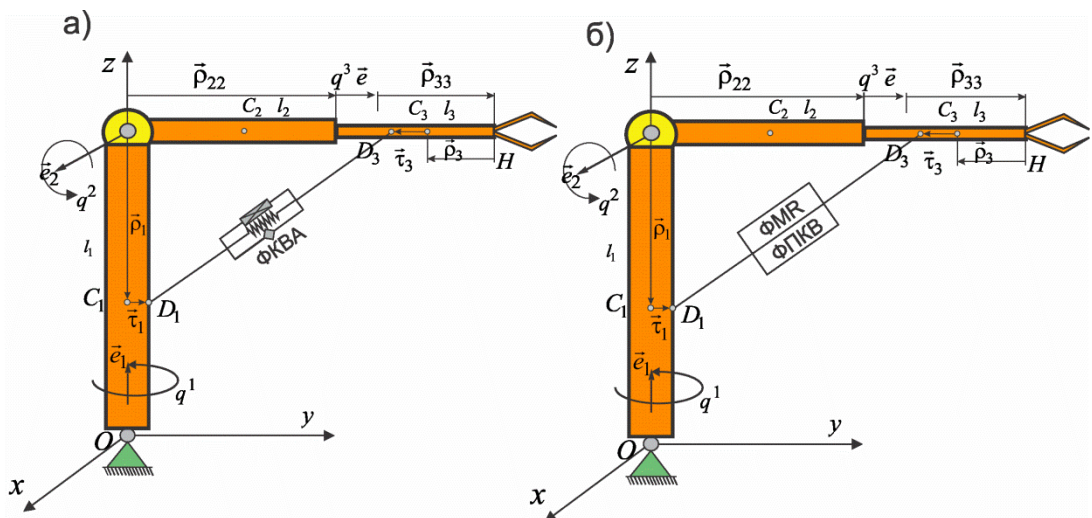
Такође, остатак $R_n(t)$ се рачуна по следећој формули

$$R_n(t) = \frac{(t-a)^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \int_a^t x^{(2)}(q(\tau)) \left(\sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\lambda)}{\Gamma(\lambda-1)p!} \left(\frac{\tau-a}{t-a} \right)^p \right) d\tau. \quad (2.32)$$

За овако добијену апроксимацију фракционог извода, у којој фигурише целобројни извод првог реда D^1 у једначини (2.26), сада важи класична дефиниција извода сложене функције $x(q(t))$.

2.5 Хибридни елементи у роботском систему са три степена слободe кретања

На примеру роботског система са три степена слободe кретања [75] (слика 2.3) и везаним ФКВА, ФПКВ или ФМР елементом за први и трећи сегмент у систему, можемо одредити генералисане силе везаног елемента. Први и други зглоб у систему су ротациони а трећи је призматични зглоб, где су независне генералисане координате у сваком од зглобова означене редом q^1 , q^2 и q^3 . Решавањем инверзног кинематичког задатка одређују се унутрашње (генералисане) координате на основу позиције врха хваталке у глобалним координатама. У овом случају вредности генералисаних координата су усвојене у облику $q^1 = 1$, $q^2 = 0.1 \cdot \sin(8t)$ и $q^3 = 0.1 \cdot t$.



Слика 2.3. Роботски систем са три степена слободe кретања и везаним
а) ФКВА елементом б) ФМР/ФПКВ елементом.

Вектор тренутне дужине елемента везаног у систем одређен је следећом једначином

$$\vec{l} = \overline{D_1 D_3} = -\vec{t}_1 - \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_{22} + q^3 \vec{e}_3 + \vec{\rho}_{33} + \vec{\rho}_3 + \vec{t}_3, \quad (2.33)$$

где су $\vec{\rho}_i$ и $\vec{\rho}_{ii}$, $i = 1, 2, 3$ вектори положаја центра маса односно вектори дужине сегмената, \vec{t}_1 и \vec{t}_3 су вектори положаја тачака за које су везани елементи у односу на центре маса сегмената и $q^3 \vec{e}_3$ је вектор који означава промену положаја трећег тела са променом генералисане координате у

призматичном зглобу. Димензије сегмената роботског система су: $l_0 = 0.7$ [m], $|\vec{\rho}_1| = 0.4$ [m], $|\vec{\rho}_{22}| = 0.6$ [m], $|\vec{\rho}_{33}| = 0.4$ [m], $|\vec{\rho}_3| = 0.2$ [m], $|\vec{\tau}_3| = 0.1$ [m], $|\vec{\tau}_1| = 0.1$ [m]. Ако се вектори у једначини (2.33) изразе преко Rodrigues-ових матрица трансформације у односу на координатни систем хуз и урачунају димензије сегмената, интезитет вектора тренутне дужине елемента је

$$l = |\vec{l}| = \sqrt{[(0.7 + q^3) \cos q^2 - 0.1]^2 + [(0.7 + q^3) \sin q^2 + 0.4]^2}, \quad (2.34)$$

где је $l(q^2, q^3)$ сложена функција генералисаних координата q^2 и q^3 .

2.5.1 Генералисане силе различитих типова хибридних елемената

На основу вредности генералисаних координата, генералисане силе Q_2^w and Q_3^w су различите од нуле и $Q_1^w = 0$. Коришћењем једначина (2.8) и (2.22) можемо добити изразе генералисаних сила ФКВ елемента у облику

$$Q_2^w = - \left[E_s x(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} + E_\lambda \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) \right], \quad (2.35)$$

$$Q_3^w = - \left[E_s x(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} + E_\lambda \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) \right], \quad (2.36)$$

и за ФКВА елемент у облику

$$Q_2^w = - \left[E_s x(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} + E_\lambda \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} f_A \right], \quad (2.37)$$

$$Q_3^w = - \left[E_s x(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} + E_\lambda \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} f_A \right]. \quad (2.38)$$

Такође, из једначина (2.9) и (2.22) одређујемо генералисане силе ФПКВ елемента

$$Q_2^w = - \left[[E_s + E_p] x(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} + E_{\lambda p} \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + E_p a_{up} U_p(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} \right], \quad (2.39)$$

$$Q_3^w = - \left[[E_s + E_p] x(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} + E_{\lambda p} \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + E_p a_{up} U_p(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} \right], \quad (2.40)$$

и генералисане силе ФМР елемента из (2.10) и (2.22) у облику

$$Q_2^w = - \left[E_s x(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} + E_{\lambda mr} \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + \varphi z(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^2} \right], \quad (2.41)$$

$$Q_3^w = - \left[E_s x(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} + E_{\lambda m r} \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} {}^{RL}D^\lambda(x(t)) + \varphi z(t) \frac{\vec{l} \partial(\vec{l})}{l \partial q^3} \right], \quad (2.42)$$

где се променљива $z(t)$ одређује из једначине (2.11) .

2.5.2 Одзив неуправљаног робота

Овде ћемо такође разматрати роботски систем са три степена слободе, в. [75] и слику 2.2 , за чије сегменте имамо следеће тензоре инерције

$$[J_{c(1)}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad [J_{c(2)}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad [J_{c(3)}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ [kgm}^2\text{]}, \quad (2.43)$$

и масе $m_i = 5 \text{ [kg]}$, $i = 1, 2, 3$.

На основу једначине (2.1), диференцијалне једначине кретања роботског система са три степена слободе кретања, можемо записати у облику Lagrange-ових једначина друге врсте у коваријантном облику као

$$\sum_{\alpha}^3 a_{\alpha\gamma}(q) \ddot{q}^{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma}(q) \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta} = Q_{\gamma}^{\text{pog}} + Q_{\gamma}^g + Q_{\gamma}^{FKV}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad (2.44)$$

где имамо три независне генерализане координате q^1, q^2 и q^3 и укупно девет односно по три генерализане силе од сила теже роботских сегмената $Q_{\gamma}^g, \gamma = 1, 2, 3$, од погонских сила $Q_{\gamma}^{\text{pog}}, \gamma = 1, 2, 3$ и од везаног ФКВ елемента $Q_{\gamma}^{FKV}, \gamma = 1, 2, 3$.

Одговарајући елементи метричког тензора $a_{\alpha\gamma}$ и Christoffel-ови симболи прве врсте $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta,\gamma}$ су одређени на основу једначина (2.2)-(2.6) (за пример из [75]) и дати у облику

$$a_{11} = 3 + \cos(q^2) [5(q^3)^2 + 8q^3 + 21.65], \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad (2.45)$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = 23.65 + 8q^3 + 5(q^3)^2, \quad a_{23} = 0, \quad (2.46)$$

$$a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 5, \quad (2.47)$$

$$\tilde{\Gamma}_{12,1} = -\cos(q^2) \sin(q^2) [5(q^3)^2 + 8q^3 + 21.65], \quad \tilde{\Gamma}_{22,1} = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{23,1} = 0, \quad (2.48)$$

$$\tilde{\Gamma}_{13,1} = \cos^2(q^2) [5q^3 + 4], \quad \tilde{\Gamma}_{13,2} = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{33,1} = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{33,2} = 0, \quad (2.49)$$

$$\tilde{\Gamma}_{23,2} = 5q^3 + 4. \quad (2.50)$$

За остале Christoffel-ове симболе прве врсте, на основу чињенице да је $\alpha \leq \beta$ и својстава симетрије и антисиметрије, добија се

$$\tilde{\Gamma}_{11,1} = 0, \tilde{\Gamma}_{22,2} = 0, \tilde{\Gamma}_{33,3} = 0, \tilde{\Gamma}_{21,2} = \tilde{\Gamma}_{12,2} = 0, \tilde{\Gamma}_{32,3} = \tilde{\Gamma}_{23,3} = 0, \tilde{\Gamma}_{31,3} = \tilde{\Gamma}_{13,3} = 0, \quad (2.51)$$

$$\tilde{\Gamma}_{21,1} = \tilde{\Gamma}_{12,1}, \tilde{\Gamma}_{31,1} = \tilde{\Gamma}_{13,1}, \tilde{\Gamma}_{32,1} = \tilde{\Gamma}_{23,1}, \tilde{\Gamma}_{31,2} = \tilde{\Gamma}_{13,2}, \tilde{\Gamma}_{32,2} = \tilde{\Gamma}_{23,2}, \tilde{\Gamma}_{21,3} = \tilde{\Gamma}_{12,3}, \quad (2.52)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11,2} = -\tilde{\Gamma}_{12,1}, \tilde{\Gamma}_{11,3} = -\tilde{\Gamma}_{13,1}, \tilde{\Gamma}_{12,3} = -\tilde{\Gamma}_{13,2}, \tilde{\Gamma}_{23,2} = -\tilde{\Gamma}_{22,3}. \quad (2.53)$$

За генералисане силе од сила теже добијамо

$$Q_1^g = 0, \quad (2.54)$$

$$Q_2^g = -\cos(q^2) (53.955 + 49.05q^3), \quad (2.55)$$

$$Q_3^g = -49.05 \sin(q^2). \quad (2.56)$$

Генералисане погонске силе роботског система су $Q_1^{\text{pog}} = M_1$, $Q_2^{\text{pog}} = M_2$ и $Q_3^{\text{pog}} = F_3$, где M_1 , M_2 и F_3 представљају одговарајуће моменте у ротационим зглобовима, односно силу у транслаторном зглобу. Генералисане силе од фракционог Kelvin-Voigt-овог елемента Q_1^{FKV} , Q_2^{FKV} и Q_3^{FKV} су одређене једначинама (2.35)-(2.38), где је померање елемента дато релацијом

$$x = l - l_0 = \sqrt{[(0.7 + q^3) \cos q^2 - 0.1]^2 + [(0.7 + q^3) \sin q^2 + 0.4]^2} - l_0, \quad (2.57)$$

што на крају даје систем са три нелинеарне фракционе диференцијалне једначине другог реда у облику

$$a_{11}\ddot{q}^1 + 2\tilde{\Gamma}_{12,1}\dot{q}^1\dot{q}^2 + 2\tilde{\Gamma}_{13,1}\dot{q}^1\dot{q}^3 = Q_1^{\text{pog}}, \quad (2.58)$$

$$a_{22}\ddot{q}^2 - 2\tilde{\Gamma}_{12,1}(\dot{q}^1)^2 + 2\tilde{\Gamma}_{23,2}\dot{q}^2\dot{q}^3 = Q_2^{\text{pog}} + Q_2^g + Q_1^{FKV}, \quad (2.59)$$

$$a_{33}\ddot{q}^2 - 2\tilde{\Gamma}_{13,1}(\dot{q}^1)^2 - 2\tilde{\Gamma}_{23,2}(\dot{q}^2)^2 = Q_3^{\text{pog}} + Q_3^g + Q_3^{FKV}, \quad (2.60)$$

или у проширеном облику као

$$(3 + \cos^2(q^2) [5(q^3)^2 + 8q^3 + 21.65])\ddot{q}^1 - 2 \cos(q^2) \sin(q^2) (8q^3 + 5(q^3)^2 + 21.65)\dot{q}^1\dot{q}^2 + 2(5 \cos^2(q^2) (0.8 + q^3))\dot{q}^1\dot{q}^3 = Q_1^{\text{pog}}, \quad (2.61)$$

$$(23.65 + 5(q^3)^2 + 8q^3)\ddot{q}^2 + \sin(q^2) \cos(q^2) (8q^3 + 5(q^3)^2 + 21.65)(\dot{q}^1)^2 + 2(4 + 5q^3)\dot{q}^2\dot{q}^3 = Q_2^{\text{pog}} + Q_2^g + Q_2^{FKV}, \quad (2.62)$$

$$5\ddot{q}^3 - \cos^2(q^2)(4 + 5q^3)(\dot{q}^1)^2 - (4 + 5q^3)(\dot{q}^2)^2 = Q_3^{\text{pog}} + Q_3^g + Q_3^{\text{FKV}}. \quad (2.63)$$

Да бисмо решили овај систем нелинеарних диференцијалних једначина другог реда можемо их свести, најпре, на систем једначина првог реда за елементе вектора стања \mathbf{X} у облику

$$X_1 = q^1(t), X_2 = q^2(t), X_3 = q^3(t), X_4 = \dot{q}^1, X_5 = \dot{q}^2, X_6 = \dot{q}^3, \\ X_{6+p-1} = M_{(p-1)}, X_{6+N-1} = M_{(N-1)}, \quad p = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.64)$$

одакле добијамо систем једначина првог реда као

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_4, \\ \dot{X}_2 &= X_5, \\ \dot{X}_3 &= X_6, \\ \dot{X}_4 &= \dot{q}^1 = \frac{Q_1^{\text{pog}} - 2\tilde{\Gamma}_{12,1}X_4X_5 - 2\tilde{\Gamma}_{13,1}X_4X_6}{a_{11}}, \\ \dot{X}_5 &= \dot{q}^2 \\ &= \frac{Q_2^{\text{pog}} + Q_2^g(X_2, X_3) + Q_2^{\text{FKV}}(X_2, X_3, X_{6+p-1}, X_{6+N-1}) + 2\tilde{\Gamma}_{12,1}(X_4)^2 - 2\tilde{\Gamma}_{23,2}X_5X_6}{a_{22}}, \\ \dot{X}_6 &= \dot{q}^3 \\ &= \frac{Q_3^{\text{pog}} + Q_3^g(X_2) + Q_3^{\text{FKV}}(X_2, X_3, X_{6+p-1}, X_{6+N-1}) + 2\tilde{\Gamma}_{13,1}(X_4)^2 + 2\tilde{\Gamma}_{23,2}(X_5)^2}{a_{22}}, \\ \dot{X}_{6+p-1} &= (1-p)(t-a)^{p-2}x(X_2, X_3), \quad p = 2, 3, \dots, N-1, \\ \dot{X}_{6+N-1} &= (1-N)(t-a)^{N-2}x(X_2, X_3), \end{aligned} \quad (2.65)$$

где је померање елемента сада дато у функцији елемената вектора \mathbf{X} у облику

$$x(X_2, X_3) = \sqrt{[(0.7 + X_3) \cos(X_2) - 0.1]^2 + [(0.7 + X_3) \sin(X_3) + 0.4]^2} - l_0, \quad (2.66)$$

и одговарајући почетни услови

$$\mathbf{X} = [X_{10} \quad X_{20} \quad X_{30} \quad X_{40} \quad X_{50} \quad X_{60} \quad X_{(6+p-1)0} \quad \dots \quad X_{(6+N-1)0}], \quad (2.67)$$

који су дати у следећем облику

$$\begin{aligned} X_{10} &= q^1(0), X_{20} = q^2(0), X_{30} = q^3(0), X_{40} = \dot{q}^1(0), \\ X_{50} &= \dot{q}^2(0), X_{60} = \dot{q}^3(0) \\ X_{(6+p-1)0} &= M_{(p-1)} = 0, X_{(6+N-1)0} = M_{(N-1)} = 0, \quad p = 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (2.68)$$

2.6 Нумерички резултати и упоредна анализа

За претходно приказан роботски систем са три сегмента и три степена слободе кретања (слика 2.3) генералисане силе од везаних ФКВ, ФКВА, ФПКВ и ФМР елемената су одређене једначинама (2.35)-(2.42), док је фракциони извод апроксимиран нумеричком шемом (2.26). На основу ових једначина и генералисаних координата $q^1 = 1$, $q^2 = 0.1 \cdot \sin(8t)$ и $q^3 = 0.1 \cdot t$ могуће је одредити вредности генералисаних сила у времену. Одређивање генералисаних координата у времену, тј. одзива неуправљаног роботског система, може се добити решавањем система нелинеарних диференцијалних једначина првог реда (2.65).

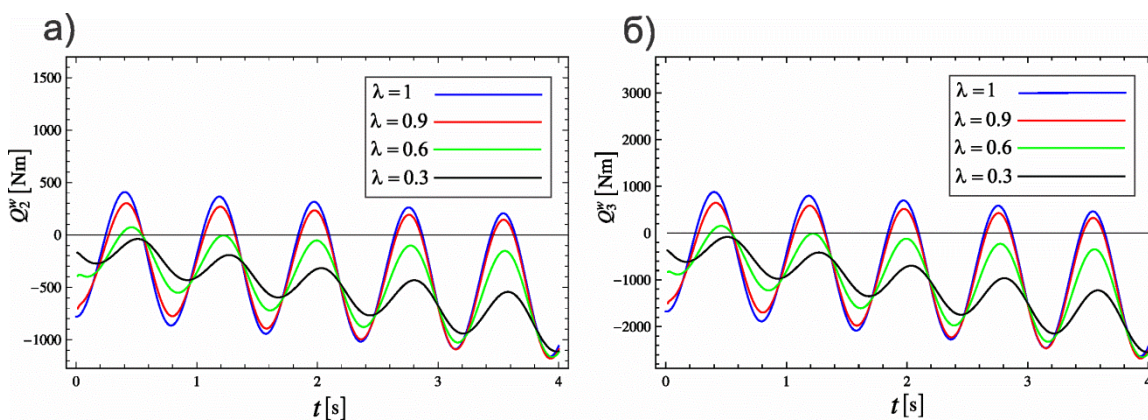
2.6.1 Генералисане силе током времена

У сврху спровођења нумеричких симулација за одређивање генералисаних сила усвојили смо одговарајуће вредности параметара зависно од типа везаног елемента. Димензије роботских сегмената, тј. дужине вектора који описују роботски систем, су усвојене из поглавља 2.5. Код ФКВ (слика 2.4) и ФКВА (слика 2.5) елемента смо усвојили да је $E_s = 20[\text{N/cm}]$ и $E_\lambda = 50[\text{Ns}^\lambda/\text{cm}]$, док смо код ФКВА елемента усвојили синусоидно променљиву силу на актуатору фреквенције 8 [Hz].

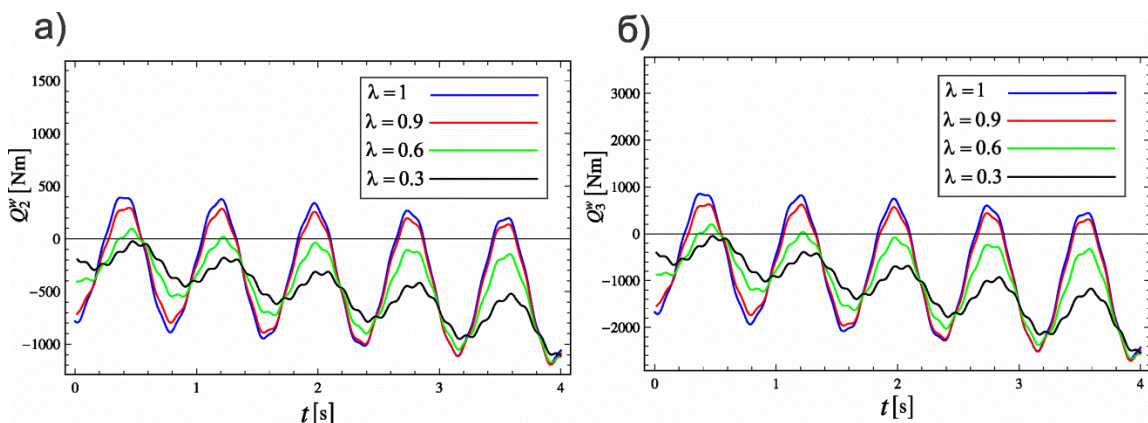
Код ФПКВ елемента, симулације су урађене за следеће вредности параметара у једначинама (2.39) и (2.40): $E_s = 25[\text{N/cm}]$, $E_p = 50[\text{N/cm}]$, $E_{\lambda p} = [E_s + E_p]\tau_F^\lambda[\text{Ns}^\lambda/\text{cm}]$, $\tau_F = 1[\text{s}]$, $a_{up} = 0.1[\text{cm/V}]$, $n = 1$ и $N = 4$ у једначини (2.26). На пиезо-керамици примењен је напон од 60[V] и фреквенције 8[Hz]. Генералисане силе Q_2^w и Q_3^w за промене реда фракционог извода дате су на слици 2.6.

За случај ФМР елемента, симулације су урађене за следеће вредности параметара у једначинама (2.41) и (2.42): $E_s = 25[\text{N/cm}]$, параметар $E_{\lambda mr}$ је линеарно зависан од струје i на електромагнету ФМР елемента у облику $E_{\lambda mr} = E_s(\tau_{F_0}^\lambda + i \cdot \tau_{F_1}^\lambda)[\text{Ns}^\lambda/\text{cm}]$, где су $\tau_{F_0}^\lambda = 2[\text{s}]$, $\tau_{F_1}^\lambda = 0.3[\text{s}]$, $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot i$, $\varphi_0 = 150[\text{N/cm}]$, $\varphi_1 = 500[\text{N/cm}]$, $A = 120[\text{N/cm}]$, $\phi = 300[\text{cm}^{-2}]$, $\chi =$

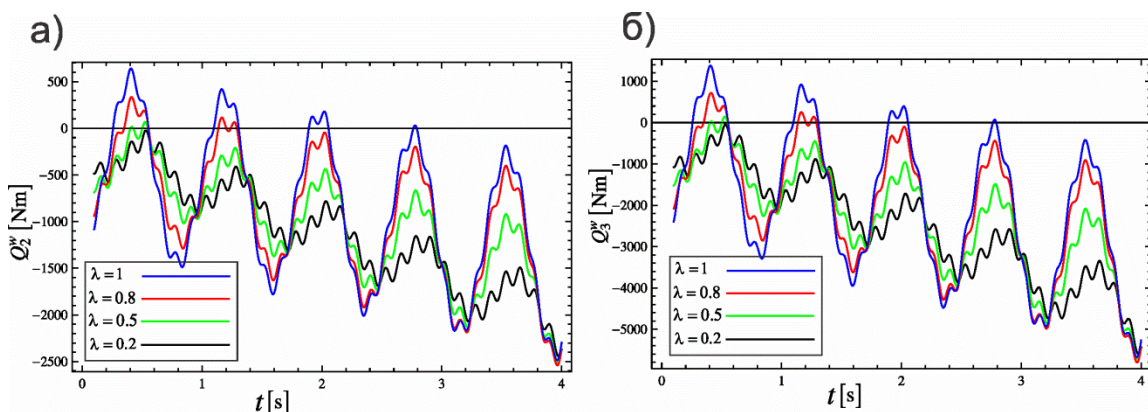
300[cm⁻²] и $N = 4$ у једначини (2.11). Генерисане силе Q_2^w и Q_3^w за промену струје на електромагнету дате су на слици 2.7.



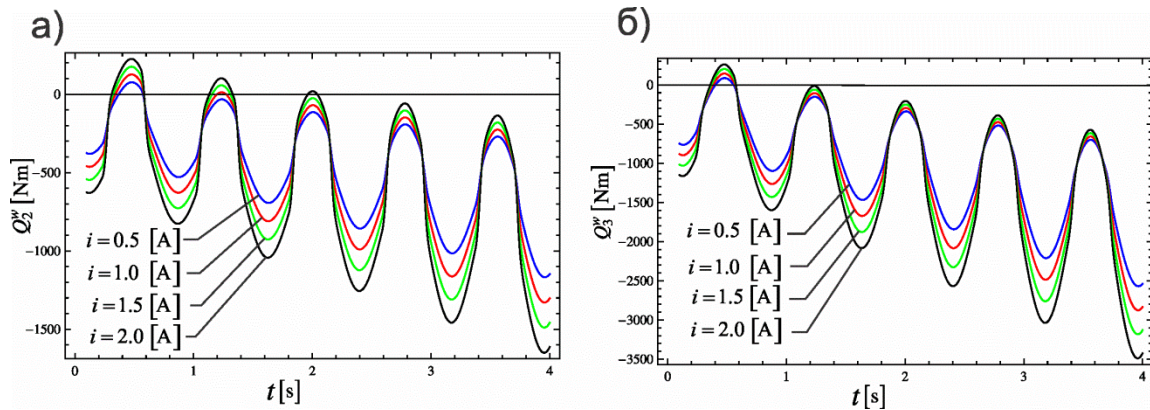
Слика 2.4. Генерисане силе ФКВ елемента за промену вредности фракционог параметра.



Слика 2.5. Генерисане силе ФКВА елемента за промену вредности фракционог параметра.



Слика 2.6. Генерисане силе ФПКВ елемента за промену вредности фракционог параметра.



Слика 2.7. Генералисане силе МР елемента за промену струје на електромагнету.

На основу приказаних нумеричких примера за генералисане силе можемо закључити следеће. Вредности генералисаних сила имају негативан предзнак и опадају у току времена. Узрок томе је добијени облик генералисаних координата као функција времена решавањем инверзног кинематског задатка. Амплитуда генералисаних сила се мења у току времена зависно од вредности фракционог параметра, те је за веће вредности фракционог параметра већа и амплитуда генералисаних сила, док се са смањењем фракционог параметра амплитуда смањује. Овакво понашање се може приметити код свих типова елемената а условљено је тиме што веће вредности фракционог параметра уносе веће пригушење у систем тј. израженије је вискозно понашање елемената. Такође, повећање вредности фракционог параметра које тежи јединици, тј. када фракциони извод функције тежи првом изводу те функције, добијају се вредности генералисаних сила које одговарају класичним вискоеластичним моделима, што показује да решење добијено нумеричком апроксимацијом конвергира ка целобројном решењу. Овиме смо потврдили исправност примењене апроксимационе формуле за фракционе изводе. Код ФКВА елемента на слици 2.5 и ФПКВ елемента на слици 2.6 можемо приметити да имамо локалну промену амплитуде генералисане силе која се добија суперпозицијом синусоидалног сигнала са актуатора, односно пиезо керамике на основну амплитуду генералисане силе у току времена. Код ФМР елемента, слика 2.7, можемо приметити да се основна амплитуда

генерализане силе у току времена повећава са порастом струје на електромагнету. Узрок томе је повећано пригушење у систему узроковано повећањем јачине магнетног поља, што је основно својство магнетнореолошких флуида.

2.6.2 Параметарска анализа и одзив неуправљаног робота

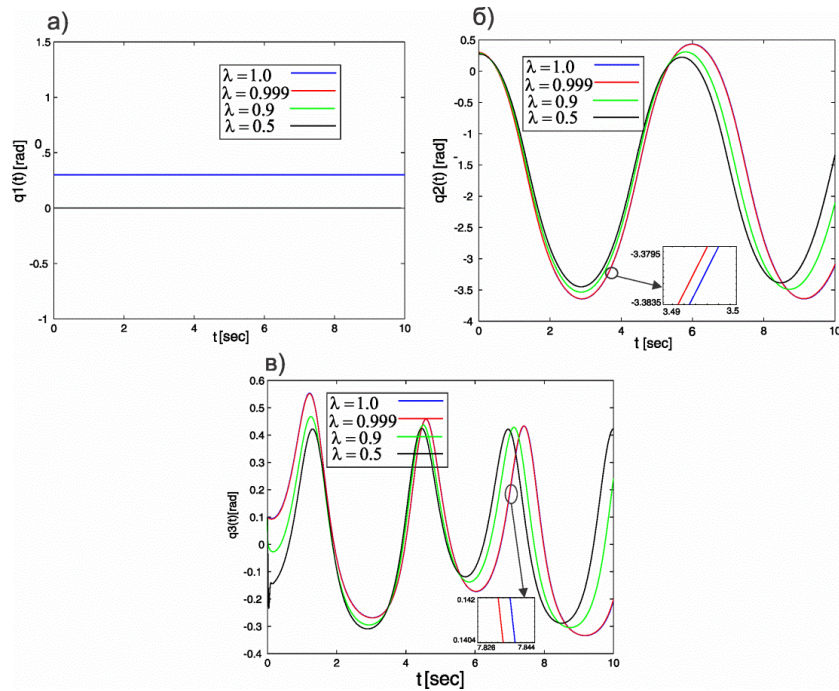
Добијени систем нелинеарних диференцијалних једначина првог реда (2.65) са одговарајућим почетним условима, генерализаним координатама и брзинама, као и нултим почетним условима за момент функције, можемо решити применом нумеричких метода као што је метод Runge-Kutta четвртог реда, в. [68]. Ми смо у нашем случају применом функције ode45 у програму Matlab, а која је базирана на методи Runge-Kutta четвртог и петог реда, решили добијени систем нелинеарних диференцијалних једначина првог реда и добили одзив неуправљаног система. Пре одређивања одзива неуправљаног система неопходно је у аналитичком облику одредити вредност генерализаних сила фракционог Kelvin-Voigt-овог елемента, које су функције генерализаних координата и брзина, као и одговарајуће апроксимације фракционог извода сложене функције померања $x(X_2, X_3)$, које зависе од момената M_p исте те функције. Нумеричка апроксимациона шема фракционог извода зависи од броја чланова N у суми, и за већи број узетих чланова показана је боља апроксимација фракционог извода. На основу једначине (2.32) може се одредити грешка у апроксимацији. Ипак, у раду [68] је показано да се за мали број чланова у апроксимационој шеми може постићи одговарајућа апроксимација фракционог извода. Стога, овде ће бити дати нумерички примери одзива неуправљаног роботског система са три степена слободe и везаним фракционим Kelvin-Voigt-овим елементом, слика 2.3 а), са $N = 3$ и $N = 6$ чланова у одговарајућим сумама (2.26)-(2.31).

Упоредна анализа је извршена како би се показала валидност примењене нумеричке апроксимације фракционог извода. Валидација овде примењене нумеричке апроксимационе шеме, са аналитички одређеним фракционим изводима за различите типове функција, се такође може наћи у

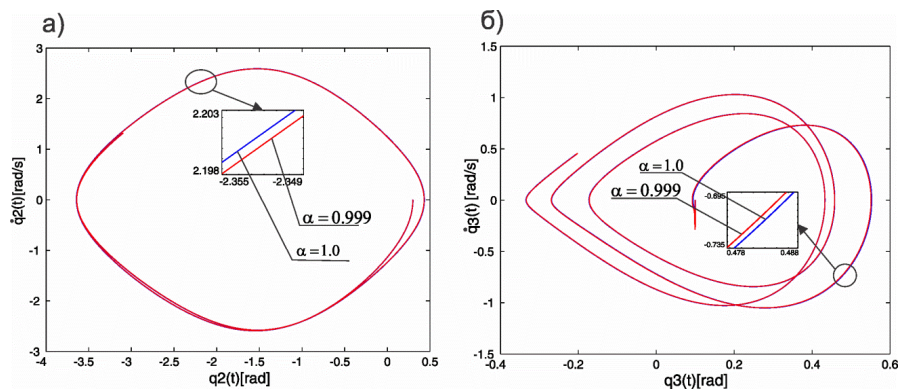
раду [68]. Приказаћемо одзив роботског система са три степена слободe на основу добијених нумеричких резултата за три генералисане силе током времена, као и одговарајућих фазних дијаграма. Одзив роботског система за случај када је везан класични елемент, са паралелно везаном опругом и пригушницом, где у релацији сила-померање елемента имамо функцију померања елемента и њен први извод, је упоређен са одзивом система са ФКВ елементом и фракционим изводом који тежи јединици. Усвојене су следеће вредности параметара у систему $E_s = 20[\text{N/cm}]$, $\tau_F = 2.5[\text{sec}]$ и $N = 4$. Симулације су рађене за следеће почетне услове $q^1(0) = 0.3 [\text{rad}]$, $q^2(0) = 0.3 [\text{rad}]$, $q^3(0) = 0.1 [\text{cm}]$, $\dot{q}^1(0) = 0$, $\dot{q}^2(0) = 0$, $\dot{q}^3(0) = 0$, $M_{(2)} = 0$, $M_{(3)} = 0$, $M_{(4)} = 0$.

Генералисане координате q^1 , q^2 и q^3 су дате на сликама 2.8 а) – в) у времену за случај роботског система са класичним елементом опруга-пригушница, где први извод у ФКВ моделу одговара случају $\lambda = 1$, као и остала три случаја која су добијена применом нумеричке шеме за $\lambda = 0.5$, $\lambda = 0.9$ и $\lambda = 0.999$. Са дате слике се може закључити да када ред извода тежи јединици, тј. случају са целобројним изводом, одзив система конвергира ка решењу које се добија у случају класичног елемента за исте вредности осталих параметара у моделу.

На сликама 2.9 а) и б) су дати фазни дијаграми за генералисане координате q^2 и q^3 и генералисане брзине \dot{q}^2 и \dot{q}^3 . Може се уочити да имамо квази-периодичне путање у оба случаја и да решење за $\lambda = 0.999$ конвергира ка решењу које се добија у случају система са класичним моделом опруга-пригушница. Овим се потврђује исправност примењене методологије за добијање одзива система са елементима фракционог реда применом нумеричке шеме (2.11).

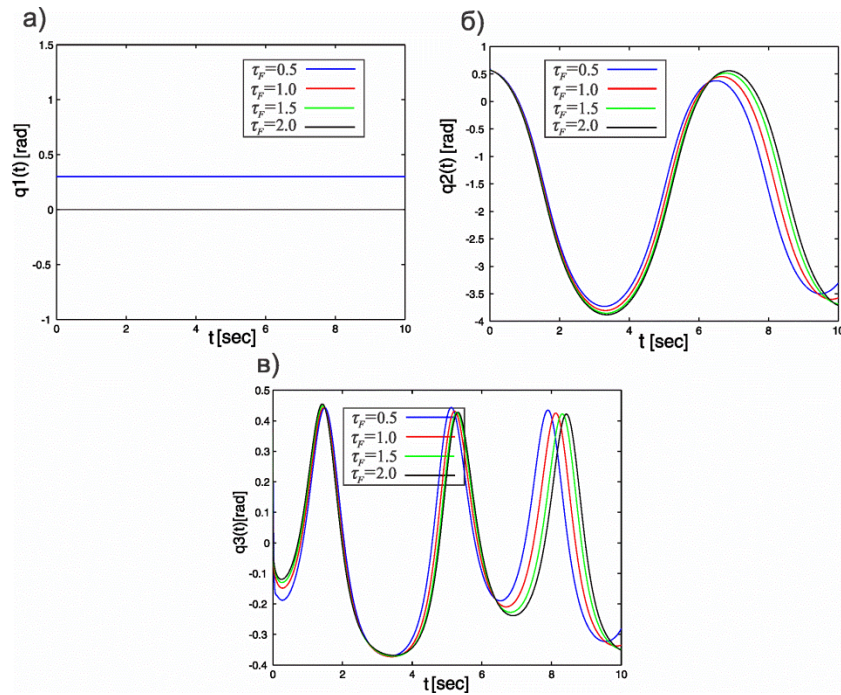


Слика 2.8. Одзив неуправљаног система са ФКВ елементом и променом фракционог параметра а) генералисана координата q^1 , б) генералисана координата q^2 и в) генералисана координата q^3 .

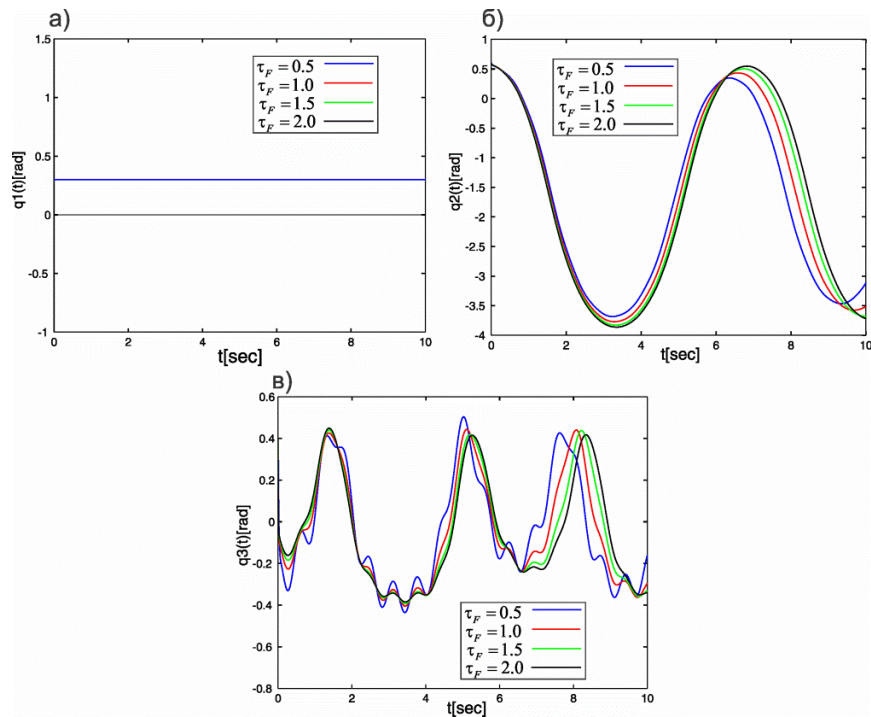


Слика 2.9. Фазни дијаграм за класични и ФКВ елемент а) генералисана координата q^2 и брзина \dot{q}^2 , б) генералисана координата q^3 и брзина \dot{q}^3 .

Нумерички примери у наставку су симулирани за следеће почетне услове $q^1(0) = 0.3$ [rad], $q^2(0) = 0.6$ [rad], $q^3(0) = 0.4$ [cm], $\dot{q}^1(0) = 0$, $\dot{q}^2(0) = 0$, $\dot{q}^3(0) = 0$, $M_{(2)} = 0$, $M_{(3)} = 0$, $M_{(4)} = 0$.



Слика 2.10. Одзив неуправљаног система са ФКВ елементом и променом времена ретардације а) генералисана координата q^1 , б) генералисана координата q^2 и в) генералисана координата q^3 .



Слика 2.11. Одзив неуправљаног система са ФКВА елементом и променом времена ретардације а) генералисана координата q^1 , б) генералисана координата q^2 и в) генералисана координата q^3 .

На сликама 2.10 а) - в) су дате генералисане координате за промену времена ретардације. Можемо приметити да промена времена ретардације у ФКВ елементу утиче незнатно на одзив система у почетним тренуцима времена. Ипак, тај утицај се са порастом времена повећава.

У случају ФКВА елемента, слика 2.11, код генералисане силе q^3 имамо суперпозицију синусоидног сигнала са актуатора на основну амплитуду генералисаних координата. Ипак, може се приметити да је утицај овог сигнала на основну амплитуду генералисане координате мањи са повећањем пригушења у систему, тј. са повећањем времена ретардације.

Глава 3

Осцилације наноштапа и наногреде са пригушењем фракционог типа

3.1 Уводна разматрања

Проград осаварен последњих година у домену нанотехнологија доводи до све веће примене њихових производа у нано-инжењерству, индустрији, биоинжењерству, аеро-технологијама итд. Наноструктуре као што су наноцеви или наноплоче, добијене применом различитих технолошких процеса из угљеника, цинк-оксида, бор-нитрида, злата и сребра [118, 119], играју све већу улогу у конструкцији савремених микро-електромеханичких система (МЕМС) и нано-електромеханичких система (НЕМС) због својих побољшаних термичких, механичких и електричних особина у односу на конвенционалне материјале [120]. Такође, многи истраживачи се баве моделирањем и применом нанокомпозита, који се састоје од одговарајућих наноструктура смештених у матрици од полимера, због њихових побољшаних механичких својстава у односу на чисте наноструктуре. Анализа динамичког понашања и стабилности овако сложених нано-система применом нелокалне теорије Eringen-а показала се веома успешном, где је валидност добијених резултата често потврђивана применом молекуларно динамичких симулација за једноставније системе наноструктура [121, 122].

За описивање својстава пригушења и дисипације енергије у наноструктурама могу се користити бројни модели вискоеластичног тела као што су Maxwell-ов, Zener-ов или Kelvin-Voigt-ов модел са целобројним изводима [94-96]. Значајне предности фракционих модела вискоеластичности, у односу на класичне, огледају се у бољем описивању својстава пригушења за исти или мањи број параметара у моделу. Применићемо моделе наноструктура, који узимају у обзир нелокалне ефекте присутне на нано скали као и својства спољашњег и структурног пригушења,

применом модификоване нелокалне и фракционо вискоеластичне конститутивне релације. Део резултата приказаних у овој глави објављен је у раду [108] и представљен на међународној конференцији [106].

3.2 Нелокална фракционо вискоеластична конститутивна једначина

Фракциони Kelvin-Voigt-ов модел је први пут предложен у раду Shermergor-а [19]. За једнодимензионални случај изотермалног вискоеластичног тела, фракционо модификована Kelvin-Voigt-ова конститутивна релација је дата у облику

$$\sigma_{xx} = E_0 \varepsilon_{xx}(t) + E_\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon_{xx}(t), \quad (3.1)$$

где је σ_{xx} напон дат као функција деформације ε_{xx} , E_0 је релаксирани модуо еластичности, $E_\alpha = E_0 \tau_\sigma^\alpha$, где је τ_σ^α време ретардације и ${}^{RL}D^\alpha$ је фракциони оператор Riemann-Liouville-овог извода реда $0 < \alpha < 1$. Према [44], фракциони Kelvin-Voigt-ов модел спада у дифузиони тип модела који задовољава дисипациону неједнакост проистеклу из другог закона термодинамике за изотропно тело, за све позитивне вредности параметара у моделу.

На основу нелокалне конститутивне релације (1.61) једнодимензионалног еластичног тела и конститутивне релације класичног Kelvin-Voigt-овог модела, може се добити нелокална вискоеластична конститутивна релација [94] у следећој форми

$$t_{xx} - \mu \frac{d^2 t_{xx}}{dx^2} = E \varepsilon_{xx} + \eta_d \dot{\varepsilon}_{xx}, \quad (3.2)$$

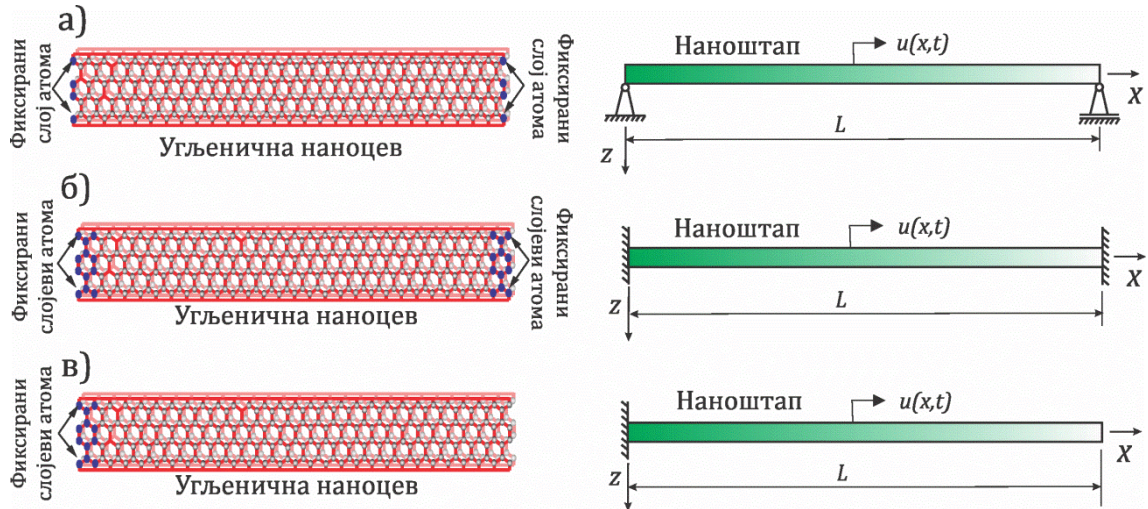
где E представља модуо еластичности, $\mu = (e_0 a)^2$ је нелокални параметар, t_{xx} нелокални напон и η_d је коефицијент пригушења или вискозни коефицијент. Уместо (3.2), увешћемо њену фракциону модификацију, коју ћемо добити комбинацијом једначине која везује локални и нелокални напон (1.61), и конститутивне релације за локални напон фракционог Kelvin-Voigt модела (3.1), у облику

$$t_{xx} - \mu \frac{d^2 t_{xx}}{dx^2} = E_0 (\varepsilon_{xx}(t) + \tau_\sigma^\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon_{xx}(t)). \quad (3.3)$$

Како је оператор фракционог извода нелокални оператор, поред нелокалности у временском домену, описану фракционим изводом функције деформације, он се може искористити и као нелокални оператор у просторном домену тако да се добије фракциона генерализација Eringen-овог модела нелокалне еластичности, в. [49].

3.3 Лонгитудиналне осцилације наноштапа

Осцилације у аксијалном правцу једнодимензионалних наноструктура, као што су угљеничне или цинк-оксид наноцеви, могу се представити механичким моделом наноштапа. Према Ansari-ју [122], на основу молекуларно динамичких симулација и нелокалног модела угљеничне наноцеви, показано је да се фиксирни слој атома угљеника, у случају угљеничне наноцеви, може представити граничним условима просто ослоњене наногреде, односно наноштапа у нашем случају, слика 3.1 а). Такође, више фиксираних слојева атома се могу представити граничним условима уклештеног наноштапа у механичком моделу, слика 3.1 б) и в). Из линеарне теорије вискоеластичних штапова познато је да се једначина слободних осцилација штапа, дуж осе штапа, може извести преко једначина равнотеже за елементарни део штапа и применом конститутивне релације напон-деформација за вискоеластично тело.



Слика 3.1. Илустрација физичког и механичког модела наноштапа

а) просто ослоњен, б) обострано уклештен, в) конзола.

Посматрајмо хомогени наноштап дужине L , густине ρ и попречног пресека A који осцилује у лонгитудиналном правцу дуж осе x . На основу d'Alembert-овог принципа, за елементарни део наноштапа можемо написати једначину динамичке равнотеже у облику

$$\frac{\partial P}{\partial x} + p = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.4)$$

где је P аксијална сила као резултанта напона σ_{xx} у попречном пресеку A , ρ је густина и p је континуално оптерећење која има димензију силе по јединици дужине наноштапа а које потиче од спољашњих извора. Ако узмемо у обзир да је резултанта P дата као

$$P(x, t) = \int_A t_{xx} dA, \quad (3.5)$$

и заменимо је у конститутивну релацију (3.3), добијамо

$$P - \mu \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = E_0 A (\varepsilon_{xx}(t) + \tau_\sigma^\alpha {}^{RL}D^\alpha \varepsilon_{xx}(t)). \quad (3.6)$$

Једначину кретања система добијамо из (3.4) и (3.6), одакле за $\varepsilon_{xx} = \partial u / \partial x$ имамо

$$p + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = E_0 A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_\sigma^\alpha \cdot D^\alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right). \quad (3.7)$$

Ако претпоставимо случај слободних осцилација наноштапа ($p = 0$), добијамо једначину кретања наноштапа (3.7) у следећем облику

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2 \partial x^2} - E_0 A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - E_0 A \tau_\sigma^\alpha \cdot D^\alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (3.8)$$

Једначина (3.8) представља једначину слободних лонгитудиналних осцилација фракционо вискоеластичног наноштапа, где смо узели у обзир и нелокалне ефекте преко нелокалног параметра μ . Ако у горњој једначини ставимо да је нелокални параметар $\mu = 0$, добијамо класични, тј. локални модел осцилација штапа. Бездимензиона форма једначине кретања (3.8) је

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2} - \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \tau^2 \partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \gamma \cdot D^\alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} \right) = 0, \quad (3.9)$$

где је

$$\bar{u} = \frac{u}{L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{c} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E_\infty}{\rho}}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{L}, \gamma = \tau_\sigma^\alpha c^\alpha, \bar{t} = t \bar{c}. \quad (3.10)$$

3.3.1 Решење фракционе диференцијалне једначине кретања наноштапа

Претпоставимо да се решење једначине (3.9) може добити раздвајањем променљивих

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = X(\bar{x})T(\bar{t}). \quad (3.11)$$

Ако једначину (3.11) заменимо у (3.9) добијају се две диференцијалне једначине које се могу решавати независно једна од друге.

Прва једначина је обична диференцијална једначина другог реда амплитудне функције $X(\bar{x})$ и дата је у облику

$$\ddot{X}(\bar{x}) + \lambda^2 X(\bar{x}) = 0, \quad (3.12)$$

где је λ карактеристични број. Друга једначина је фракциона диференцијална једначина фракционог реда временске функције $T(\bar{t})$ и дата је

$$\dot{T}(\bar{t}) + \omega_\alpha {}^{RL}D^\alpha T(\bar{t}) + \omega_0^2 T(\bar{t}) = 0, \quad (3.13)$$

где је

$$\omega_\alpha = \frac{\lambda^2 \gamma}{1 + \bar{\mu} \lambda^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{\lambda^2}{1 + \bar{\mu} \lambda^2}. \quad (3.14)$$

Да бисмо нашли решење фракционе диференцијалне једначине (3.13), најпре ћемо извршити Laplace-ову трансформацију узевши у обзир да су почетни услови фракционог реда $D^{\alpha-1}T(0) = 0$ за Riemann-Liouville-ову дефиницију извода једнаки нули [48]. У Laplace-овом домену решење једначине (3.13) има облик

$$\bar{T} = \frac{p T(0) + \dot{T}(0)}{p^2 + \omega_\alpha p^\alpha + \omega_0^2}, \quad (3.15)$$

где је $\bar{T} = \mathcal{L}(T)$ Laplace-ова трансформација временске функције T . Да бисмо решење приказали у временском домену, најпре ћемо горњу једначину приказати у следећем облику

$$\bar{T} = \frac{p T(0)}{p^2 + \omega_\alpha p^\alpha + \omega_0^2} + \frac{\dot{T}(0)}{p^2 + \omega_\alpha p^\alpha + \omega_0^2}. \quad (3.16)$$

Даље, развојем у геометријски ред се добија

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{T(0)}{p \left(1 + \frac{\omega_\alpha}{p^2} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha} \right) \right)} + \frac{\dot{T}(0)}{p^2 \left(1 + \frac{\omega_\alpha}{p^2} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha} \right) \right)} \\ &= T(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\omega_\alpha}{p^2} \right)^k}{p} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha} \right)^k + \dot{T}(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\omega_\alpha}{p^2} \right)^k}{p^2} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha} \right)^k \\ &= T(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_\alpha^k}{p^{2k+1}} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha} \right)^k + \dot{T}(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_\alpha^k}{p^{2k+2}} \left(p^\alpha + \frac{\omega_0^2}{\omega_\alpha} \right)^k \\ &= T(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_\alpha^j \omega_0^{2(k-j)}}{p^{2k+1-\alpha j}} + \dot{T}(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_\alpha^j \omega_0^{2(k-j)}}{p^{2(k+1)-\alpha j}}. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Примењујемо инверзну Laplace-ову трансформацију, в. [123], да бисмо добили решење фракционе диференцијалне једначине (3.13) у временском домену, в. [45, 46]

$$\begin{aligned}
T(\bar{t}) = T(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_{\alpha}^j \omega_0^{2(k-j)} \bar{t}^{2k-\alpha j}}{\Gamma[2k+1-\alpha j]} \\
+ \dot{T}(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_{\alpha}^j \omega_0^{2(k-j)} \bar{t}^{2k+1-\alpha j}}{\Gamma[2(k+1)-\alpha j]}, \quad (3.18)
\end{aligned}$$

где решење важи у случају када је фракциони параметар $0 < \alpha < 1$. Два специјална случаја једначине (3.18) се добијају за $\alpha = 0$

$$T(\bar{t}) = T(0) \cos\left(\bar{t} \sqrt{\omega_0^2 + \omega_{\alpha}}\right) + \dot{T}(0) \frac{\sin\left(\bar{t} \sqrt{\omega_0^2 + \omega_{\alpha}}\right)}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_{\alpha}}}, \quad (3.19)$$

и $\alpha = 1$

$$T(\bar{t}) = e^{-\frac{\omega_{\alpha} \bar{t}}{2}} \left[T(0) \cos\left(\bar{t} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_{\alpha}^2}{4}}\right) + \frac{\dot{T}(0) + \frac{\omega_{\alpha}}{2} \cdot T(0)}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_{\alpha}^2}{4}}} \sin\left(\bar{t} \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_{\alpha}^2}{4}}\right) \right]. \quad (3.20)$$

Решење обичне диференцијалне једначине (3.12) које задовољава граничне услове конзоле, просто ослоњеног и обострано уклештеног наноштапа претпостављамо у облику

$$X_n(\bar{x}) = C_n \sin \lambda_n \bar{x}, \quad (3.21)$$

где је $C_n \neq 0$ произвољна константа. Узимањем у обзир различитих граничних услова, из карактеристичне једначине система могу се одредити вредности карактеристичног броја на исти начин као и код еластичних штапова. Сопствене вредности за одговарајуће граничне услове су:

а) просто ослоњен наноштап

$$\begin{aligned}
X(0) &= 0, \\
X(1) &= 0,
\end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \infty; \quad (3.23)$$

б) конзолни наноштап

$$\begin{aligned}
X(0) &= 0, \\
X'(1) &= 0,
\end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\lambda_n = (2n-1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \infty; \quad (3.25)$$

в) обострано уклештен наноштап

$$\begin{aligned} X'(0) &= 0, \\ X'(1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.27)$$

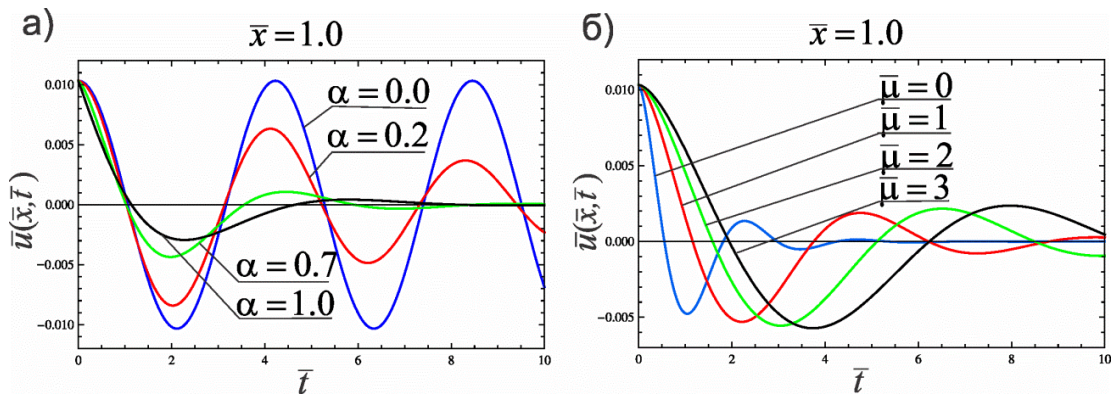
Решење једначине (3.9) је дато у облику

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\lambda \bar{x}) \left(T(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_{\alpha}^{2j} \omega_0^{2(k-j)} \bar{t}^{2k-\alpha j}}{\Gamma[2k+1-\alpha j]} \right. \\ &\quad \left. + \dot{T}(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\omega_{\alpha}^{2j} \omega_0^{2(k-j)} \bar{t}^{2k+1-\alpha j}}{\Gamma[2(k+1)-\alpha j]} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.3.2 Нумеричка анализа

Биће разматран утицај промене различитих параметара у моделу на померање фракционо вискоеластичног наноштапа, тачније, на померање одабраних тачака наноштапа у току времена. У сврху параметарске анализе усвојене су следеће материјалне и геометријске карактеристике наноштапа које одговарају угљеничној наноцеви [124]: модуло еластичности $E_0 = 1$ [ТПа], густина $\rho = 2300$ [kg/m³] и површина попречног пресека $A = 7.85 \times 10^{-19}$ [m²]. На сликама 3.2 до 3.5 приказане су бездимензионе вредности померања у аксијалном правцу у току времена, где су усвојене бездимензионе вредности нелокалног параметра $\bar{\mu} = 0.5$, времена ретардације $\tau = 0.0001$ и фракционог параметра $\alpha = 0.5$, уколико није другачије назначено на сликама. Тачке \bar{x} наноштапа, чије се померање посматра, одабране су различито, зависно од граничних услова. Посматрана су два карактеристична случаја граничних услова и то обострано уклештени наноштап и конзола. Случај просто ослоњеног наноштапа није разматран јер су амплитудне функције исте као и за обострано уклештен наноштап, те се добијају исти резултати за померања. Такође, у случају конзоле претпоставили смо да на наноштап дејствује сила $F = 10$ [nN] у аксијалном правцу која престаје да дејствује у почетном тренутку, те за почетне услове померања имамо неку функцију $\bar{u}(\bar{x}, 0) = F\bar{x}/E_0A$ и брзину $\dot{u}(\bar{x}, 0) = 0$. У случају обострано уклештеног наноштапа, узимамо да сила F дејствује на

средици наноштапа и престаје да дејствује у почетном тренутку времена, што даје следеће почетне услове: почетна брзина $\dot{u}(\bar{x}, 0) = 0$ и померање $\bar{u}(\bar{x}, 0) = F\bar{x}/2E_0A$ за $0 \leq \bar{x} \leq 0.5$ и $\bar{u}(\bar{x}, 0) = F(1 - \bar{x})/2E_0A$ за $0.5 \leq \bar{x} \leq 1$. Све приказане симулације понашања модела су изведене за $k = 200$ итерација у суми из једначине (3.29) и осцилације система у првом моду $n = 1$.

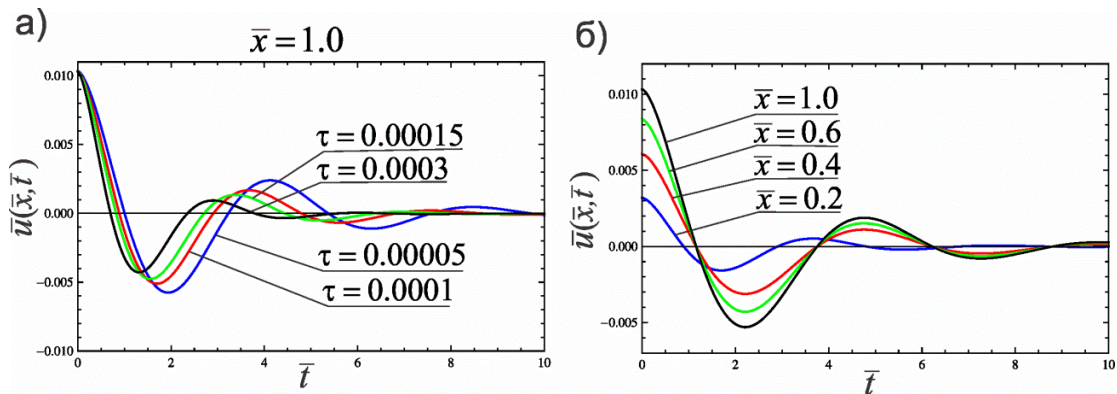


Слика 3.2. Померање конзолног наноштапа у времену за

- а) промену вредности фракционог параметра,
- б) промену бездимензионог нелокалног параметра.

На слици 3.2 су приказана бездимензиона померања врха конзолног наноштапа ($\bar{x} = 1$) током времена за различите вредности фракционог параметра, слика 3.2 а), и бездимензионог нелокалног параметра, слика 3.2 б). Из приказаног дијаграма за промене вредности фракционог параметра α може се јасно уочити промена у понашању модела, зависно од тога да ли је вредност параметра блиска јединици или нули. За случај $\alpha = 0$ имамо хармонијске осцилације система, јер немамо утицај пригушења које уноси члан са фракционим изводом. Повећање реда фракционог извода повећава пригушење у систему, те се амплитуда осцилација постепено смањује до амплитуде која одговара класичном случају пригушених осцилација, $\alpha = 1$. Случај $\alpha = 1$ еквивалентан је случају класичног Kelvin-Voigt-овог вискоеластичног модела са целобројним изводима. Повећање вредности нелокалног параметра, слика 3.2 б), утиче на повећање амплитуде осциловања система. Својство система, где флексибилност структуре расте са порастом нелокалног параметра у моделу, је пре свега приписано смањењу укупне крутости система које доводи до смањења фреквенције и повећања

амплитуде осциловања, што је закључак изведен и од стране других аутора [102].

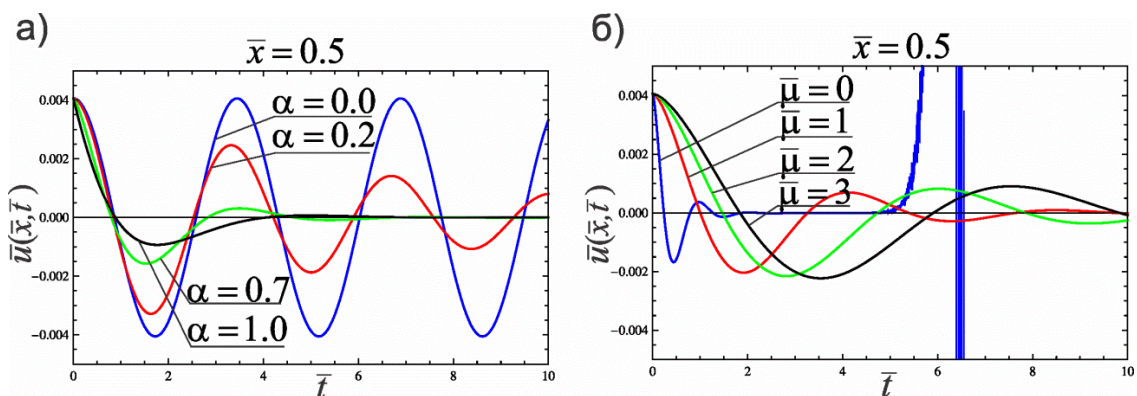


Слика 3.3. Померање конзолног наноштапа у времену за

а) промену вредности времена ретардације,

б) различите тачке наноштапа.

На слици 3.3 а) приказан је утицај промене времена ретардације на померање врха наноштапа током времена. Пораст вредности времена ретардације утиче на пораст пригушења у систему, што доводи до смањења амплитуде и потпуног пригушења у систему. На слици 3.3 б) приказана су померања у различитим тачкама наноштапа током времена, променом посматране тачке наноштапа која осцилује. Можемо приметити различита померања тачке у $t = 0$, што је условљено растојањем од места дејства силе у почетном тренутку.

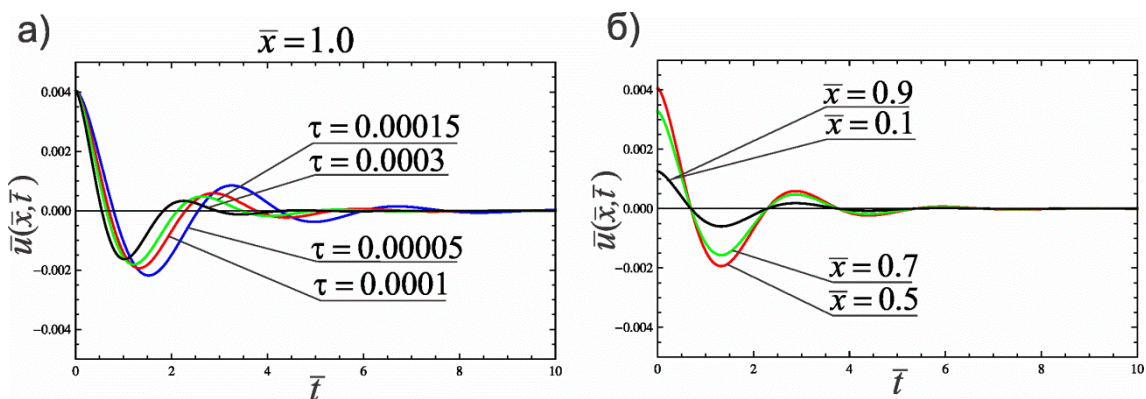


Слика 3.4. Померање уклештеног наноштапа у времену за

а) промену вредности фракционог параметра,

б) промену бездимензионог нелокалног параметра.

На сликама 3.4 и 3.5 приказана је параметарска анализа за обострано уклештени наноштап. На слици 3.4 а) је посматрано померање средње тачке наноштапа, у којој до почетног тренутка аксијално дејствује иста сила F . Може се уочити слично понашање система као и код конзолне греде, а то је да пригушење расте са порастом фракционог параметра. Такође, амплитуда осциловања је мања него код конзоле, јер је и дејство силе слабије за дате почетне и граничне услове. Повећање нелокалног параметра утиче на повећање амплитуде осциловања. Међутим, за $\bar{\mu} = 0$ може се уочити да после извесног времена решење дивергира за одређене вредности параметара система, што представља недостатак који је уочен и у другим радовима који су користили решење у облику геометријског реда [46]. Још један недостатак овако добијеног решења је спора конвергенција, где је потребно у суми (3.28) одабрати велики број чланова k .



Слика 3.5. Померање уклештеног наноштапа у времену за а) промену времена ретардације, б) различите тачке наноштапа.

На слици 3.5 а) можемо приметити да пораст времена ретардације утиче на пораст пригушења у систему и смањење амплитуде осциловања. За различите положаје наноштапа имамо различита померања наноштапа у току времена, слика 3.5 б). Оно што се може уочити на овом примеру је да за положаје наноштапа који су на истом одстојању од централне тачке али у супротним смеровима, имамо иста померања током времена.

3.4 Трансверзалне осцилације наногреде са наночестицом

Да бисмо формулисали линеарни механички модел једно-димензионалне наноструктуре, као што је нанограда, са пригушењем фракционог реда и анализирали његове трансверзалне осцилације, неопходно је да уведемо неколико основних претпоставки. Посматраћемо случај нелокалне Euler-Bernoulli-јеве греде са фракционим Kelvin-Voigt моделом вискоеластичног тела. Euler-Bernoulli-јева теорија греда је заснована на следећим претпоставкама: а) нема кривљења попречних пресека, б) попречни пресеци остају управни на уздужну осу греде у току и након деформације, в) нема деформације у правцу дебљине греде [130, 131]. Занемаривањем утицаја инерције ротације попречних пресека и утицаја деформације смицања, можемо записати следеће поље померања

$$\bar{u}_x = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad \bar{v}_y = 0, \quad \bar{w}_z = w(x, t), \quad (3.29)$$

где смо са \bar{u}_x и \bar{v}_y означили померања у x и y правцу управно на правац дебљине греде и \bar{w}_z је померање у z правцу, тј. правцу дебљине греде, слика 3.6. Усвајањем претпоставке да су деформације греде која осцилује у главној равни савијања мале, добијамо следеће компоненте тензора деформације наногреде

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial z} = 0, \quad (3.30)$$

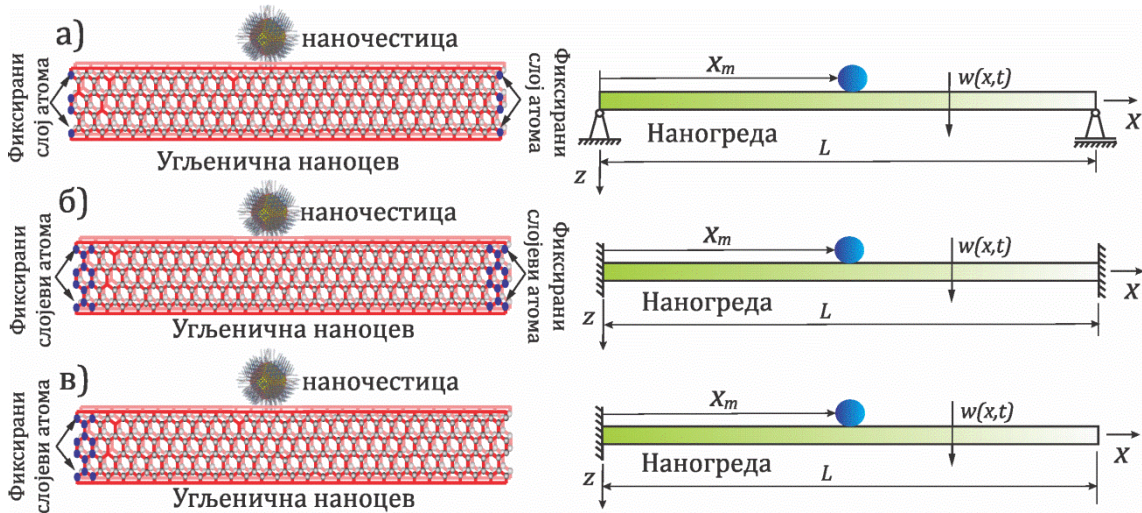
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial x} = 0, \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial \bar{w}_z}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z} = 0, \quad (3.31)$$

где су γ_{xy} , γ_{xz} и γ_{zy} смичуће деформације и ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} су нормалне деформације.

3.4.1 Једначине кретања наногреде са наночестицом

Нека је дата нанограда са наночестицом, слика 3.6, где је L дужина наногреде, A површина попречног пресека, ρ густина и $w(x, t)$ трансверзално померање наногреде у правцу z осе. Претпостављамо да је површина попречног пресека константна дуж x осе и да је нанограда хомогена. Према

Ansari-ju [122], физички модел угљеничне наноцеви са по једним фиксираним слојем атома на крајевима може се представити простим ослонцима у механичком моделу, док се више слојева фиксираних атома могу представити уклештеним ослонцима. На основу ових претпоставки, разматраћемо динамичко понашање система за три различита типа граничних услова и то просто ослоњена наногреда, слика 3.6 а), обострано уклештена наногреда 3.6 б), и конзолна наногреда, слика 3.6 в). Такође, претпоставићемо да се наночестица на наногреди понаша као концентрисана маса и да нема интеракције између наночестице и наногреде у виду van der Waals-ових сила.



Слика 3.6. Физички и механички модел наногреде са наночестицом као концентрисаном масом а) просто ослоњена наногреда, б) обострано уклештена наногреда, в) конзола.

За Euler-Bernoulli-јеву теорију греде, на основу датих компоненти тензора деформације (3.30) и (3.31), у даљем излагању користићемо следећу компоненту нормалне деформације

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.32)$$

Након што једначину (3.32) заменимо у конститутивну релацију (3.3) добијамо

$$t_{xx} - \mu \frac{d^2 t_{xx}}{dx^2} = -E_0 z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_\alpha {}^{RL}D^\alpha \left(z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.33)$$

где је $E_\alpha = E_0 \tau_1^\alpha$ параметар пригушења који зависи од релаксираног модула еластичности и времена ретардације τ_1 .

Једначина динамичке равнотеже за елементарни део наногреде се може добити, применом d’Alambert-овог принципа, у облику

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial x} + q(x), \quad (3.34)$$

где је V трансверзална сила, $q(x)$ је спољашње континуално оптерећење које занемарујемо за разматрани случај слободних осцилација. Из једначина равнотеже момената имамо да је

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}, \quad (3.35)$$

где је M момент савијања за који важи следећа једначина за резултујући момент $M = \int_A z t_{xx} dA$. Ако узмемо у обзир једначину (3.33) и аксијални момент инерције површине попречног пресека $I = \int_A z^2 dA$ за осу y , добијамо следећу једначину за момент савијања наногреде

$$M = \mu \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I E_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - I E_\alpha {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.36)$$

и трансверзалну силу V као

$$V = \mu \rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - I E_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - I E_\alpha {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right). \quad (3.37)$$

Као што се може приметити из датих једначина, момент савијања и трансверзална сила се у нелокалном случају разликују од једначина момента и силе за локалну теорију греде, што ће имати утицаја код дефинисања граничних услова. Једначина слободних осцилација наногреде са фракционим пригушењем у функцији померања $w(x, t)$ се добија у следећој форми

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + I E_0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + I E_\alpha {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) = 0. \quad (3.38)$$

Једначину (3.38) применићемо у модификованом облику да бисмо узели у обзир граничне и услове компатибилности услед утицаја наночестице као концентрисане масе.

3.4.2 Одређивање сопствених вредности и амплитудних функција наногреде са масом

Проблем трансверзалних осцилација наногреде са концентрисаном масом захтева да се узму у обзир гранични услови и услови компатибилности. Увођењем услова компатибилности на позицији на којој се налази маса, где за сваки део наногреде одређујемо засебно одговарајуће амплитудне функције, на месту спајања два дела имамо континуални прелаз и добијамо облик осциловања целе наногреде. Применом оваквог приступа свака нова концентрисана маса на наногреди довела би до увођења нових услова компатибилности на позицији додате масе, као и још једне једначине кретања која се односи на посматрани сегмент наногреде. Биће изложен најједноставнији случај са једном масом и три типа граничних услова. Пратећи поменути процедуру, у случају једне концентрисане масе имаћемо две једначине кретања исте форме као једначина (3.38) али са различитим функцијама померања $w_1(x, t)$ и $w_2(x, t)$, које у бездимензионој форми $\bar{w}_1(\bar{x}, \tau)$, $\bar{w}_2(\bar{x}, \tau)$, имају следећи облик

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} - \bar{\mu} \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^4} + {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \bar{x}^4} \right) \gamma = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} - \bar{\mu} \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^2 \partial \tau^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^4} + {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \bar{x}^4} \right) \gamma = 0. \quad (3.40)$$

Услови компатибилности на месту додате масе су

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{w}_2}{\partial \bar{x}}, \quad (3.42)$$

$$\bar{M}_1 = \bar{M}_2, \quad (3.43)$$

$$\bar{V}_1 - \bar{V}_2 + \delta \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3.44)$$

где су бездимензионе величине дате

$$\bar{w}_1 = \frac{w_1}{L}, \bar{w}_2 = \frac{w_2}{L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{x}_m = \frac{x_m}{L}, c = L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E_0 I}}, \bar{\mu} = \frac{\mu}{L},$$

$$\gamma = \frac{E_\alpha}{E_0 c^\alpha}, \tau = \frac{t}{c}, \delta = \frac{mAL}{E_0 I \cdot c}. \quad (3.45)$$

Гранични услови су усвојени зависно од типа ослонаца наногреде. Посматрали смо три различита и најчешће заступљена типа ослонаца: просту наногреду, обострано уклештену наногреду и конзолу. Да бисмо решили једначине кретања, претпостављамо да се решење једначина (3.39) и (3.40) може одредити методом раздвајања променљивих на временску и амплитудну функцију у облику

$$\bar{w}_1(\bar{x}, \tau) = W_1(\bar{x})T_1(\tau), \quad (3.46)$$

$$\bar{w}_2(\bar{x}, \tau) = W_2(\bar{x})T_2(\tau), \quad (3.47)$$

где ћемо сматрати да су временске функције за оба сегмента наногреде једнака, $T_1 = T_2 = T$. Заменом једначина (3.46) и (3.47) у једначине (3.39) и (3.40) добијамо следеће диференцијалне једначине

$$\ddot{T} + \gamma k^4 \cdot {}^{RL}D^\alpha T + k^4 T = 0, \quad (3.48)$$

$$W_1^{(IV)} + \bar{\mu} k^4 W_1^{(II)} - k^4 W_1 = 0, \quad (3.49)$$

$$W_2^{(IV)} + \bar{\mu} k^4 W_2^{(II)} - k^4 W_2 = 0, \quad (3.50)$$

где је k произвољна константа и $W_i^{(II)} = d^2 W_i / d\bar{x}^2$, $W_i^{(IV)} = d^4 W_i / d\bar{x}^4$, $i = 1, 2$. За решавање диференцијалних једначина (3.49) и (3.50), решење се тражи у облику $W_i = A e^{\lambda \bar{x}}$, $i = 1, 2$, чијом заменом у једначине (3.49) и (3.50) добијамо карактеристичну једначину

$$\lambda^4 + \bar{\mu} k^4 \lambda^2 - k^4 = 0. \quad (3.51)$$

Једначина (3.51) има четири решења $\lambda_{1,2} = \pm \lambda_e$ и $\lambda_{3,4} = \pm i \lambda_f$ где су λ_e и λ_f дати као

$$\lambda_e = k \sqrt{\frac{\sqrt{4 + \bar{\mu}^2 k^4} - \bar{\mu} k^2}{2}}, \quad (3.52)$$

$$\lambda_f = k \sqrt{\frac{\sqrt{4 + \bar{\mu}^2 k^4} + \bar{\mu} k^2}{2}}. \quad (3.53)$$

Решења једначина (3.49) и (3.50) можемо написати као

$$W_1 = C_1 \sinh(\lambda_e \bar{x}) + C_2 \sin(\lambda_f \bar{x}) + C_3 \cosh(\lambda_e \bar{x}) + C_4 \cos(\lambda_f \bar{x}), \quad (3.54)$$

$$W_2 = C_5 \sinh(\lambda_e \bar{x}) + C_6 \sin(\lambda_f \bar{x}) + C_7 \cosh(\lambda_e \bar{x}) + C_8 \cos(\lambda_f \bar{x}), \quad (3.55)$$

где су $C_i, i = 1, 2, \dots, 8$ непознате константе. У горњим једначинама k представља бездимензиони таласни број за класичну Euler-Bernoulli-јеву

греду и повезан је са λ_f и λ_e преко једначина (3.52) и (3.53). Када занемаримо утицај нелокалног параметра $\bar{\mu} = 0$, имамо да је $\lambda_f = \lambda_e = k$. Сопствене вредности наногреде са додатом концентрисаном масом на произвољној позицији за три различита гранична услова ће бити одређене у наставку.

3.4.3 Проста наногреда са наночестицом

За просту наногреду, слика 3.6 а), гранични услови за $\bar{x} = 0$ и $\bar{x} = 1$ су

$$W_1 = W_2 = 0, \quad (3.56)$$

$$W_1^{(II)} + \bar{\mu}k^4W_1 = W_2^{(II)} + \bar{\mu}k^4W_2 = 0. \quad (3.57)$$

Услови компатибилности на позицији додате масе $\bar{x} = \bar{x}_m$ су

$$W_1 = W_2, \quad (3.58)$$

$$W_1' = W_2', \quad (3.59)$$

$$W_1^{(II)} + \bar{\mu}k^4W_1 = W_2^{(II)} + \bar{\mu}k^4W_2, \quad (3.60)$$

$$W_1^{(III)} + \bar{\mu}k^4W_1' - (W_2^{(III)} + \bar{\mu}k^4W_2') + \delta k^4W_1 = 0, \quad (3.61)$$

где је $W_i' = dW_i/d\bar{x}$ и $W_i^{(III)} = d^3W_i/d\bar{x}^3$ за $i = 1, 2$. Ако узмемо у обзир решења (3.54) и (3.55), као и граничне и услове компатибилности (3.56)-(3.61), добијамо осам једначина у функцији осам непознатих констаната $C_i, i = 1, 2, \dots, 8$, које записане у матричној форми имају облик

$$[A]\{C\} = 0, \quad (3.62)$$

или

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} \\ \lambda_e a_{53} & \lambda_f a_{54} & \lambda_e a_{51} & -\lambda_f a_{52} & -\lambda_e a_{53} & -\lambda_f a_{54} & -\lambda_e a_{51} & \lambda_f a_{52} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & -a_{71} & -a_{72} & -a_{73} & -a_{74} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & -\lambda_e a_{73} & -\lambda_f a_{74} & -\lambda_e a_{71} & \lambda_f a_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.63)$$

где је

$$a_{23} = \lambda_e^2 + \bar{\mu}k^4, a_{24} = \bar{\mu}k^4 - \lambda_f^2, a_{35} = \sinh(\lambda_e), a_{36} = \sin(\lambda_f), a_{37} = \cosh(\lambda_e),$$

$$a_{38} = \cos(\lambda_f), a_{45} = a_{23}a_{35}, a_{46} = a_{24}a_{36}, a_{47} = a_{23}a_{37}, a_{48} = a_{24}a_{38},$$

$$\begin{aligned}
a_{51} &= \sinh(\lambda_e \bar{x}_m), a_{52} = \sin(\lambda_f \bar{x}_m), a_{53} = \cosh(\lambda_e \bar{x}_m), a_{54} = \cos(\lambda_f \bar{x}_m), \\
a_{71} &= a_{23} a_{51}, a_{72} = a_{24} a_{52}, a_{73} = a_{23} a_{53}, a_{74} = a_{24} a_{54}, \\
a_{81} &= (\lambda_e^3 + \lambda_e \bar{\mu} k^4) a_{53} + \delta k^4 a_{51}, a_{82} = (\lambda_f \bar{\mu} k^4 - \lambda_f^3) a_{54} + \delta k^4 a_{52}, \\
a_{83} &= (\lambda_e^3 + \lambda_e \bar{\mu} k^4) a_{51} + \delta k^4 a_{53}, a_{84} = -(\lambda_f \bar{\mu} k^4 - \lambda_f^3) a_{51} + \delta k^4 a_{54}.
\end{aligned}$$

Систем једначина (3.63) има решења, сем тривијалног, када је детерминанта система $N(\delta, k)$ једнака нули

$$N(\delta, k) = \det[A] = 0. \quad (3.64)$$

Ова детерминанта представља карактеристичну једначину система (3.63) из које можемо одредити сопствене вредности k_n , $n = 1, 2, \dots, \infty$ за нелокалну вискоеластичну наногреду са наночестицом одређене масе. Ако искористимо познато правило из алгебре да су односи константи $C_i, i = 1, 2, \dots, 8$ и одговарајућих кофактора K_{8i} матрице A , једнаки некој константи C_n

$$\frac{C_1}{K_{81}} = \frac{C_2}{K_{82}} = \frac{C_3}{K_{83}} = \frac{C_4}{K_{84}} = \frac{C_5}{K_{85}} = \frac{C_6}{K_{86}} = \frac{C_7}{K_{87}} = \frac{C_8}{K_{88}} = C_n, \quad (3.65)$$

можемо написати амплитудне функције на следећи начин

$$W_{1n} = C_n \left(\sinh(\lambda_e \bar{x}) + \frac{K_{82}}{K_{81}} \sin(\lambda_f \bar{x}) + \frac{K_{83}}{K_{81}} \cosh(\lambda_e \bar{x}) + \frac{K_{84}}{K_{81}} \cos(\lambda_f \bar{x}) \right), \quad (3.66)$$

$$W_{2n} = C_n \left(\frac{K_{85}}{K_{81}} \sinh(\lambda_e \bar{x}) + \frac{K_{86}}{K_{81}} \sin(\lambda_f \bar{x}) + \frac{K_{87}}{K_{81}} \cosh(\lambda_e \bar{x}) + \frac{K_{88}}{K_{81}} \cos(\lambda_f \bar{x}) \right), \quad (3.67)$$

где су λ_e и λ_f израчунати на основу једначине за одговарајућу n -ту сопствену вредност k_n .

3.4.4 Конзолна наногреда са наночестицом

У случају конзолне наногреде, слика 3.6 в), гранични услови за $\bar{x} = 0$ и $\bar{x} = 1$ су

$$W_1 = W_1' = 0, \quad (3.68)$$

$$W_2^{(II)} + \bar{\mu} k^4 W_2 = W_2^{(III)} + \bar{\mu} k^4 W_2' = 0. \quad (3.69)$$

Услови компатибилности су истог облика као у једначинама (3.58)-(3.61). Ако искористимо (3.54) и (3.55), услове компатибилности и граничне услове (3.68) и (3.69), добијамо следећу једначину у матричном облику

$$[B]\{C\} = 0, \quad (3.70)$$

односно

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_e & \lambda_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_e b_{37} & \lambda_f b_{38} & \lambda_e b_{35} & -\lambda_f b_{36} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & -b_{51} & -b_{52} & -b_{53} & -b_{54} \\ \lambda_e b_{53} & \lambda_f b_{54} & \lambda_e b_{51} & -\lambda_f b_{52} & -\lambda_e b_{53} & -\lambda_f b_{54} & -\lambda_e b_{51} & \lambda_f b_{52} \\ b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} & -b_{71} & -b_{72} & -b_{73} & -b_{74} \\ b_{81} & b_{82} & b_{83} & b_{84} & -\lambda_e b_{73} & -\lambda_f b_{74} & -\lambda_e b_{71} & \lambda_f b_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.71)$$

где је

$$\begin{aligned} b_{35} &= (\lambda_e^2 + \bar{\mu}k^4) \sinh(\lambda_e), \quad b_{36} = (\bar{\mu}k^4 - \lambda_f^2) \sin(\lambda_f), \quad b_{37} = (\lambda_e^2 + \bar{\mu}k^4) \cosh(\lambda_e), \\ b_{38} &= (\bar{\mu}k^4 - \lambda_f^2) \cos(\lambda_f), \quad b_{51} = \sinh(\lambda_e \bar{x}_m), \quad b_{52} = \sin(\lambda_f \bar{x}_m), \quad b_{53} = \cosh(\lambda_e \bar{x}_m), \\ b_{54} &= \cos(\lambda_f \bar{x}_m), \quad b_{71} = (\lambda_e^2 + \bar{\mu}k^4) b_{51}, \quad b_{72} = (\bar{\mu}k^4 - \lambda_f^2) b_{52}, \quad b_{73} = (\lambda_e^2 + \bar{\mu}k^4) b_{53}, \\ b_{74} &= (\bar{\mu}k^4 - \lambda_f^2) b_{54}, \quad b_{81} = (\lambda_e^3 + \lambda_e \bar{\mu}k^4) b_{53} + \delta k^4 b_{51}, \\ b_{82} &= (\lambda_f \bar{\mu}k^4 - \lambda_f^3) b_{54} + \delta k^4 b_{52}, \quad b_{83} = (\lambda_e^3 + \lambda_e \bar{\mu}k^4) b_{51} + \delta k^4 b_{53}, \\ b_{84} &= -(\lambda_f \bar{\mu}k^4 - \lambda_f^3) b_{51} + \delta k^4 b_{54}. \end{aligned}$$

Карактеристична трансцендентна једначина $M(\delta, k)$ за конзолу се добија на исти начин као у (3.64), када се детерминанта матрице B изједначи са нулом

$$M(\delta, k) = \det[B] = 0. \quad (3.72)$$

Амплитудне функције су одређене из једначина (3.54) и (3.55) преко сопствених вредности k_n , одређених из једначине (3.72).

3.4.5 Обострано уклештена нанограда са наночестицом

У случају обострано уклештене нанограде, слика 3.6 б), гранични услови за $\bar{x} = 0$ и $\bar{x} = 1$ су

$$W_1 = W_1' = 0, \quad (3.73)$$

$$W_2 = W_2' = 0. \quad (3.74)$$

Услови компатибилности су дати у (3.58)–(3.61). Решење дато у (3.54) и (3.55) уз граничне услове (3.73) и (3.74) и услове компатибилности (3.58)–(3.61) даје матричну једначину

$$[D]\{C\} = 0, \quad (3.75)$$

или

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_e & \lambda_f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{35} & d_{36} & d_{37} & d_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_e d_{37} & \lambda_f a d_{38} & \lambda_e d_{35} & -\lambda_f d_{36} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & -d_{51} & -d_{52} & -d_{53} & -d_{54} \\ \lambda_e d_{53} & \lambda_f d_{54} & \lambda_e d_{51} & -\lambda_f d_{52} & -\lambda_e d_{53} & -\lambda_f d_{54} & -\lambda_e d_{51} & \lambda_f d_{52} \\ d_{71} & d_{72} & d_{73} & d_{74} & -d_{71} & -d_{72} & -d_{73} & -d_{74} \\ d_{81} & d_{82} & d_{83} & d_{84} & -\lambda_e d_{73} & -\lambda_f d_{74} & -\lambda_e d_{71} & \lambda_f d_{72} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix} = 0, \quad (3.76)$$

где је

$$\begin{aligned} d_{35} &= \sinh(\lambda_e), d_{36} = \sin(\lambda_f), d_{37} = \cosh(\lambda_e), d_{38} = \cos(\lambda_f), \\ d_{51} &= \sinh(\lambda_e \bar{x}_m), d_{52} = \sin(\lambda_f \bar{x}_m), d_{53} = \cosh(\lambda_e \bar{x}_m), d_{54} = \cos(\lambda_f \bar{x}_m), \\ d_{71} &= (\lambda_e^2 + \bar{\mu}k^4)d_{51}, d_{72} = (\bar{\mu}k^4 - \lambda_f^2)d_{52}, d_{73} = (\lambda_e^2 + \bar{\mu}k^4)d_{53}, \\ d_{74} &= (\bar{\mu}k^4 - \lambda_f^2)d_{54}, d_{81} = (\lambda_e^3 + \lambda_e \bar{\mu}k^4)d_{53} + \delta k^4 d_{51}, \\ d_{82} &= (\lambda_f \bar{\mu}k^4 - \lambda_f^3)d_{54} + \delta k^4 d_{52}, d_{83} = (\lambda_e^3 + \lambda_e \bar{\mu}k^4)d_{51} + \delta k^4 d_{53}, \\ d_{84} &= -(\lambda_f \bar{\mu}k^4 - \lambda_f^3)d_{51} + \delta k^4 d_{54}. \end{aligned}$$

Карактеристична једначина за случај обострано уклештене наногреде $R(\delta, k)$ се одређује следећим изразом

$$R(\delta, k) = \det[D] = 0, \quad (3.77)$$

док се амплитудне функције добијају из једначина (3.54) и (3.55) узимањем у обзир сопствених вредности k_n добијених из (3.77).

3.4.6 Понашање вискоеластичне наногреде у временском домену

Показује се да n -тој сопственој вредности k_n , $n = 1, 2, \dots, \infty$ одговара n -та амплитудна временска функција W_{jn} , $j = 1, 2$, $n = 1, 2, \dots, \infty$, као и n -та временска функција T_n , те се решење једначина (3.46) и (3.47) може представити у облику

$$\bar{w}_j = \sum_{n=1}^{\infty} W_{jn} T_n, \quad j = 1, 2. \quad (3.78)$$

Посматраћемо случај осциловања у првом моду и изоставити индекс n у временској функцији. Диференцијалну једначину фракционог реда (3.48) ћемо написати у облику

$$\ddot{T} + \beta {}^{RL}D^{\alpha}T + \omega^2 T = 0, \quad (3.79)$$

где су $\beta = \gamma k^4$, $\omega^2 = k^4$. Једначина (3.79) је добро позната фракциона диференцијална једначина осциловања, која је облика једначине (3.13), односно једначине фракционог осцилатора са једним степеном слободе [44]. Решење једначине (3.13) је применом директне и инверзне Laplace-ове трансформације дато у облику (3.18), те је решење једначине (3.79) дато

$$T(\tau) = T(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\beta^j \omega^{2(k-j)} \tau^{2k-\alpha j}}{\Gamma[2k+1-\alpha j]} + \dot{T}(0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\beta^j \omega^{2(k-j)} \tau^{2k+1-\alpha j}}{\Gamma[2(k+1)-\alpha j]}. \quad (3.80)$$

3.4.7 Нумерички примери и упоредна анализа

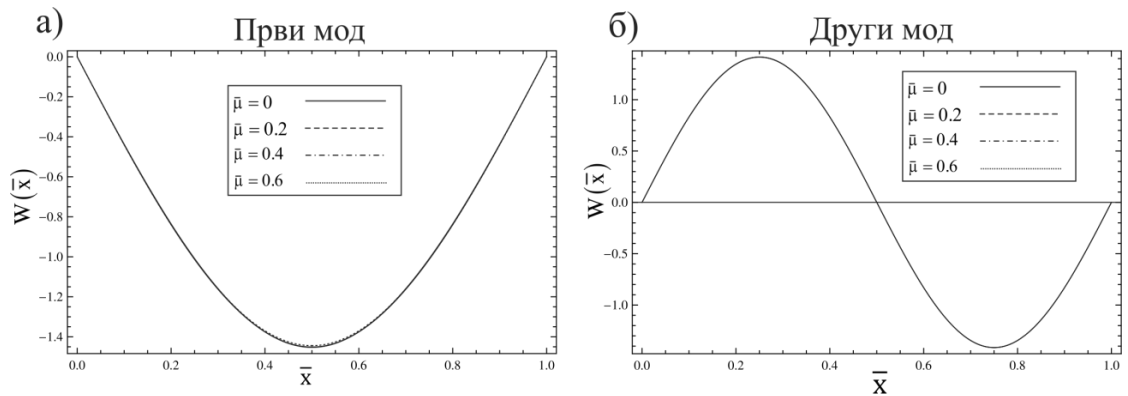
Добијени резултати коришћењем модела биће упоређени са одговарајућим резултатима из литературе. Такође, биће спроведене две нумеричке анализе модела. Наиме, неколико нумеричких примера биће посвећено облицима амплитудних функција за различите граничне услове и вредности нелокалног параметра као и сопственим вредностима система за различите масе наночестице и њене позиције на наногреди. Такође ћемо посматрати утицај фракционог параметра на временску функцију и пригушење система током времена.

У циљу валидације, упоредићемо добијене резултате за сопствене вредности наногреде без присуства наночестице, и резултате за сопствене вредности нелокалне греде из рада [88]. Резултати су упоређени за три типа граничних услова. Из Табеле 3.1 се може запазити одлично поклапање резултата за сва три гранична услова и различите вредности нелокалног параметра. Такође, повећање вредности нелокалног параметра доводи до смањења сопствених вредности. Може се уочити да за граничне услове, као што су проста наногреда и конзола, добијамо сопствене вредности ниже него у случају обострано уклештене наногреде. Из Табеле 3.1 можемо закључити да се сопствене вредности наногреде без наночестице смањују са повећањем вредности нелокалног параметра. Исти ефекат се јавља и у случају наногреде са наночестицом.

Табела 3.1. Сопствене вредности наногреде за прва четири мода и различите вредности нелокалног параметра и граничних услова када је маса наночестице занемарена.

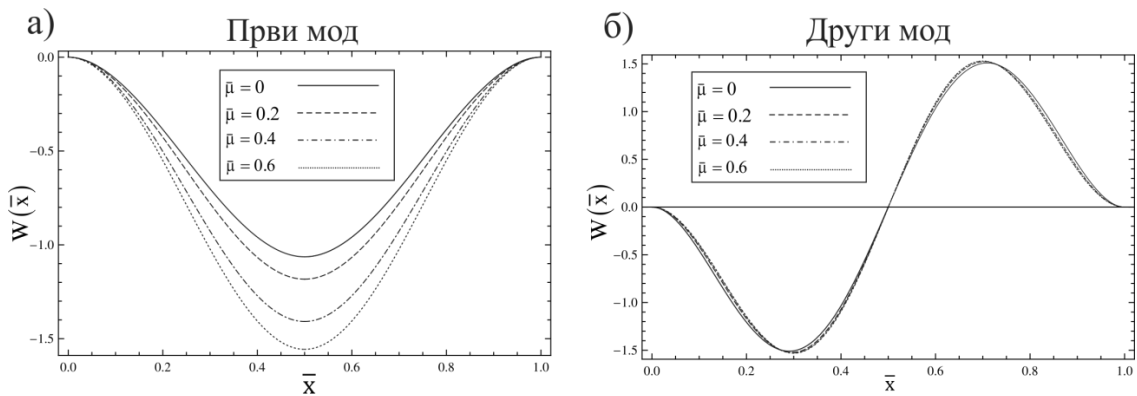
μ	0		0.2		0.4		0.6	
	Реф. [88]	Приказани модел	Реф. [88]	Приказани модел	Реф. [88]	Приказани модел	Реф. [88]	Приказани модел
Просто ослоњена наногреда								
k_1	3.1416	3.141593	2.8908	2.890834	2.4790	2.479027	2.1507	2.150671
k_2	6.2832	6.283185	4.9581	4.958054	3.8204	3.820352	3.1815	3.181498
k_3	9.4248	9.424778	6.4520	6.452015	4.7722	4.772247	3.9329	3.932934
k_2	12.5664	12.566371	7.6407	7.640703	5.5509	5.550864	4.5565	4.556549
Обострано уклештена наногреда								
k_1	4.7300	4.730041	4.2766	4.276613	3.5923	3.592315	3.0837	3.083698
k_2	7.8532	7.853205	6.0352	6.035224	4.5978	4.597807	3.8165	3.816487
k_3	10.9956	10.995608	7.3840	7.384034	5.4738	5.473794	4.5231	4.523148
k_4	14.1372	14.137169	8.4624	8.462421	6.1504	6.150426	5.0505	5.050477
Конзола								
k_1	1.8751	1.875104	1.8919	1.891931	1.9543	1.954281	2.1989	2.198938
k_2	4.6941	4.694091	4.1924	4.192376	3.3456	3.345554	2.4809	2.480899
k_3	7.8548	7.854758	6.0674	6.067376	4.8370	4.837048
k_4	10.9955	10.993751	7.3617	7.361695	5.2399	5.239864

Облици осциловања наногреде су нормализовани тако да важи $\int_0^1 W_n^2 d\bar{x} = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, в. [141], и приказани на сликама 3.7 – 3.9 за карактеристичне позиције наночестице. Слика 3.7 приказује облик амплитудне функције у првом и другом моду осциловања за случај када се маса налази на средини просто ослоњене наногреде. Може се приметити да нелокални параметар не утиче на промену облика осциловања за дате граничне услове, што је показано и у радовима других аутора. Према томе, за просто ослоњену наногреду може се усвојити исто решење за амплитудну функцију у локалном и нелокалном случају.



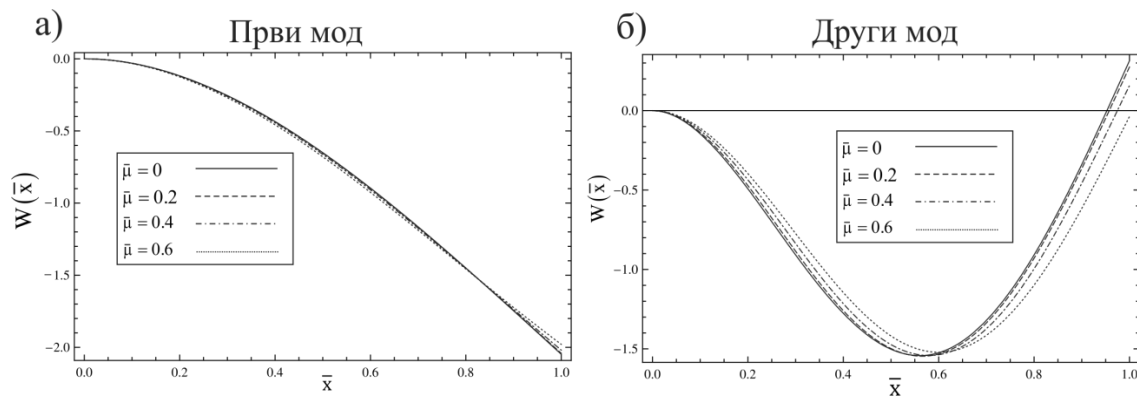
Слика 3.7. Нормализоване вредности амплитудне функције за систем са наночестицом на половини дужине просто ослоњене наногреде

а) први мод, б) други мод.



Слика 3.8. Нормализоване вредности амплитудне функције за систем са наночестицом на половини дужине обострано уклештене наногреде

а) први мод; б) други мод.



Слика 3.9. Нормализоване вредности амплитудне функције за систем са наночестицом на слободном крају конзолне наногреде

а) први мод, б) други мод.

Слика 3.8 приказује амплитудну функцију за обострано уклештену наногреду. Примећујемо да у овом случају постоји видљив утицај нелокалног параметра на амплитудну функцију система, чија се амплитуда мења са порастом нелокалног параметра. Разлика између нелокалног и локалног случаја је израженија у првом моду осциловања него у другом. На слици 3.9 је приказан утицај нелокалног параметра на конзолну наногреду у случају када се наночестица налази на крају конзоле. Такође постоји утицај нелокалног параметра на амплитудну функцију, чији се облик мења са порастом вредности нелокалног параметра у моделу.

Табела 3.2. Сопствене вредности наногреде са наночестицом.

m	1				5			
\bar{x}_m	0.2	0.4	0.6	0.8	0.2	0.4	0.6	0.8
Просто ослоњена наногреда								
k_1	2.1963	2.0705	2.0705	2.1963	1.9096	1.6627	1.6627	1.9096
k_2	3.3501	3.4272	3.4272	3.3501	3.1904	3.3969	3.3969	3.1904
k_3	4.2397	4.2745	4.2745	4.2397	4.1833	4.2560	4.2560	4.1833
k_2	4.9687	4.9493	4.9493	4.9687	4.9553	4.9207	4.9207	4.9553
Обострано уклештена наногреда								
k_1	3.2452	2.9797	2.9797	3.2452	2.9511	2.3838	2.3838	2.9511
k_2	4.0554	4.1068	4.1068	4.0554	3.8340	4.0734	4.0734	3.8340
k_3	4.8001	4.9288	4.9288	4.8001	4.6342	4.9255	4.9255	4.6342
k_4	5.4523	5.5024	5.5024	5.4524	5.3924	5.4840	5.4840	5.3924
Конзола								
k_1	2.0075	1.8701	1.6443	1.4374	1.9506	1.5628	1.2369	1.0217
k_2	2.9384	3.0550	3.2662	3.1169	2.9149	4.7597	3.4576	3.1565
k_3	4.1982	4.0221	5.2418	4.3427	3.5931	6.2969	5.0881	4.3133
k_4	5.4996	4.6954	5.9528	5.0789	6.1564	7.2681	5.9983	5.1423

У Табели 3.2 су дате сопствене вредности вискоеластичне наногреде са наночестицом за неколико карактеристичних положаја наночестице \bar{x}_m на наногреди, за различите масе наночестице и граничне услове као и за вредност нелокалног параметра $\bar{\mu} = 0.5$. Ако посматрамо први мод, померање масе од краја наногреде према средини доводи до смањења сопствених вредности код просто ослоњене и обострано уклештене наногреде. Такође, повећање масе наночестице доводи до снижења

сопствених вредности. Исто растојање наночестице од средине наногреде даје исте сопствене вредности система. Систем се другачије понаша у трећем и четвртом моду, где померање масе од краја према средини наногреде даје нешто веће сопствене вредности.

Код конзолне наногреде не могу се предвидети нека јасна правила у промени сопствених вредности са променом позиције и масе наночестице, а у неким случајевима сопствене вредности расту са повећањем нелокалног параметра. Овакво понашање нелокалног модела Euler–Bernoulli-jeve наногреде је оцењено као парадокс који се јавља само код диференцијалне форме нелокалне конститутивне релације. За решење овог парадокса у литератури се најчешће предлаже примена модификованих интегралних или интегро-диференцијалних нелокалних конститутивних релација, [101-104].

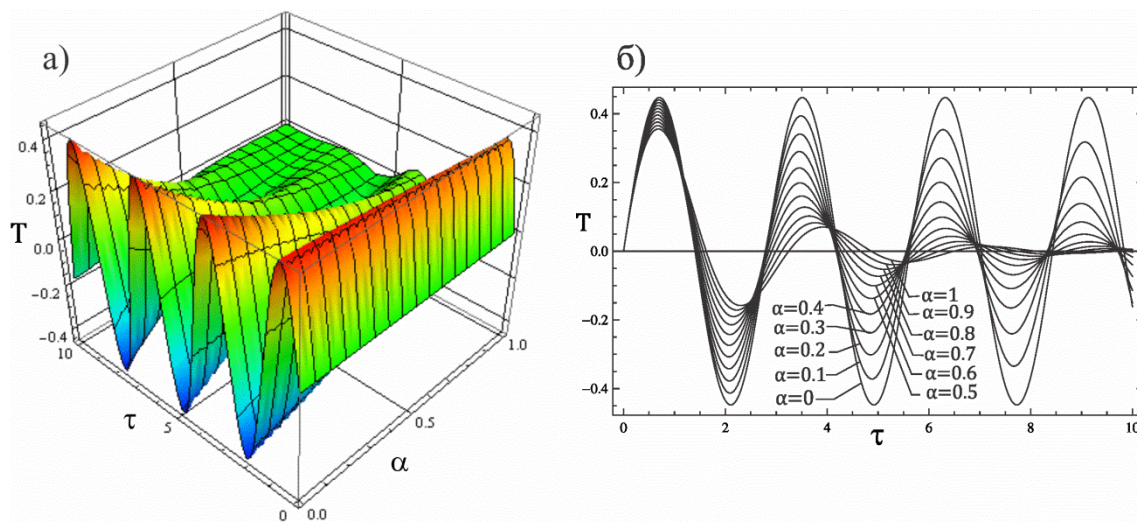
На сликама 3.10 – 3.12 су приказана три карактеристична облика временске функције за $0 < \alpha < 1$ код слободних осцилација фракционе вискоеластичне наногреде, који зависе од односа параметара у диференцијалној једначини фракционог реда (3.79). У нумеричким примерима смо усвојили почетне услове $T(0) = 0$ и $\dot{T}(0) = 1$. На свакој од слика анализиран је по један од три карактеристична случаја односа параметара ω и β , као што је дато у Табели 3.3.

Табела 3.3. Три карактеристична случајева односа параметара у моделу.

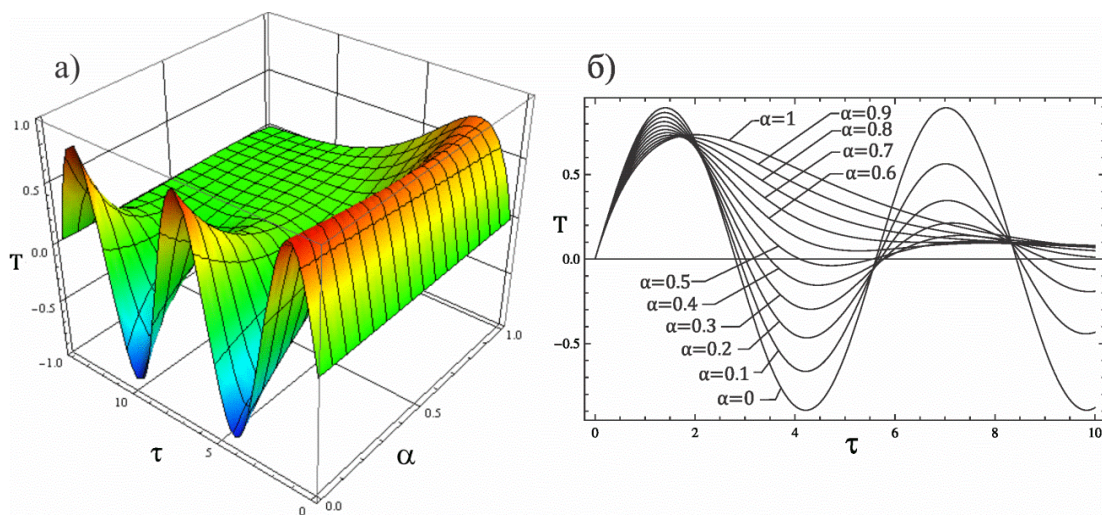
	β/ω	$N = \omega^2 - \beta^2/4$
1.	1/2	$N > 0$
2.	2	$N = 0$
3.	3	$N < 0$

На слици 3.10 је приказана временска функција за први случај у Табели 3.3. Са слике се може приметити прелаз са хармонијских осцилација система, за $\alpha = 0$, на пригушене осцилације за повећање вредности фракционог параметра ка вредности $\alpha = 1$. Амплитуда осцилација наногреде је најмања за $\alpha = 1$, што је вредност параметра када се наш систем своди на

класични вискоеластични Kelvin-Voigt-ов модел. Временска функција која одговара другом случају из Табеле 3.3 је приказана на слици 3.11. Примећује се прелаз са хармонијског осциловања на аperiодично понашање временске функције са порастом вредности параметра α у домену $\alpha \in [0,1]$. Такође, почевши од вредности фракционог параметра $\alpha = 0.6$ постоји аperiодично понашање временске функције.

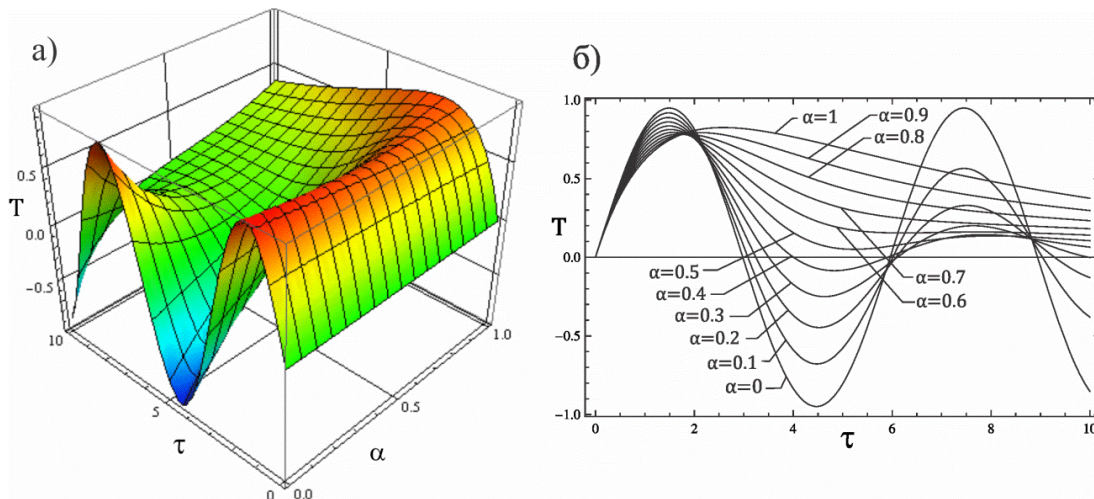


Слика 3.10. Временска функција фракционо вискоеластичне наногреде за различито α и однос параметара $\beta/\omega = 1/2$
 а) тродимензионални график, б) дводимензионални график.



Слика 3.11. Временска функција фракционо вискоеластичне наногреде за различито α и однос параметара $\beta/\omega = 2$
 а) тродимензионални график, б) дводимензионални график.

Слично понашање временске функције се може приметити и у трећем случају из Табеле 3.3, слика 3.12. Са порастом вредности фракционог параметра у домену $\alpha \in [0,1]$, постоји прелаз са хармонијског осциловања на аperiодично понашање система за вредности веће од $\alpha = 0.5$.



Слика 3.12. Временска функција фракционо вискоеластичне наногреде за различито α и однос параметара $\beta/\omega = 3$
 а) тродимензионални график, б) дводимензионални график.

Према [44], решење фракционе диференцијалне једначине у облику редова конвергира веома споро и нема јасну физичку интерпретацију али за мале периоде времена може дати задовољавајуће решење. Треба напоменути да је у раду [125], једначина (3.80) разматрана са Caputo дефиницијом фракционог извода. Аутори су идентификовали девет случајева осциловања система зависно од односа параметара за разлику од три која су приказана у овом поглављу.

Глава 4

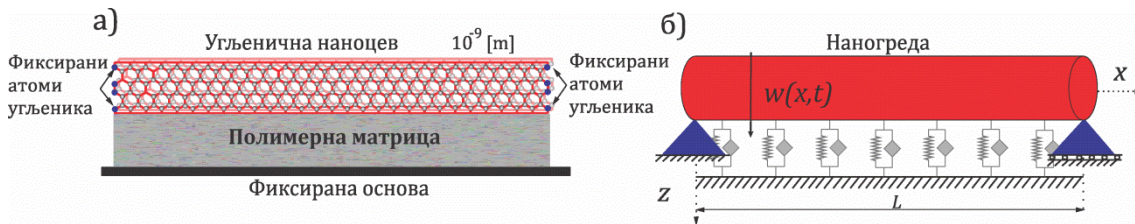
Фракциони модели са два времена ретардације и два фракциона параметра

4.1 Уводна разматрања

Фракционе диференцијалне једначине са једним изводом фракционог реда, приказане у трећој глави, су добијене за једноставније моделе наноштапа и наногреде и решаване применом Laplace-ове трансформације, развојем у геометријски ред и инверзном Laplace-овом трансформацијом. Међутим, ову методологију није могуће применити код једначина са више времена ретардације/релаксације и фракционих извода са различитим вредностима фракционог параметра. Такође, добијено решење у облику геометријских редова има спору конвергенцију и даје могућност анализе резултата само у временском домену. Код једначина трансверзалних осцилација система наногреде на вискоеластичној подлози, где су наногреда и подлога моделирани фракционим вискоеластичним моделима, могу се јавити више времена релаксације/ретардације и фракционих параметара, те је за решавање таквих једначина неопходно предложити другачију методологију. У радовима [44, 127] је описана процедура за решавање фракционих диференцијалних једначина са више времена ретардације/релаксације и фракционих параметара, а која се базира на Laplace-овој трансформацији, одређивању комплексних корена карактеристичне једначине, Mellin-Fourier-овој трансформацији и Cauchy-јевом рачуну остатака, [142]. Применом ове методе, могуће је извршити анализу положаја полова карактеристичне једначине у комплексној равни, и као решење у временском домену добити једначину пригушених осцилација наногреде на вискоеластичној подлози, где је физикалност тако добијеног решења много јаснија него код решења у облику геометријских редова. Део резултата приказаних у овој глави објављен је у раду [109].

4.2 Осцилације просте наногреде на вискоеластичној подлози фракционог реда

Угљенична наноцев, приказана на слици 4.1 а), повезана је са непокретном основом посредством полимерне матрице са вискоеластичним својствима и има фиксирани слојеве атома на оба краја. Када наноцев има по један слој фиксираних атома на сваком крају може се представити механичким моделом просто ослоњене наногреде, слика 4.1 б). Нека је хомогена наногреда дужине L , густине ρ и површине попречног пресека A , и нека осцилује у трансверзалном правцу, управно на осу x . Претпоставимо да је попречни пресек наногреде константан дуж x осе. Механичка својства слоја од полимера, слика 4.1 а), којим је наногреда спрегнута са непокретном основом, могу се описати различитим типовима линеарних вискоеластичних модела доступних у литератури, [35, 38]. Анализираће се случај слободних осцилација наногреде на вискоеластичној подлози.



Слика 4.1. Наногреда спрегнута са непокретном основом преко вискоеластичног слоја а) физички модел; б) механички модел.

4.2.1 Једначина слободних осцилација наногреде на вискоеластичној подлози

Конститутивна једначина деформација-померање за Euler-Bernoulli-јеву наногреду, претпоставиће се у облику датом (3.33), односно

$$t_{xx} - \mu \frac{d^2 t_{xx}}{dx^2} = -E_0 z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - E_0 \tau_1^\alpha {}^{RL}D^\alpha \left(z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (4.1)$$

Једначина равнотеже за елементарни део наногреде је

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial x} - q, \quad (4.2)$$

где је V трансверзална сила и q континуално оптерећење дуж x осе.

У једначини (4.2) оптерећење q посматрамо као реакцију вискоеластичног слоја, где је за слој дата следећа релација сила-померање у форми фракционог Kelvin-Voigt-овог модела

$$q = K\left(1 + \tau_2^\beta {}^{RL}D^\beta\right)w, \quad (4.3)$$

где је K релаксирани коефицијент еластичности, τ_2 је време ретардације вискоеластичног слоја и ${}^{RL}D^\beta$ је оператор Riemann-Liouville-овог извода фракционог реда $\beta \in [0, 1]$.

На основу једначина равнотеже момената (3.35) за Euler-Bernoulli-јеву греду, једначине за резултујући момент савијања $M = \int_A z t_{xx} dA$ и аксијални момент инерције за попречни пресек наногреде $I = \int_A z^2 dA$, добијамо једначину момента у облику

$$M = \mu \left[\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K\left(1 + \tau_2^\beta {}^{RL}D^\beta\right)w \right] - E_0 I (1 + \tau_1^\alpha {}^{RL}D^\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.4)$$

и трансверзалну силу

$$V = \mu \left[\rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + K\left(1 + \tau_2^\beta {}^{RL}D^\beta\right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - E_0 I (1 + \tau_1^\alpha {}^{RL}D^\alpha) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (4.5)$$

Коначно, једначина кретања у функцији померања $w(x, t)$ има облик

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K\left(1 + \tau_2^\beta {}^{RL}D^\beta\right)w - \mu \left[\rho A \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + K\left(1 + \tau_2^\beta {}^{RL}D^\beta\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ + E_0 I (1 + \tau_1^\alpha {}^{RL}D^\alpha) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

За разлику од једначине кретања наногреде (3.38), претходна једначина садржи два времена ретардације τ_1 и τ_2 и два фракциона параметра α и β .

4.2.2 Решење једначине кретања наногреде на вискоеластичној подлози

За налажење решења једначине кретања система (4.6) која је парцијална диференцијална једначина фракционог реда, искористићемо методологију примењену у радовима [44, 127], где је решење одређено методом раздвајања променљивих и дата је у облику Fourier-овог реда. За просту наногреду, гранични услови су

$$w(0, t) = w(L, t) = 0, \quad M(0, t) = M(L, t) = 0, \quad (4.7)$$

и почетни услови

$$w(x, 0) = 0, \quad \dot{w}(L/2, 0) = \dot{w}_0. \quad (4.8)$$

Применом Laplace-ове трансформације на једначину (4.6), узимањем у обзир почетних услова и преуређивањем одговарајућих чланова добија се

$$\begin{aligned} p^2 \left(\bar{w} - \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) + \frac{K}{\rho A} (1 + p^\beta \tau_2^\beta) \left(\bar{w} - \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right) + \frac{E_0 I}{\rho A} (1 + p^\beta \tau_1^\alpha) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} = \\ = \dot{w}_0 \left(\delta(x - L/2) + \mu \frac{\partial^2 \delta(x - L/2)}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Даље, претпостављајући решење (4.9) у облику Fourier-овог синусног реда

$$\bar{w}(x, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n \sin(k_n x), \quad (4.10)$$

где је $k_n = n\pi/L$ и \bar{T}_n су непознате временске функције у Laplace-овом домену, где узевши у обзир услове ортогоналности сопствених амплитудних функција прсте наногреде

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{s\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L/2, & s = n, \\ 0, & s \neq n, \end{cases} \quad (4.11)$$

и развојем почетних услова у синусни Fourier-ов ред, добијамо

$$p^2 \bar{T}_n + \omega_K^2 (1 + p^\beta \tau_2^\beta) \bar{T}_n + \omega_{0n}^2 (1 + p^\beta \tau_1^\alpha) \bar{T}_n = N \dot{w}_0 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (4.12)$$

где су

$$\omega_K^2 = \frac{K}{\rho A}, \quad \omega_{0n}^2 = \frac{E_0 I k_n^4}{\rho A (1 + \mu k_n^2)}, \quad N = \frac{2}{L}.$$

Решење (4.12) у Laplace-овом домену има облик

$$\bar{T}_n(p) = \frac{N \dot{w}_0}{f_n(p)} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (4.13)$$

где је

$$f_n(p) = p^2 + \omega_K^2 (1 + p^\beta \tau_2^\beta) + \omega_{0n}^2 (1 + p^\alpha \tau_1^\alpha). \quad (4.14)$$

Решење једначине (4.13) може се записати у временском домену применом Mellin-Fourier-ове инверзне трансформације у облику

$$T_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{T}_n(p) e^{pt} dp. \quad (4.15)$$

За израчунавање интеграла у једначини (4.15) морају се најпре одредити све сингуларне тачке комплексне функције (4.13). Функција \bar{T}_n има две тачке

гранања $p = 0$ и $p = \infty$, као и полове који су корени карактеристичне једначине

$$f_n(p) = 0. \quad (4.16)$$

Како формула инверзне Laplace-ове трансформације вишезначне функције која има тачке гранања важи само за главну грану Riemann-ове површи, за израчунавање интеграла (4.15) користимо затворену контуру, в. [44]. Ако применимо Cauchy-јеву теорему о остацима, (4.15) можемо записати у облику

$$T_n(t) = T_n^{\text{drift}}(t) + T_n^{\text{vibr}}(t), \quad (4.17)$$

$$T_n^{\text{drift}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\bar{T}_n(se^{-i\pi}) - \bar{T}_n(se^{i\pi})] e^{-st} dp, \quad (4.18)$$

$$T_n^{\text{vibr}}(t) = \sum_j \text{res}[\bar{T}_n(p_j) e^{p_j t}], \quad (4.19)$$

где $T_n^{\text{drift}}(t)$ означава тзв. дрифт део решења док је $T_n^{\text{vibr}}(t)$ осцилаторни део решења. У једначини (4.19) сумирамо по свим изолованим сингуларним тачкама, тј. половима $p = p_j$. За налажење полова p_j , односно корена карактеристичне једначине (4.16) која има два времена ретардације и фракциона параметра, примењујемо методу описану у [44]. Најпре уведемо смену $p = re^{i\psi}$ у једначину (4.16)

$$r^2 e^{i2\psi} + \omega_K^2 (1 + (r\tau_2)^\beta e^{i\psi\beta}) + \omega_{0n}^2 (1 + (r\tau_1)^\alpha e^{i\psi\alpha}) = 0. \quad (4.20)$$

Након што применимо Euler-ову формулу добијамо

$$\begin{aligned} r^2 (\cos 2\psi + i \sin 2\psi) + \omega_K^2 (1 + (r\tau_2)^\beta (\cos \beta\psi + i \sin \beta\psi)) \\ + \omega_{0n}^2 (1 + (r\tau_1)^\alpha (\cos \alpha\psi + i \sin \alpha\psi)) = 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

и након што раздвојимо реални и имагинарни део једначине добијамо

$$r^2 \cos 2\psi + \omega_K^2 R_\beta \cos \Phi_\beta + \omega_{0n}^2 R_\alpha \cos \Phi_\alpha = 0, \quad (4.22)$$

$$r^2 \sin 2\psi + \omega_K^2 R_\beta \sin \Phi_\beta + \omega_{0n}^2 R_\alpha \sin \Phi_\alpha = 0, \quad (4.23)$$

где је

$$R_\alpha = \sqrt{1 + 2(r\tau_1)^\alpha \cos \alpha\psi + (r\tau_1)^{2\alpha}}, \quad \tan \Phi_\alpha = \frac{(r\tau_1)^\alpha \sin \alpha\psi}{1 + (r\tau_1)^\alpha \cos \alpha\psi}, \quad (4.24)$$

$$R_\beta = \sqrt{1 + 2(r\tau_2)^\beta \cos \beta\psi + (r\tau_2)^{2\beta}}, \quad \tan \Phi_\beta = \frac{(r\tau_2)^\beta \sin \beta\psi}{1 + (r\tau_2)^\beta \cos \beta\psi}. \quad (4.25)$$

Систем једначина (4.22) и (4.23) нема корене за $0 < |\psi| < \pi/2$. Нека је $X_1 = (r\tau_1)^\alpha$ и $X_2 = (r\tau_2)^\beta$, где величине X_1 и X_2 могу узимати вредности од 0 до ∞ . Елиминацијом r^2 можемо одредити вредност угла ψ из трансцендентне једначине

$$\tan 2\psi = \frac{\omega^2 R_\beta \sin \Phi_\beta + \omega_{0n}^2 R_\alpha \sin \Phi_\alpha}{\omega^2 R_\beta \cos \Phi_\beta + \omega_{0n}^2 R_\alpha \cos \Phi_\alpha}, \quad (4.26)$$

и вредност параметра r^2 из једначине

$$r^2 = -\frac{\omega^2 R_\beta \sin \Phi_\beta + \omega_{0n}^2 R_\alpha \sin \Phi_\alpha}{\sin 2\psi}. \quad (4.27)$$

Претходне једначине за ψ и r могу се написати и у проширеном облику као

$$\begin{aligned} \tan 2\psi = & \frac{\omega^2 \sqrt{1+2X_2 \cos \beta\psi + X_2^2} X_2 \sin \beta\psi}{\omega^2 \sqrt{1+2X_2 \cos \beta\psi + X_2^2} (1+X_2^2 \cos \beta\psi) + \omega_{0n}^2 \sqrt{1+2X_1^2 \cos \alpha\psi + X_1^2} (1+X_1 \cos \alpha\psi)} \\ & + \frac{\omega_{0n}^2 \sqrt{1+2X_2^2 \cos \alpha\psi + X_2^2} X_2 \sin \beta\psi}{\omega^2 \sqrt{1+2X_2 \cos \beta\psi + X_2^2} (1+X_2^2 \cos \beta\psi) + \omega_{0n}^2 \sqrt{1+2X_1^2 \cos \alpha\psi + X_1^2} (1+X_1 \cos \alpha\psi)}, \quad (4.28) \end{aligned}$$

$$r^2 = -\frac{\omega^2 \sqrt{1+2X_2 \cos \beta\psi + X_2^2} X_2 \sin \beta\psi + \omega_{0n}^2 \sqrt{1+2X_1^2 \cos \alpha\psi + X_1^2} X_1 \sin \alpha\psi}{\sin 2\psi}. \quad (4.29)$$

За задате вредности X_1 и X_2 из једначине (4.28) одређује се угао ψ , те се вредност r одређујује из (4.29). Након што одредимо r , можемо одредити и одговарајућа времена ретардације

$$\tau_1 = \frac{X_1^{1/\alpha}}{r}, \quad \tau_2 = \frac{X_2^{1/\beta}}{r}. \quad (4.30)$$

Одређене вредности времена ретардације, угла ψ и параметра r одређују корене карактеристичне једначине. Узимањем негативне вредности угла ($-\psi$ уместо ψ) добија се конјуговано комплексна вредност пола. За сваку фиксирану вредност времена ретардације $\tau_i, i = 1, 2$ тј. параметара $X_i, i = 1, 2$ и за полураван $\pi/2 < |\psi| < \pi$, карактеристична једначина поседује два конјуговано комплексна корена

$$p_{1,2} = r e^{\pm i\psi} = -\delta \pm i\Omega, \quad (4.31)$$

где ћемо реални део корена δ називати коефицијент гушења (по аналогији са [140]), док је имагинарни део корена Ω кружна фреквенција пригушеног система. Треба напоменути да приказана процедура омогућава лакшу

анализу одређивања места корена карактеристичне једначине у комплексној равни за различите вредности времена ретардације одређених величинама X_1 и X_2 . На основу такве анализе, могу се извући важни закључци о понашању система који су моделирани одговарајућим линеарним фракционим конститутивним релацијама вискоеластичног тела, чак и са више времена ретардације/релаксације и извода фракционог реда, в. [44]. Најпре треба одредити дрифт, тј. равнотежни део решења који дефинише ретардацију, као и осцилаторни део решења. Из једначина (4.14) и (4.18) можемо наћи $T_n^{\text{drift}}(t)$ у облику

$$T_n^{\text{drift}}(t) = \frac{N\dot{w}_0}{\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \int_0^\infty D_n^{-1} e^{-st} \sin d_n dp, \quad (4.32)$$

где је

$$f_n(se^{\pm i\pi}) = D_n e^{\pm i d_n}. \quad (4.33)$$

На основу конјуговано комплексних полова $p_{1,2} = -\delta \pm i\Omega$, одређених из (4.19) следи

$$T_n^{\text{vibr}}(t) = \text{res}[\bar{T}_n(p_1)e^{p_1 t}] + \text{res}[\bar{T}_n(p_2)e^{p_2 t}] = A e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi), \quad (4.34)$$

где су

$$A = 2N\dot{w}_0 \sin\frac{n\pi}{2} \left\{ \left[\Re \frac{\partial f_n(re^{i\psi})}{\partial p} \right]^2 + \left[\Im \frac{\partial f_n(re^{i\psi})}{\partial p} \right]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (4.35)$$

$$\tan \varphi = \left[\Im \frac{\partial f_n(re^{i\psi})}{\partial p} \right] \left[\Re \frac{\partial f_n(re^{i\psi})}{\partial p} \right]^{-1}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial f_n(p)}{\partial p} = 2p + \omega_K^2 \tau_2^\beta \beta p^{\beta-1} + \omega_{0n}^2 \tau_1^\alpha \alpha p^{\alpha-1}, \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \Re \frac{\partial f_n(re^{i\psi})}{\partial p} &= 2r \cos \psi + \omega_K^2 \tau_2^\beta \beta r^{\beta-1} \cos(\psi(\beta - 1)) \\ &\quad + \omega_{0n}^2 \tau_1^\alpha \alpha r^{\alpha-1} \cos(\psi(\alpha - 1)), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \Im \frac{\partial f_n(re^{i\psi})}{\partial p} &= 2r \sin \psi + \omega_K^2 \tau_2^\beta \beta r^{\beta-1} \sin(\psi(\beta - 1)) \\ &\quad + \omega_{0n}^2 \tau_1^\alpha \alpha r^{\alpha-1} \sin(\psi(\alpha - 1)). \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.2.3 Упоредна анализа

У циљу валидације добијених резултата, извршићемо упоредну анализу решења у случају када је утицај вискоеластичног слоја занемарив, са резултатима из рада [126], где су одређене природне фреквенције угљеничне наноцеви молекуларно динамичким симулацијама. Карактеристична једначина нелокалне и фракционе вискоеластичне наногреде, добијена из карактеристичне једначине (4.16), занемаривањем утицаја вискоеластичне подлоге ($\omega_k = 0$), је облика

$$p^2 + \kappa p^\alpha + \omega_{0n}^2 = 0, \quad (4.40)$$

где је $\kappa = \omega_{0n}^2 \tau_1^\alpha$. Карактеристична једначина (4.40) је истог облика као карактеристична једначина фракционог осцилатора са једним степеном слободе, [44]. Комплексна вредност корена карактеристичне једначине, а самим тим и кружна фреквенција и коефицијент гушења, могу се одредити из једначине (4.40) раздвајањем имагинарног и реалног дела

$$r^2 \cos 2\psi + \kappa r^\alpha \cos \alpha\psi + \omega_{0n}^2 = 0, \quad (4.41)$$

$$r^2 \sin 2\psi + \kappa r^\alpha \sin \alpha\psi = 0, \quad (4.42)$$

где смо усвојили да је $p = r e^{i\psi}$. Како једначине (4.41) и (4.42) немају корене за $0 < |\psi| < \pi/2$, корене тражимо за вредности угла $\pi/2 < |\psi| < \pi$. Уводећи нове променљиве $x_1 = r^2$ и $x_2 = \kappa r^\alpha$, чије вредности налазимо за сваку фиксну вредност угла ψ у опсегу $\pi/2 < |\psi| < \pi$ и дате вредности фракционог параметра α , као и параметра ω_{0n}^2 , добијамо

$$x_1 = \frac{\omega_{0n}^2 \sin \alpha\psi}{\sin((2-\alpha)\psi)}, \quad x_2 = -\frac{\omega_{0n}^2 \sin 2\psi}{\sin((2-\alpha)\psi)}. \quad (4.43)$$

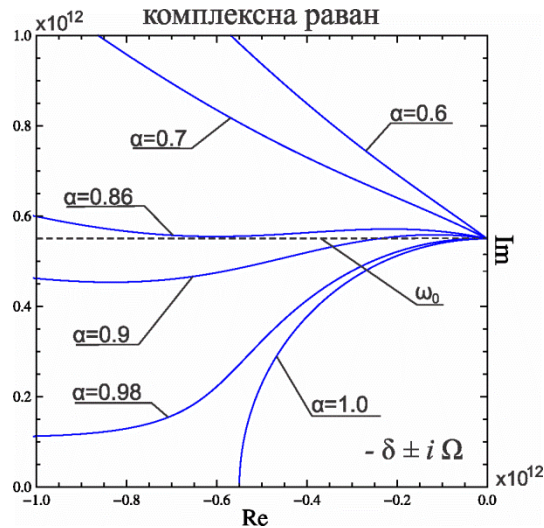
Након што одредимо x_1 и x_2 , можемо наћи параметре $r = \sqrt{x_1}$ и $\kappa = x_2 r^{-\alpha}$, који заједно са одабраном вредношћу угла ψ одређују један корен карактеристичне једначине. Конјуговано комплексна вредност корена карактеристичне једначине може се одредити узимањем негативне вредности угла $-\psi$, чиме добијамо конјуговано комплексни пар корена $p_{1,2} = r e^{\pm i\psi} = -\delta \pm i\Omega$ карактеристичне једначине тј. полова непознате функције. У Табели 3.4 упоређујемо резултате за кружну фреквенцију система са природним фреквенцијама угљеничне наноцеви добијене молекуларно

динамичким симулацијама у раду [126]. У моделу смо користили следеће вредности параметара „armchair“ [8, 8] типа угљеничне наноцеви: Young-ов модуло еластичности $E = 1.1$ [ТПа] (где је за случај Kelvin-Voigt-ог модела Young-ов модуло еквивалентан тзв. релаксираном модулу еластичности $E = E_0$), густина $\rho = 2300$ [kg/m³], висина наноцеви $h = 0.34$ [nm] и карактеристична дужина $a = 1.5$ [nm]. Резултати приказани у Табели 4.1 су добијени за фиксирани вредности угла $\psi = 1.572$, две различите вредности односа дужине, пречника $\zeta = L/d$ и четири вредности фракционог параметра α .

Табела 4.1. Поређење имагинарног дела комплексног корена нелокалне фракционо вискоеластичне наногреде са природним фреквенцијама [THz] угљеничне наноцеви добијене МД симулацијама.

ζ	МД [126]	Фреквенције еластичног система		Кружне фреквенције	
		$e_0 = 0.0$	$e_0 = 0.691$	$e_0 = 0.0$	$e_0 = 0.691$
$\alpha = 1.0$					
8.3	0.5298	0.5497	0.5299	$-0.00066 + 0.54966i$	$-0.00063 + 0.52995i$
13.7	0.1931	0.2017	0.1989	$-0.00024 + 0.20175i$	$-0.00024 + 0.19899i$
$\alpha = 0.98$					
8.3	0.5298	0.5497	0.5299	$-0.00066 + 0.54968i$	$-0.00064 + 0.52997i$
13.7	0.1931	0.2017	0.1989	$-0.00024 + 0.20176i$	$-0.00024 + 0.19901i$
$\alpha = 0.86$					
8.3	0.5298	0.5497	0.5299	$-0.00066 + 0.54981i$	$-0.00064 + 0.53009i$
13.7	0.1931	0.2017	0.1989	$-0.00024 + 0.20180i$	$-0.00024 + 0.19905i$
$\alpha = 0.6$					
8.3	0.5298	0.5497	0.5299	$-0.00066 + 0.55014i$	$-0.00064 + 0.53041i$
13.7	0.1931	0.2017	0.1989	$-0.00024 + 0.20192i$	$-0.00024 + 0.19917i$

На основу резултата из Табеле 4.1, може се закључити да је имагинарни део Ω комплексног корена, који представља кружну фреквеницију система фракционе вискоеластичне наногреде, приближан природној фреквенцији угљеничне наноцеви добијене молекуларно динамичким симулацијама за одређене вредности нелокалног и фракционог параметра. Из литературе је познато да повећање нелокалног параметра смањује фреквенцију система.



Слика 4.2. Комплексне вредности корена карактеристичне једначине наногреде за промену κ и α .

Утицај реда фракционог извода α на положај корена карактеристичне једначине у комплексној равни је приказан на графику са слике 4.2, где су приказане комплексне вредности корена у горњем левом квадранту комплексне равни у функцији коефицијента пригушења κ (који је повезан са временом ретардације τ_1) у опсегу $0 < \kappa < \infty$. Криве са слике 4.2 су сличне онима из рада [44] за фракциони осцилатор са једним степеном слободе. Може се приметити да за ниже вредности фракционог параметра ($\alpha < 0.86$), имагинарни део комплексног корена (кружна фреквенција) система се повећава са повећањем вредности параметра пригушења κ . Самим тим, кружне фреквенције фракционе вискоеластичне наногреде су више у односу на фреквенцију еластичне наногреде ω_{0n} . За вредности фракционог параметра $0.86 \leq \alpha \leq 1$ имамо уобичајно понашање кружне фреквенције система, тј. кружна фреквенција се смањује са повећањем параметра пригушења. Када је $\alpha = 1$, добијамо комплексне вредности корена, исте као у случају класичног Kelvin-Voigt-овог модела. Аномалија фракционог модела за $\alpha < 0.86$ је у сагласности са резултатима добијеним у [44], где је уочено исто понашање модела да са повећањем параметра пригушења расте и фреквенција система. Предности анализе у временском и комплексном домену се могу уочити на примеру фракционог Kelvin-Voigt-овог модела, где се анализом само у временском домену, као у трећој глави, не могу уочити

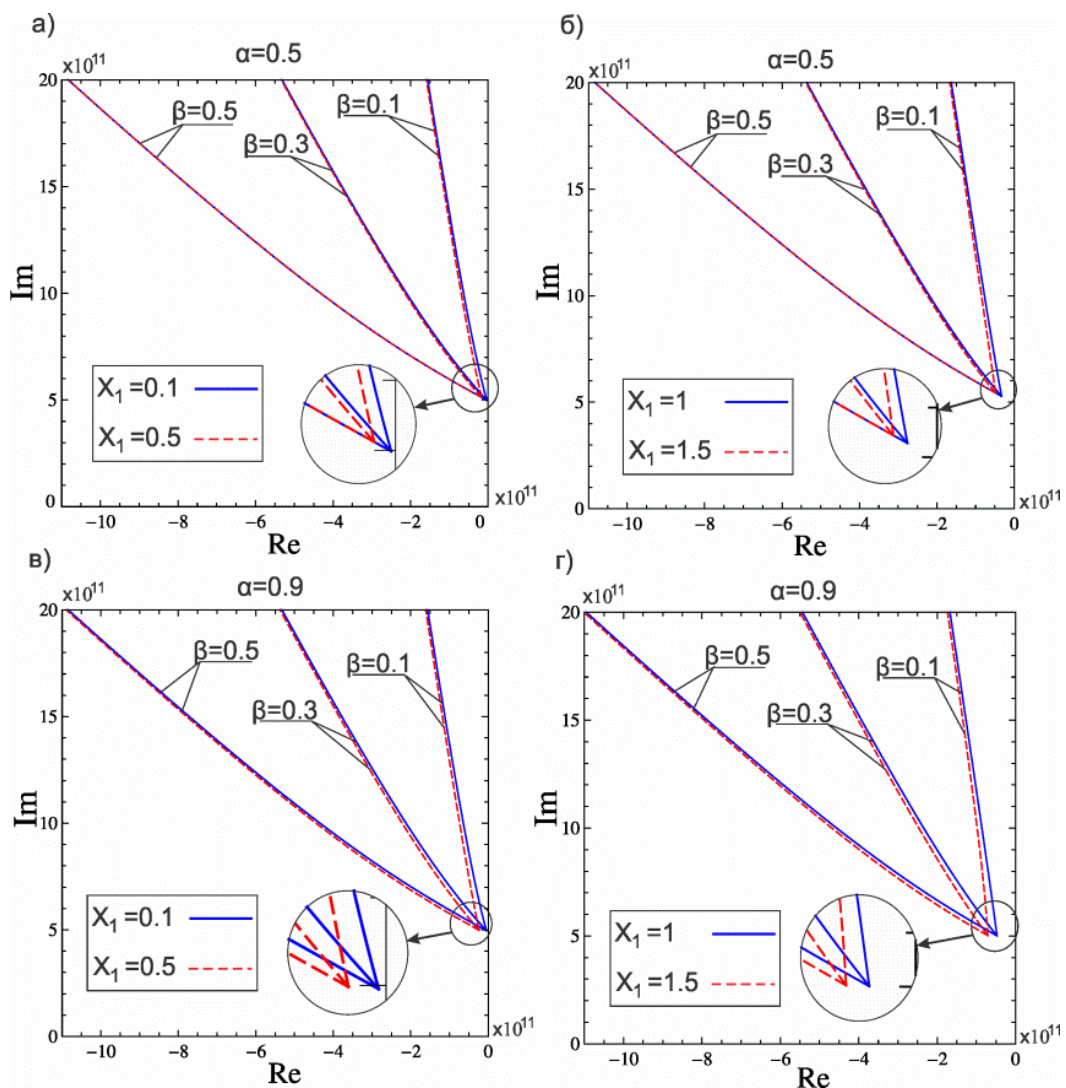
поменути недостаци модела па је стога пожељно спровести обе врсте анализе [44].

4.2.4 Нумерички резултати

Да би смо анализирали утицај различитих параметара у моделу на комплексне вредности корена и пригушене слободне осцилације наногреде на вискоеластичној подлози, спровешћемо параметарску анализу и илустроваћемо је кроз неколико нумеричких примера. У нумеричким примерима смо усвојили следеће вредности параметара, в. [124]: густина $\rho = 2300 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, модуо еластичности $E_0 = 1000 \text{ [GPa]}$, пречник наногреде $d = 1 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, површина попречног пресека $A = 7.85 \times 10^{-19} \text{ [m}^2\text{]}$, аксијални момент инерције $I = \pi d^4/64 = 4.91 \times 10^{-38} \text{ [m}^4\text{]}$, унутрашња карактеристична дужина $a = 1.5 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, дужина наногреде $L = 10a \text{ [m]}$ и модуо еластичности вискоеластичног слоја $K = 0.357 \text{ [GPa]}$. За нелокални параметар $\mu = (e_0 a)^2$ смо у нумеричким примерима усвојили да је $e_0 = 1$. У свим примерима испитан је само случај првог осцилаторног мода $n = 1$. Из једначина (4.26) и (4.27) можемо одредити угао ψ и параметар r за дате вредности параметара X_1 и X_2 у опсегу $[0, \infty]$ и наћи полове непознате функције.

Слика 4.3 приказује ефекат промене фракционог параметра β у функцији X_2 , који је једначином $\tau_2 = X_2^{1/\beta}/r$ повезан са временом ретардације τ_2 , на вредности конјуговано комплексних полова у горњој левој полуравни за фиксиране вредности параметара α и X_1 . Може се приметити да повећање параметра X_2 доводи до скоро линеарне промене реалних и имагинарних вредности полова. Промена параметра X_1 не утиче значајније на полове, осим када X_2 има малу вредност (видети увећани део на слици 4.3). Промена фракционог параметра β доводи до значајније промене вредности полова. Ова разлика је мала за мање вредности параметра X_2 , односно већа за веће вредности тог параметра. Може се уочити да веће вредности фракционог параметра β дају веће вредности реалног дела комплексног пола, док мање β даје већу вредност имагинарног дела.

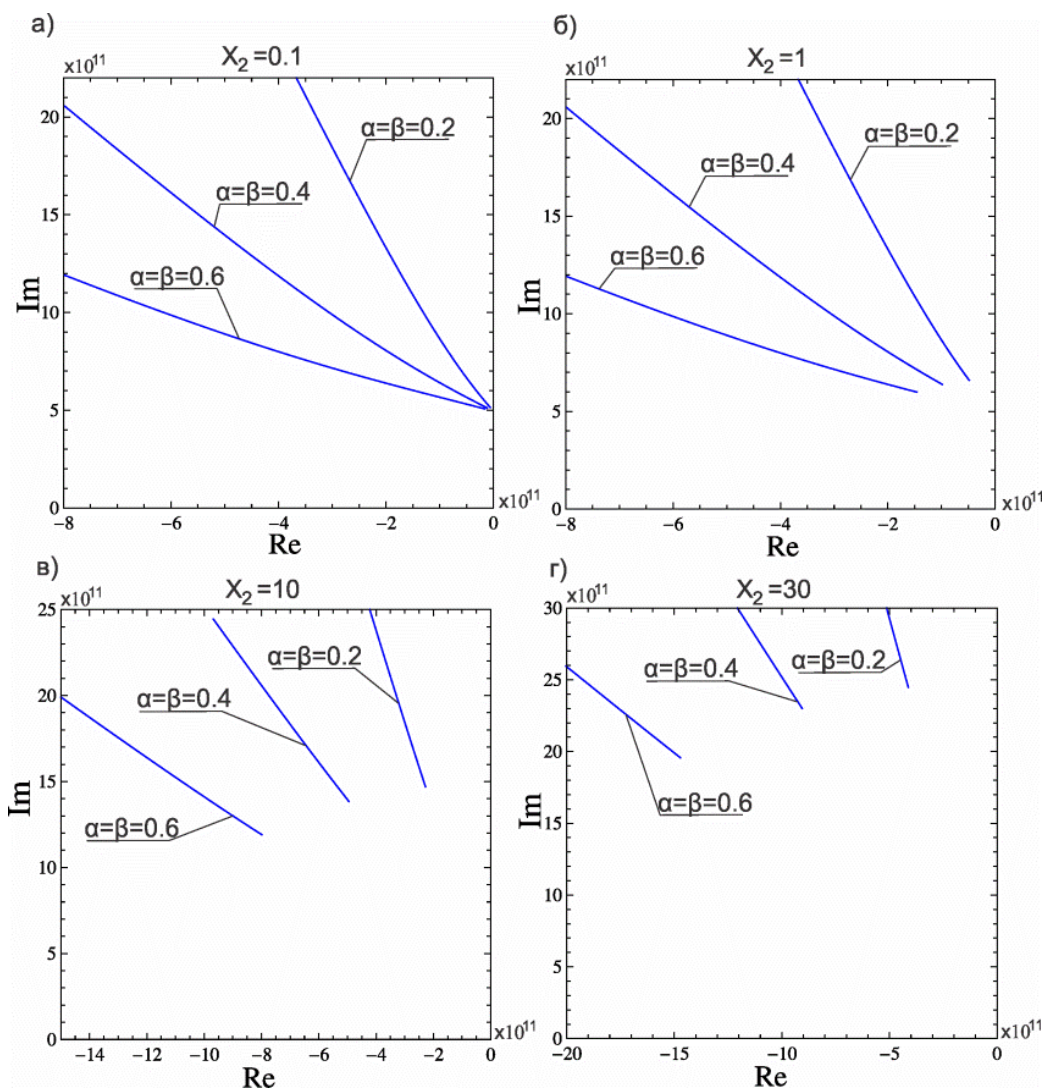
Супротно овоме, повећање вредности фракционог параметра β повећава реални део пола.



Слика 4.3. Комплексне вредности корена за промене вредности параметара β и X_2 и фиксиране вредности α и X_1 .

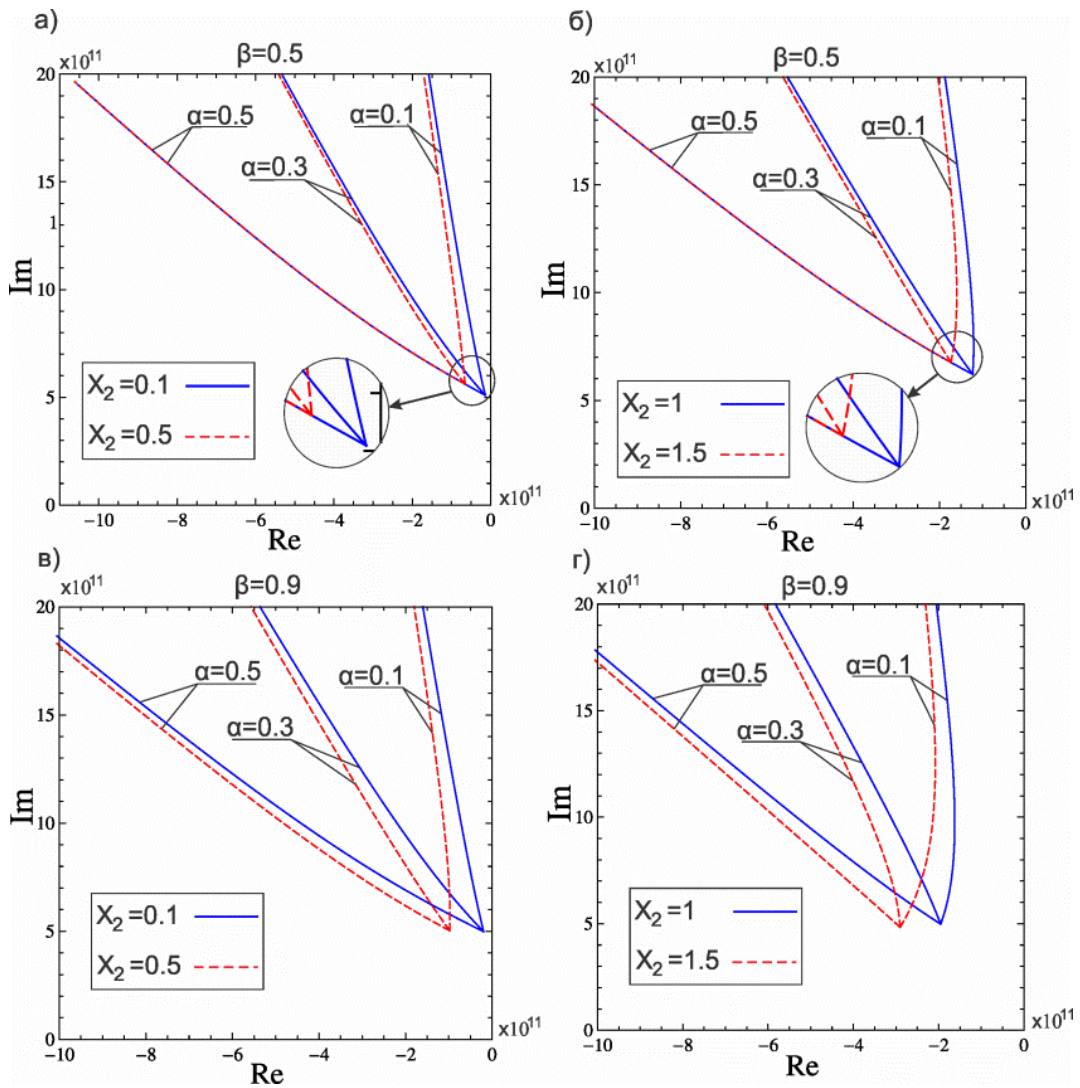
На слици 4.4 су приказане конјуговано комплексне вредности полова за промене вредности фракционих параметара $\alpha = \beta$ и параметра X_1 и фиксиране вредности X_2 . Из добијених графика може се уочити да су вредности полова, када су оба фракциона параметра иста, значајно измењене у односу на претходне примере. Повећање вредности параметара $\alpha = \beta$ доводи до повећања реалног и смањења имагинарног дела комплексног пола. За веће вредности параметра X_2 , почетне вредности полова које се

односе на мале вредности X_1 су значајно померене у лево у комплексној равни.



Слика 4.4. Комплексне вредности корена за промене вредности параметара $\alpha = \beta$ и X_1 и фиксиране вредности X_2 .

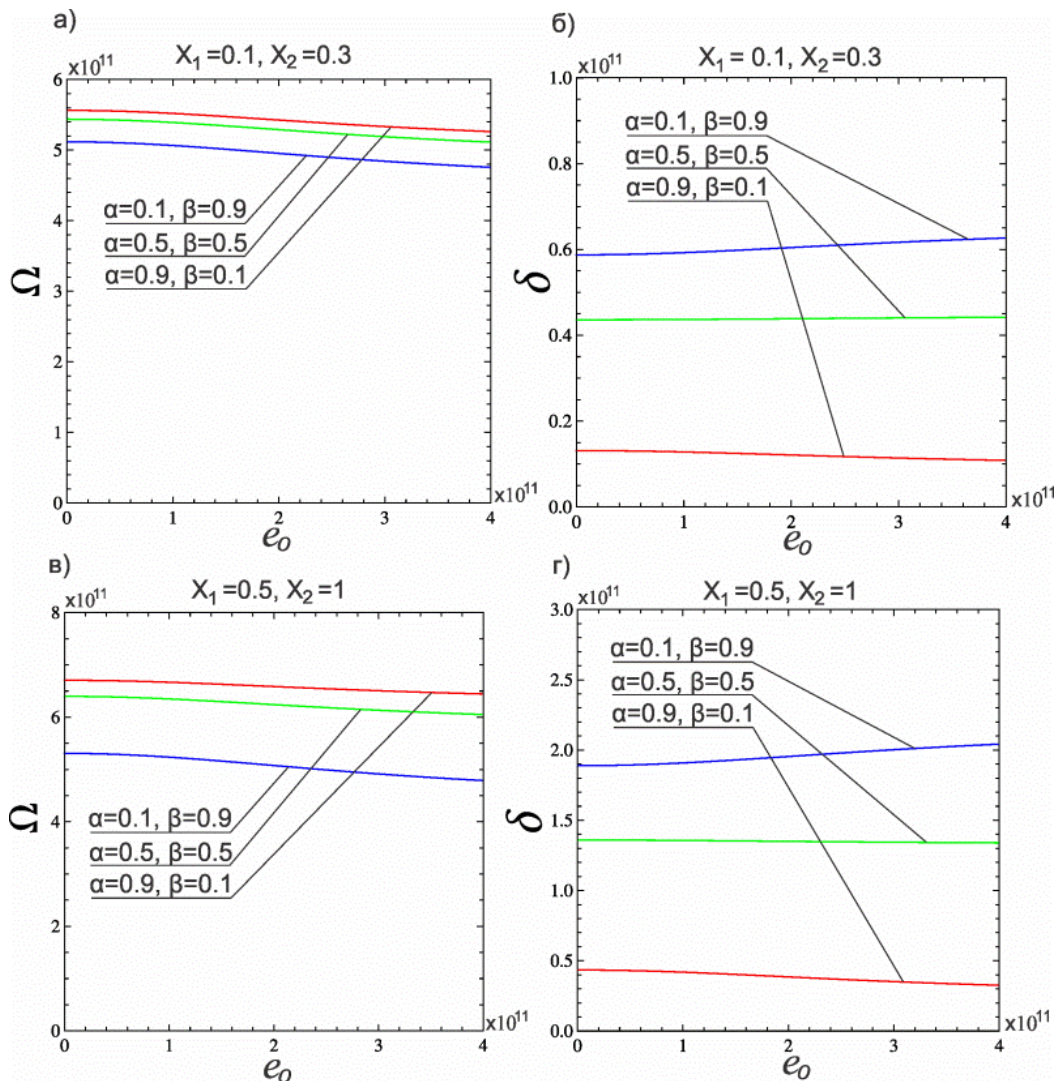
На слици 4.5 приказани су утицаји промене фракционог параметра α и параметра X_1 на вредности конјуговано комплексних полова у горњој левој полуравни за фиксиране вредности параметара β и X_2 . Повећање вредности параметра α доводи до повећања реалног дела комплексног пола што даје криве са мањим нагибом него у случају када је α мало.



Слика 4.5. Комплексне вредности корена за промене вредности параметара α и X_1 и фиксиране вредности β и X_2 .

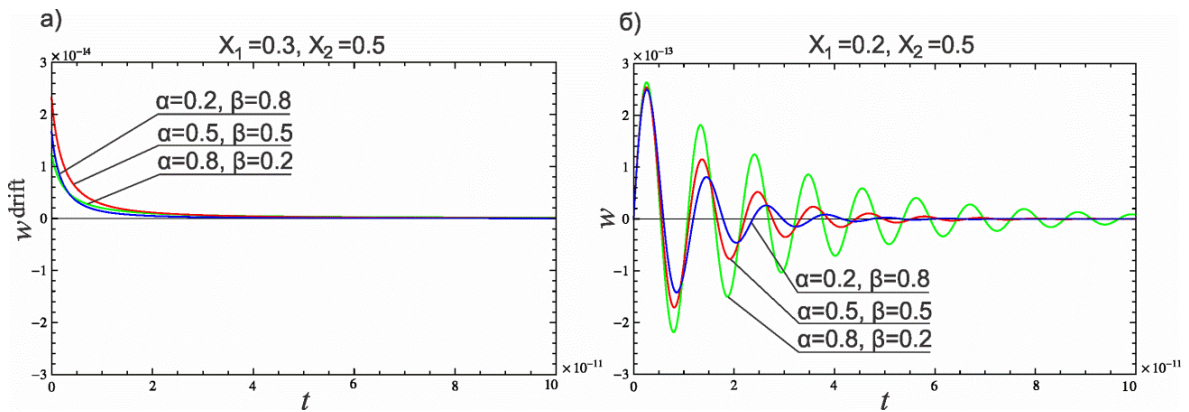
Разлика између кривих за различито X_2 је израженија за веће вредности фракционог параметра β . Почетне вредности полова добијене за мале вредности X_1 су померене у лево у комплексној равни, за веће вредности фиксираног параметра X_2 у односу на случај са малим вредностима тог параметра. На слици 4.6 приказан је утицај нелокалног параметра на вредности комплексних полова, где су посебно дати реални и имагинарни део пола у односу на промене нелокалног параметра. Са слике се може закључити да се имагинарни део пола, који представља кружну фреквенцију Ω система, смањује са повећањем нелокалног параметра e_0 у свим приказаним случајевима. Са физичке тачке гледишта, овакво понашање

се може приписати присуству нелокалних ефеката на нано-скали, као што су интеракције на даљину између атома, које су у моделу представљене нелокалним параметром. Вредности имагинарног дела су такође значајно мање за $\alpha > \beta$ него за $\beta > \alpha$. Насупрот претходном случају, реални део који представља коефицијент гушења δ система је знатно већи у случају када је $\alpha > \beta$ него за $\beta > \alpha$. Повећање вредности параметара X_1 и X_2 доводи до повећања вредности коефицијента гушења и незнатног смањења кружне фреквенције система.



Слика 4.6. Реални и имагинарни део комплексног корена за фиксиране параметре X_1 и X_2 и промену нелокалног параметра e_0 .

На сликама 4.7 а) и б) приказан је тзв. дрифт, тј. равнотежни део решења и померање средње тачке греде у времену за промене вредности фракционих параметара. У овом нумеричком примеру усвојене су исте вредности параметара као на почетку овог поглавља, а симулација је спроведена за различите вредности фракционих параметара α и β . Део решења приказан на слици 4.7 а) представља равнотежни део решења око кога се пригушују осцилације наногреде. Померање средње тачке греде, слика 4.7 б), је према једначинама једнако суми равнотежног и осцилаторног дела решења. Ипак, као што је приказано у раду [128], равнотежни део решења и фазни померај φ из једначине (4.34) се могу занемарити јер имају мале вредности. На слици 4.7 а), можемо приметити веће пригушење осцилација када је $\alpha < \beta$ него за $\alpha > \beta$.

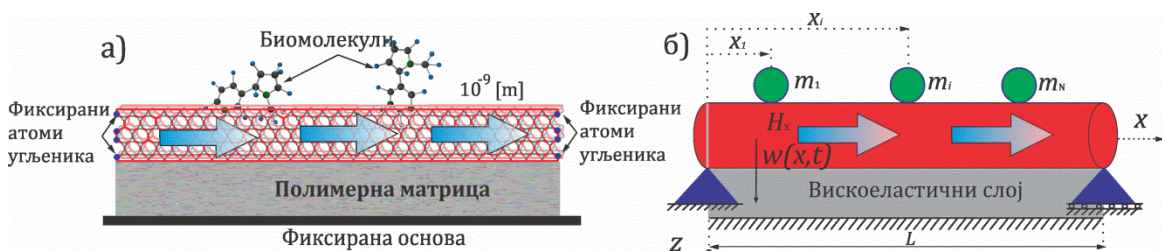


Слика 4.7. График померања средње тачке наногреде током времена
а) равнотежни део решења, б) укупно померање за промене α и β .

4.3 Осцилације наногреде са више наночестица и утицајем аксијалног магнетног поља

Анализираћемо слободне трансверзалне осцилације нелокалне вискоеластичне Euler–Bernoulli-јеве наногреде са наночестицама, где је наногреда под утицајем аксијалног магнетног поља и повезана са непокретном основом посредством вискоеластичног слоја. Уведене су следеће претпоставке: наночестице су моделиране концентрисаним масама, утицај лонгитудиналног магнетног поља је представљен преко Lorentz-ове силе (1.75), угљенична наноцев са по једним слојем фиксираних атома на сваком крају механички је моделирана просто ослоњеном наногредом. Такође смо користили Euler-Bernoulli-јеву теорију греде, где је L дужина наногреде, A је попречни пресек, ρ је густина и $w(x,t)$ је померање у трансверзалном правцу, тј. у правцу z осе, слика 4.8. Сматрамо да је попречни пресек наногреде константан дуж x осе и да је наногреда хомогена. Утицај концентрисаних маса на систем је описан Dirac-овом делта функцијом. У наставку ћемо описати процедуру за извођење једначине кретања наногреде и анализирати случај слободних осцилација система.

Напоменимо да нелокални модел наногреде са наночестицом може представљати модел наносензора, в. [100], за детекцију наночестица и молекула, чији се принцип заснива на промени фреквенције система услед промене укупне масе система, док примењено магнетно поље може служити за повећање осетљивости наносензора, в. [100].



Слика 4.8. Наногреда на вискоеластичној подлози са више наночестица и утицајем магнетног поља
а) физички модел, б) механички модел.

Претпоставили смо да за наногреду важи конститутивна релација (3.3) и поље померања и деформације за Euler-Bernoulli-јеву греду дате у једначинама (3.29)-(3.31), односно једначина (4.1) као веза између напона и померања. У једначини динамичке равнотеже за елементарни део наногреде (4.2), за спољашње оптерећење q ћемо усвојити следећи израз

$$q = K\left(1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta\right)w - \tilde{q}(x, t) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \delta(x - x_i)\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4.44)$$

где су K и τ_2 коефицијент и време ретардације вискоеластичне подлоге, $\tilde{q}(x, t)$ је сила по јединици дужине дата у (1.76), а која потиче од Lorentz-ове силе индуковане од стране магнетног поља, m_i је маса i -те наночестице и δ је Dirac-ова делта функција.

У поређењу са (4.4) и (4.5), добијају се измењене једначине за момент савијања

$$M = \mu \left[\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K\left(1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta\right)w - \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\sum_{i=1}^N m_i \delta(x - x_i)\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - E_0 I \left(1 + \tau_1^{\alpha RL} D^\alpha\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4.45)$$

и трансверзалну силу

$$V = \mu \left[\rho A \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + K\left(1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta\right) \frac{\partial w}{\partial x} - \eta A H_x^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(\sum_{i=1}^N m_i \delta(x - x_i)\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t^2} \right] - E_0 I \left(1 + \tau_1^{\alpha RL} D^\alpha\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}. \quad (4.46)$$

Коначно, једначина трансверзалних осцилација система наногреде на вискоеластичној подлози у функцији померања $w(x, t)$ има облик

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K\left(1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta\right)w - \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\sum_{i=1}^N m_i \delta(x - x_i)\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ & + E_0 I \left(1 + \tau_1^{\alpha RL} D^\alpha\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K\left(1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta\right)w - \eta A H_x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. \left(\sum_{i=1}^N m_i \delta(x - x_i)\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Једначина (4.47), као и једначина (4.6), садржи два времена ретардације τ_1 и τ_2 и два фракциона параметра α и β . Усвојени су гранични услови просте нанограде (4.7) и почетни услови

$$w(x, 0) = 0, \quad \dot{w}(x, 0) = w_0 \delta(x - L/2). \quad (4.48)$$

4.3.1 Решење једначине кретања

Решење једначине кретања (4.47) које задовољава граничне услове (4.7) просто ослоњене нанограде претпостављамо у следећем облику

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (4.49)$$

Заменом претпостављеног решења (4.49) у једначину кретања (4.47), узимањем у обзир услова ортогоналности сопствених амплитудних функција и развојем Дирихле-ове делта функције у синусни Фурје-ов ред, добијамо

$$\left[1 + \sum_{i=1}^N \frac{2m_i}{L\rho A} \sin^2(k_n x_i) \right] \ddot{T}_n + \left[\frac{K}{\rho A} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^{\beta}) + \frac{\eta A H_x^2 k_n^2}{\rho A} + \frac{E_0 I k_n^4}{\rho A (1 + \mu k_n^2)} (1 + \tau_1^{\alpha RL} D^{\alpha}) \right] T_n = 0. \quad (4.50)$$

Због поједностављења, једначину (4.50) можемо записати као

$$\ddot{T}_n + [\tilde{B}(1 + \tau_2^{\beta RL} D^{\beta}) + \tilde{D}(1 + \tau_1^{\alpha RL} D^{\alpha}) + \tilde{C}] T_n = 0, \quad (4.51)$$

где параметри \tilde{B} , \tilde{C} и \tilde{D} имају следеће вредности

$$\tilde{B} = \frac{K}{\rho A \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{2m_i}{L\rho A} \sin^2(k_n x_i) \right)}, \quad \tilde{C} = \frac{\eta A H_x^2 k_n^2}{\rho A \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{2m_i}{L\rho A} \sin^2(k_n x_i) \right)},$$

$$\tilde{D} = \frac{E_0 I k_n^4}{\rho A (1 + \mu k_n^2) \left(1 + \sum_{i=1}^N \frac{2m_i}{L\rho A} \sin^2(k_n x_i) \right)}. \quad (4.52)$$

Ако извршимо Лаплас-ову трансформацију једначине (4.51), где \bar{T}_n означава Лаплас-ову трансформацију функције T_n , добијамо

$$\bar{T}_n = \frac{pT(0) + \dot{T}(0)}{z_n}, \quad (4.53)$$

$$z_n = p^2 + \tilde{B}(1 + (p\tau_2)^{\beta}) + \tilde{D}(1 + (p\tau_1)^{\alpha}) + \tilde{C}, \quad (4.54)$$

где су $T(0)$ и $\dot{T}(0)$ почетни услови у модалним координатама који се одређују развојем почетних услова (4.48) у синусни Fourier-ов ред

$$T_n(0) = 0, \quad \dot{T}_n(0) = T_{0n} = \int_0^L w_0 \delta(x - L/2) \sin(k_n x) dx. \quad (4.55)$$

Карактеристичну једначину система добијамо када чланове у имениоцу једначине (4.54) изједначимо са нулом

$$z_n = 0. \quad (4.56)$$

Као у претходном поглављу, решење једначине (4.53) може се записати у временском домену применом Mellin-Fourier-ове инверзне формуле. За израчунавање добијеног интеграла се морају најпре одредити све сингуларне тачке комплексне функције (4.53). Функција \bar{T}_n има две тачке гранања, $p = 0$ и $p = \infty$, и полове који су корени карактеристичне једначине (4.56).

Решење у временском домену налазимо на исти начин као у претходном поглављу примењујући Mellin-Fourier-ову трансформацију и Cauchy-јеву теорему о остацима, а записујемо га у следећем облику

$$T_n(t) = T_n^{\text{drift}}(t) + T_n^{\text{vibr}}(t), \quad (4.57)$$

где $T_n^{\text{drift}}(t)$ и $T_n^{\text{vibr}}(t)$ имају исти облик као у (4.17)-(4.19). За одређивање решења фракционе једначине неопходно је одредити полове непознате функције $\bar{T}_n(p)$ налажењем корена карактеристичне једначине (4.56) која има два времена ретардације и два фракциона параметра применом исте процедуре као у претходном поглављу, в. [45]. Увођењем смене $p = re^{i\psi}$ у једначину (4.56) добијамо

$$r^2 e^{i2\psi} + \tilde{B}(1 + (r\tau_2)^\beta e^{i\psi\beta}) + \tilde{D}(1 + (r\tau_1)^\alpha e^{i\psi\alpha}) + \tilde{C} = 0. \quad (4.58)$$

Једначина (4.58) има два времена ретардације и фракциона параметра и сличног је облика као једначина (4.20), с тим што су параметри \tilde{B} , \tilde{C} и \tilde{D} одређени једначином (4.52), те се корени карактеристичне једначине (4.56) могу одредити применом исте методе као у (4.21)-(4.31). Након одређивања једног пара конјуговано комплексних вредности пола $p_{1,2} = -\delta \pm i\Omega$ за фиксиране вредности параметара у моделу, можемо одредити и решење

(4.57) применом Cauchy-јеве теорије о остацима и решавањем одговарајућег интеграла. За дате почетне услове (4.55), одређујемо дрифт део решења у следећем облику

$$T_n^{\text{drift}}(t) = \frac{T_{0n}}{\pi} \int_0^\infty Y_n^{-1} \sin(y_n) e^{-st} dp, \quad (4.59)$$

где је

$$z_n(se^{\pm i\pi}) = Y_n e^{\pm iy_n}. \quad (4.60)$$

Осцилаторни део решења $T_n^{\text{vibr}}(t)$ одређујемо из израза

$$T_n^{\text{vibr}}(t) = \text{res}[\bar{T}_n(p_1)e^{p_1 t}] + \text{res}[\bar{T}_n(p_2)e^{p_2 t}] = Ae^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi), \quad (4.61)$$

где су

$$A = 2T_0 \left\{ \left[\Re \frac{\partial z_n(re^{i\psi})}{\partial p} \right]^2 + \left[\Im \frac{\partial z_n(re^{i\psi})}{\partial p} \right]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (4.62)$$

$$\tan(\varphi) = \left[\Im \frac{\partial z_n(re^{i\psi})}{\partial p} \right] \left[\Re \frac{\partial z_n(re^{i\psi})}{\partial p} \right]^{-1}, \quad (4.63)$$

$$\frac{\partial z_n(p)}{\partial p} = 2p + \tilde{B}\tau_2^\beta \beta p^{\beta-1} + \tilde{D}\tau_1^\alpha \alpha p^{\alpha-1}, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \Re \frac{\partial z_n(re^{i\psi})}{\partial p} &= 2r \cos \psi + \tilde{B}\tau_2^\beta \beta r^{\beta-1} \cos(\psi(\beta - 1)) \\ &+ \tilde{D}\tau_1^\alpha \alpha r^{\alpha-1} \cos(\psi(\alpha - 1)), \end{aligned} \quad (4.65)$$

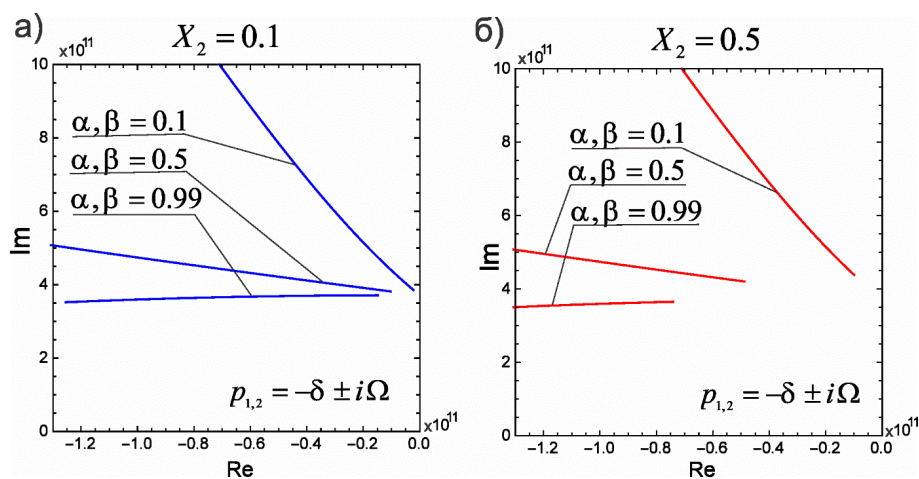
$$\Im \frac{\partial z_n(re^{i\psi})}{\partial p} = 2r \sin \psi + \tilde{B}\tau_2^\beta \beta r^{\beta-1} \sin(\psi(\beta - 1)) + \tilde{D}\tau_1^\alpha \alpha r^{\alpha-1} \sin(\psi(\alpha - 1)). \quad (4.66)$$

4.3.2 Нумеричка анализа

Одељак је посвећен анализи утицаја параметара модела на природне фреквенције и осцилације фракционо вискоеластичне наногреде током времена. Осцилације наногреде су под утицајем магнетног поља и прикачених наночестица. У нумеричким примерима усвојили смо исте вредности параметара наногреде и вискоеластичног слоја као и у претходном поглављу за наногреду на вискоеластичној подлози без утицаја магнетног поља и наночестица. У већини нумеричких примера, усвојили смо

за јачину магнетног поља $H_x = 10^7 \text{ [N(mA)}^{-1}]$ и коефицијент магнетне пермеабилности $\eta = 4\pi \times 10^{-7} \text{ [NA}^{-2}]$. Посматрамо наночестице истих маса мерених у цептограмима $m_{1,2,3} = 5 \text{ [zg]}$, где се наночестице налазе на растојањима $x_1 = L/4$, $x_2 = 2L/4$ и $x_3 = 3L/4$, мерено од координатног почетка.

На слици 4.9 је приказан утицај промене фракционих параметара и времена ретардације на комплексне вредности полова $p_{1,2} = -\delta \pm i\Omega$, где имагинарни део Ω представља кружну фреквенцију система, а реални део δ је коефицијент гушења. На слици 4.9, као и на осталим сликама, приказан је само горњи леви квадрант комплексне равни јер се исто понашање добија и за конјуговано комплексну вредност пола. Може се запазити да за ниже вредности фракционог параметра имагинарни део расте са порастом параметра X_1 , што је „аномално“ понашање фракционог Kelvin-Voigt дифузионог модела које је примећено и у претходним примерима. За веће вредности фракционих параметара $\alpha, \beta = 0.99$, блиске целобројној вредности, имамо благо опадање кружне фреквенције система.

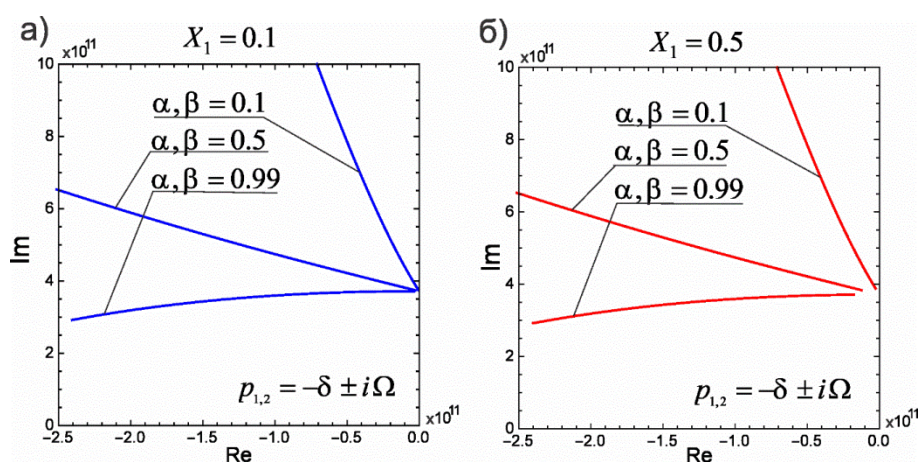


Слика 4.9. Комплексне вредности корена за промене вредности параметара α, β и X_1 и фиксираних вредности параметра а) $X_2 = 0.1$, б) $X_2 = 0.5$.

Слика 4.10 описује промену комплексне вредности пола за промене параметра X_2 и фиксне вредности параметра X_1 . Може се приметити да у овом случају промена фиксних вредности параметра X_1 резултира мањим

променама почетних вредности комплексних корена него што је то био случај код промене параметра X_2 на слици 4.9.

Слика 4.11 а) описује промене вредности полова за промене масе сваке од три наночестице на наногреди. Повећање масе наночестица утиче на смањење имагинарног дела комплексног пола за фиксне остале вредности параметара. Ипак, за пораст пригушења у систему, тачније повећање параметра X_2 , разлика у кривама комплексних полова између случаја са мањом и са већом масом се смањује за све вредности фракционих параметара.

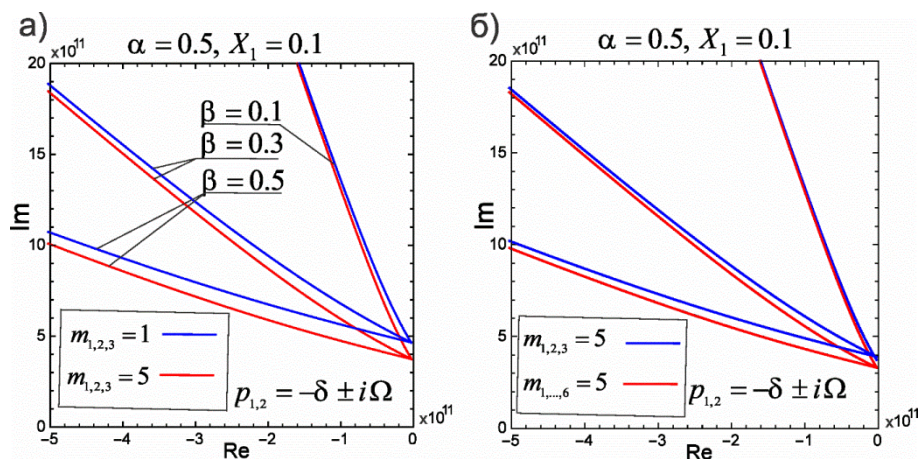


Слика 4.10. Комплексне вредности корена за промене вредности параметара α , β и X_2 и фиксирани вредности параметра а) $X_1 = 0.1$, б) $X_1 = 0.5$.

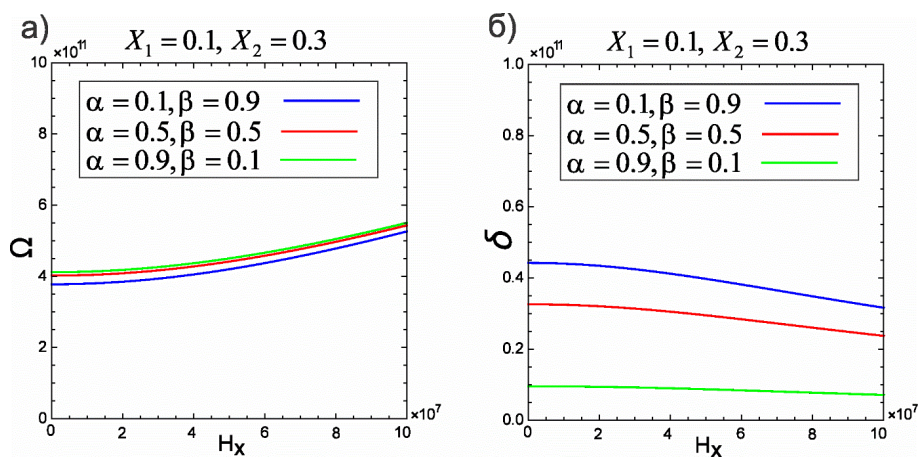
Слика 4.11 б) описује промене комплексних вредности полова за промену броја маса у систему, где су наночестице у случају са шест маса равномерно распоређене на растојању $L/7$ једна од друге почевши од $x_1 = L/7$ па до $x_6 = 6L/7$. Пораст броја наночестица такође утиче на смањење имагинарног дела комплексног пола, тј. кружне фреквенције система за фиксирани остале вредности параметара. У овом случају повећање параметра пригушења X_2 такође смањује разлику између крива комплексних корена за случајеве са различитим бројем наночестица.

Слика 4.12 а) приказује утицај промене јачине магнетног поља на кружну фреквенцију система. Може се приметити да повећање јачине магнетног поља повећава фреквенцију система. Промена фреквенције

постаје знатнија тек за јачине магнетног поља веће од $H_x = 1 \times 10^7$ [N/(m · A)], што је резултат који је такође добијен у литератури [136]. Повећање магнетног поља утиче на незнатно смањење коефицијента гушења, слика 4.12 б).



Слика 4.11. Комплексне вредности корена за промене а) масе наночестица, б) броја наночестица у систему.

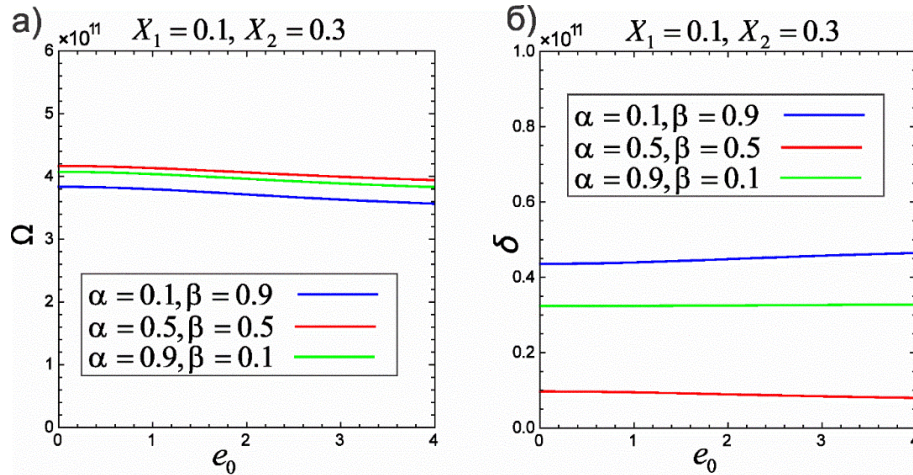


Слика 4.12. Утицај промене магнетног поља на а) кружну фреквенцију, б) коефицијент гушења.

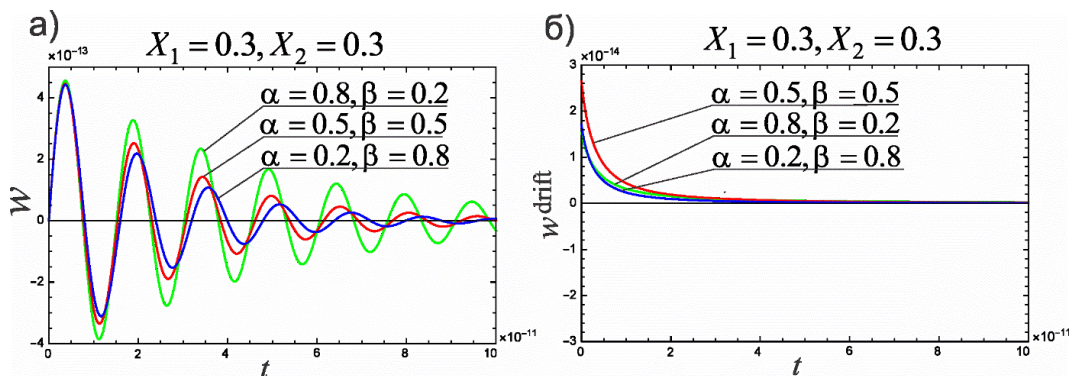
Слика 4.13 описује утицај нелокалног параметра на кружну фреквенцију система и коефицијент гушења. Нелокални параметар утиче на незнатно смањење кружне фреквенције система, слика 4.13 а), и незнатни пораст вредности коефицијента гушења, слика 4.13 б).

На слици 4.14 приказан је утицај промене померања средње тачке наногреде и равнотежног, тј. „дрифт“ дела решења у времену за промене вредности фракционог параметра. Са графика се може уочити различито

пригушење слободних осцилација система, за дате почетне услове, и различите вредности фракционих параметара. Тако се може запазити да је пригушење највеће за вредности параметара $\alpha = 0.2$ и $\beta = 0.8$.



Слика 4.13. Утицај промене нелокалног параметра на а) кружну фреквенцију система, б) коефицијент гушења.

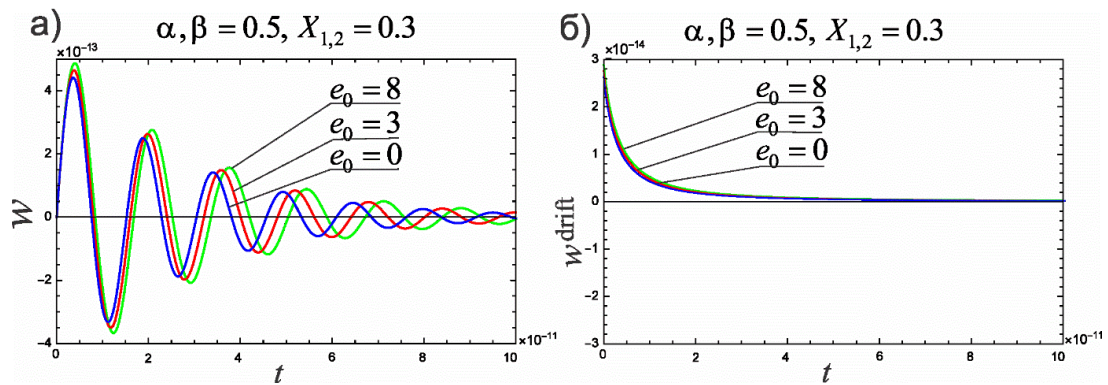


Слика 4.14. Утицај промене фракционих параметара на а) померање наногреде, б) дрифт део решења.

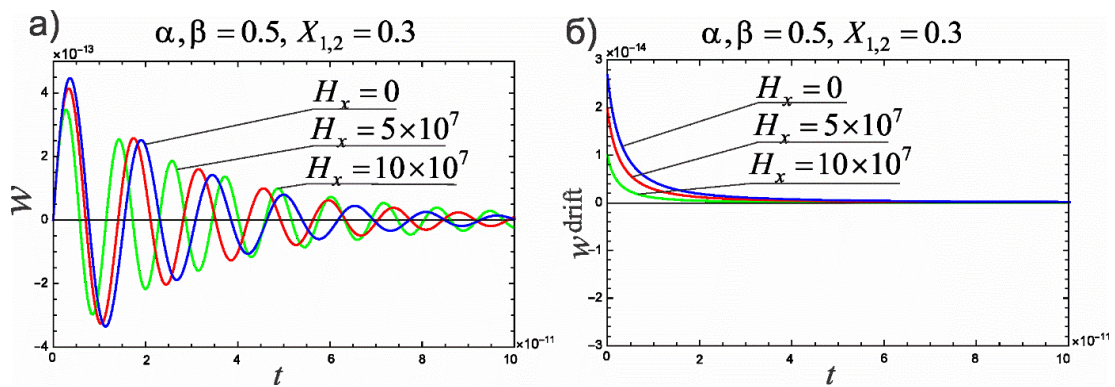
Слика 4.15 приказује утицај нелокалног параметра на померање средње тачке наногреде и дрифт део решења у току времена. На основу добијених дијаграма може се закључити да повећање нелокалног параметра утиче на повећање амплитуде осциловања система, што је резултат смањене крутости. Слични резултати су добијени и у претходном поглављу.

Слика 4.16 приказује утицај промене јачине магнетног поља на померање наногреде и равнотежни део решења. Примећује се да повећање јачине магнетног поља утиче на смањење периода осциловања тј. на повећање фреквенције и уједно на смањење амплитуде. Највећа амплитуда

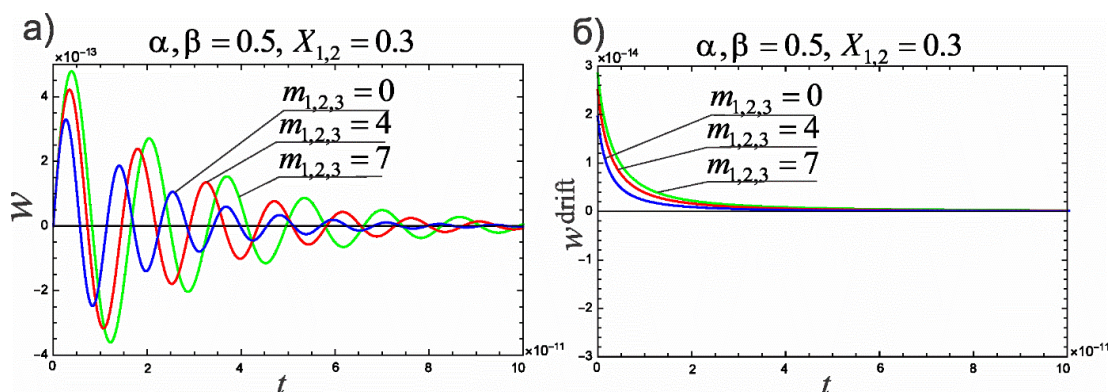
осциловања је у случају када немамо утицај магнетног поља, али само за мала времена, док је та амплитуда мања за веће време t .



Слика 4.15. Утицај промене нелокалног параметара на а) померање наногреде, б) дрифт део решења.



Слика 4.16. Утицај промене фракционих магнетног поља на а) померање наногреде, б) дрифт део решења.

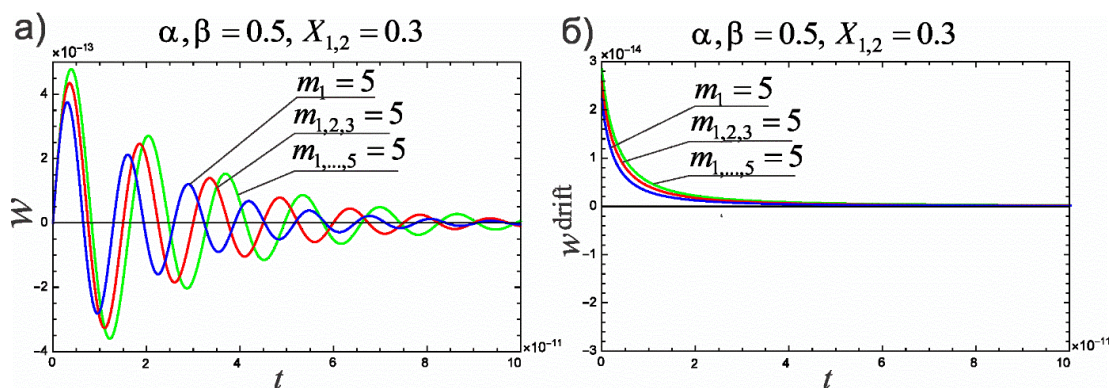


Слика 4.17. Утицај промене масе на а) померање наногреде, б) дрифт део решења.

Слика 4.17 приказује утицај промене масе наночестица на померање наногреде и равнотежни део решења. Повећање масе наночестица утиче на

повећање амплитуде осциловања, које је праћено смањењем фреквенције система.

Слика 4.18 приказује утицај промене броја равномерно распоређених наночестица исте масе на померање наногреде и равнотежни део решења. Може се запазити да повећање броја маса утиче на повећање амплитуде осциловања, смањење фреквенције и спорије пригушење у систему.



Слика 4.18. Утицај промене броја наночестица на а) померање наногреде, б) дрифт део решења.

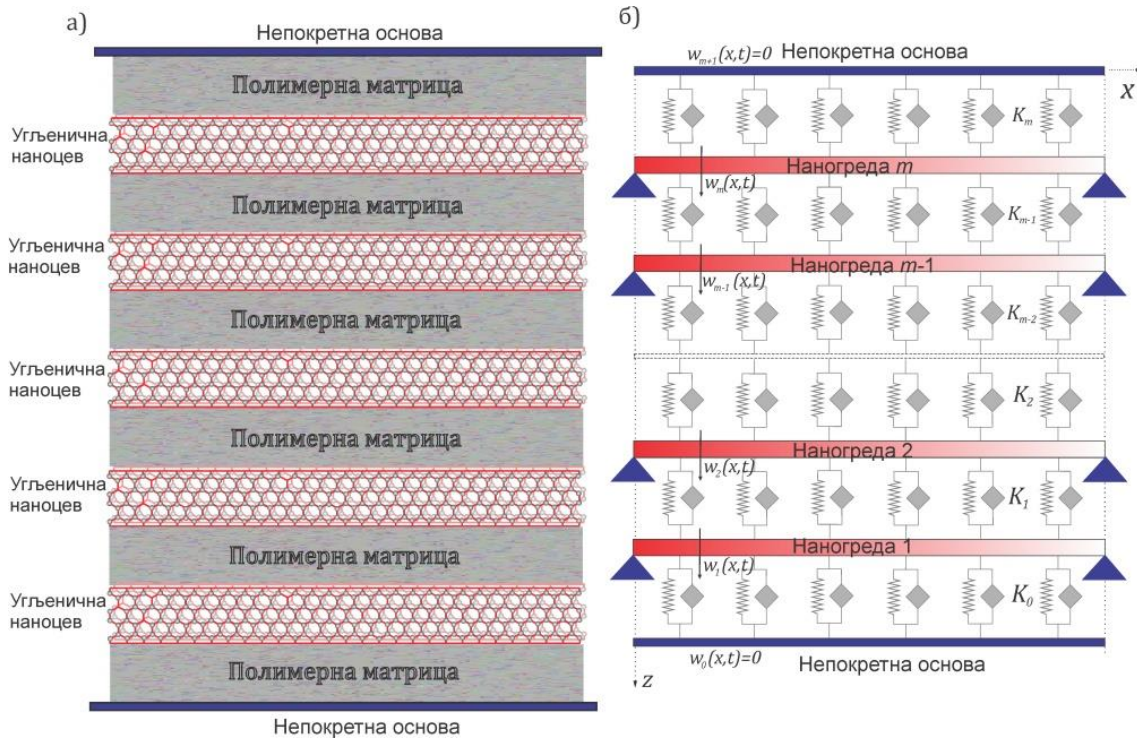
Глава 5

Осцилације система више спрегнутих нехомогених наногреда

5.1 Уводна разматрања

Сложени континуални системи сачињени од више структура, као што су греде или плоче, спрегнутих слојевима еластичних или вискоеластичних својстава су чести у инжењерској пракси и проучавани су разним теоријским моделима. Уколико су структуре једнаких геометријских и материјалних карактеристика спрегнуте фракционим вискоеластичним слојевима, добијају се одговорајући системи спрегнутих једначина кретања које описују слободне или принудне осцилације таквих система, и које су у литератури често решаване применом аналитичких метода, за неке резултате в. [133-135]. Механички еквиваленти таквих система на нано скали су уређени низови наноструктура, облика наноцеви или наноплоча које су уметнуте у полимерну матрицу, в. [137]. Нелокални модели слободних осцилација таквих система наноштапова, наногреда и наноплоча су обрађени у [93-98], применом аналитичких метода, у случају када су наноструктуре истих геометријских и материјалних карактеристика. Анализираћемо систем сачињен од више нехомогених наногреда уметнутих у медијум са фракционим вискоеластичним својствима. Применом Euler-Bernoulli-јеве теорије греда и нелокалне фракционе вискоеластичне конститутивне релације биће изведене једначине кретања. Посматрамо систем N наногреда: где је свака греда дужине L , густине ρ и где су померања i -те греде у трансверзалном правцу (правцу z осе) означена са $w_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, N$, слика 5.1. Претпоставићемо да је систем нехомоген, односно да попречни пресек и висине наногреда варирају од греде до греде, а да је свака наногреда појединачно хомогена, тј. има иста материјална својства у свим правцима. Наногреде са слике 5.1 б) су међусобно спрегнуте фракционим

вискоеластичним слојевима који представљају модел полимерне матрице са слике 5.1 а). Такође ћемо претпоставити да су наногреде на крајевима просто ослоњене. Анализираћемо случај слободних трансверзалних осцилација описаног система наногреда.



Слика 5.1. Систем више вискоеластично спрегнутих нехомогених наногреда а) физички модел, б) механички модел.

5.2 Једначине кретања система нехомогених наногреда

Коришћењем d’Alambert-овог принципа за елементарни део i -те наногреде у систему можемо написати једначине динамичке равнотеже у следећем облику

$$\frac{\partial N_i}{\partial x^2} + F_i - F_{i-1} = \rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

$$V_i = \frac{\partial M_i}{\partial x}, \quad (5.2)$$

где су F_i и F_{i-1} силе које потичу од вискоеластичног слоја и дате су

$$F_i = K_i \left(1 + \tau_2^\beta {}_0 D_t^\beta \right) (w_{i+1} - w_i) \quad (5.3)$$

$$F_{i-1} = K_{i-1} \left(1 + \tau_2^\beta {}_0 D_t^\beta \right) (w_i - w_{i-1}). \quad (5.4)$$

Механичка својства наногреде моделирамо нелокалним фракционим Kelvin-Voigt-овим моделом (3.3). Једначина за момент i -те наногреде је

$$M_i = \mu \left[\rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - K_i (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) (w_{i+1} - w_i) + K_{i-1} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) (w_i - w_{i-1}) \right] - E_{0i} I_i (1 + \tau_1^{\alpha RL} D^\alpha) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}, \quad (5.5)$$

док је за трансверзалну силу

$$V_i = \mu \left[\rho_i A_i \frac{\partial^3 w_i}{\partial x \partial t^2} - K_i (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) \frac{\partial}{\partial x} (w_{i+1} - w_i) + K_{i-1} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) \frac{\partial}{\partial x} (w_i - w_{i-1}) \right] - E_{0i} I_i (1 + \tau_1^{\alpha RL} D^\alpha) \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3}, \quad (5.6)$$

где је $I_i = \int_A z_i^2 dA$.

Једначине трансверзалних осцилација система нехомогених наногреда спрегнутих фракционим вискоеластичним слојевима имају облик

$$\begin{aligned} & \rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - K_i (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) (w_{i+1} - w_i) + K_{i-1} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) (w_i - w_{i-1}) \\ & + E_{0i} I_i (1 + \tau_1^{\alpha RL} D^\alpha) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} = \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - K_i (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) (w_{i+1} - w_i) \right. \\ & \left. + K_{i-1} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) (w_i - w_{i-1}) \right], \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где се на основу усвојене индексне нотације, померања $w_0 = 0$ и $w_{m+1} = 0$ односе на померања непокретне основе система која су једнака нули. Треба напоменути да је разматран случај „слободног ланца“, тј. случај када прва и последња наногреда у систему нису повезане са непокретном основом посредством вискоеластичног слоја, те усвајамо да је $K_0 = K_m = 0$.

5.3 Решење система једначина

Решење система парцијалних диференцијалних једначина фракционог реда (5.7) тражимо методом раздвајања променљивих и применом Laplace-ове трансформације. За просто ослоњену i -ту наногреду у систему, претпостављамо решење у следећем облику

$$w_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_{(i)n} \sin(k_n x), \quad k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (5.8)$$

Заменом решења (5.8) у једначину кретања (5.7) следи

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_{(i)n} - \frac{K_i}{\rho_i A_i} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) T_{(i+1)n} + \frac{K_i + K_{i-1}}{\rho_i A_i} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) T_{(i)n} \\ & - \frac{K_{i-1}}{\rho_i A_i} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) T_{(i-1)n} + \frac{E_{0i} I_i k_n^4}{\rho_i A_i (1 + \mu k_n^2)} (1 + \tau_1^{\alpha RL} D^\alpha) T_{(i)n} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

$i = 1, 2, \dots, m,$

где на основу $w_0 = w_{m+1} = 0$ следи $T_{(0)n} = T_{(m+1)n} = 0$, па ће се прва и последња једначина из система диференцијалних једначина (5.9) разликовати од осталих. На основу претпоставке да фракциони вискоеластични слојеви између наногреда имају иста својства $K_1, K_2, \dots, K_{m-1} = K$, једначину (5.9) можемо записати у облику

$$\begin{aligned} & \ddot{T}_{(i)n} - \frac{K}{\rho_i A_i} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) T_{(i+1)n} + \frac{2K}{\rho_i A_i} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) T_{(i)n} \\ & - \frac{K}{\rho_i A_i} (1 + \tau_2^{\beta RL} D^\beta) T_{(i-1)n} + \frac{E_{0i} I_i k_n^4}{\rho_i A_i (1 + \mu k_n^2)} (1 + \tau_1^{\alpha RL} D^\alpha) T_{(i)n} = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Систем једначина (5.10) се може записати у Laplace-овом домену

$$\begin{aligned} & p^2 \bar{T}_{(i)n} + \omega_{in}^2 (1 + (\tau_1 p)^\alpha) \bar{T}_{(i)n} + \frac{2K}{\rho_i A_i} (1 + (\tau_1 p)^\beta) T_{(i)n} - \frac{K}{\rho_i A_i} (1 + (\tau_1 p)^\beta) T_{(i-1)n} \\ & - \frac{K}{\rho_i A_i} (1 + (\tau_1 p)^\beta) T_{(i+1)n} = \bar{R}_{(i)n}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где су

$$\omega_{in}^2 = \frac{E_{0i} I_i k_n^4}{\rho_i A_i (1 + \mu k_n^2)}, \quad \bar{R}_{(i)n} = p T_{(i)n}(0) + \dot{T}_{(i)n}(0), \quad (5.12)$$

$$T_{(i)n}(0) = 0, \quad \dot{T}_{(i)n}(0) = \int_0^L w_{0(i)} \delta(x_i - L/2) \sin(k_n x) dx, \quad (5.13)$$

$$w_{1(0)} \neq 0, w_{j(0)} = 0, \quad j = 2, \dots, N, \quad (5.14)$$

а $T_{(i)n}(0)$ и $\dot{T}_{(i)n}(0)$ из једначине (5.13) су почетни услови у модалним координатама. Једначине (5.11) можемо записати у матричном облику

$$p^2 \{\bar{T}_{(i)n}\} + \omega_{in}^2 (1 + (\tau_1 p)^\alpha) \delta_{ij} \{\bar{T}_{(j)n}\} + [K_{ij}] (1 + (\tau_2 p)^\beta) \{\bar{T}_{(j)n}\} = \{\bar{R}_{(i)n}\}, \quad (5.15)$$

где се сумирање врши по поновљеним индексима, а матрица $[K_{ij}] = \mathbf{K}$ је дата као

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2K}{\rho_1 A_1} & -\frac{K}{\rho_1 A_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{K}{\rho_2 A_2} & \frac{2K}{\rho_2 A_2} & -\frac{K}{\rho_2 A_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{K}{\rho_3 A_3} & \frac{2K}{\rho_3 A_3} & -\frac{K}{\rho_3 A_3} & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{K}{\rho_i A_i} & \frac{2K}{\rho_i A_i} & -\frac{K}{\rho_i A_i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{K}{\rho_m A_m} & \frac{2K}{\rho_m A_m} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Матрица \mathbf{K} је несиметрична матрица крутости. Увођењем смене променљивих

$$\bar{T}_{(i)n}^* = \sqrt{\frac{\rho_i A_i}{\rho_1 A_1}} \bar{T}_{(i)n}, \quad (5.17)$$

и множењем i -те једначине у (5.15) са $\sqrt{\rho_i A_i / \rho_1 A_1}$, в. [44], добија се

$$p^2 \{\bar{T}_{(i)n}^*\} + \omega_{in}^2 (1 + (\tau_1 p)^\alpha) \delta_{ij} \{\bar{T}_{(j)n}^*\} + [k_{ij}] (1 + \tau_2^\beta {}_0 D_t^\beta) \{\bar{T}_{(j)n}^*\} = \{\bar{R}_{(i)n}^*\}, \quad (5.18)$$

где су

$$\bar{R}_{(i)n}^* = \sqrt{\frac{\rho_i A_i}{\rho_1 A_1}} \bar{R}_{(i)n}, \quad (5.19)$$

$\mathbf{k} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{2K}{\rho_1 A_1} & -\frac{K}{\sqrt{\rho_1 A_1 \rho_2 A_2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{K}{\sqrt{\rho_1 A_1 \rho_2 A_2}} & \frac{2K}{\rho_2 A_2} & -\frac{K}{\sqrt{\rho_2 A_2 \rho_3 A_3}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{K}{\sqrt{\rho_2 A_2 \rho_3 A_3}} & \frac{2K}{\rho_3 A_3} & -\frac{K}{\sqrt{\rho_4 A_4 \rho_3 A_3}} & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{K}{\sqrt{\rho_i A_i \rho_{i-1} A_{i-1}}} & \frac{2K}{\rho_i A_i} & -\frac{K}{\sqrt{\rho_i A_i \rho_{i+1} A_{i+1}}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{K}{\sqrt{\rho_m A_m \rho_{m-1} A_{m-1}}} & \frac{2K}{\rho_m A_m} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Како је матрица $[k_{ij}] = \mathbf{k}$ симетрична, она има t реалних сопствених вредности $\xi_i, i = 1, 2, \dots, t$ и исто толико међусобно ортогоналних сопствених вектора $l_i^1, l_i^2, \dots, l_i^m, i = 1, 2, \dots, t$. Ако матрицу \mathbf{k} и векторе $\bar{T}_{(i)n}^*$ и $\bar{R}_{(i)n}^*$ запишемо у бази сопствених вектора

$$\mathbf{k} = \xi_1 l_i^1 l_j^1 + \xi_2 l_i^2 l_j^2 + \dots + \xi_m l_i^m l_j^m, \quad (5.21)$$

$$\bar{T}_{(i)n}^* = \sum_{j=1}^m \bar{X}_{(j)n}^* l_i^j, \quad (5.22)$$

$$\bar{R}_{(i)n}^* = \sum_{j=1}^m \bar{s}_{(j)n}^* l_i^j, \quad (5.23)$$

заменом једначина (5.21)–(5.23) у (5.18), множењем добијене једначине са l_i^k и узимањем у обзир услова ортогоналности сопствених вектора добија се следећа једначина

$$[p^2 + \omega_{in}^2(1 + (\tau_1 p)^\alpha) + \xi_k(1 + (\tau_2 p)^\beta)] \bar{X}_{(k)n}^* = \bar{s}_{(k)n}^*, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.24)$$

Овако приказане једначине (5.24) сада представљају систем распрегнутих једначина осциловања, од којих свака засебно има облик једначине Kelvin-Voigt-овог осцилатора са једним степеном слободе и два времена ретардације и два фракциона параметра, као у трећем поглављу. С тога, ову једначину можемо записати као

$$\bar{X}_{(k)n}^* = \frac{\bar{s}_{(k)n}^*}{z_{(k)n}}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (5.25)$$

где је

$$z_{(k)n} = p^2 + \omega_{in}^2(1 + (\tau_1 p)^\alpha) + \xi_k(1 + (\tau_2 p)^\beta). \quad (5.26)$$

И у овом случају, када члан у имениоцу из сваке од једначина (5.26) изједначимо са нулом

$$z_{(k)n} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (5.27)$$

добијамо m карактеристичних једначина система чији су корени комплексне вредности које одређују сопствене фреквенције и коефицијент гушења неспрегнутог система наногреда. Карактеристичне једначине (5.27), као и једначина (4.16), поседују два времена ретардације τ_1 и τ_2 и два фракциона параметра α и β , те се њихови корени могу одредити применом исте методе описане једначинама (4.20)–(4.31). Ако узмемо да је $p = r e^{i\psi}$, добијамо

$$r^2 e^{i2\psi} + \omega_{in}^2(1 + (r\tau_1)^\alpha e^{i\psi\alpha}) + \xi_k(1 + (r\tau_2)^\beta e^{i\psi\beta}) = 0, \quad (5.28)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Увођењем поларних координата за чланове у заградама $R_\alpha e^{i\Phi_\alpha}$ и $R_\beta e^{i\Phi_\beta}$ као у (4.24) и (4.25), раздвајањем реалног и имагинарног дела сваке од једначина (5.28), добијамо систем од $2m$ једначина

$$r_k^2 \cos 2\psi_k + \xi_k R_\beta \cos \Phi_\beta + \omega_{in}^2 R_\alpha \cos \Phi_\alpha = 0, \quad (5.29)$$

$$r_k^2 \sin 2\psi_k + \xi_k R_\beta \sin \Phi_\beta + \omega_{in}^2 R_\alpha \sin \Phi_\alpha = 0, \quad (5.30)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Систем једначина (5.29) и (5.30) нема корене за $0 < |\psi_k| < \pi/2$. Обједињујемо параметре $G_1 = (r\tau_1)^\alpha$ и $G_2 = (r\tau_2)^\beta$ тако да G_1 и G_2 могу узимати вредности од 0 до ∞ , где ψ_k одређујемо елиминацијом r_k^2 из следеће трансцендентне једначине

$$\tan 2\psi_k = \frac{\xi_k R_\beta \sin \Phi_\beta + \omega_{in}^2 R_\alpha \sin \Phi_\alpha}{\xi_k R_\beta \cos \Phi_\beta + \omega_{in}^2 R_\alpha \cos \Phi_\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.31)$$

Даље, r_k одређујемо из једначине

$$r_k^2 = -\frac{\xi_k R_\beta \sin \Phi_\beta + \omega_{in}^2 R_\alpha \sin \Phi_\alpha}{\sin 2\psi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.32)$$

За сваку сопствену вредност ξ_k добијамо одређену вредност угла ψ_k и параметра ξ_k . Ако ставимо негативну вредност угла $-\psi_k$ добијамо конјуговано комплексне вредности полова. Из претходних примера је познато да за сваку фиксирану вредност параметара G_i , $i = 1, 2$ у полуравни $\pi/2 < |\psi_k| < \pi$, имамо k карактеристичних једначина које поседују k конјуговано комплексних парова корена

$$p_{(k)1,2} = r_k e^{\pm i\psi_k} = -\delta_k \pm i\Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.33)$$

Инверзијом једначине (5.24), применом Mellin-Fourier-ове трансформације као у (4.15) и (4.17)-(4.19), можемо добити неспрегнути систем једначина осцилација наногреда у модалним координатама $\bar{X}_{(k)n}^*$, где свака једначина има исти облик као једначина осцилација једне наногреде на вискоеластичној подлози, [44]. Да би смо изразили решење у реалним координатама као функцију померања за спрегнути систем наногреда, можемо искористити једначине (5.23) и (5.22), а затим (5.19), (5.17) и (5.8).

5.4 Нумеричка анализа

Нумерички ће се испитати утицај различитих параметара на осцилације система десет вискоеластично спрегнутих нехомогених наногреда. Једначине кретања наногреда су добијене аналитички у претходном поглављу. Испитиваће се померања наногреда током времена при промени нелокалног параметра, фракционих параметара у конститутивним релацијама наногреде и вискоеластичног слоја, као и утицај параметара пригушења који су у вези са временом ретардације. У нумеричким примерима усвојили смо следеће вредности параметара: густина $\rho = 2300 \text{ [kg/m}^3\text{]}$, релаксирани модуо еластичности $E_0 = 1000 \text{ [GPa]}$, унутрашња карактеристична дужина $a = 1.5 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, дужина наногреде $L = 10a \text{ [m]}$ и модуо еластичности вискоеластичног слоја $K = 0.357 \text{ [GPa]}$. У свим примерима, осим ако није другачије назначено на слици, усвојене су следеће вредности фракционих параметара $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, параметара пригушења $X_1 = 0.2$, $X_2 = 0.6$, и нелокалног параметра $e_0 = 1$. Нехомогеност система наногреда је одређена различитим вредностима пречника наногреда: $d_1 = 0.995 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_2 = 0.998 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_3 = 1.0 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_4 = 1.002 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_5 = 1.005 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_6 = 1.007 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_7 = 1.009 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_8 = 1.011 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_9 = 1.013 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, $d_{10} = 1.015 \times 10^{-9} \text{ [m]}$, док је површина попречног пресека одређена једначином $A_i = (d_i/2)^2 \times \pi \text{ [m}^2\text{]}$, а аксијални момент инерције је $I_i = \pi d_i^4/64 \text{ [m}^4\text{]}$, где је $i = 1, 2, \dots, 10$.

На сликама 5.2 – 5.6 приказан је утицај различитих параметара система на осцилације средишњих тачака свих десет вискоеластично спрегнутих наногреда у времену. Почетни услов је задат на првој наногреди у систему. Са слика се може запазити да у почетним тренуцима времена имамо нагли пораст амплитуде осциловања која опада са временом и после извесног времена су осцилације потпуно пригушене по закону ретардације који је описан фракционим Kelvin-Voigt-овим моделом. Нагли пораст амлитуде је највише изражен код прве наногреде у систему, код које је и задат почетни услов. Код осталих наногреда тај пораст касни са временом и

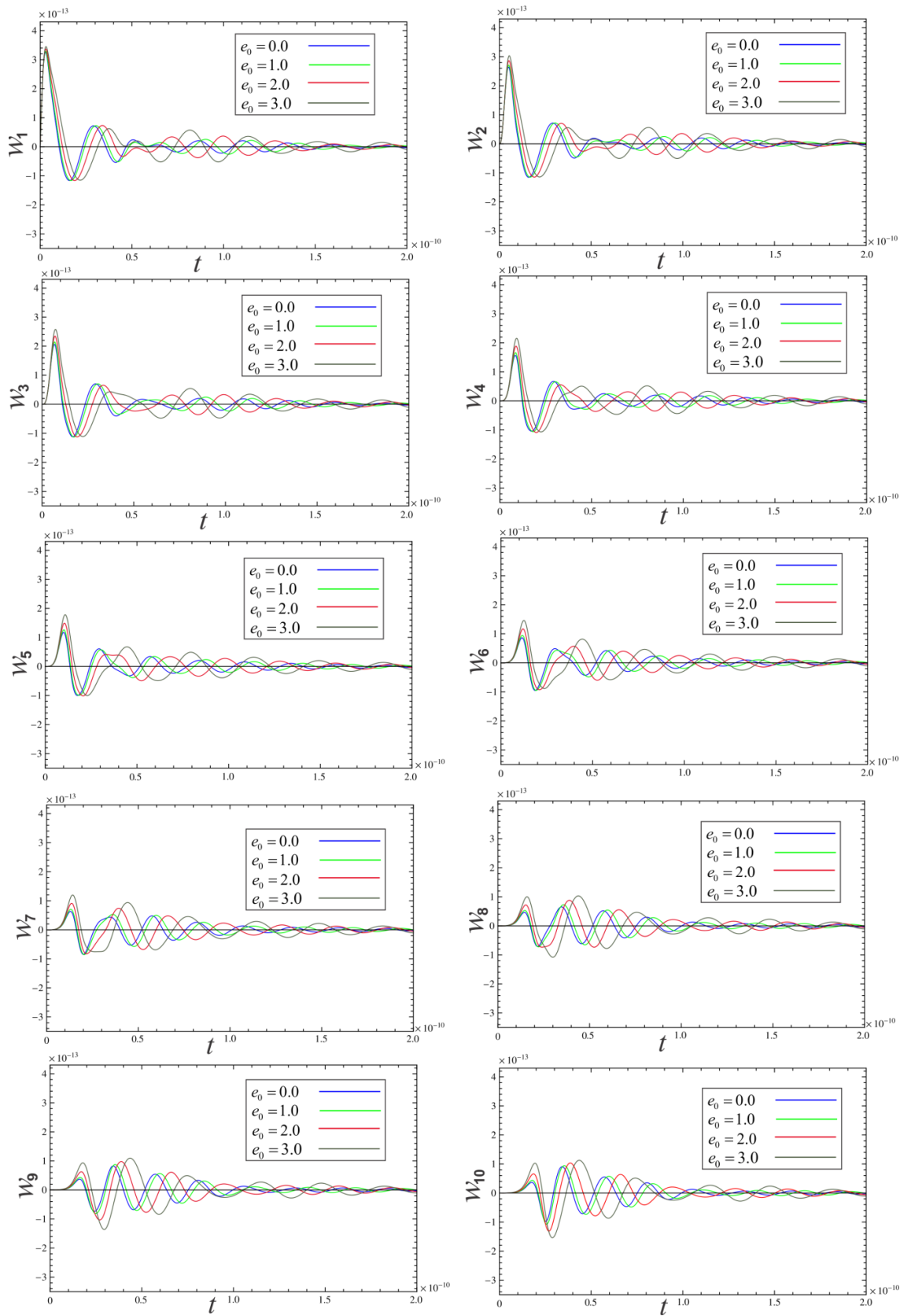
амплитуде су знатно мање него код прве наногреде. Овакво понашање система је очекивано као последица пригушења у систему. Амплитуда код последње две наногреде је нешто већа него код оних које се налазе у средини система. Овакво понашање система се може приметити код свих приказаних нумеричких примера.

На слици 5.2 је приказан утицај нелокалног параметра на осцилације система наногреда. Повећање вредности нелокалног параметра утиче на благо повећање амплитуде осциловања код свих наногреда у систему. Овакво понашање је типично за нелокалне континуум структурне моделе јер нелокалност утиче на смањење крутости система и самим тим долази до смањења фреквенције и повећања амплитуде осциловања посматраних структура.

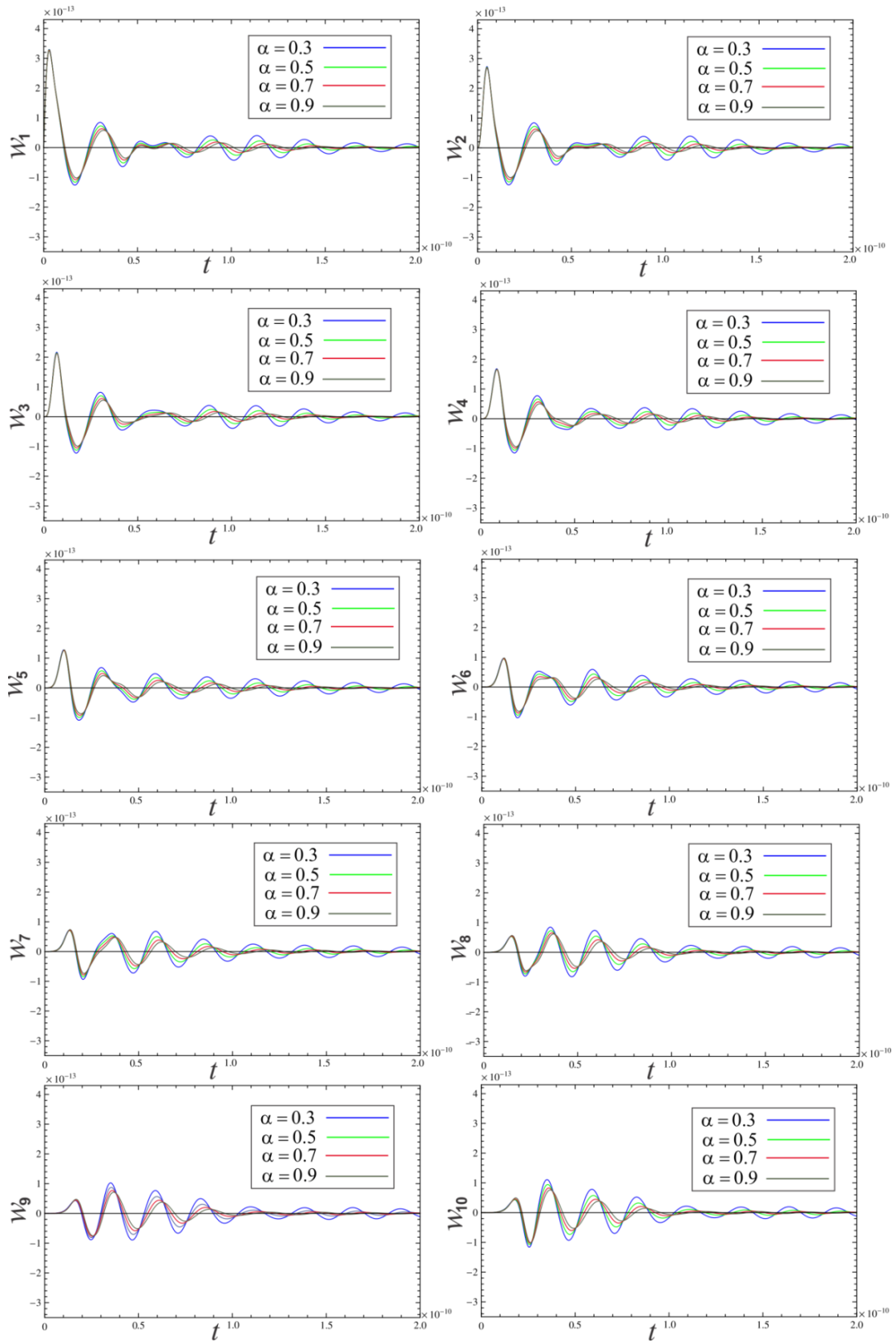
Слика 5.3 приказује утицај фракционог параметра α , који се јавља у конститутивној једначини наногреде, на осцилације система вискоеластично спрегнутих наногреда. Јасно се може запазити да повећање вредности фракционог параметра утиче на смањење амплитуде у току времена, тј. на веће пригушење у систему.

Слика 5.4 приказује утицај фракционог параметра β , који се јавља у конститутивној једначини вискоеластичног слоја, на осцилације система вискоеластично спрегнутих наногреда. Јасно се може запазити да повећање вредности овог фракционог параметра такође утиче на смањење амплитуде у току времена, тј. на пораст пригушења у систему. Ипак, тај ефекат је другачијег интензитета у случају промене фракционог параметра β у односу на промену параметра α .

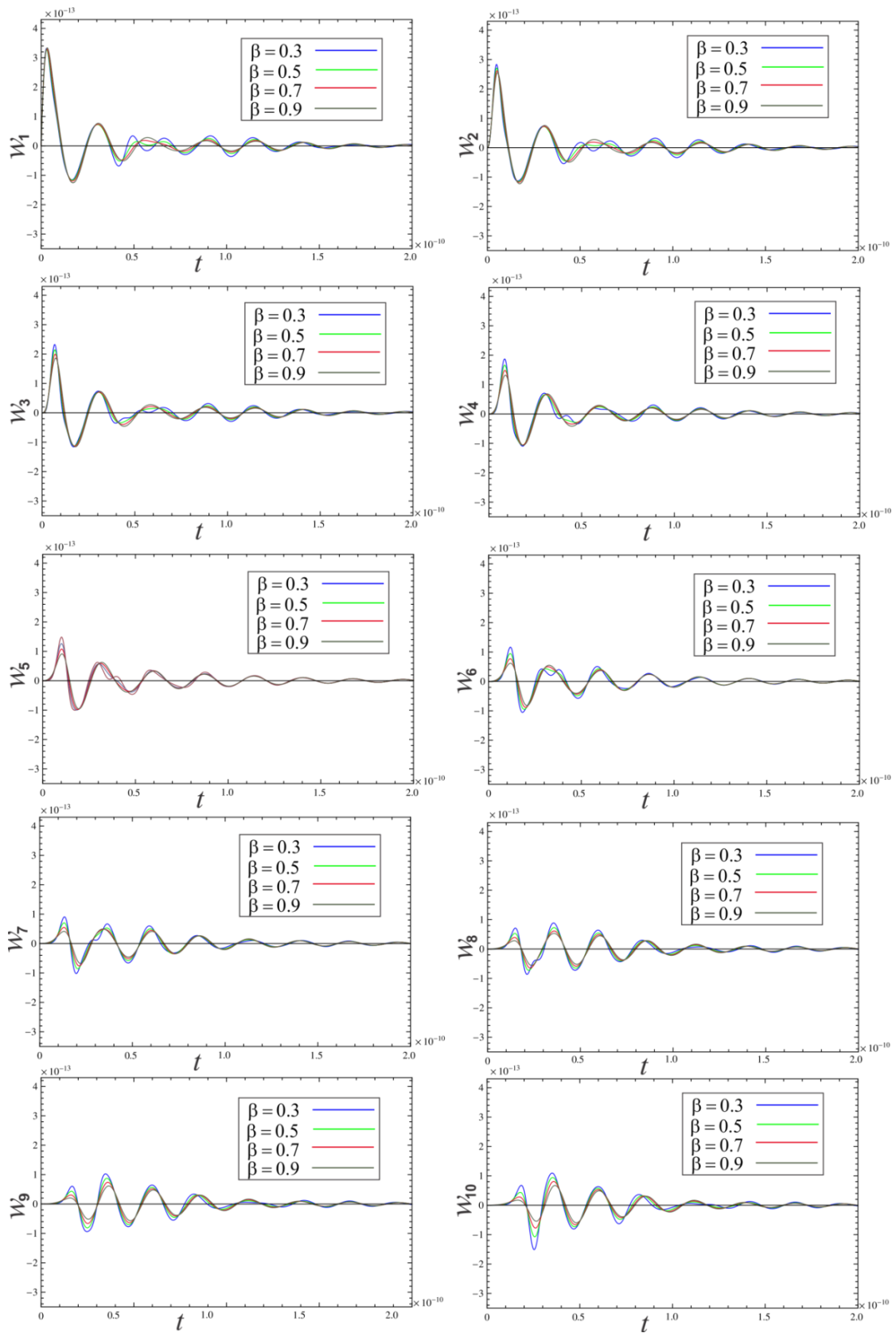
Коначно, на сликама 5.5 и 5.6 приказује се утицај параметара пригушења X_1 и X_2 , који се односе на наногреду, односно вискоеластични слој, на осцилације система вискоеластично спрегнутих наногреда. Јасно се може запазити да повећање вредности параметара пригушења утиче на смањење амплитуде у току времена тј. на пораст пригушења у систему. Ефекат пригушења је израженији код промене параметра X_1 него код промене X_2 .



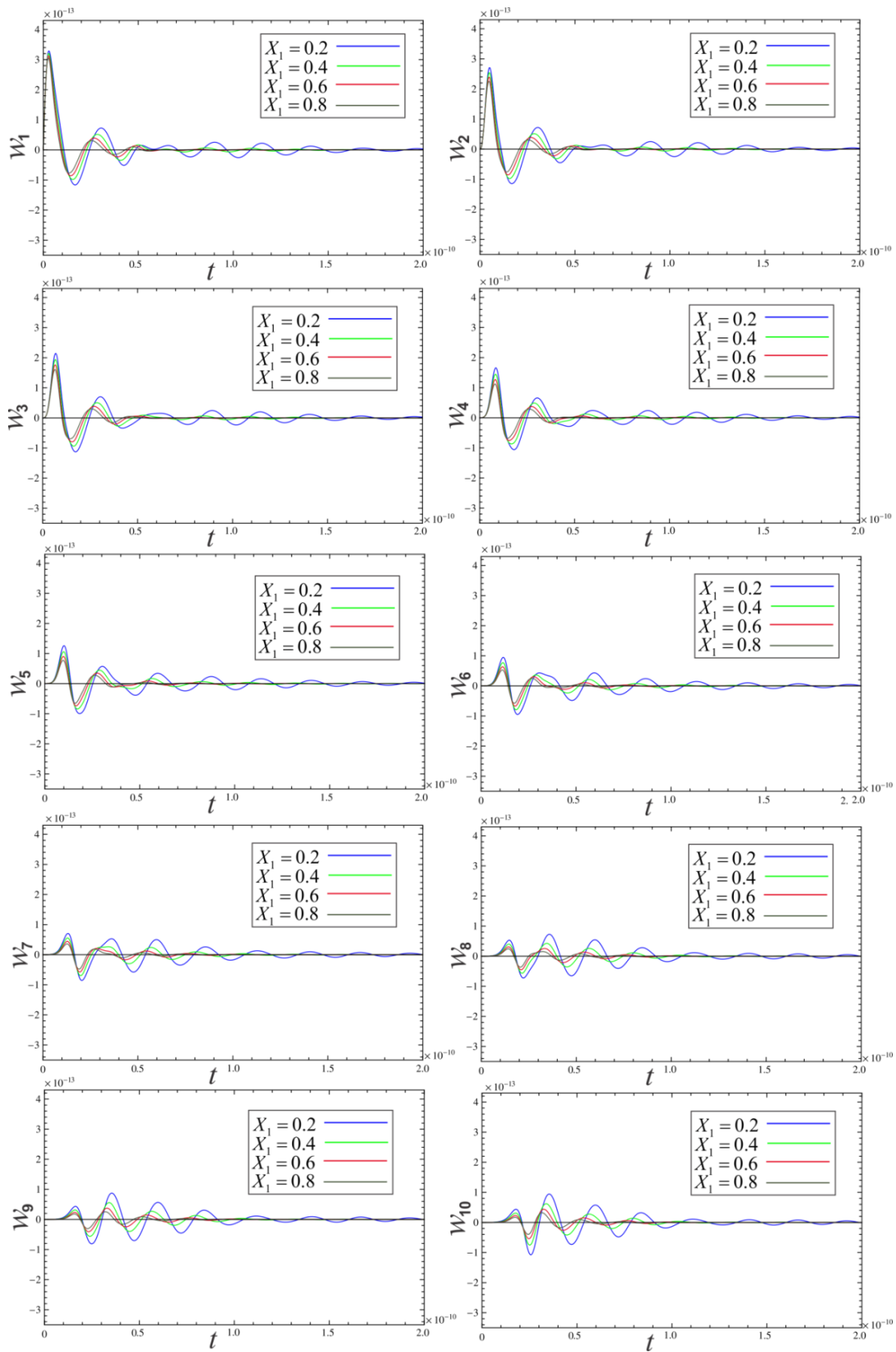
Слика 5.2. Утицај промене нелокалног параметра на померање система спрегнутих нехомогених наногреда.



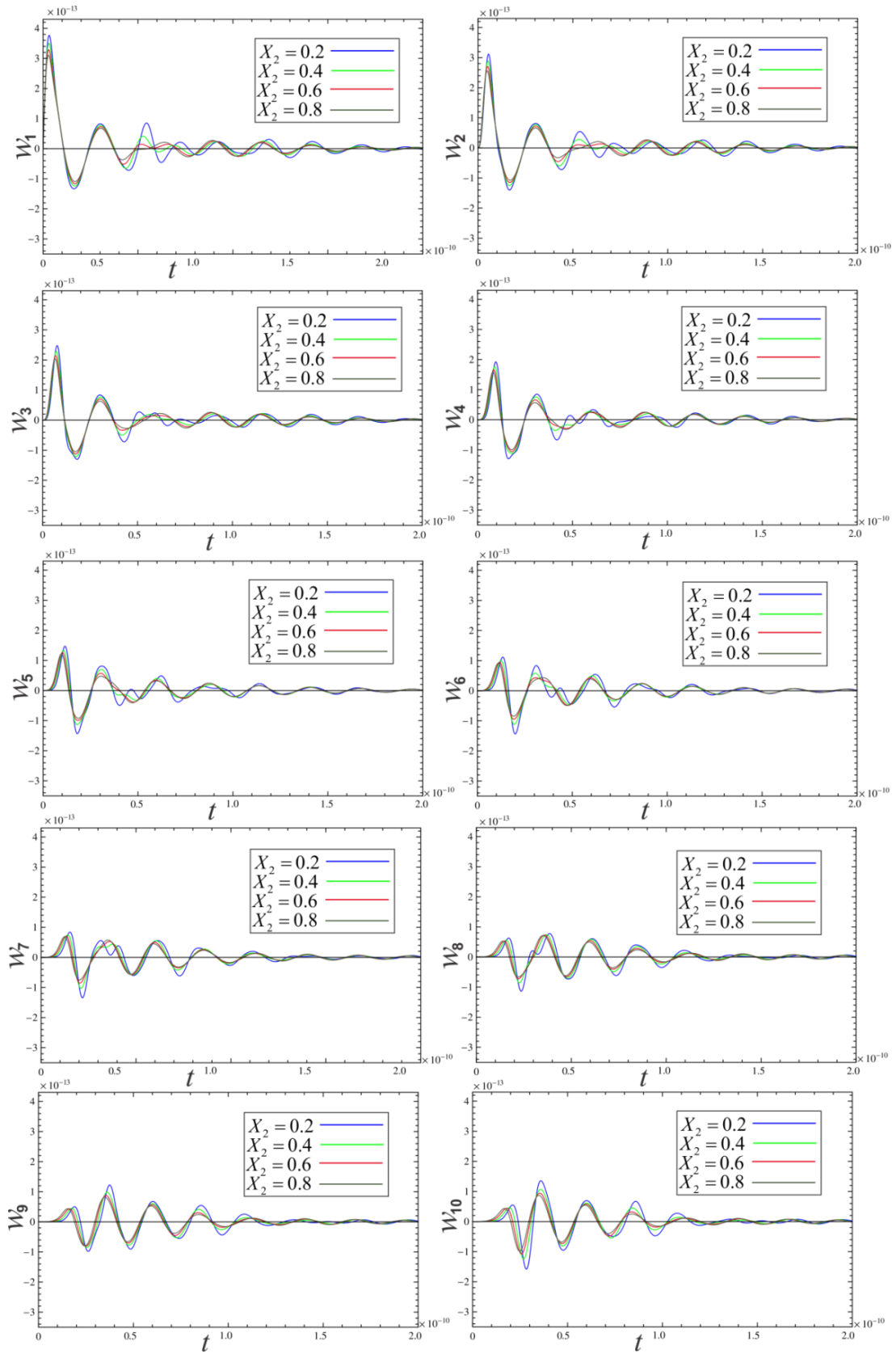
Слика 5.3. Утицај промене фракционог параметра α на померање система спрегнутих нехомогених наногреда.



Слика 5.4. Утицај промене фракционог параметра β на померање система спрегнутих нехомогених наногреда.



Слика 5.5. Утицај промене коефицијента пригушења X_1 на померање система спрегнутих нехомогених наногреда.



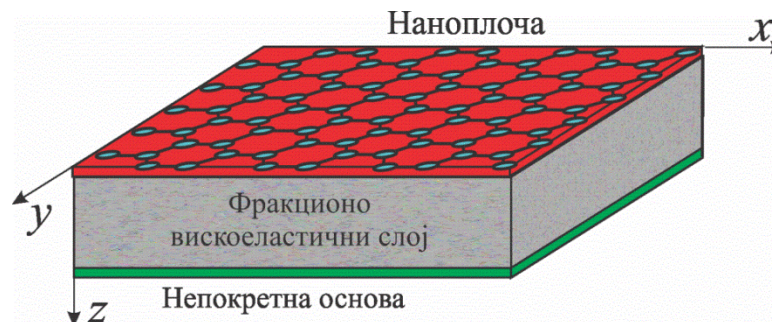
Слика 5.6. Утицај промене коефицијента пригушења X_2 на померање система спрегнутих нехомогених наногреда.

Глава 6

Осцилације наноплоче на вискоеластичној подлози

6.1 Уводна разматрања

Анализираћемо слободне трансверзалне осцилације ортотропне наноплоче на вискоеластичној подлози применом нелокалне теорије еластичности и фракционе вискоеластичности као и Kirchhoff-ове теорије плоча, слика 6.1. Модел ортотропне наноплоче може представљати графенски листић, или неки други тип наноструктура облика плоче, чије се механичке особине разликују у два управна правца. Вискоеластична подлога може представљати полимерни материјал од којег се најчешће формирају различити нанокompозити.



Слика 6.1. Наноплоча на фракционој вискоеластичној подлози.

Користећи Kirchhoff-ову теорију плоча дефинисаћемо компоненте померања произвољне тачке у средњој равни плоче дуж x , y и z осе

$$\tilde{u} = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tilde{v} = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tilde{w} = w, \quad (6.1)$$

где су u и v компонентне померања у средњој равни плоче, $z \frac{\partial w}{\partial x}$ и $z \frac{\partial w}{\partial y}$ су компоненте померања услед ротације попречног пресека и w је трансверзално померање тачака средње равни плоче. Линеарне деформације у произвољној тачки на одстојању z од средње равни плоче можемо одредити на основу померања (6.1) у следећој форми

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (6.2)$$

где су ε_{xx} и ε_{yy} нормалне деформације, а γ_{xy} је смичућа деформација. Eringen-ова нелокална теорија се примењује да бисмо узели у обзир ефекте величине, тј. ефекте мале скале на осцилације ортотропне наноплоче на вискоеластичној подлози. Ефекат дисипације механичке енергије се моделира фракционом вискоеластичном релацијом која описује интеракцију наноплоче и вискоеластичне подлоге.

Нелокална фракционо вискоеластична конститутивна релација у форми проширеног фракционог Kelvin-Voigt-овог модела [44] за дводимензионални ортотропни случај је дата у форми

$$(1 - \mu \nabla^2) \begin{pmatrix} t_{xx} \\ t_{yy} \\ \tilde{t}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{01}(1 + \tau_p^{\alpha RL} D^\alpha + \tau_p^{\beta RL} D^\beta)}{1 - \vartheta_{12} \vartheta_{21}} & \frac{\vartheta_{12} E_{01}(1 + \tau_p^{\alpha RL} D^\alpha + \tau_p^{\beta RL} D^\beta)}{1 - \vartheta_{12} \vartheta_{21}} & 0 \\ \frac{\vartheta_{12} E_{02}(1 + \tau_p^{\alpha RL} D^\alpha + \tau_p^{\beta RL} D^\beta)}{1 - \vartheta_{12} \vartheta_{21}} & \frac{E_{02}(1 + \tau_p^{\alpha RL} D^\alpha + \tau_p^{\beta RL} D^\beta)}{1 - \vartheta_{12} \vartheta_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}(1 + \tau_p^{\alpha RL} D^\alpha + \tau_p^{\beta RL} D^\beta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где су t_{xx} и t_{yy} нелокални нормални напони, \tilde{t}_{xy} је нелокални тангенцијални напон, E_{01} , E_{02} су релаксирани модули еластичности, G_{12} је модуло клизања, τ_p је време ретардације, α , β су фракциони параметри, ${}^{RL}D^\alpha$, ${}^{RL}D^\beta$ су оператори Riemann-Liouville-ових фракционих извода и ϑ_{12} , ϑ_{21} су Poisson-ови коефицијенти, док су ε_{xx} , ε_{yy} , γ_{xy} деформације дате у (6.2), из линеарне Kirchhoff-ове теорије плоча.

6.2 Једначина кретања наноплоче и њено решење

Применом d’Alambert-овог принципа за елементарни део наноплоче, можемо извести једначине динамичке равнотеже

$$q + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6.8)$$

где је q спољашње континуално оптерећење које делује управно на наноплочу, N_{xx} , N_{yy} и N_{xy} су силе које делују у равни плоче, Q_x и Q_y су трансверзалне смичуће силе и M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} су моменти савијања и увијања, дефинисани као

$$\begin{aligned} & (N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}, M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y) = \\ & = \int_{-h/2}^{h/2} (t_{xx}, t_{yy}, \tilde{t}_{xy}, zt_{xx}, zt_{yy}, z\tilde{t}_{xy}, \tilde{t}_{xz}, \tilde{t}_{yz}) dz. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Посматраћемо случај када у једначини (6.4) спољашње континуално оптерећење q одговара реакцији вискоеластичне подлоге, чија је релација сила-померање дата фракционим моделом са оператором [44]

$$q = \lambda_\infty [1 - \vartheta (1 + \tau_\lambda^{\gamma_1 RL} D^{\gamma_1})^{-\gamma_2}] w, \quad (6.10)$$

$$\vartheta = \frac{\lambda_\infty - \lambda_0}{\lambda_\infty}, \quad (6.11)$$

где су λ_∞ и λ_0 тренутни, односно релаксирани модул еластичности вискоеластичне подлоге, γ_1, γ_2 су фракциони параметри и τ_λ је време релаксације.

Ако занемаримо померања u и v у равни наноплоче и узмемо у обзир конститутивну релацију (6.3) и једначине (6.4)-(6.6), добијамо једначину слободних трансверзалних осцилација наноплоче на вискоеластичној подлози

$$\begin{aligned} & \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q + D_{011} \left(1 + \tau_p^{\alpha RL} D^\alpha + \tau_p^{\beta RL} D^\beta \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & + D_{022} \left(1 + \tau_p^{\alpha RL} D^\alpha + \tau_p^{\beta RL} D^\beta \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(D_{012} + 2D_{066})\left(1 + \tau_p^{\alpha RL}D^\alpha + \tau_p^{\beta RL}D^\beta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\
& = \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + qw\right], \tag{6.12}
\end{aligned}$$

где су

$$D_{011} = \frac{E_{01}h^3}{12(1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21})}, \quad D_{012} = \frac{\vartheta_{12}E_{02}h^3}{12(1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21})}, \tag{6.13}$$

$$D_{022} = \frac{E_{02}h^3}{12(1 - \vartheta_{12}\vartheta_{21})}, \quad D_{066} = \frac{G_{012}h^3}{12}. \tag{6.14}$$

Добијене фракционе парцијалне диференцијалне једначине кретања просто ослоњене ортотропне наноплоче ће бити решене аналитички и то применом методе раздвајања променљивих, Laplace-ове трансформације, Mellin-Fourier-ове инверзне трансформације и Cauchy-јевог рачуна остатака, као у случају наногреда. Решење је дато у функцији два члана где је први такозвани дрифт или равнотежни део решења, док је други члан осцилаторни део решења које описује пригушене осцилације око равнотежног дела.

За просто ослоњену наноплочу претпостављени су гранични услови у облику

$$w(0,0,t) = w(a,b,t) = 0, \quad M(0,0,t) = M(a,b,t) = 0, \tag{6.15}$$

и почетни услови у облику

$$w(x,y,0) = 0, \quad \dot{w}(a/2,b/2,0) = \dot{w}_0. \tag{6.16}$$

Применом Laplace-ове трансформације на једначину (6.12), узимањем у обзир почетних услова (6.16) и сређивањем одговарајућих чланова у једначини добијамо

$$\begin{aligned}
& p^2 \left[1 - \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] \bar{w} + \frac{\lambda_\infty}{\rho h} [1 - \vartheta(1 + (p\tau_\lambda)^{\gamma_1})^{-\gamma_2}] \left[1 - \mu\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right] \bar{w} \\
& + \left(\bar{w} - \mu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\rho h} [1 + (p\tau_p)^\alpha + (p\tau_p)^\beta] \cdot \\
& \left[D_{011} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + 2(D_{012} + D_{066}) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{022} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} \right] \\
& = \dot{w}_0 \left(\delta(x - a/2, y - b/2) + \mu \frac{\delta(x - a/2, y - b/2)}{\partial x^2} \right). \tag{6.17}
\end{aligned}$$

Претпоставићемо решење једначине (6.17) које задовољава граничне услове (6.15) у облику

$$\bar{w}(x, y, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{T}_{nm}(p) \sin(k_n x) \sin(k_m y), \quad (6.18)$$

где су $k_n = n\pi/a$, $k_m = m\pi/b$ док су $\bar{T}_{nm}(p)$ непознате функције.

Заменом претпостављеног решења (6.18) у (6.17), узимањем у обзир услова ортогоналности сопствених амплитудних функција и развојем почетних услова у синусни Fourier-ов ред, добијамо

$$\begin{aligned} p^2 \bar{T}_{nm} + \frac{\lambda_{\infty}}{\rho h} [1 - \vartheta(1 + (p \tau_{\lambda})^{\gamma_1})^{-\gamma_2}] \bar{T}_{nm} + \frac{\bar{A}_{nm}}{\eta_{nm}} [1 + (p \tau_p)^{\alpha} + (p \tau_p)^{\beta}] \bar{T}_{nm} \\ = \frac{4\dot{w}_0}{ab} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

где су вредности η и \bar{A} дате

$$\begin{aligned} \eta_{nm} &= 1 + \mu(k_n^2 + k_m^2), \\ \bar{A}_{nm} &= \frac{1}{\rho h} [D_{011} k_n^4 + 2k_n^2 k_m^2 (D_{012} + D_{066}) + D_{022} k_m^4]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

На крају добијамо решење за непознате функције \bar{T}_{nm} у Laplace-овом домену као

$$\bar{T}_{nm}(p) = \frac{R}{f_{nm}(p)} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right), \quad (6.21)$$

где су

$$\begin{aligned} R &= \frac{4\dot{w}_0}{ab}, \\ f_{nm}(p) &= p^2 + \frac{\lambda_{\infty}}{\rho h} [1 - \vartheta(1 + (p \tau_{\lambda})^{\gamma_1})^{-\gamma_2}] + \frac{\bar{A}_{nm}}{\eta_{nm}} [1 + (p \tau_p)^{\alpha} + (p \tau_p)^{\beta}]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Решење једначине (6.21) се може записати у временском домену применом Mellin-Fourier-ове формуле у облику

$$T_{nm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{T}_{nm}(p) e^{pt} dp. \quad (6.23)$$

За израчунавање интеграла (6.23) морамо најпре одредити сингуларне тачке комплексне функције (6.21). Функција $\bar{T}_{nm}(p)$ има две тачке гранања $p = 0$ и $p = \infty$ и просте полове који су корени карактеристичне једначине

$$f_{nm}(p) = 0. \quad (6.24)$$

Применом рачуна остатака, једначину (6.23) можемо писати у следећој форми

$$T_{nm}(t) = T_{nm}^{\text{drift}}(t) + T_{nm}^{\text{vibr}}(t), \quad (6.25)$$

$$T_{nm}^{\text{drift}}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty [\bar{T}_{nm}(se^{-i\pi}) - \bar{T}_{nm}(se^{i\pi})] e^{-st} dp, \quad (6.26)$$

$$T_{nm}^{\text{vibr}}(t) = \sum_j \text{res}[\bar{T}_{nm}(p)e^{pj t}], \quad (6.27)$$

где $T_{nm}^{\text{drift}}(t)$ означава равнотежни део решења, а $T_{nm}^{\text{vibr}}(t)$ је осцилаторни део. У једначини (6.21) сумирамо по свим изолованим сингуларитетима, тј. половима $p = p_j$. Применом исте процедуре која је описана у претходним поглављима и у [44], за одређивање корена карактеристичне једначине уводимо најпре смену $p = re^{i\psi}$ у (6.24), што даје

$$\begin{aligned} & r^2 e^{i2\psi} + \omega_\infty^2 [1 - \vartheta(1 + (r\tau_\lambda)^{\gamma_1} e^{i\gamma_1\psi})^{-\gamma_2}] \\ & + \omega_{0(nm)}^2 [1 + (r\tau_p)^\alpha e^{i\alpha\psi} + (r\tau_p)^\beta e^{i\beta\psi}] = 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где су

$$\omega_\infty^2 = \frac{\lambda_\infty}{\rho h}, \quad \omega_{0(nm)}^2 = \frac{\bar{A}_{nm}}{\eta_{nm}}. \quad (6.29)$$

Раздвајањем имагинарног и реалног дела, претходну једначину можемо написати у облику

$$r^2 \cos 2\psi - \omega_\infty^2 R_{\gamma_1}^{-\gamma_2} \vartheta \cos \gamma_2 \Phi_{\gamma_1} + \omega_{0(nm)}^2 R_{\alpha\beta} \cos \Phi_{\alpha\beta} + \omega_\infty^2 + \omega_{0(nm)}^2 = 0, \quad (6.30)$$

$$r^2 \sin 2\psi + \omega_\infty^2 R_{\gamma_1}^{-\gamma_2} \sin \gamma_2 \Phi_{\gamma_1} + \omega_{0(nm)}^2 R_{\alpha\beta} \sin \Phi_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.31)$$

где су параметри

$$R_{\gamma_1} = \sqrt{1 + 2(r\tau_\lambda)^{\gamma_1} \cos(\gamma_1\psi) + (r\tau_\lambda)^{2\gamma_1}}, \quad (6.32)$$

$$\tan \Phi_{\gamma_1} = \frac{(r\tau_\lambda)^{\gamma_1} \sin \gamma_1\psi}{1 + (r\tau_\lambda)^{\gamma_1} \cos \gamma_1\psi}, \quad (6.33)$$

$$R_{\alpha\beta} = \sqrt{(r\tau_p)^{2\alpha} + 2(r\tau_p)^\alpha (r\tau_p)^\beta \cos(\psi(\alpha - \beta)) + (r\tau_p)^{2\beta}}, \quad (6.34)$$

$$\tan \Phi_{\alpha\beta} = \frac{(r\tau_p)^\alpha \sin(\alpha\psi) + (r\tau_p)^\beta \sin(\beta\psi)}{(r\tau_p)^\alpha \cos(\alpha\psi) + (r\tau_p)^\beta \cos(\beta\psi)}, \quad (6.35)$$

добијени увођењем поларних координата $R_\alpha e^{i\Phi_\alpha}$ и $R_\beta e^{i\Phi_\beta}$ за чланове једначине који су у заградама. Систем једначина (6.30) и (6.31) нема корене за вредности угла $0 < |\psi| < \pi/2$. Увођењем нових смена $X_1 = r\tau_p$ и $X_2 = r\tau_\lambda$, можемо наћи вредности угла ψ и параметра r . Најпре елиминисањем параметра r^2 одређујемо вредност ψ из трансцендентне једначине

$$\tan 2\psi = \frac{\omega_\infty^2 R_{\gamma_1}^{-\gamma_2} \vartheta \sin \gamma_2 \Phi_{\gamma_1} + \omega_{0(nm)}^2 R_{\alpha\beta} \sin \Phi_{\alpha\beta}}{\omega_{0(nm)}^2 R_{\alpha\beta} \cos \Phi_{\alpha\beta} - \omega_\infty^2 R_{\gamma_1}^{-\gamma_2} \vartheta \cos \gamma_2 \Phi_{\gamma_1} + \omega_\infty^2 + \omega_{0(nm)}^2}, \quad (6.36)$$

и затим вредност r из следеће једначине

$$r^2 = -\frac{\omega_\infty^2 R_{\gamma_1}^{-\gamma_2} \vartheta \sin \gamma_2 \Phi_{\gamma_1} + \omega_{0(nm)}^2 R_{\alpha\beta} \sin \Phi_{\alpha\beta}}{\sin 2\psi}, \quad (6.37)$$

где су сада

$$R_{\gamma_1} = \sqrt{1 + 2X_2^{\gamma_1} \cos \gamma_1 \psi + X_2^{2\gamma_1} X_1^{2\gamma_1}}, \quad (6.38)$$

$$\tan \Phi_\alpha = \frac{X_2^{\gamma_1} \sin \gamma_1 \psi}{1 + X_2^{\gamma_1} \cos \gamma_1 \psi}, \quad (6.39)$$

$$R_{\alpha\beta} = \sqrt{X^{2\alpha} + 2X_1^\alpha X_1^\beta \cos(\psi(\alpha - \beta)) + X_1^{2\beta}}, \quad (6.40)$$

$$\tan \Phi_{\alpha\beta} = \frac{X_1^\alpha \sin \alpha\psi + X_1^\beta \sin \beta\psi}{X_1^\alpha \cos \alpha\psi + X_1^\beta \cos \beta\psi}. \quad (6.41)$$

Нађене вредности времена ретардације, угла ψ и параметра r одређују вредност корена карактеристичне једначине

$$p_{1,2} = r e^{\pm i\psi} = -\delta \pm i\Omega. \quad (6.42)$$

У горњој једначини δ је реални део комплексног корена и представља коефицијент гушења, док имагинарни део Ω представља кружну фреквенцију. Такође, као у (4.31), можемо за асимптотске вредности времена ретардације $\tau_p, \tau_\lambda \rightarrow 0$ и $\tau_p, \tau_\lambda \rightarrow \infty$ одредити вредности конјуговано комплексних корена карактеристичне једначине у облику

$$p_{(0)1,2} = \pm i [\omega_\infty^2 (1 - \nu) + \omega_{0(nm)}^2]^{1/2}, \quad (6.43)$$

$$p_{(\infty)1,2} = \pm i \infty. \quad (6.44)$$

Вредност комплексног корена $p_{(0)1,2}$ за $\tau_p, \tau_\lambda \rightarrow 0$ одговара фреквенцији еластичног система тј. случају када нема ретардационих процеса у систему. У случају када $\tau_p, \tau_\lambda \rightarrow \infty$, асимптотска вредност фреквенције система тежи

бесконечности, упркос томе што то није карактеристика фракционих модела са операторима [44]. У овом случају, доминантну улогу преузима проширени фракциони Kelvin-Voigt модел који спада у дифузиони тип модела са особином да фреквенција расте са порастом пригушења у систему.

За одређивање равнотежног дела решења које описује процес ретардације у систему можемо написати

$$T_{nm}^{\text{drift}}(t) = \frac{R_2}{\pi} \int_0^\infty D_{nm}^{-1} \sin(d_{nm}) e^{-st} dp, \quad (6.45)$$

где су

$$R_2 = \frac{4\dot{w}_0}{ab} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2}, \quad (6.46)$$

$$D_{nm} = \sqrt{\Re^2\{\cdot\} + \Im^2\{\cdot\}}, \quad d_{nm} = \frac{\Im\{\cdot\}}{\Re\{\cdot\}}, \quad (6.47)$$

$$\Re\{\cdot\} = \text{Re}\{f_{nm}(se^{\pm i\pi})\}, \quad \Im\{\cdot\} = \text{Im}\{f_{nm}(se^{\pm i\pi})\}. \quad (6.48)$$

У наставку, на основу претходно одређеног пара конјуговано комплексних полова $p_{1,2} = -\delta \pm i\Omega$, одређујемо осцилаторни део решења у облику

$$T_{nm}^{\text{vibr}}(t) = \text{res}[\bar{T}_{nm}(p_1)e^{p_1 t}] + \text{res}[\bar{T}_{nm}(p_2)e^{p_2 t}] = Ae^{-\delta t} \sin(\Omega t + \varphi), \quad (6.49)$$

где су

$$A = 2R_2 \left\{ \left[\Re \frac{\partial f_{nm}(re^{i\psi})}{\partial p} \right]^2 + \left[\Im \frac{\partial f_{nm}(re^{i\psi})}{\partial p} \right]^2 \right\}^{-1/2}, \quad (6.50)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\Im \frac{\partial f_{nm}(re^{i\psi})}{\partial p}}{\Re \frac{\partial f_{nm}(re^{i\psi})}{\partial p}}, \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{nm}(p)}{\partial p} = & 2p + \omega_\infty^2 \vartheta \gamma_1 \gamma_2 \tau_\lambda (p\tau_\lambda)^{\gamma_1-1} (1 + (p\tau_\lambda)^{\gamma_1})^{-1-\gamma_2} + \\ & + \omega_{0(nm)}^2 \left(\alpha \tau_p (p\tau_p)^{\alpha-1} + \beta \tau_p (p\tau_p)^{\beta-1} \right). \end{aligned} \quad (6.52)$$

У горњој једначини \Re и \Im означавају реални, односно имагинарни део првог извода карактеристичне једначине, који је добијен на основу Heaviside-овог развоја.

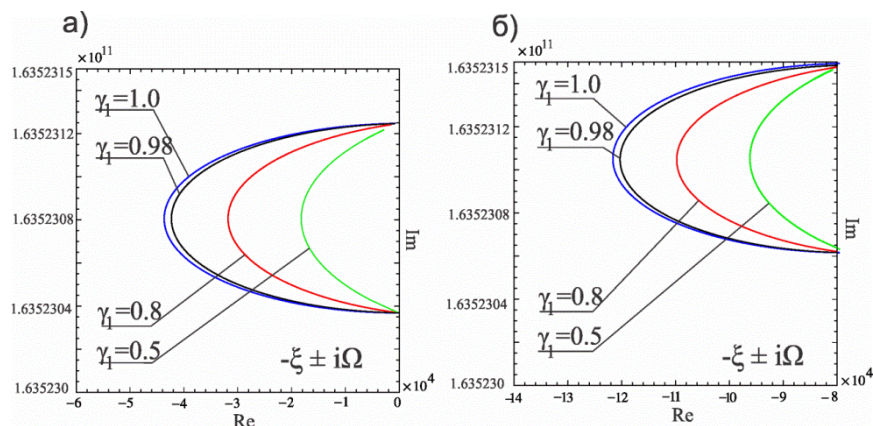
6.3 Нумеричка анализа

У сврху спровођења нумеричких експеримената, усвојене су следеће вредности параметара из рада [100]: релаксирани модуо еластичности (узимамо да је еквивалентан Young-овом модулу еластичности за графен) $E_{01} = 2.434$ [ТПа], $E_{02} = 2.473$ [ТПа], модуо клизања $G_{12} = 1.039$ [Па], густина $\rho = 6316$ [kg/m³], Poisson-ови коефицијенти $\nu_{12} = \nu_{21} = 0.197$, дужина наноплоче $a = 9.519$ [nm], ширина наноплоче $b = 4.844$ [nm], висина $h = 0.129$ [nm], карактеристична дужина $\kappa = 1.5$ [nm], нелокални параметар $e_0 = 1$, и параметри вискоеластичног слоја $\lambda_\infty = 26$ [GPa] и $\nu = 9/10$. Све симулације су приказане у моду осциловања $n = m = 1$.

Слике 6.2 а) и б) приказују комплексне вредности корена карактеристичне једначине у функцији параметра $X_2 = r\tau_\lambda$ и за фиксиране вредности осталих параметара, где је имагинарни део кружна фреквенција а реални део коефицијент гушења. Може се уочити да су промене фреквенције и коефицијента гушења мале за промене X_2 . Смањење вредности фракционог параметра γ_1 смањује вредност коефицијента гушења али не и кружне фреквенције. Такође, примећује се и значајан утицај промене параметра $X_1 = r\tau_p$, чије повећање изазива значајно померање почетних вредности комплексних корена.

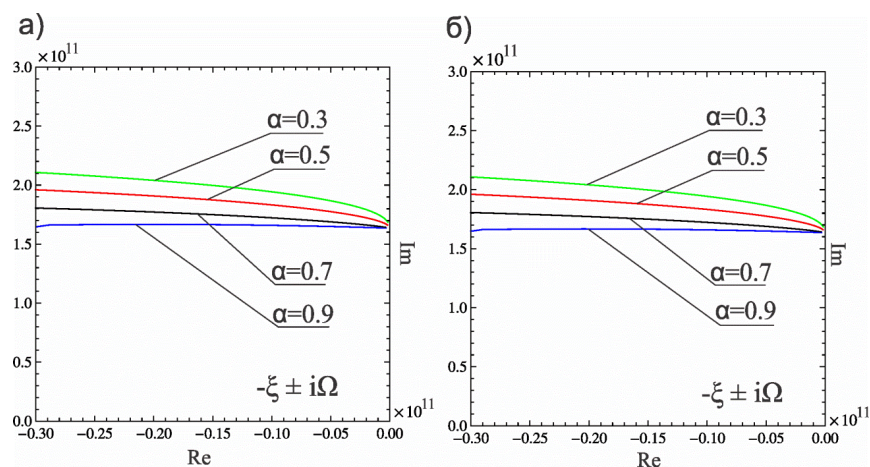
Слике 6.3 а) и б) приказују понашање комплексних вредности корена карактеристичне једначине у функцији параметра X_1 и за фиксиране вредности осталих параметара. Може се приметити значајно повећање кружне фреквенције система при повећању параметра X_1 . Овакво аномално понашање проширеног фракционог Kelvin-Voigt модела, где фреквенција расте са повећањем параметра пригушења, јесте карактеристика дифузионог типа фракционих вискоеластичних модела [44]. Међутим, овај ефекат је мање изражен код већих вредности фракционих параметара, тј. за оне вредности које су блиске целобројном изводу. Поређењем слика 6.3 а) и б), може се јасно уочити слаб утицај параметра пригушења X_2 који се односи на вискоеластични слој.

На слици 6.4 приказан је утицај нелокалног параметра на кружну фреквенцију и коефицијент гушења система ортотропне наноплоче на вискоеластичној подлози. Као што је очекивано, и у случају нелокалног модела наноплоче долази до смањења фреквенције система са повећањем нелокалног параметра као и код наногреда. Овакво понашање је условљено смањењем укупне крутости система које је присутно код нелокалних модела.

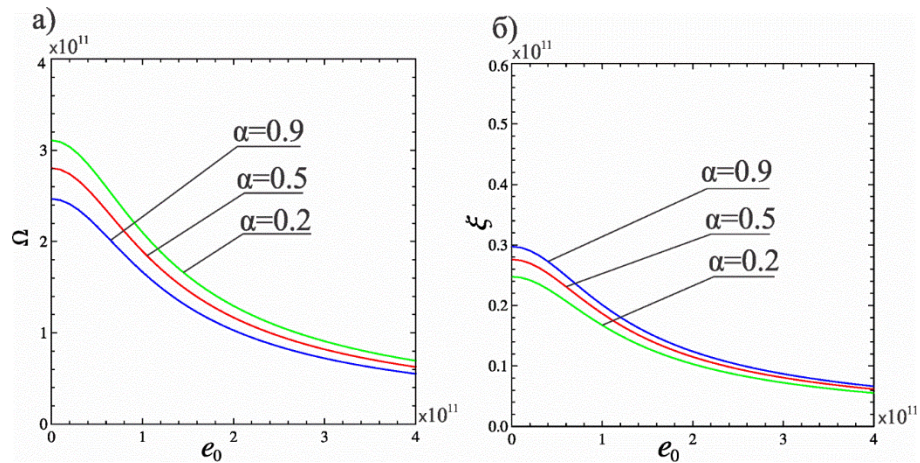


Слика 6.2. Комплексни корени у функцији параметра X_2 за $\alpha, \beta = 0.9$, $\gamma_2 = 0.98$ а) $X_1 = 1 \times 10^{-9}$, б) $X_1 = 1 \times 10^{-6}$.

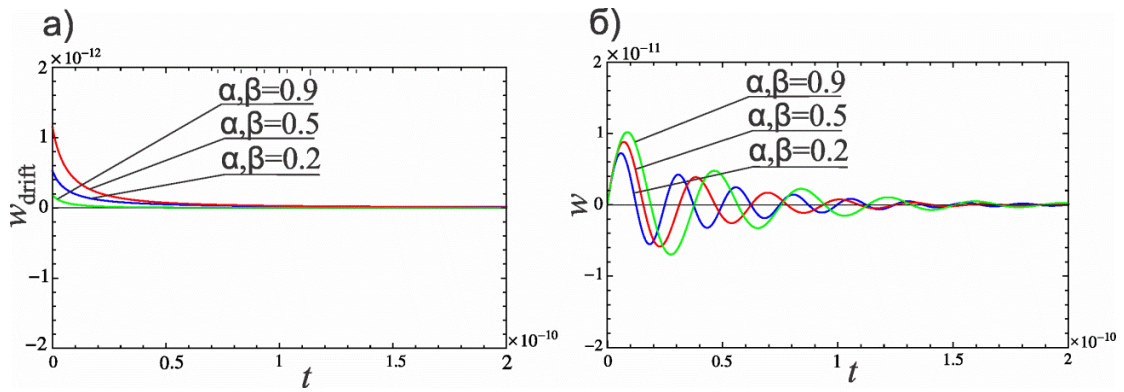
Коначно, на слици 6.5 је приказан утицај фракционих параметара наноплоче α и β на осцилације наноплоче у времену. Могу се приметити различита пригушења у систему за различите вредности фракционих параметара. Код овде приказаних симулација за померања наноплоче у времену занемарен је утицај равнотежног дела решења због мале вредности.



Слика 6.3. Комплексни корени у функцији параметра X_1 за $\gamma_1, \gamma_2 = 0.9$, $\beta = 0.9$ а) $X_2 = 0.001$, б) $X_2 = 10$.



Слика 6.4. Утицај нелокалног параметра e_0 за $X_1 = X_2 = 0.1$, $\gamma_1, \gamma_2 = 0.5$ и $\beta = 0.9$ на комплексну вредност корена
 а) кружна фреквенција, б) коефицијент гушења.



Слика 6.5. Наноплоча за $X_1 = X_2 = 0.1$, $\gamma_1, \gamma_2 = 0.9$ а) равнотежни део решења, б) осцилације током времена.

Глава 7

Нелинеарна анализа наногреде на фракционој виско-Pasternak-овој подлози. Комбинована резонанца

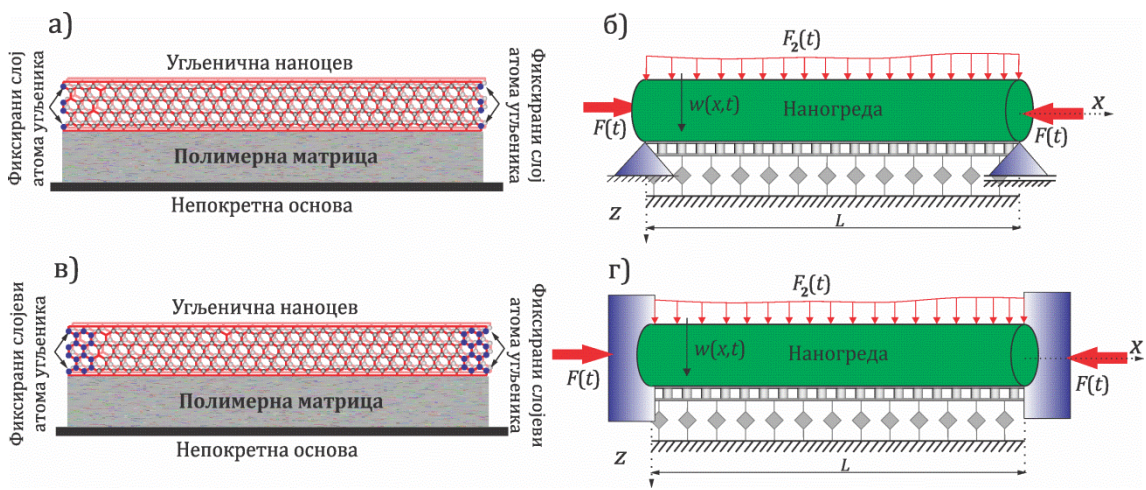
7.1 Уводна разматрања

Анализиран је утицај геометријске нелинеарности наногреде и фракционе подлоге виско-Pasternak-овог типа на динамику и стабилност система. Модел наногреде је заснован на Euler-Bernoulli-јевој теорији греде и Eringen-овој нелокалној теорији еластичности. Претпоставићемо да се наногреда налази на фракционој виско-Pasternak-овој подлози и да је под истовременим дејством временски променљивог аксијалног оптерећења, као и спољашњег трансверзалног оптерећења. Једначина кретања система је изведена применом d’Alambert-овог принципа за елементарни део наногреде. За добијање апроксимативног аналитичког решења амплитудно-фреквентне карактеристике система примењена је метода више временских скала. Анализиран је случај стационарног стања (steady-state response) за комбиновану параметарску и спољашњу резонанцу, тј. када су фреквенције променљивог аксијалног оптерећења и спољашњег трансверзалног оптерећења два пута веће и два пута мање од сопствене фреквенције система. Такође, на примеру неколико нумеричких симулација, анализиран је утицај различитих параметара модела на динамичко понашање наногреде. Део резултата приказаних у овој глави презентован је у [145].

7.2 Једначина кретања наногреде на фракционој виско-Pasternak-овој подлози

На слици 7.1 приказан је физички и механички модел наногреде која је повезана са непокретном основом слојем који је моделиран фракционом виско-Pasternak-овом конститутивном релацијом, [139]. Према [122],

физички модел угљеничне наноцеве са по једним слојем фиксираних атома на оба краја може се представити механичким моделом просто ослоњене наноцеде слика 7.1 а), б), док се наноцев са више фиксираних слојева атома на крајевима може представити моделом обострано уклештене наноцеде слика 7.1 в) и г). Нека је наноцеда дужине L , густине ρ и константне површине попречног пресека A хомогена и осцилује у трансверзалном правцу, управно на x осу. Слој полимера којим је наноцеда спрегнута са непокретном основом, моделирамо фракционом виско-Pasternak-овом подлогом.



Слика 7.1. Илустрација наноцеде на фракционој виско-Pasternak-овој подлози за просту наноцеде а) физички модел, б) механички модел, за обострано уклештену наноцеде в) физички модел, г) механички модел.

Усвајањем Euler-Bernoulli-јеве теорије греда, померање произвољне тачке наноцеде пишемо у следећем облику

$$\bar{u}_x(x, t) = u(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \quad \bar{w}_z(x, t) = w(x, t), \quad (7.1)$$

где су \bar{u}_x и \bar{w}_z померања наноцеде у аксијалном и трансверзалном правцу. Ако померања (7.1) заменимо у von Kármán-ову релацију деформација-померање добијамо

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (7.2)$$

где ε_{xx} представља деформацију у x правцу. Применом d’Alambert-овог принципа за елементарни део наногреде, добијамо једначине динамичке равнотеже у облику

$$\frac{\partial V}{\partial x} + f(x, t) - \xi(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial x} = V, \quad (7.5)$$

где је $V = \int_A \tilde{t}_{xz} dA$ трансверзална сила, $P = \int_A t_{xx} dA$ је аксијална сила, $M_s = \int_A z t_{xx} dA$ је момент савијања, а \tilde{t}_{xz} је нелокални тангенцијални напон док је t_{xx} нелокални нормални напон. Спољашње временски променљиво континуално оптерећење је означено са $f(x, t)$, док $\xi(x)$ представља реакцију фракционе виско-Pasternak-ове подлоге на кретање наногреде.

Временски променљиво спољашње оптерећење усвојићемо у облику $f(x, t) = F_2 \cos \Omega_2 t$, где је Ω_2 фреквенција спољашње принуде. Утицај фракционог виско-Pasternak-овог слоја, као у [139], представимо релацијом сила-померање у следећој форми

$$\xi(x) = \delta {}^{RL}D^\alpha w + G_p {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (7.6)$$

где су δ и G_p коефицијенти виско-Pasternak-овог слоја и ${}^{RL}D^\alpha$ је оператор Riemann-Liouville-овог извода фракционог реда.

Да бисмо извели једначину кретања наногреде на виско-Pasternak-овој подлози, најпре требамо одредити аксијалну силу P , која представља суму сила које делују на крају наногреде. Заменом једначине (7.2) у нелокалну конститутивну релацију еластичног тела (1.61) и узимањем у обзир једначина за аксијалну силу и момент, добијамо нелокалну форму једначине аксијалне силе у облику

$$P - \mu \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right), \quad (7.7)$$

као и нелокални момент

$$M_s - \mu \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (7.8)$$

Ако као у [129], у једначини (7.4) занемаримо инерциони члан $\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, тада је аксијална сила P једнака суми сила које делују на крајевима просто ослоњене греде и сила које потичу од геометријске нелинеарности. Занемаривањем аксијалног инерционог члана из (7.4) добијамо да је $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0$, те из једначине (7.7) добијамо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{EA} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (7.9)$$

Интеграљењем претходне једначине по дужини наногреде и узимањем у обзир граничних услова за померања у аксијалном правцу $u(0, t) = 0$ и $u(L, t) = \Delta L$, где је према [129] $\Delta L = FL/EA$, добијамо једначину за аксијалну силу

$$P = F + \frac{EA}{2L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (7.10)$$

Претпоставићемо да је аксијална сила облика $F = -(F_0 + F_1 \cos \Omega_1 t)$, где је F_0 амплитуда статичког оптерећења, док је F_1 амплитуда динамичког оптерећења фреквенције Ω_1 . Коначно, из једначина (7.3)-(7.6), (7.8) и (7.10) добијамо нелинеарну парцијалну диференцијалну једначину кретања наногреде фракционог реда у облику

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + {}^{RL}D^\alpha w \eta + {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) G_p + (F_0 + F_1 \cos \Omega_1 t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \mu \left[\rho A \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + {}^{RL}D^\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \eta + {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) G_p \right. \\ & \left. + (F_0 + F_1 \cos \Omega_1 t) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \int_0^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] = F_2 \cos \Omega_2 t. \quad (7.11) \end{aligned}$$

Једначину кретања (7.11) можемо записати и у бездимензионој форми на следећи начин

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \tau^2} + {}^{RL}D^\alpha \bar{w} \bar{\delta} + {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) \bar{G}_p + (\bar{F}_0 + \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 \tau) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \\ & - \bar{R} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \eta^2 \left[\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \tau^2 \partial \bar{x}^2} + {}^{RL}D^\alpha \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \bar{\delta} + {}^{RL}D^\alpha \left(\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} \right) \bar{G}_p \right. \\ & \left. + (\bar{F}_0 + \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 \tau) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} - \bar{R} \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \right] = \bar{F}_2 \cos \bar{\Omega}_2 \tau, \quad (7.12) \end{aligned}$$

где су бездимензиони параметри дати као

$$\bar{w} = \frac{w}{L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \eta^2 = \frac{\mu}{L}, c = \left(\frac{EI}{L^4 \rho A} \right)^{1/2}, \tau = tc, \tau^\alpha = t^\alpha c^\alpha, \bar{\delta} = \delta \frac{L^4}{EI} c^\alpha, \\ \bar{G}_p = G_p \frac{L^2}{EI} c^\alpha, \bar{R} = \frac{LA}{2I}, \bar{F}_0 = \frac{F_0 L^2}{EI}, \bar{F}_1 = \frac{F_1 L^2}{EI}, \bar{F}_2 = \frac{F_2 L^3}{EI}. \quad (7.13)$$

Бездимензионо померање у трансверзалном правцу је \bar{w} , $\bar{\delta}$ и \bar{G}_p су бездимензиони коефицијенти пригушења и смицања виско-Pasternak-овог слоја, η^2 је бездимензиони нелокални параметар, \bar{F}_0 и \bar{F}_1 су бездимензионе амплитуде статичког и динамичког оптерећења и \bar{F}_2 је бездимензиона амплитуда спољашњег динамичког оптерећења.

7.3 Решење нелинеарне једначине кретања фракционог реда

У општем случају, аналитичка решења нелинеарних диференцијалних једначина у затвореном облику постоје за веома мали број једначина, те је у литератури разрађен велики број нумеричких и апроксимативних метода за њихово решавање. За дискретизацију нелинеарне парцијалне диференцијалне једначине фракционог реда (7.12), према [143], применићемо Galerkin-ову методу за један мод осциловања (апроксимација по једном моду осциловања), и добијену нелинеарну фракциону диференцијалну једначину решити пертурбационом методом више временских скала, в. [138]. Најпре ћемо претпоставити решење једначине (7.12) у облику

$$\bar{w}(\bar{x}, \tau) = \phi_n(\bar{x}) q_n(\tau), \quad (7.14)$$

где су $\phi_n(\bar{x})$ и $q_n(\tau)$ амплитудна, односно временска функција и где је $n = 1, 2, \dots, \infty$ број мода. У даљој анализи биће разматран само први мод осциловања нелинеарног система. Заменом претпостављеног решења (7.14) у једначину (7.12), добијамо следећу нелинеарну диференцијалну једначину фракционог реда

$$\ddot{q} + \beta_{12} {}^{RL}D^\alpha q + (\omega_{0n}^2 - \beta_3 \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 \tau) q + \beta_4 q^3 = \tilde{f} \cos \bar{\Omega}_2 \tau, \quad (7.15)$$

где су параметри одређени

$$\omega_{0n} = \left[\frac{a_3 - (a_2 - \eta^2 a_3) \bar{F}_0}{a_1 - \eta^2 a_2} \right]^{1/2}, \quad \bar{\beta}_{12} = \bar{\delta} - \bar{G}_p \frac{a_2 - \eta^2 a_3}{a_1 - \eta^2 a_2}, \quad \bar{\beta}_3 = \frac{-a_2 + \eta^2 a_3}{a_1 - \eta^2 a_2},$$

$$\bar{\beta}_4 = \bar{R} a_4 \beta_3, \quad \tilde{f} = \frac{\bar{F}_2 a_0}{a_1 - \eta^2 a_2}, \quad (7.16)$$

и где је ω_{0n} сопствена фреквенција линеарног система, $\bar{\beta}_4$ је редукована нелинеарна крутост, $\bar{\beta}_{12}$ је коефицијент који обједињује вискозни коефицијент и коефицијент смицања Pasternak-овог слоја, $\bar{\beta}_3$ је коефицијент уз динамички део аксијалне силе и \tilde{f} је проширени коефицијент амплитуде спољашњег динамичког оптерећења. Коефицијенти a_0 до a_4 су дати

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\} = \int_0^1 \{\phi, \phi^2, \phi''\phi, \phi^{IV}\phi, (\phi')^2\} d\bar{x}. \quad (7.17)$$

Облик амплитудне функције зависи од граничних услова наногреде. Гранични услови просто ослоњене наногреде су

$$\bar{x} = 0: \quad \bar{w}(0, \tau) = 0, \quad \bar{M}_s(\bar{w}(0, \tau)) = 0, \quad (7.18)$$

$$\bar{x} = 1: \quad \bar{w}(1, \tau) = 0, \quad \bar{M}_s(\bar{w}(1, \tau)) = 0. \quad (7.19)$$

Слично, за обострано уклештену наногреду имамо следеће граничне услове

$$\bar{x} = 0: \quad \bar{w}(0, \tau) = 0, \quad \bar{w}'(0, \tau) = 0, \quad (7.20)$$

$$\bar{x} = 1: \quad \bar{w}(1, \tau) = 0, \quad \bar{w}'(1, \tau) = 0. \quad (7.21)$$

Према [143], применом Galerkin-ове методе дискретизације по једном моду осциловања, можемо за $\phi_n(\bar{x})$ узети амплитудне функције линеарних модова осциловања просто ослоњене и обострано уклештене наногреде. Линеарни модови осциловања су нормализовани тако да задовољавају следећи услов

$$\int_0^1 \phi_{ni}(\bar{x}) \phi_{nj}(\bar{x}) d\bar{x} = \delta_{ij}, \quad (7.22)$$

где је δ_{ij} Кронекер-ов делта симбол. За просту наногреду амплитудна функција има вредност

$$\phi_n(\bar{x}) = C_k \sin k_n \bar{x}, \quad (7.23)$$

док је за обострано уклештену наногреду

$$\phi_n(\bar{x}) = C_k \left\{ \cosh k_n \bar{x} - \cos k_n \bar{x} - \frac{\cosh k_n \bar{x} - \cos k_n \bar{x}}{\sinh k_n \bar{x} - \sin k_n \bar{x}} [\sinh k_n \bar{x} - \sin k_n \bar{x}] \right\}, \quad (7.24)$$

где су C_k константе које се одређују из услова (7.22), k_n су сопствене вредности, која за први мод $n = 1$, код прости наногреде има вредност $k_1 = n\pi = \pi$, и код обострано уклештене наногреде је $k_1 = 4.73004$.

7.3.1 Метода више временских скала

Једначина (7.15) је познатија као фракциона Mathieu–Duffing-ова нелинеарна диференцијална једначина са спољашњом побудом коју сада поново записујемо у нешто измењеном облику

$$\ddot{q} + \varepsilon\beta_{12} {}^{RL}D^\alpha q + (\omega_{0n}^2 - \varepsilon\beta_3 \bar{F}_1 \cos \bar{\Omega}_1 \tau) q + \varepsilon\beta_4 q^3 = \bar{f} \cos \bar{\Omega}_2 \tau, \quad (7.25)$$

где смо у сврху одређивања истовремене параметарске и спољашње резонанце у једначини (7.25) усвојили следеће вредности параметара $\bar{\beta}_{12} = \varepsilon\beta_{12}$, $\bar{\beta}_3 = \varepsilon\beta_3$ и $\bar{\beta}_4 = \varepsilon\beta_4$, где је ε мали параметар који дефинише однос величина у горњој једначини. Мали параметар ε смо узели уз фракциони и нелинеарни члан у једначини (7.25), како бисмо разматрали случај са малим пригушењем и малом нелинеарношћу који ће бити решаван пертурбационом методом више временских скала. Треба напоменути да се тврда нелинеарност, која изазива кривљење амплитудно-фреквентне криве система у десно, јавља код позитивног знака испред нелинеарног члана у Duffing-овој диференцијалној једначини, што је случај који имамо код једначине (7.25). За решавање нелинеарне диференцијалне једначине (7.25) применићемо пертурбациону методу више скала, где претпостављамо решење у следећем облику

$$q(T_0, T_1, \varepsilon) = q_0(T_0, T_1) + \varepsilon q_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (7.26)$$

где је $T_0 = \tau$ брза и $T_1 = \varepsilon\tau$ је спора временска скала. Треба рећи да је брза временска скала у корелацији са линеарним системом одговарајуће сопствене фреквенције, док спорој скали одговарају поремећаји амплитуде и фазе за временски променљиво аксијално и спољашње оптерећење. Случај комбиноване параметарске и спољашње резонанце у наногреди јавиће се када су фреквенције променљивог аксијалног и трансверзалног оптерећења једнаке, в. [144], па ћемо усвојити

$$\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}, \quad (7.27)$$

и затим анализирати случај суб-хармонијске и супер-хармонијске резонанце.

Пре тога, дефинисаћемо временске изводе

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + O(\varepsilon^2), \quad (7.28)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + O(\varepsilon^2), \quad (7.29)$$

$${}^{RL}D^\alpha = D_{0+}^\alpha - \varepsilon \alpha D_{0+}^{\alpha-1} D_1 + \dots, \quad (7.30)$$

где су $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) оператори целих извода и $D_{n+}^{\alpha-n} = \frac{\partial^{\alpha-n}}{\partial T_{n+}^{\alpha-n}}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) су оператори Riemann-Liouville-ових извода фракционог реда за нове временске променљиве, в. [138].

Треба напоменути да према [138], фракциони извод експоненцијалне функције има следећи облик

$$D_{0+}^\alpha e^{i\omega\tau} = \frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{e^{j(\tau-s)\omega} ds}{\Gamma(1-\alpha)s^\alpha} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega\tau} + \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^\alpha e^{-u\tau} du}{u + i\omega}, \quad (7.31)$$

где у случају да $\tau \rightarrow \infty$ једначина (7.31) се своди на

$$D_{0+}^\alpha e^{i\omega\tau} = (i\omega)^\alpha e^{i\omega\tau}, \quad (7.32)$$

где је $i = \sqrt{-1}$. Заменом једначина (7.26)-(7.30) у (7.25) и изједначавањем чланова са леве и десне стране једначине уз исте степене малог параметра ε^0 и ε^1 добијамо следеће две диференцијалне једначине

$$\varepsilon^0: D_0^2 q_0 + \omega_{0n}^2 q_0 = \tilde{f} \cos \bar{\Omega}_2 \tau, \quad (7.33)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 q_1 + \omega_{0n}^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - \beta_{12} D_{0+}^\alpha q_0 - \beta_4 q_0^3 + \frac{1}{2} \beta_3 \bar{F}_1 (e^{i\bar{\Omega}T_0} + e^{-i\bar{\Omega}T_0}) q_0. \quad (7.34)$$

Решење једначине (7.33) дато је у следећем облику

$$q_0 = A(T_1) e^{i\omega_{0n}T_0} + \Lambda e^{i\bar{\Omega}T_0} + c. c., \quad (7.35)$$

где је A комплексна функција споре временске скале, $c. c.$ представља конјуговано комплексне чланове, док је Λ дефинисано као

$$\Lambda = \frac{\tilde{f}}{2(\omega_{0n}^2 - \bar{\Omega}^2)}. \quad (7.36)$$

7.3.2 Суб-хармонијска резонанца

Усвојимо да је $\tilde{\Omega} = 2\omega_{0n} + \varepsilon\sigma$, где је σ параметар подешавања који описује близину побудне фреквенције $\tilde{\Omega}$ у односу на двоструку вредност $2\omega_{0n}$ кружне фреквенције линеарног система. Ако заменимо решење за q_0 из једначине (7.35) у једначину (7.34) и изједначимо секуларни члан $e^{i\omega_{0n}T_0}$ који се јавља у другој пертурбацији (7.34) са нулом, добијамо услов за решавање непознате функције A у следећем облику

$$-2i\omega_{0n}A' - \beta_{12}A(i\omega_{0n})^\alpha - 6\beta_4A\Lambda^2 - 3\beta_4A^2\bar{A} + \frac{1}{2}\beta_3\bar{A}\bar{F}_1e^{i\sigma T_1} = 0, \quad (7.37)$$

где је $A' = D_1A$. Заменом претпостављеног решења $A = 1/2 ae^{i\varphi}$, где су a и φ амплитуда и фаза нелинеарних осцилација датог система, у диференцијалну једначину (7.37) и раздвајањем реалног и имагинарног дела добијамо

$$\omega_{0n}\varphi' - 3\beta_4\Lambda^2a - \frac{3}{8}\beta_4a^3 - \frac{1}{2}\beta_{12}a\omega_{0n}^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{1}{4}\beta_3a\bar{F}_1 \cos \theta = 0, \quad (7.38)$$

$$-\omega_{0n}a' - \frac{1}{2}\beta_{12}a\omega_{0n}^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{1}{4}\beta_3a\bar{F}_1 \sin \theta = 0, \quad (7.39)$$

где је $\theta = \sigma T_1 - 2\varphi$ сада нови фазни угао. За анализу система у стационарном стању потребно је да буду испуњени услови да је $a' = 0$ и $\theta' = 0$, одакле из једначина (7.38) и (7.39) следи

$$\frac{1}{2}\beta_3\frac{\bar{F}_1}{\omega_{0n}} \cos \theta = -\sigma + 6\beta_4\frac{\Lambda^2}{\omega_{0n}} + \frac{3}{4}\frac{\beta_4}{\omega_{0n}}a^2 + \beta_{12}\omega_{0n}^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (7.40)$$

$$\frac{1}{2}\beta_3\frac{\bar{F}_1}{\omega_{0n}} \sin \theta = \beta_{12}\omega_{0n}^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (7.41)$$

Квадрирањем горњих једначина, њиховим сабирањем и елиминацијом фазног угла θ добијамо полином другог степена по σ у облику

$$\sigma^2 - 2K\sigma + M = 0, \quad (7.42)$$

где су K и M нови параметри дати као

$$K = 6\beta_4\frac{\Lambda^2}{\omega_{0n}} + \frac{3}{4}\frac{\beta_4}{\omega_{0n}}a^2 + \beta_{12}\omega_{0n}^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (7.43)$$

$$M = \left[6\beta_4\frac{\Lambda^2}{\omega_{0n}} + \frac{3}{4}\frac{\beta_4}{\omega_{0n}}a^2 + \beta_{12}\omega_{0n}^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right]^2 + \left[\beta_{12}\omega_{0n}^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right]^2 - \left[\frac{1}{2}\beta_3\frac{\bar{F}_1}{\omega_{0n}} \right]^2, \quad (7.44)$$

одакле следи решење једначине (7.42) и израз за амплитудно-фреквентни одзив система

$$\sigma_{1/2} = K \pm \sqrt{K^2 - M}. \quad (7.45)$$

7.3.3 Супер-хармонијска резонанца

Усвојимо да је $2\tilde{\Omega} = \omega_{0n} + \varepsilon\sigma$, где је σ параметар подешавања који описује близину двостуке вредности побудне фреквенције $2\tilde{\Omega}$ у односу на вредност кружне фреквенције ω_{0n} непоремећеног линеарног система. Заменом решења за q_0 из једначине (7.35) у једначину (7.34) и изједначавањем са нулом секуларног члана $e^{i\omega_{0n}T_0}$ из друге пертурбације (7.35), добијамо услов за одређивање непознате функције A у следећем облику

$$-2i\omega_{0n}A' - \beta_{12}A(i\omega_{0n})^\alpha - 6\beta_4A\Lambda^2 - 3\beta_4A^2\bar{A} + \frac{1}{2}\beta_3\Lambda\bar{F}_1e^{i\sigma T_1} = 0, \quad (7.46)$$

где је $A' = D_1A$. Заменом претпостављеног решења $A = 1/2 ae^{i\varphi}$, где су сада a и φ амплитуда и фаза нелинеарних осцилација датог система, у диференцијалну једначину (7.46) и раздвајањем реалног и имагинарног дела добијамо

$$\omega_{0n}\varphi' - 3\beta_4\Lambda^2a - \frac{3}{8}\beta_4a^3 - \frac{1}{2}\beta_{12}a\omega_{0n}^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{1}{4}\beta_3\Lambda\bar{F}_1 \cos \theta = 0, \quad (7.47)$$

$$-\omega_{0n}a' - \frac{1}{2}\beta_{12}a\omega_{0n}^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \frac{1}{2}\beta_3\Lambda\bar{F}_1 \sin \theta = 0, \quad (7.48)$$

где је $\theta = \sigma T_1 - \varphi$ нови фазни угао. Да би се анализирао систем у стационарном стању, потребно је да буду испуњени услови да је $a' = 0$ и $\theta' = 0$, одакле из једначина (7.47) и (7.48) следи

$$\frac{1}{2}\beta_3 \frac{\Lambda\bar{F}_1}{a\omega_{0n}} \cos \theta = -\sigma + 3\beta_4 \frac{\Lambda^2}{\omega_{0n}} + \frac{3}{8} \frac{\beta_4}{\omega_{0n}} a^2 + \beta_{12}\omega_{0n}^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (7.49)$$

$$\frac{1}{2}\beta_3 \frac{\Lambda\bar{F}_1}{a\omega_{0n}} \sin \theta = \frac{1}{2}\beta_{12}\omega_{0n}^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2}. \quad (7.50)$$

Квадрирањем горњих једначина, њиховим сабирањем и елиминацијом фазног угла θ добијамо

$$\sigma^2 - 2K_1\sigma + M_1 = 0, \quad (7.51)$$

где су сада K_1 и M_1 дати у облику

$$K_1 = 3\beta_4 \frac{\Lambda^2}{\omega_{0n}} + \frac{3}{8} \frac{\beta_4}{\omega_{0n}} a^2 + \beta_{12} \omega_{0n}^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (7.52)$$

$$M_1 = \left[3\beta_4 \frac{\Lambda^2}{\omega_{0n}} + \frac{3}{8} \frac{\beta_4}{\omega_{0n}} a^2 + \frac{1}{2} \beta_{12} \omega_{0n}^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \beta_{12} \omega_{0n}^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right]^2 - \left[\frac{1}{2} \beta_3 \frac{\Lambda \bar{F}_1}{a \omega_{0n}} \right]^2, \quad (7.53)$$

одакле следи решење једначине (7.51) које одређује амплитудно-фреквентну карактеристику система у облику

$$\sigma_{1/2} = K_1 \pm \sqrt{K_1^2 - M_1}, \quad (7.54)$$

за случај супер-хармонијске резонанце.

7.4 Нумерички резултати

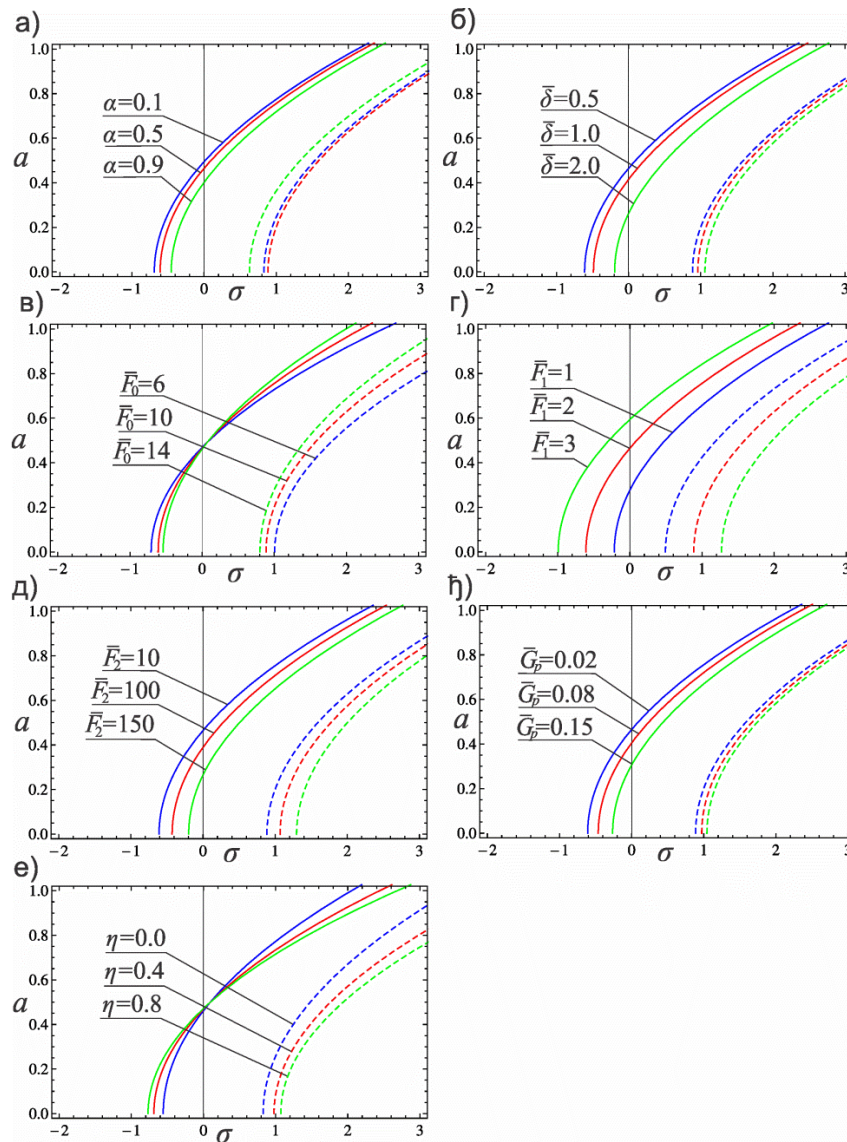
Извршићемо параметарску анализу и испитати утицај параметара модела на амплитудно-фреквентни одзив система наногреде на фракционој виско-Pasternak-овој подлози за случај комбиноване параметарске и спољашње резонанце. Биће испитани случајеви суб-хармонијске $\tilde{\Omega} \approx 2\omega_{0n}$ и супер-хармонијске $2\tilde{\Omega} \approx \omega_{0n}$ резонанце за два различита типа граничних услова, који одговарају просто ослоњеној и обострано уклештеној наногреди.

7.4.1 Параметарска анализа за суб-хармонијску резонанцу

За случај суб-хармонијске резонанце, усвојили смо следеће бездимензионе параметре просто ослоњене и обострано уклештене наногреде: $\alpha = 0.5$, $\bar{\delta} = 0.5$, $\bar{G}_p = 0.02$, $\eta = 0.2$, $\bar{F}_0 = 10$, $\bar{F}_1 = 2$, $\bar{F}_2 = 10$, $\bar{R} = 1$.

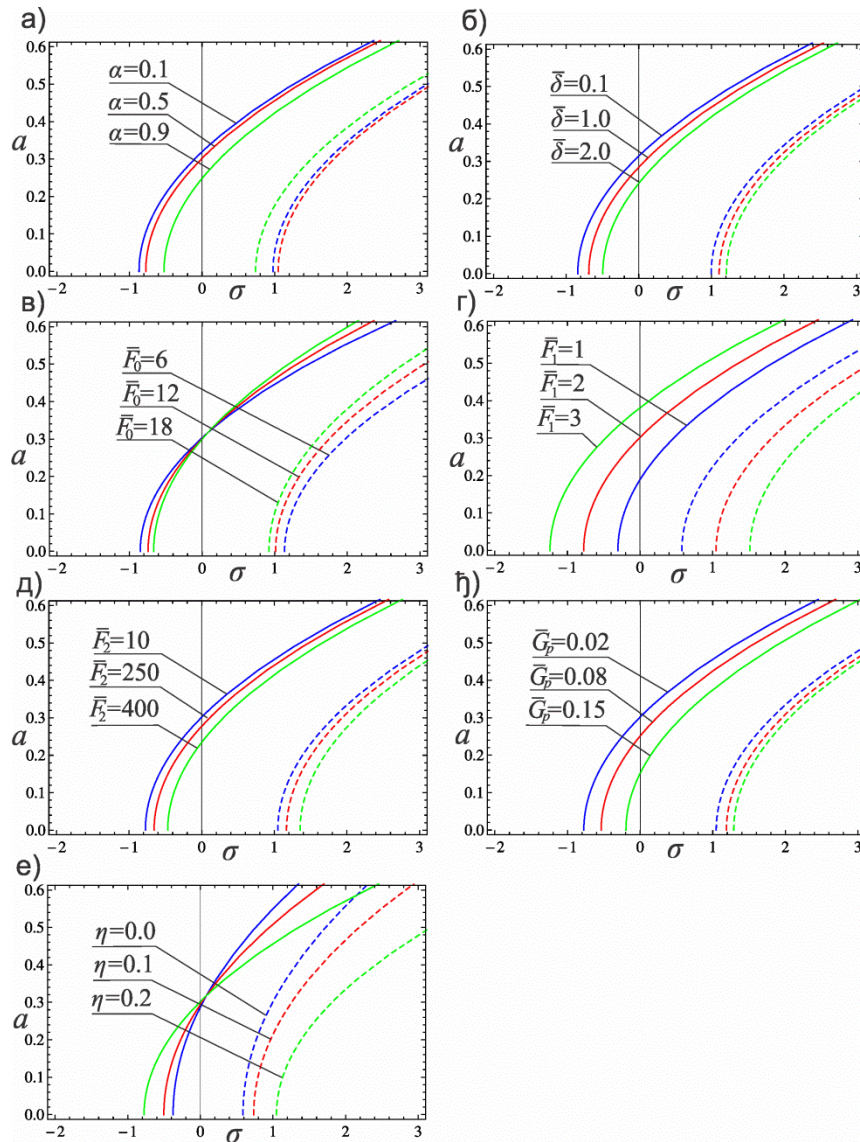
На сликама 7.2 а) - е) дате су амплитудно-фреквентне криве за различите вредности параметара у моделу просто ослоњене наногреде. Веза између амплитуде a и параметра подешавања фреквенције σ за случај суб-хармонијске резонанце дата је једначином (7.45). На сликама су испрекиданом и пуном линијом означене границе стабилности између којих се налази област нестабилности. Можемо приметити да повећање вредности фракционог параметра α и коефицијената $\bar{\delta}$ и \bar{G}_p виско-Pasternak-овог слоја,

слике 7.2 а), б) и њ), сужава област нестабилности и помера је удесно на хоризонталној оси у последња два случаја.



Слика 7.2. Утицај различитих параметара на амплитудно-фреквентну карактеристику система за просто ослоњену наногреду.

Сужење области нестабилности можемо приметити и у случају повећања статичког аксијалног оптерећења \bar{F}_0 , на слици 7.2 в), где долази и до смањене закривљености амплитудно-фреквентних крива. Слично понашање се јавља и код промене нелокалног параметра, слика 7.2 е), где се област нестабилности незнатно проширује са повећањем нелокалног параметра и праћено је повећањем закривљености амплитудно-фреквентних крива.



Слика 7.3. Утицај различитих параметара на амплитудно-фреквентну карактеристику система за обострано уклештену наногреду.

Са слике 7.2 г) и д) можемо уочити да повећање динамичког аксијалног оптерећења \bar{F}_1 проширује област нестабилности док повећање вредности спољашњег динамичког оптерећења \bar{F}_2 доводи до померања граница стабилности удесно на хоризонталној оси.

На сликама 7.3 а) – е) дате су амплитудно – фреквентне криве за различите вредности параметара у моделу обострано уклештене наногреде. Овде је веза између амплитуде a и параметра подешавања фреквенције σ за случај суб-хармонијске резонанце такође дата једначином (7.45). Можемо приметити сличан утицај параметара модела на амплитудно-фреквентне

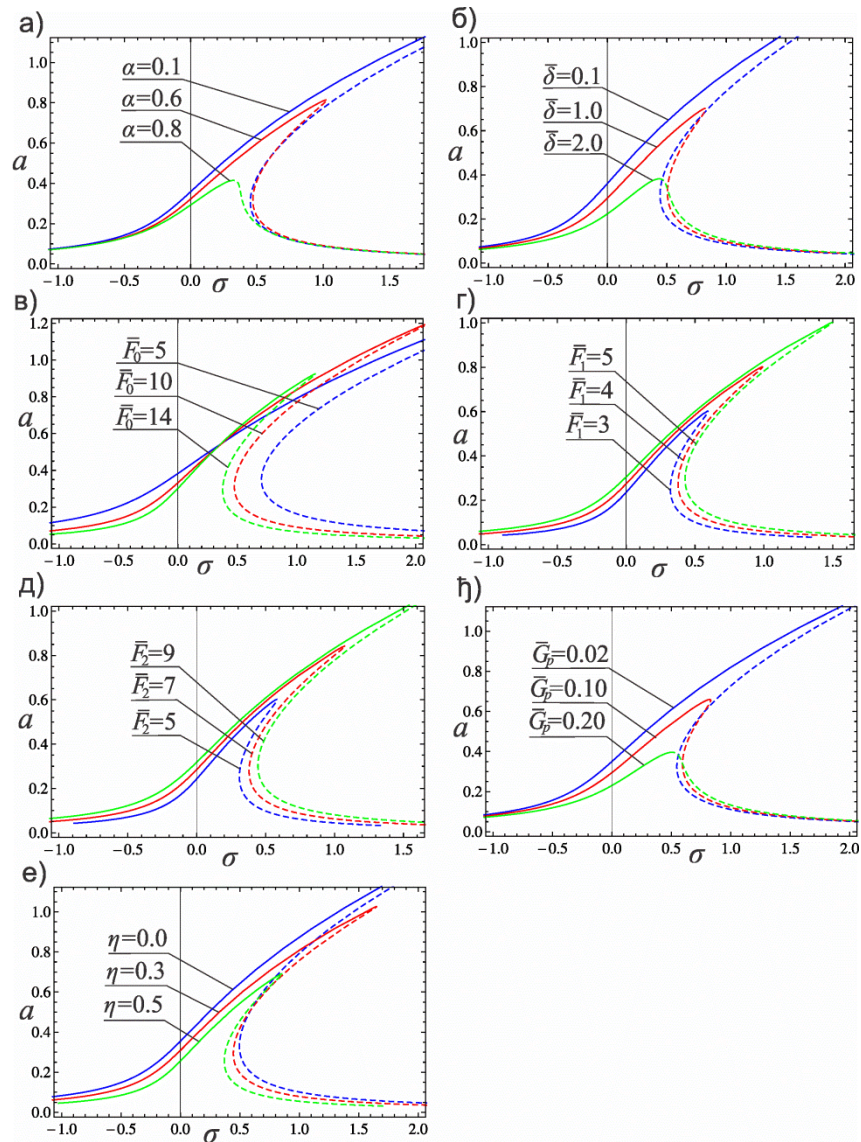
криве као и у случају просто ослоњене наногреде. Ипак, због другачијих граничних услова, област нестабилности је незнатно шириа и све криве генерално имају већу закривљеност удесно него код просто ослоњене наногреде.

7.4.2 Параметарска анализа за супер-хармонијску резонанцу

За случај супер-хармонијске резонанце усвојили смо следеће бездимензионе параметре за просто ослоњену и обострано уклештену наногреду: $\alpha = 0.5$, $\bar{\delta} = 0.5$, $\bar{G}_p = 0.02$, $\eta = 0.2$, $\bar{F}_0 = 10$, $\bar{F}_1 = 6$, $\bar{F}_2 = 10$, $\bar{R} = 1$.

На сликама 7.4 а) - е) приказане су амплитудно-фреквентне криве за различите вредности параметара слободно ослоњене наногреде. Веза између амплитуде a и параметра подешавања фреквенције σ за случај супер-хармонијске резонанце дата је једначином (7.54). Испрекиданом и пуном линијом су означене границе стабилности између којих се налази област нестабилности. Добијене криве за случај супер-хармонијске резонанце имају другачији облик од оних које су добијене за суб-хармонијску резонанцу. Разлог томе је пре свега другачији облик чланова у једначинама (7.45) и (7.54), тачније у последњем члану из једначине (7.53) фигуришу истовремено амплитуде спољашњег и аксијалног динамичког оптерећења.

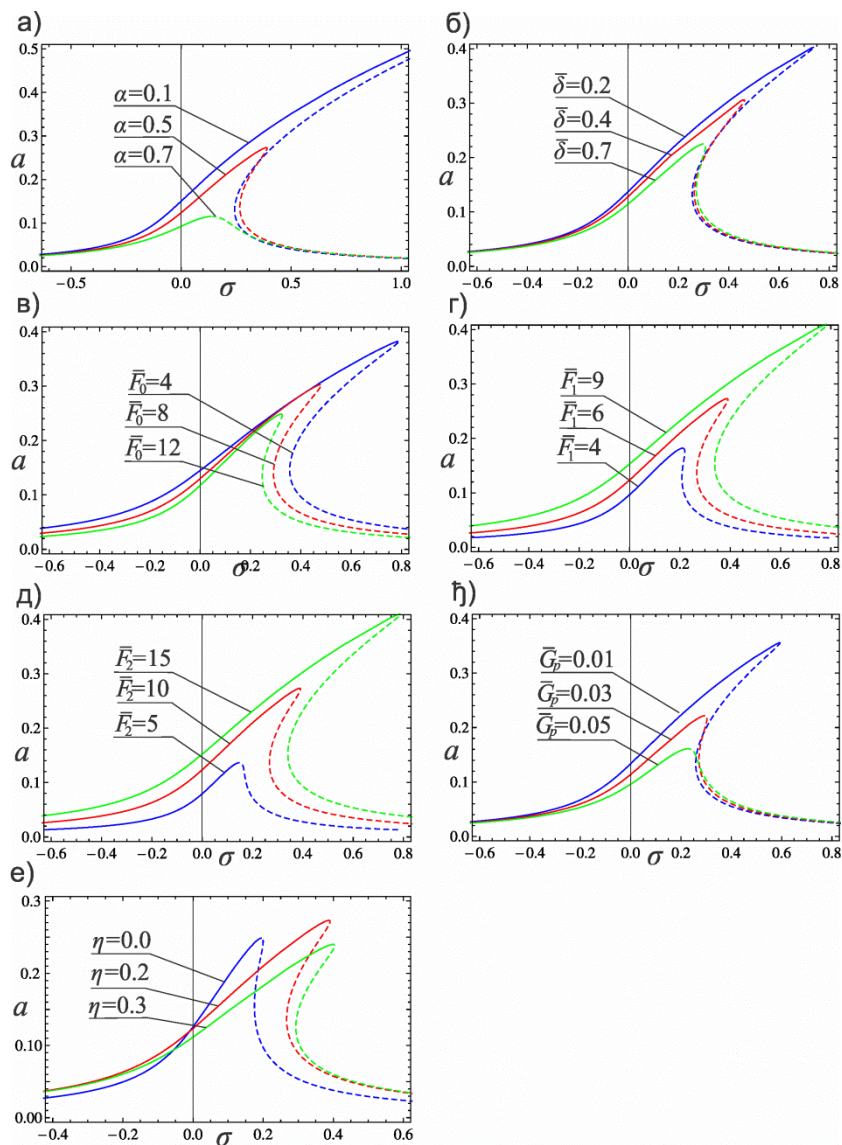
Можемо запазити да повећање вредности фракционог параметра α , коефицијената $\bar{\delta}$ и \bar{G}_p виско-Pasternak-овог слоја, нелокалног параметра η и статичког аксијалног оптерећења \bar{F}_0 , слике 7.4 а), б), в), ђ) и е), смањује амплитуду a . С друге стране, повећање амплитуда аксијалног динамичког оптерећења \bar{F}_1 и спољашњег динамичког оптерећења \bar{F}_2 доводи до повећања амплитуде a , слике 7.4 г) и д). Такође, треба напоменути да се код промена нелокалног параметра и статичког аксијалног оптерећења може приметити промена закривљености амплитудно-фреквентних крива.



Слика 7.4. Утицај различитих параметара на амплитудно-фреквентну карактеристику система за просто ослоњену наногреду.

На сликама 7.5 а) – е) дате су амплитудно-фреквентне криве за различите вредности параметара у моделу обострано уклештене наногреде и случај супер-хармонијске резонанце. Овде је такође веза између амплитуде a и параметра подешавања фреквенције σ за случај суб-хармонијске резонанце дата једначином (7.54). Можемо приметити сличан утицај параметара модела на амплитудно-фреквентне криве као и код просто ослоњене наногреде. Промена граничних услова утицала је на смањење амплитуде a , али је тај утицај на амплитудно-фреквентне криве сличан оном који је уочен код просто ослоњене наногреде. Повећање статичког

аксијалног оптерећења, фракционог и параметара виско-Pasternak-овог слоја смањује амплитуду a . С друге стране, повећање аксијалног и спољашњег динамичког оптерећења повећава амплитуду a , док повећање нелокалног параметра мења облик амплитудно-фреквентних крива, слика 7.5 е).



Слика 7.5. Утицај различитих параметара на амплитудно-фреквентну карактеристику система за обострано уклештену наногреду.

Глава 8

Закључна разматрања и научни допринос дисертације

У дисертацији су приказани и анализирани механички модели система крутих тела и нелокалних наноструктура, а посебна пажња је посвећена примени модификованих вискоеластичних конститутивних релација са изводима фракционог реда. После уводних разматрања у првој глави, где је дат кратак преглед постојећих вискоеластичних, пиезо-вискоеластичних и магнетнореолошких модела као елемената са занемареном масом у дискретним механичким системима крутих тела, предложене су извесне модификације тих модела изводима фракционог реда. У другој глави дисертације представљен је систем више крутих тела везаних у отворени кинематички ланац где тела међусобно формирају кинематичке парове V класе и повезана су елементима фракционог типа. За систем са произвољним бројем крутих тела формулисана су Lagrange-ове једначине друге врсте у коваријантној форми, као функције генералисаних координата и генералисаних сила. Описана је и процедура добијања израза за генералисане силе које потичу од елемената фракционог реда у систему крутих тела. Показано је да је функција деформације елемента, тј. померања у општем случају, сложена функција генералисаних координата. Позната чињеница из литературе је да се фракциони извод сложене функције, који се јавља у релацијама сила-померање везаних елемената фракционог реда, не може наћи класичним правилима диференцирања. У овој дисертацији предложена је примена нумеричке формуле за апроксимацију фракционог извода познате у литератури, где се фракциони извод своди на први извод сложене функције и момент функције. За овако апроксимираних фракционе изводе дато је неколико нумеричких примера понашања генералисаних сила у времену за фракциони вискоеластични елемент са и без актуатора, пиезо-вискоеластични и магнетнореолошки елемент, где су генералисане координате задате за случај роботског система са три крута сегмента.

Такође, за исти механички систем робота са три степена слободне кретања одређен је одзив неуправљаног робота са везаним фракционо-вискоеластичним елементом са и без актуатора. За наведени механички систем се у општем случају добија систем од три нелинеарне диференцијалне једначине са фракционим изводима. Након апроксимације фракционог извода нумеричком формулом, добија се нови систем диференцијалних једначина чији број зависи од броја чланова узетих у суми апроксимационе формуле. Добијени систем једначина решен је Matlab функцијом ode45 која је заснована на методи Runge-Kutta четвртог и петог реда и одређене су вредности генерализаних координата у времену за различите вредности параметара у моделу. Приказана методологија је нови приступ у анализи дискретних механичких система са елементима фракционог реда, где је предложена процедура за решавање нелинеарних фракционих диференцијалних једначина и апроксимацију фракционих извода сложене функције.

Од треће до осме главе анализирани су нелокални модели наноструктура где су, користећи нелокалну теорију Eringen-а, у обзир узети ефекти мале скале док су ефекти дисипације механичке енергије услед унутрашњих или спољашњих извора моделирани конститутивним релацијама вискоеластичних тела са изводима фракционог реда. Разматрани модели наногреде и наноплоче могу представљати реалне наноструктуре као што су угљеничне наноцеве или графенски листићи, или системе нанокомпозита који се састоје од више уређених наноструктура, нпр. угљеничних наноцева уметнутих у полимерну матрицу која показује вискоеластична својства.

У трећој глави смо анализирали слободне осцилације вискоеластичног наноштапа и наногреде са наночестицом користећи диференцијалну форму нелокалног напона конститутивне једначине Eringen-а и конститутивну релацију локалног напона фракционог Kelvin-Voigt-овог вискоеластичног тела. Изведене су једначине кретања система фракционог реда и предложено је решење методом раздвајања променљивих, као и увођење услова компатибилности на месту додате масе на наногреди. Графички су

приказана решења обичних диференцијалних једначина за амплитудне функције и различите граничне услове. Решење фракционе диференцијалне једначине за временску функцију приказано је у Laplace-овом и временском домену у облику геометријских редова. Детаљном параметарском анализом утврђено је да промена фракционог параметра и времена ретардације знатно утиче на временску функцију и пригушење у систему. Нелокални параметар повећава амплитуду осциловања система, што је карактеристика нелокалних модела који знатно умањују крутост целог система. Утврђено је да промена позиције и масе наночестице на наногреди, зависно од граничних услова, знатно мења сопствене вредности система. Код осцилација конзолне наногреде показана је неправилност у утицају нелокалног параметра на сопствене вредности система, што је резултат сличан онима добијеним у литератури и карактеристика је диференцијалне форме нелокалног модела и граничних услова конзолне греде.

У четвртој глави анализиране су слободне трансверзалне осцилације просто ослоњене наногреде на фракционој вискоеластичној подлози. За наногреду усвојена је нелокална модификација фракционог Kelvin-Voigt-овог модела, док је за вискоеластични слој узета класична релација сила-померање фракционог Kelvin-Voigt-овог модела. На основу Euler-Bernoulli-јеве теорије греда и датих конститутивних релација изведена је парцијална диференцијална једначина кретања система фракционог реда са два времена ретардације и два фракциона параметра, где је предложено решење методом раздвајања променљивих. За разлику од решења у виду геометријских редова које има спору конвергенцију, овде је предложена метода решавања фракционих диференцијалних једначина из литературе, где се примењују Laplace-ова и инверзна Mellin-Fourier-ова трансформација, Cauchy-јев рачун остатака и посебна метода за налажење полова функције, тј. корена карактеристичне једначине, која је заснована на одговарајућим сменама, поларним координатама и налажењу нула добијене трансцендентне једначине. Параметарска анализа у комплексном домену показала је недостатке фракционог Kelvin-Voigt-овог вискоеластичног модела, где је показано да фреквенција система расте са порастом времена ретардације

(параметра пригушења) за мање вредности фракционог параметра, што није могуће уочити само на основу анализе у временском домену. Такође, показано је да нелокални параметар смањује имагинарни део корена карактеристичне једначине који представља кружну фреквенцију система. Анализа осцилација нанограда током времена је показала знатан утицај промене реда фракционих извода, у конститутивним релацијама нанограда и вискоеластичног слоја, на пригушене осцилације система. Такође, у оквиру четврте главе су разматране слободне трансверзалне осцилације прости нанограда на вискоеластичној подлози под утицајем више наночестица као концентрисаних маса и аксијалног магнетног поља. Утицај магнетног поља које делује у аксијалном правцу нанограда је моделиран Lorentz-овом силом и добијена је фракциона парцијална диференцијална једначина кретања система са два времена ретардације и два фракциона параметра. Једначина кретања је решена применом исте методе, као за први пример из четврте главе, применом Laplace-ове и Mellin-Fourier-ове трансформације и Cauchy-јевог рачуна остатака. Нумеричке симулације су урађене са параметрима који одговарају угљеничној наноцеви и полимерној матрици тако да могу представљати модел наносензора масе. На основу извршене анализе, показано је да повећање нелокалног параметра, масе и броја наночестица утиче на смањење кружне фреквенције система и пораст амплитуде осциловања. Такође, показано је да повећање јачине магнетног поља, које дејствује у аксијалном правцу, утиче на повећање фреквенције и смањење амплитуде осциловања. Код промене фракционог параметра и параметра пригушења примећени су исти ефекти на пригушене осцилације и кружну фреквенцију нанограда као у претходном примеру из четврте главе.

У петој глави анализирани су слободне трансверзалне осцилације сложеног система више вискоеластично спрегнутих нехомогених нанограда. Разматран је случај просто ослоњених нанограда спрегнутих у систем „слободног ланца“, где прва и последња нанограда у систему нису спрегнуте са непокретном основом. На основу нелокалне фракционе Kelvin-Voigt-ове конститутивне релације и Euler-Bernoulli-јеве теорије греда, изведен је систем спрегнутих парцијалних диференцијалних једначина кретања са два

времена ретардације и два фракциона параметра. Применом Laplace-ове трансформације, одговарајућих смена, сопствених вектора и сопствених вредности одговарајуће матрице система, добијен је систем распрегнутих алгебарских једначина у функцији сопствених вредности и почетних услова. Применом Mellin-Fourier-ове формуле, Cauchy-јевог рачуна остатака и одговарајућих смена, добијене су једначине осцилација система нехомогених нанограда. На основу датих нумеричких примера и почетних услова на првој наногради, испитан је утицај различитих параметара нанограде и вискоеластичног слоја на осцилације нанограда. Показано је да ред фракционог извода и параметар пригушења значајно утичу на смањено или увећано пригушење осцилација у систему, док нелокални параметар повећава амплитуду осциловања на сличан начин као код система са једном наноградом. Примећене су мање амплитуде осциловања и извесно кашњење за нанограде које су даље од прве нанограде у систему за коју су задати почетни услови.

У шестој глави анализиране су слободне трансверзалне осцилације просто ослоњене ортотропне наноплоче на вискоеластичној подлози. Усвојена је модификована нелокална и проширена фракциона Kelvin-Voigt-ова конститутивна релација за ортотропну плочу, док је вискоеластични слој моделиран релацијом сила-померање за вискоеластични модел са фракционим оператором. Парцијалне диференцијалне једначине кретања фракционог реда су изведене применом Kirchhoff-Love-ове теорије плоча и датих конститутивних релација са четири фракциона параметра и два времена ретардације. Предложено је решење једначине кретања методом раздвајања променљивих, Laplace-овом и Mellin-Fourier-овом трансформацијом и Cauchy-јевим рачуном остатака. Карактеристична једначина са више времена ретардације и фракционих параметара решена је применом исте методе која је коришћена у претходним поглављима за једначине са два времена ретардације и два фракциона параметра. Из нумеричких симулација је показано да се и код проширеног Kelvin-Voigt-овог модела јавља аномалија у виду смањења фреквенције система са порастом параметара пригушења за мале вредности фракционог параметра. Промена

фракционих параметара вискоеластичног слоја, који је представљен моделом са фракционим оператором, има мали утицај на кружне фреквенције и не показује наведене аномалије Kelvin-Voigt-овог модела. Као и код нанограда, повећање нелокалног параметра утиче на смањење фреквенције система.

Проблем нелинеарних осцилација еластичне нанограде на фракционој виско-Pasternak-овој подлози приказан је у седмој глави. Анализирана је комбинована резонанца у два случаја, када су исте фреквенције спољашњег и аксијалног оптерећења два пута веће (супер-хармонијска резонанца) и два пута мање (суб-хармонијска резонанца) од основне фреквенције система. Применом von Kármán-ове геометријске нелинеарности за нанограду и конститутивне релације за фракциони виско-Pasternak-ов слој, изведена је нелинеарна парцијална диференцијална једначина кретања система фракционог реда. Galerkin-овом апроксимацијом парцијалних једначина добијена је нелинеарна диференцијална једначина са фракционим изводима и кубном нелинеарношћу, за коју је предложено решење методом више временских скала. Добијена су апроксимативна аналитичка решења амплитудно-фреквентног одзива система за случај стационарног стања код просто ослоњене и обострано уклештене нанограде. Параметарска анализа показала је значајан утицај промене фракционог параметра, нелокалног параметра, коефицијената фракционог виско-Pasternak-овог слоја, спољашњег и аксијалног оптерећења на амплитудно-фреквентни одзив система.

Приказани резултати и предложени модели и методе анализе дискретних система крутих тела са елементима фракционог реда, као и континуалних система сложених наноструктура описаних нелокалним фракционим конститутивним релацијама, показују могуће предности и мане примене фракционог рачуна у описивању реолошких особина деформабилних тела и дискретних механичких система и анализи њихове динамике. Део резултата приказаних у овој тези објављен је у часописима од међународног значаја, домаћим часописима, као и на међународним и националним конференцијама.

Предложене методе могу наћи своју примену у анализи система више вискоеластично спрегнутих наноплоча и наноштапова фракционог реда под утицајем магнетног или температурног поља. Приказани резултати у области нелинеарне динамике могли би се проширити анализом случаја са спрезањем модова код нелинеарних система наноструктура применом нумеричких и апроксимативних метода за решавање нелинеарних диференцијалних једначина фракционог реда.

Литература

- [1] Lazarević, P.M., Bučanović, Lj. (2012). Prilog modeliranju i dinamičkoj analizi sistema necelobrojnog reda sa osnovama računa necelobrojnog reda, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet Beograd.
- [2] Hedrih (Stevanović), K. (2008). The fractional order hybrid system vibrations. In *Advances in Nonlinear Sciences II - Sciences and Applications*, 2, 224-324. Belgrade, Serbia: Academy of Nonlinear Sciences.
- [3] Žigić, Miodrag M. (2012). Seismic response of a column like structure with both fractional and dry friction type of dissipation. PhD thesis, Faculty of Technical Science, Novi Sad.
- [4] Oldham, K., & Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order* (Vol. 111). Elsevier.
- [5] Samko, S. G., Kilbas, A. K. & Marichev, O. I. [1987] *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, (Nauki i Tehnika, Minsk).
- [6] Kiryakova, V. S. [1993] *Generalized Fractional Calculus and Applications*, (Chapman & Hall).
- [7] Podlubny, I. [1999] *Fractional Differential Equations*, (Academic Press, San Diego).
- [8] Hilfer, R. [2000] *Applications of Fractional Calculus in Physics*, (World Scientific Publishing, Singapore).
- [9] Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations* (Vol. 204). Elsevier Science Limited.
- [10] Diethelm, K. (2010). *The analysis of fractional differential equations: An application-oriented exposition using differential operators of Caputo type* (Vol. 2004). Springer Science & Business Media.
- [11] Magin, R. [2006] *Fractional Calculus in Bioengineering*, (Begell House, USA).
- [12] Sabatier, J., Agrawal, O. P. & Tenreiro Machado, J. A. [2007] *Advances in Fractional Calculus*, (The Netherlands).

- [13] Caponetto, R. (2010). Fractional order systems: modeling and control applications (Vol. 72). World Scientific.
- [14] Monje, A., Chen, YQ., Vinagre, B., Xue, D. & Feliu, V. [2010], Fractional-order Systems and Controls, (Springer, London).
- [15] Baleanu, D., Güvenç, Z. B., & Machado, J. T. (Eds.). (2010). New trends in nanotechnology and fractional calculus applications (p. C397). New York: Springer.
- [16] Ortigueira, M. D. (2011). Fractional calculus for scientists and engineers (Vol. 84). Springer Science & Business Media.
- [17] Tarasov, V. E. (2011). Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. Springer Science & Business Media.
- [18] Koeller, R. C. (1984). Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2), 299-307.
- [19] Rossikhin, Y. A. (2010). Reflections on two parallel ways in the progress of fractional calculus in mechanics of solids. *Applied Mechanics Reviews*, 63(1), 010701.
- [20] Mainardi, F. (2010). Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: an introduction to mathematical models. World Scientific
- [21] Bagley, R. L., & Torvik, J. (1983). Fractional calculus-a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, 21(5), 741-748.
- [22] Bagley, R. L., & Torvik, P. J. (1983). A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology (1978-present)*, 27(3), 201-210.
- [23] Bagley, R. L., & Torvik, P. J. (1985). Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA journal*, 23(6), 918-925.
- [24] Bagley, R. L., & Torvik, P. J. (1986). On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *Journal of Rheology (1978-present)*, 30(1), 133-155
- [25] Bagley, R. L. (1989). Power law and fractional calculus model of viscoelasticity. *AIAA journal*, 27(10), 1412-1417.

- [26] Wharmby, A. W., & Bagley, R. L. (2013). Generalization of a theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *Journal of Rheology* (1978-present), 57(5), 1429-1440.
- [27] Fenander, A. [1997] Frequency dependent stiffness and damping of railpads, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F, Journal of Rail and Rapid Transit*, 211, 51-62.
- [28] Fenander, A. [1998] A fractional derivative viscoelastic model included in a railway track model, *J. Sound Vibr.*, 212, 889-903.
- [29] Enelund, M., Mahler, L., Runesson, K. & Josefson, B. L. [1999] Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws, *International Journal of Solids and Structures*, 36, 2417-2442.
- [30] Taylor, L. S., Lerner, A. L., Rubens, D. J., & Parker, K. J. (2002, January). A Kelvin-Voight fractional derivative model for viscoelastic characterization of liver tissue. In *ASME 2002 International Mechanical Engineering Congress and Exposition* (pp. 447-448). American Society of Mechanical Engineers.
- [31] Petrović, Lj. M. Spasić, D. T. & Atanacković, T. M. [2005] On a mathematical model of a human root dentin, *Dental Materials*, 21, 125-128.
- [32] Catania, G. & Sorrentino, S. [2007] Analytical modelling and experimental identification of viscoelastic mechanical systems, *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, 403-416, (Springer).
- [33] Lewandowski, R. & Chorazyczewski, B. [2010] Identification of the parameters of the Kelvin-Voigt and the Maxwell fractional models, used to modeling of viscoelastic dampers, *Computers and Structures*, 88, 1-17.
- [34] Grahovac, N. M. & Zigic, M. M. [2010] Modelling of the hamstring muscle group by use of fractional derivatives, *Computers and Mathematics with applications*, 59, 1695-1700.
- [35] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (1997). Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. *Applied Mechanics Reviews*, 50(1), 15-67.
- [36] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2001). Analysis of rheological equations involving more than one fractional parameters by the use of the simplest

mechanical systems based on these equations. *Mechanics of time-dependent materials*, 5(2), 131-175.

- [37] Rossikhin, Y., & Shitikova, M. (2007). Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 10(2), 111-121.
- [38] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2014). The simplest models of viscoelasticity involving fractional derivatives and their connectedness with the Rabotnov fractional order operators. *International Journal of Mechanics*, 8, 326-332.
- [39] Atanackovic, T. M. (2002). A modified Zener model of a viscoelastic body. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 14(2), 137-148.
- [40] Atanackovic, T. M. (2002). A generalized model for the uniaxial isothermal deformation of a viscoelastic body. *Acta Mechanica*, 159(1-4), 77-86.
- [41] Atanackovic, T. M. (2003). On a distributed derivative model of a viscoelastic body. *Comptes Rendus Mecanique*, 331(10), 687-692.
- [42] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (1997). Application of fractional operators to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single-mass systems. *Journal of Sound and vibration*, 199(4), 567-586.
- [43] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2006). Analysis of damped vibrations of linear viscoelastic plates with damping modeled with fractional derivatives. *Signal processing*, 86(10), 2703-2711.
- [44] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2010). Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results. *Applied Mechanics Reviews*, 63(1), 010801.
- [45] Bačlić, B.S., Atanacković, T.M., (2000) Stability and creep of a Fractional order viscoelastic rod, *Bull. de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts. Classe des Sciences mathématiques et naturelles*, Vol. 25, 115-131.
- [46] Hedrih-Stevanović, K. R., & Filipovski, A. (2002). Longitudinal creep vibrations of a fractional derivative order rheological rod with variable cross section. *Facta universitatis-series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, 3(12), 327-349.

- [47] Hedrih, K., The transversal creeping vibrations of a fractional derivative order constitutive relation of nonhomogeneous beam, *Mathematical Problems in Engineering*, 1-18, 2006.
- [48] Atanacković, T., Pilipović, S., Stanković, B., & Zorica, D. (2014). *Fractional Calculus with Applications in Mechanics: Vibrations and Diffusion Processes*. John Wiley & Sons.
- [49] Atanackovic, T. M., Pilipovic, S., Stankovic, B., & Zorica, D. (2014). *Fractional calculus with applications in mechanics: wave propagation, impact and variational principles*. John Wiley & Sons.
- [50] Di Lorenzo, S., Di Paola, M., Pinnola, F. P., & Pirrotta, A. (2014). Stochastic response of fractionally damped beams. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 35, 37-43.
- [51] Lazarević, M.P. (2006). Finite time stability analysis of PD α fractional control of robotic time-delay systems. *Mechanics Research Communications*, 33(2), 269-279.
- [52] Lazarević, M.P., Batalov, S., Cajić, M., Mandić, P. (2013). Further results on integer and non-integer order PID control of robotic system. *Proceedings of the XLVIII International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies ICEST 2013*, 2, 801-804.
- [53] Lazarević, M.P., & Tzekis, P. (2014). Robust second-order PD type iterative learning control for a class of uncertain fractional order singular systems. *Journal of Vibration and Control*, 1077546314562241.
- [54] Lazarević, M.P. (2014). Finite-Time Stability of Fractional Order Time-Delay Systems. Chapter in *Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling*, 43-66.
- [55] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V. (2010). *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media.
- [56] Li, R., & Chen, W. (2014). Lyapunov-based fractional-order controller design to synchronize a class of fractional-order chaotic systems. *Nonlinear Dynamics*, 76(1), 785-795.

- [57] Dadras, S., & Momeni, H. R. (2014). Fractional-Order Dynamic Output Feedback Sliding Mode Control Design for Robust Stabilization of Uncertain Fractional-Order Nonlinear Systems. *Asian Journal of Control*, 16(2), 489-497.
- [58] Schmidt, A., & Gaul, L. (2002). Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. *Nonlinear Dynamics*, 29(1-4), 37-55.
- [59] Adolfsson, K., Enelund, M., & Larsson, S. (2004). Adaptive discretization of fractional order viscoelasticity using sparse time history. *Computer methods in applied mechanics and Engineering*, 193(42), 4567-4590.
- [60] Diethelm, K., Ford, N. J., Freed, A. D., & Luchko, Y. (2005). Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(6), 743-773.
- [61] Galucio, A. C., DE U, J. F., & Dubois, F. (2006, July). The $G\alpha$ -scheme to approximate fractional derivatives—Application to dynamics of dissipative systems. In *Fractional Differentiation and its Applications* (Vol. 2, No. 1, pp. 379-383).
- [62] Jafari, H., & Daftardar-Gejji, V. (2006). Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 196(2), 644-651.
- [63] Momani, S., & Odibat, Z. (2008). A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor's formula. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 220(1), 85-95.
- [64] Wen, S. F., Shen, Y. J., Yang, S. P., & Wang, J. (2017). Dynamical response of Mathieu–Duffing oscillator with fractional-order delayed feedback. *Chaos, Solitons & Fractals*, 94, 54-62.
- [65] Atanackovic, T. M., & Stankovic, B. (2004). An expansion formula for fractional derivatives and its application. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 7(3), 365-378.
- [66] Atanackovic, T. M., & Stankovic, B. (2008). On a numerical scheme for solving differential equations of fractional order. *Mechanics Research Communications*, 35(7), 429-438.

- [67] Pooseh, S., Almeida, R., & Torres, D. F. (2012). Approximation of fractional integrals by means of derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 64(10), 3090-3100.
- [68] Pooseh, S., Almeida, R., & Torres, D. F. (2013). Numerical approximations of fractional derivatives with applications. *Asian Journal of Control*, 15(3), 698-712.
- [69] Janocha, H. (2007). *Adaptronics and smart structures*. Springer-Verlag.
- [70] Lazarević, M.P., Vidaković, J., Cajić, M., & Mandić, P. (2014). Prilog modeliranju i upravljanju robotskih i adaptronskih sistema, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- [71] Spencer, B. F., Dyke, S. J., Sain, M. K., & Carlson, J. (1997). Phenomenological model for magnetorheological dampers. *Journal of engineering mechanics*, 123(3), 230-238.
- [72] Goroško, O.A., Hedrih. K.S.: *Analitička dinamika (mehanika) diskretnih naslednih sistema*, Univerzitet u Nišu, 2000.
- [73] Shabana, A. A. (2009). *Computational dynamics*. John Wiley & Sons.
- [74] Čović, V., & Lazarević, M. (2009). *Mehanika robota*. Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- [75] Lazarević, M. (2006). *Zbirka zadataka iz mehanike robota*. Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- [76] Cajić, M., & Lazarević, M. P. (2014). Fractional order spring/spring-pot/actuator element in a multibody system: application of an expansion formula. *Mechanics Research Communications*, 62, 44-56.
- [77] Cajić, M. S., Lazarević, M. P., & Šekara, T. B. (2014, June). Robotic system with viscoelastic element modeled via fractional Zener model. In *Fractional Differentiation and Its Applications (ICFDA)*, 2014 International Conference on (pp. 1-6). IEEE.
- [78] Cajić, M., (2016). Response of a three degree of freedom robotic system with fractional order elements. Mini-Symposium "Non-Linear theoretical basis in description of real world phenomena", November 30th, Mathematical Institute of SASA, Belgrade.

- [79] Hedrih, K. S., & Nikolić-Stanojević, V. (2010). A model of gear transmission: fractional order system dynamics. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010.
- [80] Yang, F. A. C. M., Chong, A. C. M., Lam, D. C. C., & Tong, P. (2002). Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39(10), 2731-2743.
- [81] Askes, H., & Aifantis, E. C. (2011). Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, 48(13), 1962-1990.
- [82] Eringen, A. C. (Ed.). (2002). *Nonlocal continuum field theories*. Springer Science & Business Media.
- [83] Eringen, A. C. (1972). Nonlocal polar elastic continua. *International Journal of Engineering Science*, 10(1), 1-16.
- [84] Eringen, A. C. (1983). On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54(9), 4703-4710.
- [85] Challamel, N., Zorica, D., Atanacković, T. M., & Spasić, D. T. (2013). On the fractional generalization of Eringen's nonlocal elasticity for wave propagation. *Comptes Rendus Mécanique*, 341(3), 298-303.
- [86] Challamel, N., Rakotomanana, L., & Le Marrec, L. (2009). A dispersive wave equation using nonlocal elasticity. *Comptes Rendus Mécanique*, 337(8), 591-595.
- [87] Peddieson, J., Buchanan, G. R., & McNitt, R. P. (2003). Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41(3), 305-312.
- [88] Lu, P., Lee, H. P., Lu, C., & Zhang, P. Q. (2006). Dynamic properties of flexural beams using a nonlocal elasticity model. *Journal of Applied Physics*, 99(7), 073510.
- [89] Reddy, J. N. (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *International Journal of Engineering Science*, 45(2), 288-307.

- [90] Karličić, D., Kozić, P., & Pavlović, R. (2015). Flexural vibration and buckling analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories based on Reddy and Huu-Tai formulations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 53.
- [91] Kiani, K. (2015). Elastic wave propagation in magnetically affected double-walled carbon nanotubes. *Meccanica*, 50(4), 1003-1026.
- [92] Khademolhosseini, F., Rajapakse, R. K. N. D., & Nojeh, A. (2010). Torsional buckling of carbon nanotubes based on nonlocal elasticity shell models. *Computational Materials Science*, 48(4), 736-742.
- [93] Karličić, D., Adhikari, S., Murmu, T., & Cajić, M. (2014). Exact closed-form solution for non-local vibration and biaxial buckling of bonded multi-nanoplate system. *Composites Part B: Engineering*, 66, 328-339.
- [94] Karličić, D., Cajić, M., Murmu, T., & Adhikari, S. (2015). Nonlocal longitudinal vibration of viscoelastic coupled double-nanorod systems. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 49, 183-196.
- [95] Karličić, D., Kozić, P., & Pavlović, R. (2014). Free transverse vibration of nonlocal viscoelastic orthotropic multi-nanoplate system (MNPS) embedded in a viscoelastic medium. *Composite Structures*, 115, 89-99.
- [96] Karličić, D., Murmu, T., Cajić, M., Kozić, P., & Adhikari, S. (2014). Dynamics of multiple viscoelastic carbon nanotube based nanocomposites with axial magnetic field. *Journal of Applied Physics*, 115(23), 234303.
- [97] Karličić, D., Cajić, M., Murmu, T., Kozić, P., & Adhikari, S. (2015). Nonlocal effects on the longitudinal vibration of a complex multi-nanorod system subjected to the transverse magnetic field. *Meccanica*, 50(6), 1605-1621.
- [98] Karličić, D., Cajić, M., Kozić, P., & Pavlović, I. (2015). Temperature effects on the vibration and stability behavior of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic medium. *Composite Structures*, 131, 672-681.
- [99] Karličić, D., Jovanović, D., Kozić, P., & Cajić, M. (2015). Thermal and magnetic effects on the vibration of a cracked nanobeam embedded in an elastic medium. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 10(1), 43-62.
- [100] Karličić, D., Kozić, P., Adhikari, S., Cajić, M., Murmu, T., & Lazarević, M. (2015). Nonlocal mass-nanosensor model based on the damped vibration of single-

- layer graphene sheet influenced by in-plane magnetic field. *International Journal of Mechanical Sciences*, 96, 132-142.
- [101] Challamel, N., & Wang, C. M. (2008). The small length scale effect for a non-local cantilever beam: a paradox solved. *Nanotechnology*, 19(34), 345703.
- [102] Khodabakhshi, P., & Reddy, J. N. (2015). A unified integro-differential nonlocal model. *International Journal of Engineering Science*, 95, 60-75.
- [103] Fernández-Sáez, J., Zaera, R., Loya, J. A., & Reddy, J. N. (2016). Bending of Euler–Bernoulli beams using Eringen’s integral formulation: a paradox resolved. *International Journal of Engineering Science*, 99, 107-116.
- [104] Eptaimeros, K. G., Koutsoumaris, C. C., & Tsamasphyros, G. J. (2016). Nonlocal integral approach to the dynamical response of nanobeams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 115, 68-80.
- [105] Imboden, M., & Mohanty, P. (2014). Dissipation in nanoelectromechanical systems. *Physics Reports*, 534(3), 89-146.
- [106] Cajić, M., Karličić D., & Lazarević, M. (2014). Nonlocal axial vibration of a fractional order viscoelastic nanorod. 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), July 6 - 11, Vienna, Austria.
- [107] Ansari, R., Oskouie, M. F., Sadeghi, F., & Bazdid-Vahdati, M. (2015). Free vibration of fractional viscoelastic Timoshenko nanobeams using the nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 74, 318-327.
- [108] Cajic, M., Karlicic, D., & Lazarevic, M. (2015). Nonlocal vibration of a fractional order viscoelastic nanobeam with attached nanoparticle. *Theoretical and Applied Mechanics*, 42(3), 167-190.
- [109] Cajić, M., Karličić, D., & Lazarević, M. (2017). Damped vibration of a nonlocal nanobeam resting on viscoelastic foundation: fractional derivative model with two retardation times and fractional parameters. *Meccanica*, 52(1), 363–382.
- [110] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2009). New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators. *Shock and Vibration*, 16(4), 365-387.

- [111] Rossikhin, Y., Shitikova, M., & Shcheglova, T. (2010). Forced vibrations of a nonlinear oscillator with weak fractional damping. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 4(9), 1619-1636.
- [112] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2006). Analysis of free non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the conditions of different internal resonances. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(2), 313-325.
- [113] Rossikhin, Y. A., Shitikova, M. V., & Ngenzi, J. C. (2015). A New Approach for Studying Nonlinear Dynamic Response of a Thin Plate with Internal Resonance in a Fractional Viscoelastic Medium. *Shock and Vibration*, 2015.
- [114] Ansari, R., Oskouie, M. F., & Gholami, R. (2016). Size-dependent geometrically nonlinear free vibration analysis of fractional viscoelastic nanobeams based on the nonlocal elasticity theory. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 75, 266-271.
- [115] Ansari, R., Oskouie, M. F., & Rouhi, H. (2016). Studying linear and nonlinear vibrations of fractional viscoelastic Timoshenko micro-/nano-beams using the strain gradient theory. *Nonlinear Dynamics*, 1-17.
- [116] Oskouie, M. F., & Ansari, R. (2016). Linear and nonlinear vibrations of fractional viscoelastic Timoshenko nanobeams considering surface energy effects. *Applied Mathematical Modelling*.
- [117] Calcagni, G. (2012). Geometry of fractional spaces. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 16(2), 549-644.
- [118] Marley, P. M. (2015). Synthesis, characterization, and physical properties of 1D nanostructures.
- [119] Tsakalakos, T., Ovid'ko, I. A., & Vasudevan, A. K. (Eds.). (2012). *Nanostructures: Synthesis, Functional Properties and Application (Vol. 128)*. Springer Science & Business Media.
- [120] Barton, R. A., Parpia, J., & Craighead, H. G. (2011). Fabrication and performance of graphene nanoelectromechanical systems. *Journal of Vacuum Science & Technology B*, 29(5), 050801.
- [121] Wang, Q. (2005). Wave propagation in carbon nanotubes via nonlocal continuum mechanics. *Journal of Applied Physics*, 98(12), 124301.

- [122] Ansari, R., Rouhi, H., & Sahmani, S. (2011). Calibration of the analytical nonlocal shell model for vibrations of double-walled carbon nanotubes with arbitrary boundary conditions using molecular dynamics. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(9), 786-792.
- [123] Doetsch, G. (2012). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation*. Springer Science & Business Media.
- [124] Reddy, J. N., & Pang, S. D. (2008). Nonlocal continuum theories of beams for the analysis of carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 103(2), 023511.
- [125] Naber, M. (2009). Linear fractionally damped oscillator. *International Journal of Differential Equations*, 2010.
- [126] Ansari, R., Gholami, R., & Rouhi, H. (2012). Vibration analysis of single-walled carbon nanotubes using different gradient elasticity theories. *Composites Part B: Engineering*, 43(8), 2985-2989.
- [127] Rossikhin, Y. A., Shitikova, M. V., & Shcheglova, T. A. (2010). Analysis of free vibrations of a viscoelastic oscillator via the models involving several fractional parameters and relaxation/retardation times. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5), 1727-1744.
- [128] Schäfer, I., & Kempfle, S. (2004). Impulse responses of fractional damped systems. *Nonlinear Dynamics*, 38(1-4), 61-68.
- [129] Kovacic, I., & Brennan, M. J. (2011). *The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*. John Wiley & Sons.
- [130] Rašković, D. (1965). *Teorija oscilacija*. Naučna knjiga, 503.
- [131] Karličić, D., Murmu, T., Adhikari, S., & McCarthy, M. (2015). *Non-local structural mechanics*. John Wiley & Sons.
- [132] Karličić, D. (2016). *Primena nelokalne teorije kontinuuma u analizi dinamičkog ponašanja i stabilnosti sistema spregnutih nano-struktura*. Doktorska disertacija, Univerzitet u Nišu, Mašinski fakultet, 179.
- [133] Hedrih, K. (2008). The fractional order hybrid system vibrations. Chapter in *Advances in Nonlinear Sciences II - Sciences and Applications*, Monograph of Academy of Nonlinear Sciences, 2, 225-325.
- [134] Hedrih, K. S., & Machado, J. T. (2015). Discrete fractional order system vibrations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 73, 2-11.

- [135] Hedrih, K. R. S., & Hedrih, A. N. (2016). Phenomenological mapping and dynamical absorptions in chain systems with multiple degrees of freedom. *Journal of Vibration and Control*, 22(1), 18-36.
- [136] Murmu, T., McCarthy, M. A., & Adhikari, S. (2012). Vibration response of double-walled carbon nanotubes subjected to an externally applied longitudinal magnetic field: a nonlocal elasticity approach. *Journal of Sound and Vibration*, 331(23), 5069-5086.
- [137] Goh, P. S., Ismail, A. F., & Ng, B. C. (2014). Directional alignment of carbon nanotubes in polymer matrices: contemporary approaches and future advances. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 56, 103-126.
- [138] Rossikhin, Y. A., & Shitikova, M. V. (2009). New approach for the analysis of damped vibrations of fractional oscillators. *Shock and Vibration*, 16(4), 365-387.
- [139] Cai, W., Chen, W., & Xu, W. (2016). Fractional modeling of Pasternak-type viscoelastic foundation. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1-13.
- [140] Rašković, D. (1965). *Teorija oscilacija [Theory of Oscillations]*. Naucna knjiga.
- [141] Kelly, S. G. (2006). *Advanced vibration analysis*. CRC Press.
- [142] Mitrinović, D. S., & Kečkić, J. D. (1984). *The Cauchy method of residues: theory and applications (Vol. 9)*. Springer Science & Business Media.
- [143] Nayfeh, A. H., & Pai, P. F. (2008). *Linear and nonlinear structural mechanics*. John Wiley & Sons.
- [144] Nayfeh, A. H. (1984). Interaction of fundamental parametric resonances with subharmonic resonances of order one-half. *Journal of Sound and Vibration*, 96(3), 333-340.
- [145] Cajić, M., (2017). Analysis of combined sub-harmonic and super-harmonic resonances of a nanobeam on fractional visco-Pasternak foundation using nonlocal elasticity theory. Mini-Symposium "Nonlocal theory of mechanical structures", April 25th, Mathematical Institute of SASA, Belgrade.
- [146] Kraus, J. D., & Electromagnetics, F. E. McGraw-Hill, New York, 1992.

Биографија

Милан Цајић је рођен у Нишу 29. марта 1984. године. Основну школу “Вук Караџић” завршио је у Горњем Матејевцу код Ниша. Средњу електротехничку школу „Никола Тесла“ у Нишу, рачунарски смер, завршио је 2003. године. Машински факултет Универзитета у Нишу, уписао је 2005. године а завршио јануара 2011. године, са средњом оценом 8,66 на профилу Мехатроника, одбранивши дипломски рад под насловом *„Пројектовање мерног места за статичко испитивање одбојно-вучне опреме железничких возила“*. На завршној години основних студија добио је DAAD стипендију за тромесечно усавршавање на Институту за механику континуума, Универзитета у Карлсруеу. Докторске студије је уписао школске 2010/2011 на Машинском факултету Универзитета у Београду, где је положио све испите предвиђене Програмом усавршавања са просечном оценом 10,00. На другој години докторских студија је добио стипендију WUS Austria за посету Институту за биомеханику у Грацу.

Научноистраживачким радом бави се од 2011. године када почиње са радом на Математичком институту САНУ у звању истраживач-приправник на пројекту ОИ 174001 под називом *„Динамика хибридних система сложених структура. Механика материјала“*. У 2012. години је унапређен у звање истраживач-сарадник. Од 2015. године је учесник на двогодишњем српско-кинеском билатералном пројекту под називом *„Фракционог реда управљање и моделирање механичког понашања наноматеријала и наноструктура“*. Учествовао је на више националних и међународних научних скупова у земљи и иностранству. До сада је публикувао једанаест коауторских радова у часописима међународног значаја са СЦИ листе, пет рада у часописима националног значаја и коаутор је једне монографије националног значаја. Један је од организатора Мини-симпозијума *„Нелокална теорија у структурној механици“*, одржаног 24. априла 2017. године у Београду и подржаног од стране Математичког института САНУ и пројекта ОИ 174001. Рецензирао је више радова за домаће конференције и међународне часописе.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Милан С. Цајић

број индекса Д70/10

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена

у динамици система крутих и деформабилних тела

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 19.06.2017.

Милан Цајић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _____ Милан С. Цајић _____

Број индекса _____ Д70/10 _____

Студијски програм _____ Докторске академске студије _____

Наслов рада __Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и
примена у динамици система крутих и деформабилних тела _____

Ментор _____ проф. др Михаило П. Лазаревић _____

Потписани/а _____ Милан С. Цајић _____

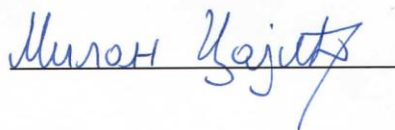
Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, _____ 19.06.2017. _____

 _____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Моделирање сложених хибридних структура фракционог типа и примена у динамици система крутих и деформабилних тела

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

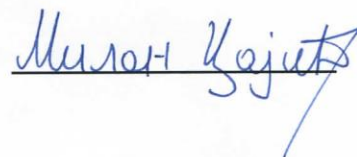
5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 19.06.2017.



1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.