

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Kristina Veljković

**KONTROLA KVALITETA
PRAĆENJEM CENTRALNE
TENDENCIJE NEGAUSOVIH
SLUČAJNIH VELIČINA**

doktorska disertacija

Beograd, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Kristina Veljković

**QUALITY CONTROL
BY MONITORING CENTRAL
TENDENCY OF NONGAUSSIAN
RANDOM VARIABLES**

doctoral dissertation

Belgrade, 2016.

Mentor:

dr Pavle Mladenović, redovni profesor,
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

dr Slobodanka Janković, redovni profesor,
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

dr Vesna Jevremović, vanredni profesor u penziji,
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Datum odbrane:

Naslov *Kontrola kvaliteta praćenjem centralne tendencije negausovih slučajnih veličina*

Rezime Razmatran je dizajn kontrolnih grafika za praćenje centralne tendencije negausovih slučajnih veličina sa simetričnim ili pozitivno asimetričnim raspodelama. U slučaju negausovih simetričnih raspodela, u ovoj disertaciji je predložen modifikovani kontrolni grafik uzoračke sredine. Za odabranu Studentovu, Laplasovu, logističku i uniformnu raspodelu izračunata je teorijska raspodela standardizovane uzoračke sredine i aproksimirana je Pirsonovom raspodelom II tipa ili Pirsonovom raspodelom VII tipa. Izračunate su širina kontrolnih granica i moć kontrolnog grafika uzoračke sredine, za datu verovatnoću greške prve vrste. Dobijeni rezultati ukazuju da odgovarajuća Pirsonova raspodela može poslužiti kao veoma dobra aproksimacija raspodele standardizovane uzoračke sredine. Za primenu kontrolnog grafika uzoračke sredine u praksi, poređene su mere koeficijenta spljoštenosti i upotreba predloženog grafika ilustrovana je na podacima.

U slučaju pozitivno asimetričnih raspodela, u ovoj disertaciji je predložen jednostrani kontrolni grafik medijane za praćenje centralne tendencije karakteristike kvaliteta. Za odabranu eksponencijalnu, gama i Vejbulovu raspodelu izvedena je teorijska raspodela uzoračke medijane i aproksimirana je Pirsonovom raspodelom I tipa ili Pirsonovom raspodelom VI tipa. Dobijene vrednosti za gornju kontrolnu granicu i moć kontrolnog grafika medijane za teorijsku raspodelu medijane i odgovarajuću Pirsonovu raspodelu su vrlo bliske. Za primenu predloženog kontrolnog grafika medijane, upoređene su mere koeficijenata asimetrije i spljoštenosti i zatim je konstruisan kontrolni grafik medijane za date podatke.

Pored statističkog dizajna kontrolnih grafika za praćenje centralne tendencije negausovih slučajnih veličina, razmatran je i njihov optimalni ekonomsko-statistički dizajn. U ovoj disertaciji je predložena upotreba genetskog algoritma za minimizaciju funkcije očekivanog gubitka pod ograničenjima. Odabrane su iste simetrične raspodele kao u slučaju statističkog dizajna kontrolnog grafika uzoračke sredine, odnosno iste pozitivno asimetrične raspodele kao u slučaju statističkog dizajna kontrolnog grafika medijane. Za sve odabrane raspodele karakteristike kvaliteta,

odgovarajuća Pirsonova raspodela daje rezultate vrlo bliske rezultatima za teorijsku raspodelu standardizovane uzoračke sredine (uzoračke medijane).

Ključne reči kontrolni grafik uzoračke sredine, kontrolni grafik medijane, simetrična raspodela, pozitivno asimetrična raspodela, Pirsonova raspodela, ekonomsko-statistički dizajn, uzorački koeficijent asimetrije, uzorački koeficijent spljoštenosti

Naučna oblast Matematika

Uža naučna oblast Verovatnoća i statistika

UDK broj 519.248 (043.3)

MSC 2010 62E17, 62F10, 62P30

Title *Quality control by monitoring central tendency of nongaussian random variables*

Abstract Design of control chart for monitoring central tendency of nongaussian random variables with symmetric or positively skewed distributions is considered. In the case of nongaussian symmetric distributions, modified X bar control chart is proposed in this dissertation. For chosen Student, Laplace, logistic and uniform distributions, theoretical distribution of the standardized sample mean is calculated and approximated with Pearson type II or Pearson type VII distributions. Width of control limits and power of X bar control chart are established, for a given probability of type I error. The results imply that the corresponding Pearson distribution represents very good approximation of the distribution of the standardized sample mean. For implementation of X bar control chart in practice, measures of sample kurtosis are compared and the usage of proposed chart is illustrated on given data.

In the case of positively skewed distributions, one sided median control chart for monitoring central tendency of quality characteristics is proposed in this dissertation. For chosen exponential, gamma and Weibull distributions, theoretical distribution of sample median is calculated and approximated with Pearson type I or Pearson type VI distributions. Calculated values of upper control limits and power of median control chart for theoretical distribution of sample median and corresponding Pearson distribution are very close. For implementation of median control chart in practice, measures of sample skewness and sample kurtosis are compared and then proposed median chart is constructed for given data.

Besides the statistical design of control charts for monitoring central tendency of nongaussian random variables, their optimal economic statistical design is also considered. Use of genetic algorithms for constrained minimization of expected loss function is proposed in this dissertation. Same symmetric distributions as in the case of statistical design of the X bar control chart and positively skewed distributions as in the case of statistical design of median control chart are chosen. For all chosen distributions of quality characteristic, a corresponding Pearson distribution gives

results very close to results based on the theoretical distribution of the standardized sample mean (sample median).

Keywords X bar control chart, median control chart, symmetric distribution, positively skewed distribution, Pearson distribution, economic statistical design, sample skewness, sample kurtosis

Scientific field Mathematics

Scientific subfield Probability and statistics

UDC number 519.248 (043.3)

MSC 2010 62E17, 62F10, 62P30

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Osnovni pojmovi iz statističke kontrole kvaliteta	2
1.1.1	Definicija kvaliteta	2
1.1.2	Karakteristika kvaliteta	4
1.1.3	Slučajni i određivi uzroci	5
1.1.4	Kontrolni grafik	7
1.1.5	Verovatnoće grešaka prve i druge vrste	8
1.1.6	Prosečna dužina niza	9
1.1.7	Izbor kontrolnih granica	9
1.1.8	Faza I i Faza II upotrebe kontrolnog grafika	10
1.2	Simetrične raspodele	11
1.2.1	Studentova raspodela $t(\nu, \mu, \eta)$	11
1.2.2	Laplasova raspodela $L_2(\eta, \mu)$	11
1.2.3	Logistička raspodela $LGS(\mu, \eta)$	12
1.2.4	Uniformna raspodela $U(a, b)$	12
1.3	Pozitivno asimetrične raspodele	13
1.3.1	Eksponencijalna raspodela $E_2(\lambda, c)$	13
1.3.2	Gama raspodela $G_3(a, b, c)$	13
1.3.3	Vejbulova raspodela $W_3(a, b, c)$	13
1.4	Pirsonov sistem raspodela	14
1.4.1	Pirsonova raspodela I tipa	15
1.4.2	Pirsonova raspodela II tipa	15
1.4.3	Pirsonova raspodela VI tipa	16
1.4.4	Pirsonova raspodela VII tipa	16

1.5	Testovi normalnosti raspodele	16
1.5.1	Kolmogorovljev test	17
1.5.2	Liliforov test	18
1.5.3	Anderson-Darlingov test	18
1.5.4	Šapiro-Vilkov test	19
1.6	Testovi simetričnosti raspodele	20
1.6.1	Kabiljo-Masarov test simetričnosti raspodele	21
1.6.2	Mirin test simetričnosti raspodele	21
1.6.3	Miao-Gel-Gastvirtov test simetričnosti raspodele	23
2	Kontrolni grafik za praćenje centralne tendencije	24
2.1	Simetrična slučajna veličina	24
2.1.1	Ocene nepoznatih parametara	25
2.1.2	Gausova slučajna veličina	26
2.1.2.1	Verovatnoća greške I vrste i moć \bar{X} kontrolnog grafika	27
2.1.2.2	Primer upotrebe kontrolnog grafika uzoračke sredine	28
2.1.3	Negausova slučajna veličina	32
2.1.3.1	Raspodela karakteristike kvaliteta	33
2.1.3.2	Raspodela standardizovane uzoračke sredine	33
2.1.3.2.1	Uzorak iz Studentove raspodele	34
2.1.3.2.2	Uzorak iz Laplasove raspodele	35
2.1.3.2.3	Uzorak iz logističke raspodele	37
2.1.3.2.4	Uzorak iz uniformne raspodele	38
2.1.3.3	Dizajn kontrolnog grafika uzoračke sredine	39
2.1.3.4	Primena kontrolnog grafika uzoračke sredine	42
2.1.3.4.1	Ocene koeficijenta spljoštenosti	42
2.1.3.4.2	Primer	43
2.2	Asimetrična slučajna veličina	48
2.2.1	Raspodela uzoračke medijane	48
2.2.2	Kontrolni grafici medijane u literaturi	49
2.2.2.1	Kuov kontrolni grafik medijane	49

2.2.2.2	Janacek-Miklov kontrolni grafik medijane	51
2.2.2.3	Kontrolni grafik medijane zasnovan na Man-Vitnijevoj statistici	53
2.2.3	Jednostrani kontrolni grafik medijane pozitivno asimetrične raspodele	54
2.2.4	Raspodele karakteristike kvaliteta	55
2.2.5	Dizajn kontrolnog grafika medijane	55
2.2.6	Primena kontrolnog grafika medijane	57
2.2.6.1	Izbor ocena koeficijenata asimetrije i spljoštenosti	59
2.2.6.2	R kontrolni grafik	64
2.2.6.3	Primer	65
3	Ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika za praćenje centralne tendencije	73
3.1	Pretpostavke	74
3.2	Parametri dizajna	74
3.3	Očekivana dužina proizvodnog ciklusa	75
3.4	Očekivani troškovi	77
3.5	Očekivani gubitak po satu	77
3.6	Metode dizajna	77
3.7	Ekonomsko-statistički model	78
3.8	Genetski algoritmi	78
3.8.1	Koraci genetskog algoritma	79
3.9	Primer	81
3.9.1	Normalna raspodela	82
3.9.2	Negausova simetrična raspodela	83
3.9.3	Pozitivno asimetrična raspodela	85
4	Zaključak	87
	Literatura	90
	Biografija	96

1

Uvod

Statistička kontrola kvaliteta predstavlja skup statističkih metoda za poboljšanje kvaliteta proizvoda. Termin "proizvodi" se ovde koristi kako za robu, poput automobila, kompjutera, odeće, tako i za usluge koje pružaju telefonske kompanije, hoteli, banke, itd. Metode za poboljšanje kvaliteta se mogu primeniti na bilo koju oblast delatnosti kompanije – od inženjerskog dizajna i proizvodnje do potrošačkog servisa.

U nastavku ćemo uvesti osnovne pojmove iz statističke kontrole kvaliteta, opisati razmatrane raspodele slučajnih veličina, Pirsonov sistem raspodela, kao i korišćene testove normalnosti i testove simetričnosti raspodele podataka.

Drugo poglavlje bavi se dizajnom kontrolnih grafika za praćenje centralne tendencije. Prvo je opisan standardan kontrolni grafik uzoračke sredine za slučaj kada je raspodela posmatrane slučajne veličine normalna. Zatim su predloženi kontrolni grafici za praćenje centralne tendencije nagausovih slučajnih veličina – modifikovani kontrolni grafik uzoračke sredine kada je raspodela podataka simetrična i jednostrani kontrolni grafik medijane kada je raspodela podataka (pozitivno) asimetrična. U drugom poglavlju ispitivana je i moć navedenih kontrolnih grafika za detektovanje odstupanja od ciljne vrednosti parametra centralne tendencije.

Treće poglavlje bavi se ekonomsko-statističkim dizajnom kontrolnih grafika za praćenje centralne tendencije slučajnih veličina. Predložena je upotreba genetskog algoritma za minimizaciju funkcije očekivanog gubitka.

Na kraju teze dat je zaključak i mogući smerovi daljeg rada.

1.1 Osnovni pojmovi iz statističke kontrole kvaliteta

1.1.1 Definicija kvaliteta

Tradicionalna definicija kvaliteta je (Montgomery, 2005)

Kvalitet znači pogodnost za upotrebu.

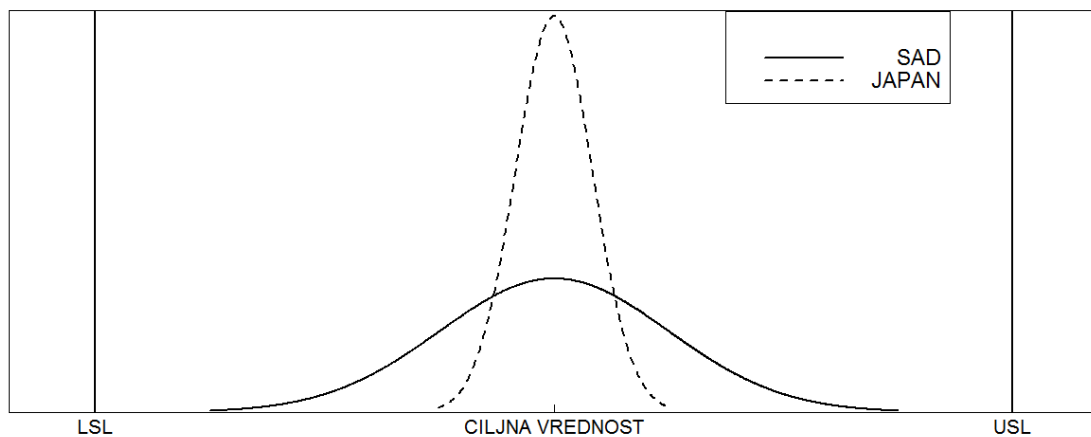
Ova definicija zasnovana je na gledištu da proizvodi moraju da ispunjavaju zahteve i potrebe potrošača. Postoje dva aspekta pogodnosti za upotrebu: kvalitet dizajna i kvalitet usaglašenosti. Roba i usluge proizvode se sa različitim nivoima kvaliteta. Ove varijacije u nivoima kvaliteta su namerne i odgovarajući tehnički termin je kvalitet dizajna. Na primer, glavni cilj automobila je da obezbedi korisniku bezbedan prevoz. Međutim, automobili se razlikuju po veličini, izgledu, performansama - to su namerne razlike u dizajnu između tipova automobila koje uključuju vrste materijala korišćenih za konstrukciju, specifikacije delova, pouzdanost ostvarenu inženjerskim razvojem motora i drugih delova opreme. S druge strane, kvalitet usaglašenosti odnosi se na to koliko dobro je proizvod usaglašen sa specifikacijama dizajna. Na kvalitet usaglašenosti utiče veliki broj faktora: izbor proizvodnog procesa, obuka i nadzor radne snage, vrste kontrole procesa, testovi i inspekcije koji se primenjuju, motivacija radnika za postizanje kvaliteta, itd. Na žalost, ova definicija kvaliteta se danas pre povezuje sa kvalitetom usaglašenosti nego sa kvalitetom dizajna, što vodi ka manjem fokusiranju na potrošača a više na "usaglašenost-sa-specifikacijama" pristup kvalitetu, bez obzira da li je proizvod, čak i kad je proizveden po standardima, zaista pogodan za upotrebu od strane korisnika.

Savremena definicija kvaliteta je

Kvalitet je inverzno proporcionalan varijabilnosti.

Ova definicija implicira da kako varijabilnost posmatrane karakteristike proizvoda raste, kvalitet proizvoda opada, što ćemo ilustrovati narednim primerom.

Primer 1.1.1 Pre nekoliko godina jedna od kompanija u Sjedinjenim Američkim Državama izvela je komparativnu studiju menjača proizvedenih u fabrici u Americi i menjača proizvedenih u fabrici u Japanu. Analiza zahteva za garancijom i troškova popravki pokazala je da postoji značajna razlika između dva izvora proizvodnje,



Slika 1.1: Raspodela karakteristike kvaliteta menjača proizvedenih u Sjedinjenim Američkim Državama i menjača proizvedenih u Japanu

pri čemu su troškovi popravki menjača proizvedenih u Japanu znatno niži. Da bi se otkrio razlog ove razlike u troškovima i performansama, uzeti su slučajni uzorci menjača proizvedenih u obe fabrike, menjači su rastavljeni i izmerene su bitne karakteristike kvaliteta. Rezultati ove studije prikazani su na slici 1.1.

Raspodele karakteristike kvaliteta su, u oba slučaja, centrirane u ciljnoj vrednosti. Međutim, vrednosti karakteristike kvaliteta za menjače proizvedene u fabrici u Americi su raspršene u okviru 75% intervala specifikacija, što nam govori da će vrlo malo neusaglašenih jedinica biti proizvedeno. Zapravo, proizvodi fabrike bili su sasvim dobrog nivoa kvaliteta, na osnovu opšte prihvaćenog gledišta kompanije o kvalitetu. S druge strane, fabrika u Japanu proizvodila je menjače za koje je varijabilnost bitne karakteristike kvaliteta u okviru samo 25% intervala specifikacija. Dakle, varijabilnost karakteristike kvaliteta menjača napravljenih u Japanu znatno je manja u poređenju sa menjačima napravljenim u Americi. Posledično, smanjena varijabilnost se direktno odrazila na manje troškove. Dalje, menjači napravljeni u Japanu su tiši, omogućili su lakše menjanje brzina i potrošači su ih percipirali boljim od menjača proizvedenih u Americi. Manje popravki i zahteva za garancijom znači manje prepravki i smanjenje izgubljenog vremena, truda i novca. Prema tome, kvalitet je zaista obrnuto proporcionalan varijabilnosti.

Ako je varijabilnost bitne karakteristike proizvoda mala, neće imati nikakvog

uticaja na korisnika, ali ako je suviše velika, korisnik će percipirati proizvod kao nepoželjan i neprihvatljiv. Uzroci ovakve varijabilnosti mogu biti razlike u materijalima, razlike u performansama i funkcionisanju proizvodnih mašina, i razlike u načinima rada operatera mašina. Sve ovo vodi ka narednoj definiciji poboljšanja kvaliteta.

Poboljšanje kvaliteta predstavlja smanjenje varijabilnosti procesa i proizvoda.

Prevelika varijabilnost procesa dovodi do gubitka novca, vremena i truda. Prema tome, druga, često vrlo korisna definicija je

Poboljšanje kvaliteta predstavlja smanjenje gubitaka.

Ova definicija je posebno korisna u uslužnim industrijama, gde se ne može mnogo toga direktno meriti. U uslužnim industrijama, problem u kvalitetu može biti greška, čije ispravljanje zahteva trud i trošak. Poboljšanjem procesa usluge, mogu se izbeći ovaj gubitak truda i troškovi.

1.1.2 Karakteristika kvaliteta

Karakteristika kvaliteta predstavlja ključnu karakteristiku proizvoda koja se može izmeriti. To je slučajna veličina koja može biti neprekidna (dužina, prečnik, težina, debljina proizvoda, itd.) ili diskretna (broj grešaka načinjenih prilikom popunjavanja zahteva za zajmom, broj medicinskih grešaka načinjenih u bolnici, itd.). Željena vrednost karakteristike kvaliteta naziva se *nominalna* ili *ciljna vrednost* (eng. *target value*) i ona je obično ograničena intervalom vrednosti koje se nazivaju *granice specifikacije* (eng. *specification limits*). Smatra se da su granice specifikacije dovoljno blizu ciljnoj vrednosti tako da ne utiču na funkcionisanje ili učinak proizvoda ako je vrednost karakteristike kvaliteta u tom intervalu. Najveća dozvoljena vrednost karakteristike kvaliteta naziva se *gornja granica specifikacije* USL (eng. *upper specification limit*), a najmanja dozvoljena vrednost karakteristike kvaliteta naziva se *donja granica specifikacije* LSL (eng. *lower specification limit*). Neke karakteristike kvaliteta imaju samo gornju ili samo donju granicu specifikacije. Na primer, ne postoji gornja granica za zateznu čvrstoću konopaca od najlonskih vlakana, samo donja granica specifikacije. Granice specifikacije su rezultat inženjerskog procesa dizajna proizvoda. Ako se vrednost karakteristike kvaliteta nalazi van intervala granica

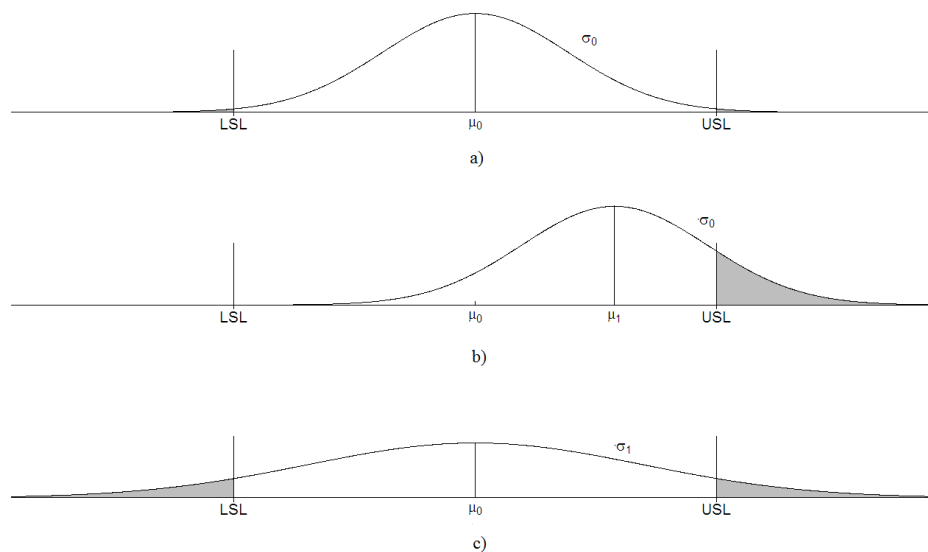
specifikacija, smatra se da je proizvod *neusaglašen* (eng. *nonconforming*). Određeni tip nedostatka naziva se *neusaglašenost* (eng. *nonconformity*). Neusaglašen proizvod nije uvek nepogodan za upotrebu. Na primer, koncentracija aktivnih sastojaka deterdženta može biti ispod donje granice specifikacije, ali može delovati prihvatljivo ako se iskoristi veća količina proizvoda. Neusaglašen proizvod se smatra defektnim ako ima jedan ili više defekata, što su dovoljno ozbiljne neusaglašenosti da značajno utiču na efikasnu ili bezbednu upotrebu proizvoda.

1.1.3 Slučajni i određivi uzroci

Kod svakog proizvodnog procesa, bez obzira na njegov dizajn i održavanje, postoji prirodna varijabilnost koja je posledica postojanja više nesistematskih, slučajnih uzroka. U statističkoj kontroli kvaliteta, ova slučajna varijabilnost dovodi do onoga što se obično naziva "stabilan sistem slučajnih uzroka". Za proces koji funkcioniše samo sa slučajnim uzrocima varijabilnosti kaže se da je pod statističkom kontrolom (ili u stanju kontrole).

Mogu se pojaviti i druge vrste varijabilnosti procesa, koje su posledica postojanja sistematskih uzroka i obično proizilazi iz tri izvora: nepravilno podešenih ili kontrolisanih mašina, grešaka operatera ili defektnih sirovina. Takva varijabilnost obično je velika u poređenju sa slučajnom varijabilnosti i predstavlja neprihvatljiv nivo funkcionisanja procesa. Uzroci sistematske varijabilnosti nazivaju se *određivi uzroci* (eng. *assignable causes*). Za proces koji funkcioniše uz prisustvo odredivih uzroka kaže se da je van statističke kontrole (ili u stanju van kontrole).

Slučajni i određivi uzroci ilustrovani su na slici 1.2. Pretpostavlja se da posmatrana karakteristika kvaliteta ima normalnu $N(\mu, \sigma^2)$ raspodelu. U momentu t_0 (grafik a) na slici 1.2), proces je u stanju kontrole, prisutni su samo slučajni uzroci varijabilnosti. Kao rezultat, i srednja vrednost μ i standardna devijacija σ karakteristike kvaliteta su jednaki njihovim nominalnim vrednostima, označenim sa μ_0 i σ_0 , redom. U trenutku t_1 (grafik b) na slici 1.2) javlja se odrediv uzrok koji je doveo do pomeranja srednje vrednosti na novu vrednost, $\mu_1 > \mu_0$. U trenutku t_2 (grafik c) na slici 1.2.) javlja se novi odrediv uzrok koji je doveo do pomeranja standardne devijacije na veću vrednost, $\sigma_1 > \sigma_0$, dok je srednja vrednost opet



Slika 1.2: Slučajni i određivi uzroci

na nominalnom nivou. Od momenta t_1 nadalje, proces je van kontrole. Odredivi uzrok može dovesti i do istovremenog pomeranja i srednje vrednosti i standardne devijacije karakteristike kvaliteta. Kao što se može videti na slici 1.2, kada je proces van kontrole, proizvodi se veći broj neusaglašenih proizvoda.

Proces može funkcionisati u stanju kontrole relativno dug period vremena. Međutim, nijedan proces neće zauvek ostati stabilan, i u nekom momentu pojaviće se određivi uzroci koji će dovesti do pomeranja srednje vrednosti ili standardne devijacije posmatrane karakteristike kvaliteta na vrednosti van kontrole. Kada je proces u stanju kontrole, većina vrednosti karakteristike kvaliteta upada u interval ograničen donjom i gornjom granicom specifikacije. Kada je proces van kontrole, veći procenat vrednosti karakteristike kvaliteta nalazi se van granica specifikacija. Glavni cilj statističke kontrole kvaliteta je da brzo detektuje prisustvo odredivih uzroka, tako da se ispitivanje procesa i korektivni postupci da se eliminiše izvor ove sistemske varijabilnosti može sprovesti pre nego što se proizvede veliki broj neusaglašenih proizvoda. Kontrolni grafik jedna je od metoda praćenja procesa koja služi za ovu svrhu.

1.1.4 Kontrolni grafik

Kontrolni grafik predstavlja grafički prikaz posmatrane karakteristike kvaliteta. Na x -osi se predstavlja redni broj uzorka ili vreme a vrednost odgovarajuće uzoračke statistike na y -osi. Svaku takvu tačku ćemo zvati uzoračka tačka ili samo tačka. Kontrolni grafik se uglavnom sastoji od tri horizontalne linije: *centralne linije* CL (eng. *center line*) koja predstavlja ciljnu vrednost parametra raspodele karakteristike kvaliteta, *donje kontrolne granice* LCL (eng. *lower control limit*) i *gornje kontrolne granice* UCL (eng. *upper control limit*). Ove kontrolne granice su odabrane tako da ako je proces u stanju kontrole, skoro sve uzoračke tačke upadaju između njih. Dok god se tačke na grafiku nalaze između kontrolnih granica, smatra se da je proces u stanju kontrole. Međutim, tačka koja se na grafiku nađe van kontrolnih granica smatra se dokazom da je proces van kontrole, i neophodno je izvršiti ispitivanje i primeniti korektivne postupke kako bi se otkrio i eliminisao određivi uzrok ili uzroci odgovorni za takvo ponašanje procesa. Uzoračke tačke se povezuju na kontrolnom grafiku pravolinijskim segmentima, da bi se olakšala vizuelizacija niza uzoračkih tačaka tokom vremena. Čak i ako se sve uzoračke tačke na kontrolnom grafiku nađu u okviru kontrolnih granica, ukoliko formiraju obrazac koji nije slučajan, to takođe može biti naznaka da je proces van kontrole. Ukoliko je proces u stanju kontrole, sve tačke na grafiku treba da budu slučajno raspoređene oko centralne linije.

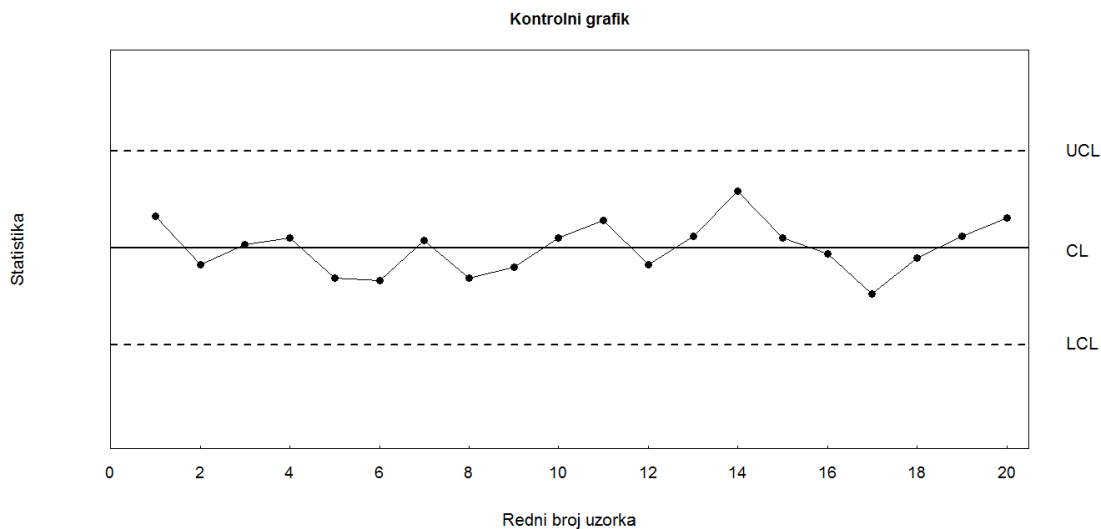
Predstavićemo sada opšti model kontrolnog grafika. Neka je W odabrana statistika sa srednjom vrednošću μ_W i standardnom devijacijom σ_W . Tada su centralna linija, donja i gornja kontrolne granice jednake

$$LCL = \mu_W - k\sigma_W$$

$$CL = \mu_W$$

$$UCL = \mu_W + k\sigma_W,$$

gde je k rastojanje kontrolnih granica od centralne linije, izraženo u jedinicama standardne devijacije. Opštu teoriju kontrolnih grafika uveo je Volter Šuhart (Walter



Slika 1.3: Primer kontrolnog grafika

Shewhart) i kontrolni grafici formirani na osnovu ovih principa nazivaju se Šuhartovi kontrolni grafici. Primer jednog kontrolnog grafika dat je na slici 1.3.

Ako je karakteristika kvaliteta neprekidna slučajna veličina, pogodno je opisati njenu raspodelu merom centralne tendencije i merom varijabilnosti. Kontrolni grafik uzoračke sredine (ili \bar{X} kontrolni grafik) najčešće se koristi za praćenje centralne tendencije posmatrane karakteristike kvaliteta, dok se grafici zasnovani na uzoračkom rasponu ili uzoračkoj standardnoj devijaciji koriste za praćenje varijabilnosti karakteristike kvaliteta.

Treba naglasiti da ne postoji veza između kontrolnih granica i granica specifikacije. Kontrolne granice se formiraju na osnovu prirodne varijabilnosti karakteristike kvaliteta. S druge strane, granice specifikacije postavljaju inženjeri ili menadžment kroz proces dizajna i razvoja proizvoda.

1.1.5 Verovatnoće grešaka prve i druge vrste

Verovatnoća greške prve vrste predstavlja verovatnoću da se tačka na kontrolnom grafiku nađe van kontrolnih granica, što je indikacija da je proces van kontrole, kada, zapravo, ne postoji određiv uzrok

$$\alpha = P\{W \notin [LCL, UCL] | H_0 : \mu = \mu_0\}.$$

Verovatnoća greške druge vrste predstavlja verovatnoću da se tačka na kontrolnom grafiku nađe unutar kontrolnih granica, što je indikacija da je proces u stanju kontrole, kada, zapravo, postoji odrediv uzrok

$$\beta = P\{W \in [LCL, UCL] | H_1 : \mu = \mu_1\}.$$

1.1.6 Prosečna dužina niza

Dužina niza predstavlja broj prikupljenih uzoraka dok se ne detektuje pomeranje posmatranog parametra. Ako su statistike koje se predstavljaju na kontrolnom grafiku nezavisne slučajne veličine, dužina niza je slučajna veličina sa geometrijskom raspodelom $G(\alpha)$ kada je proces u stanju kontrole i $G(1 - \beta)$ kada je proces van kontrole. *Prosečna dužina niza* ARL (eng. *average run length*) tada je jednaka srednjoj vrednosti geometrijske raspodele

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha},$$

za ARL u kontroli i

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta},$$

za ARL van kontrole.

Još jedna mera performansi kontrolnog grafika je *prosečno vreme do signala* ATS (eng. *average time to signal*), koje predstavlja broj vremenskih perioda dok se ne detektuje pomeranje posmatranog parametra. Ukoliko se uzorci uzimaju na svakih h jedinica vremena, prosečno vreme do signala jednako je

$$ATS = ARL \cdot h.$$

1.1.7 Izbor kontrolnih granica

Izbor odgovarajućih kontrolnih granica predstavlja jednu od najbitnijih odluka prilikom konstruisanja kontrolnog grafika. Ukoliko se kontrolne granice udalje od cen-

tralne linije, smanjiće se verovatnoća greške prve vrste, ali će se povećati verovatnoća greške druge vrste. S druge strane, ukoliko se kontrolne granice približe centralnoj liniji kontrolnog grafika, javlja se suprotan efekat: povećava se verovatnoća greške prve vrste, a smanjuje verovatnoća greške druge vrste.

Postoje dva pristupa prilikom izbora kontrolnih granica:

1. Kontrolne granice se navode kao broj standardnih devijacija udaljenih od centralne linije. Obično se koriste 3σ kontrolne granice. Van 3σ rastojanja od srednje vrednosti nalazi se 0.27% vrednosti normalne raspodele, odnosno verovatnoća greške prve vrste je $\alpha = 0.0027$.
2. Kontrolne granice se računaju za zadata verovatnoću greške prve vrste α (tzv. verovatnosne granice).

1.1.8 Faza I i Faza II upotrebe kontrolnog grafika

Upotreba kontrolnih grafika obuhvata prvu i drugu fazu njihove primene. U prvoj fazi, prikupljaju se i analiziraju preliminarni uzorci u retrospektivnoj analizi i konstruišu probne kontrolne granice kako bi se utvrdilo da li je proces bio u stanju kontrole kada su podaci prikupljeni. Osnovna uloga kontrolnog grafika u fazi I je da pomogne radnom osoblju u dovođenju procesa u stanje statističke kontrole. Obično se uzima $m = 20$ ili $m = 25$ uzoraka obima n . Ukoliko su neki od parametara raspodele statistike nepoznati, računa se njihova ocena na osnovu dobijenih podataka. Zatim se računaju kontrolne granice i vrednosti statistike predstavljaju na kontrolnom grafiku za svaki uzorak. Ispituju se tačke koje su van kontrolnih granica, u potrazi za mogućim odredivim uzrocima. Tačke van kontrolnih granica koje odgovaraju identifikovanim odredivim uzrocima se isključuju i računaju se nove revidirane kontrolne granice. Zatim se prikupljaju novi podaci i nove vrednosti statistika se porede sa ovim revidiranim kontrolnim granicama. Ponekad ova vrsta analize obuhvata nekoliko ciklusa u kojima se prikupljaju podaci, konstruiše kontrolni grafik, detektuju i koriguju odredivi uzroci i računaju nove, revidirane kontrolne granice.

Faza II počinje pošto je proces stabilizovan i dobijen je skup podataka koji oslikava funkcionisanje procesa u stanju kontrole. U drugoj fazi kontrolni grafici

koriste se za praćenje procesa. Određivi uzroci koji se javljaju u ovoj fazi dovode do manjih pomeranja srednje vrednosti ili standardne devijacije posmatrane karakteristike kvaliteta, pošto su uzroci veće varijabilnosti odstranjeni u prvoj fazi upotrebe kontrolnih grafika.

1.2 Simetrične raspodele

Od simetričnih raspodela ćemo razmatrati Studentovu $t(\nu, \mu, \eta)$, Laplasovu $L_2(\eta, \mu)$, logističku $LGS(\mu, \eta)$ i uniformnu $U(a, b)$ raspodelu. Navedene su odgovarajuće gustine raspodele verovatnoće.

Koristićemo sledeće oznake za srednju vrednost, medijanu, disperziju, koeficijente asimetrije i spljoštenosti slučajne veličine X , redom: $\mu = E(X)$, M , $\sigma^2 = D(X)$, $\alpha_3 = \frac{E(X-E(X))^3}{\sigma^{\frac{3}{2}}}$, $\alpha_4 = \frac{E(X-E(X))^4}{\sigma^4}$. S obzirom da se rad o simetričnim raspodelama, koeficijent asimetrije $\alpha_3 = 0$.

1.2.1 Studentova raspodela $t(\nu, \mu, \eta)$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\eta\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{\nu} \left(\frac{x-\mu}{\eta}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, x \in \mathbb{R},$$

gde je ν ($\nu \in \mathbb{R}$) parametar oblika, η ($\eta > 0$) parametar skaliranja i μ ($\mu \in \mathbb{R}$) parametar lokacije. Disperzija i koeficijent spljoštenosti su redom jednaki

$$\sigma^2 = \frac{\nu}{\nu-2}\eta^2, \nu > 2, \quad \alpha_4 = 3 + \frac{6}{\nu-4}, \nu > 4.$$

Slučajna veličina $Y = \frac{X-\mu}{\eta}$ ima Studentovu raspodelu $t(\nu)$ sa gustinom raspodele verovatnoće

$$f(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, y \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Laplasova raspodela $L_2(\eta, \mu)$

$$f(x) = \frac{1}{2\eta} \exp\left\{-\frac{|x-\mu|}{\eta}\right\}, x \in \mathbb{R},$$

gde μ ($\mu \in \mathbb{R}$) je parametar lokacije a η ($\eta > 0$) parametar skaliranja. Disperzija i koeficijent spljoštenosti su, redom, jednaki

$$\sigma^2 = 2\eta^2, \quad \alpha_4 = 6.$$

Slučajna veličina $Y = X - \mu$ ima standardnu Laplasovu raspodelu $L_1(\eta)$ sa gustinom raspodele verovatnoće

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\eta} \exp\left\{-\frac{|y|}{\eta}\right\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

1.2.3 Logistička raspodela $LGS(\mu, \eta)$

$$f(x) = \frac{\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\eta}\right\}}{\eta \cdot \left(1 + \exp\left\{-\frac{x-\mu}{\eta}\right\}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gde je μ ($\mu \in \mathbb{R}$) parametar lokacije i η ($\eta > 0$) parametar skaliranja. Srednja vrednost, disperzija i koeficijent spljoštenosti su, redom, jednaki

$$\sigma^2 = \frac{\eta^2 \pi^2}{3}, \quad \alpha_4 = 4.2.$$

Slučajna veličina $Y = \frac{X-\mu}{\eta}$ ima standardnu logističku raspodelu sa gustinom raspodele verovatnoće

$$f_Y(y) = \frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

1.2.4 Uniformna raspodela $U(a, b)$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a, b],$$

gde su a i b parametri lokacije.

Srednja vrednost, disperzija i koeficijent spljoštenosti su, redom, jednaki

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \alpha_4 = 1.8.$$

Slučajna veličina $Y = \frac{X-a}{b-a}$ ima standardnu $U(0, 1)$ raspodelu.

1.3 Pozitivno asimetrične raspodele

Od pozitivno asimetričnih raspodela ćemo razmatrati eksponencijalnu $E_2(\lambda, c)$, gama $G_3(a, b, c)$ i Vejbulovu $W_3(a, b, c)$ raspodelu.

1.3.1 Eksponencijalna raspodela $E_2(\lambda, c)$

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x-c}{\lambda}}, \quad x \geq c,$$

gde je λ ($\lambda > 0$) parametar skaliranja, c ($c \in \mathbb{R}$) parametar lokacije. Srednja vrednost, medijana i disperzija su jednake, redom

$$\mu = c + \lambda, \quad M = c + \lambda \ln 2, \quad \sigma^2 = \lambda^2$$

Koeficijenti asimetrije i spljoštenosti eksponencijalne raspodele su konstantni i jednaki su

$$\alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 9$$

1.3.2 Gama raspodela $G_3(a, b, c)$

$$f(x) = \frac{1}{b\Gamma(a)} \left(\frac{x-c}{b} \right)^{a-1} e^{-\frac{x-c}{b}}, \quad x \geq c,$$

gde je a ($a > 0$) parametar oblika, b ($b > 0$) parametar skaliranja i c ($c \in \mathbb{R}$) parametar lokacije.

Srednja vrednost, disperzija, koeficijenti asimetrije i spljoštenosti su jednaki, redom

$$\mu = ab + c, \quad \sigma^2 = ab^2, \quad \alpha_3 = \frac{2}{\sqrt{a}}, \quad \alpha_4 = \frac{6}{a} + 3$$

Za medijanu ne postoji jednostavan izraz.

1.3.3 Vejbulova raspodela $W_3(a, b, c)$

$$f(x) = \frac{a}{b} \left(\frac{x-c}{b} \right)^{a-1} e^{-\left(\frac{x-c}{b}\right)^a}, \quad x \geq c,$$

gde je a ($a > 0$) parametar oblika, b ($b > 0$) parametar skaliranja i c ($c \in \mathbb{R}$) parametar lokacije.

Srednja vrednost, medijana, disperzija, koeficijenti asimetrije i spljoštenosti su jednaki, redom

$$\begin{aligned}\mu &= b\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), & M &= c + b(\ln 2)^{\frac{1}{a}}, \\ \sigma^2 &= b^2\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right), \\ \alpha_3 &= \frac{2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{a}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) + \Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)^{1.5}}, \\ \alpha_4 &= \frac{3\Gamma^3\left(1 + \frac{2}{a}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)\Gamma\left(1 + \frac{3}{a}\right) + \Gamma\left(1 + \frac{4}{a}\right)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)^2}\end{aligned}$$

1.4 Pirsonov sistem raspodela

Gustina raspodele verovatnoće $y = f(x)$ svakog člana Pirsonovog sistema raspodela zadovoljava diferencijalnu jednačinu (Johnson et al, 1994)

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\frac{a+x}{c_0 + c_1x + c_2x^2}. \quad (1.1)$$

Oblik raspodele zavisi od vrednosti parametara a , c_0 , c_1 i c_2 . Kada je $E(X) = 0$, formule za ove koeficijente su

$$c_0 = \frac{4\beta_2 - 3\beta_1}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}\sigma^2 \quad (1.2)$$

$$a = c_1 = \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}\sigma \quad (1.3)$$

$$c_2 = \frac{2\beta_2 - 3\beta_1 - 6}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}, \quad (1.4)$$

gde je $\beta_1 = \alpha_3^2$, $\beta_2 = \alpha_4$. Karl Pirson (Pearson, 1916) klasifikovao je raspodele različitih oblika u nekoliko tipova. Oblik rešenja diferencijalne jednačine (1.1) zavisi

od prirode rešenja kvadratne jednačine

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 = 0. \quad (1.5)$$

1.4.1 Pirsonova raspodela I tipa

Pirsonova raspodela I tipa odgovara slučaju kada su oba rešenja a_1 i a_2 kvadratne jednačine (1.5) realna i suprotnog znaka. Označićemo $a_1 < 0 < a_2$.

Slučajna veličina $\frac{X-\mu-a_1}{a_2-a_1}$ tada ima beta raspodelu $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$, odnosno gustina raspodele verovatnoće slučajne veličine X jednaka je

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{s} \left(\frac{x - \lambda}{s}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{x - \lambda}{s}\right)^{\beta-1}, \quad 0 < \frac{x - \lambda}{s} < 1, \quad (1.6)$$

gde su

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu + a_1, \quad s = a_2 - a_1, \\ \alpha &= \frac{a + a_1}{c_2(a_2 - a_1)} + 1, \quad \beta = -\frac{a + a_2}{c_2(a_2 - a_1)} + 1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.4.2 Pirsonova raspodela II tipa

Pirsonova raspodela II tipa može se koristiti za aproksimaciju raspodele slučajne veličine sa koeficijentom asimetrije $\alpha_3 = 0$ i koeficijentom spljoštenosti $\alpha_4 < 3$ (Johnson et al., 1994). Predstavlja specijalan slučaj Pirsonove raspodele I tipa ograničen na simetrične raspodele. Gustina raspodele verovatnoće slučajne veličine X jednaka je

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \frac{1}{s} \left(\frac{x - \lambda}{s}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{x - \lambda}{s}\right)^{\alpha-1}, \quad 0 < \frac{x - \lambda}{s} < 1, \quad (1.8)$$

gde su

$$\lambda = -\sqrt{\frac{2\alpha_4}{3 - \alpha_4}}, \quad s = 2\sqrt{\frac{2\alpha_4}{3 - \alpha_4}}, \quad \alpha = \frac{5\alpha_4 - 9}{2(3 - \alpha_4)} + 1, \quad (1.9)$$

Drugim rečima, slučajna veličina $\frac{X-\lambda}{s}$ ima beta raspodelu $\mathcal{B}(\alpha, \alpha)$.

1.4.3 Pirsonova raspodela VI tipa

Pirsonova raspodela VI tipa odgovara slučaju kada su rešenja a_1 i a_2 kvadratne jednačine (1.5) realna i istog znaka. Razmotrićemo slučaj kada je $a_1 < a_2 < 0$.

Slučajna veličina $\frac{X-\mu-a_1}{a_2-a_1}$ tada ima beta prim raspodelu $\mathcal{B}'(\alpha, \beta)$, odnosno gustina raspodele verovatnoće slučajne veličine X jednaka je

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{s} \left(\frac{x - \lambda}{s}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 + \frac{x - \lambda}{s}\right)^{-\alpha-\beta}, \quad \frac{x - \lambda}{s} > 0, \quad (1.10)$$

gde su

$$\begin{aligned} \lambda &= \mu + a_2, \quad s = a_2 - a_1, \\ \alpha &= -\frac{a + a_2}{c_2(a_2 - a_1)} + 1, \quad \beta = \frac{1}{c_2} - 1. \end{aligned} \quad (1.11)$$

1.4.4 Pirsonova raspodela VII tipa

Pirsonova raspodela VII tipa može se koristiti za aproksimaciju raspodele slučajne veličine sa koeficijentom asimetrije $\alpha_3 = 0$ i koeficijentom spljoštenosti $\alpha_4 > 3$ (Johnson et al., 1994). Gustina raspodele verovatnoće jednaka je (Johnson et al., 1994, Djoric et al., 2007)

$$f(x) = \frac{1}{\alpha B\left(m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\alpha^2}\right)^{-m}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gde su

$$m = \frac{5\alpha_4 - 9}{2(\alpha_4 - 3)}, \quad \alpha = \sigma_X \sqrt{\frac{2\alpha_4}{\alpha_4 - 3}}$$

i $B(a, b)$ je beta funkcija.

1.5 Testovi normalnosti raspodele

Neka je X_1, X_2, \dots, X_n prost slučajan uzorak sa apsolutno neprekidnom funkcijom raspodele $F(x)$ koja je nepoznata. Želimo da testiramo hipotezu da uzorak potiče

iz normalne raspodele, tj. testiramo nultu hipotezu

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \quad \text{za svako } x$$

protiv alternativne hipoteze

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x), \quad \text{za neko } x,$$

gde je $F_0(x)$ funkcija normalne $N(\mu, \sigma^2)$ raspodele.

U nastavku ćemo razmotriti Kolmogorovljev, Liliforov, Anderson-Darlingov i Šapiro-Vilkov test normalnosti raspodele.

1.5.1 Kolmogorovljev test

Kolmogorov (Kolmogorov, 1933) je predložio statistiku

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|,$$

gde je $F_n(x)$ empirijska funkcija raspodele definisana sa

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq x\},$$

$I\{X_i \leq x\}$ je indikator funkcija, $I\{X_i \leq x\} = \begin{cases} 1, & X_i \leq x \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Vrednost Kolmogorovljeve statistike predstavlja najveću vertikalnu razliku između pretpostavljene funkcije raspodele i empirijske funkcije raspodele. Ako je tačna nulta hipoteza, statistika $\sqrt{n}D_n$ ima približno Kolmogorovljevu raspodelu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{D_n \leq \frac{d}{\sqrt{n}}\} = K(d), \quad \forall d > 0$$

gde je $K(d) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 d^2}$. Smirnov (Smirnov, 1948) je dao tablične vrednosti Kolmogorovljeve raspodele za različite vrednosti d .

Nulta hipoteza se odbacuje ukoliko je $D_n > \frac{d}{\sqrt{n}}$, gde se vrednost d nalazi iz tablica Kolmogorovljeve raspodele, za dati prag značajnosti α .

1.5.2 Liliforov test

Kolmogorovljev test se može koristiti za testiranje normalnosti raspodele podataka kada su srednja vrednost μ i standardna devijacija σ poznate. Tada test statistika ima približno Kolmogorovljevu raspodelu. Kada su parametri μ i σ nepoznati, potrebno ih je oceniti na osnovu dobijenog uzorka. Ukoliko se u ovom slučaju koristi Kolmogorovljeva statistika, verovatnoća greške prve vrste je manja nego u slučaju da se koriste tablice Kolmogorovljeve raspodele (Liliefors, 1967). Lilifor koristi Kolmogorovljevu statistiku D_n pri čemu je $F_0(x)$ funkcija normalne raspodele sa $\hat{\mu} = \bar{X}$ i $\hat{\sigma} = S$, gde je $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ uzoračka sredina i $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ uzoračka disperzija.

Lilifor je pomoću Monte Karlo simulacija dobio tabelu kritičnih vrednosti c (Liliefors, 1967). Ukoliko je $D_n > c$, odbacuje se nulta hipoteza.

1.5.3 Anderson-Darlingov test

Anderson i Darling (Anderson & Darling, 1952) su predložili statistiku

$$W_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F_0(x))^2 \frac{F_0(x)}{1 - F_0(x)} dF_0(x).$$

Test statistika W_n^2 pre svega registruje odstupanja empirijske funkcije raspodele od pretpostavljene raspodele u repovima raspodele.

Označimo sa $Z_j = F_0(X_{(j)})$, $j = 1, 2, \dots, n$, gde je $X_{(j)}$ statistika poretka. Izraz za W_n^2 se tada svodi na

$$W_n^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) (\ln Z_j + \ln(1 - Z_{n-j+1})).$$

Kada su poznati parametri pretpostavljene funkcije raspodele, Anderson i Darling (Anderson & Darling, 1952) su izveli približnu raspodelu test statistike

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{W_n^2 \leq z\} = \frac{\sqrt{2}}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(j + \frac{1}{2}) (4j + 1)}{j!} e^{-\frac{(4j+1)^2 \pi^2}{8z}} \int_0^{\infty} e^{\frac{z}{8(w^2+1)} - \frac{(4j+1)^2 \pi^2 w^2}{8z}} dw.$$

Nulta hipoteza se odbacuje ako je $W_n^2 \geq c$, gde je c kritična vrednost tako da je $P\{W_n^2 \geq c\} = \alpha$, za dati prag značajnosti α . Za velike obime uzoraka ($n \geq 40$) mogu se koristiti kritične vrednosti dobijene iz asimptotske raspodele test statistike (Anderson & Darling, 1954).

Kada su parametri pretpostavljene raspodele nepoznati, Stivens (Stephens, 1986) predlaže modifikovanu Anderson-Darlingovu statistiku

$$W_n^{2*} = W_n^2 \left(1 + \frac{0.75}{n} - \frac{2.25}{n^2} \right),$$

i daje tabelu kritičnih vrednosti dobijenu na osnovu Monte Karlo simulacija. Nulta hipoteza se odbacuje ako je $W_n^{2*} \geq c$, gde je c kritična vrednost tako da za dati prag značajnosti α važi $P\{W_n^{2*} \geq c\} = \alpha$.

1.5.4 Šapiro-Vilkov test

Šapiro i Vilk (Shapiro & Wilk, 1965) su predložili test statistiku

$$W^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i X_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

gde je $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{((m^T V^{-1})(V^{-1}m))^{\frac{1}{2}}}$, $m^T = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ je vektor očekivanih vrednosti statistika poretka slučajnog uzorka iz standardne normalne raspodele, i V je kovarijaciona matrica ovih statistika poretka. U istom radu su autori dali aproksimacije težinskih koeficijenata a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ i dali tabelu vrednosti raspodele statistike dobijene na osnovu Monte Karlo simulacija, za obime uzoraka $n = 3(1)50$. Takođe, Šapiro i Vilk (Shapiro & Wilk, 1965) su koristili Džonsonov S_B sistem raspodela za aproksimaciju raspodele statistike W , kada je tačna nulta hipoteza, za obime uzoraka $n = 7(1)50$.

Statistika W uzima vrednost između 0 i 1. Male vrednosti vode do odbacivanja nulte hipoteze, tj. nulta hipoteza se odbacuje ako je $W \leq c$, gde je c kritična vrednost tako da je $P\{W \leq c\} = \alpha$, za prag značajnosti α .

Rojston (Royston, 1982a) je modifikovao Šapiro-Vilkov test tako što je proširio obim uzorka do 2000 prilikom aproksimacije težinskih koeficijenata a_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Takođe predložio je transformaciju

$$Y = (1 - W)^\lambda \text{ i } Z = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y},$$

kojom se statistika W transformiše u slučajnu veličinu sa standardnom normalnom raspodelom, uz ocenu parametra λ . Tada se nulta hipoteza odbacuje ako je $Z \geq c^*$, gde je kritična vrednost $c^* = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$. Rojston je objavio i odgovarajući algoritam AS181 za test (Rojston, 1982b). U kasnijem radu, Rojston je uočio da Šapiro-Vilkova aproksimacija težinskih koeficijenata nije adekvatna za obim uzorka $n > 50$, pa je dao poboljšanu aproksimaciju, kao i novi algoritam AS594 (Rojston, 1995) koji se može koristiti za obim uzorka $3 \leq n \leq 5000$.

1.6 Testovi simetričnosti raspodele

Neka je X_1, X_2, \dots, X_n prost slučajan uzorak sa apsolutno neprekidnom funkcijom raspodele $F(x)$, nepoznatom srednjom vrednošću μ , medijanom M i konačnom standardnom devijacijom σ . Neka je $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ odgovarajuća gustina raspodele verovatnoće. Želimo da testiramo hipotezu da je raspodela $F(x)$ simetrična oko nepoznate medijane M , tj. testiramo nultu hipotezu

$$H_0 : f(M - x) = f(M + x),$$

protiv alternativne hipoteze

$$H_1 : f(M - x) \neq f(M + x),$$

U nastavku ćemo razmotriti Kabiljo-Masarov, Mirin i Miao-Gel-Gastvirtov test simetričnosti raspodele oko nepoznate medijane.

1.6.1 Kabiljo-Masarov test simetričnosti raspodele

Kabiljo i Masaro (Cabilio & Masaro, 1996) za testiranje hipoteze o simetričnosti raspodele koriste statistiku

$$S_K = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - U)}{S},$$

gde je \bar{X} uzoračka sredina, U uzoračka medijana, a S uzoračka standardna devijacija. Pokazali su da, ako je tačna nulta hipoteza,

$$S_K \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(F)), \quad n \rightarrow \infty$$

gde je $\sigma^2(F) = 1 + \frac{1}{4\sigma^2 f^2(M)} - \frac{1}{2\sigma f(M)} E \left| \frac{X-\mu}{\sigma} \right|$.

Disperzija $\sigma^2(F)$ zavisi od gustine raspodele verovatnoće, koja je obično nepoznata. Kabiljo i Masaro (Cabilio & Masaro, 1996) predlažu upotrebu 0.5708, što je vrednost $\sigma^2(F)$ normalne raspodele podataka.

Prema tome, ako je tačna nulta hipoteza, statistika $S_K^* = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-U)}{S\sqrt{0.5708}}$ ima približno standardnu normalnu raspodelu. Odbacuje se nulta hipoteza ako je $|S_K^*| \geq c$, gde je $c = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$, Φ je funkcija standardne normalne raspodele.

1.6.2 Mirin test simetričnosti raspodele

Mira (Mira, 1999) je predložila test simetričnosti raspodele zasnovan na Bonferoni-jevoj meri asimetrije.

Bonferoni (Bonferroni, 1933) je definisao sledeću meru asimetrije funkcije raspodele

$$\gamma_1(F) = 2 \int_0^1 F^{-1}(p) dp - 2M = 2(\mu - M), \quad \forall p \in (0, \frac{1}{2}).$$

Mira (Mira, 1999) predlaže test statistiku

$$\gamma_1(F_n) = 2(\bar{X} - U),$$

gde je F_n empirijska funkcija raspodele, \bar{X} uzoračka sredina a U uzoračka medijana.

U istom radu je pokazano da

$$\sqrt{n}(\gamma_1(F_n) - \gamma_1(F)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(\gamma_1, F)), \quad n \rightarrow \infty$$

gde je

$$\sigma^2(\gamma_1, F) = 4\sigma^2 + \left(\frac{1}{f(M)}\right)^2 - 4\frac{S_M}{f(M)}, \quad (1.12)$$

i $S_M = E|X - M|$.

Mira (Mira, 1999) je pokazala da je postojana ocena (1.12)

$$S^2(\gamma_1, F_n) = 4\hat{\sigma}^2 + (D_{n,c}(M))^2 - 4D_{n,c}(M)\hat{S}_M,$$

gde je

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \\ \hat{S}_M &= \bar{X} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i I\{X_i \leq U\}, \\ D_{n,c}(M) &= \frac{n^{\frac{1}{5}}}{2c} \left(X_{\left(\left[\frac{n}{2} + cn^{\frac{4}{5}}\right]\right)} - X_{\left(\left[\frac{n}{2} - cn^{\frac{4}{5}} + 1\right]\right)} \right), \end{aligned}$$

gde su $X_{\left(\left[\frac{n}{2} + cn^{\frac{4}{5}}\right]\right)}$ i $X_{\left(\left[\frac{n}{2} - cn^{\frac{4}{5}} + 1\right]\right)}$ statistike poretka. Konstanta c zavisi od gustine raspodele verovatnoće, koja je obično nepoznata. Mira predlaže upotrebu $c = 0.5$, što je vrednost konstante normalne raspodele podataka.

Prema tome, imamo da

$$\sqrt{n} \frac{\gamma_1(F_n) - \gamma_1(F)}{S(\gamma_1, F_n)} \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

odnosno

$$\sqrt{n} \frac{\gamma_1(F_n)}{S(\gamma_1, F_n)} \xrightarrow{D} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty,$$

kada je tačna nulta hipoteza (pošto je kod simetričnih raspodela $\gamma_1(F) = 0$).

Odbacuje se nulta hipoteza ako je $|\gamma_1(F_n)| \geq \frac{z_\alpha S(\gamma_1, F_n)}{\sqrt{n}}$, gde je $z_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

1.6.3 Miao-Gel-Gastvirtov test simetričnosti raspodele

Miao, Gel i Gastvirt (Miao, Gel & Gastwirth, 2006) za testiranje nulte hipoteze o simetričnosti raspodele predlažu statistiku

$$T = \frac{\bar{X} - U}{J},$$

gde je \bar{X} uzoračka sredina, U uzoračka medijana, a $J = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - M|$ ocena standardne devijacije.

Autori definišu

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - M|.$$

Gastvirt (Gastwirth, 1982) je pokazao da je $\tau = E(D) = \mu - 2\gamma$, gde je $\gamma = \int_{-\infty}^M xf(x)dx$.

Miao, Gel i Gastvirt (Miao, Gel & Gastwirth, 2006) su pokazali da, ako je tačna nulta hipoteza,

$$\sqrt{n}T \xrightarrow{D} N(0, \sigma_T^2), \quad n \rightarrow \infty$$

gde je $\sigma_T^2 = \frac{2}{\pi\tau^2} \left(\sigma^2 + \frac{1}{4f^2(M)} - \frac{\tau}{f(M)} \right)$. Kako σ_T^2 zavisi od nepoznate gustine raspodele verovatnoće, aproksimirana je sa 0.5708, što je vrednost σ_T^2 normalne raspodele.

Nulta hipoteza o simetričnosti raspodele se odbacuje ako je $|T| \geq \frac{z_\alpha \sqrt{0.5708}}{\sqrt{n}}$, gde je $z_\alpha = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$.

2

Kontrolni grafik za praćenje centralne tendencije

2.1 Simetrična slučajna veličina

Kod simetričnih slučajnih veličina, najčešće se koristi kontrolni grafik uzoračke sredine (ili \bar{X} kontrolni grafik) za praćenje srednje vrednosti.

Pretpostavlja se da je proces u početku bio u stanju statističke kontrole sa srednjom vrednošću μ_0 i da odrediv uzrok veličine δ dovodi do pomeranja srednje vrednosti sa μ_0 na ili $\mu_0 - \delta$ ili $\mu_0 + \delta$, gde je σ standardna devijacija karakteristike kvaliteta. Takođe se pretpostavlja da se standardna devijacija ne menja tokom vremena. Centralna linija, donja i gornja kontrolna granica su, redom, jednake

$$\begin{aligned}LCL &= \mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\CL &= \mu_0 \\UCL &= \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\end{aligned}\tag{2.1}$$

gde je n obim uzorka i k širina kontrolnih granica koja se ili zadaje (često se uzima $k = 3$) ili određuje na osnovu odabrane verovatnoće greške prve vrste α , iz raspodele standardizovane uzoračke sredine. U nastavku će biti više reči o njenom određivanju.

Prikuplja se m uzoraka obima n . Neka su $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ uzoračke sredine svakog od m uzoraka. Ukoliko se uzoračka tačka (i, \bar{X}_i) , $i = 1, 2, \dots, m$ nađe unutar

kontrolnih granica, smatra se da je proces u stanju kontrole, a ako se nađe van ovih granica, smatra se da je proces van kontrole i preduzima se potraga za odredivim uzrokom.

2.1.1 Ocene nepoznatih parametara

U praksi obično su parametri μ i σ nepoznati i potrebno ih je oceniti na osnovu preliminarnih uzoraka prikupljenih kada se smatralo da je proces u stanju statističke kontrole. Kao ocena nepoznate srednje vrednosti uzima se aritmetička sredina m uzoračkih sredina $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$

$$\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i. \quad (2.2)$$

Standardna devijacija posmatrane karakteristike kvaliteta može se oceniti ili na osnovu uzoračkih devijacija ili na osnovu uzoračkih raspona m preliminarnih uzoraka.

Metod raspona

Raspon i -tog uzorka, $i = 1, 2, \dots, m$ jednak je

$$R_i = X_{max,i} - X_{min,i},$$

gde su $X_{max,i}$ i $X_{min,i}$ maksimum i minimum i -tog uzorka, redom.

Standardna devijacija karakteristike kvaliteta tada se može oceniti pomoću prosečnog uzoračkog raspona,

$$\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i. \quad (2.3)$$

Preporučuje se da se kao ocena standardne devijacije koristi prosečni uzorački raspon kada je obim uzoraka mali, $n \leq 10$ (Montgomery, 2005).

Centralna linija, donja i gornja kontrolna granica kontrolnog grafika uzoračke sredine su, redom, jednake

$$\begin{aligned}LCL &= \bar{\bar{X}} - k \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} \\CL &= \bar{\bar{X}} \\UCL &= \bar{\bar{X}} + k \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Metod standardne devijacije

Neka je S_i standardna devijacija i -tog uzorka, $S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_{ik} - \bar{X}_i)^2}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Tada, ocena standardne devijacije je prosečna standardna devijacija m uzoraka,

$$S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i.\tag{2.5}$$

Centralna linija, donja i gornja kontrolna granica kontrolnog grafika uzoračke sredine su, redom, jednake

$$\begin{aligned}LCL &= \bar{\bar{X}} - k \frac{S}{\sqrt{n}} \\CL &= \bar{\bar{X}} \\UCL &= \bar{\bar{X}} + k \frac{S}{\sqrt{n}}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

2.1.2 Gausova slučajna veličina

Razmotrićemo kako se konstruiše kontrolni grafik uzoračke sredine normalno raspodeljene karakteristike kvaliteta. Pretpostavimo da posmatrana slučajna veličina X ima normalnu $N(\mu, \sigma^2)$ raspodelu. Označimo sa $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ uzoračke sredine svakog od m uzoraka obima n . Tada \bar{X}_i , $i = 1, 2, \dots, m$ ima normalnu $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ raspodelu, a standardizovana uzoračka sredina $Z = \frac{\bar{X}_i - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ ima standardnu normalnu $N(0, 1)$ raspodelu.

Sada ćemo izvesti izraze za verovatnoću greške prve vrste i moć kontrolnog grafika uzoračke sredine normalne raspodele. Takođe, analiziraćemo performanse $\bar{\bar{X}}$ kontrolnog grafika.

2.1.2.1 Verovatnoća greške I vrste i moć \bar{X} kontrolnog grafika

Verovatnoća greške prve vrste kontrolnog grafika uzoračke sredine normalne raspodele jednaka je

$$\begin{aligned}\alpha &= P\{\bar{X} \notin [LCL, UCL] | H_0 : \mu = \mu_0\} = \\ &= 1 - P\{\mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | H_0 : \mu = \mu_0\} = \\ &= 1 - P\{-k \leq Z \leq k\} = 2\Phi(-k),\end{aligned}$$

gde je Φ funkcija raspodele standardne normalne raspodele. Na osnovu odabrane verovatnoće greške prve vrste, možemo izračunati širinu kontrolnih granica k . Za $\alpha = 0.0027$, dobija se $k = 3$.

Moć kontrolnog grafika da detektuje pomeranje srednje vrednosti sa ciljne vrednosti μ_0 na $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ jednaka je

$$\begin{aligned}p &= 1 - \beta = 1 - P\{\bar{X} \in [LCL, UCL] | H_1 : \mu \neq \mu_0\} = \\ &= 1 - P\{\bar{X} \in [LCL, UCL] | H_1 : \mu = \mu_0 \pm \delta\sigma\}.\end{aligned}$$

Označimo sa $p_1 = P\{\mu = \mu_0 - \delta\sigma\}$ i sa $p_2 = P\{\mu = \mu_0 + \delta\sigma\}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}p &= 1 - \left(P\{\mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | \mu = \mu_0 - \delta\sigma\} \cdot p_1 + \right. \\ &+ \left. P\{\mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} | \mu = \mu_0 + \delta\sigma\} \cdot p_2 \right) = \\ &= 1 - (P\{-k + \delta\sqrt{n} \leq Z_1 \leq k + \delta\sqrt{n}\} \cdot p_1 + \\ &+ P\{-k - \delta\sqrt{n} \leq Z_2 \leq k - \delta\sqrt{n}\} \cdot p_2) = \\ &= 1 - ((\Phi(k + \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k + \delta\sqrt{n})) \cdot p_1 + \\ &+ (\Phi(k - \delta\sqrt{n}) - \Phi(-k - \delta\sqrt{n})) \cdot p_2),\end{aligned}$$

gde su $Z_1 = \frac{\bar{X} - (\mu_0 - \delta\sigma)}{\sigma} \sqrt{n}$ i $Z_2 = \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta\sigma)}{\sigma} \sqrt{n}$ slučajne veličine sa standardnom normalnom raspodelom. Možemo sada iskoristiti da je $p_2 = 1 - p_1$ i $\Phi(k + \delta\sqrt{n}) = 1 - \Phi(-k - \delta\sqrt{n})$, $\Phi(-k + \delta\sqrt{n}) = 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{n})$. Dobija se da je moć kontrolnog grafika da detektuje pomeranja veličine δ standardnih devijacija od ciljne vrednosti

jednaka

$$p = 1 - \beta = \Phi(-k + \delta\sqrt{n}) + \Phi(-k - \delta\sqrt{n}). \quad (2.7)$$

U tabeli 2.1. nalaze se moći kontrolnog grafika uzoračke sredine da detektuje pomeranja $\delta = 0.5(0.5)3.0$ standardnih devijacija od ciljne vrednosti, za obime uzoraka $n = 3(1)15$. Napomenimo da $\delta = 0.5(0.5)3.0$ označava da smo razmatrali vrednosti δ od 0.5 do 3.0, sa korakom 0.5 (0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0), odnosno $n = 3(1)15$ označava da smo razmatrali n od 3 do 10 sa korakom 1 (3, 4, ..., 10). Interesuje nas koliki treba da budu obimi uzoraka i pomeranja da bi moć kontrolnog grafika uzoračke sredine bila bar 90%.

Tabela 2.1: Moć kontrolnog grafika uzoračke sredine normalne raspodele

Obim uzorka	$\delta = 0.5$	$\delta = 1.0$	$\delta = 1.5$	$\delta = 2.0$	$\delta = 2.5$	$\delta = 3.0$
3	0.01648	0.10241	0.34388	0.67872	0.90827	0.98596
4	0.02278	0.15866	0.50001	0.84135	0.97725	0.99865
5	0.02994	0.22246	0.63838	0.92951	0.99520	0.99990
6	0.03794	0.29099	0.74993	0.97122	0.99911	0.99999
7	0.04677	0.36158	0.83364	0.98903	0.99985	1
8	0.0564	0.43190	0.89300	0.99606	0.99998	1
9	0.06681	0.50001	0.93320	0.99865	1	1
10	0.07798	0.56447	0.95937	0.99956	1	1
11	0.08985	0.62424	0.97586	0.99986	1	1
12	0.10241	0.67872	0.98596	0.99996	1	1
13	0.11561	0.72760	0.99199	0.99999	1	1
14	0.12942	0.77086	0.99551	1	1	1
15	0.14378	0.80867	0.99752	1	1	1

Kao što se može videti u tabeli 2.1, kontrolni grafik uzoračke sredine normalne raspodele može, sa moći barem 90%, registrovati pomeranja od najmanje $\delta = 1.5$ standardnih devijacija. Drugim rečima, najbolje je kontrolni grafik uzoračke sredine normalne raspodele koristiti u slučajevima većih pomeranja srednje vrednosti.

2.1.2.2 Primer upotrebe kontrolnog grafika uzoračke sredine

Primer 2.1.1 Delovi proizvedeni procesom livenja ubrizgavanjem podvrgnuti su testu čvrstoće pod pritiskom. Dvadeset uzoraka od po 5 delova prikupljeni su i nji-

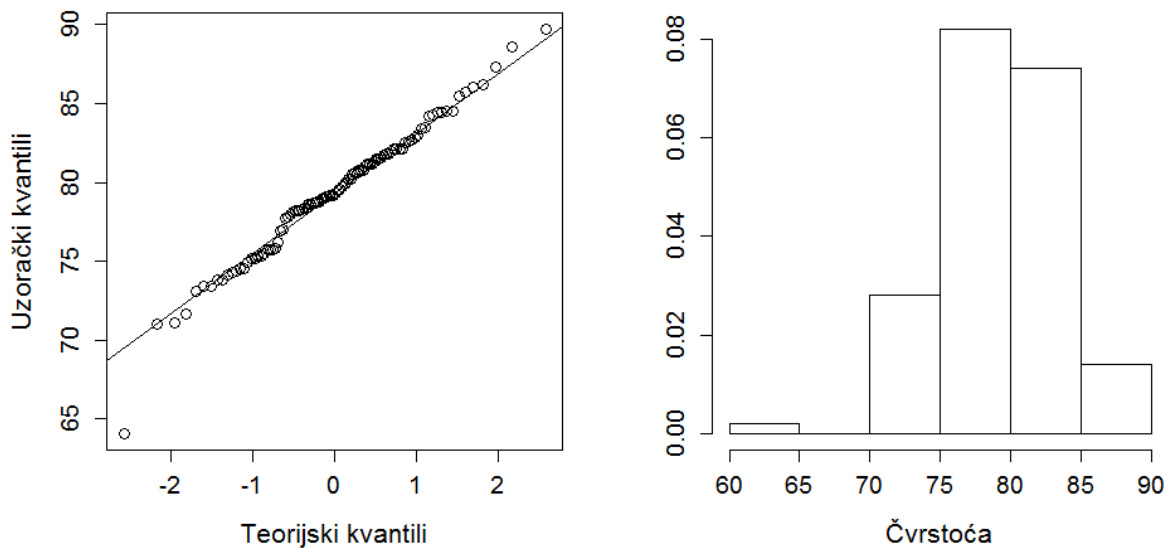
Tabela 2.2: Podaci o čvrstoći pod pritiskom delova (preliminarni uzorci)

Broj	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{x}	R
1	83.0	81.2	78.7	75.7	77.0	78.15	5.5
2	88.6	78.3	78.8	71.0	84.2	78.08	13.2
3	85.7	75.8	84.3	75.2	81.0	80.40	10.5
4	80.8	74.4	82.5	74.1	75.7	77.50	8.4
5	83.4	78.4	82.6	78.2	78.9	80.30	5.2
6	75.3	79.9	87.3	89.7	81.8	82.80	14.4
7	74.5	78.0	80.8	73.4	79.7	77.28	7.4
8	79.2	84.4	81.5	86.0	74.5	81.12	11.5
9	80.5	86.2	76.2	64.1	80.2	77.44	22.1
10	75.7	75.2	71.1	82.1	74.3	75.68	11.0
11	80.0	81.5	78.4	73.8	78.1	78.36	7.7
12	80.6	81.8	79.3	73.8	81.7	79.44	8.0
13	82.7	81.3	79.1	82.0	79.5	80.92	3.6
14	79.2	74.9	78.6	77.7	75.3	77.14	4.3
15	85.5	82.1	82.8	73.4	71.7	79.10	13.8
16	78.8	79.6	80.2	79.1	80.8	79.70	2.0
17	82.1	78.2	75.5	78.2	82.1	79.22	6.6
18	84.5	76.9	83.5	81.2	79.2	81.06	7.6
19	79.0	77.8	81.2	84.4	81.6	80.80	6.6
20	84.5	73.1	78.6	78.7	80.6	79.10	11.4

hova čvrstoća pod pritiskom (u jedinici psi, eng. pounds per square inch) prikazana je u tabeli 2.2. Za svaki od 20 uzoraka izračunate su uzoračka sredina i raspon uzorka.

Da bismo utvrdili da li je raspodela podataka (približno) normalna, podatke ćemo prvo grafički predstaviti pomoću Q-Q grafika (grafik zavisnosti teorijskih od uzoračkih kvantila) i histograma gustine raspodele.

Kao što se može videti na slici 2.1, raspodela podataka izgleda (približno) normalna, što ćemo još proveriti pomoću Šapiro-Vilkovog, Anderson-Darlingovog i Liliforovog testa normalnosti raspodele (Razali & Wah, 2011). Na osnovu rezultata ova tri testa (Šapiro-Vilkov test: test statistika $W = 0.982$, p-vrednost = 0.1883; Anderson-Darlingov test: test statistika $A = 0.4483$, p-vrednost = 0.2733; Liliforov test: test statistika $D = 0.0833$, p-vrednost = 0.08346), možemo zaključiti da je raspodela podataka normalna. Koristili smo R funkciju *shapiro.test* (paket *stats*) za Šapiro-Vilkov test i *ad.test*, *lillie.test* iz R paketa *nortest* (Gross & Ligges, 2015) za Anderson-Darlingov i Liliforov test normalnosti raspodele, redom.



Slika 2.1: Q-Q grafik (levi grafik) i histogram (desni grafik) čvrstoće delova pod pritiskom

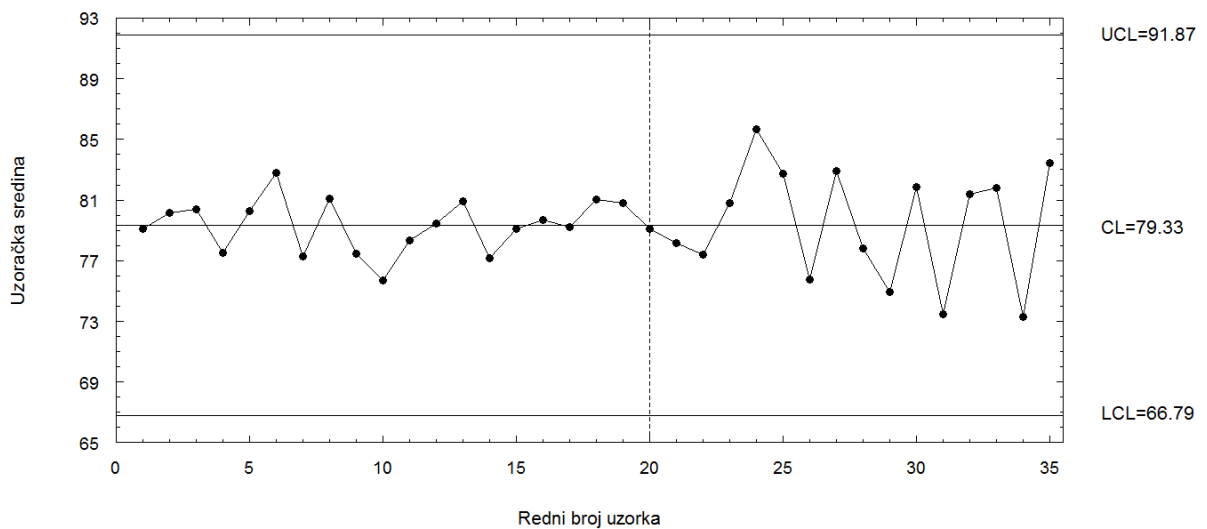
Srednju vrednost karakteristike kvaliteta ćemo oceniti prosečnom vrednošću m uzoračkih sredina, $\bar{\bar{X}} = 79.33$, a standardnu devijaciju prosečnim uzoračkim rasponom, $\bar{R} = 9.35$.

Za $k = 3$ (što odgovara verovatnoći greške prve vrste $\alpha = 0.0027$), dobijamo da su donja kontrolna granica, centralna linija i gornja kontrolna granica grafika uzoračke sredine, redom, jednaki

$$\begin{aligned}
 LCL &= \bar{\bar{X}} - k \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = 66.79 \\
 CL &= \bar{\bar{X}} = 79.33 \\
 UCL &= \bar{\bar{X}} + k \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = 91.87
 \end{aligned}$$

Uzoračke sredine prvih 20 preliminarnih uzoraka predstavljene su na kontrolnom grafiku uzoračke sredine na slici 2.2.

2. PRAČENJE CENTRALNE TENDENCIJE



Slika 2.2: Kontrolni grafik uzoračke sredine za podatke o čvrstoći delova pod pritiskom

Tabela 2.3: Podaci o čvrstoći pod pritiskom delova (test uzorci)

Broj	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	\bar{x}
1	68.9	81.5	78.2	80.8	81.5	78.18
2	69.8	68.6	80.4	84.3	83.9	77.40
3	78.5	85.2	78.4	80.3	81.7	80.82
4	76.9	86.1	86.9	94.4	83.9	85.64
5	93.6	81.6	87.8	79.6	71.0	82.72
6	65.5	86.8	72.4	82.6	71.4	75.74
7	78.1	65.7	83.7	93.7	93.4	82.92
8	74.9	72.6	81.6	87.2	72.7	77.80
9	78.1	77.1	67.0	75.7	76.8	74.94
10	78.7	85.4	77.7	90.7	76.7	81.84
11	85.0	60.2	68.5	71.1	82.4	73.44
12	86.4	79.2	79.8	86.0	75.4	81.36
13	78.5	99.0	78.3	71.4	81.8	81.8
14	68.8	62.0	82.0	77.5	76.1	73.28
15	83.0	83.7	73.1	82.2	95.3	83.46

Na osnovu slike 2.2, zaključujemo da je proces bio u stanju statističke kontrole kada su prikupljeni preliminarni uzorci, pa možemo zadržati ocene nepoznatih parametara normalne raspodele, odnosno izračunate kontrolne granice.

Sada možemo preći na drugu fazu upotrebe kontrolnog grafika uzoračke sredine. Prikupljeno je još 15 uzoraka obima 5 čvrstoće delova pod pritiskom. Dobijeni podaci, kao i izračunate prosečne vrednosti svakog uzorka date su u tabeli 2.3.

Na slici 2.2 prikazane su uzoračke sredine test uzoraka, na desnoj strani grafika (vertikalnom isprekidanom crtom kod 20. uzorka razdvojeni su preliminarni uzorci od test uzoraka). Takođe, možemo primetiti da se nijedna uzoračka sredina ne nalazi van kontrolnih granica, odnosno nema indikacija da je proces van kontrole.

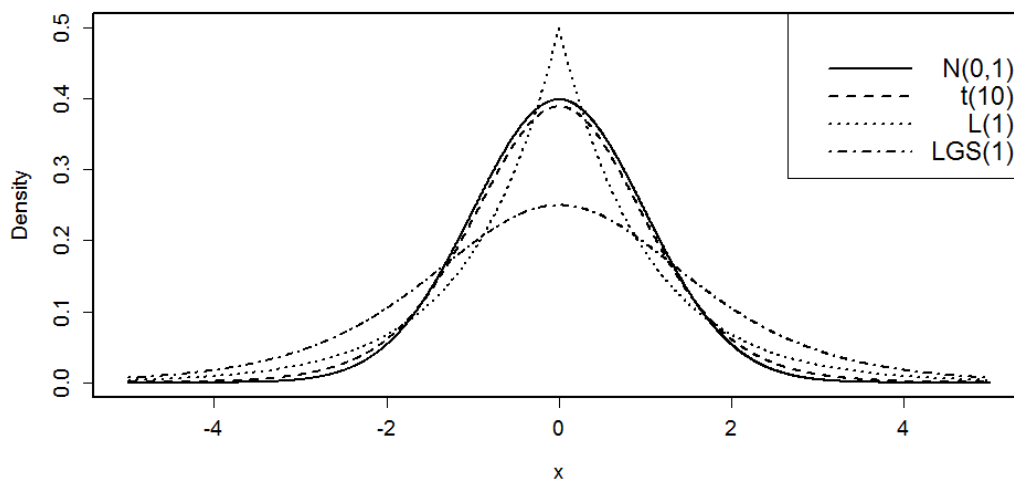
2.1.3 Negausova slučajna veličina

Podaci koji nemaju normalnu raspodelu često se javljaju u industriji (Alloway & Raghavachari, 1991; Janacek & Meikle, 1997). Ukoliko pretpostavka o normalnosti raspodele podataka nije ispunjena i to se zanemari, dobiće se netačne kontrolne granice kontrolnih grafika (Alwan, 1995). Kao rezultat pogrešno postavljenih kontrolnih granica, dobijaju se neodgovarajući kontrolni grafici koji ili neće uspeti da detektuju prave promene procesa ili će generisati bespotrebna upozorenja kada do promena nije došlo.

U slučaju kada je karakteristika kvaliteta negausova simetrična slučajna veličina, postojeća literatura iz statističke kontrole kvaliteta ne nudi nikakve preporuke, sem upotrebe normalne raspodele za konstrukciju kontrolnog grafika uzoračke sredine. Aproksimacija raspodele uzoračke sredine normalnom raspodelom je zasnovana na centralnoj graničnoj teoremi. Problem je što se u praksi obično koriste mali obimi uzoraka.

U nastavku ćemo predložiti modifikovani grafik uzoračke sredine koji se može koristiti kada karakteristika kvaliteta ima negausovu simetričnu raspodelu.

Razmotrićemo Studentovu, Laplasovu, logističku i uniformnu raspodelu i konstruisati za njih kontrolni grafik uzoračke sredine. Ove raspodele su odabrane zbog širokog polja primena u različitim disciplinama (ekonomija, finansije, inženjerske nauke, hidrologija, itd., videti npr. Ahsanullah et al., 2014; Balakrishnan, 1992;



Slika 2.3: Gustine raspodele verovatnoće $t(10)$, Laplasove $L(1)$, logističke $LGS(1)$ i standardne normalne $N(0, 1)$ raspodele

Kotz et al., 2001). Za svaku od ovih raspodela, izračunali smo (teorijsku) raspodelu standardizovane uzoračke sredine (ili njenu najbolju aproksimaciju) i zatim smo je aproksimirali Pirsonovom raspodelom II tipa ili Pirsonovom raspodelom VII tipa. Poznato je da se Pirsonov sistem raspodela može koristiti za aproksimacije velikog broja različitih raspodela podataka (Johnson et al., 1994).

2.1.3.1 Raspodela karakteristike kvaliteta

Razmotrićemo četiri tipa negausovih simetričnih raspodela slučajne veličine X : Studentovu raspodelu $t(10)$ sa 10 stepeni slobode, standardnu Laplasovu raspodelu $L(1)$ i logističku raspodelu $LGS(1)$ kao predstavnike simetričnih raspodela sa repovima težim od normalne raspodele (gustina normalne raspodele brže teži 0 kada $x \rightarrow \pm\infty$, videti sliku 2.3) i uniformne $U(0, 1)$ raspodele kao predstavnika simetričnih raspodela sa repovima lakšim od normalne raspodele.

2.1.3.2 Raspodela standardizovane uzoračke sredine

Za odabrane raspodele karakteristike kvaliteta ćemo izvesti raspodelu standardizovane uzoračke sredine $T_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$. Kako su sve odabrane raspodele simetrične, koeficijent asimetrije standardizovane uzoračke sredine jednak je 0.

2.1.3.2.1 Uzorak iz Studentove raspodele

Vitkovski (Witkowský, 2001, 2004) predložio je metod za aproksimaciju funkcije raspodele i gustine raspodele verovatnoće linearne kombinacije n nezavisnih Studentovih slučajnih veličina.

Neka je (X_1, X_2, \dots, X_n) slučajan uzorak iz Studentove $t(\nu, \mu, \eta)$ raspodele. Tada su $Y_k = \frac{X_k - \mu}{\eta}$, $k = 1, 2, \dots, n$ nezavisne Studentove slučajne veličine t_ν sa ν stepeni slobode. Dalje, neka je $Y = \sum_{k=1}^n Y_k$ suma ovih slučajnih veličina. Označimo sa $\phi_{Y_k}(t)$ karakterističnu funkciju slučajne veličine Y_k . Karakteristična funkcija slučajne veličine Y tada je jednaka

$$\phi_Y(t) = \prod_{k=1}^n \phi_{Y_k}(t),$$

gde je

$$\phi_{Y_k}(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}-1} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\nu^{\frac{1}{2}} |t| \right)^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu/2} \left(\nu^{\frac{1}{2}} |t| \right),$$

i $K_\alpha(z)$ označava modifikovanu Beselovu funkciju druge vrste (Abramowitz & Stegun, 1965)

$$K_\nu(xz) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})(2z)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}} x^\nu} \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{(t^2 + z^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} dt,$$

($\text{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$, $x > 0$, $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$).

Prema formuli inverzije (Gil-Pelaez, 1951), funkcija raspodele $F_Y(y)$ slučajne veličine Y jednaka je

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Im} \left(\frac{e^{-ity} \phi_Y(t)}{t} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(ty) \phi_Y(t)}{t} dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

Gustina raspodele $f_Y(y)$ slučajne veličine Y jednaka je

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re}(e^{-ity} \phi_Y(t)) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos(ty) \phi_Y(t) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

Za bilo koje y , algoritam *tdist* u R paketu *tdist* (Witkovsky & Savin, 2005)

aproksimira integrale (2.8) i (2.9) Gausovom kvadraturnom formulom sa p -tačaka u realnom intervalu $t \in (0, 10\pi)$. Ceo interval podeljen je u m podintervala. Integracija u svakom podintervalu izvodi se pomoću Gausove kvadrature formule koja uključuje bazne tačke b_{ij} i težinske koeficijente w_{ij} , $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, m$. Prema tome,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^p \frac{\sin(b_{ij}y)}{b_{ij}} w_{ij} \phi_Y(b_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^p \frac{\sin(b_{ij}y)}{b_{ij}} W_{ij}, \\ f_Y(y) &\approx \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^p \cos(b_{ij}y) w_{ij} \phi_Y(b_{ij}) = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^p \cos(b_{ij}y) W_{ij}, \end{aligned}$$

gde je $W_{ij} = w_{ij} \phi_Y(b_{ij})$.

Tada su funkcija raspodele i gustina raspodele verovatnoće standardizovane uzorčke sredine jednaki

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= P \left\{ Y \sqrt{\frac{\nu-2}{n\nu}} \leq t \right\} = F_Y \left(\sqrt{\frac{n\nu}{\nu-2}} t \right) \\ f_{T_n}(t) &= \sqrt{\frac{n\nu}{\nu-2}} \cdot f_Y \left(\sqrt{\frac{n\nu}{\nu-2}} t \right), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Koeficijent spljoštenosti statistike T_n jednak je

$$\alpha_{4,T_n} = 3 + \frac{6}{n(\nu-4)}.$$

2.1.3.2.2 Uzorak iz Laplasove raspodele

Neka je (X_1, X_2, \dots, X_n) prost slučajan uzorak iz Laplasove $L_2(\mu, \eta)$ raspodele. Tada su $Y_k = X_k - \mu$, $k = 1, 2, \dots, n$ nezavisne slučajne veličine sa standardnom Laplasovom $L_1(\eta)$ raspodelom.

Iskoristićemo svojstvo da ako dve nezavisne slučajne veličine imaju eksponencijalnu $E_1(\eta)$ raspodelu, tada njihova razlika ima Laplasovu $L_1(\eta)$ raspodelu. Dalje,

eksponencijalna $E_1(\eta)$ raspodela je gama $\Gamma(1, \eta)$ raspodela. Suma n nezavisnih slučajnih veličina sa gama $\Gamma(1, \eta)$ raspodelom ima gama $\Gamma(n, \eta)$ raspodelu. Na taj način zaključujemo da se suma n nezavisnih slučajnih veličina Y_1, Y_2, \dots, Y_n sa Laplasovom $L_1(\eta)$ raspodelom može napisati kao razlika dve slučajne veličine sa gama $\Gamma(n, \eta)$ raspodelom. Ova razlika ima tzv. *bilateralnu gama raspodelu*.

Bilateralna gama raspodela je simetrična oko nule, sa gustinom raspodele verovatnoće, za $y > 0$ (Küchler & Tappe, 2008)

$$f(y) = \left(\frac{\eta}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^k e^{-\eta y},$$

gde su koeficijenti $(a_k)_{k=0, \dots, n-1}$ jednaki

$$a_k = \binom{n-1}{k} \frac{1}{(2\eta)^{n-1-k}} \prod_{l=0}^{n-2-k} (n+l), \quad a_{n-1} = 1.$$

Funkcija raspodele verovatnoće, za $y > 0$ jednaka je

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \left(\frac{\eta}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\eta^{k+1}} \gamma(k+1, \eta x),$$

gde je $\gamma(n, x)$ donja nepotpuna gama funkcija, $\gamma(n, x) = \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt$.

Za aproksimaciju funkcije raspodele, korišćićemo sledeću rekurzivnu relaciju koja važi za nepotpunu gama funkciju

$$\gamma(n, x) = (n-1)\gamma(n-1, x) - x^{n-1}e^{-x}$$

i $\gamma(1, x) = 1 - e^{-x}$.

Tada su funkcija raspodele i gustina raspodele standardizovane uzoračke sredine, redom, jednaki

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= P\left\{\frac{Y}{\eta \cdot \sqrt{2n}} \leq t\right\} = F_Y\left(\eta\sqrt{2nt}\right), \\ f_{T_n}(t) &= \eta\sqrt{2n} \cdot f_Y\left(\eta\sqrt{2nt}\right), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Koeficijent spljoštenosti statistike T_n jednak je

$$\alpha_{4,T_n} = 3 + \frac{3}{n}.$$

2.1.3.2.3 Uzorak iz logističke raspodele

Neka je (X_1, X_2, \dots, X_n) prost slučajan uzorak iz logističke $LGS(\mu, \eta)$ raspodele.

Džordž i Mudolkar (George & Mudholkar, 1983) pokazali su da standardna Studentova raspodela predstavlja veoma dobru aproksimaciju raspodele konvolucije n nezavisnih slučajnih veličina sa logističkom raspodelom. Poredili su tri aproksimacije:

- (1) aproksimaciju standardnom normalnom raspodelom,
- (2) Edžvortovu aproksimaciju sa tačnošću do reda n^{-1} i
- (3) Aproksimaciju Studentovom raspodelom sa $\nu = 5n + 4$ stepeni slobode.

Pokazali su da treća aproksimacija predstavlja veoma dobru aproksimaciju.

Gupta i Han (Gupta & Han, 1992) razmatrali su Edžvortovu aproksimaciju do reda n^{-3} za aproksimaciju raspodele standardizovane uzoračke sredine. Funkcija raspodele jednaka je

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) \approx & \Phi(t) - \varphi(t) \left(\frac{1}{n} \left(\frac{1}{4!} \cdot \frac{6}{5} H_3(t) \right) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{6!} \cdot \frac{48}{7} H_5(t) + \right. \right. \\ & + \left. \frac{35}{8!} \left(\frac{6}{5} \right)^2 H_7(t) \right) + \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{8!} \cdot \frac{432}{5} H_7(t) + \frac{210}{10!} \frac{48}{7} \cdot \frac{6}{5} H_9(t) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{5775}{12!} \left(\frac{6}{5} \right)^3 H_{11}(t) \right) \right), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gde je $H_j(x)$ Ermitov polinom (Johnson et al., 2005)

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j n! x^{n-2j}}{(n-2j)! j! 2^j}.$$

Tada je gustina raspodele statistike T_n jednaka

$$\begin{aligned}
 f_{T_n}(t) \approx & \varphi(t) \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{6}{5} \cdot (tH_3(t) - H'_3(t)) + \right. \\
 & + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{6!} \cdot \frac{48}{7} \cdot (tH_5(t) - H'_5(t)) + \frac{35}{8!} \left(\frac{6}{5} \right)^2 (tH_7(t) - H'_7(t)) \right) + \\
 & + \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{8!} \cdot \frac{432}{5} \cdot (tH_7(t) - H'_7(t)) + \frac{210}{10!} \frac{48}{7} \cdot \frac{6}{5} (tH_9(t) - H'_9(t)) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{5775}{12!} \left(\frac{6}{5} \right)^3 (tH_{11}(t) - H'_{11}(t)) \right) \right), \quad t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Gupta i Han (Gupta & Han, 1992) poredili su ovu aproksimaciju sa ranije pomenutim aproksimacijama i pokazali su da je bolja čak i od aproksimacije Studentovom raspodelom koju su predlagali Džordž i Mudolkar (George & Mudholkar, 1983).

Koeficijent spljoštenosti statistike T_n jednak je

$$\alpha_{4,T_n} = 3 + \frac{1.2}{n}.$$

2.1.3.2.4 Uzorak iz uniformne raspodele

Neka je (X_1, X_2, \dots, X_n) prost slučajan uzorak iz uniformne $U(a, b)$ raspodele. Tada su $Y_i = \frac{X_i - a}{b - a}$, $i = 1, 2, \dots, n$ nezavisne slučajne veličine sa standardnom uniformnom $U(0, 1)$ raspodelom. Suma $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ ima *Irvin-Holovu raspodelu* sa funkcijom raspodele verovatnoće (Johnson et al., 1995)

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \operatorname{sgn}(y - k) (y - k)^n, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Tada, standardizovana uzoračka sredina ima funkciju raspodele verovatnoće koja je jednaka

$$F_{T_n}(t) = F_Y \left(\left(\frac{t}{\sqrt{12n}} + \frac{1}{2} \right) n \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Koeficijent spljoštenosti statistike T_n jednak je

$$\alpha_{4,T_n} = 3 - \frac{1.2}{n}.$$

2.1.3.3 Dizajn kontrolnog grafika uzoračke sredine

Za obime uzoraka $n = 3(1)10$ izračunali smo raspodelu standardizovane uzoračke sredine razmatranih raspodela karakteristike kvaliteta, koristeći prethodno navedene rezultate i zatim smo ih aproksimirali Pirsonovom raspodelom II tipa u slučaju uniformne raspodele i Pirsonovom raspodelom VII tipa u slučaju Studentove, Laplasove i logističke raspodele. Parametri Pirsonovih raspodela računati su na osnovu formula datih u Uvodu. Za zadatu verovatnoću greške I vrste α , širina kontrolnih granica k se računa na osnovu

$$\alpha = 1 - P\left\{\mu_0 - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_0\right\} = 2(1 - F_{T_n}(k)), \quad (2.10)$$

gde je F_{T_n} funkcija raspodele standardizovane uzoračke sredine, korišćenjem Brentove metode za nalaženje nule jednačine (Brent, 1973). Ista procedura ponovljena je za teorijsku raspodelu standardizovane uzoračke sredine i za odgovarajuću Pirsonovu raspodelu.

Izračunate širine kontrolnih granica za razmatrane raspodele karakteristike kvaliteta, obime uzoraka $n = 3(1)10$, verovatnoću greške prve vrste $\alpha = 0.0027$, za teorijsku raspodelu standardizovane uzoračke sredine i odgovarajuće Pirsonove raspodele date su u tabeli 2.4.

Kao što se može videti u tabeli 2.4, vrednosti širine kontrolnih granica izračunatih na osnovu teorijske raspodele i odgovarajuće Pirsonove raspodele su veoma

Tabela 2.4: Širina kontrolnih granica kontrolnog grafika uzoračke sredine negausovih simetričnih raspodela

Obim uzorka	Širina kontrolnih granica							
	Studentova $t(10)$		Laplasova $L(1)$		Logistička $LGS(1)$		Uniformna $U(0, 1)$	
	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson
$n = 3$	3.21966	3.22227	3.54221	3.53915	3.25580	3.26074	2.59834	2.65308
$n = 4$	3.16998	3.17156	3.43224	3.43628	3.20035	3.20234	2.72926	2.74902
$n = 5$	3.13867	3.13966	3.36034	3.36606	3.16405	3.16527	2.79650	2.80355
$n = 6$	3.11712	3.11775	3.30939	3.31520	3.13877	3.13966	2.83511	2.83866
$n = 7$	3.10136	3.10178	3.27130	3.27668	3.12021	3.12091	2.86060	2.86314
$n = 8$	3.08934	3.08962	3.24168	3.24652	3.10602	3.10660	2.87932	2.88118
$n = 9$	3.07987	3.08005	3.21796	3.22227	3.09482	3.09531	2.89366	2.89502
$n = 10$	3.07221	3.07233	3.19852	3.20234	3.08577	3.08619	2.90489	2.90597

bliske, tj. odgovarajuća Pirsonova raspodela veoma dobro aproksimira raspodelu standardizovane uzoračke sredine. S druge strane, aproksimacijom standardnom normalnom raspodelom dobili bismo vrednost $k = 2.99998$, za svako n i bilo koju raspodelu karakteristike kvaliteta.

Sada ćemo izračunati moć kontrolnog grafika uzoračke sredine negausovih simetričnih raspodela za detektovanje pomeranja veličine $\delta = 0.5(0.5)3$, za izračunate širine kontrolnih granica. Moć kontrolnog grafika uzoračke sredine za detekciju pomeranja od srednje vrednosti μ_0 na $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ može se izračunati na osnovu

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= 1 - P\left\{\mu_0 - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \mid \mu = \mu_1\right\} = \\ &= F_{T_n}(-k - \delta\sqrt{n}) + F_{T_n}(-k + \delta\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Računanje moći \bar{X} kontrolnog grafika izvedeno je za teorijsku raspodelu standardizovane uzoračke sredine i za odgovarajuću Pirsonovu raspodelu, radi daljeg poređenja tačnosti aproksimacije.

Prvenstveno želimo da ispitamo koliko je minimalno pomeranje koje kontrolni grafik uzoračke sredine negausovih simetričnih raspodela može da detektuje sa moći najmanje 90%.

Izračunate moći kontrolnog grafika uzoračke sredine, za razmatrane raspodele karakteristike kvaliteta, obime uzoraka $n = 3(1)10$, pomeraje $\delta = 0.5(0.5)3$, za teorijsku raspodele standardizovane uzoračke sredine i odgovarajuću Pirsonovu raspodelu, date su u tabeli 2.5.

U tabeli 2.5. može se videti da kontrolni grafik uzoračke sredine može da detektuje pomeranje veličine $\delta = 1.5$ sa moći najmanje 90% za obime uzoraka $n = 9$ i više, za sve razmatrane raspodele karakteristike kvaliteta. Da bi kontrolni grafik uzoračke sredine detektovao pomeranja veličine $\delta = 2.0$ sa moći barem 90%, neophodno je uzeti uzorke obima najmanje $n = 4$ za Studentovu, Laplasovu i logističku raspodelu i obime uzorka od barem $n = 5$ za uniformnu raspodelu. Takođe, primetimo još jednom kako odgovarajuća Pirsonova raspodela dobro aproksimira raspodelu standardizovane uzoračke sredine odabranih negausovih simetričnih raspodela. Opšte rečeno, može se zaključiti da kontrolni grafik uzoračke sredine može

Tabela 2.5: Moć kontrolnog grafika uzorčke sredine negausovih simetričnih raspodela

Raspodela	Moć											
	$\delta = 0.5$		$\delta = 1.0$		$\delta = 1.5$		$\delta = 2.0$		$\delta = 2.5$		$\delta = 3.0$	
	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson
$t(10)$	0.01099	0.01099	0.06651	0.06618	0.26087	0.25974	0.59983	0.59894	0.87154	0.87114	0.97504	0.97482
$n = 3$	0.01620	0.01621	0.11751	0.11712	0.43071	0.42999	0.80164	0.80138	0.96611	0.96594	0.99674	0.99671
$n = 4$	0.02243	0.02243	0.17950	0.17911	0.58712	0.58681	0.91083	0.91070	0.99188	0.99182	0.99959	0.99960
$n = 5$	0.02962	0.02962	0.24878	0.24845	0.71448	0.71438	0.96254	0.96245	0.99816	0.99815	0.99995	0.99995
$n = 6$	0.03775	0.03774	0.32185	0.32161	0.81000	0.80998	0.98503	0.98498	0.99960	0.99960	0.99999	0.99999
$n = 7$	0.04677	0.04676	0.39566	0.39551	0.87751	0.87750	0.99424	0.99422	0.99991	0.99992	1	1
$n = 8$	0.05665	0.05664	0.46776	0.46767	0.92312	0.92309	0.99785	0.99785	0.99998	0.99998	1	1
$n = 9$	0.06736	0.06735	0.53630	0.53626	0.95283	0.95280	0.99922	0.99922	1	1	1	1
$n = 10$												
$L(1)$	0.00767	0.00710	0.03700	0.03554	0.15415	0.15877	0.46420	0.46740	0.80609	0.80137	0.95142	0.95318
$n = 3$	0.01114	0.01042	0.07178	0.07084	0.31786	0.32065	0.73166	0.72579	0.94334	0.94380	0.99163	0.99210
$n = 4$	0.01555	0.01475	0.12146	0.12123	0.49730	0.49494	0.87609	0.87397	0.98414	0.98463	0.99861	0.99858
$n = 5$	0.02093	0.02011	0.18418	0.18424	0.65106	0.64692	0.94518	0.94510	0.99571	0.99578	0.99978	0.99973
$n = 6$	0.02729	0.02650	0.25608	0.25593	0.76703	0.76377	0.97648	0.97671	0.99887	0.99883	0.99997	0.99995
$n = 7$	0.03465	0.03391	0.33272	0.33208	0.84872	0.84688	0.99015	0.99027	0.99971	0.99967	0.99999	0.99999
$n = 8$	0.04300	0.04231	0.41006	0.40891	0.90386	0.90305	0.99595	0.99597	0.99993	0.99991	1	1
$n = 9$	0.05231	0.05169	0.48497	0.48348	0.93996	0.93972	0.99837	0.99834	0.99998	0.99997	1	1
$LGS(1)$												
$n = 3$	0.01065	0.01033	0.06193	0.06130	0.24689	0.24604	0.58637	0.58397	0.86530	0.86384	0.97262	0.97258
$n = 4$	0.01552	0.01531	0.11088	0.11064	0.41778	0.41720	0.79448	0.79351	0.96368	0.96368	0.99624	0.99627
$n = 5$	0.02148	0.02133	0.17185	0.17176	0.57753	0.57690	0.90720	0.90697	0.99107	0.99111	0.99953	0.99952
$n = 6$	0.02845	0.02832	0.24091	0.24084	0.70791	0.70739	0.96070	0.96070	0.99794	0.99794	0.99994	0.99994
$n = 7$	0.03638	0.03627	0.31430	0.31420	0.80561	0.80528	0.98413	0.98416	0.99955	0.99954	0.99999	0.99999
$n = 8$	0.04523	0.04514	0.38874	0.38860	0.87457	0.87441	0.99383	0.99384	0.99990	0.99990	1	1
$n = 9$	0.05496	0.05488	0.46161	0.46144	0.92114	0.92108	0.99767	0.99767	0.99998	0.99998	1	1
$n = 10$	0.06554	0.06548	0.53094	0.53076	0.95150	0.95149	0.99915	0.99914	1	1	1	1
$U(0, 1)$												
$n = 3$	0.04244	0.03575	0.20223	0.18904	0.49990	0.47936	0.79762	0.78028	0.95750	0.95312	0.99864	0.99758
$n = 4$	0.04194	0.03972	0.24026	0.23484	0.60301	0.59505	0.89369	0.88980	0.99061	0.99028	0.99999	0.99993
$n = 5$	0.04701	0.04608	0.29288	0.29093	0.70617	0.70338	0.95270	0.95214	0.99863	0.99855	1	1
$n = 6$	0.05435	0.05383	0.35334	0.35229	0.79460	0.79335	0.98164	0.98159	0.99987	0.99984	1	1
$n = 7$	0.06300	0.06262	0.41673	0.41587	0.86287	0.86222	0.99364	0.99363	0.99999	0.99999	1	1
$n = 8$	0.07260	0.07230	0.48009	0.47938	0.91197	0.91167	0.99801	0.99799	1	1	1	1
$n = 9$	0.08303	0.08280	0.54164	0.54108	0.94545	0.94534	0.99943	0.99942	1	1	1	1
$n = 10$	0.09423	0.09406	0.60009	0.59962	0.96728	0.96724	0.99985	0.99984	1	1	1	1

da detektuje pomeranja veličine barem $\delta = 1.5$ sa moći 90% i više, za negausove simetrične raspodele karakteristike kvaliteta.

2.1.3.4 Primena kontrolnog grafika uzoračke sredine

Sada ćemo videti kako se predloženi kontrolni grafik uzoračke sredine može primeniti u praksi, kada je raspodela karakteristike kvaliteta negausova i simetrična, ali nepoznata. Za fitovanje Pirsonovim raspedelama II ili VII tipa, potrebne su nam ocene srednje vrednosti, disperzije i koeficijenta spljoštenosti. Ova procedura pripada I fazi upotrebe kontrolnih grafika, kada uzimamo preliminarne (referentne) uzorke kako bismo ocenili nepoznate parametre raspodele i konstruisali kontrolni grafik računanjem centralne linije i kontrolnih granica grafika.

Srednju vrednost karakteristike kvaliteta ocenjujemo sa prosekom uzoračkih sredina $\bar{\bar{X}}$ a standardnu devijaciju sa prosečnim uzoračkim rasponom \bar{R} ili prosečnom uzoračkom standardnom devijacijom S . Zatim računamo standardizovane uzoračke sredine. Što se tiče ocene koeficijenta spljoštenosti standardizovanih uzoračkih sredina, ispitaćemo koja od mera spljoštenosti ima minimalnu srednjekvadratnu grešku (MSE). Srednjekvadratna greška je uzeta kao kriterijum izbora među ocenama, pošto istovremeno obuhvata disperziju i pristrasnost ocene (srednjekvadratna greška je jednaka zbiru disperzije i kvadrata pristrasnosti ocene).

2.1.3.4.1 Ocene koeficijenta spljoštenosti

Imamo tri ocene uzoračkog koeficijenta spljoštenosti

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3, \quad G_2 = \frac{m-1}{(m-2)(m-3)} ((m+1)g_2 + 6), \quad b_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3$$

gde su uzorački momenti dati sa $m_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^k$.

Džoans i Gil (Joanes & Gill, 1998) pokazali su, generišući 100000 uzoraka različitog obima iz Studentove t_5 raspodele, da statistika g_2 generalno ima najmanju srednjekvadratnu grešku. Pratili smo istu proceduru i generisali smo 100000 uzoraka različitog obima iz raspodela standardizovane uzoračke sredine Studentove $t(10)$, Laplasove $L(1)$, logističke $LGS(1)$ i uniformne $U(0,1)$ raspodele. Primetimo da

pošto koristimo Pirsonov koeficijent spljoštenosti, dodali smo 3 svim merama koeficijenata spljoštenosti i označili smo ih sa g_2^* , G_2^* , b_2^* , redom. Takođe, odabrali smo samo uzorke obima 3, 5, 7 i 10 iz razmatranih raspodela karakteristike kvaliteta, kako bismo predstavili promene vrednosti Pirsonovog koefijenta spljoštenosti različitih raspodela standardizovane uzoračke sredine. Dobijeni rezultati predstavljeni su u tabeli 2.6.

Pristrasnost ocena koeficijenta spljoštenosti konzistentno je negativna, u slučaju posmatrane Studentove, Laplasove i logističke raspodele važi (za apsolutnu vrednost pristrasnosti)

$$\text{bias}(G_2^*) < \text{bias}(g_2^*) < \text{bias}(b_2^*).$$

Kod uniformne raspodele, jedino ocena G_2^* ima pozitivnu pristrasnost. Pristrasnost tri ocene koeficijenta spljoštenosti prati gornju nejednakost, osim za obim uzorka $n = 3$ i uniformnu raspodelu, kada je najmanja pristrasnost ocene g_2^* .

Što se tiče srednjekvadratne greške ocena, ocena G_2^* ima najveću srednjekvadratnu grešku, za sve odabrane obime uzoraka i raspodele. Dalje, ocena b_2^* ima najmanju srednjekvadratnu grešku u slučaju Laplasove i logističke raspodele, kada imamo $m = 100$ podgrupa. U svim ostalim slučajevima, ocena g_2^* ima najmanju srednjekvadratnu grešku.

Dakle, potvrđujemo rezultate Džoansa i Gila. Prema tome, za računanje parametara Pirsonovih raspodela II i VII tipa, koristićemo statistiku $g_2^* = g_2 + 3$ kao ocenu koeficijenta spljoštenosti.

2.1.3.4.2 Primer

Montgomeri (Montgomery, 2005) navodi podatke o debljini štampanih ploča (u inčima), 25 uzoraka po tri štampane ploče (tabela 2.7).

Kao što možemo videti na boksplot grafiku (slika 2.4., levi grafik), uzoračka raspodela izgleda kao simetrična raspodela. Simetričnost raspodele testirali smo pomoću Mirinog testa (Mira, 1999), Kabiljo-Masarovog testa (Cabilio & Masaro, 1996) i Miao-Gel-Gastvirtovog testa (Miao et al., 2006). Na osnovu rezultata sva tri testa, možemo zaključiti da je raspodela podataka simetrična (Mirin test: test

Tabela 2.6: Pristrasnosti i srednjekvadratne greške ocena g_2^* , G_2^* i b_2^* standardizovanih uzoračkih sredina negausovih simetričnih raspodela

Raspodela	Kof. spljoštenosti	Pristrasnost			Srednjekv. greška		
		g_2^*	G_2^*	b_2^*	g_2^*	G_2^*	b_2^*
Studentova $t(10)$							
$n = 3$ $m = 25$	3.333	-0.397	-0.124	-0.628	0.959	1.249	1.077
$m = 50$		-0.219	-0.080	-0.346	0.716	0.825	0.728
$m = 100$		-0.116	-0.043	-0.180	0.486	0.522	0.489
$n = 5$ $m = 25$	3.2	-0.327	-0.069	-0.554	0.791	1.058	0.884
$m = 50$		-0.175	-0.042	-0.297	0.568	0.652	0.571
$m = 100$		-0.091	-0.024	-0.151	0.350	0.381	0.355
$n = 7$ $m = 25$	3.143	-0.297	-0.054	-0.519	0.740	0.957	0.816
$m = 50$		-0.155	-0.030	-0.277	0.494	0.587	0.513
$m = 100$		-0.081	-0.018	-0.142	0.305	0.329	0.308
$n = 10$ $m = 25$	3.1	-0.278	-0.031	-0.498	0.683	0.935	0.767
$m = 50$		-0.145	-0.017	-0.261	0.456	0.530	0.467
$m = 100$		-0.072	-0.012	-0.137	0.271	0.293	0.276
Laplasova $L(1)$							
$n = 3$ $m = 25$	4	-0.708	-0.351	-0.966	1.819	2.119	2.056
$m = 50$		-0.407	-0.210	-0.552	1.426	1.631	1.469
$m = 100$		-0.218	-0.118	-0.300	1.040	1.097	1.028
$n = 5$ $m = 25$	3.6	-0.507	-0.205	-0.746	1.249	1.546	1.407
$m = 50$		-0.283	-0.116	-0.411	0.938	1.073	0.975
$m = 100$		-0.153	-0.063	-0.221	0.639	0.672	0.629
$n = 7$ $m = 25$	3.429	-0.429	-0.136	-0.660	1.033	1.347	1.158
$m = 50$		-0.233	-0.081	-0.360	0.752	0.878	0.778
$m = 100$		-0.124	-0.046	-0.192	0.488	0.527	0.483
$n = 10$ $m = 25$	3.3	-0.364	-0.104	-0.599	0.880	1.150	0.998
$m = 50$		-0.198	-0.058	-0.316	0.619	0.727	0.654
$m = 100$		-0.101	-0.0283	-0.169	0.397	0.434	0.392
Logistička $LGS(1)$							
$n = 3$ $m = 25$	3.4	-0.420	-0.145	-0.656	1.024	1.286	1.132
$m = 50$		-0.229	-0.083	-0.358	0.755	0.863	0.772
$m = 100$		-0.124	-0.045	-0.189	0.488	0.530	0.484
$n = 5$ $m = 25$	3.24	-0.342	-0.077	-0.570	0.834	1.105	0.923
$m = 50$		-0.180	-0.047	-0.304	0.584	0.670	0.597
$m = 100$		-0.094	-0.023	-0.159	0.355	0.386	0.360
$n = 7$ $m = 25$	3.171	-0.310	-0.064	-0.532	0.755	0.994	0.848
$m = 50$		-0.164	-0.031	-0.281	0.517	0.603	0.530
$m = 100$		-0.083	-0.018	-0.149	0.311	0.338	0.312
$n = 10$ $m = 25$	3.12	-0.287	-0.038	-0.505	0.707	0.959	0.783
$m = 50$		-0.149	-0.026	-0.268	0.470	0.545	0.478
$m = 100$		-0.076	-0.013	-0.135	0.279	0.298	0.277
Uniformna $U(0,1)$							
$n = 3$ $m = 25$	2.6	-0.069	0.107	-0.265	0.288	0.444	0.312
$m = 50$		-0.029	0.054	-0.127	0.143	0.178	0.150
$m = 100$		-0.012	0.028	-0.063	0.070	0.078	0.072
$n = 5$ $m = 25$	2.76	-0.131	0.071	-0.334	0.391	0.577	0.432
$m = 50$		-0.061	0.037	-0.165	0.216	0.259	0.221
$m = 100$		-0.031	0.018	-0.083	0.109	0.122	0.112
$n = 7$ $m = 25$	2.829	-0.156	0.051	-0.368	0.446	0.637	0.493
$m = 50$		-0.078	0.028	-0.183	0.254	0.307	0.263
$m = 100$		-0.037	0.016	-0.092	0.136	0.148	0.136
$n = 10$ $m = 25$	2.88	-0.177	0.039	-0.388	0.483	0.694	0.538
$m = 50$		-0.088	0.017	-0.201	0.284	0.343	0.299
$m = 100$		-0.042	0.011	-0.098	0.154	0.169	0.158

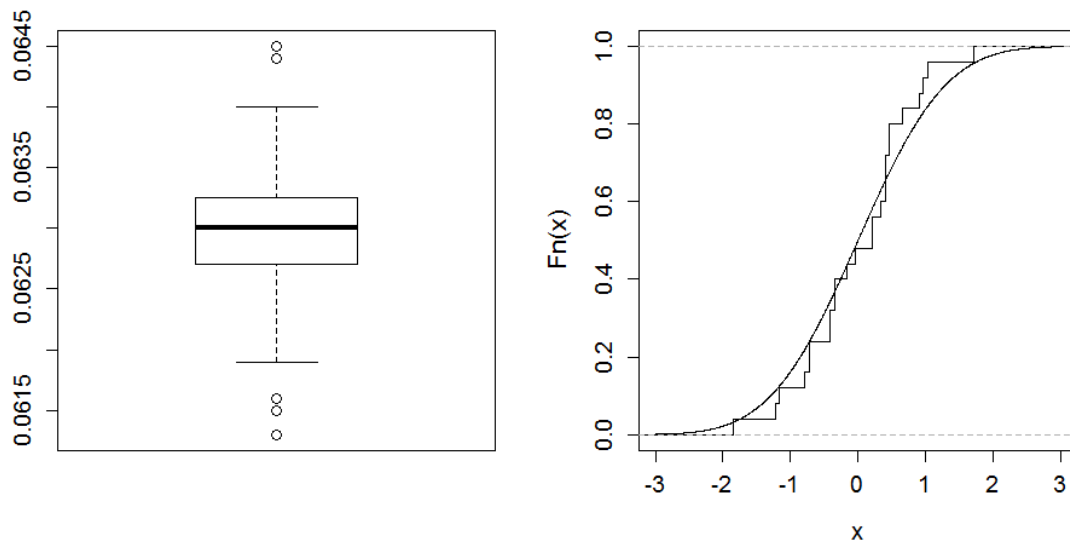
Tabela 2.7: Podaci o debljini štampanih ploča

Broj	x_1	x_2	x_3	\bar{x}	R
1	0.0629	0.0636	0.064	0.0635	0.0011
2	0.063	0.0631	0.0622	0.06277	0.0009
3	0.0628	0.0631	0.0633	0.06307	0.0005
4	0.0634	0.063	0.0631	0.06317	0.0004
5	0.0619	0.0628	0.063	0.06257	0.0011
6	0.0613	0.0629	0.0634	0.06253	0.0021
7	0.063	0.0639	0.0625	0.06313	0.0014
8	0.0628	0.0627	0.0622	0.06257	0.0006
9	0.0623	0.0626	0.0633	0.06273	0.001
10	0.0631	0.0631	0.0633	0.06317	0.0002
11	0.0635	0.063	0.0638	0.06343	0.0008
12	0.0623	0.063	0.063	0.06277	0.0007
13	0.0635	0.0631	0.063	0.0632	0.0005
14	0.0645	0.064	0.0631	0.06387	0.0014
15	0.0619	0.0644	0.0632	0.06317	0.0025
16	0.0631	0.0627	0.063	0.06293	0.0004
17	0.0616	0.0623	0.0631	0.06233	0.0015
18	0.063	0.063	0.0626	0.06287	0.0004
19	0.0636	0.0631	0.0629	0.0632	0.0007
20	0.064	0.0635	0.0629	0.06347	0.0011
21	0.0628	0.0625	0.0616	0.0623	0.0012
22	0.0615	0.0625	0.0619	0.06197	0.001
23	0.063	0.0632	0.063	0.06307	0.0002
24	0.0635	0.0629	0.0635	0.0633	0.0006
25	0.0623	0.0629	0.063	0.06273	0.0007

statistika = 0.9029, p-vrednost = 0.3666; Kabiljo-Masarov test: test statistika = 0.8846, p-vrednost = 0.3764; Miao-Gel-Gastvirtov test: test statistika = 1.0162, p-vrednost = 0.3095). R funkcija *symmetry.test* za ove testove nalazi se u R paketu *lawstat* (Gastwirth et al., 2015).

Sada ćemo testirati normalnost raspodele pomoću Šapiro-Vilkovog, Anderson-Darlingovog i Liliforovog testa (Razali & Wah, 2011). Na osnovu rezultata sva tri testa, zaključujemo da raspodela podataka nije normalna (Šapiro-Vilkov test: $W = 0.9589$, p-vrednost = 0.01584; Anderson-Darlingov test: $A = 1.4759$, p-vrednost = 0.00076; Liliforov test $D = 0.1467$, p-vrednost = 0.00039).

Izračunali smo uzoračku sredinu za svaki od 25 uzoraka. Aritmetička sredina 25 uzoračkih sredina jednaka je $\bar{\bar{X}} = 0.06295$, što je ocena nepoznate srednje vrednosti



Slika 2.4: Boksplot podataka o debljini štampanih ploča (levi grafik) i empirijska kumulativna funkcija raspodele standardizovanih uzoračkih sredina i fitovana Piersonova raspodela II tipa (desni grafik)

i centralna linija kontrolnog grafika uzoračke sredine, $CL = 0.06295$. Dalje, ocenili smo standardnu devijaciju prosečnim rasponom, $\hat{\sigma} = \bar{R} = 0.00092$. Sada možemo izračunati standardizovane uzoračke sredine i koeficijent spljoštenosti standardizovanih uzoračkih sredina. Prethodno razmatrane ocene koeficijenata spljoštenosti se nalaze u R paketu *e1071* (Meyer et al., 2014). Kao što je prethodno navedeno, koristićemo statistiku g_2^* kao ocenu koeficijenta spljoštenosti. Dobijamo $\hat{\alpha}_4 = g_2^* = 2.83154$. Kako je raspodela standardizovane uzoračke sredine simetrična sa koeficijentom spljoštenosti manjim od 3, aproksimiraćemo njenu raspodelu Pirsonovom raspodelom II tipa. Korišćenjem formula (1.9), izračunali smo parametre Pirsonove raspodele. Empirijska funkcija raspodele, zajedno sa fitovanom Pirsonovom raspodelom II tipa data je na slici 2.4, desni grafik.

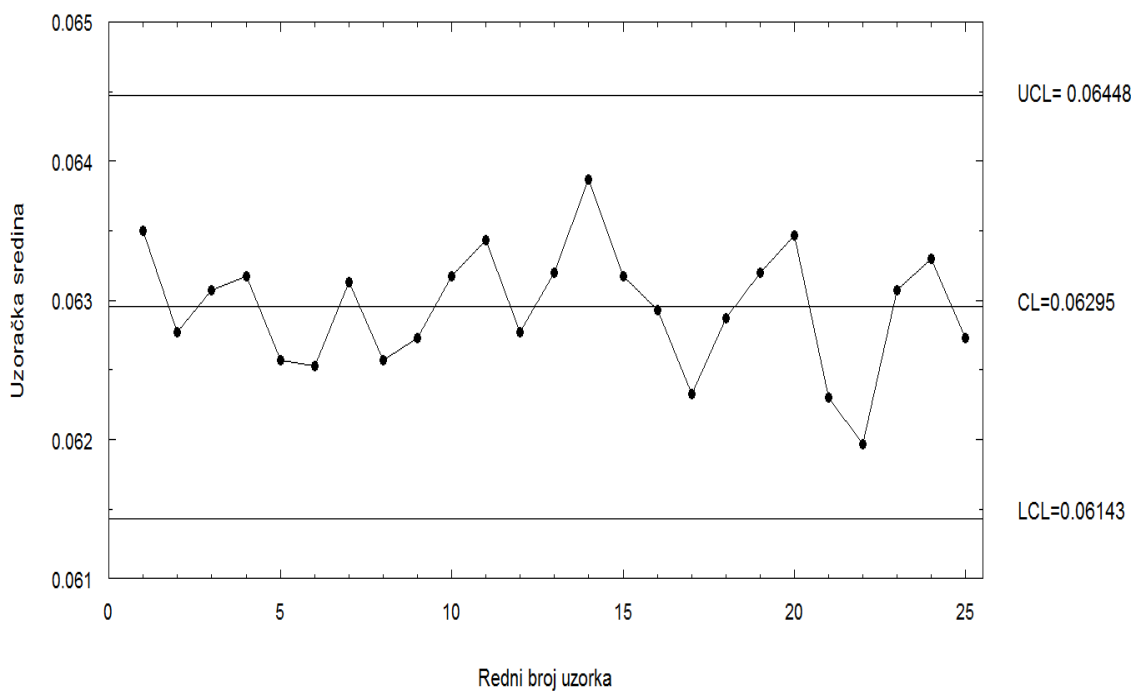
Za verovatnoću greške prve vrste $\alpha = 0.0027$, dobijamo, korišćenjem jednačine (2.10), da je širina kontrolnih granica jednaka $k = 2.83665$. Sada možemo izračunati donju i gornju granicu kontrolnog grafika uzoračke sredine,

2. PRAĆENJE CENTRALNE TENDENCIJE

$$LCL = \bar{\bar{X}} - k \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = 0.06143,$$
$$UCL = \bar{\bar{X}} + k \frac{\bar{R}}{\sqrt{n}} = 0.06448$$

i konstruisati kontrolni grafik (slika 2.5).

Kao što vidimo na slici 2.5, sve uzoračke sredine se nalaze unutar kontrolnih granica i možemo zaključiti da je proces u stanju statističke kontrole i zadržati ocene srednje vrednosti, standardne devijacije, kao i vrednost širine kontrolnih granica.



Slika 2.5: Kontrolni grafik uzoračke sredine za podatke o debljini štampanih ploča

2.2 Asimetrična slučajna veličina

Ukoliko je raspodela posmatrane karakteristike kvaliteta asimetrična, medijana više odgovara kao mera centralne tendencije nego uzoračka sredina. U nastavku će biti više reči o određivanju raspodele uzoračke medijane.

2.2.1 Raspodela uzoračke medijane

Neka je X_1, X_2, \dots, X_n prost slučajan uzorak i $X_{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, k -ta statistika poretka. Označimo sa F_X i f_X funkciju raspodele i gustinu raspodele verovatnoće, redom, slučajne veličine X .

Gustina raspodele k -te statistike poretka jednaka je (Gibbons & Chakraborti, 2003)

$$f_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (F_X(x))^{k-1} (1 - F_X(x))^{n-k} f_X(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Dalje, imamo da je zajednička gustina raspodele statistika poretka $X_{(k)}$ i $X_{(l)}$, $1 \leq k \leq l \leq n$ jednaka

$$f_{X_{(k)}, X_{(l)}}(x, y) = \frac{n!}{(k-1)!(l-k-1)!(n-l)!} (F_X(x))^{k-1} (F_X(y) - F_X(x))^{l-k-1} \times (1 - F_X(y))^{n-l} f_X(x) f_X(y), \quad x < y. \quad (2.12)$$

Uzoračka medijana definiše se sa

$$U = \begin{cases} X_{(k+1)}, & n = 2k + 1 \\ \frac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, & n = 2k \end{cases}$$

Za neparan obim uzorka, dobijamo iz (2.11) da je gustina raspodele uzoračke medijane jednaka

$$f_U(u) = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} (F_X(u)(1 - F_X(u)))^k \cdot f_X(u) \quad (2.13)$$

Izvedimo gustinu raspodele uzoračke medijane za paran obim uzorka. Iz (2.12) imamo da je zajednička gustina raspodele statistika poretka $X_{(k)}$ i $X_{(k+1)}$ jednaka

$$f_{X_{(k)}, X_{(k+1)}}(x, y) = \frac{(2k)!}{((k-1)!)^2} (F_X(x))^{k-1} (1 - F_X(y))^{k-1} f_X(x) f_X(y), \quad x < y. \quad (2.14)$$

Uvedimo smene

$$\begin{aligned} u &= \frac{x+y}{2} \\ v &= y \end{aligned} \quad (2.15)$$

Tada je gustina raspodele slučajnih veličina (U, V) jednaka

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{(2k)!}{((k-1)!)^2} (F_X(2u-v))^{k-1} (1 - F_X(v))^{k-1} f_X(2u-v) f_X(v), \quad u < v, \quad (2.16)$$

pa imamo da je gustina raspodele uzoračke medijane U

$$f_U(u) = \frac{2(2k)!}{((k-1)!)^2} \int_u^{+\infty} (F_X(2u-v))^{k-1} (1 - F_X(v))^{k-1} f_X(2u-v) f_X(v) dv. \quad (2.17)$$

U nastavku ćemo opisati tri kontrolna grafika medijane koja se mogu naći u postojećoj literaturi, a zatim ćemo predložiti novi jednostrani kontrolni grafik medijane za pozitivno asimetrične raspodele.

2.2.2 Kontrolni grafici medijane u literaturi

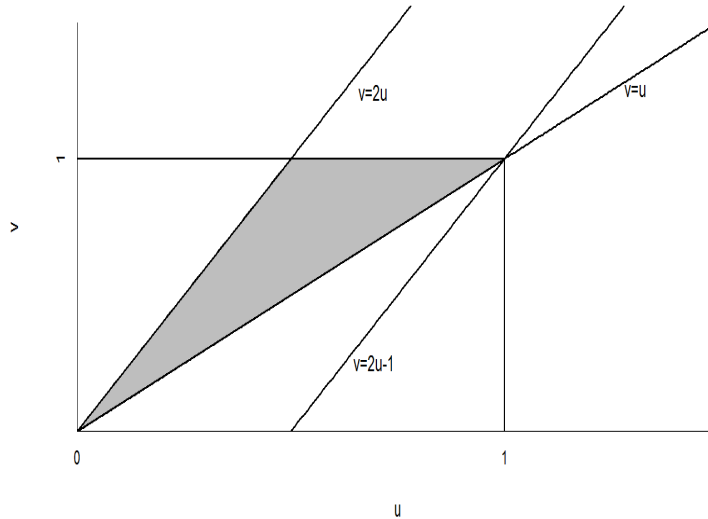
2.2.2.1 Kuov kontrolni grafik medijane

Ku (Khoo, 2005) predlaže sledeći kontrolni grafik medijane za slučaj kada posmatrana karakteristika kvaliteta ima normalnu $N(\mu, \sigma^2)$ raspodelu. Statistike poretka $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ transformišu se u slučajne veličine Z_1, Z_2, \dots, Z_n iz uniformne $U(0, 1)$ raspodele pomoću transformacije $Z_i = F(X_{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, n$, gde je F funkcija normalne $N(\mu, \sigma^2)$ raspodele. Zatim se računa medijana U slučajnih veličina Z_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

2. PRAĆENJE CENTRALNE TENDENCIJE

Na osnovu (2.13), gustina raspodele uzoračke medijane standardne uniformne raspodele za neparan obim uzorka jednaka je

$$f_U(u) = \frac{(2k+1)!}{(k!)^2} (u(1-u))^k, \quad 0 < u < 1. \quad (2.18)$$



Slika 2.6: Oblast integracije

Izvedimo raspodelu uzoračke medijane standardne uniformne raspodele za paran obim uzorka. Oblast integracije u (2.17) se dobija u preseku

$$u < v, \quad 0 < 2u - v < 1, \quad 0 < v < 1,$$

odnosno

$$u < v, \quad 2u - 1 < v < 2u, \quad 0 < v < 1,$$

što je predstavljeno na slici 2.6.

Vidimo da su granice integrala u (2.17) $u < v < 2u$ za $0 < u < \frac{1}{2}$ i $u < v < 1$ za $\frac{1}{2} < u < 1$. Dobijamo da je gustina raspodele uzoračke medijane, za paran obim

uzorka jednaka

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{2(2k)!}{((k-1)!)^2} \int_u^{2u} (2u-v)^{k-1} (1-v)^{k-1} dv, & 0 < u \leq \frac{1}{2} \\ \frac{2(2k)!}{((k-1)!)^2} \int_u^1 (2u-v)^{k-1} (1-v)^{k-1} dv, & \frac{1}{2} < u < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2(2j)!}{j!(k-1)!(k-j-1)!(k+j)} (2u-1)^{k-j-1} ((1-u)^{k+j} - (1-2u)^{k+j}), & 0 < u \leq \frac{1}{2} \\ \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2(2j)!}{j!(k-1)!(k-j-1)!(k+j)} (2u-1)^{k-j-1} (1-u)^{k+j}, & \frac{1}{2} < u < 1 \end{cases}$$

Kontrolne granice kontrolnog grafika medijane, za odabranu verovatnoću greške prve vrste, dobijaju se iz

$$\int_0^{LCL} f_U(u) du = \int_{UCL}^1 f_U(u) du = \frac{\alpha}{2}.$$

Glavno ograničenje ovog kontrolnog grafika je što je neophodna pretpostavka o raspodeli podataka.

2.2.2.2 Janacek-Miklov kontrolni grafik medijane

Janacek i Mikl (Janacek & Meikle, 1997) su predložili kontrolni grafik medijane koji se može koristiti kada je raspodela podataka poznata ili kada je nepoznata. Neka je X_1, X_2, \dots, X_N referentni uzorak prikupljen kada je proces bio u stanju kontrole. Pretpostavlja se da se test uzorci obima n izvlače nezavisno jedan od drugog kao i nezavisno od referentnog uzorka. Računaju se uzoračke medijane test uzoraka a kontrolne granice predstavljaju statistike poretka referentnog uzorka. Za odabranu verovatnoću greške prve vrste i uzoračku medijanu U test uzorka, računaju se donja i gornja kontrolna granica $LCL = X_{(j)}$ i $UCL = X_{(N-j+1)}$, redom, tako da važi

$$P\{X_{(j)} \leq U \leq X_{(N-j+1)}\} = 1 - \alpha. \quad (2.19)$$

Kada je raspodela referentnog uzorka poznata, nalaženje kontrolnih granica je jednostavno. Neka B označava broj članova test uzorka manjih od kvantila refe-

rentnog uzorka k_q , gde je $F_X(k_q) = q$. Slučajna veličina B ima binomnu raspodelu

$$P\{B = b\} = \binom{n}{b} q^b (1 - q)^{n-b}, \quad b = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Za verovatnoću greške prve vrste α imamo da je

$$\frac{\alpha}{2} = P\{U < k_q\} = P\{B \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1\},$$

pa je

$$\frac{\alpha}{2} = \sum_{b=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n \binom{n}{b} q^b (1 - q)^{n-b}.$$

Za odabrano α , odredi se verovatnoća q , a zatim i kvantili, odnosno kontrolne granice grafika medijane.

Međutim, funkcija raspodele podataka F_X obično nije poznata. Iz (2.11) se dobija funkcija raspodele statistike poretka $X_{(j)}$. Tada je uslovna raspodela slučajne veličine B jednaka

$$P\{B = b | X_{(j)} = x\} = \binom{n}{b} F_X(x)^b (1 - F_X(x))^{n-b}, \quad b = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Tada je

$$P\{B = b\} = \int_0^{\infty} \frac{N!}{(j-1)!(N-j)!} \frac{n!}{b!(n-b)!} F_X(x)^{b+j-1} (1 - F_X(x))^{N+n-b-j} f_X(x) dx.$$

Uvedimo smenu $F_X(x) = t$. Dobija se

$$\begin{aligned} P\{B = b\} &= \int_0^1 \frac{N!}{(j-1)!(N-j)!} \frac{n!}{b!(n-b)!} t^{b+j-1} (1-t)^{N+n-b-j} dt = \\ &= \frac{N!}{(j-1)!(N-j)!} \frac{n!}{b!(n-b)!} B(b+j, N+n+1-b-j) = \\ &= \frac{\binom{b+j-1}{b} \binom{N+n-b-j}{n-b}}{\binom{N+n}{n}}, \end{aligned}$$

gde je B beta funkcija. Dakle, slučajna veličina B ima beta binomnu raspodelu sa parametrima j i $N - j + 1$.

Za odabranu verovatnoću greške prve vrste α , obime referentnog i test uzorka, iz

$$\frac{\alpha}{2} = P\{U < X_{(j)}\} = \sum_{b=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^n \frac{\binom{b+j-1}{b} \binom{N+n-b-j}{n-b}}{\binom{N+n}{n}}.$$

se odredi j , pa se izračunaju donja i gornja kontrolna granica $LCL = X_{(j)}$ i $UCL = X_{(N-j+1)}$.

Čakraborti et al. (Chakraborti et al., 2004) su detaljno ispitali Janacek-Miklov kontrolni grafik medijane, proučili njegova svojstva i predložili njegove generalizacije.

2.2.2.3 Kontrolni grafik medijane zasnovan na Man-Vitnijevoj statistici

Čakraborti i Viel (Chakraborti & Viel, 2008) razmatrali su dizajn kontrolnog grafika za parametar lokacije koji je zasnovan na Man-Vitnijevoj statistici. Pretpostavlja se da raspodela podataka nije poznata.

Neka je $X = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ referentni uzorak obima N uzet iz procesa u stanju kontrole i $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ test uzorak veličine n . Pretpostavimo da su test uzorci međusobno nezavisni kao i nezavisni od referentnog uzorka. Man-Vitnijeva test statistika predstavlja ukupan broj parova (X_i, Y_j) , $i = 1, 2, \dots, N$, $j = 1, 2, \dots, n$ gde je Y_j veće od X_i

$$M_{XY} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n I\{X_i < Y_j\}, \quad (2.20)$$

$I\{X_i < Y_j\}$ je indikator funkcija događaja $\{X_i < Y_j\}$. Man-Vitnijeva statistika uzima vrednosti između 0 i Nn , pri čemu velike vrednosti ukazuju na pozitivan pomeraaj, dok male vrednosti ukazuju na negativan pomeraaj parametra lokacije.

Ukoliko nije došlo do promene parametra lokacije, Man-Vitnijeva statistika ima raspodelu

$$P\{M_{XY} = u\} = \frac{r_{N,n}(u)}{\binom{N+n}{n}},$$

gde je $r_{N,n}(u)$ broj različitih rasporeda N slučajnih veličina X i n slučajnih veličina Y tako da je Y veće od X ukupno u puta.

Kontrolni grafik medijane zasnovan na Man-Vitnijevoj statistici signalizira stanje

van kontrole ukoliko

$$M_{XY} < L_{Nn} \quad \text{ili} \quad M_{XY} > U_{Nn},$$

gde su L_{Nn} i U_{Nn} , redom, donja kontrolna granica LCL i gornja kontrolna granica UCL . Raspodela statistike M_{XY} je simetrična oko srednje vrednosti $\frac{Nn}{2}$ kada je proces u stanju kontrole, pa se može uzeti $L_{Nn} = Nn - U_{Nn}$.

Kako su i raspodela Janacek-Miklove statistike i raspodela Man-Vitnijeve statistike diskretne, može biti komplikovano da se dobiju tačne kontrolne granice kontrolnih grafika medijane, za izabranu verovatnoću greške prve vrste.

2.2.3 Jednostrani kontrolni grafik medijane pozitivno asimetrične raspodele

Pozitivno asimetrične raspodele se često koriste kao raspodele podataka koji se javljaju u industriji. Prilikom konstrukcije kontrolnog grafika medijane, razmatrali smo eksponencijalnu, gama i Vejbulovu raspodelu karakteristike kvaliteta. Polje primene ovih raspodela je široko i obuhvata veliki broj naučnih disciplina (inženjering, hidrologija, ekonomija, medicina, itd., videti npr. Pal et al, 2005; Rinne, 2009).

Izveli smo teorijsku raspodelu uzoračke medijane posmatranih raspodela i zatim smo je aproksimirali odgovarajućom Pirsonovom raspodelom. Razmatrali smo konstrukciju jednostranog kontrolnog grafika medijane za detekciju pozitivnih pomeraja, što odgovara slučajevima primene kada su samo velike vrednosti od interesa.

Pretpostavlja se da proces počinje u stanju kontrole sa medijanom M_0 i da javljanje odredivog uzroka dovodi do promene medijane sa M_0 na $M_1 = M_0 + \delta\sigma$, gde je σ standardna devijacija za koju se pretpostavlja da ostaje nepromenjena. To znači da se raspodela karakteristike kvaliteta pomerila udesno za $\delta\sigma$, što rezultuje promenom parametara lokacije (medijana, srednja vrednost, mod), dok parametri skaliranja i oblika ostaju isti. Centralna linija kontrolnog grafika medijane je M_0 . Donja kontrolna granica jednaka je nuli, a gornja kontrolna granica računa se za unapred izabranu verovatnoću greške prve vrste. Uzimaju se uzorci obima n , računa se medijana svakog uzorka i grafički predstavlja na grafiku medijane. Ako je uzoračka

medijana van gornje kontrolne granica, smatra se da je došlo do promene vrednosti medijane i preduzima se potraga za odredivim uzrokom.

2.2.4 Raspodele karakteristike kvaliteta

Razmotrićemo tri pozitivno asimetrične raspodele slučajne veličine X : standardnu eksponencijalnu $E(1)$ raspodelu, gama $\Gamma(2, 1)$ raspodelu i Vejbulovu $W(2, 1)$ raspodelu (Djoric et al., 2007, Johnson et al., 1994, Johnson et al., 1995). Parametri ovih raspodela odabrani su tako da pružaju različite stepene asimetrije raspodele, kao i zarad jednostavnijeg računanja teorijske raspodele uzoračke medijane.

Za odabrane raspodele karakteristike kvaliteta, koeficijenti asimetrije i spljoštenosti dati su u nastavku.

1. Eksponencijalna raspodela: $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 9$,
2. Gama $\Gamma(2, 1)$ raspodela: $\alpha_3 = \sqrt{2}$, $\alpha_4 = 6$
3. Vejbulova $W(2, 1)$ raspodela: $\alpha_3 = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{(4-\pi)^{1.5}} \approx 0.631$, $\alpha_4 = \frac{32-3\pi^2}{(4-\pi)^2} \approx 3.245$

2.2.5 Dizajn kontrolnog grafika medijane

Sada ćemo izračunati teorijsku raspodelu uzoračke medijane posmatranih pozitivno asimetričnih raspodela za obime uzoraka $n = 5(1)15$, koristeći izraze (2.13) i (2.17). U slučaju standardne eksponencijalne i gama $G(2, 1)$ raspodele, raspodela uzoračke medijane aproksimira se Pirsonovom raspodelom VI tipa a Pirsonovom raspodelom I tipa u slučaju Vejbulove $W(2, 1)$ raspodele. Parametri odgovarajuće Pirsonove raspodele računaju se na osnovu formula (1.2),(1.7) i (1.11) navedenih u Uvodu. Prva četiri momenta raspodele uzoračke medijane neophodna za računanje ovih parametara, kao i funkcija raspodele uzoračke medijane približno su izračunati (sa tačnošću na 5 decimala) korišćenjem adaptivne Gaus-Kronrodove kvadrature formule (Calveti et al. 2000) u statističkom softveru R (funkcija *integrate* iz paketa *stats*). Takođe, za fitovanje Pirsonovih raspodela, korišćene su funkcije iz R paketa *PearsonDS* (Becker & Klössner, 2013).

2. PRAĆENJE CENTRALNE TENDENCIJE

Za verovatnoću greške prve vrste $\alpha = 0.0027$, gornja kontrolna granica UCL jednostranog grafika medijane računa se na osnovu

$$\alpha = P\{U \geq UCL | M = M_0\} = 1 - F(UCL), \quad (2.21)$$

gde je U uzoračka medijana i F njena funkcija raspodele (teorijska raspodela uzoračke medijane ili odgovarajuća Pirsonova raspodela).

Za razmatrane pozitivno asimetrične raspodele karakteristike kvaliteta, obime uzoraka $n = 5(1)15$, verovatnoću greške prve vrste, izračunate gornje kontrolne granice za teorijsku raspodelu uzoračke medijane i odgovarajuću Pirsonovu raspodelu date su u tabeli 2.8.

Tabela 2.8: Gornje kontrolne granice kontrolnog grafika medijane pozitivno asimetričnih raspodela

Obim uzorka	Gornja kontrolna granica					
	Eksponecijalna $E(1)$		Gama $G(2, 1)$		Vejbulova $W(2, 1)$	
	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson	Teor.	Pirson
$n = 5$	2.70478	2.70413	4.38918	4.38866	1.64462	1.64324
$n = 6$	2.35670	2.35662	3.94665	3.94648	1.52673	1.52590
$n = 7$	2.30534	2.30508	3.89319	3.89291	1.51833	1.51748
$n = 8$	2.08843	2.08836	3.61233	3.61218	1.44028	1.43974
$n = 9$	2.06091	2.06078	3.58332	3.58315	1.43556	1.43500
$n = 10$	1.91108	1.91102	3.38649	3.38639	1.37925	1.37883
$n = 11$	1.89407	1.89340	3.36847	3.36835	1.37625	1.37582
$n = 12$	1.78340	1.78337	3.22142	3.22132	1.33320	1.33288
$n = 13$	1.77192	1.77189	3.20920	3.20909	1.33114	1.33081
$n = 14$	1.68626	1.68627	3.09428	3.09420	1.29690	1.29664
$n = 15$	1.67802	1.67802	3.08550	3.08540	1.29538	1.29514

Kao što se može videti u tabeli 2.8, vrednosti gornjih kontrolnih granica izračunatih na osnovu teorijske raspodele i odgovarajuće Pirsonove raspodele su veoma bliske, tj. Pirsonova raspodela veoma dobro aproksimira teorijsku raspodelu uzoračke medijane.

Želimo sada da ispitamo kolika je moć kontrolnog grafika medijane pozitivno asimetričnih raspodela da detektuje pozitivna pomeranja veličine $\delta = 0.5(0.5)3$, za izračunate gornje kontrolne granice. Moć kontrolnog grafika medijane za detekto-

vanje pomeranja od M_0 na $M_0 + \delta\sigma$ može se izračunati na osnovu

$$1 - \beta = P\{U \geq UCL | M = M_0 + \delta\sigma\} = 1 - F(UCL - \delta\sigma).$$

Računanje moći jednostranog kontrolnog grafika medijane izvedeno je za teorijsku raspodelu uzoračke medijane i za odgovarajuću Pirsonovu raspodelu, radi daljeg poređenja tačnosti aproksimacije.

Prvenstveno želimo da ispitamo koliki je minimalni pozitivni pomeraj koji kontrolni grafik medijane može da detektuje sa moći barem 90%.

Izračunate moći kontrolnog grafika medijane, za razmatrane raspodele karakteristike kvaliteta, obime uzoraka $n = 5(1)15$, pozitivne pomeraje veličine $\delta = 0.5(0.5)3$, za teorijsku raspodelu uzoračke medijane i odgovarajuću Pirsonovu raspodelu date su u tabeli 2.9.

Vidimo u tabeli 2.9. da kontrolni grafik medijane može da detektuje pomeranja veličine $\delta = 1.5$ sa moći barem 90% za obime uzoraka $n = 12$ i više u slučaju standardne eksponencijalne i gama $G(2, 1)$ i $n = 14$ i više u slučaju Vejbulove $W(2, 1)$ raspodele. Da bi kontrolni grafik medijane detektovao pomeranja veličine $\delta = 2.0$ sa moći 90% i više, neophodno je uzeti uzorke veličine $n = 7$ i više u slučaju standardne eksponencijalne i $n = 8$ i više u slučaju gama $G(2, 1)$ i Vejbulove $W(2, 1)$ raspodele. Takođe, opet ćemo primetiti kako Pirsonova raspodela dobro aproksimira raspodelu uzoračke medijane. Opšte rečeno, može se zaključiti da kontrolni grafik medijane može da detektuje pomeranja veličine $\delta = 1.5$ i više sa moći barem 90%, kada je raspodela karakteristike kvaliteta pozitivno asimetrična.

2.2.6 Primena kontrolnog grafika medijane

Sada nas interesuje kako se kontrolni grafik može primeniti u praksi, u opštem slučaju kada je raspodela karakteristike kvaliteta pozitivno asimetrična ali nepoznata. Za fitovanje odgovarajuće Pirsonove raspodele, potrebne su nam ocene srednje vrednosti, disperzije, koeficijenata asimetrije i spljoštenosti na osnovu uzorka medijana.

Prema tome, uzimamo m preliminarnih uzoraka obima n i računamo medijanu svakog uzorka. Želimo da aproksimiramo raspodelu uzoračke medijane fi-

Tabela 2.9: Moć kontrolnog grafika medijane pozitivno asimetričnih raspodela

Raspodela	Moć																		
	$\delta = 0.5$			$\delta = 1.0$			$\delta = 1.5$			$\delta = 2.0$			$\delta = 2.5$			$\delta = 3.0$			
	Teor.	Pinson	Teor.	Pinson	Teor.	Pinson	Teor.	Pinson	Teor.	Pinson	Teor.	Pinson	Teor.	Pinson	Teor.	Pinson	Teor.	Pinson	
$E(1)$																			
$n = 5$	0.01129	0.01130	0.04490	0.04498	0.16276	0.16308	0.48916	0.48970	0.95283	0.95330	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 6$	0.01646	0.01647	0.08771	0.08774	0.36239	0.36246	0.88504	0.88513	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 7$	0.01680	0.01681	0.09166	0.09176	0.38522	0.38549	0.91669	0.91688	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 8$	0.02365	0.02366	0.16039	0.16044	0.64889	0.64897	0.99963	0.99963	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 9$	0.02400	0.02401	0.16527	0.16537	0.66941	0.66954	0.99993	0.99993	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 10$	0.03272	0.03273	0.26106	0.26112	0.87804	0.87810	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 11$	0.03310	0.03311	0.26670	0.26679	0.88906	0.88912	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 12$	0.04387	0.04388	0.38425	0.38428	0.97843	0.97844	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 13$	0.04429	0.04429	0.39019	0.39024	0.98136	0.98138	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 14$	0.05727	0.05727	0.51825	0.51824	0.99863	0.99864	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 15$	0.05772	0.05771	0.52393	0.52396	0.99892	0.99892	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$G(2, 1)$																			
$n = 5$	0.01361	0.01363	0.06019	0.06027	0.21734	0.21751	0.57043	0.57068	0.93361	0.93386	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999
$n = 6$	0.01976	0.01978	0.11139	0.11144	0.41965	0.41969	0.87057	0.87074	0.99951	0.99948	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 7$	0.02013	0.02015	0.11546	0.11554	0.43734	0.43745	0.88893	0.88914	0.99980	0.99978	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 8$	0.02792	0.02794	0.18849	0.18854	0.65614	0.65625	0.98636	0.98636	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 9$	0.02829	0.02831	0.19290	0.19297	0.66926	0.66938	0.98891	0.98891	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 10$	0.03779	0.03782	0.28441	0.28444	0.83654	0.83666	0.99955	0.99954	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 11$	0.03817	0.03820	0.28891	0.28896	0.84388	0.84400	0.99966	0.99965	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 12$	0.04945	0.04948	0.39213	0.39218	0.93798	0.93806	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 13$	0.04984	0.04987	0.39645	0.39650	0.94113	0.94120	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 14$	0.06293	0.06296	0.50309	0.50314	0.98121	0.98122	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 15$	0.06333	0.06337	0.50696	0.50702	0.98225	0.98226	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$W(2, 1)$																			
$n = 5$	0.02022	0.02056	0.10108	0.10218	0.32743	0.32879	0.67751	0.67944	0.93349	0.93490	0.99774	0.99758	0.99774	0.99758	0.99774	0.99758	0.99774	0.99758	0.99774
$n = 6$	0.02813	0.02845	0.16312	0.16403	0.50848	0.50958	0.87329	0.87457	0.99352	0.99351	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 7$	0.02843	0.02877	0.16596	0.16692	0.51660	0.51774	0.87973	0.88103	0.99435	0.99432	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 8$	0.03768	0.03799	0.24042	0.24114	0.67996	0.68091	0.96429	0.96470	0.99975	0.99971	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 9$	0.03796	0.03829	0.24307	0.24382	0.68531	0.68629	0.96608	0.96648	0.99978	0.99975	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 10$	0.04850	0.04881	0.32524	0.32588	0.80946	0.81028	0.99214	0.99217	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 11$	0.04878	0.04910	0.32765	0.32831	0.81264	0.81347	0.99252	0.99255	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 12$	0.06059	0.06089	0.41294	0.41350	0.89535	0.89591	0.99861	0.99858	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 13$	0.06086	0.06117	0.41508	0.41565	0.89707	0.89764	0.99868	0.99865	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 14$	0.07389	0.07419	0.49923	0.49974	0.94652	0.94683	0.99980	0.99979	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$n = 15$	0.07418	0.07446	0.50111	0.50158	0.94739	0.94769	0.99981	0.99980	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

tovanjem Pirsonove raspodele podacima koji se sastoje od m uzoračkih medijana U_1, U_2, \dots, U_m .

Koristićemo $\bar{U} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m U_i$ i $S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (U_i - \bar{U}_m)^2$ kao nepristrasne ocene srednje vrednosti i disperzije uzoračke medijane. Što se tiče ocena koeficijenata asimetrije i spljoštenosti, ispitaćemo koja od mera asimetrije i spljoštenosti ima minimalnu srednjekvadratnu grešku (MSE).

2.2.6.1 Izbor ocena koeficijenata asimetrije i spljoštenosti

Džoans i Gil (Joanes & Gill, 1998) su poredili tri ocene koeficijenata asimetrije i spljoštenosti uzoraka iz Gausove i negausove raspodele, na osnovu njihove pristrasnosti i srednjekvadratne greške. Tradicionalne ocene koeficijenata asimetrije i spljoštenosti g_1 i g_2 jednake su, redom

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \quad g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3$$

gde su momenti uzorka (u_1, u_2, \dots, u_m) dati sa $m_r = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (u_i - \bar{u}_m)^r$. U SAS-u, SPSS-u i EXCEL-u, kao ocena koeficijenata asimetrije i spljoštenosti koristi se

$$G_1 = \frac{\sqrt{m(m-1)}}{m-2} g_1, \quad G_2 = \frac{m-1}{(m-2)(m-3)} ((m+1)g_2 + 6).$$

U MINITAB-u i BDMP-u, koriste se sledeće ocene koeficijenata asimetrije i spljoštenosti

$$b_1 = \frac{m_3}{s^3}, \quad b_2 = \frac{m_4}{s^4} - 3.$$

Što se tiče disperzija ovih triju ocena asimetrije i spljoštenosti, Džoans i Gil (Joanes & Gill, 1998) su pokazali da važi

$$\text{var}(b_1) < \text{var}(g_1) < \text{var}(G_1)$$

i

$$\text{var}(b_2) < \text{var}(g_2) < \text{var}(G_2),$$

bez obzira na raspodelu podataka. Generisali su uzorke obima 10, 20, 50 i 100 iz χ^2_ν -raspodele sa $\nu = 1, 10$ i 50 stepeni slobode (koeficijenti asimetrije ovih raspodela jednaki su, redom, 2.828, 0.894 i 0.4).

Dobili su da je pristrasnost sve tri ocene koeficijenta asimetrije konzistentno negativna i da prati odnos (apsolutna vrednost pristrasnosti)

$$\text{bias}(G_1) < \text{bias}(g_1) < \text{bias}(b_1).$$

Za vrlo asimetričnu χ^2_1 raspodelu, srednjekvadratne greške ovih ocena prate odnos

$$\text{mse}(G_1) < \text{mse}(g_1) < \text{mse}(b_1),$$

a za χ^2_{10} i χ^2_{50} primetili su da važi

$$\text{mse}(b_1) < \text{mse}(g_1) < \text{mse}(G_1).$$

Isti odnos važi i za pristrasnost ocena koeficijenta spljoštenosti

$$\text{bias}(G_2) < \text{bias}(g_2) < \text{bias}(b_2).$$

Što se tiče srednjekvadratne greške ocena koeficijenta spljoštenosti, za χ^2_1 raspodelu i $m < 100$, važi

$$\text{mse}(G_2) < \text{mse}(g_2) < \text{mse}(b_2),$$

i

$$\text{mse}(g_2) < \text{mse}(G_2) < \text{mse}(b_2),$$

za $m = 100$ i za $\nu = 10$, $m = 10$. Kako se broj stepeni slobode ν povećava, ocena G_2 ima generalno najveću srednjekvadratnu grešku bez obzira na vrednost m a ocena g_2 ima najmanju srednjekvadratnu grešku. Ocena b_2 postiže najmanju srednjekvadratnu grešku za $\nu = 50$ i $m = 100$.

Kako bismo ispitali kakve su srednjekvadratne greške ocena koeficijenata asimetrije i spljoštenosti uzoračkih medijana pozitivno asimetričnih raspodela,

uzećemo, pomoću Monte Karlo simulacija, 100000 uzoraka obima $m = 25, 50, 100$ iz raspodela uzoračke medijane standardne eksponencijalne, gama $G(2, 1)$ i Vejbulove $W(2, 1)$ raspodele. Prosečne vrednosti pristrasnosti i srednjekvadratne greške ove tri ocene predstavljene su u tabelama 2.10. i 2.11. Primetimo da, s obzirom da koristimo Pirsonov koeficijent spljoštenosti, dodali smo 3 svim merama koeficijenta spljoštenosti i označili smo ih sa g_2^*, G_2^*, b_2^* , redom. Takođe, odabrali smo samo uzorke obima 5, 10 i 15 iz razmatranih raspodela karakteristike kvaliteta, kako bismo predstavili promene vrednosti koeficijenta asimetrije i spljoštenosti raspodela uzoračke medijane.

Kao što se može videti u tabeli 2.10, pristrasnost ove tri ocene koeficijenta asimetrije i spljoštenosti je konzistentno negativna i prati odnos koji su primetili Džoans i Gil.

Za srednjekvadratnu grešku ocena koeficijenta asimetrije važi

$$mse(g_1) < mse(b_1) < mse(G_1),$$

za raspodelu uzoračke medijane standardne eksponencijalne raspodele, za $n = 5$ i $m = 25$, i

$$mse(b_1) < mse(g_1) < mse(G_1),$$

u ostalim slučajevima, kao za χ_{10}^2 i χ_{50}^2 raspodele, u radu Džoansa i Gila.

Što se tiče ocena koeficijenta spljoštenosti, G_2^* ima najveću srednjekvadratnu grešku, bez obzira na vrednost m . Ocena b_2^* ima najmanju srednjekvadratnu grešku za $m = 100$ i $m = 50$, $n = 15$, za raspodelu uzoračke medijane standardne eksponencijalne raspodele i za $m = 100$ za raspodelu uzoračke medijane gama $G(2, 1)$ raspodele. U svim ostalim slučajevima, g_2^* ima najmanju srednjekvadratnu grešku.

Kada sumiramo naše rezultate i rezultate Džoansa i Gila, možemo dati sledeće preporuke što se tiče izbora odgovarajućih ocena koeficijenta asimetrije i spljoštenosti pozitivno asimetričnih raspodela: ocene G_1 i G_2^* su odgovarajuće za vrlo asimetrične raspodele, b_1 i b_2^* za obime uzoraka barem $m = 100$. U ostalim slučajevima, izbor između ocena b_1 , b_2^* i g_1 , g_2^* nije tako jasan, ali predlažemo ocene g_1 , g_2^* , pošto g_2^* ima najmanju srednjekvadratnu grešku i srednjekvadratna greška ocene b_1 je, generalno, samo malo manja od srednjekvadratne greške ocene g_1 .

Tabela 2.10: Pristrasnosti i srednjekvadratne greške ocena koeficijenta asimetrije g_1 , G_1 i b_1 raspodela uzoračke medijane

Raspodela	Koef. asimetrije	Pristrasnost			Srednjekv. greška			
		g_2^*	G_2^*	b_2^*	g_2^*	G_2^*	b_2^*	
Eksponencijalna $E(1)$								
$n = 5$	$m = 25$	1.229	-0.327	-0.272	-0.381	0.404	0.408	0.406
	$m = 50$		-0.193	-0.158	-0.223	0.264	0.269	0.263
	$m = 100$		-0.105	-0.087	-0.122	0.167	0.170	0.167
$n = 10$	$m = 25$	0.863	-0.219	-0.178	-0.254	0.294	0.312	0.284
	$m = 50$		-0.123	-0.098	-0.144	0.185	0.191	0.181
	$m = 100$		-0.065	-0.056	-0.078	0.111	0.112	0.108
$n = 15$	$m = 25$	0.753	-0.186	-0.146	-0.221	0.271	0.291	0.257
	$m = 50$		-0.103	-0.085	-0.123	0.167	0.172	0.160
	$m = 100$		-0.053	-0.045	-0.066	0.098	0.099	0.097
Gama $G(2, 1)$								
$n = 5$	$m = 25$	0.818	-0.207	-0.163	-0.242	0.285	0.300	0.273
	$m = 50$		-0.118	-0.092	-0.137	0.179	0.184	0.174
	$m = 100$		-0.064	-0.050	-0.074	0.106	0.107	0.104
$n = 10$	$m = 25$	0.568	-0.137	-0.110	-0.163	0.234	0.260	0.220
	$m = 50$		-0.077	-0.060	-0.091	0.141	0.148	0.136
	$m = 100$		-0.040	-0.032	-0.048	0.080	0.083	0.078
$n = 15$	$m = 25$	0.491	-0.117	-0.094	-0.140	0.226	0.248	0.204
	$m = 50$		-0.065	-0.052	-0.078	0.131	0.140	0.128
	$m = 100$		-0.035	-0.026	-0.040	0.075	0.076	0.073
Wejbulova $W(2, 1)$								
$n = 5$	$m = 25$	0.359	-0.083	-0.065	-0.098	0.190	0.212	0.174
	$m = 50$		-0.044	-0.035	-0.054	0.108	0.114	0.103
	$m = 100$		-0.024	-0.017	-0.027	0.058	0.059	0.057
$n = 10$	$m = 25$	0.249	-0.059	-0.045	-0.070	0.190	0.215	0.170
	$m = 50$		-0.032	-0.024	-0.038	0.107	0.112	0.101
	$m = 100$		-0.016	-0.012	-0.019	0.058	0.058	0.056
$n = 15$	$m = 25$	0.214	-0.048	-0.037	-0.060	0.191	0.214	0.169
	$m = 50$		-0.026	-0.022	-0.032	0.108	0.113	0.102
	$m = 100$		-0.014	-0.011	-0.016	0.057	0.059	0.055

Tabela 2.11: Pristrasnosti i srednjekvadratne greške ocena koeficijenta spljoštenosti g_2^* , G_2^* i b_2^* raspodela uzoračke medijane

Raspodela	Koef. spljoštenosti	Pristrasnost			Srednjekv. greška		
		g_2^*	G_2^*	b_2^*	g_2^*	G_2^*	b_2^*
Eksponecijalna $E(1)$							
$n = 5$ $m = 25$	5.347	-1.678	-1.251	-1.972	6.057	6.465	6.623
$m = 50$		-1.097	-0.823	-1.266	5.445	5.987	5.497
$m = 100$		-0.650	-0.495	-0.744	4.669	5.067	4.669
$n = 10$ $m = 25$	4.158	-0.930	-0.594	-1.177	2.752	3.234	2.995
$m = 50$		-0.568	-0.372	-0.707	2.482	2.776	2.501
$m = 100$		-0.318	-0.227	-0.401	2.014	2.091	1.960
$n = 15$ $m = 25$	3.884	-0.754	-0.435	-1.004	2.163	2.636	2.351
$m = 50$		-0.449	-0.286	-0.590	1.897	2.134	1.886
$m = 100$		-0.251	-0.163	-0.326	1.490	1.573	1.465
Gama $G(2, 1)$							
$n = 5$ $m = 25$	4.052	-0.870	-0.529	-1.113	2.514	2.942	2.740
$m = 50$		-0.530	-0.336	-0.666	2.230	2.537	2.266
$m = 100$		-0.308	-0.195	-0.375	1.759	1.884	1.733
$n = 10$ $m = 25$	3.508	-0.530	-0.248	-0.761	1.402	1.786	1.542
$m = 50$		-0.308	-0.154	-0.435	1.177	1.362	1.184
$m = 100$		-0.168	-0.090	-0.235	0.861	0.945	0.847
$n = 15$ $m = 25$	3.383	-0.453	-0.187	-0.688	1.186	1.531	1.305
$m = 50$		-0.265	-0.117	-0.380	0.953	1.092	0.979
$m = 100$		-0.141	-0.064	-0.199	0.694	0.727	0.682
Vejbulova $W(2, 1)$							
$n = 5$ $m = 25$	3.091	-0.297	-0.064	-0.518	0.784	1.050	0.852
$m = 50$		-0.163	-0.039	-0.279	0.570	0.673	0.575
$m = 100$		-0.086	-0.022	-0.141	0.359	0.389	0.364
$n = 10$ $m = 25$	3.044	-0.264	-0.032	-0.484	0.678	0.933	0.743
$m = 50$		-0.139	-0.020	-0.255	0.475	0.548	0.483
$m = 100$		-0.071	-0.010	-0.129	0.288	0.306	0.289
$n = 15$ $m = 25$	3.034	-0.252	-0.024	-0.475	0.666	0.896	0.727
$m = 50$		-0.133	-0.018	-0.249	0.450	0.524	0.462
$m = 100$		-0.069	-0.007	-0.127	0.266	0.293	0.268

U praksi često je potrebno istovremeno kontrolisati i medijanu (ili srednju vrednost) i standardnu devijaciju karakteristike kvaliteta. U nastavku ćemo definisati R kontrolni grafik za pozitivno asimetrične raspodele, a zatim ćemo na primeru podataka ilustrovati upotrebu kontrolnog grafika medijane i R kontrolnog grafika.

2.2.6.2 R kontrolni grafik

U statističkoj kontroli kvaliteta, R kontrolni grafik se često koristi za praćenje varijabilnosti kada je obim uzorka $n \leq 10$ (Montgomery, 2005). Pretpostavlja se da je u početku proces u stanju kontrole, sa standardnom devijacijom σ_0 . Usled pojavljivanja odredivog uzroka, standardna devijacija naglo se poveća sa σ_0 na σ_1 . Donja kontrolna granica LCL , centralna linija CL i gornja kontrolna granica UCL R kontrolnog grafika su, redom, jednake

$$\begin{aligned} LCL &= \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}, \\ CL &= \bar{R}, \\ UCL &= \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2}, \end{aligned}$$

gde je \bar{R} prosečan raspon, d_2 i d_3 su, redom, očekivana vrednost i standardna devijacija relativnog raspona $\frac{R}{\sigma}$. Tabele vrednosti d_2 i d_3 u zavisnosti od obima uzorka n date su u mnogim udžbenicima o statističkoj kontroli kvaliteta, za jednostavniju konstrukciju R kontrolnog grafika. Tablične vrednosti izračunate su za slučaj kada je raspodela slučajne veličine normalna (Harter, 1960). Mahoni (Mahoney, 1998) je ispitivao efekat koeficijenta d_2 , a Kao i Ho (Kao & Ho, 2007) efekat koeficijenta d_3 na R kontrolni grafik, za različite raspodele karakteristike kvaliteta. U obe studije pokazano je da upotreba tabličnih vrednosti d_2 i d_3 ozbiljno utiče na performans R kontrolnog grafika.

Veljkovic (Veljkovic, 2016) je razmatrala konstrukciju jednostranog R kontrolnog grafika za pozitivno asimetrične raspodele. Za raspodelu karakteristike kvaliteta odabrane su standardna eksponencijalna, gama $G(2, 1)$ i Vejbulova $W(1)$ raspodela, za obime uzoraka od 3 do 10. Izračunata je funkcija raspodele uzoračkog raspona

(Gumbel, 1947)

$$F_R(r) = n \int_0^{+\infty} f_X(x) (F(x+r) - F(x))^{n-1} dx, \quad r > 0. \quad (2.22)$$

i aproksimirana je odgovarajućom Pirsonovom raspodelom. Za verovatnoću greške prve vrste $\alpha = 0.0027$, gornja kontrolna granica UCL R kontrolnog grafika, za teorijsku raspodelu uzoračkog raspona i odgovarajuću Pirsonovu raspodelu može se izračunati na osnovu

$$\alpha = P\{R \geq UCL | \sigma = \sigma_0\} = 1 - F(UCL), \quad (2.23)$$

gde je F funkcija raspodele uzoračkog raspona (teorijska funkcija raspodele ili odgovarajuća Pirsonova raspodela).

Dobijeno je da Pirsonova raspodela veoma dobro aproksimira teorijsku funkciju raspodele uzoračkog raspona.

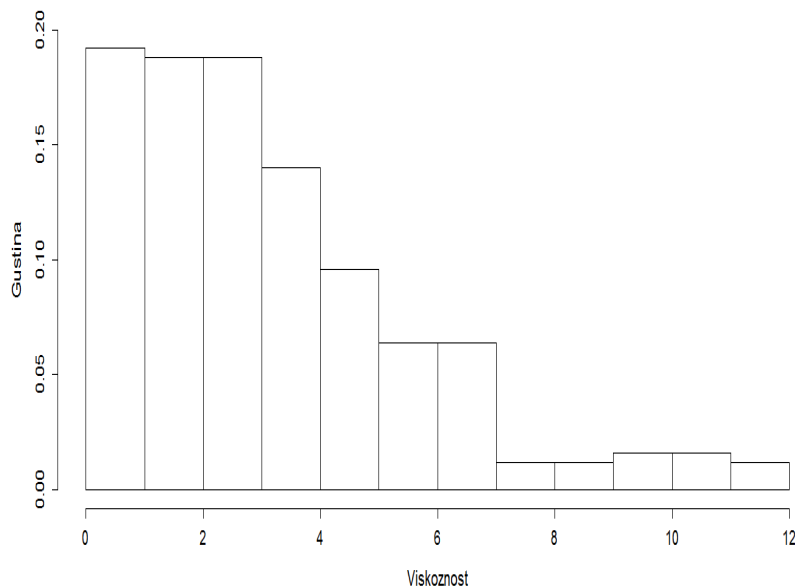
Za fitovanje odgovarajuće Pirsonove raspodele, potrebne su ocene srednje vrednosti, disperzije, koeficijenta asimetrije i spljoštenosti, na osnovu uzorka raspona. Prema tome, uzimamo m referentnih uzoraka obima n i, za svaki uzorak računamo raspon R_1, R_2, \dots, R_m . Koristićemo $\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i$ i $S^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (R_i - \bar{R})^2$ za ocene srednje vrednosti i disperzije raspona. Što se tiče ocena koeficijenta asimetrije i spljoštenosti, na osnovu rezultata Džoansa i Gila (Joanes & Gill, 1997) i Veljkovic (Veljkovic, 2016) možemo dati iste preporuke kao u slučaju uzoračke medijane: ocene G_1 i G_2^* odgovaraju slučaju kada je raspodela karakteristike kvaliteta vrlo asimetrična. U ostalim slučajevima, izbor između b_1, b_2^* i g_1, g_2^* nije tako jasan, ali mi predlažemo ocene g_1, g_2^* , pošto g_2^* ima najmanju srednjekvadratnu grešku u najvećem broju slučajeva. Takođe, kada je srednjekvadratna greška ocene b_1 manja od srednjekvadratne greške ocene g_1 , između njih je razlika vrlo mala.

2.2.6.3 Primer

Dou i Sa (Dou & Sa, 2002) su dali tabelu vrednosti viskoznosti određene hemikalije (tabela 2.12). Kada je smatrano da je proces u kontroli, prikupljeno je 25 preliminarnih uzoraka obima 10.

Tabela 2.12: Podaci o viskoznosti određene hemikalije (referentni uzorci)

Broj	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Medijana	Raspon
1	1.3362	3.3906	2.1085	2.8304	0.2653	0.5348	1.743	0.8531	3.7613	4.0987	1.92575	3.8334
2	2.2473	0.6231	5.5822	1.8279	0.4375	4.9093	4.6299	2.9603	5.319	1.3159	2.6038	5.1447
3	2.9649	3.0083	3.1229	3.3243	2.589	2.7989	0.7748	1.1494	1.6688	2.3297	2.69395	2.5495
4	5.6463	0.8302	5.8746	3.3989	0.2205	4.6925	1.8032	5.3479	3.8031	5.8416	4.2478	5.6541
5	3.0252	5.1308	7.8232	3.4198	2.7318	5.8037	0.5641	2.4472	3.9509	0.9419	3.2225	7.2591
6	0.687	5.2283	1.3661	6.3846	4.4023	1.1519	1.3774	1.7815	2.2327	1.18	1.57945	5.6976
7	2.7373	0.3735	0.3586	4.7748	2.5047	3.311	1.8172	4.4794	0.3746	3.2132	2.621	4.4162
8	0.3316	1.8694	2.244	2.1171	5.8587	0.3024	3.3899	3.6039	0.1192	2.3223	2.18055	5.7395
9	2.4732	2.6721	0.699	3.1279	1.151	5.5302	3.1897	0.8419	5.5302	2.9404	2.57265	4.9147
10	5.3181	3.9619	2.0794	2.7838	0.0509	4.2661	7.0173	2.3899	0.0661	2.7733	2.77855	6.9664
11	0.0205	0.7074	3.3954	1.8448	3.1642	3.8281	6.6778	2.7024	1.6412	3.7375	2.9333	6.6573
12	2.2449	0.4796	11.6354	2.3299	6.0012	2.714	1.861	4.0633	8.8753	1.3251	2.52195	11.1558
13	1.2146	4.6903	5.0524	2.6783	1.8168	7.0034	0.5807	2.2263	6.0918	4.4783	3.5783	6.4227
14	4.771	0.4894	5.9891	0.1231	1.939	0.7866	0.6779	0.6718	2.0491	1.4504	1.1185	5.8660
15	0.2773	3.6447	9.4917	1.7156	11.3691	10.1636	3.4092	3.5649	3.0863	3.3266	3.48705	11.0918
16	0.1407	4.0603	1.8738	2.7788	2.256	2.6558	2.0596	6.0483	5.1429	0.4837	2.4559	5.9076
17	2.1317	0.6412	6.7867	1.627	1.1006	1.9283	2.8076	3.17	4.5691	9.154	2.46965	8.5128
18	6.0779	11.4174	2.9445	0.9463	4.825	4.3403	6.4124	6.7215	4.4458	0.2878	4.6354	11.1296
19	0.6739	10.5997	3.6368	5.5701	1.9203	3.9561	1.0459	1.4282	10.6332	2.0103	2.82355	9.9593
20	3.28	8.1777	1.4841	1.8203	1.5854	0.5426	4.2997	0.1774	9.3516	0.5304	1.70285	9.1742
21	1.8294	1.3157	6.4564	6.9603	4.859	6.4083	0.3182	3.1438	1.6676	6.0104	4.0014	6.6421
22	2.7204	10.7852	2.4585	8.2713	1.5364	0.7864	1.5008	1.4944	4.0899	6.7543	2.58945	9.9988
23	2.4809	2.822	1.1446	4.9077	0.8313	6.1583	0.8176	1.6939	0.8402	3.0411	2.0874	5.3407
24	3.6285	4.4842	1.4751	3.9384	4.9824	1.9605	4.2763	1.1253	1.5754	2.0249	2.8267	3.8571
25	0.5262	0.2206	2.0561	1.6078	2.4431	9.9906	2.1032	6.5464	3.2972	2.1851	2.14415	9.7700

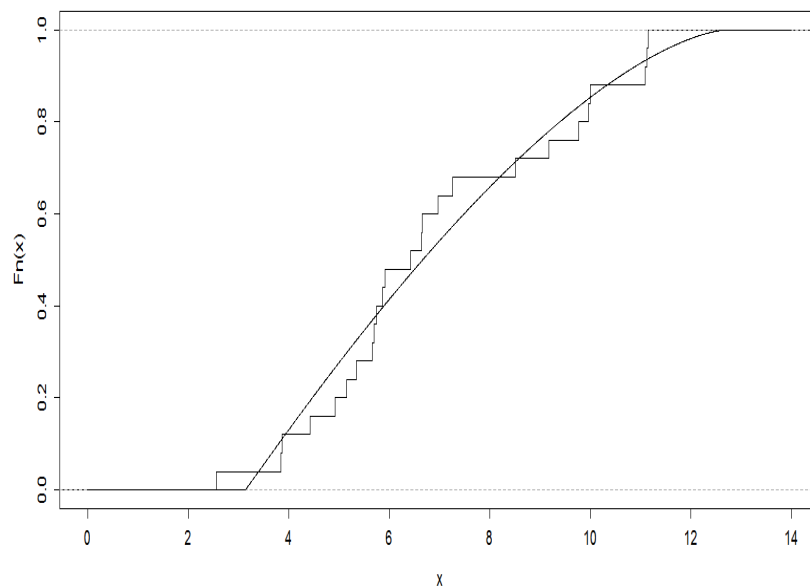


Slika 2.7: Histogram gustine podataka o viskoznosti određene hemikalije

Na osnovu histograma ovih podataka (slika 2.7), možemo zaključiti da je raspodela viskoznosti hemikalije pozitivno asimetrična.

Prvo ćemo konstruisati R kontrolni grafik za date podatke. Izračunati uzorački rasponi su navedeni u poslednjoj koloni tabele 2.12. Prosečan raspon 25 referentnih uzoraka jednak je 6.9464, što predstavlja centralnu liniju R kontrolnog grafika. Kako raspodela uzoračkog raspona nije vrlo asimetrična, za ocenu koeficijenata asimetrije i spljoštenosti ćemo koristiti g_1 i g_2^* . Dobijamo $\hat{\alpha}_3 = 0.3439$, $\hat{\alpha}_4 = 2.0640$. Pošto su izračunati koeficijenti c_0 , c_1 i c_2 na osnovu formula (1.2) i nađena su rešenja kvadratne jednačine (1.5), ispostavlja se da je Pirsonova raspodela I tipa odgovarajuća raspodela za aproksimaciju raspodele uzoračkog raspona. Parametri Pirsonove raspodele su računati korišćenjem formula (1.7). Na slici 2.8 konstruisana je empirijska funkcija raspodele raspona zajedno sa fitovanom Pirsonovom raspodelom.

Sada možemo izračunati, na osnovu (2.23), gornju kontrolnu granicu R kontrolnog grafika, za verovatnoću greške prve vrste $\alpha = 0.0027$. Dobijamo $k = 12.50673$. Konstruisani R kontrolni grafik prikazan je na slici 2.9 (gornji grafik). Nijedan od raspona referentnih uzoraka nije veći od gornje kontrolne granice, pa možemo zaključiti, u ovoj fazi, da je proces u stanju kontrole (što se tiče varijabi-



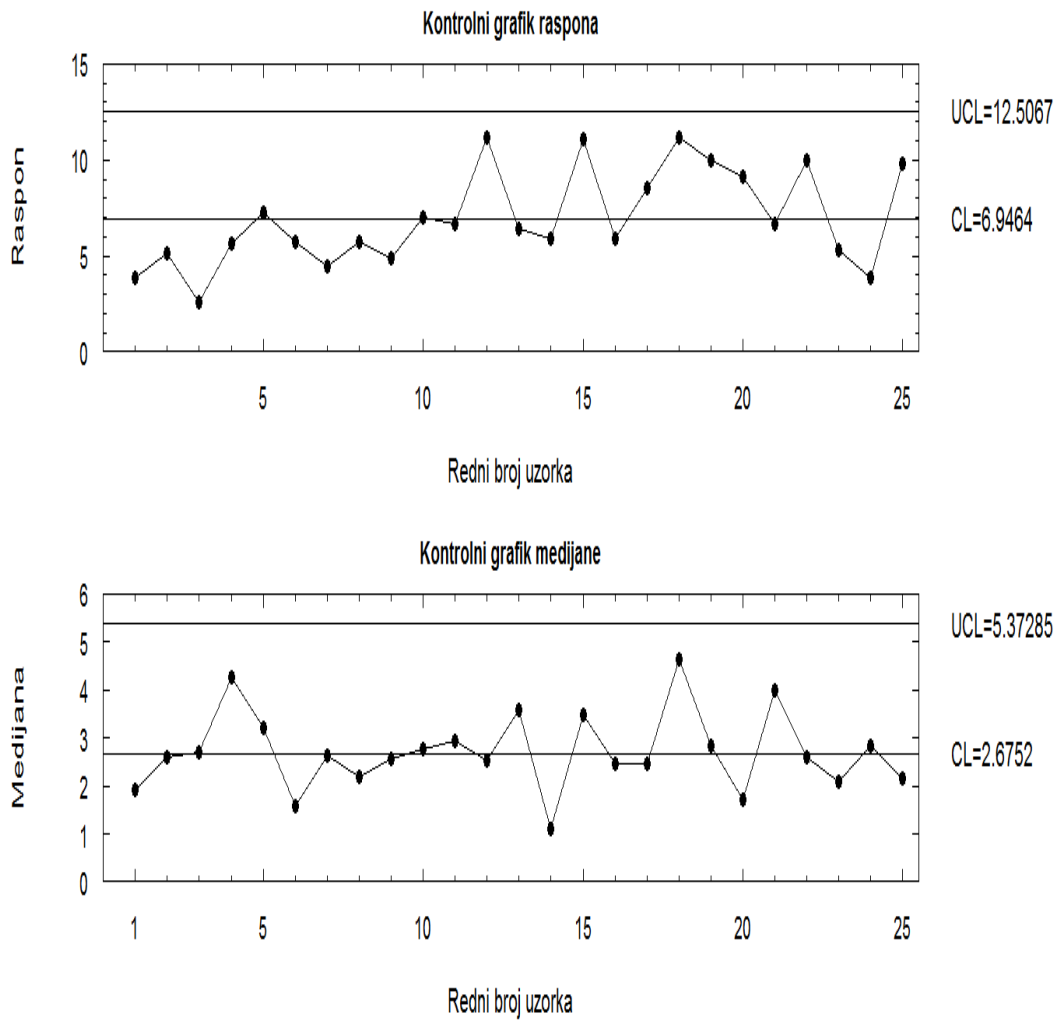
Slika 2.8: Empirijska funkcija raspodele uzoračkog raspona sa fitovanom Pirsonovom raspodelom I tipa

lnosti posmatrane karakteristike kvaliteta) i zadržati izračunatu kontrolnu granicu.

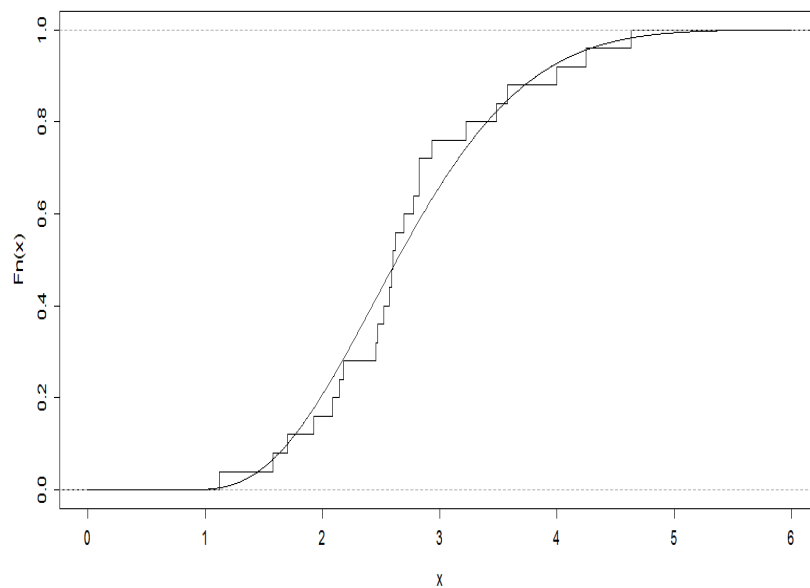
Konstruisaćemo sada kontrolni grafik medijane na osnovu 25 medijana preliminarnih uzoraka. Ocena medijane svih podataka je 2.6752, pa je centralna linija kontrolnog grafik medijane $CL = 2.6752$. Prosečna vrednost svih medijana je $\bar{x} = 2.7121$ a standardna devijacija medijana je $s = 0.8154$. Kako raspodela uzoračke medijane nije vrlo asimetrična i obim uzorka medijana $m < 100$, korišćićemo g_1 i g_2^* za ocene koeficijenata asimetrije i spljoštenosti. Dobijamo $\hat{\alpha}_3 = 0.5046$, $\hat{\alpha}_4 = 3.1775$. Posle računanja koeficijenata c_0 , c_1 i c_2 pomoću formula (1.2) i rešenja kvadratne jednačine (1.5), izbor pada na Pirsonovu raspodelu I tipa za aproksimaciju raspodele uzoračke medijane. Na slici 2.10 konstruisali smo empirijsku funkciju raspodele zajedno sa fitovanom Pirsonovom funkcijom raspodele.

Sada ćemo izračunati gornju kontrolnu granicu grafik medijane, na osnovu (2.21), za verovatnoću greške prve vrste $\alpha = 0.0027$. Dobijamo $k = 5.37285$. Kao što vidimo na kontrolnom grafik medijane prikazanom na slici 2.9 (donji grafik), vrednosti uzoračkih medijana se nalaze ispod gornje kontrolne granice, tj. proces je bio u stanju kontrole kada su preliminarni uzorci prikupljeni. Dakle, možemo

2. PRAĆENJE CENTRALNE TENDENCIJE



Slika 2.9: Kontrolni grafici raspona i medijane za podatke o viskoznosti hemikalije (referentni uzorci)



Slika 2.10: Empirijska funkcija raspodele uzoračke medijane sa fitovanom Pearsonovom raspodelom I tipa

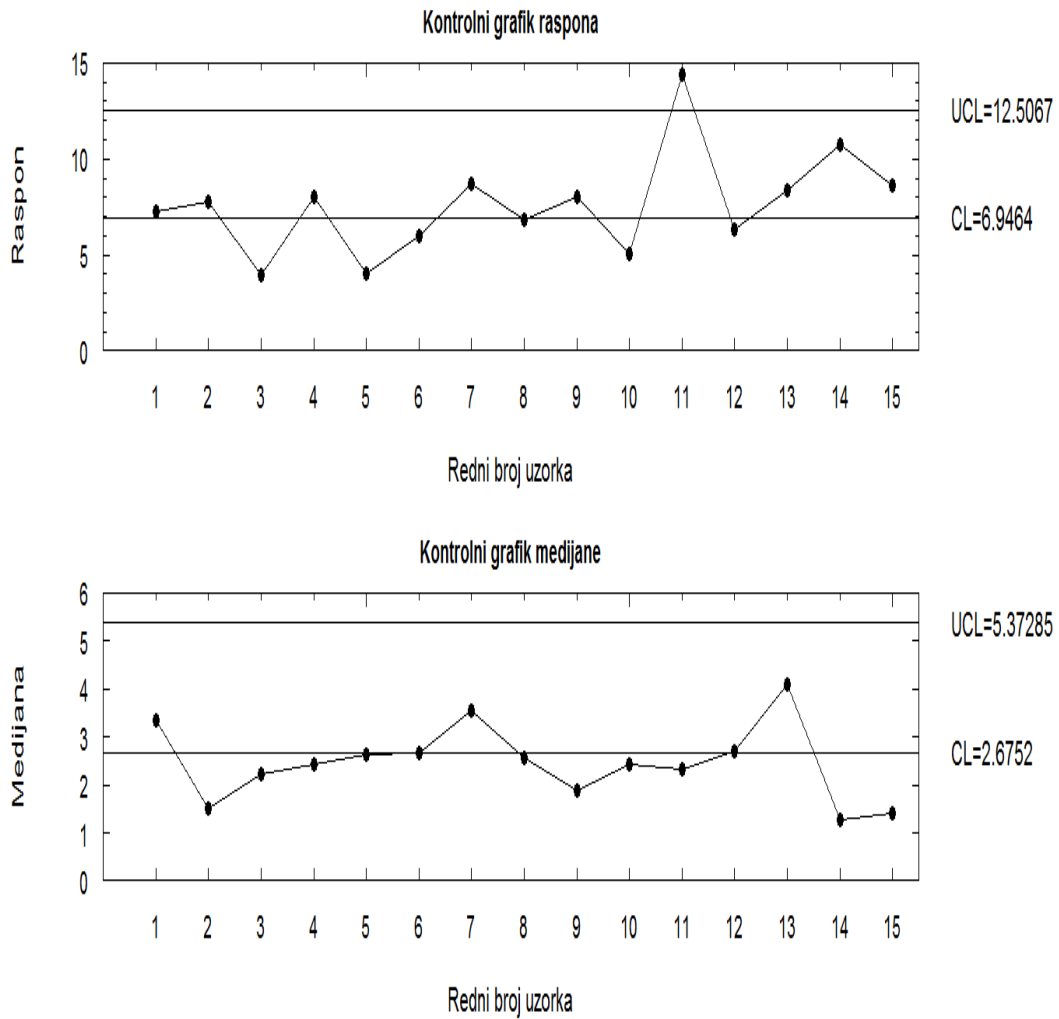
zadržati gornju kontrolnu granicu.

Dou i Sa (Dou & Sa, 2002) su prikupili još 15 dodatnih (test) uzoraka viskoznosti hemikalije (tabela 2.13). Rasponi i medijane ovih uzoraka su predstavljene na grafiku na slici 2.11. Kao što možemo videti, nijedna uzoračka medijana test uzoraka ne prevazilazi gornju kontrolnu granicu grafika medijane, ali raspon 11. test uzorka se nalazi van gornje kontrolne granice R grafika. Potrebno je izvršiti pretragu za mogućim odredivim uzrokom koji je doveo do promene varijabilnosti posmatrane karakteristike kvaliteta.

Tabela 2.13: Podaci o viskoznosti određene hemikalije (test uzorci)

Broj	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Medijana	Raspon
1	0.7506	4.0477	3.5864	1.4833	5.5858	7.9715	3.1073	2.3385	1.5157	4.4989	3.34685	7.2209
2	1.2322	2.3795	0.6557	1.1733	2.4801	4.6529	1.495	1.1562	1.5308	8.4124	1.5129	7.7567
3	1.8068	0.4392	4.3999	3.3897	2.4874	1.9453	1.4363	1.7924	3.0584	3.4494	2.21635	3.9607
4	2.7683	8.3722	2.9531	5.7195	2.0278	0.8702	3.0161	2.0683	1.7444	0.3603	2.4183	8.0119
5	2.6389	3.4201	1.5619	2.6	1.0172	1.3073	5.0765	2.2618	2.8302	4.7772	2.61945	4.0593
6	1.0204	6.8578	0.8629	1.9287	2.6978	3.0359	4.3193	3.8699	0.8451	2.6615	2.67965	6.0127
7	8.7561	3.5406	4.3645	5.0379	3.528	0.0799	1.9089	4.4152	1.2578	1.5479	3.5343	8.6762
8	2.6597	4.4327	0.8307	1.6461	7.346	4.2325	2.4138	2.449	2.697	0.5049	2.55435	6.8411
9	0.8658	0.8546	5.3191	1.9293	0.82	6.8619	1.4431	8.8346	1.842	2.4879	1.88565	8.0146
10	5.8092	3.955	2.0788	5.2369	4.5771	2.752	1.9519	1.0004	1.786	0.7224	2.4154	5.0868
11	2.5227	14.5705	2.6531	1.2961	3.2259	0.2099	1.8084	0.6031	2.1348	3.93	2.32875	14.3606
12	1.4817	6.3692	0.4034	0.0332	3.7308	5.1502	2.7204	3.4656	2.0896	2.715	2.7177	6.3360
13	2.7996	2.6068	7.461	8.6002	2.8222	0.3993	0.2225	5.362	6.0295	6.4071	4.0921	8.3777
14	0.1441	1.1818	0.1895	10.8861	7.0534	1.2488	4.1248	0.324	1.2916	1.6962	1.2702	10.7420
15	3.8219	1.1591	2.9214	0.9037	1.6757	0.2609	0.2446	3.9495	0.773	8.8267	1.4174	8.5821

2. PRAĆENJE CENTRALNE TENDENCIJE



Slika 2.11: Kontrolni grafici raspona i medijane za podatke o viskoznosti (test uzorci)

3

Ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika za praćenje centralne tendencije

U ovom poglavlju ćemo govoriti o optimalnom ekonomsko-statističkom dizajnu kontrolnog grafika za praćenje centralne tendencije posmatrane karakteristike kvaliteta. U ekonomsko-statističkom dizajnu kontrolnog grafika, funkcija očekivanog ekonomskog gubitka se minimizuje pri uslovima ograničenja za moć, verovatnoću greške prve vrste i prosečno vreme do signala stanja van kontrole (Saniga, 1989). Za minimizaciju funkcije očekivanog gubitka predložili smo upotrebu genetskog algoritma (Veljkovic, Elfaghihe & Jevremovic, 2015).

U nastavku ćemo analizirati kako optimalno dizajnirati kontrolni grafik uzoračke sredine za simetrične raspodele i jednostrani kontrolni grafik medijane za pozitivno asimetrične raspodele. Za negausove raspodele karakteristike kvaliteta, predložili smo ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika uzoračke sredine (Veljkovic, Elfaghihe i Jevremovic, 2015) i ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika medijane zasnovane na aproksimaciji raspodele posmatrane statistike odgovarajućom Piersonovom raspodelom.

3.1 Pretpostavke

Navešćemo osnovne pretpostavke o proizvodnom procesu. Pretpostavlja se da proces počinje u stanju kontrole sa srednjom vrednošću posmatrane karakteristike kvaliteta μ_0 , odnosno medijanom M_0 . Za simetrične raspodele karakteristike kvaliteta, odrediv uzrok veličine δ može dovesti do pomeranja srednje vrednosti μ_0 na $\mu_0 - \delta\sigma$ ili $\mu_0 + \delta\sigma$, a kod pozitivno asimetričnih raspodela do pomeranja medijane M_0 na $M_0 + \delta\sigma$. Smatra se da se standardna devijacija karakteristike kvaliteta ne menja tokom vremena.

Svakih h sati uzimaju se uzorci obima n , računa se odgovarajuća mera centralne tendencije (uzoračka sredina ili medijana) i predstavlja na kontrolnom grafiku. Smatra se da su parametri μ_0 , M_0 , δ i σ poznati.

Dalje, pretpostavlja se da broj pojavljivanja odredivih uzroka ima Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$, sa intenzitetom λ po satu. Odnosno, pod pretpostavkom da proces započinje u stanju statističke kontrole, vremenski interval koji proces ostaje u stanju kontrole je slučajna veličina sa eksponencijalnom $E_1(\lambda)$ raspodelom. Prema tome, pod uslovom da se odrediv uzrok pojavio u intervalu između j -og i $(j+1)$ -og uzorka, očekivano vreme pojavljivanja u intervalu između dva uzorka je

$$\tau = \frac{\int_{jh}^{(j+1)h} (t - jh)\lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_{jh}^{(j+1)h} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{1 - (1 + \lambda h)e^{-\lambda h}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h})}.$$

3.2 Parametri dizajna

U ekonomsko-statističkom dizajnu kontrolnog grafika uvešćemo sledeće parametre:

- g : Vreme potrebno da se prikupi uzorak i interpretiraju rezultati.
- D : Vreme potrebno da se pronade odrediv uzrok posle signala stanja van kontrole.
- a_1 : Fiksni troškovi po uzorku.
- a_2 : Promenljivi troškovi po jedinici uzorka.

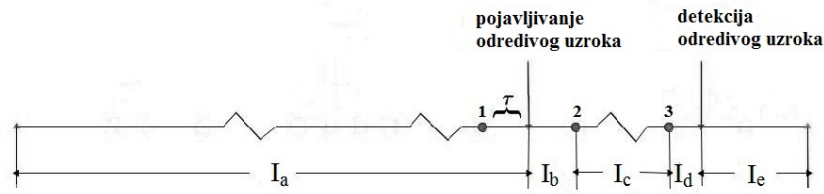
- a_3 : Troškovi potrage i popravke odredivog uzroka.
- a'_3 : Troškovi ispitivanja lažnog alarma.
- V_0 : Profit ostvaren po satu funkcionisanja procesa u stanju kontrole.
- V_1 : Profit ostvaren po satu funkcionisanja procesa u stanju van kontrole, ($V_0 > V_1$).
- a_4 : Kazneni troškovi po satu usled funkcionisanja procesa van kontrole, $a_4 = V_0 - V_1$
- κ : Očekivan broj lažnih alarma, $\kappa = \alpha \frac{e^{-\lambda h}}{1 - e^{-\lambda h}}$.
- $E(T)$: Očekivana dužina proizvodnog ciklusa. Vremenski ciklus proizvodnje T definiše se kao interval vremena od početka proizvodnje do detekcije i eliminacije odredivog uzroka.
- $E(C)$: Očekivani troškovi proizvodnog ciklusa. Ukupni troškovi C sastoje se od troškova testiranja i uzorkovanja, troškova ispitivanja signala stanja van kontrole, troškova popravke i korekcije pronađenih odredivih uzroka i troškova proizvodnje neusaglašenih proizvoda.
- s : Očekivan broj uzoraka prikupljenih u toku ciklusa, $s = \frac{E(T)}{h}$.

3.3 Očekivana dužina proizvodnog ciklusa

Na početku ciklusa proizvodnje, proces je u stanju kontrole. Prate se parametri posmatrane karakteristike kvaliteta pomoću kontrolnih grafika do prvog signala stanja van kontrole. Posle detekcije i eliminacije odredivog uzroka, proces se vraća u stanje kontrole i započinje novi ciklus.

Dužina proizvodnog ciklusa T se može podeliti u pet vremenskih intervala I_a , I_b , I_c , I_d i I_e (slika 3.1).

- I_a : Vremenski interval od početka ciklusa do pojavljivanja odredivog uzroka.
- I_b : Vremenski interval od kraja I_a do uzimanja narednog uzorka.



Slika 3.1: Intervali proizvodnog ciklusa

- I_c : Vremenski interval od kraja I_b do signala stanja van kontrole na kontrolnom grafiku.
- I_d : Vremenski interval od kraja I_c do analize uzorka i predstavljanja rezultata.
- I_e : Vremenski interval od kraja I_d do pronalaska odredivog uzroka i korekcije procesa.

Na slici 3.1, označene su tri vremenske tačke: tačka 1 označava poslednji uzorak pre pojavljivanja odredivog uzroka, tačka 2 prvi uzorak pošto se pojavio odrediv uzrok i tačka 3 momenat kada je detektovano stanje van kontrole. Proces ostaje u stanju kontrole tokom vremenskog intervala I_a i nalazi se u stanju van kontrole tokom vremenskih intervala I_b , I_c , I_d i I_e .

Očekivane dužine ovih vremenskih intervala su, redom, jednake

$$E(I_a) = \frac{1}{\lambda}, \quad E(I_b) = h - \tau, \quad E(I_c) = ATS - h, \quad E(I_d) = gn, \quad E(I_e) = D.$$

Tada, očekivana dužina ciklusa je jednaka

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1 - \beta} - \tau + gn + D.$$

3.4 Očekivani troškovi

Očekivani troškovi tokom ciklusa proizvodnje su jednaki

$$E(C) = V_0 \cdot \frac{1}{\lambda} + V_1 \cdot \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D \right) - a_3 - a'_3 \kappa - (a_1 + a_2 n)s$$

3.5 Očekivani gubitak po satu

Funkcija očekivanog gubitka jednaka je

$$E(L) = V_0 - \frac{E(C)}{E(T)} = \frac{a_1 + a_2}{h} + \frac{a_4 \left(\frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D \right) + a_3 + a'_3 \kappa}{\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{1-\beta} - \tau + gn + D}.$$

3.6 Metode dizajna

Za upotrebu kontrolnog grafika, neophodno je izabrati obim uzorka, učestalost uzorkovanja i kontrolne granice grafika. Izbor ova tri parametra obično se naziva dizajn kontrolnog grafika. Trenutno postoje tri metode dizajna kontrolnih grafika: statistički, ekonomski i ekonomsko-statistički dizajn. Kod statističkog dizajna grafika, verovatnoća greške prvog tipa i moć su unapred izabrani. Tada se mogu odrediti obim uzorka i, ukoliko se unapred odabere i prosečno vreme do signala stanja van kontrole (ATS), frekvencija uzorkovanja (Woodall, 1985).

Cilj ekonomskog dizajna kontrolnog grafika je odrediti obim uzorka, kontrolne granice i frekvenciju uzorkovanja tako da se minimizuju gubici profita koji je sastavljen od nekoliko datih troškova. Dankan (Duncan, 1956) je predložio ekonomski model za optimalan ekonomski dizajn kontrolnog grafika uzoračke sredine. Njegov rad je stimulisao mnoge kasnije studije na ovu temu. Lorenzen i Vens (Lorenzen & Vance, 1986) su predložili opštu metodu za određivanje parametara ekonomskog dizajna kontrolnog grafika.

Mana statistički dizajniranih kontrolnih grafika su visoki troškovi funkcionisanja procesa. S druge strane, ekonomski dizajn ne uzima u obzir verovatnoće grešaka prve i druge vrste, što može dovesti do velike verovatnoće lažnih alarma i niske

moći. Saniga (Saniga, 1989) je predložio ekonomsko-statistički model koji kombinuje svojstva ekonomskog i statističkog dizajna: predstavlja metodu za ekonomski dizajn kontrolnih grafika sa ograničenjima za verovatnoće grešaka prve i druge vrste i prosečnog vremena do signala stanja van kontrole. Ekonomsko-statistički dizajn uzima u obzir ekonomske faktore uz postizanje poželjnih statističkih svojstava i predstavlja poboljšanje ekonomskog i statističkog dizajna kontrolnih grafika.

3.7 Ekonomsko-statistički model

Ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika definiše se kao dizajn u kome se funkcija očekivanog ekonomskog gubitka $E(L)$ minimizuje pod ograničenjima minimalne vrednosti moći i maksimalnih vrednosti verovatnoće greške prve vrste i prosečnog vremena do signala stanja van kontrole (ATS). Želimo da odredimo obim uzorka, kontrolne granice i frekvenciju uzorkovanja tako da

$$\begin{aligned} \min E(L) & \qquad (3.1) \\ \text{pod uslovima ograničenja} \\ \alpha \leq \alpha_0, p \geq p_0, ATS \leq ATS_0, \end{aligned}$$

gde $p = 1 - \beta$, α_0 , p_0 i ATS_0 su, redom, moć i granice verovatnoće greške prve vrste, moći i ATS.

Minimizacija funkcije očekivanog gubitka (3.1) pod ograničenjima izvedena je pomoću genetskog algoritma *ga* iz paketa GA (Scrucca, 2013). U sledećem odeljku biće više reči o genetskim algoritmima.

3.8 Genetski algoritmi

Genetski algoritmi (GA) su stohastički algoritmi pretraživanja koji simuliraju evoluciju živih organizama oponašajući biološke mehanizme prirodne selekcije, ukrštanja i mutacije. Uspešno se primenjuju za rešavanje problema optimizacije neprekidnih i diskretnih funkcija.

Problem maksimizacije funkcije cilja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ može se predstaviti kao nalaženje skupa (Scrucca, 2013)

$$\Theta^* \equiv \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} f(\theta) = \{\theta^* \in \Theta : f(\theta^*) \geq f(\theta), \forall \theta \in \Theta\}, \quad (3.2)$$

gde je $\Theta \subseteq S$. Skup Θ predstavlja skup svih mogućih rešenja tj. prostor pretrage i može se definisati kao presek skupa S i skupa $m \geq 0$ dodatnih ograničenja

$$g_j(\theta) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad h_j(\theta) = 0, \quad j = q + 1, \dots, m.$$

Skup rešenja Θ^* može biti jedinstvena tačka, prebrojiv (konačan ili beskonačan) skup tačaka ili skup koji sadrži neprebrojivo mnogo tačaka.

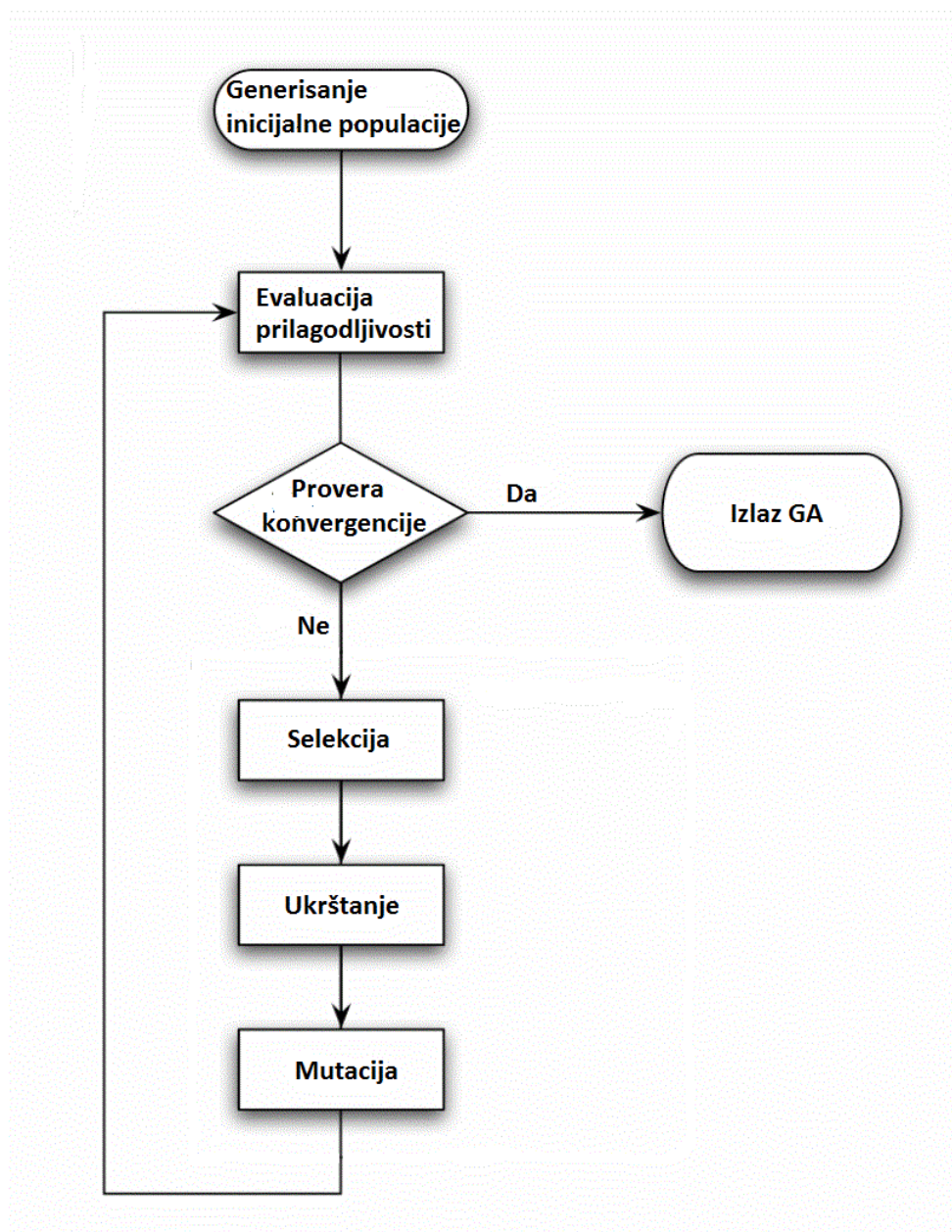
Dok se reprezentacija problema (3.2) odnosi na maksimizaciju funkcije cilja, minimizacija funkcije gubitka se može jednostavno predstaviti kao problem maksimizacije promenom znaka funkcije cilja.

Na slici 3.2 predstavljen je dijagram toka genetskog algoritma.

Proces evolucije počinje generisanjem inicijalne slučajne populacije veličine n , pa u koraku $k = 0$ možemo napisati $\{\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_n^{(0)}\}$. U svakom koraku k računa se prilagodljivost (eng. fitness) $f(\theta_i^{(k)})$, $i = 1, 2, \dots, n$ svakog člana populacije i svakom članu se pridružuje verovatnoća $p_i^{(k)}$, obično proporcionalno njegovoj prilagodljivosti. Reprodukција populacije izvodi se pomoću selekcije, odnosno biranjem uzorka sa vraćanjem gde svaki član populacije ima verovatnoću preživljavanja jednaku $p_i^{(k)}$. Od selektovane populacije formira se nova populacija $\{\theta_1^{(k+1)}, \theta_2^{(k+1)}, \dots, \theta_n^{(k+1)}\}$ koristeći operatore ukrštanja i mutacije. Zatim se postavlja $k = k + 1$ i algoritam se vraća na korak evaluacije prilagodljivosti članova nove populacije. Kada su zadovoljeni uslovi konvergencije, evolucija prestaje i algoritam vraća $\theta^* \equiv \operatorname{argmax}_{\theta_i^{(k)}} f(\theta_i^{(k)})$ kao maksimum funkcije.

3.8.1 Koraci genetskog algoritma

Pošto je odabrana veličina populacije n , bira se početna populacija slučajno ili sistematično iz prostora pretrage. Zatim se računa prilagodljivost svakog člana po-



Slika 3.2: Dijagram toka genetskog algoritma

populacije, tj. vrednost funkcije prilagodljivosti. U slučaju optimizacije funkcije $f(x)$, funkcija prilagodljivosti je sama funkcija $f(x)$. Na osnovu prilagodljivosti članova populacije, proverava se da li algoritam konvergira ili je potrebno generisati novu populaciju mogućih rešenja. Najviše prilagođeni članovi se biraju za reprodukciju, nalaze partnera sa kojim razmenjuju hromosome kako bi kreirali dva člana nove populacije (potomke). Na primer, za 7-bitnu reprezentaciju roditelja 0100101 i 1100010 i slučajno odabranu tačku ukrštanja na 4. poziciji, roditelji razmenjuju isečene delove kako bi stvorili potomke.

Roditelji	Potomci
0100 101	→ 0100010
1100 010	→ 1100101

Ovaj proces se ponavlja za svih $\frac{n}{2}$ parova članova populacije i kreira se n potomaka. Kada se kreiraju potomci, roditelji umiru, ostavljajući potomke kao članove nove populacije. Takođe, može se uključiti elitizam, na osnovu koga najprilagođeniji članovi trenutne generacije preživljavaju u narednu generaciju.

Kako bi se očuvao diverzitet populacije i sprečila prevremena konvergencija algoritma ka lokalnom ekstremumu, povremeno se kreira mutirani potomak. Svaki bit kod potomka mutira sa određenom verovatnoćom. Na primer, ukoliko je verovatnoća mutacije 2%, svaki bit ima verovatnoću 0.02 promene vrednosti od 0 u 1 ili od 1 u 0. Ako je prilagodljivost mutiranog potomka slaba, mutacija će brzo nestati u populaciji. Međutim, ako potomak poseduje visoku prilagodljivost, ona će se preneti na naredne generacije.

Posle reprodukcije, ukrštanja i mutacije, dobija se nova generacija. Algoritam ulazi u novu iteraciju. Proces evolucije se okončava na osnovu kriterijuma konvergencije. Obično se definišu uslovi stopiranja algoritma, poput maksimalnog broja generacija.

3.9 Primer

Neka X predstavlja posmatranu karakteristiku kvaliteta. Neka su $a_1 = \$1$, $a_2 = \$0.1$, $a_3 = \$25$, $a'_3 = \$50$, $a_4 = \$100$, $\lambda = 0.05$, $\delta = 2$, $g = 0.0167h$, $D = 1$ (Duncan, 1956; Montgomery, 2005).

Odabrali smo sledeće granice verovatnoće greške prve vrste, moći i prosečnog vremena do signala stanja van kontrole (ATS): $\alpha_0 = 0.05, p_0 = 0.9, ATS_0 = 2h$. Razmotrićemo optimalan ekonomsko-statistički dizajn kontrolnih grafika za praćenje centralne tendencije kada je raspodela podataka simetrična i kada je pozitivno asimetrična.

Na sledeći način smo odredili intervale vrednosti parametara k i h . Rešavanjem jednačina $\alpha = \alpha(k) = 0.05$ i $p = p(k) = 0.9$ pomoću Brentove metode (Brent, 1973), dobili smo vrednosti k_1 i k_2 . Na osnovu ograničenja (3.1) imamo interval vrednosti $[k_1, k_2]$ za parametar k i $[0, 2p(k_1)]$ za parametar h .

U nastavku ćemo, za navedene vrednosti parametara funkcije gubitka, razmotriti ekonomsko-statistički dizajn kontrolnih grafika uzoračke sredine i medijane.

3.9.1 Normalna raspodela

Razmotrićemo prvo ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika uzoračke sredine kada je raspodela karakteristike kvaliteta normalna. Interesuje nas koje su vrednosti obima uzorka n , širine kontrolnih granica k i frekvencije uzorkovanja h tako da funkcija očekivanog gubitka ima minimalnu vrednost, pri gore navedenim ograničenjima za verovatnoću greške prve vrste, moć i ATS kontrolnog grafika uzoračke sredine i datim troškovima. Rezultati minimizacije funkcije očekivanog gubitka dati su u tabeli 3.1.

Tabela 3.1: Ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika uzoračke sredine normalne raspodele

Obim uzorka	Normalna raspodela					
	k	h	α	$1 - \beta$	ATS	EL
3	2.182	0.977	0.02914	0.900	1.085	11.250
4	2.711	0.736	0.00671	0.901	0.817	10.125
5	3.047	0.693	0.00231	0.923	0.751	9.836
6	3.201	0.702	0.00137	0.955	0.735	9.736
7	3.344	0.707	0.00083	0.974	0.726	9.711
8	3.486	0.711	0.00049	0.985	0.721	9.727
9	3.620	0.712	0.00029	0.991	0.718	9.766
10	3.749	0.716	0.00018	0.995	0.719	9.818

Kao što vidimo u tabeli 3.1, sa povećanjem obima uzorka, širina kontrolnih granica se povećava, moć kontrolnog grafika uzoračke sredine raste, dok verovatnoća greške prve vrste, učestalost uzorkovanja, prosečno vreme do signala stanja van kontrole i očekivani gubici opadaju.

3.9.2 Negausova simetrična raspodela

Razmotrićemo sada ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika uzoračke sredine kada je raspodela karakteristike kvaliteta simetrična ali nije normalna. Za raspodele karakteristike kvaliteta odabrali smo Studentovu $t(10)$, Laplasovu $L(1)$, logističku $LGS(1)$ i uniformnu $U(0,1)$ raspodelu. Interesuje nas koje su vrednosti obima uzorka n , širine kontrolnih granica k i frekvencije uzorkovanja h tako da funkcija očekivanog gubitka ima minimalnu vrednost, pri gore navedenim ograničenjima za verovatnoću greške prve vrste, moć i ATS kontrolnog grafika uzoračke sredine i datim troškovima. Poređićemo dobijene rezultate za teorijsku raspodelu standardizovane uzoračke sredine i odgovarajuću Pirsonovu raspodelu.

Rezultati minimizacije funkcije očekivanog gubitka dati su u tabeli 3.2.

Na osnovu rezultata u tabeli 3.2, možemo doneti sledeće zaključke:

1. Studentova raspodela sa 10 stepeni slobode ne odstupa mnogo od normalne raspodele, pa se može očekivati da će rezultati za normalnu raspodelu (optimalne vrednosti parametara k i h , α , moć, ATS i minimalna vrednost očekivanog gubitka) biti bliski rezultatima dobijenih na osnovu teorijske raspodele standardizovane uzoračke sredine, što je i potvrđeno. Odstupanja rezultata dobijenih aproksimacijom normalnom raspodelom su veća u slučaju logističke, Laplasove i uniformne raspodele.
2. Rezultati dobijeni na osnovu aproksimacije raspodele standardizovane uzoračke sredine Pirsonovom raspodelom su veoma bliski rezultati dobijenim za teorijsku raspodelu standardizovane uzoračke sredine, za sve razmatrane raspodele karakteristike kvaliteta.
3. Sa povećanjem obima uzorka, širina kontrolnih granica k i moć kontrolnog grafika $1 - \beta$ rastu, a verovatnoća greške prve vrste α i prosečno vreme do

3. EKONOMSKO-STATISTIČKI DIZAJN

Tabela 3.2: Ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika uzoračke sredine ne-gausovih simetričnih raspodela

Raspodela	Teorijska raspodela						Pirsonova raspodela					
	k	h	α	$1 - \beta$	ATS	EL	k	h	α	$1 - \beta$	ATS	EL
$t(10)$												
$n = 3$	2.203	0.977	0.03043	0.900	1.086	11.310	2.204	0.992	0.03057	0.900	1.102	11.316
$n = 4$	2.731	0.777	0.00838	0.901	0.863	10.231	2.730	0.752	0.00846	0.901	0.834	10.234
$n = 5$	3.075	0.705	0.00321	0.920	0.766	9.904	3.106	0.697	0.00296	0.916	0.761	9.903
$n = 6$	3.258	0.705	0.00181	0.950	0.742	9.782	3.260	0.704	0.00180	0.950	0.742	9.782
$n = 7$	3.408	0.709	0.00110	0.970	0.731	9.743	3.409	0.708	0.00109	0.970	0.731	9.742
$n = 8$	3.550	0.711	0.00067	0.982	0.724	9.748	3.552	0.711	0.00066	0.982	0.724	9.748
$n = 9$	3.689	0.712	0.00041	0.989	0.720	9.781	3.688	0.712	0.00041	0.989	0.720	9.780
$n = 10$	3.820	0.713	0.00025	0.993	0.718	9.828	3.819	0.713	0.00025	0.993	0.718	9.828
$L(1)$												
$n = 3$	2.241	1.017	0.03384	0.900	1.130	11.462	2.237	0.991	0.03139	0.900	1.101	11.354
$n = 4$	2.759	0.824	0.01131	0.901	0.915	10.405	2.754	0.786	0.01073	0.901	0.873	10.366
$n = 5$	3.181	0.705	0.00406	0.908	0.776	10.005	3.161	0.713	0.00420	0.911	0.783	10.002
$n = 6$	3.359	0.708	0.00240	0.940	0.753	9.854	3.339	0.711	0.00256	0.943	0.754	9.856
$n = 7$	3.508	0.709	0.00149	0.962	0.737	9.793	3.500	0.712	0.00159	0.963	0.739	9.796
$n = 8$	3.649	0.711	0.00094	0.976	0.729	9.784	3.651	0.712	0.00100	0.976	0.729	9.787
$n = 9$	3.784	0.713	0.00059	0.985	0.724	9.805	3.788	0.713	0.00064	0.985	0.724	9.808
$n = 10$	3.913	0.714	0.00038	0.990	0.721	9.845	3.927	0.714	0.00041	0.990	0.721	9.848
$LGS(1)$												
$n = 3$	2.208	0.998	0.03117	0.900	1.109	11.343	2.207	0.997	0.03077	0.900	1.107	11.325
$n = 4$	2.736	0.767	0.00880	0.901	0.852	10.256	2.726	0.752	0.00889	0.902	0.833	10.256
$n = 5$	3.098	0.708	0.00323	0.917	0.771	9.915	3.106	0.706	0.00316	0.916	0.771	9.915
$n = 6$	3.271	0.705	0.00186	0.949	0.743	9.790	3.272	0.705	0.00187	0.949	0.743	9.791
$n = 7$	3.424	0.709	0.00112	0.969	0.732	9.748	3.421	0.708	0.00114	0.969	0.731	9.748
$n = 8$	3.563	0.711	0.00069	0.981	0.725	9.752	3.563	0.711	0.00070	0.981	0.724	9.752
$n = 9$	3.700	0.713	0.00042	0.988	0.721	9.783	3.699	0.712	0.00043	0.989	0.721	9.783
$n = 10$	3.828	0.713	0.00026	0.993	0.718	9.830	3.830	0.714	0.00027	0.993	0.719	9.830
$U(0, 1)$												
$n = 3$	2.149	0.951	0.02571	0.900	1.056	11.0876	2.147	0.920	0.02463	0.900	1.021	11.036
$n = 4$	2.689	0.691	0.00334	0.901	0.767	9.910	2.694	0.716	0.00349	0.900	0.796	9.926
$n = 5$	2.952	0.685	0.00124	0.934	0.734	9.726	2.945	0.690	0.00141	0.935	0.738	9.734
$n = 6$	3.098	0.700	0.00078	0.964	0.726	9.668	3.096	0.701	0.00086	0.965	0.727	9.672
$n = 7$	3.241	0.706	0.00047	0.981	0.720	9.667	3.243	0.707	0.00051	0.981	0.721	9.670
$n = 8$	3.381	0.710	0.00028	0.990	0.718	9.699	3.385	0.710	0.00029	0.990	0.718	9.700
$n = 9$	3.518	0.712	0.00016	0.994	0.716	9.748	3.519	0.714	0.00017	0.994	0.718	9.749
$n = 10$	3.650	0.714	0.00009	0.997	0.717	9.807	3.659	0.715	0.00010	0.997	0.717	9.807

signala stanja van kontrole ATS opadaju. Učestalost uzorkovanja h i očekivani gubitak EL opadaju do određene vrednosti n , a zatim počinju da rastu.

3.9.3 Pozitivno asimetrična raspodela

Razmotrićemo sada ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika medijane kada je raspodela karakteristike kvaliteta pozitivno asimetrična. Odabrali smo standardnu eksponencijalnu $E(1)$, gama $G(2, 1)$ i Vejbulovu raspodelu $W(2, 1)$ za raspodele karakteristike kvaliteta. Interesuje nas koje su vrednosti obima uzorka n , gornje kontrolne granice k i frekvencije uzorkovanja h tako da funkcija očekivanog gubitka ima minimalnu vrednost, pri gore navedenim ograničenjima za verovatnoću greške prve vrste, moć i ATS kontrolnog grafika medijane i datim troškovima. Poređićemo dobijene rezultate za teorijsku raspodelu medijane i odgovarajuću Pirsonovu raspodelu. Rezultati minimizacije funkcije očekivanog gubitka dati su u tabeli 3.3.

Kao što vidimo u tabeli 3.3, rezultati ekonomsko-statističkog dizajna kontrolnog grafika medijane dobijeni na osnovu aproksimacije Pirsonovom raspodelom vrlo su bliski rezultatima za teorijsku raspodelu medijane.

Dosadašnji rezultati ekonomsko-statističkog dizajna kontrolnog grafika za praćenje centralne tendencije negausove slučajne veličine govore u prilog upotrebe aproksimacije raspodele uzoračke sredine ili uzoračke medijane odgovarajućom Pirsonovom raspodelom u opštem slučaju. Takođe, preporučujemo upotrebu genetskog algoritma za minimizaciju funkcije očekivanog gubitka pri uslovima ograničenja.

3. EKONOMSKO-STATISTIČKI DIZAJN

Tabela 3.3: Ekonomsko-statistički dizajn kontrolnog grafika medijane pozitivno asimetričnih raspodela

Raspodela	Teorijska raspodela						Pirsonova raspodela					
	k	h	α	$1 - \beta$	ATS	EL	k	h	α	$1 - \beta$	ATS	EL
$E(1)$												
$n = 5$	2.176	0.859	0.01223	0.967	0.888	10.259	2.178	0.853	0.01214	0.966	0.883	10.258
$n = 6$	2.192	0.772	0.00494	0.981	0.786	9.871	2.193	0.771	0.00494	0.981	0.785	9.871
$n = 7$	2.171	0.763	0.00446	0.986	0.774	9.898	2.175	0.765	0.00438	0.985	0.777	9.897
$n = 8$	2.175	0.737	0.00182	0.993	0.742	9.786	2.176	0.736	0.00182	0.993	0.741	9.786
$n = 9$	2.164	0.735	0.00169	0.994	0.739	9.845	2.166	0.735	0.00167	0.994	0.740	9.845
$n = 10$	2.165	0.723	0.00070	0.997	0.725	9.844	2.163	0.725	0.00070	0.997	0.727	9.844
$n = 11$	2.156	0.725	0.00066	0.998	0.727	9.911	2.159	0.722	0.00065	0.998	0.724	9.911
$n = 12$	2.157	0.720	0.00027	0.999	0.721	9.954	2.155	0.721	0.00028	0.999	0.722	9.954
$n = 13$	2.153	0.719	0.00026	0.999	0.720	10.024	2.153	0.719	0.00026	0.999	0.720	10.024
$n = 14$	2.153	0.717	0.00011	1	0.717	10.084	2.151	0.714	0.00011	1	0.715	10.083
$n = 15$	2.141	0.720	0.00011	1	0.720	10.154	2.142	0.719	0.00011	1	0.719	10.154
$G(2, 1)$												
$n = 6$	3.051	1.019	0.03228	0.900	1.132	11.600	3.051	1.014	0.03234	0.901	1.126	11.601
$n = 7$	3.033	0.988	0.03018	0.903	1.095	11.562	3.037	0.978	0.02985	0.901	1.085	11.556
$n = 8$	3.108	0.846	0.01482	0.900	0.940	10.883	3.106	0.834	0.01489	0.901	0.926	10.883
$n = 9$	3.097	0.831	0.014	0.901	0.922	10.907	3.100	0.842	0.01396	0.900	0.936	10.907
$n = 10$	3.109	0.766	0.00804	0.919	0.834	10.562	3.131	0.761	0.00740	0.910	0.837	10.560
$n = 11$	3.102	0.767	0.00776	0.920	0.833	10.611	3.116	0.751	0.00734	0.914	0.822	10.610
$n = 12$	3.085	0.750	0.00497	0.943	0.795	10.428	3.092	0.743	0.00482	0.941	0.789	10.427
$n = 13$	3.085	0.744	0.00471	0.942	0.790	10.487	3.084	0.747	0.00474	0.943	0.792	10.487
$n = 14$	3.061	0.741	0.00319	0.962	0.770	10.396	3.062	0.736	0.00317	0.962	0.765	10.396
$n = 15$	3.059	0.738	0.00308	0.962	0.768	10.460	3.060	0.738	0.00306	0.962	0.768	10.460
$W(2, 1)$												
$n = 5$	2.136	0.711	0.00001	1	0.711	9.435	2.121	0.711	0.00001	1	0.712	9.435
$n = 6$	2.132	0.712	$5 \cdot 10^{-7}$	1	0.712	9.506	2.117	0.712	$4 \cdot 10^{-7}$	1	0.712	9.506
$n = 7$	2.129	0.713	$5 \cdot 10^{-7}$	1	0.713	9.578	2.101	0.713	$5 \cdot 10^{-7}$	1	0.713	9.578
$n = 8$	2.128	0.713	$2 \cdot 10^{-8}$	1	0.713	9.649	2.068	0.713	$4 \cdot 10^{-8}$	1	0.713	9.649
$n = 9$	2.112	0.714	$3 \cdot 10^{-8}$	1	0.714	9.720	2.084	0.714	$2 \cdot 10^{-7}$	1	0.714	9.720
$n = 10$	2.135	0.714	$6 \cdot 10^{-10}$	1	0.714	9.792	2.093	0.714	$9 \cdot 10^{-10}$	1	0.714	9.792
$n = 11$	2.123	0.715	$8 \cdot 10^{-10}$	1	0.715	9.863	2.044	0.715	$3 \cdot 10^{-9}$	1	0.715	9.863
$n = 12$	2.095	0.715	$8 \cdot 10^{-11}$	1	0.715	9.934	2.108	0.715	$2 \cdot 10^{-11}$	1	0.715	9.934
$n = 13$	2.007	0.716	$9 \cdot 10^{-10}$	1	0.716	10.005	2.072	0.716	$6 \cdot 10^{-11}$	1	0.716	10.005
$n = 14$	2.061	0.716	$2 \cdot 10^{-11}$	1	0.716	10.075	2.029	0.716	10^{-11}	1	0.716	10.075
$n = 15$	1.957	0.717	$8 \cdot 10^{-10}$	1	0.717	10.146	1.991	0.717	$4 \cdot 10^{-11}$	1	0.717	10.146

Napomena: Kod gama $G(2, 1)$ raspodele za obim uzorka $n = 5$ nije pronađeno optimalno rešenje za koje su ograničenja (3.1) zadovoljena

4

Zaključak

Razmatrali smo dizajn kontrolnih grafika za praćenje centralne tendencije negausovih slučajnih veličina, kada je raspodela posmatrane karakteristike kvaliteta simetrična i kada je pozitivno asimetrična.

U slučaju negausovih simetričnih raspodela, cilj nam je bio da konstruišemo kontrolni grafik uzoračke sredine. Za raspodele karakteristike kvaliteta odabrali smo Studentovu, Laplasovu, logističku i uniformnu raspodelu kao predstavnike simetričnih raspodela koje se često sreću u primenama. Studentova, Laplasova i logistička raspodela imaju teže repove od normalne raspodele, dok uniformna raspodela ima lakše repove. U narednom koraku smo izračunali teorijsku raspodelu standardizovane uzoračke sredine (ili njenu najbolju aproksimaciju) i aproksimirali smo je Pirsonovom raspodelom II tipa u slučaju uniformne raspodele i Pirsonovom raspodelom VII tipa u slučaju ostalih razmatranih simetričnih raspodela karakteristika kvaliteta, za odabrane obime uzoraka. Zatim smo izračunali, za odabranu verovatnoću greške prve vrste, širinu kontrolnih granica i moć kontrolnog grafika uzoračke sredine. Dobijeni rezultati ukazuju da odgovarajuća Pirsonova raspodela može poslužiti kao veoma dobra aproksimacija raspodele standardizovane uzoračke sredine. Primetili smo, na osnovu dobijenih rezultata, da kontrolni grafik uzoračke sredine ima moć od barem 90% za detekciju pomeranja od srednje vrednosti veličine 1.5 i više. Za primenu predloženog kontrolnog grafika u praksi, potrebne su nam ocene srednje vrednosti i disperzije posmatrane karakteristike kvaliteta kao i ocena koeficijenta spljoštenosti standardizovane uzoračke sredine. Ispitali smo, koristeći

4. ZAKLJUČAK

Monte Karlo metode, koja od tri mera koeficijenta spljoštenosti ima najmanju srednjekvadratnu grešku. Na kraju smo ilustrovali konstrukciju predloženog kontrolnog grafika uzoračke sredine na datim podacima, koji imaju nepoznatu simetričnu negausovu raspodelu.

U slučaju pozitivno asimetričnih raspodela, predložili smo jednostrani kontrolni grafik medijane za praćenje centralne tendencije karakteristike kvaliteta. Odabrali smo eksponencijalnu, gama i Vejbulovu raspodelu kao predstavnike često korišćenih pozitivno asimetričnih raspodela. Kao i u slučaju kontrolnog grafika uzoračke sredine, prvo smo izveli teorijsku raspodelu medijane i zatim smo je aproksimirali Pirsonovom raspodelom I tipa u slučaju razmatrane Vejbulove raspodele i Pirsonovom raspodelom VI tipa u slučaju razmatrane eksponencijalne i gama raspodele, za odabrane obime uzoraka. Zatim smo izračunali, za odabranu verovatnoću greške prve vrste, gornju kontrolnu granicu i moć kontrolnog grafika medijane. Uočili smo da su dobijene vrednosti za teorijsku raspodelu medijane i odgovarajuću Pirsonovu raspodelu vrlo bliske. Takođe, rezultati ukazuju da kontrolni grafik medijane ima moć od barem 90% da detektuje pomeranja od 1.5 i više od medijane. Konačno smo razmotrili primenu predloženog kontrolnog grafika medijane u opštem slučaju, kada je raspodela karakteristike kvaliteta pozitivno asimetrična ali nepoznata. Uporedili smo tri mere koeficijenata asimetrije i spljoštenosti, na osnovu kriterijuma srednjekvadratne greške ocene. Na kraju smo konstruisali jednostrani kontrolni grafik medijane za date podatke.

Pored statističkog dizajna kontrolnih grafika za praćenje centralne tendencije negausovih slučajnih veličina, bavili smo se i njihovim optimalnim ekonomsko-statističkim dizajnom. Predložili smo upotrebu genetskog algoritma za minimizaciju funkcije očekivanog gubitka pod ograničenjima. Odabrali smo iste simetrične raspodele kao u slučaju statističkog dizajna kontrolnog grafika uzoračke sredine, odnosno iste pozitivno asimetrične raspodele kao u slučaju statističkog dizajna kontrolnog grafika medijane. Zaključili smo da su dobijene vrednosti kontrolnih granica i učestalosti uzorkovanja optimalnog ekonomsko-statističkog dizajna na osnovu teorijske raspodele standardizovane uzoračke sredine (medijane) i odgovarajuće Pirsonove raspodele vrlo bliske.

4. ZAKLJUČAK

Na osnovu dosadašnjih rezultata, predlažemo upotrebu kontrolnog grafika uzoračke sredine za praćenje srednje vrednosti negausovih simetričnih raspodela, kao i upotrebu jednostranog kontrolnog grafika medijane za praćenje medijane pozitivno asimetričnih raspodela, zasnovanih na aproksimaciji odgovarajućom Pirsonovom raspodelom. Pružili smo primere njihove primene u praksi, na realnim podacima, kroz korišćenje grafičkog prikaza, testova normalnosti i testova simetričnosti raspodele podataka, kao i kroz studiju odgovarajućih mera koeficijenata i spljoštenosti, potrebnih za fitovanje Pirsonove raspodele. Dalje, pružili smo i primere upotrebe kontrolnih grafika uzoračke sredine i medijane u slučaju njihovog ekonomsko-statističkog dizajna, uz upotrebu genetskog algoritma za minimizaciju funkcije očekivanog gubitka pod ograničenjima.

Pored predloženih kontrolnih grafika, bilo bi interesantno razmotriti, u narednim istraživanjima, konstrukciju kontrolnih grafika za praćenje ekstremnih vrednosti slučajnih veličina.

Literatura

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I.A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York.
- [2] Ahsanullah, M., Golam Kibria, B.M., Shakil, M. (2014). *Normal and Student's t Distributions and Their Applications*. Atlantis Press, Paris.
- [3] Alloway, J.A., Raghavachari, M. (1991). Control charts based on Hodges-Lehmann estimator. *Journal of Quality Technology*, **23**, 336–347.
- [4] Alwan, L.C. (1995). The Problem of Misplaced Control Limits. *Journal of the Royal Statistical Society, Series C*, **44**, 269–278.
- [5] Anderson, T.W., Darling, D.A. (1952). Asymptotic theory of "goodness-of-fit" criteria based on stochastic processes. *Annals of Mathematical Statistics*, **23**, 193–212.
- [6] Anderson, T.W., Darling, D.A. (1954). A Test of Goodness of Fit. *Journal of the American Statistical Association*, **49**, 765–769.
- [7] Balakrishnan, N. (1992). *Handbook of the Logistic Distribution*. Marcel Dekker, New York.
- [8] Becker, M., Klössner, S. (2013). *PearsonDS: Pearson Distribution System*. R package version 0.97.
- [9] Bonferroni, C.E. (1933). *Elementi di Statistica Generale*. E. Gili, Torino, Italy.
- [10] Brent, R.P. (1973). *Algorithms for Minimization without Derivatives*. Prentice-Hall, New Jersey.

- [11] Cabilio, P., Masaro, J. (1996). A simple test of symmetry about an unknown median. *The Canadian Journal of Statistics*, **24**, 349–361.
- [12] Calvetti, D., Golub, G.H., Gragg, W.B., Reichel, L. (2000). Computation of Gauss-Kronrod Quadrature Rules. *Mathematics of Computation*, **69**, 1035–1052.
- [13] Chakraborti, S., van der Laan, P., van de Wiel, M.A. (2004). A Class of Distribution-Free Control Charts. *Journal of the Royal Statistical Society Series C (Applied Statistics)*, **53**, 443–462.
- [14] Chakraborti, S., van de Wiel, M.A. (2008). A nonparametric control chart based on the Mann-Whitney statistic, in: Beyond Parametrics in Interdisciplinary Research: Festschrift in Honor of Professor Pranab K. Sen, (Edited by N. Balakrishnan, E.A. Pena and M.J. Silvapulle). *Institute of Mathematical Statistics Collections*, **1**, 156–172.
- [15] Dou, Y., Sa, P. (2002). One-sided control charts for the mean of positively skewed distributions. *Total Quality Management*, **13**, 1021–1033.
- [16] Duncan, A.J. (1956). The Economic Design of barX Charts used to Maintain Current Control of a Process. *Journal of the American Statistical Association*, **51**, 228–242.
- [17] Djoric, D., Malisic, J., Jevremovic, V., Nikolic-Djoric, E. (2007). *Atlas raspodela*. Gradjevinski fakultet, Beograd.
- [18] Gastwirth, J.L. (1982). Statistical properties of a measure of tax assessment uniformity. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **6**, 1–12.
- [19] Gastwirth, J.L., Gel, Y.R., Wallace Hui, W.L., Miao, W., Noguchi, K. (2015). *lawstat: Tools for Biostatistics, Public Policy and Law*. R package version 2.5.
- [20] George, E.O., Mudholkar, G.S. (1983). On the convolution of logistic random variables. *Metrika*, **30**, 1–13.

- [21] Gibbons, J.D., Chakraborti, S. (2003). *Nonparametric Statistical Inference* (Forth Edition). Marcel Dekker, New York.
- [22] Gil-Pelaez, J. (1951). Note on the inversion theorem. *Biometrika*, **38**, 481–482.
- [23] Gross, J., Ligges, U. (2015). *nortest: Tests for Normality*. R package version 1.0-3.
- [24] Gumbel, E.J. (1947). The Distribution of the Range. *The Annals of Mathematical Statistics*, **18**, 384–412.
- [25] Gupta, S.S., Han, S. (1992). Selection and ranking procedures for logistic populations, in: *Order Statistics and Nonparametrics: Theory and Applications* (Edited by P.K. Sen and I.A. Salama). Elsevier, Amsterdam, 377–404.
- [26] Harter, H.L. (1960). Tables of Range and Studentized range. *The Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 1122–1147.
- [27] Janacek, G.J., Meikle, S.E. (1997). Control charts based on medians. *The Statistician*, **46**, 19–31.
- [28] Joanes, D.N., Gill, C.A. (1998). Comparing measures of sample skewness and kurtosis. *The Statistician*, **47**, 183–189.
- [29] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions Volume 1*. Wiley, New York.
- [30] Johnson, N.L., Kotz, S., Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions Volume 2*. Wiley, New York.
- [31] Johnson, N.L., Kemp, A.W, Kotz, S. (2005). *Univariate Discrete Distributions (Third Edition)*. Wiley, New York.
- [32] Kao, S.-C. and Ho, C. (2007). Robustness of R-Chart to Non Normality. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, **36**, 1089–1098.

- [33] Khoo, M.B.C. (2005). A Control Chart Based on Sample Median for the Detection of a Permanent Shift in the Process Mean. *Quality Engineering*, **17**, 243–257.
- [34] Kolmogorov, A. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **4**, 83–91.
- [35] Kotz, S., Kozubowski, T.J., Podgórski, K. (2001). *The Laplace Distribution and Generalizations: a Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance*. Springer, New York.
- [36] Küchler, U., Tappe, S. (2008). On the shapes of bilateral Gamma densities. *Statistics & Probability Letters*, **78**, 2478–2484.
- [37] Lilliefors, H.W. (1967). On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 399–402.
- [38] Lorenzen, T.J., Vance L.C. (1986). The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach. *Technometrics*, **28**, 3–10.
- [39] Mahoney, J.F. (1998). The influence of parent population distribution on d_2 values. *IIE Transactions*, **30**, 563–569.
- [40] Meyer, D., Dimitriadou, E., Hornik, K., Weingessel, A., Leisch, F. (2014). *e1071: Misc Functions of the Department of Statistics, TU Wien*. R package version 1.6-4.
- [41] Miao, W., Gel, Y.R., Gastwirth, J.L. (2006). A New Test of Symmetry about an Unknown Median, in: *Random Walk, Sequential Analysis and Related Topics - A Festschrift in Honor of Yuan-Shih Chow* (Edited by A. Hsiung, C.-H. Zhang and Z. Ying). World Scientific Publisher, Singapore.
- [42] Mira, A. (1999). Distribution-free test for symmetry based on Bonferroni's measure. *Journal of Applied Statistics*, **26**, 959–972.

- [43] Montgomery, D.C. (2005). *Introduction to Statistical Quality Control*. Wiley, New York.
- [44] Pal, N., Chun, J., Wooi, K.L. (2005). *Handbook of Exponential and Related Distributions for Engineers and Scientists*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [45] Pearson, K. (1916). Mathematical contributions to the theory of evolution, XIX: Second supplement to a memoir on skew variation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A)*, **216**, 429–457.
- [46] Razali, N., Wah, Y.B. (2011). Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests. *Journal of Statistical Modeling and Analytics*, **2**, 21–33.
- [47] Rinne, H. (2009). *The Weibull distribution: a handbook*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [48] Royston, J.P. (1982a). An Extension of Shapiro and Wilk's W Tests for Normality to Large Samples. *Applied Statistics*, **31**, 115–124.
- [49] Royston, J.P. (1982b). Algorithm AS 181: The W Test for Normality. *Applied Statistics*, **31**, 176–180.
- [50] Royston, J.P. (1995). Remark AS R94: A Remark on Algorithm AS181:The W-test for Normality. *Journal of the Royal Statistical Society* **44**, 547–551.
- [51] Saniga, E.M. (1989). Economic Statistical Control-Chart Design with an Application to X and R Charts. *Technometrics*, **31**, 313–320.
- [52] Scrucca, L. (2013). GA: A Package for Genetic Algorithms in R. *Journal of Statistical Software*, **53**, 1–37.
- [53] Shapiro, S.S., Wilk, M.B. (1965). An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). *Biometrika*, **52**, 591–611.
- [54] Smirnov, N.V. (1948). Table for estimating the goodness of fit empirical distributions. *Annals of Mathematical Statistics*, **19**, 279–281.

- [55] Stephens, M.A. (1986). Tests Based on EDF Statistics, in: *Goodness-of-Fit Techniques*. (Edited by D'Agostino, R. B., Stephens, M. A.). Marcel Dekker, New York.
- [56] Witkovský, V. (2001). On the exact computation of the density and of the quantiles of linear combinations of t and F random variables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **94**, 1–13.
- [57] Witkovský, V. (2004). Matlab algorithm tdist: the distribution of a linear combination of Student's t random variables. *COMPSTAT 2004 Symposium*, Prague.
- [58] Witkovský, V., Savin, A. (2005). *tdist: Distribution of a linear combination of independent Student's t-variables*. R package version 0.1.1.
- [59] Woodall, W.H. (1985). The Statistical Design of Quality Control Charts. *Journal of the Royal Statistical Society Series D*, **34**, 155–160.
- [60] Veljkovic, K., Elfaghihe, H., Jevremovic, V. (2015). Economic statistical design of X bar control chart for non-normal symmetric distribution of quality characteristic. *Filomat*, **29**, 2325–2338.
- [61] Veljkovic, K. (2016). R control chart for positively skewed distributions. *Serdica*, **42** (accepted).

Biografija

Kristina Veljković je rođena 10.03.1981. godine u Pančevu. Završila je gimnaziju "Uroš Predić" u Pančevu i diplomirala na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer Verovatnoća i statistika. Nakon završenih osnovnih studija, 2008. godine upisuje postdiplomske studije na istom smeru. Master tezu pod nazivom *Mogućnosti primene neparametarskih testova za testiranje parametarskih hipoteza* i mentorstvom prof. dr Vesne Jevremović, odbranila je 2010. godine.

Njena polja interesovanja su dizajn kontrolnih grafika u statističkoj kontroli kvaliteta, neparametarski testovi i primena statističkih metoda u različitim naučnim disciplinama. Objavila je radove iz oblasti statističke kontrole kvaliteta, medicine, ekonomije i meteorske astronomije. Učestvovala je na nekoliko domaćih i međunarodnih konferencija i radionica. Autor je R programskog paketa za obradu vizuelnih meteorskih podataka.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Кристина Вељковић

број уписа 2055/2009

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Контрола квалитета праћењем централне тенденције негаусових случајних
величина

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 27.06.2016.

Кристина Вељковић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Кристина Вељковић

Број уписа 2055/2009

Студијски програм Математика – Вероватноћа и статистика

Наслов рада Контрола квалитета праћењем централне тенденције негаусових случајних величина

Ментор проф. др Павле Младеновић

Потписани Кристина Вељковић

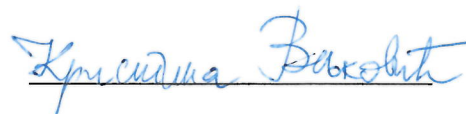
изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 27.06.2016.



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Контрола квалитета праћењем централне тенденције негаусових случајних величина

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 27.06.2016.



1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.