

UNIVERZITET U BEOGRADU
RUDARSKO – GEOLOŠKI FAKULTET

Saša M. Jovanović

**FUZZY STOHAŠTIČKI MODEL IZBORA
SISTEMA OTVARANJA PODZEMNOG
RUDNIKA**

Doktorska disertacija

Beograd, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MINING AND GEOLOGY

Saša M. Jovanović

**FUZZY STOCHASTIC MODEL OF
UNDERGROUND MINE DEVELOPMENT
SYSTEM SELECTION**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016.

Mentor: dr Zoran Gligorić, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

Članovi komisije:

1. dr Zoran Gligorić, redovni profesor
Naučna oblast: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet
2. dr Čedomir Beljić, redovni profesor
Naučna oblast: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet
3. dr Branko Gluščević, docent
Naučna oblast: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet
4. dr Nebojša Bojović, redovni profesor
Naučna oblast: Organizacija i menadžment u saobraćaju i transportu
Univerzitet u Beogradu, Saobraćajni fakultet

Datum odbrane: _____

FUZZY STOHAŠTIČKI MODEL IZBORA SISTEMA OTVARANJA PODZEMNOG RUDNIKA

Rezime

Investiciono okruženje skopčano sa rudarskom industrijom je veoma svojstveno kada se uporedi sa okruženjima koje susrećemo u tipičnim proizvodnim industrijama. Neke od karakteristika rudarstva, koje su često naznačene kao jedinstvene su: visok intenzitet investicija, dugi predproizvodni periodi, visok rizik i neobnovljivost resursa. Investiranje u sistem otvaranja rudnika predstavlja dobar primer ireverzibilne investicije. Takva investicija zahteva pažljivu analizu, jer nakon njene realizacije ona se ne može nadoknaditi bez značajnog gubitka vrednosti. Očigledno je da izbor sistema otvaranja podzemnog rudnika pripada strateškom planiranju.

Pitanje koji sistem otvaranja podzemnog rudnika je najpovoljniji za pristupanje ležištu i njegovu eksploataciju je jedno od mnogih sa kojim se rudarski inženjeri i planeri suočavaju, kada tragaju za najefikasnijim sistemom proizvodnje. U osnovi postoje tri glavna sistema za pristupanje ležištu i to su: okno, niskop (rampa) i potkop. Ova tri sistema se mogu međusobno kombinovati i u tom slučaju se povećava broj potencijalnih sistema otvaranja. Generalno, postupak izbora sistema otvaranja podzemnog rudnika obuhvata identifikaciju, procenu i izbor između alternativa.

Da bi rešili problem izbora najpovoljnijeg sistema otvaranja, tretiramo ga kao mrežu koja međusobno povezuje sve tačke pristupa sa površinom terena uz minimalni trošak izrade i izvoza. Glavni zadatak je projektovanje najjeftinije ostvarljivog sistema otvaranja uz poštovanje svih operativnih ograničenja.

U većini slučajeva, uslovi koji preovladavaju na površini terena i samom ležištu nisu povoljni za upotrebu potkopa kao sistema otvaranja. Sistemi otvaranja okno, niskop i okno-niskop identifikovani su kao potencijalne alternative za postupak procene. Iz svake pristupne tačke razapinjemo mrežu za transport rude u tri alternativna pravca. Svaki pravac odgovara jednom sistemu otvaranja. Svakoj deonici mreže dodeljuje se vrednost u obliku adekvatne fuzzy troškovne funkcije, koja kombinuje troškove

potrebne za izradu deonice i troškove transporta rude duž nje. Vrednosti ovih funkcija se menjaju kroz vreme, koristimo stohastičke procese, kao što je geometrijsko Brown-ovo kretanje, za njihovu simulaciju. Skup potencijalnih alternativa se rangira po preferenciji, u skladu sa rastućim nizom Indeksa konveksnosti. Procenjujući mreže razapete iz svake pristupne tačke, može se videti kako dubina, rezerve rude u pristupnim tačkama i fiksni kapacitet proizvodnje utiču na efikasnost sistema otvaranja.

Ključne reči: otkopavanje; otvaranje; mreže i grafovi; fuzzy skupovi; stohastički procesi; indeks konveksnosti; sistemi podrške odlučivanju

Naučna oblast: RUDARSKO INŽENJERSTVO

Uža naučna oblast: PODZEMNA EKSPLOATACIJA LEŽIŠTA MINERALNIH SIROVINA

UDK: 519.816/.87

519.245/.856

553.9:622/.172(043.3)

FUZZY STOCHASTIC MODEL OF UNDERGROUND MINE DEVELOPMENT SYSTEM SELECTION

Abstract

The investment environment associated with the mining industry is unique when compared with the environment encountered by typical manufacturing industries. Some of the characteristics of mining which are often proclaimed as unique are as follows: capital intensity, long preproduction periods, high risk and non-renewable resource. Mines' development system investments provide a good example of irreversible investment. Such investment requires careful analysis because, once the investment takes place, it cannot be recouped without significant loss a value. Obviously, the selection of an underground mine development system belongs to strategic planning.

The question of which underground mine development system is suitable for accessing and exploiting a deposit is one that mine engineers and planners are faced with, when investigating the most efficient production system. Basically, there are three main development systems to gain access to an ore body: vertical shaft, decline (ramp) and adit. These three systems can be mutually combined and, in that , the number of potential alternatives is increased. Generally speaking, the process of selection of an underground mine development system encompasses the identification, evaluation and selection among alternatives.

To solve the problem of selecting a suitable development system, we consider an underground mine development system as a network interconnecting all access points with surface breakout point, using the minimum cost of development and haulage. The major task is to design the lowest cost-feasible development system, respecting all operational constraints.

In many cases, conditions prevailing on the surface and deposit are not suitable to apply adit as the development system. Shaft, Decline and Shaft-Decline development systems are identified as potential alternatives for the evaluation process. From each access point, we span the ore transportation network to the surface in three alternative directions. Each direction corresponds to one development system. Every section of the network is weighted by an adequate fuzzy cost function, which combines the cost needed to build up the section and the cost of ore transportation along it. The values of this function are changed over the project time, using a stochastic process, Geometric Brownian Motion, to simulate them. A set of potential alternatives is preference-ranked, according to the ascending order of Convex Index. By evaluating the networks spanned from each access point, it can be seen how depth, access point ore reserves and fixed production rate affect the efficiency of the development system.

Key words: mining; development; networks and graphs; fuzzy sets; stochastic processes; convex index, decision support systems

Scientific area: MINING

Narrow scientific area: UNDERGROUND MINING

UDC: 519.816/.87

519.245/.856

553.9:622/.172(043.3)

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
1.1 Predmet istraživanja.....	1
1.2 Naučni ciljevi istraživanja.....	1
1.3 Polazne postavke u istraživanju.....	3
1.4 Metodologija istraživanja.....	5
1.5 Ostvareni rezultati.....	6
1.6 Organizacija – sadržaj doktorske disertacije.....	7
2. OTVARANJE PODZEMNOG RUDNIKA.....	9
2.1 Uvodne napomene.....	9
2.2 Uticajni činioci.....	9
2.3 Klasifikacija sistema otvaranja.....	11
2.3.1 Otvaranje horizontalnim prostorijama.....	12
2.3.2 Otvaranje kosim prostorijama.....	14
2.3.3 Otvaranje vertikalnim prostorijama.....	15
2.3.4 Otvaranje kombinacijom prostorija.....	16
2.4 Pregled literature.....	17
3. TEORIJSKE OSNOVE MODELA.....	20
3.1 Teorija odlučivanja.....	20
3.1.1 Definicije procesa odlučivanja.....	20
3.1.2 Vrste odluka i priroda procesa odlučivanja.....	20
3.1.3 Komponente odlučivanja.....	22
3.1.4 Pristupi procesu donošenja odluka.....	26
3.1.5 Strategijski pristupi odlučivanju.....	27
3.1.6 Postupak donošenja odluke.....	28
3.1.7 Rizikovanje i strategija upavljanja rizikom.....	30
3.1.8 Planiranje donošenja odluke i nivoi odlučivanja.....	31
3.2 Osnove Teorije grafova i Teorije mreža.....	33
3.2.1 Osnove Teorije grafova.....	33
3.2.2 Osnove Teorije mreža.....	37

3.3 Teorija fuzzy skupova.....	41
3.3.1 Fuzzy skupovi.....	41
3.3.2 Fuzzy brojevi.....	43
3.3.3 Lingvističke promenljive.....	45
3.3.4 Transformacija lingvističkih promenljivih u fuzzy brojeve.....	46
3.4 Stohastički difuzni proces.....	47
3.4.1 Stohastički proces.....	47
3.4.2 Stohastički sistemi.....	48
3.4.3 Brown-ovo kretanje i stohastičke diferencijalne jednačine.....	49
3.5 Osnove Monte Carlo simulacija.....	53
3.6 Transformacija funkcije gustine verovatnoće u trouglasti fuzzy broj.....	56
4. IZBOR SISTEMA OTVARANJA.....	59
4.1 Model izbora sistema otvaranja zasnovan na Indeksu konveksnosti.....	59
4.1.1 Fuzzy težinska mreža i najkraći put u njoj.....	59
4.1.2 Formulacija problema.....	60
4.1.3 Indeks konveksnosti.....	66
4.1.4 Definisane troškovnih funkcija.....	68
4.1.5 Algoritam izbora sistema otvaranja.....	78
5. TESTIRANJE MODELA (NUMERIČKI PRIMER).....	81
5.1 Definisane ulaznih podataka.....	81
5.2 Rešenje numeričkog primera.....	84
5.3 Diskusija dobijenih rezultata.....	150
6. ZAKLJUČAK I BUDUĆA ISTRAŽIVANJA.....	153
7. LITERATURA.....	154

1. UVOD

1.1 Predmet istraživanja

Otvaranje predstavlja prvu i veoma važnu fazu u eksploataciji ležišta mineralnih sirovina. Usvojena shema, konstruktivni parametri otvaranja u velikoj meri utiču na kapacitet proizvodnje, efikasnost transporta, ventilacije i odvodnjavanja. U objekte otvaranja podzemnog rudnika (okna, navozišta, niskope, hodnike, sipke) ulaže se i do 60% ukupnih investicionih sredstava potrebnih za realizaciju eksploatacije.

Osnovni problem koji treba rešiti u cilju stvaranja efikasnog sistema eksploatacije ležišta mineralnih sirovina jeste problem optimizacije troškova u podzemnom rudniku, tokom njegovog veka eksploatacije, posebno fokusirajući troškove vezane sa podzemnom pripremom potrebnom da se obezbedi pristup do rudne zone i transport rude iz te zone. Problem optimizacije rudnika prikazuje se kao model u obliku težinske mreže. Smanjenje troškova rudarske proizvodnje je važan predmet istraživanja za one koji se bave pripremanjem rudnika za proizvodnju, odnosno za projektante i operativce koji su suočeni sa visoko konkurentnim tržištem mineralnih proizvoda. Efikasni optimizacioni algoritmi postoje za projekte površinskih kopova, i uspešno su bili primenjeni kao komercijalni softverski sistemi. Međutim, problem optimiziranja podzemnih rudnika je u manjem obimu tako dobro shvaćen. Glavno uporište optimizacije treba da bude smanjenje troškova tokom veka eksploatacije pomoću iznalaženja najefikasnijeg plana (rasporeda) okana, niskopa, hodnika i sipki da bi se obezbedila ekonomski opravdana rudarska proizvodnja.

1.2 Naučni ciljevi istraživanja

Pretpostavimo da je plan rudnika razvijen do nivoa gde je doneta odluka o načinu otkopavanja ležišta, odnosno postoji definisana prioritetna metoda otkopavanja, recimo podetažna metoda i gde su definisane lokacije tačaka pristupa ležištu i lokacije glavnih tačaka koncentracije transporta. Ključno pitanje, koje se po prirodi stvari nameće, jeste da li rudarske radove u fazi otvaranja ležišta razvijati (pripremati) vertikalnim oknima (visoki fiksni troškovi, ali niski eksploatacioni troškovi po toni rude koja je izvezena) ili koristiti niskope za pristup i transport (niži fiksni troškovi, ali viši

jedinični troškovi transporta) ili kombinacijom ova dva pristupa. Ova odluka predstavlja jednu od najvažnijih projektantskih odluka u procesu projektovanja podzemnog rudnika. Savremeni pristupi u projektovanju zasnivaju se na upoređivanju varijantnih rešenja. Obično postoji veliki broj potencijalnih rešenja koja treba da budu razmotrena i procenjena, što može otežati sam proces donošenja konačne odluke. Ako neko stane sa strane i pogleda plan rudnika kao formalnu mrežu u matematičkom smislu onda ovo pitanje može da se postavi i kao problem mrežne optimizacije. Može se postaviti opšte pitanje, u smislu, kako definisati:

- lokaciju i dubinu vertikalnog okna,
- strukturu veza (topologiju) hodnika koji spajaju pristupne tačke i tačke u oknu gde se vrši utovar i izvoz rude,
- lokaciju i sve elemente koji definišu niskop,
- strukturu veza (topologiju) hodnika (ili niskopa) koji spajaju pristupne tačke i tačke u niskopu,

odnosno pronaći lokacije svih gore navedenih objekata otvaranja koje minimizuju naznačenu funkciju troška koja obuhvata otvaranje rudnika i proizvodnju rude tokom veka eksploatacije rudnika.

U disertaciji se primenjuje pristup optimizacije težinske mreže, pri čemu su težinske funkcije koje se dodeljuju svakom segmentu mreže definisane kao fuzzy stohastičke veličine i one se menjaju tokom vremena. Na bazi opšte teorije mreža, predložen je pristup za izbor optimalnog sistema otvaranja podzemnog rudnika zasnovan na primeni Indeksa konveksnosti i Kompozitnog rangiranja.

U kontekstu dobijanja odgovora na osnovna pitanja o definisanju odgovarajućeg sistema otvaranja podzemnog rudnika, ova doktorska disertacija identifikuje više ciljeva istraživanja integrisanih u temi zadatka: (1) sagledavanje problema, (2) uvođenje što realističnijih pretpostavki u razvoju fuzzy stohastičkog modela za izbor optimalnog sistema otvaranja podzemnog rudnika, (3) postavljanje dinamičkog optimizacionog modela i (4) provera valjanosti postavljenog modela u rešavanju praktičnih problema.

1.3 Polazne postavke u istraživanju

Projekat je svaki proces kojim se postiže neki cilj ili grupa ciljeva. Za razliku od projekata u opštem smislu izgradnja i opremanje rudarskih objekata je uvek u direktnoj vezi sa rudarstvom kao privrednom granom. Prema tome, ovi projekti se nazivaju "rudarski", a pošto su po svojoj suštini investicionog karaktera, možemo ih zvati i "investicioni" projekti.

Teorija odlučivanja razlikuje odluke koje se donose u prisustvu neizvesnosti, gde su stanja različitih ishoda nepoznata i odluka pri riziku, gde se neizvesnosti mogu proceniti, odnosno kvantifikovati. Prvi slučaj se retko sreće pri praktičnim investicionim analizama u rudarstvu, tako da se predmet istraživanja fokusira na klasu problema gde se stanja ulaznih parametara mogu proceniti i u statičkom i u dinamičkom smislu. Za rudarske poduhvate izvor ovih neizvesnosti može biti bilo koji broj parametara koji se dovode u vezu sa stavkama kao što su sadržaj korisne komponente, rezerve rude, troškovi proizvodnje, cene proizvoda, itd.

Evidentiranje prisustva rizika kod ulaznih parametara predstavlja prvu fazu pri proceni mogućih ishoda, iza koje sledi mnogo važnija a to je kvantifikacija označenih rizika. Donosioci odluka se konformnije osećaju pri upotrebi determinističkih procena, ali ubrzo shvataju da vrednosti ulaznih parametara nisu sasvim određene. Analizirajući neodređenost oni uviđaju zbunjujući zadatak procenjivanja beskonačnog broja mogućih ishoda koji koristi neke neosporno nesigurne pretpostavke o budućnosti. Ovo je skup i vremenski zahtevan postupak koji neminovno potražuje neke grubo pojednostavljene pretpostavke. I pored svega, neodređenost u investicionim odlukama treba eksplicitno tretirati, ne treba se zbog složenosti problema olako predavati i zadovoljavati se radom na brzinu primenjujući pristup zanemarivanja parametara kao zaštitu protiv rizika. Sasvim je prirodno da se zahtevaju određena pojednostavljena, ali kvantifikujući moguće ishode pomoću najbolje dostupnih informacija, celokupna slika o sistemu otvaranja podzemnog rudnika postaje mnogo jasnija.

Razvoj formalnog okvira optimizacije treba da teži ka modelu problema rudničkog projekta sistema otvaranja u svojstvu težinske mreže. Problem minimiziranja troška otvaranja i eksploatacije rudnika jednak je minimiziranju troška njemu pridružene mreže. Model se prvo prezentuje u opštem opisnom načinu, a onda se

formuliše za specijalan slučaj u preciznijoj matematičkoj formi. Cilj opšteg modela optimizacije treba da bude minimizacija ukupnog promenljivog troška pristupanja rudi i njenog transporta, gde se pretpostavlja da je trošak neka predložena kombinacija troškova infrastrukture (pristupanja) i eksploatacije (transporta).

Polazne postavke su:

- mrežni model pretpostavlja da su sve tačke pristupa date, zajedno sa očekivanom tonažom za svaku pristupnu tačku,
- pretpostavlja se da rudnik može sadržati ili niskop ili hodnik ili vertikalno izvozno okno sa jednom ili više utovarno/pristupnih tačaka. Površinska lokacija niskopa, hodnika ili okna može biti ili fiksirana, slobodna ili uslovljena datim regionom; dužina niskopa, hodnika i dubina okna su generalno slobodne promenljive,
- troškovi otvaranja za niskop, hodnik i okno su dati; obično će oni biti modelovani kao trošak po dužnom metru,
- troškovi transporta duž niskopa, hodnika su dati; obično će ovi troškovi biti specificirani u \$/tm i variraju tokom vremena,
- troškovi izvoza oknom su dati kao funkcija tonaže, dubine okna i vremena.

Dozvoljeno je da topologija rudničke mreže otvaranja varira. Prema tome, glavne promenljive su:

- lokacija i/ili dubina na kojoj se nalazi osnova okna ili tačke navozišta,
- lokacija i dužina niskopa, kao i nagib,
- lokacija i dužina hodnika,
- topologija rudničke mreže otvaranja

Mrežni model može inkorporirati i neka od ključnih operativnih ograničenja koja su karakteristika projekata podzemnih rudnika, na primer, vertikalni nagibi niskopa ograničeni su do apsolutno dozvoljenog nagiba u opsegu koji je definisan tehničkim mogućnostima transportne opreme, itd.

Elementi rešenja će opisati vrednosti promenljivih koje minimiziraju nominovani troškovni cilj:

- lokaciju i dubinu okna, odnosno elemente niskopa ili hodnika,
- topologiju mreže otvaranja,
- procenjen trošak optimalnog rešenja.

1.4 Metodologija istraživanja

U ovoj disertaciji, kreiran je fuzzy stohastički dinamički model izbora optimalnog sistema otvaranja podzemnog rudnika, koji predstavlja osnovu za donošenje strateških investicionih odluka u fazi projektovanja. Model obuhvata specifikaciju neizvesne tonaže rude u pristupnim tačkama, koju treba prevesti do površine terena. Količine rude koje se mogu otkopati i transportovati direktno zavise od primenjene metode otkopavanja. Efikasnost metode otkopavanja može se izraziti koeficijentom iskorišćenja. Ovaj koeficijent predstavlja procentualni deo rude koji je otkopan iz primarnog rudnog tela. On zavisi od mnogih parametara kao što su: veličina i oblik rudnog tela, ugla pada, debljine rudnog tela, raspodele sadržaja korisne komponente, fizičko-mehaničkih karakteristika rude i okolnih stena, vrste kontakta između rude i okolnih stena, itd. Postoji veći broj različitih metoda otkopavanja, koje se koriste u skladu sa pomenutim parametrima ali nijedna od njih ne može otkopati celokupne rezerve iz primarnog rudnog tela. Sve informacije o karakteristikama ležišta zasnovane su na podacima koji su dobijeni istražnim bušenjem sa površine terena i veoma je teško na osnovu njih definisati parametre u smislu vrednosti sa visokim stepenom određenosti. Ovo je razlog zbog čega se koriste fuzzy lingvističke promenljive da bi se opisao koeficijent iskorišćenja. Sledeći korak transformiše fuzzy lingvističke promenljive u fuzzy trouglaste brojeve i na taj način se kvantifikuje neizvesnost tonaže. Heterogenost ulaznih informacija vezanih za karakteristike radne sredine (fizičko-mehaničke karakteristike, hidrogeološke karakteristike, itd.) u velikoj meri utiču na veličinu troškova izrade prostorija otvaranja i na nemogućnost da se oni izraze na deterministički način. U tom kontekstu vrši se njihova fazifikacija.

Matematički model omogućava, kroz stohastičku diferencijalnu jednačinu stanja, adekvatno predstavljanje dinamičke prirode eksploatacionih troškova transporta rude kroz različite tipove prostorija otvaranja. Ako uzmemo u obzir da operativni troškovi vezani za transport rude zavise od mnogih parametara (radna snaga, energija, itd.) i da se ovi parametri menjaju tokom vremena, onda može biti od velike koristi sposobnost da se predvide (procene) buduće vrednosti ovih troškova. Da bi se procenile buduće vrednosti operativnih troškova koristi se Monte Carlo simulacija geometrijskog Brown-ovog kretanja. Dobijene raspodele troškova tokom vremena se transformišu u odgovarajuće fuzzy trouglaste brojeve primenom Swishchuk-ovog modela transformacije. U disertaciji je primenjena teorija mreža u fuzzy stohastičkom okruženju, u okviru koje se pronalazi put sa najmanjim mogućim troškovima, odnosno optimalni sistem otvaranja. Pronalaženje ovog puta zasniva se na pronalaženju fuzzy najkraćeg puta u mreži na osnovu pripadajućeg Indeksa konveksnosti. Konačan izbor sistema otvaranja podzemnog rudnika zasniva se na primeni Kompozitnog rangiranja.

1.5 Ostvareni rezultati

U disertaciji je razmatran problem izbora optimalnog sistema otvaranja podzemnog rudnika. Ovaj problem predstavlja jedan od najznačajnijih problema kombinatorne optimizacije pri projektovanju sistema otvaranja. Na osnovu dosadašnjih istraživanja, pored opšte analize problema, ostvareni su sledeći rezultati:

- postavljen je dinamički model izbora optimalnog sistema otvaranja podzemnog rudnika koji je zasnovan na Teoriji mreža i Kompozitnom rangiranju;
- smanjene su neodređenosti ulaznih parametara, rezervi rude, troškova izrade prostorija otvaranja i troškova transporta na fuzzy odnosno stohastički način;
- prikazana je promena preferenci obrađivanih sistema otvaranja pri simultanoj promeni dubine otkopavanja i rezervi rude koje treba transportovati;
- smanjen je rizik u procesu donošenja strateških investicionih odluka u procesu projektovanja podzemnih rudnika;
- potvrđena je valjanost pristupa kao jednog računarski vrlo efikasnog načina za izbor optimalnog sistema otvaranja podzemnog rudnika;

- stvorena je dobra podrška pri strateškom odlučivanju.

Ostvareni rezultati još više dobijaju na svojoj važnosti uzimajući u obzir da sistem otvaranja podzemnog rudnika predstavlja dobar primer ireverzibilne investicije. Ovakve investicije zahtevaju pažljive analize, jer nakon njihove realizacije je veoma teško ispraviti slabosti projektnih rešenja bez značajnog gubitka novčanih sredstava i vremena. Samim tim i odluku o izboru sistema otvaranja podzemnog rudnika možemo posmatrati u kontekstu strateškog investicionog odlučivanja.

Da bi ova odluka bila kvalitetna neophodno je sagledati okruženje u kojem se ona donosi, odnosno definisati sve uticajne parametre. Uzimajući u obzir da se povećava dubina na kojoj se nalaze ležišta mineralnih sirovina, ultra duboka ležišta, tada se važnost izbora sistema otvaranja podzemnog rudnika višestruko povećava. Pored navedene činjenice, praktična primena stručnih rezultata se odnosi i na postojeće površinske kopove, koji se nalaze pri kraju svog eksploatacionog veka, pa je podzemna eksploatacija jedini način da se preostale rezerve otkopaju na siguran i ekonomski isplativ način.

1.6 Organizacija – sadržaj doktorske disertacije

Istraživanja u okviru doktorske disertacije podeljena su u dve osnovne celine, teorijsku i praktičnu. U okviru prve celine sagledan je i definisan problem, dato je rešenje problema na osnovu primene teorije mreža, teorije fuzzy skupova i stohastičkih difuznih procesa. U okviru druge celine verifikovano je dato rešenje problema u smislu praktične primene.

Doktorsku disertaciju čine sledeće strukturne celine:

- uvodna razmatranja o sistemima otvaranja i pregled svetskih iskustava iz ove oblasti,
- osnove teorije odlučivanja, teorije grafova, mreža, fuzzy skupova i stohastičkih diferencijalnih jednačina,
- pristup izboru optimalnog sistema otvaranja podzemnog rudnika u fuzzy stohastičkom okruženju, rešenje problema izbora optimalnog sistema otvaranja

podzemnog rudnika zasnovano na Indeksu konveksnosti (algoritmu za pronalaženja fuzzy najkraćeg puta u mreži) i Kompozitnom rangiranju,

- numerički eksperimenti i analiza dobijenih rezultata,
- zaključna razmatranja i predlog budućih istraživanja.

2. OTVARANJE PODZEMNOG RUDNIKA

2.1 Uvodne napomene

Otvaranje podzemnog rudnika predstavlja primarnu fazu rudarskih aktivnosti u procesu eksploatacije ležišta mineralnih sirovina. Ovu fazu karakteriše izrada sistema rudničkih prostorija, svrsishodno povezanih, sa osnovnim ciljem obezbeđivanja komunikacije između rudnog ležišta i površine terena.

U zavisnosti od uslova u kojima se odvija eksploatacija, prilikom razvijanja faze otvaranja srećemo različite:

- tipove prostorija otvaranja,
- forme organizovanja,
- kao i karakteristične načine korišćenja istih [10]

Podzemnu eksploataciju ležišta mineralnih sirovina karakteriše činjenica da se uslovi u kojima se ona odvija sve više usložnjavaju. Osnovni aspekti ove konstatacije potkrepljeni su sledećim činjenicama:

- sadržaj korisne komponente u rudi se sve više smanjuje,
- dubina na kojoj se nalaze korisne rezerve rude se povećava,
- tržišni uslovi se odlikuju čestim i intenzivnim promenama, posebno kada je reč o eksploataciji metaličnih mineralnih sirovina,
- većina aktivnih rudnika se suočava sa iscrpljenjem eksploatacionih rezervi,
- zakonska regulativa je sve stroža u pogledu očuvanja životne okoline

Uzimajući u obzir prethodno navedene činjenice, može se slobodno reći da izbor sistema otvaranja podzemnog rudnika predstavlja najvažniji čin koji ima dalekosežne posledice na efikasnost eksploatacije mineralne sirovine.

2.2 Uticajni činioci

Veliki broj faktora utiče na izbor sistema otvaranja podzemnog rudnika. Svaki faktor ima različit način i intenzitet uticaja. U cilju efikasnije analize njihovog uticaja

klasifikovani su u četiri osnovne grupe: prirodno-geološki, tehničko-tehnološki, ekonomski i infrastrukturni faktori.

Prirodno-geološki faktori:

- položaj ležišta u zemljinoj kori i dubina zaleganja,
- ugao pada ležišta,
- pravac pružanja ležišta,
- moćnost ležišta,
- morfološke karakteristike ležišta,
- rezerve mineralne sirovine, kvalitet i raspodela korisne komponente,
- opšte geološke prilike terena i geološki profili,
- tektonika terena i ležišta,
- fizičko-mehanička i hidrigeološka svojstva ležišta i okolnog stenskog masiva,
- reljef terena,
- klimatski uslovi

Tehničko-tehnološki faktori:

- projektovani kapacitet proizvodnje,
- projektovana metoda otkopavanja,
- sistem transporta,
- sistem ventilacije,
- sistem odvodnjavanja,
- prevoz ljudi,
- doprema repromaterijala

Ekonomski faktori:

- troškovi izrade prostorija otvaranja,

- troškovi transporta i izvoza mineralne sirovine duž njih,
- troškovi održavanja prostorija otvaranja,
- troškovi ventilacije,
- troškovi odvodnjavanja,
- vreme potrebno da se izgradi sistem otvaranja

Infrastrukturni faktori:

- blizina saobraćajnica lokalitetu ležišta,
- blizina energetske infrastrukturnih objekata,
- prisutnost urbanizovanih oblasti,
- mogućnost snabdevanja vodom

Pored navedenih faktora uvek se mogu dodati i novi u zavisnosti od specifičnosti lokaliteta. Tokom izbora adekvatnog sistema otvaranja ne moraju se uzeti u obzir svi navedeni faktori, već se oni selektuju na osnovu konkretnog zadatka.

2.3 Klasifikacija sistema otvaranja

Planiranje i projektovanje faze otvaranja podzemnog rudnika može se okarakterisati kao rešavanje sledeće grupe osnovnih problema:

- izbor tipa i definisanje konstruktivnih parametara prostorija otvaranja,
- lokacija i raspored prostorija otvaranja,
- broj prostorija otvaranja

Rešavanjem ovih problema postižu se sledeći ciljevi:

- pristup rudnim zonama, povezivanje rudnog ležišta sa površinom terena,
- transport i izvoz rude i jalovine,
- prevoz ljudi,
- doprema repromaterijala,

- ventilacija rudnika,
- odvodnjavanje rudnika,
- servisiranje celokupnog sistema eksploatacije

U zavisnosti od količine poduhvaćenih eksploatacionih rezervi, otvaranje može biti potpuno ili delimično.

Potpuno otvaranje podrazumeva izradu sistema otvaranja čime se poduhvataju eksploatacione rezerve u celini. U principu, ovakav sistem otvaranja može se tretirati i kao delimičan. Razlog leži u činjenici da istražnim radovima možda nisu definisane sve rezerve koje postoje na datom lokalitetu.

Delimično otvaranje podrazumeva izradu sistema otvaranja čime se poduhvata samo jedan deo eksploatacionih rezervi. Ako se ukaže potreba za nastavkom eksploatacije, onda se izrađuje sistem otvaranja kojim se poduhvata sledeća količina eksploatacionih rezervi. Ovakav pristup je veoma čest u praksi, a utemeljenje se nalazi u pristupu da se sa otkopavanjem počinje u trenutku kada nam na raspolaganju stoje definisane količine rude koje se mogu ekonomično eksploatirati.

U zavisnosti od prostornog položaja jamskih prostorija sistemi otvaranja se mogu klasifikovati na sledeći način:

- otvaranje zasnovano na horizontalnim prostorijama,
- otvaranje zasnovano na kosim prostorijama,
- otvaranje zasnovano na vertikalnim prostorijama,
- otvaranje zasnovano na kombinaciji ove tri vrste prostorija

Sistem otvaranja podzemnog rudnika mora da bude usaglašen sa primenom efikasnih sredstava za otkopavanje, transport i izvoz mineralne sirovine, prevozom ljudstva, ventilacijom, odvodnjavanjem i servisiranjem jame.

2.3.1 Otvaranje horizontalnim prostorijama

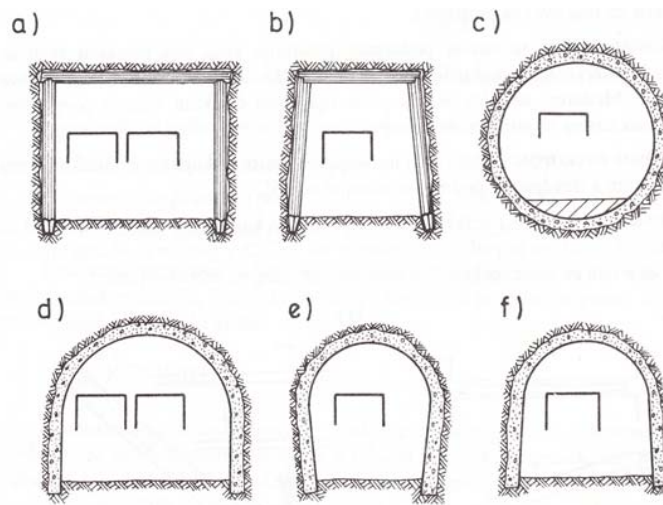
Horizontalna prostorija otvaranja naziva se potkop. Horizontalne jamske prostorije obuhvataju grupu jamskih prostorija koje se odlikuju velikom dužinom i

imaju pad, odnosno uspon manji od 3° . Inače, po pravilu, horizontalne prostorije izrađuju se pod nagibom od 3 do 5‰, u pravcu kretanja punih vagona ili jamskih dizel/električnih kamiona (transporta rude), radi lakšeg kretanja transportnih sredstava i oticanja vode tj. odvodnjavanja rudničke prostorije. Ove prostorije mogu biti neposredno vezane sa površinom i ne moraju. U zavisnosti da li imaju direktnu vezu sa površinom ove prostorije dobijaju naziv potkop ili hodnik. U grupu horizontalnih prostorija takođe spadaju i tuneli.

Tuneli su horizontalne podzemne prostorije koje imaju dva izlaza na površinu. Ova vrsta podzemnih prostorija ređe se sreće u rudarstvu.

Potkop je horizontalna rudnička prostorija koja ima neposrednu vezu sa površinom i namenjena je da posluži kao veza površine sa podzemnim radovima. Po svom obliku i dimenzijama potkopi se ne razlikuju od ostalih horizontalnih prostorija.

Hodnici su horizontalne podzemne prostorije koje nemaju neposrednu vezu sa površinom i izrađuju se u cilju pripremanja ležišta za otkopavanje. U zavisnosti od položaja hodnika prema ležištu hodnici obično dobijaju nazive: poprečni hodnik, podužni (smerni) hodnik, probojni hodnik, ili prema nameni: izvozni hodnik, otkopni hodnik, ventilacioni hodnik, hodnik za prolaz opreme i radnika itd. Oblik poprečnog preseka jamskih hodnika može biti različit, na slici br. 1 se vide poprečni preseki hodnika.



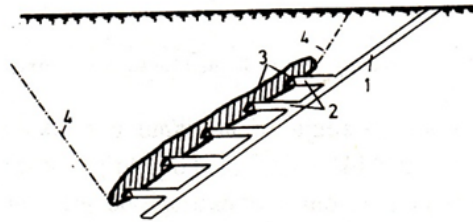
Slika br. 1 Oblici poprečnog preseka hodnika a) pravougaoni, b) trapezni, c) kružni, d) zasvođen, e) potkovičast, f) zvonast

Otvaranje rudnika potkopom moguće je primeniti u brdskim predelima, kada se ovom jaskom prostorijom otvaranja poduhvata ležište koji se nalazi iznad nivoa potkopa.

2.3.2 Otvaranje kosim prostorijama

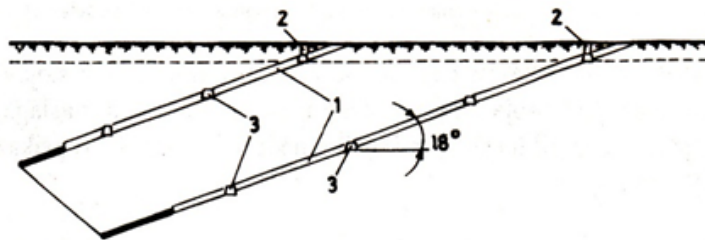
Kose jamske prostorije izrađuju se pod uglom i iste mogu biti izrađene u rudi ili pratećim stenama. Kose prostorije mogu biti neposredno vezane sa površinom ali i ne moraju. Kod kosih jamskih prostorija koja su posredno vezana sa površinom razlikujemo uskope, niskope, sipke i kose proboje.

Kod kosih jamskih prostorija koja su neposredno vezana sa površinom razlikujemo kosa okna i kose potkope. Na slici br. 2 vidimo otvaranje rudnika kosim oknom. Dok na slici br. 3 vidimo otvaranje kosim potkopom.



Slika br. 2 Otvaranje kosim oknom: 1- koso okno, 2- prečni hodnici, 3-smerni hodnici, 4- granica zone deformacije terena

Otvaranje kosim oknom najčešće je kod otvaranja strmih slojevitih i žičnih ležišta. U zavisnosti od brojnosti slojeva ili žica i osobina pratećih naslaga, otvaranje se izvodi po žici ili po podini ležišta.



Slika br. 3 Otvaranje kosim potkopom: 1- kosi potkop, 2- ventilacione prostorije, 3- smerni hodnici

Otvaranje kosim potkopom koristi se u slučaju kada je sloj ili rudna žica blago nagnuta ispod 25°.

U ovakvim slučajevima jamska prostorija se obično izrađuje kroz žicu, kao što je prikazano na slici br. 3.

2.3.3 Otvaranje vertikalnim prostorijama

U vertikalne jamske prostorije spadaju prostorije koje se odlikuju velikom dužinom, a izrađene su vertikalno u odnosu na horizontalnu ravan. U ovu grupu prostorija spadaju okna, slepa okna, i vertikalne sipke.

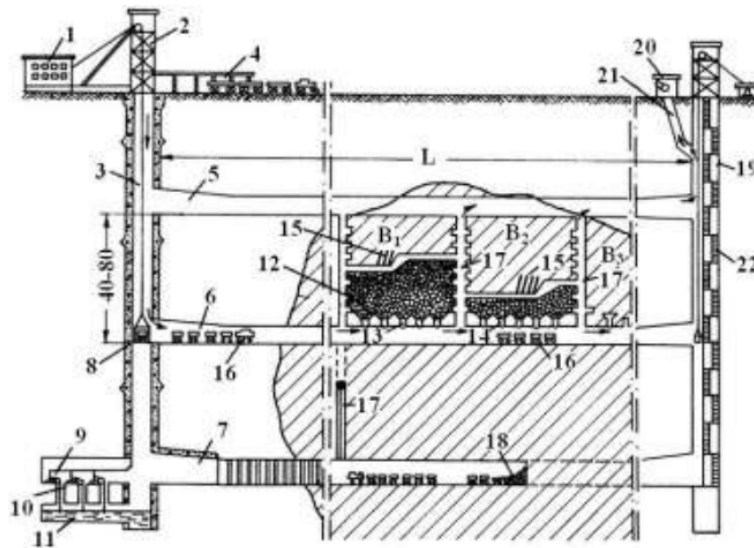
Oknom se naziva vertikalna podzemna prostorija koja ima neposrednu vezu sa površinom i namenjena je potrebama istraživanja i eksploatacije ležišta mineralnih sirovina, slika br. 4 pozicija 3.

U zavisnosti od namene okno može biti glavno i pomoćno. Glavno okno prvenstveno je namenjeno izvozu rude iz jame na površinu i provetravanju jame. Pomoćno okno izrađuje se u pomoćne svrhe (za prevoz ljudi, izvoz materijala i jalovine, odvodnjavanje i druge svrhe). Od toga kakva je osnovna namena okna ista i dobijaju nazive: izvozno okno, servisno okno, ventilaciono okno, okno za zasip itd. Deo okna koji se nalazi ispod nivoa najnižeg hodnika i služi za skupljanje vode naziva se vodosabirnik, slika br. 4 pozicija 11.

Kod izgranje okna teži se da okno bude što je moguće ekonomičnije iskorišćeno. Pa iz ovog razloga okno uglavnom ima više funkcija. Najčešće se koristi za: izvoz rude, prevoz radnika, dopremu repromaterijala, ventilaciju, smeštaj cevi za odvodnjavanje, smeštaj cevi za komprimovani vazduh, smeštaj električnih kablova, merdevina za prolaz ljudstva i druge potrebe.

Slepim oknom naziva se vertikalna jamska prostorija, obično manjeg poprečnog preseka i male dubine, koja ima posrednu vezu sa površinom, slika br. 4 pozicija 17.

Vertikalne sipke su podzemne rudničke vertikalne prostorije malog poprečnog preseka i male dužine, kružnog ili pravougaonog poprečnog preseka, koje isključivo služe za gravitacijsko spuštanje rude ili jalovine.

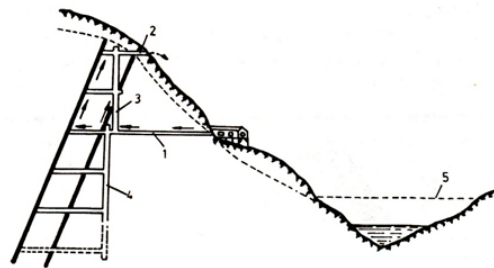


Slika br. 4 Prikaz jame sa podzemnim prostorijama i objektima: 1- zgrada za izvozna mašinu; 2- izvozni toranj; 3- izvozno okno; 4- izvozište; 5,6,7 - hodnici; 8- koš; 9- pumpna stanica (komora); 10- pumpe; 11- vodosabirnik; 12- otkopi; 13,14- levkovi za utovar; 15- minske bušotine; 16- vagoneti; 17- slepo okno; 18- čelo radilišta; 19- ventilaciono okno; 20- zgrada za ventilator; 21-ventilacioni kanal; 22- merdevine; B₁, B₂, B₃- ležište pripremljno za eksploataciju

Otvaranje rudnika oknom veoma široko se primenjuje a značaj mu je sve veći ukoliko se otvaraju ležišta na većim dubinama.

2.3.4 Otvaranje kombinacijom prostorija

Kombinovanim otvaranjem rudnika koristimo kombinacije horizontalnih, kosih i vertikalnih jamkih rudničkih prostorija. Na slici br. 5 prikazan je primer otvaranja rudnika pomoću potkopa gde se poduhvata deo ležišta koji se nalazi iznad potkopa, dok deo ležišta koji zaleže dublje otvara se vertikalnim ili kosim oknima.



Slika br. 5 Kombinovano otvaranje: 1,2- potkop, 3,4- slepo okno, 5- nivo površinskih voda

Otvaranje ležišta podzemnom prostorijom u obliku spirale (rampe) kako je je to prikazano na slici br. 6. primenjuje se u slučajevima kada ova jamska prostorija treba da služi za kretanje dizel jamske mehanizacije i kada je neophodno savladavati velike visinske razlike.



Slika br. 6 Aksonometrijski prikaz spiralne rampe: 1- spiralna rampa, 2- okno, 3- istovarna stanica

2.4 Pregled literature

Glavni cilj kojem teže projektanti podzemnih rudnika kao i neposredni izvođači radova, koji se suočavaju sa izuzetno teškim uslovima eksploatacije, jeste smanjenje troškova tokom izvođenja rudarskih aktivnosti.

Problem projektovanja podzemnog rudnika, u smislu problema matematičke optimizacije, prvi je predstavljen od strane Lizotte-a i drugih [28]. U ovom pristupu pretpostavlja se da je podzemni rudnik sastavljen od više nivoa, pri čemu se svaki nivo modelira kao mreža u horizontalnoj ravni. Ova grupa autora takođe koristi težinska Euclidean–Steinerova minimalna drvetva kao metodu za pronalaženje dobrih rešenja.

Lee i drugi [26] predstavljaju rudnik u smislu trodimenzionalne mreže. Egzaktna svojstva takvih mreža, za slučaj kada se postavlja ograničenje da mreža leži samo u vertikalnoj ravni, takođe su bila analizirana od strane Brazil-a i drugih [5]. Ovakav pristup poslužio je kao osnova da se razvije model mrežne optimizacije rudničke infrastrukture. U ovom modelu, problem minimiziranja troškova otvaranja podzemnog

rudnika i eksploatacije je istovetan problemu minimiziranja troškova njemu pridružene mreže.

Jedan od veoma važnih radova u ovoj oblasti je rad autora Brimberg i drugi [8], u kojem je akcenat istraživanja stavljen na pronalaženje optimalne lokacije okna. Autori tretiraju podzemni rudnik u svojstvu matematičke mreže koja predstavlja skup čvorova i skup ivica koje ih spajaju, a svakoj ivici dodeljena je odgovarajuća troškovna funkcija. Brazil i drugi [4], za dati plan otkopavanja, kao glavni cilj postavljaju minimizaciju ukupnih promenljivih troškova pristupanja do rudne zone i troškova njene eksploatacije iz iste, pri čemu se pretpostavlja da su oni nominalna kombinacija troškova izrade potrebne infrastrukture i troškova transporta rude kao najznačajnijih. Ovakav model je bio razvijen u svrhu optimizacije eksploatacije dva podzemna rudnika zlata. Brazil i drugi [6], daju precizan opis matematičkog modela za mrežu niskopa, pri čemu vrše optimizaciju troškova sa stanovišta iznalaženja najbolje načina povezivanja više rudnih tela. Brazil i drugi [7], predstavljaju rudnik kao mrežu sastavljenu od skupa čvorova V i skupa ivica E , od kojih svaka ivica povezuje po jedan par čvorova. Skup V sadrži dve vrste čvorova: terminale čije su lokacije fiksirane u modelu i Steiner-ove tačke čije lokacije mogu slobodno da variraju. Glavni cilj jeste minimizacija funkcije troška za oformljenu mrežu, uzimajući u obzir lokacije Steiner-ovih tačaka i oblike ivica. Gligorić i drugi [17] primenili su fuzzy TOPSIS metodu i mrežnu optimizaciju u cilju pronalaženja optimalne lokacije okna kod dubokih ležišta sastavljenih od više rudnih tela. Sve prethodno navedeni radovi tretirali su problem otvaranja podzemnog rudnika u smislu matematičke mreže.

Drugi pristup ovoj problematici zasniva se na direktnom upoređivanju predloženih sistema otvaranja u skladu sa prihvatljivim kriterijumima.

Elevli i drugi [14] uporedili su sistem otvaranja oknom i niskopom u slučaju podzemnog rudnika sa malim kapacitetom proizvodnje od 60 000 t/god rude hromita. Primenili su sledeće kriterijume: ukupne investicije potrebne za izradu prostorija otvaranja i nabavku opreme za transport rude, troškovi transporta rude i neto sadašnja vrednost ukupnog projekta. Pokazali su da do dubine od 700 m, ukupne investicije i neto sadašnja vrednost favorizuju niskop kao sistem otvaranja dok kriterijum troškova transporta favorizuje okno. Hall [20] je opisao metodologiju koja identifikuje način na

koji cena proizvoda utiče na ekonomičnost sistema otvaranja sa oknom i bez okna, da li je okno prihvatljivo ili ne, kako se vrednost okna smanjuje i kada okno postaje neekonomično.

3. TEORIJSKE OSNOVE MODELA

3.1 Teorija odlučivanja

Svakoga dana, svako od nas donosi odluke različite važnosti, pa ideja da odlučivanje može predstavljati sofisticiraniju umešnost izgleda strana na prvi pogled. Međutim, istraživanja su pokazala da je većina ljudi mnogo manje uključena u proces odlučivanja nego što oni to misle. Shvatanje šta odlučivanje obuhvata, zajedno sa nekoliko efektnih tehnika, pomoći će da se donesu bolje odluke.

Situacije u kojima je neophodno doneti neku odluku uopšteno se definišu kao situacije u kojima donosioc odluke na jednoj strani ima neostvaren cilj, a na drugoj skup opcija koje mogu da ostvare isti. Nakon toga, donosioc odluke mora na neki način da proceni postojeće opcije i da izabere jednu od njih.

3.1.1 Definicije procesa odlučivanja

Dobra osnova za početak su standardne definicije:

Donošenje odluke predstavlja proučavanje vezano za prepoznavanje i odabiranje alternativa zasnovanih na vrednostima i prioritetima donosica odluke. Odlučivanje implicira postojanje alternativa koje će se razmatrati i u tom slučaju ne želimo samo da identifikujemo što je moguće veći broj takvih alternativa nego i da izaberemo jednu koja se najbolje slaže sa našim ciljevima, željama, vrednostima itd.

Donošenje odluke je proces dovoljnog smanjivanja neizvesnosti i sumnje oko alternativa da bi se dozvolio razuman izbor između njih. Ova definicija naglašava informaciju koja objedinjuje funkciju odlučivanja. Treba naglasiti da se neizvesnost pre smanjuje nego što se eliminiše. Samo mali broj odluka se može doneti bez prisustva apsolutne neizvesnosti zato što je kompletno saznanje o svim alternativama skoro nemoguće. Prema tome, svaka odluka obuhvata i izvestan stepen rizika.

3.1.2 Vrste odluka i priroda procesa odlučivanja

Postoji nekoliko osnovnih vrsta odluka:

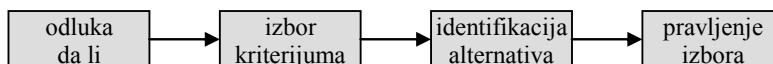
1. **Odluke tipa da li.** Ovo je da/ne, ili/ili odluka koja se mora napraviti pre nego što nastavimo sa izborom neke alternative. Odluke tipa da li, donose se "vaganjem" razloga za i protiv. Važno je biti svestan ovakve odluke, pošto suviše često pretpostavljamo da donošenje odluke započinje sa identifikacijom alternativa, pretpostavljajući da je već doneta odluka da se jedna alternativa izabere.

2. **Odluke tipa koja.** Ove odluke obuhvataju izbor jedne od više mogućih alternativa iz predloženog skupa, pri čemu se izbor zasniva na činjenici koliko dobro svaka alternativa ispunjava unapred definisan skup kriterijuma.

3. **Zavisne odluke.** Postoje odluke koje su donešene ali se ne mogu sprovesti dok se ne ispuni neki uslov. Većina ljudi nosi sa sobom skup već donetih odluka, zavisnih odluka, i čeka da se steknu pravi uslovi ili mogućnosti za njihovo sprovođenje. Vreme, energija, cena, raspoloživost, mogućnost, podsticanje, svi ovi faktori mogu da figurišu u neophodnim uslovima koje treba ispuniti pre nego što sprovedemo našu odluku.

Kritični faktor koji teoretičari odlučivanja zanemaruju da naglase jeste da je donošenje odluke nelinearan i rekurzivan proces. To jest, većina odluka se donosi kretanjem unazad i unapred između izbora kriterijuma (karakteristika koje naš izbor treba da zadovolji) i identifikacije alternativa (mogućnosti koje možemo izabrati). Alternative koje stoje na raspolaganju imaju uticaj na kriterijume koje im dodeljujemo, a na sličan način i kriterijumi koje uspostavljamo imaju uticaj na alternative koje ćemo razmatrati.

Prema tome, imaćemo proces odlučivanja sledećeg oblika, slika br. 7:



Slika br. 7 Proces donošenja odluke

Na ovaj način, proces donošenja odluke nastavlja svoje kretanje unazad i unapred, i tako u krug kako se postiže napredak, što će eventualno izgledati kao linearno rukovođenje procesom ali koji je prema svom stvarnom mehanizmu veoma rekurzivan.

3.1.3 Komponente odlučivanja

Svaka odluka se donosi unutar svog okruženja, koje se definiše kao skup informacija, alternativa, vrednosti i prednosti koje u tom trenutku stoje na raspolaganju. Neko idealno okruženje obuhvatalo bi sve dostupne i precizne informacije i svaku moguću alternativu. Međutim i informacije i alternative su ograničene zato što su vreme i naponi za prikupljanje informacija i identifikaciju alternativa ograničeni. Vremensko ograničenje u prostom smislu znači da se odluka mora doneti u izvesnom vremenskom periodu. Ograničenje po pitanju napora odražava granice radne sposobnosti, novca i prioriteta. Pošto se odluke moraju doneti unutar ovog ograničavajućeg okruženja možemo reći da je glavni izazov donošenja odluke neizvesnost a da je glavni cilj analize smanjenje iste. Skoro uvek se dešava da nemamo na raspolaganju sve potrebne informacije kako bi sa sigurnošću doneli odluku, pa većina odluka obuhvata neospornu količinu rizika.

Sama činjenica da se odluke moraju doneti unutar ograničavajućeg okruženja sugerise dve stvari. Prvo, ona objašnjava zašto je u procesu donošenja odluke kasno uviđanje mnogo preciznije i mnogo bolje nego predviđanje. Kako vreme prolazi, okruženje u kojem se odluka donosi nastavlja da se širi. Pojavljuju se nove informacije i nove alternative, čak i nakon što se odluka mora doneti. Opremljeni novim činjenicama, posle odluke, naknadni donosioci odluke se mogu više puta osvrnuti unazad i doneti mnogo bolju odluku nego prvobitni donosioc, zato što se okruženje nastavilo da širi.

Druga stvar sugerisana idejom o odlukama unutar okruženja proističe iz prethodne. Pošto se okruženje nastavlja da širi kako vreme prolazi, često se preporučuje da se donošenje odluke odloži sve do kraja zadatog vremenskog roka. Informacije i alternative se umnožavaju kako vreme prolazi, pa da bi ste imali uvid u većinu informacija i najboljih alternativa, nemojte donositi odluku suviše rano. Pošto se sve odvija u relanom životnom okruženju očigledno je da neke alternative ne mogu biti na raspolaganju i suviše dugo, ovo je napetost pod kojom moramo da radimo i koja nam pomaže da odredimo (presečemo) poslednji rok za donošenje odluke.

Odlaganje odluke onoliko koliko je to zaista moguće obezbeđuje sledeće tri beneficije:

1. Okruženje u kojem se donosi odluka biće veće, pri tom obezbeđujući više informacija. Takođe ima vremena za mnogo pažljiviju i širu analizu.
2. Mogu se prepoznati ili kreirati nove alternative.
3. Mogu se promeniti prioriteta donosioca odluke. Daljim razmišljanjem, mudrošću, zrelošću možete odlučiti da umesto radnog mesta X prihvatite radno mesto Y.

Većina donosioca odluke ima tendenciju da traži više informacija nego što je potrebno kako bi doneli valjanu odluku. Kada se traži i dobije i suviše mnogo informacija može se pojaviti jedan ili više problema.

1. Događa se kašnjenje pri odlučivanju, zbog neophodnog vremena potrebnog da se dobiju i obrade dodatne informacije. Ovo kašnjenje može umanjiti efektivnost odluke ili rešenja.

2. Desiće se prenatrpanost informacijama. U ovoj fazi, tako puno informacija koje stoje na raspolaganju smanjuju stvarnu sposobnost donošenja odluke, zato što više nije moguće na adekvatan način i u potpunosti proceniti informacije. Glavni problem prouzrokovan prenatrpanošću informacijama jeste zaboravnost. Kada se i suviše informacija stavi u memoriju, pogotovo u kratkom vremenskom periodu, neke od informacija (obično one ranije prikupljene) će se izostaviti

3. Desiće se selektivna upotreba informacija. To jest, donosioc odluke će između svih informacija koje mu stoje na raspolaganju izabrati samo one koje podupiru unapred zamišljeno rešenje.

4. Događa se mentalni zamor koji rezultuje usporavanjem procesa ili mnogo manje kvalitetnijim delovanjem.

5. Događa se zamor gde je donosioc odluke umoran od donošenja odluke. Posledica ovakvog stanja je odluka doneta na brzinu, neopreznost pri odlučivanju ili čak paraliza samog procesa gde odluka uopšte i nije doneta.

Količina informacija, koju ljudski mozak može da procesuirati, je ograničena. Ako se informacije ne selektuju svesno, procesuiranje će biti pristrasno u pravcu prvog dela primljenih informacija. Nakon toga, um se zamara i počinje da ignoriše sledeće informacije ili da zaboravlja ranije dobijene informacije.

Uobičajeno nerazumevanje u vezi sa donošenjem odluka jeste da se one donose izolovano jedna od druge: prikupljate informacije, istražujete alternative, zatim pravite izbor bez obzira na to šta se pre toga događalo. Činjenica je da se odluke donose u kontekstu drugih odluka. Tipična metafora koja se koristi za objašnjenje ovoga jeste tok. Postoji tok odluka koji okružuje donetu odluku, mnoge odluke koje su ranije donete dovele su do sadašnje i učinile je mogućom i ograničenom. Mnoge druge odluke proisteći će iz nje.

Drugi način za opisivanje ovakve situacije jeste da se kaže da većina odluka uključuje izbor iz grupe ranije odabranih alternativa, koje su nam stavljene na raspolaganje iz skupa alternativa koji je formiran prethodno donešenim odlukama. Prethodne odluke su aktivirale ili načinile operativnim određene alternative, a deaktivirale ili načinile neoperativnim ostale.

Onda možemo reći da svaka odluka:

1. proizilazi iz prethodnih odluka,
2. omogućava mnoge buduće odluke i
3. sprečava ostale buduće odluke

Ljudi koji moraju doneti teške odluke ponekad su uhvaćeni u zamku od strane ograničavajuće prirode procesa donošenja odluke. Svaka odluka koju donosite isključuje (sprečava) druge i zbog toga se može reći da ona prouzrokuje gubitak "slobode". Međutim, koliko donošenje odluke prouzrokuje gubitak slobode ono takođe kreira novu slobodu, nove izbore i mogućnosti. Samim tim donošenje odluke oslobađa u istoj meri koliko i uskraćuje odnosno ograničava. Odluka koja nije doneta često će rezultirati odlukom koju neko donosi za vas.

Važno je shvatiti da svaka odluka koju napravite utiče na tok odluka i skup alternativa koje vam stoje na raspolaganju i trenutno i u budućnosti. Drugim rečima, odluke imaju dalekosežne posledice.

Sledeće definicije u procesu odlučivanja su:

1. Informacije: To je znanje u pogledu odluke, efekata njenih alternativa, verovatnoće svake alternative, itd. Glavna stvar koja se mora ovde shvatiti jeste da i ako je znatna količina informacija poželjna, stanovište "da što ima više informacija to je

bolje" nije tačno. Isuviše mnogo informacija može trenutno da umanju kvalitet odluke, što je objašnjeno u Efektima kvantiteta informacija na proces donošenja odluke.

2. *Alternative:* Ovo su mogućnosti od kojih treba izabrati jednu. Alternative se mogu identifikovati (tj. tražiti i locirati) ili čak razviti (napraviti tamo gde one prethodno ne postoje). Samo traganje za već postojećim alternativama rezultovaće manje efektivnim odlučivanjem.

3. *Kriterijumi:* Ovo su karakteristike ili zahtevi koje svaka alternativa mora da poseduje u većem ili manjem obimu. Često se alternative procenjuju na osnovu ispunjenosti svakog kriterijuma.

4. *Ciljevi:* Šta je to što želite da ostvarite? Mnogi donosioci odluke prikupe grupu alternativa, a zatim se pitaju "Koju alternativu treba da izaberem?" bez razmišljanja koji su njihovi ciljevi, koji globalni cilj žele da ostvare. Pre svega treba postaviti pitanje "Koji su moji ciljevi?" a onda slede pitanja "Šta treba da uradim?" odnosno "Šta treba da izaberem?". U svakom slučaju komponenta identifikacije cilja treba da se uključi u analizu odluke.

5. *Vrednost:* Vrednost se odnosi na poželjnost određenog rešenja, vrednost alternative koja je izražena u novčanim jedinicama, satisfakciji ili nekoj drugoj beneficiji.

6. *Prednosti (preference):* Ovo odražava filosofiju i moralnu hijerarhiju donosioca odluke. Možemo reći da one predstavljaju vrednosti prema kojima se upravlja donosioc odluke. Naime, može se reći da sistem ličnih vrednosti diktira prednosti. Neki ljudi više preferiraju uzbuđenje nasuprot smirenosti, izvesnost nasuprot rizika, efikasnost nasuprot estetike, kvalitet nasuprot kvantiteta, itd.

7. *Kvalitet odluke:* Ovo predstavlja procenjivanje da li je odluka dobra ili loša. Dobra odluka predstavlja logičnu odluku koja je bazirana na raspoloživim informacijama i ona odražava sistem vrednosti (prednosti) donosioca odluke.

Važno je shvatiti koncept da kvalitet odluke nije u vezi sa njenim ishodom, dobra odluka može imati ili dobar ili loš ishod. Isto tako, loša odluka (koja nije bazirana na adekvatnim informacijama ili ne odražava sistem prednosti donosioca odluke) može imati dobar ishod.

Pri prosuđivanju kvaliteta odluke, pored bavljenja logikom, korišćenja informacija i alternativa, sledeća tri razmatranja ulaze u igru:

A. *Odluka mora ispuniti postavljene ciljeve vrlo temeljno i kompletno. Koliko dobro izabrana alternativa ispunjava identifikovane ciljeve?*

B. *Odluka mora ispuniti postavljene ciljeve najefikasnije, uz brigu o troškovima, energiji, sporednim dejstvima. Postoje li negativne konsekvence po alternativu koje čine njen izbor manje poželjnim? Ponekad previđamo ovo razmatranje pri našem traganju za uzbuđenjima.*

C. *Odluka mora uzeti u obzir korisne sporedne produkte ili indirektno prednosti.*

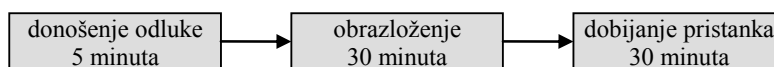
8. Primanje odluke: Oni koji primenjuju odluku ili na koje će odluka uticati moraju je prihvatiti i intelektualno i emocionalno.

Jedno od najvažnijih razmatranja pri odlučivanju jeste ljudski faktor. Uvek razmatrajte odluku u svetlu njene primene. Odluka može biti tehnološki brilijantna ali sociološki može biti manjkava i kao takva neće funkcionisati. Samo odluke koje se primenjuju, i to u potpunosti, će funkcionisati na način na koji se to namerava.

3.1.4 Pristupi procesu donošenja odluka

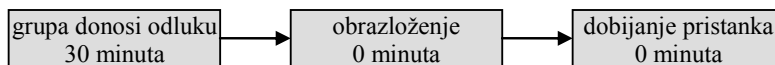
Postoje dva glavna pristupa donošenju odluke u nekoj organizaciji, autoritativan metod u kojem izvršna figura donosi odluku za celu grupu i grupna metoda u kojoj cela grupa odlučuje šta da se radi.

1. **Autoritativna metoda:** Menadžer donosi odluku zasnovanu na saznanju koje može da prikupi. Nakon toga on je obrazlaže grupi i dobija njen pristanak. U nekim istraživanjima, vremenska analiza za tipičnu operativnu odluku je nešto slična sledećem raposredu, slika br. 8.



Slika br. 8 Tok autoritativne metode odlučivanja

2. **Grupna metoda:** Grupa deli i analizira ideje, usaglašava se oko odluke i njene primene. Istraživanja pokazuju da grupa često poseduje vrednosti, osećaje i reakcije potpuno različite od onih koje menadžer pretpostavlja da grupa poseduje. Niko ne poznaje grupu i njene sklonosti i prednosti tako dobro kao što to ona sama zna. Vremenska analiza je slična sledećem rasporedu, slika br. 9.



Slika br. 9 Tok grupne metode odlučivanja

Jasno je da je sa stanovišta efikasnosti grupno donošenje odluke mnogo bolje. Više puta se pokazalo da ljudi više preferiraju implementaciju ideja o kojima sami razmišljaju. Radiće napornije i energičnije da bi sproveli njihovu ideju nego što bi to radili u slučaju nametnute. Svi mi iskazujemo simpatije prema sopstvenim idejama i rešenjima i uvek ćemo raditi napornije na rešenju koje je poduprto našom vizijom nego što ćemo to raditi na rešenju u kojem imamo znatno manje kreativnog učešća.

Postoje dva tipa grupnog zasedanja o odlučivanju. Prvi tip je slobodna diskusija u kojoj se problem jednostavno iznosi na sto kako bi grupa o njemu raspravljala.

Drugi tip odlučivanja jeste razvojna ili strukturalna diskusija. Ovde se problem analizira u etapama, manjim delovima sa specifičnim ciljevima. Razvojna diskusija obezbeđuje sistematičan prikaz teme i obezbeđuje da svi učesnici grupe istovremeno razgovaraju o istom aspektu problema.

3.1.5 Strategijski pristupi odlučivanju

Kao što znamo, često postoji mnogo rešenja za dati problem, a zadatak donosioca odluke jeste da izabere jedno od njih. Zadatak odabiranja može biti jednostavan ili kompleksan onoliko koliko to važnost odluke nalaže, a broj i kvalitet alternativa može se podešavati u skladu sa važnošću odluke, vremenom, resursima, itd. Postoji nekoliko strategija koje se koriste za odabir.

Neke od njih su sledeće:

1. Optimiziranje: ovo je strategija odabiranja najbolje mogućeg rešenja za problem, pronalaženje onoliko alternativa koliko je to moguće i odabiranje najbolje. Koliko temeljno se optimiziranje može uraditi zavisi od:

- važnosti problema,
- vremena koje nam stoji na raspolaganju,
- troškova koji su obuhvaćeni alternativnim rešenjima,
- raspoloživosti resursa, saznanja,
- lične psihologije, ličnih vrednosti,

Vidimo da je prikupljanje kompletnih informacija i razmatranje svih alternativa retko moguće za većinu važnih odluka, pa samim tim moraju se postaviti ograničenja za alternative.

2. Zadovoljavanje: u ovoj strategiji radije se bira prva zadovoljavajuća alternativa nego najbolja. Za većinu malih odluka ova strategija je perfektna.

3. Maximax: ovo simbolizuje "maksimiranje maksimuma". Strategija se fokusira na procenjivanje, a zatim odabiranje alternativa koje su zasnovane na njihovoj maksimalno mogućoj isplativosti. Ovo se ponekad opisuje kao strategija optimiste, zato što su povoljna rešenja i veliki potencijali oblasti interesovanja. Ovo je dobra strategija za upotrebu kada je preuzimanje rizika prihvatljivo.

4. Maximin: ovo simbolizuje "maksimiranje minimuma". U ovoj strategiji, koja je strategija pesimiste, razmatra se najgore moguće rešenje svake odluke, a zatim se bira odluka sa najvišim minimumom. Maximin orijentacija je dobra kada su posledice loše odluke posebno štetne ili nepoželjne. Ova strategija se koncentriše na vrednost koja se može spasiti donošenjem odluke ili na zagarantovani povraćaj.

3.1.6 Postupak donošenja odluke

U tipičnoj situaciji odlučivanja, kako se pomerate korak po korak, verovatno će te pronaći sebe kako se krećete unazad, a onda unapred.

1. Potrebno je ostvariti identifikaciju odluke sa ciljevima. Odredite obim i ograničenja odluke. Koliko se može menjati obim odluke, tj. koji su njeni mogući parametri?

Kada razmišljamo o odluci, zasigurno moramo obuhvatiti razjašnjenje ciljeva.

2. Prikupljanje činjenica. Ne zaboravite da ne možete prikupiti sve činjenice. Prikupite onoliko činjenica koliko je to moguće, u skladu sa raspoloživim vremenom, ali zapamtite da se praktično svaka odluka može doneti sa delimičnim neznanjem. Ne sme se dozvoliti da nedostatak kompletne informacije paralizuje vašu odluku. Odluka zasnovana na delimičnom saznanju je uvek bolja nego ne donošenje odluke, kada zaista postoji potreba za njom.

Kao deo vašeg skupa činjenica, nabrojite vaša osećanja, slutnje i intuicije. Konačno, mnoge odluke se moraju oslanjati na intuiciju ili biti pod njenim uticajem zbog prisutnosti stepena neizvesnosti u tim situacijama. Takođe, kao deo vašeg skupa činjenica konsultujte one koje će ta odluka doticati i one koji će morati da je sprovedu. Informacije od ovih ljudi ne samo da vam pomažu u donošenju odluke već one počinju da pobuđuju osećaj odgovornosti, koji je neophodan kod sprovodioca odluke, dajući im osećaj važnosti i učestvovanja u procesu donošenja odluke.

3. Alternative. Napravite listu svih mogućih izbora koje posedujete, uključujući i izbor ne činjenja. Kao što smo pomenuli ranije, često se dešava da je ne donošenje odluke štetnije nego bilo kakva odluka, ali ponekad je i ne činjenje korisnije ili bar malo bolje rešenje od ponuđenih alternativa, pa zato uvek i ovakav izbor treba svesno uzeti u obzir prilikom donošenja odluke.

Zasigurno ne treba samo razmišljati o alternativama koje nam stoje na raspolaganju, već i kreirati alternative koje još ne postoje.

4. Procena svake alternative. Ovo je procena vrednosti svake alternative. Razmotrite negativnosti (trošak, posledice, nastale probleme, potrebno vreme, itd.) i pogodnosti svake alternative (ušteden novac, sačuvano vreme, kreativni doprinos kompaniji ili zaposlenima, itd). U ovom koraku se prisetite da alternativa koja vam se može najviše dopasti ili koja bi očigledno bila najbolja, međutim neće biti funkcionalna u realnom svetu zbog suviše visokih troškova, mnogo potrebnog vremena ili nedostaka prihvatljivosti.

5. Procena rizika svake alternative. Pri rešavanju problema, "tragate unaokolo" za rešenjem koje najbolje rešava određen problem i sa takvim traganjem vi ste prilično sigurni da će to rešenje funkcionisati. Međutim, u svakom izboru uvek postoji neki stepen neizvesnosti.

Rizici se mogu smatrati kao procenti, stepeni ili neke druge forme koje dozvoljavaju da se oni međusobno uporede.

6. Napravite odluku. Ako donosite neku individualnu odluku, primenite vaše prioritete. Izaberite način da bi ste pratili da li odluka obuhvata jednu od alternativa, više od jedne (višestruka odluka) ili da se ne izabere nijedna.

Naravno, ne zaboravite da primenite odluku i zatim da procenite njenu primenu, kako bi stekli iskustvo.

Jedna vrlo važna stvar, koja se često previđa u primeni, je da kada objašnjavate odluku onima koji su uključeni u njeno donošenje ili onima koji će biti njom pogođeni nemojte nabrajati samo projektovane beneficije, iskreno objasnite skopčane rizike i nezgode i recite zašto verujete da su predložene beneficije važnije od negativnosti. Sprovodioci odluke više su voljni da podrže odluke kada razumeju rizike i kada se tretiraju uz poštovanje i kao odrasle osobe.

Takođe se prisetite da je veoma mali broj odluka neopoziv. Ne poništavajte odluku prerano, zato što mnogi novi planovi zahtevaju vreme da bi funkcionisali, mogu proći godine kako bi vaš novi posao postao profitabilan ali nemojte i oklevati da promenite kurs, posebno ako je jasno da odluka ne funkcioniše pozitivno ili donosi štetu. Uvek možete doneti sledeću odluku da bi ste uradili nešto drugo.

3.1.7 Rizikovanje i strategija upavljanja rizikom

Zbog toga što donošenje odluke uključuje i stepen rizika, bilo bi korisno istražiti rizik i sprovesti analizu rizika kako bi se shvatilo šta on obuhvata. Rizik i neizvesnost stvaraju zabrinutost i uznemirenost, koje su još uvek neizbežne komponente života:

1. Samo oni koji rizikuju su zaista slobodni. Sve značajne odluke obuhvataju rizik. Bez rizikovanja se ne možete razvijati, usavršavati ili čak preživeti u svetu investicija.

2. Zbilja ne postoji takva stvar kao što je stalna sigurnost u bilo čemu. Ne preuzimanje rizika zaista nije ništa mnogo sigurnije nego njegovo preuzimanje, zato što se vaše sadašnje stanje uvek može izmeniti bez vašeg uticaja.

3. Pretpostavlja se da ste uplašeni pri riziku. Priznajte svoj strah od gubitka, odbacivanja ili propasti.

Strategija upravljanja rizikom se mogu podeliti u četiri osnovna pristupa:

1. Odbacite ekstremno slabe i nerealne mogućnosti.

2. Izbegnite katastrofe. Ako postoji mala ali značajna šansa za katastrofu tada se regularan proračun očekivane vrednosti ne može primeniti. Glavni princip upravljanja rizikom jeste da se izbegne realan rizik od katastrofe pri bilo kojoj razumnoj ceni. Poteškoće za primenu ovog principa proizilaze iz neodređenosti šta je to realan rizik, a šta razumna cena.

3. Prepoznajte čime možete "trgovati". Setite se da je svaka životna aktivnost skopčana sa nekim rizikom. Čak i kada sami ne rizikujemo, često nam se rizik nameće od strane same prirode života i društva.

4. Maksimizirajte očekivane vrednosti. Normalno je da očekivana vrednost svake alternative pokazuje njen relativni boljitak. To jest, odlučujete se za najveću korist koja ima najveću verovatnoću. Pored svega, zapamtite da ovi proračuni su priručnici, a zasnovani su na nečemu što može biti veoma subjektivno. Ako verujete da je alternativa sa najvišom očekivanom vrednošću loš izbor, treba ponovo da razmotrite verovatnoće i beneficije koje ste dodelili svim alternativama.

3.1.8 Planiranje donošenja odluke i nivoi odlučivanja

Iako je donošenje odluke bez planiranja prilično uobičajeno, ono nije često dobro. Planiranje dozvoljava da se odluke donose mnogo komfornije i na pametniji

način. Planiranje čak i čini odluke lakšim, obezbeđujući im direktive i ciljeve. Čak možemo reći da je planiranje vrsta tehnike koja pojednostavljuje donošenje odluke.

Donosioci odluke otkriće četiri beneficije planiranja:

1. Planiranje dozvoljava uspostavljanje nezavisnih ciljeva. Vizija koja će oblikovati odluke delimično je određena događajima koji nas okružuju. Odluke se ne donose samo kao reakcija na spoljne podsticaje. Menadžeri sada upravljaju organizacijama, individue upravljaju svojim životima radije nego da budu vođeni spoljašnjim uticajima. Ponekad se razlika između planiranja i ne planiranja opisuje kao proaktivno stanje (kontrolisanje situacije) nasuprot reaktivnog (reagovanje na spoljne uticaje).

2. Planiranje obezbeđuje merne standarde. Plan obezbeđuje nešto za merenje vašeg uspeha nasuprot ciljeva, pa tako možete otkriti da li ostvarujete ili ne svoje ciljeve.

3. Planiranje pretvara vrednosti u delo. Kada se suočavate sa odlukom, možete konsultovati vaš plan i odrediti koja odluka će najbolje pomoći napredovanje vašeg plana. Odluke donete planskim upravljanjem mogu dosledno funkcionisati zajedno sa prethodnim ciljevima kompanije ili ličnim ciljevima. Takođe, planiranje je korisno u hitnim situacijama. Kada nastane kriza, malo razmišljanja o globalnom planu pomoći će da se odredi odluka za njeno rešavanje, što neće samo pomoći da se kriza otkloni, već će takođe pomoći napredovanje globalnog plana. Bez plana, krize se razmatraju nasumice, a odluke koje su donete mogu biti u suprotnosti sa drugim.

4. Planiranje dozvoljava ograničene resurse koji će se angažovati po redu. Budžet, vreme, napor, radna snaga, sve je to ograničeno. Njihova najbolja upotreba se može ostvariti samo onda kada plan zahteva njihovu primenu.

Svako od nas prepoznaje da su neke odluke mnogo važnije od drugih, bilo da se radi o njihovom trenutnom uticaju ili dugoročnom značaju. Po načinu razumevanja značaja odluke, tako da možemo znati koliko vremena i resursa trošimo na nju, identifikovana su tri nivoa odluke:

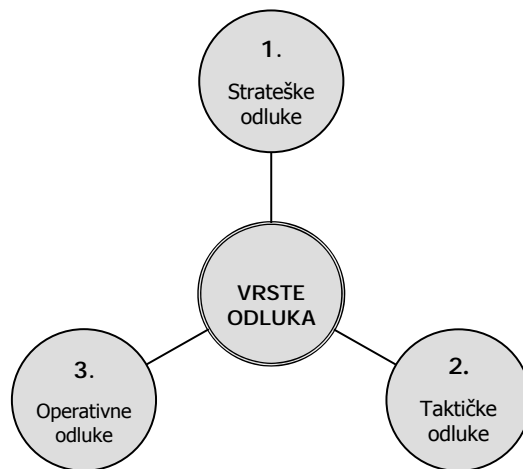
1. Strategijski. Strategijske odluke predstavljaju najviši nivo. Ove odluke tiču se generalnog pravca, dugoročnih ciljeva, filosofije i vrednosti. Ove odluke su u

najmanjom meri strukturane, a najviše imaginativne. One su veoma rizične i sa veoma neizvesnim ishodom, delimično zbog toga što dosežu u daleku budućnost, a delimično zbog svoje važnosti.

2. Taktički. Taktičke odluke podržavaju strategijske. One teže da budu srednjeg nivoa i značaja sa umerenim posledicama.

3. Operativni. Ovo su svakodnevne odluke, koje se često koriste za podršku taktičkim odlukama. Često su donete uz malo razmišljanja i strukturane su. Njihov uticaj je trenutani, kratkoročan i obično sa niskim troškovima. Posledice loših operativnih odluka biće minimalne, iako niz loših ili nehatnih odluka ovog tipa mogu prouzrokovati štetu. Operativne odluke se mogu preprogramirati, preinačiti ili jasno postaviti u politici odlučivanja.

Da bi se lakše shvatili nivoi odluke, na slici br. 10 prikazana je hijerarhija odlučivanja u zavisnosti od vrste odluke.



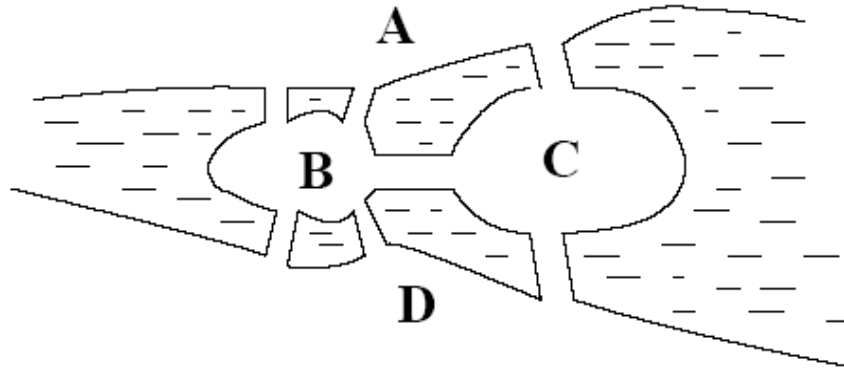
Slika br. 10 Vrste odluka

3.2 Osnove Teorije grafova i Teorije mreža

3.2.1 Osnove Teorije grafova

Temelje Teorije grafova postavio je dobro poznati švajcarski matematičar Leon Euler (1707.-1783.) koji je 1736. godine rešio problem königsberških mostova. Naime, stari pruski grad Königsberg, današnji Kalinjingard u Rusiji smešten je na obalama reke

Pregel. Deo grada lociran je na dve ade, odnosno dva rečna ostrva, koje su povezane sa kopnom i međusobno sa sedam mostova, slika br. 11.



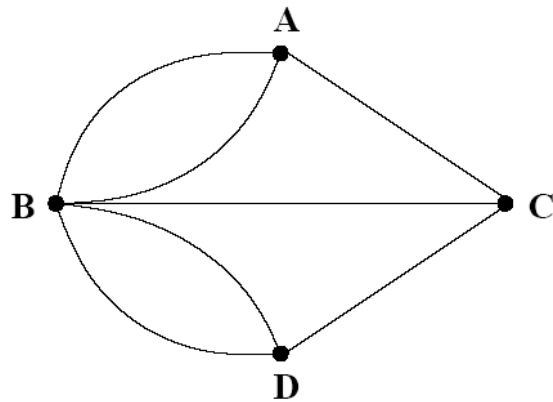
Slika br. 11 Problem königsberških mostova

Građani ovoga grada uživali su u šetnji mostovima, ali niko od njih nije uspeo da pronađe način da svih sedam mostova pređe samo jednom i zatim se vrati kući. Pomoć su potražili od Eulera, koji je u to vreme boravio u Petrogradu. Euler je vrlo brzo dokazao da je takva šetnja nemoguća.

Ako pretpostavimo da je takva šetnja moguća, onda se ona završava u komponentama kopna A, B, C i D, eventualno tamo gde je šetnja počela. Svaka komponenta kopna iz koje šetnja nije počela i u kojoj se nije završila mora biti spojena s parnim brojem mostova, jer mora postojati most preko kojeg se dolazi i most preko kojeg se odlazi sa te komponente.

Odatle sledi da svaka komponenta koja je spojena s neparnim brojem mostova mora biti ili početak ili kraj šetnje. U slučaju ovoga grada svaka komponenta A, B, C i D ima neparan broj mostova s kojim je povezana, a pošto najviše dve komponente mogu biti početak, odnosno kraj šetnje, Euler je zaključio da je takva šetnja nemoguća.

Ako komponente A, B, C i D prikazemo kao tačke, a mostove koji ih spajaju kao linije, onda dobijamo pojednostavljen prikaz tačaka i njihovih ivica, tj. graf (slika br. 12).



Slika br. 12 Graf problema königsberških mostova

Problem šetnje po mostovima ekvivalentan je problemu obilaska ovoga grafa, tako da krenemo iz jedne tačke i sve linije pređemo samo jedanput.

Opisno govoreći, grafovi su figure sastavljene od tačaka od kojih su neke (dve po dve) spojene krivim linijama. Na grafove nailazimo u svim naukama i drugim čovekovim delatnostima. Grafovi se pojavljuju u hemiji kao strukturne formule molekula, u elektrotehnici kao šeme električnih kola, u računarstvu kao dijagrami kompjuterskih programa, u nauci kao o organizaciji rada kao PERT dijagrami koji opisuju izvršenje složenog projekta, u sociologiji pomoću grafova se prikazuju odnosi u nekoj grupi ljudi itd. Pomoću grafova se mogu predstaviti mreže puteva, železničkih pruga, telefonske i druge telekomunikacione mreže, ali isto tako i apstraktni matematički objekti, kao što su, na primer, matrica ili parcijalno uređen skup. Graf se definiše kao apstraktni matematički objekt, a figura sastavljena od tačaka i linija je, u stvari, geometrijska predstav ili crtež grafa. No, uobičajeno je da se ta geometrijska reprezentacija takođe naziva grafom (Cvetković, 1990), [11].

Pojam grafa se može definisati na različite načine. Pri definisanju grafa, primenićemo pristup u kojem se pojam grafa povezuje sa pojmom binarne relacije.

Binarna relacija u nekom skupu X određena je ako su zadani svi uređeni parovi koji imaju unapred definisano neko svojstvo. Označimo skup svih takvih parova sa ρ . Sledi da je $\rho \subset X^2$. Svaka binarna relacija u skupu X definiše jedan podskup skupa X^2 i, obrnuto, svaki podskup skupa X^2 definiše jednu binarnu relaciju u skupu X . Na osnovu ovoga, binarna relacija se striktno definiše na sledeći način: binarna relacija ρ u skupu X

je svaki podskup skupa X^2 , tj. svaki skup ρ za koji važi $\rho \subset X^2$. Dakle, binarna relacija se poistovećuje sa skupom svih onih parova čije komponente jesu u relaciji.

Neka je V neprazan skup i E binarna relacija u V . Uređen par $G=(V,E)$ se naziva graf. Elementi skupa V su čvorovi grafa, a elementi skupa E grane ili ivice grafa. Dakle, graf je zadat ako je zadat skup čvorova i skup grana.

Graf se crta na sledeći način. Čvorove grafa $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ predstavljamo proizvoljnim međusobno različitim tačkama u ravni ili prostoru. Ako je $(v_i, v_j) \in E$, tačku koja predstavlja čvor v_i spajamo neprekidnom glatkom linijom sa tačkom koja predstavlja čvor v_j .

Grafovi se dele na konačne i beskonačne grafove u zavisnosti da li je skup čvorova V konačan ili beskonačan. U ovom radu primenjuju se konačni grafovi.

Grafovi mogu biti neorjentisani i orjentisani.

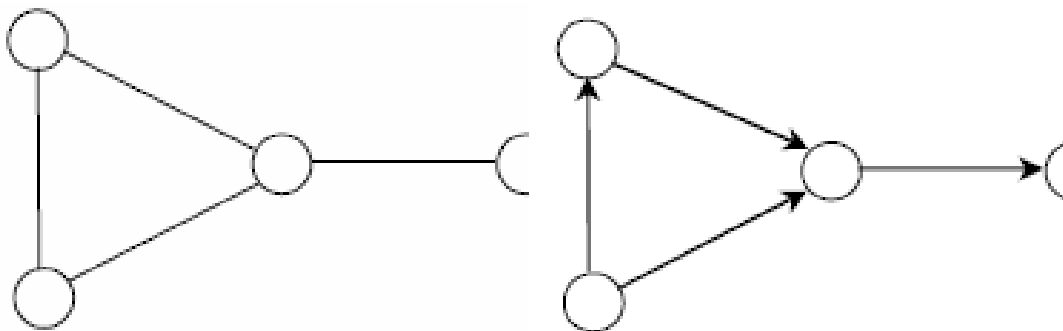
Graf $G=(V,E)$ je neorjentisani graf ako je relacija E simetrična, tj. važi:

$$(v_i, v_j) \in E \Rightarrow (v_j, v_i) \in E \quad (1)$$

Graf $G=(V,E)$ je orjentisani graf ako je relacija E antisimetrična, tj. važi:

$$(v_i, v_j) \in E \Rightarrow (v_j, v_i) \notin E \quad (2)$$

Na slici br. 13 prikazan je neorjentisani i orjentisani graf.

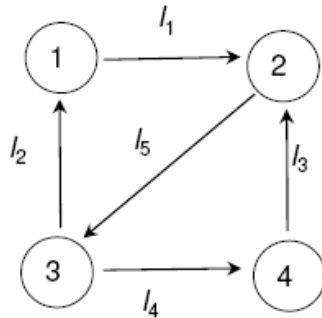


a) neorjentisani graf

b) orjentisani graf

Slika br. 13 Vrste grafova

Težinski graf je uređeni par (G,w) , gde je $G=(V,E)$, a $w: E \rightarrow R_0^+$ funkcija koju nazivamo težinskom funkcijom. Težine se pridružuju granama grafa, a mogu se pridruživati i čvorovima. Na slici br. 14 prikazan je težinski graf, gde težinska funkcija predstavlja rastojanje između čvorova.



Slika br. 14 Težinski graf

Put dužine $n(n \geq 1)$ grafa $G=(V,E)$ je niz grana oblika $(v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{n-1},v_n)$ kod orjentisanih grafova, odnosno $\{v_0,v_1\},\{v_1,v_2\},\dots,\{v_{n-1},v_n\}$ kod neorjentisanih grafova. Za ovaj put kažemo da počinje u čvoru v_0 , a završava u čvoru v_n . Put se često označava i sa $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$.

Neka je uređeni par (G,w) težinski graf. Svakoj grani grafa funkcija w pridružuje težinu $w(e)$. Ako je $H \subset G$ podgraf grafa G , tada je težina podgrafa H definisana na sledeći način:

$$w(H) = \sum_{e \in E(G)} w(e) \quad (3)$$

Mnogi problemi optimizacije svode se na to da se u zadatom težinskom grafu pronađe podgraf određenog tipa sa najmanjom ili najvećom težinom. U težinskom grafu (G,w) problem iznalaženja najkraćeg puta svodi se na pronalaženje podgrafa H sa najmanjom težinom, odnosno $w(H) \rightarrow \min$.

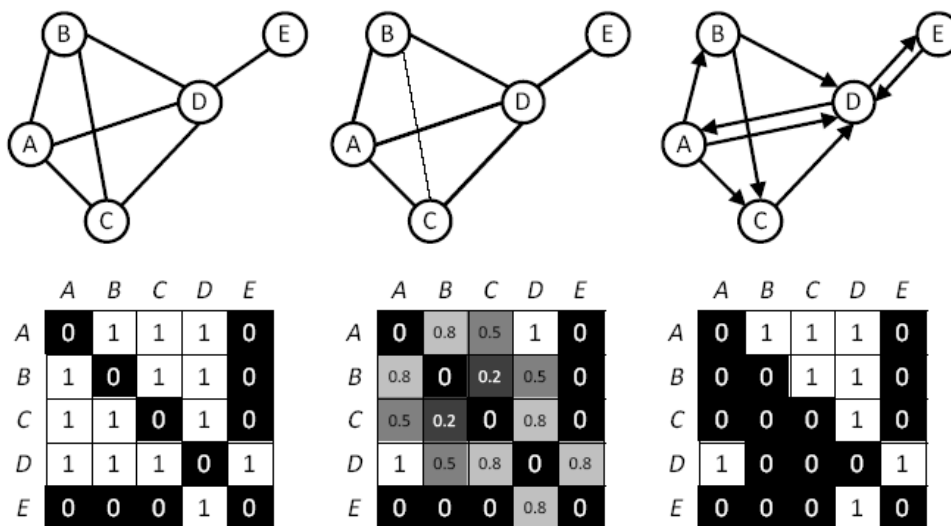
3.2.2 Osnove Teorije mreža

U terminologiji Teorije mreža, mreža je matematički model koji predstavlja skup čvorova i grana koje povezuju parove čvorova [31]. Kompleksna mreža je jedan

apstraktni model i može se koristiti za predstavljanje podzemnog rudnika pri različitim nivoima složenosti, počevši od etaže, horizonta pa do celokupnog sistema otvaranja.

Karakteristike grana definišu svojstva mreže. U jednostavnom slučaju netežinske, neorjentisane mreže, svaka grana ima isti značaj. Postojeće grane predstavljaju se jedinicom (1), dok nepostojeće nulom (0), pri čemu su grane dvosmerne, što znači da je relacija E simetrična. Ako je mreža težinska, to znači da se grane mogu međusobno razlikovati, pri čemu jedna grana može biti značajnija od druge. Značaj svake grane predstavlja se njenom specifičnom težinskom funkcijom. Konačno mreža može biti orjentisana ako su njene grane jednosmerne, odnosno relacija E je asimetrična.

Mreža se grafički može predstaviti crtanjem čvorova i grana u skladu sa svojstvima mreže. Računski najkorisniji oblik predstavljanja mreže jeste matrična forma. Matrica povezanosti je kvadratna matrica dimenzija $n \times n$, gde n predstavlja ukupan broj čvorova u mreži. uobičajeno se matrica susedstva označava velikim slovom A , a pojedinačne grane sa e_{ij} . U vizuelnom smislu, matrica rastojanja može biti kodirana u skladu sa crno→belom skalom, gde 0 predstavlja crnu boju, pa sve do 1 koja predstavlja belu boju, slika br. 15, [16].



Slika br. 15 Grafička prezentacija tri tipa mreže i njima odgovarajućih matrica povezanosti i rastojanja

Glavna prednost formalne analize mreža jeste precizna kvantifikacija njenih parametara koja omogućava istraživanje topologije mreže i njene efikasnosti. Postoji mnogo parametara koji se mogu sračunati za datu mrežu, neki od glavnih slede.

Bilo koja mreža ima dve osnovne komponente i to su čvorovi i grane. Netežinska mreža se može predstaviti matricom, a svaki element ove matrice dat je na sledeći način [37].:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \neq j \\ 0, & \text{if } i \neq j \\ 0, & \text{if } i = j \end{cases} \quad (4)$$

gde je.

1 – čvorovi i i j su povezani

0 – čvorovi i i j nisu povezani

0 – petlja

Skup čvorova u mreži (N) i veličina (n): veličina mreže N predstavljena je brojem čvorova n u njoj. Ona korespondira sa brojem redova u matrici rastojanja ili sa brojem kolona, pošto je matrica kvadratnog oblika. Za mrežu veličine n , maksimalan broj mogućih grana za neorjentisanu mrežu je $(n-1)n/2$, a za orjentisanu $(n-1)n$.

Stepen čvora (k) i njegova raspodela: stepen čvora predstavlja broj grana koje ulaze/izlaze iz njega, takođe to je broj susednih čvorova koji su direktno povezani sa njim. Stepen čvora predstavljen je na sledeći način:

$$k_i = \sum_j e_{ij} \quad (5)$$

Viši stepen čvora ukazuje na njegovu jaču povezivost unutar mreže. Verovatnoća raspodele stepena čvora definisana je izrazom:

$$P(k) = \frac{n(k)}{\sum n(k)} \quad (6)$$

gde $n(k)$ predstavlja broj čvorova u mreži sa stepenom k . Srednji stepen čvora na nivou cele mreže je definisan izrazom:

$$\langle k \rangle = \frac{\sum_i k_i}{n} \quad (7)$$

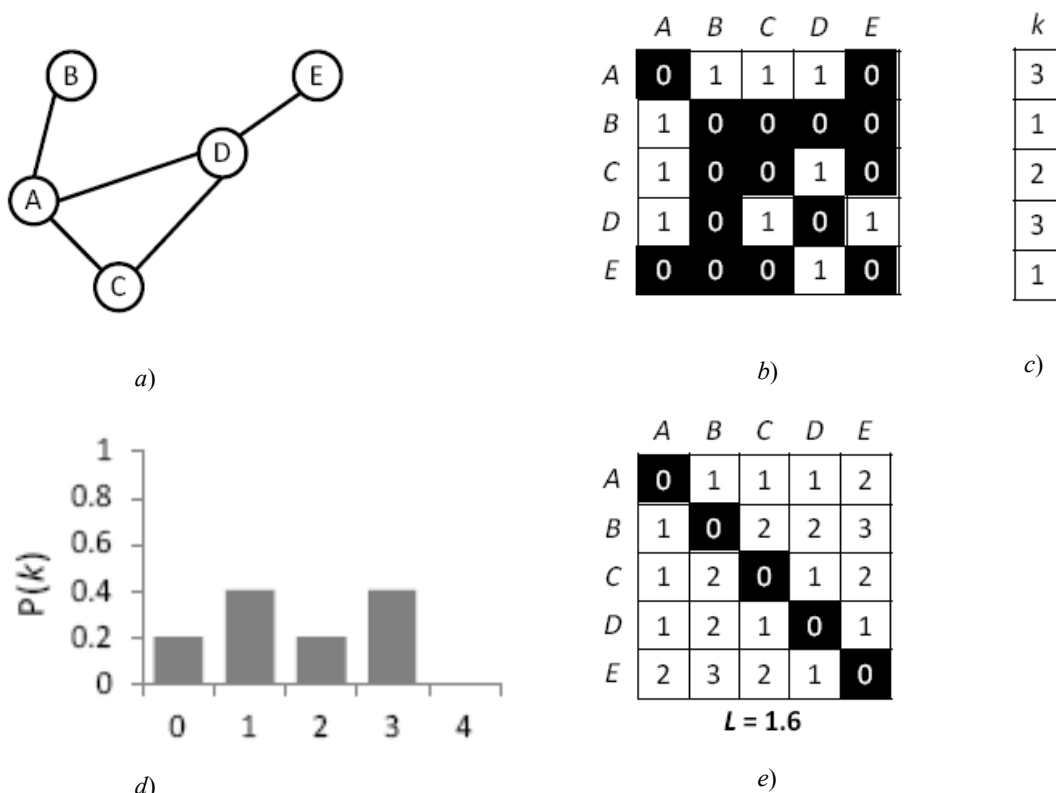
gde je n ukupan broj čvorova u mreži.

Karakteristična dužina puta (L): ovo je parametar mreže koji ukazuje koliko je mreža integrisana i koliko lako se može kretati unutar mreže. Dužina puta ili rastojanje (geodetski put) d_{ij} između dva čvora i i j jeste put sa najmanjom dužinom koji povezuje predmetne čvorove. Karakteristična dužina puta mreže je srednje rastojanje između svih uparenih čvorova:

$$L = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j \in n, i \neq j} d_{ij} \quad (8)$$

Veća karakteristična dužina puta ukazuje da je mreža skoro linearna, a kraća karakteristična dužina puta ukazuje da je mreža kompaktna.

Slika br. 16 predstavlja glavne parametre mreže.



Slika br. 16 Glavni parametri mreže, a) mreža, b) matrica povezanosti, c) stepen čvora, d) raspodela stepena čvora sa srednjom vrednošću 2, e) matrica rastojanja sa karakterističnom dužinom puta 1.6

3.3 Teorija fuzzy skupova

3.3.1 Fuzzy skupovi

Većina tradicionalnih načina izrade modela su determinističke prirode, odnosno vrednosti ulaznih parametara su strogo jednoznačno definisane. U dualnoj logici, na primer, stanovište može biti tačno ili netačno i ništa između ova dva stanovišta. U teoriji skupova, jedan element može ili da pripada ili da ne pripada skupu. U postupcima optimizacije rešenje je moguće ili nemoguće [19]. Preciznost pretpostavlja da parametri modela predstavljaju realan sistem koji je modeliran. Generalno, ova činjenica ukazuje da unutar modela ne postoje nedoumice, odnosno da pretpostavljamo da su struktura i ulazni parametri modela definitivno poznati, tj. ne postoji sumnja po pitanju njihovih vrednosti. Kompletan opis realnih sistema često zahteva takve podatke, koji u suštini prevazilaze mogućnosti ljudskog prepoznavanja.

Dugo vremena su teorija verovatnoće i statistika bile su prevashodne teorije za modelovanje neodređenosti u realnom životu. One su zasnovane, kao formalne teorije, na određenim aksiomatskim petpostavkama koje skoro nikada nisu testirane, kada se ove teorije primenjuju u realnosti. U međuvremenu razvijeno je više od dvadesetak drugih teorija neodređenosti, koje su delimično kontradiktorne a delimično komplementarne. Teorija fuzzy skupova je jedna od njih, koja je u početku imala intenciju dodatka dualnoj logici i/ili klasičnoj teoriji skupova. Bukvalan prevod bi glasilo teorija neodređenih, nejasnih, maglovitih, čudnih skupova, međutim u domaćoj upotrebi se koristi u obliku teorija rasplnutih skupova. U ovoj doktorskoj disertaciji koristi se izraz teorija fuzzy skupova, radi lakšeg i kraćeg zapisa termina vezanih za ovu teoriju.

Prve publikacije [35] i [18] pokazuju nameru autora da generalizuju klasičan pojam skupa i predlog kako da se prilagodimo neodređenosti (nejasnoći) u smislu da je ona sadržana u ljudskom govoru, tj., u ljudskom rasuđivanju, procenjivanju i odlukama.

Pojam fuzzy skup omogućava prikladnu tačku razdvajanja, radi pravljenja konceptualnog okvira koji je u mnogim pogledima paralelan sa konceptualnim okvirom primenjenim u slučaju običnih skupova. U suštini ovaj okvir omogućava prirodan način rešavanja problema u kojima je nedostatak jasno definisanih kriterijuma pripadnosti nekom skupu izvor nepreciznosti pre nego što je to prisustvo slučajnih promenljivih.

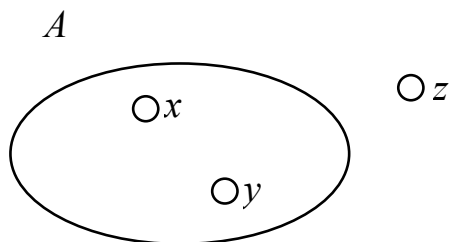
Pod nepreciznošću se podrazumeva izraz u smislu neodređenosti pre nego u smislu nedostatka saznanja o vrednosti parametra. Teorija fuzzy skupova omogućava striktan matematički okvir u kojem se fenomen neodređenosti može jasno i tačno proučavati. Ovaj okvir se takođe može razmatrati i u svojstvu lingvističkog modelovanja, veoma podjednako u situacijama u kojima postoje fuzzy relacije, kriterijumi i fenomeni.

Uloga fuzzy skupova je značajna kada su primenjeni kod složenih fenomena, koji nisu lako opisani tradicionalnim matematičkim metodama, posebno kada se kao cilj postavlja pronalaženje približno dobrog rešenja [3]. Modeliranje koje koristi fuzzy skupove pokazalo se kao efektan način pri formulisanju problema odlučivanja, gde su raspoložive ulazne informacije subjektivne ili neprecizne [36].

U klasičnoj teoriji skupova postoje veoma precizne granice koje razdvajaju elemente koji pripadaju određenom skupu od elemenata van posmatranog skupa. Drugim rečima za svaki posmatrani element se veoma lako utvrđuje da li pripada ili ne pripada određenom skupu. Tako na primer, ako sa A označimo skup ležišta koja su otvorena oknom, u slučaju svakog posmatranog ležišta zaključujemo da ležište pripada skupu A ukoliko se kao pristup ležištu koristi okno. Pripadnost elemenata x skupu A opisuje se u klasičnoj teoriji skupova funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$ na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako i samo ako } x \text{ pripada } A \\ 0 & \text{ako i samo ako } x \text{ ne pripada } A \end{cases} \quad (9)$$

Na slici br. 17 grafički je prikazan skup A i elementi x , y i z .



Slika br. 17 Skup A i elementi x , y i z

Sa slike je očigledno da je $\mu_A(x) = 1$, $\mu_A(y) = 1$ i $\mu_A(z) = 0$.

Aksiomske osnove teorije fuzzy skupova su mnogobrojne i raznolike.

Ako je X kolekcija elemenata označenih generalno sa x , onda je fuzzy skup \tilde{A} u X skup uređenih parova:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\} \quad (10)$$

gde je $\mu_{\tilde{A}}(x)$ funkcija pripadnosti skupu koja preslikava X u prostor pripadnosti M , $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$. Oblast prostora je podskup nenegativnih realnih brojeva čiji je supremum konačan. Za $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ sledi da je fuzzy skup normalizovan.

Osnovne operacije na fuzzy skupovima definisane su u smislu generalizacije opštih skupova i uobičajenih definicija.

Funkcija pripadnosti skupu preseka dva fuzzy skupa \tilde{A} i \tilde{B} definisana je na sledeći način:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(X) = \text{Min}(\mu_{\tilde{A}}(X), \mu_{\tilde{B}}(X)) \quad \forall x \in X \quad (11)$$

Funkcija pripadnosti skupu unije dva fuzzy skupa \tilde{A} i \tilde{B} definisana je na sledeći način:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(X) = \text{Max}(\mu_{\tilde{A}}(X), \mu_{\tilde{B}}(X)) \quad \forall x \in X \quad (12)$$

Funkcija pripadnosti skupu komplementa fuzzy skupa \tilde{A} definisana je na sledeći način:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(X) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(X) \quad \forall x \in X \quad (13)$$

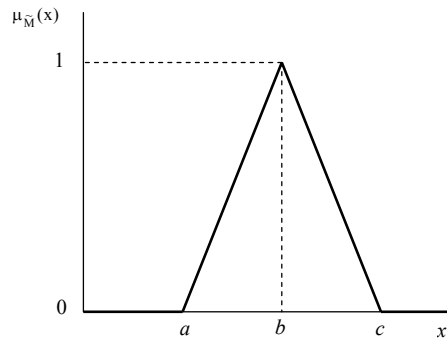
Oblast definisanosti fuzzy skupa \tilde{A} , $D(\tilde{A})$ je običan skup svih $x \in X$ tako da je $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$.

3.3.2 Fuzzy brojevi

Subjektivne procene koje se, na primer, odnose na koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi ili ukupni trošak proizvodnje rude moguće je izraziti odgovarajućim fuzzy skupovima. Na osnovu iskustva ili intuicije ekspert može da konstatuje da je ukupni trošak proizvodnje rude „oko 20 \$/t“. Ova subjektivna procena okarakterisana je određenom brojnom vrednošću. Jasno je da je ukupni trošak proizvodnje rude koji iznosi „otprilike 20 \$/t“ na neki način manji od ukupnog troška proizvodnje rude koji iznosi „otprilike 30 \$/t“. U skladu sa prethodnom diskusijom, fuzzy skup „ukupni trošak

proizvodnje rude je otprilike 20 \$/t“ možemo da tretiramo kao broj. Broj izražen na ovakav način naziva se fuzzy broj odnosno rasplnuti broj. U literaturi se pored izraza fuzzy broj često sreće i izraz neizvestan broj.

Pod pojmom fuzzy broj \tilde{M} podrazumeva se fuzzy skup koji je konveksan i normalizovan [2]. Postoji mnogo mogućnosti za primenu različitih vrsta fuzzy brojeva u skladu sa okolnostima. Trouglasti fuzzy brojevi su veoma pogodni za rad zbog svoje računске jednostavnosti i veoma su korisni za predstavljenje informacija u fuzzy okruženju. Trouglasti fuzzy broj može se definisati kao trojka (a,b,c) . Parametri a , b i c redom ukazuju na najmanju moguću vrednost, vrednost koja najviše obećava i najveću moguću vrednost koja opisuje fuzzy događaj. Fuzzy trouglasti broj \tilde{M} prikazan je na slici br. 18.



Slika br. 18 fuzzy trouglasti broj

Funkcija pripadnosti za fuzzy trouglasti broj definiše se kao [23]:

$$\mu_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases} \quad (14)$$

Trouglasti fuzzy brojevi se mogu upotrebiti za izvođenje opštih matematičkih operacija. Osnovne fuzzy aritmetičke operacije sa dva trouglasta fuzzy broja $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ definišu se na sledeći način:

- inverzan fuzzy broj $\tilde{A}^{-1} = (1/a_3, 1/a_2, 1/a_1)$,

- sabiranje $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$,
- oduzimanje $\tilde{A} - \tilde{B} = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$,
- množenje skalarom $\forall k > 0, k \in R, k \cdot \tilde{A} = (k \cdot a_1, k \cdot a_2, k \cdot a_3)$
- množenje $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3)$
- deljenje $\tilde{A} / \tilde{B} = (a_1 / b_3, a_2 / b_2, a_3 / b_1)$

Veoma važan koncept koji je povezan sa primenama fuzzy brojeva je postupak defazifikacije, koji konvertuje fuzzy broj u jednoznačnu vrednost. Na raspolaganju stoji mnogo metoda za izvođenje ovog postupka. Najšire primenjivan postupak defazifikacije je metoda centroida, koji je takođe poznat i kao centar gravitacije ili centar oblasti defazifikacije. Ova metoda izražava se na sledeći način:

$$\bar{x}_0(\tilde{A}) = \int_a^c x \mu_{\tilde{A}}(x) dx / \int_a^c \mu_{\tilde{A}}(x) dx \quad (15)$$

gde $\bar{x}_0(\tilde{A})$ predstavlja defazifikovanu vrednost.

3.3.3 Lingvističke promenljive

Lingvističke promenljive su promenljive čije vrednosti su reči ili rečenice izražene prirodnim ili veštačkim jezikom, Zadeh [1975]. Često se kao primer lingvističke promenljive navodi životno doba, ako se pretpostavi da su njene vrednosti fuzzy promenljive označene kao mlado, staro, veoma mlado, veoma staro, itd., pre nego brojevima 0,1,2,3,..., Bellman [1977]. Koncept lingvističke promenljive obezbeđuje sredstvo približnog opisivanja fenomena koji su isuviše kompleksni i nisu prikladni za opisivanje konvencionalnim kvantitativnim pojmovima, Zadeh [1975].

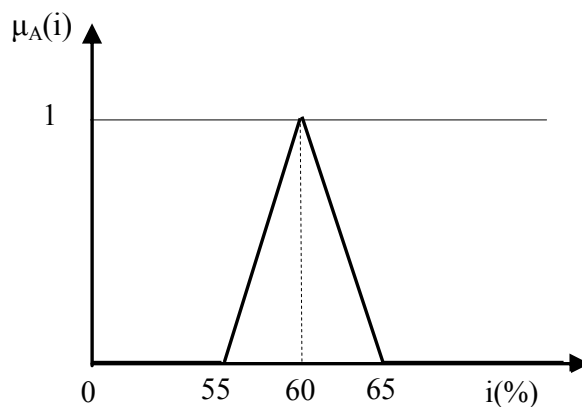
Lingvističke promenljive okarakterisane su kao petorka $(x, T(x), U, G, \tilde{M})$, u kojoj je x naziv promenljive, $T(x)$ označava skup naziva lingvističkih vrednosti od x . Svaka od ovih vrednosti je fuzzy promenljiva, generalno označena sa X i zauzima određeni interval unutar lingvističkog prostora U , a skopčana je sa osnovnom promenljivom u . G predstavlja sintaksno pravilo (koje uobičajeno ima gramatičku

formu) za generisanje naziva X od vrednosti x . M je semantičko pravilo koje svakom X pridružuje njegovo značenje. $\tilde{M}(X)$ je fuzzy podskup skupa U [34].

3.3.4 Transformacija lingvističkih promenljivih u fuzzy brojeve

Veliki broj skupova sa kojima se susrećemo u realnosti nema precizno određene granice koje razdvajaju elemente u skupu od elemenata izvan skupa. Na primer, često se u rudarskoj praksi može čuti da se za date uslove eksploatacije ostvaruje visok koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi. Ako sa A označimo skup “visok koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi”, logično se nameće pitanje utvrđivanja granica ovako definisanog skupa, odnosno neophodno je utvrditi koji elementi pripadaju ovom skupu. Recimo, postavlja se pitanje da li ovom skupu pripada iskorišćenje od 75% ili iskorišćenje od 70%. Ako kažemo da je koeficijent iskorišćenja “otprilike 60%”, intuitivno nam je jasno da koeficijent iskorišćenja od 55% “više” ili “jače” pripada skupu koji se zove “koeficijent iskorišćenja je otprilike 60%”, nego što mu pripada koeficijent iskorišćenja od 40%. U skladu sa prethodnom diskusijom, ima više istine u tvrdnji da je koeficijent iskorišćenja od 55% “koeficijent iskorišćenja otprilike 60%” nego u tvrdnji da je koeficijent od 40% “koeficijent iskorišćenja otprilike 60%”.

Uočimo fuzzy skup \tilde{A} koji se definiše kao “Koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi je otprilike 60%”. Na slici br. 19 prikazana je funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(i)$ koja je subjektivno određena.



Slika br. 19 Funkcija pripadnosti $\mu_{\tilde{A}}(i)$ fuzzy skupa \tilde{A}

U ovom slučaju subjektivno smo procenili da koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi može da se nalazi u granicama od 55 do 65 procenata. Koeficijent iskorišćenja od 60% sa stepenom pripadnosti jednakim 1 pripada skupu “Koeficijent iskorišćenja rudnih rezervi je otprilike 60%”. Ovom skupu pripadaju, sa stepenom pripadnosti većim od nule i sve vrednosti koeficijenta iskorišćenja koje se nalaze u intervalu od 55 do 60 procenata. Vrednostima koeficijenta iskorišćenja rudnih rezervi izvan ovog intervala odgovara stepen pripadnosti jednak nuli.

3.4 Stohastički difuzni proces

3.4.1 Stohastički proces

Pretpostavimo da u svakom trenutku $t \in T, T \subset \mathbb{R}$ posmatramo neku promenljivu x koja svoje vrednosti uzima na slučajan način. U tom kontekstu promenljiva $x(t)$ predstavlja slučajnu promenljivu koja se menja za svako $t \in T$, a skup dobijenih slučajnih promenljivih predstavlja slučajnu veličinu u funkciji vremena.

Za opisivanje stohastičkog procesa neophodno je zadati prostor verovatnoća (Ω, \mathcal{P}, P) i parametarski skup T . Skup T je obično poluprava $[0, \infty)$, ali može biti i $[0, T]$ ili $[t \in T] \subset [0, \infty)$.

Stohastički (slučajni) proces $\{x(t)\}_{t \in T}$ je familija \mathcal{P} -merljivih slučajnih promenljivih $x(t)$ sa vrednostima u \mathbb{R}^d , definisanih na istom prostoru verovatnoća (Ω, \mathcal{P}, P) . Skup T je parametarski skup, a realni prostor \mathbb{R}^d je skup stanja procesa.

Kako je stohastički proces za fiksirano $t \in T$ slučajna promenljiva, a svaka slučajna promenljiva je funkcija od $\omega \in \Omega$, sledi da je stohastički proces funkcija dva argumenta, tj. $\{x(t, \omega)\}_{t \in T, \omega \in \Omega}$. Ukoliko je fiksirano $t \in T$, dobija se slučajna promenljiva $x(t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ koja se naziva zasek stohastičkog procesa u trenutku t . Za fiksirano $\omega \in \Omega$, dobija se realna funkcija vremena $t \rightarrow x_t(\omega) \in \mathbb{R}^d, t \in T$ koja se naziva trajektorija ili realizacija stohastičkog procesa.

Ako je T diskretan skup, $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, familija $\{x(t)\}_{t \in T}$ se naziva slučajnim nizom ili stohastičkim procesom sa diskretnim vremenom [33].

Slučajni proces se definiše familijom konačno-dimenzionalnih funkcija raspodela:

$$\begin{cases} F_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = P\{x(t_1) < u_1, \dots, x(t_n) < u_n\}, \\ t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_i \in [0, T], i = 1, \dots, n, n \in N \end{cases} \quad (16)$$

3.4.2 Stohastički sistemi

Sisteme koji se javljaju u našem okruženju, a koji imaju osobinu da se menjaju tokom vremena, možemo matematički izraziti običnim diferencijalnim jednačinama. Ako trenutno stanje sistema označimo sa $x(t)$, tada odgovarajući deterministički model koji opisuje ponašanje sistema ima sledeći oblik:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (17)$$

Međutim, realni sistemi koji se javljaju u različitim okruženjima, u većini slučajeva, karakterišu se velikim stepenom neodređenosti (neizvesnosti). Ova karakteristika predstavlja ograničenje koje se mora uzeti u obzir pri matematičkom opisivanju posmatranog sistema, odnosno sistem se ne može matematički opisati determinističkim modelima. U ovakvim uslovima, matematičko modeliranje sistema zasniva se na proširivanju determinističkog modela uvođenjem slučajnosti. Ove slučajnosti se opisuju terminima verovatnoće i krajnji ishod je stohastički model sistema. Uopšteni oblik stohastičkog modela predstavljen je sledećom funkcijom:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), t) + g(X(t), t)\xi(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (18)$$

gde je $X(t), t \geq 0$, nepoznati stohastički proces, a $\xi(t), t \geq 0$, dati stohastički proces uveden kao faktor slučajnosti u determinističkoj diferencijalnoj jednačini. Za početni uslov X_0 se takođe pretpostavlja da je slučajna promenljiva. Stohastički procesi transformišu stohastičke ulazne vrednosti u stohastičke vrednosti odziva [13].

3.4.3 Brown-ovo kretanje i stohastičke diferencijalne jednačine

Slučajni hod, ponekad zvan "hod pijanca", je prvi korak u poimanju Brown-ovog kretanja. Slučajni hod je formalizacija ideje preduzimanja sukcesivnih (uzastopnih) koraka. Najjednostavniji slučajni hod je konstruisan u skladu sa sledećim pravilima.

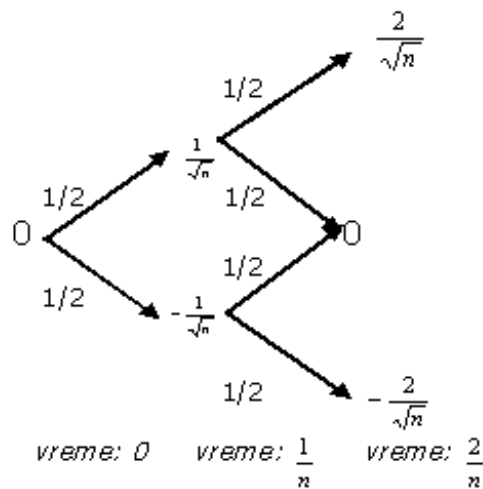
Za celi broj $n, n > 0$, definišemo slučajni proces u vremenu t $\{W_n(t), t > 0\}$ na sledeći način:

- početna vrednost procesa je $W_n(0) = 0$
- prostor između dva uzastopna skoka je jednak $\frac{1}{n}$
- skokovi "gore" i "dole" su jednaki i veličine su $\frac{1}{\sqrt{n}}$ uz istu verovatnoću

Drugim rečima ako razmotrimo n nezavisnih binomnih promenljivih x koje uzimaju vrednost $+1$ ili -1 uz istu verovatnoću $1/2$, onda vrednost slučajnog procesa u i -tom koraku se rekurzivno definiše na sledeći način:

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = W_n\left(\frac{i-1}{n}\right) + \frac{X_i}{\sqrt{n}}, \quad i \geq 1 \quad (19)$$

Slika br. 20 prikazuje dva koraka slučajnog procesa W_n u skladu sa prethodnom definicijom. U vremenu 1 proces ima samo dve vrednosti sa istom verovatnoćom.



Slika br. 20 Prva dva koraka slučajnog procesa W_n

Proces ide "gore" do vrednosti $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sa verovatnoćom $\frac{1}{2}=0,5$ ili 50% ili ide "dole" do vrednosti $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ sa istom verovatnoćom od 0,5. U ovom slučaju srednja vrednost i varijansa procesa je:

$$E[W_n(1)] = \sum_{k=1}^2 W_k \cdot P_k = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0,5\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 0,5\right) = 0 \quad (20)$$

$$Var[W_n(1)] = E[(W_n(1)) - E(W_n(1))]^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right)^2 \cdot 0,5 + \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right)^2 \cdot 0,5 = \frac{1}{n} \cdot 0,5 + \frac{1}{n} \cdot 0,5 = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$Var[W_n(1)] = \sum_{k=1}^2 [W_k(1) - E(W_k(1))]^2 \cdot P_k \quad (21)$$

Koristeći isti postupak dobijamo vrednost slučajnog hoda u vremenu 2, koje je jednako $\frac{2}{n}$. Poštujući jednačinu (19) slučajni hod u vremenu 2 dat je izrazom:

$$W_n\left(\frac{2}{n}\right) = W_n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{X_1}{\sqrt{n}} \quad (22)$$

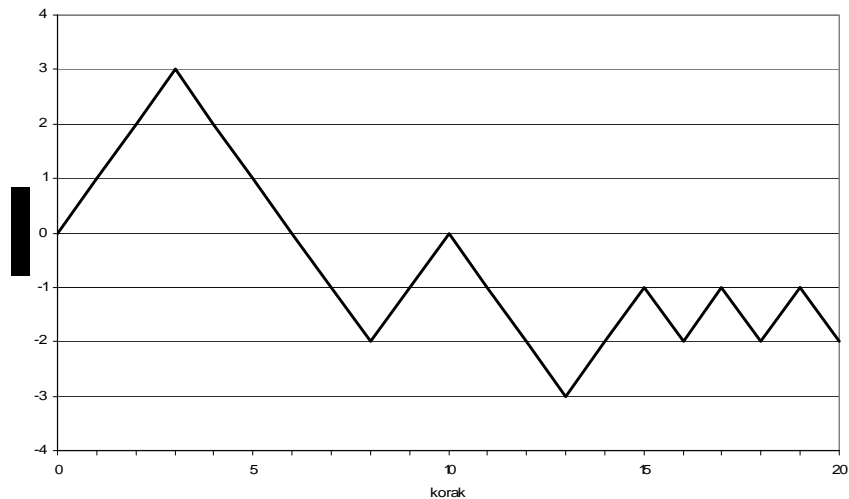
Slika br. 20 pokazuje da $W_n\left(\frac{2}{n}\right)$ može imati 3 različita stanja (različite vrednosti). Prvo stanje je $\frac{2}{\sqrt{n}}$ sa verovatnoćom 0,25 kada je $W_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ i $X_1 = +1$. Drugo stanje je 0 sa verovatnoćom $2 \cdot 0,25 = 0,5$ ako iz stanja $\frac{1}{\sqrt{n}}$ slučajni hod ide "dole" tj. $X_1 = -1$ ili ide "gore" iz stanja $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ tj. $X_1 = +1$. U treće stanje $-\frac{2}{\sqrt{n}}$ proces ide "dole" iz stanja $-\frac{1}{\sqrt{n}}$ sa verovatnoćom 0,25. U ovom slučaju $X_1 = -1$.

Srednja vrednost i varijansa slučajnog hoda posle drugog koraka mogu se sračunati na isti način kao i u prethodnom koraku, dakle imamo:

$$E\left[W_n\left(\frac{2}{n}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot 0,25 + 0,05 + \left(-\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \cdot 0,25 = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0 \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[W_n\left(\frac{2}{n}\right)\right] &= E\left[\left(W_n\left(\frac{2}{n}\right) - E\left(W_n\left(\frac{2}{n}\right)\right)\right)^2\right] = \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 0\right)^2 \cdot 0,25 + (0 - 0)^2 \cdot 0,5 + \left(-\frac{2}{\sqrt{n}} - 0\right)^2 \cdot 0,25 = \\ &= \frac{4}{n} \cdot 0,25 + 0 + \frac{4}{n} \cdot 0,25 = \frac{1}{n} + 0 + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \end{aligned} \quad (24)$$

Na slici br. 21 prikazan je proces koji počinje sa vrednošću 0 i slučajno praveći seriju od tri uzastopna skoka "gore" koja je praćena serijom od pet uzastopnih padova "dole". Izgleda da pri kraju slučajni proces prikazuje različito ponašanje kao što je proces "gore"- "dole".



Slika br. 21 Prva dva koraka slučajnog procesa W_n

Prema Brown-ovom kretanju odnosimo se kao prema procesu B_t . Ovo kretanje ima sledeće osobine:

- kontinuitet, proces B_t ima kontinualni put i $B_{(t=0)}=0$,
- normalnost, priraštaj Brown-ovog procesa u intervalu vremena dužine t između dva momenta S i $S+t$ jednak je $B_{S+t}-B_S$. Ovaj priraštaj se normalno raspodeljuje sa srednjom vrednošću 0 i varijansom jednakom sa priraštajem vremena t . $B_{S+t}-B_S \approx N(0,t)$.
- Markovljevu osobinu: uslovna raspodela B_t , pod pretpostavkom da je poznata informacija do vremena $s < t$, zavisi samo od B_s .

Generalizovani slučajni hod, nazvan takođe «Brown-ovo kretanje sa trendom», je stohastički proces B_t . Za date konstante μ i σ proces ima sledeću formu:

$$B_t = \mu \cdot t + \sigma \cdot W_t \quad (25)$$

gde je:

t – vreme

W_t – proces slučajnog hoda, prethodno opisan

Proces slučajnog hoda W_t može se napisati u obliku $W_t = \varepsilon \cdot \sqrt{t}$, gde ε predstavlja slučajni broj dobijen iz standardne normalne raspodele, odnosno $W_t = N(0,1) \cdot \sqrt{t}$.

Razmotrimo sada šta se dešava ako vremenske intervale načinimo sve manjim i manjim. Kada $t \rightarrow 0$ slučajni proces postaje neprekidni (kontinualni) slučajni proces. Tada ga nazivamo stohastičkim procesom i možemo koristiti diferencijale da bi smo opisali beskonačno (infinitesimalne) male promene. Sada možemo napisati jednačinu kao:

$$\frac{dB_t}{B_0} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (26)$$

gde je W_t , a samim tim i B_t slučajna promenljiva, B_0 početna vrednost procesa.

Stohastička diferencijalna jednačina (26) napisana u obliku

$$dB_t = \mu \cdot B_0 dt + \sigma \cdot B_0 dW_t \quad (27)$$

predstavlja Brown-ovo kretanje. Označimo desnu stranu jednačine (26) sa

$$\mu dt + \sigma dW_t = dX_t \quad (28)$$

Jenačina (26) sada poprima sledeći oblik:

$$\frac{dB_t}{B_0} = dX_t \quad (29)$$

Koristeći činjenicu da je $\frac{dB_t}{B_0} = d(\ln B_t) = \ln(B_t) - \ln(B_0) = \ln\left(\frac{B_t}{B_0}\right)$, možemo B_t izraziti

kao:

$$\ln\left(\frac{B_t}{B_0}\right) = X_t \quad (30)$$

odnosno

$$B_t = B_0 \cdot e^{X_t} = B_0 \cdot e^{\mu dt + \sigma dW_t} \quad (31)$$

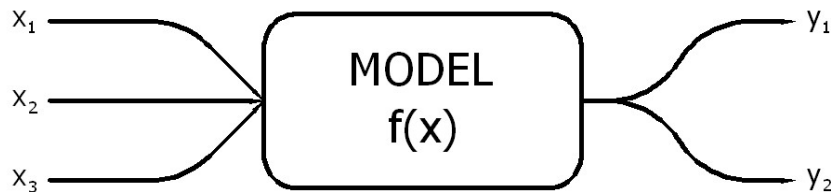
Ovo znači da se logaritam od B_t normalno raspodeljuje. Prema tome kažemo da je raspodela od B_t lognormalna.

Jednačina (31) predstavlja rešenje stohastičke diferencijalne jednačine koja opisuje Brown-ovo kretanje, odnosno scenario po kojem se proces razvija.

3.5 Osnove Monte Carlo simulacija

Metoda Monte Carlo je tehnika koja obuhvata primenu slučajnih brojeva i verovatnoću radi rešavanja određenih problema. Termin Metode Monte Carlo skovan je od strane *S. Ulam-a* i *Nicholas Metropolis-a* i tiče se igara na sreću, popularnu atrakciju u Monte Karlu, Monaku (Hoffman,1998; Metropolis and Ulam,1949), [38, 21, 30].

Kada pravimo model, koji se koristi za imitaciju realnog okruženja ili pravljenje predikcija, obično imamo određen broj ulaznih parametara i nekoliko predikcija, obično imamo određen broj ulaznih parametara i nekoliko jednačina koje koriste te parametre i daju nam skup izlaznih podataka (ili odzivnih promenljivih). Ovakva vrsta modela po pravilu je deterministička, što znači da uvek dobijamo iste rezultate bez obzira koliko puta iznova vršili proračun, slika br. 22.



Slika br. 22 Parametarsko deterministički model koji prevodi skup ulaznih promenljivih u skup izlaznih promenljivih [1]

Monte Carlo simulacija je metoda za iterativno izračunavanje determinističkog modela koja koristi slučajne brojeve kao i ulazne parametre. Ova metoda se često koristi kada je model kompleksan, nelinearan ili obuhvata više od par neodređenih parametara. Upotreba slučajnih brojeva ustvari deterministički model prevodimo u stohastički.

Metoda Monte Carlo je samo jedna od mnogih metoda za analiziranje neodređenosti, koja ima za cilj da odredi kako slučajna varijacija, nedostatak znanja ili

greška utiču na osetljivost, rad ili pouzdanost sistema koji se modelira. Ova metoda je kategorisana kao metoda uzorkovanja zato što se ulazne vrednosti slučajno kategorišu iz raspodela verovatnoće da bi se simulirao proces uzorkovanja iz stvarne populacije. Prema tome, pokušavamo da izaberemo raspodelu za ulazne parametre koja najpribližnije objedinjuje podatke koje već imamo ili najbolje reprezentuje trenutni nivo našeg znanja o nekoj pojavi. Podaci generisani simulacijom mogu se predstaviti kao raspodela verovatnoće (može histogrami) ili pretvoreni u procene pouzdanosti, intervale pouzdanosti u oblasti tolerancije.

Pod metodom Monte Carlo podrazumevaju se numeričke metode za rešavanje matematičkih problema uz pomoć modeliranja slučajnih promenljivih i statističkih ocena njihovih karakteristika. Da bismo izračunali neku skalarnu veličinu a potrebno je naći takvu slučajnu promenljivu X za koju je $M(X)=a$. Tada se odredi N međusobno nezavisnih vrednosti X_1, X_2, \dots, X_N promenljive X pa se uzima približno,

$$a \approx \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_N)}{N} \quad (32)$$

a na osnovu centralne granične teoreme iz verovatnoće ovakva aproksimacija daje rezultate za veliko N .

Metoda Monte Carlo se sastoji od više faza:

- Faza I: Kreira se parametarski model oblika $y = f(X_1, X_2, \dots, X_q)$
- Faza II: Generiše se skup slučajnih ulaznih parametara $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{iq}$
- Faza III: Izračunava se rezultat modelovane operacije i arhivira se dobijeni rezultat u obliku y_i
- Faza IV: Ponavljaju se faze: Faza II i Faza III za $i = 1, 2, \dots, n$
- Faza V: Sistematički se obrade dobijeni rezultati (histogrami, srednja vrednost, medijana itd.)

Osnova za formiranje slučajnih realizacija pri diskretnom računanju je generator koji sa istom verovatnoćom daje i 0 i 1. Skup brojeva $Z_i \in \{0,1\}$ dobijen pomoću generatora je ishodni skup slučajnih brojeva. Na osnovu ishodnog skupa slučajnih brojeva se može formirati uniformno raspoređena slučajna veličina X na sledeći način:

$$X = Z_1 2^{-1} + Z_2 2^{-2} + Z_3 2^{-3} + \dots + Z_n 2^{-n} + \dots \quad (33)$$

gde je: $Z_i=1$, sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$; 0 sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$.

Broj X je slučajan broj u granicama $0 \leq X \leq 1$ i verovatnoća da će vrednost X pasti u bilo koji interval $[0, 1/2^k]$, ($k=0,1,2,\dots$) jednaka je dužini intervala $1/2^k$. To je uniformno raspoređena slučajna veličina. Slučajna veličina X može da posluži kao osnova za realizaciju bilo kog niza slučajnih brojeva sa zadatim zakonima raspodele, ili za modeliranje nezavisnih ili zavisnih ispitivanja u šemi slučajnih događaja, čiji mogući rezultati mogu biti događaji A_i , ili za formiranje slučajnih procesa koji imaju odgovarajuće karakteristike verovatnoće.

Formiranje bilo kog niza slučajnih brojeva sa zadatim zakonom raspodele na osnovu slučajne veličine X uniformno raspoređene na intervalu $[0,1]$ vrši se preslikavanjem slučajnog broja X_i koji je dobijen iz uniformne raspodele $[0,1]$ u slučajan broj Y_i iz skupa sa zadatim zakonom raspodele. Ovo preslikavanje se može izvršiti na osnovu poznate osobine iz teorije verovatnoće, na osnovu koje ako slučajna veličina ima gustinu raspodele $f(x)$, tada raspodela slučajne veličine η

$$\eta = \int_{-\infty}^{\xi} f(x) dx \quad (34)$$

je uniformna od 0 do 1.

Polazeći od ove osobine dobija se pravilo za formiranje brojeva raspoređenih po zakonu raspodele određenom funkcijom $f(Y)$. Na osnovu realizacije η ako je poznata vrednost X_i slučajne promenljive X uniformno raspoređene na intervalu $[0,1]$ dobija se odgovarajuća vrednost Y_i rešavanjem jednačine:

$$\int_{-\infty}^{Y_i} f(Y) dY = X_i \quad (35)$$

po Y_i .

Na taj način se preslikava skup vrednosti X_i u skup vrednosti Y_i .

Događaj A je događaj takav da slučajna veličina X zadovoljava nejednakost $X < p$. Pošto je slučajna veličina uniformno raspoređena na $[0,1]$ njena gustina raspodele $f(Y)$ jednaka je 1, pa je verovatnoća događaja da X bude manje od p jednaka:

$$P(0 \leq X \leq p) = \int_0^p dY = p \quad (36)$$

Događaj A koji je definisan kao pojavljivanje nejednakosti $X < p$, ima verovatnoću p . Postupak modeliranja je: uzimaju se u uzastopnom izboru vrednosti X_i , ($i=1,2,\dots,n$), slučajne promenljive X , uniformno raspoređene na intervalu $[0,1]$ i ispituje se da li je relacija $X < p$ zadovoljena. Ako je zadovoljena relacija $X < p$ događaj A , čija je verovatnoća p , je proizašao, u suprotnom nije proizašao. Ponavljanjem realizacija n puta, modelira se proces pojavljivanja događaja A .

3.6 Transformacija funkcije gustine verovatnoće u trouglasti fuzzy broj

Nekompletnost predstavlja jedan aspekt neodređenosti dok slučajnost predstavlja drugi. Verovatnoća događaja na kvantitativan način izražava slučajnost dok mogućnost događaja na kvalitativan način izražava nekompletnost. Veoma je korisno izvršiti transformaciju mere verovatnoće u meru mogućnosti, naročito kada je proračun koji uključuje mogućnost mnogo jednostavniji nego proračun sa verovatnoćom ili kada je prisutna nekompletnost informacija.

Generalno, neka promenljiva može biti skopčana i sa verovatnoćom i sa mogućnošću, pomoću veze između dva načina predstavljanja u smislu principa konzistencije mogućnost–verovatnoća. Tokom transformacije promenljive predstavljene verovatnoćom u promenljivu izraženu raspodelom mogućnosti, deo informacija se gubi iz prostog razloga što transformacija započinje iz tačke a završava se intervalnom vrednošću, tj. intervalom. Prihvatljiv način transformacije treba da sačuva što je moguće više informacija i ispoštuje princip očuvanja preference, tj.:

$$\pi(x) \geq \pi(x') \Leftrightarrow p(x) \geq p(x') \quad (37)$$

gde je p skopčano sa funkcijom gustine verovatnoće a π sa funkcijom mogućnosti. U tom kontekstu, funkcija pripadnosti skupu μ se uzima kao funkcija mogućnosti π [1].

Pretpostavimo da imamo unimodalnu funkciju gustine verovatnoće (fgv) p unutar ograničenog intervala $[a,c]$, tako da je p rastuća u intervalu $[a,b]$, a opadajuća u intervalu $[b,c]$, gde je b modalna vrednost funkcije p .

Definišimo funkciju $f:[a,b] \rightarrow [b,c]$ na sledeći način:

$$f(x) = \max\{y \mid p(y) \geq p(x)\} \quad (38)$$

Onda se raspodela mogućnosti može definisati kao:

$$\mu(x) = \mu(f(x)) = \int_{-\infty}^x p(y)dy + \int_{f(x)}^{\infty} p(y)dy \quad (39)$$

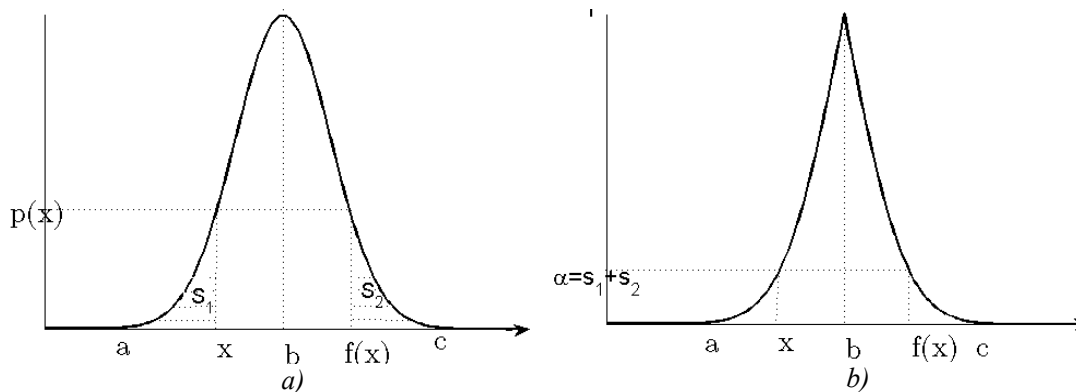
Ako funkciju kumulativne raspodele označimo kao:

$$P(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p(y)dy \quad (40)$$

onda na osnovu jednačine (3.6.3) dobijamo sledeće:

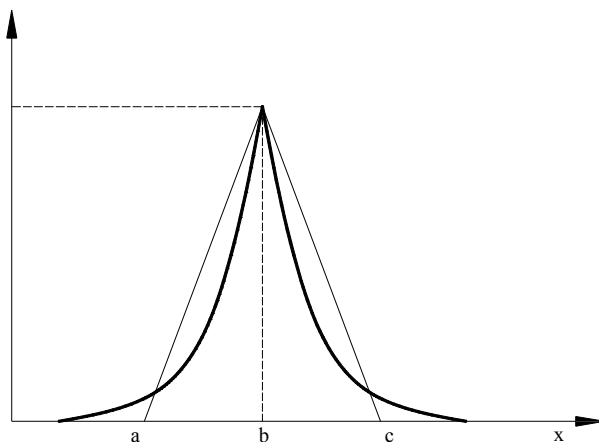
$$\mu(x) = P(x) + 1 - P(f(x)) \quad (41)$$

Prethodna ideja se može predstaviti slikom br. 23. Za slučajnu promenljivu X sa funkcijom gustine verovatnoće prikazanoj na slici 3.6.1.a, za bilo koje $x \in [a,b]$, $s_1=P(x)$ i $s_2=1-P(f(x))$, funkcija mogućnosti je oblika $\mu(x) = \mu(f(x)) = \alpha = s_1 + s_2$ i prikazana je na slici br. 23 b.



Slika br. 23 Transformacija verovatnoće (a) u mogućnost (b)

Zatim se neodređenost ulaznih podataka može dalje modelirati primenom trouglastih fuzzy brojeva. Razmotrimo jedan ulazni parametar okarakterisan skupom merenih veličina, pri čemu se te veličine raspodeljuju u skladu sa normalnom raspodelom. Neodređenost ulaznog parametra se modelira trouglastim fuzzy brojem čija funkcija pripadnosti skupu ima oblast definisanosti $\eta - 2\sigma < X < \eta + 2\sigma$ postavljenu za interval pouzdanosti oko 95% funkcije normalne raspodele. Ako uzmemo u obzir da je trouglasti fuzzy broj definisan trojkom (a, b, c) , onda su a i c redom donja i gornja granica koje su dobijene kao donja i gornja granica od 5% funkcije normalne raspodele, a najviše očekivana mogućnost b je jednaka srednjoj vrednosti raspodele [22]. Slika br. 24 prikazuje izvršenu transformaciju.



Slika br. 24 Transformacija mogućnosti u trouglasti fuzzy broj

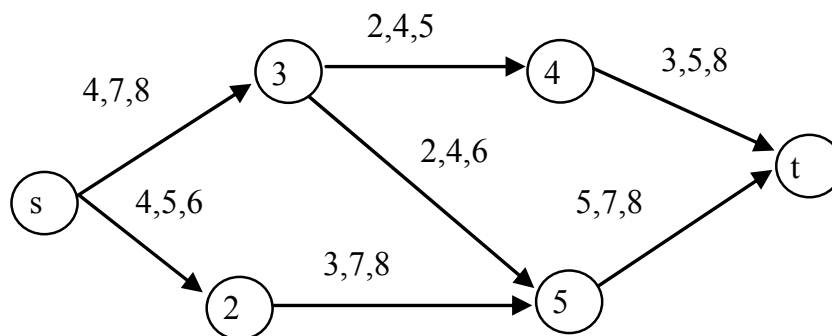
4. IZBOR SISTEMA OTVARANJA

4.1 Model izbora sistema otvaranja zasnovan na Indeksu konveksnosti

4.1.1 Fuzzy težinska mreža i najkraći put u njoj

Fuzzy težinska mreža $\tilde{G} = (V, A, \tilde{c})$ sastoji se od skupa V čvorova v_i i binarne relacije A ivica $e_k = (v_i, v_j) \in V \times V$. Označimo $početak(e_k) = v_i$ i $kraj(e_k) = v_j$. Ponekad se u literaturi o mrežama v_i naziva roditeljem od v_j , dok se v_j naziva detetom od v_i . Svakoj ivici (v_i, v_j) pridodaje se težina ili trošak $\tilde{c}_{ij} = \tilde{c}(v_i, v_j) = (\tilde{c}(v_i, v_j)^1, \dots, \tilde{c}(v_i, v_j)^r)$, odnosno vektor fuzzy brojeva pri čemu je $r \geq 1$. Svaki fuzzy broj se može posmatrati kao procena datog kriterijuma. Zbog jednostavnosti a bez gubitka uopštenosti usvaja se da je $r=1$.

Neki s, t put p u mreži $\tilde{G} = (V, A, \tilde{c})$ je n -torka $p = (e_1, e_2, \dots, e_n) \in A^n$ tako da je $kraj(e_i) = početak(e_{i+1})$ za $i=1, \dots, n-1$ a $početak(e_1) = s$ i $kraj(e_n) = t$. $P(s, t)$ je skup svih s, t puteva. Neki s, t put p naziva se cikličnim ako je $s=t$. Specijalan put označen sa \emptyset naziva se prazan put, odnosno on ne sadrži nijednu ivicu. Da bi napravili preciznu formulaciju fuzzy najkraćeg puta, potrebna nam je funkcija cilja \tilde{f} koja pridružuje vrednost (fuzzy broj) svakom putu $p \in P(s, t)$, pri čemu se pretpostavlja da je $\tilde{f}(\emptyset) = 0$ i $\tilde{f}(e_i) = \tilde{c}(e_i)$. Funkcija cilja determiniše kriterijum troška. U svrhu pronalaženja fuzzy najkraćeg puta, izvršice se uporedna analiza puteva na osnovu njihovih vrednosti. Tada kažemo da $\tilde{f}(p) < \tilde{f}(q)$ znači da je put p „kraći“ nego put q . Takođe kažemo da put p dominira na putem q . Na slici br. 25 prikazana je jedna fuzzy težinska mreža, gde su težine izražene fuzzy trouglastim brojevima.



Slika br. 25 Fuzzy težinska mreža (V, A, \tilde{c})

Dubois i Prade (1980) [12] su prvi razmatrali problem fuzzy najkraćeg puta, koristeći Floyd-ov i Ford-ov algoritam za dobijanje rešenja. Klein (1991) je predložio algoritam zasnovan na fuzzy dinamičkom rekurzivnom programiranju [24]. Lin i Chen (1994) pronalaze fuzzy najkraći put u mreži primenom fuzzy linearnog programiranja [27]. Okada (2004) definiše novi index komparacije između suma fuzzy brojeva razmatrajući međusobnu aktivnost fuzzy brojeva i definiše algoritam za određivanje stepena mogućnosti za svaku ivicu u mreži [32]. Kung i drugi (2006) predlažu novi pristup zasnovan na fuzzy dinamičkom programiranju gde se ivicama dodeljuju težine izražene trouglastim fuzzy brojevima [25]. Mahdavi i drugi (2007) su predložili metodu za pronalaženje fuzzy najkraćeg puta primenjujući meru fuzzy sličnosti [29]. Chuang i Kung (2005) postavljaju novi algoritam zasnovan na heurističkom postupku pronalaženja fuzzy najkraćeg puta između svih mogućih puteva u mreži. U tu svrhu koristili su stepen sličnosti između fuzzy najkraćeg puta i svakog puta u mreži, a put sa najvišim stepenom sličnosti je najkraći put [9].

4.1.2 Formulacija problema

Rudarska kompanija planira da vrši otkopavanje rude iz ležišta. Parametri ležišta, kao što su veličina ležišta, prostorni položaj ležišta i okvirne rezerve rude, poznati su na osnovu geoloških istraživanja. Metoda otkopavanja je takođe definisana. Rudno telo je po dubini podeljeno na glavne proizvodne celine, odnosno horizonte. Svaki horizont je podeljen na manje proizvodne celine, odnosno podetaže. Lokacije pristupnih tačaka do svake podetaže su definisane. Ove lokacije predstavljaju pozicije na obodu podetaža iz kojih se vrši pristupanje ležištu i iz kojih se vrši transport rude do površine. U suštini pristupne tačke predstavljaju tačke koncentracije za svaku podetažu. Na svakoj podetaži koristi se odgovarajuća oprema za otkopavanje i transport rude od otkopa do pristupne tačke.

Glavni zadatak, sa kojim se projektant suočava, jeste određivanje sistema otvaranja koji je neophodan da bi se obezbedio pristup do tačaka koncentracije i da bi se obezbedili putevi za transport otkopane rude do površine. Ovaj problem može se tretirati kao problem optimizacije.

Ključni zahtev u primenjivanju matematike u problemima kao što je projektovanje podzemnog rudnika je razvijanje modela koji uklapa esencijalne karakteristike problema projekta ali ostaje matematički lako obradljiv. Razvoj formalnog okvira optimizacije treba da teži ka modelu problema rudničkog projekta u svojstvu težinske mreže. Problem minimiziranja troška otvaranja i eksploatacije rudnika jednak je minimiziranju troška njemu pridružene mreže. Model se prvo prezentuje u opštem opisnom načinu, a onda se formuliše za specijalan slučaj u preciznijoj matematičkoj formi.

Cilj opšteg modela optimizacije treba da bude minimizacija ukupnog promenljivog troška pristupanja rudi i njenog transporta za dati projekat rudnika, gde se pretpostavlja da je trošak neka predložena kombinacija troškova infrastrukture (pristupanja) i eksploatacije (transporta). Neki proračun promenljivih servisnih troškova, posebno ventilacionih, može biti inkorporiran u zadati cilj pod pretpostavkom da su ovi troškovi proporcionalni troškovima transporta i manipulativnim troškovima.

Osnovne pretpostavke i troškovi su:

- pretpostavlja se da su rudarski eksploatacioni troškovi, za razliku od transportnih troškova, nepromenjivi s obzirom na alternativne mrežne planove rudnika,
- mrežni model pretpostavlja da su sve tačke pristupa date, zajedno sa očekivanom tonažom za svaku pristupnu tačku,
- pretpostavlja se da rudnik može sadržati ili niskop ili hodnik ili vertikalno izvozno okno sa jednom ili više utovarno/pristupnih tačaka. Površinska lokacija niskopa, hodnika ili okna može biti ili fiksirana, slobodna ili uslovljena datim regionom; dužina niskopa, hodnika i dubina okna su generalno slobodne promenljive,
- troškovi otvaranja za niskop, hodnik i okno su dati; obično će oni biti modelovani kao trošak po dužnom metru,
- troškovi transporta duž niskopa, hodnika su dati; obično će ovi troškovi biti specificirani u \$/tm i mogu varirati sa nagibom niskopa,
- troškovi izvoza oknom su dati kao funkcija tonaže i dubine okna

Dozvoljeno je da topologija rudničke mreže otvaranja varira. Prema tome, glavne promeljive su:

- lokacija i/ili dubina na kojoj se nalazi osnova okna ili tačke navozišta,
- lokacija i dužina niskopa, kao i nagib,
- lokacija i dužina hodnika,
- topologija rudničke mreže otvaranja

Mrežni model može inkorporirati i neka od ključnih operativnih ograničenja koja su karakteristika projekata podzemnih rudnika, na primer, vertikalni nagibi niskopa ograničeni su do apsolutno dozvoljenog nagiba u opsegu koji je definisan tehničkim mogućnostima transportne opreme, itd.

Elementi rešenja će opisati vrednosti promenljivih koje minimiziraju nominovani troškovni cilj:

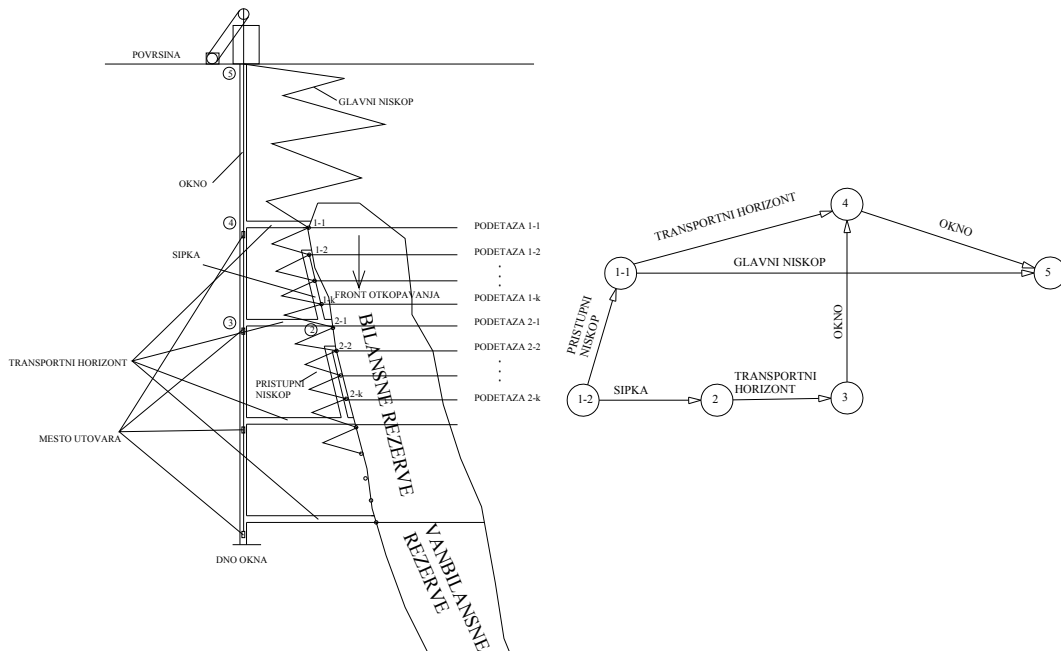
- lokaciju i dubinu okna, odnosno elemente niskopa ili hodnika,
- topologiju mreže otvaranja,
- procenjen trošak optimalnog rešenja,
- osetljivost prema promenama u projektu (povećana tonaža), operativnim podacima (strmiji nagibi niskopa za različitu opremu) ili strukturi troškova

Pod pojmom formulacija problema podrazumeva se određivanje funkcije cilja koja treba da se minimizira da bi se sračunala mreža optimalnog troška.

Pre svega neophodno je definisati neke osnovne pojmove. Orjentisana mreža (smer orijentacije je definisan u kontekstu trase izvoza rude od pristupne tačke do površine) sastavljena je od konačnog skupa čvorova i skupa orjentisanih ivica. Svaku orjentisanu ivicu označavamo uređenim parom (i,j) , gde i i j predstavljaju različite čvorove. Dužina ivice je rastojanje koje je potrebno preći iz čvora i do čvora j . Ovo rastojanje označava se sa $L(i,j)$. Put od čvora u do čvora v u mreži $G=(V,E)$, gde je V skup čvorova a E skup ivica, je niz čvorova u,v_1,v_2,\dots,v_n tako da su $(u,v_1), (v_1,v_2),\dots, (v_{n-1},v_n)$ ivice u skupu E . Dužina puta je zbir dužina ivica na datom putu. Najkraći put između dva čvora u i v je put sa najmanjom dužinom od svih postojećih puteva između

u i v . Ako je dužina svake ivice izražena fuzzy brojem, na primer fuzzy trouglastim brojem, tada će dužina svakog puta između bilo koja dva određena čvora biti neki fuzzy broj istog tipa. U ovom slučaju, problem najkraćeg puta se označava kao problem fuzzy najkraćeg puta. U skladu sa prethodnom diskusijom, pretpostavimo da u datoj mreži otvaranja postoji n čvorova i m osnovnih tipova prostorija otvaranja i da je svakom tipu prostorije pridružena fuzzy troškovna funkcija. Formalno, problem je pronaći fuzzy najjeftiniji put od početnog čvora (pristupne tačke) do krajnjeg čvora (ulaz u rudnik). Fuzzy troškovna funkcija puta je zbir fuzzy troškovnih funkcija prostorija otvaranja koje se nalaze na datom putu.

Logičan sled aktivnosti, koje se u realnosti sprovode u fazi otvaranja rudnika, jeste da se prvo obezbedi veza sa površine terena do pristupne tačke, a posle toga da se obezbedi transport rude. Ovaj model optimizacije tretira problem u suprotnom smeru, tj., u kontekstu trase transporta rude. Na slici br. 26 prikazan je jedan primer mreže otvaranja koja je sastavljena od nekoliko mogućih sistema otvaranja, dok je na slici br. 27 prikazan odgovarajući orjentisani graf (mreža) mogućih transportnih puteva od podetaže 1-2 do površine terena.



Slika br. 26 Mreža otvaranja sa mogućim putevima

Slika br. 27 Orjentisani graf puteva izvoza rude za podetažu 1-2

Problem fuzzy najjeftinijeg puta može se opisati na sledeći način. Pronaći minimum funkcije cilja:

$$\tilde{F}(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\tilde{f}_i + \tilde{f}_{ij}) \cdot x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\tilde{C}_i^{DA} + \tilde{C}_{ij}^{DH} + \tilde{C}_{ij}^H) \cdot x_{ij} \quad (42)$$

uz poštovanje sledećih ograničenja:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = \begin{cases} 1, & i=1 \\ -1, & i=n \\ 0, & \text{za sve ostalo} \end{cases} \quad (43)$$

$$x_{ij} \in [0,1] \quad \forall (i,j) \in E \quad (44)$$

$$\tilde{C}_i^{DA} = \begin{cases} =0 & \text{ako je } \tilde{C}_{ij}^H > 0 \\ >0 & \text{ako je } \tilde{C}_{ij}^H = 0 \end{cases} \quad (45)$$

gde je:

\tilde{f}_i – trouglasta fuzzy troškovna funkcija u čvoru i i ona se dodaje ivici koja izlazi iz čvora i , a ne ivici koja ulazi u čvor i ,

\tilde{f}_{ij} – trouglasta fuzzy troškovna funkcija između čvora i i j ($i=1,2,\dots,n$ i $j=1,2,\dots,n$),

x_{ij} – promenljiva koja uzima vrednost $x_{ij}=1$ ako je prostorija otvaranja na transportnom putu i $x_{ij}=0$ u suprotnom,

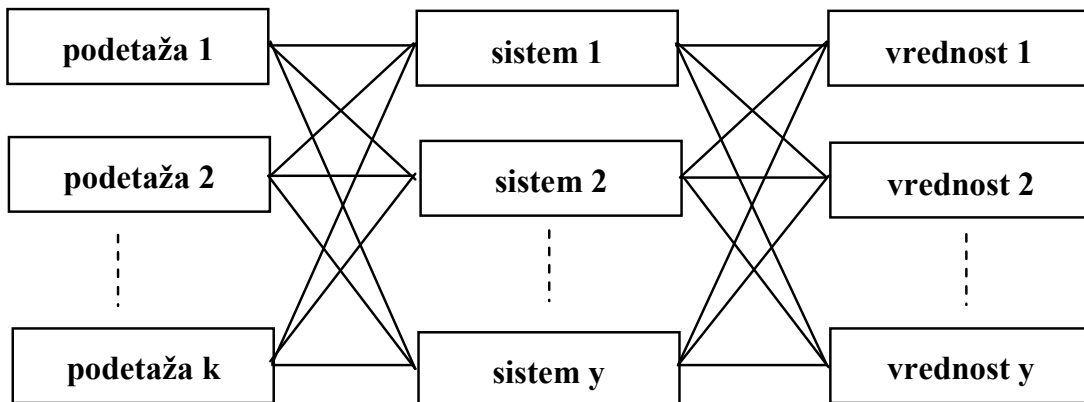
\tilde{C}_i^{DA} – ukupan trošak izrade prostorija otvaranja koje se koriste samo u svrhu pristupa do podetaže (transport rude se ne odvija kroz njih) (\$), na primer, da bi se otvorila podetaža 1-2 (videti slike br. 26 i 27) neophodno je izraditi hodnik (4,1-2) i pristupni niskop od podetaže 1-1 do podetaže 1-2 ali se ove dve prostorije neće koristiti za transport rude ako se on odvija putanjom (1-2),(2),(3),(4),(5), odnosno rudnom sipkom, izvoznim hodnikom do okna a zatim oknom do površine,

\tilde{C}_i^{DH} – ukupan trošak izrade prostorija otvaranja koje se koriste i u svrhu pristupa do podetaže i u svrhu transporta rude duž nje (\$),

\tilde{C}_{ij}^H – ukupan trošak transporta rude duž prostorije otvaranja (\$)

Funkcija cilja definisana izrazom (42) odnosi se samo na jednu pristupnu tačku, odnosno podetažu. Neka je $G(P)$ graf od P , gde je $P = \{p_1, p_2, \dots, p_y\}$ skup fuzzy mogućih transportnih puteva od podetaže do površine (videti sliku br. 27). Rešenje funkcije (42) definisano je putem najmanjeg troška $p = \min(p_1, p_2, \dots, p_y)$ koji ima najmanju vrednost Indeksa konveksnosti (IK). Ovaj put p ima rang (r) najvišeg nivoa i dodeljuje mu se vrednost $r=1$, a preostali putevi rangiraju se u skladu sa rastućim nizom vrednosti njihovih Indeksa konveksnosti i dodeljuju im se redom vrednosti $2, 3, \dots, y$. To znači da postoji poredak rangova datih puteva p_1, p_2, \dots, p_y (na primer, p_3, p_1, p_2 ; sa dodeljenim vrednostima $p_3 \rightarrow 1, p_1 \rightarrow 2, p_2 \rightarrow 3$) za jednu podetažu.

Pretpostavimo da postoji k podetaža, koje treba otkopati tokom nekog planiranog perioda. Ako uzmemo u obzir prethodnu pretpostavku onda imamo k puteva minimalnog troška i takođe k poredaka dodeljenih veličina. Slika br. 28 prikazuje relacije koje mogu postojati između k podetaža, y puteva (sistema otvaranja) i y dodeljenih vrednosti.



Slika br. 28 Moguće relacije između podetaža, sistema otvaranja i dodeljenih vrednosti

U skladu sa prethodnom diskusijom naš problem se može predstaviti kao (A, X, E) model, gde A predstavlja skup alternativa, X skup atributa, a E skup procena alternativa u skladu sa datim atributima. Razmotrimo konačan skup alternativa, odnosno sistema otvaranja $A(p_1, p_2, \dots, p_y)$, konačan skup atributa $X(x_1, x_2, \dots, x_k)$, tj. konačan broj podetaža i skup procena alternativa u skladu sa skupom atributa $E(x_{yk})$. Skup procena alternativa predstavljen je matricom sledećeg oblika:

$$E = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{y1} & x_{y2} & \cdots & x_{yk} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Glavni cilj ovog modela jeste pronaći (definisati) sistem otvaranja koji će biti iskorišćen za pristup do svih k podetaža i za transport rude od njih do površine terena. Osnova za pronalaženje najefikasnijeg sistema otvaranja je matrica $R=[r_{yk}]$, čiji elementi predstavljaju rangove sistema otvaranja, koji su dobijeni na osnovu Indeksa konveksnosti, tj. $r_{yk}=f(IK_{yk})$:

$$E = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{y1} & x_{y2} & \cdots & x_{yk} \end{bmatrix} \rightarrow IK = \begin{bmatrix} IK_{11} & IK_{12} & \cdots & IK_{1k} \\ IK_{21} & IK_{22} & \cdots & IK_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ IK_{y1} & IK_{y2} & \cdots & IK_{yk} \end{bmatrix} \rightarrow R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{y1} & r_{y2} & \cdots & r_{yk} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Rešenje je zasnovano na kompozitnom rangiranju predloženih alternativa, odnosno sistema otvaranja. Kompozitni rang sistema otvaranja dobija se sumiranjem pojedinačnih rangova dodeljenih svakom sistemu otvaranja na svakoj podetaži ponaosob. Red veličina dobijenih suma ukazaće na poredak predloženih sistema otvaranja, pri čemu će suma sa najmanjom vrednošću odgovarati najboljem sistemu otvaranja. Optimalan sistem otvaranja (SO), za dato ležište, bira se na osnovu sledećeg izraza:

$$SO = \min \left[\sum_k r_{1k}, \sum_k r_{2k}, \dots, \sum_k r_{yk} \right] \quad (48)$$

4.1.3 Indeks konveksnosti

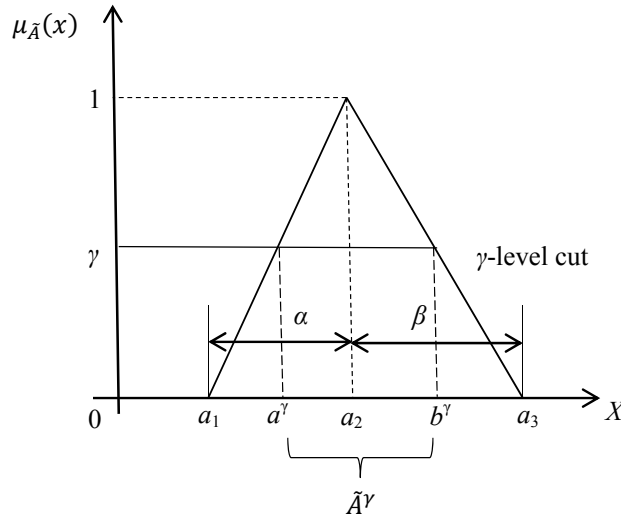
Pri rešavanju klasičnih problema u mrežama, težine ivica su izražene realnim brojevima, ali u većini slučajeva koje srećemo u praksi ove težine nisu precizno definisane. U ovakvim slučajevima, najprikladniji način za predstavljanje nepreciznosti jeste primena fuzzy brojeva, što dovodi do problema određivanja fuzzy najkraćeg puta unutar zadate mreže.

Definicija (49): aciklični digraf je graf čije su grane orjentisane, odnosno jednoj grani nisu pridružena dva ista čvora (petlja).

Definicija (50): funkcija pripadnosti skupu trouglastog fuzzy broja $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ predstavljenog u LR (left/right; levo/desno) formi, $\tilde{A} = (a_2, \alpha, \beta)_{LR}$. Ovakav način predstavljanja prikazan je na slici br. 29 i sledećim izrazom:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_2 - \alpha \\ \frac{x - (a_2 - \alpha)}{\alpha}, & a_2 - \alpha < x < a_2 \\ 1, & x = a_2 \\ \frac{(a_2 + \beta) - x}{\beta}, & a_2 < x < a_2 + \beta \\ 0, & x \geq a_2 + \beta \end{cases} \quad (49)$$

gde je a_2 centar, α leva širina, a β desna širina.



Slika br. 29 Funkcija pripadnosti skupu trouglastog fuzzy broja predstavljenog u LR formi i interval γ preseka

Definicija (51): interval γ -preseka za fuzzy trouglasti broj predstavljen u LR formi. Ovaj interval predstavljen je kao $\tilde{A}^\gamma = [a^\gamma, b^\gamma]$. Interval γ -preseka za fuzzy trouglasti broj dobija se za svako $\gamma \in [0,1]$ na sledeći način:

$$\begin{cases} \frac{a_2 - a^\gamma}{\alpha} = \gamma \Rightarrow a^\gamma = a_2 - \alpha\gamma \\ \frac{b^\gamma - a_2}{\beta} = \gamma \Rightarrow b^\gamma = \gamma\beta + a_2 \end{cases} \quad (50)$$

Konačno, interval γ -preseka za fuzzy trouglasti broj predstavljen u LR formi je:

$$\tilde{A}^\gamma = [a^\gamma, b^\gamma] = [a_2 - \alpha\gamma, \gamma\beta + a_2] \quad (51)$$

Definicija (52): neka je $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ fuzzy trouglasti broj, onda je Indeks konveksnosti definisan izrazom:

$$CoI(\tilde{A}) = \lambda(a^\gamma) + (1 - \lambda)(b^\gamma) \quad (52)$$

gde je $[a^\gamma, b^\gamma]$ interval γ -preseka od $\tilde{A} = (a_2, \alpha, \beta)_{LR}$ ako je:

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda(a^\gamma) + (1 - \lambda)(b^\gamma)] \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(a^\gamma), \mu_{\tilde{A}}(b^\gamma)\} \quad (53)$$

za svako $\gamma, \lambda \in [0, 1]$. Ako su \tilde{A} i \tilde{B} dva trouglasta fuzzy broja predstavljena u LR formi. tada je $\tilde{A} < \tilde{B}$ ako i samo ako je $CoI(\tilde{A}) < CoI(\tilde{B})$.

Algoritam za rešavanje problema fuzzy najkraćeg puta zasnovan na Indeksu konveksnosti sastoji se od sledećih koraka [15]:

Korak 1: konstruisati mrežu $G=(V,E)$ gde V predstavlja skup čvorova, a E skup ivica.

Korak 2: formirati moguće puteve P_i krećući se od početnog čvora s pa do krajnjeg čvora t i sračunati njima odgovarajuće dužine $L_i, i=1,2,\dots,m$ i izraziti dužine u obliku $L_i = (a_{2i}, \alpha_i, \beta_i)_{LR}$.

Korak 3: izračunati interval γ -preseka za LR prikaz trouglastog fuzzy broja za sve moguće dužine puteva $L_i, i=1,2,\dots,m$ koristeći Definiciju (51). Predstaviti L_i u obliku $L_{i(\gamma)} = [L_{i(\gamma)}^L, L_{i(\gamma)}^U], i=1,2,\dots,m$.

Korak 4: izračunati Indeks konveksnosti $IK(L_i) = \lambda(L_{i(\gamma)}^L) + (1 - \lambda)(L_{i(\gamma)}^U)$ za sve moguće dužine puteva $L_i, i=1,2,\dots,m$ koristeći Definiciju (52).

Korak 5: identifikovati najkraći put koji se karakteriše najmanjom vrednošću Indeksa konveksnosti i njemu odgovarajuća dužina puta L_i predstavlja najkraći fuzzy put u mreži.

4.1.4 Definisane troškovne funkcije

Opšti oblik fuzzy troškovne funkcije za prostoriju, koja se koristi za pristup i transport rude, je oblika:

$$\tilde{f}_{ij} = \tilde{C}_{ij}^{DH} + \tilde{C}_{ij}^H = \tilde{\delta} \cdot l \cdot \lambda^{-1} + c(t) \cdot \tilde{Q} \cdot l \quad (54)$$

gde je:

l – ukupna dužina prostorija otvaranja (m),

\tilde{Q} – procenjena količina rude koja se transportuje duž prostorije otvaranja (t),

$$\tilde{Q} = P_r \cdot \tilde{R}$$

P_r – bilansne rezerve (t),

\tilde{R} – koeficijent iskorišćenje (%),

$\tilde{\delta}$ – jedinična cena izrade prostorije otvaranja (din/m),

$c(t)$ – jedinična cena transporta rude (din/tm), u funkciji vremena,

λ – broj podetaža do kojih se samo pristupa iz određene prostorije otvaranja, broj podetaža koje će koristiti određenu prostoriju samo za transport rude ili broj podetaža za koje se prostorija koristi u obe ove svrhe zajedno i za pristup i za transport ($\lambda=1,2,\dots,k$). Na primer, glavni niskop koji povezuje rudno telo sa površinom je osnova za pristupanje do svih k podetaža i trošak njegove izrade se mora ravnomerno raspodeliti na sve podetaže.

Prvi član u funkciji (54) možemo sagledati kao trošak izrade prostorije otvaranja, a drugi član $c(t) \cdot \tilde{Q} \cdot l$ kao trošak transporta rude duž nje.

Definišimo prvo troškovnu funkciju za okno. Troškovna funkcija okna je oblika:

$$\tilde{f}_s = \tilde{\delta}_s \cdot |z - z_0| \cdot \lambda^{-1} + [a_s(t)/n_s + b_s(t) \cdot |z - z_0|] \cdot \tilde{Q} \quad (55)$$

gde je:

z – koordinata ušća okna,

z_0 – koordinata baze okna,

$\tilde{\delta}_s$ – cena izrade okna (din/m),

a_s – troškovi izvoza rude kroz okno u funkciji vremena (din/t),

b_s – promenljivi troškovi izvoza u funkciji dubine izvoza i vremena (din/tm)

n_s – broj segmenata okna između utovarnog horizonta i površine terena

Funkcija troška horizontalne forme otvaranja, odnosno hodnika, je oblika:

$$\tilde{f}_H = (\tilde{\delta}_H \cdot \lambda^{-1} + c_H(t) \cdot \tilde{Q}) \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (56)$$

gde je:

x_0, y_0 – koordinate početka hodnika (m),

x, y – koordinate završetka hodnika (m),

$\tilde{\delta}_H$ – cena izrade hodnika (din/m),

c_H – cena transporta rude duž hodnika u funkciji vremena (din/tm)

Kada definišemo funkciju troška za kosu formu otvaranja, odnosno niskop, onda se mora uzeti u obzir fizičko ograničenje vezano za nagib transportne putanje. Ovo operativno ograničenje pokazuje da svaki niskop ne može imati veći nagib od maksimalno dozvoljenog nagiba r , pri čemu r zavisi od vrste transportnog sredstva koje se koristi, na primer trakasti transporter ili jamski kamion.

Neka redom x_0, y_0, z_0 označavaju koordinate tačke A, a x, y, z koordinate tačke B u trodimenzionalnom prostoru. Onda, pod nagibom linije, koja spaja ove dve tačke, podrazumevamo apsolutnu vrednost ugla pada iz tačke A u tačku B, koji se označava β . Njegova vrednost definisana je sledećim izrazom:

$$\beta(AB) = \frac{|z - z_0|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \quad (57)$$

Ako je apsolutni ugao pada β , između krajnjih tačaka niskopa, manji ili jednak r , onda duž AB tretiramo kao prav linijski segment, čija je dužina jednaka standardnom Euklidovom rastojanju između dve tačke, odnosno:

$$l = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (58)$$

Međutim, ako je $\beta > r$, onda duž AB mora da se tretira kao cikcak linija, koja spaja tačke A i B, pri čemu svaki deo linije ima jednak nagib r . Da bi izračunali dužinu cikcak linije, moramo izraz (57) zameniti sledećim izrazom:

$$l = |z - z_0| \cdot \sqrt{1 + r^{-2}} \quad (59)$$

U skladu sa gore izvedenom diskusijom, funkcija troška niskopa je oblika:

$$\tilde{f}_N(l) = \begin{cases} (\tilde{\delta}_N \cdot \lambda^{-1} + c_N(t) \cdot \tilde{Q}) \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} & \text{ako je } \beta \leq r \\ (\tilde{\delta}_N \cdot \lambda^{-1} + c_N(t) \cdot \tilde{Q}) \cdot |z-z_0| \cdot \sqrt{1+r^{-2}} & \text{ako je } \beta > r \end{cases} \quad (60)$$

gde je:

r – nagib niskopa N ($^{\circ}$),

$\tilde{\delta}_N$ – cena izrade niskopa (din/m),

c_N – cena transporta rude duž niskopa u funkciji vremena, pretpostavlja se da je ona linearna funkcija nagiba, (din/tm)

Troškovna funkcija za kosu prostoriju zvanu rudna sipka je nešto drugačija nego opšta troškovna funkcija iz razloga odsustva drugog člana funkcije, koji tretira troškove transporta duž prostorije. Drugi član u funkciji je izostavljen zato što se sila gravitacije koristi za transport rude kroz sipku. Ova funkcija je oblika:

$$\tilde{f}_R(l) = \begin{cases} (\tilde{\delta}_R \cdot \lambda^{-1} \cdot \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}) & \text{ako je } \alpha < 90^{\circ} \\ (\tilde{\delta}_R \cdot \lambda^{-1} \cdot |z-z_0|) & \text{ako je } \alpha = 90^{\circ} \end{cases} \quad (61)$$

gde je:

$\tilde{\delta}_R$ – cena izrade rudne sipke (din/m),

α – ugao pada sipke ($^{\circ}$)

Tokom analize funkcije troška, troškovi su dodeljivani samo ivicama, zato što trošak direktno zavisi od dužine ivice. Međutim, i pojedinim čvorovima se mogu dodeliti različite funkcije troška, ako one predstavljaju neke druge parametre koji su takođe važni. Na primer, pri dnu okna neophodno je napraviti i opremiti centralni bunker iz kojeg će se vršiti punjenje izvoznih posuda. Trošak čvora se može dodeliti proširivanjem koncepta troška ivice na sledeći način:

$$\tilde{f}_{ij} = \tilde{f}_i + \tilde{f}_{ij}(l) \quad (62)$$

gde je:

\tilde{f}_i – funkcija troška u čvoru (din),

$\tilde{f}_{ij}(l)$ – funkcija troška koja je pridružena ivici (i,j)

Funkcija troška \tilde{f}_i se pridodaje funkciji troška ivice koja izlazi iz dotičnog čvora a ne ivice koja u njega ulazi.

Sada je neophodno objasniti, opravdati, zbog čega se koriste trouglasti fuzzy brojevi kao mera neodređenosti ulaznih podataka. Kao primer opravdanja uzima se procenjena količina rude koju treba transportovati. Opis ležišta koji je dobijen na osnovu geoloških istraživanja omogućava menadžmentu rudarske kompanije da proceni rezerve mineralne sirovine koje joj stoje na raspolaganju. Rudna tela ili rudne rezerve koje su interesantne za eksploataciju predstavljaju one delove mineralnih resursa koji se ekonomski mogu vrednovati.

Količine rude koje se mogu otkopati i transportovati direktno zavise od primenjene metode otkopavanja. Efikasnost metode otkopavanja može se izraziti koeficijentom iskorišćenja \tilde{R} . Ovaj koeficijent predstavlja procentualni deo rude koji je otkopan iz primarnog rudnog tela.

Koeficijent iskorišćenja zavisi od mnogih parametara, kao što su:

- veličina i oblik rudnog tela,
- ugao pada,
- moćnost rudnog tela,
- raspodela sadržaja korisne komponente,
- fizičko-mehanička karakteristike rude i okolnih stena,
- vrsta kontakta između rude i okolnih stena itd.

Postoji veći broj različitih metoda otkopavanja, koje se koriste u skladu sa pomenutim parametrima ali nijedna od njih ne može otkopati celokupne rezerve iz primarnog rudnog tela. Sve informacije o karakteristikama ležišta zasnovane su na podacima koji su dobijeni istražnim bušenjem sa površine terena i veoma je teško na osnovu njih definisati parametre u smislu vrednosti sa visokim stepenom određenosti. Ovo je razlog zbog čega se koriste lingvističke promenljive da bi se opisao koeficijent iskorišćenja.

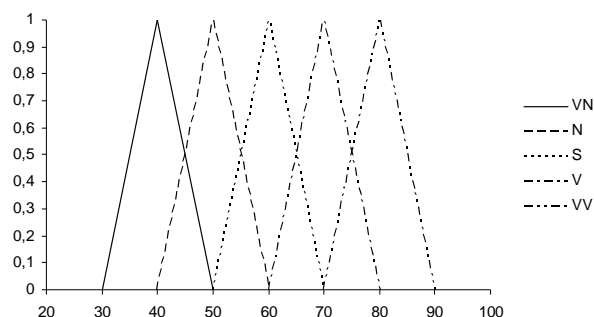
Fuzzy lingvističke promenljive koje se koriste za opisivanje koeficijenta iskorišćenja rudnih rezervi su sledeće:

- veoma nizak (VN),
- nizak (N),
- srednji (S),
- visok (V),
- veoma visok (VV)

Sledeći korak transformiše fuzzy lingvističke promenljive u trouglaste fuzzy brojeve. Jedan od načina transformacije prikazan je u tabeli br. 1 a odgovarajuće fuzzy funkcije pripadnosti na slici br. 30.

Tabela br. 1 Transformacija lingvističkih promenljivih

Opis fuzzy lingvističke promenljive	Fuzzy broj \tilde{R} (%)
veoma nizak (VN)	(30,40,50) ili (0.3,0.4,0.5)
nizak (N)	(40,50,60) ili (0.4,0.5,0.6)
srednji (S)	(50,60,70) ili (0.5,0.6,0.7)
visok (V)	(60,70,80) ili (0.6,0.7,0.8)
veoma visok (VV)	(70,80,90) ili (0.7,0.8,0.9)



Slika br. 30 Fuzzy funkcije pripadnosti za koeficijent iskorišćenja

Da bi se procenila adekvatna vrednost koeficijenta iskorišćenja, neophodno je dobiti mišljenja eksperata koji se bave podzemnim metodama otkopavanja. Pretpostavimo da postoji p eksperata i da je svaki od njih dao svoje mišljenje. Konačna vrednost se izražava objedinjenim fuzzy brojem koji je dobijen na osnovu srednje

vrednosti fuzzy mišljenja datih od strane eksperata. Tabela br. 2 prikazuje postupak procene eksperata.

Tabela br. 2 Ekspertska procena koeficijenta iskorišćenja

Ekspert				Objedinjena vrednost
E_1	E_2	...	E_p	
\tilde{R}_1	\tilde{R}_2	...	\tilde{R}_p	$\tilde{R} = 1/p \otimes (\tilde{R}_1 \oplus \tilde{R}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{R}_p)$

Koncept trouglastih fuzzy brojeva je takođe primenjen pri proceni jediničnih troškova izrade odgovarajućeg tipa prostorije otvaranja. Jedinicni trošak izrade prostorija otvaranja direktno zavisi od fizičko-mehaničkih osobina stenskog masiva u kojem se ona izrađuje. Veoma je teško predvideti kako će se radna sredina ponašati u toku izrade prostorija otvaranja, na primer obrušavanje krova prostorije, neočekivani priliv vode, itd. Sve ovo utiče na nemogućnost jednoznačnog definisanja vrednosti jediničnih troškova izrade prostorija otvaranja. U skladu sa tim koristimo trouglasti fuzzy broj za definisanje oih troškova, $\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Pošto je rudno telo definisano, potrebne su godine intenzivnog napora pre nego što se podzemni rudnik izgradi a proizvodnja rude dovede u stanje kontinuiranog procesa. Vreme potrebno da se ležište otvori i pripremi za proizvodnju može značajno da varira i direktno zavisi od načina otvaranja. Ako uzmemo u obzir da operativni troškovi vezani za transport rude zavise od mnogih parametara (radna snaga, energija, itd.) i da se ovi parametri menjaju tokom vremena, onda može biti od velike koristi sposobnost da se predvide (procene) buduće vrednosti ovih troškova.

Da bi se procenile buduće vrednosti jediničnih troškova transporta koristi se Monte Carlo simulacija geometrijskog Brown-ovog kretanja. Slučajno geometrijsko Brown-ovo kretanje je oblika:

$$\frac{\delta c}{c} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\delta t} \quad (63)$$

gde je:

c – prethodna vrednost jediničnih troškova transporta,

δc – promena vrednosti jediničnih troškova transporta,

- μ – trend kretanja jediničnih troškova transporta na nivou godine (%),
- σ – devijacija jediničnih troškova transporta na nivou godine (%),
- $\varepsilon\sqrt{\delta t}$ – Wiener-ov proces, ε je standardna Normalna raspodela $N(0,1)$

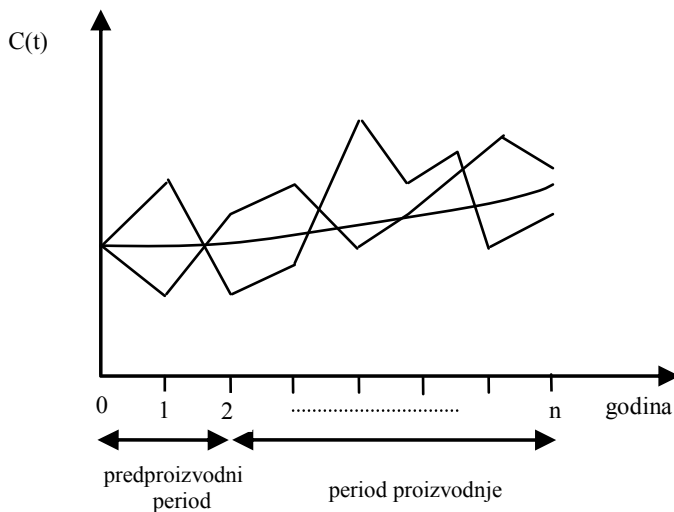
Rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (63) je sledećeg oblika:

$$c(t) = c_{t-1} e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma N(0,1) \sqrt{dt}} \quad (64)$$

Rešenje (64) predstavlja model geometrijskog Brown-ovog kretanja budućih vrednosti. On se može primeniti za bilo koji vremenski period t . U ovom slučaju, buduća vrednost jediničnog troška transporta c_t može se izvesti iz početne vrednosti c_0 primenjujući jednačinu (64) za period vremena t kada je $dt=t$.

$$c(t) = c_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma N(0,1) \sqrt{t}} \quad (65)$$

Primenjujući jednačinu (65) izračunavamo jednu moguću vremensku seriju budućih vrednosti jediničnih troškova transporta ($c_0, c_1, c_2, \dots, c_T$). Ovaj proračun se ponavlja stotinama puta i na taj način dobijamo kvalitetan uzorak koji je spreman za statističku obradu. To znači da se trošak procenjuje pomoću godišnje vrednosti koja predstavlja očekivanu vrednost jediničnih troškova transporta za svaku godinu posebno. Slika br. 31 prikazuje jedan primer predložene metode simulacije.



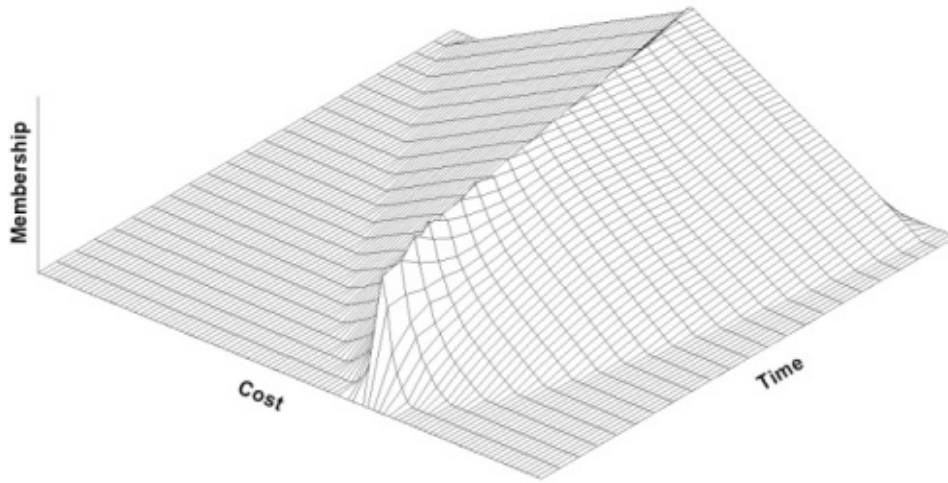
Slika br. 31 Prikaz dve simulirane serije troškova na godišnjem nivou

Da bi odredili parametre Brownovog kretanja (μ, σ) koristimo regresionu analizu oblika:

$$dx_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 x_t + \alpha \quad (66)$$

Glavni cilj u primeni simulacija prilikom izbora optimalnog sistema otvaranja jeste određivanje raspodele jediničnih troškova transporta za svaku godinu eksploatacije. Na ovaj način dobijamo seriju funkcija gustine verovatnoće jediničnih troškova transporta, $c_i \sim (fgv_i, \mu_i, \sigma_i)$, $i=1, 2, \dots, T$, gde je T ukupno vreme eksploatacije ležišta. Seriju dobijenih fgv_i jediničnih troškova transporta možemo transformisati u seriju trouglastih fuzzy brojeva koji karakterišu jedinične troškove transporta, $c_i \sim (fgv_i, \mu_i, \sigma_i) \rightarrow TFN_i$, $i=1, 2, \dots, T$, tj. $c_1 \sim (fgv_1, \mu_1, \sigma_1) \rightarrow TFN_1$; $c_2 \sim (fgv_2, \mu_2, \sigma_2) \rightarrow TFN_2$; \dots , $c_i \sim (fgv_i, \mu_i, \sigma_i) \rightarrow TFN_i$.

Slika br. 32 predstavlja transformaciju niza fgv_i u niz trouglastih fuzzy brojeva jediničnih troškova transporta



Slika br. 32 Transformacija niza verovatnoće jediničnih troškova transporta u niz trouglastih fuzzy brojeva

Plan proizvodnje se može okvirno definisati na sledeći način:

$$\tilde{t}_\varphi \in [\tilde{t}_{\varphi-1}, \tilde{t}_{\varphi-1} + \tilde{t}_s] \quad \varphi = 1, 2, \dots, k \quad (67)$$

gde je:

$$\tilde{t}_{\varphi-1} = \tilde{t}_c + \frac{\sum_{\varphi=1}^k Q_{\varphi-1}}{Y_p} \quad (68)$$

$$\tilde{t}_s = \frac{\tilde{Q}_\varphi}{Y_p} \quad (69)$$

$\tilde{t}_{\varphi-1}$ – trenutak kada je prethodna podetaža otkopana, a φ -ta podetaža počinje da se otkopava (godina),

$\tilde{t}_{\varphi-1} + \tilde{t}_s$ – trenutak kada je φ -ta podetaža otkopana, a podetaža $\varphi+1$ počinje da se otkopava (godina),

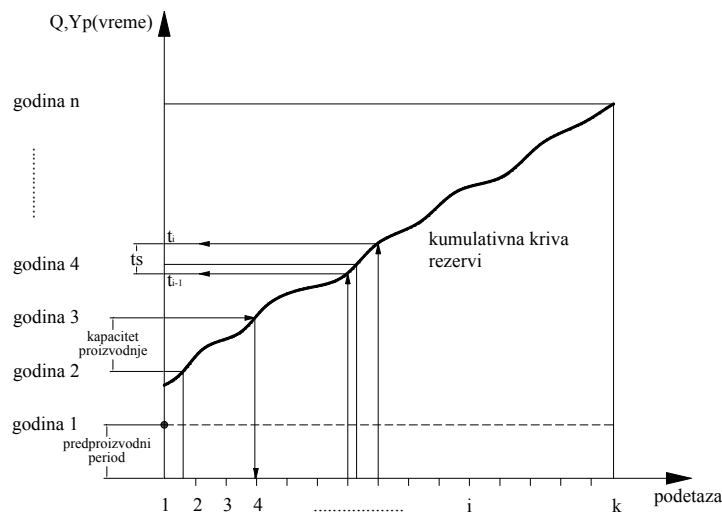
\tilde{t}_c – predproizvodni period, period otvaranja ležita (konstrukcije rudnika) kada nema proizvodnje (godina),

Y_p – projektovani godišnji kapacitet proizvodnje (t/god),

\tilde{t}_s – vreme otkopavanja φ -te podetaže,

k – ukupan broj podetaža

Slika br. 33 prikazuje plan proizvodnje za jednoznačne vrednosti rezervi rude.



Slika br. 33 Dijagram plana proizvodnje

U skladu sa definisanim planom proizvodnje, jedinični troškovi transporta za vreme otkopavanja φ -te podetaže izražavaju se na sledeći način:

$$\tilde{c}_i = f(E(\tilde{t}_\varphi)) \quad (70)$$

gde je:

$E(\tilde{t}_\varphi)$ – defazifikovana vrednost trouglastog fuzzy broja

Na ovaj način, vreme otkopavanja podetaže se transformiše u interval oblika:

$$t_\varphi \in [E(\tilde{t}_{\varphi-1}), E(\tilde{t}_{\varphi-1} + \tilde{t}_s)], \varphi = 1, 2, \dots, k \quad (71)$$

Jedinični troškovi transporta tokom perioda otkopavanja φ -te podetaže izračunavaju se kao:

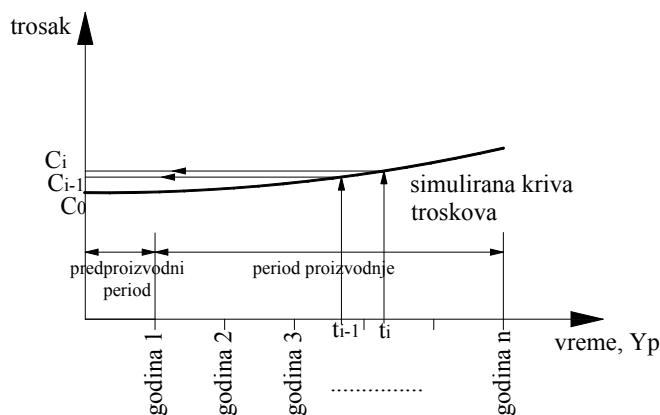
$$\tilde{c}_\varphi(t) = \frac{f(E(\tilde{t}_{\varphi-1})) + f(E(\tilde{t}_{\varphi-1} + \tilde{t}_s))}{2} = \frac{\tilde{c}[E(\tilde{t}_{\varphi-1})] + \tilde{c}[E(\tilde{t}_{\varphi-1} + \tilde{t}_s)]}{2}, \varphi = 1, 2, \dots, k \quad (72)$$

gde je:

$\tilde{c}[E(\tilde{t}_{\varphi-1})]$ – jedinični troškovi transporta u godini kada započinje otkopavanje φ -te etaže,

$\tilde{c}[E(\tilde{t}_{\varphi-1} + \tilde{t}_s)]$ – jedinični troškovi transporta u godini kada se završava otkopavanje φ -te etaže,

Slika br. 34 prikazuje dijagram jediničnih troškova transporta rude.



Slika br. 34 Simulirana kriva troškova transporta rude

4.1.5 Algoritam izbora sistema otvaranja

Izbor sistema otvaranja u fuzzy okruženju svodi se na zadatak pronalaženja fuzzy najkraćeg puta u fuzzy težinskoj mreži. Algoritam izbora sistema otvaranja u

ovakvom okruženju zasnovan je na Indeksu konveksnosti. U skladu sa prethodnim razmatranjima, problem izbora sistema otvaranja može se postaviti na sledeći način:

Ulaz: za svaku pristupnu tačku (podetažu) projektant formira orjentisanu transportnu mrežu od n čvorova i m ivica kojima su pridružene fuzzy troškovne funkcije;

Izlaz: minimalna fuzzy troškovna funkcija i njoj odgovarajući najjeftiniji način otvaranja-transporta.

Algoritam za pronalaženje optimalnog sistema otvaranja podzemnog rudnika sastoji se od sledećih koraka:

Korak 1: za svaku godinu eksploatacije simulirati jedinične troškove transporta $c_i(t)$, $i=1,2,\dots,T$, u skladu sa prostorijom otvaranja (okno, niskop, hodnik), primenjujući jednačinu (65).

Korak 2: transformisati $c_i \sim (fgv_i, \mu_i, \sigma_i)$, $i=1,2,\dots,T$, u odgovarajući trouglasti fuzzy broj $c_i \sim \text{TFN}_i$.

Korak 3: konstruisati orjentisanu transportnu mrežu od prve podetaže pa do površine terena.

Korak 4: formirati moguće puteve transporta $P=\{p_1, p_2, \dots, p_y\}$ iz početnog čvora (pristupne tačke) do krajnjeg čvora (ulaza u rudnik) i izračunati odgovarajuće fuzzy troškovne funkcije $\tilde{F}_i(p_i, t) = (a_i(t), b_i(t), c_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, y$.

Korak 5: izračunati interval γ -preseka za trouglaste fuzzy brojeve svih troškovnih funkcija $\tilde{F}_i(p_i, t) = (a_i(t), b_i(t), c_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, y$ primenjujući izraz (51).

Staviti $F_{i(\gamma)} = [F_{i(\gamma)}^L, F_{i(\gamma)}^U]$, $i = 1, 2, \dots, y$.

Korak 6: izračunati Indeks konveksnosti $IK(F_i) = \lambda(F_{i(\gamma)}^L) + (1 - \lambda)(F_{i(\gamma)}^U)$ za sve troškovne funkcije $\tilde{F}_i(p_i, t) = (a_i(t), b_i(t), c_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, y$, primenjujući izraz (52).

Korak 7: odrediti najjeftiniji način otvaranja-transporta sa najmanjim indeksom konveksnosti i dodeliti mu rang $r=1$.

Korak 8: formirati poredak rangova za sve preostale puteve u skladu sa rastućim nizom Indeksa konveksnosti, a zatim svakom putu dodeliti odgovarajući rang $(2, 3, \dots, y)$.

Korak 9: kako rudno telo zaleže u dubinu, ponoviti korake 3,4,5,6,7 i 8 za sve preostale definisane pristupne tačke, odnosno za sve preostale podetaže ($k-1$).

Korak 10: kreirati (PE,IK) dijagram, gde se na x osi nanosi redni broj podetaže (PE), odnosno pristupne tačke, a na y osi se nanose vrednosti Indeksa konveksnosti (IK).

Korak 11: u skladu sa korakom 10, kreirati dijagram (PE,r) , gde se na x osi nanosi redni broj podetaže (PE), odnosno pristupne tačke, a na y osi se nanose vrednosti pridruženih rangova (r).

Korak 12: formirati skup procene alternativa, matricu $R=[r_{yk}]$, u skladu sa izrazom (47).

Korak 13: za svaki red matrice $R=[r_{yk}]$ izračunati zbir svih članova u redu. Alternativa kojoj odgovara red sa minimalnim zbirom članova predstavlja optimalni sistem otvaranja za dato ležište (videti jednačinu 48).

5. TESTIRANJE MODELA (NUMERIČKI PRIMER)

5.1 Definisane ulaznih podataka

Kako bi ilustrovali predloženi pristup, testirali smo razvijeni model na problemu izbora optimalnog sistema otvaranja za eksploataciju ležišta boksita. Pošto se koeficijent otkrivke približava svojoj planiranoj maksimalnoj vrednosti, uprava rudnika se suočava sa porastom troškova eksploatacije aktivnog površinskog kopa.

Uprava donosi odluku da se preostali deo rezervi boksita otkopa podzemnim načinom eksploatacije. U tom kontekstu potrebno je uraditi projekat podzemne eksploatacije, što podrazumeva izbor optimalnog sistema otvaranja.

Deo ležišta koji je potrebno otkopati podzemnim načinom eksploatacije nalazi se između kote +710 m i kote +494 m. Ležište zaleže pod uglom od 50° - 70° . Projektovani kapacitet proizvodnje je 200 000 t/god.

U skladu sa geološkim i rudarskim uslovima eksploatacije izabrana je Metoda podetažnog otkopavanja (slike br. 35 i 36), sa visinom podetaže od 8 m. Dva eksperta iz geologije i dva iz rudarstva ($E_p=4$) konsultovana su za procenu koeficijenta iskorišćenja usvojene metode otkopavanja i to za svaku podetažu ponaosob.

Relevantni ulazni podaci koji se odnose na rezerve boksita prikazani su u tabeli br. 3, a podaci vezani za troškove izrade prostorija otvaranja i troškove transporta dati su u tabeli br. 4.

Tabela br. 3 Ulazni podaci–rezerve boksita po etažama

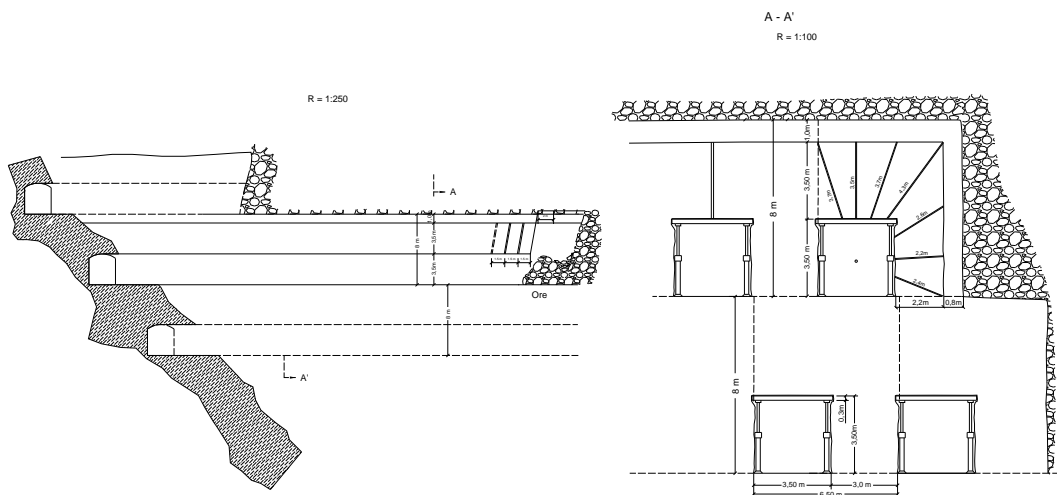
Podetaža	Procenjene rezerve (t)			Koeficijent iskorišćenja (%)			Eksploatacione rezerve (t)		
	ai	bi	ci	ai	bi	ci	ai	bi	ci
710	127468	149962	164958	42.5	52.5	62.5	54174	78730	103099
702	110195	129642	142606	47.5	57.5	67.5	52343	74544	96259
694	78193	91992	101191	52.5	62.5	72.5	41051	57495	73364
686	96139	113105	124415	55	65	75	52876	73518	93311
678	135040	158870	174757	52.5	62.5	72.5	70896	99294	126699
670	168451	198178	217995	52.5	62.5	72.5	88437	123861	158047
662	194469	228787	251666	52.5	62.5	72.5	102096	142992	182458
654	174308	205069	225576	52.5	62.5	72.5	91512	128168	163542
646	141920	166965	183661	52.5	62.5	72.5	74508	104353	133154
638	92192	108461	119307	52.5	62.5	72.5	48401	67788	86497
630	57223	67322	74054	47.5	57.5	67.5	27181	38710	49986
622	39805	46829	51512	55	65	75	21893	30439	38634
614	38064	44782	49260	55	65	75	20935	29108	36945
606	49038	57692	63462	55	65	75	26971	37500	47596
598	68442	80520	88572	47.5	57.5	67.5	32510	46299	59786
590	72348	85115	93626	47.5	57.5	67.5	34365	48941	63198
582	70380	82800	91080	47.5	57.5	67.5	33431	47610	61479
574	47757	56184	61803	60	70	80	28654	39329	49442
566	60328	70974	78072	60	70	80	36197	49682	62457
558	116622	137203	150923	60	70	80	69973	96042	120739
550	197744	232640	255904	52.5	62.5	72.5	103816	145400	185530
542	264897	311643	342808	52.5	62.5	72.5	139071	194777	248535
534	273736	322043	354247	60	70	80	164242	225430	283398
526	380014	447075	491782	47.5	57.5	67.5	180506	257068	331953
518	499461	587602	646362	47.5	57.5	67.5	237244	337871	436294
510	638504	751181	826299	42.5	52.5	62.5	271364	394370	516437
502	582708	685539	754093	42.5	52.5	62.5	247651	359908	471308
494	395627	465444	511988	42.5	52.5	62.5	168142	244358	319993

Tabela br. 4 Ulazni podaci–troškovi

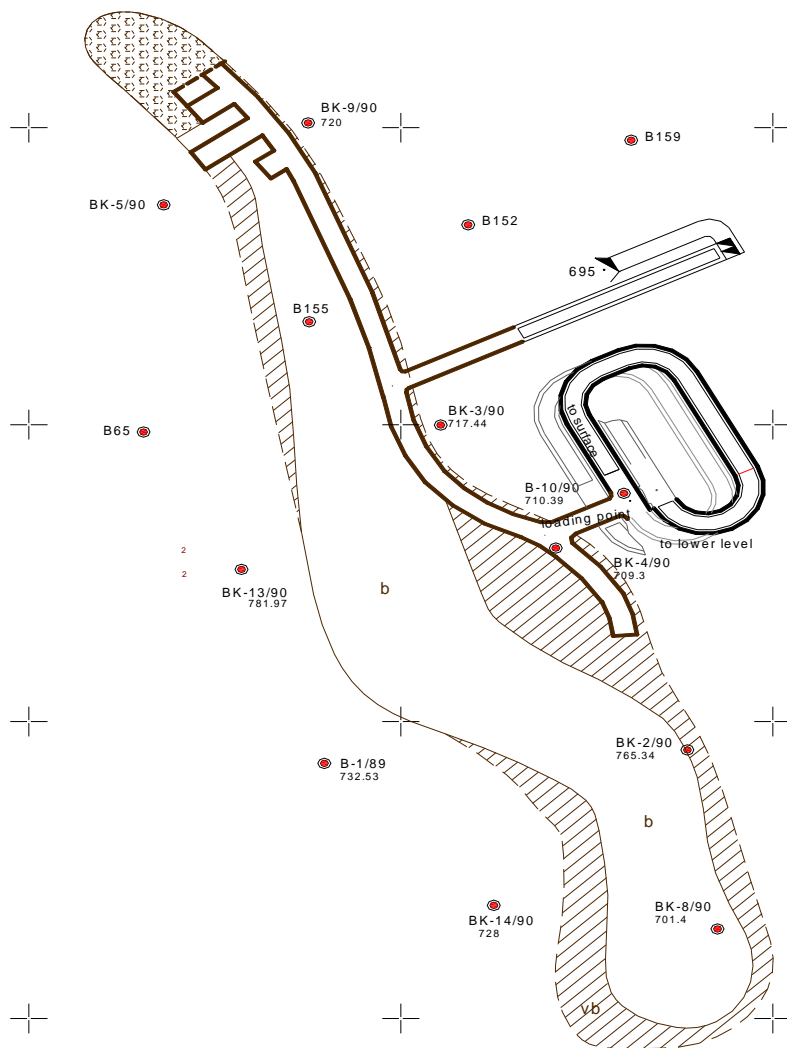
Trošak	
Transport & Izvoz	
Hodnik: transportno sredstvo je jamski kamion	Početna vrednost: 0.8 \$/tkm
Simulacija: Brown-ovo kretanje, vremenski interval jedna godina, $\Delta t=1$.	Trend: 0.02
Izraz: simulira se prema jednačini br. (65)	Devijacija: 0.04
Niskop: transportno sredstvo je jamski kamion	Početna vrednost: 1.2 \$/tkm
Simulacija: Brown-ovo kretanje, vremenski interval jedna godina, $\Delta t=1$.	Trend: 0.03
Izraz: simulira se prema jednačini br. (65)	Devijacija: 0.06
Okno: izvozno sredstvo je skip sistem	Parametar α_s
Simulacija: Brown-ovo kretanje, vremenski interval jedna godina, $\Delta t=1$.	Početna vrednost: 0.4 \$/t
	Trend: 0.006

Izraz: simulira se prema jednačini br. (65)	Devijacija: 0.014
	Parametar b_s Početna vrednost: 0.6 \$/tkm Trend: 0.0012 Devijacija: 0.024
Izrada	
Hodnik	(1400 1600 1900) \$/m
Niskop	(2000 2200 2400) \$/m
Okno	(20000 22000 24000) \$/m
Rudna sipka	(325 405 485) \$/m
Period simulacija	25 godina
Broj simulacija	500

Prikaz metode otkopavanja dat je na slikama br. 35 i 36.



Slika br. 35 Metoda podetažnog otkopavanja



Slika br. 36 Priprema podetaže

5.2 Rešenje numeričkog primera

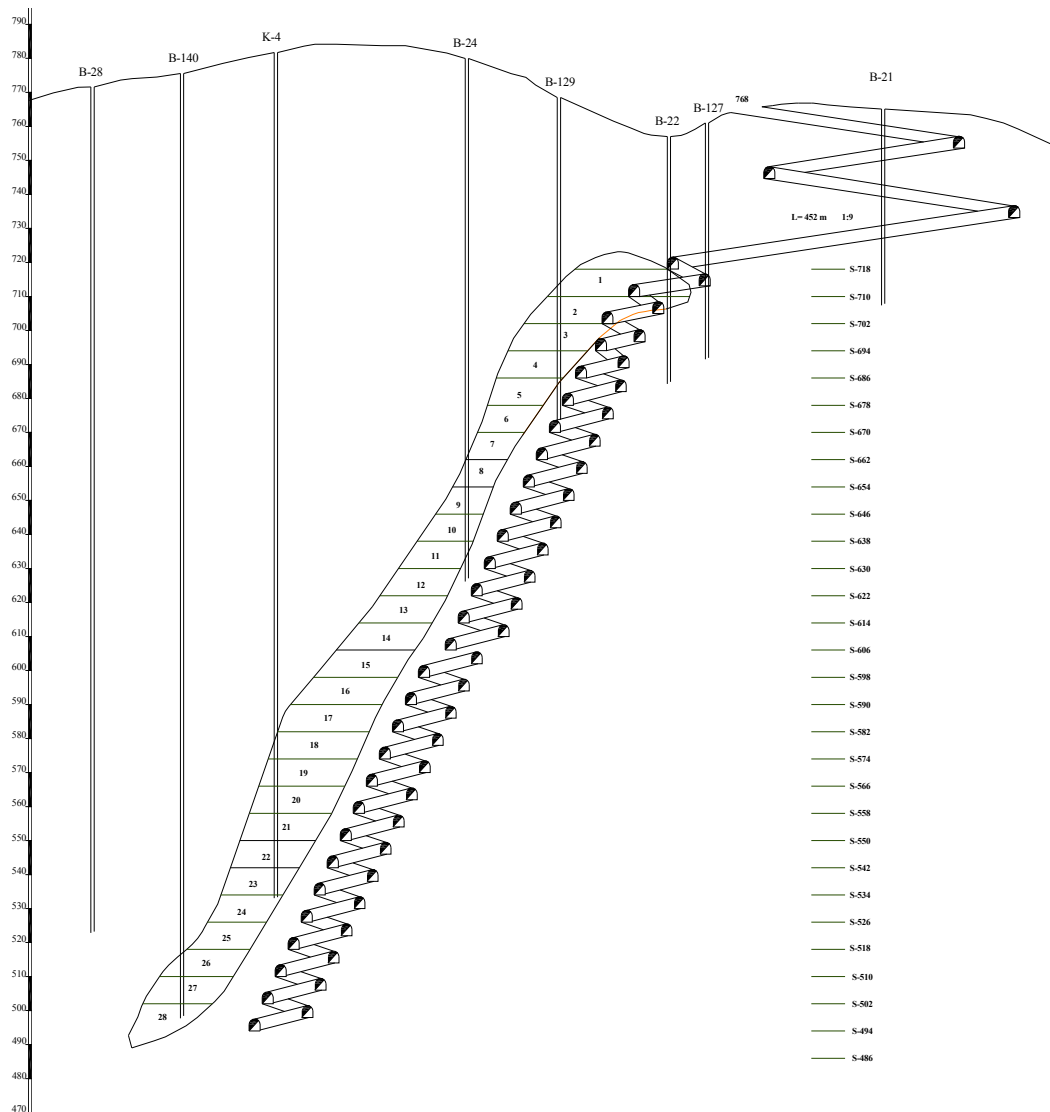
Sledeća tri sistema otvaranja su analizirana:

- otvaranje niskopom,
- otvaranje oknom i
- otvaranje kombinacijom okna i niskopa

Otvaranje niskopom: izrada glavnog izvoznog niskopa počinje sa kote +768 m, a završava se na koti +718 m. dužina niskopa je 452 m, a nagib trase je 1:9. Izrada

niskopa sa kojim se pristupa do prve podetaže polazi sa kote +718 m, a završava se na koti +710 m, nagib njegove trase je 1:9. Ruda se iz otkopa transportuje utovarno-transportnom opremom, a zatim se utovara u jamski kamion u tački pristupa podetaži. Utovarena ruda se jamskim kamionom kroz pristupni niskop, a zatim glavnim izvoznim niskopom transportuje do površine terena.

Vreme potrebno za izradu glavnog izvoznog niskopa, pristupnog niskopa i početka eksploatacije na podetaži +710 m je (1 1,2 1,5) godina. Za otvaranje nižih podetaža nije potrebno prekidati transport kroz glavni izvozni niskop. Shema predloženog sistema otvaranja prikazana je na slici br. 37.



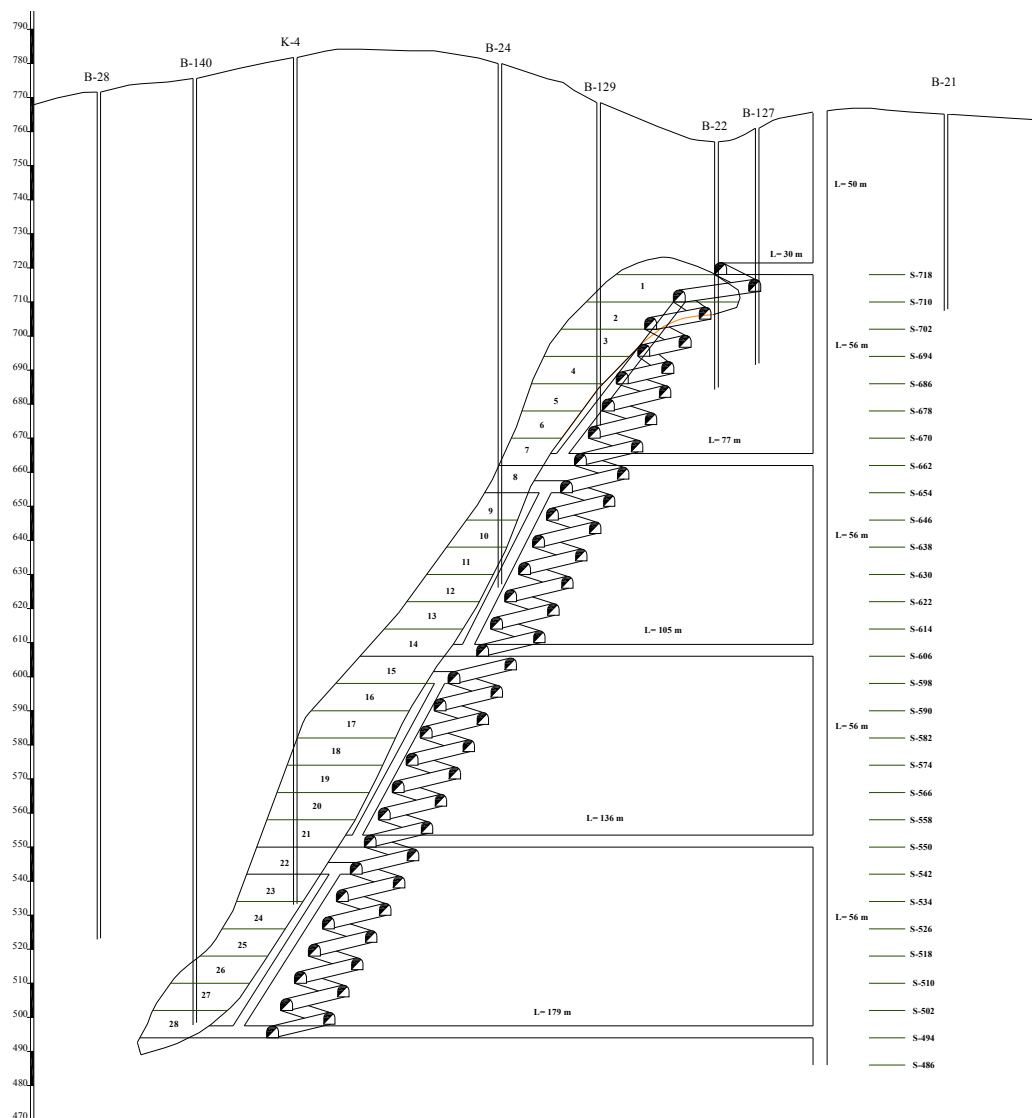
Slika br. 37 Otvaranje niskopom

Otvaranje oknom: izrada okna započinje sa kote +768 m i prva deonica okna završava se na koti +662 m. Na koti +718 m se od okna pristupa ležištu horizontalnom prostorijom (hodnikom). Pristupnim niskopom od kote +718 m do kote +662 m, redom se povezuju podetaže na kotama +710 m, +702 m, +694 m, +686 m, +678 m i +670 m sa prvim transportno-izvoznim horizontom na koti +662 m. Rudna sipka se izrađuje od kote +710 m do kote +662 m i služi za gravitaciono spuštanje rude sa podetaža od kote +710 m do kote +670 m na prvi transportno-izvozni horizont.

Hodnik na koti +662 m (transportno-izvozni horizont) povezuje rudnu sipku sa utovarnom tačkom u oknu. Otkopana ruda se utovarno-transportnom opremom iz otkopa doprema do rudne sipke, sipa u nju i gravitaciono se spušta na kotu +662 m (transportno-izvozni horizont).

Pri dnu rudne sipke se nalazi oprema neophodna za utovar rude u jamski kamion. Utovarena ruda se jamskim kamionom transportuje duž hodnika na koti +662 m do utovarnog mesta u oknu. Utovarno mesto u oknu opremljeno je uređajima za punjenje skipova rudom. Utovarena rude se skipovima dalje izvozi oknom do površine terena. Skipovi se na površini terena prazne u odgovarajuće bunkere. Vreme potrebno za izradu ovog sistema otvaranja i započinjanje proizvodnje na podetaži na koti +710 m je (1,5 1,7 2) godina.

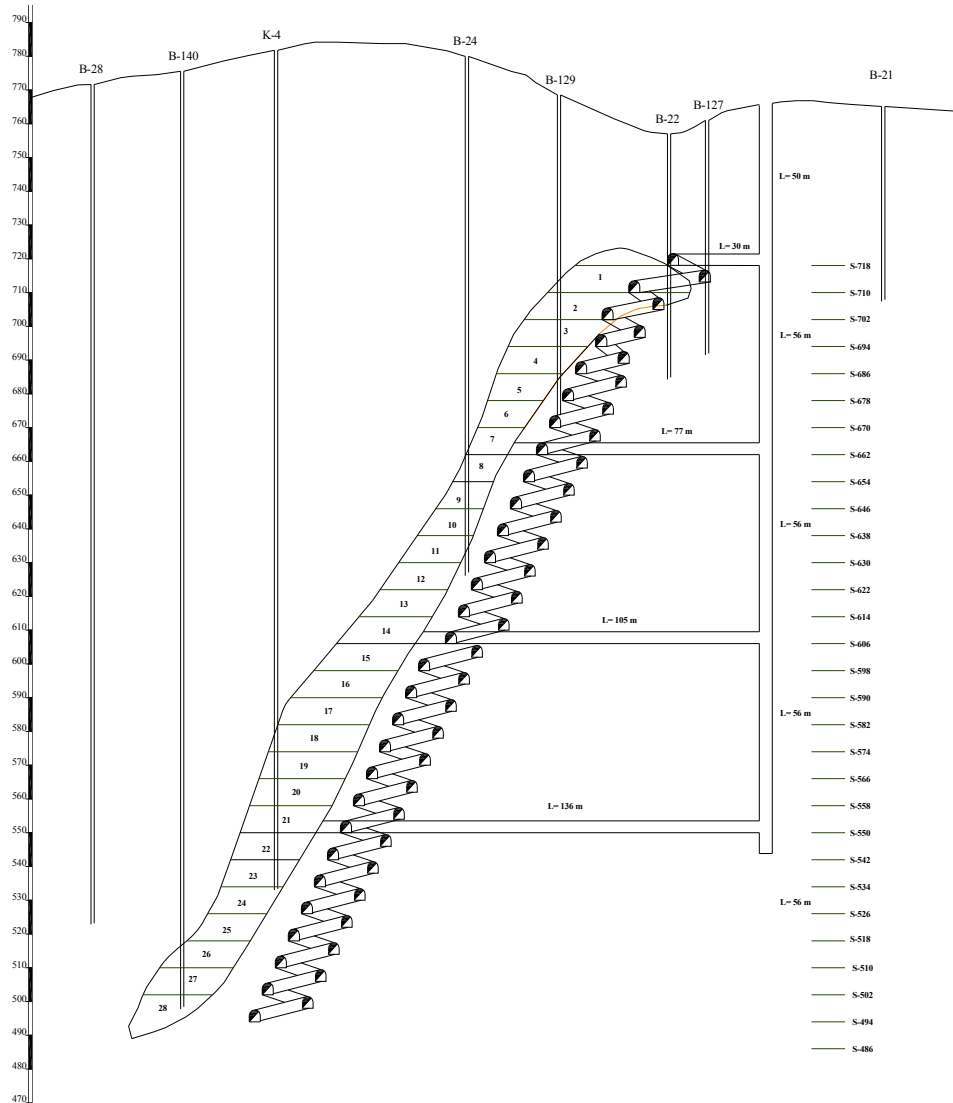
Prilikom pripremanja nižih podetaža, ispod kote +662 m, neophodno je prekinuti proizvodnju zbog dubljenja sledeće deonice okna i pripreme nižeg horizonta. Vreme prekida je (0,8 1 1,2) godina. Shema predloženog sistema otvaranja prikazana je na slici br. 38.



Slika br. 38 Otvaranje oknom

Otvaranje kombinacijom okna i niskopa: ovaj sistem otvaranja sastoji se od kombinacije prethodna dva sistema otvaranja. Prva faza eksploatacije podrazumeva izradu okna od kote +768 m do kote +718 m i pristupnog hodnika od okna do ležišta. Pristupni niskop se radi iz pristupnog hodnika na koti +718 m do podetaže na koti +662 m. Ovim niskopom se obezbeđuje pristup do svih podetaža od kote +718 m do kote +662 m. Ruda se iz otkopa transportuje utovarno-transportnom opremom, a zatim se utovara u jamski kamion u tački pristupa podetaži. Utovarena ruda se jamskim kamionom kroz pristupni niskop, a zatim pristupnim hodnikom transportuje do utovarne tačke u oknu. Utovarena ruda se skipovima dalje izvozi oknom do površine terena.

Skipovi se na površini terena prazne u odgovarajuće bunkere. Vreme potrebno za izradu ovog sistema otvaranja i započinjanje proizvodnje na podetaži na koti +710 m je (1,4 1,6 1,9) godina. Prilikom pripremanja nižih podetaža, ispod kote +662 m, neophodno je prekinuti proizvodnju zbog dubljenja sledeće deonice okna, izrade pristupnog hodnika i pristupnog niskopa. Vreme prekida je (0,6 0,8 1,1) godina. Shema predloženog sistema otvaranja prikazana je na slici br. 39.



Slika br. 39 Otvaranje kombinacijom okna i niskopa

Postupak pronalaženje optimalnog sistema otvaranja, za dato ležište, prikazan je sledećim koracima.

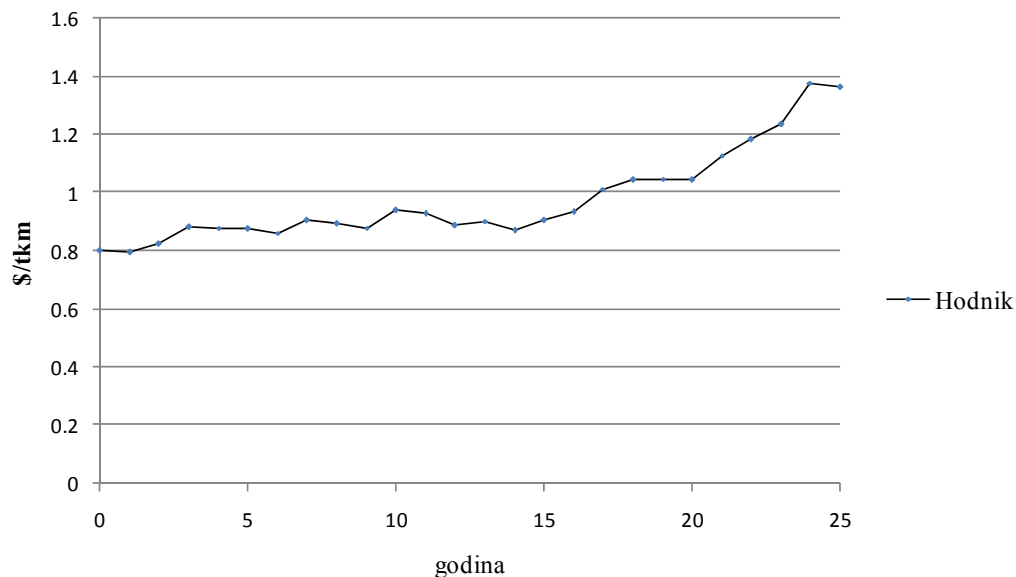
Korak 1: simulacija jediničnih troškova transporta $c_i(t)$, $i=1,2,\dots,T$, za svaku formu prostorije otvaranja na nivou godine.

A) Hodnik

Jedan od mogućih scenarija jediničnih troškova transporta kroz hodnik, na nivou godine, prikazan je u Tabeli br. 5 i slici br. 40.

Tabela br. 5 Proces simulacije jediničnih troškova transporta kroz hodnik

Godina	Proces simulacije	Vrednost	Godina	Proces simulacije	Vrednost
1	$c(1) = 0.8 \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.794	14	$c(14) = c(13) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.868
2	$c(2) = c(1) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.824	15	$c(15) = c(14) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.903
3	$c(3) = c(2) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.880	16	$c(16) = c(15) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.932
4	$c(4) = c(3) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.878	17	$c(17) = c(16) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.013
5	$c(5) = c(4) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.874	18	$c(18) = c(17) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.043
6	$c(6) = c(5) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.861	19	$c(19) = c(18) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.047
7	$c(7) = c(6) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.904	20	$c(20) = c(19) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.042
8	$c(8) = c(7) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.894	21	$c(21) = c(20) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.128
9	$c(9) = c(8) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.879	22	$c(22) = c(21) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.182
10	$c(10) = c(9) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.941	23	$c(23) = c(22) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.237
11	$c(11) = c(10) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.928	24	$c(24) = c(23) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.378
12	$c(12) = c(11) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.886	25	$c(25) = c(24) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	1.362
13	$c(13) = c(12) \cdot e^{\left(0.02 - \frac{0.04^2}{2}\right) + 0.04 \cdot N(0,1)}$	0.902			



Slika br. 40 Jedan od mogućih scenarija jediničnih troškova transporta kroz hodnik

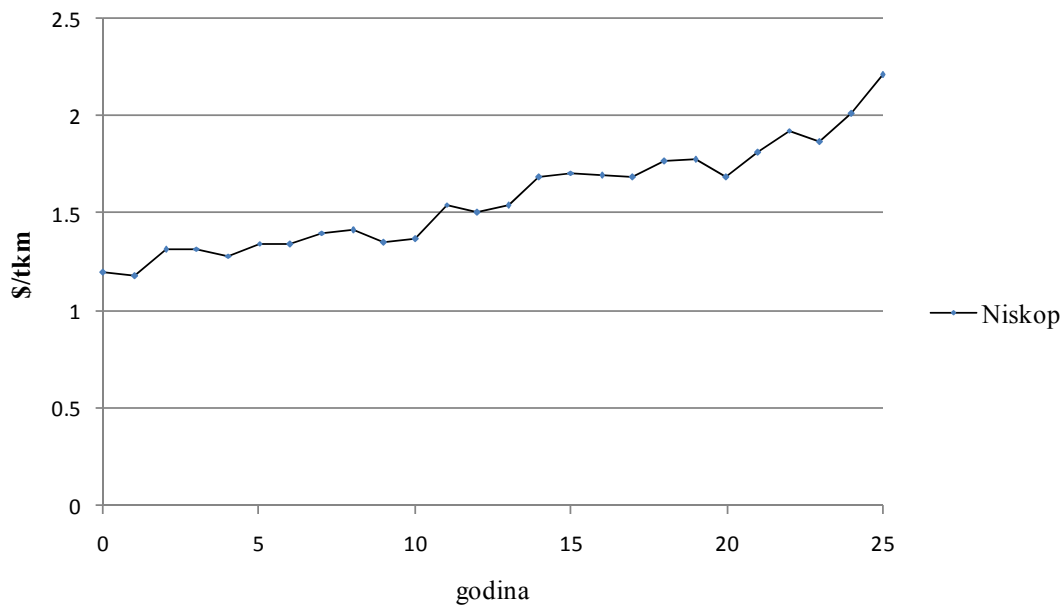
B) Niskop

Jedan od mogućih scenarija jediničnih troškova transporta kroz niskop, na nivou godine, prikazan je u Tabeli br. 6 i slici br. 41.

Tabela br. 6 Proces simulacije jediničnih troškova transporta kroz niskop

Godina	Proces simulacije	Vrednost	Godina	Proces simulacije	Vrednost
1	$c(1) = 1.2 \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.181	14	$c(14) = c(13) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.683
2	$c(2) = c(1) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.315	15	$c(15) = c(14) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.709
3	$c(3) = c(2) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.319	16	$c(16) = c(15) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.698
4	$c(4) = c(3) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.281	17	$c(17) = c(16) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.683
5	$c(5) = c(4) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.347	18	$c(18) = c(17) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.769
6	$c(6) = c(5) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.339	19	$c(19) = c(18) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.777

7	$c(7) = c(6) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.400	20	$c(20) = c(19) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.687
8	$c(8) = c(7) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.415	21	$c(21) = c(20) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.812
9	$c(9) = c(8) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.352	22	$c(22) = c(21) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.925
10	$c(10) = c(9) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.371	23	$c(23) = c(22) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.868
11	$c(11) = c(10) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.545	24	$c(24) = c(23) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	2.009
12	$c(12) = c(11) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.506	25	$c(25) = c(24) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	2.209
13	$c(13) = c(12) \cdot e^{\left(0.03 - \frac{0.06^2}{2}\right) + 0.06 \cdot N(0,1)}$	1.542			



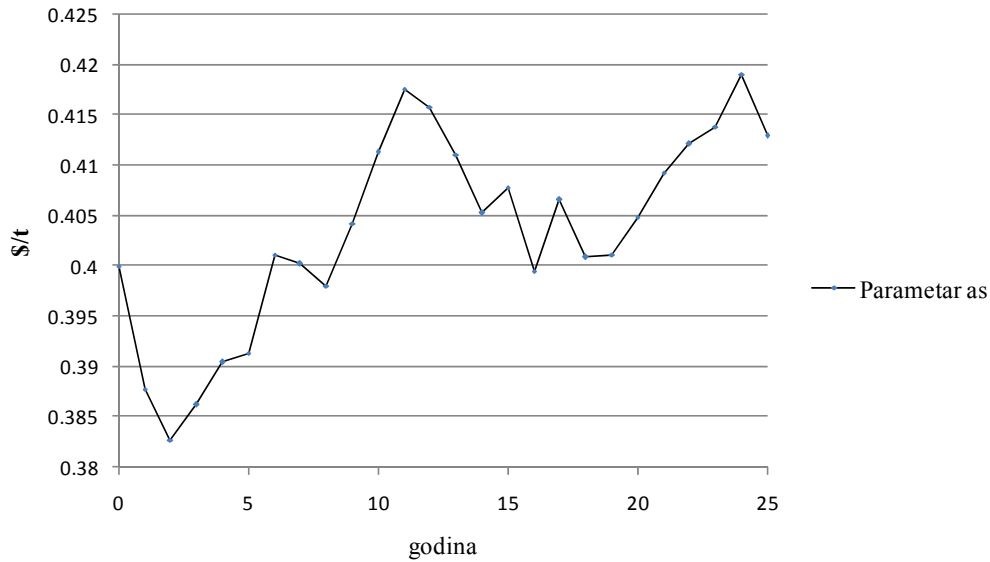
Slika br. 41 Jedan od mogućih scenarija jediničnih troškova transporta kroz niskop

C) Okno-parametar a_s

Jedan od mogućih scenarija jediničnih troškova izvoza kroz okno za parametar a_s , na nivou godine, prikazan je u Tabeli br. 7 i slici br. 42.

Tabela br. 7 Proces simulacije parametra a_s

God-ina	Proces simulacije	Vrednost	God-ina	Proces simulacije	Vrednost
1	$c(1) = 0.4 \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.387	14	$c(14) = c(13) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.405
2	$c(2) = c(1) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.382	15	$c(15) = c(14) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.407
3	$c(3) = c(2) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.386	16	$c(16) = c(15) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.399
4	$c(4) = c(3) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.390	17	$c(17) = c(16) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.406
5	$c(5) = c(4) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.391	18	$c(18) = c(17) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.400
6	$c(6) = c(5) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.401	19	$c(19) = c(18) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.401
7	$c(7) = c(6) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.400	20	$c(20) = c(19) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.404
8	$c(8) = c(7) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.398	21	$c(21) = c(20) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.409
9	$c(9) = c(8) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.404	22	$c(22) = c(21) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.412
10	$c(10) = c(9) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.411	23	$c(23) = c(22) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.413
11	$c(11) = c(10) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.417	24	$c(24) = c(23) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.419
12	$c(12) = c(11) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.415	25	$c(25) = c(24) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.412
13	$c(13) = c(12) \cdot e^{\left(0.006 - \frac{0.014^2}{2}\right) + 0.014 \cdot N(0,1)}$	0.411			



Slika br. 42 Jedan od mogućih scenarija za parametar a_s

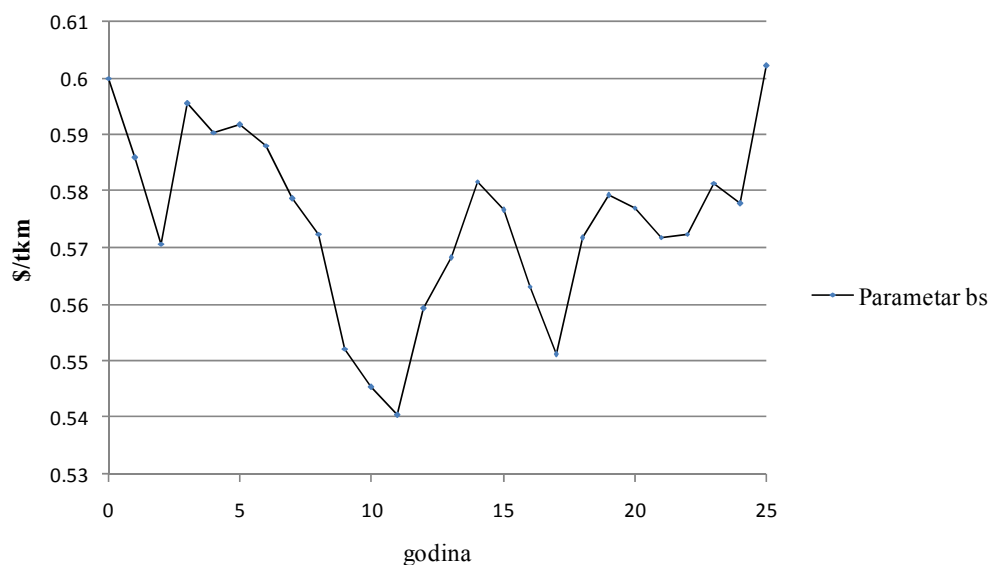
D) Okno-parametar b_s

Jedan od mogućih scenarija jediničnih troškova izvoza kroz okno za parametar b_s , na nivou godine, prikazan je u Tabeli br. 8 i slici br. 43.

Tabela br. 8 Proces simulacije parametra b_s

God-ina	Proces simulacije	Vrednost	God-ina	Proces simulacije	Vrednost
1	$c(1) = 0.6 \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.585	14	$c(14) = c(13) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.581
2	$c(2) = c(1) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.570	15	$c(15) = c(14) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.576
3	$c(3) = c(2) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.595	16	$c(16) = c(15) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.563
4	$c(4) = c(3) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.590	17	$c(17) = c(16) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.551
5	$c(5) = c(4) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.591	18	$c(18) = c(17) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.571
6	$c(6) = c(5) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.588	19	$c(19) = c(18) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.579
7	$c(7) = c(6) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.578	20	$c(20) = c(19) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.577

8	$c(8) = c(7) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.572	21	$c(21) = c(20) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.571
9	$c(9) = c(8) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.552	22	$c(22) = c(21) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.572
10	$c(10) = c(9) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.545	23	$c(23) = c(22) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.581
11	$c(11) = c(10) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.540	24	$c(24) = c(23) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.577
12	$c(12) = c(11) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.559	25	$c(25) = c(24) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.602
13	$c(13) = c(12) \cdot e^{\left(0.0012 - \frac{0.024^2}{2}\right) + 0.024 \cdot N(0,1)}$	0.568			



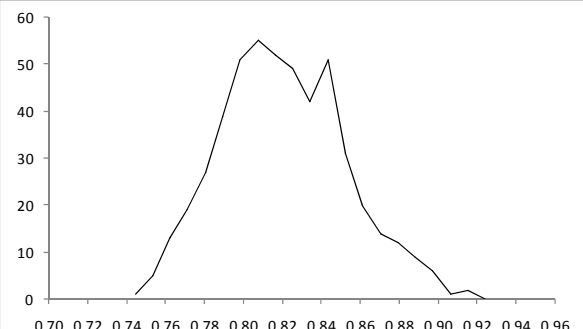
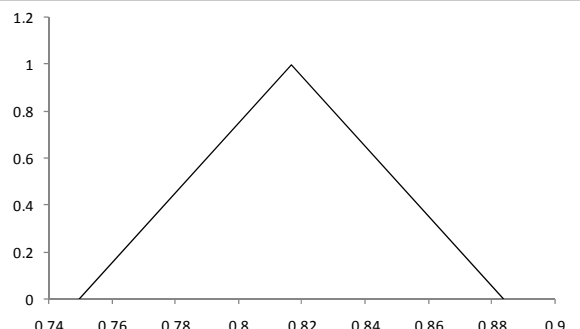
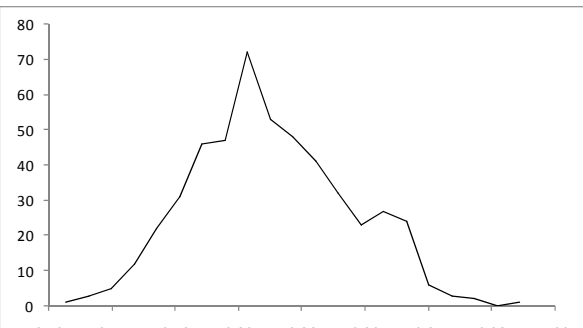
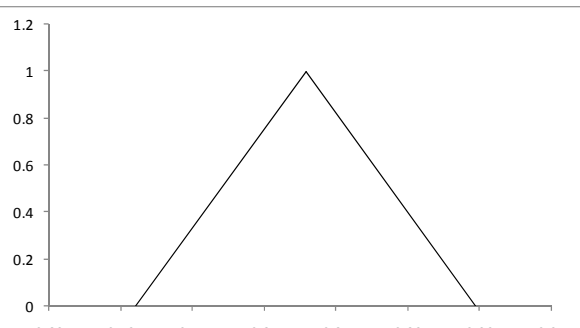
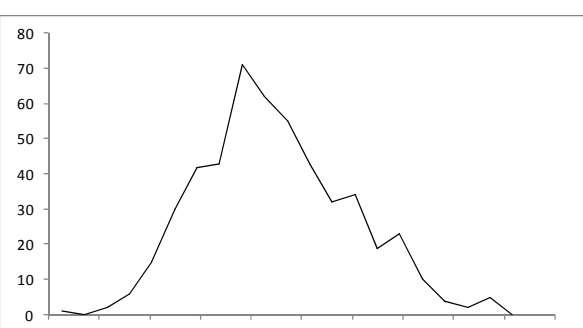
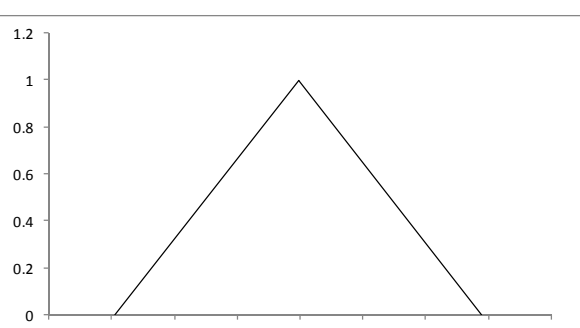
Slika br. 43 Jedan od mogućih scenarija za parametar b_s

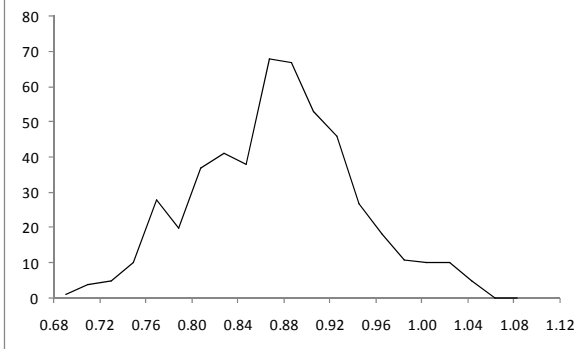
Korak 2: posle 500 izvršenih simulacija izvršena je transformacija dobijenih funkcija gustine verovatnoće $c_i \sim (fgv_i, \mu_i, \sigma_i)$, $i=1,2,\dots,T$, u odgovarajući trouglasti fuzzy broj $c_i \sim TFN_i$, za svaku formu prostorije otvaranja na nivou godine.

A) Hodnik

Transformacija dobijenih funkcija gustine verovatnoće jediničnih troškova izvoza kroz hodnik, na nivou godine, prikazana je u Tabeli br. 9, Tabeli br. 10 i na slici br. 44.

Tabela br. 9 Transformacija gustine verovatnoće jediničnih troškova izvoza kroz hodnik

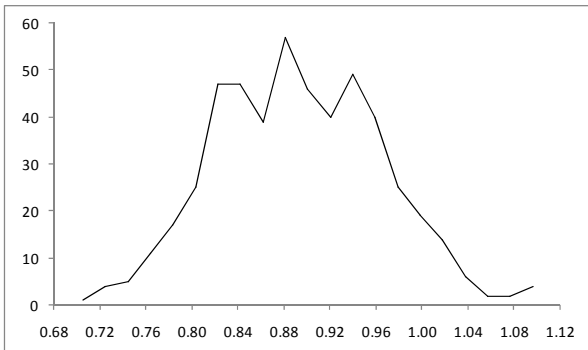
Funkcija gustine verovatnoće	Trouglasti fuzzy broj
	
Godina 1	Godina 1
	
Godina 2	Godina 2
	
Godina 3	Godina 3



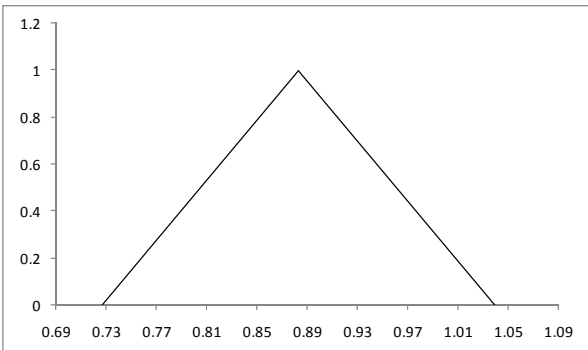
Godina 4



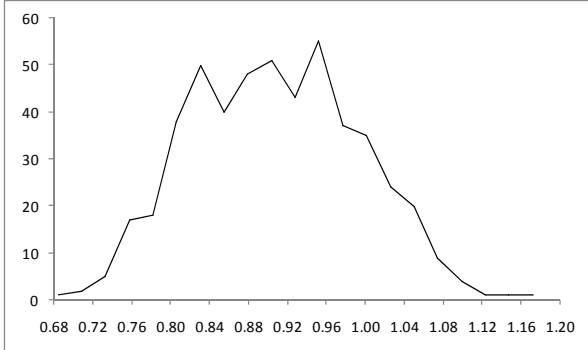
Godina 4



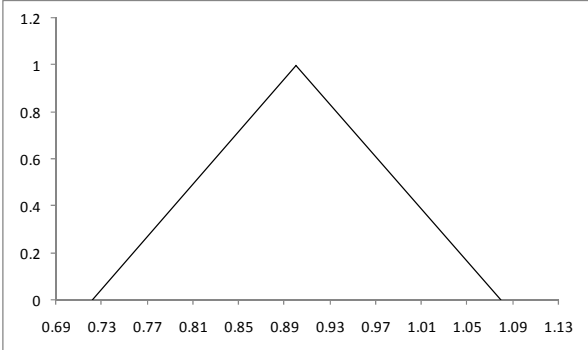
Godina 5



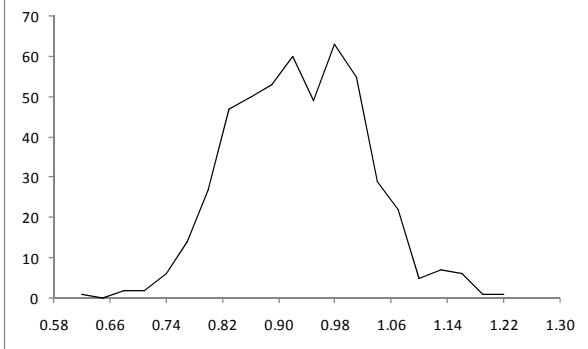
Godina 5



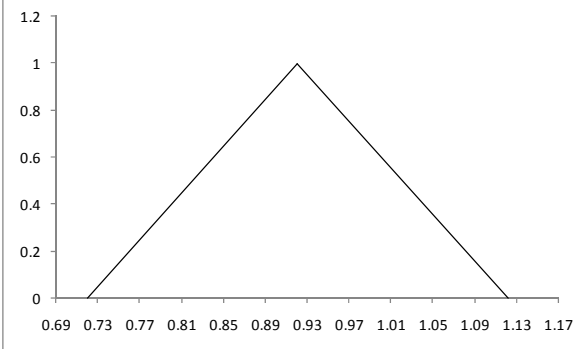
Godina 6



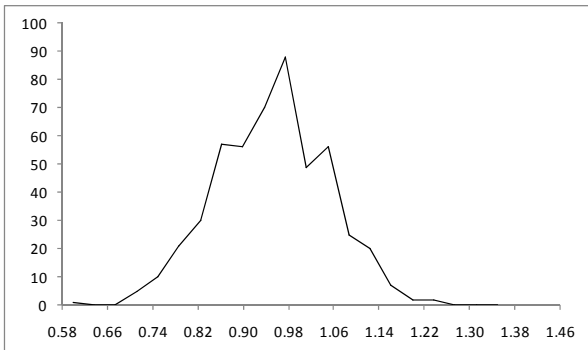
Godina 6



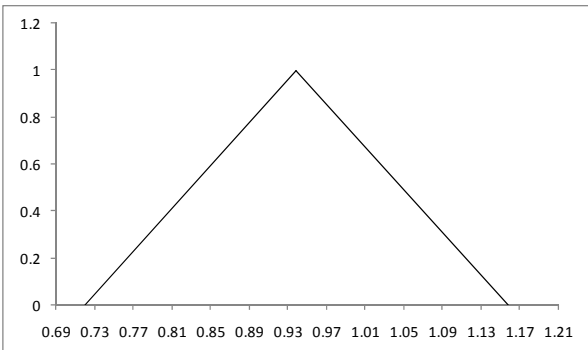
Godina 7



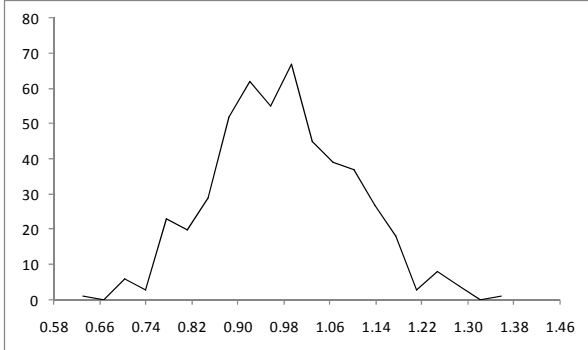
Godina 7



Godina 8



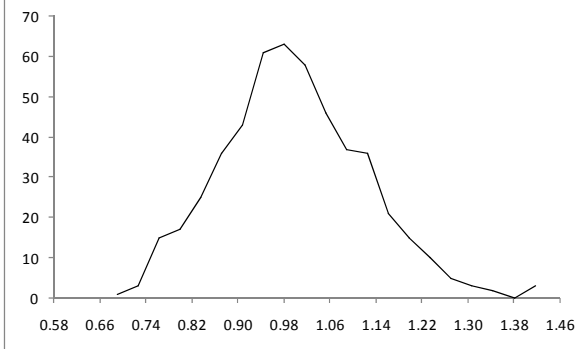
Godina 8



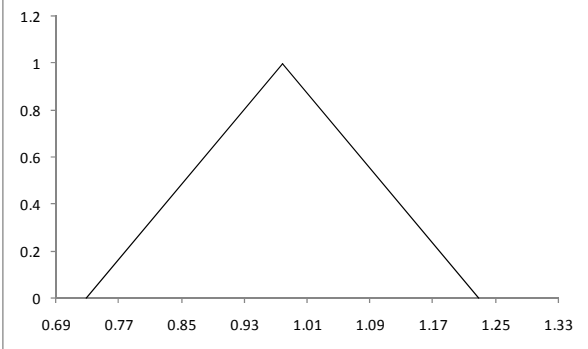
Godina 9



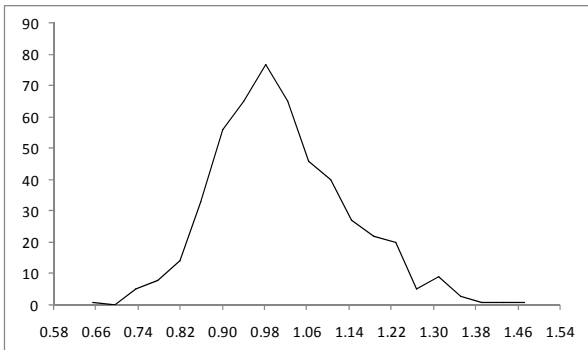
Godina 9



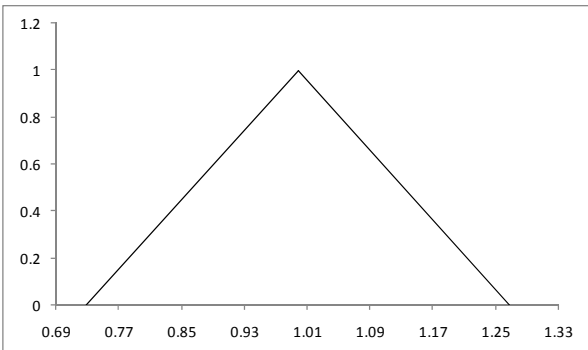
Godina 10



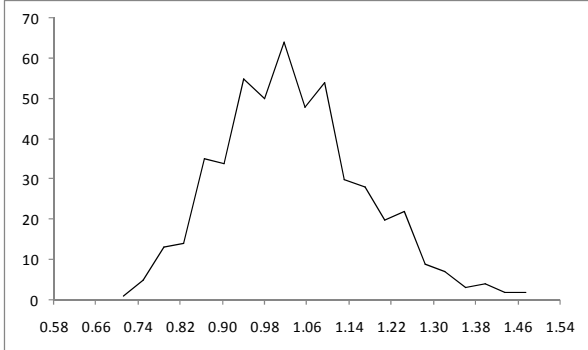
Godina 10



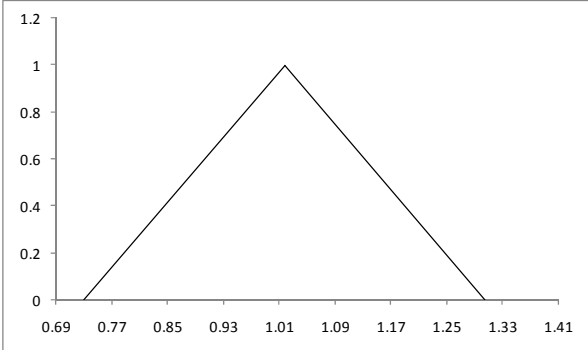
Godina 11



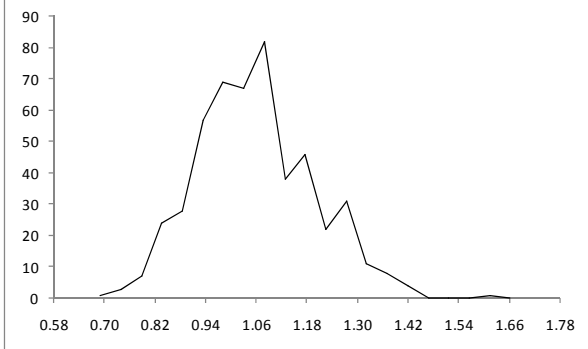
Godina 11



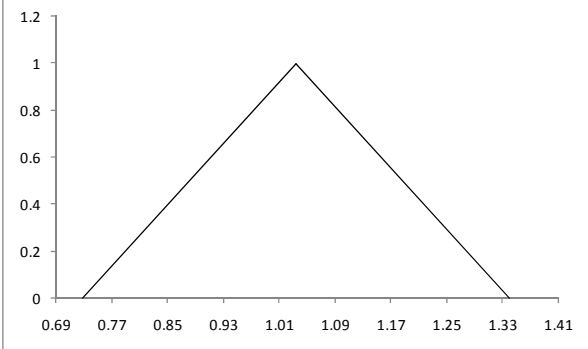
Godina 12



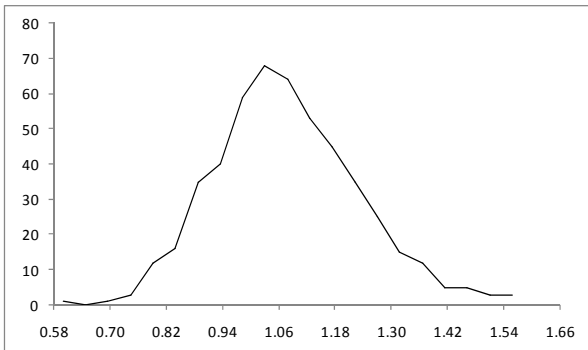
Godina 12



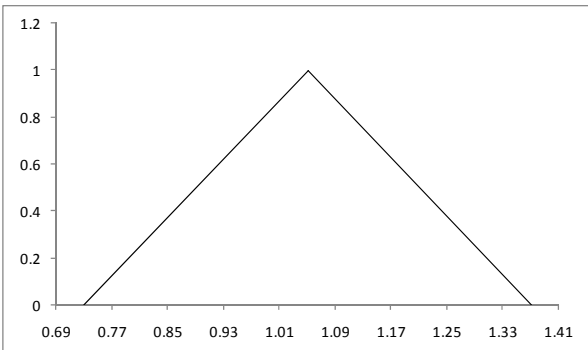
Godina 13



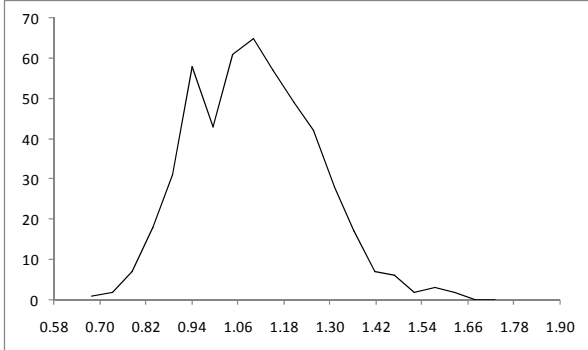
Godina 13



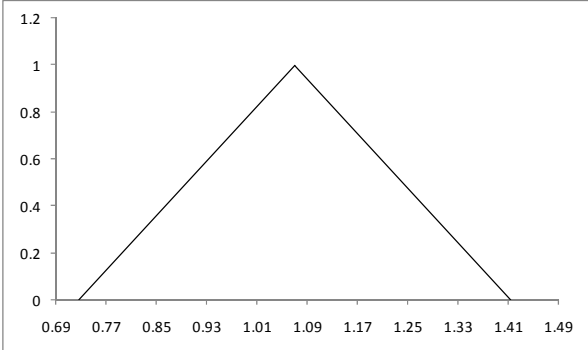
Godina 14



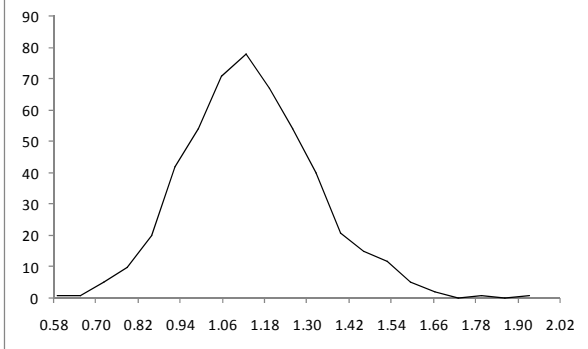
Godina 14



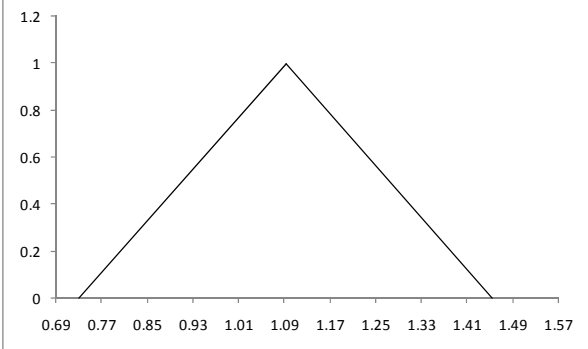
Godina 15



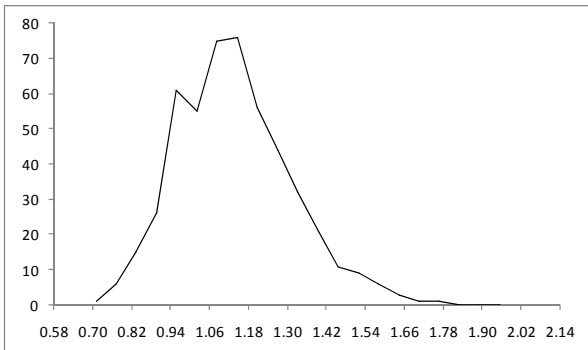
Godina 15



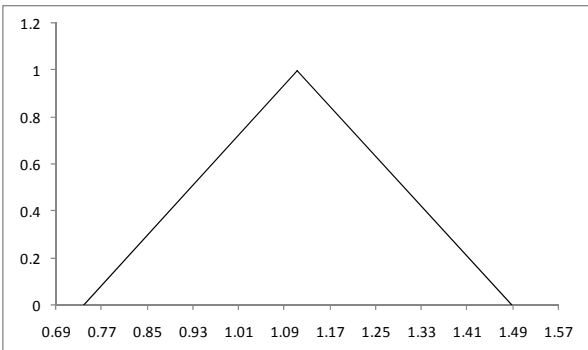
Godina 16



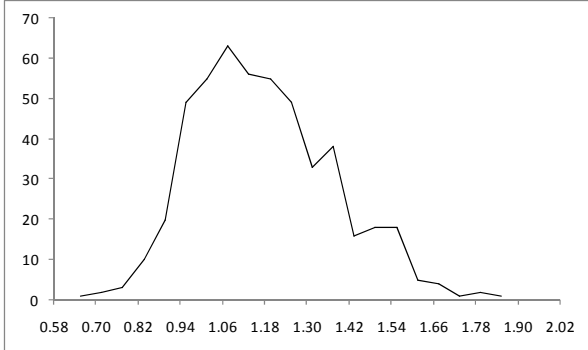
Godina 16



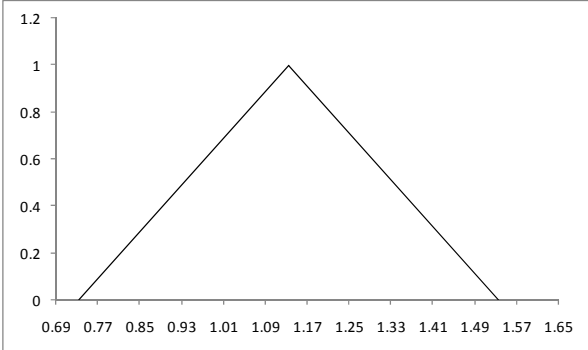
Godina 17



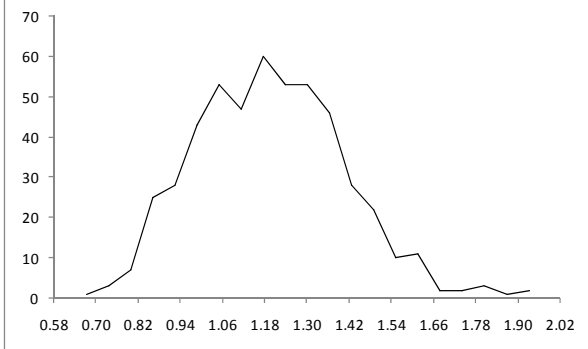
Godina 17



Godina 18



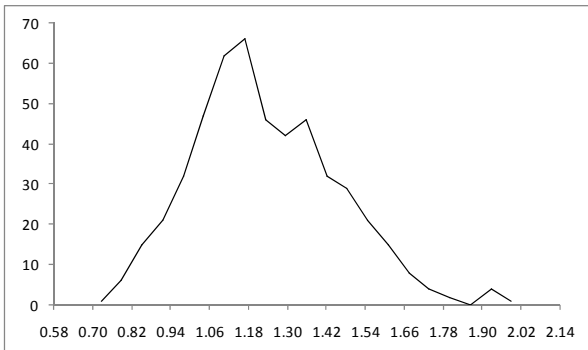
Godina 18



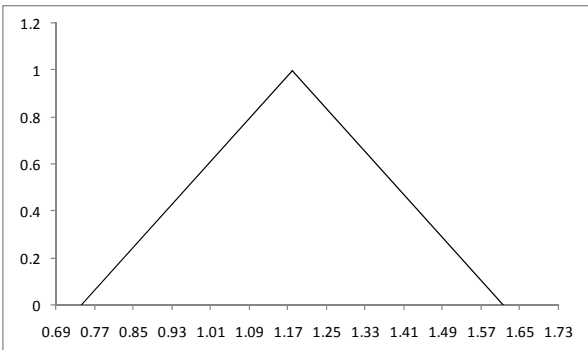
Godina 19



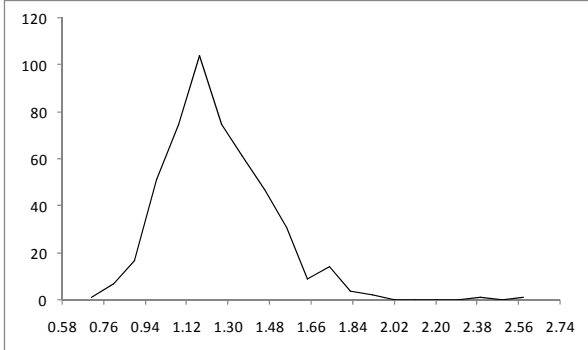
Godina 19



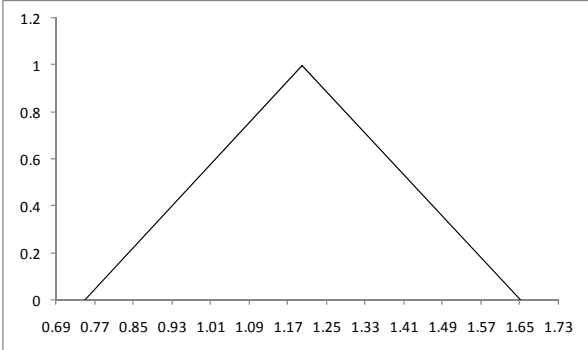
Godina 20



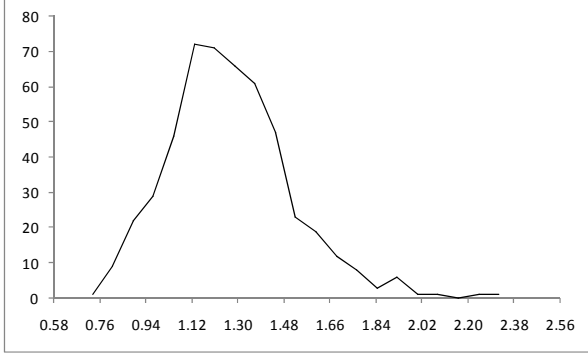
Godina 20



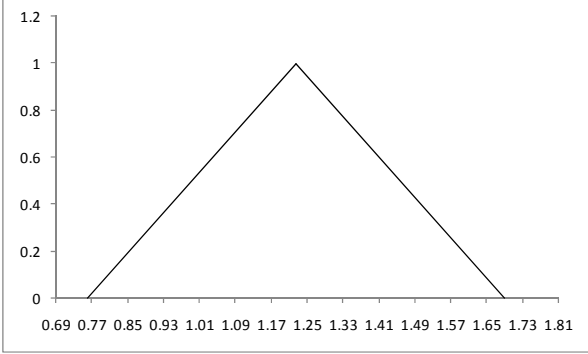
Godina 21



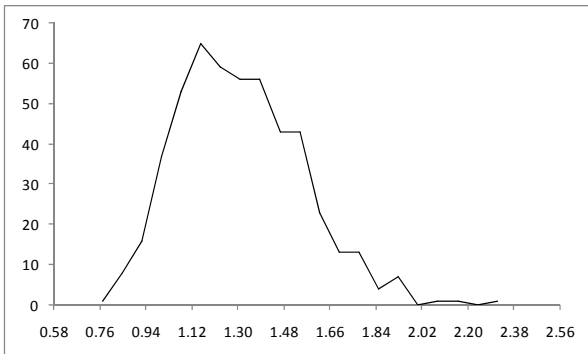
Godina 21



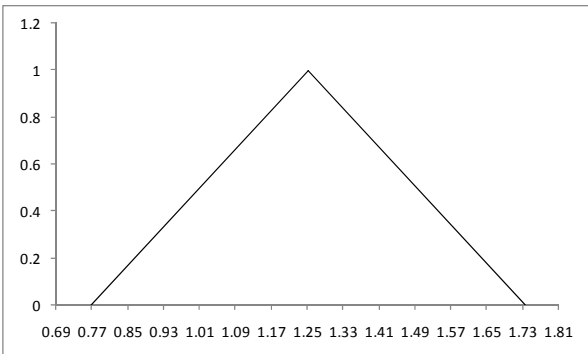
Godina 22



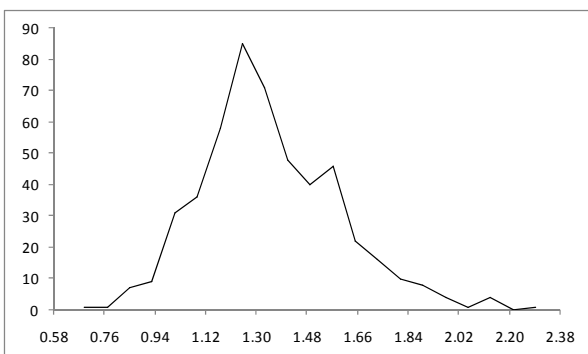
Godina 22



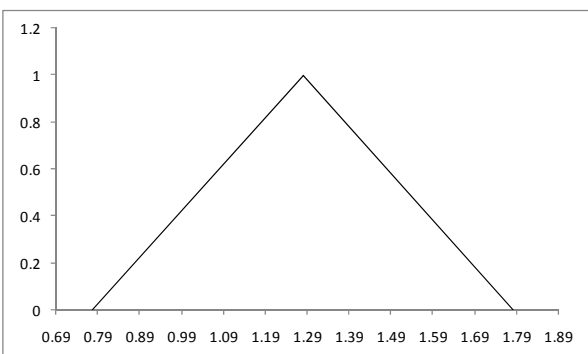
Godina 23



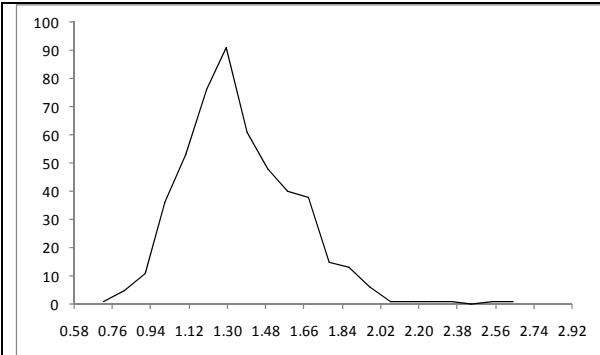
Godina 23



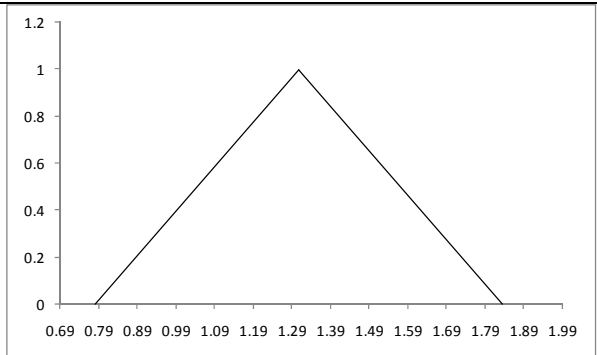
Godina 24



Godina 24



Godina 25

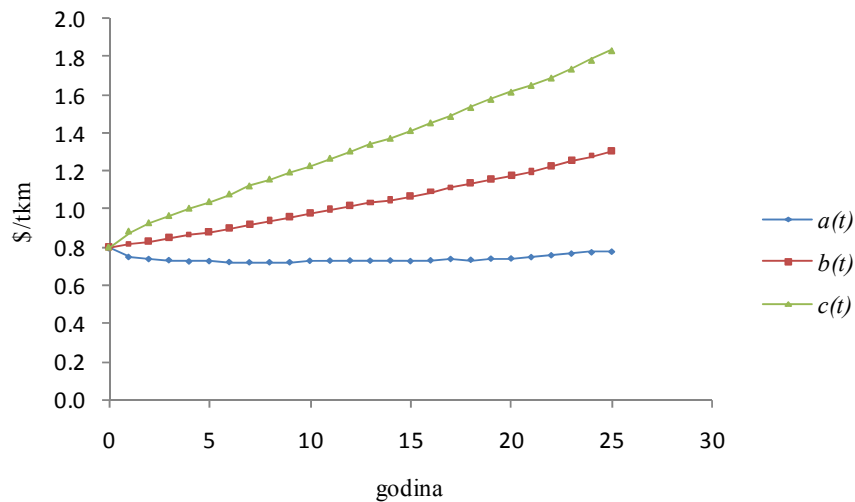


Godina 25

Tabela br. 10 Transformacija jediničnih troškova izvoza kroz hodnik

Godina	Očekivana vrednost	Standardna devijacija	Trouglasti fuzzy broj		
			$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$
	0.8000	0.0000	0.8000	0.8000	0.8000
1	0.8167	0.0335	0.7497	0.8167	0.8836
2	0.8330	0.0473	0.7384	0.8330	0.9276
3	0.8488	0.0584	0.7320	0.8488	0.9656
4	0.8646	0.0699	0.7248	0.8646	1.0043
5	0.8827	0.0780	0.7266	0.8827	1.0387
6	0.9002	0.0894	0.7213	0.9002	1.0790
7	0.9205	0.1004	0.7197	0.9205	1.1214
8	0.9387	0.1094	0.7200	0.9387	1.1575
9	0.9575	0.1186	0.7203	0.9575	1.1947
10	0.9782	0.1250	0.7283	0.9782	1.2281
11	0.9982	0.1346	0.7289	0.9982	1.2675
12	1.0174	0.1438	0.7298	1.0174	1.3050
13	1.0345	0.1529	0.7288	1.0345	1.3402
14	1.0510	0.1605	0.7299	1.0510	1.3721
15	1.0696	0.1716	0.7264	1.0696	1.4129

16	1.0921	0.1806	0.7309	1.0921	1.4532
17	1.1129	0.1872	0.7385	1.1129	1.4873
18	1.1341	0.2000	0.7340	1.1341	1.5341
19	1.1587	0.2092	0.7404	1.1587	1.5771
20	1.1782	0.2184	0.7414	1.1782	1.6150
21	1.1996	0.2253	0.7489	1.1996	1.6502
22	1.2245	0.2324	0.7596	1.2245	1.6893
23	1.2524	0.2418	0.7689	1.2524	1.7359
24	1.2794	0.2516	0.7762	1.2794	1.7825
25	1.3065	0.2634	0.7796	1.3065	1.8334

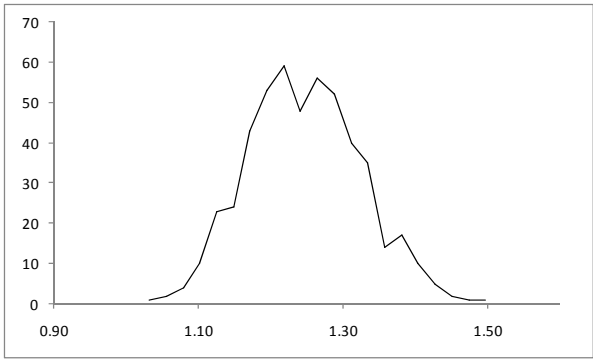
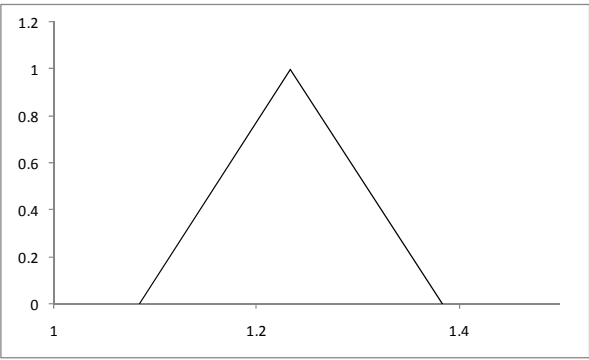
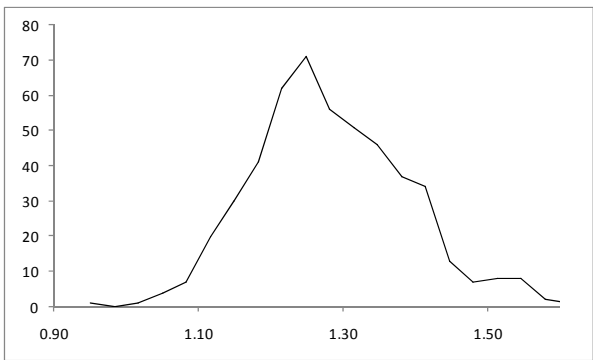
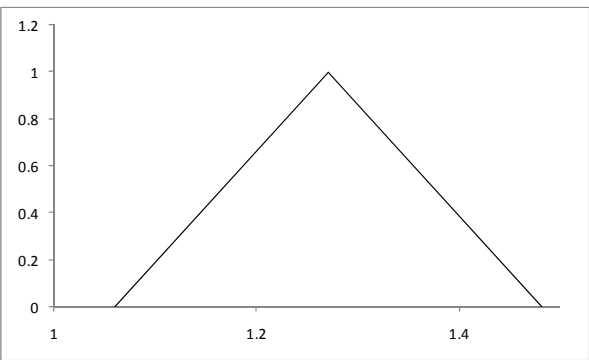
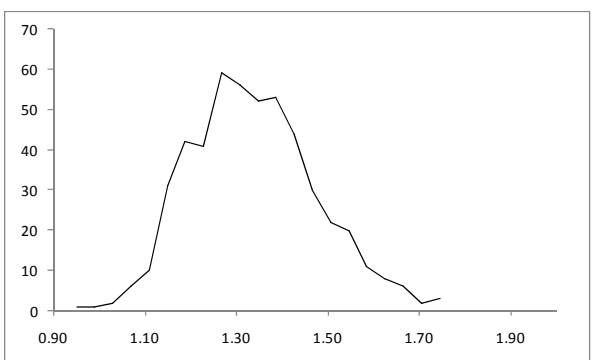
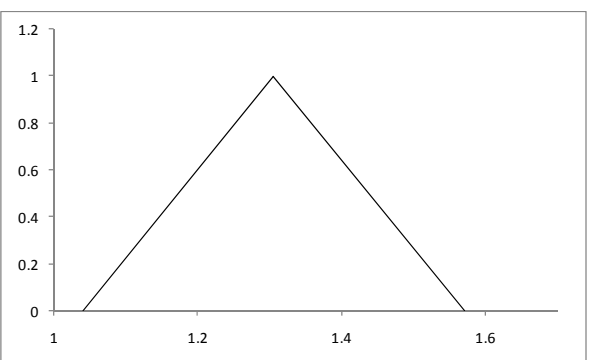


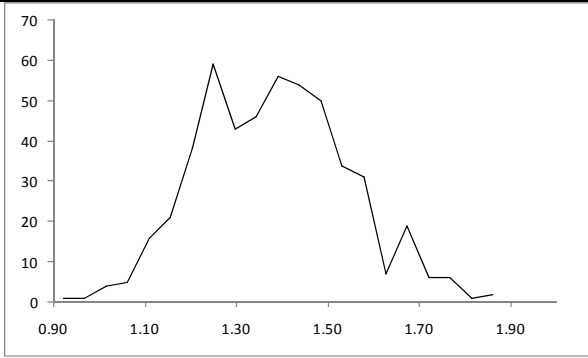
Slika br. 44 Dijagram transformacije jediničnih troškova transporta kroz hodnik

B) Niskop

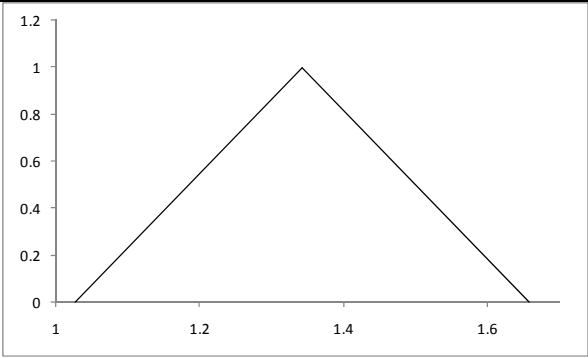
Transformacija dobijenih funkcija gustine verovatnoće jediničnih troškova izvoza kroz niskop, na nivou godine, prikazana je u Tabeli br. 11, Tabeli br. 12 i na slici br. 45.

Tabela br. 11 Transformacija gustine verovatnoće jediničnih troškova izvoza kroz niskop

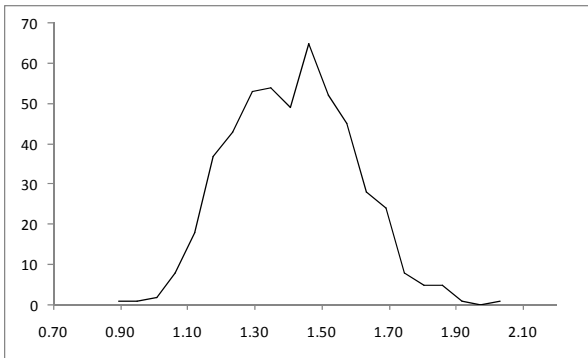
Funkcija gustine verovatnoće	Troughlasti fuzzy broj
 <p>Godina 1</p>	 <p>Godina 1</p>
 <p>Godina 2</p>	 <p>Godina 2</p>
 <p>Godina 3</p>	 <p>Godina 3</p>



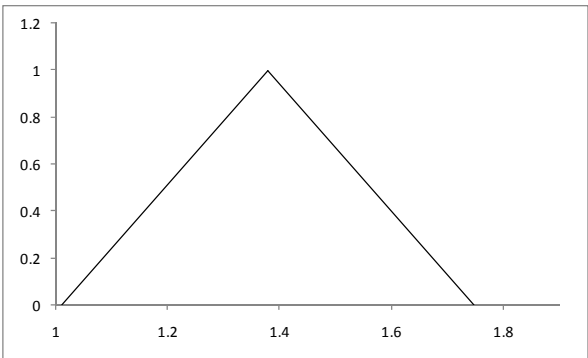
Godina 4



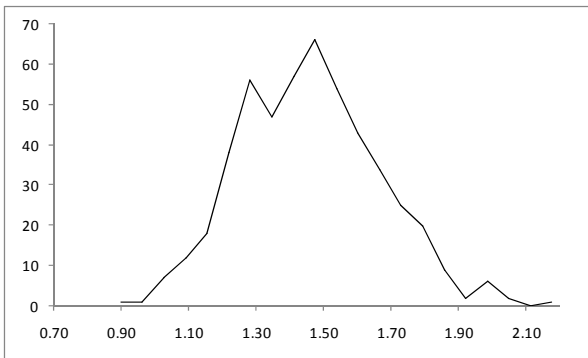
Godina 4



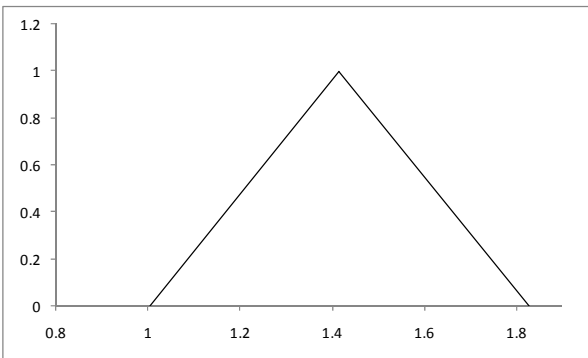
Godina 5



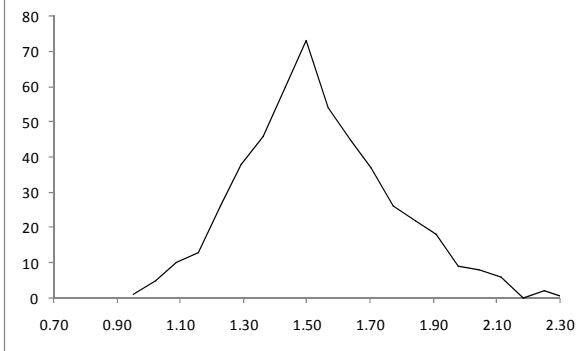
Godina 5



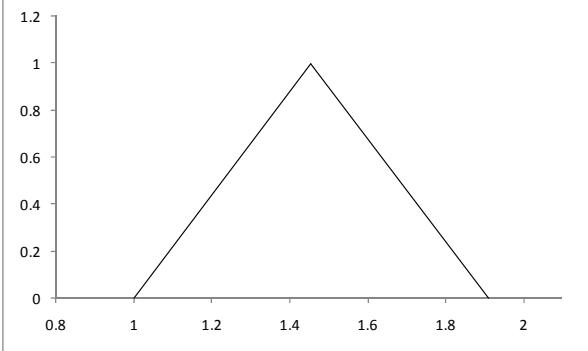
Godina 6



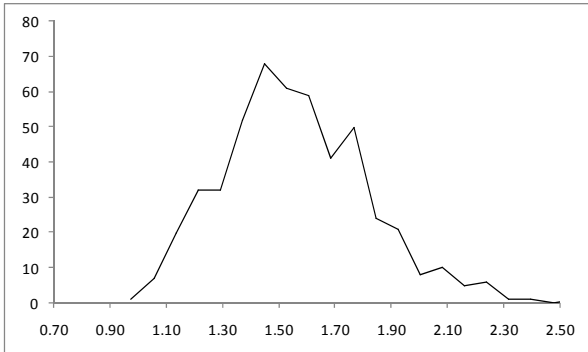
Godina 6



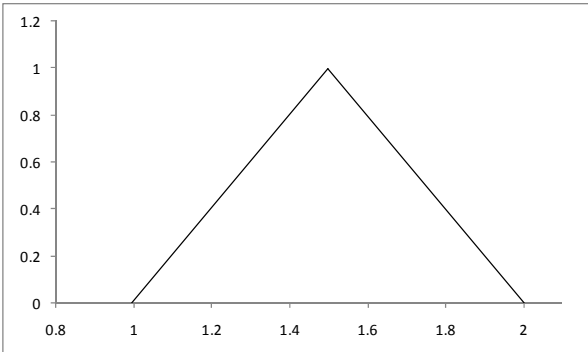
Godina 7



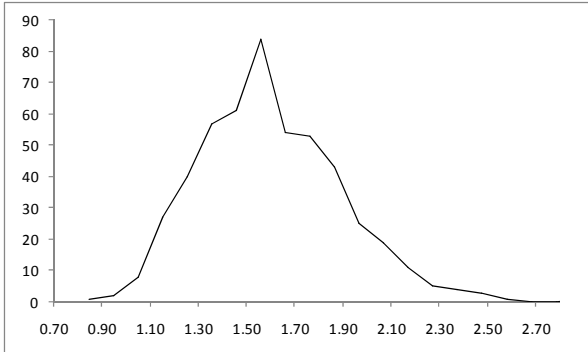
Godina 7



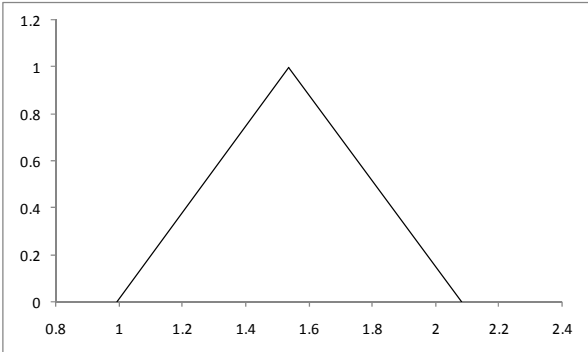
Godina 8



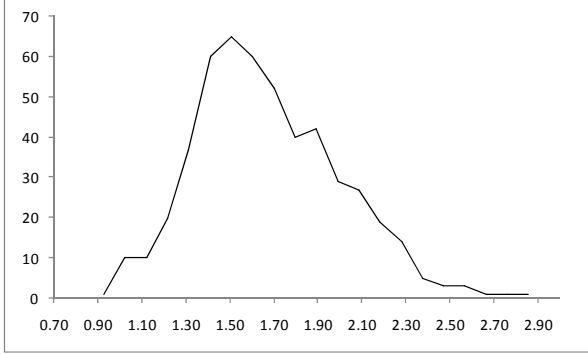
Godina 8



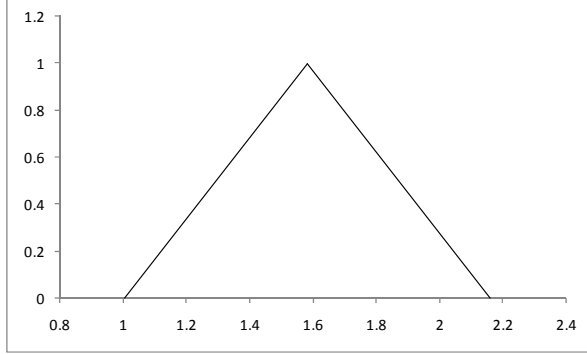
Godina 9



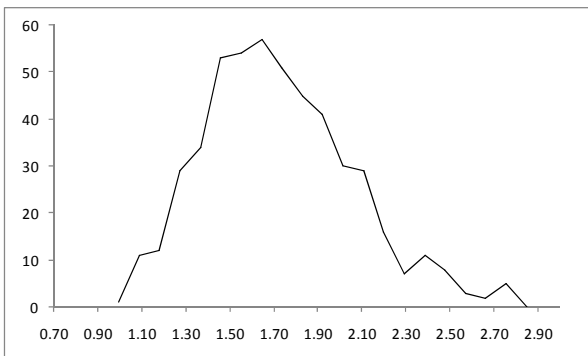
Godina 9



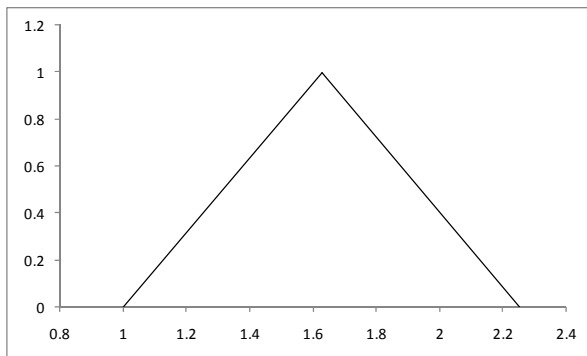
Godina 10



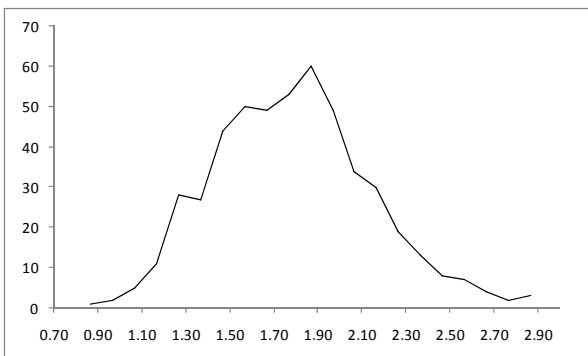
Godina 10



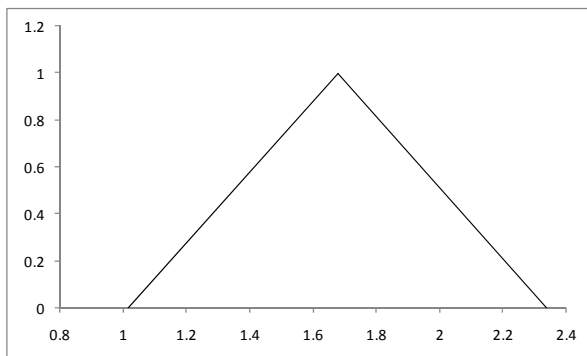
Godina 11



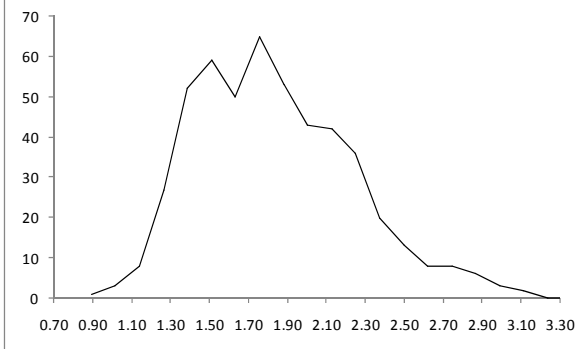
Godina 11



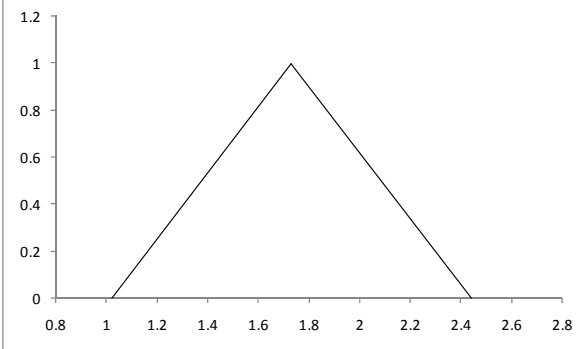
Godina 12



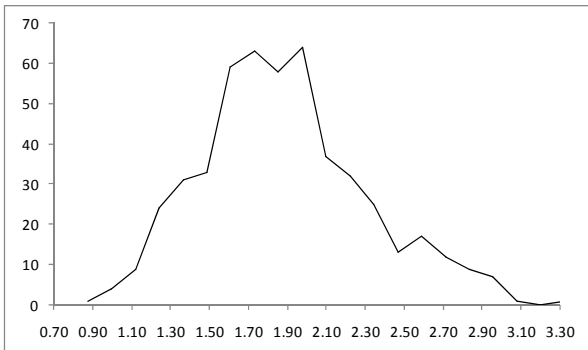
Godina 12



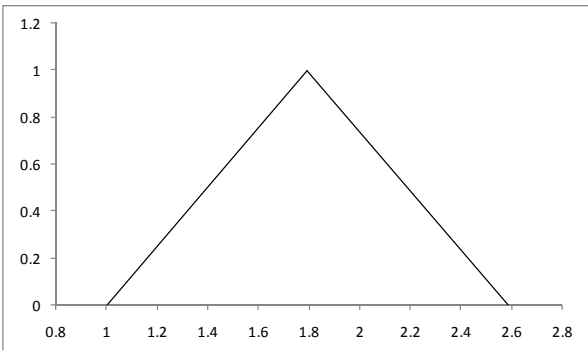
Godina 13



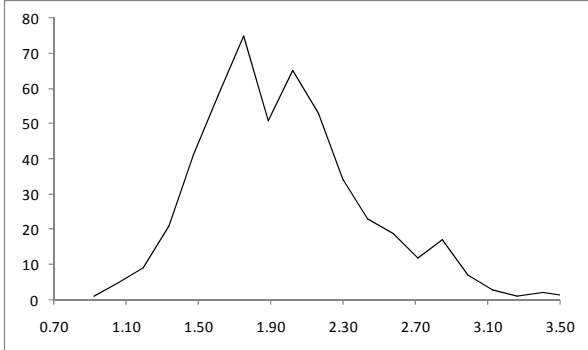
Godina 13



Godina 14



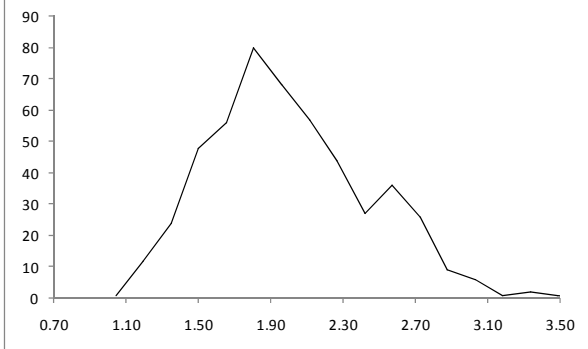
Godina 14



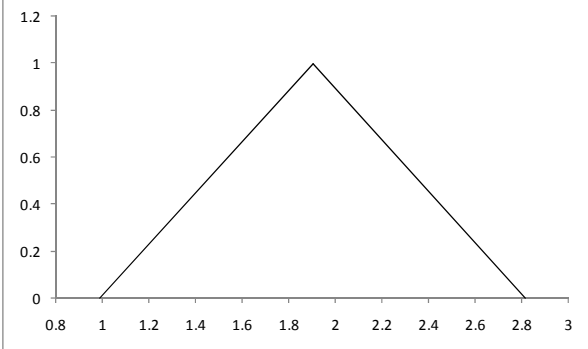
Godina 15



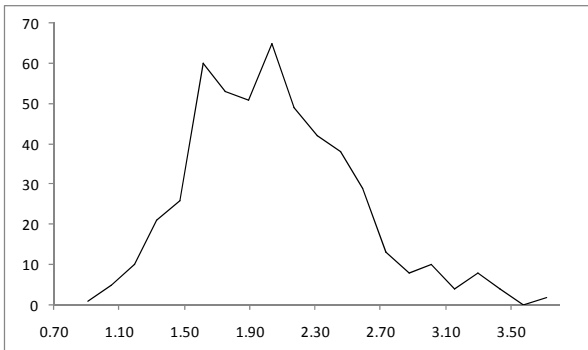
Godina 15



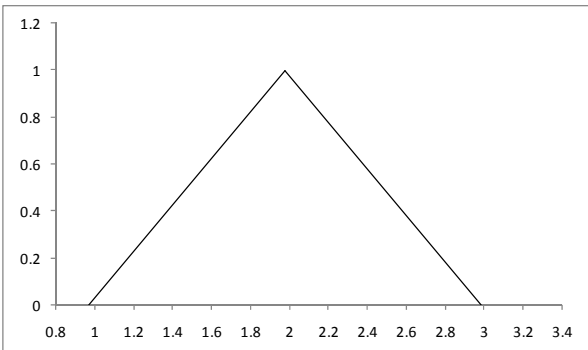
Godina 16



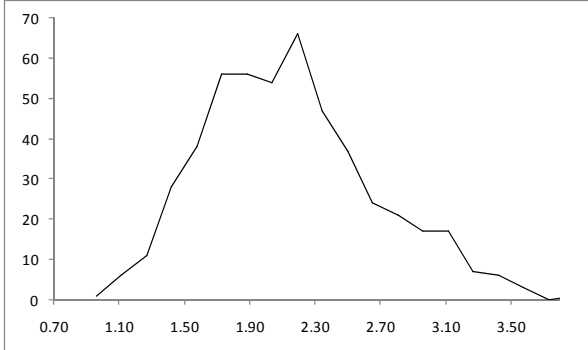
Godina 16



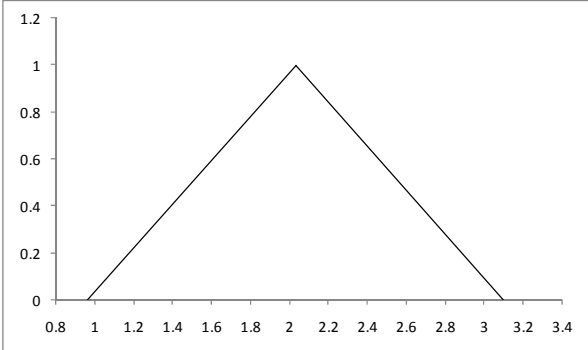
Godina 17



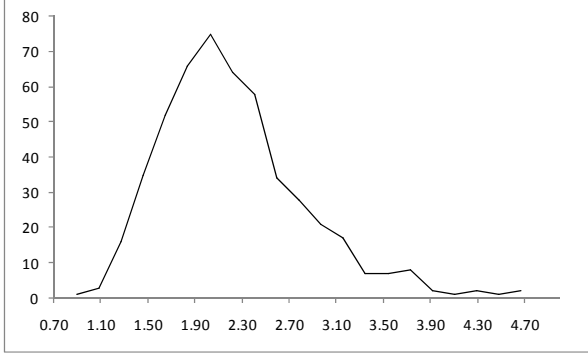
Godina 17



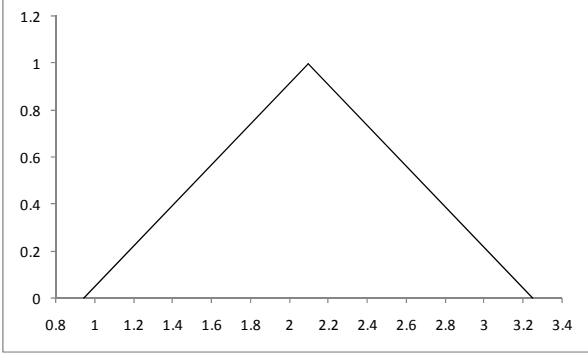
Godina 18



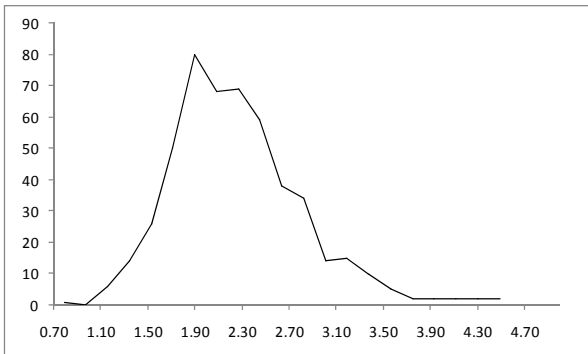
Godina 18



Godina 19



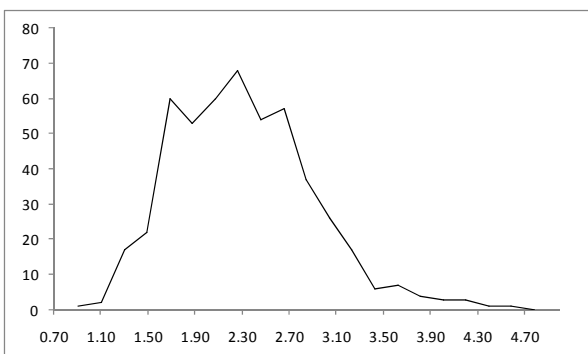
Godina 19



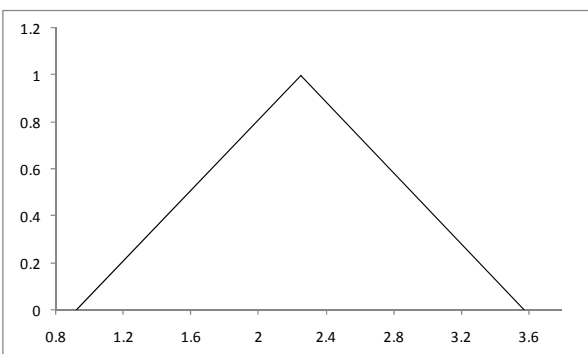
Godina 20



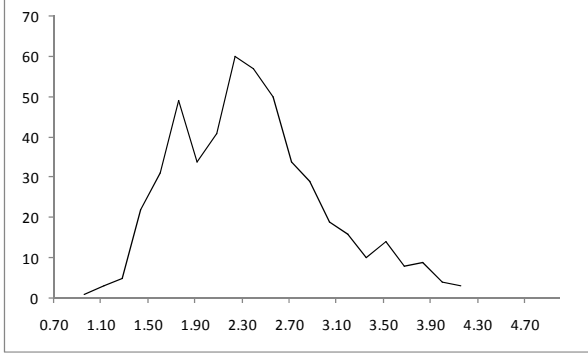
Godina 20



Godina 21



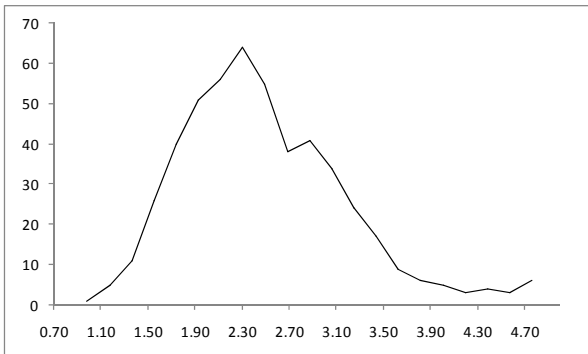
Godina 21



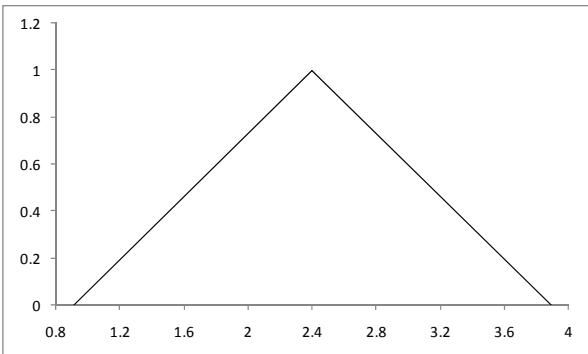
Godina 22



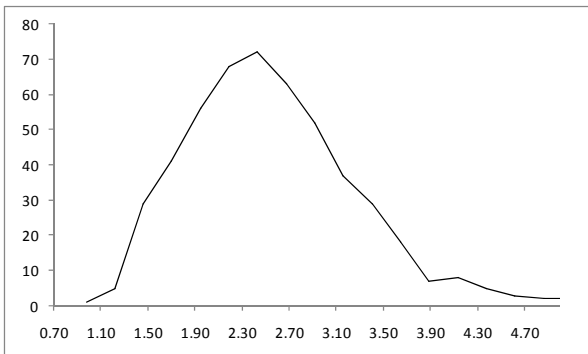
Godina 22



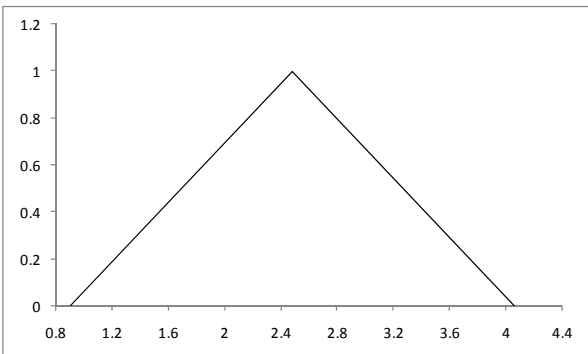
Godina 23



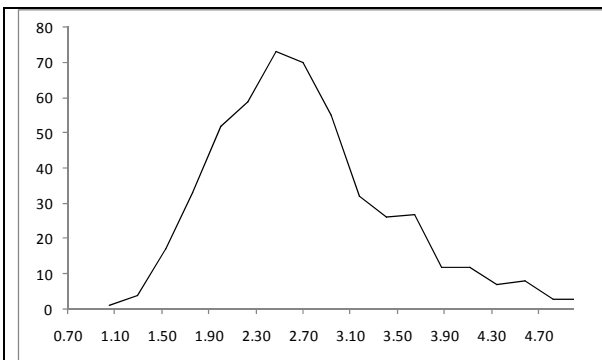
Godina 23



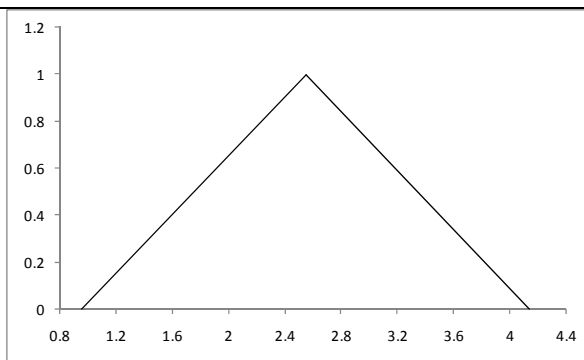
Godina 24



Godina 24



Godina 25

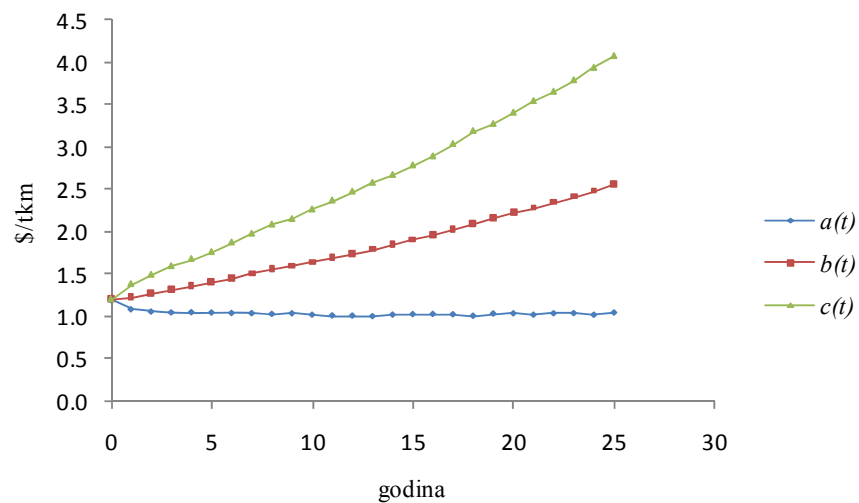


Godina 25

Tabela br. 12 Transformacija jediničnih troškova izvoza kroz niskop

Godina	Očekivana vrednost	Standardna devijacija	Troughlasti fuzzy broj		
			$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$
	1.2000	0.0000	1.2000	1.2000	1.2000
1	1.2328	0.0747	1.0834	1.2328	1.3821
2	1.2727	0.1092	1.0543	1.2727	1.4911
3	1.3181	0.1375	1.0432	1.3181	1.5930
4	1.3616	0.1581	1.0455	1.3616	1.6778
5	1.4003	0.1791	1.0421	1.4003	1.7584
6	1.4540	0.2090	1.0360	1.4540	1.8720
7	1.5043	0.2355	1.0334	1.5043	1.9753
8	1.5545	0.2649	1.0247	1.5545	2.0843
9	1.5903	0.2793	1.0318	1.5903	2.1489
10	1.6377	0.3116	1.0146	1.6377	2.2609
11	1.6866	0.3404	1.0058	1.6866	2.3674
12	1.7381	0.3675	1.0030	1.7381	2.4731
13	1.7863	0.3951	0.9961	1.7863	2.5765
14	1.8419	0.4135	1.0150	1.8419	2.6688
15	1.9015	0.4400	1.0214	1.9015	2.7815
16	1.9559	0.4662	1.0234	1.9559	2.8883
17	2.0269	0.5040	1.0190	2.0269	3.0348
18	2.0948	0.5468	1.0013	2.0948	3.1883

19	2.1498	0.5602	1.0293	2.1498	3.2702
20	2.2171	0.5928	1.0315	2.2171	3.4027
21	2.2775	0.6314	1.0148	2.2775	3.5403
22	2.3417	0.6545	1.0327	2.3417	3.6506
23	2.4103	0.6877	1.0349	2.4103	3.7858
24	2.4734	0.7296	1.0141	2.4734	3.9326
25	2.5567	0.7572	1.0423	2.5567	4.0711

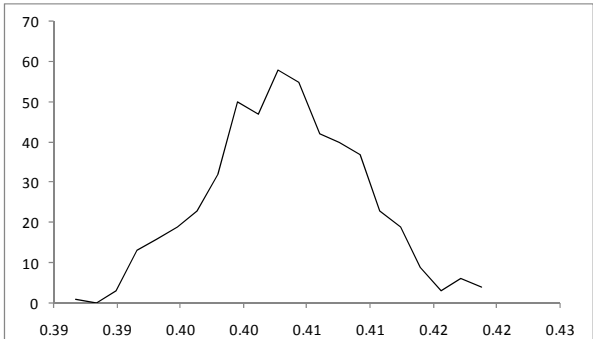
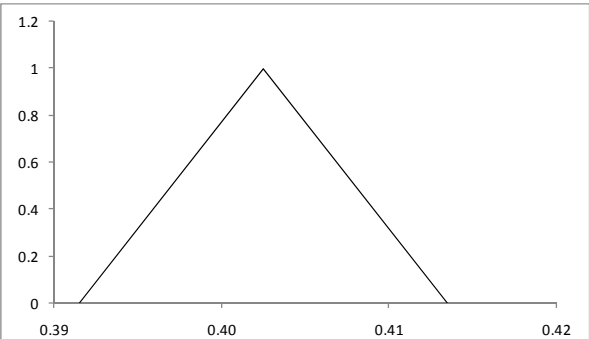
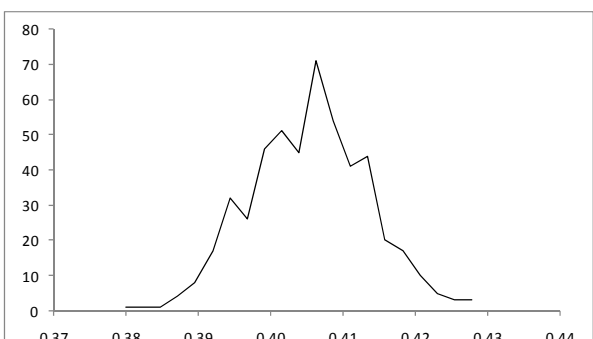
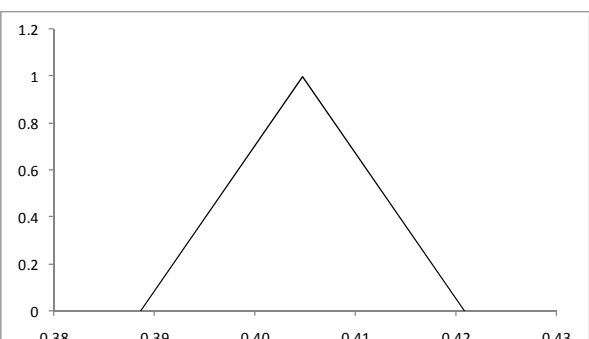
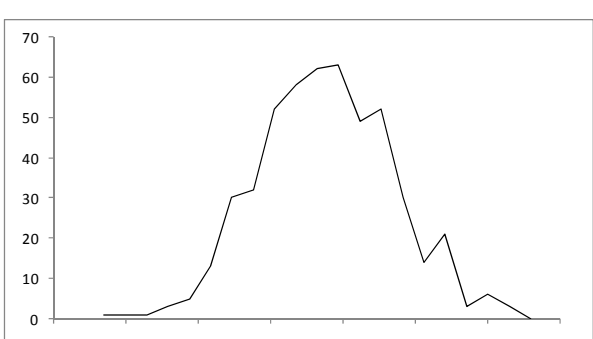
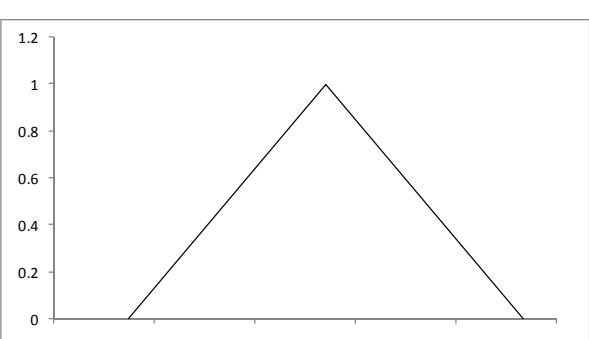


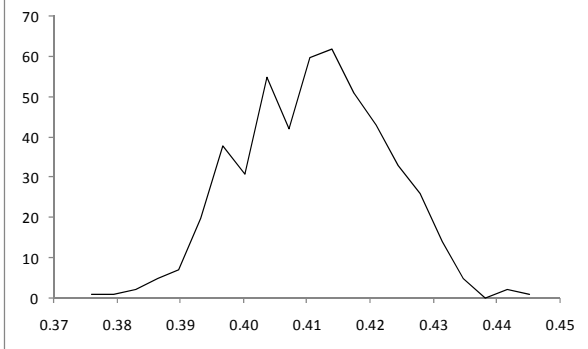
Slika br. 45 Dijagram transformacije jediničnih troškova transporta kroz niskop

C) Okno-parametar a_s

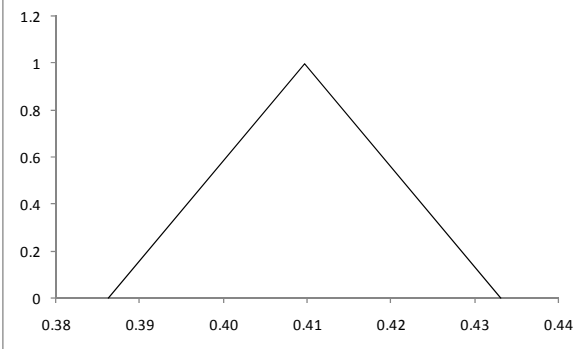
Transformacija dobijenih funkcija gustine verovatnoće jediničnih troškova izvoza kroz okno za parametar a_s , na nivou godine, prikazana je u Tabeli br. 13, Tabeli br. 14 i slici br. 46.

Tabela br. 13 Transformacija gustine verovatnoće jediničnih troškova izvoza kroz okno, parametar a_s

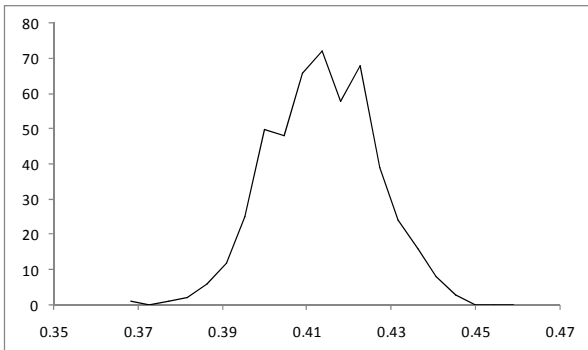
Funkcija gustine verovatnoće	Trouglasti fuzzy broj
	
Godina 1	Godina 1
	
Godina 2	Godina 2
	
Godina 3	Godina 3



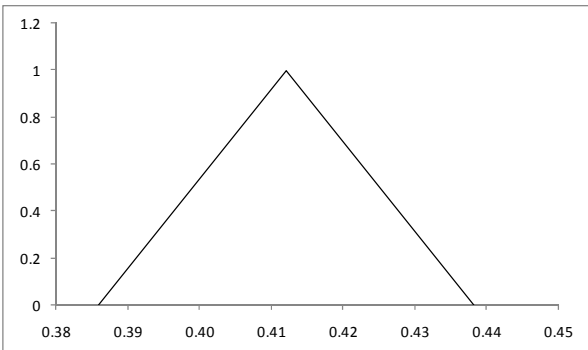
Godina 4



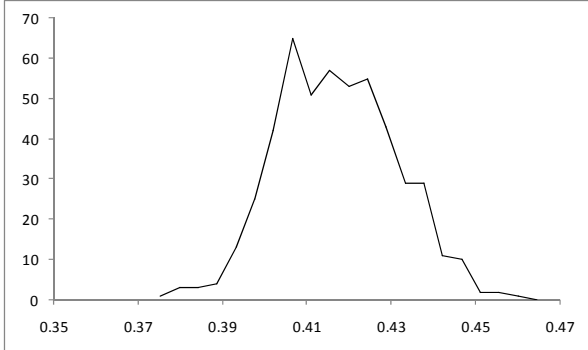
Godina 4



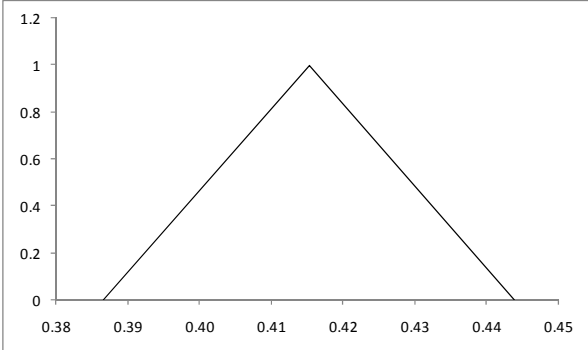
Godina 5



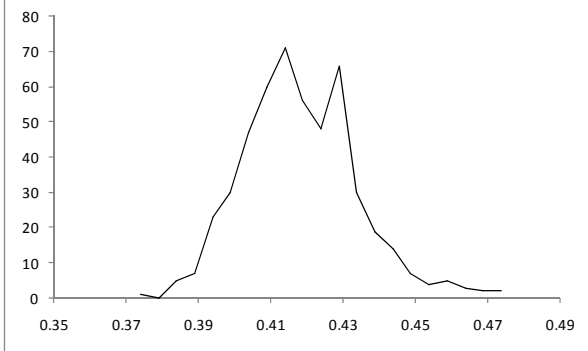
Godina 5



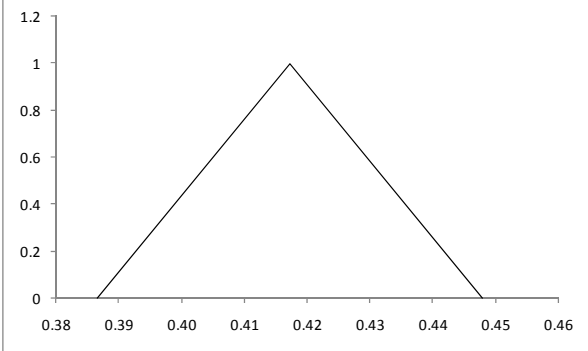
Godina 6



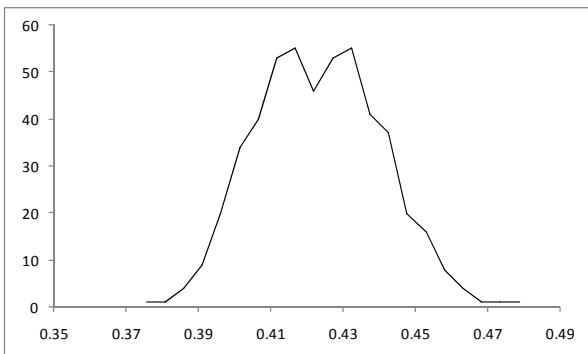
Godina 6



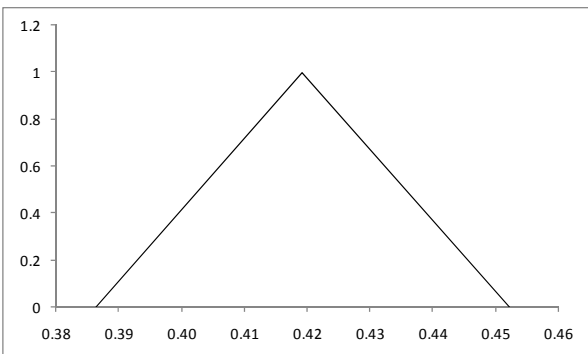
Godina 7



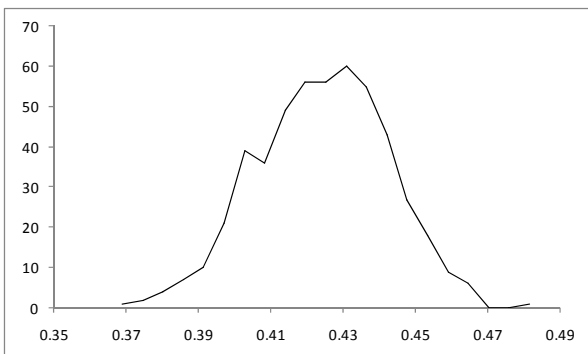
Godina 7



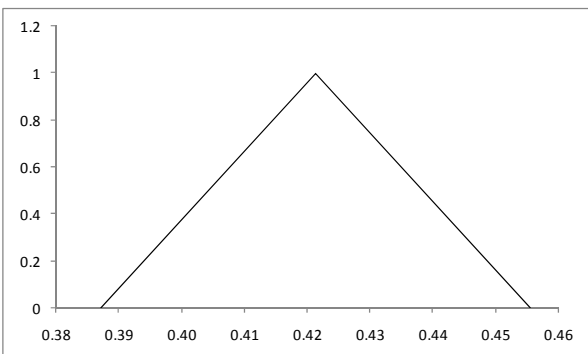
Godina 8



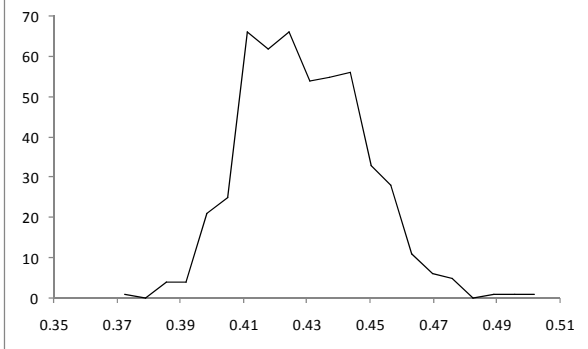
Godina 8



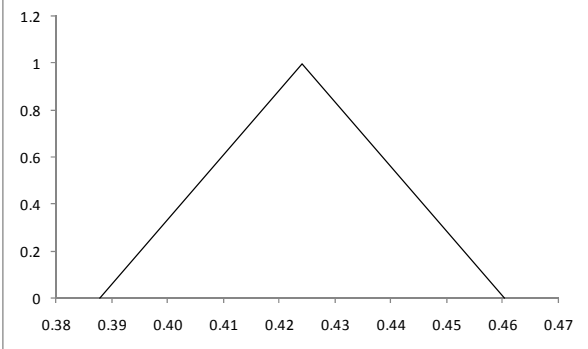
Godina 9



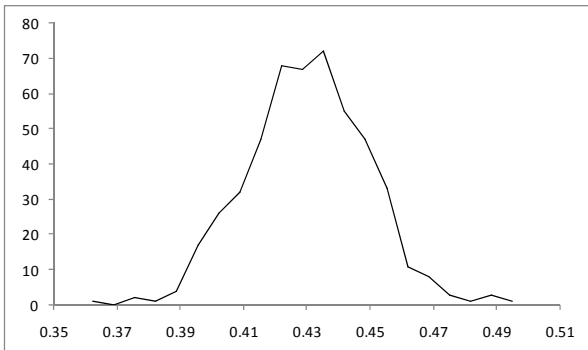
Godina 9



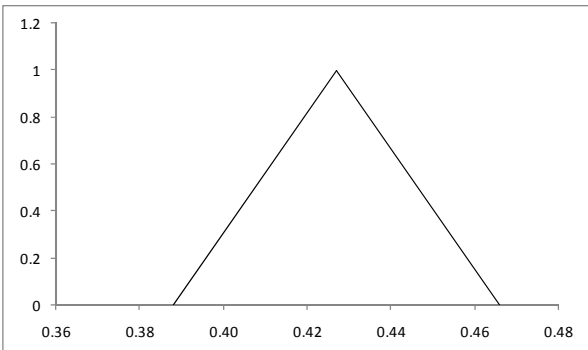
Godina 10



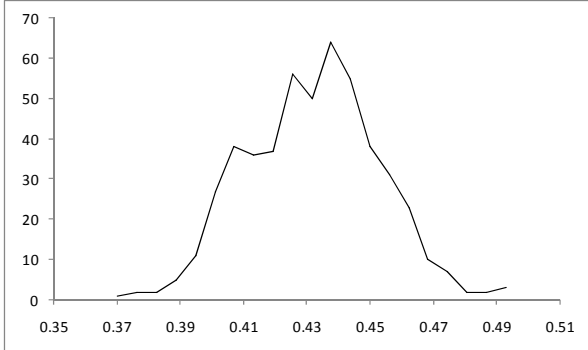
Godina 10



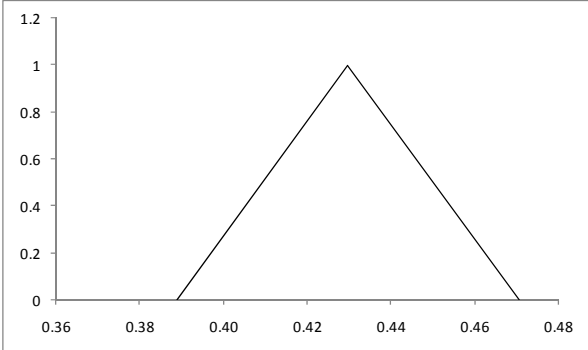
Godina 11



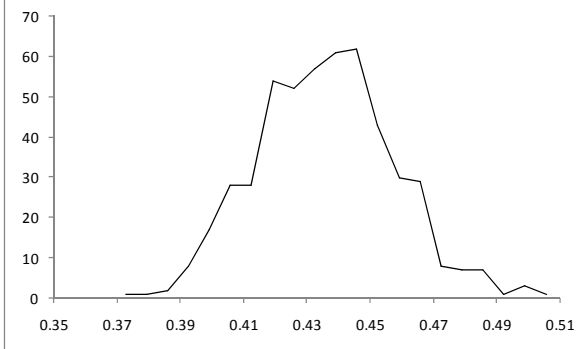
Godina 11



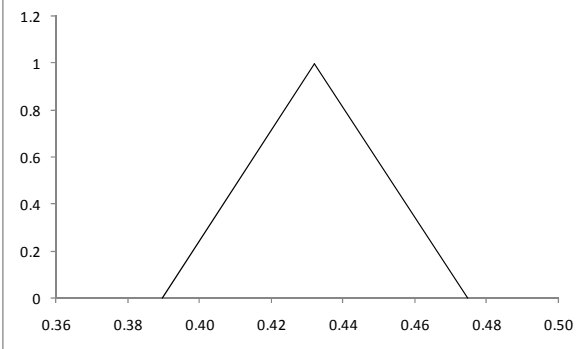
Godina 12



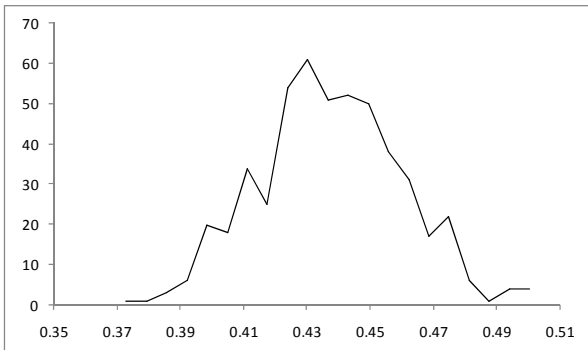
Godina 12



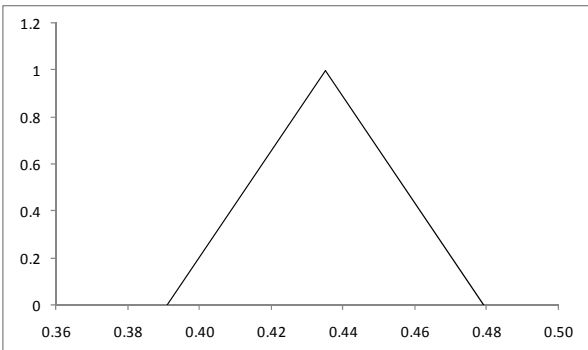
Godina 13



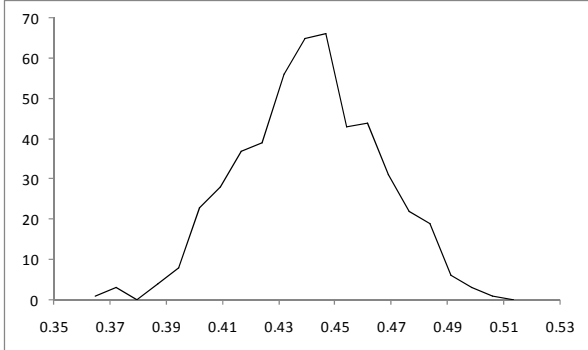
Godina 13



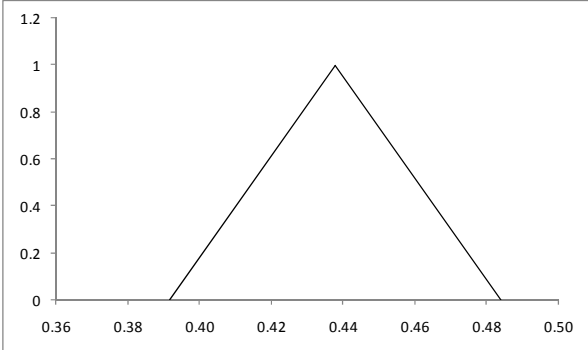
Godina 14



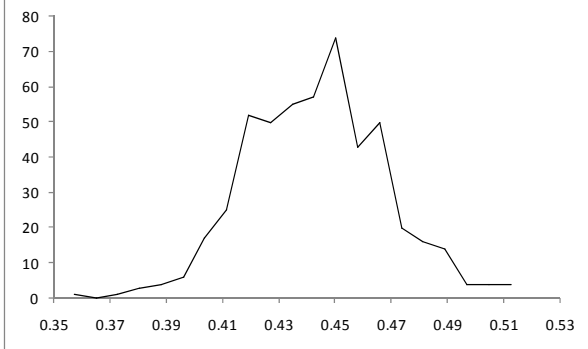
Godina 14



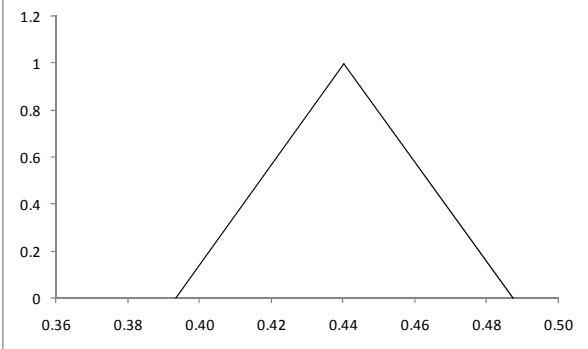
Godina 15



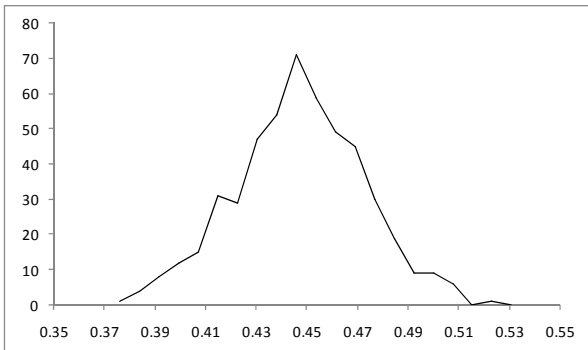
Godina 15



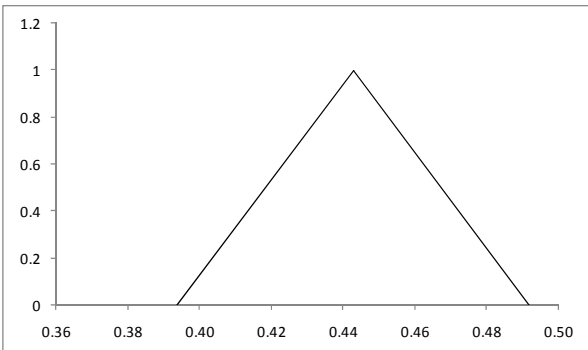
Godina 16



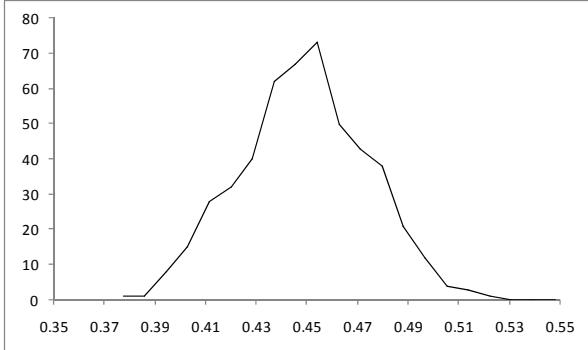
Godina 16



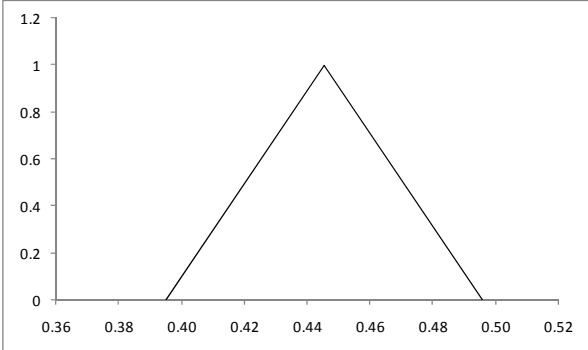
Godina 17



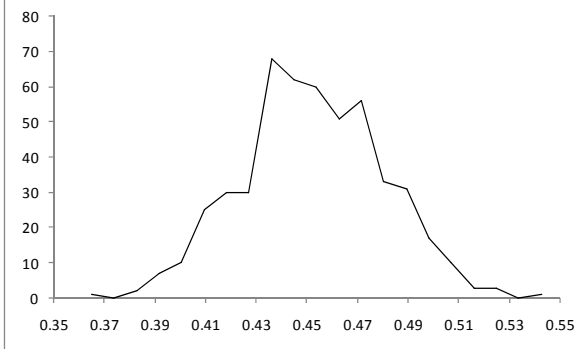
Godina 17



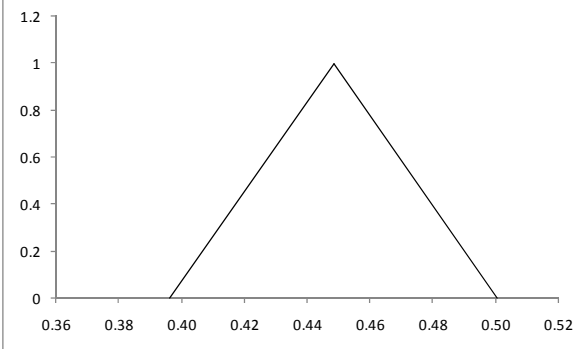
Godina 18



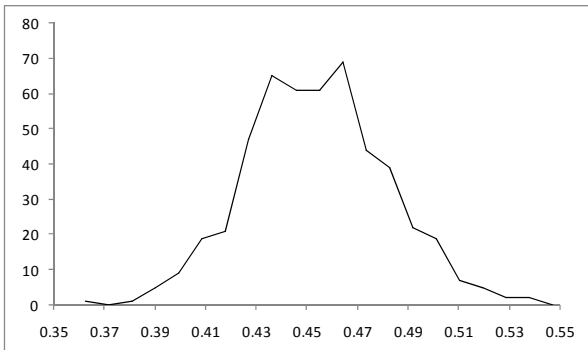
Godina 18



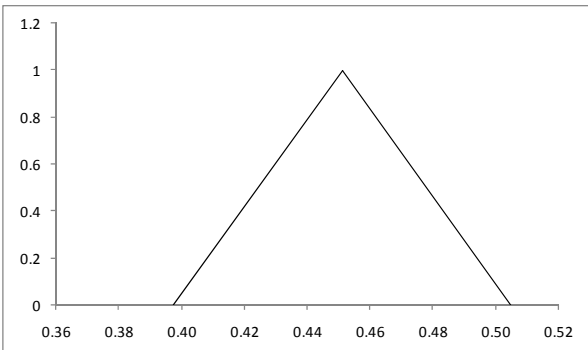
Godina 19



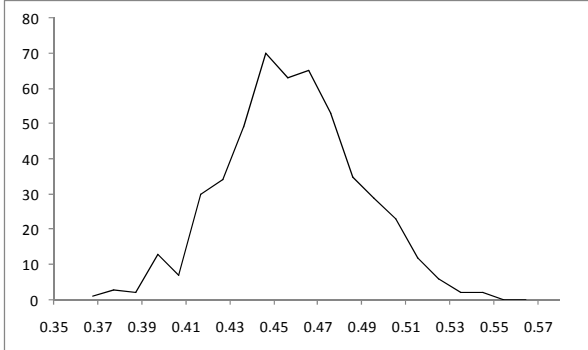
Godina 19



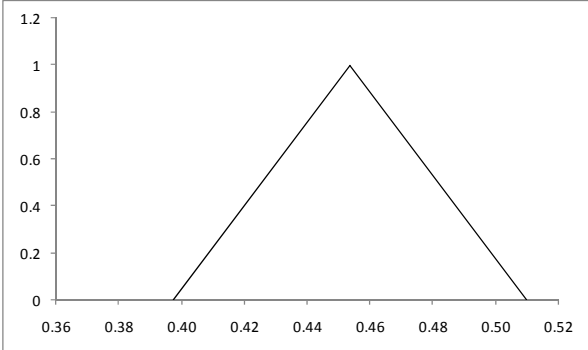
Godina 20



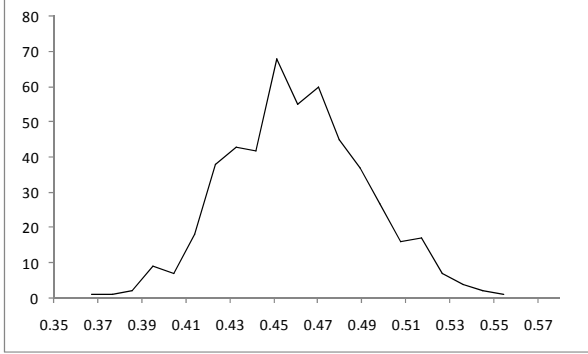
Godina 20



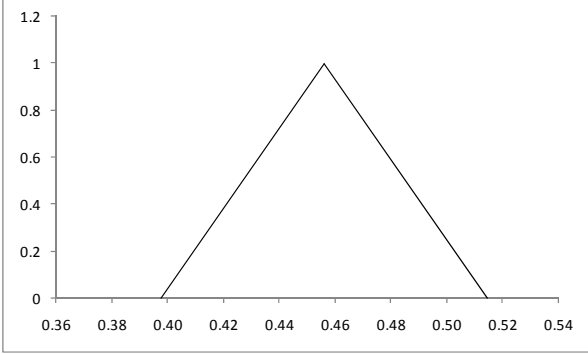
Godina 21



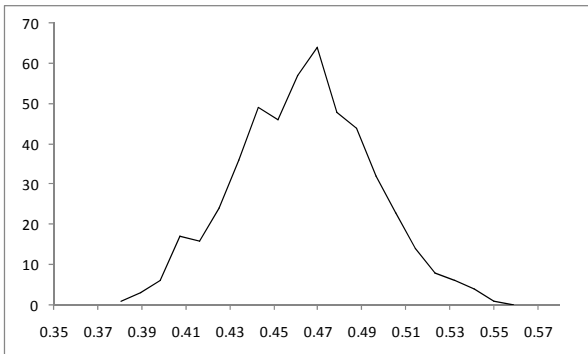
Godina 21



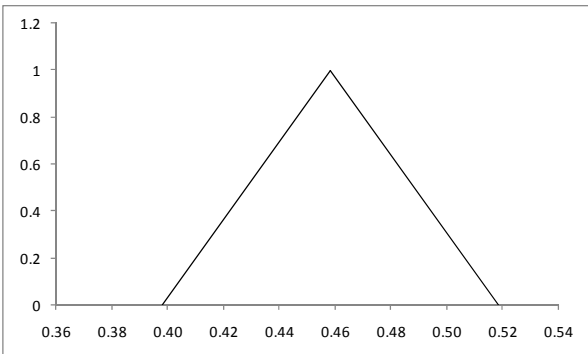
Godina 22



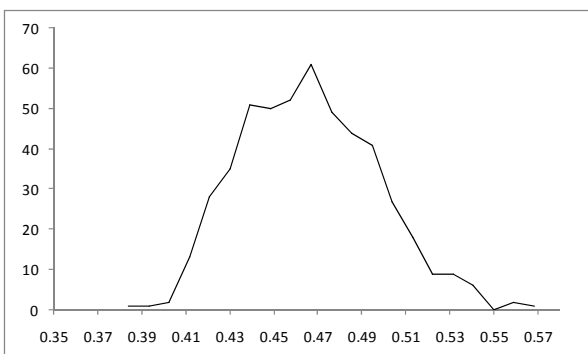
Godina 22



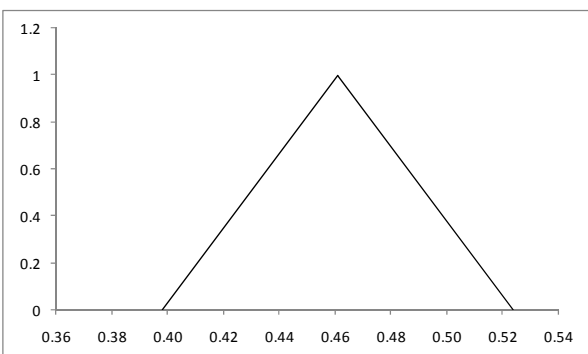
Godina 23



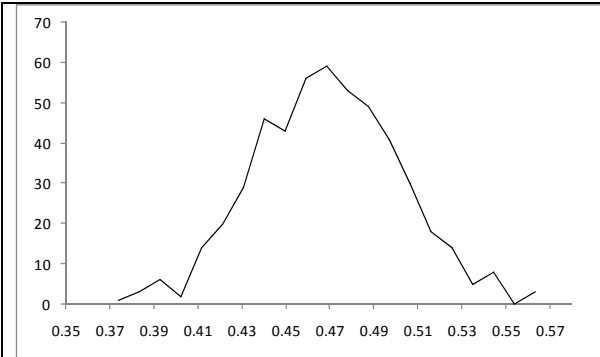
Godina 23



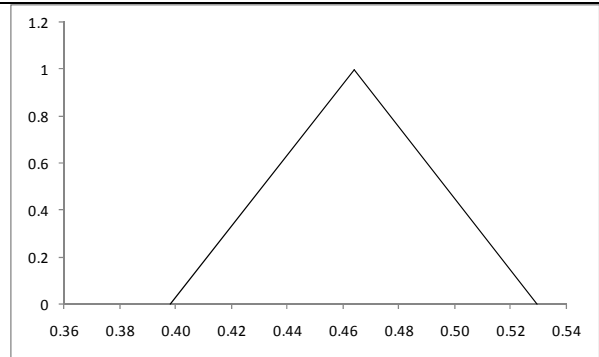
Godina 24



Godina 24



Godina 25

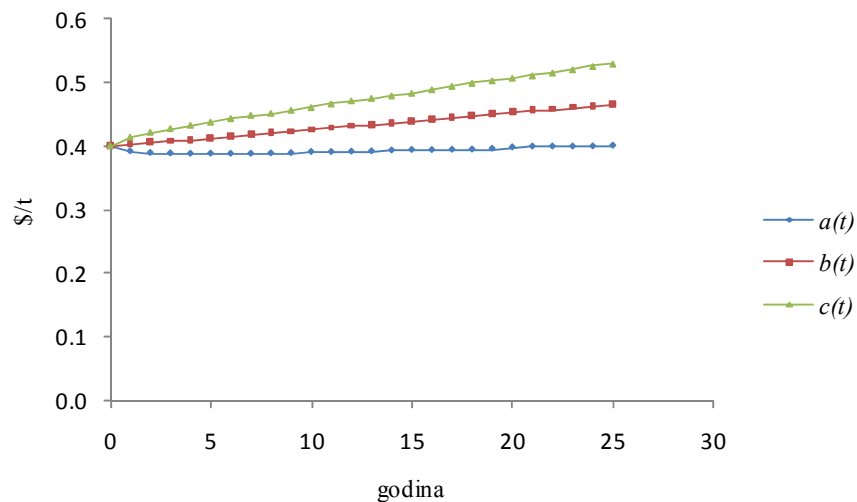


Godina 25

Tabela br. 14 Transformacija jediničnih troškova izvoza kroz okno, parametar a_s

Godina	Očekivana vrednost	Standardna devijacija	Troughlasti fuzzy broj		
			$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$
	0.4000	0.0000	0.4000	0.4000	0.4000
1	0.4027	0.0055	0.3917	0.4027	0.4137
2	0.4054	0.0080	0.3893	0.4054	0.4214
3	0.4079	0.0097	0.3886	0.4079	0.4272
4	0.4102	0.0111	0.3879	0.4102	0.4324
5	0.4128	0.0123	0.3882	0.4128	0.4374
6	0.4156	0.0137	0.3881	0.4156	0.4430
7	0.4182	0.0151	0.3880	0.4182	0.4483
8	0.4201	0.0157	0.3886	0.4201	0.4515
9	0.4228	0.0169	0.3891	0.4228	0.4565
10	0.4257	0.0174	0.3909	0.4257	0.4606
11	0.4286	0.0189	0.3908	0.4286	0.4665
12	0.4313	0.0200	0.3912	0.4313	0.4713
13	0.4335	0.0209	0.3918	0.4335	0.4752
14	0.4361	0.0215	0.3932	0.4361	0.4791

15	0.4386	0.0224	0.3939	0.4386	0.4834
16	0.4414	0.0238	0.3938	0.4414	0.4891
17	0.4444	0.0250	0.3944	0.4444	0.4944
18	0.4469	0.0261	0.3946	0.4469	0.4992
19	0.4495	0.0268	0.3958	0.4495	0.5031
20	0.4526	0.0273	0.3980	0.4526	0.5073
21	0.4550	0.0279	0.3992	0.4550	0.5109
22	0.4574	0.0291	0.3993	0.4574	0.5155
23	0.4600	0.0304	0.3993	0.4600	0.5207
24	0.4627	0.0316	0.3995	0.4627	0.5258
25	0.4652	0.0323	0.4006	0.4652	0.5298

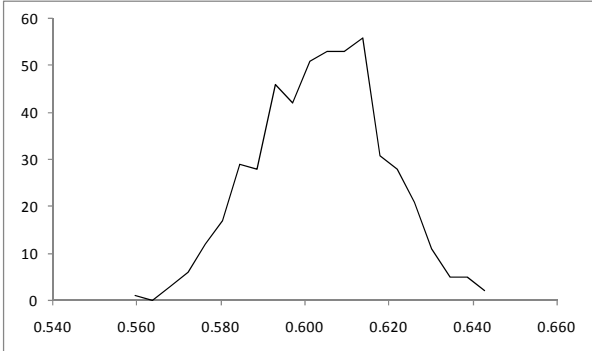
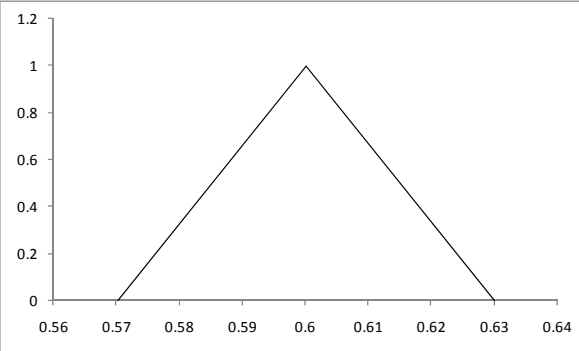
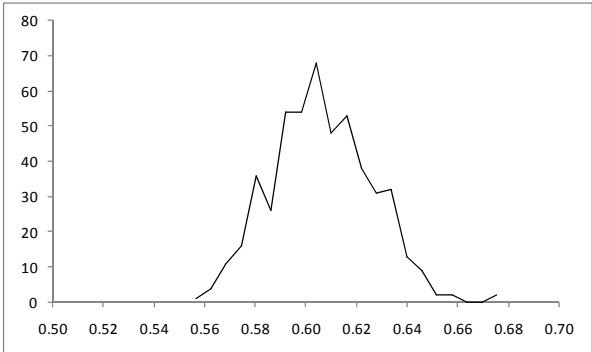
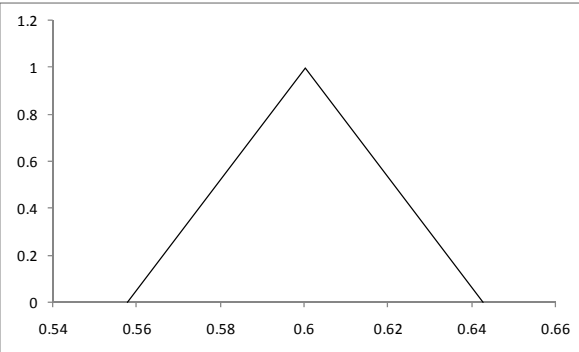
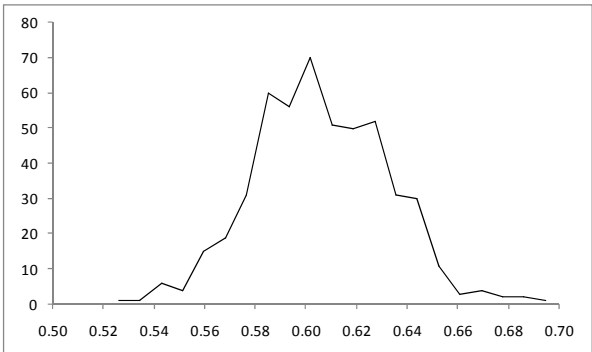
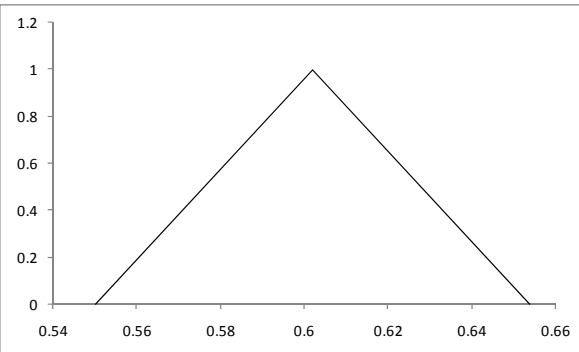


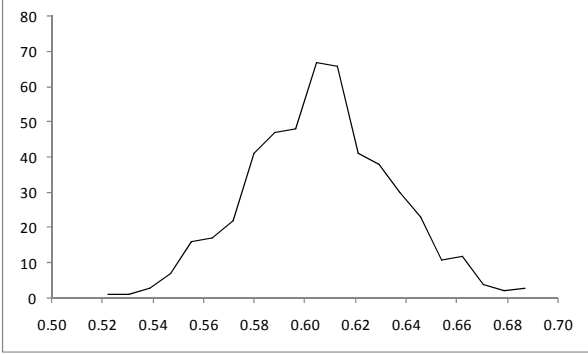
Slika br. 46 Dijagram transformacije jediničnih troškova transporta kroz okno, parametar a_s

D) Okno-parametar b_s

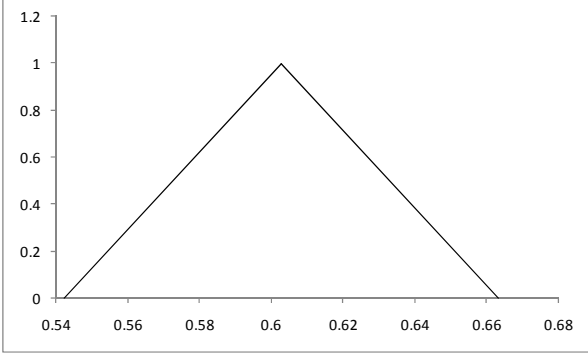
Transformacija dobijenih funkcija gustine verovatnoće jediničnih troškova izvoza kroz okno za parametar b_s , na nivou godine, prikazana je u Tabeli br. 15, Tabeli br. 16 i slici br. 47.

Tabela br. 15 Transformacija gustine verovatnoće jediničnih troškova izvoza kroz okno, parametar b_s

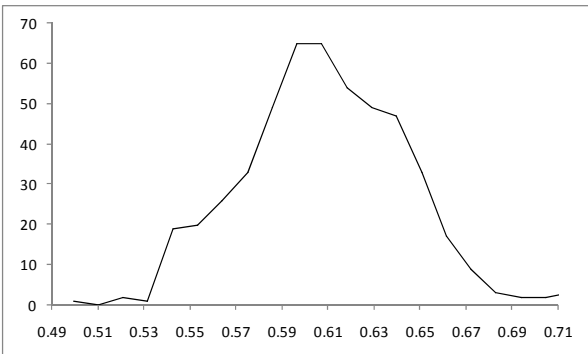
Funkcija gustine verovatnoće	Trouglasti fuzzy broj
 <p>Godina 1</p>	 <p>Godina 1</p>
 <p>Godina 2</p>	 <p>Godina 2</p>
 <p>Godina 3</p>	 <p>Godina 3</p>



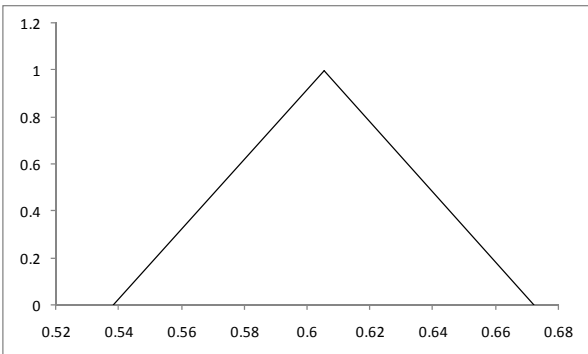
Godina 4



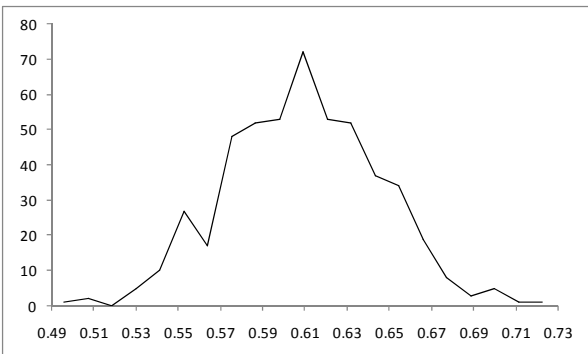
Godina 4



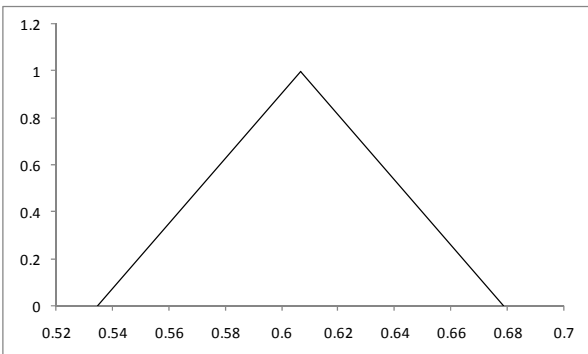
Godina 5



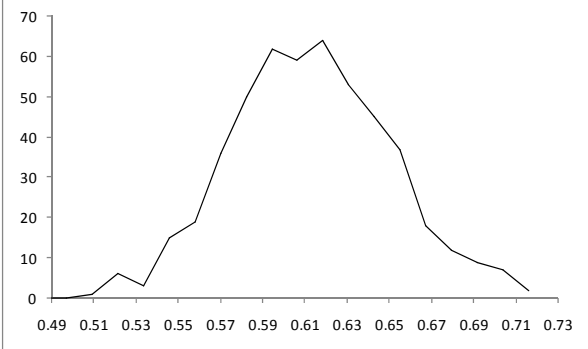
Godina 5



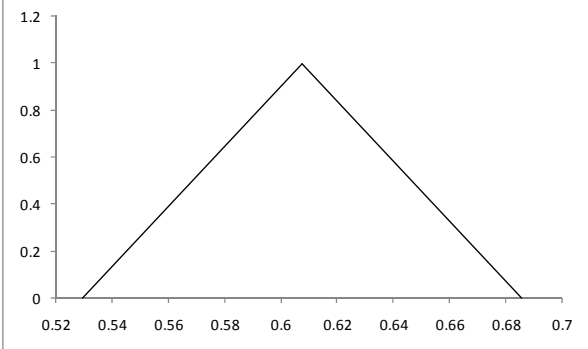
Godina 6



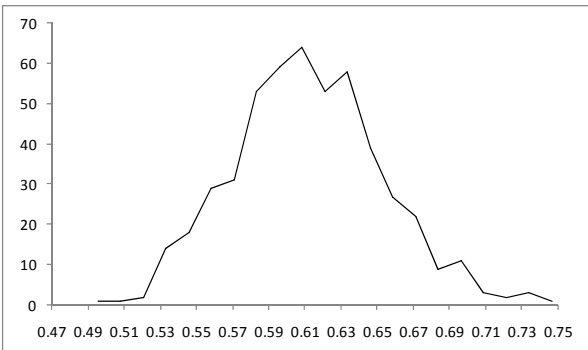
Godina 6



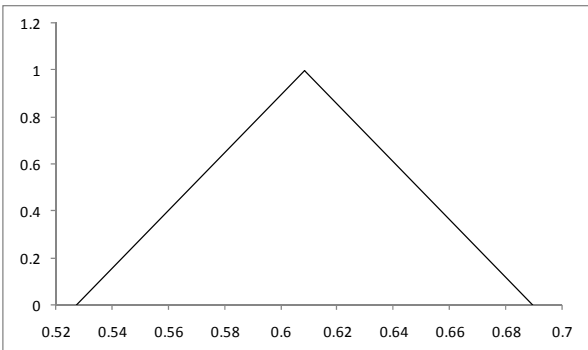
Godina 7



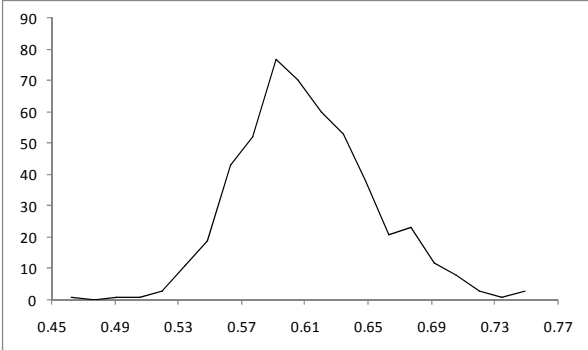
Godina 7



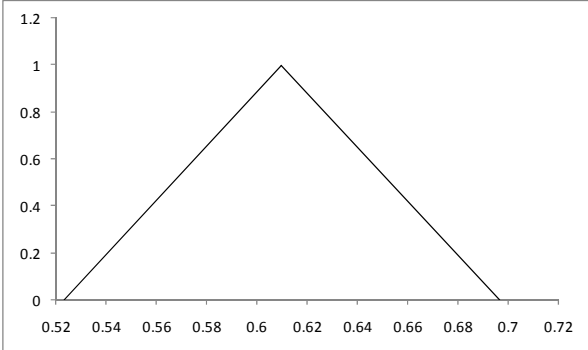
Godina 8



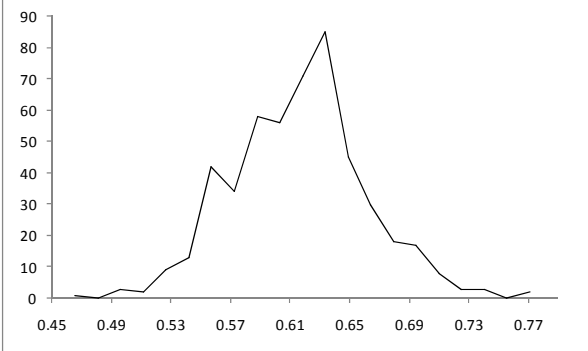
Godina 8



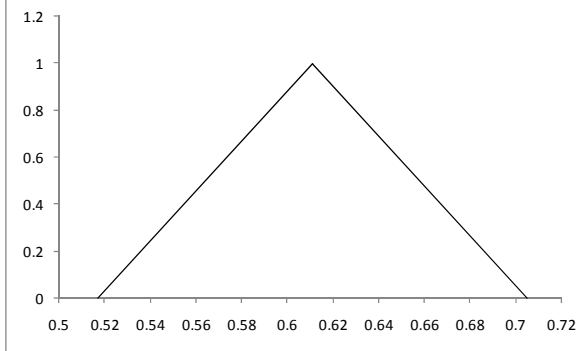
Godina 9



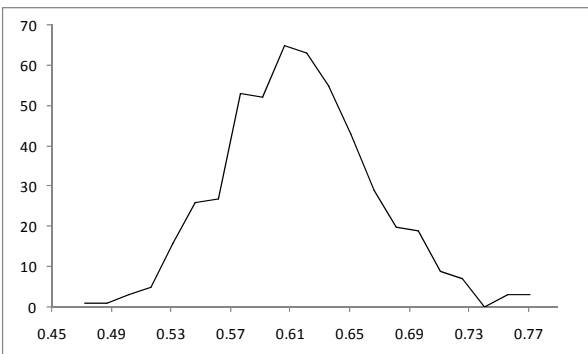
Godina 9



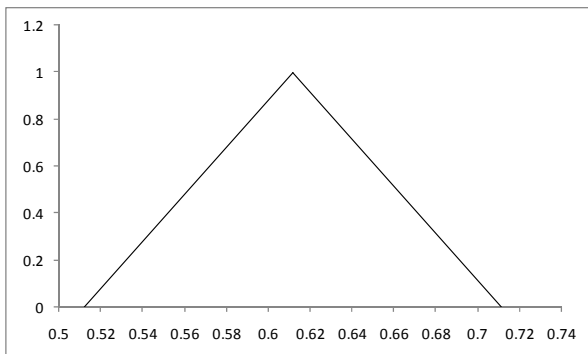
Godina 10



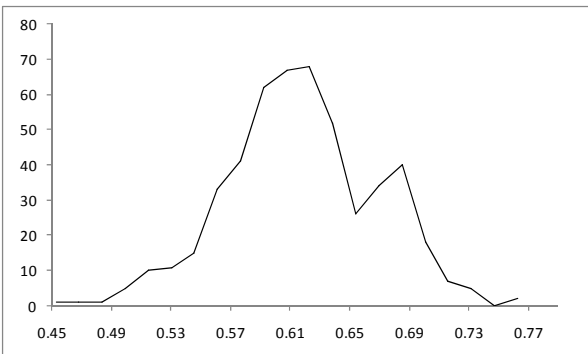
Godina 10



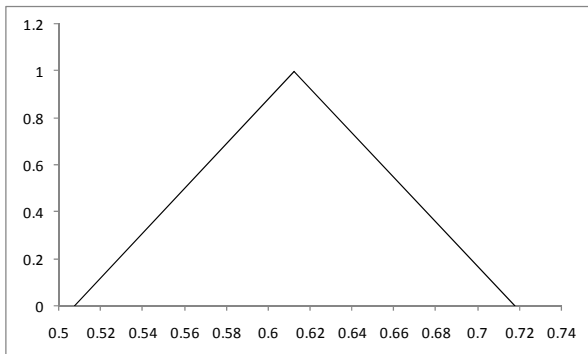
Godina 11



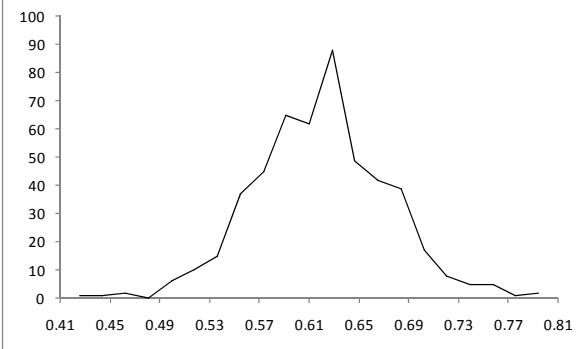
Godina 11



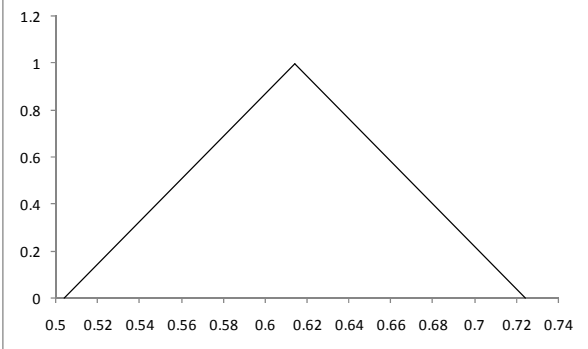
Godina 12



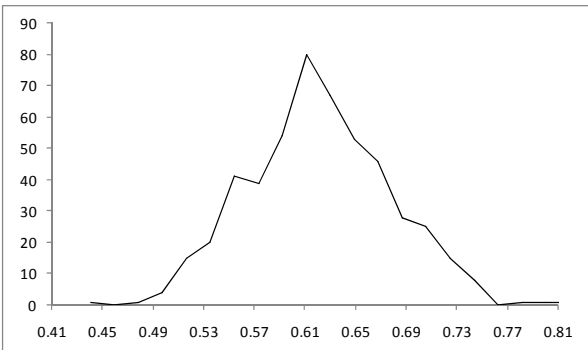
Godina 12



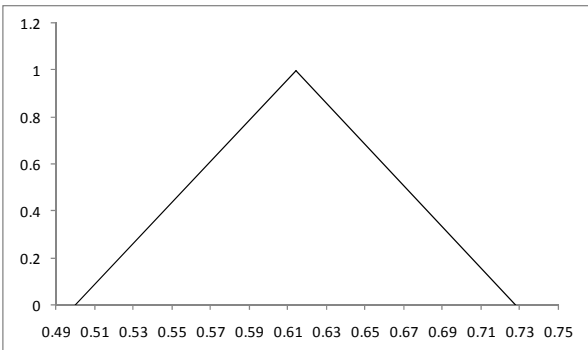
Godina 13



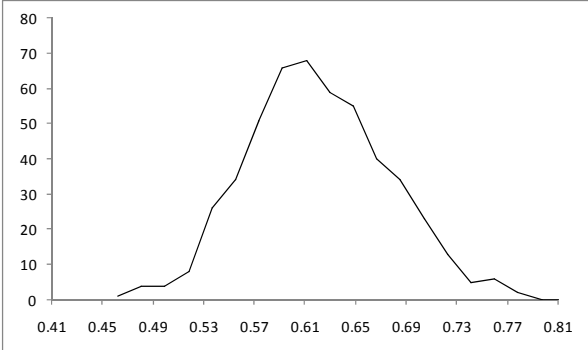
Godina 13



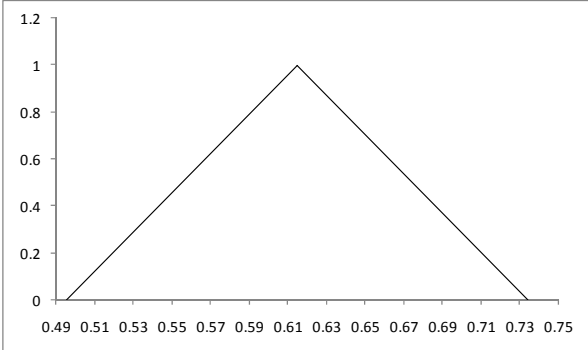
Godina 14



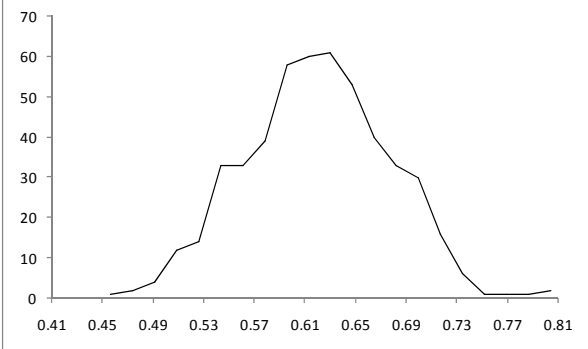
Godina 14



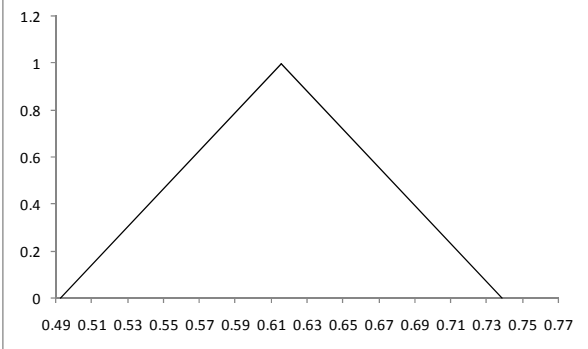
Godina 15



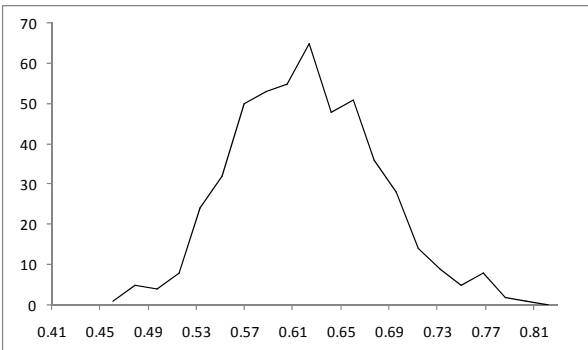
Godina 15



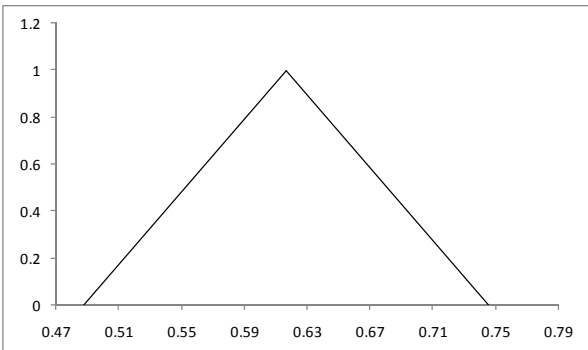
Godina 16



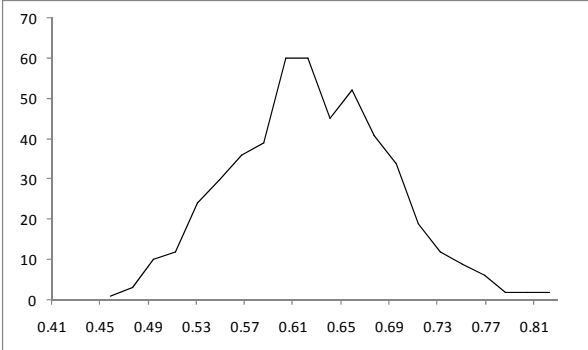
Godina 16



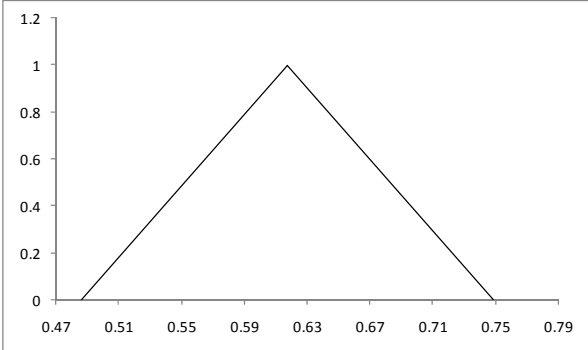
Godina 17



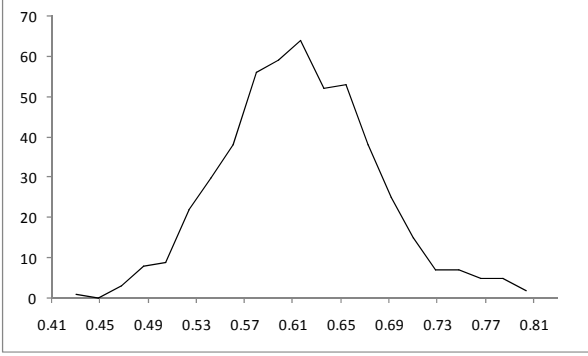
Godina 17



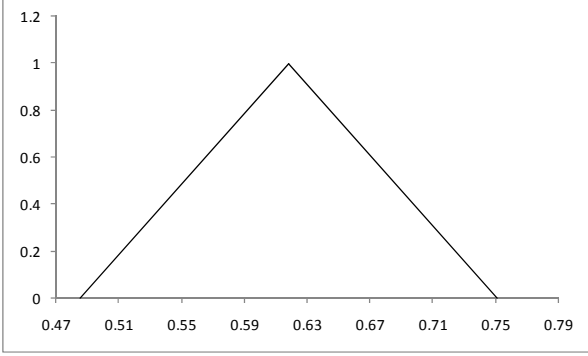
Godina 18



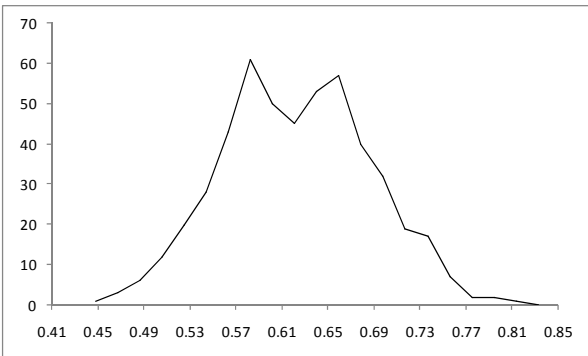
Godina 18



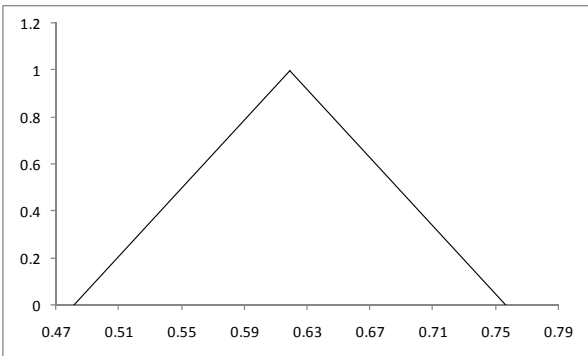
Godina 19



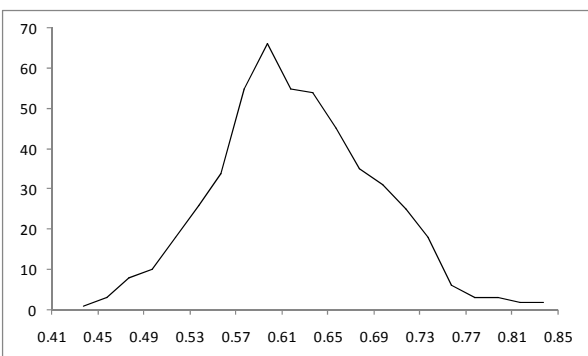
Godina 19



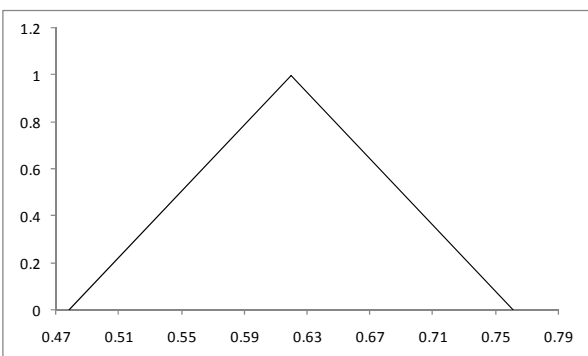
Godina 20



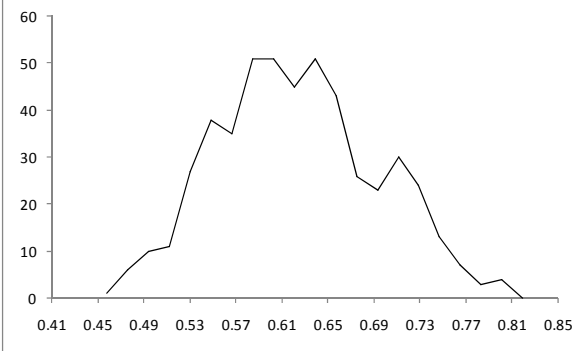
Godina 20



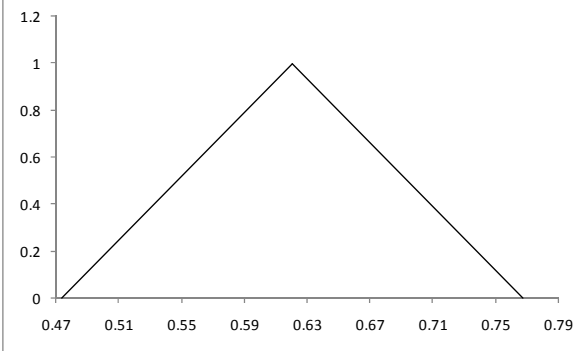
Godina 21



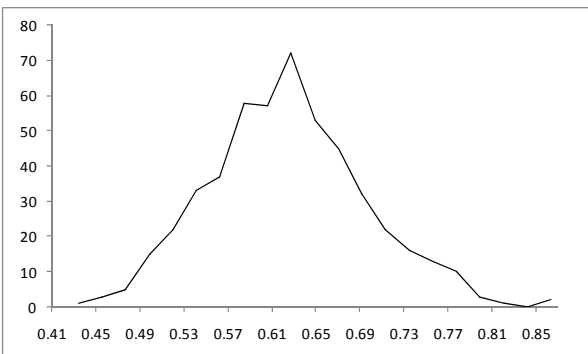
Godina 21



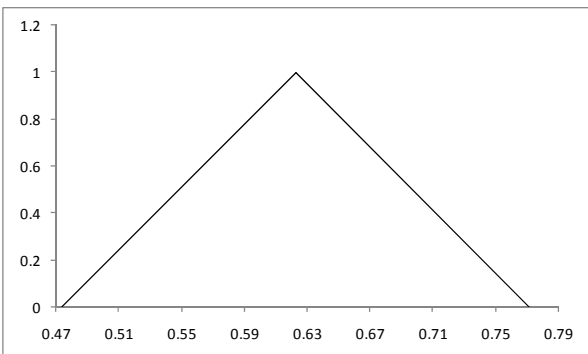
Godina 22



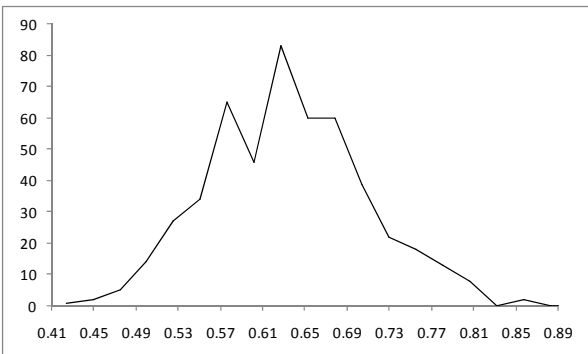
Godina 22



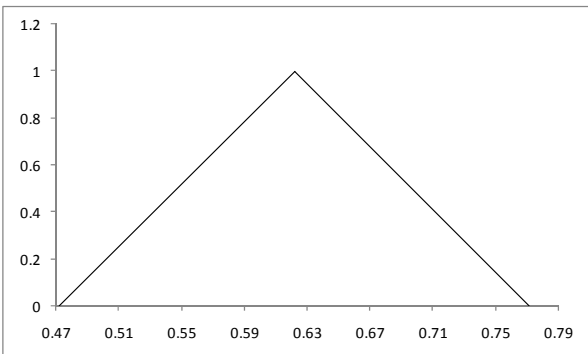
Godina 23



Godina 23



Godina 24



Godina 24

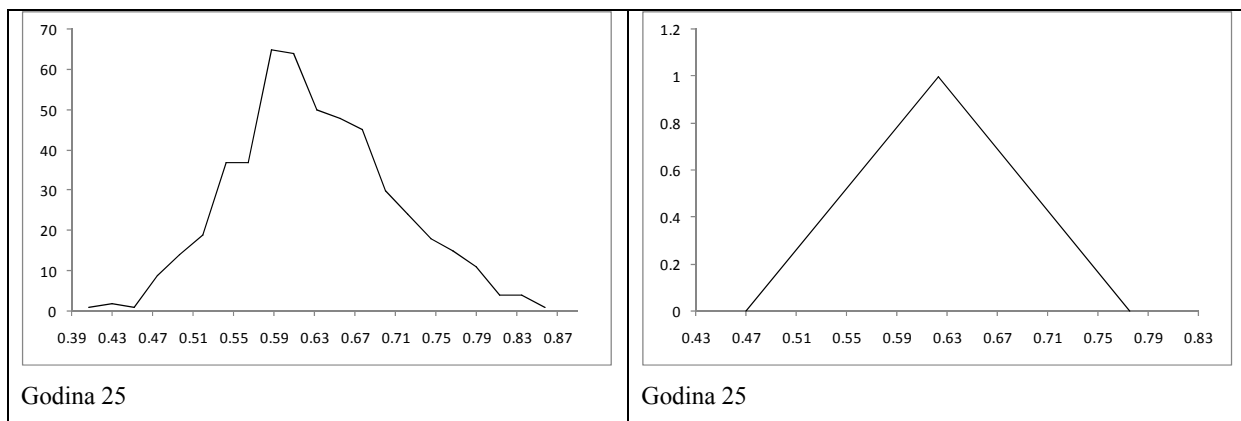
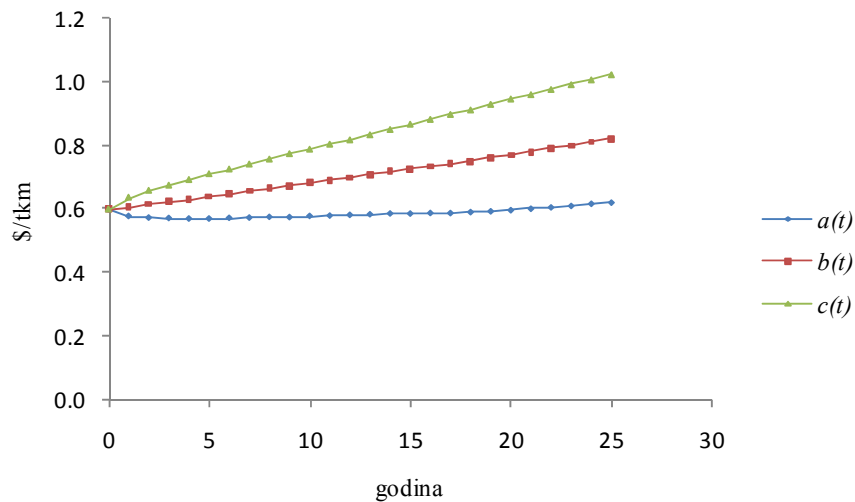


Tabela br. 16 Transformacija jediničnih troškova izvoza kroz okno, parametar b_s

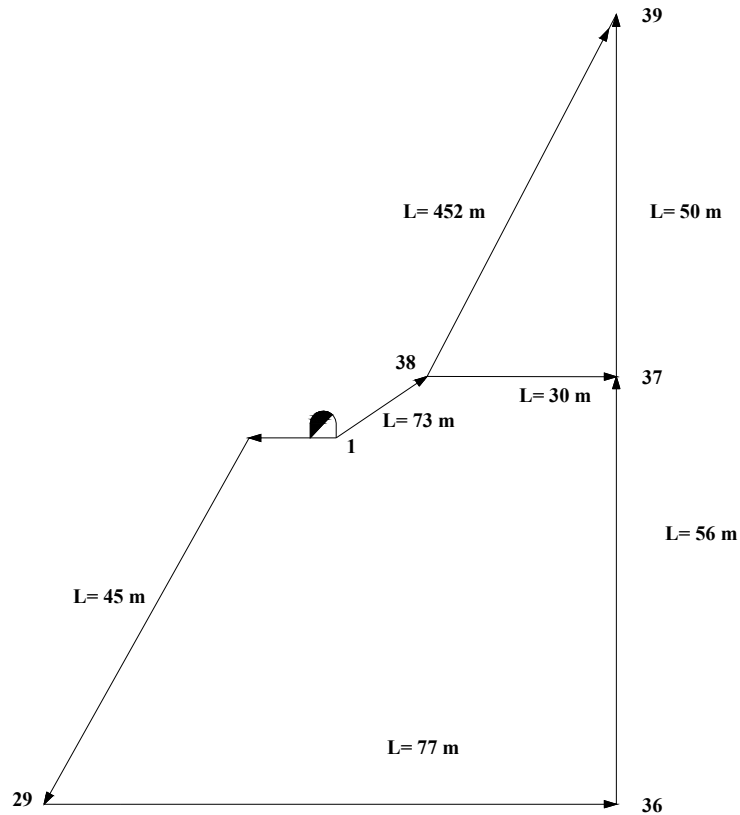
Godina	Očekivana vrednost	Standardna devijacija	Troughlasti fuzzy broj		
			$a(t)$	$b(t)$	$c(t)$
	0.6000	0.0000	0.6000	0.6000	0.6000
1	0.6076	0.0148	0.5780	0.6076	0.6372
2	0.6157	0.0215	0.5726	0.6157	0.6588
3	0.6230	0.0258	0.5714	0.6230	0.6747
4	0.6311	0.0308	0.5696	0.6311	0.6926
5	0.6403	0.0353	0.5697	0.6403	0.7108
6	0.6488	0.0384	0.5720	0.6488	0.7257
7	0.6568	0.0421	0.5726	0.6568	0.7410
8	0.6660	0.0454	0.5751	0.6660	0.7568
9	0.6741	0.0500	0.5742	0.6741	0.7740
10	0.6832	0.0525	0.5782	0.6832	0.7882
11	0.6915	0.0561	0.5792	0.6915	0.8038
12	0.6995	0.0589	0.5818	0.6995	0.8173
13	0.7084	0.0624	0.5836	0.7084	0.8332
14	0.7181	0.0660	0.5862	0.7181	0.8500

15	0.7262	0.0701	0.5860	0.7262	0.8665
16	0.7347	0.0735	0.5878	0.7347	0.8817
17	0.7424	0.0775	0.5875	0.7424	0.8973
18	0.7511	0.0802	0.5907	0.7511	0.9114
19	0.7610	0.0839	0.5933	0.7610	0.9287
20	0.7713	0.0872	0.5968	0.7713	0.9458
21	0.7805	0.0894	0.6016	0.7805	0.9594
22	0.7910	0.0924	0.6061	0.7910	0.9758
23	0.8009	0.0950	0.6108	0.8009	0.9910
24	0.8118	0.0970	0.6179	0.8118	1.0057
25	0.8219	0.1001	0.6218	0.8219	1.0221



Slika br. 47 Dijagram transformacije jediničnih troškova transporta kroz okno, parametar b_s

Korak 3: konstrukcija orjentisane transportne mreže od prve podetaže na koti +710 m, pa do površine terena, prikazana je grafom na slici br. 48.



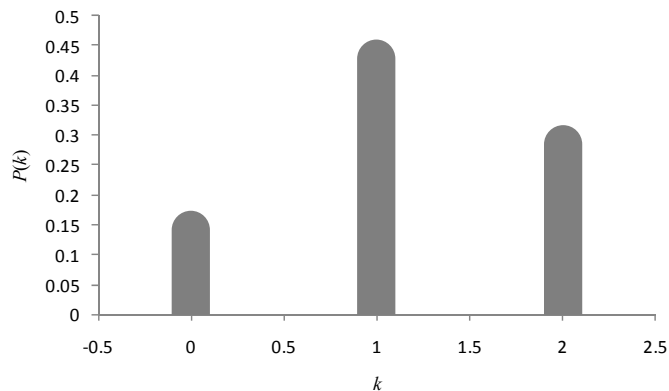
Slika br. 48 Graf orjentisane transportne mreže za podetažu na koti +710 m

Matrica povezanosti i stepen čvora za orjentisani graf transportne mreže za podetažu na koti +710 m prikazani su u Tabeli br. 17.

Tabela br. 17 Matrica povezanosti i stepen čvoraza podetažu +710 m

čvor	1	29	36	37	38	39	k
1	0	1	0	0	1	0	2
29	0	0	1	0	0	0	1
36	0	0	0	1	0	0	1
37	0	0	0	0	0	1	1
38	0	0	0	1	0	1	2
39	0	0	0	0	0	0	0

Verovatnoća raspodele stepena čvora za orjentisani graf transportne mreže za podetažu na koti +710 m prikazana je na slici br. 49.



Slika br. 49 Verovatnoća raspodele stepena čvora za podetažu +710 m

Srednji stepen čvora na nivou cele mreže je 1.16. Matrica rastojanja i karakteristična dužina puta mreže prikazani su u Tabeli br. 18.

Tabela br. 18 Matrica rastojanja i karakteristična dužina puta za podetažu +710 m

čvor	1	29	36	37	38	39
1	0	45	0	0	73	0
29	0	0	77	0	0	0
36	0	0	0	56	0	0
37	0	0	0	0	0	50
38	0	0	0	30	0	452
39	0	0	0	0	0	0
Karakteristična dužina puta: 26.1						

Korak 4: mogući putevi transporta $P=\{p_1,p_2,p_3\}$ iz početnog čvora 1 (pristupne tačke) sa prve podetaže na koti +710 m, pa do krajnjeg čvora 39 (ulaza u rudnik) i odgovarajuće fuzzy troškovne funkcije $\tilde{F}_i(p_i,t)=(a_i(t),b_i(t),c_i(t))$, $i=1,2,3$.

Plan otkopavanja podetaže na koti +710 m, u zavisnosti od sistema otvaranja, prikazan je u Tabeli br. 19.

Tabela br. 19 Plan otkopavanja za podetažu +710 m

Početak otkopavanja (godina)			Vreme otkopavanja (godina)			Kraj otkopavanja (godina)			Početak (godina)	Kraj (godina)	Početak (godina)	Kraj (godina)
Otvaranje oknom (p_1)												
1.5	1.7	2.0	0.32	0.39	0.48	1.89	2.09	2.48	1.73	2.15	2	3
Otvaranje niskopom (p_2)												
1.0	1.2	1.5	0.32	0.39	0.48	1.31	1.59	1.97	1.23	1.62	2	2
Otvaranje okno–niskop (p_3)												
1.4	1.6	1.9	0.32	0.39	0.48	1.79	1.99	2.38	1.63	2.05	2	3

Putevi transporta iz početnog čvora 1 (pristupne tačke) sa prve podetaže na koti +710 m, pa do krajnjeg čvora 39 (ulaza u rudnik) i odgovarajuće fuzzy troškovne funkcije dati su u Tabeli br. 20.

Tabela br. 20 Putevi transporta i fuzzy troškovne funkcije za podetažu +710 m

Put	Opis	Graf	Fuzzy troškovna funkcija (\$)
p_1	rudna sipka +710, +662 transportno-izvozni horizont +662 okno +662, +718, +768	1–29–36–37–39	$F_1(278023 \ 313664 \ 352924)$
p_2	pristupni niskop +710, +718 glavni izvozni niskop +718, +768	1–38–39	$F_2(72520 \ 93826 \ 119664)$
p_3	pristupni niskop +710, +718 transportno-izvozni horizont +718 okno +718, +768	1–38–37–39	$F_3(95217 \ 112967 \ 130693)$

Korak 5: interval γ -preseka ($\gamma=0.5$) za trouglaste fuzzy brojeve svih troškovnih funkcija $\tilde{F}_i(p_i, t) = (a_i(t), b_i(t), c_i(t))$, $i = 1, 2, 3$ primenjujući izraz (51). Staviti $F_{i(\gamma)} = [F_{i(\gamma)}^L, F_{i(\gamma)}^U]$, $i = 1, 2, 3$.

Intervali γ -preseka ($\gamma=0.5$) za fuzzy troškovne funkcije predstavljeni su u Tabeli br. 21.

Tabela br. 21 Intervali γ -preseka ($\gamma=0.5$)
troškovnih funkcija za podetažu +710 m

Fuzzy troškovna funkcija (\$)	$F_{i(0,5)} = [F_{i(0,5)}^L, F_{i(0,5)}^U]$
F_1	[295843, 333294]
F_2	[83172, 106745]
F_3	[104091, 121830]

Korak 6: indeksi konveksnosti, $IK(F_i) = \lambda(F_{i(\gamma)}^L) + (1-\lambda)(F_{i(\gamma)}^U)$, $\lambda=1$, za sve troškovne funkcije, $\tilde{F}_i(p_i, t) = (a_i(t), b_i(t), c_i(t))$, $i=1,2,3$, primenjujući izraz (52), dati su u Tabeli br. 22.

Tabela br. 22 Indeksi konveksnosti ($\lambda=1$)
troškovnih funkcija za podetažu +710 m

Fuzzy troškovna funkcija (\$)	$F_{i(0,5)} = [F_{i(0,5)}^L, F_{i(0,5)}^U]$	$IK(\tilde{F}_i)$
F_1	[295843, 333294]	295844
F_2	[83172, 106745]	83173
F_3	[104091, 121830]	104092

Korak 7: najjeftiniji način otvaranja–transporta, koji je definisan indeksom konveksnosti najmanje vrednosti, za podetažu +710 m, je otvaranje niskop i njemu je dodeljen rang, $p_2 \rightarrow r=1$.

Korak 8: poredak rangova za sve preostale puteve, u skladu sa rastućim nizom Indeksa konveksnosti i njima odgovarajuće vrednosti prikazani su u Tabeli br. 23.

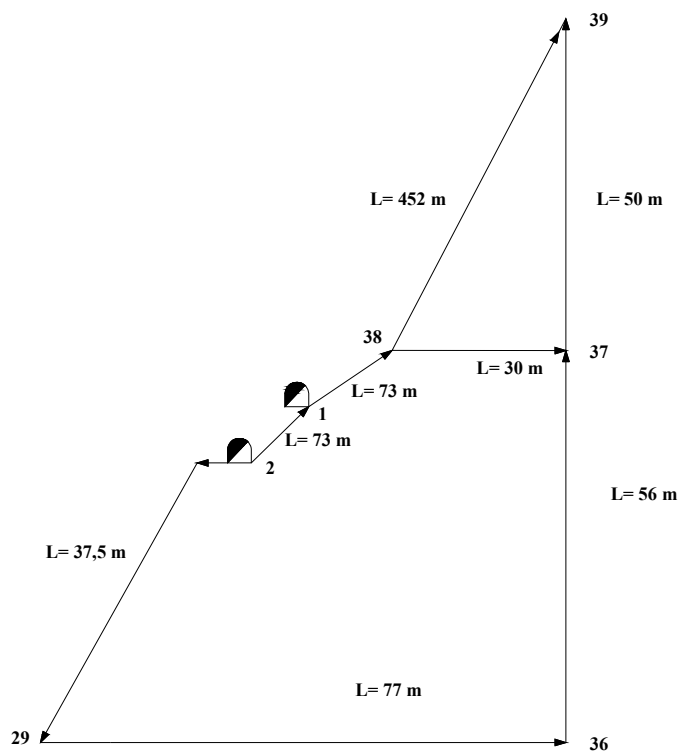
Tabela br. 23 Poredak rangova sistema otvaranja za podetažu +710 m

Put Sistem otvaranja	Fuzzy troškovna funkcija (\$)	$IK(\tilde{F}_i)$	Rang
p_1	F_1	295844	3
p_2	F_2	83173	1
p_3	F_3	104092	2

Korak 9: kako rudno telo zaleže u dubinu, ponovljeni su koraci 3,4,5,6,7 i 8 za sve preostale definisane pristupne tačke, odnosno za sve preostale podetaže.

Podetaža +702 m

Orjentisana transportna mreža za podetažu na koti +702 m prikazana je grafom na slici br. 50.



Slika br. 50 Graf orjentisane transportne mreže za podetažu na koti +702 m

Matrica rastojanja za podetažu +702 m prikazana je u Tabeli br. 24.

Tabela br. 24 Matrica rastojanja za podetažu +702 m

čvor	2	1	29	36	37	38	39
2	0	73	37,5	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	73	0
29	0	0	0	77	0	0	0
36	0	0	0	0	56	0	0
37	0	0	0	0	0	0	50
38	0	0	0	0	30	0	452
39	0	0	0	0	0	0	0

Karakteristike mreže za podetažu +702 m date su u Tabeli br. 25.

Tabela br. 25 Karakteristike mreže za podetažu +702 m

čvor	k	$P(k)$	$\langle k \rangle$	L
2	2	0.25	1.14	20.20
1	1	0.5		
29	1	0.5		
36	1	0.5		
37	1	0.5		
38	2	0.25		
39	0	0.125		

Plan otkopavanja podetaže na koti +702 m, u zavisnosti od sistema otvaranja, prikazan je u Tabeli br. 26.

Tabela br. 26 Plan otkopavanja za podetažu +702 m

Početak otkopavanja (godina)			Vreme otkopavanja (godina)			Kraj otkopavanja (godina)			Početak (godina)	Kraj (godina)	Početak (godina)	Kraj (godina)
Otvaranje oknom (p_1)												
1.89	2.09	2.48	0.29	0.37	0.46	2.19	2.47	2.94	2.15	2.53	3	3
Otvaranje niskopom (p_2)												
1.31	1.59	1.97	0.29	0.37	0.46	1.61	1.97	2.44	1.63	2.01	2	3
Otvaranje okno–niskop (p_3)												
1.79	1.99	2.38	0.29	0.37	0.46	2.09	2.37	2.84	2.05	2.43	3	3

Putevi transporta iz početnog čvora 2 (pristupne tačke) sa druge podetaže na koti +702 m, pa do krajnjeg čvora 39 (ulaza u rudnik), odgovarajuće fuzzy troškovne funkcije, indeksi konveksnosti i odgovarajući rangovi dati su u Tabeli br. 27.

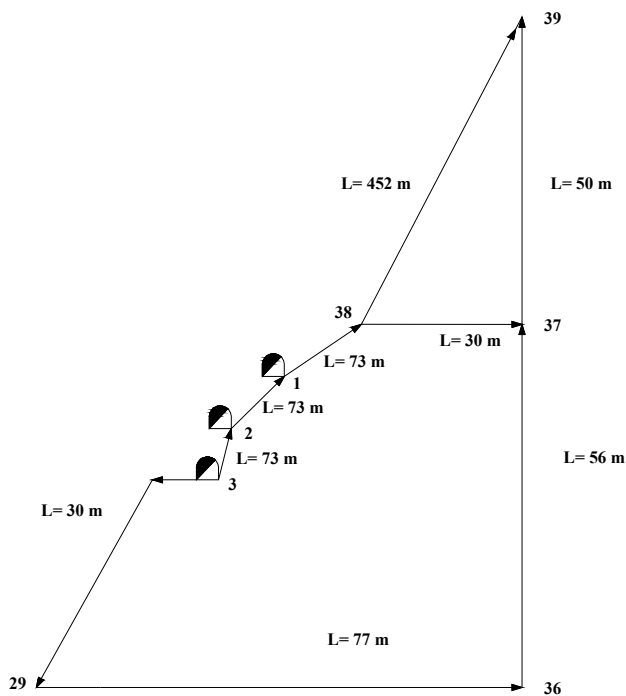
Tabela br. 27 Putevi transporta i fuzzy troškovne funkcije za podetažu +702 m

Put	Opis	Graf	Fuzzy troškovna funkcija (\$)	$F_{i(0,5)}$	$IK(\tilde{F}_i)$	Rang
P_1	rudna sipka +702, +662 transportno-izvozni horizont +662 okno +662, +718, +768	2–29–36– 37–39	275601 311417 350937	[293509, 331177]	293509	3
P_2	pristupni niskop +702, +710, +718 glavni izvozni niskop +718, +768	2–1–38– 39	79605 104926 136217	[92265, 120571]	92265	1

p ₃	pristupni niskop +702,+710,+718	2-1-38-37-39	97249			
	transportno-izvozni +718	horizont	117681	[107465, 128355]	107465	2
	okno +718, +768		139030			

Podetaža +694 m

Orjentisana transportna mreža za podetažu na koti +694 m prikazana je grafom na slici br. 51.



Slika br. 51 Graf orjentisane transportne mreže za podetažu na koti +694 m

Matrica rastojanja za podetažu +694 m prikazana je u Tabeli br. 28.

Tabela br. 28 Matrica rastojanja za podetažu +694 m

čvor	3	2	1	29	36	37	38	39
3	0	73	0	30	0	0	0	0
2	0	0	73	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	73	0
29	0	0	0	0	77	0	0	0

36	0	0	0	0	0	56	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	50
38	0	0	0	0	0	30	0	452
39	0	0	0	0	0	0	0	0

Karakteristike mreže za podetažu +694 m date su u Tabeli br. 29.

Tabela br. 29 Karakteristike mreže za podetažu +694 m

čvor	k	$P(k)$	$\langle k \rangle$	L
3	2	0.222	1.12	16.32
2	1	0.555		
1	1	0.555		
29	1	0.555		
36	1	0.555		
37	1	0.555		
38	2	0.222		
39	0	0.111		

Plan otkopavanja podetaže na koti +694 m, u zavisnosti od sistema otvaranja, prikazan je u Tabeli br. 30.

Tabela br. 30 Plan otkopavanja za podetažu +694 m

Početak otkopavanja (godina)		Vreme otkopavanja (godina)			Kraj otkopavanja (godina)			Početak (godina)	Kraj (godina)	Početak (godina)	Kraj (godina)	
Otvaranje oknom (p_1)												
2.19	2.47	2.94	0.23	0.29	0.35	2.42	2.75	3.29	2.53	2.82	3	3
Otvaranje niskopom (p_2)												
1.61	1.97	2.44	0.23	0.29	0.35	1.84	2.25	2.79	2.01	2.29	3	3
Otvaranje okno–niskop (p_3)												
2.09	2.37	2.84	0.23	0.29	0.35	2.32	2.65	3.19	2.43	2.72	3	3

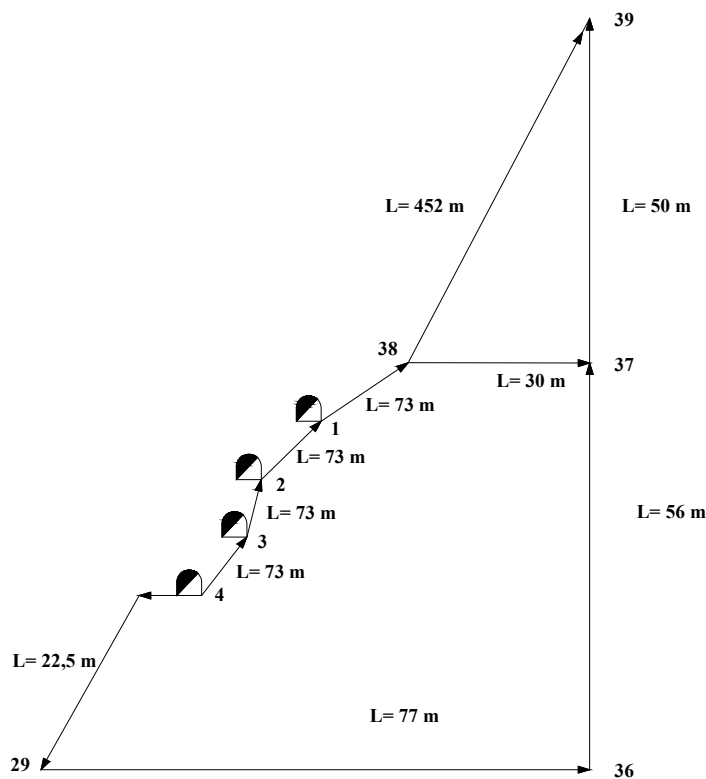
Putevi transporta iz početnog čvora 3 (pristupne tačke) sa treće podetaže na koti +694 m, pa do krajnjeg čvora 39 (ulaza u rudnik), odgovarajuće fuzzy troškovne funkcije, indeksi konveksnosti i odgovarajući rangovi dati su u Tabeli br. 31.

Tabela br. 31 Fuzzy troškovne funkcije puteva, indeksi konveksnosti i rangovi za podetažu +694 m

Put	Opis	Graf	Fuzzy troškovna funkcija (\$)	$F_{i(0,5)}$	$IK(\tilde{F}_i)$	Rang
p_1	rudna sipka +694, +662 transportno-izvozni horizont +662 okno +662, +718, +768	3-29-36- 37-39	269212 302261 338524	[285737, 320392]	285737	3
p_2	pristupni niskop +694, ..., +718 glavni izvozni niskop +718, +768	3-2-1- 38-39	80817 103335 130685	[92076, 117010]	92076	1
p_3	pristupni niskop +694, ..., +718 transportno-izvozni horizont +718 okno +718, +768	3-2-1- 38-37-39	93282 112002 133718	[102642, 122860]	102642	2

Podetaža +686 m

Orjentisana transportna mreža za podetažu na koti +686 m prikazana je grafom na slici br. 52.



Slika br. 52 Graf orjentisane transportne mreže za podetažu na koti +686 m

Matrica rastojanja za podetažu +686 m prikazana je u Tabeli br. 32.

Tabela br. 32 Matrica rastojanja za podetažu +686 m

čvor	4	3	2	1	29	36	37	38	39
4	0	73	0	0	22.5	0	0	0	0
3	0	0	73	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	73	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	73	0
29	0	0	0	0	0	77	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	56	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	50
38	0	0	0	0	0	0	30	0	452
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Karakteristike mreže za podetažu +686 m date su u Tabeli br. 33.

Tabela br. 33 Karakteristike mreže za podetažu +686 m

čvor	k	$P(k)$	$\langle k \rangle$	L
4	2	0.2	1.11	13.60
3	1	0.6		
2	1	0.6		
1	1	0.6		
29	1	0.6		
36	1	0.6		
37	1	0.6		
38	2	0.6		
39	0	0.1		

Plan otkopavanja podetaže na koti +686 m, u zavisnosti od sistema otvaranja, prikazan je u Tabeli br. 34.

Tabela br. 34 Plan otkopavanja za podetažu +686 m

Početak otkopavanja (godina)			Vreme otkopavanja (godina)			Kraj otkopavanja (godina)			Početak (godina)	Kraj (godina)	Početak (godina)	Kraj (godina)
Otvaranje oknom (p_1)												
2.42	2.75	3.29	0.30	0.37	0.45	2.71	3.12	3.73	2.82	3.19	3	4
Otvaranje niskopom (p_2)												
1.84	2.25	2.79	0.30	0.37	0.45	2.13	2.62	3.23	2.29	2.66	3	3
Otvaranje okno–niskop (p_3)												
2.32	2.65	3.19	0.30	0.37	0.45	2.61	3.02	3.63	2.72	3.09	3	4

Putevi transporta iz početnog čvora 4 (pristupne tačke) sa četvrtе podetaže na koti +686 m, pa do krajnjeg čvora 39 (ulaza u rudnik), odgovarajuće fuzzy troškovne funkcije, indeksi konveksnosti i odgovarajući rangovi dati su u Tabeli br. 35.

Tabela br. 35 Fuzzy troškovne funkcije puteva, indeksi konveksnosti i rangovi za podetažu +686 m

Put	Opis	Graf	Fuzzy troškovna funkcija (\$)	$F_{i(0,5)}$	$IK(\tilde{F}_i)$	Rang
p_1	rudna sipka +686, +662 transportno-izvozni horizont +662 okno +662, +718, +768	4–29–36–37–39	275818 311195 350249	[293507, 330722]	293507	3
p_2	pristupni niskop +686, ..., +718 glavni izvozni niskop +718, +768	4–3–2–1–38–39	100222 131890 170800	[116056, 151345]	116056	1
p_3	pristupni niskop +686, ..., +718 transportno-izvozni horizont +718 okno +718, +768	4–3–2–1–38–37–39	106601 131125 160022	[118863, 145573]	118863	2

Na isti način se definišu rangovi i za sve preostale podetaže, +686 m, +678 m, ..., +494 m.

Fuzzy troškovne funkcije, Indeks konveksnosti i rang za svaku podetažu ponaosob prikazani su u Tabeli br. 36.

Tabela br. 36 Fuzzy troškovne funkcije puteva, indeksi konveksnosti i rangovi

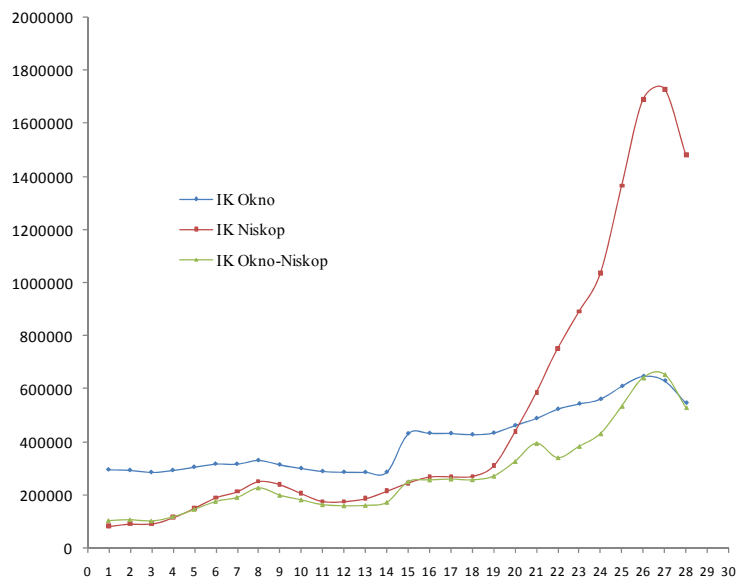
	Fuzzy troškovna funkcija (\$)			$F_{i(0,5)} = [F_{i(0,5)}^L, F_{i(0,5)}^U]$		$IK(\tilde{F}_i)$	Rang
Podetaža +710 m							
p_1	278023	313664	352924	295844	333294	295844	3
p_2	72520	93826	119664	83173	106745	83173	1
p_3	95217	112967	130693	104092	121830	104092	2
Podetaža +702 m							

p_1	275601	311417	350937	293509	331177	293509	3
p_2	79605	104926	136217	92265	120571	92265	1
p_3	97249	117681	139030	107465	128355	107465	2
Podetaža +694 m							
p_1	269212	302261	338524	285737	320392	285737	3
p_2	80817	103335	130685	92076	117010	92076	1
p_3	93282	112002	133718	102642	122860	102642	2
Podetaža +686 m							
p_1	275818	311195	350249	293507	330722	293507	3
p_2	100222	131890	170800	116056	151345	116056	1
p_3	106601	131125	160022	118863	145573	118863	2
Podetaža +678 m							
p_1	285965	325214	368853	305590	347034	305590	3
p_2	128031	175196	234086	151613	204641	151613	2
p_3	127544	164887	210233	146215	187560	146215	1
Podetaža +670 m							
p_1	295841	339039	387464	317440	363252	317440	3
p_2	158809	223615	305455	191212	264535	191212	2
p_3	151095	202162	265080	176628	233621	176628	1
Podetaža +662 m							
p_1	295130	339313	389236	317221	364275	317221	3
p_2	176258	251224	346388	213741	298806	213741	2
p_3	161877	221183	294973	191530	258078	191530	1
Podetaža +654 m							
p_1	308164	354169	407247	331167	380708	331167	3
p_2	205326	298989	419038	252158	359013	252158	2
p_3	204476	249676	302769	227076	276222	227076	1
Podetaža +646 m							
p_1	294027	335187	382525	314607	358856	314607	3
p_2	196840	283718	394957	240279	339338	240279	2
p_3	179842	218920	265371	199381	242145	199381	1
Podetaža +638 m							
p_1	282550	318981	360626	300765	339803	300765	3
p_2	173426	239224	322975	206325	281099	206325	2
p_3	164791	199209	240438	182000	219824	182000	1
Podetaža +630 m							
p_1	273167	305918	343101	289542	324509	289542	3

p_2	153473	200247	259189	176860	229718	176860	2
p_3	149739	177854	211449	163796	194651	163796	1
Podetaža +622 m							
p_1	270828	302202	337652	286515	319927	286515	3
p_2	156346	197131	247078	176739	222105	176739	2
p_3	146816	172897	203737	159856	188317	159856	1
Podetaža +614 m							
p_1	270408	301670	336996	286039	319333	286039	3
p_2	166140	208043	259156	187091	233599	187091	2
p_3	147626	174695	206873	161160	190784	161160	1
Podetaža +606 m							
p_1	270646	302503	338713	286575	320608	286575	3
p_2	189093	242198	307761	215645	274979	215645	2
p_3	156317	189385	229380	172851	209383	172851	1
Podetaža +598 m							
p_1	407767	457271	511907	432519	484589	432519	3
p_2	212938	280068	364949	246503	322508	246503	1
p_3	233930	267589	305761	250760	286675	250760	2
Podetaža +590 m							
p_1	409112	459312	514845	434212	487078	434212	3
p_2	231204	307317	404251	269261	355784	269261	2
p_3	238140	275876	319564	257008	297720	257008	1
Podetaža +582 m							
p_1	408469	458370	513534	433420	485952	433420	3
p_2	229136	311290	412908	270213	362099	270213	2
p_3	240169	280400	327533	260284	303966	260284	1
Podetaža +574 m							
p_1	405191	452655	504699	428923	478677	428923	3
p_2	235556	307664	393800	271610	350732	271610	2
p_3	238360	276840	321392	257600	299116	257600	1
Podetaža +566 m							
p_1	410383	460213	515155	435298	487684	435298	3
p_2	268417	353263	458853	310840	406058	310840	2
p_3	248585	294349	348344	271467	321346	271467	1
Podetaža +558 m							
p_1	433643	493370	560445	463507	526907	463507	3
p_2	361982	517575	715974	439779	616774	439779	2

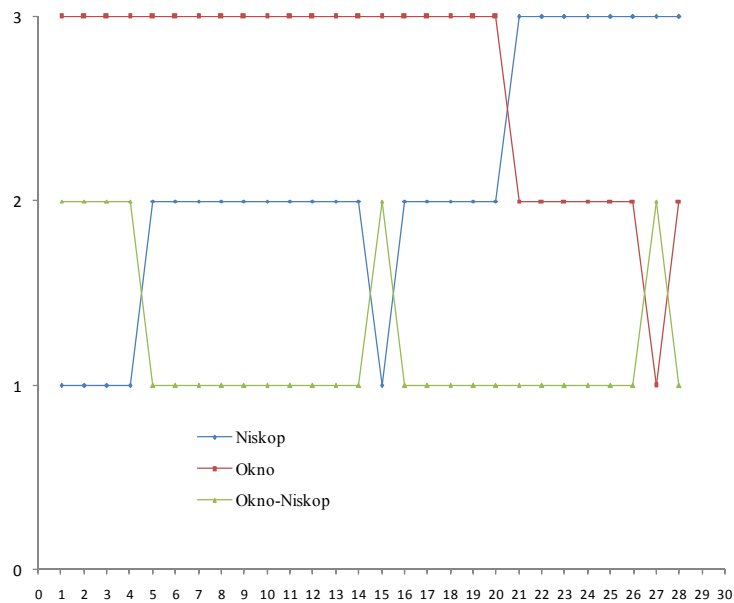
p_3	289387	364489	456583	326938	410536	326938	1
Podetaža +550 m							
p_1	454592	526148	608300	490370	567224	490370	2
p_2	462016	714560	1046077	588288	880318	588288	3
p_3	335602	454395	605612	394999	530004	394999	1
Podetaža +542 m							
p_1	483171	568245	668479	525708	618362	525708	2
p_2	570221	937619	1425268	753920	1181443	753920	3
p_3	304181	377591	467132	340886	422361	340886	1
Podetaža +534 m							
p_1	499466	591644	700440	545555	646042	545555	2
p_2	664134	1120414	1719429	892274	1419922	892274	3
p_3	333800	432835	504337	383318	468586	383318	1
Podetaža +526 m							
p_1	510164	616643	745390	563404	681016	563404	2
p_2	745182	1328214	2122357	1036698	1725285	1036698	3
p_3	361035	501612	683696	431323	592654	431323	1
Podetaža +518 m							
p_1	546966	677905	838529	612435	758217	612435	2
p_2	946037	1788192	2942289	1367114	2365240	1367114	3
p_3	425549	644129	933722	534839	788926	534839	1
Podetaža +510 m							
p_1	576412	723442	904376	649927	813909	649927	2
p_2	1139704	2242797	3741954	1691250	2992376	1691250	3
p_3	489227	793981	1199148	641604	996565	641604	1
Podetaža +502 m							
p_1	562143	704173	879104	633158	791639	633158	1
p_2	1161305	2300330	3852544	1730818	3076437	1730818	3
p_3	488627	820146	1263849	654387	1041998	654387	2
Podetaža +494 m							
p_1	480181	617693	753054	548937	685374	548937	2
p_2	985242	1979247	3171965	1482245	2575606	1482245	3
p_3	370794	688576	1117464	529685	903020	529685	1

Korak 10: (PE, IK) dijagram, gde je na x osi nanet redni broj podetaže (PE), odnosno pristupne tačke, a na y osi vrednost Indeksa konveksnosti (IK), prikazan je na slici br. 53.



Slika br. 53 Dijagram Indeksa konveksnosti

Korak 11: (PE, r) dijagram, gde je na x osi nanet redni broj podetaže (PE), odnosno pristupne tačke, a na y osi vrednosti pridruženih rangova (r), prikazan je na slici br. 54.



Slika br. 54 Dijagram rangova

Korak 12: skup procene alternativa, matrica $R=[r_{yk}]$, u skladu sa izrazom (47).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	
p_1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1	2	
p_2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
p_3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	

Korak 13: za svaki red matrice $R=[r_{yk}]$ izračunat je zbir svih članova u redu. Alternativa kojoj odgovara red sa minimalnim zbirom članova predstavlja optimalni sistem otvaranja za dato ležište (videti jednačinu 48).

$$SO_1 = p_1 = \sum_{k=1}^{28} r_{1k} = 75$$

$$SO_2 = p_2 = \sum_{k=1}^{28} r_{2k} = 59$$

$$SO_3 = p_3 = \sum_{k=1}^{28} r_{3k} = 34$$

Optimalan sistem otvaranja određen je na osnovu kompozitnog ranga:

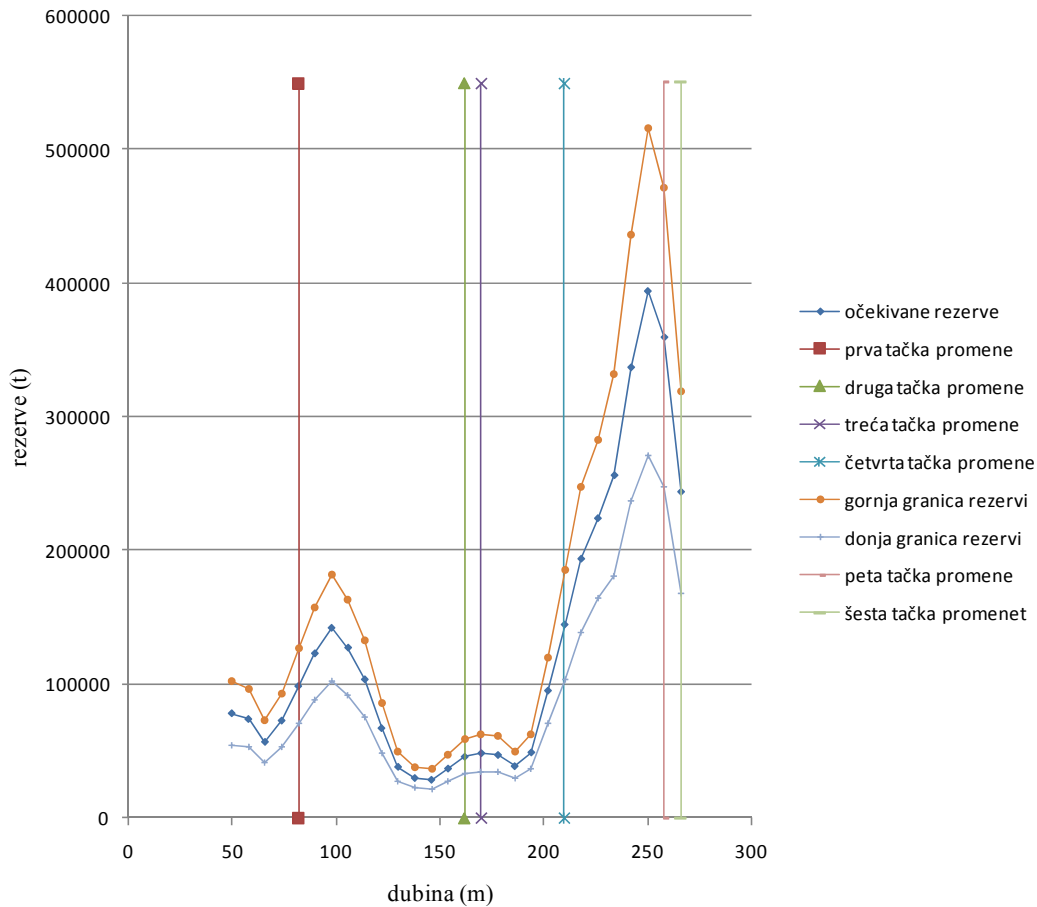
$$SO = \min \left[\sum_{k=1}^{28} r_{1k}, \sum_{k=1}^{28} r_{2k}, \sum_{k=1}^{28} r_{3k} \right] = [75 \ 59 \ 34] \rightarrow \min(\text{rang}[3 \ 2 \ 1])$$

Za dato ležište optimalan sistem otvaranja je Okno-niskop.

5.3 Diskusija dobijenih rezultata

Dobijeni poredak kompozitnog ranga ukazuje na sledeći poredak sistema otvaranja podzemnog rudnika: Okno-niskop, Niskop i Okno.

Na slici br. 55 prikazan je dijagram proemene preference sistema otvaranja u funkciji dubine i rezervi rude na podetaži, u skladu sa dijagramom prikazanim na slici br. 54.



Slika br. 55 Pozicije promene preference sistema otvaranja

Dijagram na prethodnoj slici ilustruje različite pozicije promene preference sistema otvaranja za različite dubine otkopavanja, različite rezerve rude na svakoj podetaži, pri konstantnom kapacitetu proizvodnje. Pri kapacitetu proizvodnje od 200 000 t/god, prva tačka promene preference sistema otvaranja nalazi se na dubini od 82 m. Do ove dubine, sistem otvaranja baziran na niskopu je u prednosti u odnosu na sistem otvaranja baziran na oknu, dok sistem otvaranja baziran na kombinaciji okna i niskopa je najnepovoljniji način.

Ako za trenutak zanemarimo poziciju promene preference sistema otvaranja na dubini od 162 m, u kojoj je niskop u prednosti u odnosu na kombinaciju okno–niskop, može se videti da je kombinacija okno–niskop u prednosti u odnosu na niskop od dubine 82 m, pa sve do dubine 266 m. Ova tranzicija preference prouzrokovana je značajnim smanjenjem rezervi rude, počevši od podetaže +638 m (na dubini od 122 m) pa do podetaže +598 m (na dubini od 162 m). Iako je smanjenje rezervi rude od

podetaže +638 m, pa do podetaže +630 m, oko 50%, to nije bilo dovoljno da se preferenca trenutno promeni. Bilo je potrebno pet podetaža, sa smanjenim rezervama rude, za realizaciju tranzicije.

To ukazuje da dubina na kojoj se izvodi eksploatacija, ima veći uticaj na tranziciju preference sistema otvaranja nego smanjenje rezervi rude. Veoma važna pozicija promene preference sistema otvaranja nalazi se na dubini od 210 m, gde okno postaje bolja opcija nego niskop.

To ukazuje da je niskop ekonomičnija varijanta otvaranja do dubine 210 m, dok je okno u prednosti posle ove dubine. Supremacija okna nad niskopom je takođe potvrđena pozicijom promene preference sistema otvaranja na dubini od 258 m, gde je okno u prednosti i u odnosu na sistem otvaranja okno–niskop.

6. ZAKLJUČAK I BUDUĆA ISTRAŽIVANJA

Izbor sistema otvaranja podzemnog rudnika svrstan je u grupu problema tretiranu kao strateški proces odlučivanja, koji ima skoro presudan uticaj na budućnost rada podzemnog rudnika. Glavni projektni zadatak je usmeren ka određivanju sistema otvaranja, kojim se obezbeđuje pristup ležištu, odnosno svakoj unapred definisanoj tački, kao i transport otkopane rude do površine terena. U ovoj disertaciji problem otvaranja podzemnog rudnika tretiran je kao mreža koja međusobno povezuje sve podzemne karakteristične tačke sa ulazom u rudnik, uz poštovanje zahteva da troškovi otvaranja i transporta imaju minimalnu vrednost. Model izbora sistema otvaranja uzima u obzir troškove potrebne da se izrade podzemne prostorije otvaranja, količine rude koje treba transportovati do površine terena, dužine transportnih puteva i jedinične troškove transporta. Dinamička i fazifikovana priroda modela čini okruženje u kojem se donose odluke mnogo realističnijim a dobijene rezultate pouzdanijim. Mrežno modeliranje daje mogućnost da se podzemni rudnik predstavi skoro kao fizički model. U suštini, izbor sistema otvaranja podzemnog rudnika odgovara izboru bilo kojeg investicionog poduhvata. Uzimajući ovu činjenicu u obzir, tada mrežni model omogućava donosiocima odluke (upravljačkim strukturama kompanije, vlasnicima kompanije, potencijalnim investitorima, itd.), koji nisu upućeni u podzemnu eksploataciju ležišta mineralnih sirovina, da ovaj problem saledaju na potpuno razumljiv način. Relevantnost predloženog modela poduprta je činjenicom da su rezultati dobijeni u uslovima neodređenosti. Jedna od glavnih prednosti predloženog pristupa rešavanju problema izbora sistema otvaranja podzemnog rudnika ogleda se u kvantifikaciji neodređenosti ulaznih podataka primenom teorije fuzzy skupova, kao i teorije stohastičkih difuznih procesa. Na ovaj način uključeni su rizici u proces donošenja strateških odluka, kao što je nesumnjivo i izbor sistema otvaranja podzemnog rudnika. Okvir budućih istraživanja može se proširiti u smislu uvođenja dodatnih kriterijuma u proces odlučivanja, zadržavajući kriterijum kompozitnog rangiranja zasnovan na Indeksu konveksnosti. Novi kriterijumi mogu obuhvatiti indikatore kao što su pouzdanost opreme, kompleksnost sistema otvaranja po osnovu izvođenja radova i po osnovu transporta rude. Na ovaj način problem izbora sistema otvaranja podzemnog rudnika tretiraće se kao višedimenzioni problem strateškog odlučivanja.

7. LITERATURA

- [1] A. Swishchuk., A. Ware., H. Li., Option Pricing with Stochastic Volatility Using Fuzzy Sets Theory, Northern Finance Association 2008 Conference Paper, <http://www.northernfinance.org/2008/papers/182.pdf>
- [2] Bellman, RE.; Zadeh, LA.: Local and fuzzy logics. In: Dunn JM, Epstein G (eds.) Modern uses of multiple-valued logic. Kluwer, Boston, pp.105–151, pp.158–165 (1977)
- [3] Bojadziev, G.; Bojadziev, M.: Fuzzy sets and fuzzy logic applications, World Scientific, (1996).
- [4] Brazil ,M., Lee, D.H, Van Leuven, M., Rubinstein, J.H., Thomas, D.A., and Wormald, N.C.(2003). Optimising declines in underground mines, Mining technol Trans Instit Mining Metallurgy, Section A, 164-170.
- [5] Brazil, M. and Thomas, D.A.(2007) Network Optimization for the Design of Underground Mines, Networks-DOI10.1002/net, 40-50.
- [6] Brazil, M., Lee, H., Rubinstein, H., Thomas, D., Weng, J., Wormald, C., et al. (2000). Network optimization of underground mine design. The AusIMM Proceedings 1, 57-65.
- [7] Brazil, M., Thomas, D.A and Weng, J.F (1998). Gradient Constrained Minimal Steiner Trees, in Network Design: Connectivity and Facilities Location (DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 40) American Mathematical Society: Providence, 23-38.
- [8] Brimberg, J., Juel, H. and Schoble ,A., Linear facility location in three dimensions-models and solution methods, Operation Research, (2002), pp. 1050-1057.
- [9] Chuang, T. N., Kung, J. Y. (2005). The fuzzy shortest path length and the corresponding shortest path in a network. Computers and Operations Research, 32, 1409-1428, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2003.11.011>.

- [10] Č. Beljić. Model izbora optimalne varijante otvaranja i pripreme u podzemnoj eksploataciji, Doktorska disertacija, Beograd, 2004, pp. 47-54.
- [11] Dragoš Cvetković, Teorija grafova i njene primene, IDP Naučna Knjiga, Beograd, 1990, ISBN 86-23-20206-6.
- [12] Dubois, D., Prade, H. (1980). Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, New York: Academic Press.
- [13] Đanković, V. G. Egzistencija i jedinstvenost rešenja i metode za rešavanje nekih klasa stohastičkih diferencijalnih jednačina, Master rad, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Beograd, 2013.
- [14] Elevli, B., Demirci, A. and Dayi, O., Underground haulage selection: Shaft or ramp for small-scale underground mine, The Journal of The South African Institute of Mining and Metallurgy, (2002), pp. 255-260.
- [15] Elizabeth, S., Sujatha. L. (2011). Fuzzy Shortest Path Problem Based on Index Ranking, Journal of Mathematics Research, Vol. 3, No. 4, 80-88, November 2011, <http://dx.doi.org/10.5539/jmr.v3n4p80>
- [16] Ferreira-Santos, F (2012). Complex Network Analysis of Brain Connectivity: An Introduction (LabReport No.5). Port: Laboratory of Neuropsychophysiology (University of Porto).
- [17] Gligoric, Z., Beljic, C., Simeunovic, V., Shaft location selection at deep multiple orebody deposit by using fuzzy TOPSIS method and network optimization, Expert Systems With Applications, Volume 37, Issue 2, (2010), pp. 1408-1418.
- [18] Goguen J. A., The logic of inexact concepts, Synthese, 1969, 19, pp. 325-373.
- [19] H. J. Zimmermann, Fuzzy set theory, Advanced review, Volume 2, May/June 2010, John wiley & Sons, Inc. pp.317-332.
- [20] Hall, B.E., A Quantitative Assessment of the Factors Influencing the Shaft Versus Trucks Decision, Proceedings 9th AusIMM Underground Operators' Conference, Perth March, (2005).

- [21] Hoffman, P., 1998, *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdos and the Search for Mathematical Truth*. New York: Hyperion, pp. 238-239.
- [22] J. Do, H. Song, S. So. and Y. Soh., Comparison of Deterministic Calculation and Fuzzy Arithmetic for Two Prediction Model Equations of Corrosion Initiation, *Journal of Asian Architecture and Building Engineering* , Vol.4. No.2, November 2005, pp.447-454.
- [23] Kaufmann, A.; Gupta M.M.: *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*, Van Nostrand Reinhold, New York, (1985).
- [24] Klein, C. M. (1991). Fuzzy shortest paths, *Fuzzy Sets and Systems*, 39, 27-41. [http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114\(91\)90063-V](http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(91)90063-V)
- [25] Kung, J. Y., Chuang, T. N., Lin, C. T. (2006). Decision making on network problem with fuzzy arc lengths , *IMACS Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications (CESA)*, October 4-6, Beijing, China, 578-580.
- [26] Lee, H., et al., (1989). Industrial case studies of Steiner trees, paper presented at NATO Advanced Research Workshop on Topological Network Design, Denmark.
- [27] Lin, K., Chen, M. (1994). the fuzzy shortest path problem and its most vital arcs. *Fuzzy sets and Systems*, 58, 343-353. [http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114\(93\)90508-F](http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(93)90508-F)
- [28] Lizotte, Y., Elbrond, J., et al. (1985). Optimal layout of underground mining levels. *Canad Inst Min Bull* 78: pp. 41-48.
- [29] Mahdavi, I., Tajdin, A., Nourifar, R., Hasanzade, R., Amiri., N. M. (2007). designing a new algorithm for the fuzzy shortest path problem in a network, *Proceeding of the 37th International Conference on Computers and Industrial Engineering*, October 20-23, Alexandria, Egypt, 2385-2392.
- [30] Metropolis, N. and Ulam, S., 1949, "The Monte Carlo Method." *J. Amer. Stat. Assoc.* 44, 335-341.

- [31] Newman, M. E. J. (2003). The Structure and function of complex networks. SIAM review, 45 (2), 167-256. doi: 10.1137/S003614450342480
- [32] Okada, S., Soper, T. (2000). A shortest path problem on a network with fuzzy arc lengths, Fuzzy Sets and Systems, 109, 129-140, [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114\(03\)00225-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(03)00225-2)
- [33] Stanković, M. Stohastičke diferencijalne jednačine, Master rad, Univerzitet u Nišu, Prirodno matematički fakultet, Departman za matematiku, Niš, 2014.
- [34] Zadeh L. A., Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Trans Syst Man cybernet, 1973, 3, pp.28-44.
- [35] Zadeh L.A. Fuzzy sets, Inform Control, 1965, 8, pp.338-353.
- [36] Zimmermann, H.J.: Fuzzy Set Theory and its Applications. Kluwer, Boston, (1998).
- [37] <http://www.bioinformatics.net/aminonet>
- [38] <http://www.vertex42.com/ExcelArticles/mc/MonteCarloSimulation.html>

BIOGRAFIJA AUTORA

Mr Saša M. Jovanović je rođen 11.06.1979. godine u Vranju. Osnovnu i srednju tehničku školu, smer Mašinski tehničar, završio je u Gornjem Milanovcu. Oženjen, otac je dvoje dece.

Rudarsko metalurški fakultet u Kosovskoj Mitrovici, opšti smer upisao je 1998. godine. Na Rudarsko – geološki fakultet prelazi, na treću godinu studija i opredeljuje se za smer: Podzemna eksploatacija ležišta mineralnih sirovina i izrada podzemnih prostorija.. Diplomirao je 2005. godine sa prosečnom ocenom 7,54 u toku studija i ocenom 10 na diplomskom ispitu na temu "Idejno tehničko rešenje istražno – eksploatacionih radova na lokalitetima Jezerište i Vučkovo ležište rudnika Blagodat" pod mentorstvom prof. dr Zorana Gligorića.

Magistarske studije na Rudarsko – geološkom fakultetu upisao je 2005. godine iz oblasti rudarstva – tehnologija podzemne eksploatacije ležišta. Magistarsku tezu pod nazivom "Model strateškog odlučivanja o nivou proizvodnje u podzemnom rudniku olova i cinka" odbranio je 2008. godine pod mentorstvom prof. dr Zorana Gligorića.

Radio je u rudniku i flotaciji AD Rudnik "Rudnik". Zatim prelazi u rudnike antimona AD "Zajača" Loznica kao direktor sektora rudarstva. Potom je radio kao direktor rudnika zlata olova i cinka "Lece" kod Medveđe. Bavio se i rudarskim istražnim bušenjem na radnom mestu direktora u društvu "Magma prom". Takođe je učestvovao u izradi potrebne tehničke dokumentacije za rudnike u kojima je radio.

Autor je više radova u međunarodnim i domaćim časopisima.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Саша М. Јовановић

број уписа Р 320

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

**FUZZY СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛ ИЗБОРА СИСТЕМА ОТВАРАЊА
ПОДЗЕМНОГ РУДНИКА**

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _____

Јовановић Саша

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске верзије
докторског рада**

Име и презиме аутора Саша М. Јовановић

Број уписа Р 320

Студијски програм Рударско инжењерство

Наслов рада FUZZY СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛ ИЗБОРА СИСТЕМА ОТВАРАЊА ПОДЗЕМНОГ РУДНИКА

Ментор др Зоран Глигорић, редовни професор

Потписани Саша М. Јовановић

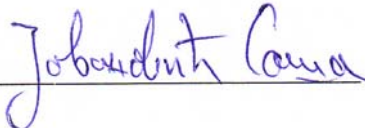
изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на портал **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, _____



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић” да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

FUZZY СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛ ИЗБОРА СИСТЕМА ОТВАРАЊА
ПОДЗЕМНОГ РУДНИКА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, _____

