

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Огњен М. Пековић

**ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА
ЛАМИНИРАНИХ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУРА**

Докторска дисертација

Београд, 2014.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Ognjen M. Peković

**ISOGOMETRIC ANALYSIS OF LAMINATED
COMPOSITE STRUCTURES**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2014

**ПОДАЦИ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ ЗА
ПРЕГЛЕД И ОДБРАНУ:**

Ментор: **др Слободан Ступар, редовни професор**
Универзитет у Београду, Машински факултет

Коментор: **др Александар Симоновић, ванредни професор**
Универзитет у Београду, Машински факултет

Чланови комисије: **др Слободан Гвозденовић, редовни професор**
Универзитет у Београду, Саобраћајни факултет

Датум одбране: _____ 2014.

Изогеометријска анализа ламинираних комполитних структура

Резиме

Предмет ове докторске дисертације је анализа ламинираних комполитних структура употребом изогеометријског метода коначних елемената. Изогеометријски метод користи исте базне функције за репрезентацију геометрије модела и за апроксимацију поља непознатих величина. У оквиру дисертације развијени су изогеометријски математички модели ламинираних површинских носача формулисаних на основу теорија еквивалентног слоја базираних на Кирхоф-Лавовој, Миндлин-Рајзнеровој и Редијевој теорији површинских носача уз употребу NURBS базних функција. Формулисане су основне матрице метода коначних елемената за статичку, динамичку и анализу бифуркационе стабилности за све три теорије површинских носача. Везе између померања и деформација су линеарне, осим у случају анализе бифуркационе стабилности где је коришћен стандардни нелинеарни модел за одређивање матрице геометријске крутости, док је веза између деформација и напона линеарна. Основне једначине метода коначних елемената изведене су методом помераја.

У оквиру дисертације извршено је опсежно нумеричко тестирање предложених метода и добијени резултати су упоређени са аналитичким решењима и осталим доступним резултатима. Доказана је велика тачност метода у односу на конвенционални метод коначних елемената и постојеће алтернативне методе.

Статичка анализа модела показала је високу тачност метода и предности употребе базних функција вишег реда. Користећи особине NURBS базних функција развијена је методологија прорачуна интерламинарних напона у засебном кораку, након израчунавања поља померања. Израчунати су

интерламинарни напони коришћењем једначина равнотеже за плоче моделоване различитим теоријама површинских носача и показана је њихова велика тачност у односу на интерламинарне напоне добијене из конститутивних једначина. Анализа слободних вибрација и бифуркационе стабилности показале су високу тачност метода.

Посебна пажња посвећена је анализи утицаја реда базних функција на тачност решења. Нумеричко тестирање извршено је за моделе са базним функцијама другог, трећег, четвртог и петог степена и донети су одговарајући закључци и препоруке.

Кључне речи: изогеометријска анализа, ламиниране композитне структуре, метод коначних елемената, интерламинарни напони, Кирхоф-Лавова теорија плоча, Миндлин-Рајзнерову теорију плоча, Редијева теорија плоча

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Ваздухопловство

УДК: 620.17:519.6(043.3) / 629.7-03:004.4(043.3)

Isogeometric analysis of laminated composite structures

Abstract

This doctoral dissertation deals with analysis of laminated composite structures using isogeometric finite element method. In isogeometric analysis same basis functions that are used for geometry representation are also used for approximation of unknown quantities. Isogeometrical mathematical models of laminated thin walled structures are formulated. The proposed models are based on most popular equivalent layer theories, that is Kirchoff-love, Mindlin-Reissner and Reddy's plate theories with the use of NURBS basis functions. Main matrices of finite element method for static, dynamic and stability analysis are formulated for all three plate theories. Relation between displacements and strains are linear, except for the case of stability analysis where standard non-linear procedure is used for geometric stiffness matrix formulation. Constitutive relations are linear. Finite element equations are derived using displacement method,

Extensive numerical testing of the proposed method is conducted in order to verify the performance of the method. Obtained results are compared with analytical solutions and other available results. The obtained results demonstrated high accuracy of the method in comparison to the conventional finite element method and existing alternatives.

Static analysis of developed models showed high accuracy of the proposed formulation and the advantages of using higher-order basis functions. Using the properties of NURBS basis functions, methodology for interlaminar stress calculation is developed that is able to accurately compute interlaminar stresses in a single separate step, after calculation of displacement field is performed. The interlaminar stresses are

calculated using the equilibrium equations for plates modeled with different plate theories. High accuracy of equilibrium interlaminar stresses compared to constitutive interlaminar stresses is demonstrated. Free vibration and buckling analysis also demonstrated high accuracy of the method.

Special attention is dedicated to analysis of the influence the degree of the basis functions on the accuracy of solutions. Numerical tests were performed for models with quadratic, cubic, quartic and quintic basis functions and the appropriate conclusions and recommendations are made.

Key words: Isogeometric analysis, laminated composite structures, Finite element method, Interlaminar stresses, Kirchoff-Love plate theory, Mindlin-Reissner plate theory, Reddy plate theory

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Aerospace engineering

UDC: 620.17:519.6(043.3) / 629.7-03:004.4(043.3)

Садржај

1	Увод	1
1.1	Основне напомене.....	1
1.2	Изогеометријска анализа и интеграција процеса пројектовања помоћу рачунара.....	5
1.3	Предмет истраживања и организација дисертације.....	8
2	Преглед литературе	11
2.1	Основе изогеометријске анализе.....	11
2.2	Моделовање ламинираних композитних структура.....	12
2.3	Метод коначних елемената.....	13
2.4	NURBS геометрија.....	14
2.5	Изогеометријска анализа ламинираних површинских носача.....	14
3	Геометријске основе	16
3.1	Увод.....	16
3.2	Параметарска репрезентација кривих и површи.....	16
3.3	Безијеве криве.....	17
3.4	Б-сплајнови.....	20
3.5	Модификације Б-сплајн базе.....	23
3.6	NURBS.....	25
3.7	Деривативи NURBS површи.....	26
4	Моделовање ламинираних композитних структура	28
4.1	Увод.....	28
4.2	Кинематика површинских носача.....	30
4.2.1	Поље померања и деформација Кирхоф-Лавове плоче.....	30
4.2.2	Поље померања и деформација Миндлин-Рајзнерове плоче...	32
4.2.3	Поље померања и деформација Редијеве плоче.....	34

4.3	Конститутивне једначине	37
4.3.1	Крутост ламината са Кирхоф-Лавовом формулацијом.....	41
4.3.2	Крутост ламината са Миндлин-Рајзнеровом формулацијом...	43
4.3.3	Крутост ламината са Редијевом формулацијом.....	44
4.4	Диференцијалне једначине равнотеже	45
4.4.1	Варијациона формулација основних једначина статике.....	47
4.4.2	Варијациона формулација основних једначина динамике.....	49
4.4.3	Варијациона формулација основних једначина линеарне стабилности.....	49
4.5	Апроксимативне методе	50
4.5.1	Метода Галеркина.....	51
4.5.2	Метода коначних елемената.....	53
4.5.3	Интерполационе функције у класичној методи коначних елемената.....	60
5	Изогеометријска анализа	63
5.1	Увод	63
5.2	Дискретизација домена у изогеометријској анализи	64
5.2.1	Изогеометријска дискретизација Кирхоф-Лавове плоче.....	67
5.2.2	Изогеометријска дискретизација Миндлин-Рајзнерове плоче	70
5.2.3	Изогеометријска дискретизација Редијеве плоче.....	72
5.3	Интеграција	75
5.4	Гранични услови	75
5.5	Интерламинарни напони	77
6	Нумерички примери	81
6.1	Увод	81
6.2	Статичка анализа ламинираних композитних плоча	81
6.2.1	Трослојна сендвич конструкција под дејством униформног оптерећења.....	81
6.2.2	Трослојна $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламинирана плоча под дејством синусоидалног оптерећења.....	87
6.2.3	Четворослојна $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламинирана плоча под дејством синусоидалног оптерећења.....	93

6.2.4	Статичка анализа антисиметричног ламината са $[0^\circ/90^\circ]_n$ оријентацијом слојева под дејством синусоидалног оптерећења.....	97
6.3	Анализа сопствених вибрација ламинираних композитних плоча.....	102
6.3.1	Квадратне ламиниране плоче.....	102
6.3.2	Кружне ламиниране плоче.....	107
6.4	Анализа бифуркационе стабилности ламинираних композитних плоча.....	110
6.4.1	Ламинирана плоча под дејством једноосне компресије.....	110
6.4.2	Ламинирана плоча под дејством двоосне компресије.....	110
7	Закључак	112
7.1	Резултати истраживања.....	112
7.2	Научни доприноси дисертације.....	113
7.3	Препоруке за будући рад.....	115
	Литература	117

Глава 1

Увод

1.1 Основне напомене

Композитни материјали су комбинација два или више материјала, различитих физичких и хемијских својстава међу којима након спајања остаје препознатљива физичка граница на макроскопском и микроскопском нивоу. Влакнима ојачани композитни материјали састоје се од ојачања (арматуре) у облику влакана и носача (матрице) од полимера (смоле). Ламинирани (слојевити) композитни материјали добијају се слагањем слојева арматуре који се импрегнирају смолом и процесом полимеризације очвршћавају на тај начин формирајући ламинат односно композит. Ламиниране композитне структуре имају велику примену у ваздухопловству, бродоградњи, индустрији ветрогенератора и другде где се користе као површински носећи елементи због својих одличних механичких својстава, мале тежине и могућности да формирају сложене облике неопходне за постизање оптималних перформанси ових структура.

Ламинирани композитни материјали такође имају и мане. Приликом процеса производње могу се јавити различите грешке као што су постојање интерламинарних празнина, деламинација, погрешна оријентација влакана, оштећења влакана, неуниформна дебљина ламината исл. Како је немогуће потпуно елиминисати грешке у процесу производње, као и због специфичности самог материјала до лома и отказа композитних ламината може доћи различитим механизмима који се не јављају код изотропних конвенционалних материјала.

Један од најзначајнијих механизма отказа композитних ламината је деламинација. Због различитих материјалних карактеристика између слојева, смичући напони који се јављају између слојева, посебно у близини ивица ламината, могу довести до деламинације односно раздвајања слојева арматуре. Код танкозидних структура вредност трансверзалних напона (смичућих и нормалних) значајно је мања од напона у равни па се код изотропних материјала њихово разматрање веома често занемарује у анализи. Композитни материјали дизајнирани су тако да арматура носи напоне у равни (носећа влакна усмеравају се у жељеним правцима у равни ламината) и њихова носивост у трансверзалном правцу значајно је мања услед малог Јунговог модула матрице у односу на арматуру. Због овога трансверзални напони, иако имају мању вредност могу довести до различитих видова лома композитних конструкција. Утврђено је да до отказа композитних ламината оптерећених на притисак у равни долази услед трансверзалних напона. Анализа и одређивање интерламинарних напона, која је од суштинске важности за процену носивости ламината у тансверзалном правцу је веома сложен посао који захтева компликоване нумеричке процедуре.

Апроксимација реалних појава поједностављеним моделима за анализу и проучавање основни је принцип у инжењерству. Редукција димензионалности проблема можда је и најчешћи вид упрошћавања реалних ситуација у инжењерским симулацијама. Објекти који су значајно већи у једној димензији у односу на друге две описују се једнодимензионим моделима (штаповима и гредама односно решеткама и рамовима). Уколико је само једна димензија мања од друге две, користе се дводимензионални површински модели као што су плоче, љуске мембране итд. Теорије површинских носача веома су важне у структуралној анализи будући да су површински носачи општеприсутни и незаобилазни у природи и техници. Овакве конструкције су веома ефикасне у ношењу оптерећења и уштеди материјала односно смањењу тежине конструкције па не чуди што модели плоча и љуски имају богату историју а нови модели развијају се и данас.

Ламинати имају мању дебљину у односу на остале линеарне димензије, па се за њихову анализу са успехом примењују теорије површинских носача (плоча односно љуски) различитог степена.

Многобројне методе за анализу ламинираних композитних конструкција могу се сврстати у три категорије: (1) Теорије еквивалентног слоја, (2) Теорије слојева и (3) Општу тродимензионалну теорију еластичности, при чему је свака од ових теорија значајно компликованија од претходне.

Теорије еквивалентног слоја најзаступљеније су у анализи танкозидних структура због своје једноставности и добрих резултата приликом проучавања глобалног одзива ламината на дејства оптерећења. Ове теорије ослањају се на различите теорије површинских носача при чему се слојевита структура ламинираних композита замењује статички еквивалентном једнослојном структуром. Прву упроштenu теорију површинских носача развио је Густав Кирхоф (Gustav Kirchoff) 1850. године за плоче, а касније је Август Лав (August Love) користећи исте претпоставке развио теорију љуски па се ова теорија назива Кирхоф-Лавова теорија или класична теорија плоча (CPT). Класична теорија плоча у потпуности занемарује постојање трансверзалних напона. Теорија смицања првог реда (FSDT) коју су развили Миндлин (Mindlin) и Рајзнер (Reissner), претпоставља константну расподелу трансверзалних смичућих напона по дебљини плоче. На овај начин узима се у обзир енергија деформације од смицања па ова теорија даје тачније резултате, посебно за плоче умерене дебљине. Након ове две теорије, развијени су и бројни модели вишег реда, како би се што боље описала кинематика површинских носача. Најзначајнија и најзаступљенија теорија вишег реда је свакако Редијева (Reddy) теорија смицања трећег реда (TSDT) која претпоставља квадратну расподелу трансверзалних напона по дебљини плоче што је много тачнија репрезентација реалног понашања танкозидних носача у односу на претходно наведене теорије. Теорије еквивалентног слоја користе се при анализи глобалног одзива структуре. Трансверзални напони који се добијају коришћењем теорија еквивалентног слоја у општем случају нису задовољавајуће тачности и могу само квалитативно да опишу дејство напона у трансверзалном правцу. Након налажења поља померања ламината, могуће је израчунати трансверзалне напоне директно из једначина равнотеже али је у постојећим аналитичким и нумеричким методама овакав приступ веома сложен па се за изучавање интерламинарних напона у ламинираним плочама користе теорије слојева (Layerwise theories) различите

комплексности или општа тродимензионалана теорија еластичности које су опет веома захтевне и имају велики број степени слободе у односу на одговарајуће теорије еквивалентног слоја.

Одређивање напонско-деформационог стања конструкција математички се своди на решавање парцијалних диференцијалних једначина са одговарајућим контурним условима односно на решавање граничног проблема. Циљ анализе је одређивање поља непознатих величина (у еласто-механици то су најчешће поље померања или поље напона). Формулисање граничног проблема линеарне теорије еластичности ослања се на анализу поља померања инфинитезималног делића разматраног домена чије је деформисање поједностављено и математички се своди на основне афине трансформације (транслацију, ротацију, истезање, смицање, скалирање исл.). Гранични проблеми у инжењерској пракси најчешће су сложене геометрије па су њихова аналитичка решења веома компликована а у највећем броју случајева и немогућа те се за њихово решавање користе различите апроксимативне и нумеричке методе.

Метод коначних елемената (МКЕ) је метод нумеричке анализе базиран на употреби рачунара који је развијен у 50. и 60. годинама прошлог века и до данас је остао доминантан метод у решавању проблема еласто-механике. Разлог његове популарности лежи у могућности решавања проблема произвољне геометрије и лакоћи рачунарске имплементације. Структурални домен који се анализира представља се као скуп великог броја малих коначних елемената једноставног облика и понашања, односно сваки инфинитезимални делић домена замењујемо елементима коначних димензија, отуда и назив метода. Елементи су дефинисани скупом чворова између којих се успоставља веза путем базних функција. Најчешће коришћене базне функције су полиномне функције нижег реда (Лагранжеве и Хермитске базне функције) дефинисане по интервалима (коначним елементима). Овако дефинисани коначни елементи поседују C^0 континуитет између елемената па се помоћу њих могу решавати само проблеми код којих се захтева интеграбилност првих дериватива поља непознатих величина. Како се код Кирхоф-Лавове и Редијеве теорије површинских носача ротације посматрају као изводи трансляторних компонената померања, при формулацији коначних елемената овом теоријом захтева се интеграбилност виших дериватива

непознатих поља па њихово решавање класичном методом коначних елемената није једноставно и лако. Миндлин-Рајзнерова теорија разматра ротације и транслације као два независна поља и захтева само C^0 континуитет између елемената па је и већина формулација дводимензионалних коначних елемената у комерцијалним софтверским пакетима заснована на овој теорији. Код овако дефинисаних елемената јавља се проблем при одређивању матрице крутости. При анализи веома танких плоча, елементи се понашају као сувише крути односно долази до феномена закључавања енг. „locking“-а. Овај феномен потиче од прецењеног удела енергије деформације од смицања у укупној енергији деформације (услед претпоставке о константним трансверзалним смичућим напонима који су у стварности бар са параболичном расподелом по дебљини ламината). Услед овог „вештачког“ повећања крутости елемента добијају се мања померања односно напони мањи од стварних што може бити веома опасно уколико се анализирају структурално одговорне конструкције. Решавању овог проблема бавио се велики број истраживача а он је актуелан и данас посебно при анализи композитних ламината. Треба напоменути да елементи базирани на Редијевој теорији немају проблем “locking”-а. МКЕ један је од основних метода пројектовања помоћу рачунара (CAE – computer aided engineering).

1.2 Изогеометријска анализа и интеграција процеса пројектовања помоћу рачунара

Развојем методе коначних елемената омогућена је структурална анализа а самим тим и конструисање носећих елемената произвољне геометрије које пре овога није било могуће. Са великим напретком рачунарске технике након 1950. године обликовање елемената конструкција у потпуности је почело да се одвија помоћу рачунара. Математичким моделовањем облика на рачунарима бави се засебна научна дисциплина која се назива обликовање помоћу рачунара (CAD – computer aided design). Почетак развоја CAD индустрије везује се за име француског инжењера Пјера Безијеа (Pierre Bezier) који је развио први познати

метод за математички егзактно конструисање кривих и површи произвољне геометрије. Овај метод развио је приликом свог ангажмана у француском аутомобилском гиганту, фабрици Рено, у другој половини 60-их година прошлог века. Занимљиво је да је до готово идентичног открића дошао и други француски инжењер Пол Де Кастиљо (Paul de Casteljau) неколико година пре господина Безијеа радећи у другом француском гиганту фабрици Ситроен. Ипак из разлога поверљивости информација у Ситроену своје резултате објавио је знатно касније. Наставак развоја репрезентације геометрије произвољног облика (freeform geometry) текао је дефинисањем рационалних Безијеових кривих, затим открићем Б-сплајнова те Неуниформних Рационалних Б-Сплајнова (NURBS) кривих и површи. Иако су дефинисане крајем 70-их и почетком 80-их година NURBS геометрија је и данас остала стандард у CAD индустрији. Свој доминантни положај NURBS технологија стекла је способношћу да математички егзактно опише основне геометријске елементе (кругове, конусне пресеке) као и глатку геометрију произвољног облика на ефикасан начин пружајући кориснику интуитиван начин генерисања кривих и површи.

Примећује се да су CAD и CAE настале у јако блиском временском интервалу али се потом њихов развој наставио потпуно независно. Из овог разлога данас, приликом развоја производа, геометрија објекта дефинисана у CAD пакету мора да се трансформише у геометрију погодну за анализу, односно у мрежу коначних елемената. Како би се уверили у поузданост резултата прорачуна, инжењери најчешће врше неколико анализа са различитим финоћама мреже, при чему се свака мрежа изнова дефинише на основу CAD модела. Иако данашње CAE технологије имају развијене напредне алгоритме за аутоматско генерисање мреже коначних елемената, овај процес ипак мора да укључује лично ангажовање инжењера при подешавању различитих параметара. Процењује се да се на генерисање мреже коначних елемената, односно на конверзију геометријских модела између CAD и CAE, код захтевних прорачуна, утроши и до 80% времена потребног за анализу [1]. У циљу попуњавања јаза између CAD и CAE недавно је представљен нови облик анализе, назван изогеометријска анализа, која настоји да повеже ове две технологије односно да користи исте базне функције и за дефинисање геометрије модела и за његову анализу применом метода коначних

елемената. Термин изогеометријска анализа увели су Хјуз (Hughes) и сарадници 2005. године [2]. У овом раду метод је конципиран тако да се NURBS базне функције које се користе за дефинисање облика модела користе и као базне функције за апроксимацију поља непознатих величина приликом анализе. Идеја о коришћењу сплајн и NURBS база уместо уобичајених полиномних база ниског степена у МКЕ није нова али је прави модалитет интеграције CAD и CAE први предложио управо Хјуз са сарадницима. Доказано је да NURBS базне функције испуњавају неопходне услове за конвергенцију решења по МКЕ и развијен је конзистентна методологија анализе МКЕ директно на геометријском NURBS моделу без потребе за конверзијом геометрије. Од свог настанка изогеометријска анализа привлачи велико интересовање истраживачке заједнице. Изогеометријски концепт са успехом је примењен на истраживање различитих проблема као што су анализа напонско деформационог стања чврстих тела, плоча и љуски, флуида, турбуленције, интеракције флуида и структуре, електромагнетизма итд.

Осим NURBS-а, постоје и друге технологије које омогућавају егзактно представљање објеката произвољне геометрије а које могу да се користе као базне функције у изогеометријској анализи свака са својим добрим и лошим особинама. Од најзначајнијих издвајају се „sub-division surfaces“ технологија развијена за потребе компутерске анимације, затим различите генерализације NURBS геометрије као што су T-сплајнови, PHT-сплајнови, LR-сплајнови, генералисани хијерархијски сплајнови итд. који су са успехом коришћени у изогеометријској анализи. Ове технологије настоје да смање и елиминишу недостатне NURBS технологија, пре свега да омогуће локално уситњавање мреже, генерисање параметарског домена сложене топологије, ефикасно састављање суседних поддомена исл. Ипак како су у развој NURBS технологије уложене милијарде долара инвестиција и како је ова технологија свеприсутна у комерцијалним CAD пакетима може се очекивати да ће и у наредном периоду NURBS геометрија држати примат у CAD индустрији па се у овом раду разматрају изогеометријски елементи са NURBS базним функцијама.

1.3 Предмет истраживања и организација дисертације

У оквиру првог поглавља докторске дисертације, наведене су карактеристике ламинираних композитних структура и предочени су могући начини њиховог математичког моделовања. Описане су основне карактеристике метода коначних елемената из перспективе примене метода на третирање проблема површинских носача. Дат је кратак историјски осврт на развитак моделовања облика на рачунарима (CAD) са акцентом на NURBS геометрију. Наглашени су проблеми у комуникацији између CAD софтвера и софтвера за анализу помоћу методе коначних елемената. Наведене су основне идеје изогеометријске анализе и могућа поља њене примене. Дат је и кратак преглед CAD технологија које се користе у изогеометријској анализи. У завршном делу Увода приказан је предмет истраживања и дата је организација дисертације.

Друго поглавље „Преглед литературе“ подељен је у три целине. У првом делу дат је преглед литературе из области моделовања ламинираних композитних структура. Други део поглавља даје преглед релевантне литературе везане за метод коначних елемената са посебним нагласком на објављене резултате из примене метода на проблем анализе ламинираних композитних структура. Исцрпан преглед литературе из области изогеометријске анализе дат је у трећем делу другог поглавља.

У оквиру трећег поглавља „Геометријске основе“ изнесене су основе геометријског представљања кривих и површи неопходне за израду ове тезе. Најпре су презентоване особине Безијеових и Б-сплајн кривих које су неопходне за разумевање NURBS геометрије. Посебно су наглашене особине њихових базних функција као и начини њихове модификације будући да су базне функције кључне за разумевање изогеометријског метода. На крају поглавља дефинисана је NURBS геометрија и приказани су изводи NURBS површи по параметарским координатама.

Четврто поглавље „Моделовање ламинираних композитних структура“ дате су основе теорије за решавање проблема еласто-механике површинских носача од композитних материјала. Најпре су дефинисани модели плоча различитог нивоа

комплексности погодни за моделовање површинских носача од ламинираних композита употребом теорије еквивалентног слоја а потом су наведене основне једначине механике чврстог тела са посебним акцентом на конститутивне везе различитих ламинатних теорија. Приказана је варијациона форма основних једначина и дат кратак осврт на улогу апроксимативних метода у третирању граничних проблема теорије еластичности. Изведене су основне једначине метода коначних елемената преко метода помераја (деформација) за случај статичке анализе, анализе сопствених вибрација и бифуркационе стабилности. На крају поглавља дат је преглед интерполационих функција које се најчешће користе у конвенционалном методу коначних елемената.

У петом поглављу „Изогеометријска анализа“ изложене су основе изогеометријског метода и указано је на његове особености као и на сличности и разлике са конвенционалном методом коначних елемената. Дефинисане су карактеристичне матрице изведене методом помераја за случај ламината базираних на Кирхоф-Лавовој, Миндлин-Рајзнеровој и Редијевој теорији плоча. Наведене су специфичности задавања граничних услова на изогеометријским елементима и дат је преглед уобичајених граничних услова за композитне ламинате. На крају поглавља описан је поступак рачунања интерламинарних напона из једначина равнотеже.

У шестом поглављу „Нумерички примери“ предложени метод је примењен на решавање проблема савијања, сопствених вибрација и бифуркационе стабилности ламинираних композитних плоча у циљу верификације метода. Приказани су резултати за велики број карактеристичних примера за различите ламинатне моделе. Анализиран је утицај коришћења базних функција различитог степена на решења и изведени одговарајући закључци. Посебна пажња посвећена је израчунавању интерламинарних напона. Извршено је поређење тачности предложеног метода са конвенционалним методом коначних елемената као и са аналитичким решењима у случајевима где она постоје.

У седмом поглављу „Закључак“ сублимирани су научни и стручни доприноси и презентовани закључци везани за предмет дисертације. Продискутовани су

резултати извршених нумеричких експеримената и дате идеје за наставак истраживања у овој научној области.

Глава 2

Преглед литературе

2.1 Основе изогеометријске анализе

Термин изогеометријска анализа први пут је употребљен од стране Хјуза и сарадника у раду [2] где је изложена основна идеја метода. Описане су особине NURBS базних функција са аспекта метода коначних елемената. Поред стандардних „ p “ и „ h “ начина за уситњење мреже коначних елемената предложен је и нови напредни „ k “ метод карактеристичан за изогеометријски метод. Конвергенција метода показана је на тзв. „*patch*“ тестовима и метод је примењен за анализу напонско-деформационог стања изотропних и еластичних тела за 2Д и 3Д случајеве. Такође, приказана је и употреба метода за анализу флуида решавањем дифузионо-адвективне једначине на различитим примерима. У првој монографији која се бави изогеометријским методама [1] детаљније су описане карактеристике метода и приказани су бројни примери, осим већ набројаних, приказана је и употреба метода за решавање проблема вибрација, еласто-динамике, нелинеарних проблема еласто-механике, интеракције флуида и структуре итд. Потребно је поменути и две докторске дисертације [3,4] у којима се изогеометријски метод применио на решавање проблема турбуленције и „*multiscale*“ проблеме. Проблем ефикасности нумеричке интеграције у NURBS изогеометријској анализи обрађен је у [5]. Утицај континуитета базних функција у изогеометријској структуралној анализи разматран је у радовима [6,7,8]. У радовима [9,10] изложене су карактеристике апроксимације NURBS коначним елементима као и карактеристике различитих видова модификација мреже у изогеометријској анализи. NURBS базе нису једине геометријске базе које се

користе у изогеометријској анализи. Из аспекта адаптивне изогеометријске анализе и локалног уситњења мреже, осим линеарне независности и компатибилности са актуелним CAD технологијама од базних функција захтева се и локална контрола. Постоји неколико технологија које задовољавају ове услове делимично или у потпуности: T-сплајнови [11-16], хијерархијски сплајнови [17-19], полиномни хијерархијски сплајнови са T-мрежом (PHT) [20,21], LR-сплајнови [22], „subdivision surfaces“ [23].

2.2 Моделовање ламинираних композитних структура

У класичној монографији [24] описане су основне карактеристике композитних материјала и наведена поља њихове примене као и основе механике структура од композитних материјала. У следећој капиталној монографији из ове области [25] описане су особине површинских носача од композита. Представљени су различити начини за математичко моделовање композитних плоча и љуски усвајањем различитих кинематских претпоставки и претпоставки о напонима и деформацијама. Различити модели могу да се сврстају у три групе: (1) Теорије еквивалентног слоја, (2) Теорије слојева и (3) Општу тродимензионалну теорију еластичности. Прве резултате добијене применом опште тродимензионалне теорије за анализу ламинираних површинских носача објавио је Пагано. Његови бројни публиковани резултати из ове области обједињени су у специјалној монографији [26]. У радовима [27,28,29] објављени су резултати анализе композитних материјала општом 3Д теоријом.

Резултати опште тродимензионалне теорије еластичности примењиви су само на мали број проблема једноставне геометрије али су веома корисни као средство за проверу тачности других теорија. Дводимензионални модели који узимају у обзир дисконтинуалност механичких особина ламинираних структура у правцу дебљине називају се теорије слојева [30]. Изврстан преглед различитих теорија са великим бројем референци налази се у раду [31]. Теорије еквивалентног слоја занемарују дисконтинуитет механичких особина између слојева и третирају вишеслојне материјале као статички еквивалентан једнослојни материјал. Теорије

еквивалентног слоја ослањају се на одговарајуће теорије површинских носача [32,33]. Најједноставнија Кирхоф-Лавова теорија (класична теорија плоча, „classical plate theory – CPT“) коришћена је за анализу ламинираних структура у [34,35]. Рајзнер-Миндлинова теорија смицања првог реда [36] коришћена је за анализу ламинираних структура у [37,38]. Проблем одређивања корективног фактора смицања који се користи у овој теорији обрађиван је у [39,40]. Опште је мишљење да Редијева [41] теорија смицања трећег реда („third order shear deformation theory - TSDT“) даје најбољи однос тачности и комплексности. Осим тога, она не захтева коришћење корективног фактора смицања. Она се са успехом користи за анализу ламинираних структура [42-46].

2.3 Метод коначних елемената

Брз развој инжењерских конструкција а пре свега ваздухопловних, након другог светског рата налагао је неодложну потребу за тачним прорачунима. МКЕ потекао је из матричне формулације метода сила коју је развио Аргирис са сарадницима средином педесетих година [47]. Термин МКЕ први је употребио Клоу 1960. године [48]. Прву монографију о методу коначних елемената издао је Зенкијевич са сарадницима, и она је до сада издата седам пута [49]. Такође, основе метода и његовог програмирања на рачунарима изложене су у монографијама [50-52]. Монографије [53,54] баве се применом метода коначних елемената за анализу ламинираних композитних конструкција. Референтни резултати из области анализе ламината базираних на различитим теоријама еквивалентног слоја дати су у реф. [55-63]. Преглед скорашњих достигнућа из области коначноелементне анализе ламинираних композитних структура дат је у раду [64]. Варијациона метода коначних елемената заснована на Хелингер-Рајзнеровом функционалу (RMVT) описана је у [65,66]. Кирхоф-Лавова и Редијева формулација плоча захтева да базне функције буду $C1$ континуалне на границама између елемената што је тешко постићи користећи стандардне Лагранжеве базне функције. Како би се ове потешкоће превазишле предложена је употреба „meshfree“ метода као алтернатива класичној методи коначних елемената „moving least square method“ –

MLS [67], „radial point interpolation method, -RPIM [68], „radial basis function collocation method“ - RBF [69-70], „multiquadric radial basis function method“ – MQ [71,72], „moving least square differential quadrature method“ - MLSDQ [73]. Још једна алтернатива МКЕ је метод коначних трака "finite strip method" [74,75].

2.4 NURBS геометрија

NURBS криве су генерализација Безијеових односно Б-сплајн кривих. Први пут појам NURBS појављује се у [76]. Први напори у комерцијализацији NURBS технологије везан је за Боинг и њихов CAD софтвер „TIGER“. Управо је компанија Боинг предложила уврштавање NURBS геометрије у међународни стандард за размену графичких података IGES. Стандардне монографије које се користе за упознавање са NURBS технологијом су [77-79]. Сплајн технологија коришћена је у спрези са методом коначних елемената знатно пре појаве изогеометријског метода, посебно у домену динамичке анализе и структуралне оптимизације облика [80-86].

2.5 Изогеометријска анализа ламинираних површинских носача

Рачунарско моделовање површинских носача, поготово оних слободних облика, најчешће се врши помоћу NURBS површи па природно следи да су од настанка изогеометријског метода они били предмет истраживања [1,3,4,87]. У раду [88] приказана је употреба метода за анализу нелинеарних Кирхоф-Лавових љуски и предложен је начин за третирање ротационих степени слободе преко померања контролних тачака. Ово истраживање проширено је и на анализу Кирхоф-Лавових љуски састављених од више поддомена и њихову оптимизацију [89,90]. У раду [91] приказана је анализа вибрација Кирхоф-Лавових плоча са отворима произвољног облика. Истраживање могућности за третирања ротационих степени слободе за љуске приказан је у раду [92,93]. Рајзнер-Миндлинове плоче и љуске третиране су у радовима [94-96], посебна пажња у

овим радовима посвећена је феномену "locking"-а и утицају базних функција вишег реда на његову појаву при анализи Рајзнер-Миндлинових плоча и љуски. У публикацијама [97-98] анализирани су хијерархијски модели љуски.

Ламинирани површински носачи први пут су анализирани изогеометријским методом у раду [99] где је приказана динамичка анализа Кирхоф-Лавових ламината. Анализа Рајзнер-Миндлинове плоче приказана је у [100]. Геометријски нелинеарна анализа Рајзнер-Миндлинове плоче приказана је у [101]. Због значаја трансверзалних напона у анализи ламината у последње две године објављено је више радова које проучавају ламинате базиране на теоријама смицања вишег реда [102-105]. У радовима [106-108] аутори користе изогеометријски метод заснован на теорији слојева. Одређивање интерламинарних напона изогеометријском методом заснованој на FSDT приказано је у раду [109]. Проблем анализе деламинације композитних плоча изогеометријским методом третиран је у [110-113].

Глава 3

Геометријске основе

3.1 Увод

У овој глави биће размотрене геометријске основе репрезентовања (моделовања) линија и површи на рачунару. Дат је кратак приказ параметарске формулације репрезентације геометрије на рачунару која има највећу примену у CAD индустрији и која је основ за дефинисање Безијеових кривих, Б-сплајнова и на крају NURBS кривих и површи као темеља изогеометријског метода. Детаљнији и свеобухватан третман NURBS геометрије дат је у [66-68].

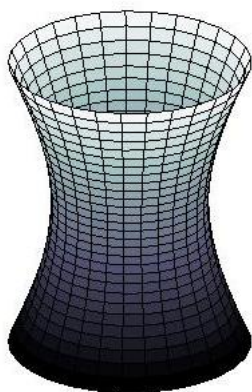
3.2 Параметарска репрезентација кривих и површи

Математички, функције које описују линије и површи формулишу се на експлицитан, имплицитан или параметарски начин.

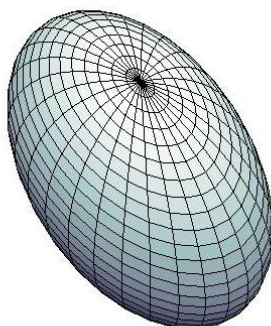
Експлицитне формулације су зависне од координатног система и не могу да опишу вишезначне функције па се готово уопште не користе у CAD индустрији. Имплицитне формулације могу да опишу вишезначне функције али су такође зависне од координатног система. Због својих особина (нпр. једноставно одређивање припадности тачке кривој или површи) имплицитне формулације имају раширену примену у CAD индустрији. Параметарско представљање геометријских објеката најраспрострањеније је у CAD индустрији пре свега јер кориснику омогућава једноставно представљање вишезначних функција и

рачунање виших дериватива, једноставно приказивање кривих у 3Д простору као и интуитивно моделовање облика на рачунару.

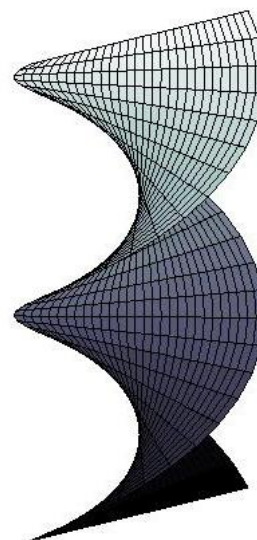
Хиперболоид



Елипсоид



Хеликоид



$$\begin{aligned}x &= a \cosh(\xi) \cos \eta \\y &= b \cosh(\xi) \sin \eta \\z &= c \sinh(\xi) \\-d \leq \xi \leq d, 0 \leq \eta \leq 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= a \cos \xi \cos \eta \\y &= b \sin \xi \sin \eta \\z &= c \cos \eta \\0 \leq \xi \leq 2\pi, 0 \leq \eta \leq \pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= a\eta \cos \xi \\y &= b\eta \sin \xi \\z &= b\xi \\0 \leq \xi \leq 2\pi, -d \leq \eta \leq d\end{aligned}$$

Слика 3.1. - Параметарске површине

3.3 Безијеове криве

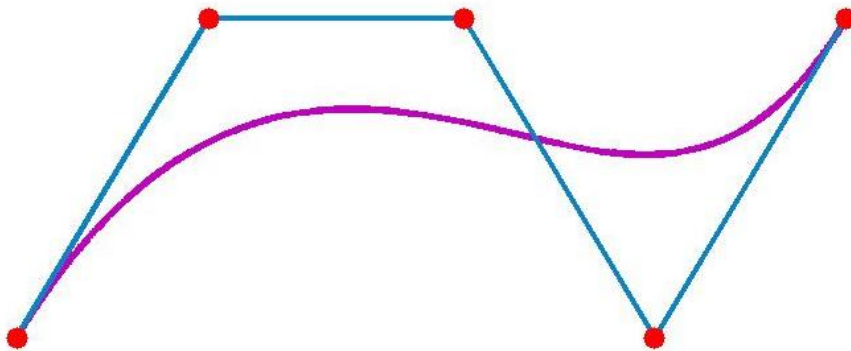
Безијеове криве настале су из потребе за егзактним математичким моделовањем објеката слободне форме (free-form geometrical objects). Педесетих и шездесетих година прошлог века моделовање облика у индустрији, поред функционалних, све више је условљено и естетским захтевима. Ова појава у почетку посебно је била изражена у индустрији намештаја и аутоиндустрији (облик шасије), али и другим гранама где је до тада форма била стриктно одређивана функционалним захтевима (авио индустрија, наутичка индустрија...).

Прву методу за математичко представљање слободних форми развио је француски инжењер Пјер Безије (Pierre Bézier) за време свог ангажмана у фабрици аутомобила Рено (Renault).

Математички, बेзијеова крива $C(\xi)$ одређена је контролним тачкама P_i и базним функцијама $B_{i,n}$:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(\xi) P_i, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (3.1)$$

Све контролне тачке једне криве формирају контролни полигон. Полигон се формира повезивањем узастопних контролних тачака правим линијама (слика 3.2.)



Слика 3.2. - Безијеова крива са припадајућим контролним полигоном
Безијеове базне функције, представљене су Бернштајновим (Bernstein) полиномима датим изразом:

$$B_{i,n}(\xi) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \xi^i (1-\xi)^{n-i} \quad (3.2)$$

Најзначајније особине Безијеове криве су:

- Базне функције су реалне и ненегативне.
- Степен полинома који дефинише сегмент криве за један је мањи од броја контролних тачака у контролном полигону.
- Прва и последња тачка криве подударују се са првом и последњом тачком контролног полигона.
- Тангенте криве у крајњим тачкама истог су правца као и први и последњи интервал полигона.

- Крива се у потпуности налази унутар конвексног омотачае тачака полигона.
- Крива поседује својство мање варијације. Крива прати облик контролног полигона и не постоји права линија која пресеца криву више пута него што пресеца контролни полигон.
- Безијеове криве су афино инваријантне. Ова особина гарантује да се афине трансформације (ротација, транслација...) криве могу извршити одговарајућом трансформацијом контролних тачака.
- У свакој параметарској тачки сума свих базних функција једнака је јединици
- Промена положаја једне контролне тачке мења криву глобално.

Постоји одређени број кривих и површи које се не могу тачно описати полиномима. Међу њима, најважнији су свакако конични пресеци (круг, елипса, хипербола, парабола и њихови одговарајући тродимензионални објекти) који имају веома широку употребу у индустрији.

Ове облике могуће је представити коришћењем рационалних Безијеових кривих дефинисаних изразом:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(\xi) w_i}, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (3.3)$$

где су w_i скаларне велчине које се називају тежински коефицијенти. Односно ако дефинишемо рационалне Безијеове базне функције као

$$B_{r_{i,n}}(\xi) = \frac{B_{i,n}(\xi) w_i}{\sum_{i=0}^n B_{i,n}(\xi) w_i}, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (3.4)$$

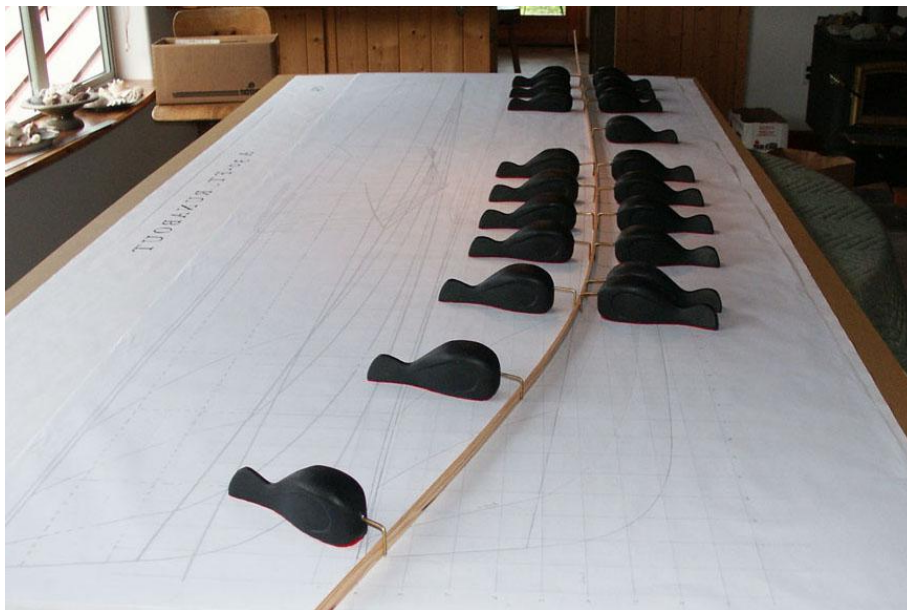
можемо писати

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n B_{r_{i,n}}(\xi) P_i, \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (3.5)$$

Рационалне Безијеове криве (као и рационалне Безијеове базне функције) задржавају све битне особине Безијеових кривих, са тим да су оне пројективно инваријантне.

3.4 Б-сплајнови

Због тога што су базне функције Безијеових кривих дефинисане глобално (на интервалу $0 \leq \xi \leq 1$) промена положаја једне контролне тачке мења криву глобално. Такође, степен криве је везан са бројем контролних тачака, па је у случају већег броја контролних тачака резултујућа крива великог степена што је рачунски неефикасно. Како је локална контрола криве веома пожељна опција, у великом броју апликација користи се друга база назива Б-сплајн база (од Basis Spline) која је дефинисана по сегментима. Реч сплајн на енглеском језику означава алатке за цртање бродских корита (слика 3.3.)



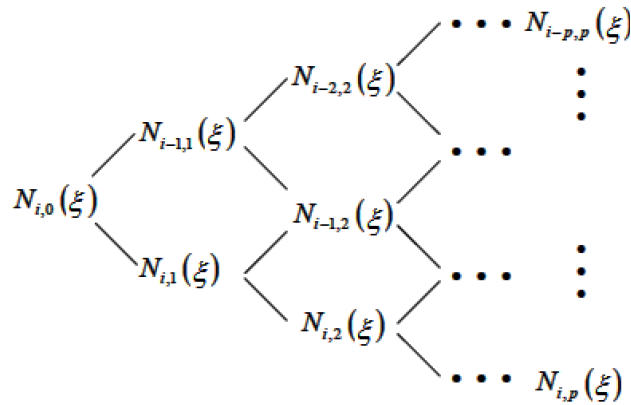
Слика 3.3. - Сплајн

I -та Б-сплајн базна функција степена p дефинисана је изразом:

$$N(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (3.6)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

где је ξ_i неоппадајући низ координата у параметарском простору које називамо чворови. Видимо да су базне функције дефинисане рекурзивно. На слици 3.4. шематски је приказан поступак добијања $N_{i,p}$ Б-сплајн базне функције.



Слика 3.4. - Рекурзивно израчунавање Б-сплајн базних функција

Б-сплајн крива дефинисана је изразом:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) P_i, \quad a \leq \xi \leq b. \quad (3.7)$$

где су P_i контролне тачке а $N_{i,p}$ Б-сплајн базне функције. Број базних функција једнак је броју контролних тачака. Б-сплајн криву можемо посматрати и као низ линијских сегмената који су у крајњим тачкама повезани тако да чине једну континуалну криву. Крајње тачке сегмената одговарају чворовима у параметарском домену.

Скуп свих чворова чини вектор чворова Θ :

$$\Theta = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}. \quad (3.8)$$

Растојање између два суседна чвора у параметарском простору називамо чворни интервал. У случају да је вектор чворова дат изразом

$$\Theta = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_p, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_p \right\}, \quad (3.9)$$

резултујуће Б-сплајн базне функције одговараће Безијеовим базним функцијама степена p , тј. Б-сплајн базне функције су генерализација Безијеових базних функција. Униформни вектори чворова имају једнако растојање међу чворовима нпр. $\Theta = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. У вектору чворова могуће је да се појаве и чворови исте вредности. Многострукост неког чвора у вектору чворова одређује континуитет Б-сплајн базних функција у том чвору. Б-сплајн базне функције степена p имају $p - m_i$ континуалних дериватива у чвору ξ_i , где је m_i многострукост чвора ξ_i у вектору чворова Θ . Када је $m_i = p$ базне функције су C^0 -континуалне, и крива пролази кроз

контролну тачку P_i . У општем случају крива не пролази кроз контролне тачке. Када је $m_i=p+1$ базне функције постају дисконтинуалне и ствара се граница односно завршава се параметарски домен базе.

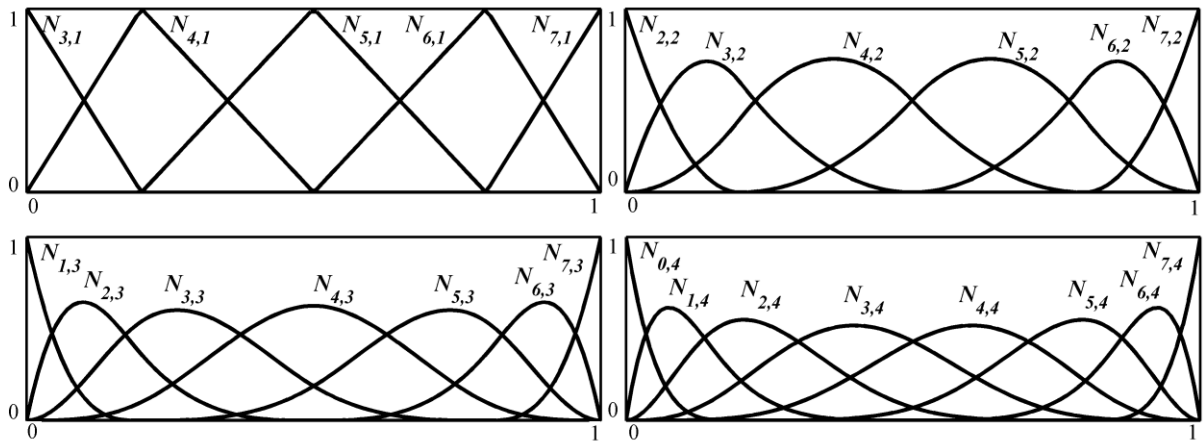
За отворене (укљештене или непериодичне) векторе чворова важи

$$\Theta = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\}. \quad (3.10)$$

Видимо да се код отворених вектора чворова прва и последња тачка криве подударају са првом и последњом тачком контролног полигона. У овој тези разматраћемо само отворене векторе чворова.

На слици 3.5. приказане су линеарне, квадратне, кубне и Б-сплајн базне функције четвртог степена. Б-сплајн базне функције поседују све особине Безијеових функција као и следеће особине:

- Свака базна функција p -тог степена $N_{i,p}$ има утицај на интервалу $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$, односно на $p+1$ чворних интервала. Ово својство назива се локална подршка.
- Базна функција степена p има $p-1$ континуалних дериватива у чворовима



Слика 3.5. - Линеарне, квадратне, кубне и Б-сплајн базне функције четвртог степена различите од нуле дефинисане на вектору чворова

$$\Theta = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, 0.2, 0.5, 0.8, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\}$$

Деривативе базних функција могуће је добити на више начина. Веома ефикасан алгоритам предложен у реф. [66], користи рекурзивну дефиницију базних

функција и рачуна деривативе на основу базних функција нижег реда. За полином степена p и вектор чворова Θ дериватив i -те базне функције дат је изразом:

$$\frac{d}{du} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3.11)$$

Виши деривативи дати су изразом:

$$\frac{d^k}{du^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (3.12)$$

Сређивањем претходног израза могуће је добити једначину за рачунање дериватива Б-сплајн базних функција у зависности само од базних функција нижег реда:

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}(\xi) \quad (3.13)$$

где су:

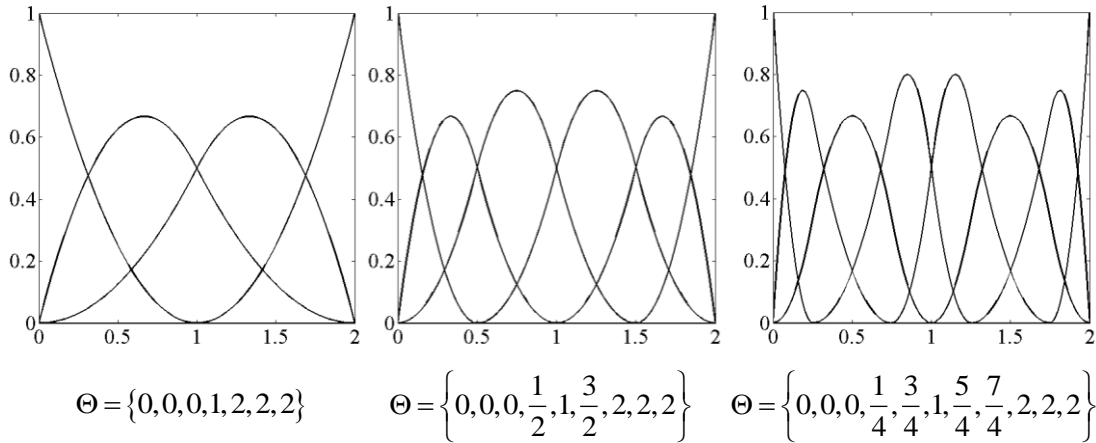
$$\begin{aligned} \alpha_{0,0} &= 1 \\ \alpha_{k,0} &= \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \\ \alpha_{k,j} &= \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}}, \quad j = 1, \dots, k-1. \\ \alpha_{k,k} &= \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.5 Модификације Б-сплајн базе

Б-сплајн базне функције могу се модификовати на неколико начина:

- Убацивањем нових чворова у вектор чворова
- Мењањем степена базних функција
- k -модификацијом

Убацавањем нових чворова у постојећи вектор чворова обогаћује се база тако да не долази до геометријске или параметарске промене резултујуће криве. На овај начин укупан параметарски домен дели се на више сегмената (слика 3.6).



Слика 3.6. - Убацавање нових чворова у вектор чворова

Уколико је $\Theta = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ убацавањем новог чвора $\bar{\xi} = [\xi_k, \xi_{k+1})$, $k > p$, у вектор чворова повећавамо број базних функција за 1. Како би једначина 3.6. била задовољена неопходно је да повећамо и број контролних тачака. Да не би дошло до промене криве, неопходно је да нове контролне тачке $\{\bar{P}_i\}_{i=1}^m$ буду дефинисане на основу првобитних контролних тачака $\{P_i\}_{i=1}^n$ на следећи начин:

$$\bar{P} = \begin{cases} P_1 & i = 1 \\ \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} & 1 < i < m, \\ P_n & i = m \end{cases} \quad (3.15)$$

где је

$$\alpha_i = \begin{cases} i & i \leq k - p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} & k - p + 1 \leq i \leq k, \\ 0 & i \geq k + 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Мењање степена базних функција постиже се мењањем многострукости чворова у вектору чворова. На овај начин мењамо степен полинома базних функција које користимо за конструисање криве. Приликом мењања степена базе, многострукост свих чворова у вектору чворова се мења али се не додају нове

вредности. Као и код убацивања нових чворова ни овом модификацијом базе не мењамо геометрију и параметризацију криве.

k -модификација је комбинација претходне две методе. Идеја је да се повећа и степен криве али и континуитет у чворовима. Најпре се подиже степен првобитних базних функција а затим се додавањем чворова добијају нове базне функције. Редослед операција је важан будући да се овим редоследом добија мањи број базних функција за исти почетни вектор чворова и исти жељени степен криве. К-модификација формулисана је са настанком изогеометријског метода [2].

3.6 NURBS

NURBS је скраћеница од енг. Non Uniform Rational B-Splines, тј. представљају неуниформне рационалне Б-сплајнове. NURBS криве и базне функције су генерализација Б-сплајн геометрије. Слично као и код рационалних Безијеових кривих, NURBS криву дефинишемо изразом:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(\xi) w_i}, \quad a \leq \xi \leq b, \quad (3.17)$$

где су w_i тежински коефицијенти а $N_{i,p}$ Б-сплајн базне функције дефинисане на неуниформном вектору чворова

$$\Theta = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\}. \quad (3.18)$$

Ако дефинишемо рационалне Б-сплајн базне функције као

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(\xi) w_j}, \quad (3.19)$$

можемо писати

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(\xi) P_i. \quad (3.20)$$

NURBS криве деле готово све особине одговарајућих нерационалних Б-сплајн кривих.

Коритећи тензорски производ можемо дефинисати NURBS површину степена p у ξ правцу и степена q у η правцу као:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) \mathbf{P}_{i,j} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}, \quad 0 \leq \xi, \eta < 1 \quad (3.21)$$

где су

$$\Theta = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\}, \quad \Xi = \left\{ \underbrace{c, \dots, c}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{s-q+1}, \underbrace{d, \dots, d}_{q+1} \right\} \quad (3.22)$$

неуниформни отворени вектори чворова и $r=n+p+1$, $s=m+q+1$.

Аналогно овоме, могуће је дефинисати и тродимензионалне NURBS солид објекте као

$$R(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k} \mathbf{P}_{i,j,k}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) N_{k,r}(\zeta) w_{i,j,k}}, \quad 0 \leq \xi, \eta, \zeta < 1 \quad (3.23)$$

Захваљујући могућности да представе практично све облике са егзактном математичком прецизношћу NURBS криве су дефакто стандард у савременим CAD пакетима.

3.7 Деривативи NURBS површи

Изводи NURBS површи добијају се диференцирањем израза 3.21. Први изводи NURBS површи фласе:

$$\begin{aligned} S_\xi &= \frac{\partial S(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{N_\xi}{N} - \frac{D_\xi}{D} \right) \\ S_\eta &= \frac{\partial S(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{N_\eta}{N} - \frac{D_\eta}{D} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

где су

$$\begin{aligned}
 \bar{N} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}(\xi) N_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\
 \bar{N}_{\xi} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N'_{\hat{i},p}(\xi) N_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\
 \bar{N}_{\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}(\xi) N'_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

У претходним изразима изводи базних функција $N'_{i,p}(\xi)$, $N'_{\hat{i},p}(\xi)$ и $N'_{\hat{j},q}(\eta)$, $N'_{j,q}(\eta)$ израчунавају се изразима 3.11.

Будући да ћемо у даљем раду користити више изводе NURBS површи, у прилогу А дати су изрази за више изводе NURBS површи по параметарским и глобалним координатама.

Глава 4

Моделовање ламинираних композитних структура

4.1 Увод

Математичко моделовање танкозидних структура има веома богату историју. У циљу упрошћавања диференцијалних једначина еласто-механике развијени су структурални модели плоча и љуски који су редуковали општи тродимензионални проблем еласто-механике на дводимензионални случај. Идеализовањем реалних структура, те разлагањем комплексног тродимензионалног напонско-деформационог стања на основне елементе као што су истезање, савијање, смицање итд. добијени су модели чија је анализа знатно упрошћена а резултати валидни у великом броју случајева.

Прву савремену теорију плоча поставио је Кирхоф 1850 на основу Ојлер-Бернулијеве теорије гредних носача. Након тога развијени су бројни напреднији модели као што је Миндлин-Рајзнерова теорија смицања првог реда те Редијева теорија смицања трећег реда (ТСТР). Развој нових модела, са напреднијим и компликованијим кинематским претпоставкама и другим побољшањима је и даље актуелан предмет научних истраживања.

Танкозидне ламиниране композитне конструкције су нехомогене и анизотропне па је конструисање, моделовање и инжењерска анализа оваквих конструкција знатно сложенија у поређењу са конструкцијама од конвенционалних инжењерских материјала. Услед анизотропности долази до везе између деформација у равни плоче са деформацијама ван равни плоче (нпр.

купловање савојних и затезних деформација). Нехомогеност захтева коришћење знатно компикованијих конститутивних модела док је формулација различитих хипотеза о слому посебно осетљив проблем будући да код композитних материјала може доћи до оштећења (деламинација, лом влакана или смоле, итд.) која се не јављају на металним структурама.

Зависно од разматраног проблема могуће је приступити анализи танкозидних композитних структура на различите начине. Теорије еквивалентног слоја базирају се на замени композитне плоче са статички еквивалентном једнослојном плочом, те одговарајућој глобалној апроксимацији померања, деформација и напона по дебљини плоче. Ове теорије дају добре резултате при анализи танких и умерено дебелих плоча.

За анализу дебелих плоча где се јављају проблеми деламинације користе се различите теорије слојева. Ови модели пружају тачнију кинематску репрезентацију понашања плоче али по цену знатно већег броја степени слободе.

Тродиментионална теорија еластичности је најопштија теорија за процену напонско-деформационог стања композитних конструкција. Иако је ова теорија најтачнија, њена нумеричка имплементација је изразито захтевна те се користи само у истраживачком раду приликом процене компикованих напонско-деформационих стања каква се јављају на слободним и укљештеним ивицама, отворима и другим местима са израженом појавом концентрације напона.

Од многобројних нумеричких техника за решавање граничних проблема, тј. парцијалних диференцијалних једначина и одговарајућих услова на контури, који настају математичком формулацијом проблема теорије еластичности, метод коначних елемената (МКЕ) показао се као најприлагодљивији потребама индустрије и као такав постао је оруђе великог броја инжењера и научника. Користећи МКЕ једначине еласто-механике се дискретизују, и континуални систем са бесконачно много степени слободе замењује се системом са коначним бројем степени слободе, односно парцијалне диференцијалне једначине замењују се са коначним бројем алгебарских једначина.

У овој глави дефинисаће се модели за анализу танкозидних композитних плоча, кинематика модела базираће се на теорији еквивалентног слоја различитог

реда а дискретне једначине методе коначних елемената ће се формирати методом помераја (деформација).

4.2 Кинематика површинских носача

4.2.1 Поље померања и деформација Кирхоф-Лавове плоче

Кирхоф-Лавова теорија плоча заснива се на следећим кинематским претпоставкама:

- праве линије управне на средњу површ остају праве након деформације
- праве линије управне на средњу површ остају управне на средњу површину након деформације
- током деформације не долази до промене дебљине плоче

Поље померања дефинисано је као

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где су (u, v, w) помераји тачака попречног пресека у (x, y, z) правцима а (u_0, v_0, w_0) су помераји тачака на средње површи. На слици 4.1. приказана је недеформисана и деформисана геометрија ивице Кирхоф-Лавове плоче.

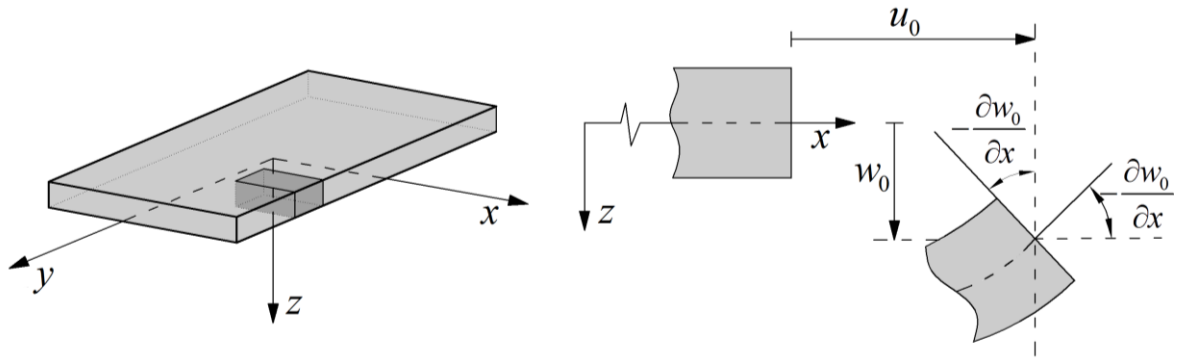
Једначину (4.1) можемо записати и у матричној форми на следећи начин:

$$\{u\} = [A_u] \{u_g\}, \quad (4.2)$$

где је

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

вектор помераја тачака попречног пресека, а



Слика 4.1. Кирхоф-Лавова плоча [25]

$$\{u_g\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

вектор помераја тачака које припадају средњој равни, матрица $[A_u]$

$$[A_u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 & -z \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Линеарне деформације плоче дефинишу се као:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.6)$$

Из израза (4.6.) видљиво је да Кирхоф-Лавова теорија плоча не узима у разматрање трансверзалне смичуће и трансверзалне нормалне напоне, односно да

компоненте вектора деформације чине само савојне и подужне деформације у равни плоче.

Погодно је користити и следеће изразе за раванске компоненте деформације:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\varepsilon^1\}, \quad (4.7)$$

где су матрице $\{\varepsilon\}_0$ и $\{\varepsilon^1\}$ дате релацијама

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{.xx}^0 \\ \varepsilon_{.yy}^0 \\ \gamma_{.xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{.xx}^1 \\ \varepsilon_{.yy}^1 \\ \gamma_{.xy}^1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (4.8)$$

4.2.2 Поље померања и деформација Миндлин-Рајзнерове плоче

За Миндлин-Рајзнерову теорију плоча важе следеће кинематске претпоставке:

- праве линије управне на средњу површ остају праве након деформације
- праве линије управне на средњу површ могу да ротирају
- током деформације не долази до промене дебљине плоче

Видимо да је у Миндлин-Рајзнеровој теорији дозвољена ротација пресека око неутралне линије што резултира следећим пољем померања:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.9)$$

где (u, v, w) и (u_0, v_0, w_0) имају исто значење као и у Кирхоф-Лавовој теорији док су са ψ_x и ψ_y означене ротације око y и x оса. На слици 4.2 приказана је недеформисана и деформисана геометрија ивице Миндлин-Рајзнерове плоче.

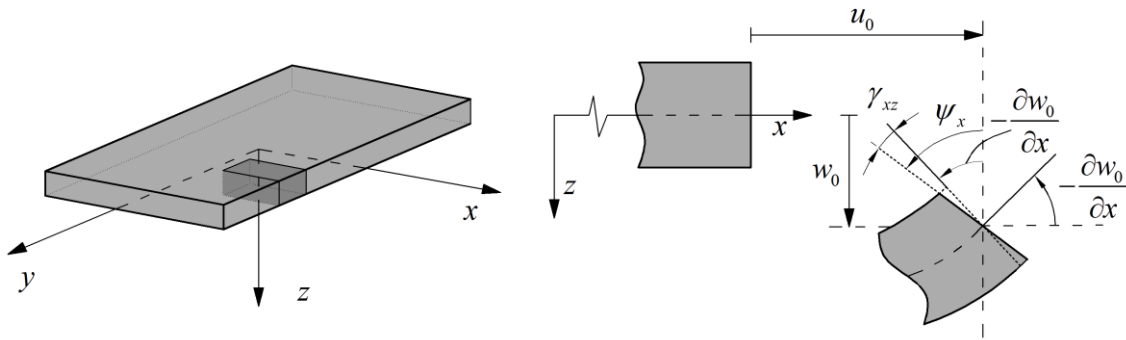
Поље померања у матричном запису претставља се као:

$$\{u\} = [A_u] \{u_g\}, \quad (4.10)$$

где вектор $\{u\}$ има исти облик као у Кирхоф-Лавовој теорији док су вектор $\{u_g\}$ и матрица $[A_u]$ дати изразима:

$$\{u_g\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

$$[A_u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$



Слика 4.2. Миндлин-Рајзнерова плоча [25]

Вектор деформације Миндлин-Рајзнерове плоче дат је изразом:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

Из израза (4.6.) видљиво је да Миндлин-Рајзнерова теорија плоча разматра само укупно дејство трансверзалних смичућих напона, односно да су трансверзални смичући напони константни у односу на z координату.

Уобичајено је да се вектор деформација раздвоји на компоненте у равни и трансверзалне компоненте. Раванске компоненте деформације записују се као:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}_0 + z\{\varepsilon\}_1, \quad (4.14)$$

где су матрице $\{\varepsilon\}_0$ и $\{\varepsilon\}_1$ дате релацијама

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad (4.15)$$

док се трансверзалне компоненте записују као:

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

4.2.3 Поље померања и деформација Редијеве плоче

Редијева теорија плоча предвиђа квадратну расподелу трансверзалних смичућих напона по дебљини плоче. У Редијевој теорији важе исте претпоставке као и код Кирхоф-Лавових плоча са том разликом да је приликом деформисања дозвољена деформација и ротација иницијално праве трансверзалне нормале на средњој површи. Поље померања Редијеве плоче дебљине h гласи:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\psi_x - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\psi_y - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.17)$$

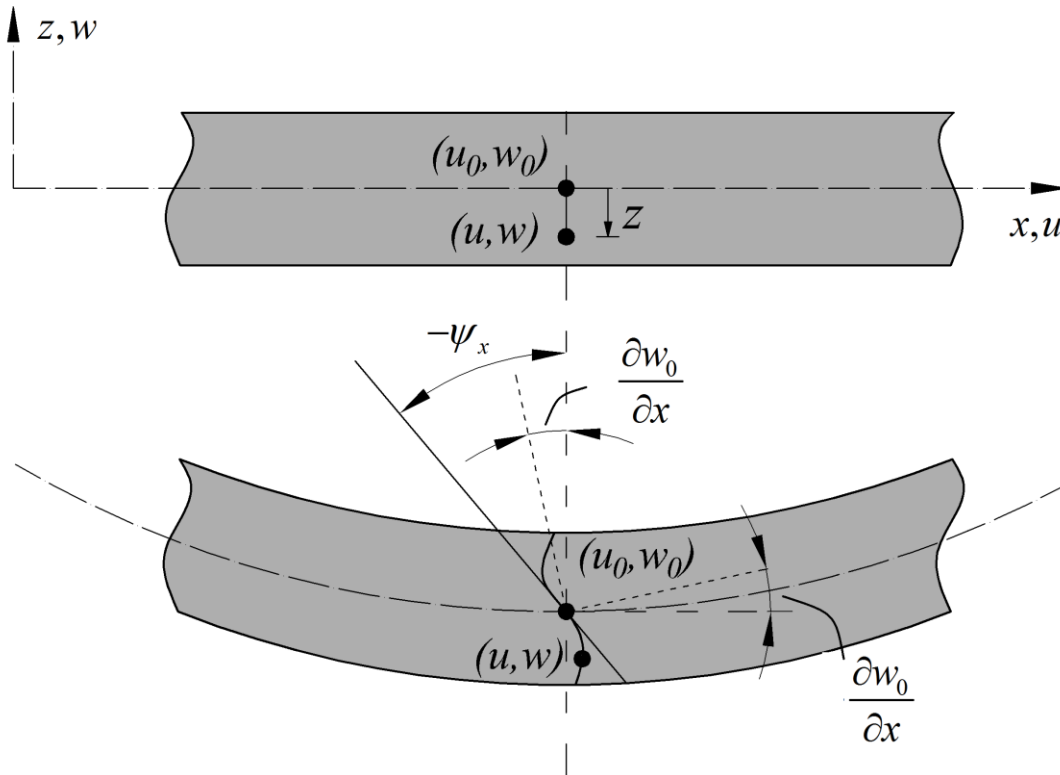
где $(u, v, w), (u_0, v_0, w_0)$ и (ψ_x, ψ_y) имају исто значење као и у Кирхоф-Лавовој теорији. На слици 4.3 приказана је недеформисана и деформисана геометрија ивице Редијеве плоче.

У матричном запису једначине (4.17.) гласе:

$$\{u\} = [A_u] \{u_g\}, \quad (4.18)$$

где вектори $\{u\}$ и $\{u_g\}$ имају исти облик као у Миндлин-Рајзнеровој теорији док је матрица $[A_u]$ дата изразом:

$$[A_u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3h^2} z^3 \frac{\partial}{\partial x} & z - \frac{4}{3h^2} z^3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3h^2} z^3 \frac{\partial}{\partial y} & 0 & z - \frac{4}{3h^2} z^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$



Слика 4.3. Редијева плоча [25]

Поље деформација дато је изразом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{4}{h^2} z^2 \left(\psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{4}{h^2} z^2 \left(\psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \end{array} \right\}. \quad (4.20)$$

Уколико вектор деформација разложимо на компоненте које делују у равни плоче и на трансверзалне компоненте, вектор деформација у равни плоче гласи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{array} \right\} + z^3 \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{array} \right\}. \quad (4.21)$$

где су чланови уз z^0, z^1, z^3 дати изразима

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\}, \quad (4.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{array} \right\},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^3 \\ \varepsilon_{yy}^3 \\ \gamma_{xy}^3 \end{Bmatrix} = \left(-\frac{4}{3h^2} \right) \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}.$$

Вектор трансверзалних деформација записујемо као:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix}. \quad (4.23)$$

где су

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = -\frac{4}{h^2} z^2 \begin{Bmatrix} \psi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \psi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (4.24)$$

4.3 Конститутивне једначине

Генерализовани Хуков закон успоставља везу између вектора напона и вектора деформација. Стање напона у тачки може се представити са девет компонената напона σ_{ij} где индекси узимају вредности ($i, j=1, 2, 3$). На сличан начин дефинисано је и стање деформација у тачки са девет компонената деформација ε_{ij} .

Генерализовани Хуков закон гласи:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ C_{3211} & C_{3222} & C_{3233} & C_{3223} & C_{3231} & C_{3212} & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1331} & C_{1312} & C_{1332} & C_{1313} & C_{1321} \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{Bmatrix}. \quad (4.25)$$

Услед симетрије тензора напона и деформација $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ и $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, односно $C_{ijkl} = C_{jikl}$

па се број коефицијената у матрици крутости редукује на 36. Уколико усвојимо конвенцију и заменимо индексе по следећем правилу $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, $23 \rightarrow 4$, $13 \rightarrow 5$ и $12 \rightarrow 6$ можемо записати:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 2C_{14} & 2C_{15} & 2C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 2C_{24} & 2C_{25} & 2C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 2C_{34} & 2C_{35} & 2C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & 2C_{44} & 2C_{45} & 2C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & 2C_{54} & 2C_{55} & 2C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 2C_{64} & 2C_{65} & 2C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}. \quad (4.26)$$

Код еластичних материјала, за које је могуће дефинисати потенцијал деформација, компоненте у матрици крутости у једначини (4.26) повезане су релацијом $C_{ij}=C_{ji}$ па се број независних еластичних коефицијената редукује на 21.

За ортотропне материјале услед постојања три равни материјалне симетрије број независних еластичних коефицијената се редукује на 9, односно:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}. \quad (4.27)$$

Код изотропних материјала постоји бесконачно много равни материјалне симетрије па се број независних еластичних коефицијената своди на 2.

У пракси уместо апстрактних еластичних константи, користе се инжењерске константе као што су Јунгов модул еластичности E , модул клизања (смицања) G , Поасонов коефицијент ν итд. Ови коефицијенти се мере једноставним експериментима па је њихова употреба општеприхваћена и оправдана.

За ортотропне материјале 9 независних инжењерских материјалних константи су Јунгови модули еластичности E_1, E_2, E_3 у правцима материјалних оса x_1, x_2 и x_3 , модули смицања G_{23}, G_{13} и G_{12} и Поасонов коефицијенти $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$.

Код изотропних материјала важиће $E_1=E_2=E_3=E$, $G_{23}=G_{13}=G_{12}=G$, $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=\nu$ и $E=2G(1+\nu)$.

Како разматрамо случај равнoг стања напона, конститутивне једначине између компоненти вектора напона и вектора деформација за k -ту ламину (слој) у локалном координатном систему ламине (x_1, x_2, x_3) гласе:

$$\{\sigma\}^{\{k\}} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}^{\{k\}} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}^{\{k\}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}^{\{k\}}, \quad (4.28)$$

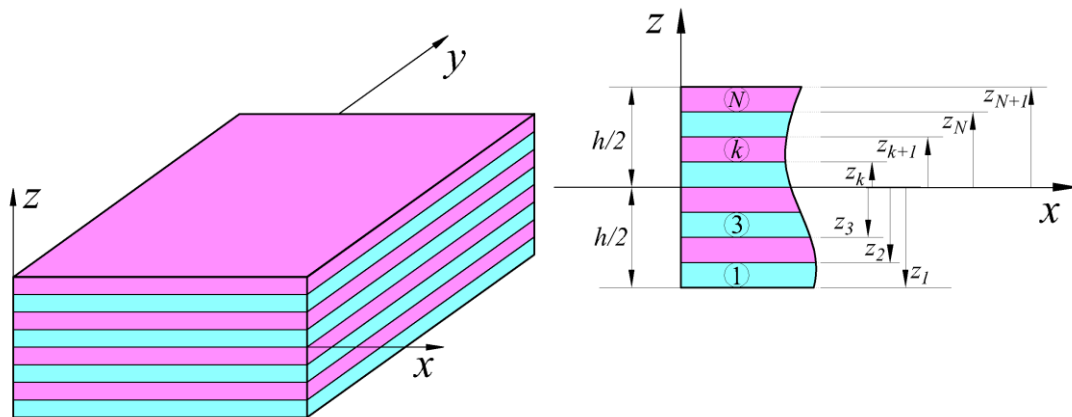
$$\{\tau\}^{\{k\}} = \begin{Bmatrix} \tau_4 \\ \tau_5 \end{Bmatrix}^{\{k\}} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}^{\{k\}} \begin{Bmatrix} \gamma_5 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix}^{\{k\}}. \quad (4.29)$$

Величине Q_{ij} називају се равански редуковане компоненте матрице крутости и у зависности од особина сваког слоја дате су изразима:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}, & Q_{22}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}, & Q_{66}^{(k)} &= G_{12}^{(k)}, \\ Q_{12}^{(k)} &= \frac{\nu_{12}^{(k)}E_2^{(k)}}{1-\nu_{12}^{(k)}\nu_{21}^{(k)}}, & Q_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)}, & Q_{55}^{(k)} &= G_{13}^{(k)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

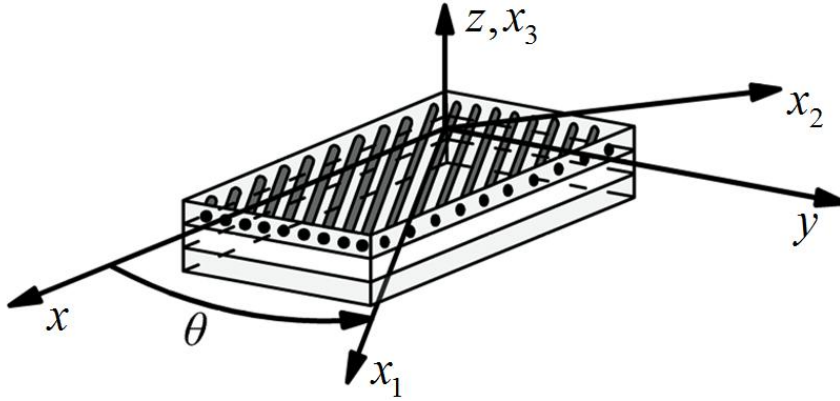
где су са $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}$ означени Јунгови модули еластичности, са $\nu_{12}^{(k)}, \nu_{21}^{(k)}$ Поасонови коефицијенти и са $G_{12}^{(k)}, G_{13}^{(k)}, G_{32}^{(k)}$ модули смицања ламине k .

Композитни ламинати уобичајено су направљени од више ортотропних слојева различите оријентације. На слици 4.4 приказан је координатни систем ламината и нумерисање слојева (ламина). Ламинат се састоји од N ламина (слојева), који у општем случају могу бити направљени од различитих материјала, те имати различите дебљине и оријентације.



Слика 4.4. Нумерисање чворова и координатни систем ламината.

Оса x_1 локалног координатног система ламине усмерена је у правцу влакана ламине, оса x_2 је нормала у равни, док је оса x_3 нормална на раван слоја. Оса глобалног координатног система ламината x са x_1 осом локалног координатног система ламине заклапају угао θ . Оса z глобалног и оса x_3 локалног координатног система су паралелне као што је приказано на слици 4.5.



Слика 4.5. Локални и глобални координатни систем ламината

Конститутивне једначине ламине у ламинатном (x, y, z) координатном систему изражавају се као:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^{\{k\}} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{\{k\}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{\{k\}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{\{k\}} \\ \{\tau\}^{\{k\}} &= \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{\{k\}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{\{k\}} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{\{k\}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

где су компоненте матрице крутости у једначини (4.31) дате изразима :

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{22} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{66} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{16} &= m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} + (mn^3 - m^3 n) Q_{12} + 2(mn^3 - m^3 n) Q_{66} \\ \bar{Q}_{26} &= mn^3 Q_{11} - m^3 n Q_{22} + (m^3 n - mn^3) Q_{12} + 2(m^3 n - mn^3) Q_{66} \\ \bar{Q}_{66} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} - 2m^2 n^2 Q_{12} + (m^2 - n^2)^2 Q_{66} \\ \bar{Q}_{44} &= m^2 Q_{44} + n^2 Q_{55} \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) mn \\ \bar{Q}_{55} &= m^2 Q_{55} + n^2 Q_{44} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Приликом анализе ламината уобичајено је да се у пракси уместо напона користе резултанте напона које се дефинишу као интеграл напона по дебљини ламината. Резултанте напона исказујемо у јединицама сила/дужина. Да би ламинат могли да моделујемо теоријом еквивалентног слоја, неопходно је да су испуњени следећи услови:

- Слојеви пријањају савршено један за други
- Материјал сваког слоја је линеарно еластичан и ортотропан
- Дебљина сваког слоја је униформна
- Померања и деформације су мале
- Трансверзални смичући напони на горњој и доњој површини ламината једнаки су нули

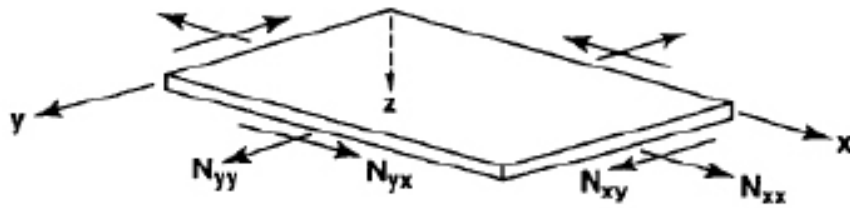
Услед различитих кинематских формулација за различите теорије еквивалентног слоја, изрази за резултанте напона разликују се за различите типове плоче.

4.3.1 Крутост ламината са Кирхоф-Лавовом формулацијом

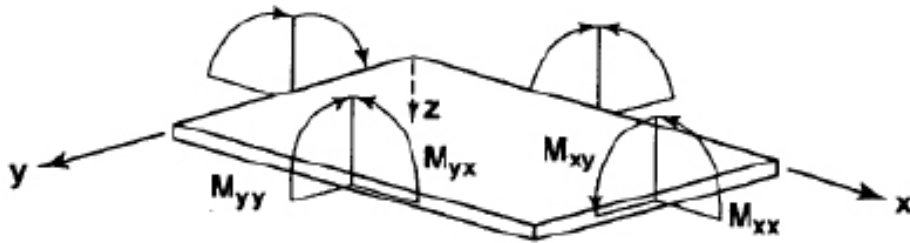
За Кирхоф-Лавов ламинат, будући да се трансверзални напони не разматрају, резултанте напона дате су изразима:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{\{k\}} dz, \\ \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{\{k\}} z dz. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Величине N_{ij} називају се резултанте силе у равни плоче, док се величине M_{ij} називају резултанте момента. На слици 4.6. приказане су резултујуће силе и моменти дуж ивица ламината.



Слика 4.6. Резултанте напона Кирхоф-Лавове плоче



Слика 4.7. Резултанте момента Кирхоф-Лавове плоче

За Кирхоф-Лавов ламинат конститутивне једначине гласе:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{Bmatrix}. \quad (4.34)$$

где је

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (1, z, z^2) dz. \quad (4.35)$$

односно,

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned} \quad (4.36)$$

где су индекси $ij=1,2,6$.

Чланови матрице крутости ламината, матрице A, B, D су 3×3 симетричне матрице, матрица A назива се екстензиона круост, матрица D је савојна круост док матрице B представљају савојно-екстензиону круост.

4.3.2 Крутост ламината са Миндлин-Рајзнеровом формулацијом

За ламинат са Миндлин-Рајзнеровом формулацијом резултанте сила у равни и момената одговарају изразима из Кирхоф-Лавове ламинатне теорије док су резултанте трансверзалних сила дефинисане као:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz = k_s \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz, \quad (4.37)$$

где је k_s корекциони фактор за смицање.

Поље померања Миндлин-Рајзнеровог ламината резултује константном расподелом трансверзалних смичућих деформација по дебљини ламината што узрокује и константну расподелу трансверзалних смичућих напона. Будући да трансверзални смичући напони на горњој и доњој површини ламината морају бити једнаки нули и да морају да варирају бар по квадратној расподели по дебљини ламината неопходно је кориговати трансверзалне смичуће напоне што је управо и циљ увођења корекционих фактора за смицање. Корекциони фактори за смицање зависе од начина ламинације и геометрије плоче као и од граничних услова и оптерећења ламината па их је тешко одредити за произвољно ламиниране композитне структуре. Вредности корекционих смичућих фактора најчешће се рачунају преко смичуће енергије деформације, тако да она одговара смичућој енергији деформације тродимензионалне теорије еластичности. На овај начин, за изотропну плочу добија се вредност $k_s=5/6$. Одређивање корекционог фактора смицања за ламинате нерешено је питање и још увек актуелан проблем у истраживачкој заједници. За одређен број случајева вредност k_s може се пронаћи у литератури, али у општем случају она није позната. Како корекциони фактор за смицање мало утиче на глобални одзив ламината (осим у случају дебелих ламината) уобичајено је да се при анализи ламината користи корекциони фактор за смицање за изотропне плоче.

За Миндлин-Рајзнеров ламинат конститутивне једначине дате су изразом

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \end{Bmatrix}, \quad (4.38)$$

$$\{Q\} = [A^s] \{\gamma_0\}$$

где је

$$(A_{ij}^S) = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz, \quad i, j = 4, 5. \quad (4.39)$$

матрица A^S такође представља екстензиону крутост.

4.3.3 Крутост ламината са Редијевом формулацијом

За ламинат са Редијевом формулацијом, услед постојања чланова вишег реда у кинематским једначинама, конститутивне једначине су сложене и дате су следећим изразом:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ P \\ Q \\ R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & E & 0 & 0 \\ B & D & F & 0 & 0 \\ E & F & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^S & D^S \\ 0 & 0 & 0 & D^S & F^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_0 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix}. \quad (4.40)$$

где резултанте сила у равни, трансверзалних сила и момената одговарају изразима из Кирхоф-Лавове и Миндлин-Рајзнерове ламинатне теорије док су моменти вишег реда и смичући чланови вишег реда:

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} z^3 dz, \quad (4.41)$$

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} z^2 dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} z^2 dz.$$

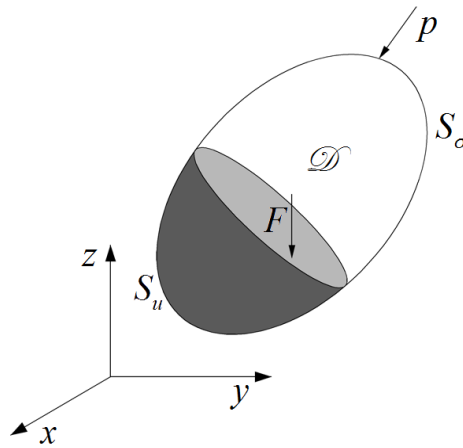
Примећујемо да у Редијевој ламинатној теорији не користимо корекционе факторе за смицање што је последица усвојене кинематике ламината. Поље померања формулисано је тако да омогући квадратну расподелу трансверзалних смичућих напона по дебљини ламината, па је и услов да трансверзални смичући напони на горњој и доњој површини ламината буду једнаки нули задовољен.

У конститутивној једначини ламината, елементи матрице крутости ламината, чланови A, B, D, A^S , одговарају изразима из Кирхоф-Лавове ламинатне теорије и Миндлин-Рајзнерове ламинатне теорије, док су нови чланови дефинисани као:

$$\begin{aligned} (E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}) &= \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z^3, z^4, z^6) dz, \quad i, j = 1, 2, 6, \\ (D_{ij}^s, F_{ij}^s) &= \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z^2, z^4) dz, \quad i, j = 4, 5. \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.4 Диференцијалне једначине равнотеже

Посматрамо тело \mathcal{D} које је ограничено контуром S тако да су на делу контуре S_σ задати контурни услови по силама а на делу контуре S_u контурни услови по померањима.



Слика 4.8. Материјално тело \mathcal{D}

Инфинитезимални делић у унутрашњости материјалног тела \mathcal{D} под дејством запреминских сила (слика 4.8) биће у равнотежи ако је задовољено:

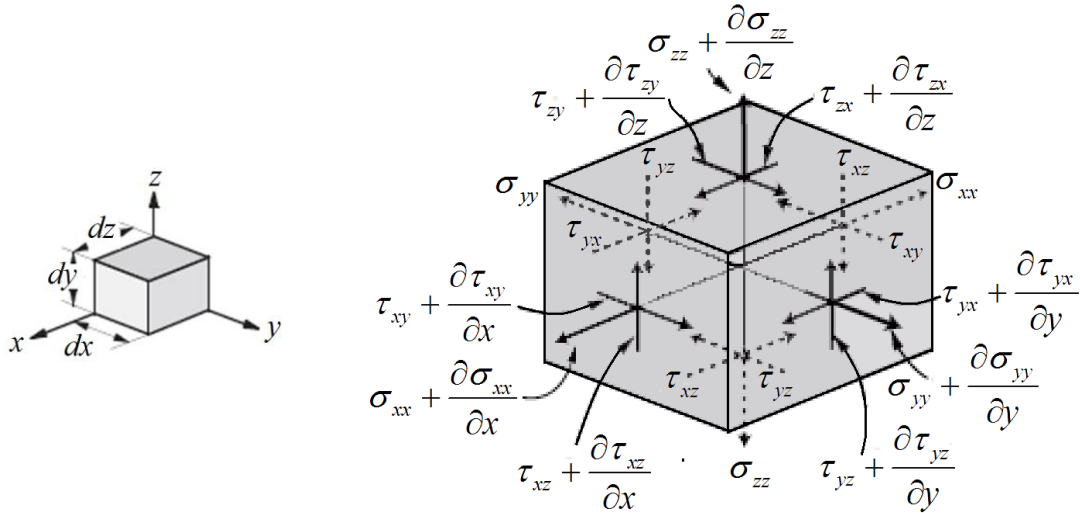
$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + \rho F_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + \rho F_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho F_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

односно у матричном облику

$$[L_2]\{\sigma\} + \{F\} = 0, \quad (4.44)$$

где је $[L_2]$ матрица диференцијалних оператора дата изразом

$$[L_2] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$



Слика 4.9. Напони на страницама диференцијално малог паралопипеда

Услови равнотеже на делу контуре S_σ где су задати контурни услови по силама дати су Кошијевим једначинама (слика 4.9):

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} \cos \theta_x + \sigma_{yx} \cos \theta_y + \sigma_{zx} \cos \theta_z &= p_x \\ \sigma_{yx} \cos \theta_x + \sigma_{yy} \cos \theta_y + \sigma_{yz} \cos \theta_z &= p_y, \\ \sigma_{zx} \cos \theta_x + \sigma_{zy} \cos \theta_y + \sigma_{zz} \cos \theta_z &= p_z \end{aligned} \quad (4.46)$$

где су $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ косинуси углова које нормала n у тачкама контуре заклапа са осама x, y, z а p_x, p_y, p_z површинске силе. У матричном облику Кошијеве једначине се записују:

$$[G]\{\sigma\} + \{p\} = 0, \quad (4.47)$$

где је

$$[G] = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & 0 & 0 & \cos \theta_y & 0 & \cos \theta_z \\ 0 & \cos \theta_y & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_z & 0 & \cos \theta_y & \cos \theta_x \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Контурни услови по померањима на делу контуре S_u дати су изразима:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix}, \quad (4.49)$$

односно

$$\{u\} = \{\tilde{u}\}, \quad (4.50)$$

где је $\{\tilde{u}\}$ вектор задатих померања.

4.4.1 Варијациона формулација основних једначина статике

Проблеме теорије еластичности формулишемо или као гранични проблем, преко система парцијалних диференцијалних једначина и одговарајућих контурних услова или помоћу функционала изведених преко варијационих принципа. Основни варијациони принципи у механици деформабилних тела формулисани су на основу закона о одржању енергије и то су принцип виртуалног рада и принцип комплементарног виртуалног рада.

Принцип виртуалног рада у статичком случају гласи: Деформабилно тело је у равнотежи ако и само ако је виртуални рад свих сила, унутрашњих и спољашњих, које делују на тело при виртуалном померању једнак нули.

$$\delta W = \delta W_U + \delta W_S = 0. \quad (4.51)$$

Под ројмом виртуалних померања подразумевају се могућа бесконачно мала померања која су непрекидне и диференцијабилне функције координата тачака тела и која су једнака нули у свим оним тачкама контуре у којима су задати контурни услови по померањима.

Рад унутрашњих сила одговара енергији деформисања и дат је изразом:

$$W_U = A_S = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV. \quad (4.52)$$

где је са $\{\varepsilon\}$ означен вектор деформација, а са A_S енергија деформације. Уколико искористимо конститутивну једначину и водећи рачуна да је матрица крутости симетрична $D=D^T$ израз се трансформише:

$$W_u = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [\mathbf{D}] \{\varepsilon\} dV . \quad (4.53)$$

У случају да се разматрају еластична тела за које је могуће дефинисати потенцијалну енергију деформације као потенцијал напона, те да су спољашње силе конзервативне, односно да постоји њихов потенцијал, укупну потенцијалну енергију система можемо дефинисати као

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [\mathbf{D}] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_{S_\sigma} \{u\}^T \{p\} dS . \quad (4.54)$$

Израз за тоталну потенцијалну енергију система (4.54) назива се и функционал Лагранжа. За еластична тела под дејством конзервативних сила, принцип виртуалног рада трансформише се у принцип о минимуму потенцијалне енергије: Пољу померања које задовољава геометријске контурне услове и за које потенцијална енергија има минимум, одговара поље напона које задовољава услове равнотеже. Укупна потенцијална енергија има екстремну вредност када је њена прва варијација једнака нули:

$$\delta \Pi = 0 , \quad (4.55)$$

Коришћењем варијационог рачуна добијамо израз

$$\delta \Pi = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T [\mathbf{D}] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\delta u\}^T \{F\} dV - \int_{S_\sigma} \{\delta u\}^T \{p\} dS = 0 , \quad (4.56)$$

где су:

$\{\delta u\}$ - вектор виртуалних померања

$\{\sigma\}$ - вектор напона

$\{F\}$ - вектор спољашњих запреминских сила

$\{p\}$ - вектор спољашњих површинских сила

S_σ - део контуре тела на коме су задати гранични услови по силама.

4.4.2 Варијациона формулација основних једначина динамике

Принцип виртуалног рада у динамичком случају за еластична тела под дејством конзервативних сила изражава се Хамилтоновим принципом:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi) dt = 0. \quad (4.57)$$

где је δT прва варијација кинетичке енергије тела при виртуалном померању а $\delta \Pi$ прва варијација потенцијалне енергије. Прва варијација тоталне потенцијалне енергије тела дата је једначином 4.56. Израз за кинетичку енергију гласи:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{u}\}^T \rho \{\dot{u}\} dV, \quad (4.58)$$

где је са ρ означена густина тела а са $\{\dot{u}\}$ вектор брзина тачака.

Прва варијација кинетичке енергија тела при виртуалном померању дата је изразом:

$$\delta T = \int_V \{\delta \dot{u}\}^T \rho \{\dot{u}\} dV, \quad (4.59)$$

4.4.3 Варијациона формулација основних једначина линеарне стабилности

У досадашњој анализи сматрано је да су померања и деформације тела мале и да је њихова зависност линеарна те није узимана у обзир промена геометрије структуре, односно једначине равнотеже успостављали смо на недеформисаној конфигурацији тела. Да бисмо изучавали проблем еластичне стабилности тела неопходно је да у разматрање укључимо постојање геометријске нелинеарности, односно да успоставимо нелинеарну везу између померања и деформација. Вектор деформација записујемо као збир линеарног ε_L и нелинеарног дела ε_N :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_N\}. \quad (4.60)$$

где су:

$$\{\varepsilon_L\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{Bmatrix}, \{\varepsilon_N\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right) \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

Са овако дефинисаним вектором деформација израз за енергију деформисања се трансформише у:

$$A_s = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon_L\}^T [D] \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_N\}^T [D] \{\varepsilon_N\} + \{\varepsilon_N\}^T [D] \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_L\}^T [D] \{\varepsilon_N\} \right) dV. \quad (4.62)$$

При разматрању бифуркационе стабилности занемарујемо трећи члан у једначини (4.62), и уз вођење рачуна да је $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} = [D] (\{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_N\})$, добијамо:

$$A_s = \frac{1}{2} \int_V \left(\{\varepsilon_L\}^T [D] \{\varepsilon_L\} + \{\sigma\}^T \{\varepsilon_N\} \right) dV. \quad (4.63)$$

односно:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon_N\} dV - \int_V \{u\}^T \{F\} dV - \int_{S_\sigma} \{u\}^T \{p\} dS. \quad (4.64)$$

4.5 Апроксимативне методе

Решења основних једначина еластомеханике односно одговарајућих варијационих формулација у математичком смислу егзистирају као једнозначна али је њихово аналитичко решавање готово немогуће у општем случају. Један од

алтернативних начина за решавање проблема теорије еластичности је тражење приближних решења користећи се апроксимативним методама.

Класичне варијационе методе апроксимације (метода Рица (Ritz), Канторовића) траже тачно решење проблема тако да оно даје екстремну вредност одговарајућем функционалу проблема. Да би се користила ова метода неопходно је да за посматрани проблем можемо да дефинишемо одговарајуће функционале. Полазећи од функционала, претпоставља се решење у облику апроксимативних функција. Увођењем апроксимативних функција у одговарајући функционал проблема, применом варијационог рачуна и ставова о екстремалним својствима функционала добија се апроксимативно решење проблема.

Методe резидуума (метода Галеркина (Galerkin), колокационе методе) полазе од диференцијалних једначина проблема и заснивају се на одступању апроксимативног од тачног решења. Заменом апроксимативних функција у диференцијалну једначину дефинише се одступање или резидуум као разлика између тачног и апроксимативног решења, а потом се захтева услов минимума резидуала и на тај начин добија апроксимативно решење проблема.

4.5.1 Метода Галеркина

Гранични проблем дефинисан диференцијалним једначинама и одговарајућим контурним условима познат је и као класични или јаки облик граничног проблема будући да се захтева регуларност решења која је за већину проблема сувише јака. Диференцијалне једначине граничног проблема можемо приказати као општу функционалну зависност облика

$$L(u) = f, \quad (4.65)$$

где су $u=u(x_i)$ непознате, $f(x_i)$ познате функције а L диференцијални оператор над функцијама $u(x_i)$.

Ако усвојимо апроксимативно решење у облику реда

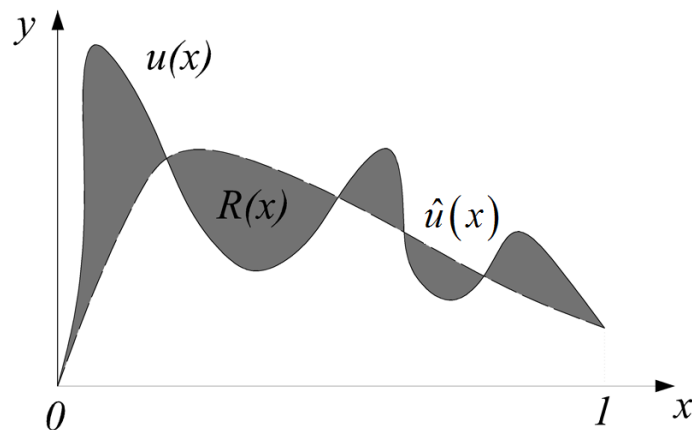
$$\hat{u}(x_i) = \sum_m c_m \varphi_m(x_i), \quad (4.66)$$

где су c_m непознати параметри а φ_m познате функције које називамо апроксимативне функције (базне функције, функције облика). Од апроксимативних функција захтевамо да задовољавају контурне услове задане по померањима.

Резидуум (одступање) дефинишемо као разлику између тачног и апроксимативног решења:

$$R = L(u) - L(\hat{u}) = f - L(\hat{u}), \quad (4.67)$$

Захтева се да вредност резидуала буде минимум. На слици 4.10. приказана је разлика апроксимативног решења $\hat{u}(x)$ и тачног решења $u(x)$ у свакој тачки разматраног домена, уколико би резидуал био једнак нули у свакој тачки домена значило би да је наше апроксимативно решење уствари тачно решење проблема које у општем случају не можемо да нађемо аналитички.



Слика 4.10. Графички приказ резидуала у свакој тачки домена (растојање између две криве) и укупни резидуал (осенчена површина)

За практичне потребе, довољно је применити слабије услове за тражене функције и њихове изводе па је могуће дефинисати слабу или варијациону формулацију проблема. У методама резидуума не захтевамо стриктно да резидуал буде једнак нули у свакој тачки домена већ да укупни резидуал буде једнак нули у неком осредњеном смислу преко целог домена. Ово постижемо тако што у свакој тачки домена množимо резидуал тежинским коефицијентима и захтевамо да укупни резидуал нестане. Расподелу тежинских коефицијената по домену описујемо тежинским функцијама (пробним или варијационим функцијама)

$w(x_i)$. Математички, у континуалном домену D , метод резидуума изражавамо изразом

$$\begin{aligned} I &= \int_D w(x_i) \cdot R(x_i) dD = 0 \\ \int_D w(x_i) \cdot f dD &= \int_D w(x_i) \cdot L(\hat{u}) dD \end{aligned} \quad (4.68)$$

Од тежинских функција захтевамо да су једнаке нули у тачкама домена где су контурни услови задати по померањима.

Видимо да решење овог проблема не зависи само од избора апроксимативних функција већ и од избора тежинских функција. Зависно од избора тежинских функција разликујемо различите методе резидуума. Код Галеркинове методе тежинске функције дефинишемо на основу апроксимативних функција

$$w_m(x_i) = \frac{\partial \hat{u}(x_i)}{\partial c_m} = \varphi_m(x_i), \quad (4.69)$$

односно тежинске функције одговарају апроксимативним функцијама.

Галеркинова метода као ни остале методе резидуума не захтевају постојање функционала за разматрани гранични проблем и могу се применити на било који гранични проблем. Код проблема еластомеханике формулација граничног проблема Галеркиновом методом одговара варијационој формулацији добијеној на основу принципа виртуалног рада односно, за еластична тела, принципу о минимуму тоталне потенцијалне енергије.

4.5.2 Метода коначних елемената

Наведене класичне апроксимативне методе дефинишу апроксимативне функције на целом разматраном домену. У случају комплексне геометрије, дисконтинуалних оптерећења, материјалних карактеристика исл. избор апроксимативних функција је веома сужен а често и немогућ.

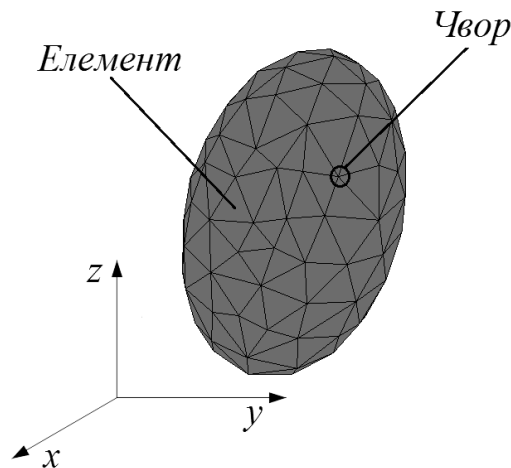
Метод коначних елемената ослања се на класичне апроксимативне методе, али дефинише апроксимативне функције на поддоменима на које је целокупан домен растављен па може да се каже да је МКЕ Галеркинов метод ког кога су апроксимативне функције дефинисане по сегментима домена. Ове функције су

најчешће полиномне, будући да се према Вајерштрасовој апроксимационој теореме свака континуална функција дефинисана на затвореном интервалу може апроксимирати до жељене тачности полиномним функцијама. Такође полиноми спадају у најједноставније функције које се лако евалуирају на рачунарима. У класичној МКЕ облик структуре представља се као скуп коначних елемената, где су елементи уобичајено параметарски.

Размотрићемо основе МКЕ формулисаног методом помераја (деформације) које су неопходне за разумевање изогеометријске методе.

Метода помераја заснива се на принципу о минимуму тоталне потенцијалне енергије система. Уколико погледамо једначину (4.56) примећујемо да су једине непознате величине компоненте померања и деформација. Ако је позната релација између померања и деформација, одређивањем функција померања које задовољавају услове равнотеже и услове на контури нашли смо решење граничног проблема.

Основна идеја је да се разматрани домен D подели на коначан број малих делова - коначних елемената, који су међусобно повезани у одређеном броју тачака које називамо чворови.



Слика 4.11. Мрежа коначних елемената

Претпостављамо да се померања унутар било које тачке коначног елемента могу на одређен начин представити преко параметара померања у чворовима те

тако проблем одређивања поља померања у области D сводимо на одређивање коначног броја параметара померања у чворовима

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(q_i) \\ f(q_i) \\ f(q_i) \end{Bmatrix}, i = 1 \dots k, \quad (4.70)$$

где је k број елемената у чворовима.

Параметри померања у чворовима коначног елемента (степени слободе) дефинисани су зависно од проблема који се разматра. За четвороугаони коначни елемент са чворовима у теменима вектор параметара у чворовима за елемент (k) гласи

$$\{q\}_{(k)} = \{q_i \quad q_j \quad q_m \quad q_n\}_{(k)}^T, \quad (4.71)$$

Уколико као степене слободе усвојимо померања у чворовима, вектор параметара у чвору r у тродимензионалном случају гласи:

$$\{q_r\} = \{q_{rx} \quad q_{ry} \quad q_{rz}\}^T, \quad (4.72)$$

Померања у произвољној тачки коначног елемента приказују се у зависности од параметара померања у чворовима. Те зависности се успостављају помоћу интерполационих функција (ове функције у литератури називају се још и функције облика, базне функције, апроксимативне функције)

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{Bmatrix} = [N]\{q\}_{(k)} = \sum_i N_i q_i, \quad (4.73)$$

где је $[N]$ матрица интерполационих функција.

Компоненте деформација добијају се према њиховој дефиницији, диференцирањем поља померања односно применом одговарајућих матрица оператора над матрицом интерполационих функција, па је вектор деформација представљен изразом:

$$\{\varepsilon\}_{(k)} = [L][N]\{q\}_{(k)} = [B]\{q\}_{(k)} \quad (4.74)$$

где је L матрица оператора која у линеарном тродимензионалном случају гласи:

$$[L] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T. \quad (4.75)$$

Лагранжев функционал за један коначни елемент гласи

$$\Pi_{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \{q\}_{(k)}^T [B]^T [D] [B] \{q\}_{(k)} dV - \int_V \{q\}_{(k)}^T [N]^T \{F\} dV - \int_{S_\sigma} \{q\}_{(k)}^T [N]^T \{p\} dS. \quad (4.76)$$

односно ,

$$\Pi_{(k)} = \frac{1}{2} \{q\}_{(k)}^T [k]_{(k)} \{q\}_{(k)} - \{q\}_{(k)}^T \{f\}_{(k)}. \quad (4.77)$$

где су

$$[k]_e = \int_V [B]^T [D] [B] dV - \text{матрица крутости елемента}$$

$$\{f\}_e = \int_V [N]^T \{F\} dV + \int_{S_\sigma} [N]^T \{p\} dS - \text{вектор чворних сила који садржи утицаје}$$

запреминских сила у елементу и површинских сила на контури.

Потенцијална енергија система коначних елемената једнака је суми потенцијалних енергија елемената:

$$\Pi = \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{2} \{q\}_{(k)}^T [k]_e \{q\}_{(k)} - \{q\}_{(k)}^T \{f\}_e \right). \quad (4.78)$$

Ако са $\{q\}$ означимо глобални вектор параметара померања у чворовима, са $[K]_{e(k)}$ означимо матрицу крутости елемента у глобалном координатном систему сагласно ознакама чворова у глобалном вектору померања а са $\{Q\}_{e(k)}$ вектор чворних сила у глобалном координатном систему сагласно ознакама чворова у глобалном вектору померања. Једначина (4.52) се сада трансформише у израз:

$$\Pi = \{q\}^T \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M [K]_{e(k)} \{q\} - \sum_{k=1}^M \{Q\}_{e(k)} \right) \quad (4.79)$$

$$\Pi = \{q\}^T \left(\frac{1}{2} [K] \{q\} - [Q] \right).$$

Варијацијом овог израза и применом става о минимуму потенцијалне енергије добијамо:

$$\delta\Pi = \{\delta q\}^T \frac{\partial\Pi}{\partial\{q\}} = \{\delta q\}^T ([K]\{q\} - \{Q\}) = 0. \quad (4.80)$$

Како је $\{\delta q\}$ произвољна вредност, да би претходна једначина била задовољена мора да важи

$$[K]\{q\} - \{Q\} = 0. \quad (4.81)$$

где је

$$[K] = \sum_{k=1}^M [K_e]_{(k)} - \text{глобална матрица крутости система,}$$

$$\{Q\} = \sum_{k=1}^M \{Q_e\}_{(k)} - \text{глобални вектор чворних сила,}$$

$\{q\}$ - глобални вектор померања у чворовима.

Ова једначина представља основну једначину статике МКЕ.

За случај слободних вибрација, израз за кинетичку енергију елемента записујемо у облику

$$T_{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{q}\}_{(k)}^T [N]^T \rho [N] \{\dot{q}\}_{(k)} dV, \quad (4.82)$$

где је $\{\dot{q}\}$ вектор брзина у чворовима а ρ густина тела. Односно

$$T_{(k)} = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_{(k)}^T [m] \{\dot{q}\}_{(k)}, \quad (4.83)$$

где је матрица масе елемента дата изразом

$$[m]_{(k)} = \int_V [N]^T \rho [N] dV. \quad (4.84)$$

У одсуству дејства спољашњих сила, израз за потенцијалну енергију гласи

$$\Pi = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}. \quad (4.85)$$

Користећи дефиниције

$$\delta T = \{\delta \dot{q}\}^T \frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}}, \quad \{\delta \dot{q}\} = \delta \left(\frac{d\{q\}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \{\delta q\} \quad (4.86)$$

и интеграцију по деловима, израз за варијацију кинетичке енергије добијамо у облику

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\{\delta \dot{q}\}^T \frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}} \right) dt = \left[\{\delta q\}^T \frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\{\delta q\}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}} \right) \right) dt. \quad (4.87)$$

Будући да је први члан у претходној једначини једнак нули јер је $\{\delta q\} = 0$ у тренутцима t_1 и t_2 , Хамилтонов принцип (4.57) можемо записати:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(-\{\delta q\}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}} \right) - \{\delta q\}^T \frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}} \right) dt = 0. \quad (4.88)$$

Како су елементи вектора $\{\delta q\}$ произвољни и независни следи да је

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}} \right) - \frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}} = 0, \quad (4.89)$$

како је

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{q}\}} \right) = \frac{d}{dt} ([m]\{\dot{q}\}_{(k)}) = [m]\{\ddot{q}\}_{(k)}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}} = [K]\{q\} \quad (4.90)$$

добиамо израз

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0. \quad (4.91)$$

За хармонијско кретање важи

$$\{q\} = \{\bar{q}\} \sin \omega t. \quad (4.92)$$

где су амплитуде $\{\bar{q}\}$ независне од времена а ω је фреквенција, односно резултујућа матрична једначина гласи

$$([M] - \omega^2 [K])\{\bar{q}\} = 0. \quad (4.93)$$

где је

$[M]$ -глобална матрица маса система

$[K]$ -глобална матрица крутости система

ω - сопствена фреквенција или сопствена вредност система

Код испитивања бифуркационе стабилности конструкција израз за потенцијалну енергију елемента добија се из једначине (4.64) :

$$\Pi_{(k)} = \frac{1}{2} \{q\}_{(k)}^T [k]_{(k)} \{q\}_{(k)} + \frac{1}{2} \{q\}_{(k)}^T [k_g]_{(k)} \{q\}_{(k)} - \{q\}_{(k)}^T \{f\}_{(k)}, \quad (4.94)$$

где је

$$\{q\}_{(k)}^T [k_g]_{(k)} \{q\}_{(k)} = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon_N\} dV. \quad (4.95)$$

Израз за потенцијалну енергију система записујемо као

$$\Pi = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} + \frac{1}{2} \{q\}^T [K_g] \{q\} - \{q\}^T \{Q\}. \quad (4.96)$$

У бифуркационој теорији стабилности претпостављамо да је расподела напона у телу независна од интензитета оптерећења, односно да је квалитативно увек иста, па геометријску матрицу крутости можемо одредити без претходног одређивања поља напона. Ако претпоставимо да су напони пропорционални оптерећењу и да је фактор пропорционалности λ израз за прву варијацију потенцијалне енергије система гласи:

$$\delta\Pi = \{\delta q\}^T \frac{\partial\Pi}{\partial\{q\}} = ([K] + \lambda[K_g])\{q\} - \{Q\}. \quad (4.97)$$

систем је у равнотежи када је $\delta\Pi = 0$.

Друга варијација потенцијалне енергије система гласи:

$$\delta^2\Pi = \{\delta q\}^T ([K] + \lambda[K_g])\{\delta q\}. \quad (4.98)$$

Како је систем у неутралној равнотежи када је $\delta^2\Pi = 0$, проблем бифуркационе стабилности дефинише се као својствени проблем:

$$([K] + \lambda[K_g])\{q\}_i = 0. \quad (4.99)$$

где су

$[K]$ - глобална матрица крутости система

$[K_g]$ - глобална геометријска матрица крутости система

λ - фактор оптерећења (фактор извијања, мултипликатор оптерећења или параметар оптерећења) који представља константу којом се морају помножити референтна оптерећења да би дошло до извијања конструкције,

$\{q\}_i$ - вектор померања који одговара i -том моду извијања за фактор оптерећења λ .

Због ових особина метод коначних елемената може да третира проблеме комплексне геометрије, дисконтинуалних оптерећења, материјалних карактеристика итд. што је и довело до тога да буде општеприхваћен и веома популаран у третирању инжењерских проблема еластомеханике.

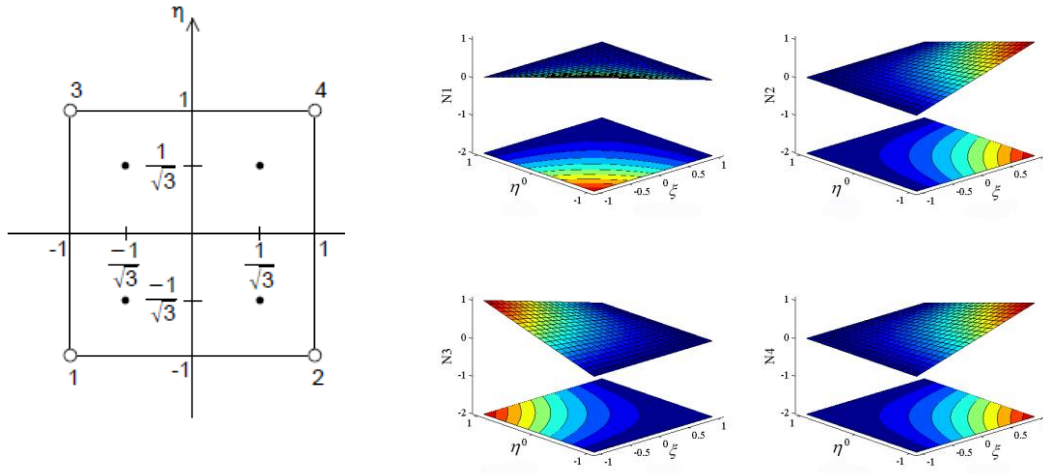
4.5.3 Интерполационе функције у класичној методи коначних елемената

Изопараметарски концепт у методи коначних елемената користи исте базне функције за апроксимацију поља основних непознатих као и за описивање геометрије елемента. Код дефинисања изопараметарских елемената користе се два система координата систем природних и систем глобалних координата. У систему природних координата (енг. „natural coordinates“) дефинисане су базне функције на матичном (енг. „parent“) домену. У вишедимензионалним просторима природне координате називају се барицентричне или тежишне координате. У овом координатном систему вредности базних функција узимају вредности из ограниченог интервала (-1 до 1 или 0 до 1) па је њихово израчунавање знатно лакше него у систему глобалних координата. Будући да постоји једнозначна веза између природних и глобалних координата, прорачун карактеристика изопараметарских елемената врши се у матичном домену где је могуће користити тачну и ефикасну Гаусову методу интеграције, што значајно олакшава и убрзава дефинисање карактеристичних матрица методе коначних елемената.

Најзначајнија особина изопараметарског концепта је да су основни услови конвергенције (комплетност и конформност базних функција) аутоматски задовољене. Услов конформности (компатибилности) гласи: за конвергенцију решења по МКЕ потребно је да су елементи конформни, односно да су променљиве и њихови изводи до $m-1$ реда, где је m ред највишег извода у функционалу, морају бити континуални на свим границама између елемената.

Уопштено од интерполационих функција захтева се да обезбеде добру апроксимацију у елементу, континуитет између елемената и да су што једноставније. Интерполационе функције у класичној методи коначних елемената су полиноми најчешће другог или нижег реда (у ретким случајевима користе се и полиноми вишег реда). Највећу примену у МКЕ имају Лагранжеви полиноми и Хермитови полиноми. На сликама 4.12-4.13. приказани су линеарни и квадратни четвороугаони елементи са Лагранжевим базним функцијама као и линијски елемент са два чвора са Хермитовим базним функцијама. Видимо да уобичајене базне функције класичне методе коначних елемената немају особину

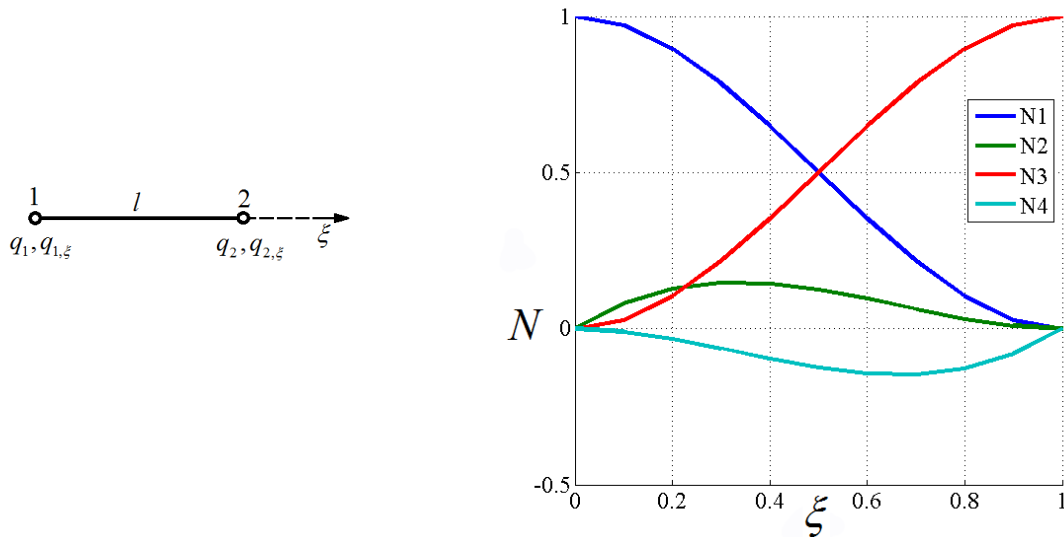
ненегативности. Такође ове функције не поседују ни особину смањења варијације, односно приликом коришћења базних функција вишег реда може доћи до нежељених осцилација и нестабилности.



$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

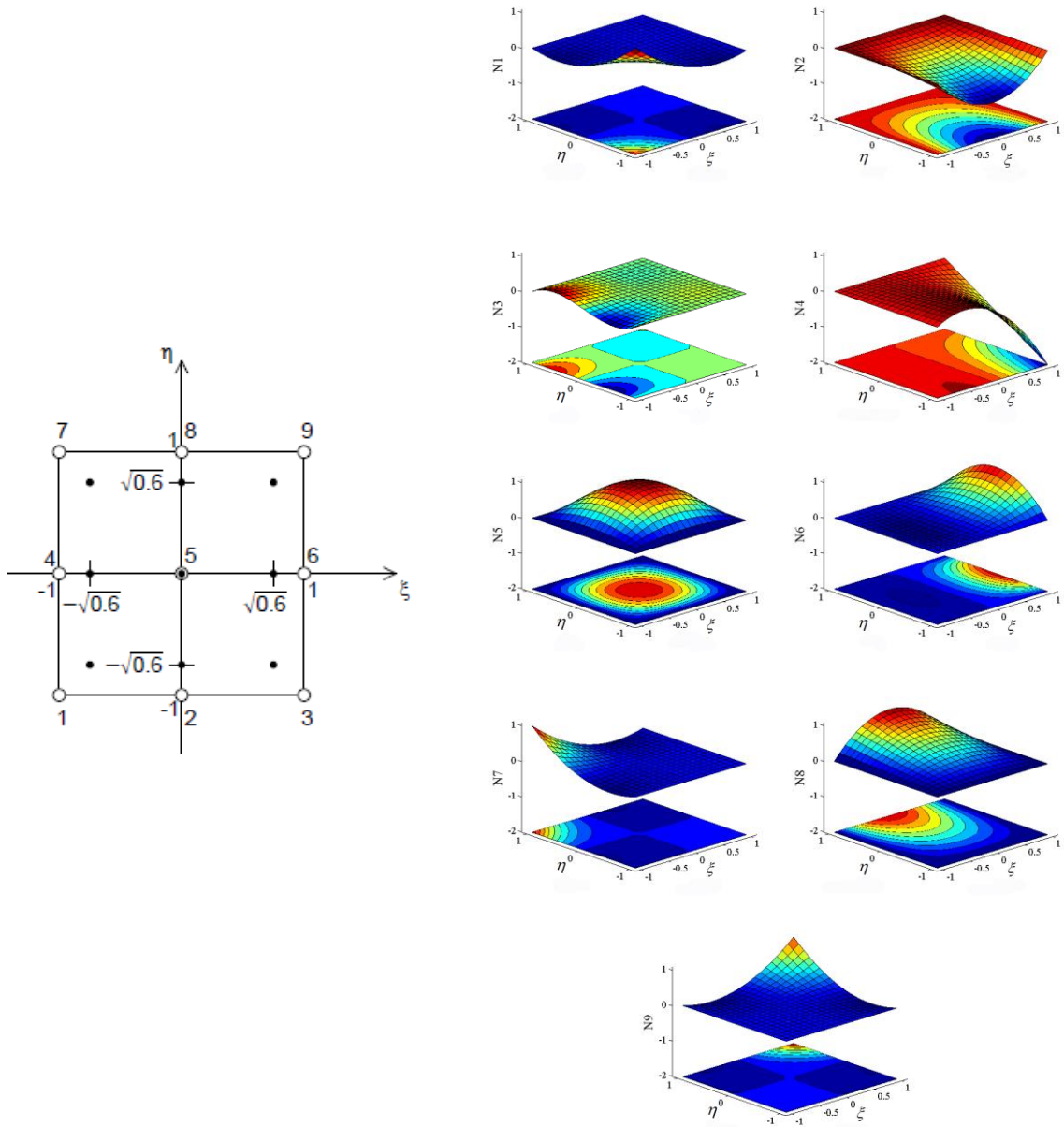
Слика 4.12. Билинеарни четвороугаони елемент



$$H_{01}^1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad H_{02}^1 = \xi^2 - 2\xi^3$$

$$H_{11}^1 = l\xi(\xi - 1) \quad H_{12}^1 = l\xi^2(\xi - 1) \quad \xi = x/l$$

Слика 4.13. Хермитски линијски елемент



$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4} \xi \eta (1 - \xi) (1 - \eta) & N_4 &= -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi) (1 - \eta^2) & N_7 &= -\frac{1}{4} \xi \eta (1 - \xi) (1 + \eta) \\
 N_2 &= -\frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (1 - \eta) & N_5 &= (1 - \xi^2) (1 - \eta^2) & N_8 &= \frac{1}{2} \eta (1 - \xi^2) (1 + \eta) \\
 N_3 &= -\frac{1}{4} \xi \eta (1 + \xi) (1 - \eta) & N_6 &= \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) (1 - \eta^2) & N_9 &= \frac{1}{4} \xi \eta (1 + \xi) (1 + \eta)
 \end{aligned}$$

Слика 4.14. Биквадратни четвороугаони елемент

Глава 5

Изогеометријска анализа

5.1 Увод

У овој глави биће размотрене основе изогеометријске анализе засноване на NURBS базним функцијама. Конвенционални МКЕ користи изопараметарску формулацију елемената са Лагранжевим или Хермитским базним функцијама што узрокује бројне тешкоће при примени метода. Изогеометријски метод ослања се на употребу базних функција које се користе за тачну репрезентацију геометрије у CAD технологијама, за апроксимацију поља тражених променљивих. У употреби су различите геометријске базе. Сам метод настао је коришћењем NURBS базних функција због њихове велике распрострањености у CAD индустрији, али је касније метод примењиван са другим базама (PHT-сплајнови, LR-сплајнови, T-сплајнови, "subdivision surfaces",...). У овој тези користиће се искључиво NURBS базне функције.

Уколико упоредимо линеарну напонско-деформациону анализу чврстог тела са моделирањем облика на рачунару помоћу NURBS геометрије приметићемо да приликом деформисања тела као и приликом модификовања облика померањем NURBS контролних тачака долази до континуалне промене геометрије, при чему су задовољени услови компатибилности. Може се рећи да наведени примери математички спадају у групу афиних пресликавања.

5.2 Дискретизација домена у изогеометријској анализи

Конвенционални МКЕ је базиран на засебним елементима чијим се састављањем дефинише геометрија разматраног проблема. У изопараметарским елементима базне функције су изабране тако да апроксимирају непознато поље променљивих унутар елемената, а потом се исте базне функције користе се и за апроксимацију геометрије проблема. Ове базне функције најчешће су полиноми а геометрија проблема је најчешће само апроксимирана.

У изогеометријском методу редослед је обрнут, наине база се бира тако да се геометрија проблема тачно репрезентује а потом се иста база користи и за апроксимацију непознатог поља променљивих.

За разлику од МКЕ где је прављење мреже засебан (често и најтежи) корак у анализи код изогеометријског метода мрежа коначних елемената прави се на основу вектора чворова, контролних тачака и степена базних функција CAD модела базираног на NURBS геометрији. Сви подаци потребни за генерисање мреже налазе се унутар самог CAD модела.

Параметарски домен означаваћемо са $\hat{\Omega}$, док ћемо физички домен означавати са Ω . Физички домен може бити састављен од једног или више поддомена (patches) тако да је сваки поддомен дефинисан у параметарском домену преко засебног вектора чворова. NURBS геометрија дефинише се у параметарском домену, који је подељен на интервале путем вектора чворова. У изогеометријској анализи ови интервали одговарају елементима. Као и у класичној методи коначних елемената NURBS елемент је дефинисан са одговарајућим контролним тачкама и одговарајућим базним функцијама. Важно је приметити да за разлику од класичне методе коначних елемената NURBS базне функције нису ограничене на само један елемент већ могу имати утицаја на више суседних елемената. Ово је веома важна особина будући да омогућава већи континуитет на границама елемената.

Такође, последица овога је да су елементи међусобно повезани и нису независни један од другог. Осим у тривијалном случају где у вектору чворова постоји само један чворни интервал, није могуће дефинисати само један елемент засебно, па је упитно коришћење термина елемент будући да се у овом случају

термин користи за објекат који не представља независни део већег модела. Овако дефинисани елементи ипак у анализи могу да се третирају као и у класичној МКЕ пошто се све матрице у једначинама МКЕ рачунају на нивоу елемената.

Степени слободе везани су за контролне тачке па се и контурни услови постављају директно на контролне тачке. Уколико су једначине МКЕ формиране методом помераја степени слободе одговарају померањима контролних тачака. Важно је напоменути да будући да контролне тачке могу да се налазе изван посматраног физичког домена јер базне функције апроксимирају а не интерполирају контролне тачке, физички смисао померања контролних тачака не одговара смислу померања у чворовима МКЕ. Ипак ово нема утицаја на њихов третман у компјутерском коду. У табели 5.1. дат је преглед различитости изогеометријске методе и конвенционалне МКЕ.

Табела 5.1. - Поређења између NURBS изогеометријског метода и МКЕ [1]

Изогеометријска анализа	МКЕ Анализа
Контролне тачке	Чворови
Контролне променљиве	Чворне променљиве
Вектори чворова	Мрежа коначних елемената
Тачна геометрија	Апроксимирана геометрија
Делови (patches)	Поддомени
База не интерполира контролне тачке и контролне променљиве	База интерполира чворне тачке и чворне променљиве
NURBS база	Полиномна база
Висока континуалност	C^0 континуалност
hpk модификација	hp модификација
Позитивна база по целом домену	База није обавезно позитивна
База поседује својство конвексног омотача	База нема својство конвексног омотача
База поседује својство мање варијације у присуству дисконтинуитета	Осцилаторно понашање у присуству дисконтинуитета

Модификација мреже (уситњавање или повећање реда елемената) врши се на неки од начина описаних у глави 2 за Б-сплајн базне функције. У случају

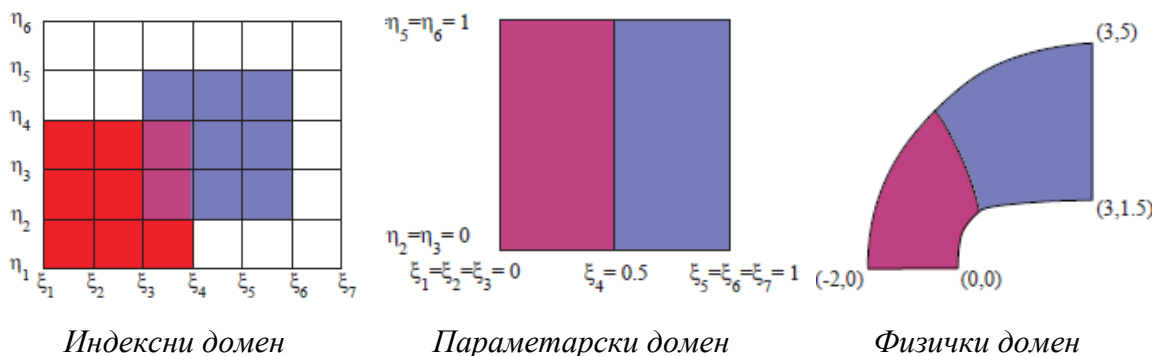
коришћења NURBS геометрије састављене од више поддомена, модификација пропагира кроз суседне поддомене.

Пресликавање из параметарског у физички домен дато је изразом:

$$\{x\} = \sum_{I=1}^n N_I \{P_I\} \quad (5.1)$$

где су са $\{N_I\}$ означене NURBS базне функције $N_I = N_I(\xi)$ уколико је Ω линија, $N_I = N_I(\xi, \eta)$ у случају да је Ω површ и $N_I = N_I(\xi, \eta, \zeta)$ у случају да је Ω тродимензионално тело а са $\{P_I\}$ контролна тачка I .

Геометријска база путем једне или више афиних трансформација пресликава тачке из параметарског домена у физички домен. У оквиру изогеометријске анализе згодно је разматрати и још један домен тзв. индексни домен. Индексни домен се не користи у пресликавањима, служи само за означавање базних функција и чворних интервала (једнаких или различитих од нуле). У индексном простору сви чворни интервали су једнаке дужине, независно од стварне величине у параметарском или физичком домену. Индексни домен користи се за одређивање чворног интервала на коме почиње базна функција. Коришћењем индексног домена лако се врши глобална нумерација базних функција.



Слика 5.1 Различити домени у изогеометријској анализи [2]

У параметарском домену приказујемо само чворне интервале који имају вредност већу од нуле. Сваки чворни интервал уствари представља коначни елемент. Треба водити рачуна да је параметарски домен везан за NURBS поддомен "patch" а не за елемент. Односно NURBS поддомен са више елемената се пресликава у физички домен, док код класичне МКЕ параметарски домен се

пресликава у један коначни елемент у физичком домену и сваки такав елемент има засебно пресликавање.

5.2.1 Изогеометријска дискретизација Кирхоф-Лавове плоче

Поље померања класичне теорије плоча дато је изразом (4.1.). Као основне непознате величине усвојићемо компоненте померања средње површи плоче:

$$\{u_g\} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0\}^T \quad (5.2)$$

Користећи изогеометријску парадигму, користићемо исте NURBS базне функције које описују геометрију плоче за интерполацију непознатих:

$$\{u\} = \sum_{I=1}^{n \times m} [N_I] \{q_I\}. \quad (5.3)$$

где је $n \times m$ број контролних тачака (базних функција) а N_I матрица облика чији су чланови функције облика, односно NURBS базне функције

$$[N_I] = \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & N_I \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

а q_I вектор променљивих (степен слободе) у контролној тачки I , дат изразом:

$$q_I = \{u_{0I} \quad v_{0I} \quad w_{0I}\}^T \quad (5.5)$$

Вектор деформација сада можемо дефинисати као:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^0\} &= \sum_{I=1}^{n \times m} [B_I^0] \{q_I\} \\ \{\varepsilon^1\} &= \sum_{I=1}^{n \times m} [B_I^1] \{q_I\} \end{aligned}, \quad (5.6)$$

где су

$$[B_I^0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial N_I}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad [B_I^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_I}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2 N_I}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial^2 N_I}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Матрице $[B_l^0]$ и $[B_l^1]$ су мембранске и савојне матрице деформација-померања које се добијају диференцирањем функција облика. Примећује се да се у матрици $[B_l^1]$ јављају други изводи базних функција. Ово је последица усвајања само трансляторних померања у средњој површи као непознатих величина.

За случај статичке анализе конструкција користимо израз

$$[K]\{q\} - \{Q\} = 0. \quad (5.8)$$

Коришћењем конститутивне једначине за Кирхоф-Лавову плочу (4.34.) израз за матрицу крутости изведена методом помераја (4.81.) гласи

$$K = \int_v \begin{bmatrix} B_l^0 \\ B_l^1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_l^0 \\ B_l^1 \end{bmatrix} dV. \quad (5.9)$$

где су матрице A, B, D дефинисане изразима (4.36)

Израз за вектор сила у чворовима гласи

$$\{Q\} = \int_v \{p\} [N] dV \quad (5.10)$$

У случају анализе слободних вибрација конструкција користимо израз:

$$([M] - \omega^2 [K])\{\bar{q}\} = 0. \quad (5.11)$$

Глобална матрица масе у овом случају дата је изразом:

$$[M] = \int_{\Omega} [N_m]^T [m] [N_m] d\Omega. \quad (5.12)$$

где је

$$[m] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h^3}{12} \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

и

$$[N_m] = \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_I & \frac{\partial N_I}{\partial x} & \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{bmatrix}^T. \quad (5.14)$$

У случају анализе бифуркационе стабилности користимо израз:

$$[K] + \lambda [K_g] \{q\}_i = 0. \quad (5.15)$$

Геометријска матрица крутости Кирхоф-Лавове плоче је

$$K_g = \int_{\Omega} N_g^T I_g N_g d\Omega. \quad (5.16)$$

где је

$$[I_g] = \begin{bmatrix} h\sigma_{xx} & h\sigma_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h\sigma_{xy} & h\sigma_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\sigma_{xx} & h\sigma_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\sigma_{xy} & h\sigma_{yy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h\sigma_{xx} & h\sigma_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h\sigma_{xy} & h\sigma_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12}\sigma_{xx} & 0 & \frac{h^3}{12}\sigma_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12}\sigma_{yy} & \frac{h^3}{12}\sigma_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12}\sigma_{xy} & \frac{h^3}{12}\sigma_{xy} & \frac{h^3}{12}\sigma_{xx} + \frac{h^3}{12}\sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

и

$$[N_g] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} & \frac{\partial N_I}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_I}{\partial x} & \frac{\partial N_I}{\partial y} & \frac{\partial^2 N_I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_I}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_I}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T. \quad (5.18)$$

5.2.2 Изогеометријска дискретизација Миндлин-Рајзнерове плоче

Поље померања Миндлин-Рајзнерове теорије плоча дато је изразом (4.9.). Као основне непознате величине усвојићемо компоненте померања средње површи плоче:

$$\{u_g\} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \psi_x \quad \psi_y\}^T \quad (5.19)$$

Користећи изогеометријску парадигму, користићемо исте NURBS базне функције које описују геометрију плоче за интерполацију непознатих:

$$\{u\} = \sum_{I=1}^{n \times m} [N_I] \{q_I\}. \quad (5.20)$$

где је $n \times m$ број контролних тачака (базних функција) а N_I матрица облика чији су чланови функције облика, односно NURBS базне функције

$$[N_I] = \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_I \end{bmatrix}, \quad (5.21)$$

а q_I вектор променљивих (степенности слободне) у контролној тачки I , дат изразом:

$$q_I = \{u_{0I} \quad v_{0I} \quad w_{0I} \quad \psi_{xI} \quad \psi_{yI}\}^T \quad (5.22)$$

Вектор деформација сада можемо дефинисати као:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^0\} &= \sum_{I=1}^{n \times m} [B_I^0] \{q_I\} \\ \{\varepsilon^1\} &= \sum_{I=1}^{n \times m} [B_I^1] \{q_I\}, \\ \{\gamma^0\} &= \sum_{I=1}^{n \times m} [B_{SI}^0] \{q_I\} \end{aligned} \quad (5.23)$$

где су

$$[B_l^0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [B_l^1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & \frac{\partial N_l}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

матрице $[B_l^0]$ и $[B_l^1]$ мембранске и савојне матрице деформације-померања које се добијају диференцирањем функција облика. Смицајна матрица деформације-померања гласи

$$[B_{sl}^0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial x} & N_l & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial y} & N_l & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Примећује се да се у матрицама деформације-померања за Миндлин-Рајзнерову плочу не појављују други изводи базних функција.

Уз коришћење конститутивне једначине за Миндлин-Рајзнерову плочу (4.38.) добија се израз за матрицу крутости

$$K = \int_V \begin{bmatrix} B_l^0 \\ B_l^1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_l^0 \\ B_l^1 \end{bmatrix} dV + k_s \int_V [B_{sl}^0]^T [A^s] [B_{sl}^0] dV. \quad (5.26)$$

где су матрице A , B , D дефинисане изразима (4.36) а матрица A^s изразом (4.39). Коефицијент k_s је корекциони фактор смицања.

Израз за вектор сила у чворовима гласи

$$\{Q\} = \int_V \{p\} [N] dV \quad (5.27)$$

Глобална матрица масе за Миндлин-Рајзнерову плочу дата је изразом:

$$[M] = \int_{\Omega} [N_m]^T [m] [N_m] d\Omega. \quad (5.28)$$

где је матрица $[N_m] = [N_l]$ а матрица m није промењена у односу на Кирхоф-Лавову плочу.

Геометријска матрица крутости Миндлин-Рајзнерове плоче гласи

$$K_g = \int_{\Omega} N_g^T I_g N_g d\Omega. \quad (5.29)$$

где је

$$[I_g] = \begin{bmatrix} h\hat{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h\hat{\sigma} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\hat{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12}\hat{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12}\hat{\sigma} \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

и

$$[N] = \begin{bmatrix} \nabla N_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla N_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla N_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla N_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla N_I \end{bmatrix}, \quad \nabla N_I = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

5.2.3 Изогеоетријска дискретизација Редијеове плоче

У Редијевој теорији трећег реда основне непознате величине чине померања у равни плоче, трансверзално померање и ротације у контролним тачкама. Користећи изогеоетријску парадигму NURBS базне функције које се користе за репрезентацију геометрије користимо и за интерполацију поља непознатих величина:

$$\{u_g\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{n \times m} \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0I} \\ v_{0I} \\ w_{0I} \\ \psi_{xI} \\ \psi_{yI} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^{n \times m} N_I q_I \quad (5.32)$$

где је $n \times m$ број контролних тачака (базних функција), N_I су рационалне базне функције и q_I степени слободе везани за контролну тачку I .

Вектор деформација у равни и вектор смичучих деформација дефинисан је изразом

$$\epsilon_p = \sum_I [B_I^0 \quad B_I^1 \quad B_I^3] q_I, \quad \epsilon_s = \sum_I [B_I^{S0} \quad B_I^{S2}] q_I \quad (5.33)$$

где су

$$\mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial x} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{s0} = \mathbf{B}^{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & N & 0 \end{bmatrix}.$$
(5.34)

Израз за глобалну матрицу крутости за Редијеву плочу трећег реда гласи:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{b0} \\ \mathbf{B}^{b1} \\ \mathbf{B}^{b3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B & E \\ B & D & F \\ E & F & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{b0} \\ \mathbf{B}^{b1} \\ \mathbf{B}^{b3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{s0} \\ \mathbf{B}^{s2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^s & D^s \\ D^s & F^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{s0} \\ \mathbf{B}^{s2} \end{bmatrix} d\Omega$$
(5.35)

а за вектор чворних сила

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} pN d\Omega$$
(5.36)

Глобалну матрицу масе записујемо као

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_m^T m \mathbf{N}_m d\Omega$$
(5.37)

где је матрица m :

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & -c_1 I_3 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & J_1 & 0 & -c_1 I_3 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ J_1 & 0 & 0 & K_2 & 0 & -c_1 I_4 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 & K_2 & 0 & -c_1 I_4 \\ -c_1 I_3 & 0 & 0 & -c_1 I_4 & 0 & c_1^2 I_6 & 0 \\ 0 & -c_1 I_3 & 0 & 0 & -c_1 I_4 & 0 & c_1^2 I_6 \end{bmatrix}.$$
(5.38)

а матрица N_m :

$$\mathbf{N}_m = \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_I & 0 & 0 & N_{I,x} & N_{I,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_I & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$
(5.39)

У претходним изразима $(I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, I_6) = \sum_{k=1}^N \int_{-h/2}^{h/2} \rho^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$,

$$J_1 = I_1 - c_1 I_3 \text{ и } K_2 = I_2 - 2c_1 I_4 + c_1^2 I_6.$$

Глобална геометријска матрица крутости узима у обзир утицај смичућих деформација и дата је изразом

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega} \mathbf{N}_g^T \mathbf{I}_g \mathbf{N}_g d\Omega. \quad (5.40)$$

Матрица $[\mathbf{N}_g]$ гласи:

$$\mathbf{N}_g = \begin{bmatrix} \nabla N & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla N \\ 0 & 0 & N_{I,xx} & N_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,xy} & N_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,xy} & 0 & N_{I,x} \\ 0 & 0 & N_{I,yy} & 0 & N_{I,y} \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

а $[\mathbf{I}_g]$:

$$\mathbf{I}_g = \begin{bmatrix} I_{g0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{g0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{g0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{g2} & 0 & I_{g4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{g2} & 0 & I_{g4} \\ 0 & 0 & 0 & I_{g4} & 0 & I_{g6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{g4} & 0 & I_{g6} \end{bmatrix}. \quad (5.42)$$

где су

$$\nabla N_I = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \end{array} \right\}, \quad I_{g0} = h \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{bmatrix}, \quad I_{g2} = \frac{h^3}{12} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

$$I_{g4} = -\frac{h^5}{160} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{bmatrix}, \quad I_{g6} = \frac{h^7}{448} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{bmatrix}$$

5.3 Интеграција

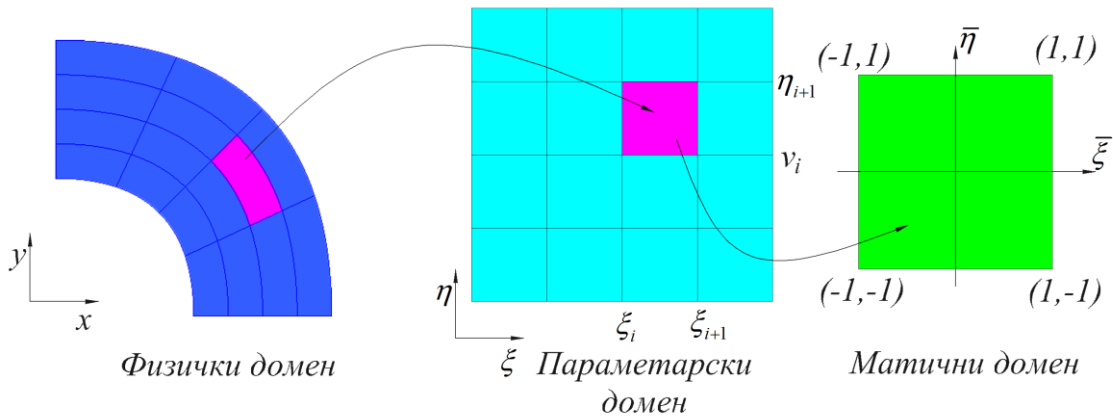
Ако се разматра NURBS поддомен са чворним векторима представљен у параметарском домену, целокупан поддомен се понаша као један коначни елемент у класичној МКЕ. Како у параметарском домену базне функције имају утицај само на неколико чворних интервала било би нерационално рачунати базне функције на интервалима где су једнаке нули. Управо због тога сваки чворни интервал различит од нуле посматрамо као засебан елемент. Користећи индексни домен лако се може одредити на ком интервалу су које базне функције различите од нуле. Како би се решили интеграл из претходних поглавља, користи се изопараметарски принцип из класичне МКЕ. Један елемент (чворни интервал) из параметарског простора се једноставном трансформацијом пресликава у једноставнији домен погодан за Гаусову интеграцију. Тај домен назива се матични домен $\bar{\Omega}$ и приказан је на слици 5.2.

5.4 Гранични услови

Три основна типа граничних услова су Дирихлеов гранични услов, Нојманов гранични услов и Робинов гранични услов.

Дирихлеов гранични услов у литератури се назива и есенцијални или геометријски гранични услов и у проблемима еласто-механике односи се на део границе где се задају контурни услови по померањима. Задавање геометријских граничних услова у изогеометријској анализи врши се директно додељивањем вредности контролним променљивим, аналогно задавању вредности у чворовима у конвенционалној МКЕ. У случају задавања ротационих граничних услова, за Кирхоф-Лавове и Редијеве ламинате који немају ротационе степене слободе као контролне променљиве потребно је задати вредности у контролним тачкама на граници али и непосредним суседним контролним тачкама [88]. Ова једноставна процедура последица је чињенице да за NURBS геометрију са отвореним вектором чворова нагиб NURBS површине на граници дефинисан је положајем

првог суседног реда контролних тачака паралелних граници. Такође ротациони гранични услови могу се задати и путем Лагранжевих мултипликатора [2].

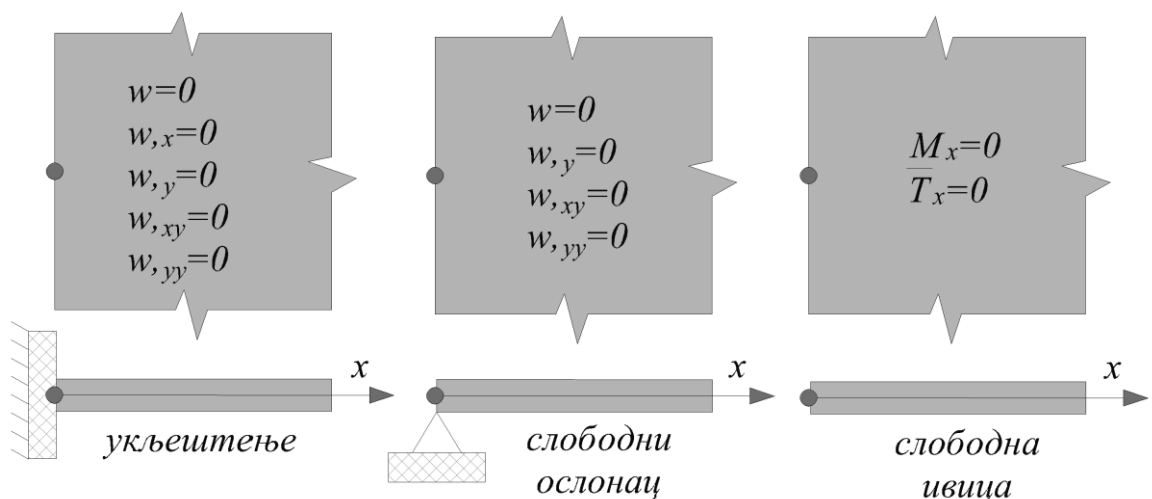


Слика 5.2. Различити домени приликом нумеричке интеграције у изогеометријској методи

За Миндлин-Рајзнерове ламинате ови ротациони услови задају се једноставно додељивањем вредности ротационим степенима слободе на граници.

Нојманови гранични услови називају се и природни или статички гранични услови и у проблемима еласто-механике задају се на делу границе где се контурни услови задају по силама. Као и код класичне МКЕ ови гранични услови задају се апроксимативно будући да се појављују директно у варијационој формулацији проблема. Робинови или мешовити гранични услови третирају се слично Нојмановим граничним условима.

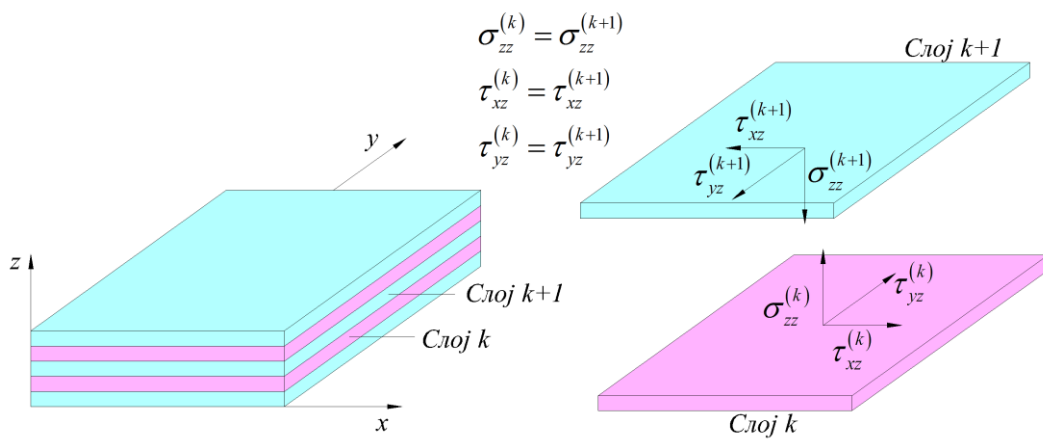
За плоче најчешће се дефинишу гранични услови као на слици 5.3.



Слика 5.3. Контурни услови за ивицу $x=0$ [50]

5.5 Интерламинарни напони

Приликом процеса производње ламината може доћи до неправилности у материјалу као што су непотпуно пријањање слоја за слој односно постојање интерламинарних празнина (ваздушних чепова), деламинације, неправилне оријентације влакана, оштећења влакана као и неуниформне дебљине ламината. Како је грешке у производњи немогуће избећи њихово постојање мора се узети у обзир приликом анализе.



Слика 5.4. Услови на граници између слојева

Приликом анализе Кирхоф-Лавовог ламината, приликом дефинисања конститутивних једначина усвојена је претпоставка да су трансверзални смичући и нормални напони једнаки нули односно $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0$. Наравно, ови напони постоје у реалности и могу бити одговорни за лом ламината услед релативно мале трансверзалне отпорности материјала. Интерламинарне напоне могуће је израчунати директно из једначина равнотеже, вршећи интеграцију по дебљини k -тог слоја ($z_k \leq z \leq z_{k+1}$).

Полазећи од једначина равнотеже слоја

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)}}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.44}$$

изражавамо трансверзалне напоне као

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(k)} &= -\int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + C_1^{(k)} \\ \tau_{yz}^{(k)} &= -\int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + C_2^{(k)} . \\ \sigma_{zz}^{(k)} &= -\int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial y} \right) dz + C_3^{(k)}\end{aligned}\quad (5.45)$$

Напоне у равни рачунамо преко конститутивних једначина из релација (5.46) и (4.22):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(k)} &= \left\{ \bar{Q}_{11}^{(k)} \quad \bar{Q}_{12}^{(k)} \quad \bar{Q}_{16}^{(k)} \right\} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \left\{ \bar{Q}_{11}^{(k)} \quad \bar{Q}_{12}^{(k)} \quad \bar{Q}_{16}^{(k)} \right\} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \\ \sigma_{yy}^{(k)} &= \left\{ \bar{Q}_{11}^{(k)} \quad \bar{Q}_{22}^{(k)} \quad \bar{Q}_{26}^{(k)} \right\} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \left\{ \bar{Q}_{11}^{(k)} \quad \bar{Q}_{22}^{(k)} \quad \bar{Q}_{26}^{(k)} \right\} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} . \\ \tau_{xy}^{(k)} &= \left\{ \bar{Q}_{16}^{(k)} \quad \bar{Q}_{26}^{(k)} \quad \bar{Q}_{66}^{(k)} \right\} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \left\{ \bar{Q}_{16}^{(k)} \quad \bar{Q}_{26}^{(k)} \quad \bar{Q}_{66}^{(k)} \right\} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix}.\end{aligned}\quad (5.46)$$

Диференцирањем ових израза и заменом у једначину (4.20) добијамо

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(k)} = \tau_{xz}^{(k)} \Big|_{z_k} - \int_{z_k}^z \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^0}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^0}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^1}{\partial x} \end{Bmatrix} dz - \int_{z_k}^z \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^0}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^0}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^1}{\partial y} \end{Bmatrix} dz \\ \tau_{yz}^{(k)} = \tau_{yz}^{(k)} \Big|_{z_k} - \int_{z_k}^z \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^0}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^0}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^1}{\partial x} \end{Bmatrix} dz - \int_{z_k}^z \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^0}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^0}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^0}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \left\{ \begin{matrix} \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \end{matrix} \right\}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^1}{\partial y} \end{Bmatrix} dz\end{aligned}\quad (5.47)$$

Константе интеграције $C_1^{(k)} = \tau_{xz}^{(k)} \Big|_{z_k}$, $C_2^{(k)} = \tau_{yz}^{(k)} \Big|_{z_k}$ добијају се користећи услове континуитета између слојева и граничних услова (слика 5.4). За први слој константе треба да одговарају граничним условима на доњој површини ламината. Уколико на доњој површини ламината не делују трансверзални напони следи да

су $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = 0$. За остале слојеве тражени напони су континуални на спојевима слојева односно:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^{(k)}(x, y, z_{k+1}) &= \tau_{xz}^{(k+1)}(x, y, z_{k+1}) \\ \tau_{yz}^{(k)}(x, y, z_{k+1}) &= \tau_{yz}^{(k+1)}(x, y, z_{k+1})\end{aligned}\quad (5.48)$$

Да би одредили трансверзални нормални напон потребно је диференцирати изразе (5.48) и заменити у (5.45)

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(k)} &= \int_{z_k}^z \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x^2} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^1}{\partial x^2} \end{Bmatrix} dz + 2 \int_{z_k}^z \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^0}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^1}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} dz \\ &+ \int_{z_k}^z \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^0}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial^2 y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^1}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^1}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^1}{\partial^2 y} \end{Bmatrix} dz - \int_{z_k}^z \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial x} \Big|_{z_k} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial x} \Big|_{z_k} dz + \sigma_{zz}^{(k)} \Big|_{z_k}\end{aligned}\quad (5.49)$$

Константа интеграције добија се из услова континуитета између слојева и граничних услова $C_3^{(k)} = \sigma_{zz}^{(k)} \Big|_{z_k}$.

Из претходног израза види се да се на десној страни јављају други изводи деформација односно трећи изводи померања w_0 .

NURBS базне функције могу бити четвртог степена па се претходне једначине могу релативно једнаставно имплементирати у рачунарски код.

Вршећи интеграцију по дебљини ламине добијамо:

$$\tau_{xz}^{(k)} = \tau_{xz}^{(k)} \Big|_{z_k} - H_1 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^0}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^0}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^0}{\partial x} \end{Bmatrix} - H_2 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^1}{\partial x} \end{Bmatrix} - H_1 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^0}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^0}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^0}{\partial y} \end{Bmatrix} - H_2 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^1}{\partial y} \end{Bmatrix}\quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}^{(k)} = \tau_{yz}^{(k)} \Big|_{z_k} - H_1 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^0}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^0}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^0}{\partial x} \end{Bmatrix} - H_2 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^1}{\partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^1}{\partial x} \end{Bmatrix} - H_1 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^0}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^0}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^0}{\partial y} \end{Bmatrix} - H_2 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{xx}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varepsilon_{yy}^1}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}^1}{\partial y} \end{Bmatrix} \\
 \\
 \sigma_{zz}^{(k)} = H_1^* \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x^2} \end{Bmatrix} + H_2^* \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^1}{\partial x^2} \end{Bmatrix} + 2H_1^* \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^0}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} + 2H_2^* \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^1}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^1}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\
 \\
 + H_1^* \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^0}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^0}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial^2 y} \end{Bmatrix} + H_2^* \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{12}^{(k)} \\ \bar{Q}_{22}^{(k)} \\ \bar{Q}_{26}^{(k)} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}^1}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}^1}{\partial^2 y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^1}{\partial^2 y} \end{Bmatrix} - H_1 \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{(k)} \Big|_{z_k}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)} \Big|_{z_k}}{\partial x} \right) + \sigma_{zz}^{(k)} \Big|_{z_k}
 \end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned}
 H_1 = z_{k+1} - z_k \quad H_1^* = \frac{1}{2}(z_{k+1}^2 - z_k^2) - z_k(z_{k+1} - z_k) \\
 H_2 = \frac{1}{2}(z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad H_2^* = \frac{1}{6}(z_{k+1}^3 - z_k^3) - \frac{1}{2}z_k^2(z_{k+1} - z_k)
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

При развијању израза за интерламинарне нормалне напоне у ламинатима базираним на Кирхоф-Лавовој и Редијевој теорији трећег реда јавиће се четврти изводи померања w_0 .

Глава 6

Нумерички примери

6.1 Увод

У овој глави описани метод биће примењен на проблем савијања, одређивања сопствених модова осциловања као и на проблем бифуркационе стабилности ламинираних композитних плоча. Приказани су резултати добијени коришћењем изогеометријских елемената са базним функцијама различитог степена заснованих на Кирхоф-Лавовој теорији (CPT), Рајзнер-Миндлиновој теорији (FSDT) и Редијевој теорији смицања трећег реда (TSDT).

6.2 Статичка анализа ламинираних композитних плоча

6.2.1 Трослојна сендвич конструкција под дејством униформног оптерећења

Разматрамо слободно ослоњену квадратну сендвич плочу [28] под дејством униформног трансверзалног оптерећења q_0 . Однос дужине и дебљине плоче износи $a/h=10$. Сендвич плоча направљена је од једног унутрашњег слоја (језгра) чије су карактеристике :

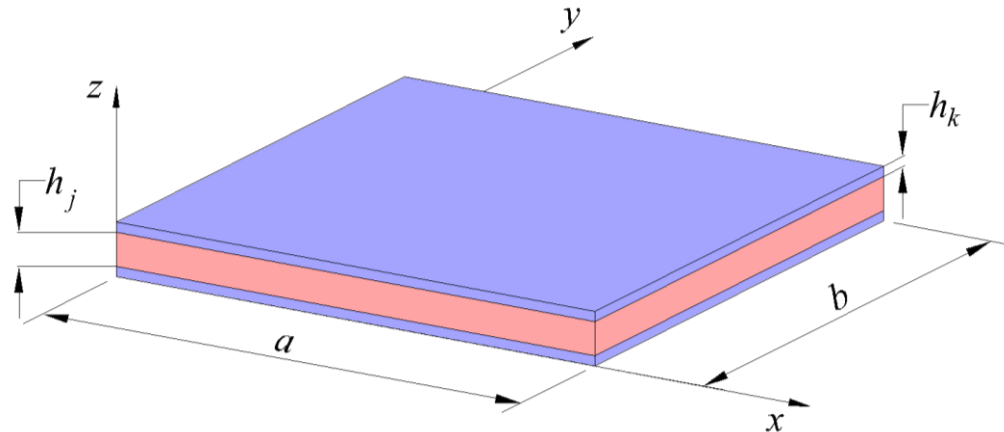
$$\bar{Q}_{\text{језгра}} = \begin{bmatrix} 0.999781 & 0.231192 & 0 & 0 & 0 \\ 0.231192 & 0.524886 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.262931 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.266810 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.159914 \end{bmatrix}.$$

Карактеристике два спољашња слоја (коре) задата су у зависности од карактеристика језгра као $\bar{Q}_{\text{коре}} = R \cdot \bar{Q}_{\text{језгра}}$.

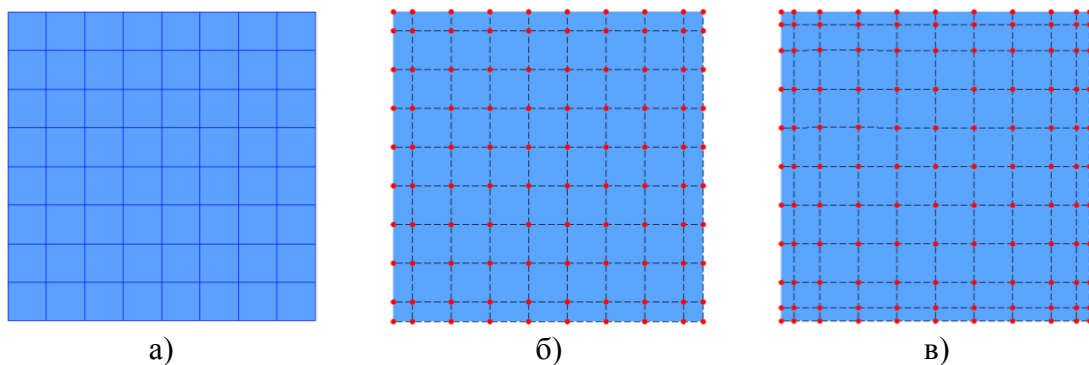
Нормализовано померање и напони дати су као:

$$\bar{w} = (0.999781/hq) \cdot \omega(a/2, a/2, 0), \quad \bar{\sigma}_{xx}^1 = \sigma_{xx}^{(1)}(a/2, a/2, h/2)/q,$$

$$\bar{\sigma}_{xx}^3 = \sigma_{xx}^{(2)}(a/2, a/2, 2h/5)/q, \quad \bar{\tau}_{xz}^1 = \tau_{xz}^{(2)}(0, a/2, -2h/5)/q, \quad \bar{\tau}_{xz}^2 = \tau_{xz}^{(2)}(0, a/2, 0)/q.$$



Слика 6.1. Геометрија и поставка проблема



Слика 6.2. Плоча са 8×8 чворних елемената (а) и одговарајући полигон контролних тачака за базне функције б)другог и в) трећег степена

У табелама 6.1.- 6.3. приказане су вредности нормализованих напона и померања за CPT, FSDT и TSDT плоче за различите вредности фактора R . Тачно аналитичко решење овог проблема дато је у [28]. У раду [59] објављена су решења проблема добијена конвенционалном методом коначних елемената за плоче базиране на Рајзнер-Миндлиновој и Редијевој теорији. У радовима [69] и [72] објављени су резултати добијени методама колокације базираним на вејвлет и радијалним базним функцијама (MQ RBF). Вредности трансверзалних смичућих напона приказане унутар заграда добијене су преко једначина равнотеже.

Приказани су резултати добијени коришћењем мреже са 16×16 елемената по страни плоче.

Табела 6.1. Нормализована померања и напони квадратне сендвич плоче

Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Аналитичко Решење [28]	258.97	60.353	46.623	9.34	4.3641	3.2675
FSDT [59]	236.1	61.87	49.5	9.899	3.313	2.444
TSDT [59]	256.13	62.38	46.91	9.382	3.089	2.566
Вејвлети [69]	259.2674	59.1184	47.2947	9.4589	4.5804	3.3790
MQ RBF [72]	257.38	58.725	46.98	9.396	3.848	2.839
Изо. CPT $p=2$	216.733	61.234	48.987	9.797	(1.405)	(1.037)
Изо. CPT $p=3$	216.982	61.236	48.989	9.798	(4.253)	(3.138)
Изо. CPT $p=4$	216.982	61.142	48.913	9.783	(4.614)	(3.404)
Изо. FSDT $p=2$	259.278	58.154	46.523	9.305	0.457 (3.111)	0.457 (3.526)
Изо. FSDT $p=3$	259.278	58.470	46.776	9.355	4.687 (4.566)	4.687 (3.368)
Изо. FSDT $p=4$	259.278	57.497	45.998	9.200	3.152 (4.580)	3.152 (3.378)
Изо. TSDT $p=2$	256.958	60.576	47.182	9.436	4.849 (3.905)	1.746 (2.786)
Изо. TSDT $p=3$	256.970	60.372	47.001	9.400	4.752 (4.253)	1.711 (3.178)
Изо. TSDT $p=4$	256.970	60.350	46.989	9.398	4.728 (4.144)	1.702 (3.242)

Табела 6.2. Нормализована померања и напони квадратне сендвич плоче

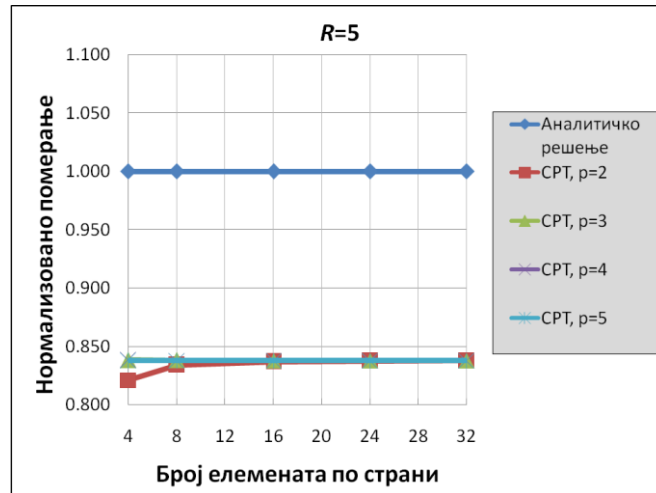
Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Аналитичко Решење [28]	159.38	65.332	48.857	4.903	4.0959	3.5154
FSDT [59]	131.095	67.8	54.24	4.424	3.152	2.676
TSDT [59]	152.22	64.65	51.31	5.131	3.147	2.587
Вејвлети [69]	159.6076	63.1360	50.5088	5.0509	4.3210	3.6687
MQ RBF [72]	158.55	62.723	50.16	5.01	3.596	3.053
Изо. CPT $p=2$	118.656	67.049	53.639	5.364	(1.337)	(1.135)
Изо. CPT $p=3$	118.793	67.051	53.641	5.364	(4.047)	(3.436)
Изо. CPT $p=4$	118.793	66.947	53.558	5.356	(4.389)	(3.727)
Изо. FSDT $p=2$	159.611	62.104	49.683	4.968	0.601 (3.976)	0.601 (3.376)
Изо. FSDT $p=3$	159.611	62.444	49.955	4.996	2.326 (4.306)	2.326 (3.656)
Изо. FSDT $p=4$	159.611	61.399	49.119	4.912	1.690 (4.320)	1.690 (3.668)

<i>Изо. TSDT $p=2$</i>	154.495	65.593	50.150	5.015	4.376 (3.682)	1.576 (3.071)
<i>Изо. TSDT $p=3$</i>	154.500	65.354	49.946	4.995	4.291 (3.897)	1.545 (3.357)
<i>Изо. TSDT $p=4$</i>	154.500	65.336	49.935	4.993	4.269 (3.748)	1.537 (3.377)

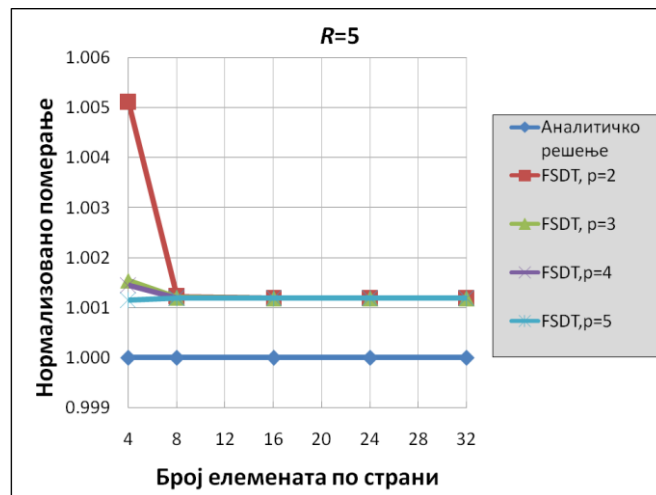
Табела 6.3. Нормализована померања и напони квадратне сендвич плоче

Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}^1$	$\bar{\sigma}_{xx}^2$	$\bar{\sigma}_{xx}^3$	$\bar{\tau}_{xz}^1$	$\bar{\tau}_{xz}^2$
Аналитичко Решење [28]	121.72	66.787	48.299	3.238	3.9638	3.5768
FSDT [27]	90.85	70.04	56.03	3.753	3.091	2.764
TSDT [27]	110.43	66.62	51.97	3.465	3.035	2.691
Вејвлети [69]	121.9312	63.6552	50.9241	3.3949	4.2018	3.7565
MQ RBF [72]	121.184	63.214	50.571	3.371	3.466	3.099
<i>Изо. CPT $p=2$</i>	81.690	69.240	55.392	3.693	1.311	1.172
<i>Изо. CPT $p=3$</i>	81.784	69.243	55.394	3.693	3.969	3.548
<i>Изо. CPT $p=4$</i>	81.784	69.136	55.309	3.687	4.305	3.849
<i>Изо. FSDT $p=2$</i>	121.933	62.615	50.092	3.339	0.527 (3.864)	0.527 (3.455)
<i>Изо. FSDT $p=3$</i>	121.933	62.959	50.367	3.358	1.509 (4.186)	1.509 (3.742)
<i>Изо. FSDT $p=4$</i>	121.933	61.902	49.522	3.301	1.143 (4.200)	1.143 (3.745)
<i>Изо. TSDT $p=2$</i>	114.495	67.131	50.495	3.366	4.018 (3.590)	1.446 (3.172)
<i>Изо. TSDT $p=3$</i>	114.498	66.871	50.280	3.352	3.942 (3.709)	1.419 (3.365)
<i>Изо. TSDT $p=4$</i>	114.498	66.857	50.270	3.351	3.920 (3.533)	1.411 (3.347)

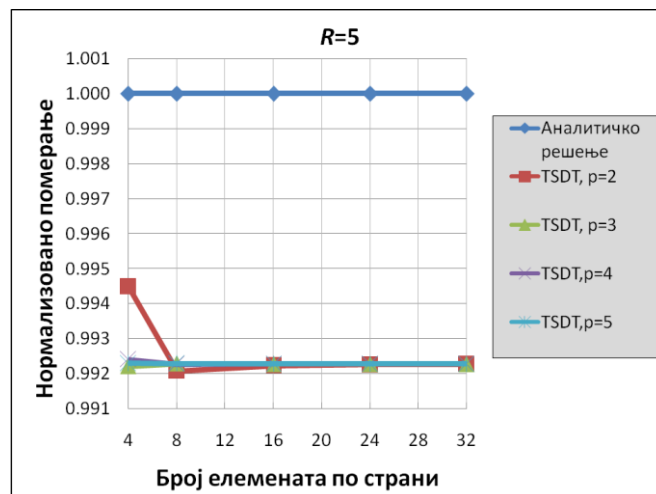
На сликама 6.3-6.5 приказана је конвергенција вредности нормализованог померања за сендвич са $R=5$ зависно од броја елемената и степена базних функција.



Слика 6.3.



Слика 6.4.

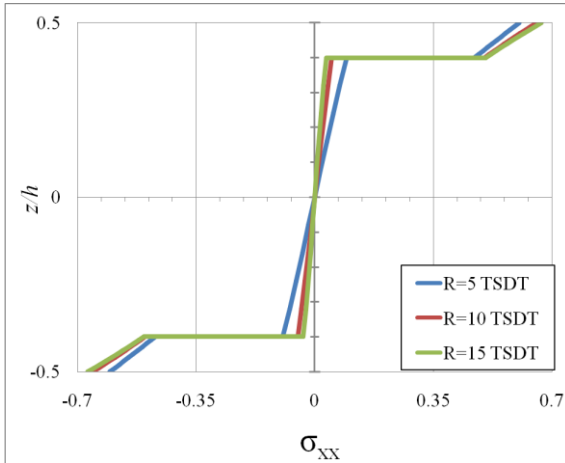


Слика 6.5.

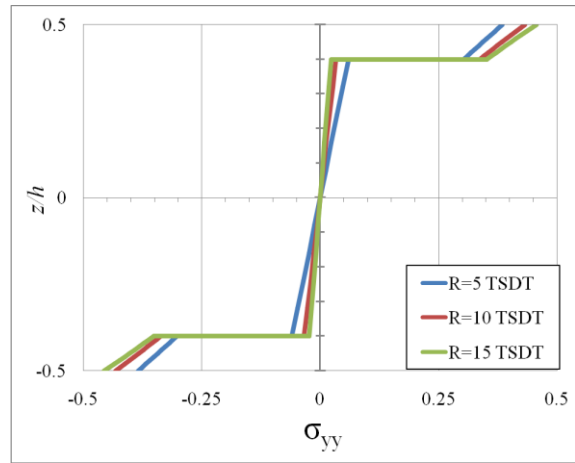
Уочљиво је да су вредности нормализованог померања тачније коришћењем FSDT него TSDT плоча. Ово је последица коришћења корективног фактора

смицања формулисаног на основу енергетских разматрања [40]. Приметно је да су вредности нормализованих напона тачнији код TSDT плоча.

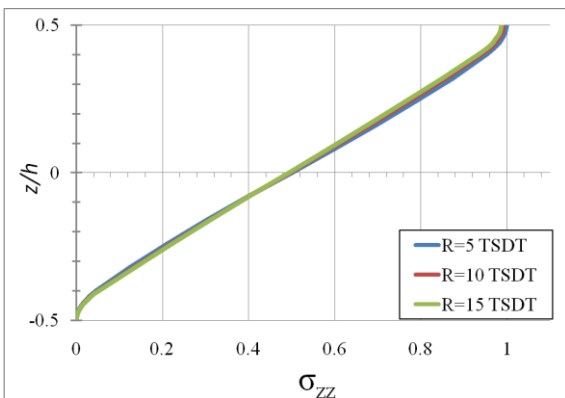
На сликама 6.6-6.11 приказана је расподела нормализованих напона по висини ламината за кубну TSDT плочу (односно за плочу четвртог степена код σ_{zz}).



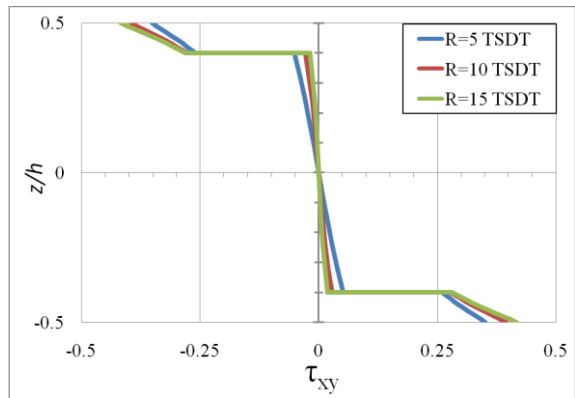
Слика 6.6.



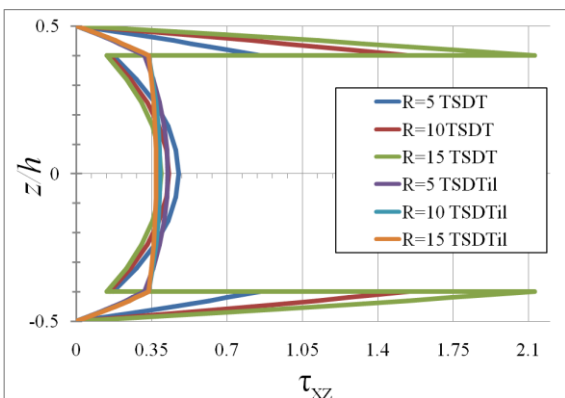
Слика 6.7.



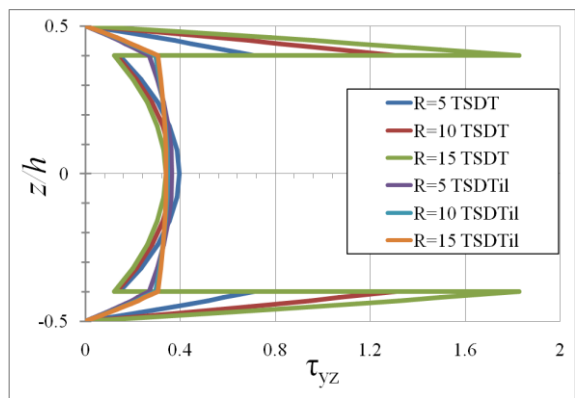
Слика 6.8.



Слика 6.9.



Слика 6.10.



Слика 6.11.

6.2.2 Трослојна $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламинирана плоча под дејством синусоидалног оптерећења

Трослојна композитна плоча дужине a , ширине b и дебљине h је слободно ослоњена по свим ивицама и оптерећена синусоидалним трансверзалним оптерећењем q . Нормализована померања и напони дефинисани су као:

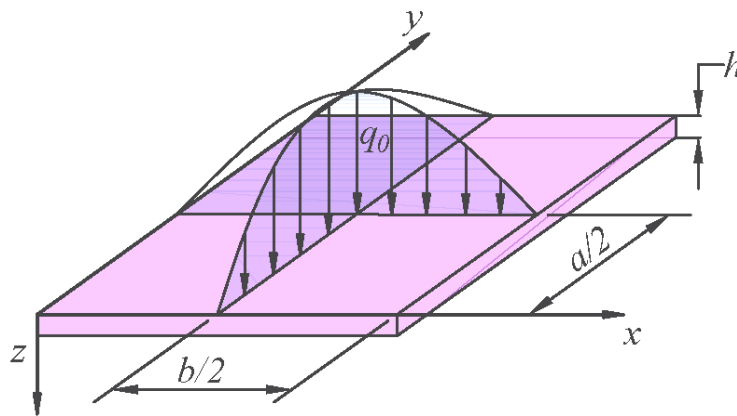
$$\bar{w} = (100E_2h^3) \cdot \omega(a/2, a/2, 0) / (qa^4); \quad \bar{\sigma}_{xx} = (h^2/b^2) \sigma_{xx}(a/2, a/2, h/2) / q;$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = (h^2/b^2) \sigma_{yy}(a/2, a/2, h/6) / q; \quad \bar{\tau}_{xy} = (h^2/b^2) \tau_{xy}(0, 0, h/2) / q;$$

$$\bar{\tau}_{yz} = (h/b) \tau_{yz}(a/2, 0, 0) / q; \quad \bar{\tau}_{xz} = (h/b) \tau_{xz}(0, b/2, 0) / q.$$

Однос $a/b=1$, а односи $a/h=4, 10, 20, 100$. Сви слојеви су једнаке дебљине и особине материјала сваког слоја су једнаке. Њихове бројчане вредности износе:

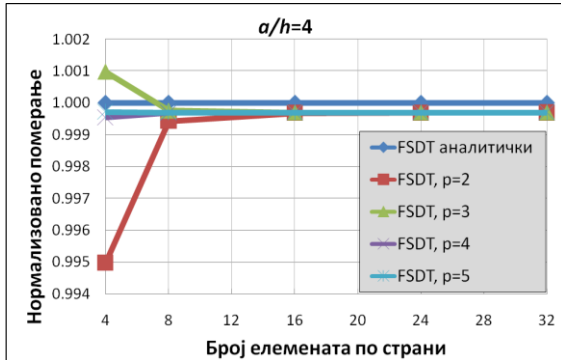
$$E_1=25E_2; G_{12}=G_{13}=0.5E_2; G_{23}=0.2E_2; \nu_{12}=0.25; \rho=1.$$



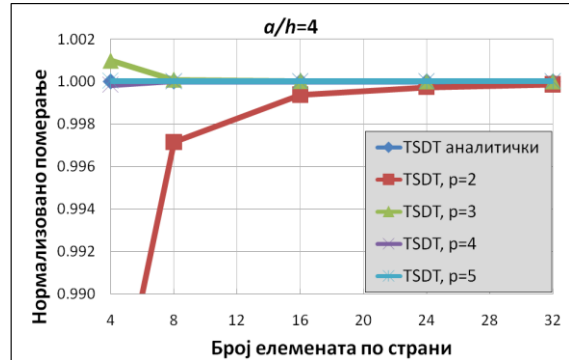
Слика 6.12. Геометрија и поставка проблема

Плоча је моделована у целисти и на њеним ивицама задати су гранични услови који одговарају слободно ослоњеним плочама. На сликама 6.13.-6.20. приказано је срачунато нормализовано померање на средини плоче у зависности од броја елемената по страни плоче за плоче формулисане различитим теоријама и са базним функцијама различитог степена. Примећује се да решења брзо конвергирају посебно за базне функције трећег и вишег реда. Такође, видљиво је да готово нема разлике у резултатима за базне функције четвртог и петог степена, због чега су напони у табелама 6.4-6.7 дати само за функције другог, трећег и четвртог степена. Резултати добијени изогеометријском методом поклапају се са аналитичким решењима одговарајућих теорија за базне функције трећег и вишег

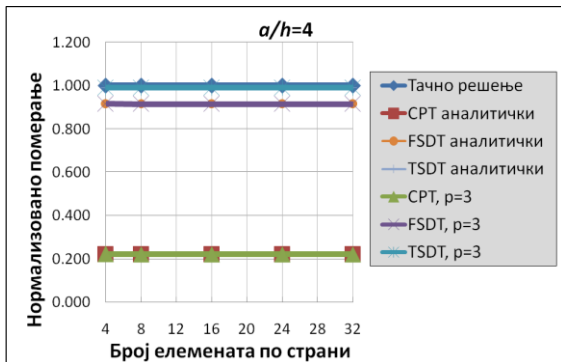
степену већ са коришћењем 8 или 16 елемената по страни. На сликама 6.15, 6.18 и 6.22 дат је упоредан приказ различитих теорија површинских носача. Видљиво је да за дебеле и умерено дебеле плоче класична ламинатна теорија даје веома лоше резултате.



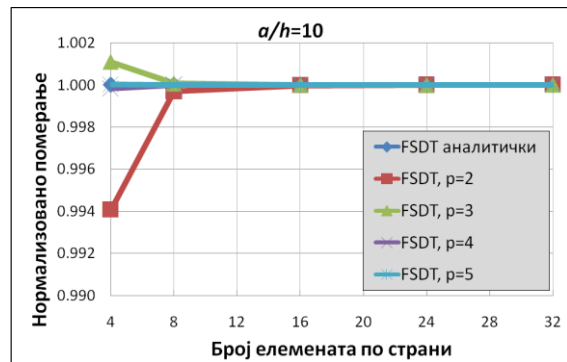
Слика 6.13. Нормализовано померање, $a/h=4$, FSDT



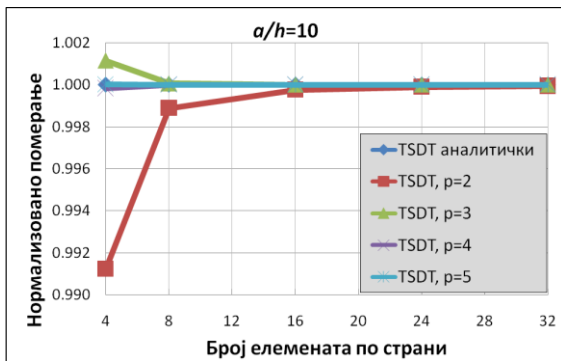
Слика 6.14. Нормализовано померање, $a/h=4$, TSDT



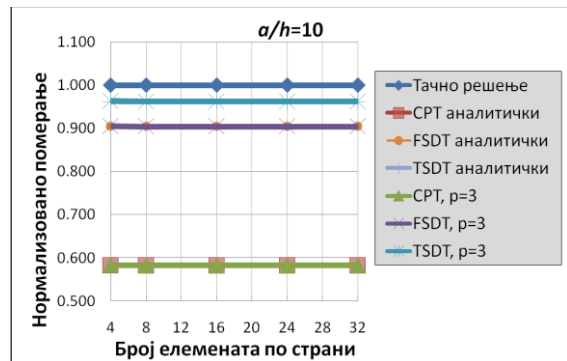
Слика 6.15. Нормализовано померање, $a/h=4$



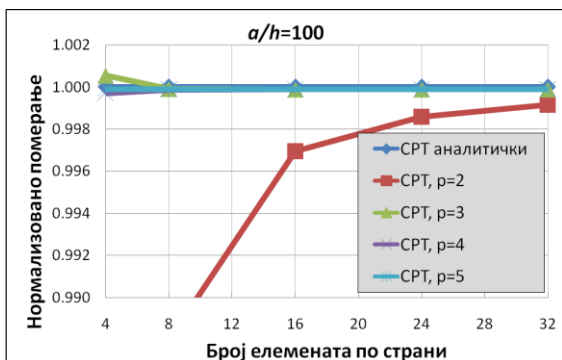
Слика 6.16. Нормализовано померање, $a/h=10$, FSDT



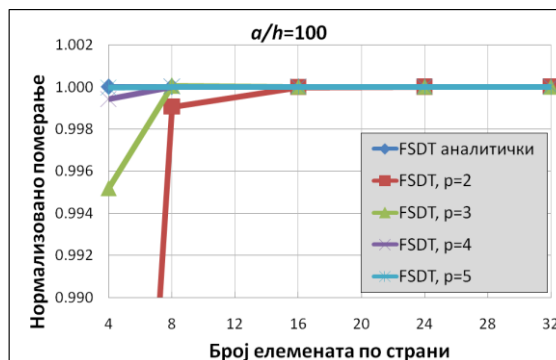
Слика 6.17. Нормализовано померање, $a/h=10$, TSDT



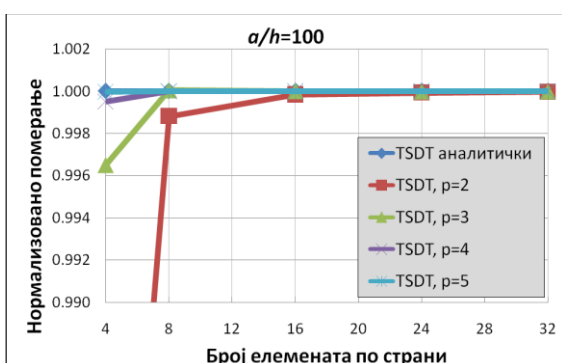
Слика 6.18. Нормализовано померање, $a/h=10$



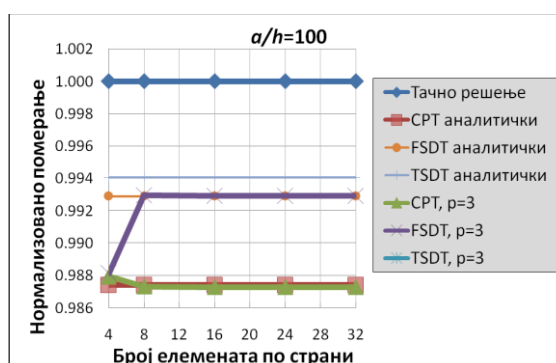
Слика 6.19. Нормализовано померање, $a/h=100$, CPT



Слика 6.20. Нормализовано померање, $a/h=100$, FSDT



Слика 6.21. Нормализовано померање, $a/h=100$, TSDT



Слика 6.22. Нормализовано померање $a/h=100$

У табелама 6.4-6.7 приказани су резултати добијени употребом NURBS базних функција другог, трећег и четвртог степена за плоче моделоване класичном теоријом плоча, теоријом смицања првог и теоријом смицања трећег реда са 16×16 елемената по страни плоче. Код теорије смицања првог реда коришћен је корективни фактор смицања $k_s=5/6$. Такође, приказано је и тачно решење добијено употребом тродимензионалне теорије еластичности [27], аналитичка решења добијена коришћењем одговарајуће теорије површинских носача [25], коначноелементна решења [66] добијена коришћењем елемената формулисаних помоћу Редијеве теорије смицања и Рајзнеровог функционала (RMVT TSDT) и унапређене Редијеве теорије [55]. Уз ове, приказано је и изогеометријско решење [103] добијено коришћењем Редијеве теорије трећег реда (Изо. TSDT) као и коришћењем теорије смицања петог реда (Изо. HSDT). Оба решења добијена су коришћењем кубних базних функција, на плочи моделованој са 17×17 елемената по страни.

Табела 6.4. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења, $a/h=4$

Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Аналитичко решење [27]	1.9423	0.755	0.556	0.0505	0.282	0.217
FSDT [25]	1.7763	0.4369	-	-	-	0.1562
TSDT [25]	1.9218	0.734	-	-	-	0.1832 (0.2086)
RMVT TSDT [66]	2.0064	0.7425	0.5112	0.0507	0.2821	0.2120
RHSDT [55]	1.9261	0.7694	0.5095	0.0501	0.2038	0.1817
Изо. TSDT [103]	1.9218	0.7352	0.5024	0.0497	0.2024	0.1832
Изо. HSDT [103]	1.9405	0.8056	0.4994	0.0526	0.2295	0.1945
Изо. FSDT $p=2$	1.7757	0.4398	0.4805	0.0372	0.1209 (0.3366)	0.1309 (0.1967)
Изо. FSDT $p=3$	1.7758	0.4370	0.4775	0.0369	0.1201 (0.3368)	0.1301 (0.1976)
Изо. FSDT $p=4$	1.7758	0.4370	0.4774	0.0369	0.1201 (0.3381)	0.1301 (0.1968)
Изо. TSDT $p=2$	1.9206	0.7335	0.5055	0.0502	0.2054 (0.1666)	0.1848 (0.2042)
Изо. TSDT $p=3$	1.9218	0.7370	0.5029	0.0497	0.2024 (0.2834)	0.1832 (0.2093)
Изо. TSDT $p=4$	1.9218	0.7345	0.5028	0.0497	0.2024 (0.2868)	0.2024 (0.2087)

Табела 6.5. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења, $a/h=10$

Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Аналитичко решење [27]	0.7405	0.590	0.288	0.029	0.357	0.123
FSDT [25]	0.6693	0.5134	0.2536	0.0252	0.4089 (0.3806)	0.0915 (0.1108)
TSDT [25]	0.7125	0.568	-	-	-	0.103
RMVT TSDT [66]	0.7353	0.5696	0.2727	0.0280	0.3682	0.1181
RHSDT [55]	0.7176	0.5866	0.5499	0.0282	0.2586	0.1057
Изо. TSDT [103]	0.7125	0.5679	0.2687	0.0277	0.2447	0.1033
Изо. HSDT [103]	0.7275	0.5831	0.2735	0.0284	0.2886	0.1106
Изо. FSDT $p=2$	0.6693	0.5167	0.2552	0.0253	0.1372 (0.3803)	0.0767 (0.1108)
Изо. FSDT $p=3$	0.6693	0.5134	0.2536	0.0252	0.1363 (0.3822)	0.1363 (0.112)
Изо. FSDT $p=4$	0.6693	0.5134	0.2536	0.0252	0.1363 (0.3806)	0.0762 (0.1108)
Изо. TSDT $p=2$	0.7123	0.5700	0.2706	0.0279	0.2486 (0.3211)	0.0762 (0.1147)
Изо. TSDT $p=3$	0.7125	0.5693	0.2690	0.0277	0.2447 (0.3697)	0.1033 (0.1171)
Изо. TSDT $p=4$	0.7125	0.5684	0.2690	0.0277	0.2447 (0.3698)	0.1033 (0.1067)

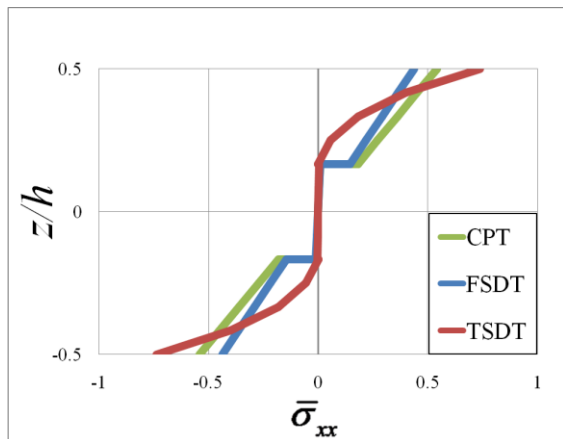
Табела 6.6. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења, $a/h=20$

Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Аналитичко решење [27]	-	0.552	0.210	0.0234	0.385	0.094
FSDT [25]	0.4921	0.5318	0.1997	0.0223	0.4205 (0.3912)	0.0759 (0.0901)
Изо. TSDT [103]	0.5041	0.5453	0.2040	0.0230	0.2549	0.0825
Изо. HSDT [103]	0.5086	0.5493	0.2056	0.0232	0.3030	0.0874
Изо. FSDT $p=2$	0.4921	0.5352	0.2009	0.0225	0.1411 (0.3908)	0.0900 (0.3908)
Изо. FSDT $p=3$	0.4921	0.5318	0.1997	0.0223	0.1402 (0.3484)	0.0904 (0.3484)
Изо. FSDT $p=4$	0.4921	0.5318	0.1997	0.0223	0.1402 (0.3912)	0.0901 (0.3912)
Изо. TSDT $p=2$	0.5040	0.5481	0.2055	0.0232	0.2600 (0.3484)	0.0836 (0.0902)
Изо. TSDT $p=3$	0.5041	0.5467	0.2043	0.0230	0.2549 (0.3890)	0.0825 (0.0921)
Изо. TSDT $p=4$	0.5041	0.5460	0.2043	0.0230	0.2549 (0.3885)	0.0825 (0.0918)

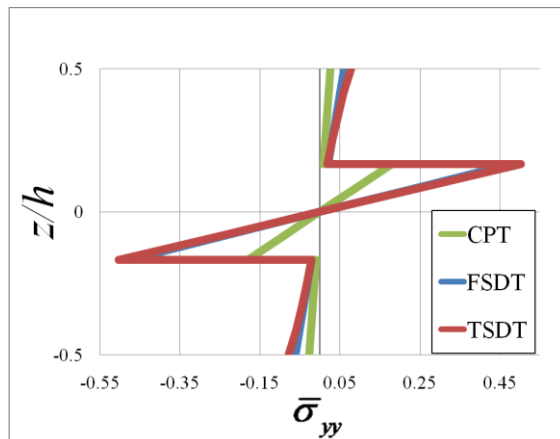
Табела 6.7. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења, $a/h=100$

Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
Аналитичко решење [27]	0.4368	0.539	0.181	0.0213	0.395	0.083
CPT [25]	0.4313	0.5387	0.1796	0.0213	(0.3951)	(0.0823)
FSDT [25]	0.4337	0.5384	0.1804	0.0213	0.4247 (0.3950)	0.0703 (0.0827)
TSDT [25]	0.4342	0.539	-	-	-	0.075
RMVT TSDT [66]	0.4409	0.5390	0.1806	0.0214	0.3948	0.0827
RHSDT [55]	0.4341	0.5399	0.1806	0.0214	0.3714	0.1945
Изо. TSDT [103]	0.4342	0.5382	0.1803	0.0213	0.2586	0.0750
Изо. HSDT [103]	0.4344	0.5384	0.1804	0.0214	0.3082	0.0788
Изо. FSDT $p=2$	0.4337	0.5419	0.1815	0.0215	0.1429 (0.3944)	0.0599 (0.0825)
Изо. FSDT $p=3$	0.4337	0.5400	0.1809	0.0214	0.1421 (0.3969)	0.0584 (0.3491)
Изо. FSDT $p=4$	0.4337	0.5393	0.1807	0.0214	0.1418 (0.3949)	0.0586 (0.0832)
Изо. TSDT $p=2$	0.4341	0.5412	0.1817	0.0215	0.2685 (0.3491)	0.0783 (0.0826)
Изо. TSDT $p=3$	0.4342	0.5396	0.1806	0.0214	0.2584 (0.3960)	0.747 (0.0832)
Изо. TSDT $p=4$	0.4342	0.5390	0.1806	0.0214	0.2586 (0.3951)	0.0750 (0.0827)
Изо. CPT $p=2$	0.4300	0.5371	0.1790	0.0214	(0.0208)	(0.0208)
Изо. CPT $p=3$	0.4312	0.5404	0.1801	0.0213	(0.3936)	(0.0822)
Изо. CPT $p=4$	0.4312	0.5387	0.1796	0.0213	(0.3967)	(0.0826)

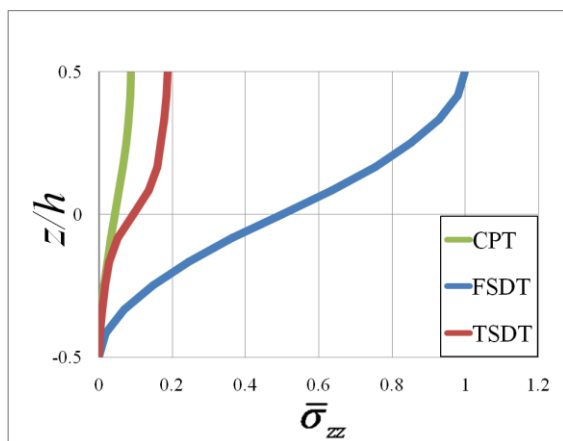
На сликама 6.23.-6.28. приказане су расподеле нормализованих напона по дебелини плоче моделоване са 16×16 изогеометријских елемената са кубним базним функцијама. Приказани су резултати за $a/h=4$.



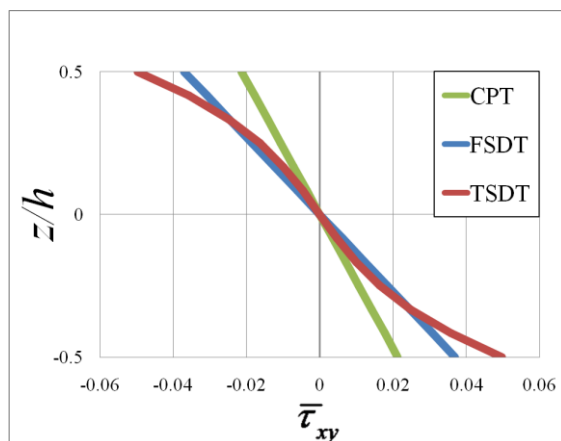
Слика 6.23.



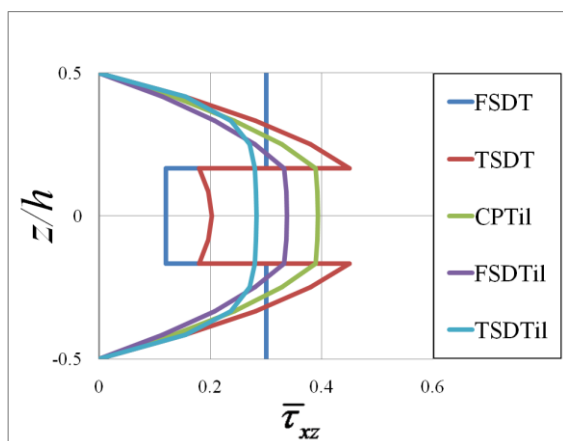
Слика 6.24.



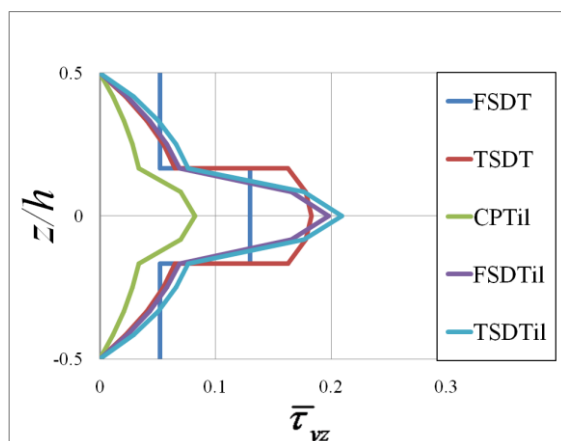
Слика 6.25.



Слика 6.26.

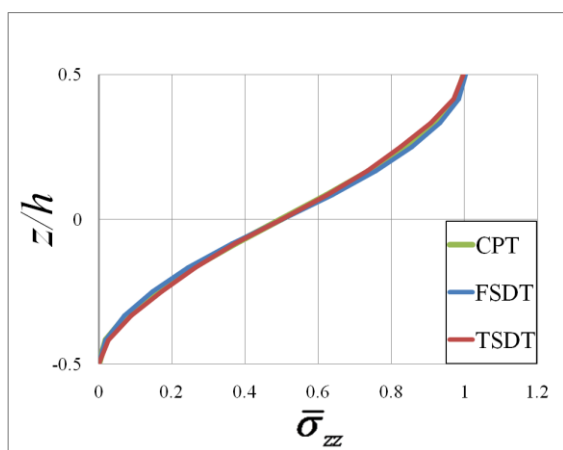


Слика 6.27.

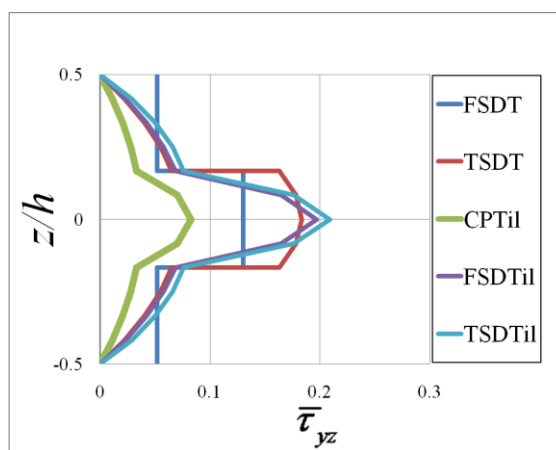


Слика 6.28.

Вредности трансверзалних нормалних напона за CPT и TSDT плоче не дају тачна решења будући да се у изразима појављују четврти изводи померања. На сликама 6.29. и 6.30. приказани су трансверзални напони добијени употребом базних функција четвртог степена. У овом случају и CPT и TSDT плоче дају готово подударна решења нормалних трансверзалних напона, док је расподела смичућих трансверзалних напона скоро истоветна расподели добијеној са кубним елементима.



Слика 6.29.



Слика 6.30.

6.2.3 Четворослојна $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламинирана плоча под дејством синусоидалног оптерећења

Ламинат са четири слоја чија је оријентација влакана $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$, дужине a , ширине b и дебљине h , слободно је ослоњен по свим ивицама и оптерећен синусоидалним трансверзалним оптерећењем q . Нормализована померања и напони дефинисани су као у претходном примеру. Однос $a/b=1$, а однос $a/h=4,10,20,100$. Особине материјала свих слојева су исте и имају исте вредности као у претходном поглављу.

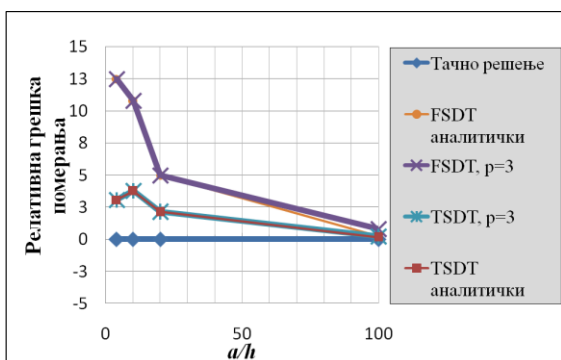
У табелама 6.8.-6.11. дати су резултати добијени коришћењем 16×16 изогеометријских елемената различитог степена базних функција p . Трансверзални смичући напони у заградама као и трансверзални нормални напон добијени су интеграцијом једначина равнотеже. Резултати су упоређени са тачним решењем теорије еластичности [27], аналитичким решењем одговарајућих теорија

слојева [25], методом коначних трака - FSM [74], и колокационом методом са радијалним базним функцијама - RBF [70].

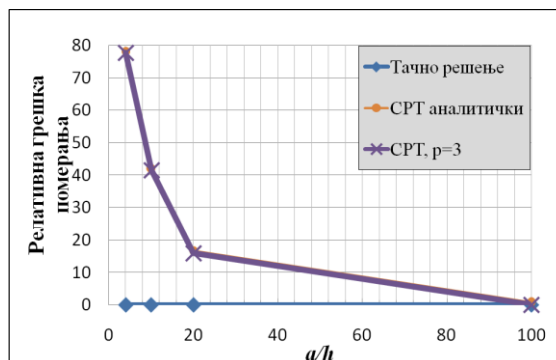
Утицај трансверзалних напона смањује се са смањењем дебљине плоче што је јасно видљиво у резултатима. Релативна грешка нормализованог померања у центру плоче за FSDT и TSDT плоче приказана је на слици 6.31. Резултати за CPT плоче независни су од односа a/h а релативна грешка која се прави приказана је на слици 6.32.

Табела 6.8. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења, $a/h=4$

a/h	Метод	$\bar{\omega}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
4	Аналитичко решење [27]	1.954	0.720	0.663	0.0467	0.219	0.292
	FSDT [25]	1.710	0.406	0.576	0.0308	0.140 (0.269)	0.196 (0.280)
	TSDT [25]	1.894	0.665	0.632	0.045	0.206 (0.231)	0.239 (0.298)
	FSM [74]	1.8937	0.6651	0.6322	0.0440	0.2064	-
	RBF [70]	1.8864	0.6659	0.6313	0.0433	0.1352	-
	Изо. FSDT $p=2$	1.7095	0.4085	0.5801	0.0310	0.1172 (0.2685)	0.1645 (0.2797)
	Изо. FSDT $p=3$	1.7095	0.4059	0.5764	0.0308	0.1165 (0.2697)	0.1635 (0.2811)
	Изо. FSDT $p=4$	1.7095	0.4059	0.5764	0.0308	0.1165 (0.2686)	0.1635 (0.2799)
	Изо. TSDT $p=2$	1.8924	0.6639	0.6352	0.0445	0.2100 (0.1239)	0.2409 (0.2850)
	Изо. TSDT $p=3$	1.8937	0.6677	0.6325	0.0440	0.2064 (0.2285)	0.2389 (0.2995)
	Изо. TSDT $p=4$	1.8937	0.6651	0.6322	0.0440	0.2064 (0.2318)	0.2389 (0.2987)



Слика 6.31.



Слика 6.32.

Табела 6.9. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења, $a/h=10$

a/h	Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
10	Аналитичко решење [27]	0.743	0.5590	0.4010	0.0275	0.301	0.196
	FSDT [25]	0.6627	0.4989	0.3614	0.0241	0.167 (0.3181)	0.130 (0.1807)
	TSDT [25]	0.715	0.546	0.389	0.0268	0.264 (0.307)	0.153 (0.192)
	FSM [74]	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640	-
	RBF [70]	0.7153	0.5466	0.4383	0.0267	0.3347	-
	Изо. FSDT $p=2$	0.6627	0.5021	0.3637	0.0243	0.1397 (0.3178)	0.1084 (0.1806)
	Изо. FSDT $p=3$	0.6627	0.4989	0.3614	0.0241	0.1388 (0.3194)	0.1076 (0.1814)
	Изо. FSDT $p=4$	0.6627	0.4989	0.3614	0.0241	0.1388 (0.3181)	0.1077 (0.1807)
	Изо. TSDT $p=2$	0.7146	0.5470	0.3910	0.0270	0.2688 (0.2622)	0.1545 (0.1866)
	Изо. TSDT $p=3$	0.7147	0.5465	0.3889	0.0268	0.2640 (0.3071)	0.1531 (0.1930)
Изо. TSDT $p=4$	0.7147	0.5456	0.3888	0.0268	0.2640 (0.3074)	0.1531 (0.1924)	

Табела 6.10. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења, $a/h=20$

a/h	Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
20	Аналитичко решење [27]	0.517	0.5430	0.3080	0.0230	0.328	0.156
	FSDT [25]	0.4912	0.5273	0.2956	0.0221	0.175 (0.333)	0.1087 (0.150)
	TSDT [25]	0.506	0.539	0.304	0.0228	0.282 (0.330)	0.123 (0.154)
	FSM [74]	0.5060	0.5393	0.3043	0.0228	0.2825	-
	RBF [70]	0.5070	0.5405	0.3648	0.0228	0.3818	-
	Изо. FSDT $p=2$	0.4912	0.5307	0.2975	-0.0222	0.1466 (0.3329)	0.0912 (0.1502)
	Изо. FSDT $p=3$	0.4912	0.5273	0.2957	-0.0221	0.1457 (0.3346)	0.0906 (0.1509)
	Изо. FSDT $p=4$	0.4912	0.5273	0.2957	-0.0221	0.1457 (0.3332)	0.0906 (0.1503)
	Изо. TSDT $p=2$	0.5059	0.5413	0.3060	-0.0230	0.2887 (0.2923)	0.1247 (0.1498)
	Изо. TSDT $p=3$	0.5060	0.5400	0.3044	-0.0228	0.2825 (0.3306)	0.1234 (0.1546)
	Изо. TSDT $p=4$	0.5060	0.5393	0.3043	-0.0228	0.2825 (0.3303)	0.1234 (0.1541)

Табела 6.11. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења, $a/h=100$

a/h	Метод	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
100	Аналитичко решење [27]	0.4347	0.5390	0.2760	0.0216	0.337	0.141
	CPT [25]	0.4312	0.5387	0.269	0.0213	(0.3393)	(0.1382)
	FSDT [25]	0.4337	0.5382	0.2704	0.0213	0.178 (0.339)	0.1008 (0.139)
	TSDT [25]	0.434	0.539	0.271	0.0213	0.290 (0.339)	0.112 (0.139)
	FSM [74]	0.4343	0.5387	0.2708	0.0213	0.2897	-
	RBF [70]	0.4365	0.5413	0.3359	0.0215	0.4106	-
	Изо. CPT $p=2$	0.4300	0.5371	0.2686	0.0214	(0.0208)	(0.0208)
	Изо. CPT $p=3$	0.4312	0.5404	0.2702	0.0213	(0.3380)	(0.1378)
	Изо. CPT $p=4$	0.4312	0.5387	0.2693	0.0213	(0.3406)	(0.1387)
	Изо. FSDT $p=2$	0.4337	0.5417	0.2722	0.0215	0.1497 (0.3386)	0.0856 (0.1384)
	Изо. FSDT $p=3$	0.4337	0.5382	0.2705	0.0213	0.1481 (0.3406)	0.0838 (0.1396)
	Изо. FSDT $p=4$	0.4337	0.5382	0.2705	0.0213	0.1483 (0.3390)	0.0840 (0.1386)
	Изо. TSDT $p=2$	0.4342	0.5409	0.2724	0.0215	0.3018 (0.2947)	0.1153 (0.1340)
	Изо. TSDT $p=3$	0.4343	0.539286	0.270899	0.02134	0.28956 (0.3398)	0.1114 (0.1396)
	Изо. TSDT $p=4$	0.4343	0.538701	0.270826	0.02134	0.28973 (0.3406)	0.1117 (0.1388)

6.2.4 Статичка анализа антисиметричног ламината са $[0^\circ/90^\circ]_n$ оријентацијом слојева под дејством синусоидалног оптерећења

Антисиметрични ламинат са $[0^\circ/90^\circ]_n$ оријентацијом влакана у слојевима, дужине a , ширине b и дебљине h , је слободно ослоњен по свим ивицама и оптерећен синусоидалним трансверзалним оптерећењем q . Однос $a/b=1$, а односи $a/h=5,10$. Особине материјала свих слојева су исте и одговарају вредностима у поглављу 6.2.2. Нормализована померања и напони дефинисани су као:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= (100E_2 / h^3) \cdot \omega(a/2, a/2, 0) / (qa^4); \\ \bar{\sigma}_{xx} &= -10(h^2 / b^2) \sigma_{xx}(a/2, a/2, -h/2) / q; \\ \bar{\sigma}_{yy} &= -10(h^2 / b^2) \sigma_{yy}(a/2, a/2, h/2) / q; \\ \bar{\tau}_{yz} &= -10(h/b) \tau_{yz}(a/2, 0, 0) / q.\end{aligned}$$

У табелама 6.12.-6.13. дати су резултати добијени коришћењем 16×16 изогеометријских елемената различитог степена базних функција p . Трансверзални смичући напони у заградама као и трансверзални нормални напон добијени су интеграцијом једначина равнотеже. Резултати су упоређени са тачним аналитичким и коначноелементним решењима одговарајућих теорија слојева [25].

Као и у претходним случајевима, решења добијена употребом квадратних базних функција у малој мери одступају од аналитичких решења одговарајућих теорија док су решења са базним функцијама вишег реда изванредно слажу са аналитичким решењима.

На сликама 6.33.-6.38. приказане су расподеле нормализованих раванских напона по дебљини $[0^\circ/90^\circ]$ плоче моделоване са 16×16 изогеометријских елемената са кубним базним функцијама. Приказани су резултати за $a/h=5$.

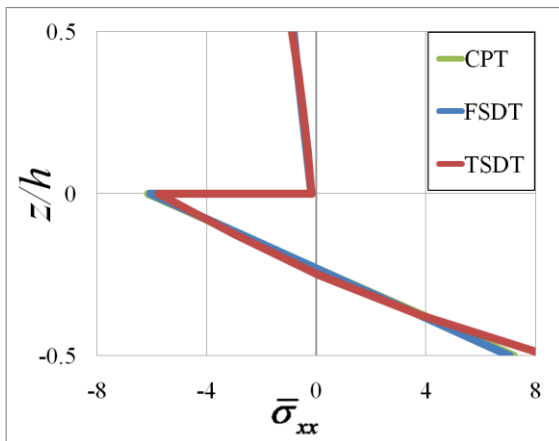
На сликама 6.39.-6.44. приказане су расподеле нормализованих раванских напона по дебљини $[0^\circ/90^\circ]$ плоче моделоване са 16×16 изогеометријских елемената са кубним базним функцијама. Приказани су резултати за $a/h=5$.

Табела 6.12. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ]_n$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења

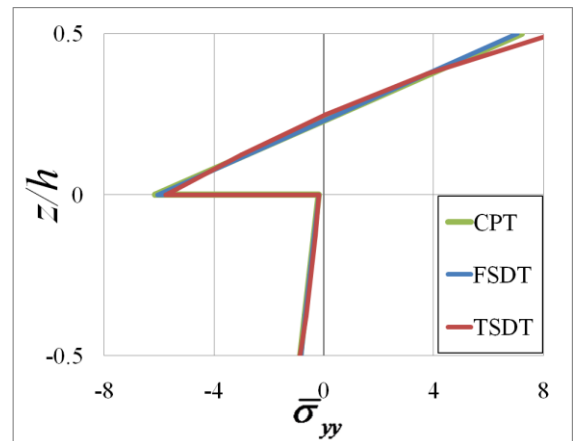
n	a/h	Method	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{yz}$
2	5	CPT analytical [22]	1.064	7.157	7.157	-
		CPT FEM [22]	1.043	6.659	6.659	-
		FSDT analytical [22]	1.758	7.157	7.157	2.729
		FSDT FEM [22]	1.759	6.948	6.948	-
		HSDT analytical [22]	1.667	8.385	8.385	3.155
		HSDT FEM [22]	1.667	7.669	7.669	-
		<i>Изо.</i> FSDT $p=2$	1.7583	6.9933	6.9884	2.1768 (1.2237)
		<i>Изо.</i> FSDT $p=3$	1.7584	7.0427	7.0427	2.2173 (1.2231)
		<i>Изо.</i> FSDT $p=4$	1.7584	6.8943	6.8943	2.1066 (1.2205)
	<i>Изо.</i> TSDT $p=2$	1.6660	-8.3898	8.3898	3.2194 (-0.0173)	
	<i>Изо.</i> TSDT $p=3$	1.6670	-8.4079	8.4079	3.1564 (1.1203)	
	<i>Изо.</i> TSDT $p=4$	1.6670	-8.3854	8.3854	3.1545 (1.1563)	
	10	CPT analytical [22]	1.064	7.157	7.157	-
		CPT FEM [22]	1.043	6.659	6.659	-
		FSDT analytical [22]	1.237	7.157	7.157	2.729
		FSDT FEM [22]	1.238	6.948	6.948	-
		HSDT analytical [22]	1.216	7.468	7.468	3.190
		HSDT FEM [22]	1.214	6.829	6.829	-
<i>Изо.</i> FSDT $p=2$		1.2372	6.9933	6.9884	2.1894 (1.2237)	
<i>Изо.</i> FSDT $p=3$		1.2373	7.0427	7.0427	2.2173 (1.2232)	
<i>Изо.</i> FSDT $p=4$		1.2373	6.8943	6.8943	2.1066 (1.2205)	
<i>Изо.</i> TSDT $p=2$	1.2156	7.4802	7.4802	3.2855 (0.2573)		
<i>Изо.</i> TSDT $p=3$	1.2161	7.4843	7.4843	3.1901 (1.1846)		
<i>Изо.</i> TSDT $p=4$	1.2161	7.4679	7.4679	3.1901 (1.2098)		
<i>Изо.</i> CPT $p=2$	1.0562	7.0651	7.0651	(-4.3529)		
<i>Изо.</i> CPT $p=3$	1.0636	7.2003	7.2003	(1.1202)		
<i>Изо.</i> CPT $p=4$	1.0636	7.1574	7.1574	(1.2650)		

Табела 6.13. Нормализована померања и напони $[0^\circ/90^\circ]_5$ ламиниране плоче под дејством синусоидалног оптерећења

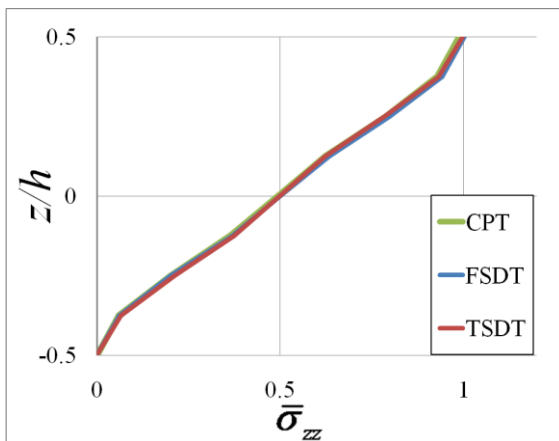
n	a/h	Method	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{yz}$	
5	5	CPT analytical [22]	0.442	5.009	5.009	-	
		CPT FEM [22]	0.444	4.611	4.611	-	
		FSDT analytical [22]	1.137	5.009	5.009	2.729	
		FSDT FEM [22]	1.137	4.864	4.864	-	
		HSDT analytical [22]	1.129	6.340	6.340	3.362	
		HSDT FEM [22]	1.135	5.762	5.762	-	
		<i>Изо.</i> FSDT $p=2$	1.1365	4.8943	4.8908	2.1774 (2.3663)	
		<i>Изо.</i> FSDT $p=3$	1.1365	4.9288	4.9288	2.2173 (2.3774)	
		<i>Изо.</i> FSDT $p=4$	1.1365	4.8250	4.8250	2.1066 (2.3679)	
	<i>Изо.</i> TSDT $p=2$	1.1289	6.3482	6.3482	3.4413 (1.7021)		
	<i>Изо.</i> TSDT $p=3$	1.1294	6.3554	6.3554	3.3625 (2.2009)		
	<i>Изо.</i> TSDT $p=4$	1.1294	6.3402	6.3402	3.3624 (2.2106)		
	10	10	CPT analytical [22]	0.442	5.009	5.009	-
			CPT FEM [22]	0.444	4.611	4.611	-
			FSDT analytical [22]	0.615	5.009	5.009	2.729
			FSDT FEM [22]	0.616	4.863	4.863	-
			HSDT analytical [22]	0.616	5.364	5.364	3.408
			HSDT FEM [22]	0.619	4.842	4.842	-
<i>Изо.</i> FSDT $p=2$			0.6154	4.8943	4.8908	2.1796 (2.3663)	
<i>Изо.</i> FSDT $p=3$			0.6154	4.9288	4.9288	2.2173 (2.3774)	
<i>Изо.</i> FSDT $p=4$			0.6154	4.8250	4.8250	2.1066 (2.3679)	
<i>Изо.</i> TSDT $p=2$			0.6159	5.3631	5.3631	3.4656 (2.0181)	
<i>Изо.</i> TSDT $p=3$			0.6160	5.3547	5.3547	3.4082 (2.3291)	
<i>Изо.</i> TSDT $p=4$	0.6160	5.3464	5.3464	3.4081 (2.3297)			
<i>Изо.</i> CPT $p=2$	0.4404	4.9907	4.9907	(-0.0930)			
<i>Изо.</i> CPT $p=3$	0.4418	5.0269	5.0269	(2.3548)			
<i>Изо.</i> CPT $p=4$	0.4418	5.0091	5.0091	(2.3793)			



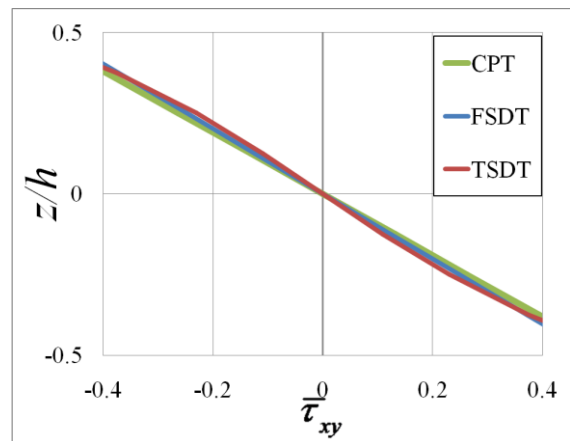
Слика 6.33.



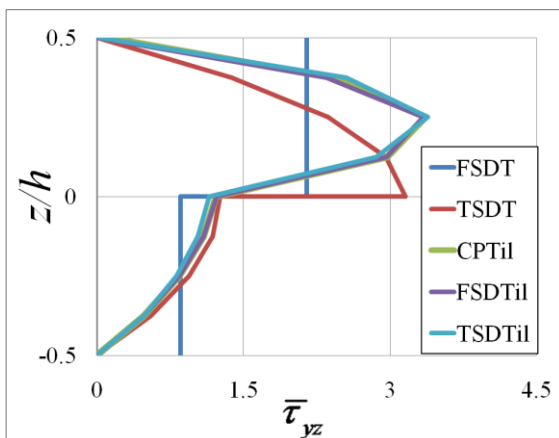
Слика 6.34.



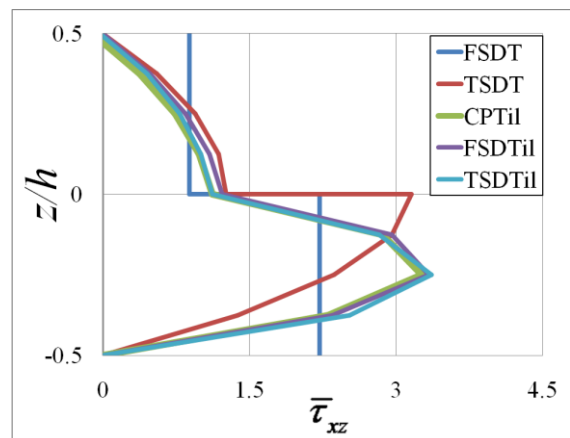
Слика 6.35.



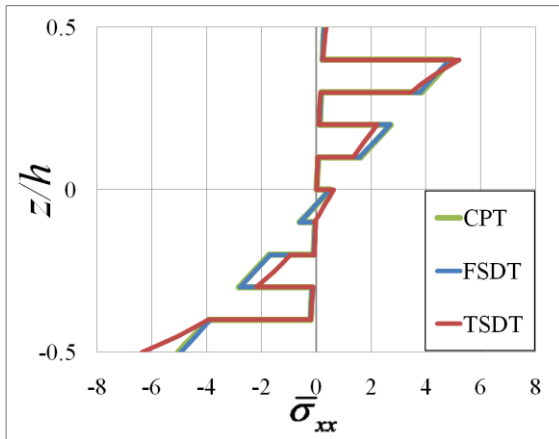
Слика 6.36.



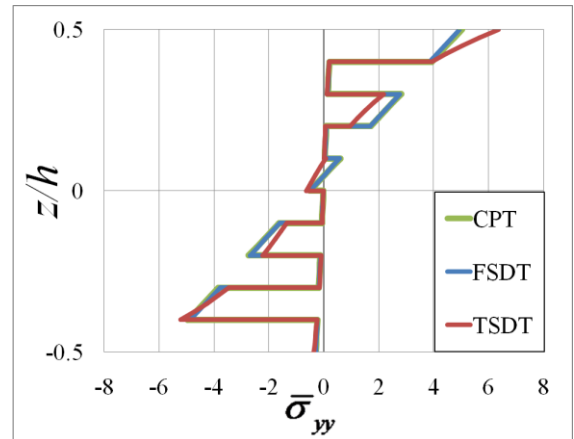
Слика 6.37.



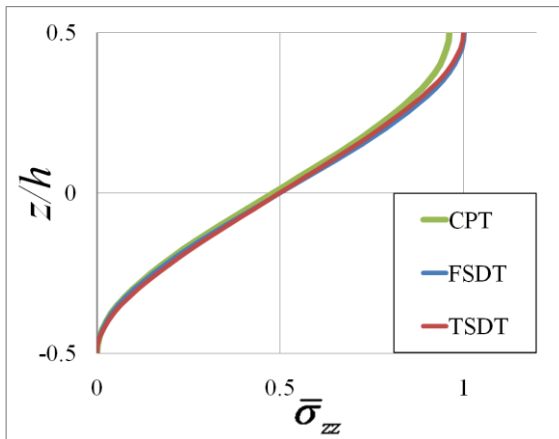
Слика 6.38.



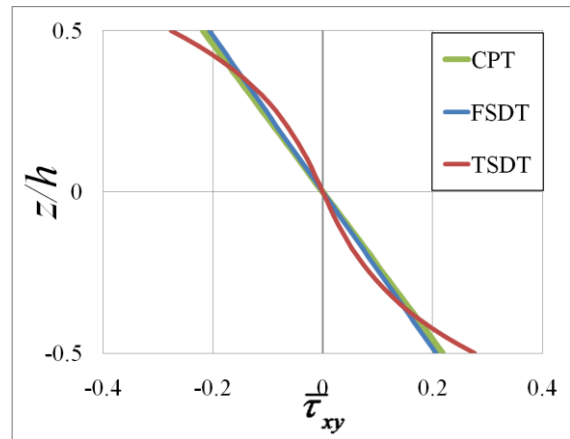
Слика 6.39.



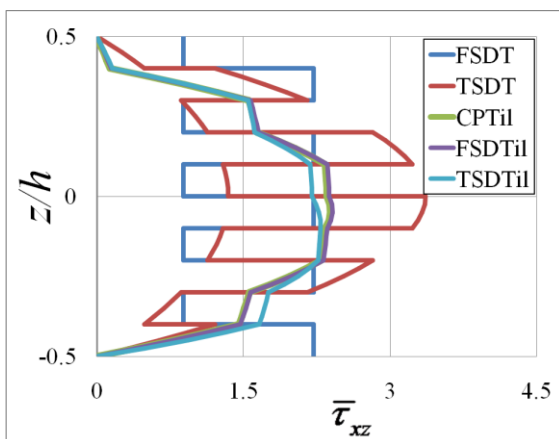
Слика 6.40.



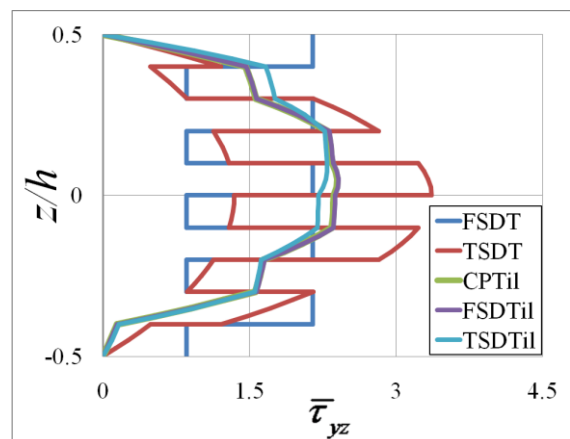
Слика 6.41.



Слика 6.42.



Слика 6.43.



Слика 6.44.

6.3. Анализа сопствених вибрација ламинираних композитних плоча

6.3.1 Квадратне ламиниране плоче

У овом поглављу биће приказани резултати анализе сопствених модова осциловања за [0/90], [0/90/0] и [0/90/0/90] ламинате. Сви слојеви имају исте механичке карактеристике: $E_1=25.1$, $E_2=4.8$, $G_{12}=1.36$, $G_{13}=1.2$; $G_{23}=0.47$ и $\nu_{12}=0.036$. Густина ρ има јединичну вредност. Плоче су слободно ослобођење на свим ивицама и сви слојеви имају исту дебљину и густину. Димензије плоче: дужине a , ширина b и дебљина h задате су преко односа $a/b=1$ и однос $b/h=10$. Нормализована фреквенција дефинисана је као:

$$\bar{\omega} = (\omega h) (\rho / E_2)^{1/2}$$

У табелама 14, 15 и 16 приказане су прве четири нормализоване сопствене фреквенције које одговарају вредностима Фуријеових константи $m,n=1,2$. Корективни фактор смицања износи $\pi^2/12$. Плоча је моделована са 8×8 елемената. Упоредени су резултати добијени употребом квадратних, кубних и базних функција четвртог степена са тачним решењем и аналитичким решењима одговарајућих теорија површинских носача [30].

Табела 14. Нормализоване сопствене фреквенције $\bar{\omega}$ за [0/90] ламинат

[0/90]	$m,n=1$	$m,n=1,2$ $m,n=2,1$	$m,n=2$
Exact [30]	0.6027	0.14539	0.20229
CPT [30]	0.06513	0.17744	0.25814
FSDT [30]	0.06038	0.14545	0.20271
HSDT [30]	0.06057	0.14681	0.20482
IGA CPT $p=2$	0.06614	0.18694	0.27475
IGA CPT $p=3$	0.06567	0.18122	0.26693
IGA CPT $p=4$	0.06567	0.18114	0.26683
IGA FSDT $p=2$	0.06119	0.14882	0.20875
IGA FSDT $p=3$	0.06118	0.14868	0.20850
IGA FSDT $p=4$	0.06118	0.14867	0.20849

IGA TSDT $p=2$	0.06056	0.14703	0.20508
IGA TSDT $p=3$	0.06053	0.14664	0.20449
IGA TSDT $p=4$	0.06053	0.14663	0.20448

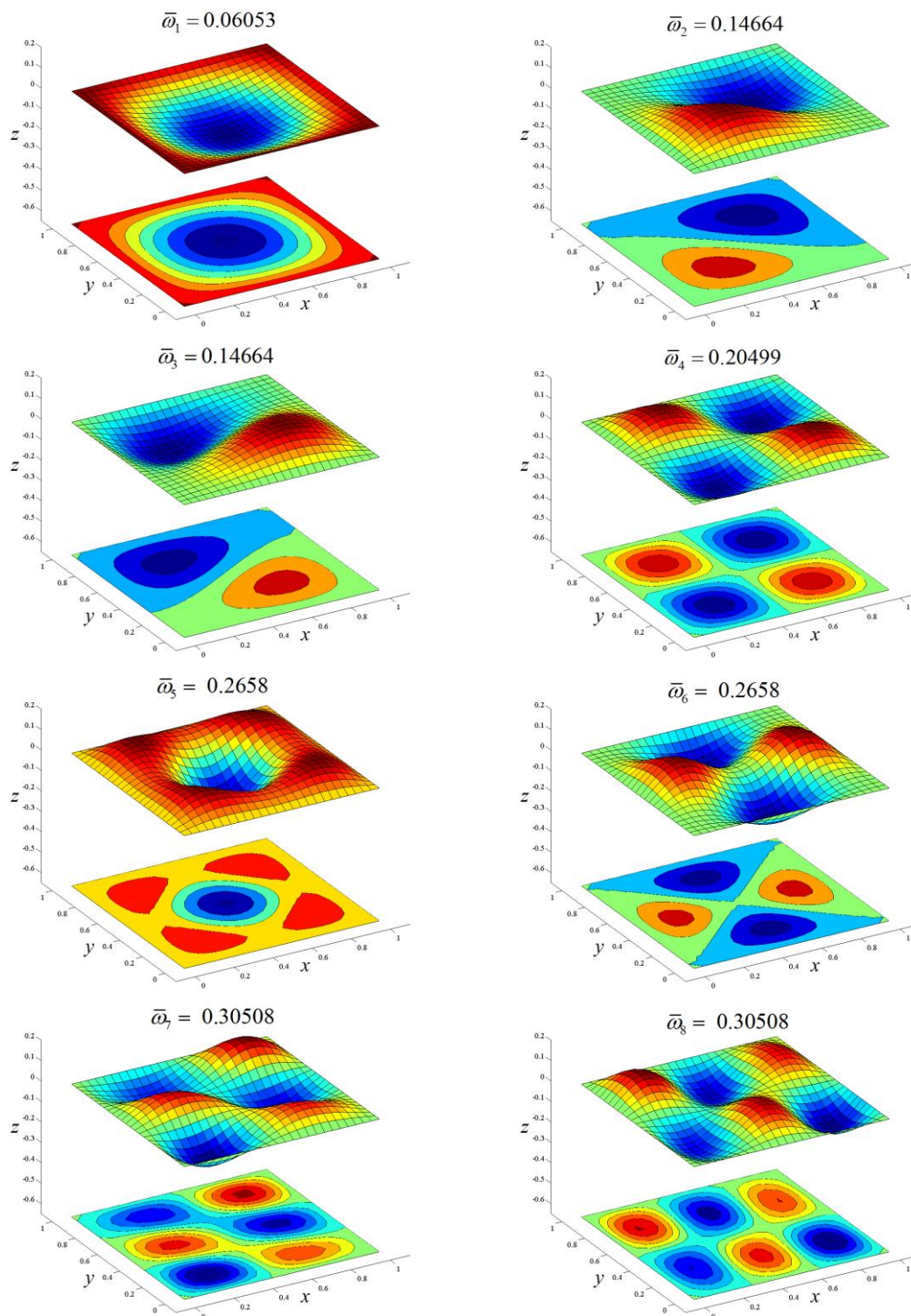
Табела 15. Нормализоване сопствене фреквенције $\bar{\omega}$ за $[0/90/0]$ ламинат

$[0/90/0]$	$m,n=1$	$m,n=1,2$	$m,n=2,1$	$m,n=2$
Exact [30]	0.06715	0.12811	0.17217	0.20798
CPT [30]	0.07769	0.15185	0.26599	0.31077
FSDT [30]	0.06931	0.12886	0.18674	0.22055
HSDT [30]	0.06839	0.13010	0.17921	0.21526
IGA CPT $p=2$	0.07876	0.15791	0.27829	0.32767
IGA CPT $p=3$	0.07834	0.15510	0.27171	0.31186
IGA CPT $p=4$	0.07834	0.15507	0.27163	0.31142
IGA FSDT $p=2$	0.07021	0.13213	0.19006	0.22659
IGA FSDT $p=3$	0.07021	0.13201	0.18989	0.22634
IGA FSDT $p=4$	0.07021	0.13201	0.18989	0.22634
IGA TSDT $p=2$	0.06837	0.13014	0.17957	0.21551
IGA TSDT $p=3$	0.06835	0.12993	0.17908	0.21494
IGA TSDT $p=4$	0.06835	0.12993	0.17907	0.21494

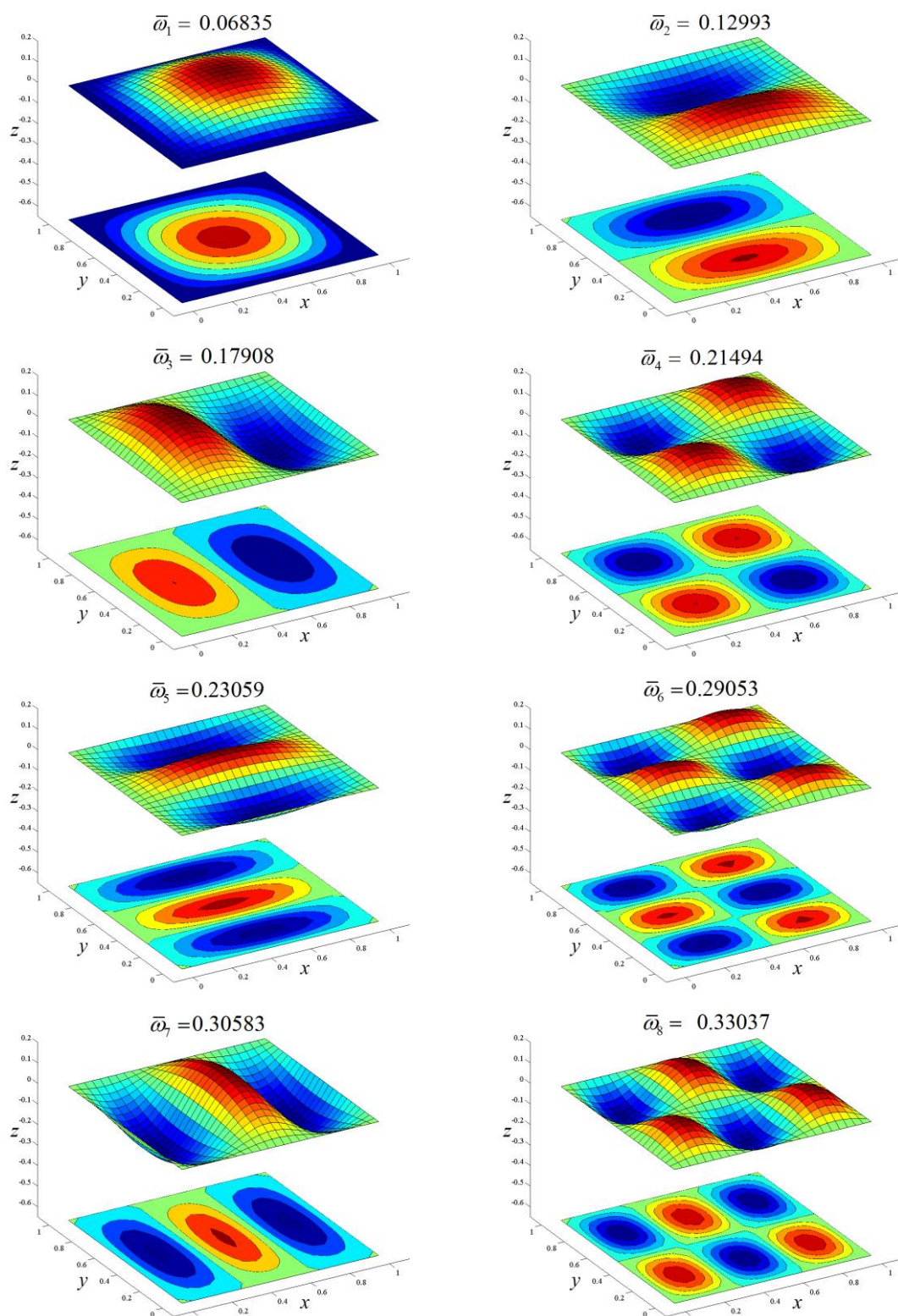
Табела 14. Нормализоване сопствене фреквенције $\bar{\omega}$ за $[0/90/0/90]$ ламинат

$[0/90/0/90]$	$m,n=1$	$m,n=1,2$ $m,n=2,1$	$m,n=2$
Exact [30]	0.06621	0.15194	0.20841
CPT [30]	0.07474	0.20737	0.29824
FSDT [30]	0.06791	0.16066	0.22097
HSDT [30]	0.06789	0.16065	0.22108
IGA CPT $p=2$	0.07579	0.21699	0.31577
IGA CPT $p=3$	0.07536	0.21181	0.30857
IGA CPT $p=4$	0.07536	0.21176	0.30849
IGA FSDT $p=2$	0.06877	0.16390	0.22648
IGA FSDT $p=3$	0.06877	0.16375	0.22622
IGA FSDT $p=4$	0.06877	0.16375	0.22622
IGA TSDT $p=2$	0.06787	0.16085	0.22133
IGA TSDT $p=3$	0.06785	0.16048	0.22077
IGA TSDT $p=4$	0.06785	0.16048	0.22076

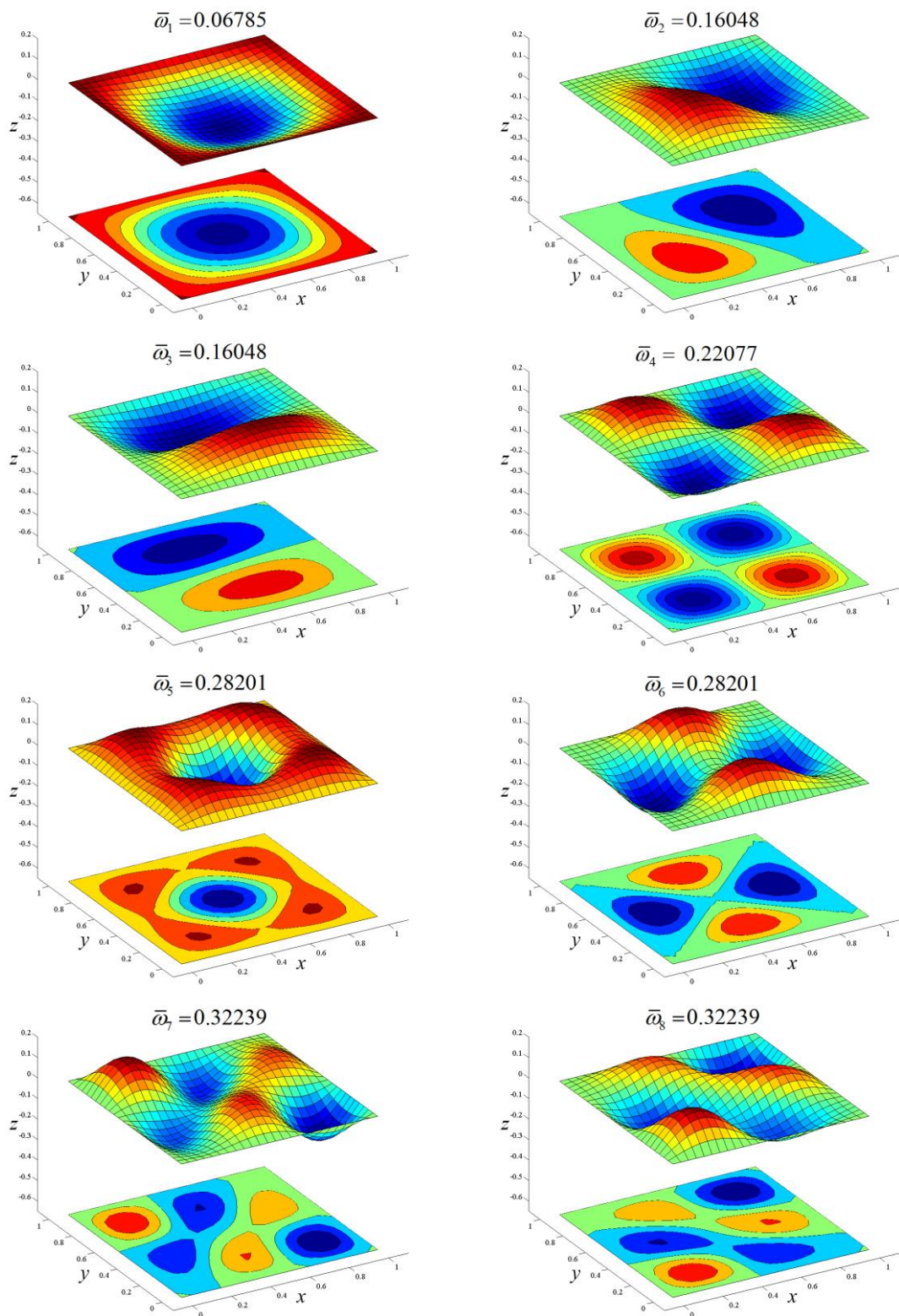
На сликама 6.45.-6.47. приказано је првих осам модова осциловања за $[0/90]$, $[0/90/0]$ и $[0/90/0/90]$ ламинате који су добијени коришћењем мреже 8×8 изогеометријских TSDT елемената.



Слика 6.45. Првих осам модова осциловања $[0^\circ/90^\circ]$ ламината слободно ослоњеног по свим ивицама - 8×8 кубних TSDT изогеометријских елемената



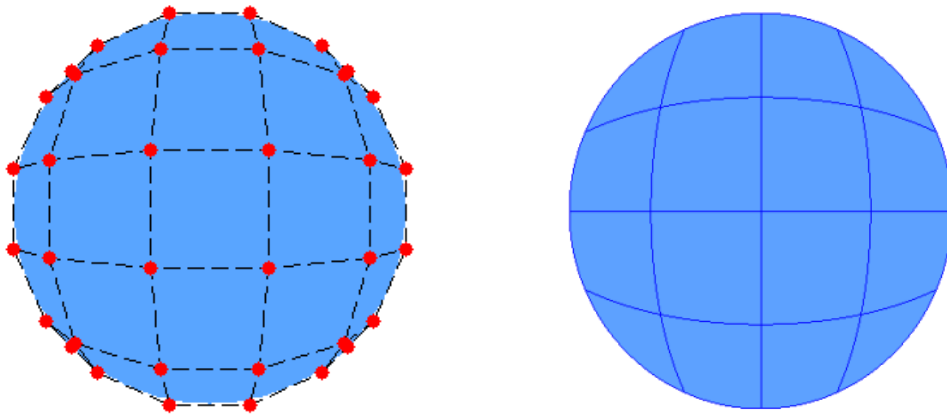
Слика 6.46. Првих осам модова осциловања $[0^\circ/90^\circ/90^\circ]$ ламината слободно ослоњеног по свим ивицама - 8×8 кубних TSDT изогеометријских елемената



Слика 6.47. Првих осам мода осциловања $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ ламината слободно ослоњеног по свим ивицама - 8×8 кубних TSDT изогеометријских елемената

6.3.2 Кружне ламиниране плоче

У овом примеру извршена је модална анализа симетричне кружне четворослојне ламиниране плоче са распоредом влакана $[\theta^\circ / -\theta^\circ / -\theta^\circ / \theta^\circ]$ која је укљештена по свим ивицама. Карактеристике материјала свих слојева су исте и износе: $E_1=40E_2$, $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$, $\rho=1$. Анализа је вршена за угао оријентације влакана $\theta=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ и однос пречника према дебљини $D/h=10$. Кружна геометрија плоче моделована је са одговарајућим контролним полигоном како би се добила правилна расподела параметарских линија. На слици 6.48 приказан је контролни полигон за кружну плочу са 4 чворна интервала различита од нуле (4 елемента).

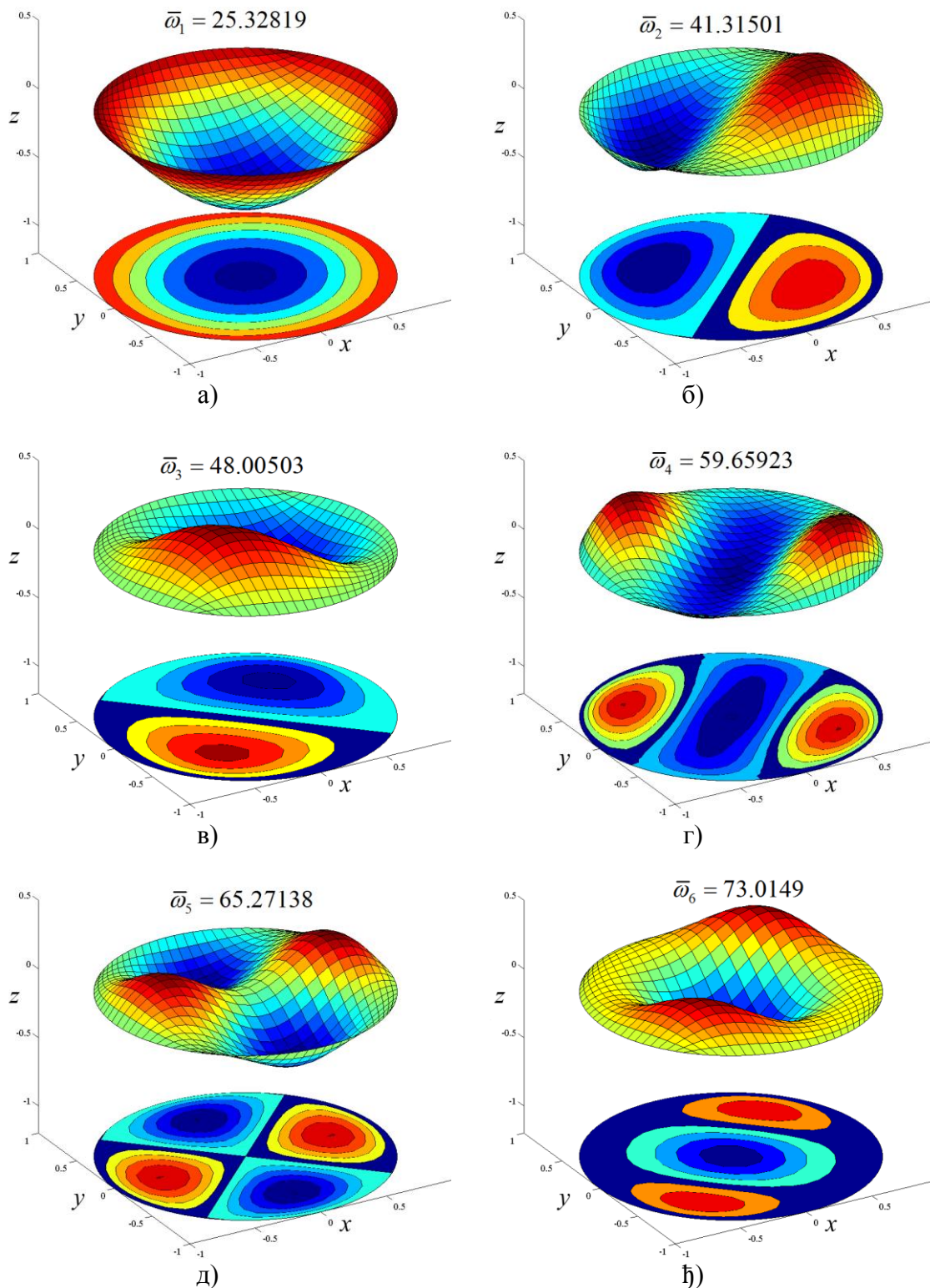


Слика 6.48. Контролни полигон и параметарске криве (мрежа изогеометријских елемената) за квадратну плочу са четири елемента

У табели 17. приказани су резултати добијени коришћењем мреже од 8×8 изогеометријских елемената за плоче са TSDT формулацијом. Добијени резултати упоређени су са резултатима објављеним у [62] и [73] где је приказана анализа FSDT плоча помоћу MISQ20 елемената и MLSQ елемената. Такође наведени су и резултати добијени изогеометријском анализом FSDT плоча [100]. Добијени резултати су у доброј корелацији са осталим објављеним резултатима. На слици 6.49 приказано је првих шест модова осциловања кружне укљештене плоче са оријентацијом влакана $[45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$ добијених са 8×8 TSDT изогеометријских елемената са базним функцијама четвртог степена.

Табела 17. Нормализоване сопствене фреквенције $\bar{\omega}$ за $[\theta^\circ / -\theta^\circ / -\theta^\circ / \theta^\circ]$ кружну ламинирану почу

θ°	Method	Modes					
		1	2	3	4	5	6
0	FSDT - MISQ20 [62]	22.123	29.768	41.726	42.805	50.756	56.950
	FSDT - MLSQ [73]	22.211	29.651	41.101	42.635	50.309	54.553
	IGA FSDT p=2 [100]	22.0989	29.5409	40.8126	42.5447	50.2975	54.7732
	IGA FSDT p=3 [100]	22.1110	29.5550	40.8150	42.5650	50.3201	54.7332
	IGA FSDT p=4 [100]	22.1227	29.5735	40.8410	42.5854	50.3478	54.7609
	IGA TSDT p=2	22.8351	31.4480	45.5659	48.1996	49.5516	56.7189
	IGA TSDT p=3	22.6745	31.2413	45.3267	48.1985	49.4442	56.5244
	IGA TSDT p=4	22.6127	31.0741	45.0771	48.1983	49.4310	56.4541
15	FSDT - MISQ20 [62]	22.698	31.568	43.635	44.318	53.468	60.012
	FSDT - MLSQ [73]	22.774	31.455	43.350	43.469	52.872	57.386
	IGA FSDT p=2 [100]	22.6500	31.3012	43.3124	43.3833	52.8952	57.8347
	IGA FSDT p=3 [100]	22.6626	31.3166	43.3335	43.3899	52.9197	57.8064
	IGA FSDT p=4 [100]	22.6751	31.3359	43.3550	43.4165	52.9486	57.8349
	IGA TSDT p=2	23.4537	33.6251	48.4304	49.4626	58.8442	66.4838
	IGA TSDT p=3	23.2857	33.4227	48.1945	49.3160	58.5463	66.1343
	IGA TSDT p=4	23.2140	33.2644	47.9875	49.3001	58.4857	65.9376
30	FSDT - MISQ20 [62]	24.046	36.399	44.189	52.028	57.478	67.099
	FSDT - MLSQ [73]	24.071	36.153	43.968	51.074	56.315	66.220
	IGA FSDT p=2 [100]	23.9428	35.9896	43.7948	50.9574	56.6770	66.0745
	IGA FSDT p=3 [100]	23.9565	36.0085	43.8164	50.9745	56.7038	66.1011
	IGA FSDT p=4 [100]	23.9703	36.0298	43.8390	51.0024	56.7337	66.1316
	IGA TSDT p=2	24.9036	38.7086	48.9210	56.0703	62.7850	75.2087
	IGA TSDT p=3	24.7076	38.5058	48.7678	55.8127	62.4374	74.7126
	IGA TSDT p=4	24.6221	38.4000	48.7367	55.7171	62.3863	74.6206
45	FSDT - MISQ20 [62]	24.766	39.441	43.817	57.907	57.945	66.297
	FSDT - MLSQ [73]	24.752	39.181	43.607	56.759	56.967	65.571
	IGA FSDT p=2 [100]	24.6335	38.9379	43.4120	56.8708	56.9251	65.2751
	IGA FSDT p=3 [100]	24.6478	38.9591	43.4330	56.8937	56.9531	65.3002
	IGA FSDT p=4 [100]	24.6622	38.9814	43.4559	56.9205	56.9844	65.3320
	IGA TSDT p=2	25.6205	41.4886	48.2065	59.9176	65.6484	73.5627
	IGA TSDT p=3	25.4140	41.3547	48.0552	59.6995	65.2816	73.0792
	IGA TSDT p=4	25.3282	41.3150	48.0050	59.6592	65.2714	73.0149



Слика 6.49. Првих шест мода осциловања кружне $[45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / 45^\circ]$ плоче укљештене по свим ивицама - 8×8 TSDT изогеометријских елемената са $p=4$

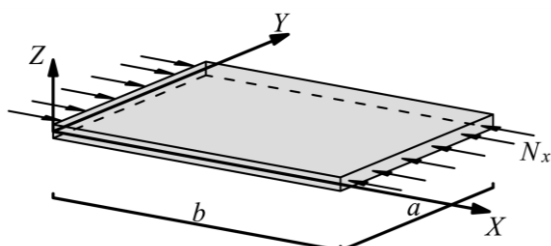
6.4 Анализа бифуркационе стабилности ламинираних композитних плоча

6.4.1 Ламинирана плоча под дејством једноосне компресије

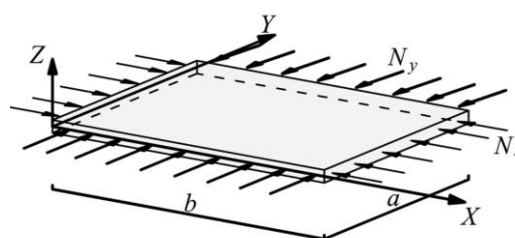
У овом примеру разматра се симетрични четворослојни $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламинат слободно ослоњен по свим ивицама оптерећен на притисак дуж једне осе у равни ламината (слика 6.50). Материјал је исти за све слојеве и његове карактеристике су исте као у поглављу 6.3.2. Бездимензионални фактор извијања дефинисан је као:

$$\bar{\lambda} = \lambda_{cr} a^2 / (E_2 h^3)$$

где је a -дужина ивице, h - дебљина ламината, λ_{cr} - критични фактор извијања, а E_2 модул еластичности. У табели 18 приказани су резултати добијени за различите односе a/h . Резултати су упоређени са аналитичким решењима одговарајућих теорија површинских носача [46] и са изогеометријским FSDT решењима [100]. Добијени резултати су у доброј корелацији са аналитичким решењима.



Слика 6.50.



Слика 6.51.

6.4.2 Ламинирана плоча под дејством двоосне компресије

Последњи нумерички пример разматра случај слободно ослоњеног трослојног $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламината оптерећеног на притисак дуж две осе у равни ламината (слика 6.51). Материјал и бездимензиони фактор извијања дефинисани су као у претходном примеру. У табели 19. приказани су резултати добијени за различите односе a/h . Резултати су упоређени са аналитичким решењима одговарајућих теорија површинских носача [46]. Добијени резултати одлично се слажу са аналитичким решењима.

Табела 18. Бездимензиони фактор извијања за случај једноосне компресије слободно ослоњеног $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламината

Метод	a/h				
	5	10	20	50	100
CPT [46]	36.160	36.160	36.160	36.160	36.160
FSDT[46]	11.575	23.453	31.707	35.356	35.955
TSDT[46]	11.997	23.340	31.660	35.347	35.953
IGA FSDT, $p=2$ [100]	-	23.6599	31.8288	35.3945	36.0130
IGA FSDT, $p=3$ [100]	-	23.6594	31.8267	35.3813	35.9617
IGA FSDT, $p=4$ [100]	-	23.6594	31.8267	35.3813	35.9616
IGA CPT, $p=2$	36.5900	36.5900	36.5900	36.5900	36.5900
IGA CPT, $p=3$	36.1549	36.1549	36.1549	36.1549	36.1549
IGA CPT, $p=4$	36.1538	36.1538	36.1538	36.1538	36.1538
IGA FSDT, $p=2$	11.2830	23.1328	31.5512	35.3314	35.9694
IGA FSDT, $p=3$	11.2825	23.1311	31.5478	35.3233	35.9474
IGA FSDT, $p=4$	11.2825	23.1311	31.5478	35.3231	35.9465
IGA TSDT, $p=2$	11.8270	23.1558	31.5738	35.3480	35.9807
IGA TSDT, $p=3$	11.8135	23.1386	31.5541	35.3245	35.9474
IGA TSDT, $p=4$	11.8134	23.1385	31.5540	35.3243	35.9468

Table 19. Бездимензиони фактор извијања за случај двоосне компресије слободно ослоњеног $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ ламината

Метод	a/h				
	2	5	10	15	20
CPT [46]	14.704	14.704	14.704	14.704	14.704
FSDT [46]	1.427	5.492	10.202	12.192	13.146
TSDT [46]	1.465	5.526	10.259	12.226	13.285
IGA CPT, $p=2$	14.9629	14.9629	14.9629	14.9629	14.9629
IGA CPT, $p=3$	14.5585	14.5585	14.5585	14.5585	14.5585
IGA CPT, $p=4$	14.5547	14.5547	14.5547	14.5547	14.5547
IGA FSDT, $p=2$	1.3586	5.32	9.9219	12.0108	13.0401
IGA FSDT, $p=3$	1.3586	5.3198	9.9136	11.9952	13.0153
IGA FSDT, $p=4$	1.3586	5.3198	9.9133	11.9945	13.0140
IGA TSDT, $p=2$	1.4262	5.2755	9.7590	11.9065	12.9697
IGA TSDT, $p=3$	1.4198	5.2670	9.7455	11.8873	12.9437
IGA TSDT, $p=4$	1.4198	5.2670	9.7453	11.8868	12.9428

Глава 7

Закључак

7.1 Резултати истраживања

Предмет ове дисертације је изогеометријска анализа композитних структура. Изогеометријски метод примењен је за анализу статичког и динамичког понашања композитних ламината као и за анализу бифуркационе стабилности. Посебна пажња била је усмерена на ефекте коришћења базних функција вишег реда при анализи ламината, односно на одређивање интерламинарних напона. У следећим параграфима описани су резултати истраживања ове докторске дисертације:

- Формулисани модели за прорачун напонско-деформационих стања, сопствених осцилација и бифуркационе стабилности ламинираних композитних структура тестирани су на различитим моделима ламината.
- Статичка анализа ламината са различитим бројем слојева и оријентацијом влакана, као и анализа сендвич конструкције демонстрирала је велику тачност метода у односу на конвенционални МКЕ. Резултати су у изванредној корелацији са аналитичким решењима базираним на одговарајућим теоријама површинских носача.
- Добијени резултати указују на велике предности коришћења базних функција вишег степена, ипак коришћење базних функција степена вишег од четири није показало никакве предности у виду тачности или брже конвергенције резултата који би могли да оправдају већу нумеричку цену израчунавања базних функција петог реда и њених дериватива.

- Захваљујући вишем реду базних функција, могуће је израчунати интерламинарне трансверзалне напоне директно из тродимензионалних једначина равнотеже. Добијени резултати су у изврсној корелацији са напонима добијеним директно из тродимензионалне теорије еластичности.
- Како се при рачунању интерламинарних напона на овај начин јављају други изводи деформација (односно у FSDT трећи, а у CPT и TSDT четврти изводи трансверзалног померања) неопходно је користити базне функције минимално трећег или четвртог степена. Израчунавање њихових извода у односу на физичке координате је нумерички захтеван корак. Погодност у овом смислу представља чињеница да се ови напони могу рачунати потпуно одвојено од осталих величина од интереса у засебном кораку, коришћењем одређеног поља померања. На овај начин у циљу оптимизације коришћења рачунарских ресурса интерламинарне напоне можемо рачунати само у областима где могу утицати на структурални интегритет конструкције.
- Приликом анализе слободних вибрација и бифуркационе стабилности добијени резултати су веома близу аналитичким решењима одговарајућих теорија површинских носача. Приметно је да су за CPT и TSDT плоче резултати добијени квадратним NURBS елементима мање тачности у односу на базне функције вишег реда које дају веома блиске резултате. Предлаже се употреба кубних CPT или TSDT елемената као оптимални компромис између нумеричких захтева и тачности решења. Код FSDT ламината и квадратни елементи дају резултате велике тачности.

7.2 Научни доприноси дисертације

Специфични остварени научни доприноси у оквиру докторске дисертације су:

- Формулисани су и софтверски имплементирани модели различитог нивоа комплексности за прорачун напонско-деформационих стања, сопствених

осцилација и бифуркационе стабилности ламинираних композитних структура. Развијени модели су веће тачности у односу на еквивалентне коначноелементне моделе и у изванредној су сагласности са теоријским резултатима.

- Предложени модели базирају се на теоријама еквивалентног слоја које услед различитих геометријских претпоставки не дају тачне вредности трансверзалних интерламинарних напона те се стога у постојећој пракси њихово рачунање врши коришћењем различитих теорија слојева. Теорије слојева су много комплексније и нумерички захтевније од теорија еквивалентног слоја па њихова употреба за рачунање глобалних карактеристика одзива ламината није оправдана. Постоји и алтернативно решење у виду рачунања интерламинарних напона директно из једначина равнотеже. Налажење интерламинарних напона на овај начин изискује рачунање виших извода раванских деформација, односно захтева виши континуитет функција померања. Како су уобичајене интерполационе функције у конвенционалној методи коначних елемената C^0 или C^1 континуалне, ову технику није могуће применити директно у софтверском коду за коначноелементну анализу. Захваљујући изогеометријском концепту, коришћењем глатких и стабилних NURBS базних функција у предложеном методу рачунање интерламинарних напона могуће је вршити истовремено са рачунањем осталих напонско-деформационих величина од интереса у истом кораку без додатних модификација.
- Лако израчунавање интерламинарних напона омогућава предвиђање појаве деламинације, једног од основних видова лома код композитних материјала.
- Испитани су утицаји коришћења NURBS базних функција различитог реда на тачност резултата. Показана је супериорност коришћења квадратних, кубних и базних функција четвртог реда у односу на конвенционални метод коначних елемената. Показано је да се коришћењем базних функција петог реда не постижу тачнији резултати у односу на базу четвртог реда

- Будући да је коришћењем изогеометријског метода могуће добити комплетнију напонско-деформациону слику ламината, са трансверзалним смичућим и нормалним напонима велике тачности, могуће је искористити предложени метод за оптимизацију ламинираних структура са аспекта чврстоће и различитих видова отказа на директан и једноставан начин
- Предложени модели су ефикасни, робусни и тачни са великим потенцијалом за примену на практичне инжењерске проблеме

7.3 Препоруке за будући рад

Изогеометријска анализа, као релативно млада научна област пружа много могућности за даљи развој. На основу искуства стеченог приликом израде ове дисертације, у циљу даљег развоја и примене методе за анализу ламинираних композитних конструкција, препоручио бих следеће кораке:

- Изогеометријски модели ламината развијени и тестирани у овој тези су линеарни. Следећи логичан корак је развијање изогеометријских геометријски нелинеарних модела како би се испитивали случајеви великих померања и деформација. Такође, коришћени су и линеарни конститутивни модели па је у будућем раду неопходно истраживањем обухватити и нелинеарне материјалне моделе.
- У овој тези разматране су само структуре састављене од једног NURBS поддомена, "patch"-а. У истраживањима која следе неопходно је обрадити и конструкције састављене од више поддомена тзв. "multi-patch" геометрије ради доказивања применљивости концепта на веће и сложеније индустријске проблеме.
- Разматрани су само случајеви компактне NURBS геометрије. У циљу успостављања праве везе између CAD и CAE, неопходно је метод прилагодити и тзв. тримованим површима, односно површима са исеченим

деловима будући да су операције исецања и придруживања основни методи геометријског моделовања.

- Предложени методологију израчунавања трансверзалних интерламинарних напона у наредним истраживањима требало би имплементирати у рачунарски код за предвиђање појаве деламинације.

Литература

- [1] Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194 (39-41) (2005) 4135-4195.
- [2] Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Bazilevs Y. *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*, John Wiley & Sons, Chichester, USA (2009)
- [3] Bazilves J. *Isogeometric Analysis of Turbulence and Fluid-Structure Interaction*, докторска дисертација, The University of Texas at Austin, 2006
- [4] Cottrell J.A. *Isogeometric Analysis and Numerical Modeling of the Fine Scales within the Variational Multiscale Method*, докторска дисертација, UTA, Texas, 2007
- [5] Hughes T.J.R., Reali A., Sangalli G., Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199 (2010) 301–313
- [6] Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Reali A., Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196 (2007) 4160–4183.
- [7] Collier N. , Pardo D., Dalcin L., Paszynski M., Calo V.M. The cost of continuity: A study of the performance of isogeometric finite elements using direct solvers, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 213–216 (2012) 353–361
- [8] Akkerman I., Bazilevs Y., Calo V.M., Hughes T.J.R., Hulshoff S. The role of continuity in residual-based variational multiscale modeling of turbulence, *Computational Mechanics*, 41(3) (2008) 371-378
- [9] Bazilevs Y., Beirão da Veiga L., Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Sangalli G. Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 16 (2006) 1031–1090
- [10] Beirão Da Veiga L., Buffa A., Rivas J., Sangalli G. Some estimates for h– p–k-refinement in Isogeometric Analysis, *Numer. Math.* 118 (2011) 271–305
- [11] Sederberg T.W., Zheng J., Bakenov A., Nasri A., T-splines and T-NURCCs, *ACM Trans. Graph.*, 22 (2003) 477–484.
- [12] Deng J. , Chen F., Li X., Hu C., Tong W., Yang Z. , Feng Y., Polynomial splines over hierarchical T-meshes, *Graph. Models*, 70 (2008) 76–86.
- [13] Kang H., Chen F., Deng J. Modified T-splines, *Computer Aided Geometric Design*,

- 30 (2013) 827–843
- [14] Dimitri R., De Lorenzis L., Scott M.A., Wriggers P., Taylor R.L., Zavarise G. Isogeometric large deformation frictionless contact using T-splines, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 269 (2014) 394–414
- [15] Buffaa A., Sangallib G., Vázquez R. Isogeometric methods for computational electromagnetics: B-spline and T-spline discretizations, *Journal of Computational Physics*, 257 (2014) 1291–1320
- [16] Uhm T.K., Youn S.K., T-spline finite element method for the analysis of shell structures, *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 80 (2009) 507–536.
- [17] Schillinger D. *The p- and B-spline versions of the geometrically nonlinear finite cell method and hierarchical refinement strategies for adaptive isogeometric and embedded domain analysis*, докторска дисертација, TUM, München, 2011.
- [18] Schillinger D., Rank E. An unfitted hp-adaptive finite element method based on hierarchical B-splines for interface problems of complex geometry, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200 (47–48) (2011) 3358–3380.
- [19] Vuong A.V., Giannelli C., Jüttler B., Simeon B., A hierarchical approach to adaptive local refinement in isogeometric analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200 (49-52) (2011) 3554–3567.
- [20] Nguyen-Thanh N., Kiendl J., Nguyen-Xuan H., Wüchner R., Bletzinger K.U., Bazilevs Y., Rabczuk T. Rotation free isogeometric thin shell analysis using PHT-splines, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200 (2011) 3410–3424
- [21] Nguyen-Thanh N., Nguyen-Xuan H., Bordas S., Rabczuk T., Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical T-meshes for two dimensional elastic solids, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200 (21-22) (2011) 1892–1908.
- [22] Johannessen K.A., Kvamsdal T., Dokken T., Isogeometric analysis using LR B-splines, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 269 (2014) 471–514.
- [23] Burkharty D., Hamann B., Umlauf G. Isogeometric Finite Element Analysis Based on Catmull-Clark Subdivision Solids, *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, 29 (5) (2010)
- [24] Jones Robert M. *Mechanics of Composite Materials 2nd Ed.*, Taylor-Francis, Philadelphia, USA (1999).
- [25] Reddy JN. *Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis*

- 2nd Ed., CRC Press, New York, USA (2004).
- [26] Reddy JN. *Mechanics of Composite Materials: Selected Works of Nicholas J. Pagano*, Springer, USA (1994)
- [27] Pagano N.J., Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J Compos Mater*, 4 (1970) 20–34.
- [28] Srinivas S., Bending, Vibration And Buckling Of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates And Laminates, *International Journal of Solids and Structure*, 6 (1970) 1463–1481.
- [29] C. P. Wu and J. Y. Lo. Three-Dimensional Elasticity Solutions of Laminated Annular Spherical Shells, *Journal of Engineering Mechanics*, 126 (8) (2000) 882-885.
- [30] Nosier A., Kapania R.K., Reddy J.N. Free vibration analysis of laminated plates using a layerwise theory, *AIAA Journal*, 31 (12) (1993) 2335-2346
- [31] Carrera E. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells, *Appl Mech Rev*, 56 (3) (2003) 287-308
- [32] Хајдин Н. *Теорија површинских носача: Плоче II издање*, Научна књига, Београд, Србија (1988)
- [33] Хајдин Н. *Теорија површинских носача: 3. Љуске*, Научна књига, Београд, Србија (1984)
- [34] Reissner E., Stavsky Y. Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 28 (1961) 402–408
- [35] Dong S.B, Pister K.S, Taylor R.L. *On the theory of laminated anisotropic shells and plates*, *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 29(8) (1962) 969–975
- [36] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12 (2)(1945) 69–77
- [37] Ferreira A.J.M., Jorge R.M.N., Roque C.M.C. Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 (2005) 4265–4278.
- [38] Liew K.M., Huang Y.Q., Reddy J.N. Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (2003) 2203–22.
- [39] Madabhusi-Raman P., Davalos J.F. Static shear correction factor for laminated rectangular beams, *Composites Part B*, 27(3-4) (1996) 285–293

- [40] Vlachoutsis S. Shear correction factors for plates and shells, *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 33 (1992) 1537-1552.
- [41] Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of applied mechanics* (1984)
- [42] Kant T, Swaminathan K. Analysis solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Compos Struct*, 56 (2002) 329–44.
- [43] Kant T, Swaminathan K. Analysis solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Compos Struct*, 53 (2001) 73–85.
- [44] Kant T, Swaminathan K, Free vibration of isotropic orthotropic and multilayer plates based on higher order refined theories, *J Sound Vib*, 241 (2001) 319–27.
- [45] Kant T, Swaminathan K. Analytical solutions using a higher order refined theory for stability analysis of laminated composite and sandwich plates, *Struct Eng Mech*, 10 (2000) 337–57
- [46] Khdeir A.A, Librescu L. Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: Part II—Buckling and free vibration, *Composite Structures*, 9(4) (1988) 259–277
- [47] Argyris J. H., Kelsey S. Structural Analysis by the Matrix Force Method with Applications to Aircraft Wings. *Wiss. Ges. Luftfahrt. Jahrb.*, 1956.
- [48] Clough R. W., The Finite Element Method in Plane Stress Analysis, "*Proceedings of 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*", Pittsburg, 1960,
- [49] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *The Finite Element Method 6th Ed.*, Elsevier, USA 2005.
- [50] Секуловић М. *Метод коначних елемената*, Грађевинска књига, Београд, 1988
- [51] Hughes T.J.R. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, USA 1987
- [52] Ferreira A.J.M. *MATLAB Codes for Finite Element Analysis*, Springer, 2008
- [53] Barbero E.J. *Finite Element Analysis of Composite Materials*, CRC, USA, 2008
- [54] Ochoa O.O., Reddy J.N. *Finite Element Analysis of Composite Laminates*, Kluwer Academic Publishers, 1992
- [55] S.K. Singh, A. Chakrabarti, P. Bera, J.S.D. Sony, An efficient C^0 FE model for the

- analysis of composites and sandwich laminates with general layup, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 8(2011) 197 – 212
- [56] J. Oh, M. Cho, J.S. Kim, M. Grédiac, A finite element formulation based on an enhanced first order shear deformation theory for composite and sandwich structures, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 22 (2008) 871-878
- [57] J. N. Reddy, A.A. Khdeir, Buckling and vibration of laminated Composite Plates Using Various Plate Theories, *AIAA Journal*, 27(12) (1989) 1808-1817.
- [58] E. Carrera, Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells, *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 9 (2) (2002) 87-140.
- [59] B.N. Pandya, T. Kant, Higher-order shear deformable theories for flexure of sandwich plates-finite element evaluations, *International Journal of Solids and Structures*, 24 (1988) 419–451.
- [60] J.N. Reddy, W.C. Chao, A Comparison of Closed-Form and Finite-Element Solutions of Thick, Laminated, Anisotropic Rectangular Plates, *Nuclear Engineering and Design*, 64 (1981) 153-167.
- [61] J.N. Reddy, W.C. Chao, A Comparison of Closed-Form and Finite-Element Solutions of Thick, Laminated, Anisotropic Rectangular Plates, *Nuclear Engineering and Design*, 64 (1981) 153-167.
- [62] Nguyen-Van H, Mai-Duy N, Tran-Cong T. Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element, *Journal of Sound and Vibration*, 313(1-2) (2008) 205–223.
- [63] Wang S. Free vibration analysis of skew fiber-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation plate theory, *Journal of Sound and Vibration*, 63 (1997) 525–538.
- [64] Zhang YX, Yang CH. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Compos. Struct*, 88 (2009)147–157.
- [65] Carrera E. Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner’s mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells, *Appl Mech Rev*, 54 (2001) 301–329.
- [66] Wu C.P., Li H.Y. An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates, *Composite Structures*, 92 (2010) 2591–2605

- [67] Dai K. Y., Liu G. R., Lim K. M., Chen X. L. A mesh-free method for static and free vibration analysis of shear deformable laminated composite plates, *Journal of Sound and Vibration*, 269 (3–5) (2004) 633–652
- [68] Liu L., Chua L. P., Ghista D. N. Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates, *Composite Structures*, vol. 78, no. 1, pp. 58–69, 2007.
- [69] Ferreira A.J.M. A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates, *Composite Structures*, 59 (2003) 385–392
- [70] Ferreira A.J.M., Roque C.M. C., S.Martins P. A. L., Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method, *Composites Part B*, vol. 34, no. 7, pp. 627–636, 2003.
- [71] Ferreira A.J.M., Roque C.M. C., Neves A.M. A., Jorge R.M.N., Soares C. M. M., Reddy J.N. Buckling analysis of isotropic and laminated plates by radial basis functions according to a higher-order shear deformation theory, *Thin-Walled Structures*, vol. 49, no. 7, pp. 804–811, 2011.
- [72] Ferreira A.J.M., Castro L.M.S., Bertoluzza S. A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory, *Composite Structures*, 89 (2009) 424–432
- [73] Liew K.M., Huang Y.Q., Reddy J.N., 2003, Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (2003) 2203–2222
- [74] Akhras G, Cheung MS, Li W. Static and vibrations analysis of anisotropic laminated plates by finite strip method, *International Journal of Solids and Structures*, 30(22) (1993) 3129–3137.
- [75] Akhras G, Cheung MS, Li W. Finite strip analysis for anisotropic laminated composite plates using higher-order deformation theory, *Computers and Structures*, 52(3) (1994) 471–477.
- [76] Versprille K.J., *Computer-Aided Design Applications of the Rational B-Spline Approximation Form*, докторска дисертација, Syracuse University, 1975.
- [77] Piegl L., Tiller W. *The NURBS Book*, Second ed. Springer, Berlin, Germany (1997)

- [78] Rogers D. *An Introduction to NURBS With Historical Perspective*, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, USA (2001)
- [79] Farin G. *Nurbs From Projective Geometry to Practical Use 2nd Ed.*, A K Peters, Natick, USA, (2000)
- [80] Swartz, B. and Wendroff, B. The relative efficiency of finite difference and finite element methods. I: Hyperbolic problems and splines, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 11 (1974) 979–993.
- [81] Prenter, P. *Splines and variational methods*. Dover , New York, USA (1975).
- [82] Chung-Tze, S. On spline finite element method, *Mathematic Numerica Sinica*, 01 (1979).
- [83] Fan S., Luah M. New spline finite element for analysis of shells of revolution, *Journal of engineering mechanics*, 116 (1990)709–726.
- [84] Höllig K. *Finite element approximation with splines. in: Handbook of Computer Aided Geometric Design*. G. Farin, J. Hoschek, and M.S. Kim (eds.), Elsevier. . (2002).
- [85] Sabin, *Spline finite elements*, докторска дисертација, Universitat Politecnica de Catalunya, 2009
- [86] Sevilla R., *Nurbs-enhanced finite element method (NEFEM)*, докторска дисертација, Universitat Politecnica de Catalunya, 2009
- [87] Cottrell J.A., Reali A., Bazilevs Y., Hughes T.J.R. Isogeometric analysis of structural vibrations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 (2006) 5257–5296
- [88] Kiendl J., Bletzinger K.-U., Linhard J., Wüchner R. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 198 (49-52) (2009) 3902-3914.
- [89] Kiendl J., Bazilevs Y., Hsu M.-C., Wüchner R., Bletzinger K.-U. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff–Love shell structures comprised of multiple patches, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199 (37-40) (2010), pp. 2403-2416
- [90] Kiendl J. *Isogeometric Analysis and Shape Optimal Design of Shell Structures*, докторска дисертација, Technische Universität München, 2011
- [91] Shojaee S., Izadpanah E., Valizadeh N., Kiendl J. Free vibration analysis of thin plates by using a NURBS-based isogeometric approach, *Finite Elements in Analysis*

- and Design*, 61 (2012) 23-34.
- [92] Benson D.J., Hartmann S., Bazilevs Y., Hsu M.-C., Hughes T.J.R., Blended isogeometric shells, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 255 (2013) 133-146.
- [93] Benson D.J., Bazilevs Y., Hsu M.-C., Hughes T.J.R., A large deformation, rotation-free, isogeometric shell, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200 (13-16) (2011) 1367-1378.
- [94] Benson D.J., Bazilevs Y., Hsu M.C., Hughes T.J.R., Isogeometric shell analysis: The Reissner–Mindlin shell, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199 (5-8) (2011) 276-289
- [95] Da Veiga L.B., Buffa A., Lovadina C., Martinelli M., Sangalli G. An isogeometric method for the Reissner–Mindlin plate bending problem, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 209-212 (2012), pp. 45-53
- [96] Dornisch W., Klinkel S., Simeon B. Isogeometric Reissner–Mindlin shell analysis with exactly calculated director vectors, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 253 (2013) 491-504
- [97] Echter R., Oesterle B., Bischoff M. A hierarchic family of isogeometric shell finite elements, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 254 (2013) 170-180.
- [98] Echter R. *Isogeometric Analysis of Shells*, докторска дисертација, Universität Stuttgart, 2013
- [99] Shojaee S., Valizadeh N., Izadpanah E., Bui T., Vu T-V., Free vibration and buckling analysis of laminated composite plates using the NURBS-based isogeometric finite element method, *Composite Structures*, 94 (2012) 1677-1693.
- [100] Thai C.H., Nguyen-Xuan H., Nguyen-Xuan N., Le T-H., Nguyen-Thoi T., Rabczuk T. Static, free vibration, and buckling analysis of laminates composite Reissner–Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 91 (6) (2012) 571-603.
- [101] Kapoor H., Kapania R.K. Geometrically nonlinear NURBS isogeometric finite element analysis of laminated composite plates, *Composite Structures*, 94 (2012) 3434-3447.
- [102] Casanova C., Gallego A. NURBS-based analysis of higher-order composite shells, *Composite Structures*, 104 (2013) 125-133
- [103] Nguyen-Xuan H., Thai C., Nguyen-Thoi T. Isogeometric finite element analysis of

- composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory, *Composites Part B: Engineering*, 55 (2013) 558-574.
- [104] Li X., Zhang J., Zheng Y. Static and Free Vibration Analysis of Laminated Composite Plates Using Isogeometric Approach Based on the Third Order Shear Deformation Theory, *Advances in Mechanical Engineering*, (2014) 1-16
- [105] Thai C.H., Ferreira A.J.M., Bordas S.P.A., Rabczuk T., Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory, *European Journal of Mechanics A/Solids* 43 (2014) 89-108
- [106] Guo Y., Nagy A.P., Gürdal Z . A layerwise theory for laminated composites in the framework of isogeometric analysis, *Composite Structures*, 107 (2014) 447–457
- [107] Guo Y., Nagy A.P., Gürdal Z . Modelling of Composite Laminates Based on Isogeometric Layerwise Theory, *Proceedings of 54th AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Boston, Massachusetts, 2013
- [108] Thai C.H., Ferreira A.J.M., Carrera E., Nguyen-Xuan H. Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory, *Composite Structures*, 104 (2013) 196–214
- [109] Kapoor H., Kapania R.K., Soni S. R. Interlaminar stress calculation in composite and sandwich plates in NURBS Isogeometric finite element analysis, *Composite Structures*, 106 (2013) 537–548
- [110] Nguyen V.P., Nguyen-Xuan H. *High-order B-splines based finite elements for delamination analysis of laminated composites*, *Composite Structures*, 102 (2013) 261-275.
- [111] Nguyen V.P., Kerfriden P., Bordas S.P.A. Isogeometric cohesive elements for two and three dimensional composite delamination analysis, *Composite Structures*, 102 (2013) 261-275.
- [112] Le-Manh T., Lee J. Postbuckling of laminated composite plates using NURBS-based isogeometric analysis, *Composite Structures*, 109 (2014) 286–293
- [113] Nagy A.P., Jisselmuiden S.T., Abdalla M.M. Isogeometric design of anisotropic shells: Optimal form and material distribution, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 264 (2013) 145–162

Биографија

Име и презиме:	Огњен Пековић
Датум рођења:	15. 04. 1981.
Место рођења:	Сарајево, Босна и Херцеговина
Школовање:	1988.-1992.: Основна школа у Сарајеву 1992.-1994.: Основна школа у Котору 1994.-1996.: Основна школа у Београду 1998.-2002.: Трећа београдска гимназија, Београд 2002.-2007.: Универзитет у Београду, Машински факултет, одсек за ваздухопловство, просек 8.88 2006.-2014.: Докторске студије на Машинском факултету Универзитета у Београду
Кретање у послу:	2006.-2011.: Истраживач приправник и истраживач сарадник на Катедри за ваздухопловство на Машинском факултету Универзитета у Београду 2008.: Одслужење војног рока 2011.- Асистент на Катедри за ваздухопловство на Машинском факултету Универзитета у Београду

Референце:

- [1] **Peковић О., Stupar S., Simonovic A., Svorcan J., Komarov D.** Isogeometric bending analysis of composite plates based on a higher-order shear deformation theory. *Journal of Mechanical Science and Technology*.
- [2] **Peковић О., Stupar S., Simonović A., Posteljnik Z.** Bending and free vibration finite element analysis of thin composite plates based on isogeometric paradigm, Fourth Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vrnjačka banja, jun 2013.
- [3] **Peковић О., Simonović A., Stupar S., Trivković S., Posteljnik Z.** Contemporary Software Tools In The Design Process Of Composite Structures, Proceedings of the 5th International Scientific Conference on Defensive Technologies-OTEH 2012, Septembar 18-19 , 2012, Beograd, str. 117-122, Vojnotehnički institut, ISBN 978-86-81123-58-4, <http://www.vti.mod.gov.rs/oteh/index.htm>

Прилог А

Виши деривативи NURBS површи

A.1 Виши деривативи NURBS површи у параметарском координатном систему

Како је за потребе израчунавања основних матрица метода коначних елемената и интерламинарних напона потребно познавати више изводе NURBS површи, а како ови изрази нису стандардни у литератури, у овом прилогу наведени су изрази за друге, треће и четврте изводе NURBS површи.

Први изводи NURBS површи дати су једначинама 3.24 и 3.25. Виши деривативи добијају се формалном диференцијацијом тих израза.

Други деривативи NURBS површи дати су изразима:

$$\begin{aligned}
 S_{\xi\xi} &= \frac{\bar{N}_{\xi\xi}}{\bar{D}} - 2\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} + 2\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^2}{\bar{D}^3} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^2} \\
 S_{\xi\eta} &= \frac{\bar{N}_{\xi\eta}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} + 2\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^3} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^2} \\
 S_{\eta\eta} &= \frac{\bar{N}_{\eta\eta}}{\bar{D}} - 2\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^2} + 2\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}^2}{\bar{D}^3} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^2}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Трећи деривативи NURBS површи дати су изразима:

$$\begin{aligned}
 S_{\xi\xi\xi} &= \frac{\bar{N}_{\xi\xi\xi}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi\xi}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\xi\xi}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^2}{\bar{D}^3} - 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^3}{\bar{D}^4} \\
 S_{\xi\xi\eta} &= \frac{\bar{N}_{\xi\xi\eta}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^2} - 2\frac{\bar{N}_{\xi\eta}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\xi\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^2} + 2\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^3} + 4\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^3} \\
 &\quad + 4\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^3} + 2\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi}^2}{\bar{D}^3} - 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^2\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^4}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} S_{\xi\eta\eta} &= \frac{\bar{N}_{\xi\eta\eta}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\eta\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 2\frac{\bar{N}_{\xi\eta}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\eta\eta}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} + 2\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 4\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^3} \\ &\quad + 4\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^3} + 2\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta}^2}{\bar{D}^3} - 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^2\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^4} \end{aligned}$$

$$S_{\eta\eta\eta} = \frac{\bar{N}_{\eta\eta\eta}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\eta\eta}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^2} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}^2}{\bar{D}^3} - 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}^3}{\bar{D}^4}$$

Четврти деривативи NURBS површи дати су изразима:

$$\begin{aligned} S_{\xi\xi\xi\xi} &= \frac{\bar{N}_{\xi\xi\xi\xi}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi\xi\xi}}{\bar{D}^2} - 4\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi\xi}}{\bar{D}^2} - 6\frac{\bar{N}_{\xi\xi}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^2} - 4\frac{\bar{N}_{\xi\xi\xi}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi}^2}{\bar{D}^3} + 8\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi\xi}}{\bar{D}^3} \\ &\quad + 24\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi\xi}}{\bar{D}^3} + 12\frac{\bar{N}_{\xi\xi}\bar{D}_{\xi}^2}{\bar{D}^3} - 24\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi}^3}{\bar{D}^4} - 36\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^2\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^4} + 24\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^4}{\bar{D}^5} \\ S_{\xi\xi\xi\eta} &= \frac{\bar{N}_{\xi\xi\xi\eta}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi\xi\eta}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi\xi\xi}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\xi\xi}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\xi\eta}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\xi\xi\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^2} \\ &\quad - 3\frac{\bar{N}_{\xi\xi\eta}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi\eta}}{\bar{D}^3} + 2\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\xi\xi}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^3} \\ &\quad + 12\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}_{\xi\xi}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}_{\xi\eta}\bar{D}_{\xi}^2}{\bar{D}^3} - 18\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^2\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^4} \\ &\quad - 18\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^4} - 18\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi}^2\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^4} - 6\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi}^3}{\bar{D}^4} + 24\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^3\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^5} \\ S_{\xi\xi\eta\eta} &= \frac{\bar{N}_{\xi\xi\eta\eta}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 2\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 2\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi\xi\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\xi\xi}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 4\frac{\bar{N}_{\xi\eta}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\eta\eta}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^2} \\ &\quad - 2\frac{\bar{N}_{\xi\xi\eta}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^2} - 2\frac{\bar{N}_{\xi\eta\eta}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} + 4\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 4\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\xi\eta}}{\bar{D}^3} + 2\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\xi}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 4\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi\eta}^2}{\bar{D}^3} \\ &\quad + 4\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 8\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^3} + 8\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^3} + 4\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^3} + 2\frac{\bar{N}_{\xi\xi}\bar{D}_{\eta}^2}{\bar{D}^3} \\ &\quad + 8\frac{\bar{N}_{\xi\eta}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^3} + 2\frac{\bar{N}_{\eta\eta}\bar{D}_{\xi}^2}{\bar{D}^3} - 24\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^4} - 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^2\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^4} - 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}^2\bar{D}_{\xi\xi}}{\bar{D}^4} \\ &\quad - 12\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta}^2}{\bar{D}^4} - 12\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi}^2\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^4} + 24\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}^2\bar{D}_{\eta}^2}{\bar{D}^5} \\ S_{\xi\eta\eta\eta} &= \frac{\bar{N}_{\xi\eta\eta\eta}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi\eta\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi\eta\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\eta\eta}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^2} - 3\frac{\bar{N}_{\xi\eta}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{N}_{\eta\eta\eta}\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^2} \\ &\quad - 3\frac{\bar{N}_{\xi\eta\eta}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^2} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta\eta}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 2\frac{\bar{N}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^3} \\ &\quad + 12\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}_{\eta\eta}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta}}{\bar{D}^3} + 6\frac{\bar{N}_{\xi\eta}\bar{D}_{\eta}^2}{\bar{D}^3} - 18\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}^2\bar{D}_{\xi\eta}}{\bar{D}^4} \\ &\quad - 18\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\xi}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^4} - 18\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\eta}^2\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^4} - 6\frac{\bar{N}_{\xi}\bar{D}_{\eta}^3}{\bar{D}^4} + 24\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}^3\bar{D}_{\xi}}{\bar{D}^5} \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} S_{\eta\eta\eta\eta} = & \frac{\bar{N}_{\eta\eta\eta\eta}}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta\eta\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 4\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\eta\eta\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 6\frac{\bar{N}_{\eta\eta}\bar{D}_{\eta\eta\eta\eta}}{\bar{D}^2} - 4\frac{\bar{N}_{\eta\eta\eta}\bar{D}_{\eta\eta\eta\eta}}{\bar{D}^2} + 6\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta\eta}^2}{\bar{D}^3} + 8\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\eta\eta}}{\bar{D}^3} \\ & + 24\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\eta}\bar{D}_{\eta\eta\eta\eta}}{\bar{D}^3} + 12\frac{\bar{N}_{\eta\eta}\bar{D}_{\eta}^2}{\bar{D}^3} - 24\frac{\bar{N}_{\eta}\bar{D}_{\eta}^3}{\bar{D}^4} - 36\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}^2\bar{D}_{\eta\eta\eta\eta}}{\bar{D}^4} + 24\frac{\bar{N}\bar{D}_{\eta}^4}{\bar{D}^5} \end{aligned}$$

У једначинама А.1, А.2 и А.3, осим чланова наведених у једначини 3.25 појављују се и следећи чланови:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\xi\xi} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N''_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\xi} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N''_{\hat{i},p}(\xi) N_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\xi\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N'_{\hat{i},p}(\xi) N'_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\eta\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N''_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\eta\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}(\xi) N''_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\xi\xi\xi} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'''_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\xi\xi} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N'''_{\hat{i},p}(\xi) N_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\xi\xi\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N''_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\xi\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N''_{\hat{i},p}(\xi) N'_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\xi\eta\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'_{i,p}(\xi) N''_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\eta\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N'_{\hat{i},p}(\xi) N''_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\eta\eta\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N'''_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\eta\eta\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}(\xi) N'''_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\xi\xi\xi\xi} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N''''_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\xi\xi\xi} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N''''_{\hat{i},p}(\xi) N_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\xi\xi\xi\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'''_{i,p}(\xi) N'_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\xi\xi\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N'''_{\hat{i},p}(\xi) N'_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\xi\xi\eta\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N''_{i,p}(\xi) N''_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\xi\eta\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N''_{\hat{i},p}(\xi) N''_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\xi\eta\eta\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N'_{i,p}(\xi) N'''_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\xi\eta\eta\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N'_{\hat{i},p}(\xi) N'''_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \\ \bar{N}_{\eta\eta\eta\eta} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N''''_{j,q}(\eta) w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} & \bar{D}_{\eta\eta\eta\eta} &= \sum_{\hat{i}=0}^n \sum_{\hat{j}=0}^m N_{\hat{i},p}(\xi) N''''_{\hat{j},q}(\eta) w_{\hat{i},\hat{j}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

У претходним изразима изводи базних функција $N''_{i,p}(\xi)$, $N'''_{i,p}(\xi)$, $N''''_{i,p}(\xi)$, $N''_{\hat{i},p}(\xi)$, $N'_{\hat{i},p}(\xi)$, $N'''_{\hat{i},p}(\xi)$ и $N_{j,q}(\eta)$, $N'_{j,q}(\eta)$, $N''_{j,q}(\eta)$, $N'''_{j,q}(\eta)$, $N''''_{j,q}(\eta)$ израчунавају се изразима 3.13.

А.2 Виши деривативи у глобалном координатном систему

Трансформацију дериватива из локалног у глобални координатни систем вршимо применом израза за дериватив сложене функције. Уколико са R_A обележимо произвољну функцију њен први дериватив можемо записати као:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_A}{\partial \xi} &= \frac{\partial R_A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial R_A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_A}{\partial \eta} &= \frac{\partial R_A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial R_A}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{A.5}$$

Односно у матричној форми:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_A}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial x} \\ \frac{\partial R_A}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial x} \\ \frac{\partial R_A}{\partial y} \end{Bmatrix}\tag{A.6}$$

Једноставном манипулацијом претходног израза добијамо вредности дериватива у глобалном координатном систему

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial x} \\ \frac{\partial R_A}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_A}{\partial \eta} \end{Bmatrix}\tag{A.7}$$

Да би добили више деривативе по глобалним координатама сукцесивно примењујемо правило за извод сложене функције. На тај начин добијамо изразе за друге деривативе

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial R_A}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial R_A}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 R_A}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 R_A}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 R_A}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial R_A}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial R_A}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 R_A}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 R_A}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 R_A}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi \partial \eta} &= \frac{\partial R_A}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial R_A}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 R_A}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 R_A}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 R_A}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{A.8}$$

Записано у матричној нотацији израз

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} & \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial x} \\ \frac{\partial R_A}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

се трансформише у

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial x} \\ \frac{\partial R_A}{\partial y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}\right) & \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_A}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

ОДНОСНО

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} = [J^A] \begin{pmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial x} \\ \frac{\partial R_A}{\partial y} \end{pmatrix} + [J^B] \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_A}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Из претходног израза следи једначина за рачунање других дериватива функције по глобалним координатама

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_A}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial y^2} \end{pmatrix} = [J^B]^{-1} \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} - [J^A] \begin{pmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial x} \\ \frac{\partial R_A}{\partial y} \end{pmatrix} \right) \quad (\text{A.12})$$

Истим поступком добијамо изразе за треће деривативе функције по глобалним координатама

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^3 R_A}{\partial x^3} \\ \frac{\partial^3 R_A}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^3 R_A}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^3 R_A}{\partial y^3} \end{bmatrix} = [J^B]^{-1} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial^3 R_A}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial^3 R_A}{\partial \eta^3} \\ \frac{\partial^3 R_A}{\partial \xi^2 \partial \eta} \\ \frac{\partial^3 R_A}{\partial \xi \partial \eta^2} \end{bmatrix} - [J^A] \begin{bmatrix} \frac{\partial R_A}{\partial x} \\ \frac{\partial R_A}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 R_A}{\partial y^2} \end{bmatrix} \right) \quad (\text{A.13})$$

где је матрица $[J^B]$ дата изразом

$$[J^B] = \begin{bmatrix} J_{11}^B & J_{12}^B & J_{13}^B & J_{14}^B \\ J_{21}^B & J_{22}^B & J_{23}^B & J_{24}^B \\ J_{31}^B & J_{32}^B & J_{33}^B & J_{34}^B \\ J_{41}^B & J_{42}^B & J_{43}^B & J_{44}^B \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

са члановима

$$\begin{aligned} J_{11}^B &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^3, \quad J_{12}^B = 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad J_{13}^B = 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2, \quad J_{14}^B = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^3, \\ J_{21}^B &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^3, \quad J_{22}^B = 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad J_{23}^B = 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad J_{24}^B = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^3, \\ J_{31}^B &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad J_{32}^B = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ J_{33}^B &= \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial x}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad J_{34}^B = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad J_{41}^B = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial x}{\partial \xi}, \\ J_{42}^B &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad J_{43}^B = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial x}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \\ J_{44}^B &= \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial y}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

а матрица $[J^A]$ изразом

$$[J^A] = \begin{bmatrix} J_{11}^A & J_{12}^A & J_{13}^A & J_{14}^A & J_{15}^A \\ J_{21}^A & J_{22}^A & J_{23}^A & J_{24}^A & J_{25}^A \\ J_{31}^A & J_{32}^A & J_{33}^A & J_{34}^A & J_{35}^A \\ J_{41}^A & J_{42}^A & J_{43}^A & J_{44}^A & J_{45}^A \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

са члановима

$$\begin{aligned} J_{11}^A &= \frac{\partial^3 x}{\partial \xi^3}, \quad J_{12}^A = \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^3}, \quad J_{13}^A = 3 \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}, \quad J_{14}^A = 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right), \\ J_{15}^A &= 3 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \quad J_{21}^A = \frac{\partial^3 x}{\partial \eta^3}, \quad J_{22}^A = \frac{\partial^3 y}{\partial \eta^3}, \quad J_{23}^A = 3 \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}, \\ J_{24}^A &= 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right), \quad J_{25}^A = 3 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}, \quad J_{31}^A = \frac{\partial^3 x}{\partial \xi^2 \partial \eta}, \\ J_{32}^A &= \frac{\partial^3 y}{\partial \xi^2 \partial \eta}, \quad J_{33}^A = 2 \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}, \\ J_{34}^A &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}, \\ J_{35}^A &= 2 \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \quad J_{41}^A = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta^2}, \quad J_{42}^A = \frac{\partial^3 y}{\partial \xi \partial \eta^2}, \\ J_{43}^A &= 2 \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}, \\ J_{44}^A &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right) + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}, \\ J_{45}^A &= 2 \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Истим поступком из четвртих дериватива у параметарском координатном систему добијамо четврте деривативе у глобалном координатном систему потребне за рачунање интерламинарних нормалних напона код Кирхоф-Лавових и Редијевих плоча.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Огњен Пековић

број индекса Д9/06

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА ЛАМИНИРАНИХ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУРА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 30.6.2014.

Пековић О.

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Огњен Пековић

Број индекса Д9/06

Студијски програм Докторске академске студије

Наслов рада Изогеометријска анализа ламинираних композитних структура

Ментор проф. др Слободан Ступар

Коментор проф. др Александар Симоновић

Потписани Огњен Пековић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

у Београду, 30.6.2014.

Пековић О.

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА ЛАМИНИРАНИХ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУРА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду, 30.6.2014.

Потпис докторанда

Тексарић О.

1. Ауторство - Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.