

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Никола М. Росић

НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ  
ОТВОРЕНИХ ТОКОВА ЗАСНОВАНО НА  
ПРАЋЕЊУ ФЛУИДНИХ ДЕЛИЋА

докторска дисертација

Београд, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Nikola M. Rosić

NUMERICAL MODELLING OF  
FREE SURFACE FLOWS BASED ON  
THE SPH METHOD

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016.





## ЗАХВАЛНИЦА

Захваљујем се својим професорима и колегама са Катедре за хидротехнику и водно еколошко инжењерство који су ми пружили подршку при изради ове дисертације. Пре свих, захвалност дугујем ментору проф. др Љубодрагу Савићу на стручном вођењу дисертације.

Огромну захвалност на помоћи и разумевању у току свог рада на дисертацији, изражавам својим предметним професорима, доц. др Дејани Ђорђевић и в. проф. др Тини Дашић, као и доц. др Драгутину Павловићу.

Проф. др Душану Продановићу и в. проф. Зорани Науновић дугујем захвалност на ангажовању при добијању материјалне подршке за израду дисертације.

Својим колегама Ањи, Душану, Буди, Андријани, Жељку, Немањи, и Дамјану се захваљујем на несебичној помоћи и пријатељској подршци.

Посебну захвалност изражавам свом првом ментору, проф. др Миодрагу Јовановићу на указаном поверењу, стручној помоћи и саветима од самог почетка мог научног рада.

Велико хвала, мојим родитељима, Милораду и Мирјани, без којих ова дисертација не би била могућа.

Пропуштено заједничко време увек ћу дуговати својој девојци Маји. Захваљујем јој се на пруженој љубави и разумевању.

## НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ОТВОРЕНИХ ТОКОВА ЗАСНОВАНО НА ПРАЋЕЊУ ФЛУИДНИХ ДЕЛИЋА

Сажетак: У докторској дисертацији се анализира практична страна примене у хидротехници, једне од најпознатијих представника нумеричких метода које не захтевају рачунску мрежу, која се на енглеском језику назива *Smoothed Particle Hydrodynamics* (скраћено SPH). Применљивост методе испитана је коришћењем две варијанте методе, једне која служи за нумеричко моделирање просторног струјања и друге која служи за моделирање струјања у хоризонталној равни. С обзиром на то да су разматране варијанте методе нумерички неконзистентне и да досадашњим теоријским анализама није потврђена стабилност методе, постојао је интерес да се у раду на примерима из хидротехничке праксе оцени тачност методе. Такође, с обзиром да је метода изворно намењена моделирању изразито неустаљених појава, а да има одређене предности које би се и у другим случајевима могле искористити, анализирана је применљивост методе и у моделирању устаљених појава. У анализи су коришћена два стандардна SPH модела која су у току израде дисертације допуњена (измењена) како би се решавали изабрани проблеми из области хидраулике отворених токова. Тачност SPH методе је оцењивана у решавању проблема рушења бране, бурног течења у закривљеним цевима и струјања на моделу речне кривине. Допуне коришћених модела су се односиле на проблеме дефинисања граничних услова, моделирања дисипације механичке енергије и одређивања притиска приликом интеракције флуида и чврстих тела.

Кључне речи: Рачунска динамика флуида, SPH метода, отворени токови, проблем рушење бране, интеракција флуида и чврстих тела, окретање млаза воде у цевима, струјање у речној кривини

Научна област: Грађевинарство

Ужа научна област: Хидротехничке грађевине и објекти

УДК број: 624:626/627(043.3)

## NUMERICAL MODELLING OF FREE SURFACE FLOWS BASED ON THE SPH METHOD

**Abstract:** The application of the *Smoothed Particle Hydrodynamics* method (SPH) in free surface flow modelling is analysed in this dissertation. For this purpose, two different versions of the SPH model are used. The first model deals with the 3D flow, while the second one is used for solving shallow water equations. Since the previous theoretical analyses have not confirmed stability of the SPH method, there was an interest to assess the accuracy of the SPH method in different engineering problems. In addition to the analysis of unsteady phenomena, special attention is given to the assessment of the method's ability to simulate steady flow. The accuracy of the SPH method is evaluated in solving dam-break problems, the supercritical flow in a circular bend and the 2D-flow in natural watercourses. Two standard SPH models are used in this dissertation, both of which were modified (improved) in order to simulate the studied phenomena. Modifications of the models are made to obtain proper modelling of boundary conditions, energy dissipation process and fluid-structures interaction.

**Key words:** CFD, SPH method, free surface flow, dam break, fluid-structure interaction, helical flow, river flow

**Scientific field:** Civil engineering

**Specific scientific field:** Hydraulic structure and facilities

**UDK number:** 624:626/627(043.3)

# Садржај

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Преглед литературе</b>	<b>5</b>
2.1	Преглед развоја различитих математичких модела који се користе у SPH методи . . . . .	6
2.2	Преглед развоја различитих нумеричких аспеката SPH методе . . . . .	7
<b>3</b>	<b>SPH теорија</b>	<b>12</b>
3.1	Нумеричка апроксимација произвољне функције . . . . .	13
3.1.1	Кернел апроксимација . . . . .	13
3.1.2	Апроксимација честицама . . . . .	15
3.2	Моделирање просторног струјања . . . . .	18
3.2.1	Апроксимација извода густине . . . . .	20
3.2.2	Апроксимација извода брзине . . . . .	20
3.2.3	Схема за временску интеграцију . . . . .	21
3.2.4	Гранични услови . . . . .	22
3.3	Моделирање раванског струјања . . . . .	27
3.3.1	Одређивање густине честица . . . . .	27
3.3.2	Апроксимација извода брзине . . . . .	28
3.3.3	Схема временске интеграције . . . . .	31
3.3.4	Гранични услови . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Проблем рушења бране</b>	<b>34</b>
4.1	Увод . . . . .	35
4.2	Опис физичког модела . . . . .	38
4.3	Поставка нумеричког модела . . . . .	39
4.4	Резултати . . . . .	40
4.5	Закључак . . . . .	56

<b>5</b>	<b>Бурно течење у закривљеној цеви</b>	<b>58</b>
5.1	Увод . . . . .	59
5.2	Опис физичког модела . . . . .	62
5.3	Поставка SPH нумеричког модела . . . . .	63
5.4	Резултати . . . . .	64
5.5	Закључци . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Течење у речној кривини</b>	<b>77</b>
6.1	Увод . . . . .	77
6.2	Опис физичког модела . . . . .	78
6.3	Поставка SPH нумеричког модела . . . . .	79
6.4	Резултати . . . . .	82
6.5	Закључак . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Закључци и препоруке</b>	<b>92</b>
	<b>Литература</b>	<b>95</b>
<b>А</b>	<b>Графички прилози</b>	<b>110</b>
<b>Б</b>	<b>Табеларни прилози</b>	<b>148</b>

## Списак ознака

$p$	притисак
$g$	гравитационо убрзање
$r$	вектор положаја
$S_f$	вектор изворног члана у динамичкој једначини
$v$	вектор брзине
$dV$	елементарна запремина рачунске области
$\widetilde{W}_{ij}$	коригована вредност кернел функције
$B$	параметар стишљивости
$c$	брзина звука у флуиду
$c_0$	референтна брзина звука у флуиду
$C_r$	Курантов број
$D$	пречник цеви
$d$	дубина
$F$	сила
$f$	произвољна функција
$F_r$	Фрудов број
$h$	радијус области интерполације
$m$	маса
$N$	број суседних честица, број итерација за праћење конвергенције средњих вредности
$n$	Манингов коефицијент
$n_p$	тренутни број честица у прорачуну
$N_{Sf}$	број рачунских корака након којих се применјује Shepard-ов филтер
$O$	ред апроксимације
$Q$	проток
$q$	јединични проток
$R$	радијус кривине цеви

$r_{ij}$	бездимензионално растојање између честица
$S$	површина границе рачунске области
$u$	компонента вектора брзине у $x$ правцу
$u_*$	смичућа брзина
$v$	компонента вектора брзине у $y$ правцу
$W$	кернел функција
$x$	координата Descartes-овог координатног система
$y$	координата Descartes-овог координатног система
$z$	координата Descartes-овог координатног система
$z_d$	кота дна водотока
$A$	припадајућа површина честице у раванском моделу струјања
$CV$	нормализовани коефицијент варијације
$R$	параметар за корекцију Манинговог коефицијента

#### Грчка слова

$\bar{\tau}$	тензор тангенцијалних напона
$\Pi$	члан у динамичкој једначини преко којег се уводи вештачка вискозност
$\gamma$	параметар стишљивости
$\alpha$	бездимензионални параметар у изразу за одређивање вештачке вискозности
$\Omega$	запремина рачунске области
$\Delta V$	запремина честице
$\Delta r_0$	почетно растојање између честица
$\Delta t$	временски корак
$\delta z$	растојање између динамичких и граничних честица
$\delta$	Диракова делта функција
$\kappa$	von Karman-ова константа
$\nu_t$	коефицијент турбулентне вискозности
$\rho$	густина флуидног делића (честице)
$\rho_0$	референтна густина флуида
$\rho_p$	густина честица код раванског струјања
$\rho_w$	густина воде
$\sigma$	нормализовани коефицијент варијације
$\tilde{\nabla} W$	коригована вредност градијента кернел функције
$\beta$	скретни угао

#### Индекси

$b$	ознака за динамичку честицу
-----	-----------------------------



- $f$       ознака за честицу флуида  
 $i$       честица у којој се рачунају вредности зависно променљивих  
 $j$       суседна честица

### Оператори

- $\langle \ \rangle$     нумеричка апроксимација  
 $D/Dt$     оператор материјалног извода  
 $\nabla$       диференцијални оператор (набла оператор)  
—        оператор осредњавања  
 $\otimes$      векторски производ  
 $||$       интензитет вектора

## Списак слика

3.1	Кернел функција и њен извод . . . . .	17
3.2	Попречни пресек на делу узводно од стварне границе . . . . .	24
3.3	Попречни пресек на делу узводно од стварне границе . . . . .	24
3.4	Утицај промене растојања $\delta z$ на распоред честица флуида у близини узводне границе . . . . .	26
3.5	Генерисање честица на узводном и низводном крају [13] . . . . .	33
4.1	Фотографије сачињене за време огледа на физичком моделу у којем се разматра проблем рушења бране и удара млаза воде у чврсту границу [45] . . . . .	36
4.2	Схематски приказ инсталације на којој се испитује проблем рушења бране [45] са означеним положајем сензора за мерење притисака на низводном крају канала и вертикалама у којима се мере дубине: а) подужни пресек б) зид на низводном крају резервоара (Димензије су дате у милиметрима.) . . . . .	38
4.3	Почетни распоред честица флуида, покретне границе (уставе) и непокретне границе (зида резервоара) . . . . .	39
4.4	Положај и облик чела таласа 160 ms након почетка огледа: а) физички модел [45] б) прорачун са моделирањем уставе в) прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу) . . . . .	47
4.5	Положај и облик чела таласа 277 ms након почетка огледа: а) физички модел [45] б) прорачун са моделирањем уставе в) прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу) . . . . .	48
4.6	Положај и облик чела таласа 373 ms након почетка огледа: а) физички модел [45] б) прорачун са моделирањем уставе в) прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу) . . . . .	49

4.7	Положај и облик чела таласа 450 ms након почетка огледа: а) физички модел [45] б) прорачун са моделирањем уставе в) прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу) . . . . .	50
4.8	Положај и облик чела таласа 573 ms након почетка огледа: а) Физички модел [45] б) Прорачун са моделирањем уставе в) Прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу) . . . . .	51
4.9	Поређење слободне површине забележене на физичком моделу [45] (лево) и добијене у прорачунима (десно) након удара таласа у чврсту границу: а) 862 ms након почетка огледа б) 1023 ms након почетка огледа в) 1166 ms након почетка огледа . . . . .	52
4.10	Поређење слободне површине забележене на физичком моделу [45] (лево) и добијене у прорачунима (десно) након удара таласа у чврсту границу: а) 1320 ms након почетка огледа б) 1473 ms након почетка огледа в) 1627 ms након почетка огледа . . . . .	53
4.11	Поређење срачунатих вредности притисака коришћењем стандардног поступка са измереним вредностима у сензору 1 физичког модела [45] . . . . .	54
4.12	Поређење измерених и предложеном корекцијом ( <i>ckor</i> ) срачунатих притисака у сензору 1 [45] . . . . .	55
4.13	Поређење измерених [45] и предложеном корекцијом ( <i>ckor</i> ) срачунатих притисака у сензору 2 . . . . .	55
4.14	Поређење измерених [45] и предложеном корекцијом ( <i>ckor</i> ) срачунатих притисака у сензору 3 . . . . .	56
4.15	Поређење измерених [45] и предложеном корекцијом ( <i>ckor</i> ) срачунатих притисака у сензору 4 . . . . .	56
5.1	Течење без окретања млаза у кривини [36] . . . . .	60
5.2	Течење са окретањем млаза у кривини [36] . . . . .	60
5.3	Карактеристичне величине код струјања у кривини . . . . .	60
5.4	Пример зависности за одређивање карактера струјања у кривини [36] . . . . .	61
5.5	Фотографија физичког модела закривљеног проводника [36] . . . . .	62
5.6	Цртеж инсталације са означеним карактеристичним пресецима [36] . . . . .	63
5.7	Положај пресека односно вертикала и тачака у којима је анализирана промена вредности дубина, брзина и притиска у току нумеричких симулација . . . . .	65

5.8	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се не користи вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ ) . . . . .	68
5.9	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се користе вештачка вискозност и Shepard-ов филтер ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ ) . . . . .	70
5.10	а) Хеликоидно струјање у кривини у лабораторијском огледу [36], б) - д) утицај $\Delta p_0$ (за $\alpha = 0$ ) на изглед тока према прорачуну и њ) - з) утицај $\alpha$ (за $\Delta p_0 = 4,5 \text{ mm}$ ) на изглед тока добијеног прорачуном . . . . .	72
5.11	Зависност срачунатог нивоа у пресеку Е од вредности коефицијента $\alpha$	73
5.12	Поређење функционалних зависности из литературе ([36] и [19]) са резултатима нумеричких симулација ( $\alpha = 0$ ) . . . . .	74
5.13	Поређење функционалних зависности из литературе ([36] и [19]) са резултатима нумеричких симулација ( $\alpha = 0,1$ ) . . . . .	74
5.14	Поређење изгледа слободне површине у лабораторијском огледу [36] и слободне површине добијене прорачуном за случај када се не јавља окретање млаза у кривини ( $\alpha = 0$ ) . . . . .	75
6.1	Рачунска батиметрија разматране деонице са мерним тачкама . . . . .	79
6.2	Промена броја честица у прорачуну у којем се користи вештачка вискозност. . . . .	80
6.3	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 4.5 \text{ cm}$ и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	84
6.4	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 2.5 \text{ cm}$ и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	85
6.5	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $u$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 2,5 \text{ cm}$ и $\alpha_t = 0,067$ ) . . . . .	87
6.6	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $v$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 2,5 \text{ cm}$ и $\alpha_t = 0,067$ ) . . . . .	88
6.7	Поређење вектора измерених ([29] и [34]) и срачунатих брзина ( $\Delta p_0 = 2,5 \text{ cm}$ и $\alpha_t = 0,067$ ) . . . . .	89

## Списак табела

4.1	Вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н1 . . . . .	41
4.2	Вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н1 . . . . .	41
4.3	Вредности релативне амплитуде дубина $A_r$ за вертикалу Н2 . . . . .	41
4.4	Вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н2 . . . . .	42
4.5	Вредности релативне амплитуде дубина $A_r$ за вертикалу Н3 . . . . .	42
4.6	Вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н3 . . . . .	42
4.7	Вредности релативне амплитуде дубина $A_r$ за вертикалу Н4 . . . . .	42
4.8	Вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н4 . . . . .	42
4.9	Просечна одступања релативне амплитуде дубина $A_r$ од идеалног случаја слагања са мерењима ( $\Delta_{sr,Ar}$ ) . . . . .	43
4.10	Просечна одступања релативне фазне разлике $P_d$ од идеалног случаја слагања са мерењима ( $\Delta_{sr,Pd}$ ) . . . . .	43
4.11	Утицај параметра $c^*$ на вредности релативне амплитуде дубина дубине $A_r$ за вертикалу Н4 . . . . .	43
4.12	Утицај параметра $c^*$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н4 . . . . .	43
4.13	Утицај параметра $C_r$ на вредности релативне амплитуде дубина дубине $A_r$ за вертикалу Н4 . . . . .	43
4.14	Утицај параметра $C_r$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н4 . . . . .	44
4.15	Утицај радијуса интерполације $h$ на вредности релативне амплитуде дубина дубине $A_r$ за вертикалу Н4 . . . . .	44
4.16	Утицај радијуса интерполације $h$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н4 . . . . .	44
4.17	Утицај Shepard-овог филтера на вредности релативне амплитуде дубина дубине $A_r$ за вертикалу Н4 . . . . .	44
4.18	Утицај Shepard-овог филтера на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н4 . . . . .	44
4.19	Вредности релативне амплитуде дубина $A_r$ за вертикалу Н4 за случај када се не моделира подизање уставе . . . . .	45

4.20	Вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н4 за случај када се не моделира подизање уставе . . . . .	45
5.1	Нормализовано средње квадратно одступање нивоа за пресеке 1-8 при различитим вредностима коефицијента $\alpha$ . . . . .	71
5.2	Нормализовано средње квадратно одступање нивоа за пресеке 1-8 при различитим вредностима параметра $\Delta p_0$ . . . . .	71
6.1	Разлика кота $\Delta Z_{max}$ за различите варијанте прорачуна . . . . .	90

## 1. Увод

Моделирање течења представља важан део пројектовања у хидротехници. На основу резултата моделирања инжењери доносе одлуке које одређују пројектна решења. Модели течења се могу поделити на физичке и математичке. Први се односе на анализу струјања коришћењем реалног флуида у геометрији средине која је по правилу у одговарајућој размери са окружењем које је предмет пројектовања. Апстракција се огледа у томе да се на физичком моделу изучава појава која задовољава одговарајуће, али не све, услове *сличности* са појавом у природи. Закључци се доносе, претпостављајући да *сличности* које на моделу нису задовољене, не утичу значајно на разматрану појаву. Други приступ се односи на коришћење, најчешће нумеричких, поступака помоћу којих се решавају једначине које су математичка апстракција течења флуида. Како се основне једначине кретања флуида (*Navier-Stokes* једначине), у хидротехници не могу директно употребити, користе се различите врсте упрошћених једначина које, за разлику од основних, садрже параметре чије вредности унапред нису познате. При томе се сваким поједностављењем једначина струјања уводи нова апстракција. Једначине математичког модела, којима се описују сложена струјања, по правилу се решавају применом нумеричких метода којима се у модел струјања уводе нове, рачунске грешке. Због наведеног би се могао извести уопштен закључак да је употреба физичких модела у одређеној мери поузданија. Са друге стране, примена физичких модела захтева по правилу знатно већи утрошак материјалних средстава и времена из чега произилази извесна предност коришћења математичких, односно нумеричких модела. Развојем рачунарске технике, нумерички модели су постали уобичајено средство за моделирање струјања у инжењерској пракси, па је употреба физичких модела ограничена на случајеве када су предмет пројектовања недовољно изучена струјања, или када значај пројекта оправдава веће ангажовање материјалних средстава и времена.

У хидротехници се у нумеричком моделирању, стандардно примењују методе које користе унапред дефинисан, фиксни распоред рачунских тачака у простору у виду рачунске мреже. Ова група метода заснива се на Ојлеровом приступу изучавања струјног поља по којем се у одређеном броју фиксних тачака, помоћу којих се дискретизује флуидни континуум, прате промене физичких величина. Формирање

рачунских мрежа, код ове групе метода, по правилу представља најзахтевнији део моделирања. Други проблем код ове групе метода су нумеричке грешке у апроксимацији конвективних чланова у једначинама математичког модела, које су последица тога што рачунске тачке не прате кретање флуидних делића.

Проблем дефинисања изгледа рачунске мреже везан је, пре свега, за струјања са слободном површином код којих се унапред не познаје граница области струјања. Пример је одређивање плавних зона, када се изглед мреже често одређује итеративним поступком. Посебан проблем представља моделирање струјања која одликују нагле промене облика слободне површине у времену и простору и фрагментација струјног поља. У таквим случајевима методе са рачунским мрежама захтевају померање рачунских тачака током прорачуна и регенерацију рачунских мрежа, што такође изискује итеративан приступ и веома компликује рачунски алгоритам. У овом случају ради се о методама које се заснивају на праћењу флуидних делића тј. Лагранжовом приступу. У последњу, трећу групу, могу се сврстати „Лагранжове” методе које не захтевају формирање рачунске мреже. Код метода ове групе континуум се дискретизује помоћу флуидних делића који нису повезани, што омогућава већу слободу у моделирању, али је неопходно да сваки делић буде носилац читавог низа променљивих као што су маса, количина кретања, положај итд.

Иако алгоритамски једноставније, нумеричке методе које не захтевају дефинисање рачунске мреже (*Mesh-free methods*) захтевају знатно веће ангажовање рачунарских ресурса, јер је чак и за описивање течења у релативно малим рачунским областима потребно располагати значајним бројем рачунских делића. Међутим, програмски кодови у којима се примењују ове методе погодни су за паралелизацију на рачунарима, помоћу графичких картица. Њиховим коришћењем прорачун се може знатно убрзати. Зато се може претпоставити да ће даљи развој рачунарске технике релативизовати наведени недостатак ове групе метода. Управо ова претпоставка је била главни мотив да се започне истраживање које се представља у овом раду.

У дисертацији се анализира метода за моделирање струјања, која је најпознатији представник нумеричких метода које не захтевају коришћење рачунске мреже. На енглеском језику метода се назива *Smoothed Particle Hydrodynamics* (скраћено SPH). Циљ је био да се, стављајући по страни питање брзине прорачуна, испитају други аспекти примене ове методе у хидротехници. Зато је, поред моделирања неустаљеног струјања, за које је метода изворно намењена, разматрана могућност њене примене у моделирању устаљеног течења. У сваком рачунском примеру оцењивана је тачност методе поређењем резултата нумеричких симулација са резултатима мерења на физичким моделима разматраних појава. Могућност симулирања устаљеног течења и тачност методе могу се сврстати у проблематичне аспекте примене



SPH методе, јер коришћена варијанта методе није нумерички конзистентна нити је доказана њена стабилност. У дисертацији су анализирани примери просторног и раванског струјања са слободном површином. У ту сврху, коришћена су два јавно доступна кода која су током израде дисертације модификована за потребе нумеричких симулација анализираних токова, *DusalSPHysics*<sup>1</sup> ([79], [22] и [21]) и *SweSPHysics*<sup>2</sup> ([13], [12] и [11]). Први код је коришћен у анализи просторног и раванског струјања у вертикалној равни док је други код коришћен у анализи раванског струјања у хоризонталној равни. Разматрано је укупно три примера.

У првом примеру анализиран је проблем рушења бране и одбијања млаза воде од чврсте границе коришћењем раванског модела у вертикалној равни. Нумеричка симулација проблема рушења бране представља „уводни” пример у којем се представљају могућности SPH методе у моделирању појава „кратког” трајања које укључују трансформацију таласа са стрмим челом и интеракцију флуида и чврстих тела. Представљена је анализа осетљивости прорачуна на промену вредности основних параметара стандардне варијанте SPH методе, као и оригиналан начин за добијање реалних вредности притисака који се јављају приликом интеракције флуида и чврсте границе. Показано је и да се помоћу SPH методе може предвидети утицај времена наглог подизања преграде на трансформацију таласа насталог њеним уклањањем. С обзиром да су у раду коришћена новија лабораторијска истраживања [45], приказаном анализом обављена је својеврсна ревизија оцене тачности SPH методе у симулирању проблема рушења бране.

Као други пример за анализу применљивости SPH методе, изабрано је бурно течење са слободном површином у кривинама цеви кружног попречног пресека. У овом примеру коришћен је просторни модел SPH методе који је настао допуном модела садржаног у програмском коду *DualSPHysics*. Предложена допуна се односи на директније задавање одговарајућих граничних услова на отвореној граници. Тачност методе оцењивана је упоређујући изглед слободне површине добијен нумеричким прорачуном са оним забележеним на физичком моделу, односно упоређујући рачунским путем добијене зависности за одређивање карактера струјања са одговарајућим огледалним зависностима које се могу наћи у литератури. Резултати обављене анализе показали су да се помоћу коришћене варијанте SPH методе могу предвидети хидраулички услови који воде до окретања млаза у закривљеним цевима. Поред оцене тачности методе, анализирана је и временска променљивост срачунатих вредности физичких величина како би се добио одговор да ли се и под којим условима метода може користити у анализи устаљених појава. Показано је да вре-

<sup>1</sup><http://www.dual.sphysics.org>

<sup>2</sup><https://wiki.manchester.ac.uk/sphysics/index.php/SWE-SPHysics>

менски осредњене вредности брзина и дубина конвергирају и да на мања одступања утичу фактори који су повезани са проблемом нумеричке тачности методе. Што се притисака тиче, већа одступања су, као што је у литератури већ објашњено, последица увођења вештачке стишљивости у математички модел.

Коначно, у последњем примеру, приказани су резултати примене SPH методе у моделирању течења у речној кривини. У анализи је коришћен програмски код *SWE-SPHysics* који је допуњен како би се могао применити у случају течења у речним коритима. Допуне су тако омогућиле задавање граничних услова у случају неправилне геометрије корита и добијања одговарајућих градијената брзина у близини обала. Резултати су и у овом случају упоређени са резултатима испитивања на физичком моделу. Као и у претходном примеру, бурног течења у закривљеним цевима, анализирана је конвергенција осредњених вредности физичких величина односно одступања од осредњених вредности. Употребом модификованог поступка побољшана су слагања са резултатима измереним на физичком моделу. Ипак, сложена струјања у самој кривини нису адекватно репродукована што се може приписати нумеричким одступањима која су, и у овом случају, повезана са проблемом нумеричке неконзистенције.

## 2. Преглед литературе

Од самог настанка рачунске механике, нумерички поступци, који су засновани на прављењу рачунских мрежа, сматрани су конвенционалним и непрекидно су се развијали. И данас се, различите варијанте метода коначних разлика, коначних запремина и коначних елемената, стандардно користе у решавању инжењерских проблема. Са друге стране, по правилу рачунски захтевније методе које не користе рачунске мреже, значајније су почеле да се развијају тек у последњој деценији претходног века, са убрзаним развојем компјутерске технике. Превазилажење недостатака рачунских поступака из групе конвенционалних метода, као што су нумеричке грешке у апроксимацији конвективних чланова и проблем динамичког дефинисања рачунских мрежа, представљало је, а и даље представља, основну мотивацију за развој рачунских метода које не захтевају рачунске мреже. Детаљан преглед метода које не захтевају рачунске мреже може се наћи у књизи коју су написали Li и Liu [41], а овде се даје преглед развоја SPH методе која се сматра једном од најстаријих у овој групи метода.

Принципи SPH методе су први пут описани у одвојеним радовима које су објавили заједно Gingold и Monaghan [18], односно Lucy [46], 1977. године. Метода је прво почела да се користи за решавање проблема у астрофизици. Скуп небеских тела се посматрао као континуум (квази континуум) на који се примењују закони механике флуида. Ни деценију након појаве, метода није задобила ширу пажњу научне заједнице. Веће интересовање за примену SPH методе јавља се тек почетком деведесетих година XX века. Monaghan је 1992. године, у раду [53], дао преглед развоја SPH методе, у којем су описане ревизије првобитне формулације, које су донеле неколико модификација методе (примери су симетрични облик за апроксимацију градијента притиска који утиче на повећање тачности прорачуна и увођење једноставног облика вештачке вискозности за стабилизацију прорачуна). У истом раду дат је преглед примена методе на решавање проблема у гасној динамици и астрофизици. Иако метода у свом називу садржи реч *хидродинамика*, Monaghan је тек у раду [54] из 1994. године представио могућности примене SPH методе у моделирању струјања воде. Monaghan је симулирао струјање воде користећи вештачку-благу стишљивост (Weakly compressible SPH - WCSPH) преко једначине стања, коју

је у рачунску динамику флуида увео Batchelor [6]. У свом раду Monaghan је, између осталих, описао нумеричке огледе проблема рушења бране и симулацију морских таласа. Модел који је тада приказао, представља основу рачунског модела који је у овој дисертацији коришћен за симулацију просторног струјања (проблем бурног струјања у закривљеним цевима), односно раванског струјања у вертикалној равни (проблем рушења бране са одбијањем од чврсте границе).

Може се рећи да је развој SPH методе ишао у два правца. Један правац подразумевао је прилагођавање основних принципа SPH методе решавању једначина различитих математичких модела који описују законе механике, док се под другим правцем развоја могу сматрати модификације методе са чисто нумеричког аспекта. Прво ће се дати преглед литературе у којој се описују различити математички модели који се примењују у различитим варијантама SPH методе.

### **2.1 Преглед развоја различитих математичких модела који се користе у SPH методи**

Убрзо након представљања WCSPH модела, Monaghan је у раду [57] представио вишефазни SPH модел чију је примену нашао у вулканологији, у симулацији пирокластичног тока. Овај модел није био применљив у случају веће разлике између густина у две фазе. Да би решили овај проблем Colagrossi и Landrini [77] су унапредили варијанту SPH методе и проверили је на примеру двофазног струјања мешавине ваздуха и воде. На даљи развој вишефазног SPH модела, утицали су Valizadeh и сарадници [10] који су представили модел који, за разлику од модела описаног у раду [77], испуњава услове конзервативности масе.

Поред стандардног благо стишљивог SPH модела (WCSPH), уведен је и такозвани нестишљив SPH модел (incompressible SPH- ISPH) у којем су притисци одређивани решавањем Поасонове једначине. Нестишљиву варијанту SPH методе први су представили Cummins и Rudman [80]. По цену значајно дужег времена обављања рачунских прорачуна, ISPH методом се решава проблем осцилација притисака, које су последица вештачке стишљивости. Треба напоменути да због неопходности примене итеративног поступка, прорачуни ISPH методом нису погодни за паралелизацију. Поређење резултата употреба стандарне, WCSPH методе и ISPH методе, детаљно је представио Lee [38]. Детаљан преглед различитих варијанти ISPH метода као и њених примена може се наћи у докторској дисертацији Leroya [39].

У овој дисертацији се, поред стандардне WCSPH методе, разматра варијанта SPH методе за решавање једначина струјања осредњених по дубини (SWE-SPH). Раванско струјање у хоризонталној равни помоћу SPH методе, први су описали Ata и сарадници [3] односно Rodriguez-Paz и Bonet [65]. У раду [3] представљен је модел

благо стишљивог идеалног флуида са поступком стабилизације заснованим на Римановом решењу. У раду [65] је представљен концепт рачунски једноставног модела нестишљивог флуида у којем се задовољава услов глобалног одржања количине кретања. У оба рада разматрано је струјање које укључује простирање таласа са стрмим челом. Vasondio је даље побољшао два наведена модела додајући алгоритам за динамичку промену броја честица [11] који је, између осталог, применио у проблему плављења који укључује такозвано *квашење* и *сушење* [13]. Његов модел, описан у радовима [11], [13] и [12], основа је модела који се косрисит у овој дисертацији. Међу значајне радове у којима се описује раванско струјање, треба навести и рад [82] који су објавили Chen и сарадници. У њему се представља модел са напредним алгоритмом за задавање граничног услова на отвореној граници, који је коришћен у симулацији рушења бране са трансформацијом таласа у планинском водотоку на речној деоници са речном кривином и ушћем.

На ширење SPH методе, између осталог, утицали су бројни радови који су показали могућности употребе ове методе у механици чврстих тела и то пре свега код појава које укључују велике деформације. У радовима које су објавили Libersky и Petschek [40] односно Allahdadi и сарадници [1], први пут је описана примена SPH методе у моделирању појава које прате ударне деформације тела које се описују еласто-пластичним конститутивним једначинама. Затим се показало да је SPH метода посебно погодна у моделирању појава које прате ломови чврсте материје [7]. Касније су Bonet и Kulasegaram [8] уз помоћ SPH методе моделирали процес ковања метала. Овде треба споменути и радове у којима су представљене могућности заједничке употребе методе коначних елемената и SPH методе код међусобне интеракције чврстих тела [4] и [32]. Ово повезивање различитих метода заснива се на томе да се рачунски захтевнија, SPH метода, користи само у деловима рачунске области где се очекују велике деформације да би се убрзали прорачуни. У последње време се заједничка употреба SPH методе и методе коначних елемената користи и у проблемима који укључују интеракцију чврстих тела са флуидима. Пример су радови [60] и [76] у којем су описани концепти повезивања методе коначних елемената и SPH методе (FE-SPH) у симулирању интеракције океанских таласа и бродске оплате, односно авионске оплате и водене површине приликом принудног слетања.

## 2.2 Преглед развоја различитих нумеричких аспеката SPH методе

Иако SPH метода има релативно дугу историју и при томе је успешно примењена у моделирању бројних појава из различитих области механике, нека основна питања везана за теоријске аспекте су и даље отворена. Тако су нумеричка конзистенција, стабилност и задавање граничних услова у SPH методи, категорије које

се морају теоријски подробније испитати, како би метода доживела своју потпуну зрелост. У наставку текста се даје преглед најзначајних радова у којима је акценат био на теоријским аспектима SPH методе.

Неправилан распоред честица у SPH симулацијама, представља основни проблем за спровођење теоријских анализа којима се доказује нумеричка стабилност, односно основни проблем за обезбеђивање нумеричке тачности методе [51]. Поред овога, у основне проблеме методе убраја се и тзв. такозвана непотпуност кернел функције која је изражена у близини граница рачунске области. Тако стандардна варијанта методе у свом класичном облику (у општем случају када је распоред честица неправилан [83] или када се разматра течење у близини граница) не испуњава ни услов тачности првог реда, иако у низу примера даје тачне резултате. За случај неправилног распореда честица, Kiara [35] је показала да грешка методе зависи од карактеристика тока. У својој тези, разматрала је случај благо променљивог поља брзина далеко од границе и показала да тачност методе зависи од дивергенције брзине.

Како би SPH метода задовољила основне теоријске стандарде за једну нумеричку методу, многи радови написани су на тему такозваног „повраћаја” нумеричке конзистенције SPH методе. Randles и Libersky су у раду [62] представили „нормализоване” форме израза за апроксимацију густине и дивергенције тензора напона. Johnson и Weissel [33] су у раду предложили „повраћај” конзистенције предлажући облик тзв. кернел функције, а који обезбеђује тачну нумеричку репродукцију линеарног распореда брзине, а у случају нелинеарног распореда брзина, повећава тачност нумеричких прорачуна. Измену кернел функције предложили су и Вигњевић и сарадници [15] у тзв. NCSPH методи за коју су показали да обезбеђује тачност другог реда. Треба напоменути и корекцију која се заснива на развоју кернел функције у Тејлоров ред, коју су предложили Chen и Veraun [81] у формулацији CSPM методе. Ову корекцију су Liu и Liu [44] модификовали за случај дисконтинуитета, формулишући DSPH методу.

За наведене корекције важи да се повраћајем конзистенције нарушава глобална конзервативност количине кретања, која је последица асиметричног облика чланова у једначинама, преко којих се срачунавају међусобни утицаји честица. Како се у литератури често наводи, глобална конзервативност је најважније својство SPH методе и разлог због којег метода у бројним случајевима даје тачне резултате иако не испуњава услове нумеричке конзистенције. Задовољење оба услова, конзистенције и конзервативности је и даље отворено питање, с тим да су недавно, Litvinov и сарадници [42] показали које потребне геометријске услове треба да задовољи распоред честица како би метода била истовремено конзистентна и конзервативна. Аутори на-

веденог рада су показали да се распоред честица који задовољава услове потребне за истовремену конзистенцију и конзервативност методе, формира у току са константним притиском.

Стабилност SPH методе се у првим радовима не појављује као проблематична категорија. Monaghan је још у својим првим радовима ([52] и [53]) за временску интеграцију користио предиктор-коректор и leap-frog схеме. У оба случаја коришћен је променљиви временски корак чија се вредност одређује на основу два искуствена критеријума, који се везују за Курантов број и вредности највеће силе, која је последица „вискозног” члана у динамичкој једначини. Balsara [5] је коришћењем Von Neumann-ове анализе стабилности проверавао утицај основних параметара SPH методе на стабилност, дајући при томе коментар да проблем стабилности не може повезати за две примењене рачунске схеме, предиктор-коректор схему и leap-frog схему. Две поменуте схеме, укључујући и искуствене критеријуме које је предложио Monaghan, и данас се стандардно користе у SPH методи. Оне се користе за временску интеграцију и у овој дисертацији, у обе примењене варијанте SPH методе, WCSPH и SWE-SPH методи. Насупрот искуству које су са коришћеним схемама имали Monaghan и Balsara, Kiara је у својој дисертацији (у којој се између осталог такође користи Von Neumann-ова анализа стабилности), закључила да је основна варијанта WCSPH методе безусловно нестабилна. Шта више, Kiara је закључила да неки стандардни поступци за стабилизацију прорачуна, међу којима је и облик вештачке вискозности који је предложио Monaghan, а који је верификован у многим случајевима изразито неустаљених појава, заправо не гарантују стабилност у општем случају. Од радова објављених у последње време, треба навести и рад [17], у којем су Violeau и Legoу, користећи Von Neumann-ову анализу дошли до критеријума за највећу вредност временског корака за који је прорачун WCSPH методом стабилан.

Проблем стабилности у SPH методи углавном се не наводи у контексту избора рачунске схеме односно вредности рачунског корака, већ у контексту два друга појма. То су тзв. нестабилност при затезању (tensile instability), коју су објаснили Swegle и сарадници [68], и нестабилност спаривања честица (pairing instability), коју су први приметили Schussler и Schmitt [71]. Обе врсте нестабилности испољавају се кроз вештачко груписање честица (прва наведена нестабилност може се односити и на удаљавање честица) и везују се за особине кернел функција које се користе. Први тип нестабилности се пре свега односи на нумеричке прорачуне у којима се моделира динамика чврстих тела, док је други вид нестабилности повезан са проблемом високе резолуције просторне дискретизације при коришћењу одређених (класичних) типова кернел функција.

Нестабилност затезања која се везује за знак производа другог извода кернел

функције и напона, је прво уочена код чврстих тела у условима затезања (отуда и назив), али се може јавити и у флуидима, како у случајевима негативних тако и у случајевима позитивних напона. Различита решење овог проблема могу се наћи у радовима [24], [70], [62], [28], [15] и [55]. Тако, на пример, Monaghan [55] превентивно у прорачуне уводи вештачки притисак који се активира динамички, у зависности од растојања између честица.

Дуго се сматрало да на нестабилност спаривања честица утичу мала растојања између честица, за која је други извод кернел функција близак нули па тако „не-стају” одбојне силе међу честицама ([71], [69] и [61]). Read и сарадници [63] су демонстрирали да се кернел функције које немају превојну тачку на дијаграму првог извода кернел функције, понашају знатно боље са становишта спаривања. Треба рећи да овај закључак није од практичног значаја, јер је промена знака, уз диференцијабилност извода кернел функције, императив са других нумеричких аспеката. Ипак, недавно су Dehnen и Aly [26] показали да је услов за избегавање нестабилности спаривања честица, знак Фуријеове трансформације кернел функције. Тако је показано да се у случају коришћења Wendland кернел функције (која има превојну тачку на дијаграму извода), и чија је Фуријеова трансформација ненегативна, без обзира на просторну резолуцију не јавља проблем спаривања.

Задавање граничних услова односи се и на представљање чврсте границе, и на дефинисање рачунских поступака на местима на којима флуид улази у рачунску област или излази из ње. Дефинисање граничних услова на отвореној граници такође представља значајан проблем у SPH методи [14].

Модел који се користи у овој дисертацији се од Монагановог (класичног WC-SPH) највише разликује по начину на који се обухвата чврста граница. У стандардном моделу из 1994. године, интеракција између честица чврсте границе и флуида рачуна се, по аналогији са међуатомским, односно међумолекуларним силама, на основу Ленард-Џоунсовог потенцијала. Како су касније Monaghan и Kos [58] закључили, ова методологија је резултирала отпорима који одговарају случају ребрастих цеви чија је рапавост реда величине растојања између честица у SPH симулацијама, што значи да су се у општем случају добијали нереални отпори чврсте границе. Да би овај проблем решили, поступак су изменили тако да интеракција зависи само од нормалног растојања између честица флуида и граница. Међутим овај поступак је значајно усложио прорачуне у и овако рачунски захтевној методи зато што захтева стално рачунање нормалног растојања од границе. У циљу добијања рачунски једноставнијег поступка, Dalrymple and Knio [25] су предложили употребу такозваних динамичких честица за представљање чврсте границе. По овом поступку честице границе се у рачунском моделу третирају на исти начин као и честице флуида, са тим



што им је брзина унапред дефинисана (честице су фиксне уколико се моделира непокретна граница). Употреба динамичких честица је верификована на више примера који укључују интеракцију флуида и различитих типова покретних или непокретних објеката [64], [20], [78]. Због тога што су једноставне за примену и погодне за паралелизацију прорачуна, динамичке честице се користе у нумеричким прорачунима који се извршавају на процесорима графичких картица (GPU) [75], [79]. Треба напоменути да су аутори значајна убрзања прорачуна постигли коришћењем комерцијалних графичких картица. Наведени модел, који се заснива на стандардном WCSPH моделу, користи се и у овој дисертацији.

У SPH пракси, се поред два типа граничних честица, користе и фиктивне честице (ghost particles) које су предложили Allahdadi и сарадници [1]. Поступак се заснива на генерисању имагинарних честица са супротне стране границе, које се налазе на једнаком растојању од чврсте границе као и честице флуида у непосредној близини границе. Ове честице се, када им је брзина једнака али супротног смера од брзине честица флуида, могу користити у дефинисању тзв. граничног услова без клизања (no-slip). Недостатак овог типа честица, је тај што се практично не могу користити у случају закривљених или дисконтинуалних површина које представљају чврсту границу. Како би се овај проблем решио, Marrone и сарадници [48] су развили такозване непокретне фиктивне честице (fixed ghost particles) које су рачунски једноставније од претходних. Federico и сарадници [72] су користили ову врсту честица и за решавање проблема задавања граничног услова на отвореној граници, који је подробније описан у дисертацији Vetscha [14]. Овде треба напоменути да су, иако једноставније од класичних фиктивних честица, непокретне фиктивне честице нешто сложеније за примену у односу на динамичке честице које се користе у овој дисертацији.

### 3. SPH теорија

За SPH методу се пре може рећи да представља групу нумеричких метода него једну нумеричку схему за решавање једначина математичког модела течења. У различитим варијантама методе, поред различитих нумеричких поступака, користе се и различити - специфични математички модели струјања. За све варијанте методе заједничка је примена теорије интерполације и дискретизације флуидне средине помоћу флуидних честица. У овом поглављу се прво описује теорија интерполације која је основа нумеричког дела методе, да би се затим описала њена примена у две варијанте методе које се користе у овој дисертацији. То су WCSPH метода за моделирање просторног струјања, и SWE-SPH метода за моделирање струјања у хоризонталној равни.

У овој дисертацији су објашњени основни принципи на којима се заснива SPH метода, и приказани изрази који се користе у поменутиим рачунским моделима. Детаљнија објашњења теоријских основа SPH методе могу се наћи у радовима [53], [56], [41], [43] и [16].

### 3.1 Нумеричка апроксимација произвољне функције

Према [43], теорија интерполације која се примењује у SPH методи заснива се на две апроксимације. У првој апроксимацији, користећи својства Диракове делта функције, произвољна функција се представља у непрекидном облику употребом тежинске функције. Затим се добијена непрекидна функција, дискретизацијом рачунске области на скуп материјалних честица, преводи у дискретан облик, такав да се применом алгебарских операција, вредност функције и њених извода у произвољној тачки простора може приближно одредити на основу вредности те функције односно њених извода у тачкама простора које заузимају околне материјалне честице. С обзиром на то да се тежинска функција у SPH методи назива и *кернел функција*, ова апроксимација назива се *кернел апроксимација*, док се друга апроксимација назива *апроксимација честицама*.

#### 3.1.1 Кернел апроксимација

Вредност произвољне функције  $f$  у тачки простора чији је положај дефинисан вектором  $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  може се представити помоћу вредности исте функције у „околним” тачкама простора (дефинисаних векторима положаја  $\mathbf{r}$ ) користећи следећи запремински интеграл у области  $\Omega$ :

$$f(\mathbf{r}_0) = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) dV \quad (3.1)$$

У претходном изразу коришћена је Диракова делта функција, која се дефинише на следећи начин:

$$\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \\ 0, & \text{ако је } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Уколико се уместо делта функције уведе непрекидна функција  $W$ , добија се прва апроксимација у SPH методи:

$$\langle f(\mathbf{r}_0) \rangle = \int_{\Omega} f(\mathbf{r}) W(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, h) dV \quad (3.3)$$

Тежинска функција  $W$  назива се кернел функцијом, па отуда и назив кернел апроксимација. У случају раванског проблема, рачуна се површински интеграл, односно линијски интеграл, у случају линијских проблема. У зависности од димензионалности проблема, димензија кернел функције је  $[1/L^{dim}]$ , где је  $L$  ознака за дужину а  $dim$  означава број ортогоналних праваца који се разматрају. Величина  $h$  је праметар

модела чија вредност одређује радијус области интерполације. Да би апроксимација била локалног карактера, кернел функција мора да задовољава следећи услов:

$$W(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, h) = 0 \text{ за } |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}| \geq 2h \quad (3.4)$$

Поред ове особине, функција  $W(\mathbf{r})$  треба да задовољи и следеће једнакости:

$$\int_{\Omega} W(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, h) d\mathcal{V} = 1 \quad (3.5)$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) W(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}, h) d\mathcal{V} = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Изрази (3.5) и (3.6) су услови за тачност првог и другог реда кернел апроксимације у односу на параметар  $h$ . Ово се може показати уколико се у изразу (3.3) функција  $f(\mathbf{r})$  развије у Тејлоров ред у околини тачке  $\mathbf{r}_0$ :

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{r}_0) \rangle &= \int_{\Omega} [f(\mathbf{r}_0) + f_x(\mathbf{r}_0)\Delta x_0 + f_y(\mathbf{r}_0)\Delta y_0 + f_z(\mathbf{r}_0)\Delta z_0 + O(h^2)] \\ &\cdot W(\Delta\mathbf{r}_0, h) d\mathcal{V} = f(\mathbf{r}_0) \int_{\Omega} W(\Delta\mathbf{r}_0, h) d\mathcal{V} + f_x(\mathbf{r}_0) \int_{\Omega} \Delta x_0 W(\Delta\mathbf{r}_0, h) d\mathcal{V} \\ &+ f_y(\mathbf{r}_0) \int_{\Omega} \Delta y_0 W(\Delta\mathbf{r}_0, h) d\mathcal{V} + f_z(\mathbf{r}_0) \int_{\Omega} \Delta z_0 W(\Delta\mathbf{r}_0, h) d\mathcal{V} + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

где доњи индекс уз функцију  $f$  представља скраћену ознаку за парцијални извод те функције у одговарајућем координатном правцу (нпр.  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ). Јасно је да ако су задовољене једнакости (3.5) и (3.6) следи:

$$\langle f(\mathbf{r}_0) \rangle = f(\mathbf{r}_0) + O(h^2) \quad (3.8)$$

Кернел функција је увек ненегативна па из услова (3.5) следи да  $W(\mathbf{r})$  представља тежинску функцију. Да би се задовољила једнакост (3.6), кернел функција по правилу треба да буде симетрична.

Заменом функције  $f(\mathbf{r})$  у изразу (3.3) њеним градијентом  $\nabla f(\mathbf{r})$ , коришћењем правила диференцирања се добија:

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}_0) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla(f(\mathbf{r}) \cdot W(\Delta\mathbf{r}_0, h)) - f(\mathbf{r}) \cdot \nabla W(\Delta\mathbf{r}_0, h)] d\mathcal{V} \quad (3.9)$$

Ако се на последњи израз примени Гаусова теорема добија се:

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}_0) \rangle = \int_S f(\mathbf{r}) \cdot W(\Delta \mathbf{r}_0, h) \cdot \vec{n} dS - \int_{\Omega} f(\mathbf{r}) \cdot \nabla W(\Delta \mathbf{r}_0, h) dV \quad (3.10)$$

За све тачке чије је растојање од површине  $S$  веће од  $2h$ , с обзиром на израз (3.4), кернел апроксимација градијента је:

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}_0) \rangle = - \int_{\Omega} f(\mathbf{r}) \cdot \nabla W(\Delta \mathbf{r}_0, h) dV \quad (3.11)$$

Аналогно условима (3.5) и (3.6), услови тачности кернел апроксимације градијента дефинишу се преко следећих једнакости:

$$\int_{\Omega} \nabla W(\Delta \mathbf{r}_0, h) dV = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} \Delta \mathbf{r}_0 \cdot \nabla W(\Delta \mathbf{r}_0, h) dV = 1 \quad (3.13)$$

где прва једнакост представља потребан услов да је апроксимација градијента првог реда тачности, а друга једнакост, потребан услов да је апроксимација градијента другог реда тачности. Прва једнакост се задовољава када су изводи кернел функције по просторним променљивама асиметричне функције.

### 3.1.2 Апроксимација честицама

Друга апроксимација у SPH методи подразумева дискретизацију флуидне средине (запремине  $\Omega$ ) преко скупа коначног броја честица флуида. Свакој честици се придружује одређена маса  $m_i$  и густина  $\rho_i$ , тако да честица заузима запремину<sup>1</sup>  $\Delta V_i = m_i / \rho_i$ . Дискретизацијом израза (3.3) и (3.11) добија се коначан израз за апроксимацију произвољне функције односно градијента скаларне функције редом:

$$\langle f(\mathbf{r}_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{r}_j) W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (3.14)$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}_i) \rangle = - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\mathbf{r}_j) \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (3.15)$$

где је  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ . Овде је, као што и у наставку текста, коришћен договор по коме се индексом  $i$  означава честица у којој се примењују SPH апроксимације тј. рачунају вредности зависно променљивих, док се индексом  $j$  означавају тзв. суседне честице

<sup>1</sup>У случају раванског модела у хоризонталној равни се у изразима уместо запремине користи површина коју честица заузима у основи.

тј. честице које су на растојању мањем од  $2h$  од честице  $i$ . У приказаним сумама,  $N$  означава укупан број суседних честица. Коришћењем следећих математичких једнакости:

$$\nabla f = \frac{1}{\rho} [\nabla(\rho f) - f \cdot \nabla \rho] \quad (3.16)$$

$$\nabla f = \rho \left[ \nabla \left( \frac{f}{\rho} \right) + \frac{f}{\rho^2} \cdot \nabla \rho \right] \quad (3.17)$$

добивају се асиметрични и симетрични облици апроксимације градијента који се најчешће користе у SPH методи:

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}_i) \rangle = \frac{1}{\rho_i} \left[ \sum_{j=1}^N m_j [f(\mathbf{r}_j) - f(\mathbf{r}_i)] \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) \right] \quad (3.18)$$

$$\langle \nabla f(\mathbf{r}_i) \rangle = \rho_i \left[ \sum_{j=1}^N m_j \left[ \left( \frac{f(\mathbf{r}_j)}{\rho_j^2} \right) + \left( \frac{f(\mathbf{r}_i)}{\rho_i^2} \right) \right] \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) \right] \quad (3.19)$$

Услови за конзистенцију методе у континуалном облику (3.5), (3.6), (3.12), (3.13), након апроксимације честицама, редом постају:

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{r}_{ij}, h) = 1 \quad (3.20)$$

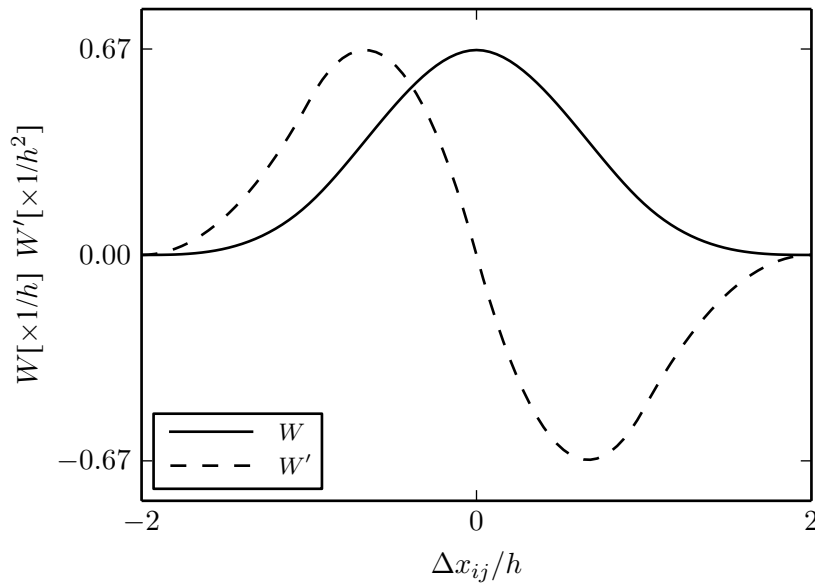
$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{r}_{ij} W(\mathbf{r}_{ij}, h) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{r}_{ij} \cdot \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) = 1 \quad (3.23)$$

Према [74] не постоје значајне предности у коришћењу било које познате функције у односу на кубну кернел функцију<sup>2</sup>. Зато избор кернел функције неће бити предмет ове дисертације. Кубна кернел функција која се овде користи, дефинише се на следећи начин:

<sup>2</sup>Као што је у прегледу литературе наведено, Dehnen и Aly [26] су показали да Wendland функција има предности у односу на остале познате функције када је проблем спаривања честица у питању. Међутим, у нумеричким огледима обављеним у овој дисертацији није се јављао проблем спаривања честица, па није било потребе за коришћењем Wendland функције.



Слика 3.1: Кернел функција и њен извод

$$W(\mathbf{r}_{ij}, h) = \alpha_D \begin{cases} \frac{2}{3} - r_{ij}^2 + \frac{1}{2}r_{ij}^3, & \text{ако је } 0 \leq r_{ij} < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - r_{ij})^3, & \text{ако је } 1 \leq r_{ij} \leq 2 \end{cases} \quad (3.24)$$

где је  $\alpha_D$  у линијским проблемима  $1/h$ , у раванским  $15/(7\pi h^2)$ , а у просторним  $3/(2\pi h^3)$ . У изразу је коришћено бездимензионално растојање које у просторним проблемима износи:

$$r_{ij} = \frac{|\mathbf{r}_{ij}|}{h} = \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}}{h} \quad (3.25)$$

Имајући у виду на симетричност кернел функције, уместо  $W(\mathbf{r}_{ij}, h_i)$  може се писати  $W(r_{ij}, h_i)$ . Исто тако важи да је  $W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) = W(\mathbf{r}_{ji}, h_i)$ . У случају градијента, претходна замена није могућа јер се ради о асиметричној функцији, па важи да је  $\nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) = -\nabla W(-\mathbf{r}_{ij}, h_i)$ , тј.  $\nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) = -\nabla W(\mathbf{r}_{ji}, h_i)$ :

$$\nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h_i) = \frac{dW}{dr_{ij}} \left( \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_j}, \frac{\partial r_{ij}}{\partial y_j}, \frac{\partial r_{ij}}{\partial z_j} \right) \quad (3.26)$$

Графичка представа кернел функције и извода кернел функције за линијски проблем, дата је на слици 3.1.

Није тешко замислити да, без обзира на избор кернел функције, чак и за честице које су на растојању већем од  $2h$  од границе рачунске области, апроксимација честицама не задовољава нужно ни услов тачности првог реда. Задовољење оба услова зависи од распореда честица који је у симулацијама струјања најчешће неправилан

као и од самог броја честица. Ипак, резултати који су до сада добијени, показују да употреба стандардне (неконзистентне варијанте SPH методе) даје физички реалне резултате. Овакви резултати објашњавају се особином методе да током прорачуна обезбеђује одржање одређених физичких величина, пре свега масе и количине кретања, и која се зато фаворизује у односу на нумеричку конзистенцију.

Како би се задовољио услов тачности (3.20), уместо  $W$  се у изразима SPH модела може користити коригована вредност кернел функције:

$$\widetilde{W}_{ij} = \frac{W(\mathbf{r}_{ij}, h)}{\sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} W(\mathbf{r}_{ij}, h)} \quad (3.27)$$

За корекцију градијента функције уводи се матрица  $\mathbf{L}$  [9]:

$$\mathbf{L}_i = \left( \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) \otimes \mathbf{r}_{ij} \right)^{-1} \quad (3.28)$$

која се користи како би кориговани градијент кернел функције:

$$\widetilde{\nabla} W(\mathbf{r}_{ij}, h) = \mathbf{L}_i \nabla W(\mathbf{r}_{ij}, h) \quad (3.29)$$

задовољио услов (3.13). Треба имати у виду да се приказаном корекцијом нарушава конзервативност схеме. Искуства показују да се, за разлику од корекције кернел функције (3.27), приказаном корекцијом градијента функције не добијају тачнији резултати, што говори у прилог претходно изнетој тези да је *конзервативност* важнија од *конзистенције*. Сходно препорукама из литературе, у овој дисертацији се у рачунским примерима приказане корекције не користе.

### 3.2 Моделирање просторног струјања

За анализу просторног струјања коришћен је јавно доступан програмски код DualSPHysics ([79], [22] и [21]) који представља верзију кода SPHysics намењену паралелизацији рачунских поступака на процесорима графичких картица (GPU). У наставку следи опис модела који је примењен у наведеном програмском коду, уз напомену да је изворна верзија модела описана и у дисертацији [78]. Да би се користио за прорачу бурног течења у закривљеним цевима користио, у овој дисертацији је, наведени програмски код је у овој дисертацији допуњен алгоритмом за задавање граничног услова на отвореној граници.

SPH апроксимације се користе за решавање следећих једначина струјања:



$$\frac{D\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.30)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \Pi \quad (3.31)$$

где је  $\rho$  густина (флуидног делића),  $\mathbf{v}$  вектор брзине,  $p$  притисак,  $\mathbf{g}$  гравитационо убрзање и  $\Pi$  члан преко којег се уводи вештачка вискозност. Приказане једначине представљају законе одржања масе и количине кретања. С обзиром на то да је SPH метода заснована на праћењу флуидних делића, јасно је зашто се нумерички модел заснива на решавању једначина које су написане коришћењем материјалних извода. Специфичност методе је да се флуид (вода у рачунским примерима) посматра као благо стишљив. Промена густине се рачуна коришћењем једначине одржања масе, на основу дивергенције поља брзина. Динамичком једначином се преко прва два члана обухватају редом, утицаји сила притиска и тежине, док се преко трећег члана могу узети у обзир утицаји вискозности флуида за ламинарне токове или турбулентних напона за турбулентне токове. У SPH методе се стандардно преко овог члана уводи вештачка вискозност како би се стабилизовао прорачун. У овој дисертацији се утицај вештачке вискозности разматра у два примера.

Разматрана верзија нумеричког модела заснива се на стандардном облику методе [54] коју одликује једноставност рачунског алгоритма, што је великим делом последица претпоставке стишљивости флуида (WCSPH модел). Наиме, код стишљивих флуида се успостављањем аналитичке зависности између притиска и густине, омогућава раздвајање прорачуна притиска од прорачуна брзина. При томе се користи следећа једначина стања [54]:

$$p = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (3.32)$$

где су  $\gamma = 7$  и  $B = c_0^2 \rho_0 / \gamma$  параметри стишљивости. Величина  $B$  рачуна се преко референтне густине (густине на слободној површини) која износи  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ , и брзине звука у флуиду при референтној густини  $c_0 = c(\rho_0)$ . Узима се да је брзина простирања звука у води мања од реалне, како би се добила прихватљива вредност временског корака<sup>3</sup>. Препорука је [54] да рачунска вредност брзине  $c_0$  буде приближно десет пута већа од највеће брзине која се може јавити у прорачуну.

<sup>3</sup>Курантов број за стишљиве флиде зависи од брзине простирања звука у флуиду.

### 3.2.1 Апроксимација извода густине

У разматраној варијанти методе, маса честица је константна ( $m_p$ ) док се због стишљивости мења њена густина. Извод густине се апроксимира на следећи начин:

$$\left\langle \frac{D\rho}{Dt} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^n m_p \mathbf{v}_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (3.33)$$

где је  $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j$  релативна брзина посматране честице ( $i$ ) у односу на околну честицу ( $j$ ). Како је радијус области интерполације  $h$  константа за све честице, кернел функција  $W(r_{ij}, h_i)$  може се означити са  $W_{ij}$ .

Прорачуни помоћу WCSPH модела су због претпостављене стишљивости прашени осцилацијама притисака. Како би се смањиле разлике у пољу притиска, у WCSPH рачунском моделу се често примењује тзв. Shepard-ов филтер ([67],[59]), преко којег се након одређеног броја рачунских корака обавља просторно осредњавање густина. Овај филтер се примењује коришћењем кориговане вредности кернел функције (израз (3.27)):

$$\rho_i = \sum_{j=1}^n m_p \widetilde{W}_{ij} \quad (3.34)$$

У овој дисертацији је показано, да се коришћењем Shepard-овог филтера, могу стабилизovati прорачуни у којима се не користи вештачка вискозност, односно показано је да примена овог филтера, када се не користи вештачка вискозност, значајно смањује осцилације брзина.

### 3.2.2 Апроксимација извода брзине

Чланови у динамичкој једначини би требало да се апроксимирају тако да убрзања која су последица међусобних утицаја честица буду истог интензитета, а супротног смера. У случају апроксимације члана којим се обухвата утицај притиска, овај услов се постиже применом симетричног облика SPH апроксимације (3.19):

$$\left\langle \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right\rangle_i = -m_p \sum_{j=1}^N \left( \frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} + \Pi_{ij} \right) \nabla W_{ij} + \mathbf{g} \quad (3.35)$$

У члану  $\Pi$ , преко којег се уводи вештачка вискозност, није потребно користити симетрични облик апроксимације с обзиром на симетричност израза преко којег се

овај члан рачуна [53]:

$$\mathbf{\Pi}_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}}, & \text{ако је } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0 \\ 0, & \text{ако је } \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} > 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

уз:

$$\mu_{ij} = \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{\mathbf{r}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} + \eta^2} \quad (3.37)$$

У наведеним изразима  $\alpha$  је бездимензионални параметар чија се вредност одређује од случаја до случаја и који ће се у наставку називати коефицијентом вештачке вискозности,  $\bar{c}_{ij} = (c_i + c_j)/2$ , док се параметар  $\eta = 0.01h^2$  користи како би се у одређеним случајевима избегло дељење са вредностима блиским нули. Брзина протирања звука у флуиду  $c$  се за сваку честицу одређује на основу једначине стања преко следећег израза:

$$c(\rho) = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{B\gamma}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1} \quad (3.38)$$

Гравитационо убрзање  $\mathbf{g}$  је позната константа, па се не апроксимира.

### 3.2.3 Схема за временску интеграцију

Временска интеграција једначина одржања обавља се коришћењем предиктор-коректор схеме [52] по којој се промена положаја, брзине и густине честице одређује у три етапе. Узимајући да је  $\mathbf{F}_i = \langle \frac{D\mathbf{v}}{Dt} \rangle_i$  и  $D_i = \langle \frac{D\rho}{Dt} \rangle_i$ , у првој етапи се рачунају предиктор вредности (индекс  $p$ ) у временском тренутку  $(n + 1/2)\Delta t$ :

$$\mathbf{v}_i^{p,n+1/2} = \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_i^n \quad (3.39)$$

$$\rho_i^{p,n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2} D_i^n \quad (3.40)$$

$$\mathbf{r}_i^{p,n+1} = \mathbf{r}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_i^n \quad (3.41)$$

У другој етапи се на основу претходно срачунатих предиктор вредности рачунају кориговане (коректор) вредности у истом временском тренутку:

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F}_i^{p,n+1/2} \quad (3.42)$$

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2} D_i^{p,n+1/2} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{r}_i^{p,n+1} = \mathbf{r}_i^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_i^{p,n+1/2} \quad (3.44)$$

У последњој етапи се на основу претходно срачунатих предиктор вредности рачунају кориговане (коректор) вредности у временском тренутку  $(n + 1)\Delta t$ :

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = 2\mathbf{v}_i^{n+1/2} - \mathbf{v}_i^n \quad (3.45)$$

$$\rho_i^{n+1} = 2\rho_i^{n+1/2} - \rho_i^n \quad (3.46)$$

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = 2\mathbf{r}_i^{n+1/2} - \mathbf{r}_i^n \quad (3.47)$$

Вредност временског корака  $\Delta t$ , мења се у току прорачуна и рачуна се према поступку који су користили Monaghan и Kos [58]:

$$\Delta t = C_r \cdot \min(\Delta t_{F_i}, \Delta t_{C_r}) \quad (3.48)$$

$$\Delta t_F = \min \sqrt{h/F_i} \quad (3.49)$$

$$\Delta t_{C_r} = \min \frac{h}{c + \max \left| \frac{h \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \right|} \quad (3.50)$$

Неведени поступак се заснива на два критеријума. Један, по којем се временски корак одређује на основу највеће силе  $F_i$ , односно убрзања, и другог, по којем се временски корак одређује комбинујући *Courant–Friedrichs–Lewy* услов стабилности (у даљем тексту Курантов услов), и највећу вредност члана преко којег се уводи вештачка вискозност. У тексту се коефицијент  $C_r$  назива Курантов број иако, строго гледано, због комбиновања критеријума за избор вредности временског корака, коефицијент  $C_r$  то није.

#### 3.2.4 Гранични услови

Задавање граничних услова у SPH методи и даље представља проблем. У дисертацији се разматрају, како проблем моделирања чврсте границе тако и задавање граничних услова на отвореној граници.

За моделирање утицаја чврсте границе, у дисертацији је коришћен поступак који укључује примену такозваних динамичких честица [25]. По овом поступку чврста граница се моделира коришћењем честица са унапред дефинисаном брзином (за не-

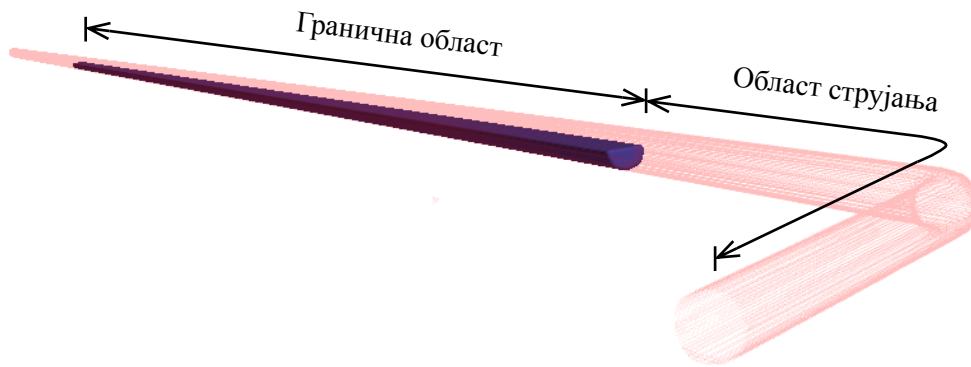
покретну границу вектор брзина је нула вектор). Динамичке честице се у рачунском поступку посматрају на исти начин као и честице флуида, са тим да се за честице границе не рачуна убрзање, тј. не решава се једначина одржања количине кретања. С друге стране, срачунате вредности притиска и положаја динамичких честица фигуришу у обе једначине одржања које се постављају за честице флуида које се налазе на растојању мањем од  $2h$  од чврсте границе.

Основна улога динамичких честица је да спрече пролаз честица флуида кроз чврсту границу. Механизам који спречава пролаз честица флуида кроз чврсту границу се може објаснити анализирајући једначину континуитета (3.30) односно једначину стања (3.32). Наиме, када се честице флуида приближавају динамичким честицама, густина честица расте па самим тим и притисак тј. вредност силе одбијања. При томе је интеракција честица границе и флуида еластичне природе само за случај када је „вискозни” члан једнак нули [78].

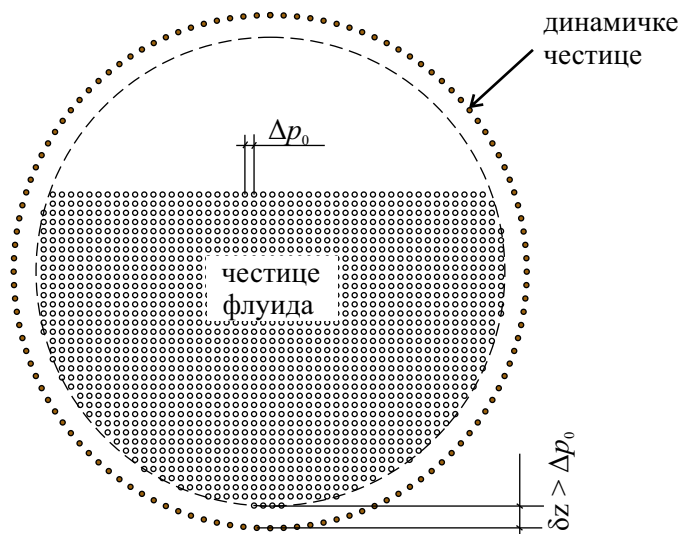
Примена динамичких честица представља рачунски најједноставнији поступак за обухватање чврсте границе у прорачуну. При томе, овај поступак дозвољава лаку примену алгоритама за паралелизацију прорачуна. Основни недостатак код примене динамичких честица је стварање нешто већег граничног слоја.

Задавање граничних услова на отвореној граници код моделирања просторног течења SPH методом за сада представља „отворен” проблем [14]. У примеру нумеричког моделирања бурног течења у закривљеној цеви, који се анализира у овој тези, постоји потреба за дефинисањем оваквих граничних услова. Како се у примеру ради о бурном режиму, било је потребно задати граничне услове на узводном крају.

У овој дисертацији коришћен је оригинални поступак за задавање граничних услова у бурном режиму течења, који се заснива на методи коју су предложили Maggione et al. [48], [49] и [72]. Специфичност поступка који се предлаже у овој дисертацији је у коришћењу динамичких честица за дефинисање чврсте границе. Као и у поступку који је предложен у наведеним радовима, честице флуида (у даљем тексту граничне честице) улазе у стварну рачунску област на узводном крају задатом брзином и са хидростатичким притиском, без утицаја околних честица флуида. За разлику од методе коју су предложили Maggione et al., где се граничне честице генеришу када честице флуида напусте низводни крај домена, у овој дисертацији се граничне честице не генеришу током прорачуна, већ се све честице задају на почетку прорачуна узводно од стварне области струјања, у тзв. граничној области струјања (слика 3.2). Кота нивоа, односно дубина на узводном крају области струјања, задаје се преко коте слободне површине у граничној области. Дужина граничне зоне којом се дефинише укупна запремина честица у прорачуну, зависи од трајања симулације.



Слика 3.2: Попречни пресек на делу узводно од стварне границе



Слика 3.3: Попречни пресек на делу узводно од стварне границе

У граничној зони граничне честице се крећу непромењеном, унапред задатом брзином и важи хидростатички распоред притиска. Као и у методи коју су предложили Marrone и сарадници, на кретање граничних честица не утичу околне честице, док на кретање честица у рачунској области (честице флуида) које су на растојању мањем од  $2h$  од уводне границе, утичу граничне честице.

Описан поступак за дефинисање узводног граничног услова у бурном режиму течења захтева већи укупан број честица од поступка који су предложили Marrone и сарадници, али је са друге стране погоднији за паралелизацију. При томе је разлика између укупног броја честица у два поступка мања уколико су рачунске симулације краће. Као што ће бити показано, у симулацијама обављеним у дисертацији, временски осредњене вредности величина релативно брзо конвергирају, па је јасна оправданост предложеног поступка.

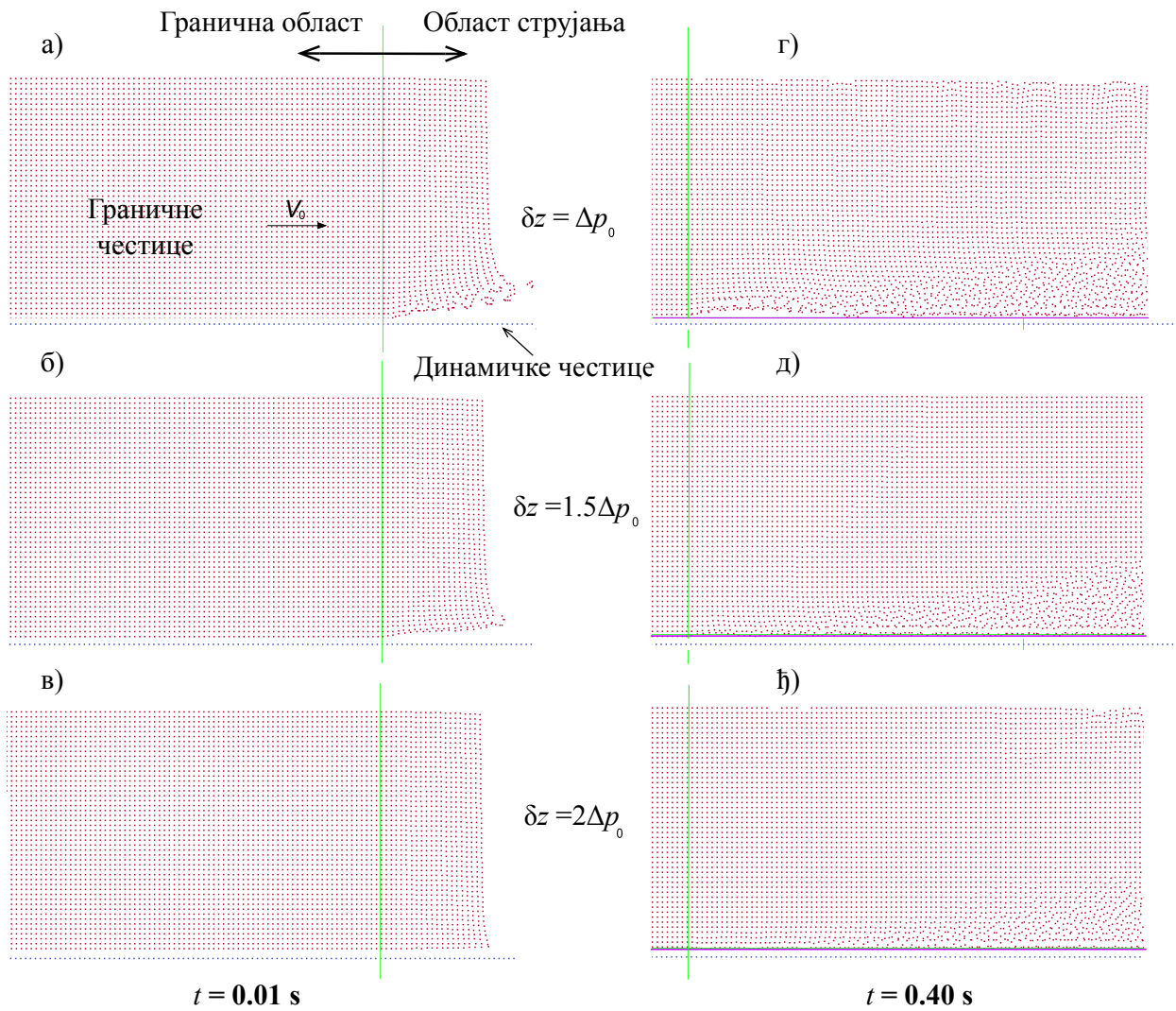
Нумерички огледи спроведени у овој дисертацији показали су да описан поступак задавања узводног граничног услова захтева да се граничне честице флуида по-

ставе на растојање  $\delta z$  које је веће од растојања између честица флуида  $\Delta p_0$ , како би се избегле нумеричке нестабилности (слика 3.3). Проблем представља приближавање граничних честица динамичким честицама, без утицаја динамичких на граничне честице. С обзиром да се граничне честице „несметано” приближавају, притисак у динамичким честицама све време расте, тако да граничне честице, због великог притиска који се „акумулирао” у динамичким честицама бивају одбијене од чврсте границе истог тренутка када уђу у стварни рачунски домен (када постану регуларне честице флуида). Пораст притиска динамичких честица може се проценити на основу израза који се добија коришћењем једначине континуитета (3.30) и једначине стања (3.32):

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{B\gamma}{\rho_0^\gamma} \rho^\gamma m_f \mathbf{v}_{bf} \nabla W_{bf} \quad (3.51)$$

У претходном изразу индекс  $b$  означава динамичку честицу, а  $f$  честицу флуида. С обзиром на то да су  $B$ ,  $\gamma$  и  $\rho_0$  глобалне константе, у дисертацији се предлаже повећање растојања између граничних и динамичких честица како би се смањила вредност последњег члана у производу са десне стране израза.

На слици 3.4 приказан је распоред честица за проблем у вертикалној равни. На почетку нумеричког огледа граничне честице формирају водени стуб узводно од стварне границе висине 5 cm. Све граничне честице крећу се брзином  $V_0 = 2$  m/s у хоризонталном правцу ка узводној граници области струјања. У случају када је растојање између граничних и динамичких честица  $\delta z = \Delta p_0$  (слика 3.4а), честице бивају одбачене од границе, што након извесног времена узрокује значајне осцилације нивоа (слика 3.4г). Гранични случај представљен је на сликама 3.4в и 3.4ђ, када је растојање  $\delta z = 2\Delta p_0$ . Као што се са слике 3.4ђ види, у овом случају, иако нема одбацивања, постоје мање осцилације нивоа. Ово се може објаснити тиме што је интеракција између граничних и динамичких честица непосредно након уласка граничних честица у област струјања слаба, па постоји извесно „пропадање” честица флуида ка чврстој граници. Слика 3.4б показује, да се у циљу избегавања осцилација нивоа, најбољи резултати добијају ако је  $\delta z = 1,5\Delta p_0$ . Тада се, иако постоји мање иницијално одбијање честица (слика 3.4д), не уочавају осцилације нивоа када се простор низводно од узводне границе попуни честицама.



Слика 3.4: Утицај промене растојања  $\delta z$  на распоред честица флуида у близини узводне границе



### 3.3 Моделирање раванског струјања

Нумерички модел за прорачун раванског струјања у хоризонталној равни који се користио у дисертацији заснован је на јавно доступном програмском коду SWE-SPHysics. Рачунски поступци који се користе у овом програмском коду детаљно су описани у радовима [11], [13], и [12]. У овој дисертацији је модел који се користи у програмском коду SWE-SPHysics измењен и допуњен, како би се обавили нумерички прорачуни струјања на физичком моделу речне кривине. Измене односно допуне, које су у рачунском моделу направљане, утичу на задавање граничних услова и дисипативних чланова у једначини одржања количине кретања.

У опису коришћеног, раванског SPH модела, полази се од неконзервативног облика једначина кретања нестишљивог флуида у хоризонталној равни:

$$\frac{D\rho_p}{Dt} = -\rho_p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.52)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \underbrace{-\frac{g}{\rho_w} \nabla \rho_p}_{a^{pr}} + \underbrace{g \nabla z_d}_{a^{id}} + \underbrace{\frac{1}{\rho_w} \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}}}_{a^{vis}} + \underbrace{g \mathbf{S}_f}_{a^{tr}} \quad (3.53)$$

Написаним једначинама су редом представљени закони одржања масе (једначина континуитета) и количине кретања. У једначини континуитета користи се густина која представља масу флуида по јединици површине  $\rho_p = m/A$ . Веза између овако дефинисане густине и дубине воде  $d$  је  $\rho_p = d\rho_w$ , где је  $\rho_w$  густина воде ( $1000 \text{ kg/m}^3$ ). Непознате које се решавају су густина  $\rho_p$  (на основу које се рачуна дубина  $d$ ) и хоризонталне компоненте вектора брзине  $\mathbf{v}(u, v)$ . У изразима још фигуришу кота дна корита  $z_d$ , тензор тангенцијалних напона  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ , гравитационо убрзање  $g$  и вектор изворног члана којим се обухвата утицај силе трења  $\mathbf{S}_f$ .

Једначина одржања количине кретања изводи се претпостављајући хидростатички распоред притиска. Члановима са десне стране једначине обухватају се утицаји промене притиска ( $a^{pr}$ ), нагиба дна корита ( $a^{id}$ ), вискозности или „турбулентних“ напона ( $a^{vis}$ ) и утицај трења на речном дну ( $a^{tr}$ ). Уколико би се изоставила последња два члана на десној страни израза, добила би се једначина за идеалан флуид.

#### 3.3.1 Одређивање густине честица

Вредности зависно променљивих односно њихових извода се, следећи описана правила за SPH апроксимације, одређују за честице непроменљиве масе  $m_i$ . Након генерисања честица (уласка честице у рачунску област) честица не мења густину  $\rho_w$  (честица је нестишљива) већ густину  $\rho_p$ . Ова густина се мења због промене међу-

собног положаја честица и може се одредити коришћењем израза (3.52) или, као што је у овом раду случај, коришћењем правила за апроксимацију произвољне функције (3.14) на следећи начин:

$$\rho_{p,i} = \sum_{j=1}^N A_j \rho_{p,j} W_{ij}(h_j) = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij}(h_i) \quad (3.54)$$

где је  $A_j$  површина коју честица  $j$  заузима у хоризонталној равни. Како би се за честицу ( $i$ ) одржао приближно једнак број честица ( $j$ ) у области интерполације, користи се променљива вредност параметра  $h$ , која се може рачунати коришћењем следећег израза:

$$h_i = h_{0,i} \sqrt{\frac{\rho_{p0,i}}{\rho_{p,i}}} \quad (3.55)$$

где су  $\rho_{p0}$  и  $h_0$ , густина честица и радијус интерполације на почетку прорачуна. С обзиром на то да густина  $\rho_p$  зависи од параметра  $h$ , густина  $\rho_{p,i}$  се рачуна итеративно. У раду је за одређивање густине коришћен Њутн-Рафсонов поступак.

### 3.3.2 Апроксимација извода брзине

Објасниће се нумерички поступак за прорачун чланова са десне стране једначине (3.53), који у збиру дају убрзање честице  $a_i$ .

Члан који се односи на убрзање услед промене дубине (притиска) се према [65] рачуна на следећи начин:

$$\left\langle \frac{g}{\rho_w} \nabla \rho_p \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N m_j \frac{g}{2\rho_w} \left[ \frac{1}{\beta_j} \nabla W_j(x_i, h_j) - \frac{1}{\beta_i} \nabla W_i(x_j, h_i) \right] \quad (3.56)$$

Корекциони фактор  $\beta$  користи се како би међусобне силе притиска између честица биле једнаког интензитета, а супротног знака:

$$\beta_i = \frac{1}{2\rho_{p,i}} \sum_{j=1}^N m_j r_{ij} \frac{dW_{ij}}{dr_{ij}} \quad (3.57)$$

Корекција је, са теоријског аспекта потребна како би нумеричка апроксимација била конзистентна у погледу одржања количине кретања. Наиме, за разлику од нумеричког модела просторног струјања који је претходно описан, у раванском моделу је вредност параметра  $h$  променљива, па за конзервативност схеме није довољно користити симетрични облик SPH апроксимације.

Како би се избегле нумеричке осцилације у присуству већих поремећаја у струјању, Ata и Soulaïmani у [3] предлажу да се уз корекциони члан у изразу (3.56), дода

и члан преко којег се уводи вештачка вискозност:

$$\Pi_{ij} = \frac{\bar{c}_{ij} \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{\bar{\rho}_{p,ij} \sqrt{|\mathbf{r}_{ij}^2 + \eta^2|}} \quad (3.58)$$

где је  $\bar{c}_{ij} = (\sqrt{gd_i} + \sqrt{gd_j})/2$ ,  $\bar{\rho}_{p,ij} = (\rho_{p,i} + \rho_{p,j})/2$ . За разлику од израза (3.36) који је предложио Monaghan, у којем степен вештачке вискозности зависи од вредности параметра  $\alpha$ , која се унапред задаје, у изразу који предлажу Ata и Soulaïmani вредност вештачке вискозности зависи искључиво од израчунатих вредности брзина и дубина. Коришћењем вештачке вискозности, десна страна израза (3.56) постаје:

$$\sum_{j=1}^N m_j \frac{g}{2\rho_w} \left[ \left( \frac{1}{\beta_j} + \frac{\rho_w}{g} \Pi_{ij} \right) \nabla W_j(x_i, h_j) - \left( \frac{1}{\beta_i} + \frac{\rho_w}{g} \Pi_{ij} \right) \nabla W_i(x_j, h_i) \right] \quad (3.59)$$

Нагиб дна речног корита се рачуна преко висинског положаја посебног „слоја” непокретних честица којима је представљено речно дно. У раду је на основу снимљених тачака дна корита кубном интерполацијом [27] генерисана правилна мрежа тачака (честица дна) које су на мањем растојању од снимљених тачака. Коришћењем израза (3.15), на основу висинског положаја честица дна  $z_d^b$ , други члан са десне стране израза (3.53) апроксимира се на следећи начин:

$$\langle g \nabla z_d \rangle_i = g \sum_{j=1}^N z_{d,j}^b \tilde{\nabla} W_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j^b, h_b) A_j \quad (3.60)$$

где је  $h_b$  радијус области интерполације у слоју који чине честице дна. Како би се након нумеричких прорачуна (у којима се рачунају дубине  $h$ ) приказале коте нивоа слободне површине у одређеним тачкама простора, потребно је на траженим местима одредити коте дна  $z_d$ . Прорачун кота дна може се обавити коришћењем основне апроксимације у SPH методи (3.14), на следећи начин:

$$z_{d,i} = \sum_{j=1}^N z_{d,j}^b \tilde{W}_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j^b, h_b) A_j \quad (3.61)$$

У претходне две формуле користе се кориговане вредности тежинске функције и градијента тежинске функције које се добијају коришћењем израза (3.27) и (3.29).

Како се у раду анализира турбулентно течење, трећим чланом се обухвата утицај флукуација на временски осредњене вредности зависно променљивих. Овај члан је додатак у односу на оригинални модел који је предложен у радовима [11], [13], и [12]. Користи се концепт Boussinesq-а [31] по којем се турбулентни напони дефинишу по

аналогији са вискозним напонима<sup>4</sup>:

$$\frac{1}{\rho_w} \bar{\boldsymbol{\tau}} = \nu_t \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

где је  $\nu_t$  коефицијент турбулентне вискозности чија вредност зависи од случаја који се анализира. У нумеричком поступку се чланови приказаног тензора рачунају коришћењем правила наведених у поглављу 3.1.2. Примера ради:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^N A_j u_{ij} \frac{\partial W_{ij}(\bar{h}_{ij})}{\partial y} \quad (3.63)$$

где се користи осредњена вредност радијуса интерполације  $\bar{h}_{ij} = h_i + h_j$ , како би се обезбедила асиметрија међусобног утицаја честица. Из истог разлога се чланови вектора који представља дивергенцију тензора турбулентних напона:

$$\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

рачунају као средње вредности међусобних утицаја честица ( $i$ ) и ( $j$ ), који би се добили коришћењем стандардног израза за SPH апроксимацију (3.15):

$$\left\langle \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right\rangle_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left( A_i \tau_{xy,i} \frac{\partial W_{ij}(\bar{h}_{ij})}{\partial x} - A_j \tau_{xy,j} \frac{\partial W_{ji}(\bar{h}_{ij})}{\partial x} \right) \quad (3.65)$$

Треба напоменути да се у раду не користе истовремено вештачка и „турбулентна” вискозност. Као што ће бити објашњено у варијанти прорачуна у којој се користе турбулентни напони, вештачка вискозност се користи само у делу рачунског домена у близини узводног граничног услова.

Треће корита рачуна се коришћењем Манинговог коефицијента који се добија по истом принципу као и нагиб дна речног корита, коришћењем честица дна:

$$n_i = \sum_{j=1}^N n_j^b \widetilde{W}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j^b, h_b) A_j \quad (3.66)$$

где је  $n_j^b$  вредност Манинговог коефицијента за честице дна које су на мањем растојању од  $2h_b$  од честице флуида  $i$ . Последњи члан на десној страни динамичке

<sup>4</sup>Члан који узима у обзир интензитет турбуленције се изоставља

једначине рачуна на следећи начин:

$$\langle g\mathcal{S}_f \rangle_i = \mathbf{v}_i \frac{gn_i^2 |\mathbf{v}_i|}{d_i} \quad (3.67)$$

Како би се добила боља слагања са измереним вредностима брзина добијеним огледалним мерењима, за област струјања у непосредној близини обале, повећаван је отпор трења о дно. Наиме, било је потребно „успорити” честице у близини обале. Како се унапред не зна које ће честице (и када) бити у близини дна, коришћен је оригинални поступак за динамичку идентификацију ових честица. По овом поступку, повећавана је вредност Манинговог коефицијента честицама флуида за које важи неједнакост:

$$\sum_{j=1}^n A_i W_{ij} \leq R \quad (3.68)$$

где је  $R$  реалан број који се одређује од случаја до случаја. Овај услов се проверава у сваком временском кораку.

### 3.3.3 Схема временске интеграције

Прорачун промене брзине односно положаја честица обавља се користећи схему *leap frog*:

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i^{n-1/2} + \Delta t \mathbf{a}_i^n \quad (3.69)$$

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = \mathbf{r}_i^n + \Delta t \mathbf{v}_i^{n+1/2} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_i^n \quad (3.71)$$

Као и у случају рачунског поступка за моделирање просторног струјања, коришћене су променљиве вредности временског корака, које су у сваком кораку, одређиване на основу Курантовог услова стабилности:

$$\Delta t = C_r \cdot \min\left(\frac{h_i}{c_i + |\mathbf{v}_i|}\right) \quad (3.72)$$

где је  $c_i = \sqrt{gd_i}$ .

### 3.3.4 Гранични услови

Задавање граничних услова на узводној и низводној (отвореној) граници обавља се на основу приципица који су користили Vacondio и сарадници у раду [13]. За разлику од поступка који је предложен у наведеном раду, и који је директно применљив само у случају задавања униформног граничног услова, тј. задавања константне брзине по ширини правоугаоног попречног пресека, поступак коришћен у

овој дисертацији применљив је у случају течења у коритима неправилног облика. У поглављу 6 објашњено је како је у конкретном примеру физичког модела речног корита добијен неуниформан распоред брзине на узводној граници. Поступак који се у наставку објашњава применљив је само у мирном режиму течења.

Уз отворене границе формира се додатна област струјања (гранична област) која се попуњава са честицама које се формирају у току прорачуна (слика 3.5). На узводној страни то су новоформиране честице, док су на низводној страни то честице које су напустиле рачунску област. Помоћу ових граничних честица се, у зависности од положаја (узводни или низводни крај) задају или рачунају вредности дубине и брзине.

У узводној граничној области формирају се честице чија се дубина и брзина редом означавају са  $d_i^{ug}$  и  $v_i^{ug}$ . Прво се рачуна дубина на основу SPH интерполације у којој учествују честице из „стварне” рачунске области ( $j$ ) које су на растојању мањем од  $2h$  од честице из граничне области ( $i$ ):

$$d_i^{ug} = \sum_{j=1}^N A_j d_j \widetilde{W}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, h_i) \quad (3.73)$$

а затим се одређује брзина на основу задатог јединичног протока  $q$ :

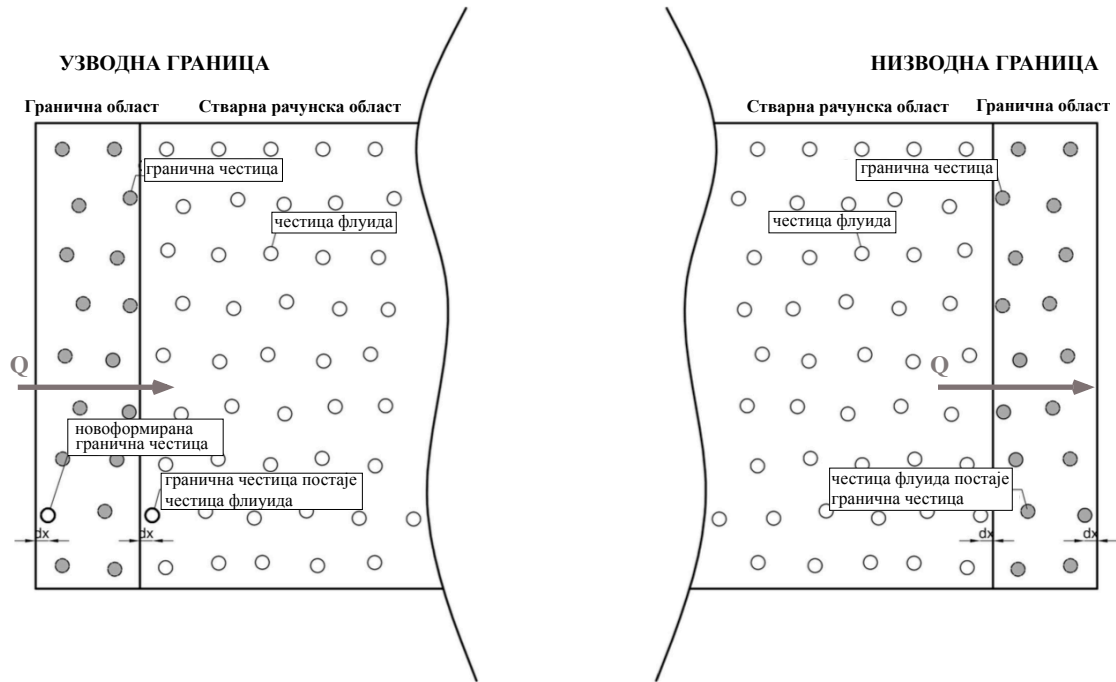
$$v_i^{ng} = \frac{q}{d_i^{ug}} \quad (3.74)$$

У тренутку када честица из граничне области пређе у стварну рачунску област, према слици 3.5, формира се нова „гранична” честица и понавља се поступак прорачуна дубина. Поступак је сличан на низводној граници где честице флуида из стварне области проласком кроз низводну границу постају граничне честице.

Проблем код низводне границе настаје када се моделира струјање у кориту које није правоугаоно, а потребно је задати коту нивоа као гранични услов. Због тога што се унапред не познаје положај проласка честице кроз низводну границу, не може се унапред знати коју дубину би требало задати честици када уђе у граничну област. Како би се одредиле дубине граничне честице на основу коте нивоа, у овој дисертацији су коришћене коте суседних честица дна:

$$d_i^{ng} = z_{niz} - \sum_{j=1}^N A_j^b z_{d,j}^b \widetilde{W}_{ij}(\mathbf{r}_{ij}, h_i) \quad (3.75)$$

где је  $z_{niz}$  кота нивоа која представља низводни гранични услов. Када се израчуна дубина, компоненте вектора брзина низводних граничних честица  $u_i^{ng}$  и  $v_i^{ng}$  се могу



Слика 3.5: Генерисање честица на узводном и низводном крају [13]

одредити коришћењем Риманових инваријанти [73]:

$$u_i^{ng} = u_I + 2\sqrt{g} \left( \sqrt{d_I} - \sqrt{d_i^{ng}} \right) \quad (3.76)$$

$$v_i^{ng} = v_I + 2\sqrt{g} \left( \sqrt{d_I} - \sqrt{d_i^{ng}} \right) \quad (3.77)$$

с тим да се вредности величина  $u_I$ ,  $v_I$  и  $d_I$  одређују SPH интерполацијом вредности одговарајућих величина ( $u$ ,  $v$  и  $d$ ) у којој учествују суседне честице флуида у стварној рачунској области (по аналогији са одређивањем дубине  $d_i^{ng}$ ).

## 4. Проблем рушења бране

Варијанта SPH методе, описана у поглављу 3.2, примењена је и анализирана у решавању проблема рушења бране и удара млаза воде у чврсту границу. Проблем карактеришу појава кретања таласа са стрмим челом и ударни притисак услед интеракције таласа насталог рушењем бране и физичке препреке. Разматра се равански проблем у вертикалној равни. Приказана је анализа осетљивости SPH рачунског модела на промене вредности параметара. Оцена тачности SPH модела је дата на основу поређења резултата нумеричких симулација са мерењим на физичком моделу [45], и то преко вредности релативне амплитуде и фазне разлике таласа. За проверу су коришћена мерења, обављена помоћу модерне опреме у строго дефинисаним лабораторијским условима, у оквиру којих су поред детаљног разматрања простирања таласа анализирани динамички утицаји. Ова мерења представљају ревизију досадашњих мерења која су се користила за верификацију SPH методе. Због тога су и резултати нумеричких симулација представљени у овом раду, својеврсна ревизија радова у којима се даје оцена тачности SPH методе у нумеричком моделирању проблема рушења бране. Тако се у литератури често може наћи непроверена претпоставка, да је брзина уклањања преграде на физичком моделу довољно велика да се „рушење бране” може сматрати тренутним, чиме се имплицира да је утицај ове брзине од малог значаја. У овом раду показано је да се SPH моделом може „срачунати” утицај брзине наглог уклањања преграде (којом је представљена брана) и самим тим побољшати слагање нумеричких прорачуна са мерењима на физичком моделу.

Поред анализе тачности репродукције таласа насталог наглим уклањањем преграде, упоређени су срачунати и измерени притисци у изабраним тачкама зида у који удара талас на крају канала. Као што се и очекивало, са „вештачким” третманом густине (односно притиска) у коришћеној варијанти SPH методе, вредности срачунатих притисака нису реалне. Ипак, у овом раду је показано да се на рачунски једноставан начин, променом референтне брзине простирања звука у води за све честице границе (DBP) у коју удара талас воде, могу добити вредности притисака блиске измереним.



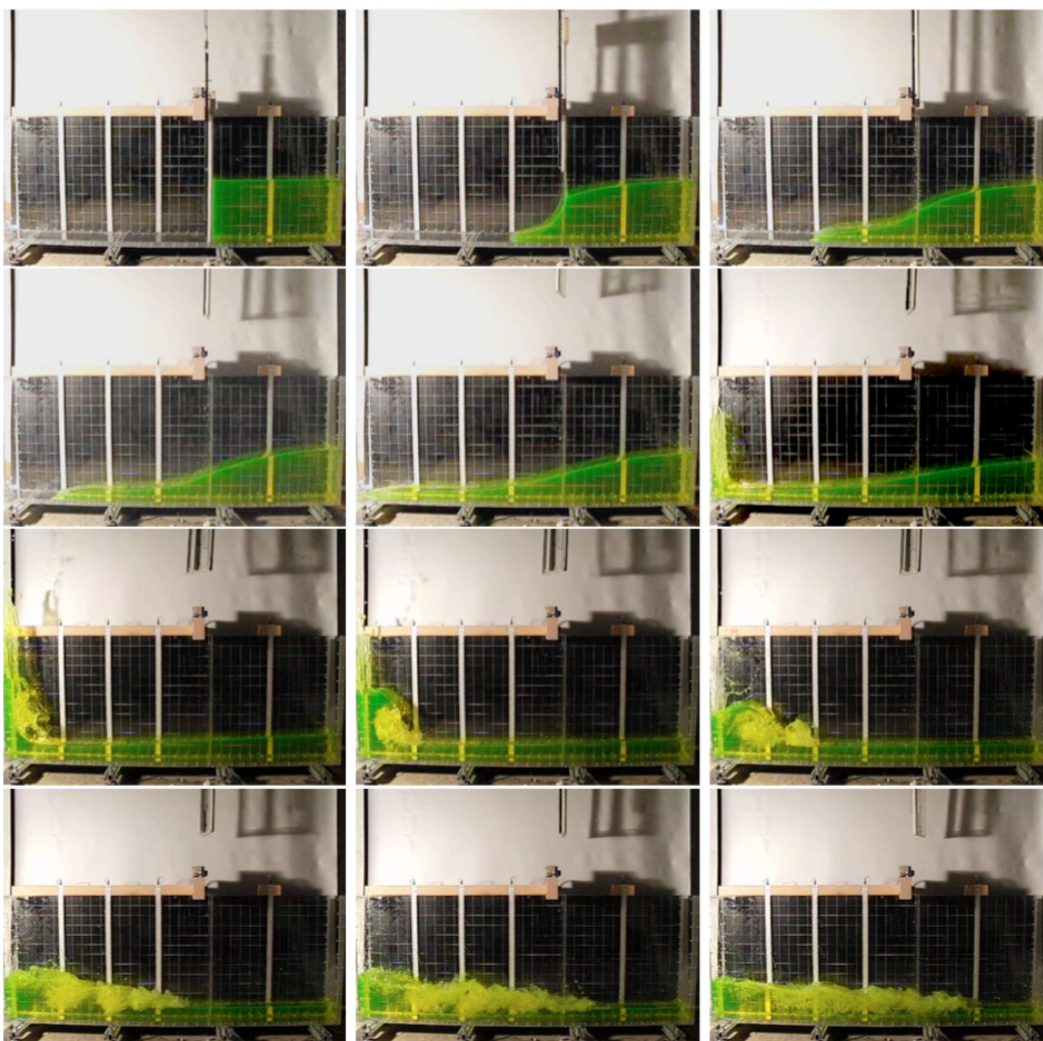
#### 4.1 Увод

Под појмом „проблем рушења бране” сматра се течење настало наглим уклањањем дела границе која одржава воду у стању мировања. Проблем је од посебне важности код брана на постојећим акумулацијама. Иако се изузетно ретко јављају, проломи брана су праћени великом материјалном штетом, и нажалост, људским жртвама. Зато је по правилу неопходно предвидети динамику простирања таласа услед овог хазардног догађаја, како би се узбуђивањем минимизирала штета.

Удар воде о чврсту границу је проблем који се, пре свега, анализира у поморској хидраулици. У условима неустаљеног течења, важно је проценити динамичка оптерећења, која настају у интеракцији воде и поморских објеката, као што су нпр. нафтне платформе и објекти за заштиту обала. Такође, удари морских таласа о пловила могу оштетити пловила или их потопити.

Лабораторијски оглед у којем се разматра проблем рушења бране и удар воде у чврсту границу приказан је на слици 4.1 [45]. Оглед се може поделити у три фазе. У првој фази талас са стрмим челом се простире и трансформише до наилаaska на чврсту границу (леви крај слике). Другу фазу представља удар у чврсту границу и раздвајање млаза воде на део који се креће дуж границе и лемећи талас. Ова, друга фаза, праћена је распршивањем млаза воде. У трећој фази се, након удара, јавља повратни талас и наставља дисипација енергије до коначног умиривања воде. С обзиром на то да се распршивање млаза не може правилно моделирати разматраним моделом, што, као што се може закључити са фотографије, значајно утиче на последњу фазу огледа, у раду се разматрају само прве две фазе.

Трансформација таласа са стрмим челом, који је настао рушењем бране, стандардни је тест пример за нумеричке методе помоћу којих се моделира течење са слободном површином. У овом раду су резултати нумеричких прорачуна упоређени са резултатима истраживања на физичком моделу која су спровели Lobovsky и сарадници [45]. Наведено истраживање, у којем је коришћена модерна мерна опрема, може се сматрати својеврсном ревизијом досадашњих огледалних радова [50] и [37] који су коришћени приликом валидације различитих варијанти SPH методе [54], [77], [78], [23] и [2]. У односу на наведена истраживања, услови за мерења која су обавили Lobovsky и сарадници строжије су контролисани. Тако у радовима [50] и [37] не постоји податак о брзини уклањања преграде (која на почетку огледа држи воду у стању мировања), при чему се у свим радовима у којима се користи SPH метода, претпоставља тренутни пролом, прећутно прихватајући да је брзина уклањања препреке довољно велика да не утиче значајно на резултате. У овој дисертацији се у нумеричком поступку анализира и случај тренутног пролома, као и случај у којем се моделира уклањање преграде према подацима из истраживања која су обавили Lo-



Слика 4.1: Фотографије сачињене за време огледа на физичком моделу у којем се разматра проблем рушења бране и удара млаза воде у чврсту границу [45]

bovsky и сарадници. Показано је да су у случају када се не моделира устава слагања резултата нумеричких огледа обављених у овој дисертацији са резултатима добијеним на физичком моделу, приближно једнака слагањима која су добијена у раду [23], док су у случају нумеричког огледа у којем се моделира уклањање преграде, слагања боља. За оцену слагања рачунског модела са лабораторијским огледом, по угледу на рад [23], коришћене су две величине- релативна амплитуда дубине:

$$A_r = \sum_i d_i^{SPH} / \sum_i d_i^{exp} \quad (4.1)$$

и фазна разлика дубина:

$$P_d = \sqrt{\sum_i (d_i^{SPH} - d_i^{exp})^2 / \sum_i (d_i^{exp})^2} \quad (4.2)$$

У приказаним изразима  $d_i^{SPH}$  се односи на срачунате вредности дубине, док  $d_i^{exp}$  представља измерене вредности дубине. У идеалном случају слагања је  $A_r = 1$  и  $P_d = 0$ .

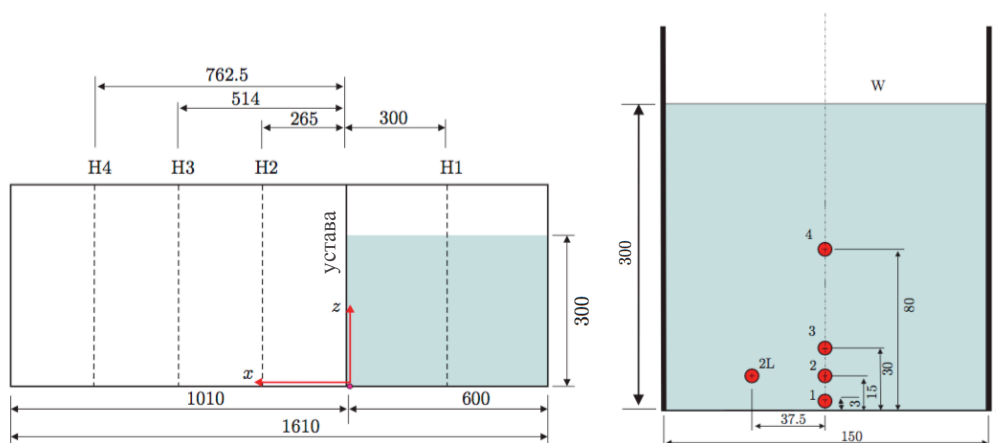
Вредности релативне амплитуде и фазне разлике користе се у анализи осетљивости резултата нумеричких симулација на промену вредности параметара SPH модела. Анализирани су следећи параметри: почетно растојање између честица  $\Delta p_0$ , коефицијент вештачке вискозности  $\alpha$ , Курантов број  $C_r$ , радијус области интерполације  $h$ , референта брзина звука у води  $c_0$  и број рачунских корака након којих се примењује Shepard-ов филтер  $N_{sf}$ .

У раду [45], посебан акценат стављен је на мерење промене притисака. За поређење са нумеричким прорачунима, били су доступни дијаграми промене притисака у четири тачке на зиду у који удара водени талас. Како би се применом коришћене варијанте SPH методе у прорачуну добиле реалне вредности притисака, у раду [20] предложен је поступак по којем се за честице границе пре прорачуна притисака, прерачунавају густине. У овој дисертацији предлаже се једноставнији рачунски поступак, у којем се за честице чврсте границе која представљају зид (у који удара талас воде) користи константа вредност бездимензионалне референтне брзине простирања звука у води  $c^* = c_0 / \sqrt{gH}$  (где  $H$  представља дубину воде на почетку огледа) Ова вредност разликује се од оне која важи за честице флуида. Наиме, испитивања обављена у оквиру ове дисертације су показала да су прорачунати притисци у честицима границе, за стандардну вредност величине  $c^*$  која је једнака 10 (вредности која се стандардно користи за све честице), вишеструко већи од измерених. Повећавањем вредности  $c^*$  могу се добити рачунске вредности притисака блиске вредностима које су добијене на физичком моделу.

## 4.2 Опис физичког модела

Као што је већ наведено, у овој дисертацији су преузети резултати испитивања појаве рушења бране приказани у раду [45]. Схема инсталације, која се састоји од резервоара, устава, механизма за подизање устава и низводног канала дата је на слици 4.2. На истој слици означене су вертикале у којима су бележени нивограми (Н1, Н2, Н3 и Н4) као и положаји пет сензора притиска постављених на низводном зиду наспрам устава. Дужина канала износи 1,61 m, ширина 0,67 m, док је висина 0,60 m. Узводни крај канала преграђен је уставом и служи као резервоар. Дужина резервоара је 0,60 m. Низводни крај канала је затворен. Коришћени су пијезо-резистентни сензори типа KULITE XTL-190. Пречник сензора је износио 4.2 mm а фреквенција узорковања 20 kHz. Дубине су читаване са видео снимака забележених дигиталном камером Casio EXILIM F1. Камера бележи 300 слика у секунди резолуције 512 x 384 тачака.

У огледу који се анализира почетна дубине воде у узводном резервоару износила је 0,30 m. Како би се испитала поновљивост огледа, обављено је 100 експеримената. Поновљивост је анализирана на основу бележења 100 временских серија притисака и мерењем времена потребног за подизање устава. Како је наведено у раду, забележен је само мањи број видео снимака, па статистичка обрада нивограма није обављена. Ипак, аутори мерења су на основу статистичке обраде времена појаве ударног притиска у сензору 1, претпоставили да је прва фаза огледа која се односи на простирање таласа насталог подизањем устава поновљива.

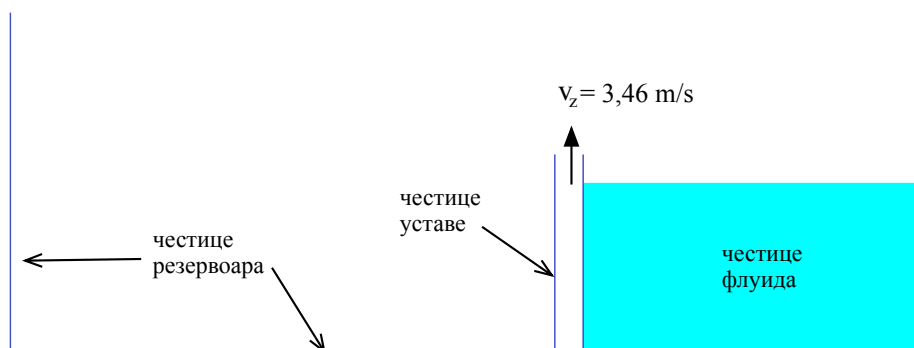


Слика 4.2: Схематски приказ инсталације на којој се испитује проблем рушења бране [45] са означеним положајем сензора за мерење притисака на низводном крају канала и вертикалама у којима се мере дубине: а) подужни пресек б) зид на низводном крају резервоара (Димензије су дате у милиметрима.)

### 4.3 Поставка нумеричког модела

У нумеричким симулацијама течења насталог услед рушења бране користи се модел описан у поглављу 3.2, с тим што се све једначине испишују за два ортогонална правца у вертикалној равни. Обављене су две групе огледа. Једна, у којој је моделирано подизање уставе и друга, у којој је разматрано њено тренутно уклањање. Друга група прорачуна је анализирана како би се проценио утицај брзине подизања уставе на простирање таласа. Опсежна анализа осетљивости обављена је само за прву варијанту прорачуна. Пошто се закључило да на резултате прорачуна највећи утицај имају промене почетног растојања између честица и вредности коефицијента вештачке вискозности, за другу групу прорачуна је анализиран само утицај промене вредности ова два параметра. С обзиром на велики број анализираних параметара нису испитане све могуће комбинације у разматраним опсезима вредности параметара. Анализа осетљивости је приказана у табелама 4.1 до 4.20, односно у прилозима Б.1 и Б.24, у којима су дате вредности релативне амплитуде и фазне разлике за комбинације два параметра. У свакој варијанти један параметар је коефицијент вештачке вискозности, да би се утврдио њен утицај на резултате прорачуна (прорачуна са и без вештачке вискозности). За параметре који се у одређеним табелама не појављују, усвојене су стандардне вредности из литературе. Усвојено је да је  $\Delta p_0 = 1 \text{ mm}$ , јер при тој вредности слагање резултата прорачуна и мерења најбоље. За преостале параметре усвојене су, као стандардне, следеће вредности: Курантов број  $C_r = 0,2$ , бездимензионална референтна брзина простирања звука у води  $c^* = 10$ , радијус области интерполације  $h = 1,0\Delta p_0$  и број рачунских корака након којих се примењује Shepard-ов филтер  $N_{Sf} = 35$ .

Почетни рапоред честица приказан је на слици 4.3. Устава је у првој варијанти прорачуна моделирана истим честицама (DBP) као и зидови резервоара. Све че-



Слика 4.3: Почетни распоред честица флуида, покретне границе (уставе) и непокретне границе (зида резервоара)

стице које представљају уставу имају константну вредност вертикалне компоненте брзине  $v_z = 3,46 \text{ m/s}$ . Ова вредност је заправо медијана измерених вредности на физичком моделу. Време прорачуна износило је  $1,5 \text{ s}$ . За најмање растојање између честица  $\Delta p_0 = 1,0 \text{ mm}$  укупан број честица износио је приближно  $185\,000$ .

#### 4.4 Резултати

Слагање рачунских и измерених вредности дубина оцењено је поређењем, вредности релативних амплитуда  $A_r$ , поређењем вредности фазне разлике  $P_d$  и визуелним поређењем струјен слике у неколико временских тренутака. Вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  и фазне разлике дубина  $P_d$  су одређиване за све четири вертикале (Н1, Н2, Н3 и Н4) за период од  $0,86 \text{ s}$ , коришћењем измерених и срачунатих дубина на сваких  $0,01 \text{ s}$ . Вредност периода за који се обавља поређење је изабрано на основу тренутка када распршени млаз, који се одбио од чврсте границе, наилази на вертикалу Н4 (слика 4.9). С обзиром на то да распршивање млаза воде није моделирано, поређење дубина након  $0,86 \text{ s}$  није имало смисла.

Прво се представља анализа осетљивости резултата прорачуна за случај када се прецизно симулира подизање капије. У табелама 4.1 до 4.8 приказан је утицај промене вредности почетног растојања између честица  $\Delta p_0$  и коефицијента вештачке вискозности  $\alpha$  на слагање рачунских и измерених вредности дубине за све четири вертикале (Н1 до Н4). Може се закључити да је најбоље слагање са мерењима добијено за најмању вредност параметара  $\Delta p_0$  и две најмање вредности коефицијента  $\alpha$ , када су вредности  $A_r$  и  $P_d$  блиске идеалним вредностима  $A_r = 1$  и  $P_r = 0$ . Овај закључак потврђују табеле 4.9 и 4.10 у којима се приказују просечна одступања  $\Delta_{sr,Ar}$  и  $\Delta_{sr,Pd}$ , од идеалних вредности  $A_r$  и  $P_d$ , која су срачуната узимајући у обзир све четири вертикале, за све комбинације вредности параметара  $\Delta p_0$  и  $\alpha$ :

$$\Delta_{sr,Ar} = \sum_{i=1}^4 (A_{r,i} - 1)/4 \quad (4.3)$$

$$\Delta_{sr,Pd} = \sum_{i=1}^4 P_{d,i}/4 \quad (4.4)$$

По оба критеријума (одступања за  $A_r$  и  $P_d$ ) најбоља слагања добијајају се за  $\Delta p_0 = 1 \text{ mm}$  и  $\alpha = 0.05$ .

Нумерички огледи у којима су варирани други параметри ( $C_r$ ,  $c^*$ ,  $h$  и  $N_{Sf}$ ), показују мању осетљивост резултата прорачуна на промене вредности ових параметара. За опсег разматраних вредности анализираних параметара, показало се да нешто већи утицај има још једино промена вредности параметра  $c^*$ . У табелама 4.11 и 4.12

приказан је утицај промене вредности овог параметра за вертикалу Н4. Значајне разлике између рачунских и измерених дубина добијају се за највећу вредност параметра  $c^*$ . У случају  $c^* = 40$  срачунате дубине су значајно веће, што се може објаснити тиме да веће вредности овог параметра, који практично одређује „рачунску” стишљивост флуида, доводе до бржег преласка кинетичке енергије у потенцијалну. Веће вредности овог параметра, негативно утичу и на стабилност прорачуна, са тим што се најмање вредности при којима прорачун постаје нестабилан смањују са смањењем вредности коефицијента  $\alpha$ . За случај без вештачке вискозности, прорачун је нестабилан за  $c^* = 40$ , док је у случају  $\alpha = 0,05$  прорачун нестабилан при  $c^* = 50$ . С друге стране при коришћењу мањих вредности  $c_*$  јавља се проблем губитка губитка честица флуида, јер честице флуида прлазе кроз чврсту границу. Вредности  $A_r$  и  $P_d$  за преостале вертикале приказане су у табелама Б.1 до Б.6 (прилог Б).

Табела 4.1: Вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н1

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	1.01	1.01	1.02	1.03
$\alpha = 0.05$	1.01	1.02	1.02	1.04
$\alpha = 0.10$	1.01	1.02	1.03	1.04
$\alpha = 0.50$	1.02	1.03	1.04	1.06

Табела 4.2: Вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н1

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	0.01	0.02	0.02	0.04
$\alpha = 0.05$	0.01	0.02	0.03	0.05
$\alpha = 0.10$	0.02	0.02	0.03	0.05
$\alpha = 0.50$	0.03	0.04	0.05	0.07

Табела 4.3: Вредности релативне амплитуде дубина  $A_r$  за вертикалу Н2

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	0.99	1.01	1.04	1.10
$\alpha = 0.05$	0.99	1.00	1.03	1.09
$\alpha = 0.10$	0.99	1.00	1.03	1.10
$\alpha = 0.50$	0.99	1.01	1.04	1.13

Табела 4.4: Вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н2

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	0.03	0.03	0.05	0.11
$\alpha = 0.05$	0.03	0.03	0.04	0.10
$\alpha = 0.10$	0.03	0.03	0.04	0.11
$\alpha = 0.50$	0.04	0.05	0.08	0.16

Табела 4.5: Вредности релативне амплитуде дубина  $A_r$  за вертикалу Н3

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	1.00	1.02	1.07	1.16
$\alpha = 0.05$	1.00	1.02	1.06	1.15
$\alpha = 0.10$	1.00	1.02	1.06	1.16
$\alpha = 0.50$	1.01	1.03	1.08	1.18

Табела 4.6: Вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н3

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	0.03	0.04	0.08	0.17
$\alpha = 0.05$	0.03	0.04	0.08	0.17
$\alpha = 0.10$	0.04	0.05	0.09	0.18
$\alpha = 0.50$	0.08	0.11	0.16	0.27

Табела 4.7: Вредности релативне амплитуде дубина  $A_r$  за вертикалу Н4

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	1.05	1.08	1.14	1.28
$\alpha = 0.05$	1.05	1.08	1.14	1.27
$\alpha = 0.10$	1.05	1.08	1.14	1.28
$\alpha = 0.50$	1.06	1.09	1.15	1.28

Табела 4.8: Вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н4

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	0.06	0.09	0.15	0.29
$\alpha = 0.05$	0.05	0.08	0.15	0.28
$\alpha = 0.10$	0.06	0.09	0.15	0.29
$\alpha = 0.50$	0.11	0.16	0.23	0.40



Табела 4.9: Просечна одступања релативне амплитуде дубина  $A_r$  од идеалног случаја слагања са мерењима ( $\Delta_{sr,Ar}$ )

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	0.02	0.04	0.07	0.16
$\alpha = 0.05$	0.01	0.03	0.07	0.15
$\alpha = 0.10$	0.01	0.03	0.07	0.16
$\alpha = 0.50$	0.03	0.05	0.09	0.17

Табела 4.10: Просечна одступања релативне фазне разлике  $P_d$  од идеалног случаја слагања са мерењима ( $\Delta_{sr,Pd}$ )

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.000$	0.03	0.04	0.08	0.17
$\alpha = 0.005$	0.03	0.05	0.08	0.17
$\alpha = 0.010$	0.04	0.05	0.09	0.17
$\alpha = 0.050$	0.07	0.10	0.15	0.25

Табела 4.11: Утицај параметра  $c^*$  на вредности релативне амплитуде дубина дубине  $A_r$  за вертикалу Н4

	$c^* = 10$	$c^* = 20$	$c^* = 40$
$\alpha = 0.00$	1.05	1.05	/
$\alpha = 0.05$	1.05	1.05	1.28

Табела 4.12: Утицај параметра  $c^*$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н4

	$c^* = 10$	$c^* = 20$	$c^* = 40$
$\alpha = 0.00$	0.06	0.06	/
$\alpha = 0.05$	0.05	0.05	0.28

Табела 4.13: Утицај параметра  $C_r$  на вредности релативне амплитуде дубина дубине  $A_r$  за вертикалу Н4

	$C_r = 0.1$	$C_r = 0.2$	$C_r = 0.3$	$C_r = 0.4$	$C_r = 0.5$
$\alpha = 0.00$	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05
$\alpha = 0.05$	1.05	1.05	1.05	1.05	1.05

Табела 4.14: Утицај параметра  $C_r$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н4

	$C_r = 0.1$	$C_r = 0.2$	$C_r = 0.3$	$C_r = 0.4$	$C_r = 0.5$
$\alpha = 0.00$	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06
$\alpha = 0.05$	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06

Табела 4.15: Утицај радијуса интерполације  $h$  на вредности релативне амплитуде дубина дубине  $A_r$  за вертикалу Н4

	$h = 0,6\Delta p_0$	$h = 0,8\Delta p_0$	$h = 1,0\Delta p_0$	$h = 1,2\Delta p_0$	$h = 1,4\Delta p_0$
$\alpha = 0.00$	1.02	1.04	1.05	1.05	1.06
$\alpha = 0.05$	1.01	1.04	1.05	1.05	1.06

Табела 4.16: Утицај радијуса интерполације  $h$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н4

	$h = 0,6\Delta p_0$	$h = 0,8\Delta p_0$	$h = 1,0\Delta p_0$	$h = 1,2\Delta p_0$	$h = 1,4\Delta p_0$
$\alpha = 0.00$	0.04	0.05	0.06	0.06	0.07
$\alpha = 0.05$	0.04	0.05	0.05	0.06	0.07

Табела 4.17: Утицај Shepard-овог филтера на вредности релативне амплитуде дубина дубине  $A_r$  за вертикалу Н4

	$N_{Sf} = 1$	$N_{Sf} = 35$	$N_{Sf} = 100$	без филтера
$\alpha = 0.00$	1.04	1.05	1.05	1.07
$\alpha = 0.05$	1.04	1.05	1.05	1.05

Табела 4.18: Утицај Shepard-овог филтера на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н4

	$N_{Sf} = 1$	$N_{Sf} = 35$	$N_{Sf} = 100$	без филтера
$\alpha = 0.00$	0.05	0.06	0.06	0.08
$\alpha = 0.05$	0.05	0.05	0.06	0.06

Табела 4.19: Вредности релативне амплитуде дубина  $A_r$  за вертикалу Н4 за случај када се не моделира подизање уставе

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	1.06	1.09	1.15	1.27
$\alpha = 0.05$	1.06	1.08	1.14	1.26
$\alpha = 0.10$	1.06	1.08	1.14	1.27
$\alpha = 0.50$	1.06	1.09	1.15	1.28

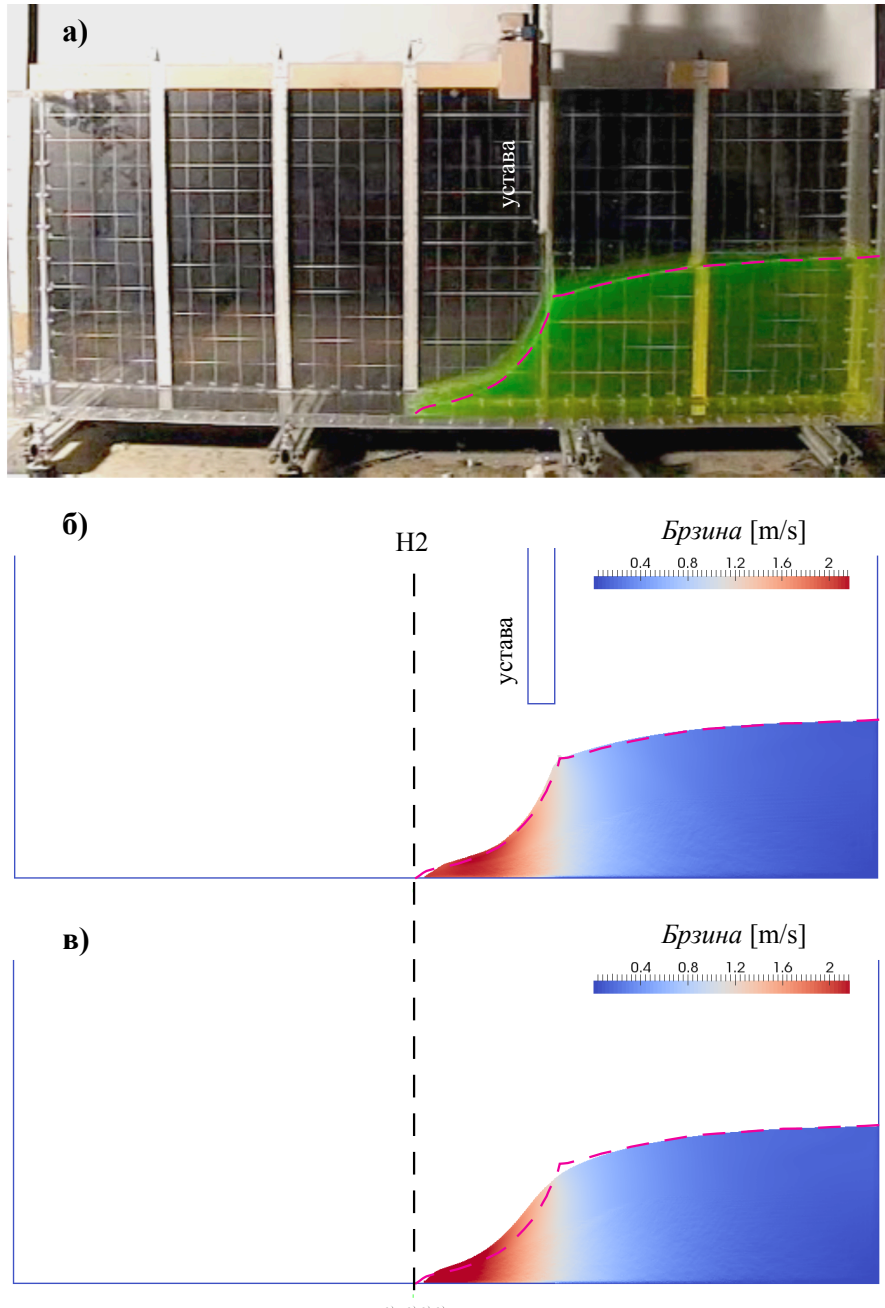
Табела 4.20: Вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н4 за случај када се не моделира подизање уставе

	$\Delta p_0 = 1.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 2.5 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 5.0 \text{ mm}$	$\Delta p_0 = 10.0 \text{ mm}$
$\alpha = 0.00$	0.13	0.15	0.19	0.30
$\alpha = 0.05$	0.12	0.13	0.17	0.27
$\alpha = 0.10$	0.12	0.13	0.16	0.28
$\alpha = 0.50$	0.10	0.11	0.17	0.35

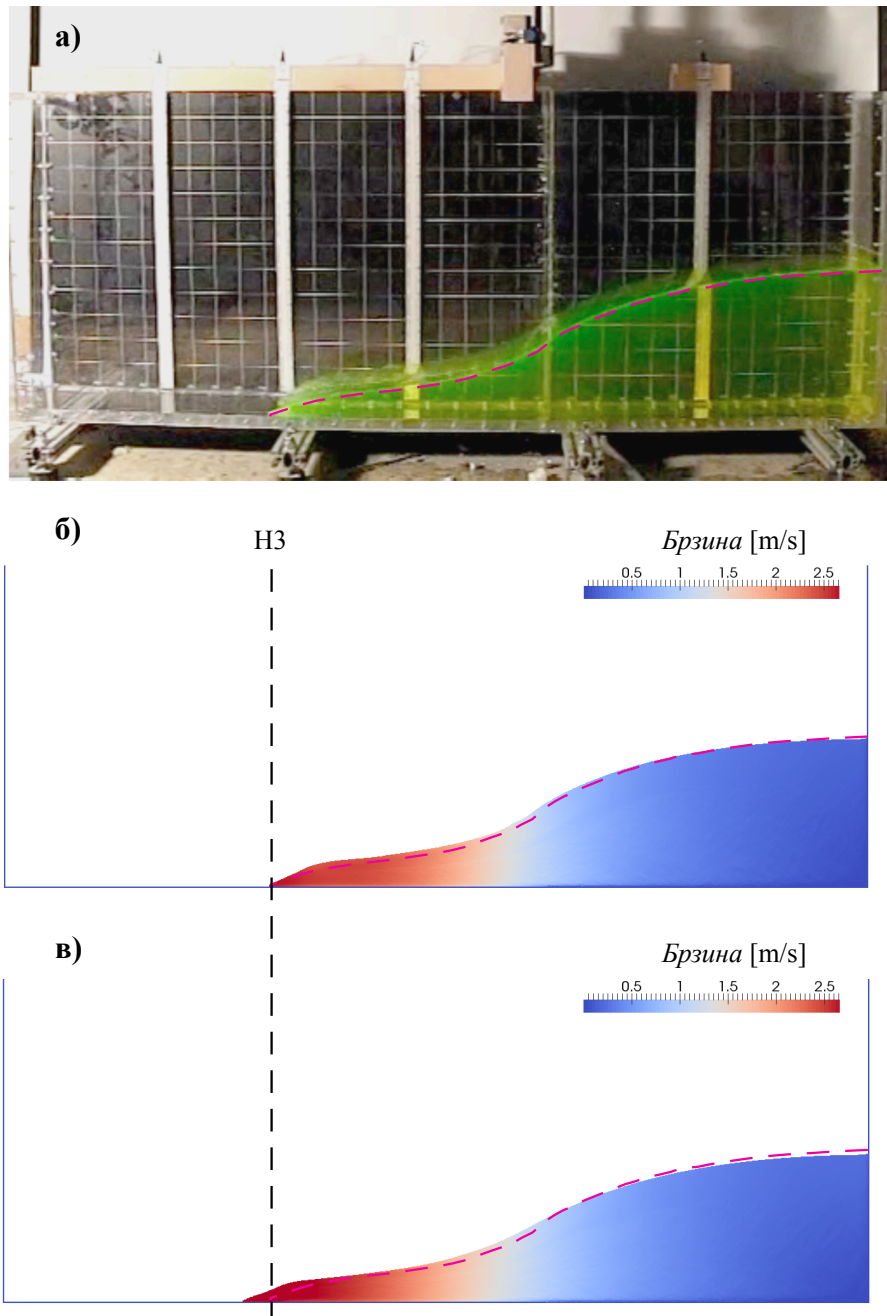
У табелама 4.13 до 4.18, приказан је утицај промене преосталих параметара који су анализирани на промену вредности  $A_r$  и  $P_d$  у вертикали Н4. За вертикале Н1, Н2 и Н3, исте зависности су дате у прилозима Б.7 до Б.24. На основу приказаних резултата може се закључити да је утицај Курантовог броја  $C_r$  практично безначајан. Промена вредности радијуса интерполације  $h$  има нешто већи значај, тако да се са повећањем вредности овог параметра добијају нешто лошија слагања у вертикали 4 (табеле 4.15 и 4.16), док је у осталим вертикалама слагање нешто лошије за најмању вредност овог параметра  $h/\Delta p_0 = 0,6$  (прилози Б.13 до Б.18). Када се примењује Shepard-ов филтер, слагање је приближно исто за све анализираних вредности броја  $N_{Sf}$  (табеле 4.17 и 4.18 и прилози Б.19 до Б.24). Изостављањем овог филтера, слагање је нешто лошије у случају  $\alpha = 0$ . Потребно је напоменути, да су у варијантама без моделирања подизања уставе, прорачуни нестабилни уколико се не користе вештачка вискозност или Shepard-ов филтер.

У табелама 4.19 и 4.20 приказане су вредности величина  $A_r$  и  $P_d$  за случај када се посматра тренутно подизање уставе. Одступања од идеалног слагања ( $A_r = 1$  и  $P_d = 0$ ) су приближно једнака одступањима која су добијена у раду [20], у којем се нумерички моделира оглед приказан у раду [37], претпостављајући тренутно подизање уставе. На основу приказаних резултата може се претпоставити зашто је, у том раду, у прорачунима  $\alpha = 0,50$  (аутори нису приказали резултате за друге вредности коефицијента вештачке вискозности). Наиме, претпоставка је да су аутори у прорачуну са тренутним подизањем уставе „успорили” талас, повећањем вештачке

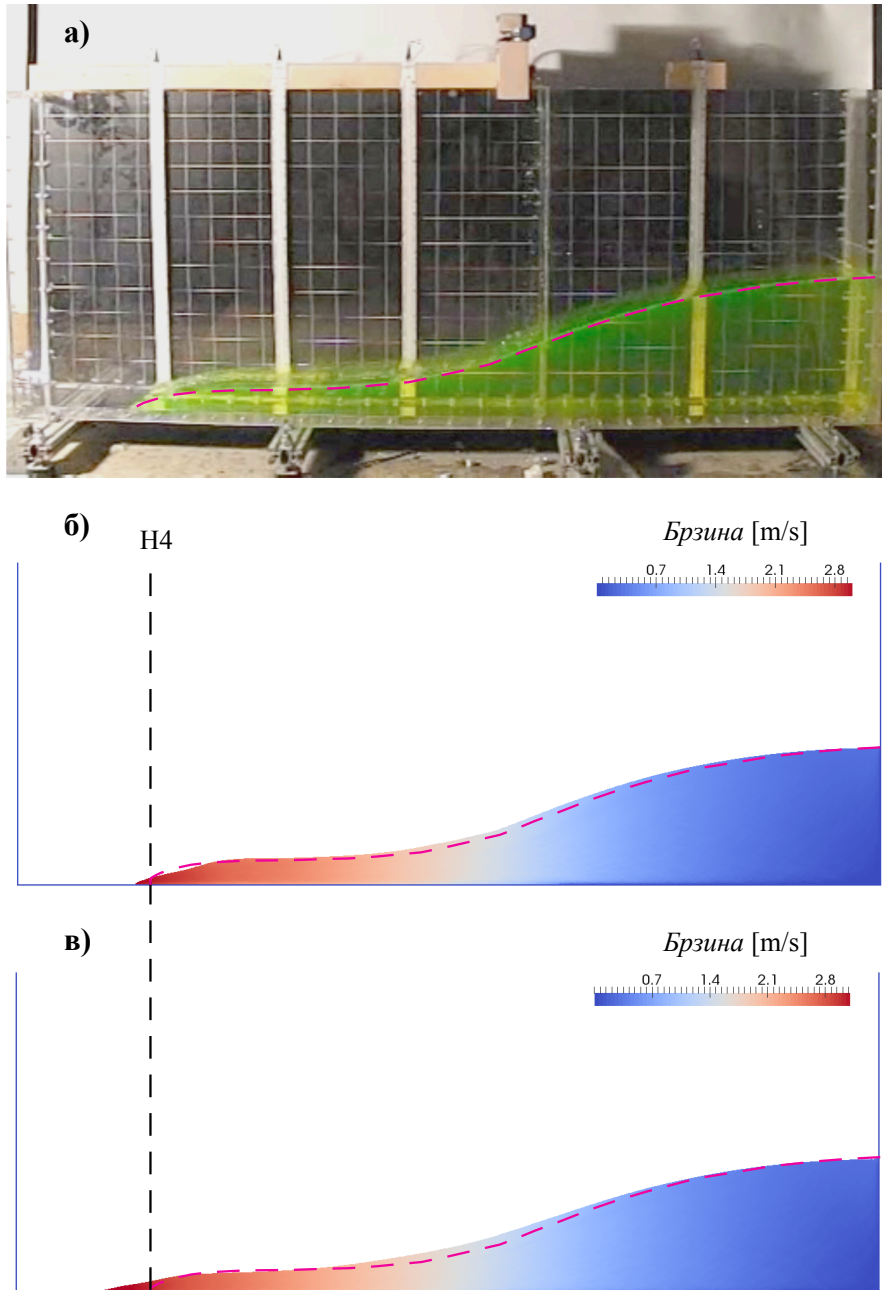
вискозности, како би добили боља слагања са мерењима у којима подизање преграде (уставе) није тренутно. Поређењем резултата из табела 4.7 и 4.19, односно из табела 4.8 и 4.20, изводи се закључак да се моделирањем уставе побољшава слагање резултата нумеричких прорачуна са огледом. Закључак потврђују и слике 4.4 до 4.8 на којима су у неколико карактеристичних временских тренутака представљене линије нивоа огледа за обе варијанте прорачуна заједно са одговарајућим фотографијама огледа на физичком моделу. На слици 4.4 приказан је тренутак непосредно након подизања уставе, када талас стиже до вертикале Н2. Љубичастом бојом означена је линија која представља реконструкцију линије нивоа из лабораторијског огледа. Са слике се може закључити да је симулирањем подизања уставе добијен облик чела таласа који се знатно боље слаже са оним забележеним на физичком моделу (слика 4.4б), него што је то случај када се разматра тренутно подизање уставе (слика 4.4в)). Боље фазно слагање таласа у варијанти са моделирањем уставе примећује се већ у тренутку када талас на физичком моделу стиже у вертикалу Н3 (слика 4.5). Разлика у брзини простирања таласа за две рачунске варијанте уочљивија је на сликама 4.6 и 4.7 где су редом приказани тренуци када талас на моделу стиже у вертикалу Н4 односно до границе резервоара. На слици 4.8 исказана је и добра нумеричка репродукција млаза воде који се подиже уз низводни зид канала. Слагања са линијом нивоа на физичком моделу су релативно добра извесно време након удара млаза воде у низводни зид што је приказано на слици 4.9. Након приближно 1,2 s од почетка огледа, распршени и аерисани млаз значајно утиче на изглед слободне површине, па нумерички модел не може верно да га репродукује (слика 4.10). Наиме, у лабораторијском огледу компактни део тока, који представља лемећи талас меша се са делом тока који се услед разбијања на капљице помешао са ваздухом, за разлику од нумеричког огледа где компактни лемећи талас удара у надолазећи ток без преходне дисипације енергије. С обзиром на то да моделирање разбијања таласа на капљице није предмет разматрања у овој дисертацији, трећа фаза огледа се даље не разматра.



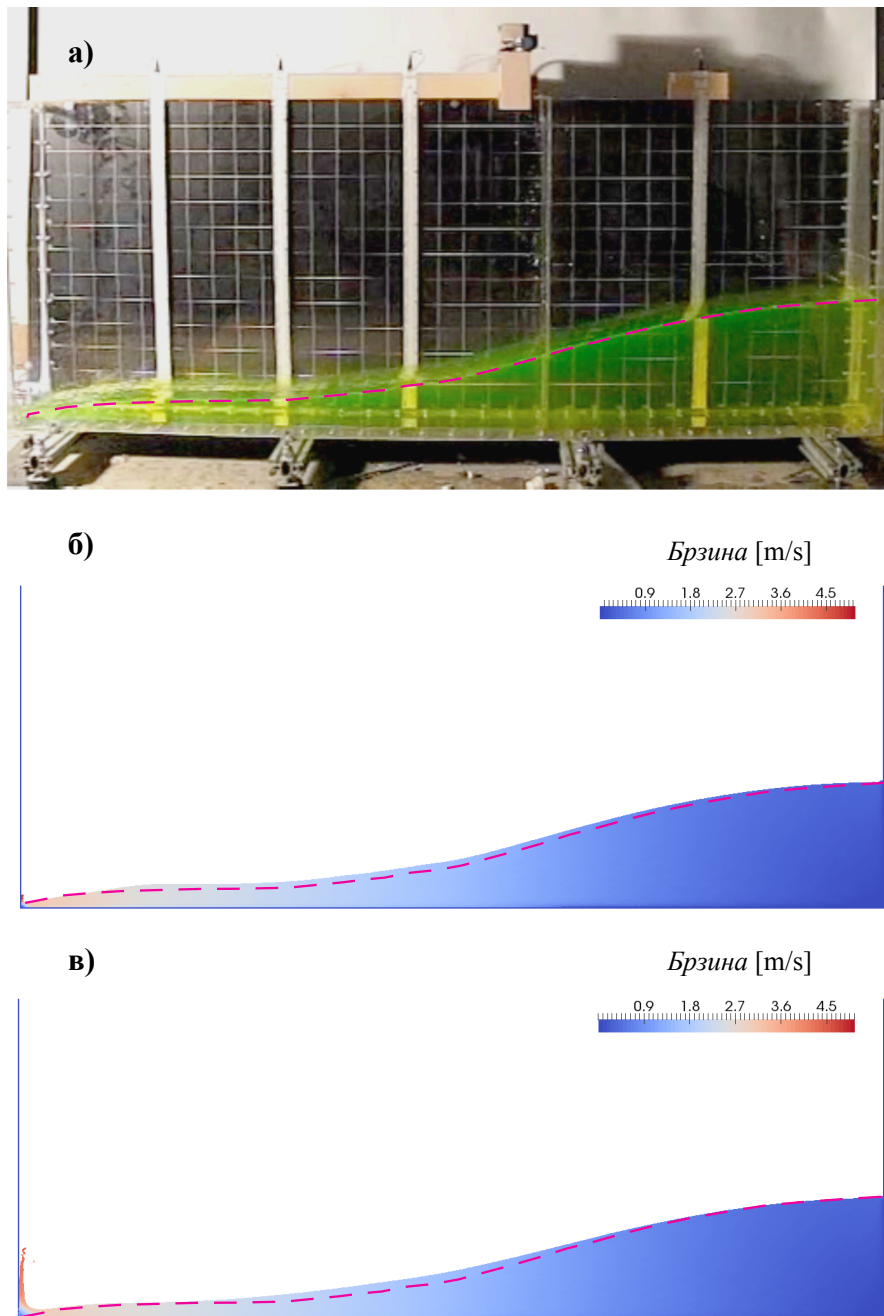
Слика 4.4: Положај и облик чела таласа 160 ms након почетка огледа: а) физички модел [45] б) прорачун са моделирањем устава в) прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу)



Слика 4.5: Положај и облик чела таласа 277 ms након почетка огледа: а) физички модел [45] б) прорачун са моделирањем уставе в) прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу)

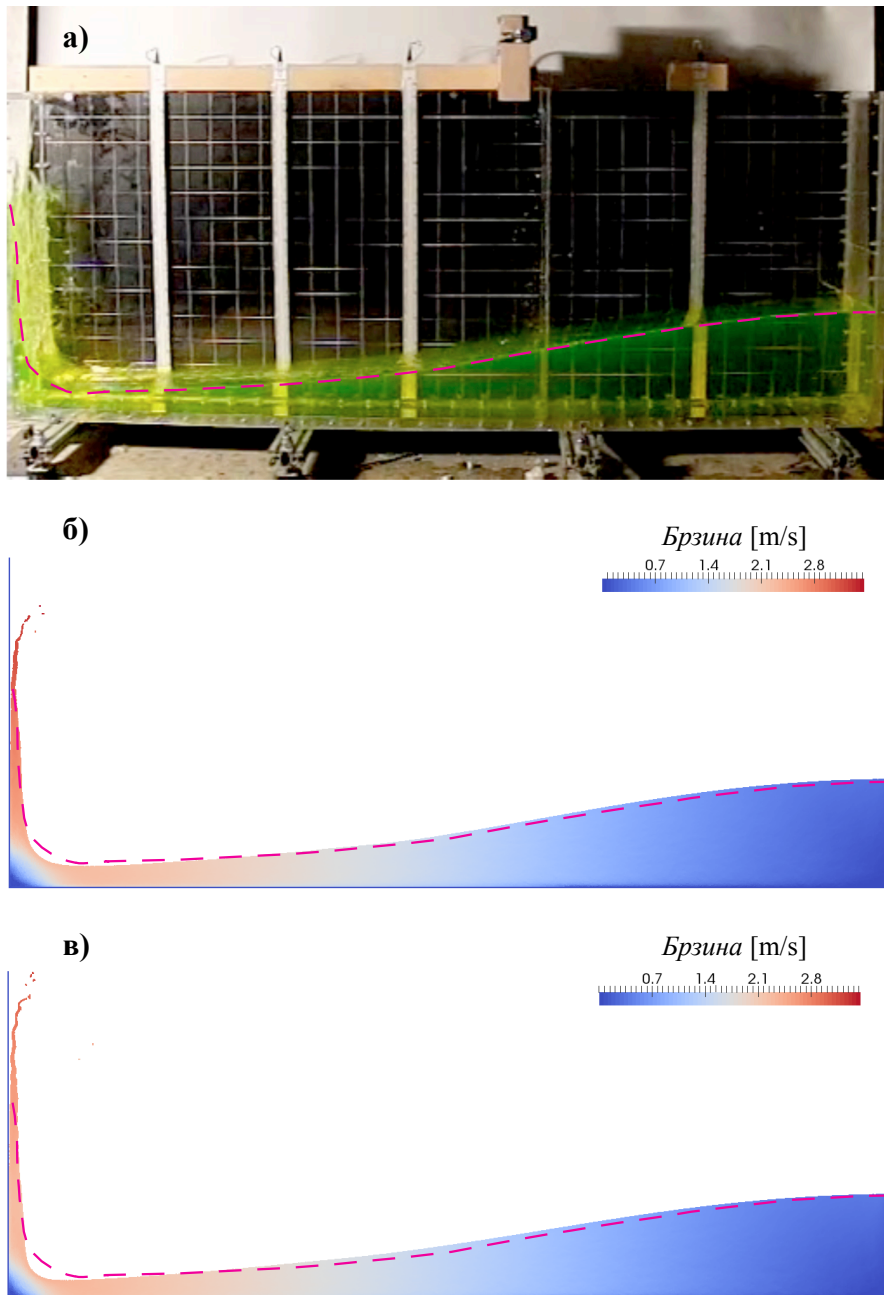


Слика 4.6: Положај и облик чела таласа 373 ms након почетка огледа: а) физички модел [45] б) прорачун са моделирањем уставе в) прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу)



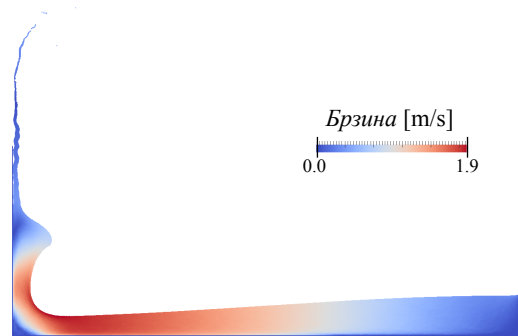
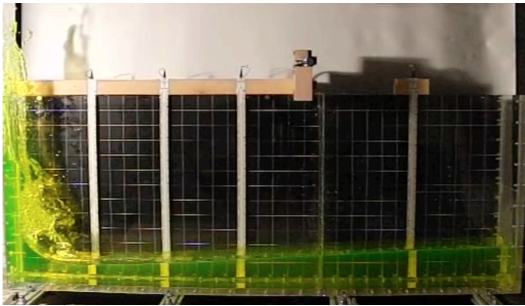
Слика 4.7: Положај и облик чела таласа 450 ms након почетка огледа: а) физички модел [45] б) прорачун са моделирањем уставе в) прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу)



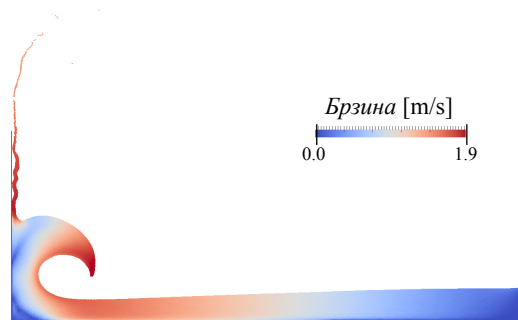
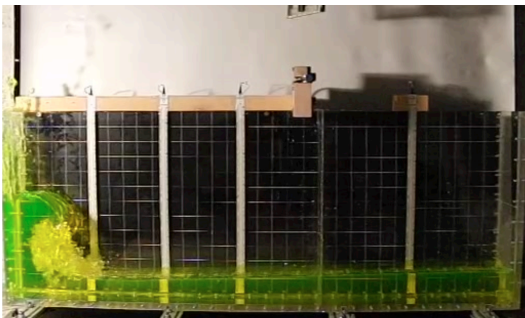


Слика 4.8: Положај и облик чела таласа 573 ms након почетка огледа: а) Физички модел [45] б) Прорачун са моделирањем уставе в) Прорачун тренутног пролома (испрекидана љубичаста линија означава слободну површину забележену у лабораторијском огледу)

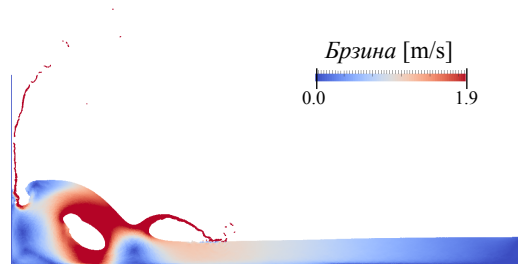
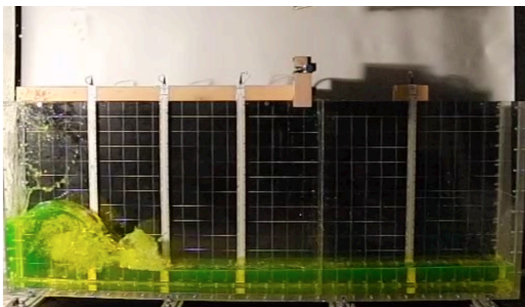
а)



б)

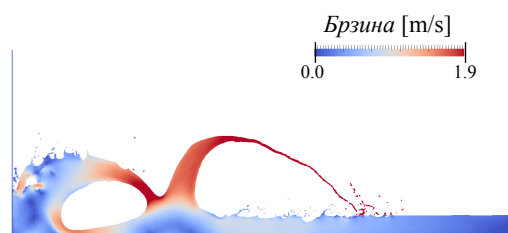
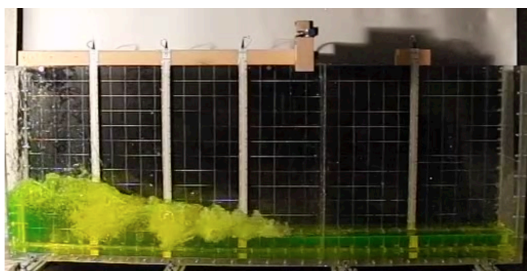


в)

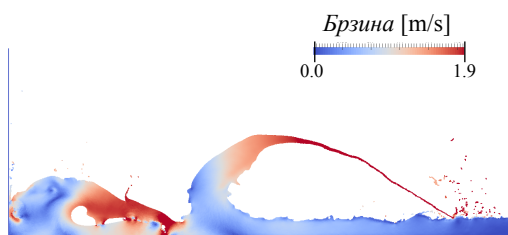
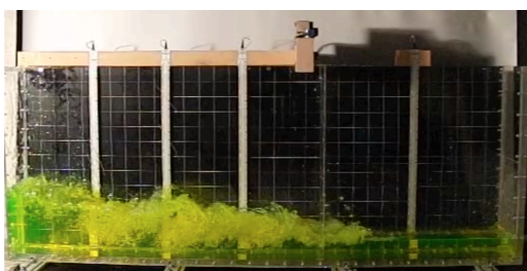


Слика 4.9: Поређење слободне површине забележене на физичком моделу [45] (лево) и добијене у прорачунима (десно) након удара таласа у чврсту границу: а) 862 ms након почетка огледа б) 1023 ms након почетка огледа в) 1166 ms након почетка огледа

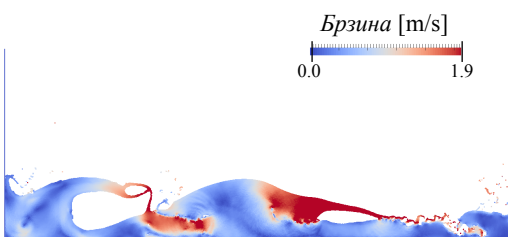
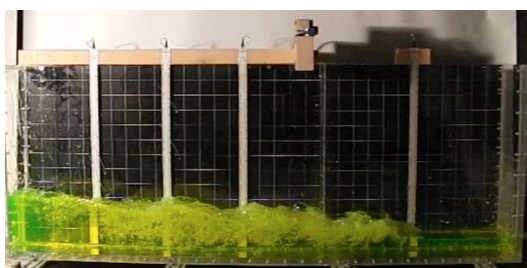
а)



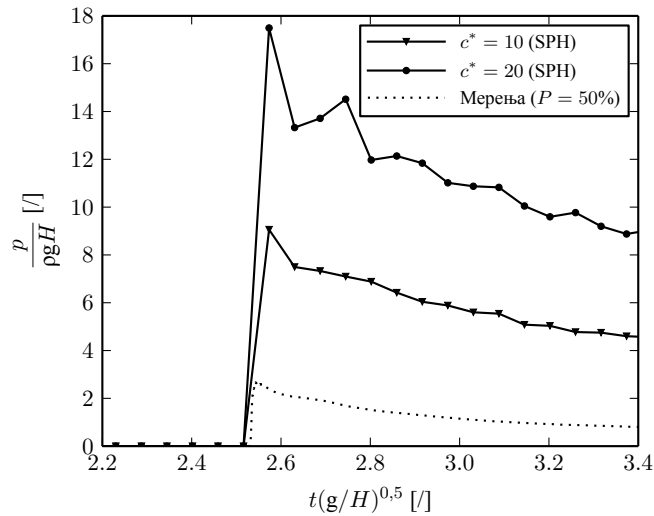
б)



в)



Слика 4.10: Поређење слободне површине забележене на физичком моделу [45] (лево) и добијене у прорачунима (десно) након удара таласа у чврсту границу: а) 1320 ms након почетка огледа б) 1473 ms након почетка огледа в) 1627 ms након почетка огледа



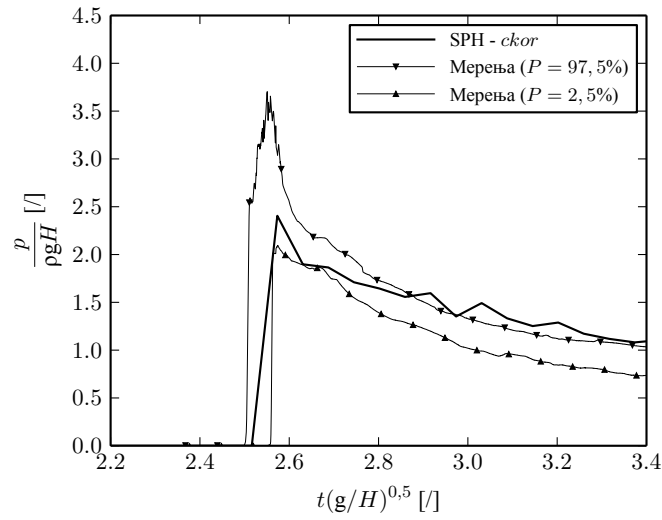
Слика 4.11: Поређење срачунатих вредности притисака коришћењем стандардног поступка са измереним вредностима у сензору 1 физичког модела [45]

Слагање нумеричких и лабораторијских огледа оцењује се и на основу поређења срачунатих и измерених вредности притисака на вертикалном низводном зиду канала. У изворном моделу, за честице границе и флуида користе се исте вредности параметара стишљивости, на основу којих се, узимајући у обзир промену густине, из једначине стања рачунају притисци (израз 3.32). На слици 4.11 упоређене су срачунате вредности притисака коришћењем овог приступа и вредности измерене на физичком моделу на месту сензора 1. Срачунате вредности притисака приказане су за два случаја у којима су коришћене исте (стандардне) вредности параметра  $c^*$  ( $c^* = 10$  и  $c^* = 20$ ) за честице зида и воде. Као што се са слике јасно види срачунате вредности су знатно веће од измерених, при чему су срачунате вредности очекивано веће за случај када је коришћена мања референтна стишљивост флуида ( $c^* = 20$ ). Оба закључка важе и за три преостала сензора за које се не приказује поређење.

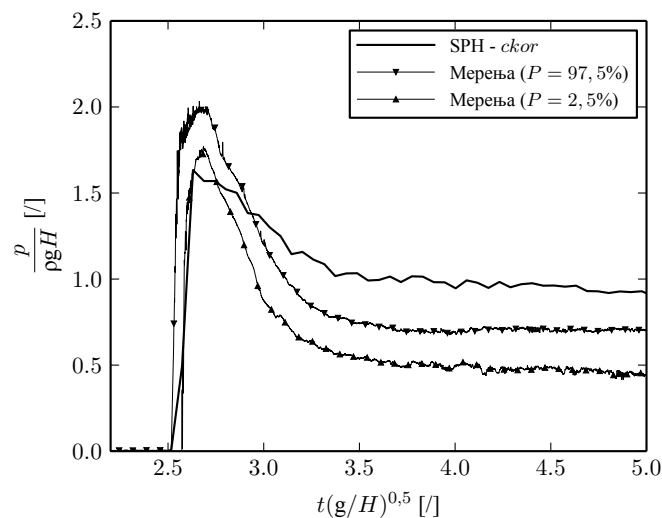
Да би се у прорачуну добиле реалне вредности, у овом раду се предлаже промена односа параметра  $c_*$  за честице које представљају границу и честице флуида. Тако се у поступку калибрације, за случај када је за честице флуида  $c_f^* = 10$ , најбоље слагање са огледом на физичком моделу (за сензор 1) добијено када је за честице границе коришћена вредност  $c_{DBP}^* = 14$ . Како су нумерички огледи показали, смањивањем односа стишљивости честица граница и флуида, смањују се притисци на граници и обрнуто.

На сликама 4.12 до 4.15 упоређени су срачунати и измерени притисци за сва четири сензора у случају када се користи поступак корекције односа стишљивости границе и флуида (на сликама ознака *skog*). С обзиром на то да је мерењем регистровано 100 временских серија вредности притисака, резултати мерења су пред-

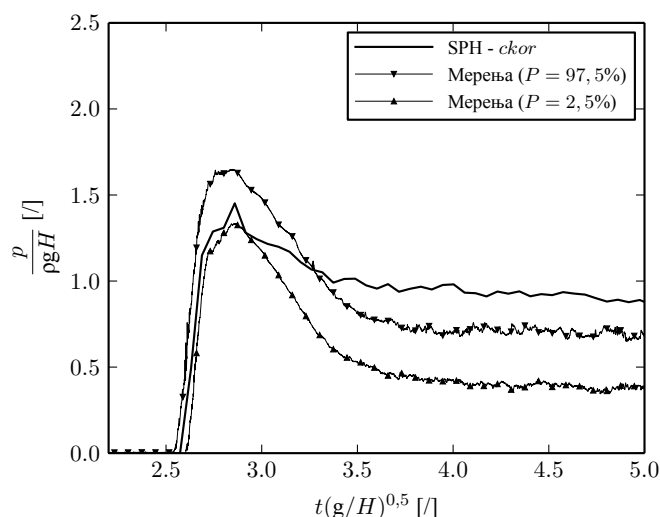
стављени кривама које означавају интервале поверења (2,5% и 97,5%) добијене на основу емпиријске расподеле вероватноће. Може се закључити да се предложеном корекцијом, чији је степен одређен у поступку калибрације, а на основу података са једног сензора, добијају задовољавајућа слагања за све сензоре. Треба напоменути да предложена корекција није значајно утицала на изглед слободне површине за време удара. Наведено повећање вредности параметра  $c_f$  утицало је на то да честице флуида буду на безначајно већем растојању од честица границе.



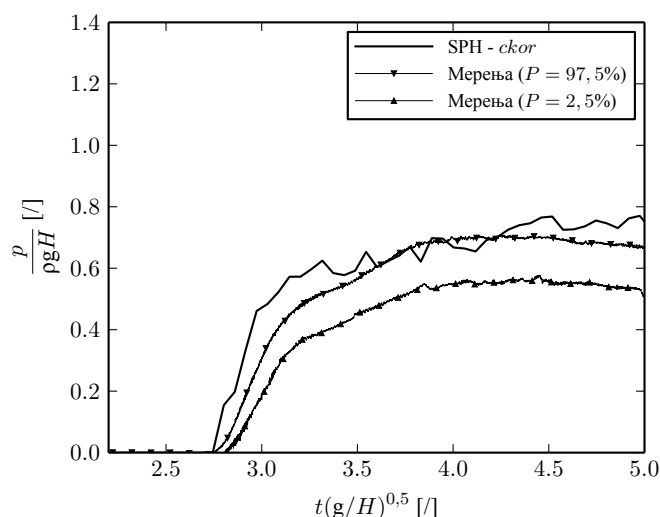
Слика 4.12: Поредица измерених и предложеном корекцијом (*skor*) сачунатих притисака у сензору 1 [45]



Слика 4.13: Поредица измерених [45] и предложеном корекцијом (*skor*) сачунатих притисака у сензору 2



Слика 4.14: Поређење измерених [45] и предложеном корекцијом (*ckor*) срачунатих притисака у сензору 3



Слика 4.15: Поређење измерених [45] и предложеном корекцијом (*ckor*) срачунатих притисака у сензору 4

#### 4.5 Закључак

Описана анализа представља ревизију верификације SPH методе у моделирању проблема рушења бране и удара флуида у чврсту границу. Коришћена су мерења на физичком моделу која су новијег датума и у којима су услови мерења строжије контролисани у односу на огледе који су претходно коришћени за верификацију SPH модела. Ова новија мерења омогућила су да се квантификује утицај брзине уклањања преграде која симулира брану. Управо је моделирање наглог (али не тренутног) подизања уставе на основу измерене брзине у огледу утицало на побољшање слагања

результата нумеричке симулације и мерења на физичком моделу. Анализа осетљивости показала је да на резултате нумеричког прорачуна највећи утицај имају почетно растојање између честица (број честица) и коефицијент вештачке вискозности  $\alpha$ . Показано је да нумерички резултати практично конвергирају резултатима мерења са повећањем број честица и да се најбоља слагања са огледом добијају за најмању анализирану вредност коефицијента вештачке вискозности  $\alpha = 0,05$ . Промене вредности осталих параметара нису значајно утицале на резултате прорачуна.

У овом поглављу је предложена корекција односа референтне стишљивости честица границе и флуида како би се добиле реалне вредности ударног притиска. Корекција се постиже једноставном променом односа бездимензионалне референтне брзине простирања звука за честице флуида и честице чврсте границе  $c_f^*/c_{DBP}^*$ . При томе се узима да све честице чврсте границе имају исту вредност  $c_{DBP}^*$ .

## 5. Бурно течење у закривљеној цеви

Примена SPH методе у моделирању просторног струјања представља се на примеру бурног течења у закривљеним цевима. Разматра се могућност SPH методе у предвиђању хидрауличких услова за окретање млаза воде у кривинама затворених проводника. Проблем је значајан за хидротехничку праксу јер хеликоидно струјање у кривинама може изазвати загушење тока односно, смањивање пропусне моћи затворених проводника. У анализи је примењен нумерички модел описан у поглављу 3.2. SPH модел је калибрисан на основу мерења на физичком моделу која су описана у дисертацији Коларевић [36]. Утврђено је да на резултате прорачуна велики утицај има увођење вештачке вискозности односно промена вредности коефицијента  $\alpha$ . Поред утицаја овог коефицијента, у дисертацији се анализира и осетљивост прорачуна на промену почетног растојања између честица, тј. промену броја рачунских честица флуида. Нумерички огледи показали су да се помоћу SPH методе, са одговарајућим бројем рачунских честица и изостављањем вештачке вискозности, може репродуковати жељен карактер течења у кривинама затвореног проводника.

Посебна пажња посвећена је разматрању способности SPH методе да симулира устаљено струјање. Као што је показано, у SPH методи се решавају временски изводи који се везују за честице тако да није могуће директно решавати једначине устаљеног струјања. У хидротехничкој пракси се најчешће анализирају устаљени феномени, па зато постоји интерес да се SPH метода испроба у моделирању феномена код којих се временски осредњене вредности физичких величина у фиксним тачкама простора не мењају. Резултати обављених нумеричких експеримената показују да су нумеричке симулације SPH методом праћене осцилацијама вредности физичких величина које по карактеру одговарају флукуацијама при „устаљеном” турбулентном струјању. При томе, осцилације расту са порастом почетног растојања између честица (просторни дискретизациони корак) и веће су у близини граница струјања (у близини чврсте границе и слободне површине). Овакви резултати потврђују сазнања да су осцилације повезане са проблемом тачности SPH методе. Као што је очекивано, применом вештачке вискозности и Shepard-овог филтера флукуације брзина се пригушују на рачун већег енергетског губитка.

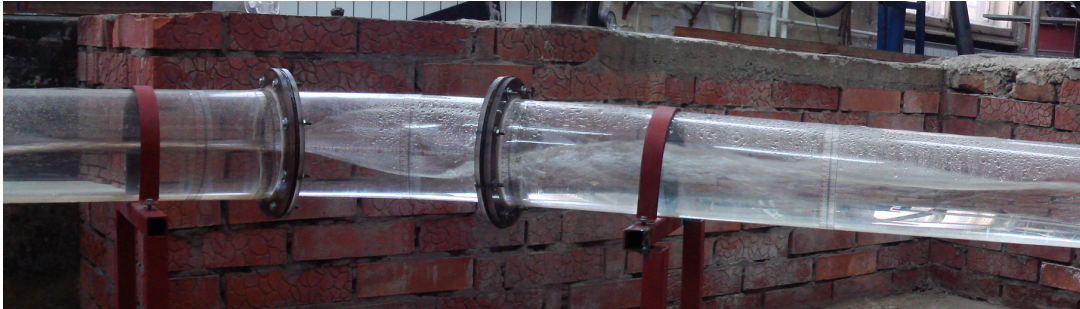


## 5.1 Увод

Буран режим течења у кривинама затворених проводника се може се јавити у тунелским евакуационим објектима или опточним тунелима брана као и у колекторима кишне канализације. Услед неизвесности у предвиђању ефеката овог вида струјања, које су пре свега последица недовољне изучености појаве, инжењери често избегавају решења са закривљеним проводницима, чак и у случајевима када су алтернативна решења са правим деоницама знатно скупља. Недавним истраживањима која је представила у дисертацији Коларевић [36], допуњена су сазнања о овој појави, коју су у мањој мери описали Gisonni и Hager [19]. Управо су наведена истраживања, у овој дисертацији послужила за проверу могућности SPH методе у процени хидрауличких услова потребних за појаву хеликоидног струјања у кривинама затворених проводника.

Моделским испитивањем утврђено је да се услед промене геометрије чврсте границе (промене правца струјања) у кривинама затворених проводника јављају поремећаји у нивоима слободне површине. Разликује се течење без окретања млаза (слика 5.1) или са окретањем млаза (слика 5.2). Код течења без окретања млаза, у кривини се јављају таласи чији је облик илустрован на слици 5.3. На конкавној страни кривине се, пратећи ток у низводном правцу, прво јавља највећи ниво (први максимум  $h_{max}$ ), а затим најмањи ниво слободне површине (други минимум), док је обрнут случај на конвексној страни, где се прво јавља снижење нивоа до вредности првог минимума ( $h_{min}$ ), а затим повећање нивоа до вредности другог максимума. Течење са окретањем млаза је хеликоидно и представља „почетак” интензивног мешања ваздуха и воде. С обзиром на то да овај вид течења води ка загушењу тока, односно смањењу пропусне моћи проводника (тунела или цеви), од практичног је значаја да се предвиде услови за окретање млаза у кривини. Испитивањима је утврђено да се за проводник одређеног степена закривљености ( $D/R$ ) и скретног угла ( $\beta$ ), карактер течења може проценити на основу релативне дубине ( $d_0/D$ ) и Фрудовог броја узводно од кривине ( $F_{r0} = Q/\sqrt{gd_0^4 D}$ ). Пример зависности за одређивање карактера струјања у кривини је приказан на слици 5.4. Приказане криве представљају гранична стања између два карактера струјања. Пуна линија означава зависност која одређује потребне хидрауличке услове за окретање млаза у кривини, док испрекидана линија означава зависност која одређује потребне услове за настанак загушења у закривљеној цеви.

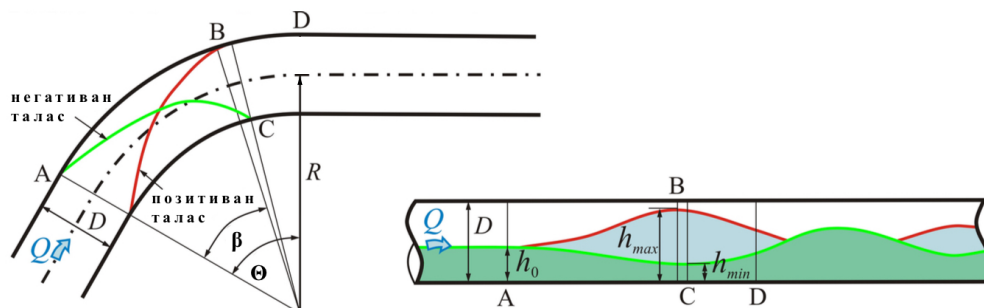
С обзиром на изразито неправилан изглед слободне површине при бурном течењу у кривини, примена методе која не захтева рачунску мрежу је пожељна, па је зато овај вид струјања добар тест пример за примену SPH методе. У дисертацији се прво разматра способност SPH методе да симулира устаљено течење. Испитује се



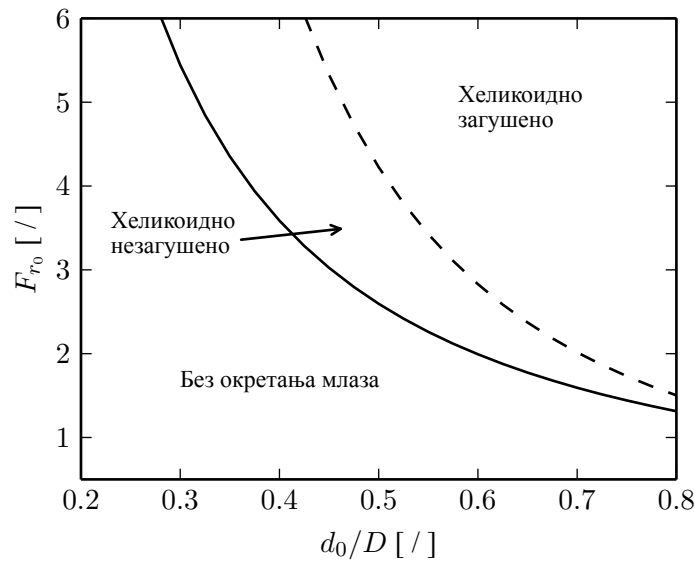
Слика 5.1: Течење без окретања млаза у кривини [36]



Слика 5.2: Течење са окретањем млаза у кривини [36]



Слика 5.3: Карактеристичне величине код струјања у кривини



Слика 5.4: Пример зависности за одређивање карактера струјања у кривини [36]

како почетно растојање између честица (број честица), релативан положај честица у односу на границу тока, вештачка вискозност и коришћење Shepard-овог филтера утичу на колебања вредности дубина у вертикалама попречног пресека, односно брзина и притисака у тачкама попречног пресека.

Резултати нумеричких прорачуна упоређени су са мерењима на физичком моделу за два случаја. Један, у којем долази и други, у којем не долази до окретања млаза у кривини. Поређен је изглед слободне површине у кривини. При томе је, за пример хеликоидног струјања, анализарана осетљивост прорачуна на промену броја честица и коефицијента вештачке вискозности. Прво је одређено највеће растојање за које важи да се његовим повећањем не мењају значајно резултати прорачуна, да би се затим, за тако одређено растојање, обавила анализа осетљивости прорачуна на промену коефицијента  $\alpha$  у изразу којим се у прорачун уводи вештачка вискозност. За почетно растојање између честица при којем резултати конвергирају, обављено је више прорачуна са различитим вредностима дубина на узводном крају цеви и протока, како би се рачунским путем добиле зависности које одређују карактер струјања у кривини закривљених цеви. Прорачуни су обављени за случај без коришћења вештачке вискозности и случај са коришћењем стандардне вредности коефицијента вештачке вискозности  $\alpha = 0.1$ . Боља слагања добијена су за случај када се не користи вештачка вискозност. Тада је рачунска зависност за процену карактера струјања у кривини између зависности које су предложили Коларевић и Hager.

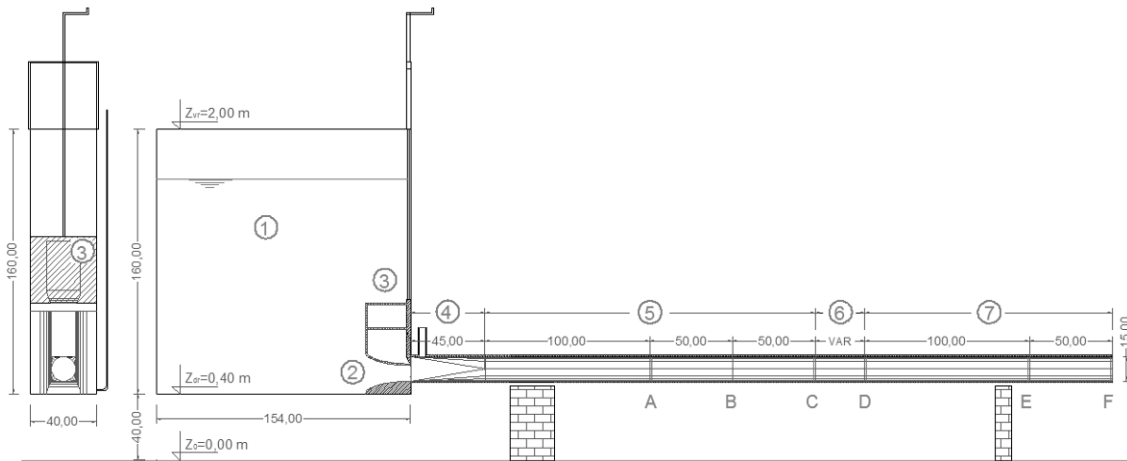


Слика 5.5: Фотографија физичког модела закривљеног проводника [36]

## 5.2 Опис физичког модела

Испитивања бурног течења на физичком моделу закривљеног проводника кружног попречног пресека детаљно су описана у дисертацији [36]. Лабораторијска инсталација (слике 5.5 и 5.6) на којој је испитивана описана појава састојала се од узводног резервоара из којег се упушта вода у проводник који чине прелазна деоница и кружна цев пречника 15 cm. Кружна цев има две праволинијске деонице између којих је уметнута хоризонтална кривина. Дужина праволинијске деоница на узводном крају је 245 cm, а на низводном крају, 150 cm. Циркулација воде је обезбеђена помоћу пумпе која воду из доњег - низводног резервоара (није приказан на слици) враћа у горњи - узводни резервоар. Узводно од горњег резервоара налази се Томсонов прелив помоћу којег се мери проток на моделу. Оба бездимензионална броја, Фрудов број и релативна дубина, одређују се у пресеку на правцу, који се налази 50 cm узводно од почетка кривине (пресек А).

У склопу истраживања Коларевић [36] испитивано је више различитих случајева у којима су варирани закривљеност и скретни угао кривине. У нумеричким огледима који су представљени у овој дисертацији разматрана је једна диспозиција инсталације, са закривљеношћу кривине  $D/R = 1/3$  и скретним углом од  $45^\circ$ .



Слика 5.6: Цртеж инсталације са означеним карактеристичним пресецима [36]

### 5.3 Поставка SPH нумеричког модела

Да би резултати добијени применом SPH методе могли да се упореде са мерењима, у пресеку В (слика 5.6) потребно је обезбедити одговарајуће вредности релативне дубине и Фрудовога броја. Овај проблем је решен дефинисањем граничног услова на отвореној граници на начин који је објашњен у поглављу 3.2.4. У прорачунима је коришћено растојање од  $2\Delta p_0$  између граничних честица и чврсте границе.

Највећи број честица у прорачунима износио је приближно 8 милиона и односио се на прорачун обављен у оквиру анализе осетљивости резултата на промену вредности почетног растојања између честица. У тим прорачунима однос  $h_0/\Delta p_0$  износио је 26. Нумерички огледи су показали да се резултати не мењају значајно за вредности овог односа изнад 20. Управо је овај однос коришћен у прорачунима у којима су одређиване рачунске зависности за утврђивање карактера струјања у кривини.

У нумеричким прорачунима коришћене су вредности коефицијента  $\alpha$  од  $1 \cdot 10^{-6}$  до 0,3, а посебно је анализиран и случај када се не примењује вештачка вискозност. Прорачуни су показали да је за  $\alpha \leq 0,001$  утицај вештачке вискозности занемарљив, тј. да се добијају резултати приближно једнаки онима за случај када се не користи вештачка вискозност.

Вредност Курантовог броја  $C_r$  и референте брзине простирања звука у води  $c_0$  су одређене из услова да се добије највећи временски корак при ком се чврста граница понаша као непропусна. У свим прорачунима су коришћене исте вредности ова два параметра,  $C_r = 0,3$  односно  $c_0 = 15 \cdot \sqrt{2gH_0}$ , где је  $H_0$  почетна највећа дубина воде у граничној области. Нумерички огледи су показали да при мањим вредностима параметра  $c_0$  односно, већим вредностима Курантовог броја (већим времен-

ским рачунским кораком), појединачне честице флуида могу да прођу кроз чврсту границу.

У нумеричком поступку, Shepard-ов филтер је употребљиван на сваких 35 рачунских корака. Показало се да је у одсуству вештачке вискозности, неопходно користити Shepard-ов филтер како би се избегла значајна колебања вредности величина које се рачунају. У свим прорачунима за ширину области интерполације усвојена је вредност  $h = 1, 0$ . За овај параметар у литератури се наводе вредности од 0,8 до 1,2. Промена ширине области интерполације у наведеном опсегу није значајно утицала на резултате у овом примера.

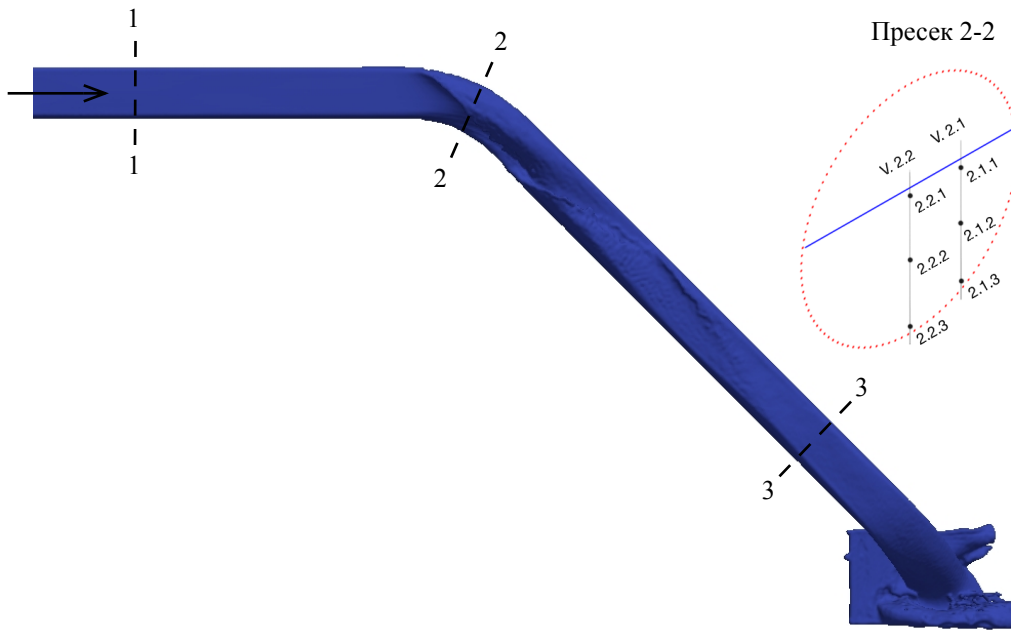
Нумерички прорачуни обављени су коришћењем графичке карте *NvidiaGTX970*. За 40 секунди симулације у којој се користило 5 милиона честица трајање прорачуна износило је приближно 5 сати.

#### 5.4 Резултати

Прво се анализира способност SPH методе да репродукује устаљено струјање. Промене брзине односно притисака посматрају се у по шест тачака у три попречна пресека. Пресеци су означени са бројевима 1, 2 и 3 на слици 5.7. Један попречни пресек се налази у кривини (пресек 2), а преостала два на праволинијским деоницама: узводно од кривине (пресек 1) и низводно од кривине (пресек 3). Пресеци 1 и 3 одговарају, редом, пресецима В и Е на слици 5.6. Изабране тачке у попречним пресецима налазе се у две вертикале. Једна вертикала је на средини пресека док је друга на средини леве половине цеви. Вертикале су означене словом „V” и два додатна броја раздвојена тачком. Као што се са слике 5.7 може закључити, први број означава попречни пресек, а други положај вертикале у пресеку. Број 1 означава вертикалу на левој страни тока, а број 2 вертикалу на средини цеви. Тако вертикала на средини пресека у кривини има ознаку V.2.2. Тачке су означене помоћу три броја, Прва два означавају вертикалу, док трећи број означава положај тачке у вертикали. Број 1 означава тачку у непосредној близини слободне површине, број 2 тачку на средини вертикале, а број 3 тачку у непосредној близини чврсте границе (цеви).

Способност SPH модела да симулира устаљено струјање оцењена је праћењем промене временски осредњених вредности зависно променљивих, односно одређивањем стандардне девијације (за притиске) и коефицијента варијације (за дубине и брзине) на крају прорачуна, у симулацијама 40 секунди течења. Средње вредности су одређиване на основу израчунтих дубина, брзина и притиска на сваких 0,1 секунд симулације, а по истеку 10 секунди симулације за пресеке 1 и 2, односно по истеку





Слика 5.7: Положај пресека односно вертикала и тачака у којима је анализирана промена вредности дубина, брзина и притиска у току нумеричких симулација

15 секунди за пресек 3. Одговарајуће статистике рачунате су преко следећих израза:

$$\bar{F}(n\Delta t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_i \quad (5.1)$$

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (F_i - \bar{F}(N\Delta t))^2} \quad (5.2)$$

$$CV_F = \frac{\sigma_F}{\bar{F}(N\Delta t)} \cdot 100 \quad (5.3)$$

где  $F$  означава вредност дубине, брзине или притиска,  $\bar{F}(n\Delta t)$  одговарајућу средњу вредност након  $n \cdot 0,1$  секунди симулације ( $\Delta t = 0,1s$ ),  $\bar{F}(N\Delta t)$  средња вредност зависно променљиве на крају прорачуна ( $N = 300$  за пресеке 1 и 2, односно  $N = 250$  за пресек 3),  $\sigma_F$  стандардну девијацију и  $CV_F$  нормализовану вредност коефицијента варијације која је изражена у процентима.

Вредности дубина у вертикалама рачунају се тако што се, након прорачуна, у простору формира правилна мрежа тачака у којима се проверава „услов потопљености” рачунајући средњу масу коришћењем SPH интерполационе суме (израз 3.14):

$$\bar{m}(\mathbf{r}_s) = \sum_{j=1}^N m_j \Delta V_j W(\mathbf{r}_{sj}, h) \quad (5.4)$$

где  $r_s$  представља вектор положаја тачке мреже (не честице) у којој се рачуна средња маса. Тако се, уколико је срачуната маса  $\bar{m}(r_s)$  већа од унапред дефинисане граничне вредности, сматра да кроз разматрану тачку струји флуид. Проверавајући овај услов дуж одређене вертикале добија се дубина односно положај слободне површине. У овој дисертацији је за граничну вредност масе коришћена половина масе флуидног делића, а тачке мреже постављене су на растојање од 3 mm. Ово растојање је изабрано тако да буде мање од најмање вредности почетног растојања које је коришћено у дисертацији ( $\Delta p_0 = 3.5$  mm). Вредности брзине  $u$  и притиска  $p$  одређиване су, као и средња маса, коришћењем израза 3.14.

У прорачунима су задаване константне вредности дубине и брзине у граничној области. Гранична област се налази узводно од рачунске области. Дубина у граничној области је износила 7.8 cm, а брзина 2.4 m/s.

Прво су обављени прорачуни са различитим вредностима почетног растојања између честица, без коришћења вештачке вискозности и Shepard-овог филтера. Затим су обављени прорачуни у којима су се, прво одвојено, па након тога заједно, користили вештачка вискозност и Shepard-ов филтер. Колебања вредности зависно променљивих у свим прорачунима били су коефицијент варијације (за дубине и брзине) и стандардна девијација (за притисак). Њихове вредности дате су у прилозима Б.25 до Б.38.

Прво се дискутују резултати прорачуна у којима нису коришћени ни вештачка вискозност као ни Shepard-ов филтер. На слици 5.8 приказане су промене „тренутних“ и средњих вредности дубине  $d$  за вертикалу 1.2, односно компоненте брзине у правцу пружања узводне цеви  $u$  и притиска  $p$  у две тачке на истој вертикали, тачкама 1.2.2 (средина вертикале) и 1.2.1 (тачка у непосредној близини слободне површине), за прорачун у којем је  $\Delta p_0 = 7.0$  mm. У прилозима А.1 и А.2, приказане су исте зависности за пресеке 2 и 3. Може се приметити да вредности дубина, брзина, и притиска осцилују око средњих вредности. Одступања физичких величина су аналогна турбулентним флукуацијама у случају „турбулентног устаљеног“ струјања. Осим у случају притиска у непосредној близини слободне површине у првом и трећем пресеку (тачке 1.2.1 и 3.2.1), када испрекидана линија није права, средње вредности постају константе, најкасније након 20 секунди симулације. Колебања у односу на средње вредности су изражена у случају притисака, али нису безначајна ни када су у питању дубине и брзине. Са слика се још може закључити да осцилације расту у низводном смеру (највеће су у пресеку 3).

У прилозима Б.25 до Б.31 приказане су вредности коефицијента варијације и стандардне девијације за прорачуне без вештачке вискозности и Shepard-овог филтера, при различитим вредностима почетног растојања  $\Delta p_0$ , за све разматране верти-

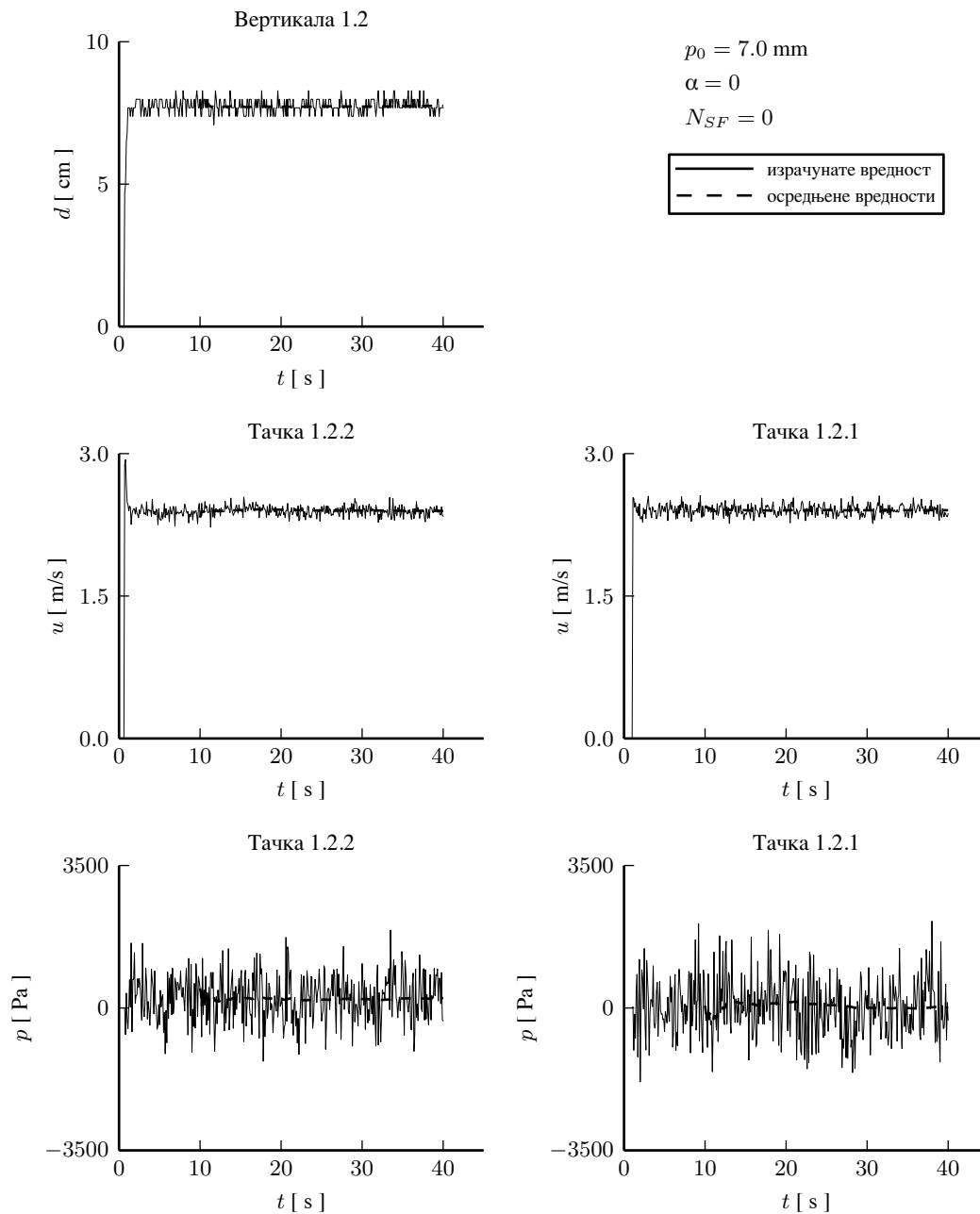


кале односно тачке, док су у прилозима А.3 и А.4, за  $\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$  и  $\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$ , приказане исте зависности које су за  $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$  приказане на слици 5.8. Прегледом табела у прилозима Б.25 до Б.38, може се приметити да се највећа колебања вредности зависно променљивих, у оквиру једног прорачуна, скоро у свим случајевима добијају у близини слободне површине или у близини зида цеви. Ако се анализира утицај почетног растојања између честица, може се рећи да се највећа колебања свих величина добијају у случају највећег анализираниг растојања  $\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$ . За разлику од брзина и дубина, у случају притиска се може извести јасан закључак да се осцилације смањују са смањивањем растојања  $\Delta p_0$ . На основу претходно изнетих закључака по којима се највеће осцилације добијају у близини граница рачунског домена и највеће су за највећу анализирану вредност просторног дискретизационог корака, одступања се могу довести са проблемом тачности SPH методе.

Утицај употребе Shepard-овог филтера и вештачке вискозности на одступања представљен је у прилозима Б.32 до Б.38 где су за упоређене вредности коефицијента варијације и стандардне девијације у сва три разматрана попречна пресека за четири варијанте прорачуна. Једне, у којима се вештачка вискозност и Shepard филтер не користе, друге, у којој се користи само Shepard-ов филтер, треће, у којој се користи само вештачка вискозност и четврте, у којој се употребљавају заједно вештачка вискозност и Shepard-ов филтер.

У прилогу А.5 приказане су промене тренутних и средњих вредности дубине, брзине и притиска током прорачуна, у попречном пресеку 1, за случај када се Shepard-ов филтер употребљава на сваких 35 рачунских корака ( $N_{sf} = 35$ ) док се вештачка вискозност не употребљава. Може се закључити да се средње вредности свих величина практично не мењају већ после 10 секунди симулације и да су одступања значајно умањена у односу на случај када се не користи Shepard-ов филтер, што потврђују и прилози Б.32 до Б.38 у прилогу. За брзине и дубине важи да колебања нису значајна, док су за притисак очекивано мало значајнија<sup>1</sup>, иако су видљиво умањена у односу на прву варијанту прорачуна. Нешто већа умањења колебања у просеку се добијају за случај када се користи вештачка вискозност узимајући да је коефицијент  $\alpha = 0,1$ . За овај случај, промена тренутних и средњих вредности зависно променљивих рачунског модела, за пресек 1, приказана је у прилогу А.6. Као и у претходном случају, када се користи „само” Shepard-ов филтер, средње вредности релативно брзо достижу стабилну вредност, а приметна су и мања колебања притиска и готово изостанак осцилација брзина. На слици 5.9 приказане су промене тренутних и средњих вредности дубине, брзине и притиска током прорачуна, у по-

<sup>1</sup>Осцилације притисака су очекиване с обзиром на претпостављену стишљивост.



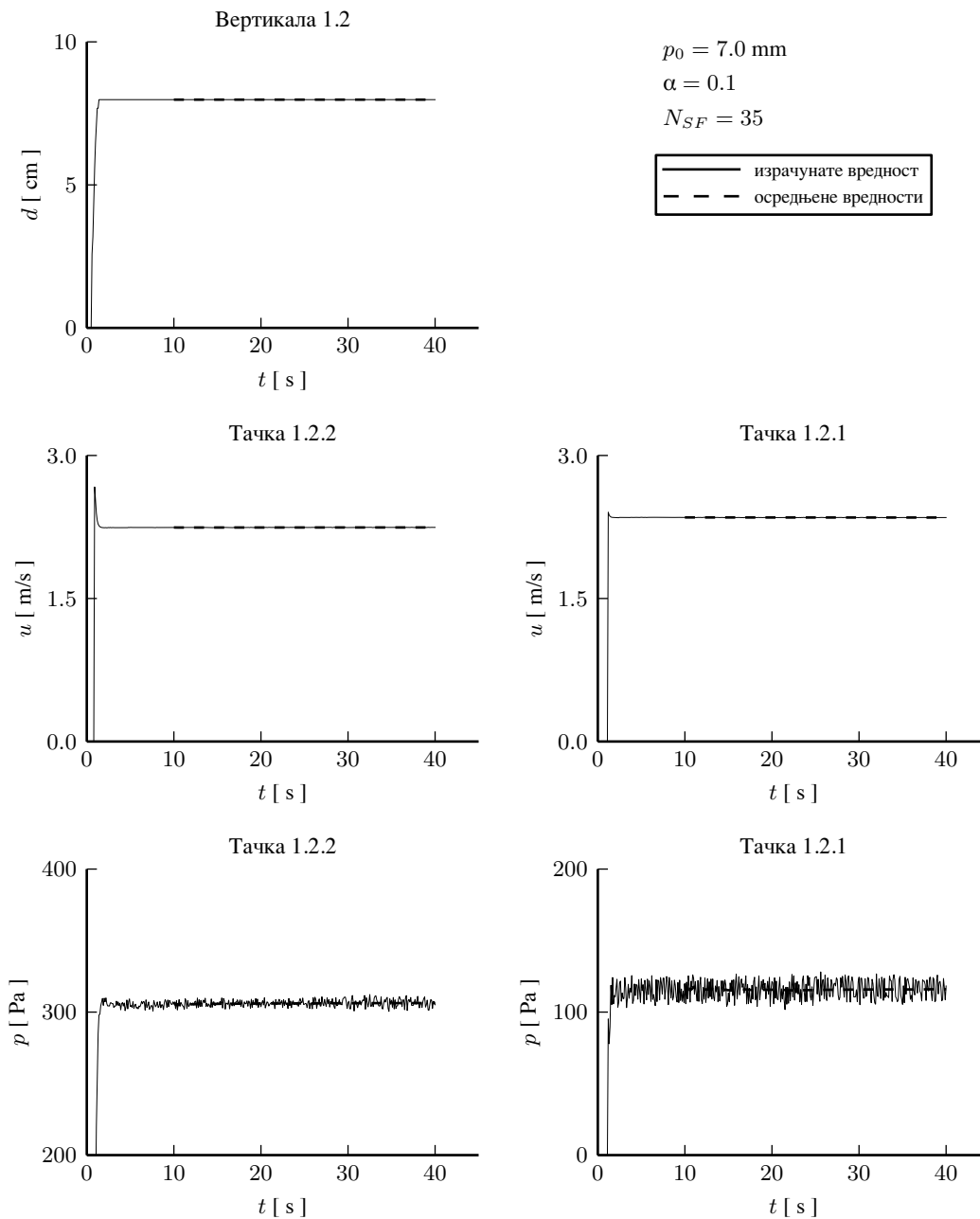
Слика 5.8: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се не користи вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

пречном пресеку 1, за случај када се заједно користе вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ ) и Shepard-ов филтер ( $N_{Sf} = 35$ ). Исте зависности за пресеке 2 и 3 су приказане у прилозима А.7 и А.11. Може се приметити да средње вредности достижу стабилну вредност у свим пресецима и да су колебања брзина и дубина, уколико их уопште има, практично безначајна. Исти закључак се, на основу прегледа вредности коефицијената варијације и стандардне девијације у прилозима Б.32 до Б.38, може пренети на све разматране тачке. За притиске се, са друге стране, може рећи да одступања нису значајно умањена у односу на претходну варијанту.

На крају се може извести закључак, да су прорачуни у којима се не користе вештачка вискозност или Shepard-ов филтер праћени значајним осцилацијама зависно променљивих, пре свега притиска. Применом, било Shepard-овог филтера, било вештачке вискозности, осцилације физичких величина, пре свега дубина и брзина, постају релативно мале. У случају комбиноване примене вештачке вискозности и Shepard-овог филтера, у добром делу рачунске области осцилације дубина и брзина се практично не јављају.

Да би се оценила могућност примене SPH методе у анализи потребних услова за окретање млаза у кривини затвореног проводника, резултати симулација су упоређени са мерењима из дисертације Коларевећ [36], односно резултатима моделског испитивања које су спровели Gissoni и Hager [19]. Прво се анализира оглед, на претходно описаној инсталацији, у којем је дошло до окретања млаза. Проток је износио 22,4 l/s а узводна дубина (у пресеку В на слици 5.6) 9,1 cm. Нумерички огледи у којима је симулиран овај случај, обављени су коришћењем следећих вредности коефицијента вештачке вискозности  $\alpha = \{0,01; 0,10; 0,20\}$ . С обзиром на то да се показало да употреба вештачке вискозности није неопходна за стабилност прорачуна, разматран је и случај  $\alpha = 0$ . Вариране су и вредности почетног растојања између честица. Најмања вредност овог растојања наметнута је могућностима графичке карте која је коришћена, и износила је 3,5 mm. Поред наведене, коришћене су и следеће вредности  $\Delta p_0 = \{4,5; 6,0; 7,0\}$  mm. У свим симулацијама коришћен је Shepard-ов филтер на сваких 35 рачунских корака.

На слици 5.10 упоређено је хеликоидно течење добијено прорачуном (плава боја) и опажено у цеви током лабораторијског огледа. Жутом линијом означена је линија нивоа на конвексној страни у лабораторијском огледу, која је добијена повезивањем нивоа у пресецима који су означени бројевима од 1 до 8. Црвеним тачкама означени су, пресеци на узводном и низводном крају. На сликама од 5.10 б) до 5.10 д) приказано је течење добијено прорачунима без вештачке вискозности за различите вредности растојања  $\Delta p_0$ . Ови прорачуни показали су незнатне разлике између случаја када се користи  $\Delta p_0 = 4,5$  mm и случаја када је  $\Delta p_0 = 3,5$  mm, па је вредност 4,5



Слика 5.9: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се користе вештачка вискозност и Shepard-ов филтер ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

mm (као рачунски мање захтевна) коришћена у прорачунима у којима су вариране вредности коефицијента  $\alpha$  (слике 5.10 ђ) до 5.10 з)). Може се приметити да се за веће вредности коефицијента  $\alpha$  добијају већи нивои на конвексној страни. Нешто мање је изражено повећање нивоа на конвексној страни при повећању вредности  $\Delta p_0$  у разматраном опсегу. Битна разлика уочава се у изгледу млаза који се окреће. У случајевима са мањим вредностима  $\Delta p_0$  и  $\alpha$ , млаз који се окреће додирује конвексну страну кривине (што је забележено и у огледу), док се у случајевима већих вредности ова два параметра ( $\Delta p_0 = 7,0$  mm,  $\alpha = 0, 10$  и  $\alpha = 0, 20$ ) млаз само делимично окреће. Да би се дао прецизнији закључак о слагању срачунатих и измерених нивоа, одређено је нормализовано средње квадратно одступање ( $NRMSE$ ) одређено на основу прорачунатих и измерених нивоа у 8 означених пресека:

$$NRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 (z_{i,SPH} - z_{i,mer})^2}{8}} / \sum_{i=1}^8 z_{i,mer} / 8 \quad (5.5)$$

У табелама 5.1 и 5.2, приказане су одговарајуће вредности одступања. На основу приказаних вредности јасно је да се најбоља слагања добијају са најмањим анализираним вредностима параметра  $\Delta p_0$  и изостављањем вештачке вискозности ( $\alpha = 0$ ). Уз то, треба додати да је у нумеричким огледима, у којима се млаз у потпуности окрене, место где млаз додирује калоту готово индентично са положајем забележеним у лабораторијском огледу.

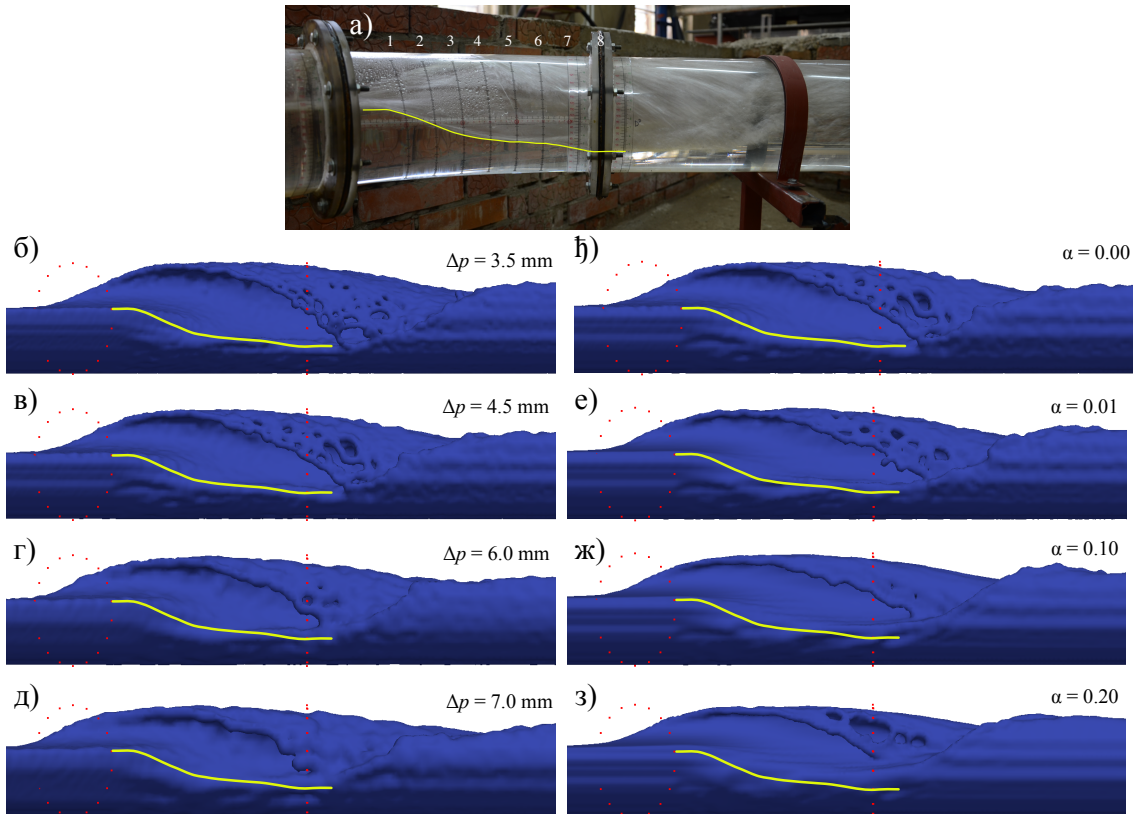
Табела 5.1: Нормализовано средње квадратно одступање нивоа за пресеке 1-8 при различитим вредностима коефицијента  $\alpha$

	$NRMSE$ [%]			
	$\alpha = 0.00$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$
$\Delta p_0 = 4,5$ mm	8.5	13.0	16.7	25.5

Табела 5.2: Нормализовано средње квадратно одступање нивоа за пресеке 1-8 при различитим вредностима параметра  $\Delta p_0$

	$NRMSE$ [%]			
	$\Delta p_0 = 3.5$ mm	$\Delta p_0 = 4.5$ mm	$\Delta p_0 = 6.0$ mm	$\Delta p_0 = 7.0$ mm
$\alpha = 0$ mm	8.3	8.5	15.4	17.4

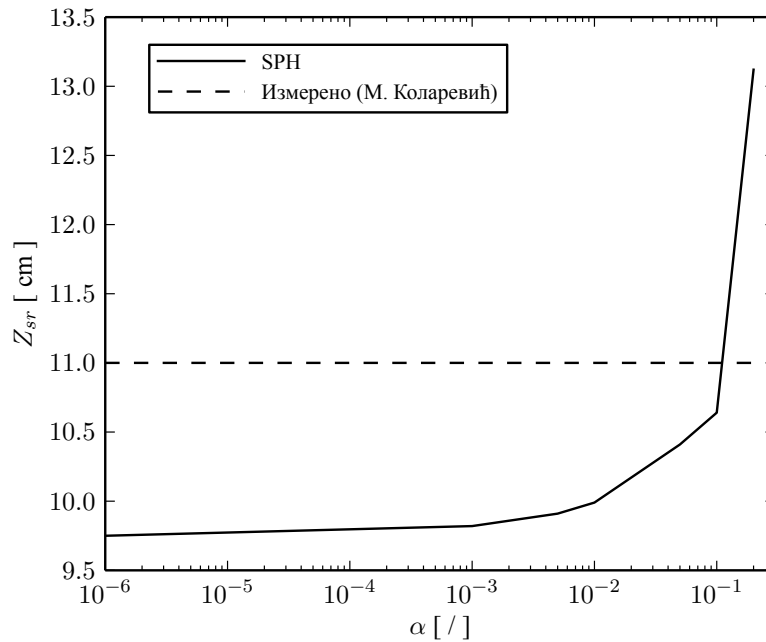
Релативно добра слагања срачунатих и измерених нивоа завршавају се на ниводном крају кривине. Ова неслагања могу се приписати интензивнијем мешању воде и ваздуха, тј. чињеницом да се ово мешање не моделира примењеним нумеричким моделом. Уз напомену да је измерени ниво воде у пресеку (Е) заправо ниво



Слика 5.10: а) Хеликоидно струјање у кривини у лабораторијском огледу [36], б) - д) утицај  $\Delta p_0$  (за  $\alpha = 0$ ) на изглед тока према прорачуну и ж) - з) утицај  $\alpha$  (за  $\Delta p_0 = 4,5 \text{ mm}$ ) на изглед тока добијеног прорачуном

мешавине ваздуха, на слици 5.11 се заједно са измереним нивоом воде (растојање мерено од дна цеви) приказује зависност срачунатог нивоа од коришћене вредности коефицијента  $\alpha$  (при  $\Delta p_0 = 4,5 \text{ cm}$ ). Као што се и очекивало, услед већих енергетских губитака, за веће вредности коефицијента  $\alpha$  добијају се и већи нивои.

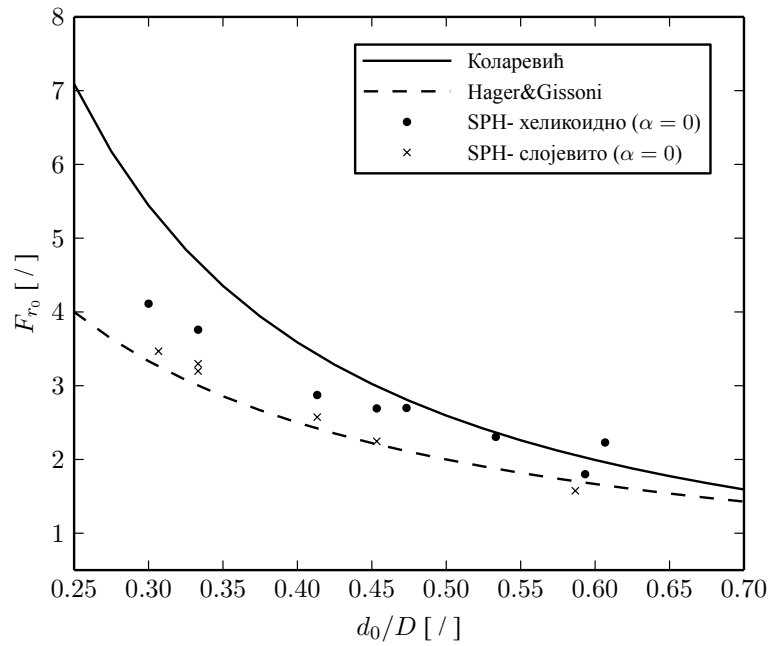
Да би се добио одговор на питање да ли се помоћу SPH методе могу проценити потребни хидраулички услови за настанак хеликоидног течења, обављено је више нумеричких огледа, у којима су поређени резултати прорачуна са граничним функционалним зависностима за одређивање карактера струјања, које су предложили Коларевић [36] и заједно Gissoni и Hager [19]. Прорачуни су обављени за  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 0, 1$ . Поређење резултата нумеричких огледа за први случај, приказано је на слици 5.12, док је поређење за други случај приказано на слици 5.13. У оба случаја уочава се да се помоћу SPH методе добијају границе (замишљена линија између тачака које представљају резултате са окретањем и без окретања млаза) које су сличног облика као и криве предложене на основу испитивања на физичким моделима. У случају без вештачке вискозности добијене тачке су између две предложене криве (премда је граница нешто ближа кривој коју су предложили Hager и Gissoni), док



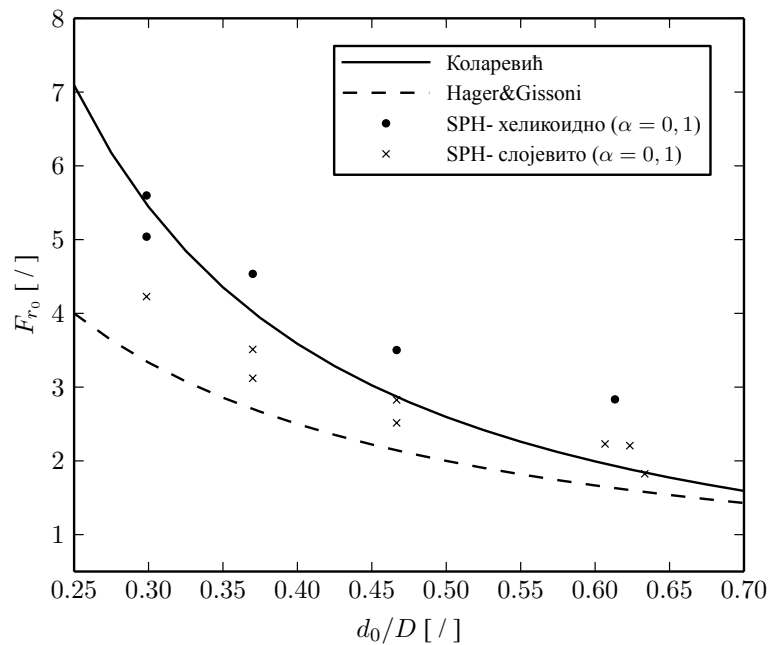
Слика 5.11: Зависност срачунатог нивоа у пресеку E од вредности коефицијента  $\alpha$

је у другом случају ( $\alpha = 0, 1$ ) граница већим делом лежи изнад зависности коју је предложила Коларевић. Поређењем две групе нумеричких огледа може се извести закључак да је са повећањем вредности коефицијента вештачке вискозности, за одређену релативну дубину узводно од кривине потребна већа вредност Фрудовог броја да би дошло до окретања млаза, тј. да се млаз „лакше” окреће у случају без употребе вештачке вискозности. Зато се може извести закључак да је изостављање вештачке вискозности на страни сигурности при пројектовању евакуационих објеката, јер лакше доводи до хеликоидног струјања које је почетак интензивнијег мешања ваздуха и воде.

На крају је анализа допуњена поређењем нумеричког огледа са мерењима за случај слојевитог струјања у кривини. Разматран је случај у којем је проток износио 14,04 l/s а дубина у пресеку В 7,50 cm. Коришћена је варијанта нумеричког поступка за коју се добило најбоље слагање рачунских и измерених дубина у кривини у претходно описаном случају хеликоидног струјања, тј. варијанта без вештачке вискозности. На слици 5.14 приказано је поређење аналогно поређењу на слици 5.10. Примећује се да је у случају слојевитог струјања млаз у огледу на физичком моделу компактнији него што је случај код хеликоидног струјања. Зато је лакше поређење „рачунског” и у лабораторији забележеног изгледа слободне површине на конкавној страни него што је то било у случају хеликоидног струјања. Као што се може приметити, максимална дубина на конкавној страни је приближно једнака у прорачуну као и на физичком моделу, уз напомену да се и нивои на конвексној страни готово једнако

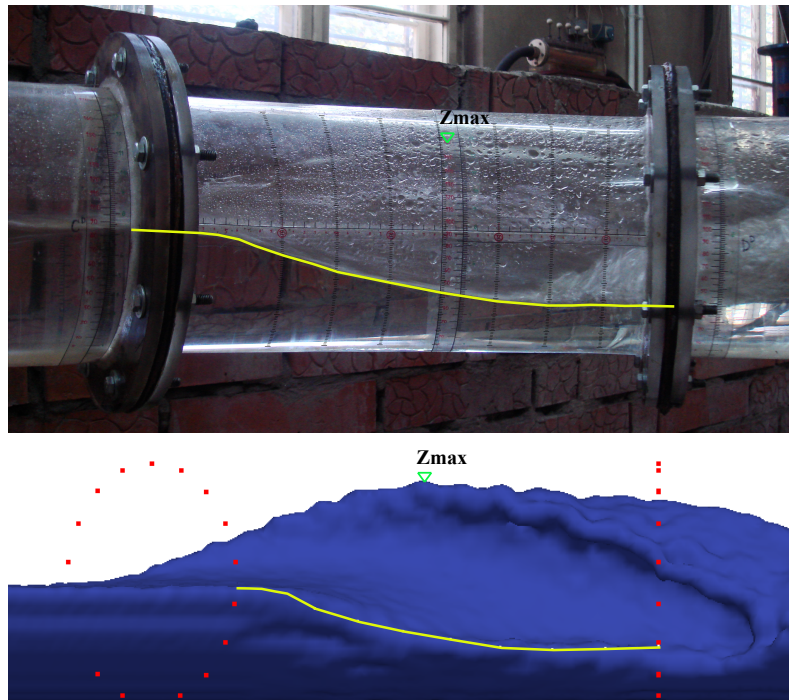


Слика 5.12: Поређење функционалних зависности из литературе ([36] и [19]) са резултатима нумеричких симулација ( $\alpha = 0$ )



Слика 5.13: Поређење функционалних зависности из литературе ([36] и [19]) са резултатима нумеричких симулација ( $\alpha = 0,1$ )





Слика 5.14: Поређење изгледа слободне површине у лабораторијском огледу [36] и слободне површине добијене прорачуном за случај када се не јавља окретање млаза у кривини ( $\alpha = 0$ )

добро слажу као и у случају хеликоидног струјања. Израчунато одступање у овом случају је нешто нижа од истог у случају хеликоидног струјања  $NRMSE = 6,1\%$ , док је у случају хеликоидног струјања, та грешка износила  $8,5\%$ .

## 5.5 Закључци

У овом поглављу разматрана је могућност нумеричког моделирања струјања у кривини затвореног проводника помоћу SPH методе. Анализирано је бурно струјање са непроменљивим граничним условима (устаљено струјање). Поређење резултата прорачуна за различите вредности параметара са мерењима показало је да се у случају без употребе вештачке вискозности и Shepard-овог филтера, временски осредњене вредности зависно променљивих модела безначајно мењају у току прорачуна, с тим да су прорачуни праћени значајним осцилацијама (пре свега притиска). Применом, било Shepard-овог филтера, било вештачке вискозности, колебања дубина и брзина постају безначајна, док се осцилације притисака знатно смањују. Најмање осцилације добијене су у случају када се вештачка вискозност и Shepard-ов филтер истовремено употребљавају. На основу претходних закључака може се извести општи закључак да је помоћу SPH методе могућ стабилан прорачун устаљеног струјања у закривљеним проводницима са кривином.

Показано је да се изоставањем вештачке вискозности добијају боља слагања срачунатих и измерених нивоа воде. Уз то, изостављање вештачке вискозности „олакшава“ окретање млаза у кривини што би, уколико би се SPH модел применио у пројектовању, било на страни сигурности. За случај прорачуна без вештачке вискозности, помоћу SPH методе добијају се граничне зависности за процену карактера течења које се налазе између зависности које се предлажу у литератури [36] и [19]. Са друге стране, треба имати у виду да је употребљен модел једнофазног флуида који се не може препоручити у анализи настанка загушења проводника, јер је тада увлачење ваздуха знатно интензивније него што је то било у разматраним случајевима.

## 6. Течење у речној кривини

SPH модел раванског струјања описан у поглављу 3.3 примењен је у моделирању течења на физичком моделу кривине на реци Тиси. Као и у примеру бурног течења у закривљеном проводнику, разматра се устаљено струјање тј. прорачун неустаљеног струјања у којем се не мењају гранични услови.

Предложене су измене, односно допуне стандардне варијанте раванског SPH модела, а измењен модел оцењиван је поређењем резултата нумеричких прорачуна и мерења на физичком моделу. При томе су упоређени прорачуни, са и без модификације изворног члана, у којима се користи вештачка вискозност и прорачуни у којима се користи модификација изворног члана, а напони моделирају према концепту Boussinesq-a. Поред тачности различитих варијанти SPH методе, која је оцењивана поређењем измерених и израчунатих брзина, по аналогiji са анализом способности просторног модела да симулира устаљено течење, разматрана је и осетљивост промене вредности просторног дискретизационог корака и одговарајућег коефицијента вискозности (вештачке или турбулентне) на вредности нумеричких осцилација брзина и дубина.

### 6.1 Увод

Велики број различитих нумеричких приступа и метода у моделирању речних токова показатељ је значаја ове теме у хидраулици. Аутору ове дисертације није познат ниједан рад у којем је представљена примена SPH методе у моделирању благо променљивог или устаљеног раванског течења у речним коритима или физичким моделима корита. У овој дисертацији се зато испитује устаљено течење у кориту неправилног облика. Представљеном анализом је тако испитана робусност методе.

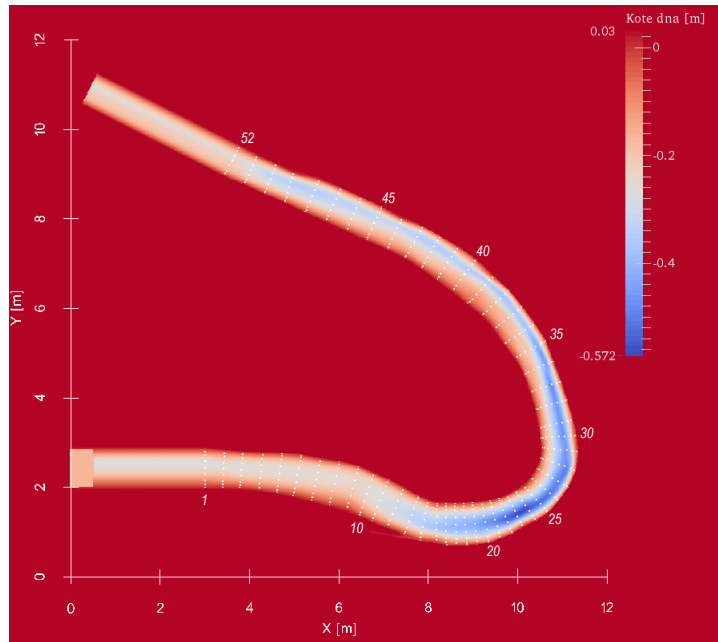
У SPH методи се стандардно примењује вештачка вискозност у циљу стабилизације прорачуна. Као што је већ наведено, теоријске анализе стабилности SPH методе нису утврдиле под којим условима је увођење вештачке вискозности неопходно. Зато је у сваком посебном случају од интереса да се испита могућност примене рачунског модела који ће на одговарајући начин обухватити дисипацију механичке енергије. У примеру раванског струјања дуж неке речне деонице, поред употребе вештачке ви-

скозности, коришћен је модел турбуленције заснован на концепту Boussinesq-a који је у SPH оквиру формулисан у поглављу 3.3. Наведени концепт коришћен је у овој дисертацији јер је, на истом примеру, моделирању течења на физичком моделу кривине на реци Тиси, дао задовољавајуће резултате у оквиру два различита рачунска модела која су заснована на коришћењу рачунских мрежа [66], а која су саставни део програмских кодова *MoBed2* и *Telemac 2D*. Вредност параметра за одређивање коефицијента турбулентне вискозности која је дала задовољавајуће резултате у прорачунима обављеним помоћу два наведена програмска кода, коришћена је и у овој дисертацији. Преузета вредност је резултовала великим осцилацијама брзина, с тим да се средње вредности у току прорачуна нису значајно мењале. У посебној анализи разматран је утицај повећања турбулентне вискозности на тачност и величину одступања брзина. Као и у претходном поглављу, анализиран је и утицај почетног растојања између честица на резултате прорачуна. Закључци који су при томе изведени, слични су онима који се везују за просторни модел.

Поред проблема дефинисања члана преко којег се обавља дисипација механичке енергије, у овој дисертацији, посебна пажња посвећена је дефинисању граничних услова. Стандардни поступак задавања дубина и брзина на границама применљив је у случају корита правоугаоног облика. У овој дисертацији су представљени резултати примене поступка за задавање дубина на основу захтеване коте нивоа на низводној граници (у мирном режиму течења) у случају корита неправилног облика, са тим да је задавање узводног граничног услова обављено према стандардном поступку, додавањем фиктивног правоугаоног попречног пресека узводно од стварне границе. Како би се побољшала слагања измерених и израчунатих вредности брзина, коришћен је и оригинални поступак измене изворног члана у динамичкој једначини за честице које се налазе у близини обале.

## 6.2 Опис физичког модела

Струјање у речној кривини на реци Тиси, у близини насеља Адорјан, испитивано је на физичком моделу изграђеном у хидрауличкој лабораторији Завода за хидраулику Института за водопривреду „Јарослав Черни”, у оквиру решавања хидротехничког проблема просецања речне кривине ([29] и [34]). Дужина модела износила је 22 m док је просечна дубина износила 25 cm. На слици 6.1 приказана је „рачунска” батиметрија корита, са означеним тачкама у којима су на моделу мерене брзине. Мерења су обављана у 52 попречна пресека у укупно 468 тачака. Попречни пресеци су у тексту означени бројевима (неколико профила је означено на слици 6.1). Бројем 1 је означен попречни пресек на узводном крају, док је бројем 52 означен попречни пресек на низводном крају деонице која се разматра.



Слика 6.1: Рачунска батиметрија разматране деонице са мерним тачкама

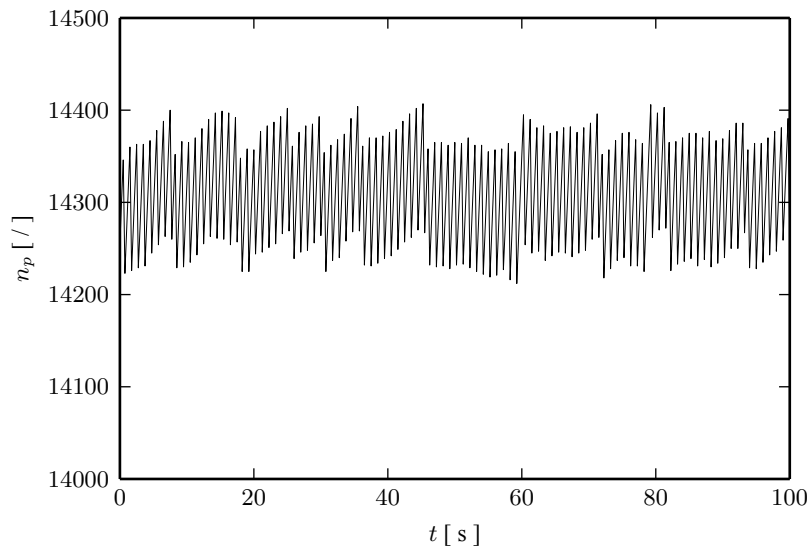
На физичком моделу испитивано је турбулентно течење<sup>1</sup>, без изливања воде из главног корита. Течење је на целој деоници било у мирном режиму. Брзине су мерене у више вертикала, на различитим дубинама, коришћењем хидрометријског крила пречника елисе 3,5 cm. Временски и по дубини осредњене вредности компоненти брзина су, за израду ове дисертације, биле расположиве на укупно 273 мерних места која су била распоређена у 39 попречна пресека. У сваком профилу је било, 7 мерних места. Додатне 2 тачке у сваком пресеку су граничне тачке које представљају место уреза воде и у испитивањима на моделу је претпостављено да су у овим тачкама брзине једнаке нули. На моделу коте нивоа слободне површине нису мерене. Према прорачуну у којем је Капор [34] добио задовољавајућа слагања брзина, разлика највиших и најнижих кота износила је 1,76 cm.

### 6.3 Поставка SPH нумеричког модела

На физичком моделу који је претходно описан испитивано је устаљено струјање. У SPH методи се решавају материјални изводи тј. изводи који се везују за честице. Због тога се у SPH методи устаљеност добија као резултат нумеричке симулације неустаљеног струјања у којем се, након почетне промене, гранични услови више не мењају.

У разматраном примеру, проток је износио 55,5 l/s. На почетку прорачуна честице мирују. Захтевани проток добијен је линеарним повећавањем јединичног про-

<sup>1</sup>Највећа вредност  $Re$  броја износи приближно 120 000



Слика 6.2: Промена броја честица у прорачуну у којем се користи вештачка вискозност.

тока на узводном крају. Сваки прорачуну је обухватио 900 s при чему је, захтевани проток постигнут у првих 450 s. У свим прорачунима, током првих 450 s симулације, коришћена је вештачка вискозност у целој рачунској области.

Прорачуни су обављени користећи три различите вредности почетног растојања између честица,  $\Delta p_0 = \{2,5; 3,5; 4,5;\}$  cm. Резултати су показали да се са смањивањем вредности почетног растојања, почев од 4,5 cm, не добијају значајно боља слагања срачунатих и измерених брзина. Највећи број честица који је коришћен у прорачунима износио је приближно 45 000 (овај број честица се односи на прорачун у којем је  $\Delta p_0 = 2,5$  cm), док је најмањи број честица износио приближно 14 300 (за  $\Delta p_0 = 4,5$  cm). Промена укупног броја честица у рачунској области, односно конвергенција овог броја, била је један од показатеља устаљености. У свим прорачунима се у последњих 100 s симулације број честица мењао за мање од  $\pm 0,7\%$ . Највеће осцилације забележене су у прорачуну у којем је коришћен најмањи број честица и најмања вредност коефицијента турбулентне вискозности. За овај случај, промена броја честица у последњих 100 секунди симулације, приказана је на слици 6.2.

Неправилан облик дна (слика 6.1) добијен је коришћењем честица дна које се налазе на једнаким удаљеностима од 1,5 cm. Коте дна ових честица су добијене просторном - кубном интерполацијом [27] на основу вредности кота дна измерених на физичком моделу у тачкама у којима су мерене брзине.

На низводном крају је приближним поступком описаним у поглављу 3.3.4 „циљана” константна кота нивоа по ширини тока, једнака негативној вредности кота дна честица којима је представљено корито тј. константна кота нивоа слободне повр-

шине која је у овом случају једнака 0,00 m. Да би се постигла ова кота нивоа, било је потребно додати честице дна низводно од стварне границе тако да оне на дужини од 2,4h образују фиктивну призматичну деоницу истог попречног пресека као пресек на низводној граници (попречни пресек 52). Пошто за сада није утврђен поступак за задавање променљиве брзине по ширини тока, на узводном крају је на удаљености 3 m од „стварне” границе (слика 6.1) образована правоугаона призматична деоница дужине 0,5 m, на чијем узводном крају је задаван константан јединични проток. На дужини од 3 m, између узводног краја стварног корита и фиктивне правоугаоне деонице, образована је трећа фиктивна призматична деоница. Попречни пресек на овој деоници има исти облик као пресек на узводном крају области струјања (пресек 1). Дужина ове деонице, одређивана је из услова да поремећаји који настају на наглом прелазу између правоуганог пресека и попречног пресека неправилног облика, не утичу на струјање у области која одговара физичком моделу. Уз то је у овој области, променом вредности Манинговог коефицијента по ширини корита, омогућено да распоред брзина на узводном крају приближно одговара распореду добијеном мерењем брзина на физичком моделу.

Вредност коефицијента турбулентне вискозности одређивана је коришћењем израза Eldera [30]:

$$v_t = \alpha_t \cdot u_* \cdot d \quad (6.1)$$

где је  $\alpha_t$  бездимензионални коефицијент који се, строго узевши, одређује калибрацијом, а  $u_* = \sqrt{gdI_e}$  је смичућа брзина. У литератури постоји више различитих препорука за одређивање вредности коефицијента  $\alpha_t$ . Вредности које се наводе се крећу од  $\kappa/6$  [30] (где је  $\kappa$  von Karman-ова константа за коју се у овој дисертацији користи вредност 0,4), до чак 6 [47]. Madsen et al. [47] су, међутим, показали да се калибрацијом у неким случајевима добијају и за неколико редова величина веће вредности коефицијента  $\alpha_t$ . У овој дисертацији је спроведена анализа осетљивости прорачуна на промену вредности коефицијента  $\alpha_t$ . Најамња вредност која је коришћена је  $\alpha_t = \kappa/6 = 0,067$ . Овде би требало напоменути, да су применом ове вредности, и истог модела турбуленције који се користи и у овој дисертацији, Росић и сарадници [66] на истом примеру кривине на реци Тиси, добили задовољавајуће резултате користећи нумеричке методе које користе рачунске мреже. Поред наведене вредности, у овој дисертацији, коришћене су још две вредности,  $\alpha_t = 1,000$  и  $\alpha_t = 15,000$ . Трбало би истаћи да је у прорачунима у којима се моделирају турбулентни напони (користи коефицијент турбулентне вискозности), за део у непосредној близини фиктивне узводне границе, било неопходно користити вештачку вискозност да би било могуће обавити прорачун. Вештачка вискозност је уместо турбулентне ви-

скозности примењивана не дужини 1 m мерено од фиктивне узводне границе (0,5 m узводно и низводно од места наглог преласка са правоуганог на попречни пресек неправилног облика).

Како је објашњено у поглављу 3.3.2, у циљу добијања брзина које су блиске нули у близини обала, локално је повећавана вредност Манинговог коефицијента за честице у близини обала. Како би се (динамички) утврдило које честице су близу обала, коришћен је израз 3.68. Показало се да се најбоља слагања са резултатима мерења добијају када је вредност броја  $R$  у изразу једнака 0,52. Свим честицама које задовољавају неједнакост дефинисану изразом 3.68, повећавана је вредност Манинговог коефицијента. Тако је за честице које су „удаљене” од обале ( $R > 0,52$ ) вредност овог коефицијента у прорачуну  $n = 0,020 \text{ m}^{-1/3}\text{s}$ , док је за честице у близини обала ( $R \leq 0,52$ ) вредност Манинговог коефицијента повећана 30 пута.

Резултати прорачуна нису се значајно мењали са променом вредности других параметара модела. У свим прорачунима је усвојено да је Курантов број  $C_r = 0,5$ , док је радијус области интерполације, и за честице флуида и за честице дна, износио  $h_0 = 1,2 \Delta p_0$ .

Прорачуни су обављени на Intelовом рачунарском процесору типа  $i5^2$ . У случајевима када је  $\Delta p_0 = 4,5 \text{ cm}$  (приближно 14 500 честица), прорачуни су, за 900 s симулације, трајали приближно 6 часова.

#### 6.4 Резултати

Као и у случају просторног SPH модела, прво се анализира способност SPH методе да симулира устаљено течење. У случају раванског струјања, анализира се промена брзине у два ортогонална правца у хоризонталној равни, која су на слици 6.1 обележена са  $X$  и  $Y$ , и промена дубина  $d$ . Брзина у правцу  $X$  означена је са  $u$ , док је брзина у правцу  $Y$  означена са  $v$ . Промена наведених величина приказана је за три тачке (које у хоризонталној равни представљају вертикале у којима се рачунају осредњене вредности брзина по дубини) у по три попречна пресека: пресецима на узводном и низводном крају стварне области струјања и у попречном пресеку 30. Две тачке (вертикале) у сваком пресеку су тачке у близини обала, док је једна у близини осовине тока. (средишња тачка).

Прво се разматра осетљивост прорачуна на промену почетног растојања између честица  $\Delta p_0$ . На слици 6.3 приказане су промене једне компоненте брзине и дубине за три тачке у попречном пресеку 1, у прорачуну у којем је  $\Delta p_0 = 4,5 \text{ cm}$  а вредност коефицијента  $\alpha_t$  за рачунање коефицијента турбулентне вискозности 0,067. На

<sup>2</sup>За разлику од просторног модела, рачунски поступак за прорачун не користи алгоритме за паралелизацију

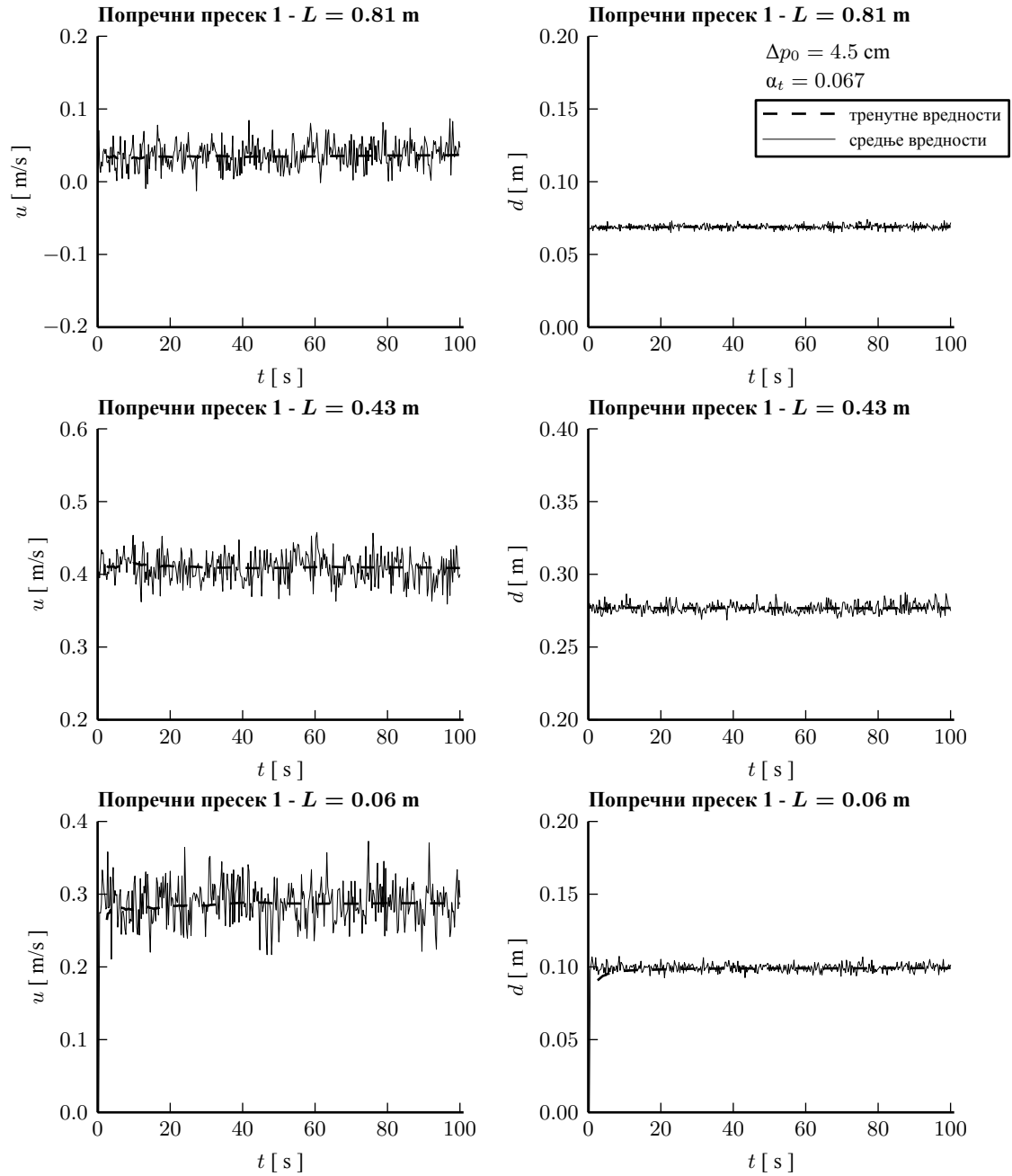


слици је са  $L$  означено растојање тачака од уреза на левој обали. Као и у случају просторног кода, прорачун без вештачке вискозности је праћен нумеричким осцилацијама. Са слике се још може приметити да су осцилације веће у близини обала. Исти закључци важе и за пресеке 30 и 52 што потврђују прилози А.17 и А.18. На слици 6.4 је приказан дијаграм промена брзина и дубина у пресеку 1 за случај прорачуна у којем је  $\Delta p_0 = 2,5$  cm. За исти случај, у прилозима А.17 и А.18, приказују се дијаграми промена брзина и дубина у попречним пресецима 30 и 52. Поређењем слика и одговарајућих прилога може се извести закључак да су осцилације мање у случају када се користи мањи просторни дискретизациони корак (већи број честица). Закључак потврђују и прилози А.14, А.17 и А.18 у којима се приказују колебања брзина и дубина у анализираним попречним пресецима за случај  $\Delta p_0 = 3,5$  cm. Важан закључак је да у свим прорачунима средње вредности (испрекидана линија на сликама) брзина и дубина конвергирају, што говори у прилог стабилности прорачуна.

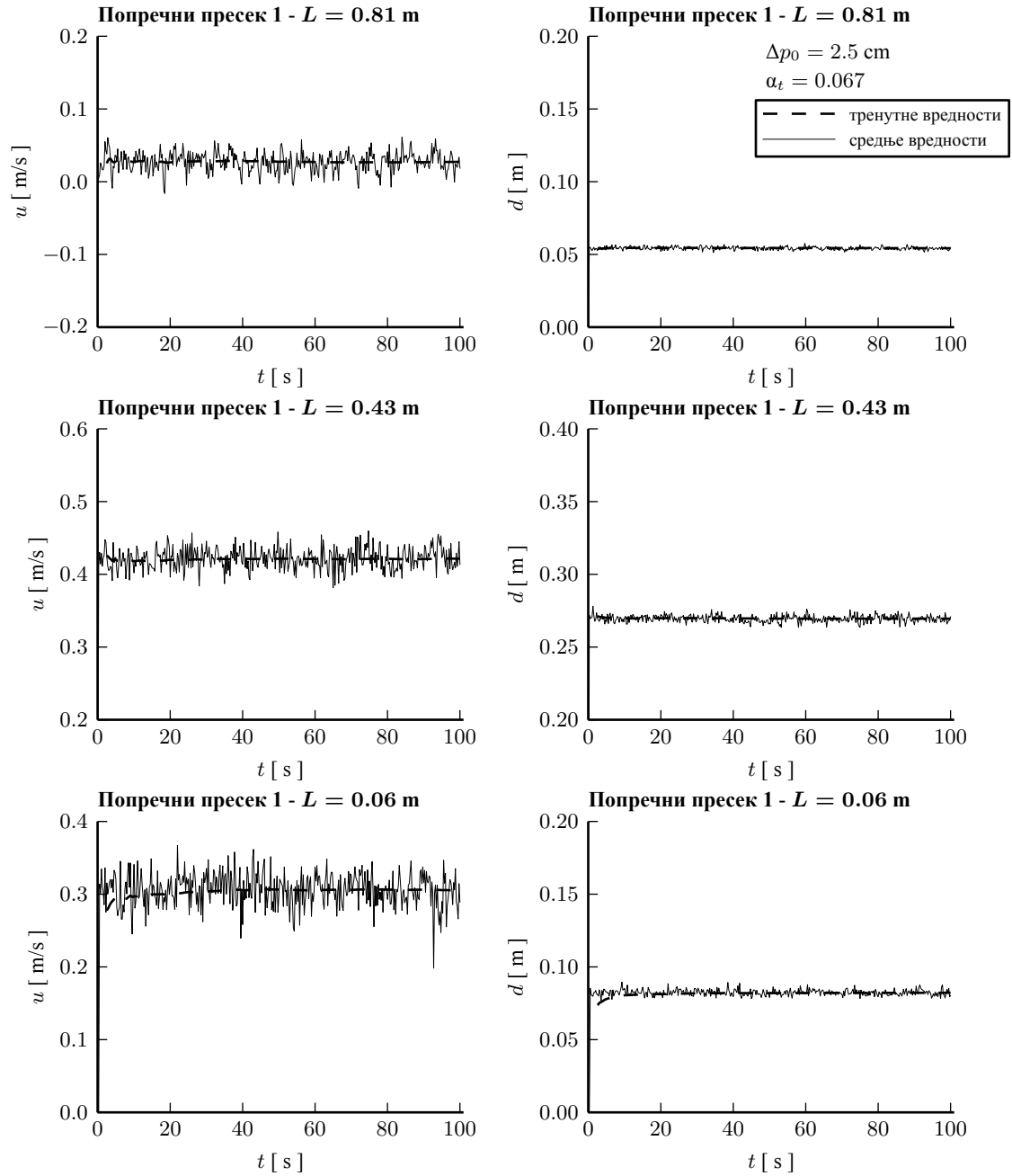
У анализи осетљивости резултата на промену вредности „вискозног” члана, коришћено је почетно растојање  $\Delta p_0 = 4.5$  cm. Дијаграми промена брзина и дубина, за случај када је  $\alpha_t = 1,000$ , приказани су у прилозима А.19, А.20 и А.21, док су исти дијаграми за случај  $\alpha_t = 15,000$  приказани у прилозима А.22, А.23 и А.24. Према очекивању, повећања вредности коефицијента  $\alpha_t$  су довела до мањих колебања брзина и дубина у свим разматраним тачкама. И у случају већих вредности турбулентне вискозности, осцилације су веће у близини обала, а средње вредности конвергирају. Занимљиво је упоредити резултате прорачуне у којима се користе „турбулентни” напони са резултатима употребе вештачке вискозности. Промене брзина и дубина за случај када се користи вештачка вискозност приказане су на дијаграмима у прилозима А.25, А.26 и А.27. Занимљиво је да су осцилације дубина једнако безначајне у случају вештачке вискозности и случају када се у прорачуну са турбулентним напонима користи  $\alpha_t = 15,000$ . Док су узводно и низводно осцилације брзина веће у случају турбулентне вискозности, у случају вештачке вискозности су веће на средини тока.

У наставку текста се разматра слагање срачунатих и измерених вредности брзина. Са измереним брзинама пореде се временски осредњене вредности израчунатих брзина. Поређење се обавља визуелно, за шест попречних пресека дуж тока, и табеларно, на основу средњег квадратног одступања RMSE брзина за све попречне пресеке.

На сликама 6.5 и 6.6 приказано је поређење компонената  $u$  и  $v$  вектора брзине за шест изабраних попречних пресека у случај најбољег слагања (најмањег одступања), које је, очекивано, добијено у случају најмањег почетног растојања између честица  $\Delta p_0 = 2,5$  cm и када је  $\alpha_t = 0,067$ . Пуном линијом на сликама означен је



Слика 6.3: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



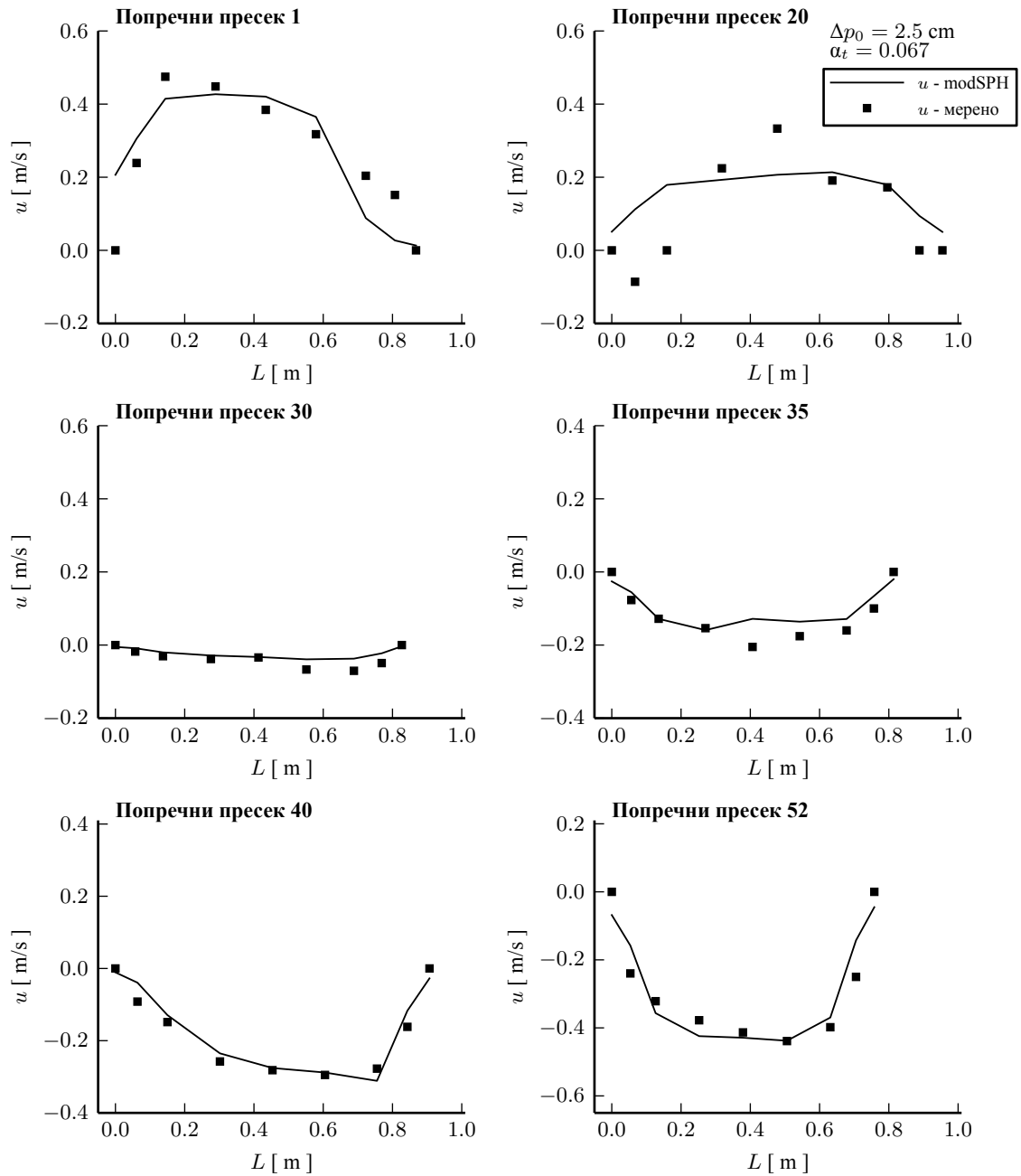
Слика 6.4: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 2.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )

распоред брзина по ширини тока према прорачуну, док су тачкама означене измерене вредности на физичком моделу. Натпис modSPH у легенди указује да се ради о модификованом SPH поступку. У прилозима од А.28 до А.37 дата су иста поређења за остале варијанте прорачуна, док су у прилозима Б.39 и Б.40, приказане табела са средњим одступањима за две ортогоналне компоненте вектора брзине. За резултате који се најбоље слажу са мерењима, на слици 6.7, приказани су вектори измерених и израчунатих брзина. Сlike 6.5, 6.6, 6.7 и прилози Б.39 и Б.40, показују да се добра слагања добијају на већем делу деонице. Пре свега, слагања су добра на низводном делу кривине (попречни пресеци 30 и 35) и на низводном правцу (пресеци 40 и 52). Релативно лоша слагања су забележена на узводном делу кривине (пресек 20) где су на физичком моделу уочене мање вртложне структуре. Модификовани рачунски модел, са опсегом коришћених параметара у овој дисертацији, није успео да репродукује мање вртлоге на конвексној страни кривине. Као узрок може се навести појава нумеричких осцилација и њихов утицај на рачунске средње вредности. Ове осцилације, као што турбулентне флукуације утичу на реалне временски осредњене вредности брзина, утичу на то да је вредност „реалног” рачунског коефицијента турбулентне вискозности (или коефицијента  $\alpha_t$ ) заправо већа од номиналне вредности која се задаје у прорачуну. Због ограничених рачунарских ресурса испитивања ван анализираних опсега вредности нису обављена. Претпоставка је да би се значајним смањивањем просторног корака, и самим тим нумеричких „флукуација” у прорачуну добили већи градијенти брзина на критичном делу разматране области.

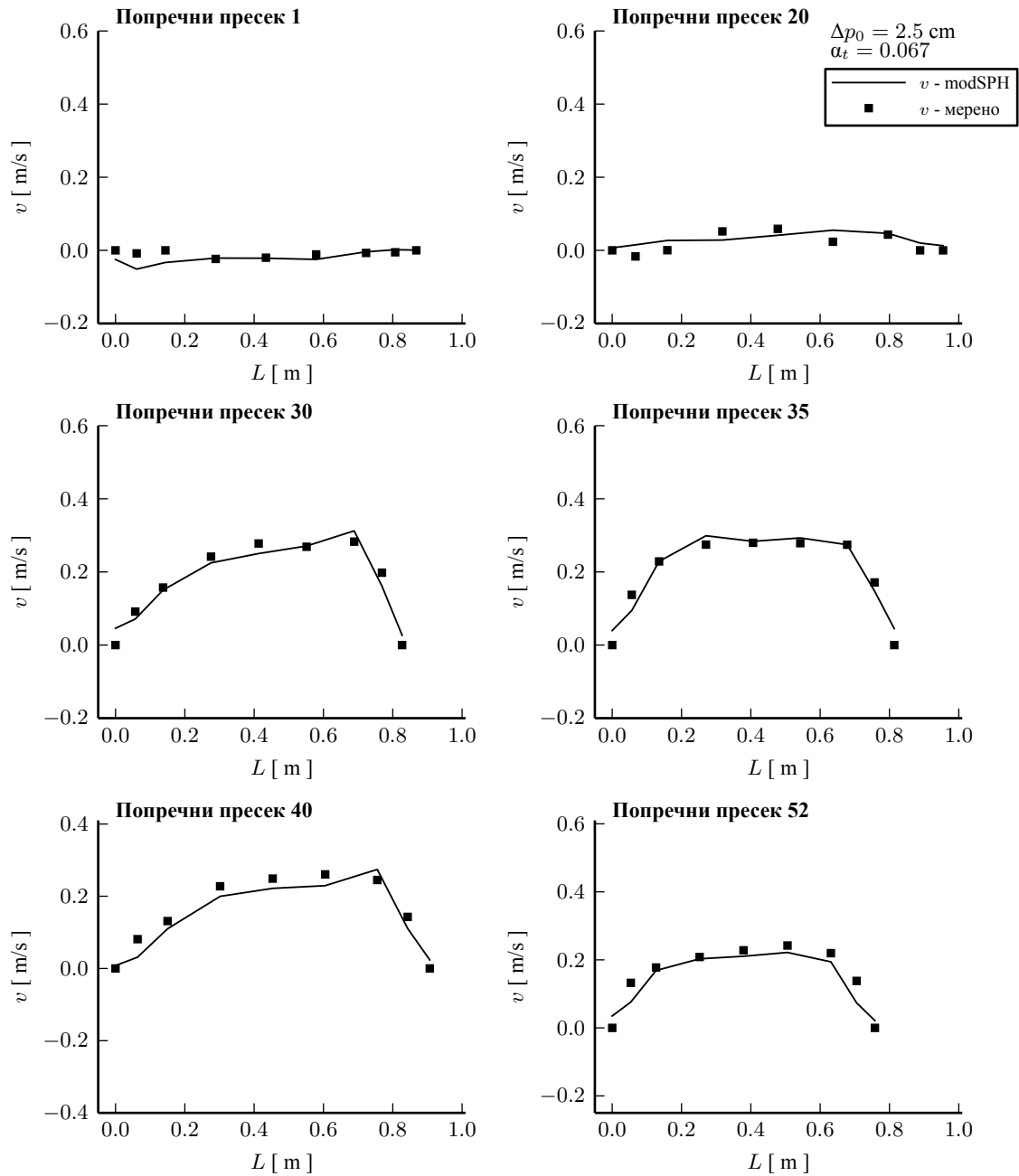
Као што подаци из прилога Б.39 и Б.40 показују, повећање вредности бездимензионалног коефицијента у изразу Елдера на  $\alpha_t = 1,000$  утиче на нешто лошије (не значајно) слагање срачунатих и измерених брзина. За  $\alpha_t = 15,000$  градијенти брзина су значајно мањи. Посматрајући дијаграме промена брзина у узводним попречним пресецима (1 и 20) приметно је да су брзине мање, што је последица израчунатих већих дубина (већи енергетски губици). Са друге стране, (мања) промена растојања  $\Delta p_0$  није значајно утицала на резултате, премда прилози Б.39 и Б.40 у којима су приказане просечне вредности одступања на целој деоници за све варијанте прорачуна, јасно указују на тренд „поправљања” слагања са повећањем броја честица (смањивањем почетног растојања између честица).

Посебан случај представља варијанта прорачуна у којој се користи вештачка вискозност. У овом случају, повећање вредности Манинговог коефицијента за честице у близини обала, за 30 пута, за последицу има изливање флуида из модела корита, што води нестабилном прорачуну<sup>3</sup>. Вредности Манинговог коефицијента највише

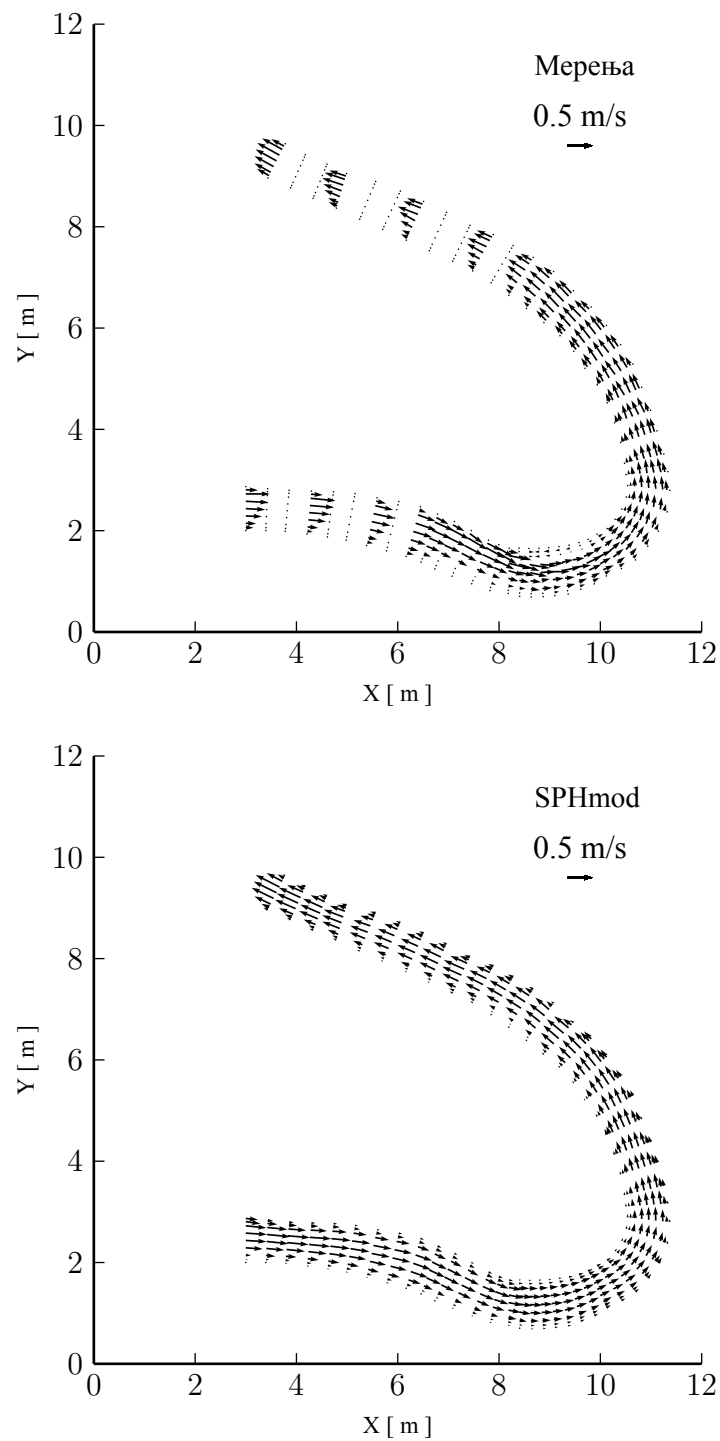
<sup>3</sup>Кота нивоа у рачунском моделу корита ван области струјања на физичком моделу је константна и износи 10 cm што је значајно изнад највеће коте слободне површине која је забележена на физичком моделу.



Слика 6.5: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $u$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 2,5$  cm и  $\alpha_t = 0,067$ )



Слика 6.6: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $v$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 2,5$  cm и  $\alpha_t = 0,067$ )



Слика 6.7: Поређење вектора измерених ([29] и [34]) и срачунатих брзина ( $\Delta p_0 = 2,5$  cm и  $\alpha_t = 0,067$ )

се могу повећати 5 пута јер при већим вредностима прорачун са вештачком вискозношћу постаје нестабилан. Међутим при оволиком повећању вредности Манинговог коефицијента израчунате ширине тока значајно су веће од оних забележених на физичком моделу, због већих енергетских губитака. Зато се брзине у овом случају не пореде са израчунатим брзинама у другим варијантама прорачуна.

Из прилога А.36 и А.37 је јасно да се употребом вештачке вискозности добијају изузетно мали градијенти брзина, па самим тим и најлошија слагања са мерењима, што потврђују и подаци из прилога Б.39 и Б.40.

На крају се, у табели 6.1, дају подаци о разликама највише коте (добијене у пресеку 52) и најниже коте (добијене у пресеку 1) у анализираним варијантама прорачуна које се могу упоредити са денивелацијом од 1,76 cm коју је у прорачуну добио Капор [34]. Разлика у котама  $\Delta Z_{max}$  је мерило изгубљене механичке енергије на разматраној деоници.

Табела 6.1: Разлика кота  $\Delta Z_{max}$  за различите варијанте прорачуна

$\Delta Z_{max}$ [cm]						
SPHstd	SPHmod5	SPHmod ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm)			SPHmod ( $\alpha_t = 0.067$ )	
в. в.	в. в.	$\alpha_t = 15$	$\alpha_t = 1$	$\alpha_t = 0.067$	$\Delta p_0 = 3.5$ cm	$\Delta p_0 = 2.5$ cm
0.68	6.26	4.95	3.72	2.25	1.87	1.72

\*SPHstd означава прорачун помоћу стандардног поступка без модификације изворног члана ( $\Delta p_0 = 4,5$  cm); SPHmod5 означава прорачун са модификацијом изворног члана у којем је Манингов коефицијент повећан 5 пута ( $\Delta p_0 = 4,5$  cm); в.в. је ознака за вештаку вискозност;

Може се рећи да су резултати у табели очекивани. Најмања денивелација добија се за случај када се честице у близини обала не успоравају помоћу изворног члана. Чак и мање успоравање честица (мање повећање Манинговог коефицијента) у приобалној зони у случају примене вештачке вискозности даје већи губитак него у случају највеће коришћене вредности коефицијента у изразу *Elder*. С обзиром на то да растојање  $\Delta p_0$  одређује ширину појаса успореног кретања честица, јасно је зашто се најмања денивелација добија у случају најмањег растојања између честица.

## 6.5 Закључак

Као и у случају примера у којем је анализиран просторни SPH модел, прорачуни уз коришћење раванског модела праћени су (неизбежним) нумеричким осцилацијама. С обзиром да су осцилације веће у близини граница рачунске области, где је кернел функција некомплетна, и да расту са смањивањем броја честица, она су и овде повезана са проблемом тачности SPH методе. Исто као и у просторном моделу,



„вискозни” члан утиче на смањење колебања вредности величина које се рачунају. И у случају раванског SPH модела, средње вредности брзина и дубина нису се мењале у току прорачуна (при томе се осцилације нису појачавале) што доводи до закључка да се SPH метода може примењивати у анализи устаљеног струјања.

Модификовани стандардни равански SPH метод, примењен је са делимичним успехом у моделирању устаљеног раванског струјања на моделу речне кривине. Показано је да се предложеним поступком за повећање трења у близини обала и применом једноставног модела турбуленције, односно предложеним поступцима за задавање узводног и низводног граничног услова, може репродуковати неуниформан распоред брзина забележен на моделу речне кривине, за разлику од стандардног поступка у којем се примењује вештачка вискозност, а гранични услови задају на попречном пресеку правоугаоног облика. Задовољавајућа слагање измерених и израчунатих брзина једино нису добијена на мањем делу кривине на којем су, испитивањем на физичком моделу, забележени мањи вртлози. Вртлози се могу репродуковати применом нумеричких метода заснованих на употреби рачунских мрежа, при употреби сличне просторне резолуције и истих вредности параметара за моделирање утицаја турбуленције. Немогућност репродукције вртлога помоћу SPH методе могла би се приписати утицају (неизбежних) нумеричких осцилација.

## 7. Закључци и препоруке

У овој дисертацији разматрана је примена једног од најпознатијих представника нумеричких метода које се заснивају на праћењу флуидних делића, SPH методе. Примена SPH методе анализирана је на једном примеру нагло променљивог неустаљеног тока и два примера устаљеног струјања. При томе је анализирано просторно струјање, струјање у вертикалној равни и раванско струјање у хоризонталној равни. Иако метод изворно није намењен моделирању устаљених појава, сврха анализе устаљеног течења је била да се испита робусност методе. С обзиром на то да теоријске анализе методе нису дале коначан суд у вези са питањем тачности и стабилности методе, у дисертацији су ова два нумеричка аспекта у сваком од три разматрана примера испитивана низом нумеричких огледа. У свим примерима анализиран је утицај појединих параметара на тачност резултата и на нумеричке осцилације које су пратиле прорачуне устаљеног струјања. Тачност методе, је у свим примерима, оцењивана поређењем резултата прорачуна са доступним резултатима испитивања на физичким моделима.

Анализиране су две варијанте SPH методе, које су модификоване за потребе прорачуна у наведена три примера, једна, у којој се уводи вештачка стишљивост флуида и служи за моделирање просторног струјања, и друга, у којој се користи нестишљив флуид и служи за моделирање раванског струјања у хоризонталној равни. У обе варијанте моделиран једнофазни флуид.

У првом примеру анализиран је проблем рушења бране и интеракције воде и чврстих препрека. Примењен је просторни SPH модел, а проблем је разматран у вертикалној равни. На основу резултата новијих лабораторијских мерења још једном је оцењена тачност методе у примеру рушења бране и предложен је поступак за корекцију параметара стишљивости честица помоћу којих се моделира чврста граница. Предложени поступак омогућио је тачнију процену притисака приликом интеракције флуида и границе. Резултати нумеричких огледа показали су да се правилним избором вредности параметара може тачно репродуковати талас са стрмим челом који настаје уклањањем преграде која има улогу бране. Уз то, показало се, да SPH метод може да узме у обзир утицај изузетно кратког времена подизања преграде. Највећи утицај на резултате прорачуна имао је број честица и степен примене

вештачке вискозности која се уводи у модел како би се стабилизовао прорачун. Показало се да се најбоља слагања добијају за највећи број честица и са најмањим анализираним степеном примене вештачке вискозности. При томе је показано да се као стабилизирајући фактор у прорачуну, уместо вештачке вискозности може користити осредњавање густина помоћу тзв. Shepard-овог филтера. У разматраном примеру метод није дао задовољавајуће резултате код моделирања међусобне интеракције честица флуида након одбијања од чврсте границе. С обзиром на то да се након одбијања јавља интензивно мешање ваздуха и воде, претпоставка је да би модел вишефазног флуида боље симулирао овај проблем.

Исти модел, примењен је у моделирању бурног (просторног) струјања у закривљеним цевима. Анализирано је устаљено струјање. За симулацију оваквог струјања, употребљен је оригинални поступак задавања узводних граничних услова на отвореној граници, који омогућава примену тзв. *динамичких граничних честица*. Показало се да честице флуида које улазе у стварну област струјања морају бити на одређеном растојању од динамичких честица. Величина овог растојања одређена је пробањем, из услова да се у прорачуну не јаве велики поремећаји дубина на узводном крају рачунске области. Предложени поступак, представља, рачунски знатно ефикаснију алтернативу примени тзв. резервоара честица из којег се пробањем постижу тражени гранични услови. Тачност методе позитивно је оцењена на основу могућности SPH методе да процени хидрауличке услове при којима долази до хеликоидног струјања у кривини, а који су утврђени испитивањима на физичким моделима. У примеру су испитивани само услови који доводе до окретања млаза али не и они при којима долази до загушења тока. Појава хеликоидног струјања доводи до интензивнијег мешања ваздуха и воде, па би у овом случају било боље користити модел течења вишефазног флуида. Пошто је разматрани модел једнофазног струјања за данашње прилике, рачунски изузетно захтеван, није се разматрала допуна модела како би се моделирало вишефазно струјање. Из истог разлога, недостатка друге фазе, метод у нумеричким огледима није дао задовољавајуће слагање, са испитивањима на физичком моделу, на делу низводно од кривине где се мешају млаз који се окреће и део који се не окреће.

И у овом случају, показало се да су резултати прорачуна најосетљивији на број честица и степен примењене вештачке вискозности. Смањивањем вештачке вискозности и броја честица добијала су се боља слагања са испитивањима на физичком моделу. Тачније, најбоље слагање добијено је у случају када је изостављена вештачка вискозност. Показано је и да се са повећањем вештачке вискозности млаз у кривини теже окреће. С обзиром на то да окретање млаза у затвореним проводницима води ка загушењу тока тј. смањивању транспортне способности проводника,

употреба вештачке вискозности није на страни сигурности. Са друге стране употреба вештачке вискозности утиче на смањивање нумеричких осцилација израчунатих вредности притисака и дубина који прате прорачуне помоћу SPH методе. Како би се у прорачунима без вештачке вискозности, избегле значајне осцилације дубина и брзина, и значајно смањиле неизбежне осцилације притисака због стишљивости флуида, било је непоходно користити Shepard-ов филтер. Треба напоменути да су чак и у прорачунима без вештачке вискозности, у датом примеру, средње вредности дубина, брзина и притисака конвергирале, а осцилације се нису увећавале, што говори у прилог стабилности методе. Као што се и очекивало нумеричке осцилације су биле веће са смањивањем броја честица и у близини граница где је тежинска (кернел) функција која се користи у SPH апроксимацијама некомплетна.

У последњем примеру је анализирано раванско струјање у кривини физичког модела речне кривине. Стандардни модел у којем се користи вештачка вискозност, а гранични услови задају у кориту правоуганог облика, модификован је како би добила задовољавајућа слагања израчунатих и измерених брзина. Измене модела су се односиле на задавање низводног граничног услова у виду коте нивоа у пресеку неправилног облика, задавање променљивог распореда брзине на узводном крају, задавање брзина блиских нули у близини уреза воде и на употребу једноставног модела турбуленције. Само у једној уској зони, у којој се на физичком моделу јављају мањи вртлози, модел није дао добре резултате.

Као и у случају просторног модела, потврђено је да су нумеричке осцилације повезане са проблемом тачности преко величине просторног дискретизационог корака и некомплетности кернел функције. Претпоставља се да би повећање броја честица омогућило симулирање вртлога јер би, између осталог, умањило нумеричке осцилације које утичу на додатну дисипацију механичке енергије.

На крају се наводи општи закључак да су резултати нумеричких огледа у свим примерима показали да се помоћу SPH методе могу добити резултати задовољавајућег степена тачности. За постизање високог степена тачности потребни су значајно већи рачунарски капацитети који би омогућили употребу сложенијих модела (нпр. модел вишефазног флуида) и примену већег број рачунских честица.

## Литература

- [1] Allahdadi, F., Carney, T., Hipp, J., Libersky, L., and Petschek, A. High strain lagrangian hydrodynamics: a three dimensional sph code for dynamic material response. Tech. rep., DTIC Document, 1993.
- [2] Asai, M., Aly, A. M., Sonoda, Y., and Sakai, Y. A stabilized incompressible sph method by relaxing the density invariance condition. *Journal of Applied Mathematics* 2012 (2012).
- [3] Ata, R., and Soulaïmani, A. A stabilized sph method for inviscid shallow water flows. *International journal for numerical methods in fluids* 47, 2 (2005), 139–159.
- [4] Attaway, S., Heinstejn, M., and Swegle, J. Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method. *Nuclear engineering and design* 150, 2 (1994), 199–205.
- [5] Balsara, D. Von neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics—suggestions for optimal algorithms. *Journal of Computational Physics* 121, 2 (1995), 357–372.
- [6] Batchelor, G. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 1973.
- [7] Benz, W., and Asphaug, E. Explicit 3d continuum fracture modeling with smooth particle hydrodynamics. In *Lunar and Planetary Science Conference* (1993), vol. 24, pp. 99–100.
- [8] Bonet, J., and Kulasegaram, S. Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations. *International journal for numerical methods in engineering* 47, 6 (2000), 1189–1214.
- [9] Bonet, J., and Lok, T.-S. Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations. *Computer Methods in applied mechanics and engineering* 180, 1 (1999), 97–115.

- [10] Valizadeh, A., Shafieefar, M., Monaghan, J., and Neyshabouri, A. Modelling two-phase flows using sph method. *Journal of Applied Sciences [P]* 8, 21 (2008), 3817–3826.
- [11] Vacondio, R., Rogers, B., and Stansby, P. Accurate particle splitting for smoothed particle hydrodynamics in shallow water with shock capturing. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 69, 8 (2012), 1377–1410.
- [12] Vacondio, R., Rogers, B., and Stansby, P. Smoothed particle hydrodynamics: Approximate zero-consistent 2-d boundary conditions and still shallow-water tests. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 69, 1 (2012), 226–253.
- [13] Vacondio, R., Rogers, B., Stansby, P., and Mignosa, P. Sph modeling of shallow flow with open boundaries for practical flood simulation. *Journal of Hydraulic Engineering* 138, 6 (2011), 530–541.
- [14] Vetsch, D. *Numerical simulation of sediment transport with meshfree methods*. PhD thesis, Versuchsanst. für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, 2012.
- [15] Vignjevic, R., Campbell, J., and Libersky, L. A treatment of zero-energy modes in the smoothed particle hydrodynamics method. *Computer methods in Applied mechanics and Engineering* 184, 1 (2000), 67–85.
- [16] Violeau, D. *Fluid Mechanics and the SPH method: theory and applications*. Oxford University Press, 2012.
- [17] Violeau, D., and Leroy, A. On the maximum time step in weakly compressible sph. *Journal of Computational Physics* 256 (2014), 388–415.
- [18] Gingold, R., and Monaghan, J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society* 181, 3 (1977), 375–389.
- [19] Gissoni, C., and Hager, W. Bend flow in bottom outlets. In *28th IAHR CONGRESS*. (1999), vol. 17.
- [20] Gómez-Gesteira, M., Cerqueiro, D., Crespo, C., and Dalrymple, R. Green water overtopping analyzed with a sph model. *Ocean Engineering* 32, 2 (2005), 223–238.
- [21] Gomez-Gesteira, M., Crespo, A., Rogers, B., Dalrymple, R., Dominguez, J., and Barreiro, A. Sphysics—development of a free-surface fluid solver—part 2: Efficiency and test cases. *Computers & Geosciences* 48 (2012), 300–307.

- [22] Gomez-Gesteira, M., Rogers, B., Crespo, A., Dalrymple, R., Narayanaswamy, M., and Dominguez, J. Sphysics—development of a free-surface fluid solver—part 1: Theory and formulations. *Computers & Geosciences* 48 (2012), 289–299.
- [23] Gomez-Gesteira, M., Rogers, B., Dalrymple, R., and Crespo, A. State-of-the-art of classical sph for free-surface flows. *Journal of Hydraulic Research* 48, S1 (2010), 6–27.
- [24] Guenther, C., Hicks, D., and Swegle, J. Conservative smoothing versus artificial viscosity. Tech. rep., Sandia National Labs., Albuquerque, NM (United States), 1994.
- [25] Dalrymple, R., and Knio, O. Sph modelling of water waves. In *Coastal Dynamics '01* (2000), ASCE, pp. 779–787.
- [26] Dehnen, W., and Aly, H. Improving convergence in smoothed particle hydrodynamics simulations without pairing instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 425, 2 (2012), 1068–1082.
- [27] Dierckx, P. *Curve and surface fitting with splines*. Oxford University Press, 1995.
- [28] Dyka, C., and Ingel, R. An approach for tension instability in smoothed particle hydrodynamics (sph). *Computers & structures* 57, 4 (1995), 573–580.
- [29] Đurić, M., Kapor, and R.S., Pavlović, R. Depth-average model with body fitted co-ordinates for the calculation of strongly curved elliptic flows. In *Proceedings of the 2nd International Conference Hydrosoft 86, Southampton, U.K.* (1986), pp. 179–192.
- [30] Elder, J. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *Journal of fluid mechanics* 5, 04 (1959), 544–560.
- [31] Jovanović, M. *Osnove numeričkog modeliranja ravanskih otvorenih tokova*. Građevinski fakultet, 1998.
- [32] Johnson, G. Linking of lagrangian particle methods to standard finite element methods for high velocity impact computations. *Nuclear Engineering and Design* 150, 2-3 (1994), 265–274.
- [33] Johnson, G., and Beissel, S. Normalized smoothing functions for sph impact computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39, 16 (1996), 2725–2741.

- [34] Kapor, R. *Matematički model tečenja vode u plitkim oblastima strujanja sa osnovnim jednalinama osrednjem po prostoru*. doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, 1997.
- [35] Kiara, A. *Analysis of the smoothed particle hydrodynamics method for free-surface flows*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2010.
- [36] Kolarević, M. *Burno tečenje u krivinama evakuacionih objekata*. doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu Građevinski fakultet, 2015.
- [37] Koshizuka, S., and Oka, Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear science and engineering* 123, 3 (1996), 421–434.
- [38] Lee, E., Moulinec, C., Xu, R., Violeau, D., Laurence, D., and Stansby, P. Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the sph mesh free particle method. *Journal of computational physics* 227, 18 (2008), 8417–8436.
- [39] Leroy, A. *A new incompressible SPH model: towards industrial applications*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2014.
- [40] Libersky, L., and Petschek, A. Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. In *Advances in the free-Lagrange method including contributions on adaptive gridding and the smooth particle hydrodynamics method*. Springer, 1991, pp. 248–257.
- [41] Li, S., and Liu, W. *Meshfree particle methods*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [42] Litvinov, S., Hu, X., and Adams, N. Towards both numerical consistency and conservation for sph approximation. In *Proceedings of the 9th SPHERIC International Workshop* (2014), SPHERIC, pp. 283–288.
- [43] Liu, M., and Liu, G. Smoothed particle hydrodynamics (sph): an overview and recent developments. *Archives of computational methods in engineering* 17, 1 (2010), 25–76.
- [44] Liu, M., Liu, G., and Lam, K. A one-dimensional meshfree particle formulation for simulating shock waves. *Shock Waves* 13, 3 (2003), 201–211.
- [45] Lobovský, L., Botia-Vera, E., Castellana, F., Mas-Soler, J., and Souto-Iglesias, A. Experimental investigation of dynamic pressure loads during dam break. *Journal of Fluids and Structures* 48 (2014), 407–434.



- [46] Lucy, L. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The astronomical journal* 82 (1977), 1013–1024.
- [47] Madsen, P., Rugbjerg, M., and Warren, I. Subgrid modelling in depth integrated flows. In *Proc. 21st Coastal Engineering Conference, ASCE, New York, NY* (1988), vol. 1, pp. 505–511.
- [48] Marrone, S., Antuono, M., Colagrossi, A., Colicchio, G., and Graziani, G. Enhanced boundary treatment in 2d smoothed particle hydrodynamics models. In *Proceedings of XIX Congress AIMETA* (2009).
- [49] Marrone, S., Antuono, M., Colagrossi, A., Colicchio, G., Le Touzé, D., and Graziani, G.  $\delta$ -sph model for simulating violent impact flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200, 13 (2011), 1526–1542.
- [50] Martin, J., and Moyce, W. Part iv. an experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 244, 882 (1952), 312–324.
- [51] Meglicki, Z. *Analysis and applications of smoothed particle magnetohydrodynamics*. PhD thesis, The Australian National University, 2010.
- [52] Monaghan, J. On the problem of penetration in particle methods. *Journal of Computational physics* 82, 1 (1989), 1–15.
- [53] Monaghan, J. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics* 30 (1992), 543–574.
- [54] Monaghan, J. Simulating free surface flows with sph. *Journal of computational physics* 110, 2 (1994), 399–406.
- [55] Monaghan, J. Sph without a tensile instability. *Journal of Computational Physics* 159, 2 (2000), 290–311.
- [56] Monaghan, J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on progress in physics* 68, 8 (2005), 1703.
- [57] Monaghan, J., and Kocharyan, A. Sph simulation of multi-phase flow. *Computer Physics Communications* 87, 1 (1995), 225–235.
- [58] Monaghan, J., and Kos, A. Solitary waves on a cretan beach. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering* 125, 3 (1999), 145–155.

- [59] Panizzo, A. *Physical and Numerical Modelling of Subaerial Landslide Generated Waves*. PhD thesis, Universita degli Studi di L'Aquila, 2004.
- [60] Patel, M., Vignjevic, R., and Campbell, J. An sph technique for evaluating the behaviour of ships in extreme ocean waves. *International Journal of Maritime Engineering* 151 (2009), 39–47.
- [61] Price, D. Smoothed particle hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics* 231, 3 (2012), 759–794.
- [62] Randles, P., and Libersky, L. Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvements and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 139, 1 (1996), 375–408.
- [63] Read, J., and Hayfield, T. Sphs: smoothed particle hydrodynamics with a higher order dissipation switch. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 422, 4 (2012), 3037–3055.
- [64] Rogers, B., Dalrymple, R., Gomez-Gesteira, M., and Knio, O. Smoothed particle hydrodynamics for naval hydrodynamics. In *Proc. Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies* (2003), Citeseer.
- [65] Rodriguez-Paz, M., and Bonet, J. A corrected smooth particle hydrodynamics formulation of the shallow-water equations. *Computers & structures* 83, 17 (2005), 1396–1410.
- [66] Rosic, N., Horvat, Z., Horvat, M., and Zindovic, B. Evaluation of the sph method in two dimensional open channel flow modeling. In *Proceedings of the 7th IWA Eastern European Young Water Professional Conference, Belgrade, Serbia* (2015), pp. 194–198.
- [67] Shepard, D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM national conference* (1968), ACM, pp. 517–524.
- [68] Sweigle, J., Attaway, S., Heinstejn, M., Mello, F., and Hicks, D. An analysis of smoothed particle hydrodynamics. Tech. rep., Sandia National Labs., Albuquerque, NM (United States), 1994.
- [69] Sweigle, J., Hicks, D., and Attaway, S. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of computational physics* 116, 1 (1995), 123–134.
- [70] Sweigle, J., Hicks, D., and Chen, Y. Stabilizing sph with conservative smoothing. *Report no SAND94-1932* (1994).

- [71] Schuessler, I., and Schmitt, D. Comments on smoothed particle hydrodynamics. *Astronomy and Astrophysics* 97 (1981), 373–379.
- [72] Federico, I., Marrone, S., Colagrossi, A., Aristodemo, F., and Antuono, M. Simulating 2d open-channel flows through an sph model. *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 34 (2012), 35–46.
- [73] Fujihara, M., and Borthwick, A. Godunov-type solution of curvilinear shallow-water equations. *Journal of Hydraulic Engineering* 126, 11 (2000), 827–836.
- [74] Fulk, D., and Quinn, D. An analysis of 1-d smoothed particle hydrodynamics kernels. *Journal of Computational Physics* 126, 1 (1996), 165–180.
- [75] Hérault, A., Bilotta, G., and Dalrymple, R. Sph on gpu with cuda. *Journal of Hydraulic Research* 48, S1 (2010), 74–79.
- [76] Hughes, K., Vignjevic, R., Campbell, J., De Vuyst, T., Djordjevic, N., and Papiannidis, L. From aerospace to offshore: Bridging the numerical simulation gaps—simulation advancements for fluid structure interaction problems. *International Journal of Impact Engineering* 61 (2013), 48–63.
- [77] Colagrossi, A., and Landrini, M. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics* 191, 2 (2003), 448–475.
- [78] Crespo, A. *Application of the smoothed particle hydrodynamics model SPHysics to free surface hydrodynamics*. PhD thesis, Universidade de Vigo, 2008.
- [79] Crespo, A., Dominguez, J., Barreiro, A., Gómez-Gesteira, M., and Rogers, B. Gpus, a new tool of acceleration in cfd: efficiency and reliability on smoothed particle hydrodynamics methods. *PLoS One* 6, 6 (2011), e20685.
- [80] Cummins, S., and Rudman, M. An sph projection method. *Journal of computational physics* 152, 2 (1999), 584–607.
- [81] Chen, J., and Beraun, J. A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190, 1 (2000), 225–239.
- [82] Chen, R., Shao, S., Liu, X., and Zhou, X. Applications of shallow water sph model in mountainous rivers. *Journal of Applied Fluid Mechanics* 8, 4 (2015), 863–870.

- [83] Quinlan, N., Basa, M., and Lastiwka, M. Truncation error in mesh-free particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 66, 13 (2006), 2064–2085.

# Прилози

## Списак прилога

A.1	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 2 за случај када се не користе вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ ) . . . . .	111
A.2	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 3 за случај када се не користе вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ ) . . . . .	112
A.3	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се не користе вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$ ) . . . . .	113
A.4	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се не користе вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$ ) . . . . .	114
A.5	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се користи Shepard-ов филтер на сваких 35 рачунских корака. . . . .	115
A.6	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се користи вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ ) . . . . .	116
A.7	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 2 за случај када се користи вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ ) . . . . .	117
A.8	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 3 за случај када се користи вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ ) . . . . .	118
A.9	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5 \text{ cm}$ и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	119
A.10	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5 \text{ cm}$ и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	120
A.11	Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 3 за случај када се користи вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ ) . . . . .	121

A.12	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 2.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	122
A.13	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 2.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	123
A.14	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 3.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	124
A.15	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 3.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	125
A.16	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 3.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	126
A.17	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	127
A.18	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . . . .	128
A.19	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 1.000$ ) . . . . .	129
A.20	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 1.000$ ) . . . . .	130
A.21	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 1.000$ ) . . . . .	131
A.22	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 15.000$ ) . . . . .	132
A.23	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 15.000$ ) . . . . .	133

A.24	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 15.000$ ) . . . . .	134
A.25	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и вештачка вискозност) . . . . .	135
A.26	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и вештачка вискозност) . . . . .	136
A.27	Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и вештачка вискозност) . . . . .	137
A.28	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $u$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 3.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . .	138
A.29	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $v$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 3.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . .	139
A.30	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $u$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . .	140
A.31	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $v$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 0.067$ ) . . .	141
A.32	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $u$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 1.000$ ) . . .	142
A.33	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $v$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 1.000$ ) . . .	143
A.34	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $u$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 15.000$ ) . . .	144
A.35	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $v$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и $\alpha_t = 15.000$ ) . . .	145
A.36	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $u$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и вештачка вискозност) . . . . .	146
A.37	Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине $v$ у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm и вештачка вискозност) . . . . .	147
Б.1	Утицај параметра $c^*$ на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н1 . . . . .	149
Б.2	Утицај параметра $c^*$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н1 . . . . .	149



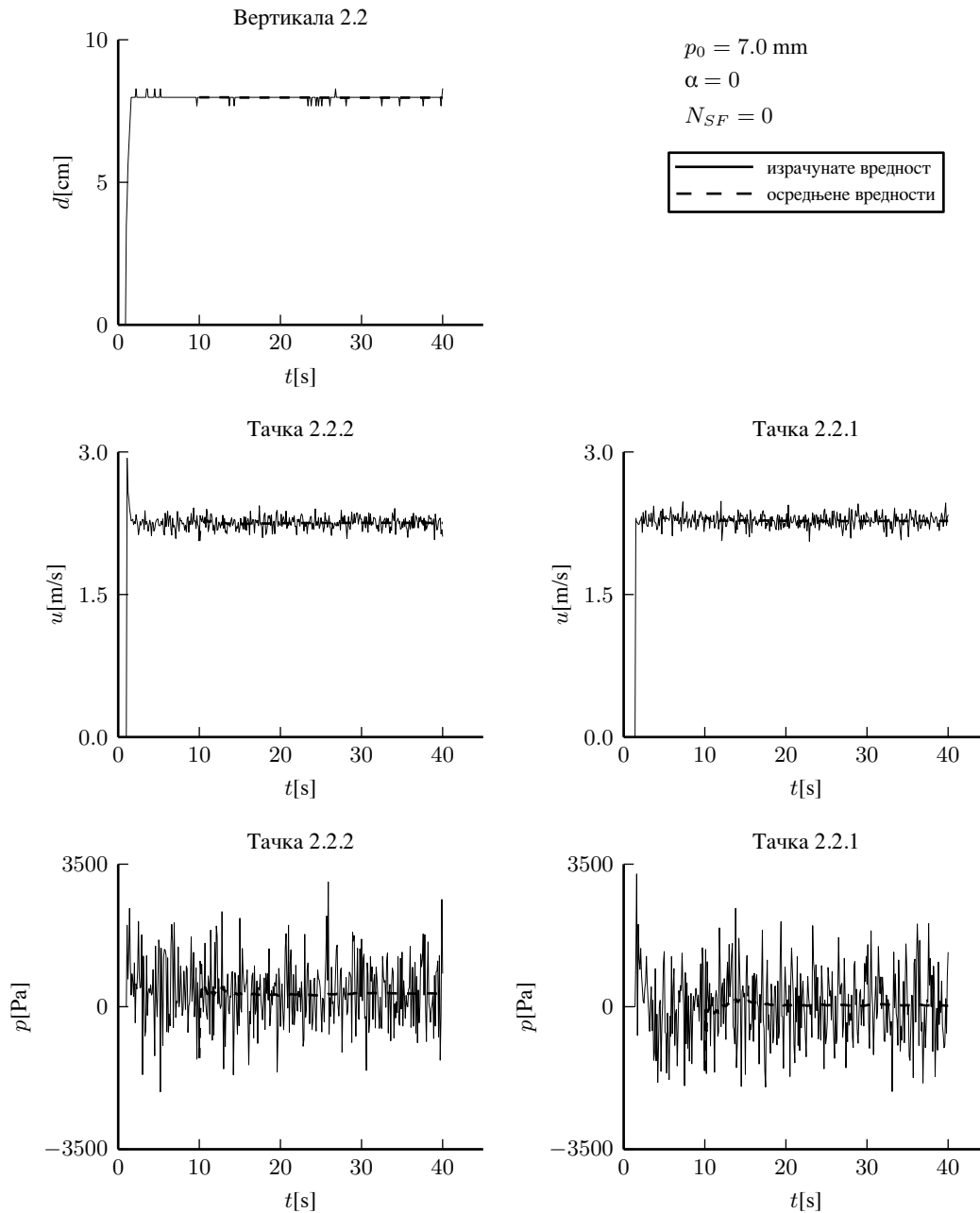
Б.3	Утицај параметра $c^*$ на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н2 . . . . .	149
Б.4	Утицај параметра $c^*$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н2 .	149
Б.5	Утицај параметра $c^*$ на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н3 . . . . .	149
Б.6	Утицај параметра $c^*$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н4 .	149
Б.7	Утицај параметра $C_r$ на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н1 . . . . .	150
Б.8	Утицај параметра $C_r$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н1	150
Б.9	Утицај параметра $C_r$ на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н2 . . . . .	150
Б.10	Утицај параметра $C_r$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н2	150
Б.11	Утицај параметра $C_r$ на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н3 . . . . .	150
Б.12	Утицај параметра $C_r$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н3	150
Б.13	Утицај радијуса интерполације $h$ на вредности релативне амплитуде дубина $A_r$ за вертикалу Н1 . . . . .	151
Б.14	Утицај радијуса интерполације $h$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н1 . . . . .	151
Б.15	Утицај радијуса интерполације $h$ на вредности релативне амплитуде дубина $A_r$ за вертикалу Н2 . . . . .	151
Б.16	Утицај радијуса интерполације $h$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н2 . . . . .	151
Б.17	Утицај радијуса интерполације $h$ на вредности релативне амплитуде дубина $A_r$ за вертикалу Н3 . . . . .	151
Б.18	Утицај радијуса интерполације $h$ на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н3 . . . . .	151
Б.19	Утицај Shepard-овог филтера на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н1 . . . . .	152
Б.20	Утицај Shepard-овог филтера на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н1 . . . . .	152
Б.21	Утицај Shepard-овог филтера на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н2 . . . . .	152
Б.22	Утицај Shepard-овог филтера на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу Н2 . . . . .	152
Б.23	Утицај Shepard-овог филтера на вредности релативне амплитуде дубине $A_r$ за вертикалу Н3 . . . . .	152

Б.24	Утицај Shepard-овог филтера на вредности фазне разлике $P_d$ за вертикалу НЗ . . . . .	152
Б.25	Коефицијенти варијације дубине при различитим почетним растојањима између честица у прорачунима у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер ( $\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 0$ ) . . . . .	153
Б.26	Коефицијент варијације брзине при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 1 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер . . . . .	153
Б.27	Коефицијент варијације брзине при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 2 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер . . . . .	153
Б.28	Коефицијент варијације брзине при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 3 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер . . . . .	154
Б.29	Стандардне девијације притиска при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 1 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер . . . . .	154
Б.30	Стандардне девијације притиска при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 2 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер . . . . .	154
Б.31	Стандардне девијације притиска при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 3 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер . . . . .	155
Б.32	Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на коефицијент варијације дубине ( $\Delta p_0 = 7.0$ mm) . . . . .	156
Б.33	Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на коефицијент варијације брзине у попречном пресеку 1 ( $\Delta p_0 = 7.0$ mm) . . . . .	156
Б.34	Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на коефицијент варијације брзине у попречном пресеку 2 ( $\Delta p_0 = 7.0$ mm) . . . . .	156
Б.35	Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на коефицијент варијације брзине у попречном пресеку 3 ( $\Delta p_0 = 7.0$ mm) . . . . .	157
Б.36	Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на стандардну девијацију притиска у попречном пресеку 1 ( $\Delta p_0 = 7.0$ mm) . . . . .	157
Б.37	Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на стандардну девијацију притиска у попречном пресеку 2 ( $\Delta p_0 = 7.0$ mm) . . . . .	157
Б.38	Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на стандардну девијацију притиска у попречном пресеку 3 ( $\Delta p_0 = 7.0$ mm) . . . . .	158

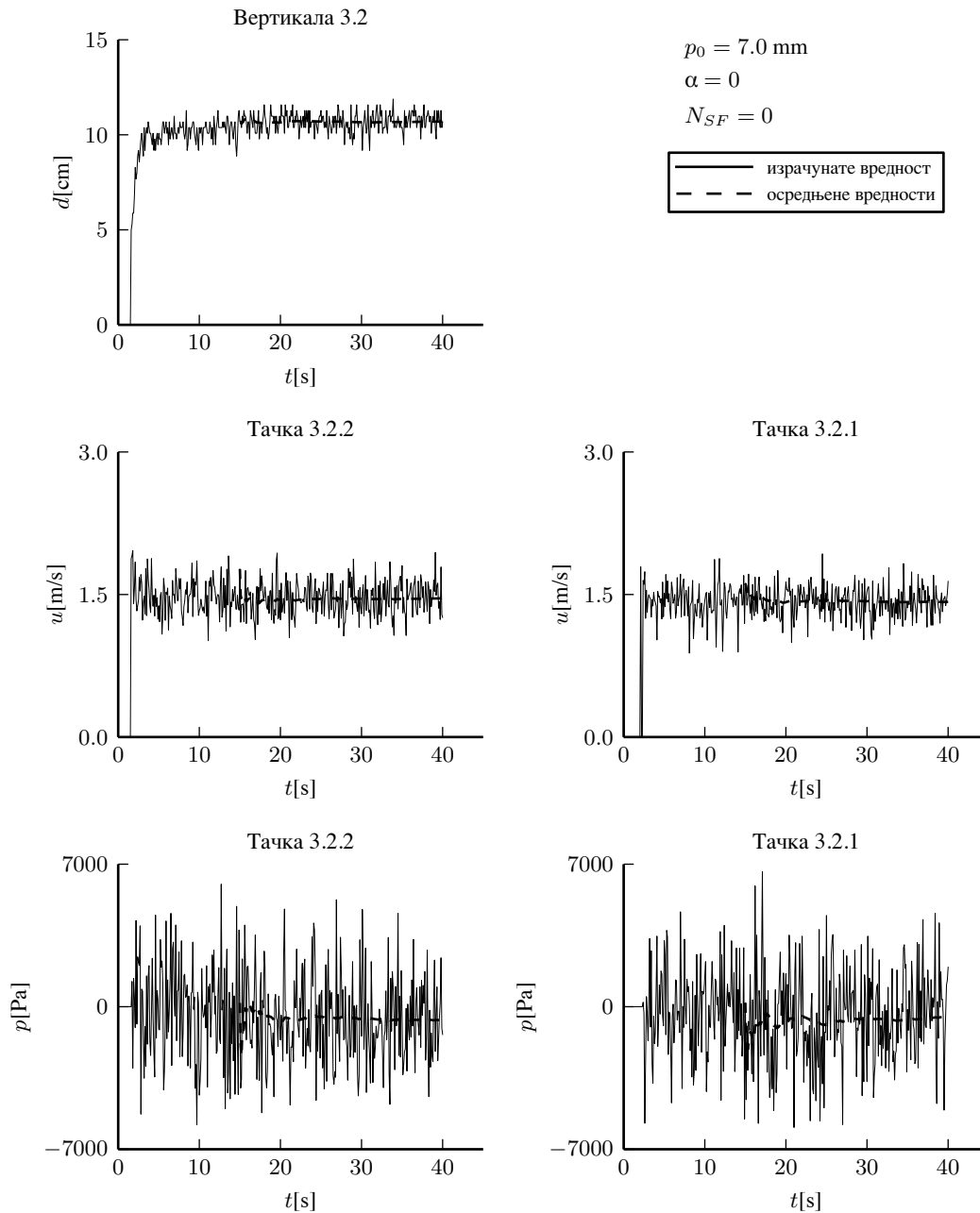
Б.39 Средње квадратно одступање брзине $u$ по попречним пресецима . . .	159
Б.40 Средње квадратно одступање брзине $v$ по попречним пресецима . . .	160

## **A. Графички прилози**

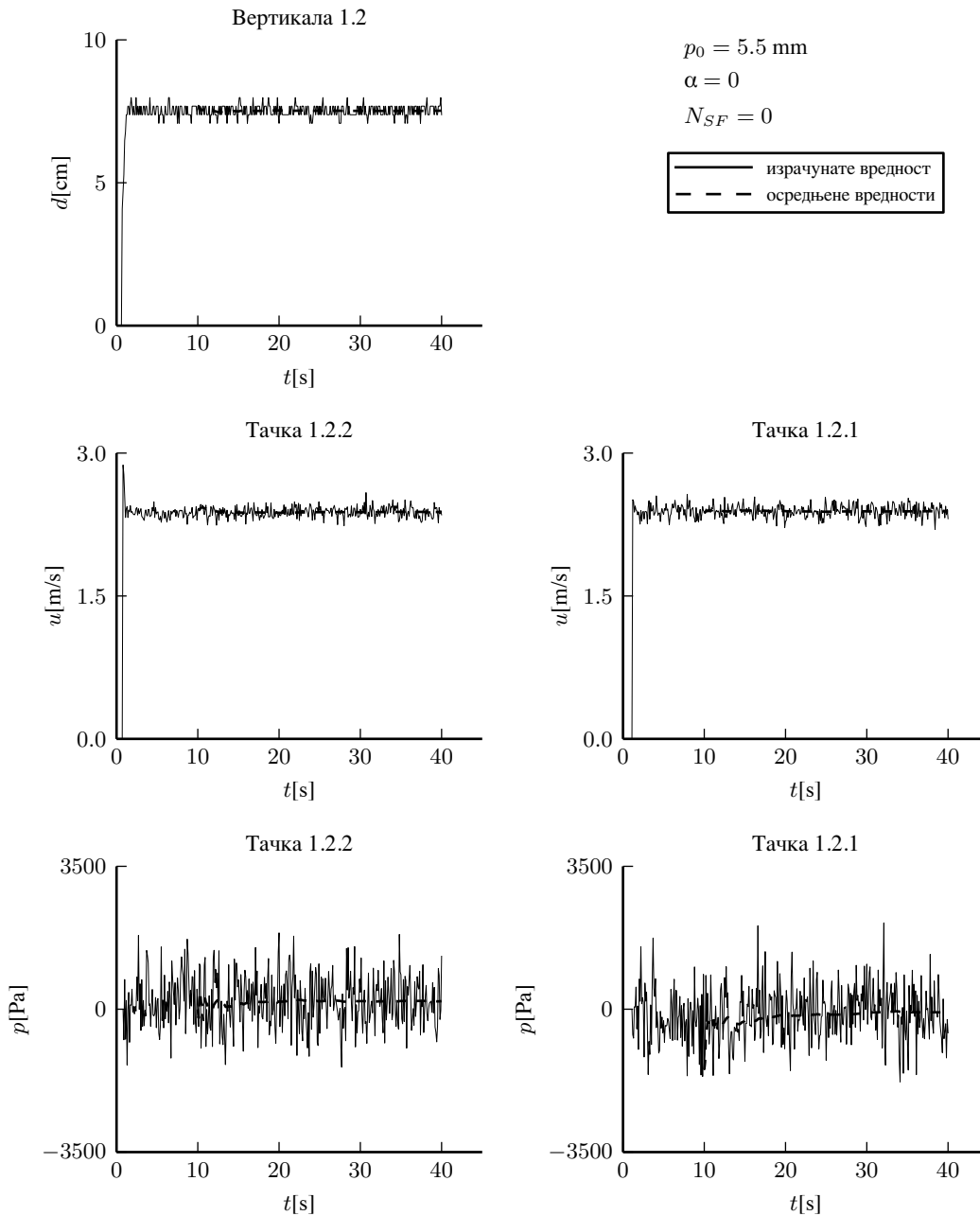
Прилог А.1: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 2 за случај када се не користе вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )



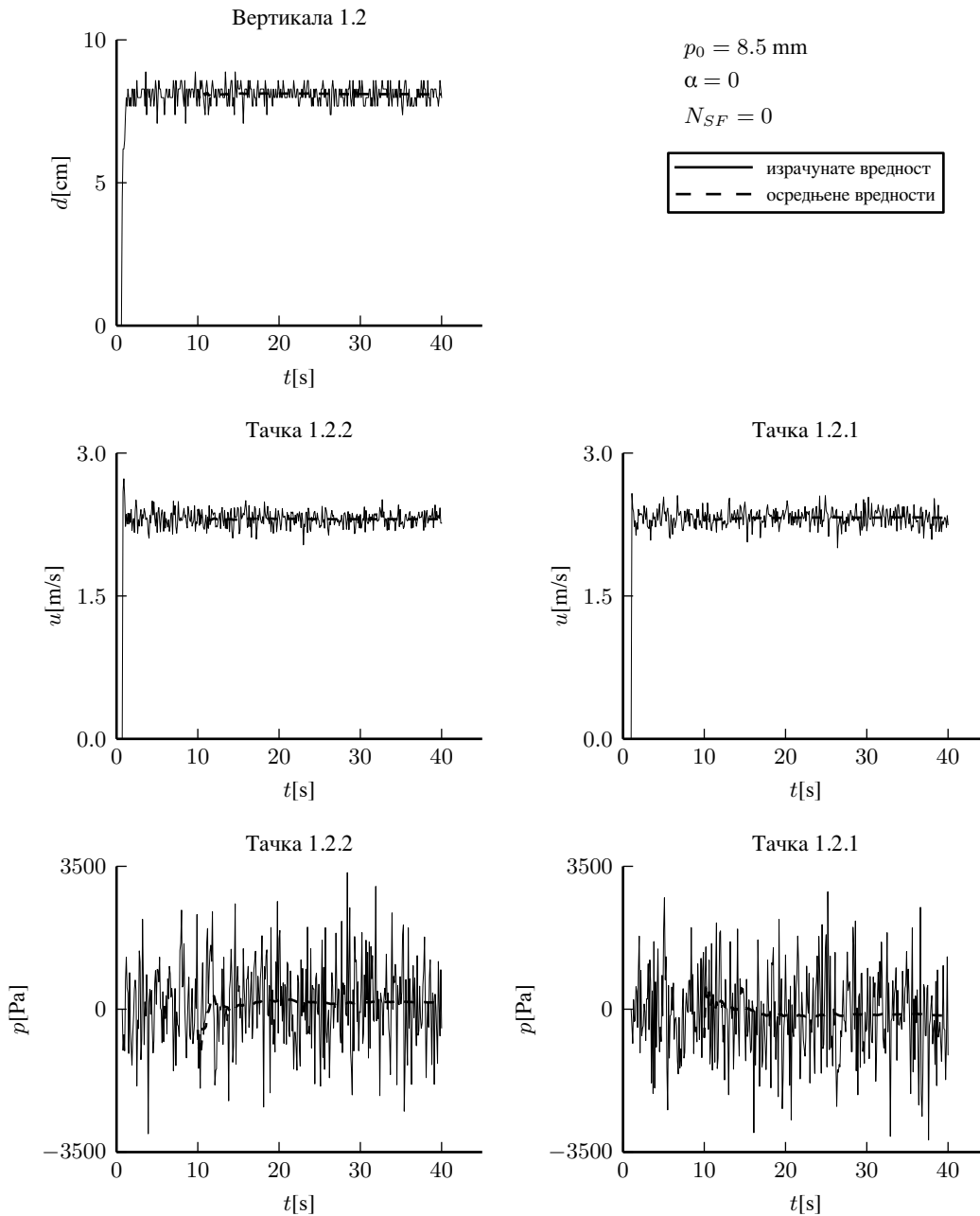
Прилог А.2: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 3 за случај када се не користе вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )



Прилог А.3: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се не користе вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$ )

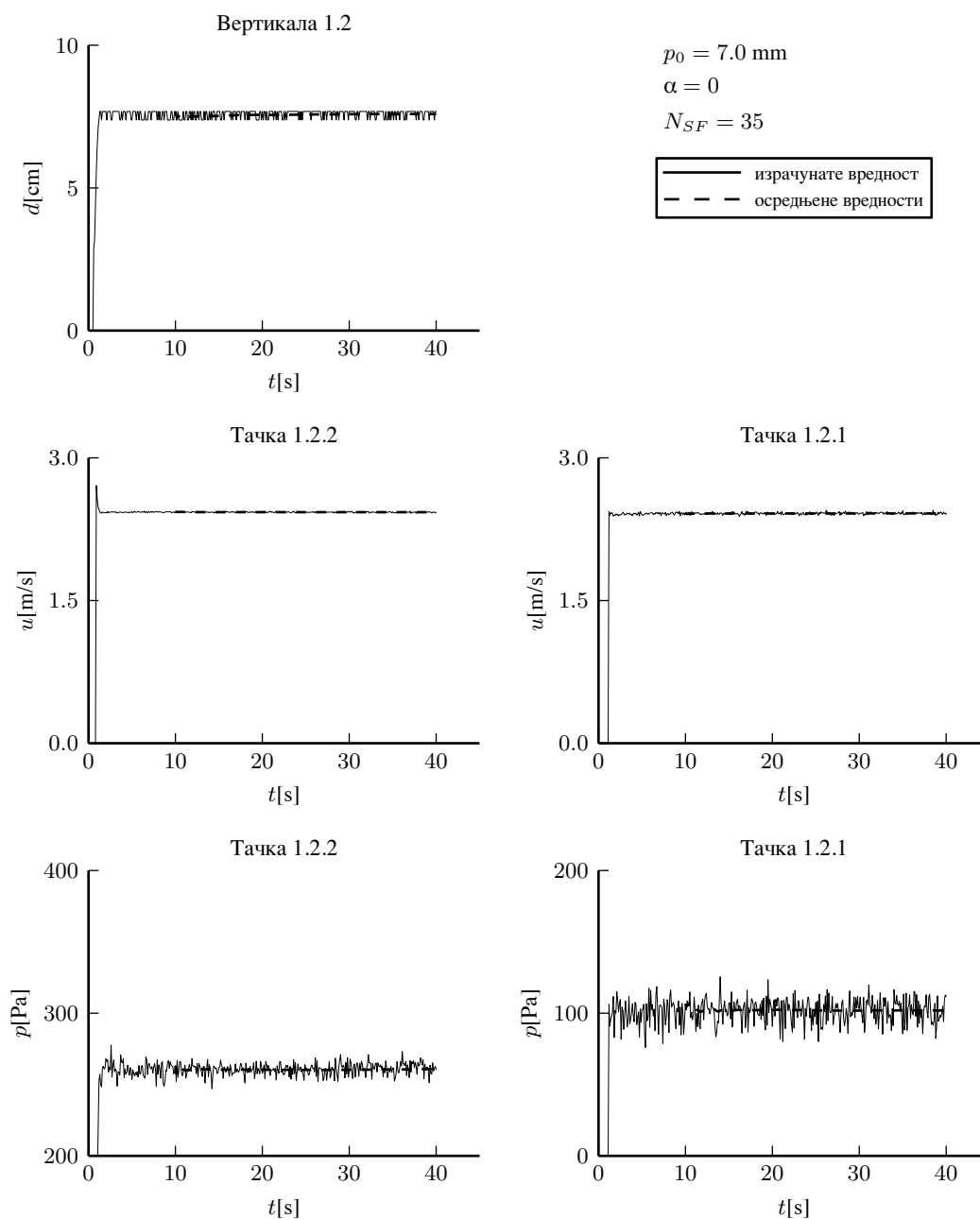


Прилог А.4: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 1 за случај када се не користе вештачка вискозност и Shepard филтер ( $\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$ )

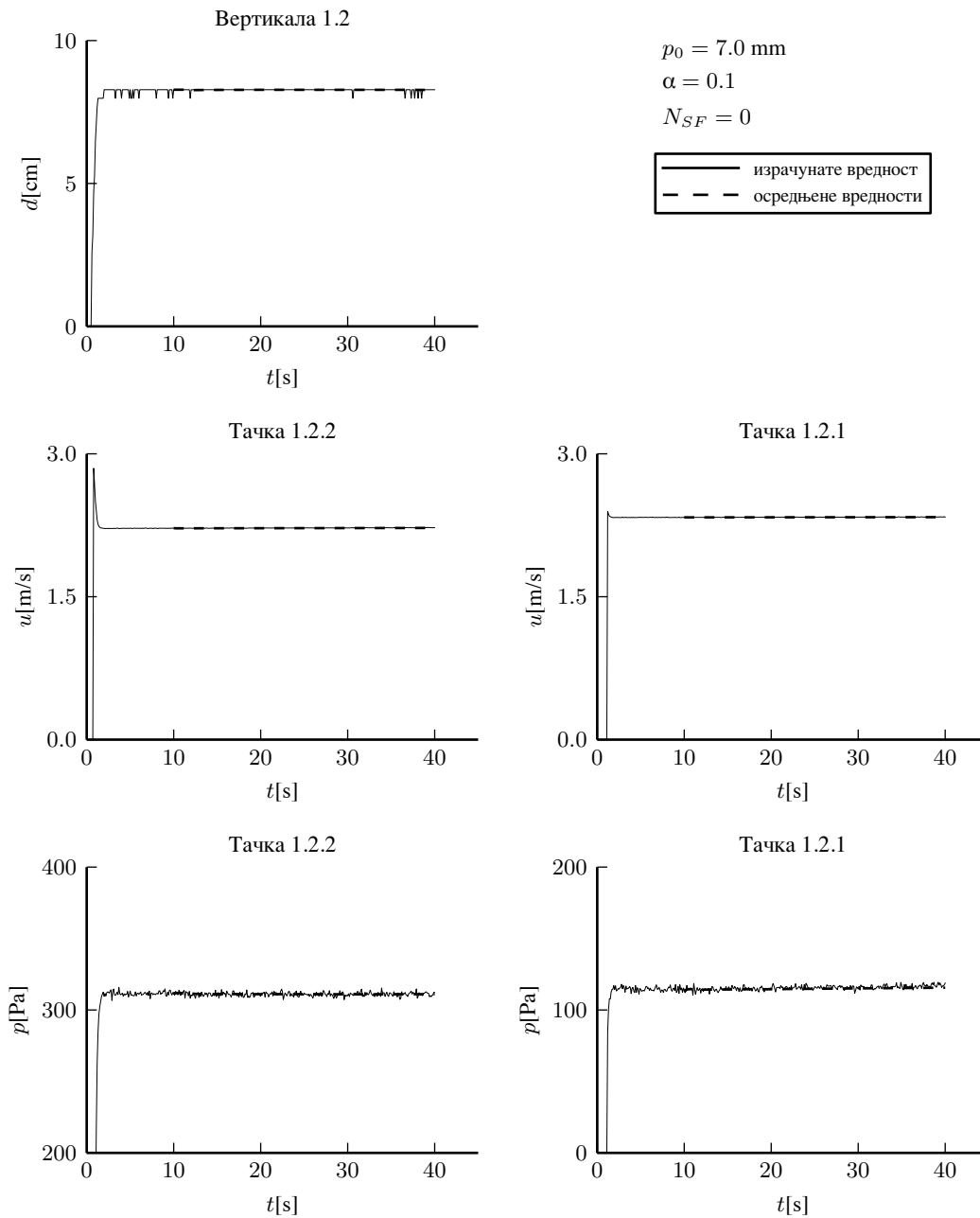




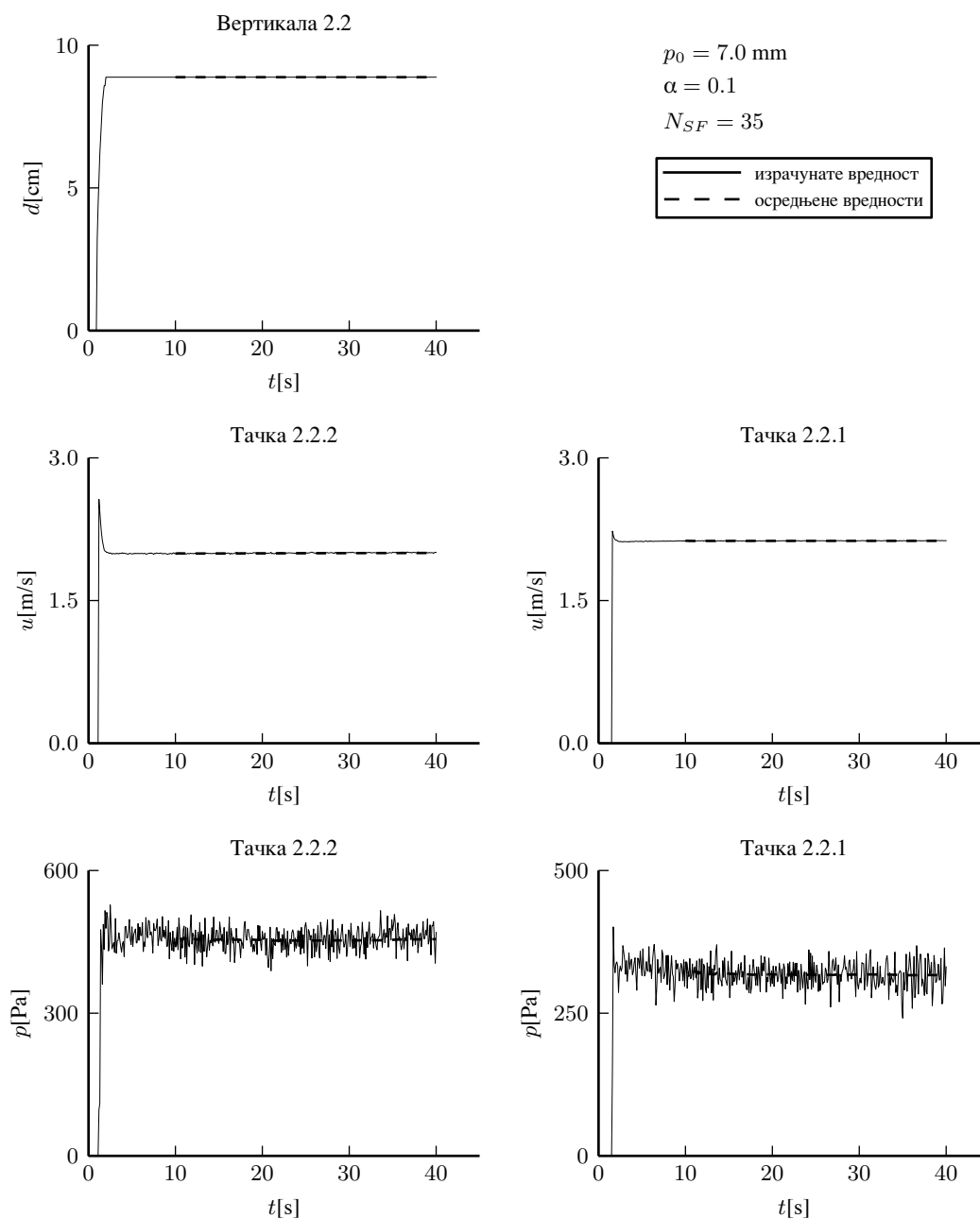
Прилог А.5: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пре-сека 1 за случај када се користи Shepard-ов филтер на сваких 35 рачунских корака.



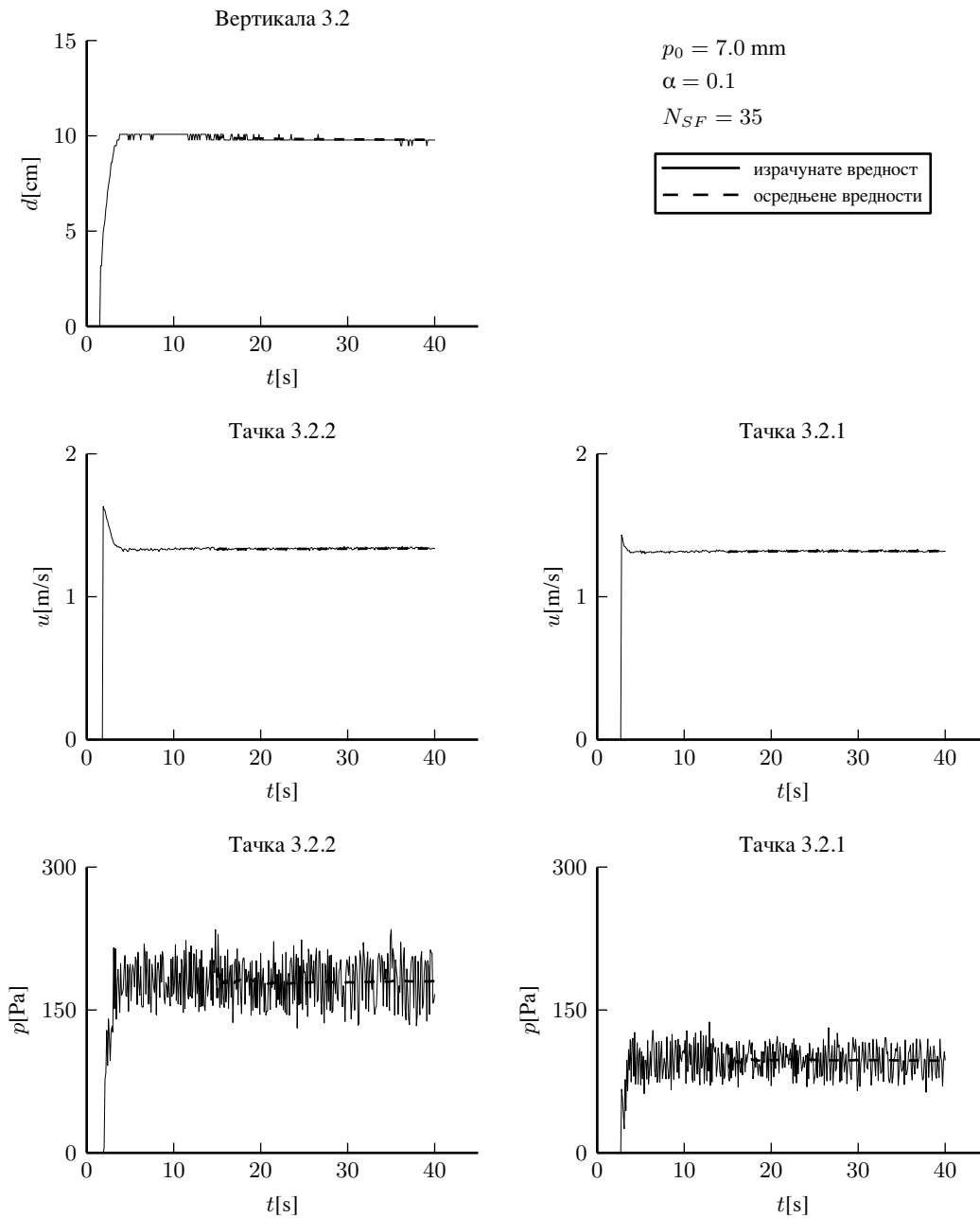
Прилог А.6: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пре-сека 1 за случај када се користи вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ )



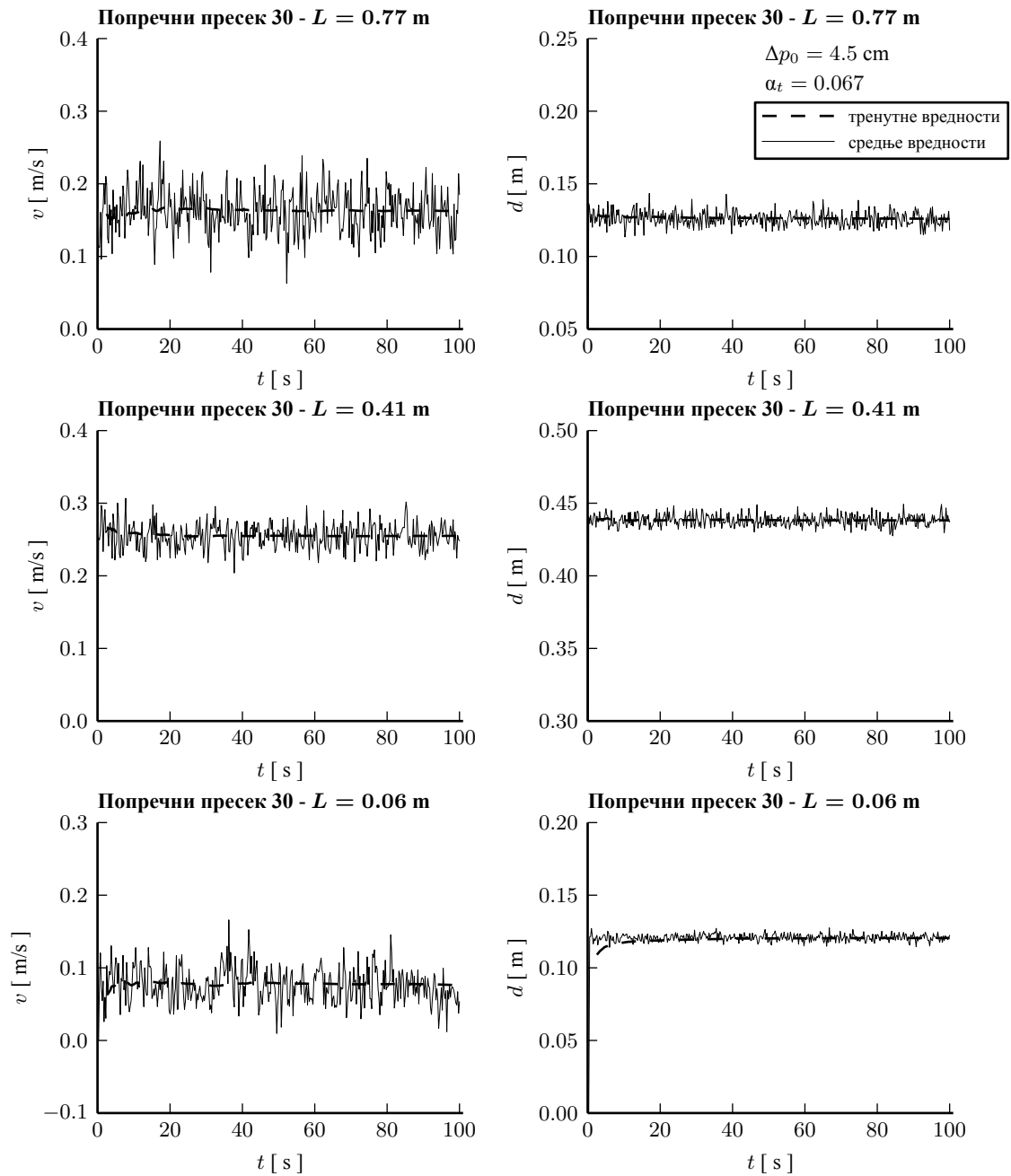
Прилог А.7: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пресека 2 за случај када се користи вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ )



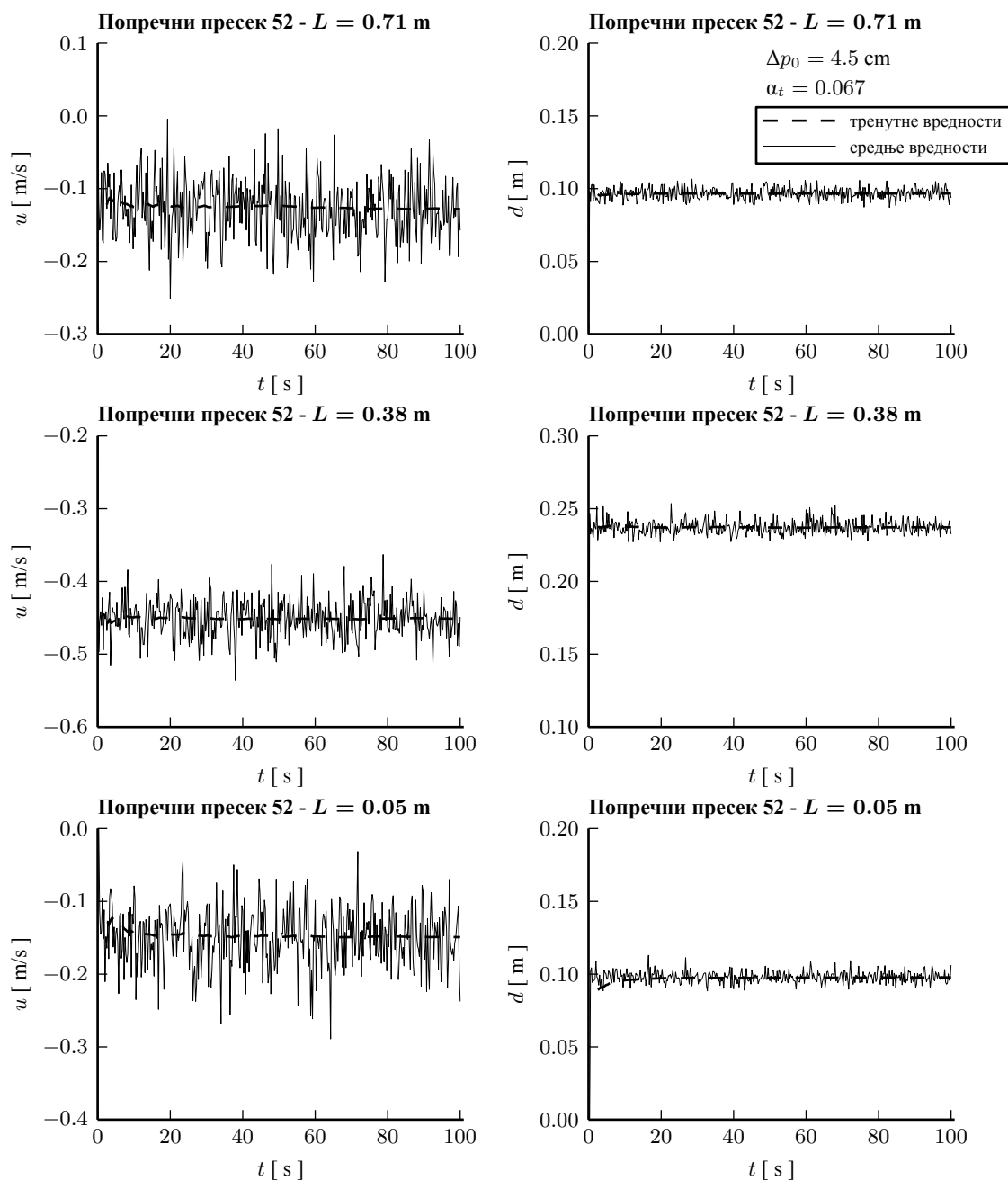
Прилог А.8: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пре-сека 3 за случај када се користи вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ )



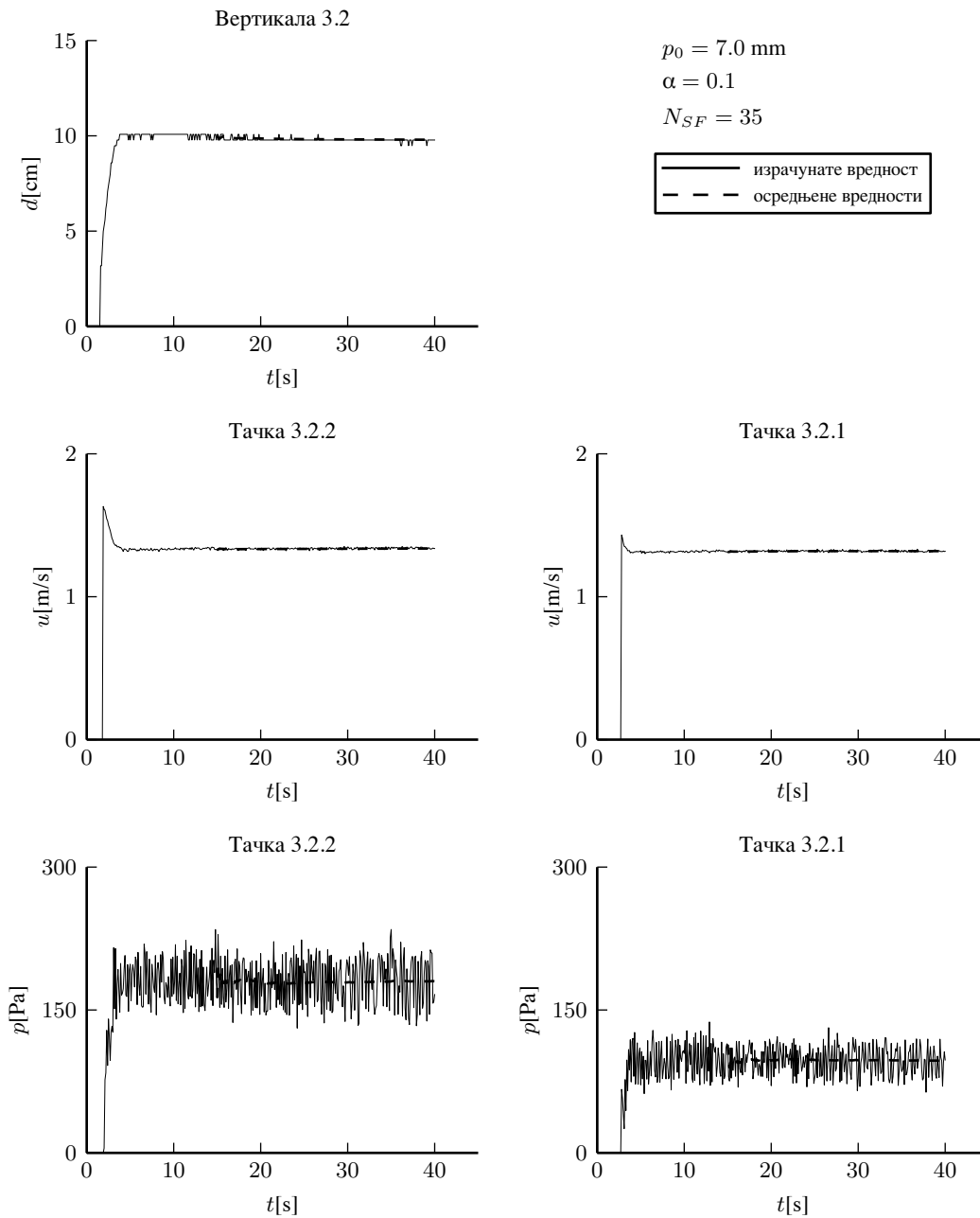
Прилог А.9: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



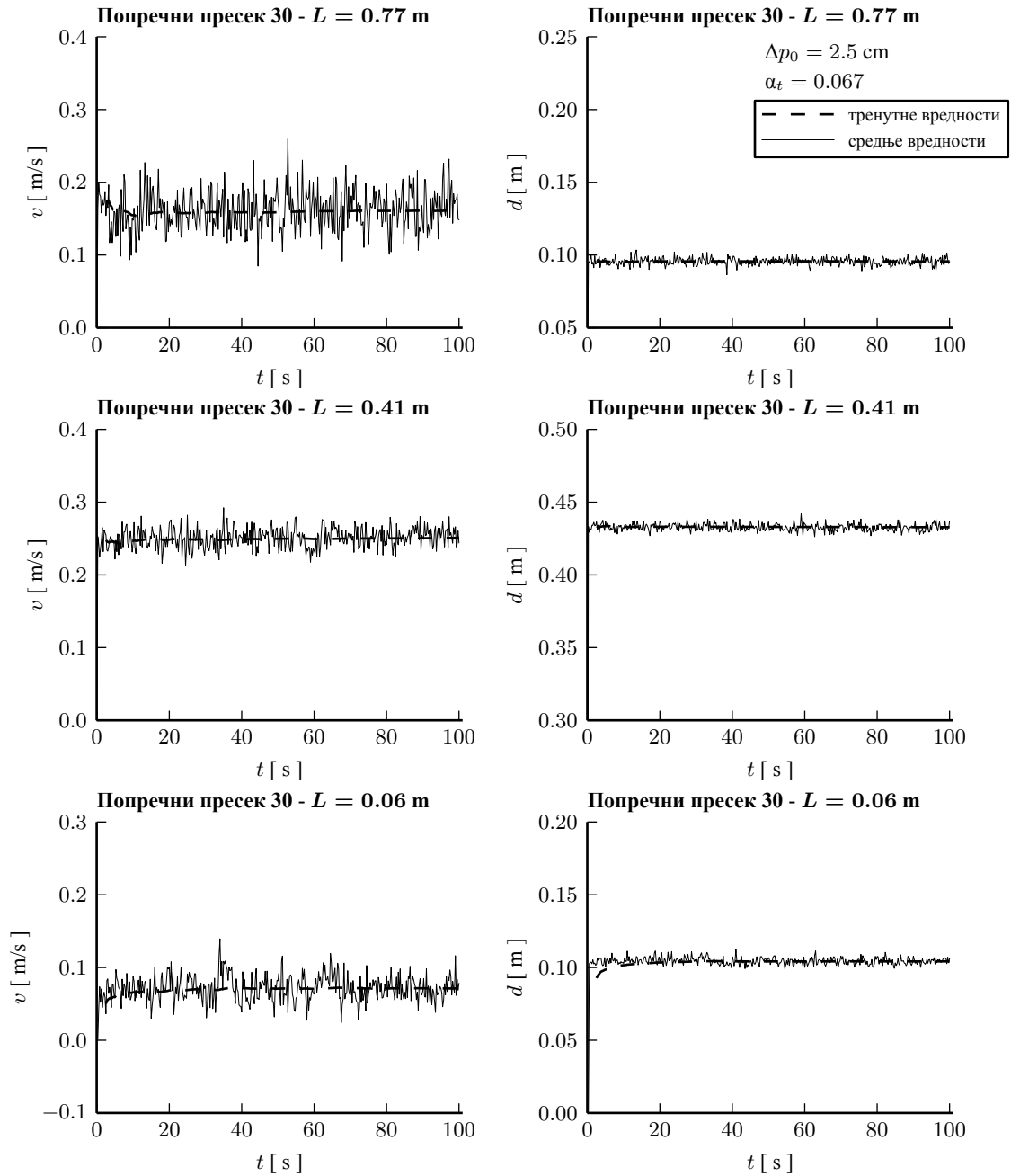
Прилог А.10: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



Прилог А.11: Промене дубине, брзине и притиска у току прорачуна на средини пре-сека 3 за случај када се користи вештачка вискозност ( $\alpha = 0.1$ )

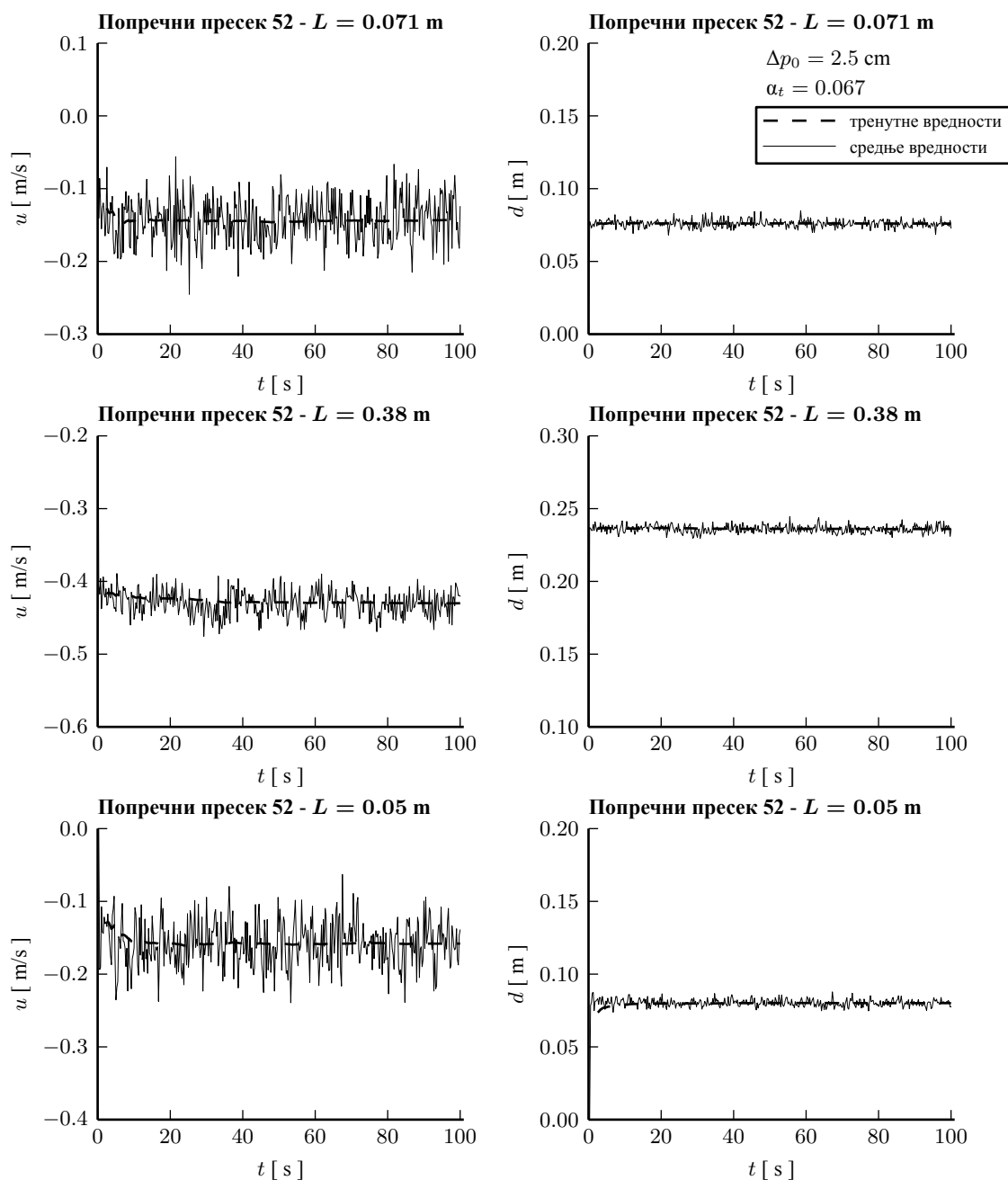


Прилог А.12: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 2.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )

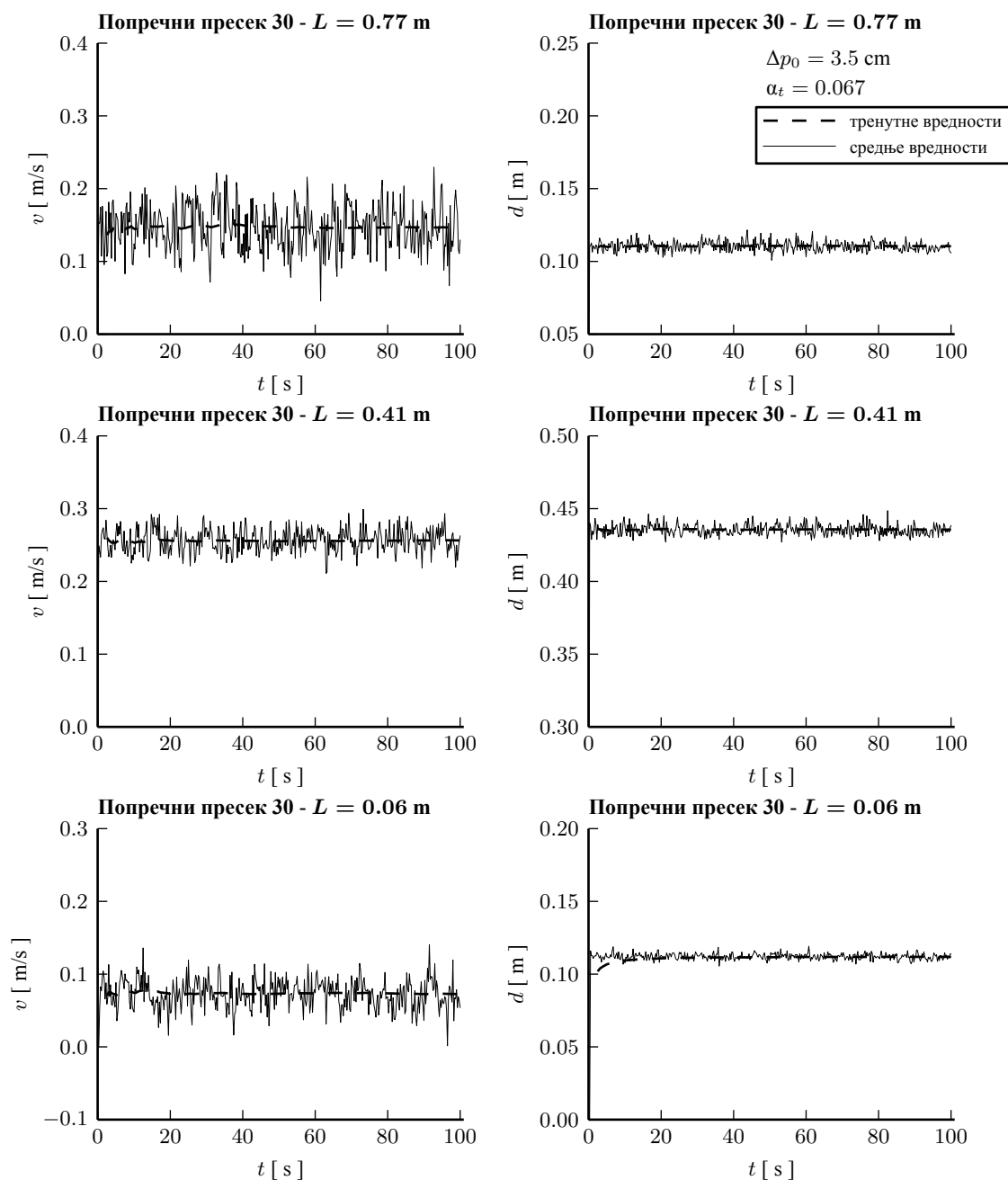




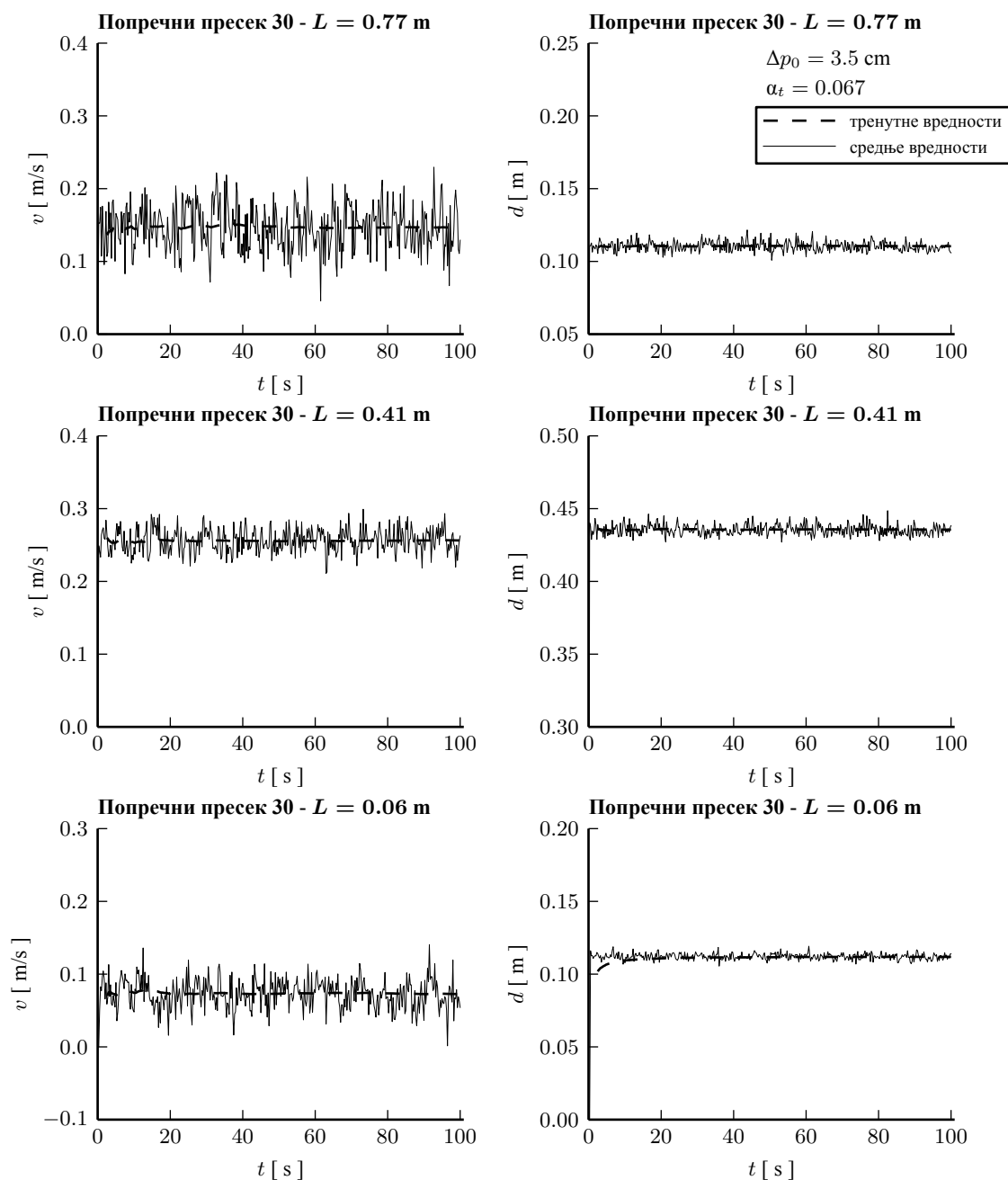
Прилог А.13: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 2.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



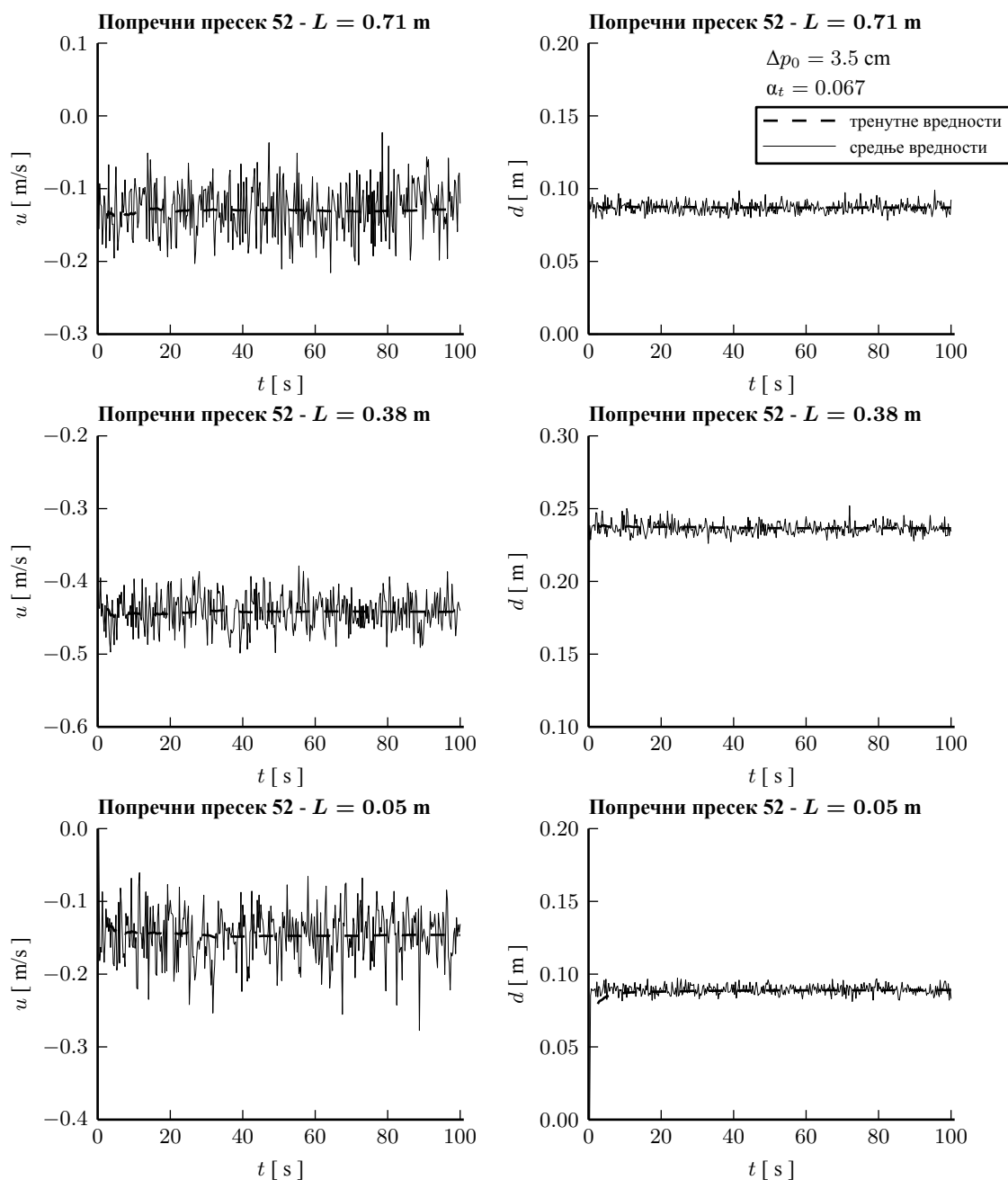
Прилог А.14: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 3.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



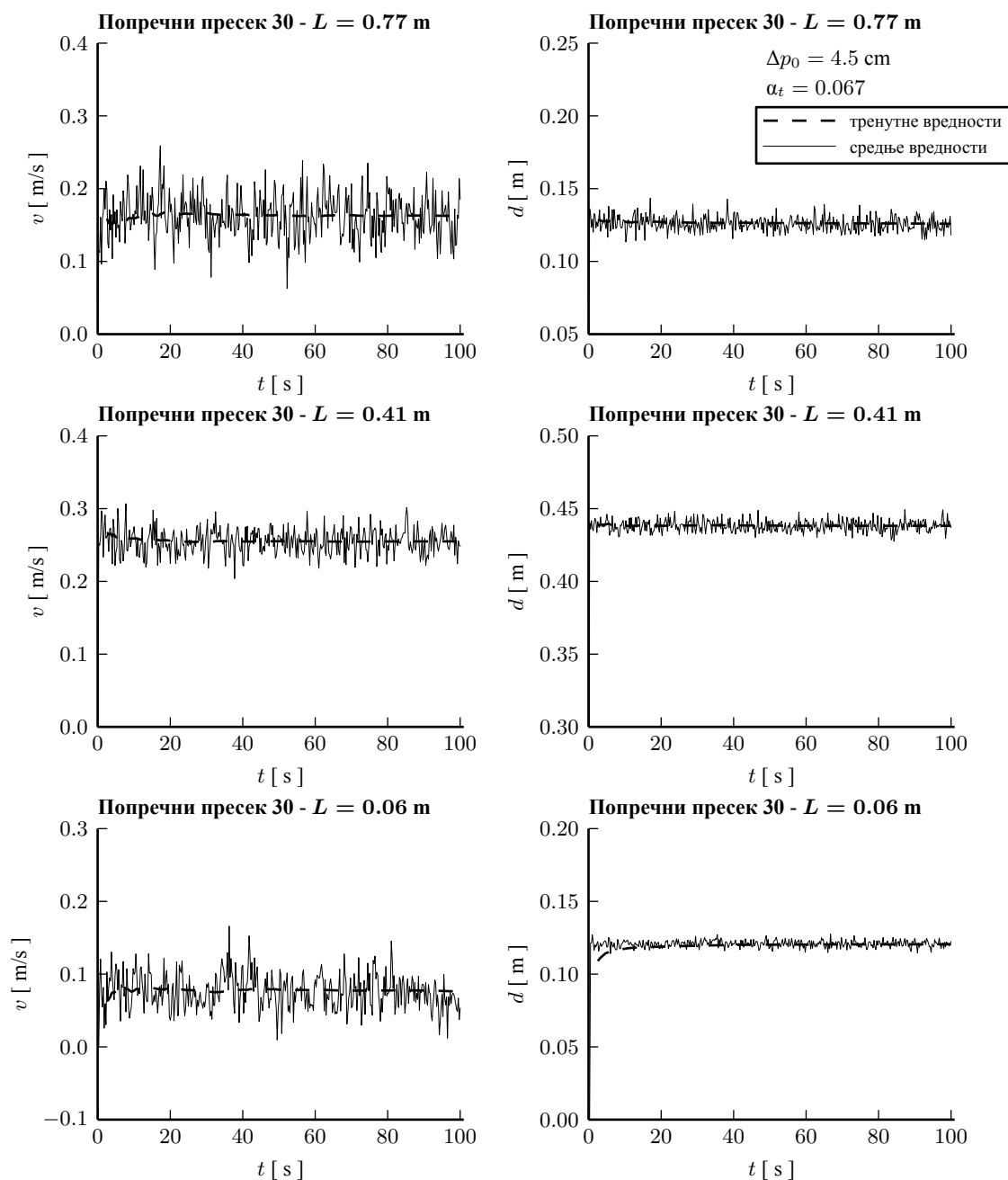
Прилог А.15: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 3.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



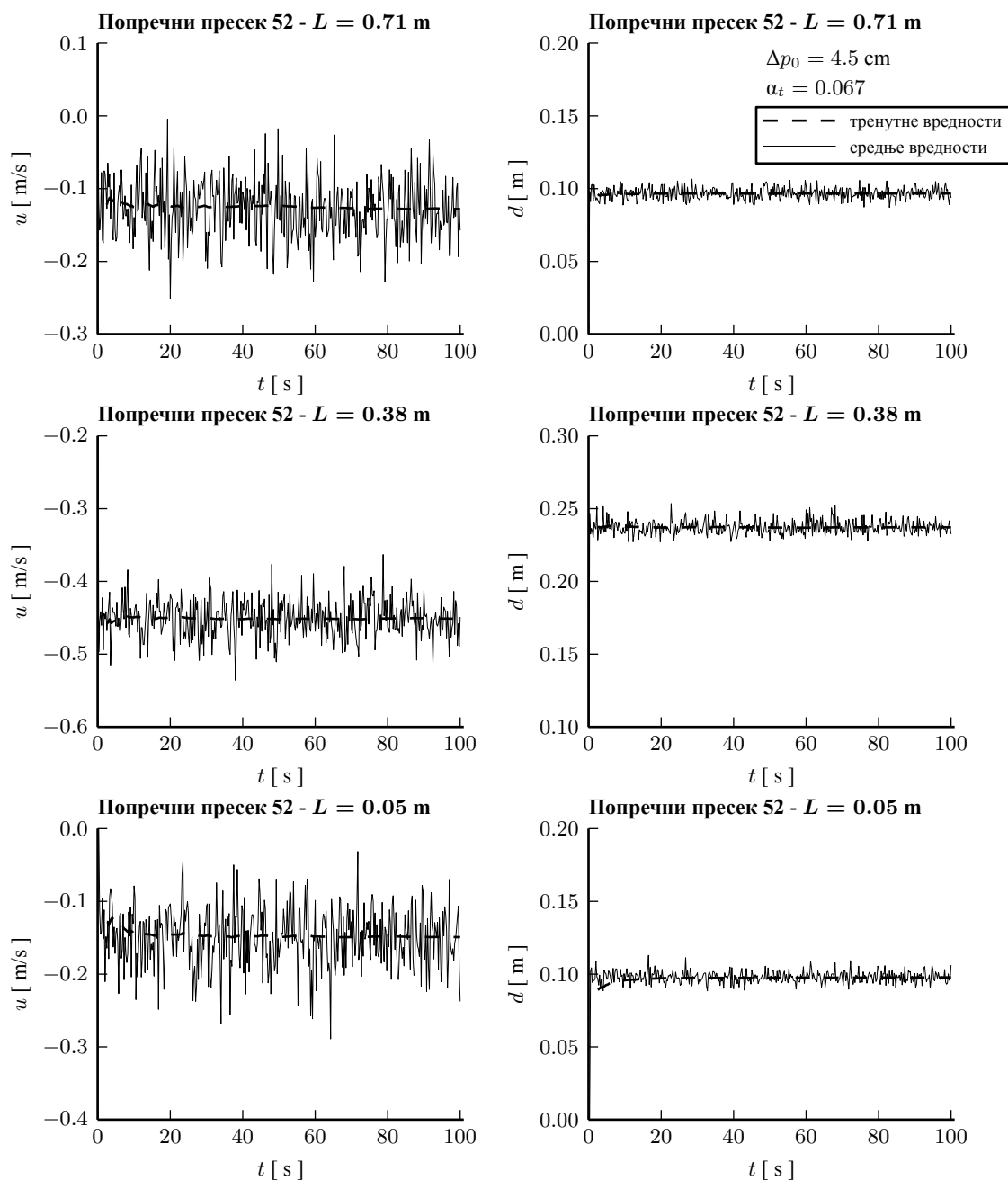
Прилог А.16: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 3.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



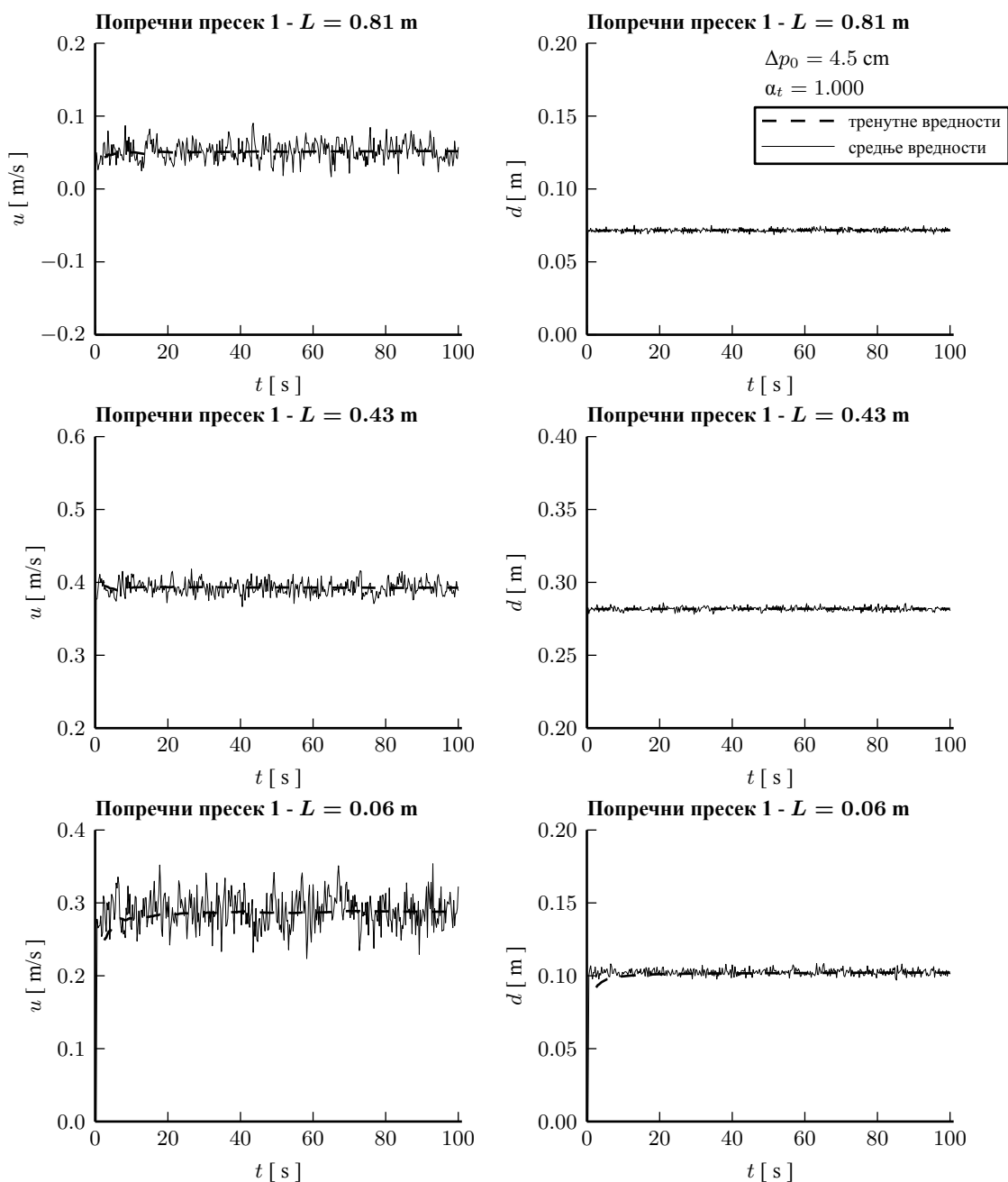
Прилог А.17: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



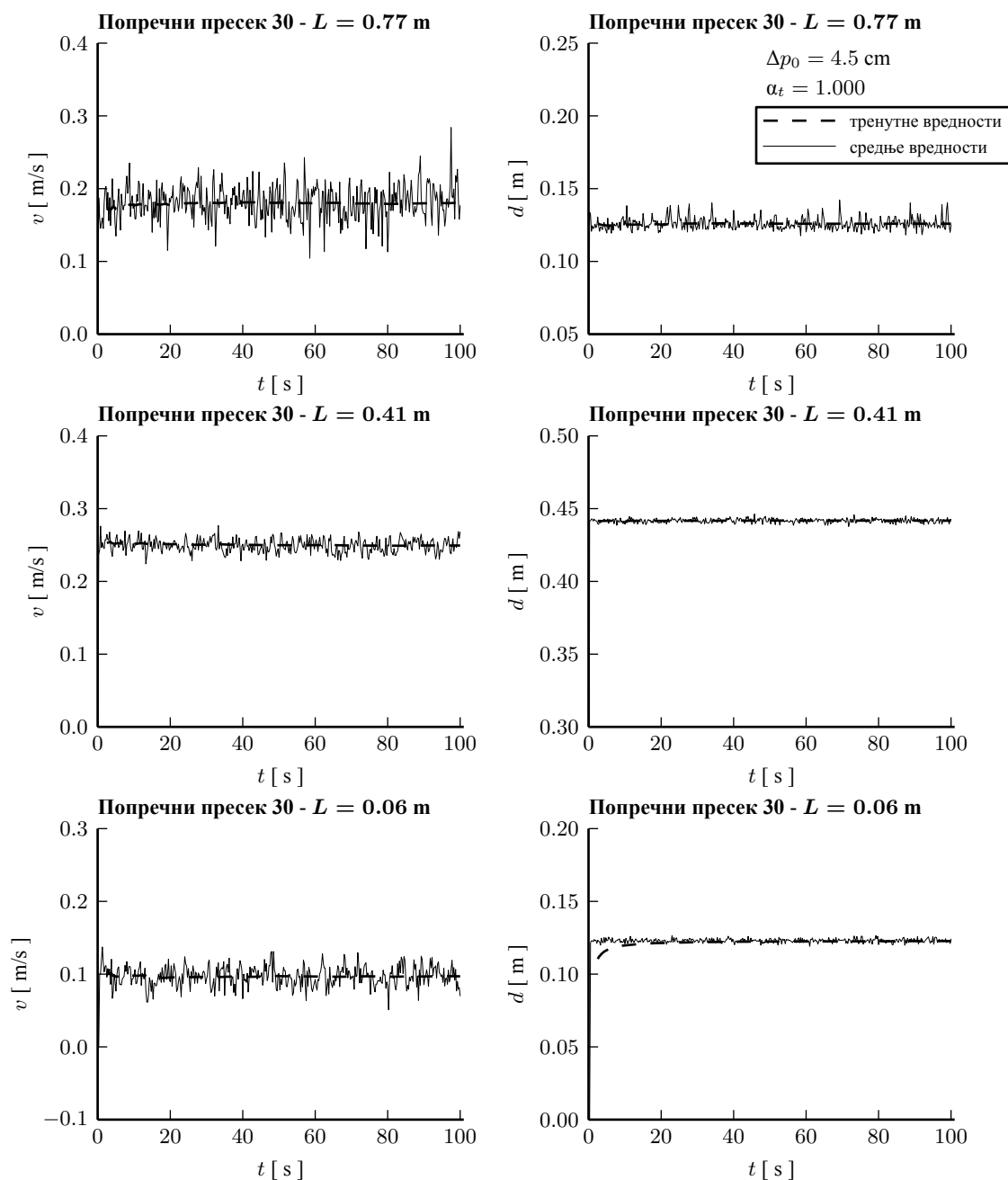
Прилог А.18: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



Прилог А.19: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 1.000$ )

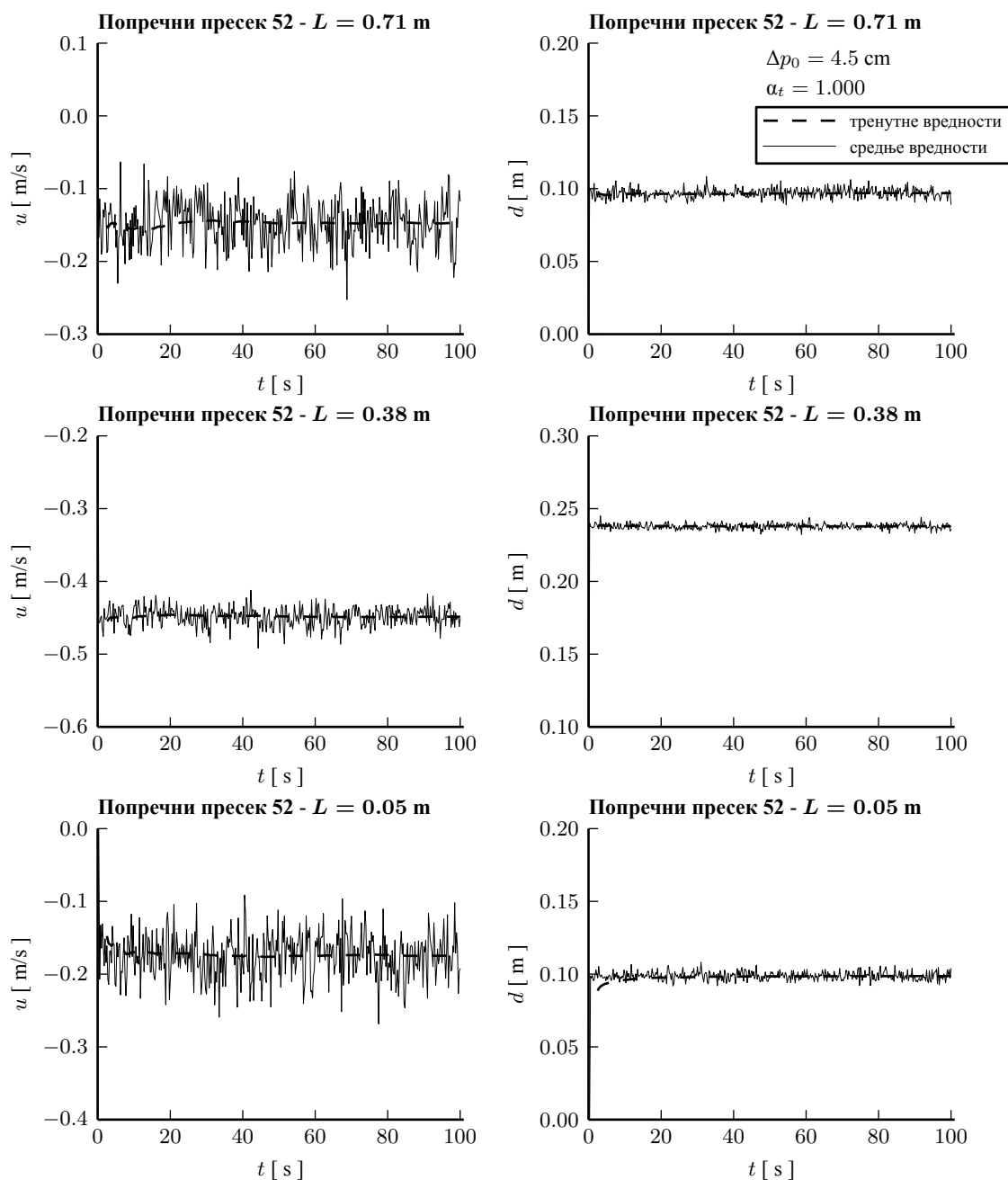


Прилог А.20: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 1.000$ )

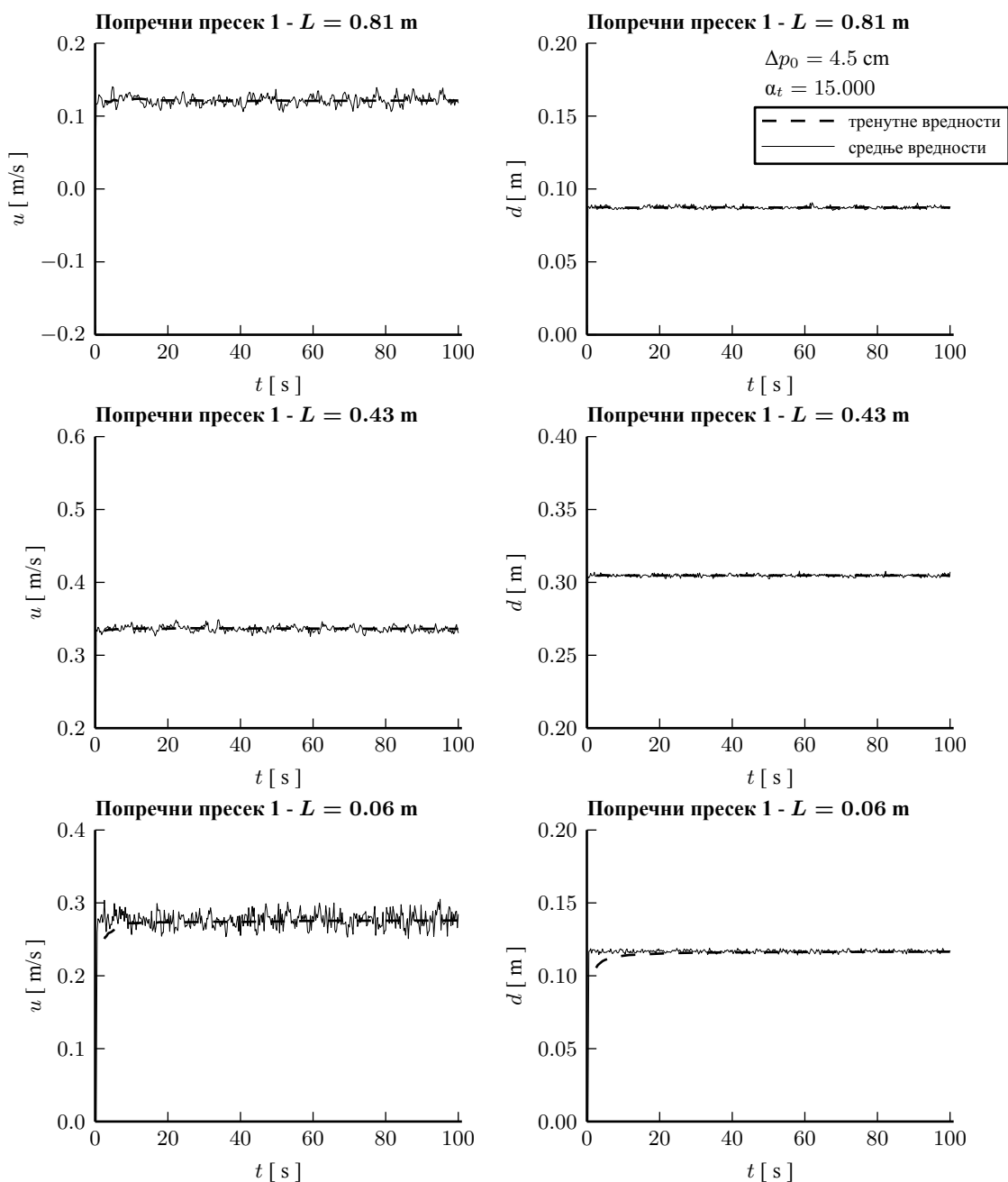




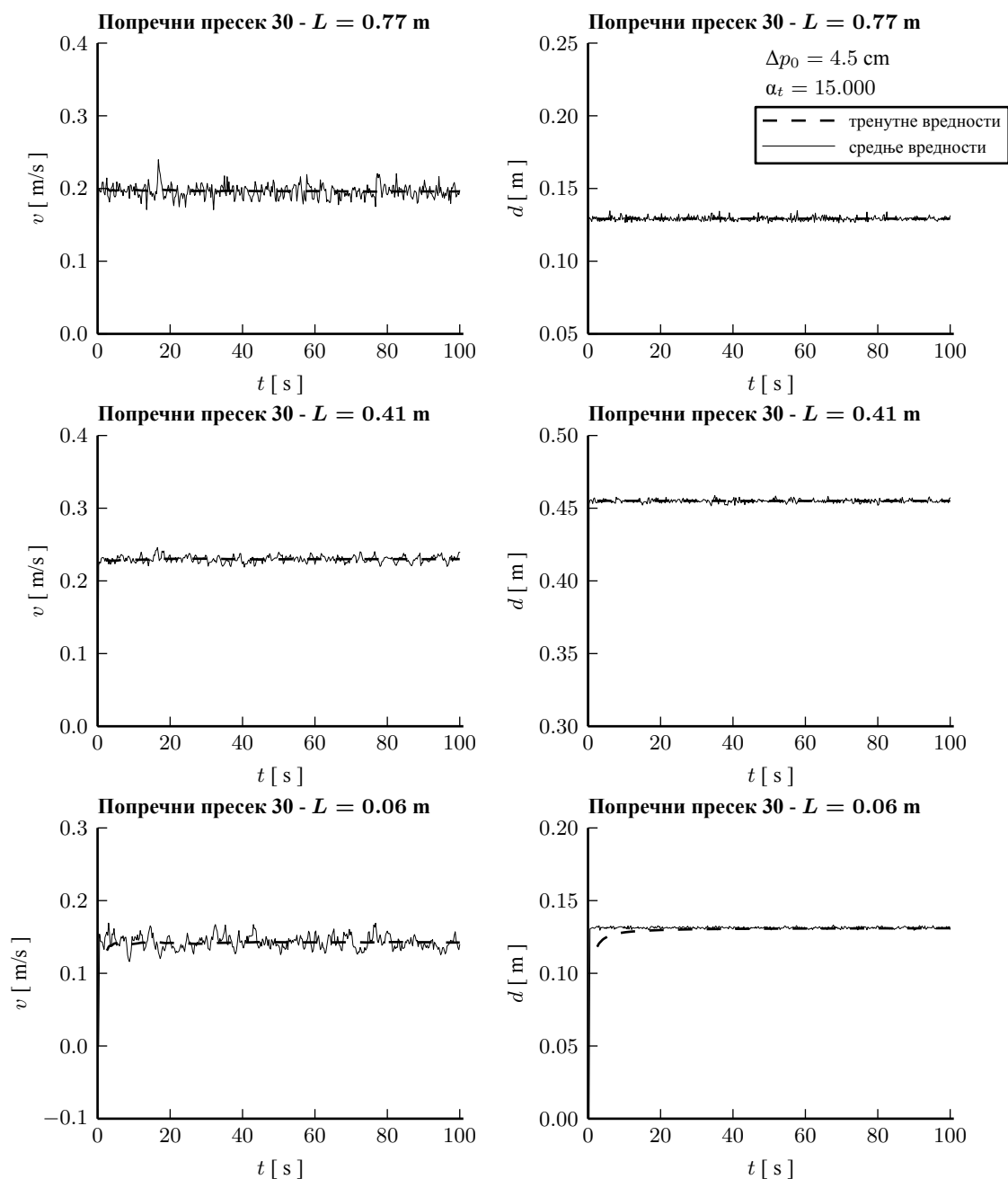
Прилог А.21: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 1.000$ )



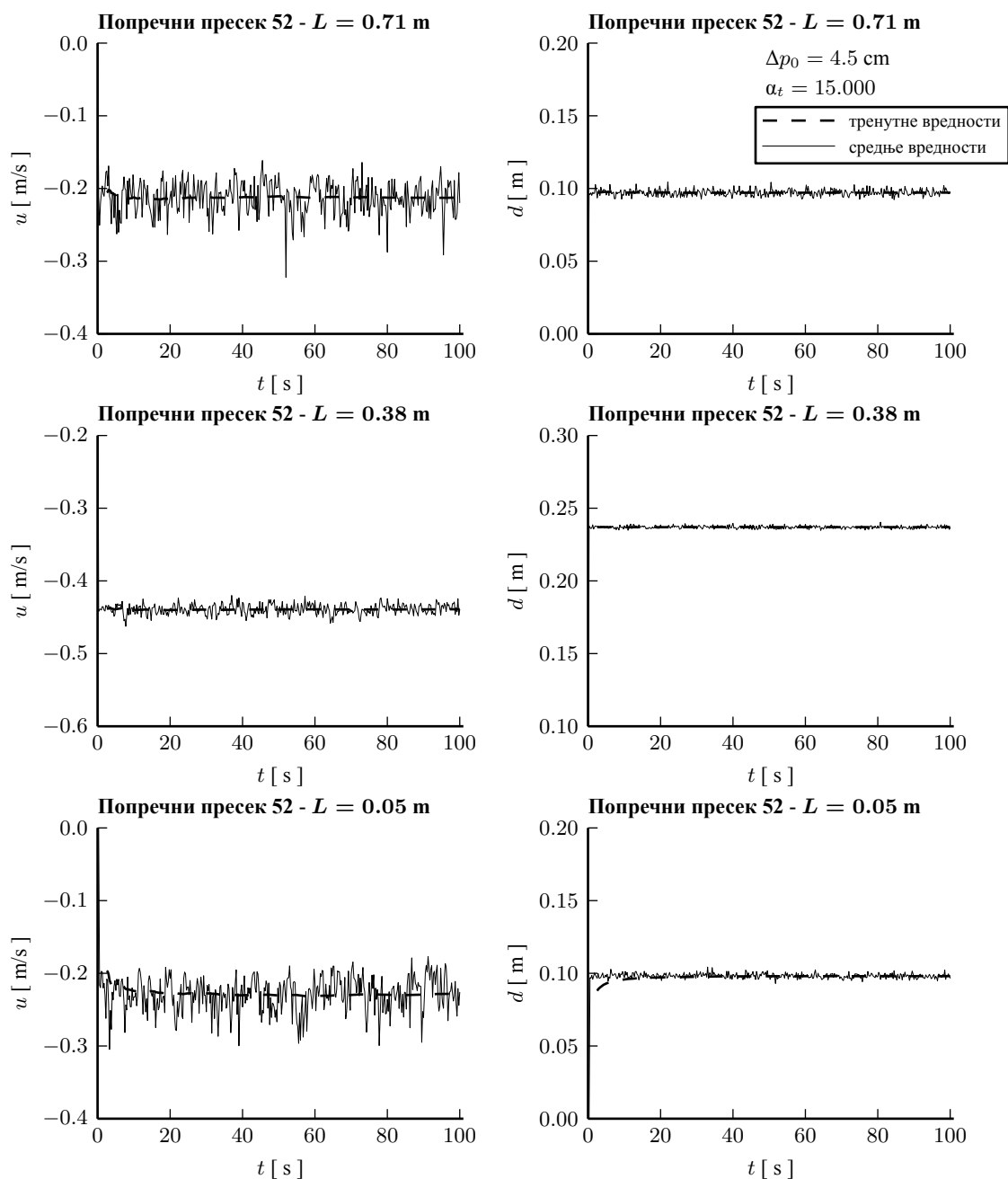
Прилог А.22: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 15.000$ )



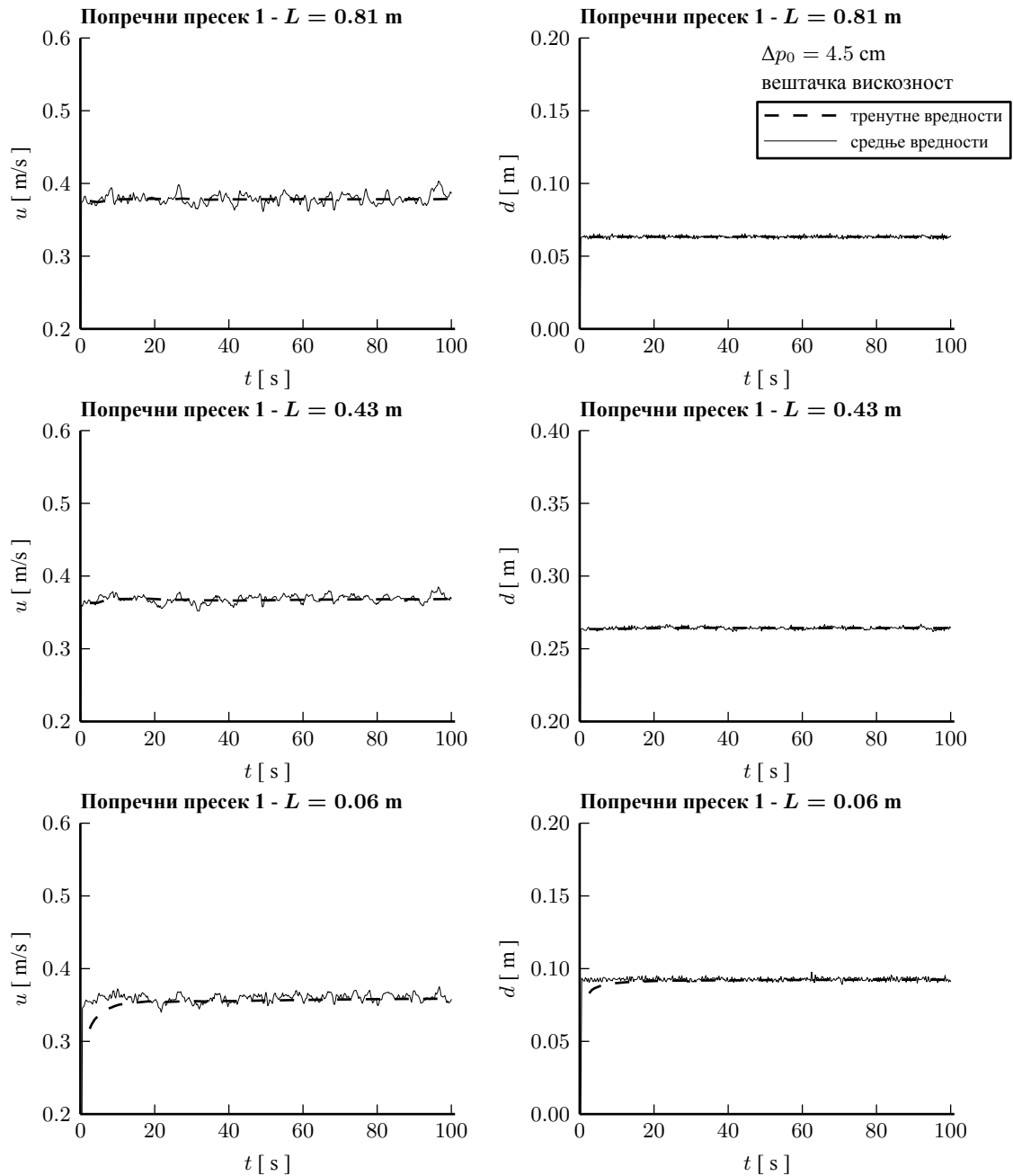
Прилог А.23: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5 \text{ cm}$  и  $\alpha_t = 15.000$ )



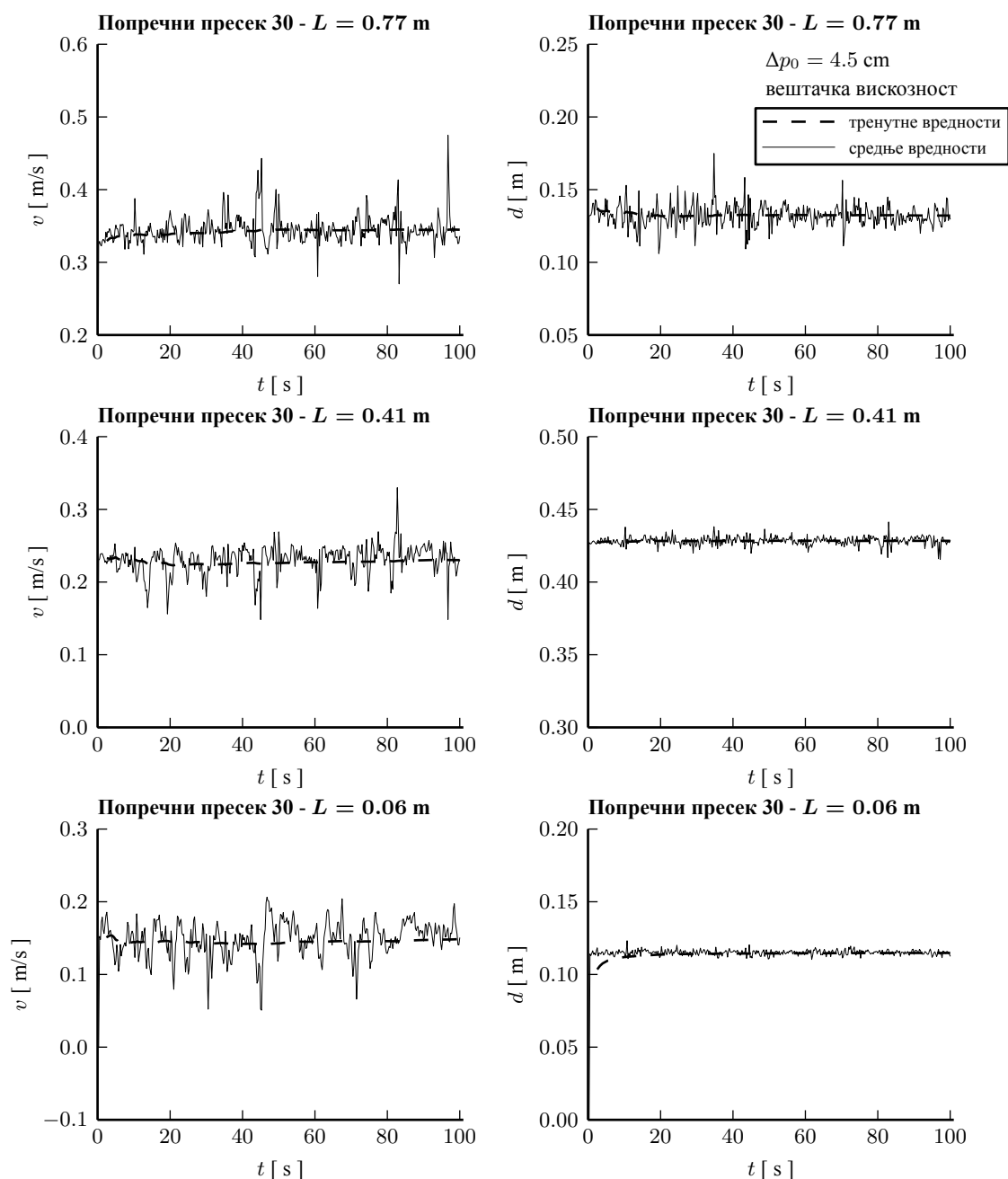
Прилог А.24: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5 \text{ cm}$  и  $\alpha_t = 15.000$ )



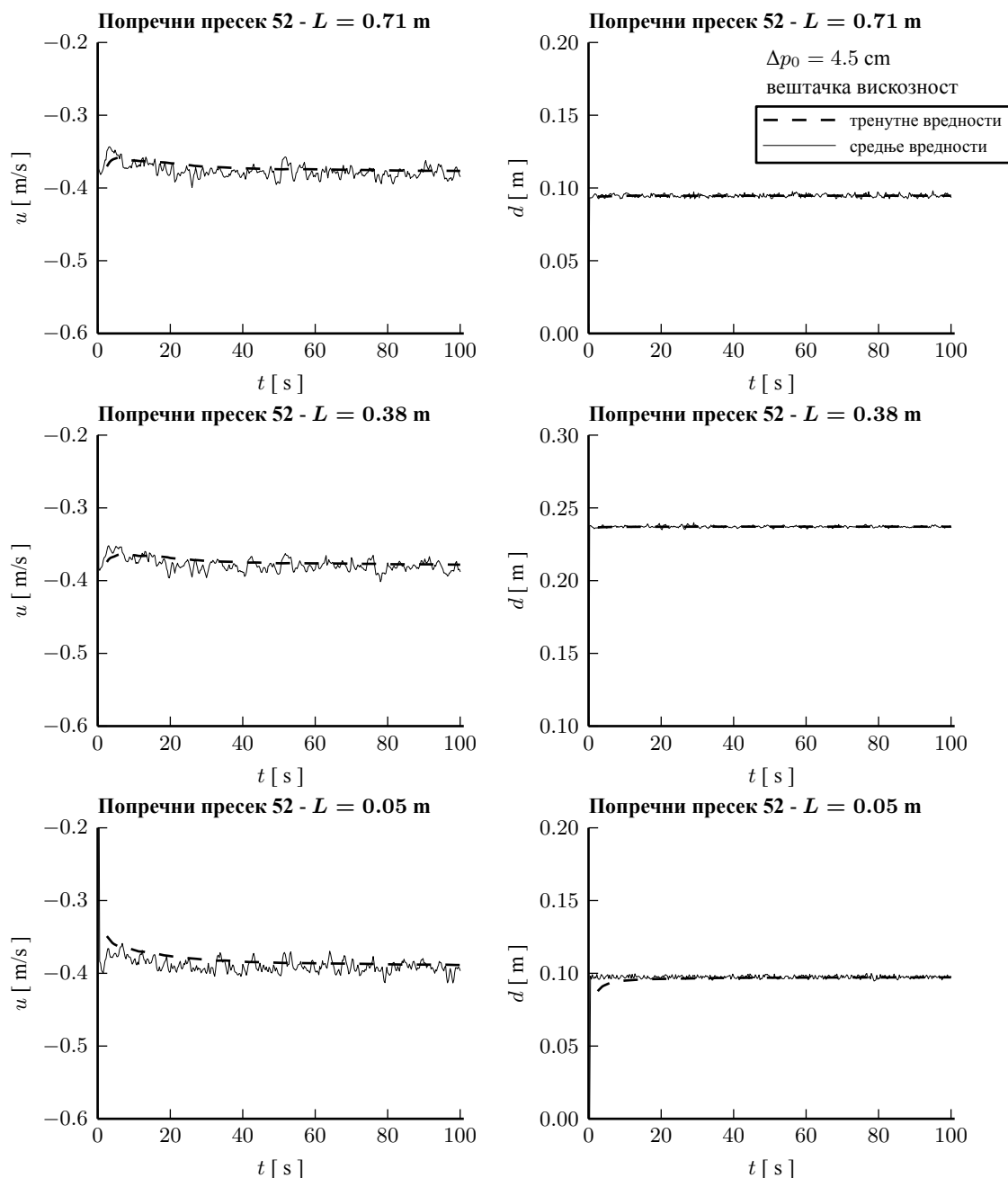
Прилог А.25: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 1 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и вештачка вискозност)



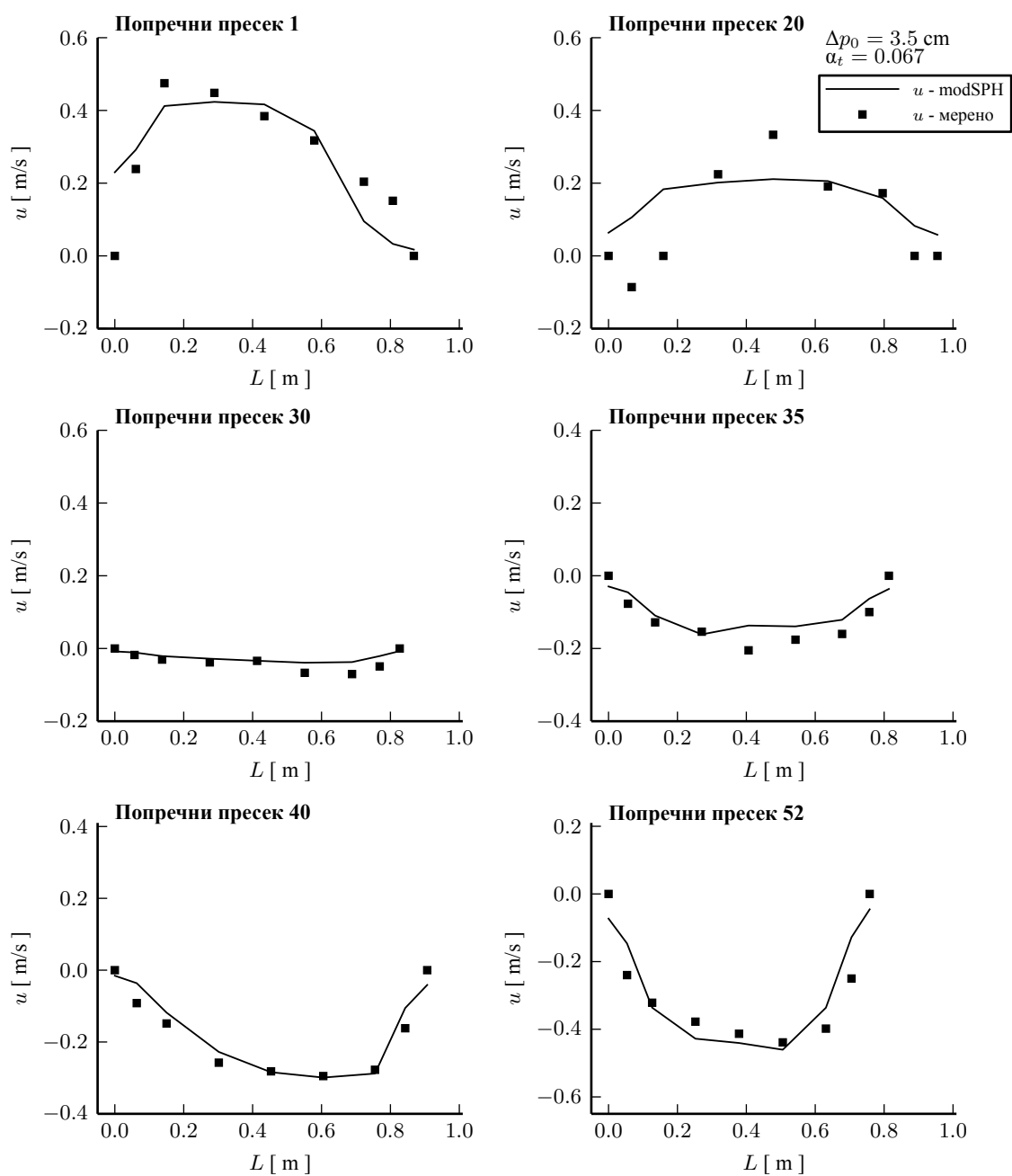
Прилог А.26: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 30 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и вештачка вискозност)



Прилог А.27: Промене брзине и дубине у току последњих 100 секунди симулације у карактеристичним вертикалама попречног пресека 52 ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и вештачка вискозност)

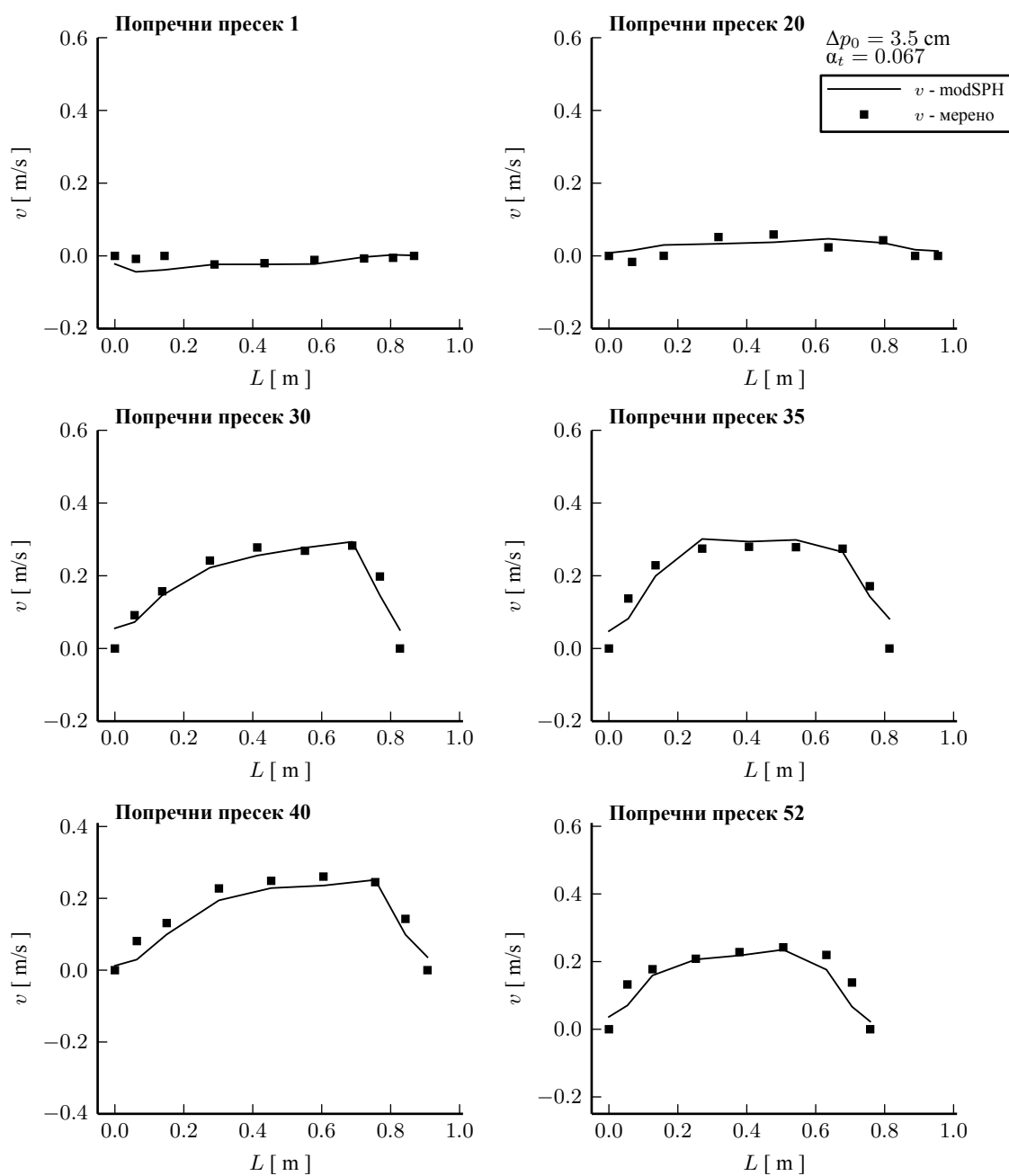


Прилог А.28: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $u$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 3.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )

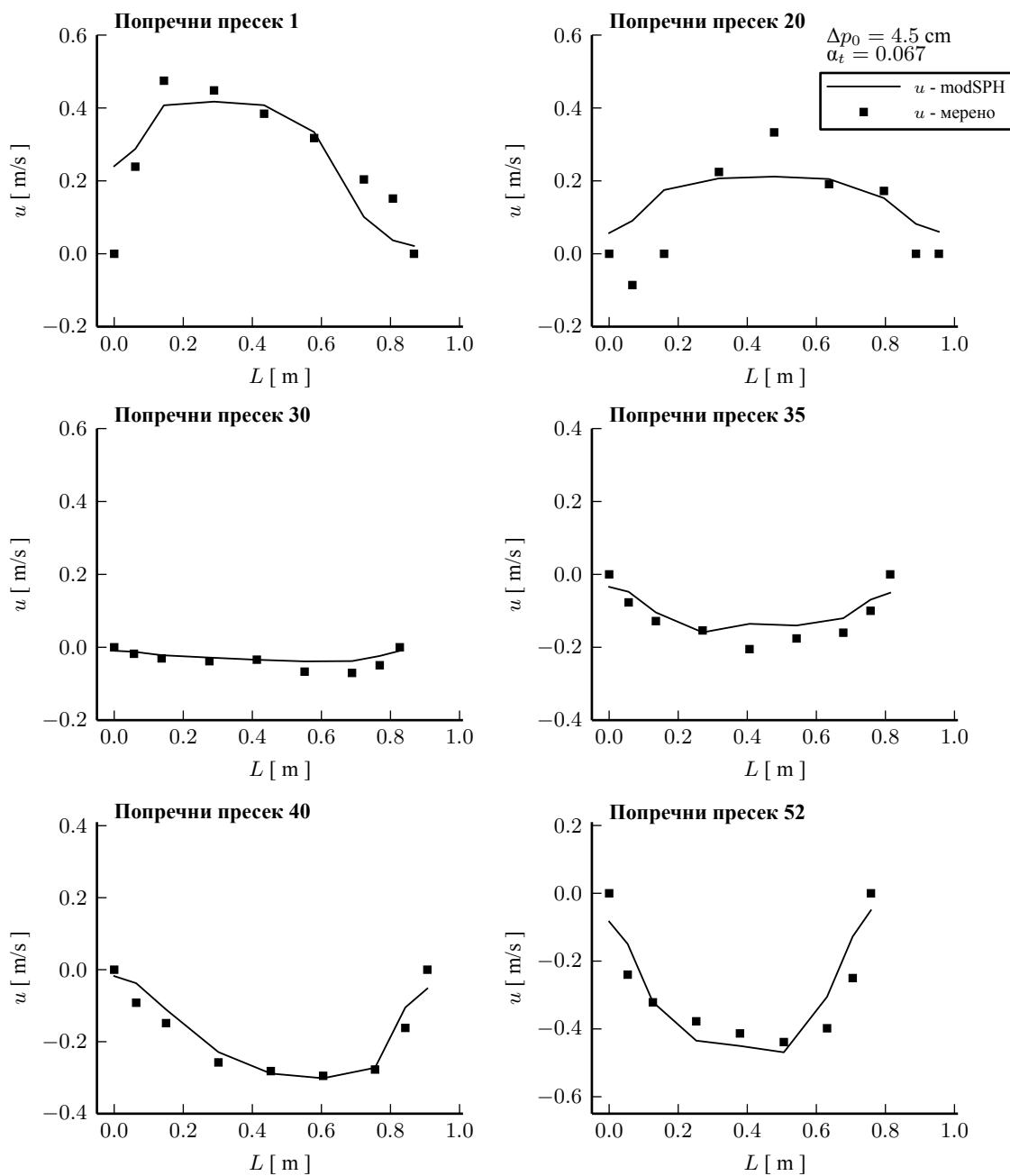




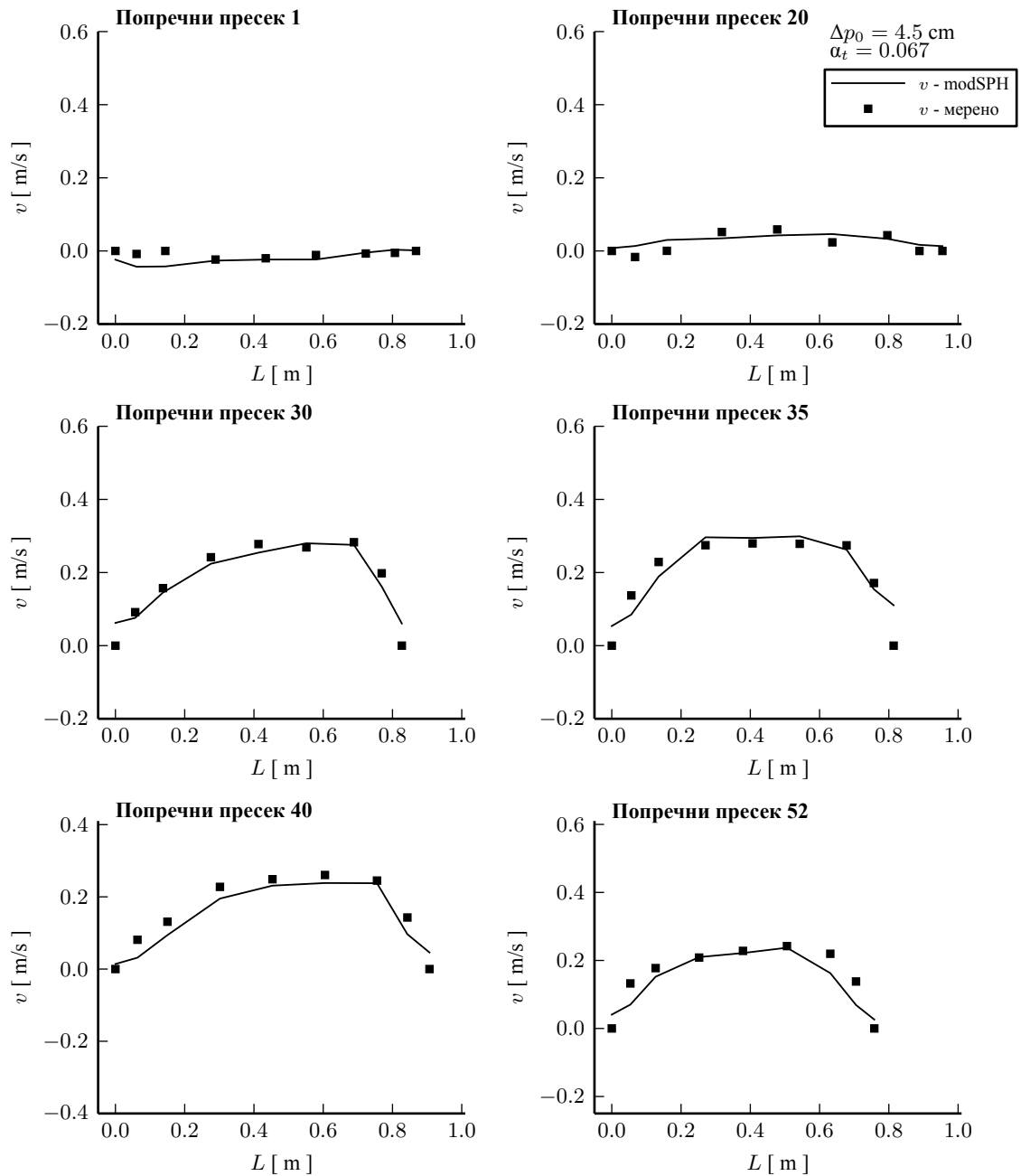
Прилог А.29: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $v$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 3.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



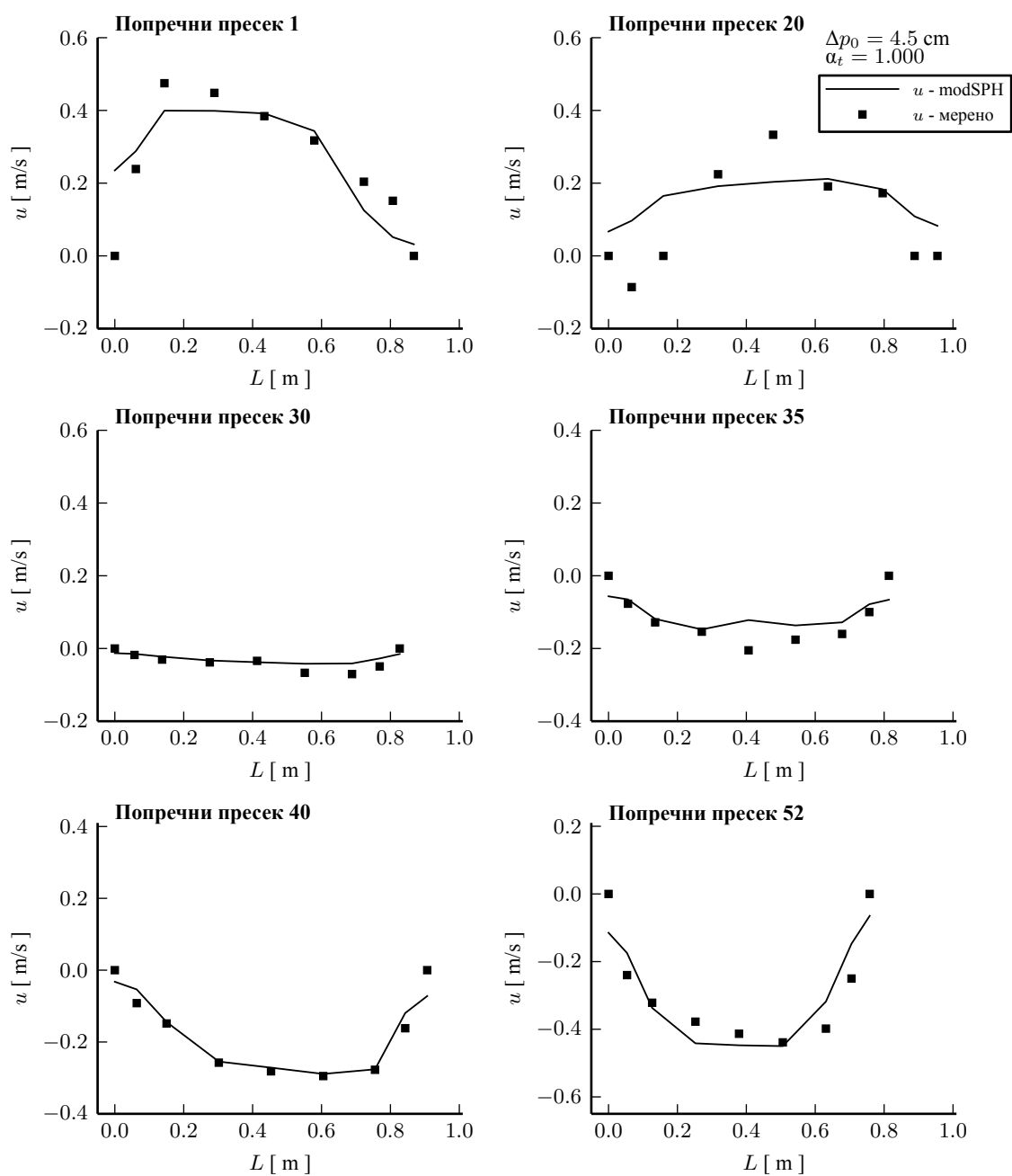
Прилог А.30: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $u$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



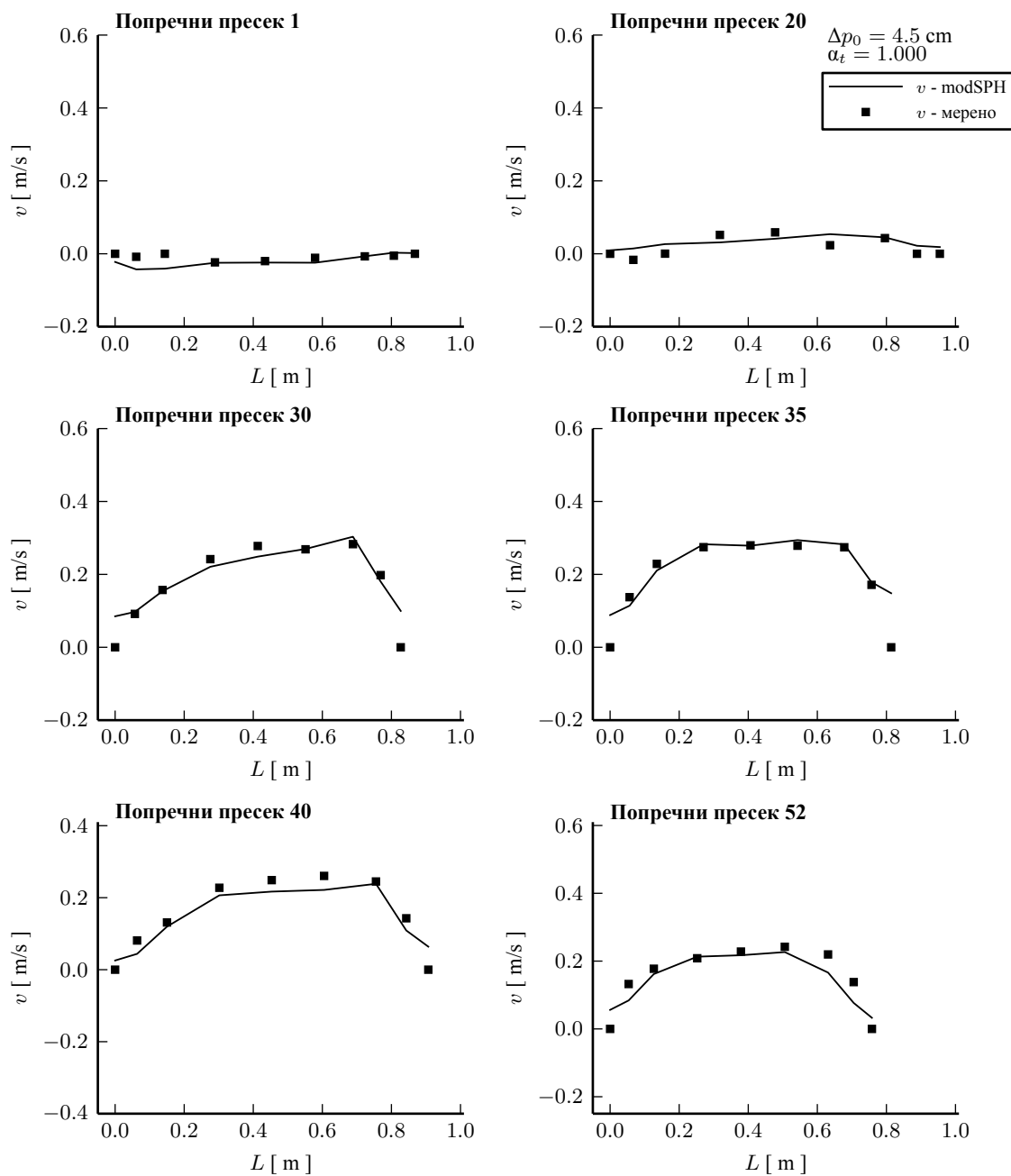
Прилог А.31: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $v$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 0.067$ )



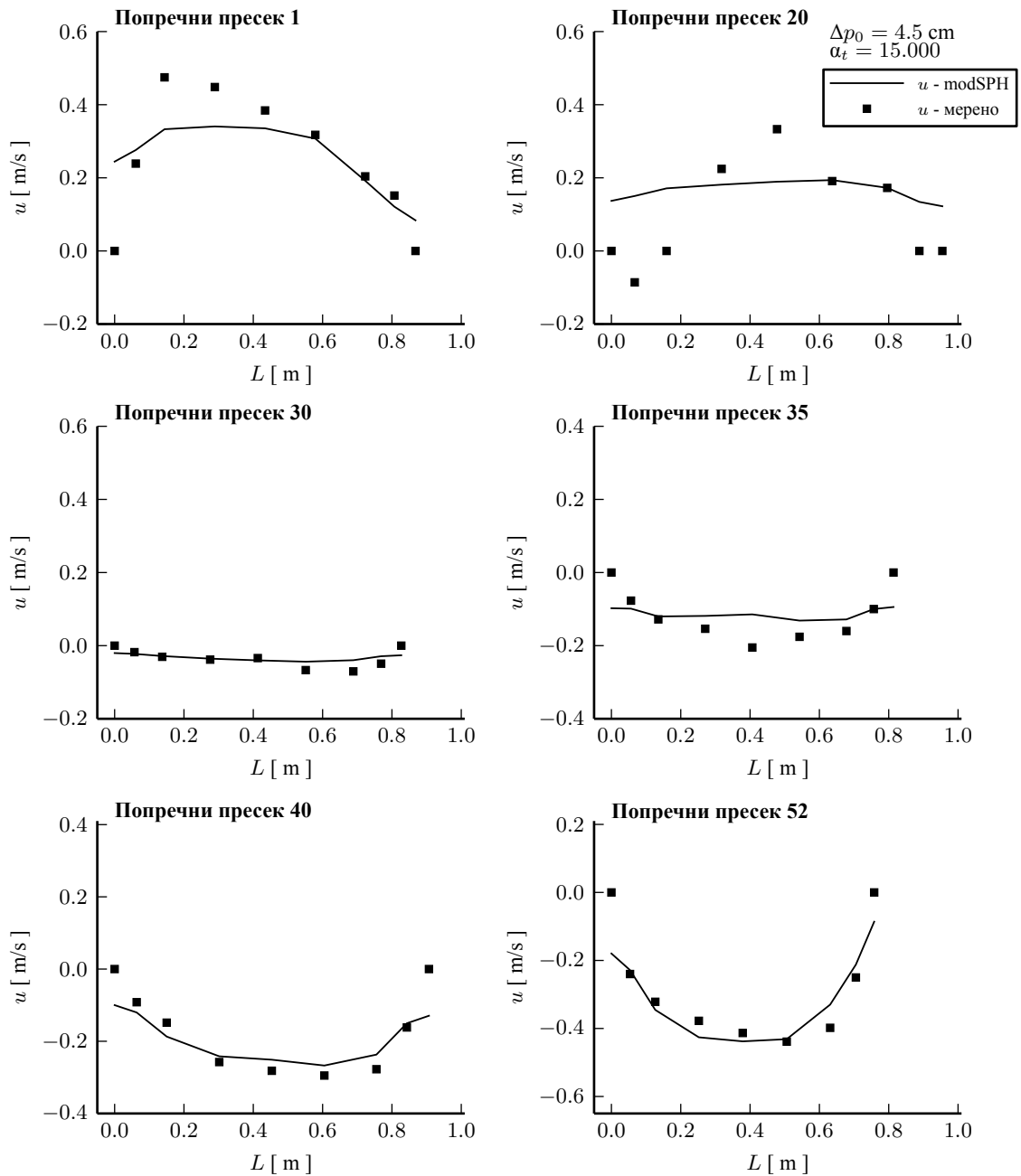
Прилог А.32: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $u$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 1.000$ )



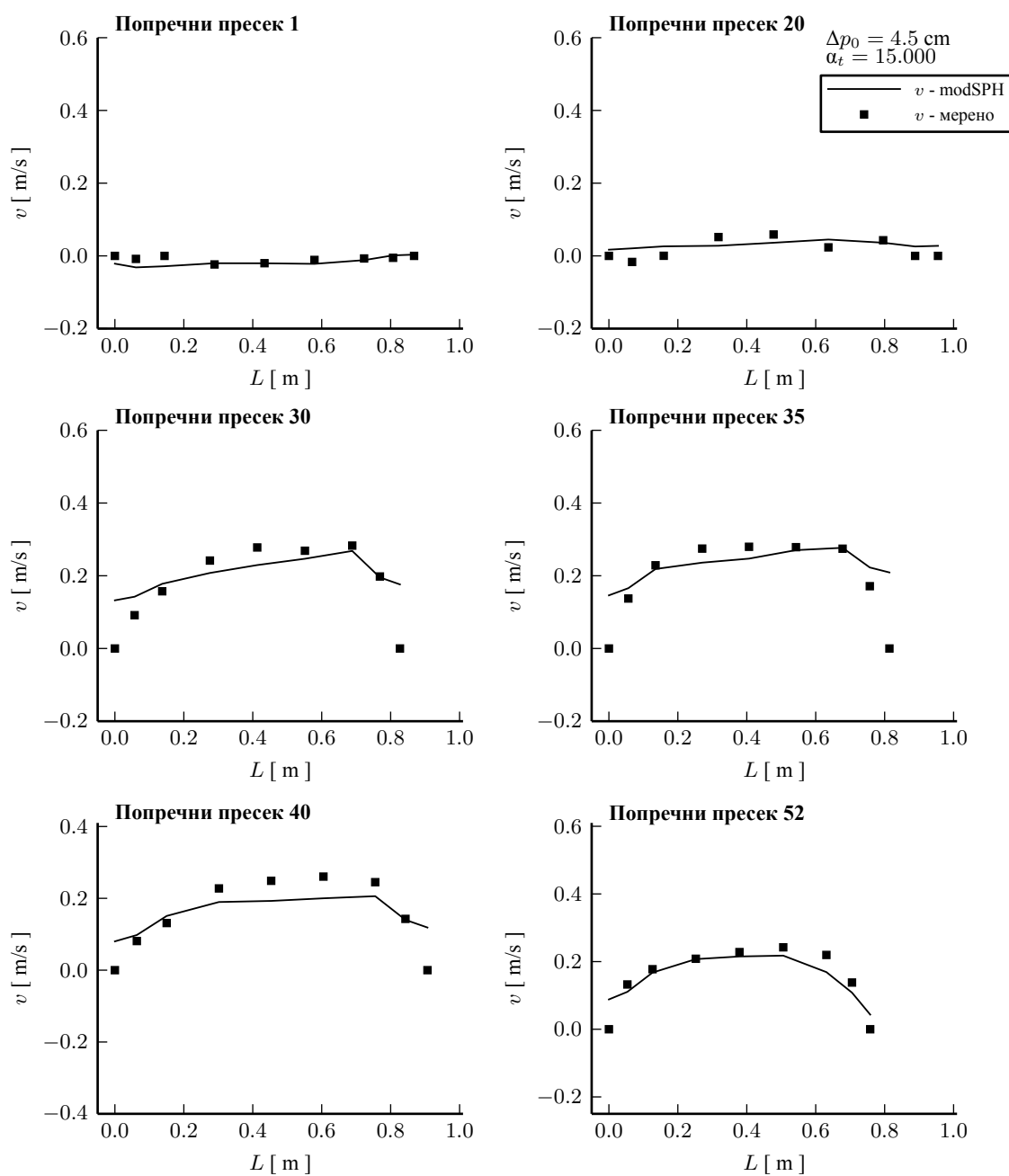
Прилог А.33: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $v$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 1.000$ )



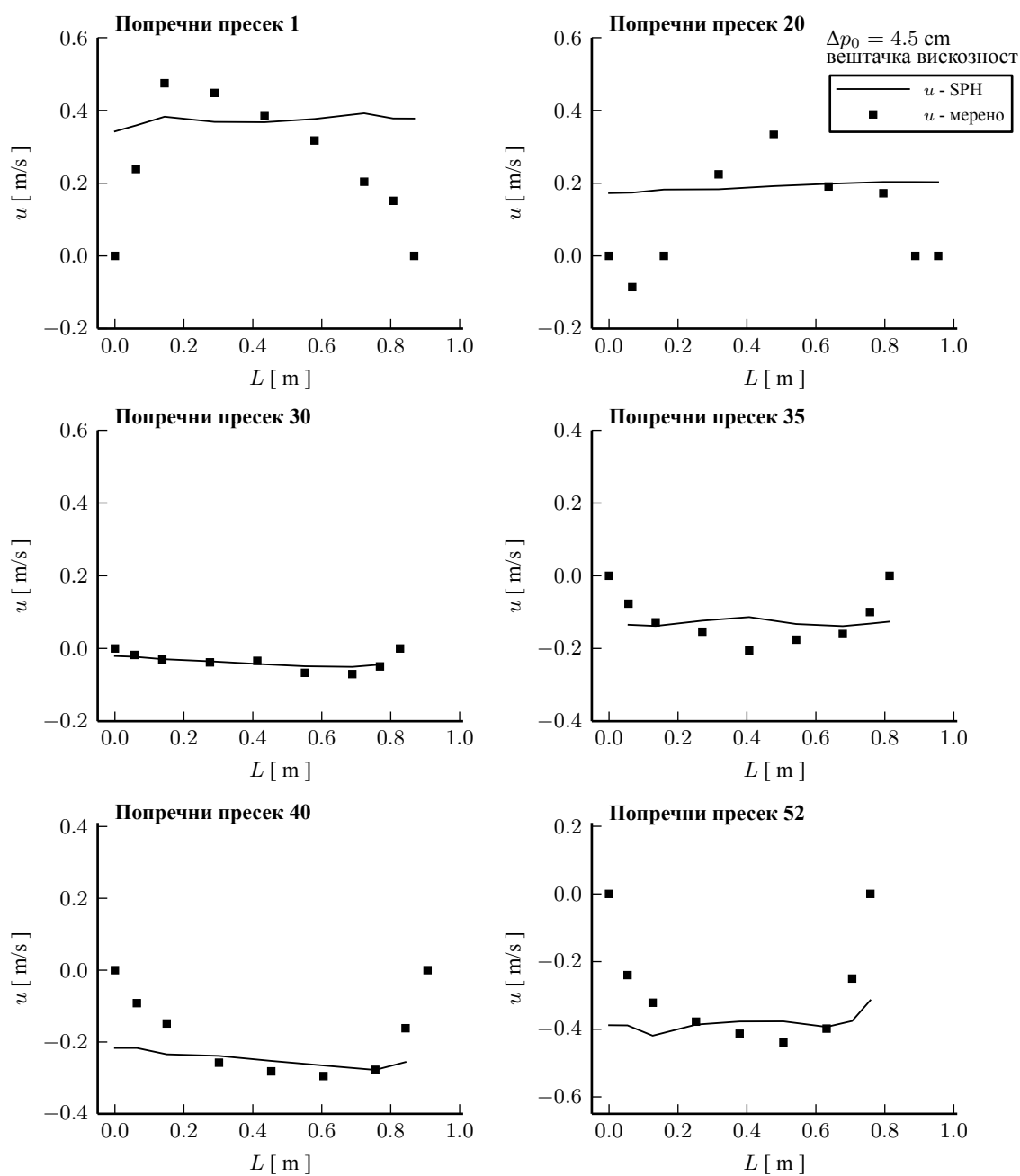
Прилог А.34: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $u$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 15.000$ )



Прилог А.35: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $v$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и  $\alpha_t = 15.000$ )

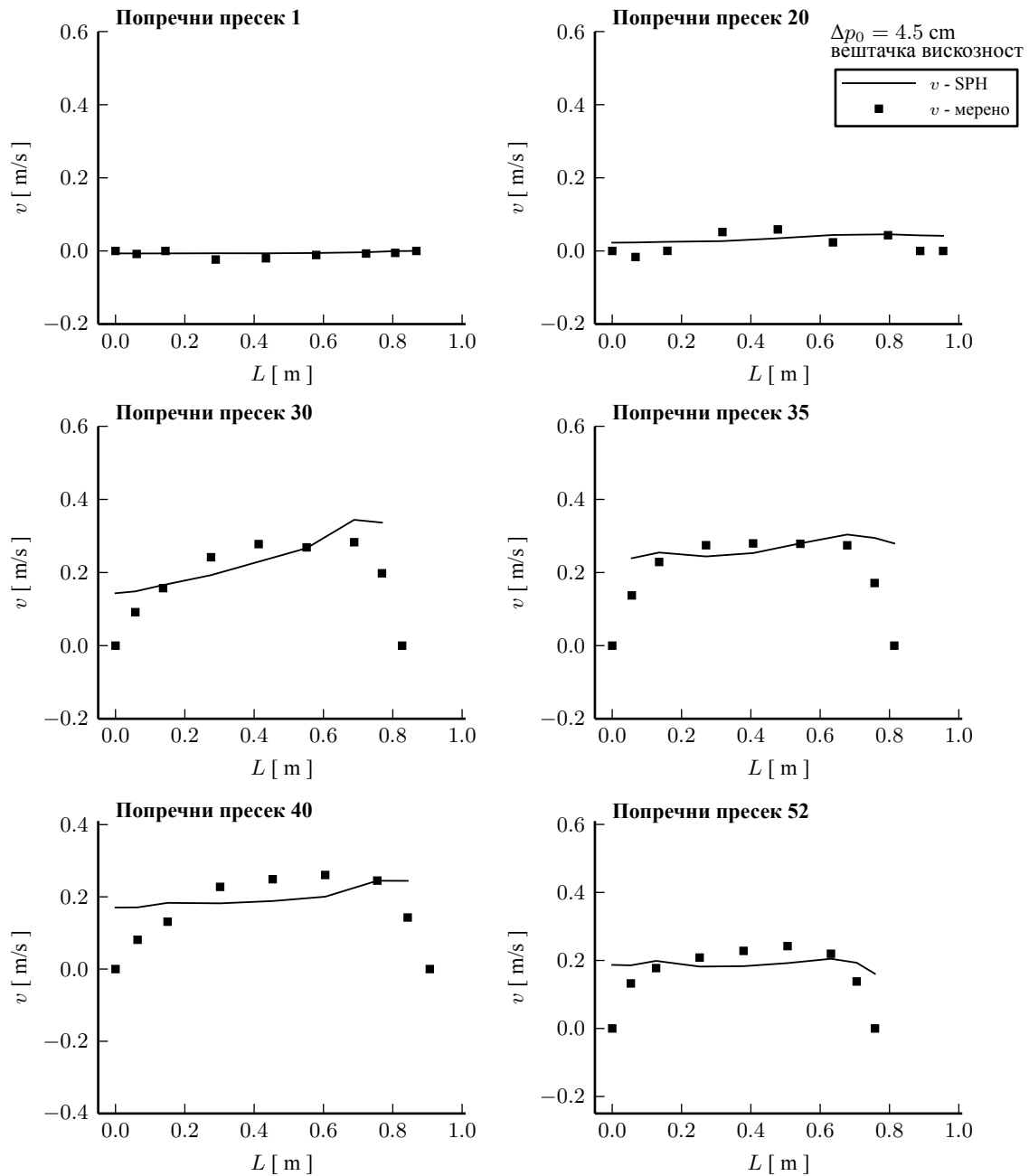


Прилог А.36: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $u$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и вештачка вискозност)





Прилог А.37: Поређење измерених ([29] и [34]) и срачунатих вредности брзине  $v$  у шест изабраних попречних пресека ( $\Delta p_0 = 4.5$  cm и вештачка вискозност)



## **Б. Табеларни прилози**

Прилог Б.1: Утицај параметра  $c^*$  на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н1

	$c^* = 10$	$c^* = 20$	$c^* = 40$
$\alpha = 0.00$	1.01	1.01	/
$\alpha = 0.05$	1.01	1.01	1.08

Прилог Б.2: Утицај параметра  $c^*$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н1

	$c^* = 10$	$c^* = 20$	$c^* = 40$
$\alpha = 0.00$	0.01	0.01	/
$\alpha = 0.05$	0.01	0.02	0.09

Прилог Б.3: Утицај параметра  $c^*$  на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н2

	$c^* = 10$	$c^* = 20$	$c^* = 40$
$\alpha = 0.00$	0.99	0.99	/
$\alpha = 0.05$	0.99	0.99	1.14

Прилог Б.4: Утицај параметра  $c^*$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н2

	$c^* = 10$	$c^* = 20$	$c^* = 40$
$\alpha = 0.00$	0.03	0.03	/
$\alpha = 0.05$	0.03	0.03	0.14

Прилог Б.5: Утицај параметра  $c^*$  на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н3

	$c^* = 10$	$c^* = 20$	$c^* = 40$
$\alpha = 0.00$	1.00	1.00	/
$\alpha = 0.05$	1.00	0.99	1.18

Прилог Б.6: Утицај параметра  $c^*$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н4

	$c^* = 10$	$c^* = 20$	$c^* = 40$
$\alpha = 0.00$	0.03	0.02	/
$\alpha = 0.05$	0.03	0.03	0.19

Прилог Б.7: Утицај параметра  $C_r$  на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н1

	$C_r = 0.1$	$C_r = 0.2$	$C_r = 0.3$	$C_r = 0.4$	$C_r = 0.5$
$\alpha = 0.00$	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
$\alpha = 0.05$	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01

Прилог Б.8: Утицај параметра  $C_r$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н1

	$C_r = 0.1$	$C_r = 0.2$	$C_r = 0.3$	$C_r = 0.4$	$C_r = 0.5$
$\alpha = 0.00$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$\alpha = 0.05$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01

Прилог Б.9: Утицај параметра  $C_r$  на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н2

	$C_r = 0.1$	$C_r = 0.2$	$C_r = 0.3$	$C_r = 0.4$	$C_r = 0.5$
$\alpha = 0.00$	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
$\alpha = 0.05$	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99

Прилог Б.10: Утицај параметра  $C_r$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н2

	$C_r = 0.1$	$C_r = 0.2$	$C_r = 0.3$	$C_r = 0.4$	$C_r = 0.5$
$\alpha = 0.00$	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
$\alpha = 0.05$	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03

Прилог Б.11: Утицај параметра  $C_r$  на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н3

	$C_r = 0.1$	$C_r = 0.2$	$C_r = 0.3$	$C_r = 0.4$	$C_r = 0.5$
$\alpha = 0.00$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\alpha = 0.05$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Прилог Б.12: Утицај параметра  $C_r$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н3

	$C_r = 0.1$	$C_r = 0.2$	$C_r = 0.3$	$C_r = 0.4$	$C_r = 0.5$
$\alpha = 0.00$	0.03	0.03	0.03	0.02	0.03
$\alpha = 0.05$	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03

Прилог Б.13: Утицај радијуса интерполације  $h$  на вредности релативне амплитуде дубина  $A_r$  за вертикалу Н1

	$h = 0,6\Delta p_0$	$h = 0,8\Delta p_0$	$h = 1,0\Delta p_0$	$h = 1,2\Delta p_0$	$h = 1,4\Delta p_0$
$\alpha = 0.00$	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01
$\alpha = 0.05$	1.02	1.01	1.01	1.01	1.01

Прилог Б.14: Утицај радијуса интерполације  $h$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н1

	$h = 0,6\Delta p_0$	$h = 0,8\Delta p_0$	$h = 1,0\Delta p_0$	$h = 1,2\Delta p_0$	$h = 1,4\Delta p_0$
$\alpha = 0.00$	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01
$\alpha = 0.05$	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01

Прилог Б.15: Утицај радијуса интерполације  $h$  на вредности релативне амплитуде дубина  $A_r$  за вертикалу Н2

	$h = 0,6\Delta p_0$	$h = 0,8\Delta p_0$	$h = 1,0\Delta p_0$	$h = 1,2\Delta p_0$	$h = 1,4\Delta p_0$
$\alpha = 0.00$	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99
$\alpha = 0.05$	0.97	0.99	0.99	0.99	0.99

Прилог Б.16: Утицај радијуса интерполације  $h$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н2

	$h = 0,6\Delta p_0$	$h = 0,8\Delta p_0$	$h = 1,0\Delta p_0$	$h = 1,2\Delta p_0$	$h = 1,4\Delta p_0$
$\alpha = 0.00$	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03
$\alpha = 0.05$	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03

Прилог Б.17: Утицај радијуса интерполације  $h$  на вредности релативне амплитуде дубина  $A_r$  за вертикалу Н3

	$h = 0,6\Delta p_0$	$h = 0,8\Delta p_0$	$h = 1,0\Delta p_0$	$h = 1,2\Delta p_0$	$h = 1,4\Delta p_0$
$\alpha = 0.00$	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00
$\alpha = 0.05$	0.97	1.00	1.00	1.00	1.01

Прилог Б.18: Утицај радијуса интерполације  $h$  на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н3

	$h = 0,6\Delta p_0$	$h = 0,8\Delta p_0$	$h = 1,0\Delta p_0$	$h = 1,2\Delta p_0$	$h = 1,4\Delta p_0$
$\alpha = 0.00$	0.05	0.03	0.03	0.03	0.03
$\alpha = 0.05$	0.05	0.03	0.03	0.03	0.04

Прилог Б.19: Утицај Shepard-овог филтера на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н1

	$N_{Sf} = 1$	$N_{Sf} = 35$	$N_{Sf} = 100$	без филтера
$\alpha = 0.00 = 0.00$	1.01	1.01	1.01	1.01
$\alpha = 0.00 = 0.05$	1.01	1.01	1.01	1.01

Прилог Б.20: Утицај Shepard-овог филтера на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н1

	$N_{Sf} = 1$	$N_{Sf} = 35$	$N_{Sf} = 100$	без филтера
$\alpha = 0.00 = 0.00$	0.01	0.01	0.01	0.02
$\alpha = 0.00 = 0.05$	0.01	0.01	0.01	0.01

Прилог Б.21: Утицај Shepard-овог филтера на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н2

	$N_{Sf} = 1$	$N_{Sf} = 35$	$N_{Sf} = 100$	без филтера
$\alpha = 0.00 = 0.00$	0.99	0.99	0.99	1.00
$\alpha = 0.00 = 0.05$	0.99	0.99	0.99	0.99

Прилог Б.22: Утицај Shepard-овог филтера на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н2

	$N_{Sf} = 1$	$N_{Sf} = 35$	$N_{Sf} = 100$	без филтера
$\alpha = 0.00 = 0.00$	0.03	0.03	0.03	0.03
$\alpha = 0.00 = 0.05$	0.03	0.03	0.03	0.03

Прилог Б.23: Утицај Shepard-овог филтера на вредности релативне амплитуде дубине  $A_r$  за вертикалу Н3

	$N_{Sf} = 1$	$N_{Sf} = 35$	$N_{Sf} = 100$	без филтера
$\alpha = 0.00 = 0.00$	1.00	1.00	1.00	1.02
$\alpha = 0.00 = 0.05$	1.00	1.00	1.00	1.00

Прилог Б.24: Утицај Shepard-овог филтера на вредности фазне разлике  $P_d$  за вертикалу Н3

	$N_{Sf} = 1$	$N_{Sf} = 35$	$N_{Sf} = 100$	без филтера
$\alpha = 0.00$	0.03	0.03	0.03	0.03
$\alpha = 0.05$	0.03	0.03	0.03	0.03

Прилог Б.25: Коефицијенти варијације дубине при различитим почетним растојањима између честица у прорачунима у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер ( $\alpha = 0$  и  $N_{Sf} = 0$ )

	$CV_d[\%]$					
	V.1.1	V.1.2	V.2.1	V.2.2	V.3.1	V.3.2
$\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$	2.60	2.63	8.30	2.90	4.51	4.36
$\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$	3.02	2.88	6.94	2.91	5.49	4.55
$\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$	4.43	3.56	3.99	4.64	5.83	4.99

\*са словом V и два броја су означене вертикале тока

Прилог Б.26: Коефицијент варијације брзине при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 1 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер

	$CV_u[\%]$					
	T.1.1.3	T.1.1.2	T.1.1.1	T.1.2.3	T.1.2.2	T.1.2.1
$\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$	2.51	2.18	2.75	2.43	2.31	3.01
$\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$	2.76	1.87	2.21	2.50	2.06	2.42
$\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$	4.72	3.14	3.46	4.36	3.09	4.26

\*са словом T и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.27: Коефицијент варијације брзине при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 2 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер

	$CV_u[\%]$					
	T.2.1.3	T.2.1.2	T.2.1.1	T.2.2.3	T.2.2.2	T.2.2.1
$\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$	3.85	3.88	4.12	3.17	3.38	3.73
$\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$	4.87	3.59	4.05	3.97	2.76	3.02
$\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$	7.39	5.89	6.69	5.75	5.08	6.02

\*са словом T и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.28: Коефицијент варијације брзине при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 3 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер

	$CV_u$ [%]					
	T.3.1.3	T.3.1.2	T.3.1.1	T.3.2.3	T.3.2.2	T.3.2.1
$\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$	11.13	12.73	13.32	12.25	11.38	11.61
$\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$	13.99	12.38	12.54	11.54	12.15	11.25
$\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$	14.49	13.76	12.80	15.57	12.27	12.69

\*са словом Т и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.29: Стандардне девијације притиска при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 1 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер

	$\sigma_p$ [Pa]					
	T.1.1.3	T.1.1.2	T.1.1.1	T.1.2.3	T.1.2.2	T.1.2.1
$\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$	487	440	376	505	430	585
$\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$	636	521	648	618	569	695
$\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$	1119	877	1224	1121	1046	1202

\*са словом Т и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.30: Стандардне девијације притиска при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 2 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер

	$\sigma_p$ [Pa]					
	T.2.1.3	T.2.1.2	T.2.1.1	T.2.2.3	T.2.2.2	T.2.2.1
$\Delta p_0 = 5.5 \text{ mm}$	832	781	691	738	659	718
$\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$	1013	861	1003	1008	779	825
$\Delta p_0 = 8.5 \text{ mm}$	1679	1477	1507	1465	1453	1527

\*са словом Т и три броја су означене одговарајуће тачке тока



Прилог Б.31: Стандардне девијације притиска при различитим почетним растојањима између честица у попречном пресеку 3 за прорачуне у којима се не користи вештачка вискозност и Shepard-ов филтер

	$\sigma_p$ [Pa]					
	T.3.1.3	T.3.1.2	T.3.1.1	T.3.2.3	T.3.2.2	T.3.2.1
$\Delta p_0 = 5.5$ mm	1440	1301	1501	1362	1423	1436
$\Delta p_0 = 7.0$ mm	2698	2355	2361	2493	2038	2192
$\Delta p_0 = 8.5$ mm	2686	2409	2451	2585	2286	2310

\*са словом Т и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.32: Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на коефицијент варијације дубине ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

	$CV_d[\%]$					
	V.1.1	V.1.2	V.2.1	V.2.2	V.3.1	V.3.2
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 0$	3.02	2.88	6.94	2.91	5.49	4.55
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 35$	1.92	1.72	1.51	0.93	3.08	2.73
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 0$	1.67	0.61	1.12	0.00	1.13	1.41
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 35$	0.00	0.00	0.71	0.00	1.16	0.64

\*са словом V и два броја су означене вертикале тока

Прилог Б.33: Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на коефицијент варијације брзине у попречном пресеку 1 ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

	$CV_u[\%]$					
	T.1.1.3	T.1.1.2	T.1.1.1	T.1.2.3	T.1.2.2	T.1.2.1
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 0$	2.76	1.87	2.21	2.50	2.06	2.42
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 35$	0.43	0.27	0.51	0.30	0.31	0.55
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 0$	0.31	0.13	0.11	0.24	0.07	0.06
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 35$	0.16	0.06	0.04	0.11	0.03	0.03

\*са словом T и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.34: Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на коефицијент варијације брзине у попречном пресеку 2 ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

	$CV_u[\%]$					
	T.2.1.3	T.2.1.2	T.2.1.1	T.2.2.3	T.2.2.2	T.2.2.1
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 0$	4.87	3.59	4.05	3.97	2.76	3.02
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 35$	1.15	0.44	0.92	0.88	0.60	0.56
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 0$	1.59	0.57	1.39	0.89	0.36	0.23
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 35$	1.18	0.39	0.34	0.49	0.18	0.08

\*са словом T и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.35: Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на коефицијент варијације брзине у попречном пресеку 3 ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

	$CV_u$ [%]					
	T.3.1.3	T.3.1.2	T.3.1.1	T.3.2.3	T.3.2.2	T.3.2.1
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 0$	13.99	12.38	12.54	11.54	12.15	11.25
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 35$	1.44	2.03	3.19	1.11	1.70	1.54
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 0$	1.39	1.95	1.77	0.68	0.65	0.77
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 35$	0.46	1.22	1.05	0.42	0.62	0.55

\*са словом Т и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.36: Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на стандардну девијацију притиска у попречном пресеку 1 ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

	$\sigma_p$ [Pa]					
	T.1.1.3	T.1.1.2	T.1.1.1	T.1.2.3	T.1.2.2	T.1.2.1
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 0$	636	521	648	618	569	695
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 35$	64	38	58	66	41	29
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 0$	16	2	2	14	1	1
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 35$	13	4	8	7	3	7

\*са словом Т и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.37: Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на стандардну девијацију притиска у попречном пресеку 2 ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

	$\sigma_p$ [Pa]					
	T.2.1.3	T.2.1.2	T.2.1.1	T.2.2.3	T.2.2.2	T.2.2.1
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 0$	1013	861	1003	1008	779	825
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 35$	115	94	104	144	42	88
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 0$	123	70	129	75	52	56
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 35$	35	45	79	63	24	24

\*са словом Т и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.38: Утицај вештачке вискозности и Shepard-овог филтера на стандардну девијацију притиска у попречном пресеку 3 ( $\Delta p_0 = 7.0 \text{ mm}$ )

	$\sigma_p$ [Pa]					
	Т.3.1.3	Т.3.1.2	Т.3.1.1	Т.3.2.3	Т.3.2.2	Т.3.2.1
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 0$	2698	2355	2361	2493	2038	2192
$\alpha = 0$ и $N_{Sf} = 35$	173	67	110	184	110	268
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 0$	35	28	57	37	26	58
$\alpha = 0.1$ и $N_{Sf} = 35$	34	46	18	73	25	16

\*са словом Т и три броја су означене одговарајуће тачке тока

Прилог Б.39: Средње квадратно одступање брзине  $u$  по попречним пресецима

пресек	<i>RMSE</i> [m/s]					
	SPHstd	SPHmod ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm)			SPHmod ( $\alpha_t = 0.067$ )	
	в.в.	$\alpha_t = 15$	$\alpha_t = 1$	$\alpha_t = 0.067$	$\Delta p_0 = 3.5$ cm	$\Delta p_0 = 2.5$ cm
1	0.205	0.107	0.096	0.100	0.099	0.096
4	0.204	0.119	0.081	0.073	0.068	0.057
7	0.173	0.084	0.057	0.051	0.048	0.043
9	0.137	0.087	0.063	0.060	0.056	0.054
10	0.159	0.105	0.080	0.080	0.075	0.071
12	0.159	0.122	0.099	0.100	0.094	0.087
13	0.170	0.135	0.111	0.103	0.098	0.093
14	0.160	0.122	0.106	0.098	0.091	0.086
15	0.162	0.130	0.102	0.082	0.078	0.084
16	0.159	0.119	0.090	0.063	0.064	0.079
17	0.168	0.122	0.095	0.076	0.079	0.089
18	0.186	0.154	0.129	0.120	0.124	0.133
19	0.172	0.152	0.126	0.118	0.124	0.130
20	0.162	0.133	0.107	0.101	0.106	0.107
21	0.145	0.130	0.101	0.099	0.101	0.098
22	0.111	0.107	0.082	0.081	0.079	0.075
23	0.092	0.086	0.068	0.062	0.061	0.062
24	0.072	0.068	0.055	0.048	0.043	0.038
25	0.083	0.064	0.052	0.043	0.037	0.035
26	0.058	0.051	0.040	0.031	0.029	0.026
27	0.051	0.051	0.042	0.035	0.033	0.033
28	0.035	0.027	0.022	0.019	0.019	0.019
29	0.010	0.011	0.013	0.015	0.015	0.015
30	0.012	0.018	0.017	0.018	0.018	0.018
31	0.023	0.026	0.022	0.024	0.023	0.020
32	0.031	0.027	0.022	0.020	0.018	0.013
33	0.050	0.043	0.036	0.033	0.031	0.029
34	0.050	0.051	0.038	0.037	0.037	0.035
35	0.060	0.059	0.044	0.039	0.037	0.035
36	0.083	0.060	0.051	0.051	0.047	0.039
37	0.089	0.066	0.058	0.056	0.051	0.041
38	0.114	0.075	0.060	0.055	0.052	0.049
39	0.094	0.077	0.055	0.058	0.059	0.054
40	0.097	0.060	0.033	0.036	0.034	0.029
41	0.106	0.070	0.048	0.047	0.044	0.037
43	0.143	0.090	0.075	0.068	0.061	0.051
46	0.132	0.097	0.081	0.078	0.073	0.063
49	0.133	0.103	0.080	0.079	0.078	0.074
52	0.183	0.074	0.070	0.072	0.066	0.057

Прилог Б.40: Средње квадратно одступање брзине  $v$  по попречним пресецима

пресек	$RMSE$ [m/s]					
	SPHstd	SPHmod ( $\Delta p_0 = 4.5$ cm)			SPHmod ( $\alpha_t = 0.067$ )	
	в.в.	$\alpha_t = 15$	$\alpha_t = 1$	$\alpha_t = 0.067$	$\Delta p_0 = 3.5$ cm	$\Delta p_0 = 2.5$ cm
1	0.008	0.015	0.020	0.021	0.020	0.021
4	0.022	0.017	0.015	0.014	0.014	0.013
7	0.045	0.025	0.021	0.019	0.018	0.018
9	0.050	0.033	0.025	0.023	0.022	0.022
10	0.069	0.046	0.039	0.040	0.037	0.034
12	0.076	0.069	0.062	0.066	0.063	0.057
13	0.078	0.065	0.056	0.056	0.054	0.050
14	0.074	0.075	0.068	0.071	0.070	0.065
15	0.044	0.038	0.031	0.026	0.026	0.027
16	0.059	0.053	0.048	0.045	0.045	0.045
17	0.034	0.034	0.030	0.029	0.029	0.029
18	0.016	0.017	0.017	0.018	0.017	0.017
19	0.015	0.014	0.012	0.012	0.013	0.011
20	0.030	0.024	0.022	0.020	0.021	0.022
21	0.042	0.030	0.025	0.023	0.022	0.021
22	0.044	0.043	0.036	0.035	0.034	0.033
23	0.048	0.046	0.033	0.029	0.029	0.029
24	0.053	0.056	0.049	0.048	0.046	0.044
25	0.067	0.064	0.051	0.047	0.043	0.039
26	0.076	0.072	0.055	0.046	0.043	0.039
27	0.081	0.084	0.061	0.048	0.042	0.037
28	0.066	0.077	0.048	0.037	0.033	0.030
29	0.086	0.081	0.050	0.042	0.042	0.041
30	0.078	0.079	0.046	0.034	0.033	0.027
31	0.106	0.085	0.064	0.054	0.046	0.032
32	0.117	0.094	0.074	0.065	0.058	0.043
33	0.114	0.088	0.064	0.055	0.047	0.039
34	0.097	0.104	0.072	0.067	0.067	0.062
35	0.110	0.089	0.059	0.048	0.041	0.027
36	0.120	0.089	0.073	0.072	0.066	0.054
37	0.130	0.090	0.077	0.071	0.066	0.053
38	0.112	0.079	0.069	0.065	0.063	0.058
39	0.080	0.086	0.073	0.077	0.077	0.073
40	0.084	0.059	0.034	0.034	0.032	0.030
41	0.075	0.047	0.032	0.033	0.032	0.028
43	0.077	0.043	0.035	0.032	0.028	0.024
46	0.058	0.040	0.029	0.027	0.026	0.023
49	0.056	0.036	0.027	0.026	0.025	0.023
52	0.090	0.040	0.039	0.041	0.038	0.034

## БИОГРАФИЈА

Никола (Милорада) Росић, рођен је у Земуну 1983. године. Гимназију је завршио у Инђији, на природно-математичком смеру, 2002. године. На Грађевинском факултету у Београду - Модул за хидротехнику и водно еколошко инжењерство, дипломирао је 2008. године, са просечном оценом 8,54. Дипломски рад одбранио је са највишом оценом. Носилац је награде Одсека за хидротехнику и водно еколошко инжењерство за најбољи дипломски рад у школској 2007/2008. години.

Запослен је 2009. године на Грађевинском факултету у Београду као асистент за уже научне области Уређење водотока и пловна инфраструктура и Водопривредни и хидроенергетски системи. Учествоје у настави на основним академским и мастер студијама. Држао је и наставу на специјалистичким студијама. Као истраживач, учесник је на пројектима које финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Аутор је више радова у домаћим и међународним стручним часописима. Учесник је бројних домаћих и иностраних конференција.

# Изјава о ауторству

Име и презиме аутора: Никола Росић

Број индекса: 912/07

## Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ОТВОРЕНИХ ТОКОВА ЗАСНОВАНО НА  
ПРАЋЕЊУ ФЛУИДНИХ ДЕЛИЋА

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 4. 7. 2016.



---



## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Никола Росић  
Број индекса: 912/07  
Студијски програм: Грађевинарство  
Наслов рада: НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ОТВОРЕНИХ ТОКОВА  
ЗАСНОВАНО НА ПРАЋЕЊУ ФЛУИДНИХ ДЕЛИЋА  
Ментор: проф. др. Љубодраг Савић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, 4. 7. 2016.



---

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

НУМЕРИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ ОТВОРЕНИХ ТОКОВА ЗАСНОВАНО НА ПРАЋЕЊУ ФЛУИДНИХ ДЕЛИЋА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.  
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 4. 7. 2016.



---