

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Ивана Т. Драговић

**КОНЗИСТЕНТАН НЕУРО-ФАЗИ
СИСТЕМ ЗАКЉУЧИВАЊА**

докторска дисертација

Београд, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

Ivana T. Dragović

**A CONSISTENT NEURO-FUZZY
INFERENCE SYSTEM**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

Ментор:

др Братислав Петровић,
редовни професор, Факултет организационих наука, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Милија Сукновић,
редовни професор, Факултет организационих наука, Универзитет у Београду

др Драган Радојевић,
научни саветник, Институт „Михајло Пупин“, Београд

Датум одбране: _____

Мојим родитељима, Весни и Томиславу

Прво бих желела да се захвалим свом ментору проф. др Братиславу Петровићу на прилици коју ми је пружио, као и безрезервној подршци и многим корисним саветима током свих година заједничког рада. Велику захвалност на изузетној сарадњи дугујем и проф. др Драгану Радојевићу, проф. др Милији Сукновићу као и многим колегама и пријатељима са Факултета организационих наука, а нарочито колегама са Катедре за управљање системима.

Желим да изразим и захвалност др Марку Петровићу, а затим и Немањи Протићу, Милици Бановић и Милици Латинковић на корисним (техничким) саветима. Такође, пуно ми је значила подршка и помоћ породица Драговић и Протић, као и Петре Цвијић и Зринке Бањеглав, али и многих других пријатеља чији је списак, срећом, дугачак.

На крају, неизмерно сам, на свему захвална, својој сестри Александри и баки Вери, а уједно и неизмерно тужна што моји родитељи нису успели да дочекају завршетак ове тезе. Нема речи којима бих могла да изразим захвалност мојој куми Нини Турајлић и породици Турајлић која ми је подршка увек и у свему.

Јасно је да без свесрдне помоћи, разумевања и стрпљења свог супруга Југослава и деце Вука и Јакова (мада је он више одмагао) не бих успела да завршим ову дисертацију.

Конзистентан неуро-фази систем закључивања

Резиме:

Велики број аутора сматра да велике могућности експертских система леже у хибридном моделима, што су ови системи и доказали у пракси. Мотивисан тиме, предложени модел система у основи представља интеграцију неуронских мрежа и фази система, чиме се боље користе добре стране оба приступа.

Полазна основа овог рада је да понашање система, кроз скуп лингвистичких правила, треба да описују управо они који систем највише познају и разумеју (насупротив аутоматски генерисаним правилима која су најчешће рогобатна и неразумљива). Знање експерата из било које области лако се може формулисати вербалним исказима, а теорија фази скупова и фази логике омогућава превођење оваквих исказа у одговарајуће математичке изразе.

Класична теорија фази скупова не задовољава све Булове аксиоме. Из овог разлога у раду је примењена конзистентна реално-вредносна $[0,1]$ логика, која се заснива на интерполативној Буловој алгебри (ИБА). Свака логичка функција може се једнозначно трансформисати у одговарајући генерализовани Булов полином (ГБП) коришћењем ИБА при чему се чувају сви Булови закони.

Оправданост коришћења конзистентног приступа најпре је илустрована на примеру конзистентног фази система закључивања (КФИС). Сврха приказаног КФИС-а је да процени могућност да је пацијент на дијализи трбушне марамице (лат. *peritoneum*) оболео од перитонитиса. Добијени резултати указују на чињеницу да класичан ФИС и конзистентан приступ не воде увек ка истим резултатима, а разлика је најочљивија када правила укључују негацију.

Како би се КФИС даље унапредио, коришћена је неуронска мрежа, тј. њен алгоритам учења, који, на основу скупа улазно-излазних података, подешава параметре тако да више одговарају реалном систему. На тај начин, предложени

конзистентан неуро-фази систем (КНФИС) користи знање садржано у подацима и унапређује закључивање. Такође, елиминише се субјективност коју експерти у некој мери изражавају приликом дефинисања параметара система.

КНФИС је адаптивни модел чија се архитектура састоји од четири слоја: први слој обавља фазификацију улазних променљивих, други слој односи се на премисе правила, док трећи слој трансформише премисе у одговарајуће ГБП. У следећем слоју обавља се агрегација резултата појединачних правила како би се добио коначан излаз линеарном комбинацијом или оператором максимума.

Неуронске мреже, путем алгоритма простирања грешке уназад (енгл. *backpropagation*) елиминишу тешкоће које могу да се јаве приликом дефинисања функција припадности јер поступак није толико интуитиван експертима из различитих области, а са друге стране, њихов избор има велики утицај на ефикасност самог система. Подешавање се обавља итеративним поступком у *off-line* режиму, при чему семантика правила остаје непромењена. Имплементирана је и хеуристика која подешава брзину учења у зависности од смера промене грешке током процеса учења.

Обезбеђена је и имплементација предложеног конзистентног неуро-фази система у виду оригиналног софтверског решења *CNFS-niv* како би експерти из било које области, али и шири круг корисника, могли да користе предложени систем без посебног техничког предзнања. Предложени КНФИС је општи модел и може да се примени у најразличитијим областима.

Кључне речи: фази логика, конзистентна реално-вредносна $[0,1]$ логика, фази систем закључивања, неуронске мреже, неуро-фази системи.

Научна област: Техничке науке

Ужа научна област: Управљање системима

УДК број: 007.52:510.6

A consistent neuro-fuzzy inference system

Abstract:

A number of authors find that the greatest potential of expert systems lies in hybrid models, and such models have proven this viewpoint in practice. Therein lies the motivation for introducing a new system model, integrating neural networks and fuzzy systems, thus building on the best features of each of these approaches.

The main premise of this thesis is that the behavior of a system should be described, through a set of linguistic rules, by those who know and understand the system the best (as opposed to the automatic generation of rules that are often cumbersome and incomprehensible). Expert knowledge in any domain can be easily expressed in the form of verbal statements, and fuzzy set theory and fuzzy logic enable the transformation of such verbal statements into mathematical expressions.

Conventional fuzzy set theory does not satisfy all Boolean axioms. For this reason, the consistent real-valued $[0,1]$ logic, based on the Interpolative realization of Boolean algebra (IBA), is applied in this thesis. Any logical function can be uniquely transformed into a corresponding generalized Boolean polynomial (GBP) using IBA thereby preserving all Boolean laws.

The justification for using a consistent approach is first illustrated on an example of a consistent fuzzy inference system (CFIS). The purpose of the described CFIS is to estimate the likelihood that a patient undergoing peritoneal dialysis, has peritonitis. The obtained results demonstrate that conventional FIS and the Boolean consistent approach do not always lead to the same results, and this discrepancy is most pronounced when the established rules include negations.

In order to further enhance CFIS a neural network, or, more precisely, its learning algorithm, is used to fine-tune the parameters, in accordance with a set of input-output data, so that the parameters better suit the real system. Consequently, the proposed

consistent neuro-fuzzy system (CNFIS) uses the knowledge contained in the data to improve the inference process. In addition, it eliminates the subjectivity incorporated into the system by experts when defining the parameters of the system.

CNFIS is an adaptive model, whose architecture comprises four layers: the first is responsible for fuzzifying the input variables, the second layer is related to the rule premises and the third layer transforms the premises into corresponding GBPs. The final layer aggregates the results of individual rules, using either a linear combination or maximum operator, in order to derive a final output.

Neural networks, through their backpropagation algorithm, eliminate the difficulties which can arise when defining membership functions, since on the one hand, their defining may not be as intuitive for experts from other domains, while on the other hand the choices they make have a significant impact on the efficiency of the system. The parameter adjustment is accomplished through an iterative procedure, using *off-line* learning, while the semantics of the established rules remain unaffected. A heuristic, for adjusting the learning rate on the basis of the changes in errors during the learning process, is also incorporated.

An implementation of the proposed CNFIS is provided in the form of an software solution *CNFS-niiv* so that experts from any given domain (as well as a wider group of users) can use the proposed system without prior specific technical knowledge. The proposed CNFIS is a generic model which can be used in a broad range of domains.

Key words: fuzzy logic, consistent real-valued [0,1] logic, fuzzy inference systems, neural networks, neuro-fuzzy systems.

Scientific field: Technical sciences

Specific scientific field: System control

UDK number: 007.52:510.6

Садржај

1. УВОД	1
1.1. Проблем, предмет и циљ истраживања	1
1.2. Полазне хипотезе	4
1.3. Структура рада.....	4
2. ОСНОВНЕ ТЕОРИЈСКЕ ПОСТАВКЕ	7
2.1. Меко рачунарство	7
2.2. Фази логика	8
2.2.1. Основни појмови и дефиниције.....	9
2.2.2. Основне операције	16
2.2.3. Фази релације и фази композиција	23
2.3. Конзистентна реално-вредносна $[0, 1]$ логика	26
2.3.1. Основни појмови.....	28
2.3.1.1. Симболички ниво.....	30
2.3.1.2. Вредносни ниво.....	32
2.3.2. Генерализовани Булов полином.....	32
2.4. Фази систем закључивања	38
2.4.1. Компоненте фази система закључивања	39
2.4.2. Типови фази система закључивања	50
2.4.3. Поређење основних типова фази система закључивања	55
2.5. Неуронске мреже	58
2.5.1. Неки од постојећих алгоритама учења	61
3. НЕУРО-ФАЗИ ИНТЕГРАЦИЈА.....	68
3.1. Постојећи приступи неуро-фази интеграције	71
4. КОНЗИСТЕНТАН ФАЗИ СИСТЕМ ЗАКЉУЧИВАЊА.....	89
4.1. Илустративан пример.....	92
4.2. Резултати експеримента.....	96
5. КОНЗИСТЕНТАН НЕУРО-ФАЗИ СИСТЕМ ЗАКЉУЧИВАЊА	101
5.1. Пројектовање система	103
5.2. Архитектура	105
5.3. Алгоритам учења	112
5.3.1. Други алгоритми учења у неуро-фази системима	115

5.4. Резултати експеримената	117
5.4.1. Илустративни пример из домена медицине	118
5.4.1.1. Детаљи резултата тренирања.....	119
5.4.1.2. Детаљи процеса тренирања.....	132
5.4.2. Илустративни пример из домена финансија	136
5.4.2.1. Детаљи резултата тренирања.....	138
5.4.2.2. Детаљи процеса тренирања.....	140
6. МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ.....	142
6.1. Примене фази система закључивања у медицини.....	142
6.2. Примене неуро-фази система у области финансија	150
6.3. Могућности примене предложеног решења	158
7. ЗАКЉУЧАК	160
7.1. Осврт на постављене хипотезе и остварене доприносе	164
7.2. Могући правци будућег истраживања.....	168
8. ПРИЛОГ: ПРИКАЗ ПРОГРАМСКОГ РЕШЕЊА.....	169
9. ЛИТЕРАТУРА	179

1. УВОД

1.1. Проблем, предмет и циљ истраживања

Предмет истраживања овог докторског рада јесте примена новијих техника меког рачунарства за унапређење фази система закључивања како би се омогућило да се знања експерата изразе на семантички богатији начин и самим тим буду значајна подршка у процесу одлучивања.

Знање експерата из било ког домена може најприкладније да се изрази помоћу сложених вербалних исказа. Фази логика омогућава формализацију сложених вербалних исказа будући да је усклађена са квалитативним описима које људи користе и блиска је начину на који размишљају. Теорија фази скупова омогућава превођење оваквих исказа у одговарајуће математичке изразе.

Фази систем закључивања при моделовању система не захтева дефинисање ни прецизног математичког модела нити алгоритама, већ на основу скупа *if-then* правила, покушава да формализује процес резоновања тако да буде близак начину на који људи, а нарочито експерти из појединих области, размишљају и комуницирају. Правила су релативно једноставан облик знања која експерти могу лако да потврде, пренесу и прошире (*Mitra & Hayashi, 2000*).

Природнији и интуитивнији начин представљања правила води ка њиховој лакшој формулацији и разумевању. Из тог разлога једна од полазних претпоставки овог рада јесте да премису правила не треба ограничити искључиво на конјункцију и дисјункцију појединачних захтева. Тиме би се омогућило да се сама правила прецизније дефинишу. Дефинисањем семантички богатијих правила обезбеђује се њихово боље разумевање, као и већа прилагођеност конкретном проблему, а у случају потребе и лакше измене самих правила.

Фази правила се могу формирати на различите начине. С једне стране, она могу да се аутоматски генеришу на основу расположивих података. Међутим, аутоматско генерисање правила од стране система може да доведе до превеликог броја правила, чиме би њихова оптимизација постала рачунски веома захтевна. Поред

тога, тако генерисана правила могу да буду непотребно сложена и тешка за читање и разумевање. С друге стране, експерт из датог домена најбоље може да одреди која комбинација захтева јесте најважнија приликом доношења одређене одлуке. Полазна основа овог рада јесте да о систему треба да говоре они који га највише познају и разумеју. Другим речима, искуство и знање експерата о систему требало би да имају предност у односу на аутоматски генерисана правила, нарочито ако се има у виду да смо ретко сигурни да подаци којима располажемо у потпуности описују посматрани систем без шума. Не треба дозволити да подаци „говоре сами за себе“ јер није познато да ли постоји и колики је шум у узорку који је на располагању. Из овог разлога први корак у реализацији система требало би да буде дефинисање фази правила и функција припадности од стране самог експерта. Дакле, експерт дефинише улазно-излазни простор, променљиве узрочног и последичног дела *if-then* правила, број тих правила и почетне параметаре функција припадности.

Неуронске мреже, са друге стране, имају могућност прилагођавања структуре фази система конкретном скупу података који је на располагању.

Интеграција неуронских и фази система води до симбиотског односа у коме фази системи обезбеђују моћан оквир за представљање експертског знања а неуронске мреже, преко њихове способности учења, омогућавају рачунски ефикасну имплементацију (*Mitra & Hayashi, 2000*). Наиме, неуронске мреже немају могућност интерпретације знања, а фази системи немају могућност учења, па се њиховом синергијом долази до система који користи предности а отклања недостатке оба приступа.

Постојећи неуро-фази системи закључивања веома ретко користе негацију већ се, у случају потребе, негација (на пример „не велико“) поистовећује са неким другим фази скупом (на пример „мало“). Међутим, ако се има у виду да појмови дефинисани фази скуповима „мало“ и „не велико“ не морају да буду истоветни, отвара се питање адекватности резултата оваквог приступа. Наиме, уколико су дефинисана три фази скупа: „мало“, „средње“ и „велико“, негација скупа „велико“

обухватила би у некој мери не само скуп „мало“ већ и скуп „средње“, те је стога очигледно да употреба негације постаје нужна.

Са друге стране, конвенционална теорија фази скупова (фази логика и фази релације) не налази се у Буловом оквиру јер не задовољава све Булове аксиоме (*Radojević, 2008a*), што се пре свега односи на принцип искључења трећег и контрадикцију. Из тог разлога предлаже се коришћење конзистентне реално-вредносне $[0,1]$ логике, тј. интерполативне реализације Булове алгебре (ИБА) уведенe у (*Radojević, 2000*). Дакле, примена конзистентне фази логике не само што би омогућила да се адекватније третира проблем негације већ би обезбедила и задовољење свих закона Булове логике.

У предложеном неуро-фази систему неуронска мрежа имала би улогу оптимизатора, тј. обављала би само фина подешавања неких параметара фази система. Наиме, приликом дефинисања правила експерти би дефинисали и функције припадности, тј. њихове почетне вредности, које би затим неуронска мрежа оптимизовала (модификовала на основу података за тренирање).

Задатак оваквог неуро-фази система био би да генерише управљачке одлуке којима би се олакшао процес одлучивања, нарочито у ситуацијама када постоје неодређеност, или непрецизност, или пак не располажемо свим подацима.

Предложени конзистентан неуро-фази систем, као један општи модел, могао би да се примени у најразличитијим областима од финансијских и организационих наука до медицине, итд.

На основу свега наведеног, **циљ** овог истраживања јесте дефинисање и имплементација новог неуро-фази система који би знања о систему изражавао на начин који је лакши, природнији и ближи експертима, а уједно имао и могућност прилагођавања расположивом скупу података којима је посматрани систем описан.

1.2. Полазне хипотезе

Основна хипотеза:

- Досадашњи фази системи закључивања се могу унапредити на такав начин да експерти могу адекватније изразити своја знања и искуства.

Помоћне хипотезе:

- Знање експерата се може адекватно изразити коришћењем сложених вербалних исказа.
- Применом фази логике могуће је сложене вербалне исказе превести у правила.
- Применом конзистентне фази логике могуће је сложене вербалне исказе превести у логичке функције дефинисане у Буловом оквиру тј. тако да важе сви закони класичне логике.
 - Премиса правила не мора бити ограничена само на конјункцију тј. дисјункцију фази (лингвистичких) променљивих.
 - Начин на који се третира негација у постојећим приступима није адекватан.
- Неуронске мреже могу унапредити фази системе закључивања.
- Конзистентни неуро-фази системи могу се применити као подршка одлучивању у најразличитијим доменима.

1.3. Структура рада

У првом поглављу описани су проблем, предмет и циљеви истраживања ове докторске дисертације. Такође, дефинисане су општа и посебне хипотезе које се односе на истраживање.

У другом поглављу представљене су основне теоријске поставке ове дисертације, везане за област истраживања. Дат је осврт на примену техника меког рачунарства у проблемима одлучивања, као и детаљна теоријска поставка методологија примењених у овом раду: фази логике и неуронских мрежа. У оквиру фази логике разматране су основне операције, као и утицај примењених оператора, фази релације и фази композиција. Теоријски је обрађена конзистентна

реално-вредносна $[0,1]$ логика, као и разлика тог приступа у односу на класичну фази логику. Будући да су фази системи закључивања (енгл. *Fuzzy Inference System - FIS*) једна од најважнијих примена фази логике, описане су основне компоненте тих система, фази импликација и правила закључивања. Разматрани су основни типови система закључивања, дато је њихово поређење, тј. појединачне предности и недостаци. У наставку су представљене неуронске мреже и неки од алгоритама учења које оне користе. Како је алгоритам простирања грешке уназад (енгл. *backpropagation*) примењен у предложеном конзистентном неуро-фази систему, за подешавање функција припадности, објашњене су његове поставке.

Имајући у виду предмет ове дисертације, у трећем поглављу је посебно издвојен и објашњен концепт неуро-фази интеграције, уз преглед и анализу постојећих неуро-фази система.

У четвртном поглављу изложен је конзистентан фази систем закључивања. Дата су објашњења основних концепата на којима почива овај модел система, као и експериментални резултати поређења таквог система закључивања са класичним фази системом закључивања. Показано је да конзистентан фази систем у неким случајевима даје боље резултате, као и да је разлика најочљивија када се приликом дефинисања правила користи негација. На примеру из домена медицине показано је да класична фази логика (у односу на конзистентну) потцењује озбиљност посматраних симптома код пацијената.

Пето поглавље обухвата предлог новог конзистентног неуро-фази система. Најпре је детаљно приказана четворослојна архитектура предложеног система, а затим је изложен алгоритам учења који се примењује за подешавање параметара система. Наиме, реализација система започиње структурном идентификацијом, која је задатак експерта. Експерт из датог домена најбоље може одредити која комбинација захтева јесте најважнија приликом доношења одређене одлуке. Једна од полазних претпоставки рада, при томе је да премису правила не треба ограничити само на конјункцију и дисјункцију појединачних захтева, чиме би се

омогућило да се сама правила прецизније дефинишу. Дефинисањем семантички богатијих правила обезбеђују се и боље разумевање и прилагођеност конкретном проблему а, у случају потребе, и лакше промене самих правила. Дакле, доменски експерт дефинише правила, њихов број и поделу улазно-излазног простора (која зависи од конкретног проблема, тј. колико фину поделу захтева), затим променљиве узрочног и последичног дела правила, као и почетне параметре функција припадности. Како би се елиминисала субјективност, коју експерти у некој мери могу изражавати приликом дефинисања параметара система, коришћена је неуронска мрежа. На основу скупа улазно-излазних података који описују посматрани систем, неуронске мреже, помоћу алгорита учења, подешавају почетне вредности параметара, чиме се остварује адаптивност модела. Примењени алгорита учења јесте алгорита простирања грешке уназад (енгл. *backpropagation*) који, применом итеративног поступка, тако обавља параметарску идентификацију да вредности параметара што више одговарају реалном систему. Извршене су експерименталне провере и анализа могућности примене предложеног решења у два различита домена: медицине и у области финансија.

У шестом поглављу дат је осврт на досадашње примене неуро-фази система у различитим областима.

У последњем поглављу дат је закључак, са посебним освртом на постављене хипотезе и остварене доприносе ове дисертације, а сугерисани су могући правци будућих истраживања.

У прилогу је представљено оригинално софтверско решење *CNFS-nii* као имплементација предложеног конзистентног неуро-фази система.

На крају рада наведена је литература коришћена приликом израде ове дисертације.

2. ОСНОВНЕ ТЕОРИЈСКЕ ПОСТАВКЕ

2.1. Меко рачунарство

Циљ сваког експертског система је да oponaша начин на који човек решава сложен проблем како би се обезбедила подршка у процесу доношења одлука и дефинисала управљачка акција. Експертски системи могу да резонују и управљају у ситуацијама са различитим степеном поверења и неодређености, где конвенционални алгоритми не могу да успешно реше проблем (*Giarratano & Riley, 1998*). Из овог разлога експертски системи се све више ослањају на технике меког рачунарства.

Меко рачунарство је скуп методологија које, појединачно или заједничким деловањем, имају за циљ управљање у реалним ситуацијама када постоје неодређеност и непрецизност или у ситуацијама када нам нису доступни сви подаци (*Mitra & Hayashi, 2000*).

Како се наводи у (*Zadeh, 1998*), меко рачунарство у основи представља скуп рачунарских методологија чији су главни представници: фази логика (енгл. *fuzzy logic – FL*), неуро-рачунарство (енгл. *neurocomputing – NC*), еволутивно рачунарство (енгл. *evolutionary computing – EC*) и пробабилистичко рачунарство (енгл. *probabilistic computing – PC*). Према њему, значајан аспект меког рачунарства јесте да су дате методологије комплементарне и међусобно допуњујуће пре него компетитивне и искључиве. Овим методологијама могле би се додати и новије, као што су машине потпорних вектора (енгл. *support vector machine – SVM*), као и различите метахеуристике (енгл. *metaheuristic*) у које се убрајају интелигенција роја (енгл. *swarm intelligence – SI*), генетски алгоритми (енгл. *genetic algorithms – GA*) и друге. Иако свака од поменутих методологија третира проблеме из одређеног домена треба истаћи да ти домени нису међусобно одвојени и искључиви те да, самим тим, захтевају синергетско деловање поменутих метода.

Како се наводи у (*Medsker & Zadeh, 1995*), пратећи ефекат симбиозе фази логике, неуро, еволутивног и пробабилистичког рачунарства јесте све већа присутност

интелигентних система који се не заснивају на поједначним методологијама меког рачунарства већ на њиховој комбинацији. Ови аутори даље наводе да су тренутно најоучљивији хибридни системи – неуро-фази системи (мада се јављају и фази-генетски, неуро-генетски и фази-неуро-генетски системи), као и да верују да ће већина информационих тј. интелигентних система у будућности управо бити хибридног типа.

У овом раду биће предложен систем који као методе меког рачунарства за моделовање знања користи управо фази системе и вештачке неуронске мреже, са циљем да пружи помоћ у решавању комплексних проблема и да прихватљиво и брзо решење.

2.2. Фази логика

У неким случајевима класификација елемената (објеката) на стриктно два међусобно искључива и комплементарна скупа има смисла и могућа је (паран/непаран, позитиван/негативан), док се у другим случајевима та граница не може јасно поставити (висок/низак, велики/мали). Како би се отклонили недостаци класичне теорије скупова, првобитно је предложена тровредносна логика уместо двовредносне, тј. бинарне логике. Наиме, још је Лукашијевич (*Łukasiewicz*) двадесетих година прошлог века сматрао евидентним да се неким догађајима не може придружити ни „да“ ни „не“ већ нека трећа истинитосна вредност на пример, „могуће“. У том случају сваки исказ би могао имати три истинитосне вредности: „тачан“ (у ознаци 1), „нетачан“ (у ознаци 0), као и „можда“ (у ознаци 1/2) која се односи на делимично тачне, тј. делимично нетачне вредности. Његове поставке изложене су у (*Łukasiewicz, 1970*).

Фази логика се сматра проширењем више-вредносне логике, чији је ултимативни циљ да обезбеди темеље апроксимативном резонувању које се заснива на непрецизним тврђењима, користећи теорију фази скупова као основни алат (*Kacprzyk & Pedrycz, 2015*). За разлику од класичне логике, фази логика дозвољава припадност скупу у различитој мери, не ограничавајући се на искључиво припадање, тј. искључиво неприпадање скупу.

Темеље фази логике поставио је *Lofti Zadeh* у свом чувеном раду (*Zadeh, 1965*). Фази логика представља проширење бинарних вредности 0 и 1, тј. скупа $\{0,1\}$, којима се у класичној логици означава искључиво присуство или одсуство неког елемента, на цео интервал $[0,1]$ чиме се указује на релативно присуство или релативно одсуство тог елемента. Реалне вредности из интервала $[0,1]$ указују на степен у коме неки елемент задовољава особине датог скупа. Фази логика је мање рестриктивна и заснована је на природном језику, па је из тог разлога једноставнија и ближа начину на који људи размишљају. Она даје математички оквир за решавање проблема неодређености, непрецизности и некомплетности, што је заправо у супротности са њеним значењем (енгл. *fuzzy* – односи се на нешто непрецизно, неодређено и нејасно). Фази приступ често се чини једино природним јер је прилагођен квалитативним описима које људи користе у свакодневној комуникацији. Теорија фази скупова омогућава трансформацију ових описа и исказа у математичке исказе. На овај начин, доменски експерти своја знања могу адекватно изразити чак и кад им није блиско математичко моделовање.

Фази логика се осамдесетих година двадесетог века интензивно развијала, па се, упоредо с тим, развијала и област њене примене. Захваљујући томе што омогућава лако представљање знања, данас је нашла широку примену у аутоматском управљању, теорији одлучивања, саобраћају, техници, роботизи, финансијама, медицини и многим другим областима. Експертски системи користе фази логику како би обезбедили моћан и флексибилан метод за решавање проблема који се не могу решити конвенционалним методама (*Fasanghari & Montazer, 2010*).

2.2.1. Основни појмови и дефиниције

Основни појмови и дефиниције се заснивају на раду (*Zadeh, 1965*).

Фази скуп A дефинисан над универзалним скупом X одређен је функцијом припадности (енгл. *membership function*). Функција припадности или

карактеристична функција придружује сваком елементу x из X^1 вредност μ_A из интервала $[0, 1]^2$ која се односи на меру, тј. степен припадања елемента x скупу A .

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1].$$

Другим речима, фази скуп A у потпуности је одређен скупом уређених парова:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}^3$$

Управо функција припадности је та која омогућава проширење класичних скупова тако што дозвољава делимично припадање скупу. Она појединачном елементу придружује целокупан опсег вредности из јединичног интервала подразумевајући да што је вредност μ_A ближа јединици то елемент x у већој мери задовољава особине скупа A . Степен припадности елемента неком скупу одређује се на основу истинитосне вредности исказа да „дати елемент припада датом скупу“ (Gaines, 1976). Фази скуп A може се сматрати уопштењем класичног скупа код кога су све функције припадности једнаке 1.

У неким радовима наилази се и на обележавање $\int_X \mu_A(x)/x$, где се ознака интеграла не односи на интеграцију већ на скуп свих тачака $x \in X$ које су повезане функцијом припадности $\mu_A(x) > 0$. Аналогно обележавање у дискретном случају било би: $\sum_X \mu_A(x)/x$ (Mendel, 1995).

Практичан значај фази логике нарочито се огледа у могућности коришћења лингвистичких променљивих. Лингвистичке променљиве су променљиве које за вредности узимају речи или реченице а мотивација за њихово увођење лежи у чињеници да су мање специфичне од нумеричких вредности и ближе природном језику (Zadeh, 1965). Најчешће, лингвистичке променљиве се декомпонују на скуп лингвистичких атрибута, тј. термина (Mendel, 1995). Свака лингвистичка променљива, изражена преко једног или више лингвистичких атрибута, моделује

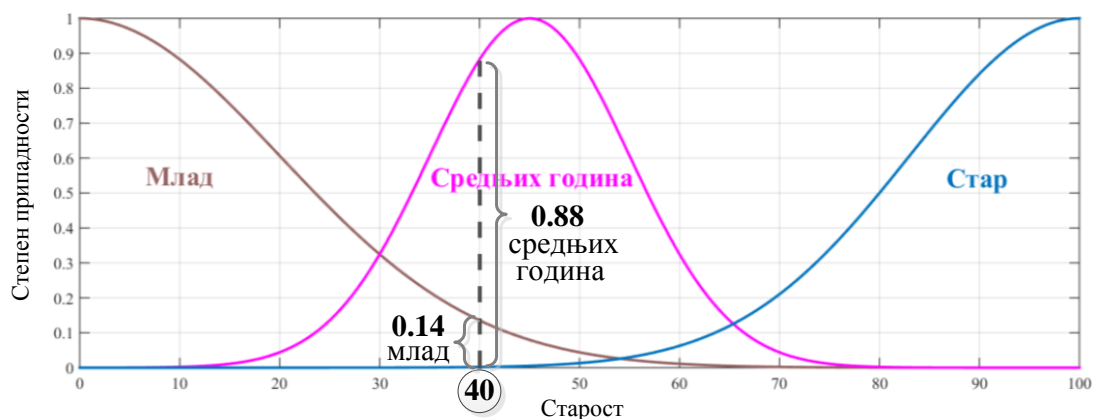
¹ Универзални скуп X или краће универзум никад није фази скуп (Dubois & Prade, 1980).

² Овде се подразумева да је фази скуп нормализован тј. да је максимална вредност функције припадности једнака јединици: $\max(\sup_{x \in X} \mu_A(x)) = 1$, при чему се носач (енгл. *support*) фази скупа дефинише на следећом релацијом: $\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$. У супротном фази скуп је субнормалан или ненормализован и лако га је нормализовати.

³ Елементи који имају нулти степен припадности углавном се не наводе.

се преко одговарајућих фази скупова. Облик као и параметри фази скупа зависе од објекта, тј. особина које описују. Атрибути узимају вредности интервала из $[0,1]$ на основу одговарајућих функција припадности.

Фази партиција представља поделу улазног простора на делове, потпросторе, тј. регионе, што за последицу има чињеницу да један елемент може припадати већем броју фази скупова (у различитој мери). Фази партиција обично има особину адитивности, која се односи на својство да је збир свих вредности припадности неког елемента свим лингвистичким атрибутима (фази скуповима) једне лингвистичке променљиве једнак јединици тј. $\sum_{i=1}^n A_i(x) = 1; \forall x \in X$. Такође, претпоставка је да за сваки елемент постоји бар један фази скуп коме припада у степену већем од нуле тј. $\forall x \exists_i A_i(x) > 0$ (Pedrycz, 1993). На слици је приказана лингвистичка променљива „старост“ декомпонована на лингвистичке атрибуте (термине): „млад“, „средњих година“ и „стар“ који су приказани одговарајућим фази скуповима.



Слика 1. Фази скупови „млад“, „средњих година“ и „стар“

Психолошке студије су показале (Piegat, 2001) да просечан човек може да запамти пет до девет карактеристика одређеног објекта, што треба имати у виду приликом дефинисања одређене лингвистичке променљиве.

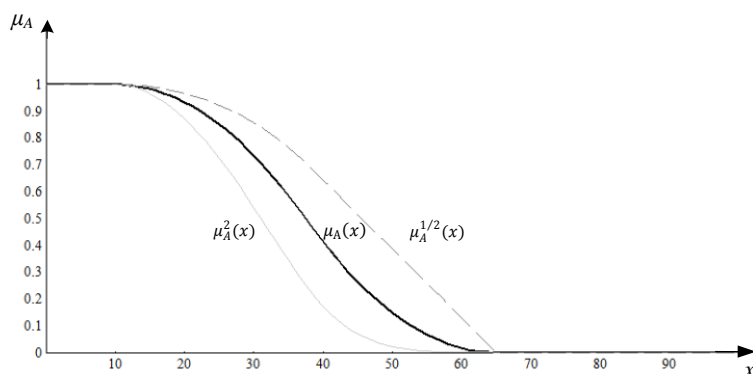
Помоћу лингвистичких модификатора (енгл. *linguistic hedge* или *modifier*) може се променити значење фази скупова (атрибута), тј. могућа је њихова концентрација или дилатација (Mendel, 1995). Захваљујући томе могу се дефинисати атрибути као што су „веома стар“, „скоро стар“ и сл. Уколико са $\mu_A(x)$ означимо степен припадања елемента x скупу A на пример, скупу „млад“ онда се може дефинисати:

$$\mu_{\text{„веома млад“}A}(x) = [\mu_A(x)]^2$$

$$\mu_{\text{„скоро млад“}A}(x) = [\mu_A(x)]^{1/2}$$

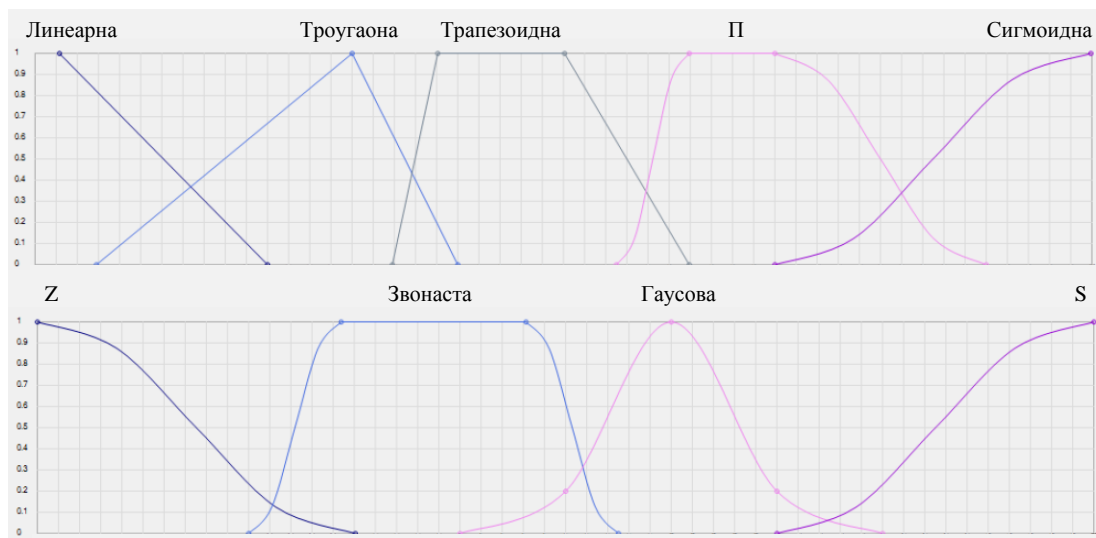
$$\mu_{\text{„веома стар“}A}(x) = [1 - \mu_A(x)]^2$$

Уопштено, уколико се функција припадности степенује бројем већим од један, реч је о концентрацији атрибута. Како су све вредности функција припадности у јединичном интервалу, степеновањем се добија још мања припадност датом скупу, тј. добија се строжи критеријум, који за исте вредности променљиве даје мању вредност припадности. Супротно, уколико је степен мањи од један, реч је о дилатацији атрибута – добија се релаксиранији критеријум.



Слика 2. Концентрација и дилатација атрибута

Облици фази скупова могу бити различити. Најчешћи, уједно подржани и у програмском језику *Matlab*, приказани су на слици 3. Ови облици фази скупова такође, су подржани у имплементираним програмским решењу које ће касније бити описано.



Слика 3. Облици функција припадности

- Троугаона функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$$

при чему су a и c темена основице а b врх троугла

- Трапезоидна функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & x \geq d \end{cases}$$

при чему a и d су темена дуже основице (подножја) а b и c темена краће основице

- Гаусова функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = \frac{1}{e^{\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}}$$

Облик функције одређен је са два параметра, a и b , при чему први одређује ширину а други средњу вредност функције. Гаусова функција је симетрична и као таква погодна за представљање лингвистичких атрибута унутар посматраног опсега, док је граничне фази скупове

погодно представити сигмоидном функцијом (Piegat, 2001). Из овог разлога то је једна од најчешће коришћених функција при описивању фази скупова.

- Звонаста функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-c}{a}\right)^{2b}}$$

при чему a и b утичу на дебљину и изглед репова, а параметар c одређује центар криве. Уобичајно је да b буде позитивно.

- Сигмоидна функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + e^{(-a \cdot (x-b))}}$$

Величина b одређује координате тачке којој одговара вредност функције припадности од 0,5. Величина a односи се на закривљеност.

- S функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

при чему a и b одређују екстреме закривљеног дела криве

- Z функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 0, & x \geq b \end{cases}$$

при чему a и b одређују екстреме закривљеног дела криве

- Линеарна функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = a \cdot x + b$$

при чему a одређује коефицијент правца, а b пресек са у-осом.

- П функција припадности дефинисана је следећим изразом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2, & \frac{a+b}{2} \leq x \leq b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-c}{d-c}\right)^2, & c \leq x \leq \frac{c+d}{2} \\ 2 \cdot \left(\frac{x-d}{d-c}\right)^2, & \frac{c+d}{2} \leq x \leq d \\ 0, & x \geq d \end{cases}$$

при чему a и d су екстреми дуже основице (подножја) а b и c екстреми краће основице закривљеног дела криве. Представља комбинацију S и Z функција припадности.

Синглтон (енгл. *singleton*) је специјалан облик фази скупа који достиже вредност један у једној тачки док је у свим осталим тачкама вредност функције припадности једнака нули.

Фази скуп је празан ако и само ако је $\mu_A(x) \equiv 0$ за свако x из универзалног скупа X .

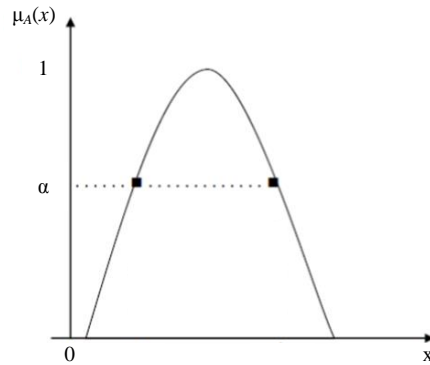
Два фази скупа A и B су једнака или еквивалентна (у ознаци $A=B$) ако и само ако $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ за свако x из универзалног скупа X .

Скуп A је садржан у скупу B тј. скуп A је подскуп скупа B (у ознаци $A \subset B$) ако и само ако је $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ за свако x из универзалног скупа X .

За фази скуп A можемо дефинисати његов α -пресек (енгл. *α -cut*) (у ознаци A_α) као скуп елемената x који припадају скупу A са степеном припадности не мањим од α .

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad \alpha \in [0,1]$$

На овај начин можемо направити границу поверења α и тако елиминисати из разматрања све елементе чији је степен припадања скупу A мањи од α .



Слика 4. α -пресек фази скупа A

Треба поменути и појам фази броја, који представља специјалан облик фази скупа дефинисан над простором реалних бројева. За фази бројеве дефинисане су и одговарајуће операције сабирања, одузимања, множења и дељења (које у овом раду неће бити разматране).

2.2.2. Основне операције

У наставку је дат приказ основних операција над фази скуповима.

Негација фази скупова

Негација, тј. фази комплемент скупа A (у ознаци A' , $\neg A$ или \bar{A}) дефинише се преко функције припадности: $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$. Другим речима, ако $\mu_A(x)$ одражава степен у коме елемент x задовољава карактеристике скупа A , онда $1 - \mu_A(x)$ одражава степен у коме елемент x не задовољава поменуте карактеристике. Комплемент комплемента скупа је оригиналан скуп.

Фази комплемент скупа може да буде било која функција која задовољава следеће особине:

1. $\neg 0=1, \neg 1=0$
2. $\forall a, b \in [0,1]$ ако је $a \leq b$ онда је $\neg a \geq \neg b$
3. континуалност
4. инволутивност негације : $\neg \neg a=a$

У првим дефиницијама **пресека** и **уније** (Zadeh, 1965) коришћени су оператори *min*, односно *max*:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Овако дефинисане фази операције важе и у случају класичних скупова, када $\mu(x)$ узима вредности нула или један. У радовима који су уследили предложене су и друге дефиниције фази операција, и то за пресек производ а за унију такозвана пробабилистичка сума. На овај начин вредности оба скупа доминантније су утицале на резултате, за разлику од оператора *min* и *max*, код којих је резултат зависио само од мање, односно веће вредности и није одражавао њихову интеракцију (Pedrycz, 1993). У раду (Thole, Zimmermann & Zysno, 1979) указано је на недостатке оператора *min* и оператора производ. Каснија проширења дефиниција фази оператора односила су се на ширу класу бинарних релација преузетих из метричких простора вероватноће названих троугаоне норме или краће *t*-норме.

***T*- норма**

Троугаоне норме (*t*-норме и *s*-норме) први је увео (Menger, 1942).

T-норма је функција два аргумента која пресликава $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ и задовољава следеће услове:

1. комутативност: $t(a, b) = t(b, a)$
2. асоцијативност: $t(a, t(b, c)) = t(t(a, b), c)$
3. монотоност: ако је $a \leq b$ онда важи $t(a, c) \leq t(b, c)$
4. гранични услове¹: $t(a, 1) = a$ и $t(a, 0) = 0$
5. субидемпотентност: $t(a, a) \leq a$

где су $a, b, c \in [0,1]$.

Свака од наведених особина одражава јасну и логичку интерпретацију логичких веза међу елементима. Комутативност одражава чињеницу да истинитосна вредност сложеног исказа не треба да зависи од редоследа

¹ У литератури се овај услов назива и постојање елемента идентитета.

навођења његових елемената, а монотоност је укључена како би се обезбедило да конјункција не опада ако истинитосна вредност (тј. степен припадности) расте (Турајлић, 2014). Гранични услови одражавају основна својства операција над скуповима (Булове теореме). Захтев да број 1 буде јединични елемент идентитета одговара интерпретацији функције припадности, тј. чињеници да је исказ апсолутно тачан ако функција припадности има вредност 1, тј. апсолутно нетачан уколико има вредност 0 (Турајлић, 2014). Из услова монотоности и постојања елемента идентитета следи услов $t(a,0)=0$.

Постоји небројено много t -норми, а најчешће коришћене су:

1. минимум: $t_m(a, b) = \min(a, b)$
2. алгебарски производ: $t_p(a, b) = a \cdot b$
3. Лукашијевичева $t_l(a, b) = \max(a+b-1, 0)$
4. драстични пресек:

$$t_d(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & \text{ако је } \max(a, b) = 1 \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}$$

Лукашијевичева t -норма позната је и под називом ограничени производ.

Може се показати да важи следеће тврђење: $t_d \leq t_l \leq t_p \leq t_m$

$$y \in [0,1] \Rightarrow y \leq 1 \text{ добијамо } t(x, y) \xrightarrow{\text{особина мононости}} t(x, y) \leq t(x, 1) \xrightarrow{\text{гранични услов}} t(x, 1) = x \leq x$$

$$x \in [0,1] \Rightarrow x \leq 1 \text{ добијамо } t(x, y) \xrightarrow{\text{особина комутативности}} t(x, y) = t(y, x) \leq t(y, 1) = y \leq y$$

из $t(x, y) \leq x$ и $t(x, y) \leq y \Rightarrow t(x, y) \leq \min(x, y)$ а то је управо t_m .

На основу претходног, може се закључити:

$$t(x, y) \leq t_m(x, y)$$

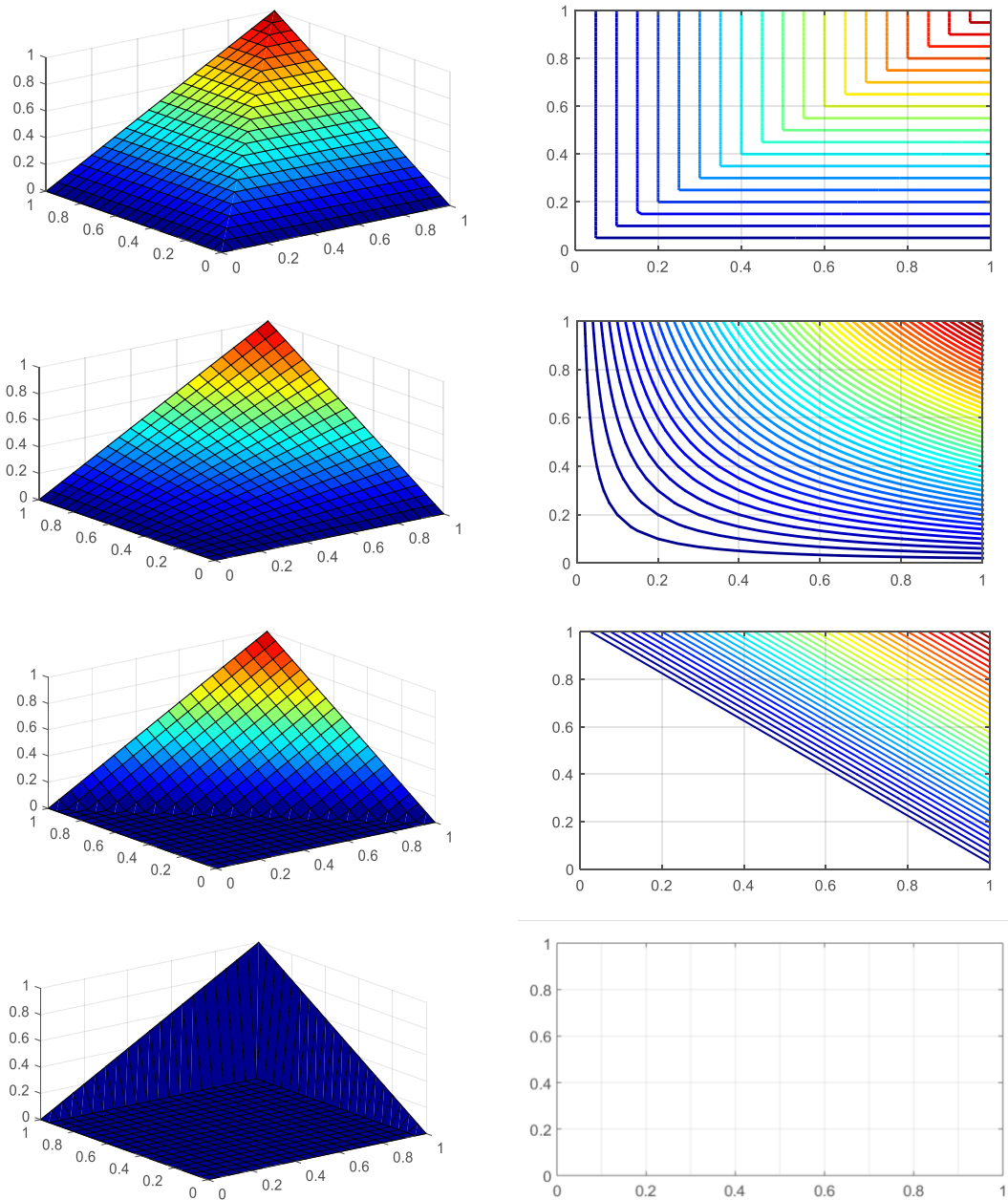
Са друге стране:

$$x = 1 \Rightarrow t(x, y) = t(1, y) = y = t_d$$

$$y = 1 \Rightarrow t(x, y) = t(x, 1) = x = t_d$$

За $x = 0$ или $y = 0$ $t(x, y) = t_d = 0$. То значи да за граничне вредности важи $t(x, y) = t_d$. За $x, y \in (0, 1) : t_d(x, y) = 0$. На основу наведеног може се закључити да важи $t_d(x, y) \leq t(x, y)$.

На следећем графику приказане су четири основне t -норме.



Слика 5. График површине и контурни график за четири основне t -норме (минимум, алгебарски производ, Лукашијевичева, драстични производ)

Пресек фази скупова

T-норма се користи за дефинисање пресека и све њене особине могу лако да се пренесу на релацију пресека. Пресек има значење конјункције (логичко AND) и потребно је да задовољава следеће особине:

1. комутативност: $p(a, b) = p(b, a)$
2. асоцијативност: $p(a, p(b, c)) = p(p(a, b), c)$
3. монотоност: ако је $a \leq b$ онда важи $p(a, c) \leq p(b, c)$
4. гранични услов: $p(a, 1) = 1$
5. субидемпотентност: $p(a, a) \leq a$

где су $a, b, c \in [0, 1]$.

Пету особину релација пресека мора да задовољи само у класичној фази логици.

S-норма

S-норма је функција два аргумента која пресликава $s: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ и задовољава следеће услове:

1. комутативност: $s(a, b) = s(b, a)$
2. асоцијативност: $s(a, s(b, c)) = s(s(a, b), c)$
3. монотоност: ако је $a \leq b$ онда важи $s(a, c) \leq s(b, c)$
4. постојање елемента идентитета¹: $s(a, 1) = 1$ и $s(a, 0) = a$
5. субидемпотентност: $s(a, a) \geq a$

где су $a, b, c \in [0, 1]$.

S-норма такође може да се изрази на основу везе: $s(a, b) = 1 - t(1 - a, 1 - b)$.

Из овог разлога s-норма у фази логици има и назив t-конорма.

Функција која се користи као s-норма мора одговарати функцији која се користи као t-норма, тј. елементарне t-конорме су дуалне одговарајућим елементарним t-нормама.

¹ У литератури се овај услов назива и услов идентичности.

Најчешће коришћене s -норме су:

1. максимум: $s_m(a, b) = \max(a, b)$
2. алгебарска сума: $s_p(a, b) = a + b - a \cdot b$
3. Лукашијевичева $s_l(a, b) = \min(1, a + b)$
4. драстични унија:

$$s_d(a, b) = \begin{cases} \max(a, b) & \text{ако је } \min(a, b) = 0 \\ 1 & \text{у супротном} \end{cases}$$

Како дуалност мења поредак, за s -норме можемо рећи да важи следеће тврђење:

$$s_m \leq s_p \leq s_l \leq s_d.$$

Доказ је сличан доказу коришћеном за t -норме. Наиме, на основу особине монотоности и граничних услова из:

$$y \geq 0 \Rightarrow s(x, y) \geq s(x, 0) = x \geq x.$$

На основу особине комутативности и особине монотоности и граничних услова из:

$$x \geq 0 \Rightarrow s(x, y) = s(y, x) \geq s(y, 0) = y \geq y.$$

Из $s(x, y) \geq x$ и $s(x, y) \geq y \Rightarrow s(x, y) \geq \max(x, y)$ а то је управо s_m .

На основу претходног, може се закључити:

$$s(x, y) \geq s_m(x, y).$$

Користећи граничне услове за:

$$x = 0, y \neq 0 \Rightarrow s(x, y) = s(0, y) = y = s_d.$$

Аналогно,

$$x \neq 0, y = 0 \Rightarrow s(x, y) = s(x, 0) = x = s_d.$$

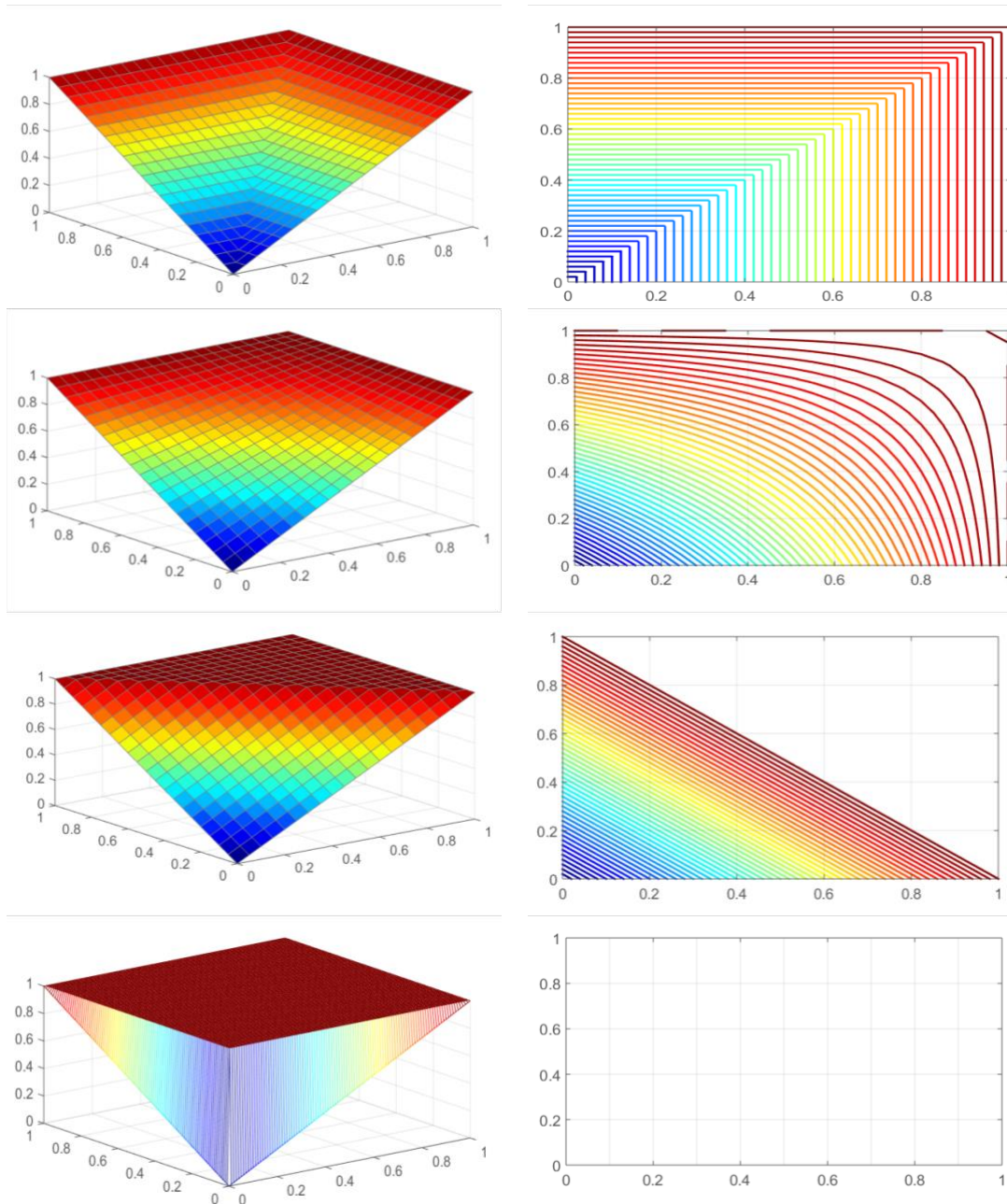
То значи да за граничне услове важи:

$$s(x, y) = s_d.$$

За $x, y \in (0, 1) : s_d(x, y) = 1$.

На основу наведеног може се закључити да важи $s(x, y) \leq s_d(x, y)$.

На следећем графику приказане су четири основне s -норме.



Слика 6. График површине и контурни график за четири основне s -норме (максимум, алгебарска сума, Лукашијевичева, драстична унија)

Унија фази скупова

На основу претходног, сва својства s -норме могу лако да се пренесу на релацију уније. Унија има значење дисјункције (логичко OR) и задовољава следеће особине:

1. комутативност: $u(a, b) = u(b, a)$
2. асоцијативност: $u(a, u(b, c)) = u(u(a, b), c)$
3. монотоност: ако је $a \leq b$ онда важи $u(a, c) \leq u(b, c)$
4. гранични услов: $u(a, 0) = 0$
5. субидемпотентност: $u(a, a) \geq a$

Пету особину релација уније мора да задовољи само у класичној фази логици.

(Pedrycz, 1993) закључује да неограничени скуп фамилија троугаоних норми, проширен могућношћу избора различитих параметара (у овом приказу нису наведене параметарске норме¹), даје мноштво могућности за имплементацију логичких веза. Избор реализације оператора AND и OR зависи од проблема који решавамо. Резултат ових операција зависи од карактера везе, тј. од степена међусобне интеракције самих елемената (објеката). Аутор даље наводи да уколико је реч на пример о елементима управљања који су међусобно снажно супротстављени (на пример *висок квалитет и ниска цена*) погодна је користити алгебарски производ, док уколико међу њима не постоји јасна интеракција (на пример *висок квалитет и брза уградња*) минимум би могао бити адекватан оператор.

2.2.3. Фази релације и фази композиција

Фази релација \mathcal{R} над два универзална скупа X и Y , тј. њиховим Декартовим (картезијанским) производом је фази скуп дефинисан на следећи начин (Bojadziev & Bojadziev, 1997):

$$\mathcal{R} = \{((x, y), \mu_{\mathcal{R}}(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y, \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \in [0, 1]\}$$

Фази релација представља фази скуп у простору $X \times Y$. Функција припадности $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ односи се на степен у коме пар (x, y) задовољава релацију \mathcal{R} тј. степен у коме је елемент x у датој релацији са елементом y . За разлику од класичне релације, фази релацији се, поред граничних вредности интервала, могу придружити и све вредности унутар $[0, 1]$. Наравно, што је $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ ближи 1 то је

¹ Преглед параметарских t-норми и s-норми може се наћи у (Pedrycz, 1993)

њихова веза дефинисана релацијом јача. Фази релацијом може се ближе описати веза међу елементима (x је много значајнији од y ; x и y су веома значајни; x и y су једнако значајни, итд.). У случају фази релације, Декартов производ погодно је матрично представити где број редова одговара броју елемената првог скупа X а број колона броју елемената другог универзалног скупа Y .

Претходну дефиницију можемо проширити и дефинисати n -арну фази релацију на следећи начин:

$$\mathcal{R} = \left\{ \left((x_1, x_2, \dots, x_n), \mu_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \mid \begin{array}{l} (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \\ \mu_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0,1] \end{array} \right\}$$

Како је фази релација фази скуп у простору који је одређен производом, све припадајуће алгебарске операције се могу дефинисати коришћењем оператора фази уније, пресека и комплемента (*Mendel, 1995*).

Нека су $\mathcal{R}(x,y)$ и $\mathcal{S}(x,y)$ две фази релације над истим простором $X \times Y$ тада се пресек и унија релација \mathcal{R} и \mathcal{S} , тј. њихова композиција могу дефинисати на следећи начин:

$$\mu_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(x, y) * \mu_{\mathcal{S}}(x, y)$$

$$\mu_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}(x, y) = \mu_{\mathcal{R}}(x, y) \oplus \mu_{\mathcal{S}}(x, y)$$

где $*$ означава било коју t -норму а \oplus било коју s -норму (*Mendel, 1995*). Између ових релација постоји веза: $\overline{\mathcal{R} * \mathcal{S}} = \overline{\mathcal{R}} \oplus \overline{\mathcal{S}}$ (*Pedrycz, 1993*).

Уколико су $\mathcal{R}(x, y)$ и $\mathcal{S}(y, z)$ фази релације дефинисане над различитим просторима $X \times Y$, односно $Y \times Z$, које деле заједнички скуп, фази композиција, у ознаци $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ одређена је функцијом припадности (*Mendel, 1995*):

$$\mu_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}}(x, z) = \sup_{y \in Y} [\mu_{\mathcal{R}}(x, y) * \mu_{\mathcal{S}}(y, z)]$$

при чему су $\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \in [0,1]$ и $\mu_{\mathcal{S}}(y, z) \in [0,1]$.

У случају да је релација \mathcal{R} само фази скуп, релација $\mu_{\mathcal{R}}(x, y)$ постаје $\mu_{\mathcal{R}}(x)$. Такође, како је $Y = X$, можемо рећи да претходна \sup - \star композиције постаје $\sup_{y \in Y} [\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \star \mu_S(y, z)] = \sup_{x \in X} [\mu_{\mathcal{R}}(x) \star \mu_S(x, z)]$.

Како се даље наводи, мотивација за коришћење оператора звезда, који означава t -норму, налази се у класичној \max - \min ¹ и \max - prod ² композицији (и \min и prod су t -норме). За разлику од класичне композиције, која даје исти резултат и у случају \max - \min и \max - prod композиције, код фази релација то није случај.

Мада је могуће користити различите t -норме, најчешће коришћене \sup - \star композиције су управо \sup - \min (предложена од стране Zadeh-a) и \sup - product (Kaufmann, 1975). Разлог њихове популарности лежи у чињеници да су рачунски веома једноставне. У литератури су познати и \sup - bounded-product оператор (Mizumoto, 1981) и \sup - drastic-product оператор (Mizumoto, 1981).

У литератури се може наћи и дефиниција \inf - \diamond композиције:

$$\mu_{\mathcal{R} \otimes_S}(x, z) = \inf_{y \in Y} [\mu_{\mathcal{R}}(x, y) \diamond \mu_S(y, z)]$$

где оператор \diamond означава s -норму.

Специјалан случај композиције добијамо када као резултат интеракције фази скупа X и фази релације \mathcal{R} добијамо фази скуп Y . Наиме, може се написати

$$Y = X \star \mathcal{R}$$

$$Y = X \otimes \mathcal{R}$$

Овај специјалан случај композиције касније ће бити разматран у смислу фази импликације као основе фази система закључивања.

¹ \max - \min композиција релација $R(X, Y)$ и $S(Y, Z)$ дефинисана је функцијом припадности:

$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \left\{ (x, z), \max_y [\min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z))] \right\}$$

² \max - product композиција релација $R(X, Y)$ и $S(Y, Z)$ дефинисана је функцијом припадности:

$$\mu_{R \times S}(x, z) = \left\{ (x, z), \max_y [\mu_R(x, y) \cdot \mu_S(y, z)] \right\}$$

2.3. Конзистентна реално-вредносна [0,1] логика

Класична теорија фази скупова (фази логика и фази релације) не налази се у Буловом оквиру јер нису задовољене све Булове аксиоме што се пре свега односи на два основна (Аристотелова) закона: закон искључења трећег и контрадикцију (Radojević, 2008a).

Закон контрадикције односи се на чињеницу да сваки елемент може припадати скупу или његовом комплементу тј. не може истовремено припадати и скупу и његовом комплементу, $A \cap \neg A = \emptyset$.

Закон искључења трећег односи се на чињеницу да сам скуп A и његов комплемент $\neg A$ чине цео универзум, тј. $A \cup \neg A = U$.

Следећи елементарни примери (на пример за вредност $\mu_A(x) = 0.2$) показују да су у класичној фази логици нарушени ови закони:

Закон искључења трећег:

- У случају реализације s-норме преко алгебарске суме:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) \vee \neg \mu_A(x) &= \mu_A(x) + (1 - \mu_A(x)) - \mu_A(x) * (1 - \mu_A(x)) \\ &= 0.2 + 0.8 - 0.16 \\ &= 0.84 \neq 1\end{aligned}$$

- У случају реализације s-норме преко максимума:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) \vee \neg \mu_A(x) &= \max(\mu_A(x), (1 - \mu_A(x))) \\ &= \max(0.2, 0.8) \\ &= 0.8 \neq 1\end{aligned}$$

Неки аутори сматрају да се овај закон ни не тиче фази логике јер закон искључења трећег одређује да ли је неки исказ тачан или нетачан па се самим тим и не односи на фази логику.

Закон контрадикције:

- У случају реализације t-норме преко производа:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) \wedge \neg\mu_A(x) &= \mu_A(x) * (1 - \mu_A(x)) \\ &= 0.2 * 0.8 \\ &= 0.16 \neq 0\end{aligned}$$

- У случају реализације s-норме преко минимума:

$$\begin{aligned}\mu_A(x) \wedge \neg\mu_A(x) &= \min(\mu_A(x), (1 - \mu_A(x))) \\ &= \min(0.2, 0.8) \\ &= 0.2 \neq 0\end{aligned}$$

Како би увео реално-вредносну логику која поштује све Булове законе на целом интервалу $[0,1]$, Радојевић (*Radojević, 2005*) је предложио тзв. конзистентну фази логику. Овај приступ се заснива на интерполативној Буловој алгебри, која представља конзистентну реално-вредносну реализацију коначне Булове алгебре (*Radojević, 2008b*). Термин „интерполативна“ је последица њене семантике засноване на појму генерализованог Буловог полинома, док њена „конзистентност“ потиче од чињенице да се и на вредносном нивоу чувају сви закони Булове алгебре. Реално-вредносна реализација значи да елементи могу узети било коју реалну вредност из јединичног интервала $[0,1]$. На овај начин омогућено је ефикасније описивање посматраних објеката и њихових особина, а самим тим и њихово међусобно поређење. Како се вредности функција припадности налазе у јединичном интервалу могуће их је третирати као истинитосне вредности неког исказа, чиме се отвара могућност примене интерполативне Булове алгебре у проблемима које решава фази логика. Конзистентна фази логика може се користити при раду са логиком, скуповима и релацијама (*Radojević, 2008b*).

Атоми су најједноставнији елементи алгебре и њихов број је коначан, што значи да интерполативна Булова алгебра (ИБА) представља атомску алгебру. Сама алгебра разликује два нивоа: симболички и вредносни ниво. На симболичком нивоу дефинише се структура самих ИБА елемената, тј. одређује се који атоми учествују у структури а који не. Објекти симболичког нивоа су закони Булове алгебре над атомима.

Овај приступ тек на вредносном нивоу (након што су извршене све трансформације) уводи вредности тако да су очувани сви закони који су постављени на симболичком нивоу. Као последица тога, у одређеним ситуацијама, овај приступ даје боља решења него класична фази логика што ће бити илустровано у овом раду.

2.3.1. Основни појмови

При реализацији фази скупова у оквиру Булове алгебре полази се од атрибута који чине домен Булове алгебре, при чему се анализирају само примарни атрибути. Скуп $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ представља скуп примарних елемената¹. Својство примарних елемената ИБА је да се не могу изразити применом Булових оператора на преостале примарне елементе. На основу скупа примарних елемената могуће је генерисати скуп свих могућих елемената ИБА насталих применом Булових оператора, у ознаци $BA(\Omega)$, при чему је $\Omega \subset BA(\Omega)$. Практично, уколико је $n = |\Omega|$ тада је могуће генерисати $2^{2^n} = |BA(\Omega)|$ елемената.

На симболичком нивоу, интерполативна Булова алгебра идентична је Буловој алгебри са коначним бројем елемената: $\langle BA, \cap, \cup, \neg \rangle$ ² (Radojević, 2008b)

ИБА је алгебарска структура коју чини коначан скуп елемената, два бинарна оператора конјункција (\wedge) и дисјункција (\vee) и унарни оператор негације (\neg) (конјункција се односи на пресек, а дисјункција на унију). Елементи ИБА на симболичком нивоу независни су од њихове реализације, како квалитативно (независно од својства, релације...) тако и квантитативно (независно од вредносне реализације) (Radojević, 2006). Резултат било које операције над елементима ИБА је такође елемент ИБА.

Унија, тј. конјункција два ИБА елемента φ и ψ при чему су $\varphi, \psi \in BA(\Omega)$, резултује новим ИБА елементом са следећом карактеристиком:

$$(\varphi \vee \psi) \Rightarrow \varphi \subset (\varphi \vee \psi), \psi \subset (\varphi \vee \psi).$$

¹ Под елементом овде подразумевамо атрибут, својство или релацију.

² У неким радовима Радојевић је Булову алгебру дефинисао као $\langle BA, \wedge, \vee, \neg \rangle$

Пресек, тј. дисјункција два ИБА елемента φ и ψ резултује новим ИБА елементом са следећом карактеристиком:

$$(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi \subset (\varphi \wedge \psi), \psi \subset (\varphi \wedge \psi).$$

Комплемент, тј. негација било ког ИБА елемента φ је нови ИБА елемент $\neg\varphi$ који садржи све оно што елемент φ не садржи.

Структура $\sigma(\varphi)$ било ког ИБА елемента $\varphi \in BA(\Omega)$ одређена је скупом атомских елемената садржаних у анализираном ИБА елементу φ .

Карактеристична функција структуре $\chi_{\sigma(\varphi)}$, или краће структурна функција, било ког ИБА елемента $\varphi \in BA(\Omega)$ дата је следећим изразом:

$$\chi_{\sigma(\varphi)}(S) = \begin{cases} 1, & S \in \sigma(\varphi), \\ 0, & S \notin \sigma(\varphi) \end{cases} \quad S \in P(\Omega)$$

где је Ω скуп примарних елемената ИБА, а $P(\Omega)$ партитивни скуп скупа Ω .

Структурна функција $\chi_{\sigma(\varphi)}$ елемента ИБА φ одређује који атомски елемент ће бити укључен (што се означава 1), односно који искључен (што се означава 0) у посматраној структури. Можемо написати:

$$\chi_s(a_i) = \begin{cases} 1, & a_i \in S, \\ 0, & a_i \notin S \end{cases} \quad S \in P(\Omega), \quad a_i \in \Omega$$

Имајући то у виду, можемо написати следеће:

$$\chi_{\sigma(\varphi \cup \psi)}(S) = \chi_{\sigma(\varphi)}(S) \vee \chi_{\sigma(\psi)}(S)$$

$$\chi_{\sigma(\varphi \cap \psi)}(S) = \chi_{\sigma(\varphi)}(S) \wedge \chi_{\sigma(\psi)}(S)$$

$$\chi_{\sigma(\neg\varphi)}(S) = \neg\chi_{\sigma(\varphi)}(S)$$

где су $\varphi, \psi \in BA(\Omega)$.

Елемент ИБА „0“ је тривијални елемент јер не укључује ниједан атомски елемент:
 $\chi_{\sigma(0)}(S) = 0, \quad S \in P(\Omega)$.

Елемент ИБА „1“ је најсложенији елемент јер укључује све атомске елементе из Ω , тј. укључује све ИБА елементе: $\chi_{\sigma(1)}(S) = 1, S \in P(\Omega)$.

2.3.1.1. СИМБОЛИЧКИ НИВО

Симболички ниво се посматра независно од било које вредносне реализације. Вредност структурне функције одређена је на симболичком нивоу и не зависи од саме вредности ИБА елемената, које на овом нивоу не постоје.

Сваки ИБА елемент $\varphi \in BA(\Omega)$ може се једнозначно приказати преко дисјунктивне нормалне форме као унија одговарајућих атомских елемената одређених његовом структуром:

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \bigcup_{S \in P(\Omega) | \chi_{\sigma}(S)=1} \alpha(S)(a_1, \dots, a_n)$$

Атомски ИБА елемент може се представити пресеком примарних елемената $a_i \in \Omega$ и/или његових комплемената тако да се сваки елемент појављује само једном било као примарни елемент (a_i), било као његов комплемент ($\neg a_i$):

$$\alpha(S)(a_1, \dots, a_n) = \bigwedge_{a_i \in \Omega} \pi_S(a_i)$$

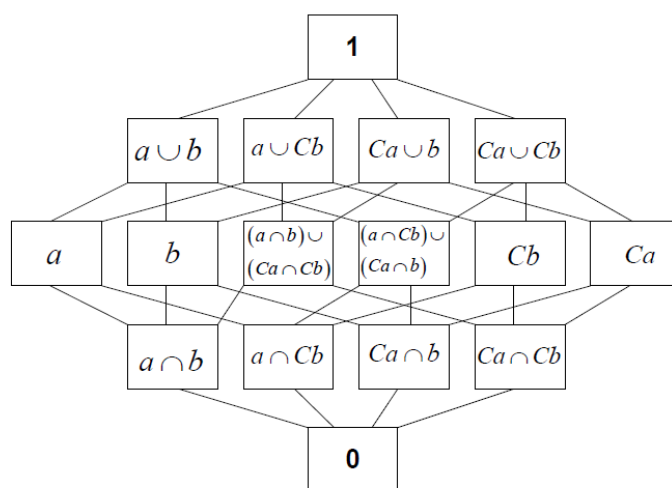
$$\pi_S(a_i) = \begin{cases} a_i, & a_i \in S \\ \neg a_i, & a_i \notin S \text{ тј. } a_i \in \Omega \setminus S \end{cases}$$

Атомски елемент је најједноставнији ИБА елемент јер не укључује ништа осим самог себе и тривијалног ИБА елемента „0“. Као последица, може се рећи да је пресек (конјункција) два атомска елемента празан скуп (нула).

Основна поставка је да се релација посматра са гледишта **структурне функционалности**, која каже да „структура било ког елемента ИБА може бити директно одређена на основу структуре њених компонената“ (Radojević, 2008a). Последице, сваки сложени елемент може се декомпоновати на атомске елементе. Структурна функционалност обезбеђује да закони који важе на нивоу атома важе и на нивоу структуре чиме је обезбеђено поштовање Булових закона. Како је структура независна од вредности, сви закони који важе на симболичком нивоу остају да важе и на вредносном нивоу.

Истинитосна функционалност полази од тога да истинитосна вредност сложеног исказа зависи од истинитосне вредности њених атомских елемената, независно од њихове структуре. Принцип истинитосне функционалности који представља основу класичне фази логике заправо је садржан у принципу структурне функционалности који представља шири појам. Он је само последица принципа структурне функционалности и важи само на вредносном нивоу класичног случаја.

Управо у томе се огледа разлика између разматраног приступа и других конвенционалних приступа. Како се у први план ставља принцип структурне функционалности, поступак подразумева да тек када се елемент рашчлани на симболичком нивоу могуће је израчунати његову вредност за дате вредности атома (што у неким случајевима доводи до разлике у резултатима).



Слика 7. Хесеов дијаграм, (Radojević, 2005)

Булова алгебра, тј. Булова решетка (енгл. *lattice*) је специјалан тип парцијално уређеног скупа. На врху се налази елемент „1“ као најсложенији елемент (који укључује све остале елементе) а на дну „0“ као најједноставнији елемент (који не укључује ниједан атомски елемент). Структуре уграђене у теорији фази скупова обично су мање богате у односу на Булов латис у теорији класичних скупова (Dubois & Prade, 1980).

2.3.1.2. ВРЕДНОСНИ НИВО

Вредносна реализација ИБА елемента у општем случају подразумева да њени елементи, након свих извршених трансформација, могу узети било коју реалну вредност из јединичног интервала $[0,1]$. Вредносна реализација било ког ИБА елемента $\varphi \in BA(\Omega)$ односи се на меру у којој неку особину $(\varphi)^v(x)$ поседује анализирани објекат x .

Поменута дисјунктивна каноничка форма има своју вредносну интерпретацију: вредност φ^v било ког ИБА елемента $\varphi \in BA(\Omega)$ за анализирани објекат једнака је суми вредности одговарајућих атомских ИБА елемената садржаних у анализираном објекту. Математички записано:

$$\varphi^v(a_1, \dots, a_n) = \sum_{S \in P(\Omega) | \chi_S(S)=1} \alpha^v(S)(a_1^v, \dots, a_n^v)$$

при чему је $\alpha^v(S)(a_1^v, \dots, a_n^v)$ вредносна реализација атомске функције $\alpha(S)(a_1, \dots, a_n)$.

Као што се може приметити, структурна функција иста је на оба нивоа. Увођењем вредности на вредносном нивоу $\varphi \rightarrow \varphi^v$ где је $\varphi \in BA(\Omega)$ чувају се сви закони Булове алгебре.

Вредносна реализација атомске функције $\alpha^v(S)(a_1^v, \dots, a_n^v)$ одређена је интензитетом атомских функција $\alpha(S)(a_1, \dots, a_n)$ на основу вредности примарних ИБА елемената који учествују у структури $a_i^v \in [0,1], a_i \in \Omega$ и неког општег пресликавања $[0,1]^\Omega \rightarrow [0,1]$.

За вредносну реализацију елемената ИБА користи се генерализовани Булов полином.

2.3.2. Генерализовани Булов полином

Свака логичка функција може да се једнозначно трансформише у одговарајући генерализовани Булов полином (ГБП) коришћењем ИБА (*Radojević, 2008b*).

Генерализовани Булов полином је полином чије су променљиве елементи Булове алгебре при чему користи операције стандардног сабирања (+), стандардног одузимања (-) и генерализованог производа (\otimes). Генерализовани производ има највећи приоритет у изразима у односу на остале операторе. Генерализовани производ је било која функција која пресликава $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ и која поред четири услова који се односе на t -норму, задовољава и:

1. комутативност: $t(a, b) = t(b, a)$
2. асоцијативност: $t(a, t(b, c)) = t(t(a, b), c)$
3. монотоност: ако је $a \leq b$ онда важи $t(a, c) \leq t(b, c)$
4. граничне услове¹: $t(a, 1) = a$ и $t(a, 0) = 0$

где су $a, b, c \in [0,1]$.

и један додатни услов који се односи на ненегативност:

$$\sum_{C \in P(\Omega \setminus S)} (-1)^{|C|} \otimes_{a_i \in SUC} a_i^v \geq 0$$

где је $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}, S \in P(\Omega)$.

Улога овог додатног услова је да обезбеди да све вредности атомске функције буду ненегативне.

Генерализовани Булов полином $\varphi^{\otimes}(a_1^v, \dots, a_n^v)$ омогућава израчунавање вредности одговарајућих атрибута, тј. елемената Булове алгебре $\varphi \in BA(\Omega)$ за сваки анализирани објекат. Важна карактеристика овог приступа је да се замена вредности и потребна израчунавања обављају тек након што се успостави коначна структура.

Сваки елемент Булове алгебре може се представити преко своје структуре:

$$\varphi^{\otimes}(a_1^v, \dots, a_n^v) = \sum_{S \in P(\Omega)} \sigma_{\varphi}^v(S) \otimes \alpha^{\otimes}(S)(a_1^v, \dots, a_n^v)$$

где је $\sigma_{\varphi}^v(S)$ вредносна реализација структурне функције $\sigma_{\varphi}(S), S \in P(\Omega)$.

¹ У литератури се овај услов назива и постојање елемента идентитета.

Одговарајући генерализовани Булов полином за атомски елемент био би:

$$\alpha^{\otimes}(S)(a_1^v, \dots, a_n^v) = \sum_{C \in P(\Omega \setminus S)} (-1)^C \otimes_{a_i \in S \cup C} a_i^v$$

где је \otimes оператор који представља генерализовани производ, $a_i \in \Omega$ и $a_i^v \in [0,1]$.

Нормализована вредност атомске функције односи се на следећи услов:

$$\sum_{S \in P(\Omega)} \alpha^v(S)(a_1^v, \dots, a_n^v) = 1$$

што значи да сума вредности свих атома који се односе на анализирани објекат не може да буде већа од један (претходни услов је обезбедио да доња граница ове суме буде нула).

Овај полином може се представити преко скаларног производа два вектора:

$$\varphi^{\otimes}(a_1^v, \dots, a_n^v) = \overrightarrow{\sigma_{\varphi}}(S) \otimes \vec{\alpha}^{\otimes}(S)(a_1^v, \dots, a_n^v)$$

где први означава вектор структуре димензија $l \times n$ док други означава вектор полинома атомских елемената димензија $n \times l$.

У (*Radojević, 2008b*) дефинисан је поступак трансформисања произвољне Булове функције (елемената коначне Булове алгебре) у одговарајући генерализовани Булов полином на следећи начин:

$$\begin{aligned} \varphi, \psi &\in BA(\Omega) \\ (\varphi \cap \psi)^{\otimes} &= (\varphi)^{\otimes} \otimes (\psi)^{\otimes} \\ (\varphi \cup \psi)^{\otimes} &= (\varphi)^{\otimes} + (\psi)^{\otimes} - (\varphi)^{\otimes} \otimes (\psi)^{\otimes} \\ (C\varphi)^{\otimes} &= 1 - (\varphi)^{\otimes} \\ &\vdots \\ a_i, a_j &\in \Omega \\ (a_i \cap a_j)^{\otimes} &= \begin{cases} a_i \otimes a_j, & a_i \neq a_j \\ a_i, & a_i = a_j \end{cases} \\ (a_i \cup a_j)^{\otimes} &= a_i + a_j - (a_i \cap a_j)^{\otimes} \\ (Ca_i)^{\otimes} &= 1 - a_i \end{aligned}$$

Наведено правило да пресек (конјункција) два иста својства, тј. елемента, даје исто то својство, у складу је са особином идемпотентности и од фундаменталног је значаја.

Израчунавање захтева да се изабере одговарајућа t -норма за генерализовани производ. Најчешће коришћене t -норме које се користе за генерализовани производ су минимум, алгебарски производ и Лукашијевичева t -норма.

$$a(x) \otimes b(x) = \min(a(x), b(x))$$

$$a(x) \otimes b(x) = a(x) \cdot b(x)$$

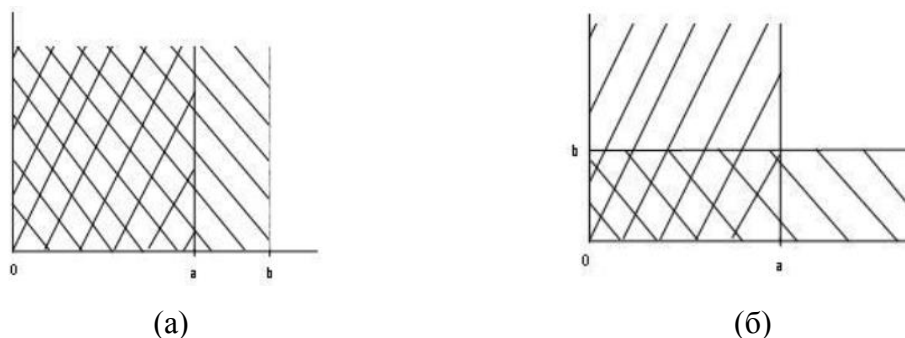
$$a(x) \otimes b(x) = \max(a(x) + b(x) - 1, 0)$$

Неке t -норме не испуњавају услов ненегативности па самим тим се не могу користити као генерализовани производ. На основу дефиниције, потребно је да буде испуњен услов:

$$\max(a(x) + b(x) - 1, 0) \leq a(x) \otimes b(x) \leq \min(a(x), b(x))$$

Изложени поступак захтева да се избор t -норме за генерализовани производ прилагоди природи самих елемената. Наиме, у случају да се ради о елементима исте природе, као генерализовани производ треба узети функцију минимума. У случају независних елемената, треба користити производ.

На следећој слици дата је геометријска интерпретација оба случаја. Како су променљиве исте природе има смисла цртати их на истој координатној оси, а простор који се односи и на елемент a_i и на елемент a_j одговара функцији $\min(a_i, a_j)$. У другом случају, како су променљиве различите природе, тј. независне, има смисла цртати их на различитим координатним осама, а простор који се односи и на елемент a_i и на елемент a_j дефинисан је правоугаоником чија површина одговара вредности функције $a_i * a_j$.



Слика 8. Геометријска интерпретација (а) минимума и (б) производа као генерализованог производа ($a \otimes b$), (Милошевић, 2012)

Природу променљивих, тј. њихов однос, можемо посматрати преко степена корелације. Ако су променљиве потпуно корелисане, прикладно је користити минимум као генерализовани производ. У случају да нису корелисане, потребно је за генерализовани производ користити производ, док се у случају негативне корелације користи Лукашијевичева t -норма.

Већ поменуто правило $(a_i \cap a_j)^\otimes = \begin{cases} a_i \otimes a_j, & a_i \neq a_j \\ a_i, & a_i = a_j \end{cases}$ у светлу претходног разматрања, може да се интерпретира на следећи начин: како је сваки елемент у потпуној позитивној корелацији са самим собом као генерализовани производ има смисла користити само минимум јер је $a_i \otimes a_i = \min(a_i, a_i) = a_i$.

Уколико у једном изразу фигурира више елемената чија је природа различита, тј. постоји различити степен корелације међу њима, поступак превођења налаже да се најпре генерализовани производ између корелисаних променљивих замени минимумом, а затим се прелази на некорелисане променљиве где се мења производом.

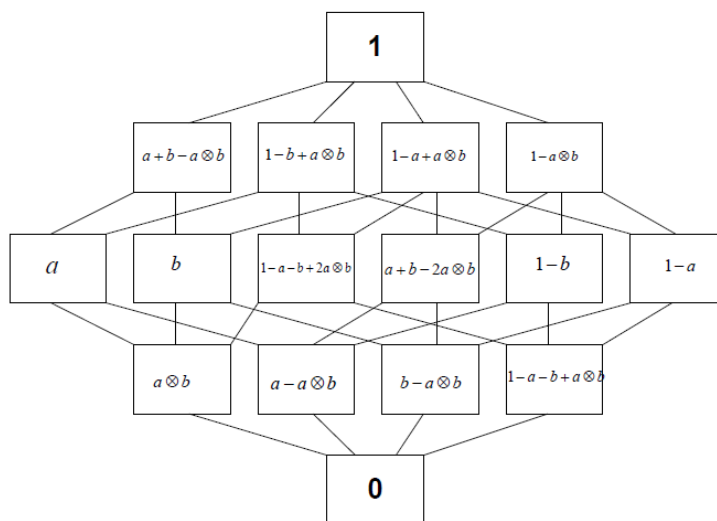
На основу претходног разматрања, може се закључити да је на овај начин обезбеђено поштовање закона искључења трећег:

$$\begin{aligned}
 & \mu_A(x) \vee \neg \mu_A(x) \\
 &= \mu_A(x) + (1 - \mu_A(x)) - \mu_A(x) \otimes (1 - \mu_A(x)) \\
 &= \mu_A(x) + 1 - \mu_A(x) - \mu_A(x) \otimes 1 + \mu_A(x) \otimes \mu_A(x) \\
 &= \mu_A(x) + 1 - \mu_A(x) - \mu_A(x) + \mu_A(x) = 1.
 \end{aligned}$$

као и закона контрадикције:

$$\begin{aligned}
 \mu_A(x) \wedge \neg \mu_A(x) &= \mu_A(x) \otimes (1 - \mu_A(x)) \\
 &= \mu_A(x) \otimes 1 - \mu_A(x) \otimes \mu_A(x) \\
 &= \mu_A(x) - \mu_A(x) = 0.
 \end{aligned}$$

ГБП пресликава одговарајуће елементе Булове алгебре на вредности из целог реалног интервала $[0,1]$ па је сачуван парцијални поредак на вредносном нивоу што није случај код осталих вишевредносних фази приступа (*Radojević, 2010*). Како закони искључења трећег и контрадикције важе на симболичком нивоу, односно на нивоу структуре, важе и за генерализовану вредносну реализацију.



Слика 9. Генерализовани Булови полиноми на Хесевом дијаграму, (*Radojević, 2008a*)

2.4. Фази систем закључивања

Једна од најважнијих примена фази логике јесу фази системи закључивања (енгл. *Fuzzy Inference System - FIS*). Фази системи закључивања су системи засновани на знању који користе елементе фази логике за моделовање веза између улаза и излаза. Управо фази логика даје велики број могућности које омогућавају мноштво различитих мапирања. Теорија фази скупова коришћена је како би се изразила знања и законитости кроз скуп правила и тиме омогућило процењивање и закључивање на логички конзистентан начин близак човеку. Примењени начин закључивања „у основи би се могао звати и апроксимативно резоновање, тј. облик резоновања код кога су истинитосне вредности и правила закључивања пре фази него прецизна“ (*Zadeh, 1975*).

Фази системи закључивања појављују се и под називима системи засновани на фази правилима, фази модели, фази контролери, фази асоцијативна меморија (*Jang, 1993*).

Они представљају једну од најнапреднијих компјутерски подржаних техника која може адекватно заменити нелинеарно размишљање својствено човеку (*Balanică, Dumitrache, Caramihai, Rae & Herbst, 2011*). Перформансе класичних приступа моделовању система веома су скромне када је реч о комплексним системима, и то нарочито ако је присутан велики степен неодређености јер је веома тешко дефинисати аналитичку структуру таквих нелинеарних система (*Sun, 1994*). Модели система засновани на класичним приступима, као што су на пример диференцијалне једначине, нису применљиви у ситуацијама када систем није до краја дефинисан или када је присутна неизвесност (*Proakis, 2001*). ФИС се наметнуо као добра алтернатива управо у таквим случајевима захваљујући томе што не захтева математичку анализу при моделовању већ само одговарајућу конструкцију модела и избор параметара. Није потребно дефинисати алгоритме нити математичке моделе (*Baig, Gholamhosseini & Harrison, 2012*). Они такође наводе да се не захтева потпуно разумевање система, тачне једначине и прецизне нумеричке вредности јер фази логика пружа алтернативни приступ, дозвољавајући да се сложени системи моделују на вишем нивоу апстракције.

Фази системи дају стабилна решења када не располажемо прецизним подацима јер су мање осетљиви на шум као и на промену самих параметара система.

Значајна предност ових система је у томе што они чине могућим имплементирање искуства, интуиције и хеуристика у духу „правила палца“ (*Kickert & Mamdani, 1978*), тј. засновани су на језичким правилима, које у већини случајева обезбеђују доменски експерти, чиме се ствара могућност да се њихово знање и искуство повежу са процесом који проучавамо. Што је природнији начин представљања фази правила, експертима је лакше да их искажу, разумеју, потврде, промене и прошире (*Mitra & Hayashi, 2000*). За онога ко разуме систем, фази правила се лако пишу и њихов број није унапред одређен већ је управо онолики колико је потребно да се адекватно опише систем. Флексибилност система огледа се у томе што се правила лако додају, бришу или модификују (*Mitra & Hayashi, 2000*).

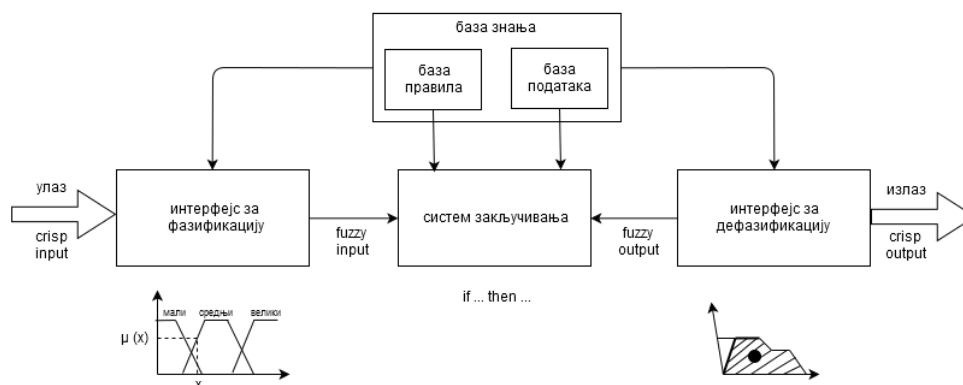
Уопштено гледано, сложеност и прецизност су обрнуто сразмерне јер са порастом сложености проблема могућност прецизне анализе и дефинисања опада, па отуда *fuzzy* начин размишљања не може да буде лош јер чини могућим решавање проблема који су превише сложени за прецизну анализу (*Zadeh, 1972*).

2.4.1. Компоненте фази система закључивања

Према (*Jang, 1993*), основу фази системи закључивања чини пет функционалних блокова:

1. база правила коју чини скуп *if-then* правила;
2. база података која дефинише параметре функција припадности оних фази скупова који су коришћени у фази правилима;
3. блок који креира одлуке закључујући на основу правила;
4. интерфејс за фазификацију који трансформише класичне (енгл. *crisp*) улазе у одговарајући фази скуп;
5. интерфејс за дефазификацију који трансформише фази резултат у класичнан (енгл. *crisp*) излаз.

Прва два блока, база правила и база података заједно се називају базом знања.



Слика 10. Компоненте фази система закључивања

У (Nayak, Sudheer, Rangan & Ramasastri, 2004) наводи се да се, генерално гледано, основна структура фази система закључивања састоји из три дела: базе правила, која садржи скуп правила, базе података, која дефинише функције припадности које се користе у фази правилима и механизма закључивања, који извршава поступак закључивања како би произвео излаз.

У овом раду подразумева се да се фази систем закључивања састоји из четири процеса. То су:

1. процес фазификације којим се трансформишу класичне (енгл. *crisp*) вредности улазних променљивих у вредности лингвистичких атрибута на основу функција припадности.
2. процес евалуације правила
3. процес закључивања на основу правила
4. процес дефазификације који подразумева мапирање излазних фази скупова у класичан број.

1. Процес фазификације

Процес фазификације преводи улазне вредности (улазне сигнале) у фази улазне вредности. Разлог за ову трансформацију домена је што правила захтевају фази скупове као своје аргументе. Фази скупом је представљен

атрибут лингвистичке променљиве, а само превођење се изводи на основу одговарајућих функција припадности.

Као што је већ речено, функцијом припадности универзални скуп X пресликава се на интервал $[0,1]$. Заправо, свакој тачки улазног простора додељује се број из овог интервала у зависности од степена којим неки улаз припада фази скупу, тј. мере у којој задовољава особине одређене лингвистичке променљиве (њеног атрибута) представљене тим фази скупом. Функција припадности се може моделовати или искуствено тј. на основу знања или на основу неког скупа улазно-излазних података који описују систем. Дobar избор облика и параметара сваке од функција припадности има велики утицај на ефикасност система.

У ситуацијама када подела улазног фази простора није до краја аутоматизована (што је најчешће случај), одлуку о броју функција припадности доноси онај ко пројектује фази систем закључивања. Њихово моделовање зависи, пре свега од система чије се понашање жели описати, тј. конкретне области примене фази система закључивања. Веће раздвајање постиже се већим бројем функција припадности, али то уједно води већој рачунској сложености која, између осталог, захтева и више времена за потребна израчунавања. Психолошка истраживања показују да је просечан човек способан да запамти и обради 7 ± 2 различита објекта. У складу с тим, број атрибута којима се описује једна лингвистичка променљива не би требало да буде већи од ових вредности. Функције припадности не морају да се преклапају, али управо то је једна од највећих снага фази логике (*Mendel, 1995*). Параметри ових функција „смештени“ су у фази бази знања.

2. Процес евалуације правила

Фази правила се представљају *if-then* исказима и имају кључно место у фази систему закључивања. Фази правила или фази условни искази су изрази облика „*if x is A then y is B*“, тј., „*ако је x A онда је y B*“ где су A и B фази

скупови описани одговарајућим функцијама припадности (Mamdani, 1976). Правилном означавамо специфичан однос између два фази скупа A и B .

Први, „ако“ (енгл. *if*), део правила, назива се премиса или узрок. Сваки једноставан фази предикатски исказ облика „ x је A “ у фази логици представљен је фази скупом (Mendel, 1995). За конструкцију користе се и фази оператори тј. логички оператори „и“, „или“ и „негација“ којима се повезују фази скупови премисе. Одговарајуће везе и начини закључивања умногоне зависе од начина дефинисања логичких оператора. Правила се изражавају кроз својство облика „ x је A “ које се може превести у логички исказ облика „ x припада фази скупу A “ па отуда степен припадности x скупу A означава заправо истинитосну вредност првобитног исказа „ x је A “ (Gaines, 1976). Не мора се свака улазна променљива појавити у премиси правила. Премиса фази правила зависи од поделе фази простора улаза. Одређивање одговарајућег броја правила и подела карактеристика улазног простора у већини случајева представља уметност (Sun, 1994).

Други, „онда“ (енгл. *then*), део правила, назива се закључак или последица. Правило, тј. његов последични део, активира се тек када је степен поклапања између премисе правила и улаза већи од нуле. Поређењем узрочног дела правила са улазом (улазним сигналом) израчунава се вредност (снага) премисе правила. Уколико се премиса састоји само од једног фази скупа тј. променљиве онда само она утиче на реализацију последичног дела. У случају да се премиса састоји од више делова међусобно повезаних фази операторима, израчунава се укупни резултат (снага) примењених логичких операција, а затим тај резултат (представљен једним бројем) одређује последични део. Многи аутори наводе да се непрекидност у одзиву система, као функције улазних променљивих, постиже тако што се за фази логичке операторе и функције припадности узимају континуалне функције.

Фази правила дају математичко значење изразу који описује квалитативни аспект закључивања (Sun, 1994). Захваљујући концизној форми, ова правила се

често користе, нарочито када је потребно да се апсорбује неодређеност модела на начин сличан ономе који људи свакодневно примењују када доносе одлуке у неизвесном и не до краја познатом окружењу (*Sanz, Ramírez & Correa, 2012*). Такође, фази модификатори омогућавају промену облика фази скупова, па при дефинисању правила можемо користити прилоге као што су врло, више, мање тј. можемо дефинисати жељену особину у неком степену, као и да појачамо или смањимо њен интензитет.

Правила се могу дефинисати на много различитих начина, али се углавном свODE на различите комбинације конјункције и дисјункције¹. Импликација се примењује на закључивање у *if-then* правилу. Фази логика трансформише хеуристичка правила, која је човек дефинисао, у аутоматизоване управљачке стратегије (*Mamdani & Assilian, 1975*).

Фази систем закључивања примењује фази *if-then* правила којима се моделују квалитативни аспекти људског знања и закључивања без коришћења прецизне квантитативне анализе (*Jang, 1993*). Веома је тешко наћи глобалну структуру нелинеарних процеса, па је идеја фази моделовања налажење скупа локалних улазно-излазних релација којима се описује посматрани процес (*Jacquin & Shamseldin, 2009*). Постоји велики број процедура на основу којих може да се реализује процес фази закључивања, али само мали број њих се заправо примењује (*Mendel, 1995*).

Уопштено, фази правила су фази релације изражене као *фази импликација*. Свака од импликација описује локална улазно-излазна пресликавања тј. локално понашање система (*Sugeno & Kang, 1988*). Фази логика, дефинише фази импликацију на много различитих начина. У (*Lee, 1990*) се наводи да се у литератури појављује више од 40 различитих дефиниција фази импликације.

¹ У готово свим применама фази система закључивања, у једном правилу се појављује само један од логичких оператора, а употреба негације је изузетно ретка.

(Baldwin & Pilsworth, 1980) детаљно разматрају функцију фази импликације и њена својства. Као основна својства функције фази импликације наводе: фундаментално својство (енгл. *fundamental property*), својство глаткости (енгл. *smoothness property*), неограничено закључивање (енгл. *unrestricted inference*), симетричност генерализованог *modus ponens* и генерализованог *modus tollens* (енгл. *symmetry of generalized modus ponens and generalized modus tollens*) и пропација неодређености (енгл. *propagation of fuzziness*). У истом раду, детаљно се разматрају различита правила и својства импликација која се могу наћи у литератури која проучава апроксимативно резонување.

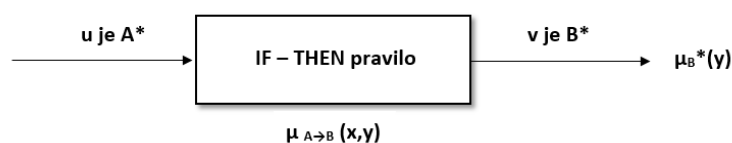
Два најзначајнија и најчешће коришћена правила закључивања, заснована на фази импликацији, су генерализовани *modus ponens* и генерализовани *modus tollens*. Начини закључивања приказани су следећом табелом (где су A , A' , B и B' фази скупови):

Табела 1. Правила закључивања

	Генерализовани <i>modus ponens</i>	Генерализовани <i>modus tollens</i>
Премиса 1	x је A'	y је B'
Премиса 2	ако x је A онда y је B	ако x је A онда y је B
Последица	y је B'	x је A'

У фази логици *modus ponens* правило закључивања проширено је генерализованим *modus ponens* правилом које се односи на чињеницу да фази скуп A' не мора неопходно бити исти као фази скуп A у премиси правила, као и да фази скуп B' не мора бити исти као фази скуп B у последици правила.

Графичка интерпретација генерализованог *modus ponens* правила:



Слика 11. Графичка интерпретација генерализованог *modus ponens* правила, (Mendel, 1995)

Фази композиција $\sup\star$, разматрана у претходном поглављу, у случају релације импликације могла би се изразити на следећи начин:

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) \star \mu_{A \rightarrow B}(x, y)]$$

(*Mamdani, 1974*) је предложио минимум за дефинисање импликације:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) \triangleq \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

(*Larsen, 1980*) је такође предложио оператор чија главна предност лежи у рачунској једноставности. Он је импликацију дефинисао преко производа:

$$\mu_{A \rightarrow B}(x, y) \triangleq \mu_A(x) \cdot \mu_B(y).$$

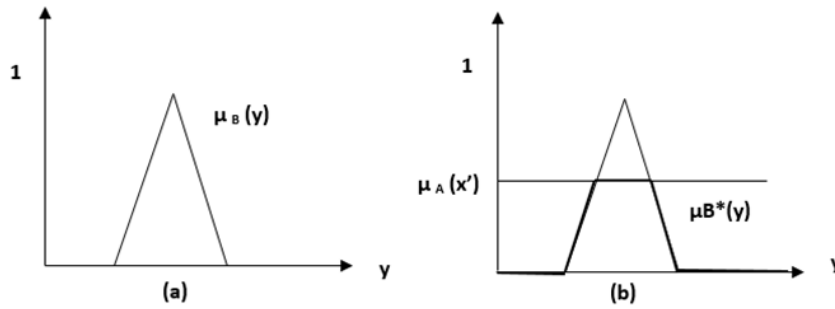
И данас су минимум и производ два најчешће коришћена начина закључивања упркос интересантом разматрању (*Mendel, 1995*) у коме је дата следећа табела:

Табела 2. Закључивање реализовано преко минимума и производа

$\mu_A(x)$	$\mu_B(y)$	$\min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$	$\mu_A(x) \cdot \mu_B(y)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

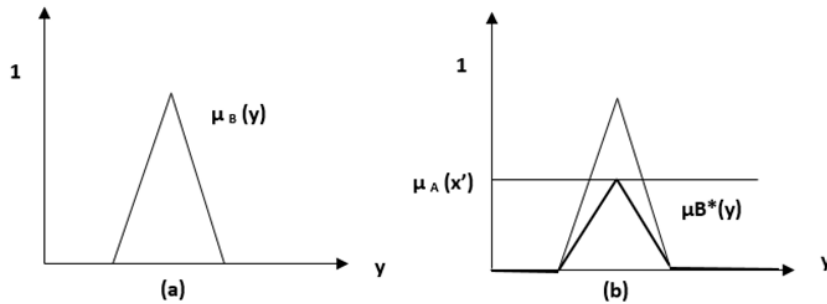
Табела показује да закључивање реализовано преко минимума и производа нема баш много заједничког са традиционалном импликацијом тј. да дају исте вредности само у случају када су и узрочни и последични део или тачни или су оба нетачна. Управо из овог разлога, како је предложено у (*Mendel, 1995*), минимум и производ импликацију можемо називати само инжењерским импликацијама.

Графичка интерпретација минимум импликације дата је на слици:



Слика 12. Графичка интерпретација минимум импликације, (Mendel, 1995)

Графичка интерпретација производ импликације дата је на слици:



Слика 13. Графичка интерпретација производ импликације, (Mendel, 1995)

У претходном поглављу разматрана је фази композиција и дефинисан је њен специјални облик који, као резултат интеракције фази скупа X и фази релације \mathcal{R} , даје фази скуп Y . Наиме, фази правила закључивања можемо написати у облику:

$$Y = X * \mathcal{R}$$

$$Y = X \otimes \mathcal{R}$$

где $*$ означава било коју t -норму а \otimes било коју s -норму; тј., још краће,

$$Y = X \circ \mathcal{R}$$

За дату релацију \mathcal{R} и дату вредност улаза, тј. прве променљиве x , вредност друге променљиве y добијамо закључивањем на основу композиције

$y = x \circ \mathcal{R}$. У највећем броју случајева, резултат ове композиције (фази алгоритма \mathcal{R}) се интерпретира као *max-min* производ:

$$\mu_Y(y) = \max_x \{ \min\{ \mu_{\mathcal{R}}(x, y), \mu_X(x) \} \}$$

Овде је коришћена дефиниција Декартовог производа два фази скупа X и Y

$$X \times Y = \mu_Y(y) = \sum_i \sum_j \min\{ \mu_X(x_i), \mu_Y(y_j) \}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

где су x и y елементи универзалних скупова X односно Y, респективно.

3. Процес закључивања на основу правила

Низом лингвистичких правила описује се стратегија управљања, тј. процес доношења одлука. Правила су најчешће типа више улаза један излаз (енгл. *multi-input single-output – MISO*) што се заправо односи на случај када је узрочни део састављен од више улаза, док се последични део састоји од само једног излаза. У случају да су правила типа више улаза више излаза (енгл. *multi-input multi-output – MIMO*) можемо их посматрати их као скуп више *multi-input single-output* правила. Најчешће се паралелно реализује више правила па је потребно комбиновати (агрегирати) њихове појединачне излазе како би се добио коначан излаз, акција, тј. одлука коју треба спровести.

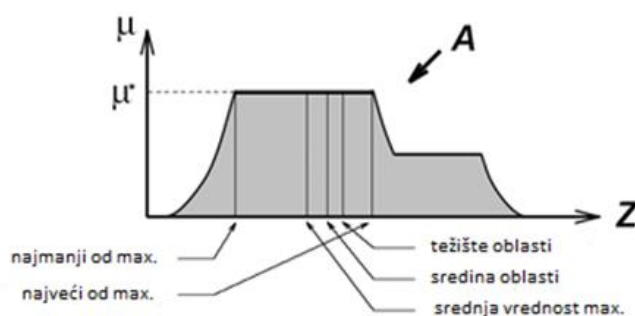
Један од начина агрегације излаза је креирање једног фази скупа, као комбинације свих појединачних излазних фази скупова, за које нам је потребна нека од метода дефазификације. У другим случајевима појединачни излази су класични (енгл. *crisp*) бројеви који се комбинују у коначан излаз, те дефазификација није потребна. Агрегација се у том случају најчешће реализује линеарном комбинацијом (правилима се додељују тежине у зависности од њиховог значаја) или методом максимума.

4. Процес дефазификације

У случају када евалуација правила даје као резултат фази скуп, потребно је извршити дефазификацију. Процес дефазификације своди се на начин одређивања једне излазне вредности која ће репрезентовати одређену површину. Циљ дефазификације резултујућег фази скупа је његова конверзија у класичан (енгл. *crisp*) број. Потреба за дефазификацијом је последица чињенице да већина практичних примена захтева класичне бројеве као излазе који се могу односити на неке одлуке или управљачке акције.

Метод дефазификације су методе трансформација резултујућих фази скупова у класичан (енгл. *crisp*) излаз система. Неке од најпознатијих метода дефазификације су:

- Метод центра гравитације (енгл. *Centre of gravity – COG* познат је и као *Centroid of area – COA*) вероватно најпрецизнији али и рачунски најзахтевнији јер рачуна центар гравитације површине испод криве расподеле излазних вредности (управљачких акција).
- Метод половљења простора (енгл. *Bisector of area – BOA*) тражи апсцису оне вертикалне линије која дели простор испод криве на два једнака дела. Рачунски је веома захтеван и у дискретним случајевима неприменљив (јер свака тачка између два броја дели простор на два једнака дела).
- Метод максимума (енгл. *Maximum Method – COM*) за излаз узима ону вредност променљиве за коју функција припадности, тј. расподела излазних вредности, достиже највећу вредност.
- Средња вредност максимума (енгл. *Mean of maximum – MOM*) тражи ону вредност за коју функција припадности достиже максимум а уколико је више таквих вредности тражи њихову аритметичку средину (наравно, у случају да постоји један максимум своди се на претходни метод). Овај метод није рачунски захтеван, али некад може да доведе до необичних резултата (*Tadić, Stanojević, Aleksić, Mišković & Bukvić, 2006*).
- Најмањи максимум (енгл. *Smallest of maximum – SOM*)
- Највећи максимум (енгл. *Largest of maximum – LOM*)



Слика 14. Графички приказ метода дефазификације, (Ross, 2010)

Опште фази резонување, код организационих или финансијских система не захтева никакве специфичне технике дефазификације већ захтева велику флексибилност приликом конструкције правила за разлику од система аутоматског управљања у реалном времену где је брзина добијања резултата веома битна (Tadić, Stanojević, Aleksić, Mišković & Bukvić, 2006). У том смислу, избор методе мотивисан је брзином која је у конкретном случају захтевана у процесу дефазификације. Како наводе ови аутори, метода *COA* захтева пуно времена за рачунање па многи софтверски алати и фази логички процесори користе апроксимацију ове методе познату као брза или *fast-COA*. Велика брзина процесуирања остварује се коришћењем синглтона као излазне функције припадности.

Методе *COM* и *COA(COG)* су континуалне, док су *MOM* и *LOM* дискретне. У аутоматском управљању коришћење дискретних метода би проузроковало нестабилност и осцилације (Tadić, Stanojević, Aleksić, Mišković & Bukvić, 2006)

У сваком случају, напомиње се да метода дефазификације мора давати такве резултате да за мале промене улаза даје малу промену излаза. Такође, потребно је да за сваку комбинацију улазних променљивих постоји најмање једно правило које је активирано, као и да се функције припадности преклапају.

2.4.2. Типови фази система закључивања

ФИС имплементира нелинеарна мапирања улазног у излазни простор, која се постижу скупом правила од којих свако описује локално понашање система (Nayak, Sudheer, Rangan & Ramasastri, 2004). Богатство фази логике управо лежи у чињеници да постоји мноштво различитих начина за реализацију ових мапирања (Mendel, 1995).

Фази системи се грубо могу поделити у зависности од начина на који је реализован излаз тј. у зависности од последичног дела правила (узрочни део правила се не разликује). Најчешћи типови фази система закључивања су: Мамдани (Mamdani 1974; Mamdani & Assilian, 1975), Такаги–Сугено–Канг (ТСК) (Takagi & Sugeno 1985; Sugeno & Kang 1988) и Цукамото (Tsukamoto, 1979). Мамдани тип ФИС-а на излазу даје фази скуп, па је самим тим, потребно да користи неку од техника дефазификације фази излаза. Сугено тип не захтева дефазификацију јер је излаз класичан (енгл. *crisp*) број и (најчешће) користи тежинску суму за агрегацију појединачних излаза.

Општи облик фази правила:

if x_1 *is* A_1^i ***and/or*** x_2 *is* A_2^i ... ***and/or*** x_n *is* A_m^i ***then*** ..

подразумева да је улазни простор подељен на већи број потпростора (сегмената, региона) чији пресек није празан скуп. Опсег сваке улазне променљиве x_i ($i=1,2, \dots, n$) подељен је на низ подинтервала A_j^i који се међусобно преклапају ($j=1,2, \dots, m$). Сваки фази скуп A_j^i дефинисан је функцијом припадности која додељује вредност μ_j^i свакој i -тој улазној променљивој. Структура последичног дела зависи од типа примењеног ФИС-а што даље води до разлике у интуитивности, интерпретацији као и у ефикасности самог модела.

Најдиректнији начин иницијализације параметара јесте подела улазног простора на једнаке делове (енгл. *grid*) при чему се сваки од тих делова односи на појединачно правило. Иницијалне вредности параметара постављене су тако да су центри функција припадности равномерно распоређени дуж димензија улазног

простора (*Goodwin & Sin, 2014*). Проблем са оваквом поделом је што број фази правила експоненцијално расте са повећањем димензија простора улаза.

Фази скупови премисе правила морају бити такви да се бар једно правило активира за сваки од могућих улаза фази система како би се обезбедила одговарајућа покривеност улазног домена (*Piegat, 2001*). Такође, наводи се да треба избегавати конструкцију оних фази правила која нису подржана одговарајућим подацима чиме се заправо спречава да се фази скупови узрочног дела „заглаве“ у оним сегментима који се тешко активирају. Неки аутори сматрају да је потребно да се потпростори улазног простора међусобно преклапају (*Cordón, 2001*)

Мамдани тип фази система закључивања

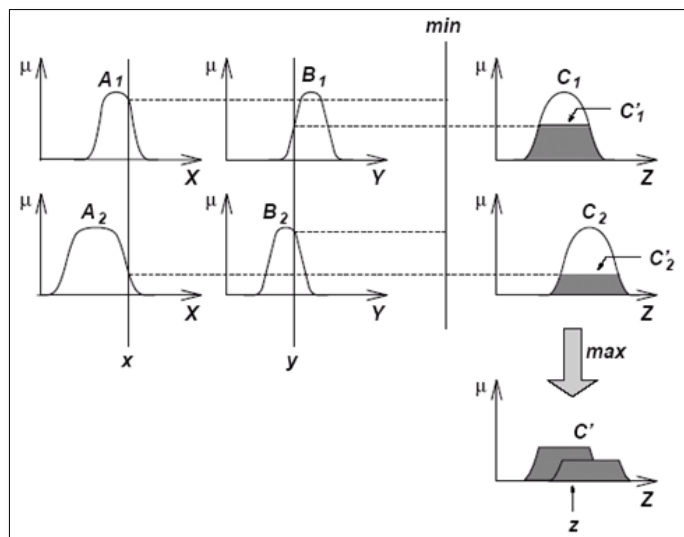
Мамдани (*Mamdani & Assilian, 1975*) фази систем закључивања подразумева лингвистички модел који се састоји од скупа *if-then* правила при чему су и узрочни и последични део представљени фази скуповима. Правило се може изразити на следећи начин:

if x_1 *is* A_1^i *and/or* x_2 *is* A_2^i ... *and/or* x_n *is* A_m^i ***then*** y^i *is* B^i

У основи, свако од правила као резултат даје појединачни излаз (фази скуп) који је добијен применом оператора минимум на одговарајуће излазне функције припадности. Тада се коначан излазни фази скуп добија максимизацијом појединачних излазних фази скупова.

Мамдани метод је својом формом погодан за представљање знања експерта јер омогућава описивање на начин близак човеку. Својом структуром ближи је човековом начину закључивања, тако да су експресивност и интерпретабилност главне предности Мамадани типа (*Kaur & Kaur, 2012*). Погоднији је у случајевима малог броја променљивих јер је у супротном тешко одредити везу између премисе и закључка (*Mitra & Hayashi, 2000*). Главни недостатак је што показује слабости приликом комплексних

рачунања. Подешавање параметара овог модела може бити нумерички веома сложен проблем јер захтева веома исцрпљујуће израчунавање (Piegat, 2001). Особине овог типа ФИС-а зависе у многоме од изабраних фази оператора, што је детаљно разматрано у (Yager & Filev, 1994; Bardossy & Duckstein 1995).



Слика 15. Мамдани тип фази система закључивања, (Jang, Sun & Mizutani, 1997)

Многе савремене практичне примене фази система и даље се темеље на раду (Mamdani & Assilian, 1975).

Сугено тип фази система закључивања

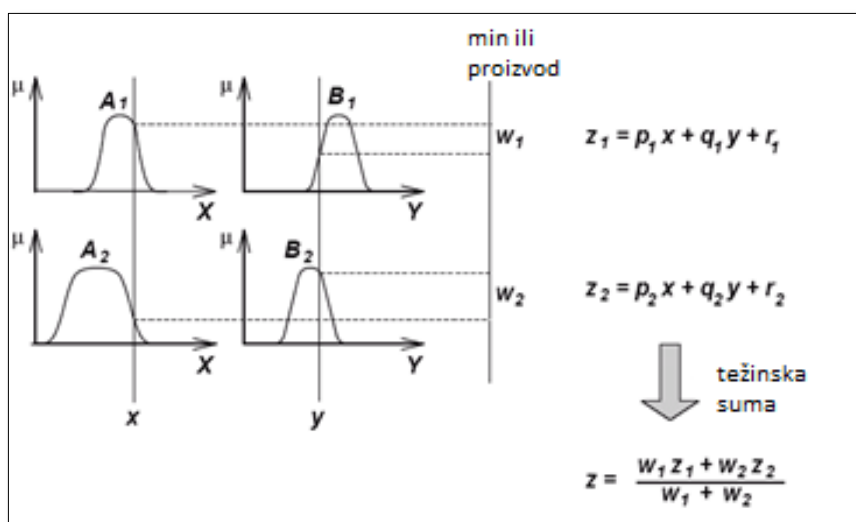
Сугено фази систем закључивања (Takagi & Sugeno, 1985) користи фази скупове за представљање узрочног дела правила док се последични део апроксимира линеарном функцијом n независних променљивих. Правило се може изразити на следећи начин:

$$\text{if } x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and/or } x_2 \text{ is } A_2^i \dots \text{ and/or } x_n \text{ is } A_n^i \text{ then } y^i \\ = a_0^i + a_1^i x_1 + \dots + a_n^i x_n$$

У општем случају последични део је експлицитна функција тј. полином првог реда улазних променљивих¹. Механизам закључивања користи

¹ У неким случајевима за функцију последичног дела узима се полином нултог реда.

релативан допринос сваког правила који се добија поређењем улазног вектора са премисом правила. Резултат зависи од степена у ком улазни вектор задовољава особине лингвистичких променљивих, које су представљене одговарајућим фази скуповима, као и од избора одговарајућих оператора. Тежинска сума појединачних излаза добија се линеарном комбинацијом улазних променљивих и релативних доприноса (који су увећане за константу). На овај начин, линеарна функција излаза може генерисати и нелинарна пресликавања (Lee, 1990).



Слика 16. Сугено тип фази система закључивања, (Jang, Sun & Mizutani, 1997)

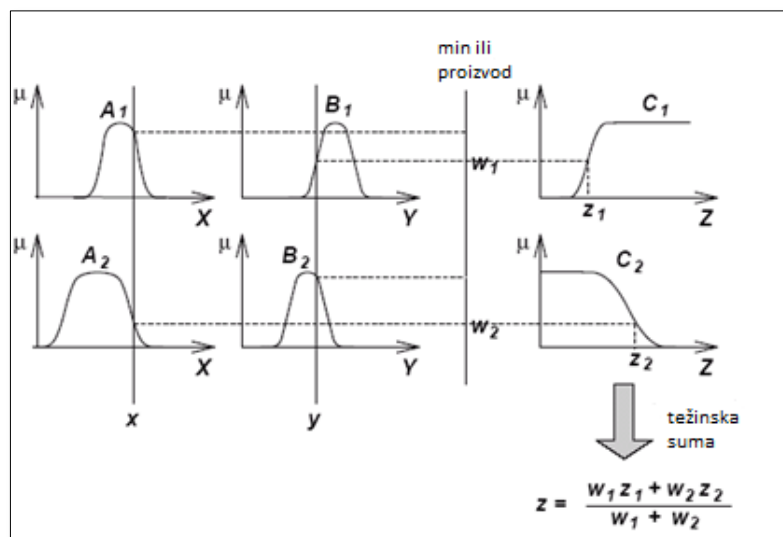
За разлику од Мамдани типа, изражајност и интерпретабилност нису карактеристике овог типа. Како последични део није фази, време процесуирања је брже јер је тежинска сума рачунски и временски мање захтевна него процес дефазификације (Hamam & Georganas, 2008). Сугено метод рачунски је ефикасан и погодан за оптимизације и примену адаптивних техника, што га чини веома применљивим у проблемима управљања, нарочито код динамичких нелинеарних система (Kaur & Kaur, 2012). ТСК фази систем закључивања дозвољава да се комплексни систем представи низом локалних модела од којих сваки описује понашање система у одређеном делу улазног простора (Hamam & Georganas, 2008). О применљивости Сугено типа говори и чињеница да је касније интегрисан у

АНФИС (енгл. *Adaptive Network based Fuzzy Inference System*) иначе један од најчешће применљиваних неуро-фази модела.

Оно што опредељује избор, између ова два приступа, је разлика у читљивости, која је на страни Мамдани модела, и прецизности, која је на страни Сугено модела (*Mitra & Hayashi, 2000*). Због интерпретабилности и интуитивне природе правила, Мамдани тип је широко коришћен у апликацијама за подршку одлучивању (*Kaur & Kaur, 2012*). Са друге стране, Сугено тип је флексибилнији при пројектовању система али и ефикаснији, захваљујући доступности великог броја алгоритама којима се лако врше подешавања.

Цукамото тип фази система закључивања

Специфичност Цукамото (*Tsukamoto, 1979*) фази система закључивања огледа се у томе што се сваки последични део правила представља фази скупом који је искључиво монотона функција.



Слика 17. Цукамото тип фази систем закључивања, (*Jang, Sun & Mizutani, 1997*)

Крајњи излаз је тежински сума класичних (енгл. *crisp*) вредности излаза сваког од правила изведених на основу релативне значајности самог правила и параметара излазних функција припадности (*Lee, 1990*). Ограничење да су фази скупови закључка монотоне функције, уведено је из разлога што за

такве функције увек постоји инверзна функција, рачунски није компликовано наћи је и пресликавање је једнозначно.

2.4.3. *Поређење основних типова фази система закључивања*

Фази моделовање можемо схватити као процес којим се дефинише пресликавање простора улаза у простор излаза коришћењем фази логике при чему знање експерта трансформишемо у правила и функције припадности. Коришћењем *if-then* правила моделујемо знање експерата. Моделовање система не почиње прецизним дефиницијама процеса већ се дефинишу фази променљиве и фази правила на основу опсервација и разумевања компоненти физичког феномена који проучавамо (*Balanicǎ, Dumitrache, Caramihai, Rae & Herbst, 2011*).

Под фази моделовањем подразумевамо два процеса: структурну идентификацију и параметарску идентификацију (*Sugeno & Kang, 1988*). Прво се односи на избор улазних променљивих, налажење одговарајућег броја правила, као и одређивање броја и облика функција припадности. Други процес подразумева подешавање параметара модела, тј. њихов оптимални избор (параметара функција припадности или коефицијената линеарне функције) као и начин агрегације резултата. Фази моделовање је најосетљивије на ред модела, тј. на број правила који су укључени у базу правила (*Tsekouras, Sarimveis & Bafas, 2003*). Приликом моделовања система, полазна претпоставка је да нам је систем који моделујемо добро познат.

Генерално, фази системи су веома применљиви у ситуацијама (1) када разматрамо веома сложен системи чије понашање није до краја познато и проучено (2) када тражимо решење које је пре свега брзо, при чему може бити и приближно (*Ross, 2010*).

Значајна предност ФИС-а над традиционалним моделима црне кутије је њихова могућност да изводе закључак о понашању, чак и веома сложених система, само на основу података а без претходне спецификације њихове функционалне структуре (*Jacquin & Shamseldin, 2009*). Такође, у (*Jacquin & Shamseldin, 2009*)

наводи се да ФИС показује предност у односу на технике вођене подацима (енгл. *data-driven*), као што су на пример неуронске мреже, а та предност се огледа у чињеници да су транспарентне.

Велики недостатак ових модела је то што не постоји систематизован поступак за конструкцију фази система закључивања (*Jacquin & Shamseldin, 2009*). Параметри фази правила дефинишу улазни односно излазни простор (поделу ових простора на мање делове, потпросторе односно регионе) па самим тим ефикасност ФИС-а директно зависи од ових параметара. Приликом пројектовања фази система могу се појавити потешкоће приликом одређивања функција припадности. Не постоји егзактна процедура која указује на то који облик фази скупа највише одговара датом проблему. На успешност модела у великој мери утиче и избор примењених логичких оператора.

Уколико је број правила велики, процес закључивања захтева пуно времена за потребна израчунавања. Њихова велика слабост је и оно што би Коско (*Kosko, 1992*), назвао „проклетство димензионалности“ а односи се на чињеницу да са порастом броја улаза, број правила којим се апроксимирају улазно-излазне релације експоненцијално расте, што на крају води ка моделу које није лако ни подесити нити оптимизовати. Већи број правила обезбеђује финију поделу улазног простора, која би требало да води ка бољој апроксимацији реалног нелинеарног система. Штавише, јако велики број правила може довести до тога да систем преучи (енгл. *overfit*) и изгуби могућност генерализације (*Chen & Wang, 1999*). Смањивањем броја правила, са друге стране, умањују се могућности апроксимације ФИС-а. Овај проблем постаје још уочљивији са порастом сложености улазно-излазних релација (*Jacquin & Shamseldin, 2009*). Потребно је наћи равнотежу између комплексности модела и његових перформанси. Нажалост, не постоји јасна процедура која би дала одговор који број обезбеђује ову равнотежу и најчешће се своди на методу пробе и грешке.

Многи аутори сматрају да је правила и параметре модела је потребно „извучити“ из података јер се на тај начин ослобађамо субјективности приликом дефинисања

модела. Са друге стране, овај рад се темељи управо на идеји да о систему треба да говори они који га највише познају, као и да опасност од субјективности није ништа већа од опасности која лежи у чињеници да никада не знамо колики шум имају подаци којима располажемо. У овом раду, субјективна знања којима располажу експерти могу се инкорпорирати у систем на крајње природан начин описујући га правилима, које се затим подешавају према подацима.

Често се као мана ове методе наводи и недостатак одговарајућег алата за анализу перформанси система као што су на пример стабилност, оптималност итд. (*Kickert & Mamdani, 1978*). С друге стране, анализа фази контролера помоћу нелинеарне теорије управљања никада не може бити општа, једноставно зато што општа нелинеарна теорија управљања не постоји (*Kickert & Mamdani, 1978*). Без обзира на примењени модел, тј. начин на који се реализује излаз, фази систем закључивања често је коришћен алат у проблемима одлучивања где се одлуке доносе на основу сложених логичких исказа. Такође можемо рећи, да је овај поступак пуно пута потврдио своју исправност у реалној индустријској пракси. У случају квалитативних и не до краја дефинисаних веза, контролери засновани на фази логици могу се конструисати тако да имплементирају неку познату хеуристику (*Mamdani, 1976*). Примери примене фази контролера су бројне а неке од примена у индустрији дате су у (*Mamdani, 1976*). Оно што је чињеница и што свакако треба нагласити је да се овај поступак пуно пута доказао у пракси као адекватан алат у процесу доношења управљачких одлука.

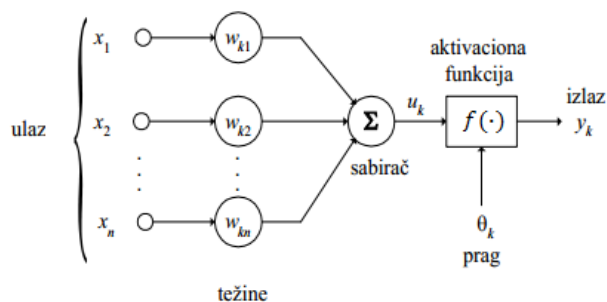
2.5. Неуронске мреже

Основна идеја на којој се заснивају неуронске мреже је да мноштво једноставних елемената (програмских јединица које обављају једноставне задатке), повезаних тако да паралелно раде, може да извршава сложене задатке. Овај скуп једноставних елемената у стању је да обавља комплексна нелинеарна израчунавања. Масовна паралелна обрада омогућава процесуирање великог броја података у кратком временском року, што неуронске мреже чини рачунски моћним алатом. Њихова флексибилност омогућава им широку примену од медицине и роботике до економије и финансија.

Неуронске мреже (НМ) омогућавају ефикасност у моделовању комплексних проблема, али нуде слабо разумевање проблема за чије решавање су прикупљени подаци (*Dhar & Stein, 1997*). Оне се углавном користе за предвиђање, кластеровање и класификацију, али и као техника која може да открива неуобичајене обрасце (*Haykin, 1999*). Њихове предности су што могу да раде са непотпуним и непрецизним подацима, способне су да генерализују знања и врше паралелну обраду (*Mitra & Hayashi, 2000*).

Архитектуру неуронске мреже чини скуп повезаних јединица које се називају неуронима (јер опонашају особине биолошких неурона) или чворовима. Тежина која је придружена сваком улазу неурона одговара релативној значајности тог улаза. Излаз из тог неурона јесте линеарна комбинација „отежаних“ улаза неурона.

Основна структура неурона дата је на слици:



Слика 18. Архитектура неурона, (*Haykin, 1999*)

где су:

x_1, x_2, \dots, x_n – улази у (k -ти) неурон

$w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}$ – коефицијенти тежина, тј. тежински фактори сваког од n улаза (k -тог) неурона

Σ – сабирач који формира тежинску суму улаза

θ – праг, тј. пристрасност (k -тог) неурона

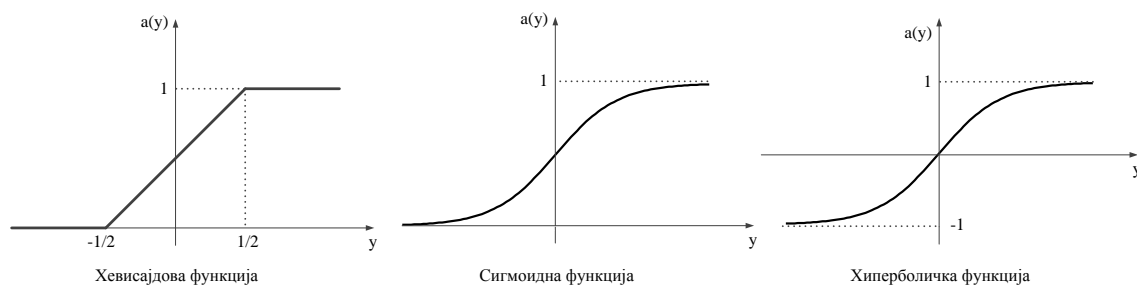
$f(\cdot)$ – активациона функција која формира коначан излаз неурона

y_k – излаз (k -тог) неурона

Излаз из одређеног k -тог неурона, зависи од примењене активационе функције f , односно:

$$y_k = f\left(\sum_i x_i \cdot w_{ki} + \theta_k\right)$$

Аргумент ове функције је тежинска сума улаза (увећана за праг) која се назива и нивоом активације неурона. Избор активационе (трансфер, тј. преносне) функције зависи од природе самог проблема који се решава (да ли је опсег излазних вредности у интервалу $[0,1]$ или $[-1,1]$, да ли је потребно да буду континуални или дискретни излази, итд.). И поред великог броја активационих функција, у практичним применама, најчешће коришћене су део по део линеарна, Хевисајдова (одскачна) и сигмоидна функција.



Слика 19. Најчешћи облици активационих функција

Најчешће, активациона функција сваког чвора заправо је параметризована функција са променљивим параметрима, чијом променом се мења и функција чвора, па самим тим и целокупно понашање мреже (Jang, Sun & Mizutani, 1997).

Коначан излаз мреже зависи од излаза свих чворова, тј. од свих параметара система. Адаптивност мреже огледа се у томе што, на основу алгоритма учења, можемо да одредимо које чворове и на који начин треба мењати да би се минимизирала одсупања стварних од неких жељених вредности (на основу неке унапред дефинисане мере грешке).

Архитектура мреже може да буде веома различита у зависности од броја слојева, броја неурона у сваком слоју, као и од начина на који су неурони у различитим слојевима повезани. Неурони могу да буду организовани у једном или више слојева. Најчешће, први слој се назива улазним, последњи излазним а међуслојеви се називају скривеним слојевима. Број неурона у слојевима може да буде различит што зависи од проблема који се проучава као и укупног броја слојева у мрежи. Показано је да се било која нелинеарна функција може апроксимирати неуронском мрежом са бар једним скривеним слојем (*Funahashi, 1989*).

(*Hagan, Demuth, Beale & De Jesús, 1996*) наводе да су вишеслојне неуронске мреже много моћније од једнослојних. Даље се прецизира да, за разлику од једнослојне, двослојна мрежа са сигмоидном функцијом у првом слоју и линеарном функцијом у другом слоју може се истренирати довољно добро да може да апроксимира било коју функцију. Мреже са четири и више слојева изузетно су ретке.

Према смеру простирања сигнала мреже могу да буду:

- мреже са простирањем сигнала унапред (енгл. *feedforward networks*) сигнал се простире само у једном смеру и то од улаза до излаза кроз све слојеве и
- мреже са повратним сигналом (спрегом), рекурентне или повратне мреже (енгл. *feedback networks*) сигнал се враћа у исти или претходне слојеве

Способност учења на примерима је по многим најважније својство неуронских мрежа. При тренирању, мрежа коригује своје понашање на основу понашања система у прошлости. Мрежа се обучава да обавља одређени задатак кроз итеративну корекцију тежина (веза) елемената. Подешавање се изводи на основу

улазно-излазног скупа података који се назива тренинг скуп. Предложени су многобројни алгоритми за подешавање тежина који имају за циљ да минимизирају грешку у односу на жељене излазе, тј. да побољшају перформансе система.

У основи постоје три различита начина учења код неуронских мрежа (*Jang, Sun & Mizutani, 1997*):

- Надгледано учење (енгл. *supervised learning*) могуће је у случају када располажемо улазно-излазним скупом података за тренирање, па у сваком тренутку можемо вршити поређење излаза са жељеним вредностима и у складу с тим вршити корекције.
- Учење са подстицајем (енгл. *reinforcement learning*) постоји нека евалуација стања система али није тако директна и информативна као код надгледаног учења, систем индиректно добија информације о ефекту предузетог управљања.
- Ненадгледано учење (енгл. *unsupervised learning*) не постоји контрола управљања, мрежа са ненадгледаним учењем углавном класификује улазе у неки унапред задати број кластера.

Неуронске мреже, су по структури нелинеарне и могу да изразе било које нелинеарне везе улаза и излаза. Ширу примену неуронских мрежа понекад онемогућава то што не пружају могућност представљања знања у форми која је разумљива човеку, тј. оне представљају модел црне кутије и самим тим не дају одговор како се дошло до одређеног излаза или како је извршена нека класификација (*Mitra & Hayashi, 2000*). На основу резултата тренирања не можемо рећи ништа о значајности појединих улазних елемената и њиховим међусобним везама.

2.5.1. Неки од постојећих алгоритама учења

Учење је процес у коме се параметри мреже подешавају кроз процес симулације окружења у коме мрежа смештена (*Haykin, 1999*). Прописани скуп прецизно дефинисаних правила којим се решава проблем учења назива се алгоритам учења

(Haykin, 1999). Процес учења подразумева подешавање тежина мреже (на основу скупа за тренирање) са циљем да се одреде оне вредности за које ће разлика између очекиваних (жељених) и добијених (стварних) вредности излаза бити најмања. Када се ове вредности нађу, мрежа је способна да даље самостално врши предвиђања, класификацију или кластеровање улазних података.

(Rong, Sundararajan, Huang & Saratchandran, 2006) деле методе учења на две класе:

- **Пакетно учење** (енгл. *batch learning*) подразумева да нам је целокупан скуп за тренирање доступан пре почетка тренирања. Параметри се подешавају тек након што се одреди укупна грешка (измере перформансе) свих улаза. Учење се обавља кроз више итерација које се називају епохе.
- **Секвенцијално учење** (енгл. *sequential learning*) подразумева да се параметри мреже подешавају након сваког улаза, и то на основу грешке (перформансе) сваког појединачног улаза. Не постоји епоха у правом смислу.

Практична примена често намеће податке за тренирање који су секвенцијално доступни и да би се, приликом пакетног учења, овај проблем превазишао, потребно је да често изнова тренирамо мрежу, што је временски захтевно (Rong, Sundararajan, Huang & Saratchandran, 2006).

Пројектовање мреже, тј. избор одговарајуће архитектуре као и метод обучавања зависе од конкретног система чије понашање желимо да апроксимирамо (које перформансе пројектовани систем треба да задовољи, да ли су нам сви подаци доступни пре процеса обучавања, колико нам је битна брзина алгоритма обучавања, итд.)

Једна од најчешће коришћених архитектура је вишеслојна мрежа са простирањем сигнала унапред (енгл. *feedforward*) а најчешће коришћен алгоритам учења је алгоритам простирања грешке уназад.

Наиме, (*Rumelhart, Hinton & Williams, 1985*) представили су овај алгоритам под називом алгоритам простирања грешке уназад (енгл. *backpropagation algoritam*) (БП) који је до данас један од најприменљивијих алгоритама у пословним апликацијама. Правило учења користи метод најстрмијег спуста, код кога се градијентни вектор изводи на основу ланчаног правила (енгл. *chain rule*). БП алгоритам је интегративна градијентна метода чији је циљ да минимизира средње квадратну грешку, тј. разлику између стварних и жељених излаза кроз промену вредности тежина (*Stoeva & Nikov, 2000*)

Захваљујући његовој ефикасности, овај алгоритам нашао је примену и у неуро-фази системима. Велики број радова посвећен је различитим модификацијама алгоритма простирања грешке уназад како би се унапредило учење и у случају променљивих које су описане фази скуповима.

Како проблем, који се проучава у овом раду, подразумева да постоји скуп улазно-излазних података којима се описује понашање система, од интереса су нам само методе надзираног учења. Овде ће укратко бити описане неке од њих, с тим што ће алгоритам простирања грешке уназад нешто детаљније бити описан с обзиром на то да се користи при обучавању предложеног конзистентног неуро-фази система закључивања. Детаљнији опис постојећих алгоритама учења може се наћи у (*Hagan, Demuth, Beale & De Jesús, 1996*), (*Jang, Sun & Mizutani, 1997*), (*Haykin, 1999*) итд.

Хебово правило (*Hebb, 1949*)

Ово је најстарије правило учења, преузето је из неуробиологије, зато је и наведено. Примењено на вештачке неуронске мреже, оно може да се исказе помоћу правила које каже: (1) уколико се два неурона са различитих страна једне везе, активирају симултано онда би тежину те везе требало повећавати, и (2) уколико се два неурона са различитих страна једне везе активирају асинхроно онда би тежину те везе требало смањивати (*Haykin, 1999*). У најједноставнијем облику Хебово правило могло би да се запише на следећи начин:

$$\Delta w_{kj}(n) = \eta y_k(n) x_j(n)$$

где је:

η : позитивна константа (стопа учења)

x_j : j -ти улазни вектор k -тог неурона

y_k : излаз k -тог неурона

Видроу-Хофово правило (*Widrow-Hoff*, 1960) или делта правило

Ово правило користи метод најмање средње квадратне разлике тј. минимизира функцију грешке дефинисану као

$$E(n) = \frac{1}{2} e_k^2(n)$$

подешавања тежине k -тог неурона побуђеног улазом x_j у тренутку n

$$w_{kj}(n+1) = w_{kj}(n) + \Delta w_{kj}(n)$$

$$\Delta w_{kj}(n) = \eta e_k(n) x_j(n)$$

где је

η : позитивна константа (стопа учења)

x_j : j -ти улазни вектор k -тог неурона

e_k : грешка, тј. разлика добијене вредности и жељене вредности

Поред њих, развијена је читава класа метода нелинеарне оптимизације које са заснивају на градијенту. У тој класи су метод најстрмијег спуста и *Newton*-ов метод (као најпознатији алгоритми), као и *Gauss-Newton*-ова и *Levenberg-Marquardt* метода. Метода најстрмијег спуста за апроксимацију грешке користи Тејлоров полином првог реда, а све остале користе Тејлоров полином другог реда.

Метода најстрмијег спуста (енгл. *steepest descent method*)

Помера тежине у правцу најстрмијег спуста тј. у правцу супротном од градијента

$$g = \nabla E(w)$$

Вредности тежина у следећој итерацији биле би:

$$w(n+1) = w(n) - \eta g(n)$$

тј. можемо написати да је вредност прираштаја:

$$\Delta w(n) = w(n+1) - w(n) = -\eta g(n)$$

Вредност грешке за $w(n + 1)$ може да се апроксимира Тејлоровим полиномом првог реда у околини тачке $w(n)$. Метод најстрмијег спуста (познат и под називом градијентна метода) једна је од најстаријих метода минимизације, која споро конвергира али је због своје једноставности најчешће коришћена (*Jang, Sun & Mizutani, 1997*).

Њутнова метода (Newton)

Ова метода минимизира квадратну апроксимацију функције циља у околини текућег вектора тежина (*Haykin, 1999*). Користећи Тејлоров полином другог реда, можемо написати да је:

$$\begin{aligned}\Delta E(w(n)) &= E(w(n + 1)) - E(w(n)) \\ &\approx \Delta w(n) + \frac{1}{2} \Delta w^T(n) H(n) \Delta w(n)\end{aligned}$$

где је:

$E(w)$ функција циља која се процењује у околини $w(n)$

$g(n)$ градијентни вектор

$H(n)$ Хесијанова матрица која одговара функцији $E(w)$

Овај алгоритам брзо конвергира уз ограничење да Хесијанова матрица мора бити позитивно дефинитна.

Алгоритам простирања грешке уназад (енгл. *backpropagation algoritam*)

Кључни део овог правила односи се на поступак рекурзивног добијања градијентног вектора чији елементи представљају извод функције грешке по свим параметрима (*Jang, Sun & Mizutani, 1997*). Овај поступак заснива се на ланчаном правилу (енгл. *chain rule*).

(*Rumelhart, Hinton & Williams, 1985*) су процедуру добијања градијентног вектора за структуру мреже, назвали *Backpropagation* алгоритам, у складу са правцем рачунања градијентног вектора, који је супротан од правца простирања података. Добијањем градијентног вектора за структуру мреже отвара се могућност коришћења читавог низа метода оптимизација (заснованих на градијенту).

Конкретно, за подешање параметара овај метод користи метод најстрмијег спуста. Поступак извођења алгоритма је преузет из (Jang, Sun & Mizutani, 1997).

Уколико располажемо тренинг скупом који има P улаза, грешка p -тог скупа може да се представи сумом квадрата грешака:

$$E_p = \sum_{k=1}^{N(L)} (y_k - x_{L,k})^2$$

где је

y_k : k -та компонента p -тог жељеног излазног вектора

$x_{L,k}$ k -та компонента стварног излаза добијеног на основу p -тог улазног вектора

У том случају укупна грешка би се могла написати¹ као:

$$E = \sum_{p=1}^P E_p$$

Грешка последњег слоја се може рачунати директно:

$$\varepsilon_{L,i} = \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,i}} = -2 \cdot (y_i - x_{L,i})$$

док за унутрашње чворове на i -тој позицији l -тог слоја грешку изводимо на основу ланчаног правила

$$\varepsilon_{L,i} = \frac{\partial E_p}{\partial x_{l,i}} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \frac{\partial E_p}{\partial x_{l+1,m}} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \varepsilon_{l+1,m} \frac{\partial f_{l+1,m}}{\partial x_{l,i}}$$

где:

$\frac{\partial E_p}{\partial x_{l,i}}$ означава сигнал грешке у l -том слоју

$\frac{\partial E_p}{\partial x_{l+1,m}}$ означава сигнал грешке у $l+1$ -вом слоју

¹ Укупна грешка може се рачунати на различите начине у зависности од конкретне примене.

Практично, прво се израчуна грешка излазног слоја а затим се итеративно рачуна док се не дође до жељеног l -тог слоја. Грешка се дакле, секвенцијално добија идући од излазног ка унутрашњим чворовима.

Градијент грешке рачуна се по свим параметрима, и то применом ланчаног правила. Ако је α параметар i -тог чвора l -тог слоја

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = \frac{\partial E_p}{\partial x_{L,i}} \frac{\partial f_{L,i}}{\partial \alpha} = \varepsilon_{L,i} \frac{\partial f_{L,i}}{\partial \alpha}$$

Уколико параметар α дели више чворова, претходна једначина се може написати у општијој форми:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = \sum_{x^* \in S} \frac{\partial E_p}{\partial x^*} \frac{\partial f^*}{\partial \alpha}$$

где је S скуп чворова који садржи α као параметар, x^* су излази а f^* функције повезане са чвором S .

Извод укупне грешке E по параметру α

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha} = \sum_{p=1}^P \frac{\partial E_p}{\partial \alpha}$$

Према методи најстрмијег спуста, формула за ажурирање параметра била би

$$\Delta \alpha = -\eta \frac{\partial E}{\partial \alpha}$$

при чему се стопа учења може да се изрази формулом:

$$\eta = \frac{k}{\sqrt{\sum_{\alpha} \left(\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)^2}}$$

Генерално гледано (за све методе), избор стопе учења у великој мери може утицати на конвергенцију алгоритма тј. на процес учења. Уколико је она превише мала алгоритам може споро конвергирати ка решењу. Уколико пак, узмемо превише велику вредност корака, може се десити да алгоритам осцилира око оптималног решења.

Поред метода оптимизације параметара мреже заснованих на градијенту, све више су у употреби методе оптимизације као што су генетски алгоритми и различите методе насумичне претраге (енгл. *random search*).

3. НЕУРО-ФАЗИ ИНТЕГРАЦИЈА

Неуронским мрежама и фази системима заједничка је њихова могућност управљања нелинеарним, динамичким системима за које не постоји одговарајући математички модел. Очигледан недостатак неуронских мрежа је то што није јасан начин на који је решен управљачки проблем односно мањак транспарентности. Оне не дају могућност генерисања ни успостављања било какве врсте структурног знања на пример у форми правила, нити могућност коришћења претходног знања како би се смањило време обучавања (процес учења увек почиње од почетка) (Nauck & Kruse, 1993). Насупрот томе, фази системи потпуно транспарентно врше закључивање кроз скуп конкретних лингвистичких правила. Дефинисањем *if-then* правила и функција припадности пројектује се систем, али је уочљив недостатак одговарајућих алгоритама учења који би вршили њихова подешавања а истовремено задржали одговарајућу семантику (Nauck & Kruse, 1993).

И неуронске мреже и фази системи су динамички системи који обављају паралелну обраду како би оценили улазно-излазну релацију без коришћења математичког модела већ само учењем на основу искуства, тј. на основу добијеног узорка (Kosko, 1992). Он наводи и да фази системи адаптивно закључују и прилагођавају своје везе, па неуронске мреже могу „на слепо“ да генеришу и усаврше фази правила на основу репрезентативних нумеричких података.

Можемо рећи да су ова два приступа међусобно комплементарна, па је изградња система који представља њихову комбинацију сасвим природна јер се интеграцијом умањују њихови појединачни недостаци (Mitra & Hayashi, 2000). У фази системима улазно-излазне релације су дате експлицитно у форми *if-then* правила, док неуронске мреже не дефинишу експлицитне релације већ су оне на неки начин садржане у њиховим параметрима. Комбинација неуронских мрежа и фази система или краће неуро-фази системи препознати су као моћни алтернативни приступ изградњи фази система (Figueiredo & Gomide, 1999).

Велика могућност примене и сам развој неуро-фази система заснивају се, с једне стране, на интеграцији, способности учења својствених неуронским мрежама и са

друге стране, на транспарентности и интерпретабилности својствених фази системима (*Nauck, 1997*).

Овде ће се најпре размотрити начини којима је могуће реализовати везу, тј. интеграцију неуронских мрежа и фази система, а затим ће бити дат преглед постојећих неуро-фази система.

Синергија се у основи постиже на два начина: неуронска мрежа којој је придодата функционалност тако да може да обрађује фази информације (фази-неуро мрежа) или фази систем који је проширен неуронском мрежом како би наследио неке од њених карактеристика као што су флексибилност, брзина и адаптивност (неуро-фази системи) (*Mitra & Hayashi, 2000*).

Аутори (*Keller & Tahani, 1992*) виде четири могућа сценарија ове везе: (1) неуронска мрежа је обучена да подешава функције припадности фази правила, (2) неуронска мрежа је обучена да одређује структуру фази система, (3) развој шема које представљају комбинацију само одређених чворова а чије се везе заснивају на фази скуповима и (4) коришћење структуре неуронске мреже за директно извршавање фази система закључивања.

(*Nauck, Klawonn & Kruse, 1993*) сматрају да се веза неуронских мрежа и фази система може дефинисати на следеће начине: (1) неуронска мрежа се користи за подешавање фази система (*Berenji & Khedkar, 1992*), (*Nauck & Kruse 1993*) и (*Kosko, 1992*), (2) интеграција неуронских мрежа и фази система у хибридни систем (*Gupta & Gorzalczy, 1992*), (3) неуронске мреже се користе за апроксимацију фази система (*Hayashi & Buckley, 1994*)

У раду (*Buckley, James & Hayashi, 1993*) је показано да се, за дати дискретан фази експертни систем, може образовати рачунски еквивалентна, хибридна неуронска мрежа независно од коришћеног модела (тј. независно од тога да ли је примењен Сугено, Мамдани или неки други тип експертског система). Неуронска мрежа ту је коришћена је за израчунавање а не за учење, при чему није унапред познат ни

број неурона у скривеном слоју као ни време потребно за конвергенцију алгоритма.

Слично, у (*Hayashi & Buckley, 1994*) разматрана је веза између неуронских мрежа и фази експертских система. Показано је да неуронска мрежа са простирањем сигнала унапред (енгл. *feedforward*) може да апроксимира било који фази експертски систем заснован на правилима и обрнуто, свака *feedforward* неуронска мрежа може бити апроксимирана фази системом заснованим на правилима. Ово тврђење илустровали су на примеру трослојне мреже при чему је тачност апроксимације била задата. Аутори наводе да то што су фази системи рачунски еквивалентни неуронским мрежама, не треба да указује да неуронске мреже треба заменити експертским системима.

(*Buckley & Hayashi, 1994*) интеграцију фази система и неуронских мрежа виде као фази неуронску мрежу. Под називом фази неуронска мрежа (енгл. *fuzzy neural net*) подразумева се неуронска мрежа са фази сигнаlima и/или фази тежинама. Ови аутори разликују три различита типа фази неуронских мрежа: (1) улазни сигнали су реални бројеви али су тежине описане фази бројевима, на пример модели предложени у (*Yamakawa & Furukawa, 1992*) и (*Nauck & Kruse, 1992*); (2) улазни сигнали су представљени су фази скуповима а тежине су реални бројеви (*Ishibuchi, Fujioka & Tanaka, 1993*) и (*Ishibuchi, Tanaka & Okada, 1993*); (3) улазни сигнали и тежине описане су фази скуповима (*Hayashi, Buckley & Czogala, 1992*) и (*Hayashi, Buckley & Czogala, 1993*).

У раду (*Nauck, Klawonn & Kruse, 1993*) аутори истичу две могуће реализације фази-неуро управљања као: (1) кооперативни систем у коме неуронска мрежа и фази систем делују независно један од другог (неуронске мреже одређују неке параметре фази система); (2) хибридни систем у коме су неуронска мрежа и фази систем хомогени и неодвојиви (имплементација фази система реализована је коришћењем неуронске мреже). Неуро-фази систем би требало да је способан да учи лингвистичка правила и/или функције припадности и као и да их оптимизује. У основи постоје три различите могућности за дефинисање ових правила:

- У почетном тренутку не постоје правила у систему него се она креирају током процеса учења.
- У почетном тренутку систем располаже са свим правилима која се могу креирати комбинацијом постојећих променљивих а током процеса учења бришу се из базе она правила, која на основу својих перформанси, нису значајна.
- Систем започиње базом правила која има фиксни број правила, а током процеса учења њихове перформансе се оптимизују.

Такође (*Li, 2000*) доказује еквивалентност између система фази логике и *feedforward* неуронских мрежа.

Свакако се може рећи да велика могућност примене и развоја неуро-фази система леже у интеграцији, с једне стране, способности учења својствених неуронским мрежама, а са друге стране, у транспарентности и интерпретабилности својствених фази системима (*Nauck, 1997*).

3.1. Постојећи приступи неуро-фази интеграције

У овом поглављу ће најпре бити дат преглед и критички осврт на постојеће неуро-фази системе. Имајући у виду велики број различитих начина интеграције фази и неуро система, свакако да је немогуће дати свеобухватан преглед али тежња је била да се прикажу сви релевантни приступи.

У постојећој литератури на тему систематизације неуро-фази интеграција издваја се (*Abraham, 2005*) у коме је дат веома исцрпан преглед дотадашњег стања у области. Овај преглед је у дисертацији усвојен као полазна основа и надограђен новијим приступима.

Према (*Abraham, 2005*) интеграција неуронских мрежа и фази система закључивања може се у основи остварити на три различита начина и то њиховом: *кооперацијом, конкуренцијом и интеграцијом.*

Кооперативни неуро-фази системи

Према (Abraham, 2005) неуронска мрежа, користећи своју способности учења, дефинише параметре фази систем закључивања (фази правила, тежине фази правила, параметре фази скупова...) на основу података за тренинг, након чега је њена улога завршена. Код ових система, неуронска мрежа и фази систем међусобно су независни. Неуронска мрежа учи или оптимизује одређене параметре фази контролера пре његовог коришћења (енгл. *off-line*) или за време његовог коришћења (енгл. *on-line*) (Nauck & Kruse, 1994b). Они даље прецизирају да неуронска мрежа заправо служи за претпроцесирање или постпроцесирање улаза односно излаза, са циљем да се оптимизује понашање целокупног система а не самог фази контролера (он остаје непромењен). Као могуће начине реализације ове везе наводе:

а) неуронска мрежа долази до функција припадности на основу података за тренирање што може постићи учењем неких параметара или коришћењем неколико мрежа које ће апроксимирати функцију директно. Фази скупови се подешавају *offline* и користе предефинисана фази правила како би имплементирао фази контролер. Неки начини тренирања функција припадности понуђени су у (Nomura, Hayashi & Wakami, 1992), (Nauck, Kruse & Stellmach, 1995) или (Nauck & Kruse, 1997).

б) неуронска мрежа сама дефинише правила на основу података за тренирање, зашта се најчешће користи алгоритам кластеровања и учење се обавља у *offline* режиму као на пример (Pedrycz & Card, 1992).

в) неуронска мрежа подешава параметре фази скупова при чему постоје почетне вредности фази скупова и фази правила и нека мера грешке како би се знало на који начин је потребно вршити подешавања. Уколико је унапред дат цео скуп за тренирање процес учења се може одвијати у *offline* режиму.

г) неуронска мрежа учи тежинске факторе који се односе на појединачна правила. Фази правила и фази скупови су унаред познати а тежине указују на значајност појединих правила. Недостатак поступка је да често су исте лингвистичке променљиве у различитим правилима различито представљене.

(Abraham, 2005) описује најзначајније кооперативне системе у које спадају: (Kosko, 1991), (Pedrycz, & Card, 1992) и (Nomura, Hayashi & Wakami, 1992).

- (Kosko, 1991) интерпретира правило као асоцијацију (везу) између хипотезе и последице а свако правило се чува у појединачној фази асоцијативној меморији (енгл. *Fuzzy associative memories - FAM*). Правило у коме учествује n променљивих повезаних конјункцијом представља се са n фази асоцијативних меморија тако да се у свакој чувају појединачни делови. Агрегацијом појединачних излаза и њиховом дефазификацијом добијамо комплетан систем. Неуронском мрежом одређују се тежине сваког правила којима се даље множи излаз а који указује на значај (утицај) самог правила. (Kosko, 1991) сматра да додељивање тежина правилима је еквивалентно промени параметара функција припадности али тиме не ризикујемо да дође до лоше интерпретације фази скупова и да иста лингвистичка вредност буде различито представљена.
- (Pedrycz, & Card, 1992) користи самоорганизујуће мапе које поседују слој чији је задатак да кластерује податке за тренирање при чему се интерпретација резултата обезбеђује коришћењем лингвистичких променљивих. Резултат тренирања указује на то колико су два улазна вектора међусобно слична тј. да ли припадају истој класи. (Abraham, 2005) сматра да је предност у односу на ФАМ то што се правилима не додељују тежине али да је недостатак поступка то што није једноставно одредити број улазних неурона као и вредност α пресека (који заправо одређује подскуп излазних чворова) за сваки проблем. Такође, облик функције припадности има значајан утицај па самим тим овај модел боље користи податке. Како аутор даље наводи ФАМ процедура учења не узима у обзир суседске релације међу излазним чворовима, па се понекад не добију савршена мапирања из улазних патерна у излазне патерне. Стога, наводи да је ФАМ, у односу на Pedrycz-ову процедуру, зависнија од секвенце улазних података за тренинг.

- (*Nomura, Hayashi & Wakami, 1992*) су предложили надгледану технику учења за фино подешавање фази скупова (тј. параметара функција припадности) постојећег фази система, применом опадајуће градијентне процедуре која користи меру грешке. За улазни вектор рачуна се укупна грешка, па се на основу добијене вредности ажурирају параметри последичног дела. Иста процедура се понавља, јер се при подешавању параметара узрочног дела, морају се узети у обзир промене које су се десиле у последичном делу. Недостатак овог модела се огледа у томе што је могућност његове примене ограничена на фази системе Сугено типа. Према (*Abraham, 2005*) ова процедура је доста слична делта правилу за вишеслојни перцептрон, при чему је уочљив недостатак овог приступа то што представљање лингвистичких вредности улазних променљивих зависи од правила у коме се налазе. Односно, иако се у почетном тренутку исти лингвистички изрази представљају истим функцијама припадности, на крају процеса учења се може догодити да буду представљени различитим фази скуповима јер су се током процеса различито подешавали.
- Још један пример коришћења ових система, и то у области финансија, могао би бити (*Lee & Tshung Wong, 2007*) где је предложен кооперативан неуро-фази модел за предвиђање девизног курса. Смер и интензитет будућих кретања девизног курса кључан је у управљању новчаним токовима. Коришћењем неуронских мрежа предвиђа се кретања курса дан унапред, а затим се добијени резултат преводи у фази интервал како би ову вредност могао користити фази контролер за одређивање одговарајућег инструмента за заштиту од ризика (енгл. *hedging*). На основу дефинисаних правила долази се одговарајуће стратегије.

Конкурентни неуро-фази системи

Аутор у (*Abraham, 2005*) наводи да сматра да је улога неуронских мрежа код ових система да константно одређује потребне параметре нарочито у случајевима када се улазне величине не могу директно измерити. У овом случају неуронска мрежа нема за циљ оптимизацију фази система већ доприноси побољшању перформанси целокупног система (на пример неуронска мрежа може бити претпроцесор тако да њени излазни подаци представљају улаз фази система). Процес учења се одвија само у неуронској мрежи а фази систем остаје непромењен током ове фазе. У неким случајевима фази излази не могу се директно применити на процес и тада неуронска мрежа има улогу постпроцесора фази излаза.

Интегрисани неуро-фази системи

У интегрисаном моделу неуронском мрежом се одређују параметри фази система закључивања при чему оба подсистема заправо деле податаке и начин презентације знања. Наиме, фази системи закључивања користе знање експерата јер се оно складишти у бази правила и примењују процес фази резоновања како би се извео одговарајући закључак. Међутим, како се наводи и у (*Abraham, 2005*), не постоји систематизован приступ којим би се трансформисало знање и искуство експерта у базу знања фази система закључивања. Са друге стране, механизми учења неуронских мрежа нису подешени да се ослањају на људско знање тј. основу вредности тежина не можемо интерпретирати знање које је резултат процеса учења. Експерт представља своја знања о систему користећи *if-then* правила али је пресликавање таквих правила у неуронску мрежу одговарајуће структуре веома тешко. Стога, бројни аутори се слажу да је интеграција ова два приступа природна јер омогућава да се искористе њихове предности и елиминишу недостаци.

Овај приступ заснива се на хомогеној архитектури: или је фази контролер интерпретиран као специјални тип неуронске мреже или је имплементиран коришћењем неуронске мреже (*Nauck & Kruse, 1994b*).

Као примере интегрисаних неуро-фази система у (Abraham, 2005) се наводе (Mamdani & Assilian, 1975), (Sugeno, 1985), (Lin & Lee, 1991), (Berenji & Khedkar, 1992), (Jang, 1993), (Sulzberger, Tschichold-Gurman & Vestli, 1993), (Tano, Oyama & Arnould, 1996) и (Juang & Lin, 1998).

- (Mamdani & Assilian, 1975) користи технику надгледаног учења са простирањем грешке уназад (енгл. *backpropagation learning*) како би се подесили параметри функција припадности. Састоји се од пет слојева, при чему сваки чвор првог слоја одговара једној улазној променљивој и има једино задатак да проследи вредност до следећег слоја. Сваки чвор другог слоја одговара једној лингвистичкој вредности и излаз из овог слоја је вредност функције припадности која представља степен у коме улазна променљива припада том фази скупу. Трећи слој се односи на премису правила. Најчешће коришћени оператор је t норма. Четврти слој комбинује одговарајуће делове премисе правила тј. рачуна њену укупну снагу чиме се одређује вредност последичног дела. У последњем, петом слоју, агрегирају се излази свих правила коришћењем оператора t конорме и рачуна се коначан излаз система након процеса дефазификације.
- (Sugeno, 1985) комбинује *backpropagation* алгоритам за одређивање функција припадности и средње квадратну грешку за одређивање коефицијената линеарне комбинације у последици правила. Процес учења састоји се из два дела. Прво се на основу улазних патерна, а помоћу итеративне процедуре средње квадратне грешке, одређују оптимални параметри закључка, док параметри премиса остају непромењени. У другом делу се помоћу *backpropagation* алгоритма подешавају параметри премиса док параметри закључка остају непромењени. Поступак се понавља итеративно. У односу на Мамдани неуро-фази систем овај систем се не разликује у прва три слоја. У четвртном слоју израчунава се релативни значај сваког од правила, док се у последњем слоју рачуна се укупни излаз као сума свих излазних сигнала.

- (Lin & Lee, 1991) предлажу модел који има петослојну архитектуру и имплементира Мамдани тип ФИС-а. Он омогућава подешавање параметара и структуре дизајнираног фази-неуро система. Постоје два чвора за сваку излазну променљиву: један користи податке за тренинг (жељене излазе) а други за стварне излазе. Први скривени слој фазификује сваку од улазних променљивих. Појединачни чворови одговарају функцијама припадности или њиховој композицији, како би се вршила израчунавања комплексних функција припадности. Други скривени слој дефинише предуслове правила. Хибридно учење (које се састоји од ненадгледаног учења и опадајуће градијентне методе) се одвија у почетној фази како би се одредио центар и ширина функција припадности након чега се могу одредити премисе правила. Компетитивним алгоритмом учења одређују се тачне везе чворова правила са последичним делом правила. Структура целокупне мреже одређена је тек када се одреде сва фази правила. Мрежа, у другој фази учења, подешава оптималне параметре улазних и излазних функција припадности помоћу алгоритма надгледаног учења.
- (Kasabov & Song, 2002) развили су DENFIS (енгл. *Dynamic Evolving Neural-Fuzzy Inference System- DENFIS*). Развијена су два адаптивна модела (у *on-line* и *off-line* режиму) која користе Сугено тип закључивања и нови хибридни алгоритам учења. Као део алгоритма учења представљен је еволутивни метод кластеровања (енгл. *Evolving clustering method*) који је коришћен је за оба модела са циљем да се, на основу поделе улазног простора, креирају и ажурирају правила. *On-line* DENFIS модел поред ове методе кластеровања, заснованој на максималној удаљености кластера, користи и рекурзивни метод најмање средње квадратне грешке са фактором заборављања (енгл. *forgetting factor*). *Off-line* модел је проширење *on-line* модела при чему је ограничен на оператор минимум. DENFIS је примењен за предвиђање динамичких временских серија.

- (Berenji, 1992) дефинишу ARIC (енгл. *Approximate Reasoning Based Intelligent Control*) тј. фази контролер имплементиран помоћу две неуронске мреже: *Action state Evaluation Network (AEN)* и *Action Selection Network (ASN)*. Прва мрежа садржи елементе који оцењују и врше корекције контролера на основу предвиђања а друга садржи сам фази контролер. Захваљујући проширењу функција ове две мреже олакшава се само дизајнирање контролера. Сложен алгоритам учења започиње идентификацијом параметара управљања, који затим учи да прилагођава функције припадности различитим правилима.

Поједини аутори као главни недостатак овог модела истичу чињеницу да два фази правила која користе исти фази скуп могу имати различите интерпретације променљивих као последицу различитих функција припадности (тј. промена функције припадности треба да се одражава на сва правила). Такође, наводе да ARIC није успео да отклони све недостатке неуронских мрежа јер не обезбеђује интерпретацију појединих корака.

- (Berenji & Khedkar, 1992) предлажу GARIC (енгл. *Generalized Approximate Reasoning Based Intelligent Control*) као проширење ARIC модела (енгл. *Approximate Reasoning Based Intelligent Control*) како би се превазишли недостаци претходног модела. Фази систем у потпуности интегрисан у *feedforward* мрежу Овај модел функције припадности модификује глобално за сва правила. Као уопштење ARIC модела није ограничен само на монотоне функције већ користи било коју диференцијабилну функцију. GARIC се састоји из три компоненте: *Action Selection* мрежа (мапира вектор стања у неку предложену акцију), *Action Evaluation* мрежа (одређује у којој мери је предложено деловање добро) и *Stochastic Action* модификатор (сходно томе креира нову акцију). Аутори у истом раду предложу и нову методу *localized mean of maximum* која комбинује појединачне излазе сваког од правила а такође, су коришћене и сложене технике надгледаног учења.

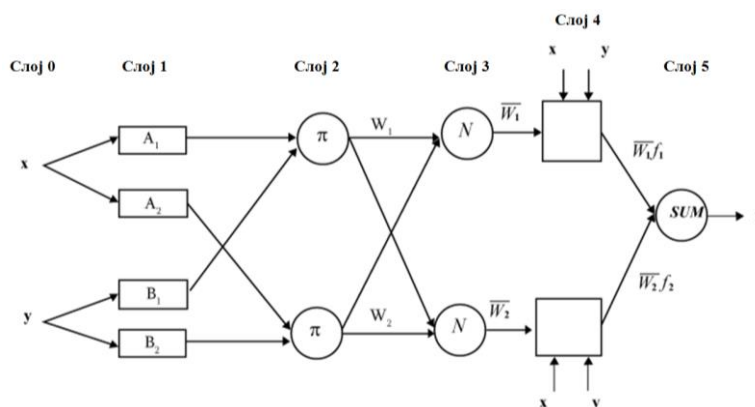
Архитектура GARIC-а се састоји од пет слојева. Сваки улаз је повезан само са оним чворовима првог слоја које се односе на дату лингвистичку вредност. Фази правила тј. степен њихове реализације представљени су другим скривеним слојем. Трећи скривени слој односи се на лингвистичке вредности контролне излазне променљиве. Последични део правила рачуна се у зависности од снаге узрочног дела, која је израчуната у другом скривеном слоју. За рачунање излаза правила, GARIC користи метод средине максимума који захтева класичне (енгл. *crisp*) вредности па је пре рачунања коначног излаза потребно извршити дефазификацију. За подешавање параметара користи комбинацију опадајућег градијента и учење са подстицајем (енгл. *reinforcement learning*). Модел је применљив за Сугено тип система, па је самим тим погоднији за апликације код којих су перформансе важније од интерпретације.

- (Jang, 1993) предлаже ANFIS (енгл. *Adaptive Network based Fuzzy Inference System*) који је свакако најчешће коришћени неуро-фази модел, па ће из тог разлога бити детаљније описан. Веома лако се имплементира а могућност широке примене у најразличитијим апликацијама разлог је што је део *Matlab Fuzzy Logic Toolbox*.

Аутор интегрише два приступа: вештачке неуронске мреже и фази системе како би изградио систем којим ће моћи да адекватније третира неизвесност и недефинисаност. Он дефинише АНФИС као класу адаптивних мрежа, које су функционално еквиваленте фази закључивању, при чему се користе предности и неуронских мрежа и фази логике. И фази резонување и калкулације које реализује неуронска мрежа одвијају се симултано (*Shoorehdeli, Teshnehlab, Sedigh, Khanesar, 2009*). Једна од главних карактеристика овог система је његова адаптивност тј. његове функције припадности изводе се на основу података који описују понашање система датих преко улазно-излазних променљивих система.

Опис слојева, слика и ознаке преузете су од (Jang, 1993). Квадратни чворови тзв. адаптивни чворови поседују параметре док кружни чворови тзв. непромењиви чворови немају параметре. Скуп параметара одређене адаптивне мреже је унија скупа параметара свих адаптивних чворова. Како би се постигла жељена улазно-излазна пресликавања, врши се подешавање параметара према скупу за тренинг, а на основу методе најстрмијег спуста.

Петослојна архитектура АНФИС-а приказана је на следећој слици, при чему сваки од слојева има своју јасно одређену улогу.



Слика 20. Архитектура АНФИС-а

Слој 1: сваки чвор овог слоја је квадратни чвор и обавља функцију

$$O_i^1 = \mu_{A_i}(x) \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

где је x улаз у чвор i , а A је лингвистички појам (енгл. *linguistic label*) као на пример (*мало, велико, ...*) која је везана са дату функцију чвора. Другим речима, O је заправо вредност функције припадности A која означава у којој мери дато x припада фази скупу A_i . Функције припадности се могу представити различитим облицима (троугаона, трапезоидна или било која друга континуална, део по део диференцијабилна функција). Најчешће коришћена је звонаста функција са максималном вредношћу у 1 и минималном у 0:

$$\mu_{Ai}(x) = \frac{1}{1 + \left[\left(\frac{x - c_i}{a_i} \right)^2 \right]^{b_i}}$$

при чему је $\{a_i, b_i, c_i\}$ скуп параметара који се односе на премису правила а које је потребно оптимизовати кроз процес учења.

Слој 2: сваки чвор овог слоја је кружни и означен је „П“ а његов задатак је да множи улазне сигнале и затим их прослеђује следећем слоју.

$$w_i = \mu_{Ai}(x) \times \mu_{Bi}(x) \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Излаз из сваког чвора представља укупну јачину правила. Уместо множења овде се могу применити и други оператори који реализују генерализовано AND.

Слој 3: Чворови овог слоја су кружни и означени „N“. Њихов задатак је да врше израчунавања којима добијамо нормализовану јачину i -тог правила.

$$\bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2} \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

За сваки чвор рачуна се рацио, као однос јачине i -тог правила према суми јачина свих осталих правила.

Слој 4: Сваки чвор i , овог слоја је квадратни чвор, који обавља функцију

$$o_i^4 = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i (p_i x_1 + q_i x_2 + r_i) \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

где је \bar{w}_i излаз из претходног слоја 3 док су p_i, q_i и r_i скуп параметара који се односе на закључак.

Слој 5: представљен је кругом и рачуна укупни излаз као суму свих улазних сигнала.

$$o_i^5 = \sum_i \bar{w}_i f_i = \frac{\sum_i w_i f_i}{\sum_i w_i} \quad i = 1, 2, 3 \dots$$

Процес учења код АНФИС-а односи се на подешавање параметара унутар непроменљиве структуре и броја слојева. АНФИС користи хибридни алгоритам који комбинује *backpropagation* методу најстрмијег спуста (енгл. *backpropagation gradient descent*) и методу најмањих квадрата како би се креирао фази систем закључивања који је способан да учи (функције припадности се итеративно подешавају на основу улазно-излазног скупа за тренирање). *Backpropagation* алгоритмом подешавају се параметри функција припадности премиса док се методом најмањих квадрата подешавају коефицијенти линеарне комбинације закључка. У (Abraham, 2005) аутор истиче да су функције *min* и *max* замењене диференцијабилним функцијама као и да излазна функција припадности мора бити монотомо неоппадајућа. Аутор даље наводи да се, уколико се користе Гаусове функције припадности, АНФИС може поредити са мрежама са радијално заснованом функцијом (енгл. *radial basis function*).

(Jang, Sun & Mizutani, 1997) поредили су АНФИС са другим техникама и показали су да поседује ефикасније алгоритме учења, тренирање је брже а софтвер једноставнији. Иако је један од првих интегрисаних модела, показао се као најбољи апроксиматор и најбрже је конвергирао у поређењу са другим неуро-фази моделима (Ali Akcaoyol, 2004). Такође, показује боље резултате у примени и без претходног тренирања (Altug, Chen & Trussell, 1999).

Недостатак овог модела је то, што се за проблеме великих димензија тј. великог броја улаза, дефинише велики број правила па одређивање оптималне структуре постаје превише рачунски сложено. Многе анализе показале су да број фази правила експоненцијално расте са порастом броја елемената. Такође, као недостатке АНФИС-а (Wang &

Chen, 2008) наводе: ограниченост на Сугено тип фази закључивања нултог или првог реда; ограниченост на само један излаз јер као метод дефазификације користи се отежана сума; сва правила имају исте тежине (значајности); као и да број излазних функција припадности мора бити једнак броју правила.

- (Sulzberger, Tschichold-Gurman & Vestli, 1993) предлажу *Fuzzy Net* (FUN) која омогућава јасну трансформацију фази правила и функција припадности у мрежу са специјално дефинисаним неуронима која кроз активационе функције може извршавати логичке изразе. Мрежа се састоји од улаза, излаза и три скривена слоја. Захваљујући различитим активационим функцијама у различитим слојевима представљени су различити начини закључивања у фази систему.
- (Tano, Oyama & Arnould, 1996) предлажу *FINEST* (енгл. *Fuzzy Inference Environment Software with Tuning*) који је пројектован за подешавање самог фази закључивања. Модел нуди подешавања функција агрегације, функције импликација правила као и функција које комбинују излазе појединачних правила. За фино подешавање параметара у овој четворослојној архитектури користи се *backpropagation* алгоритам. Први слој је задужен за фазификацију, други врши агрегацију истинитосних вредности премиса i -тог правила. Трећи слој се односи на закључак правила а агрегација свих правила врши се у четвртом слоју.
- (Sun, 1994) предлаже општи модел адаптивног фази система закључивања заснован на неуронским мрежама. За параметраску идентификацију коришћен је Јангов модел који за побољшање укупних перформанси користи Калманов филтер. Како би се овај модел могао применити и за проблеме класификације извршене су модификације тј. уведена је параметризована t -норма. Такође, предложен је нови метод организације правила, назван *fuzzy binary boxtree* чија је идеја да се систем опише скупом мањих правила која се затим организују према сличности премисе. Правила организована на овај начин из коришћење *branch-and-bound* алгоритма постижу

логаритамску ефикасност система. Побољшањем модела сматра се и увођење тежина која се односе на значајност појединих правила.

- (Juang & Lin, 1998) предлажу SONFIN (енгл. *Self Constructing Neural Fuzzy Inference Network*) који у основи користи Сугено тип фази закључивања и неуронске мреже, тј. њихову способност учења. У почетном тренутку не постоје правила већ се креирају и подешавају *on-line* учењем кроз истовремену идентификацију структуре и параметара (за разлику од већине других приступа). Приликом идентификације структуре узрочног дела правила врши се флексибилна подела улазног простора на основу алгоритма за кластеровање, док се за последични део правила користе само иницијалне вредности добијене методом кластеровања. Параметри *if* дела подешавају се као оптималним вредностима коришћењем или методе најмањих квадрата (енгл. *least mean squares*) или рекурзивне методе најмањих квадрата (енгл. *Recursive Least Squares*). За параметре *then* дела одговоран је *backpropagation* алгоритам. Идентификација структуре и параметара обавља се симултано. Овим поступком, SONFIN са мање правила постиже велику тачност.
- У раду (Rong, Sundararajan, Huang & Saratchandran, 2006) изложен је SAFIS (енгл. *Sequential adaptive fuzzy inference system*) који се темељи на функционалној еквиваленцији ФИС-а и мрежама са радијално заснованом функцијом (енгл. *radial basis function neural network*). Фази правила се, током учења, бришу и додају зависно од њиховог „утицаја“. Процедура учења је секвенцијалана тако да се у једном тренутку користе само текући подаци. Након одређивања правила врши се подешавање параметара оних правила (победника) која су „најближа“ (у Еуклидском смислу) текућем улазу помоћу проширеног Калмановог филтера (енгл. *extended Kalman filter*) механизма.

(Abraham, 2005) наводи да су NEFCON, NEFCLASS и NEFPFOX неуро-фази системи који користе генерички фази перцептрон за моделовање неуро-фази система Мамдани типа. Ови модели су у основи лаки за имплементацију, коришћење, разумевање и интерпретацију па су погодна подршка процесу

одлучивања. Како њихов циљ није генерисање тачног резултата толеришу и непрецизности. Учење са подстицајем (енгл. *reinforcement learning*) се показало адекватнијим од надгледаног обучавања у проблемима управљања.

- NEFCON (енгл. *Neuro-Fuzzy Controller*) има способност учења фази правила и фази скупова имплементираних за Мамдани тип фази система (*Nauck & Kruse, 1994a*). Овај се модел може посматрати као проширење GARIC модела који такође користи учење са подстицајем (енгл. *reinforcement learning*) али захтева претходно дефинисану базу правила. За разлику од неуронских мрежа, тежине веза су дефинисане фази скуповима уместо ралним бројевима. Правила са истом премисом деле исте тежине како би се обезбедио интегритет базе. База знања фази система имплицитно је дата кроз структуру мреже. Улазне јединице врше фазификацију, логика закључивања дефинисана је кроз функције а излазне јединице одговорне су за дефазификацију. Уколико нам нису познати тачни излази тј. уколико су правила креирана на основу процењених вредности, прво се инкрементално уче сама правила (и по потреби се могу додавати). Уколико су почетна правила креирана, декременталним правилом учења непотребна се могу елиминисати током процеса учења. Друга фаза се односи на оптимизацију правила, кроз модификовање параметара фази скупова (користи *Fuzzy Error Backpropagation* алгоритам). Предност овог модела је што се може применити и на процесе код којих не знамо тачну вредност излаза. С друге стране, недостатак је што декрементално правило учења захтева сложена израчунавања, па је употреба овог модела ограничена на неколико улазних променљивих које су описане са неколико фази скупова.
- NEFCLASS (енгл. *Neuro-Fuzzy Classification*) предложен од стране (*Nauck & Kruse, 1995*) има задатак да дође до правила и до облика функција припадности на основу којих се врши класификација. База правила апроксимира непознату функцију која мапира улазни образац у њему одговарајућу класу. NEFCLASS по својој архитектури, веома личи на NEFCON систем. Разликују се у алгоритму учења и

интерпретацији правила. Исте лингвистичке вредности улазних променљивих представљају се истим фази скупом. Сваки јединица која се односи на правило може бити повезана са само једном излазном јединицом.

Овај модел пројектован је са циљем да се издвоје правила на основу којих се врши класификација, као и да модификује облике функција тих правила кроз процес учења. У случају да се у реализацији система креће од почетка, корисник мора дефинисати почетни број фази партиција који се односе на улазне карактеристике као и максималан број чворова који се креирају у скривеном слоју. На почетку процеса не постоји фиксна архитектура мреже, већ се за дати улазни вектор тражи она комбинација фази скупова која даје највећу припадност скупу. Уколико таква комбинација не постоји, за премису правила креирају се нови чворови и ново правило.

Алгоритам учења подешава фази скупове директно, при чему се користе ограничења како би осигурало да се изведена правила адекватно интерпретирају. NEFCLASS након креирања правила, користи надгледано учење засновано на фази *backpropagation* алгоритаму, при чему се води рачуна да два фази скупа која су на почетку процеса учења иста, не могу се различито подешавати.

Користи троугаоне функције припадности и на основу грешке се одређују потребне корекције и мењају се улазни фази скупови. Како систем у основи служи за класификацију, тачна вредност излаза није од пресудног значаја. Инкрементално учење мање је захтевно него декрементално код NEFCON модела. Чак и код вишедимензионих проблема база правила дефинише се након највише три итерације. У поређењу са неуронском мрежом, као предности ове методе наводе се једноставност, могућност коришћења претходних знања о систему и интерпретабилност.

- Још један фази класификатор који представља модификацију NEFCLASS модела дат је у (Nauck & Kruse, 1997). Разлика је у алгоритму учења који је овде дат као једноставна хеуристика која

веома брзо долази до правила, на основу скупа података за тренинг. Намера је да се направи модел који може интерпретирати знање у форми лингвистичких правила и уједно је у стању да користи претходна знања из базе правила (тј. није неопходно сваки пут почињати од почетка). Правила се подешавају модификовањем параметара функција припадности. Алгоритам не користи n -димензионе кластере у простору образаца већ директно прилагођава функције припадности за сваку појединачну димензију. На овај начин се добија рачунски ефикаснији модел који је са друге стране, мање флексибилан у креирању базе правила на основу датих улазно-излазних података.

- Исти аутори (*Nauck & Kruse, 1998*), (*Nauck & Kruse, 1999*) развили су и NEFPROX (енгл. *Neuro-Fuzzy Function Approximation*) који се користи у апликацијама које захтевају апроксимацију функција. Представља модификацију NEFCON модела код кога је само изостављено учење са подстицајем. NEFCON има само један излазни чвор. За разлику од NEFCLASS користи функције припадности у последичном делу. NEFPROX се може иницијализовати уколико су расположива одговарајућа правила или се пак могу креирати сва правила кроз процес инкременталног учења. База знања дата је имплицитно кроз структуру мреже. Улази се прво фазификују, логика закључивања дата је кроз функције пропагације а затим се врши дефазификација. Имплементација АНФИС-а ограничена је само на Сугено моделе који користе диференцијабилне функције док се NEFPROX односи на опште фази системе Мамдани типа.

Коначно у (*Abraham, 2005*) се закључује да кооперативни и конкурентни модели имају висок степен интерпретативности због концепта црне кутије својственог неуронској мрежи. С друге стране, интегрисани модели поседују и способност учења и тумачења резултата на начин близак човеку. FALCON, GARIC, ANFIS, NEFCON, SONFIN, FINEST и FUN и други интегрисани модели током процеса учења подешавају параметре у оквиру фиксне структуре. Корисник дефинише

архитектуру: тип и број функција припадности и за улазне и за излазне променљиве као и тип фази оператора. Њихов недостатак је што у случају вишедимензионих проблема израчунавања тј. оптимизација постаје сувише компликована па се тешко долази до одговарајућих вредности параметара.

Поред ових неуро-фази система дефинисани су и многи други приступи који су интегрисали различите моделе и технике. Овде су наведени само они који су своју примену нашли у области организационих, нарочито финансијских система.

4. КОНЗИСТЕНТАН ФАЗИ СИСТЕМ ЗАКЉУЧИВАЊА

Класична теорија управљања заснива се на математичким моделима који описују (поједностављено) понашање посматраног (најчешће нелинеарног) система, што често није нимало лако одредити. Насупрот томе, фази системи закључивања не захтевају дефинисање строгог математичког модела већ се управљање реализује скупом *if-then* правила.

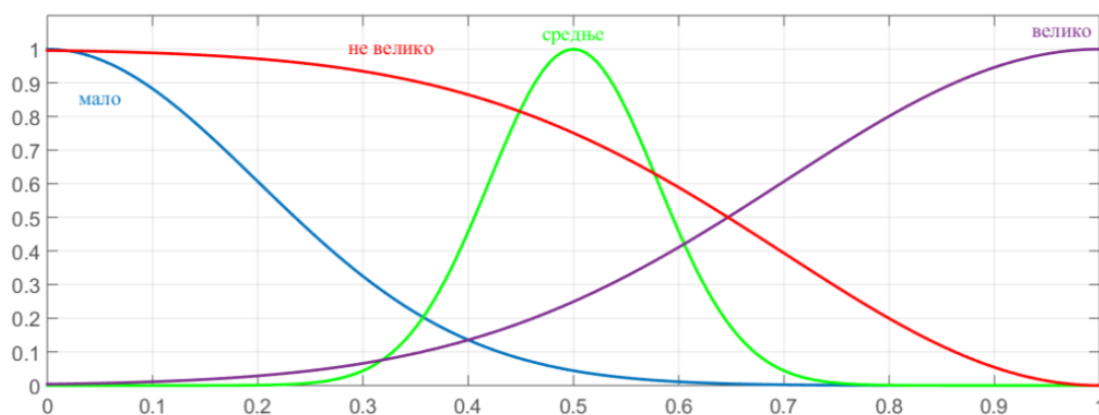
Како се конвенционална теорија фази скупова не налази у Буловом оквиру, у овом приступу, за евалуацију правила предлаже се коришћење конзистентне (реално-вредносне $[0,1]$) фази логике. Као што је већ речено, основна разлика огледа се у томе што конзистентна фази логика захтева да се на структурном нивоу изврше све потребне трансформације (што ће бити детаљно приказано) пре него што се пређе на вредносни ниво. На примеру фази система закључивања, чији је задатак да процени могућност да је пацијент на дијализи оболео од перитонитиса, биће показана разлика у резултатима која се добија применом конвенционалног и конзистентног приступа.

Своје знање, експерт било ког домена (у конкретном примеру нефролог) најлакше може изразити уколико приликом дефинисања *if-then* правила не постоје ограничења везана за искључиву примену једног оператора (на пример само на конјункцију или дисјункцију појединачних захтева). Семантички богатија правила обезбеђују већу прецизност приликом дефинисања самих правила, боље разумевање и прилагођеност конкретном проблему.

У системима за подршку одлучивања (за разлику од класичних система управљања), приликом дефинисања модела тј. описивања релација између улаза и излаза система, може да се јави потреба за негацијом. Када неку улазну променљиву описујемо са три и више лингвистичких атрибута (фази скупа), поставља се питање да ли негацију једног скупа можемо представити комбинацијом осталих. Можемо приметити да, и у случају да је то могуће, представљање једног фази скупа комбинацијом осталих свакако не би било

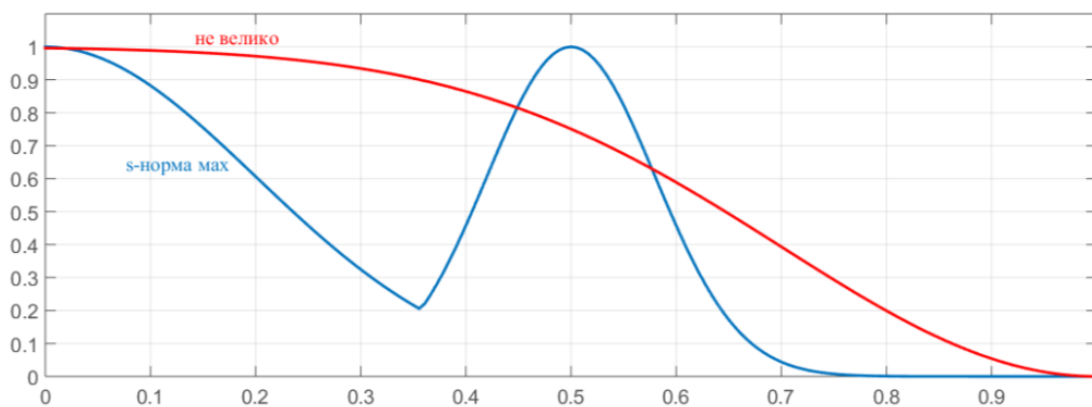
усклађено са квалитативним описима блиским човеку и водило би већој сложености система.

Наиме, уколико су дефинисана три фази скупа „мало“, „средње“ и „велико“, негација скупа „велико“ свакако није скуп „мало“. Скуп „не велико“ морао би да у некој мери обухвати не само скуп „мало“ већ и скуп „средње“. На следећој слици, приказан је однос негације неког фази скупа (на пример „велико“) и осталих фази скупова (на пример „мало“ и „средње“).

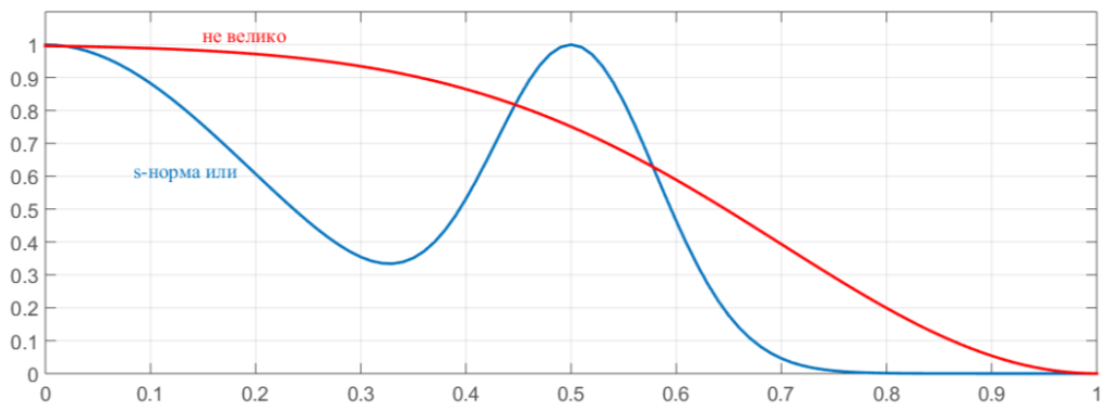


Слика 21. Илустрација негације фази скупа велико („не велико“)

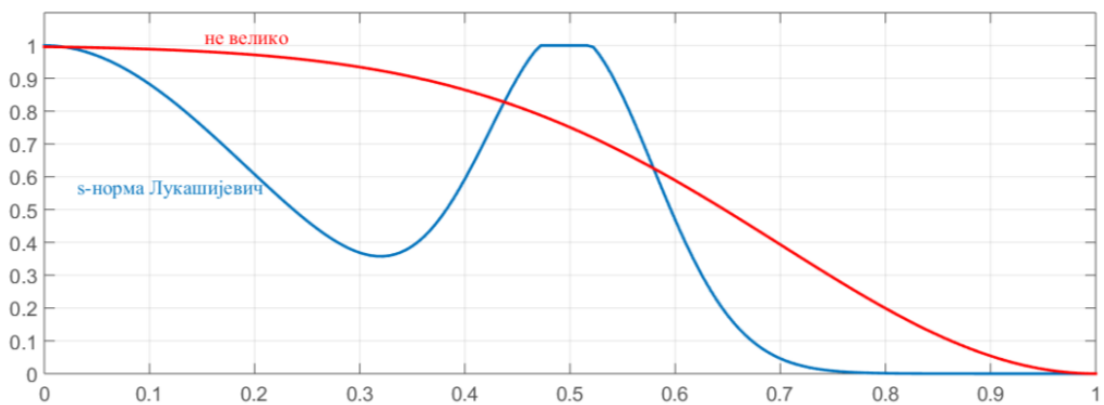
На следећим сликама, показано је да није могуће, у општем случају, негацију једног фази скупа представити дисјункцијом осталих фази скупова, и то користећи различите s-норме.



Слика 22. Однос негације једног скупа и дисјункције (*max*) преосталих скупова



Слика 23. Однос негације једног скупа и дисјункције (или) преосталих скупова



Слика 24. Однос негације једног скупа и дисјункције (Лукашијевич) преосталих скупова

Из свега наведеног, може се закључити да је употреба негације нужна. Конзистентна фази логика адекватније третира овај оператор јер чува све Булове аксиоме, што ће се илустровати предложеним конзистентним фази системом закључивања. Самим тим, можемо показати да је у таквим случајевима, коришћење предложеног приступа оправдано

4.1. Илустративан пример

Оправданост коришћења конзистентног приступа најпре је илустрована на примеру конзистентног фази система закључивања (КФИС). Илустративан пример има за циљ да укаже на чињеницу класичан ФИС и КФИС не воде увек ка истим резултатима а разлика је најочљивија када се приликом дефинисања правила користи негација. Предложени КФИС није ограничен на специфичне намене, али је овде илустрован примером из домена медицине.

Дијализа трбушне марамице (лат. *peritoneum*), као облик кућне дијализе, може да доведе до различитих компликација од којих је перитонитис (запаљење трбушне марамице) најозбиљнија. Уколико се не препозна на време или се не лечи на одговарајући начин, перитонитис може довести до озбиљних компликација па чак и смрти. Иако је смртност у случају перитонитиса мања од 4%, код 16% пацијената на дијализи он је био један од фактора који су утицали на смртни исход.

Ово обољење се може правилно и прецизно да се дијагностификује само у одговарајућим медицинским установама. У ситуацијама када то није могуће, било би корисно пружити неки, медицински заснован, начин одређивања степена могућности да је пацијент оболео, како би се, у складу с тим, могли преузети неопходни кораци. Једна од могућности је дефинисање фази система закључивања. Наиме, уколико би се знања медицинских стручњака (из дате области) уградила у систем, у форми правила, предложен ФИС могао би да буде од користи пацијентима у случајевима када медицинске установе нису доступне (на пример због њихове удаљености). У том случају, висок степен могућности указивао би на неопходност примене одговарајућег третмана.

Како би се дефинисао одговарајући модел, најпре су разматране клиничке манифестације које могу указивати на болест. У складу са препорукама Међународног друштва за перитонеалну дијализу (енгл. *International Society for Peritoneal Dialysis – ISPD*) приликом дијагностификовања од значаја су клиничке манифестације (бол у абдомену, мучнина, температура, дијареја или затвор) и

замућеност урина. Најзначајнијим симптомима ипак сматрају се бол у пределу абдомена и замућеност урина (тачна дијагноза се добија лабораторијском анализом урина). У дијагностичке критеријуме спадају број леукоцита и идентификација микроорганизама.

Замућеност, обично указује на перитонитис, чак и ако бол није присутна, али не мора да буде сигуран знак болести. Са друге стране, постоји могућност да је пацијент оболео од перитонитиса чак и у случајевима када урин није замућен али је присутна бол у абдомену. Одређени проценат пацијената оболелих од перитонитиса имао је позитивну културу (микроорганизми су били присутни) али без клиничких манифестација или замућеног урина, и уз повећани број леукоцита (што може да варира у зависности од времена када је узорак узет).

С друге стране, чиста клиничка слика коју прати замућеност урина или повећани број леукоцита у узорку али без изолованог узрока може указивати на стерилни перитонитис (стерилна култура може бити последица лошег узорка, неког претходног узимања антибиотика; а могуће је да је узрок микроорганизам са ниском стопом раста или су у питању специфичне културе које захтевају специјалну култивацију).

Имајући у виду елементе клиничке слике и дијагностичке критеријуме, за улазе модела узете су следеће променљиве:

- F – Температура (енгл. *Fever*)
- L – број Леукоцита (енгл. *number of Leukocytes*)
- AP – Бол (енгл. *Abdominal Pain*)
- CE – Замућеност (енгл. *Cloudiness of Effluent*)
- MC – број Микроорганизама (енгл. *number of Microorganisms*)

У конкретном случају, за лингвистичку променљиву замућеност узети су следећи лингвистички атрибути „бистар“, „слабо замућен“, „прилично замућен“ и „екстремно замућен“. Температура, бол и број леукоцита представљени су једним фази скупом „присутна“, док су микроорганизми представљени са три скупа „мало“, „знатно“ и „пуно“.

Излазна променљива, тј. излаз система указује на степен могућности да пацијент болује од перитонитиса:

PL – Могућност перитонитиса (енгл. *Peritonitis Likelihood*)

У овом илустративном примеру фази скупови се налазе само у премиси правила. Излаз је представљен линеарном функцијом без слободног члана али се може да се прошири на било коју монотону функцију.

Како би се проценила могућност да је пацијент на дијализи оболео од перитонитиса, доменски експерт-нефролог (у складу са претходним разматрањем) дефинисао је следеће правило:

if

(MC is „znatno“ and (AP is „prisutna“ or F is „prisutna“ or CE is „prilично замућен“))

or

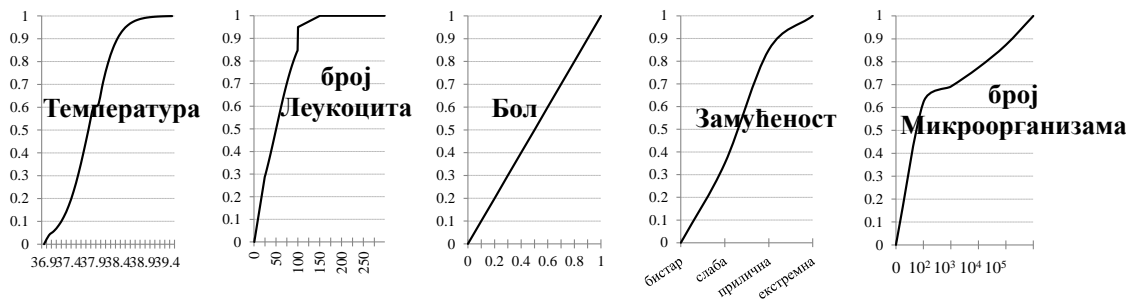
(not MC is „znatno“ and (AP is „prisutna“ and (CE is „prilично замућен“ or L is „prisutna“)))

then PL

Ово правило се може да се интерпретира на следећи начин: позитивна култура праћена клиничким манифестацијама (температуром) или замућеност ИЛИ стерилна култура коју прати бол у абдомену и замућеност или повећан број леукоцита у узорку указују на висок степен ризика од обољења. Овај висок степен подразумева да је неопходно преузети одговарајуће мере, тј. терапију.

Облик функција припадности, за сваку од променљивих, може се одредити интуитивно (тј. на основу претходног знања доменског експерта) или на основу карактеристика улазно-излазних података. Доменски експерти имају кључну улогу у овом процесу јер се семантика података заснива на њиховом знању и разумевању процеса.

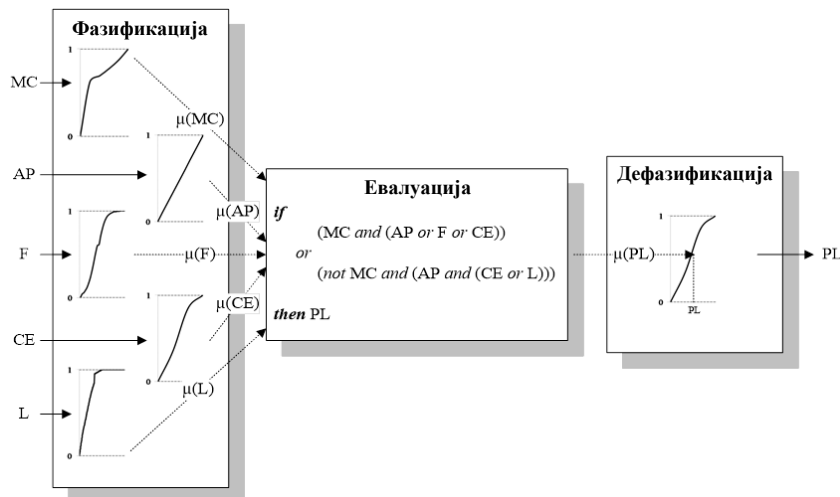
Одговарајуће функције припадности (дефинисане на основу знања експерата и доступне литературе) приказане су на следећој слици:



Слика 25. Функције припадности улазних променљивих

Након дефинисања функција припадности, неопходно је извршити избор одговарајућих функција за операторе фази конјункцију (AND), фази дисјункцију (OR) и фази комплемент (NOT). Избор одговарајућих оператора зависи од проблема који се посматра тј. од степена интеракције између елемената који се агрегирају (што се детаљно разматрало у поглављу 2.3)

Предложени конзистентан фази систем закључивања за одређивање могућности да је пацијент оболео од перитонитиса графички је представљен на слици:



Слика 26. Процес фази закључивања

Дефинисано правило математички можемо изразити на следећи начин:

$$(MC \wedge (AP \vee F \vee CE)) \vee (\neg MC \wedge (AP \wedge (CE \vee L)))$$

Како је детаљно објашњено у поглављу 2.3.2, процес трансформације Булове функције у генерализовани Булов полином (ГБП) подразумева да се најпре приступа структурном нивоу.

У конкретном случају, након трансформација можемо написати:

$$\begin{aligned}
& \left((MC \wedge (AP \vee F \vee CE)) \vee (\neg MC \wedge (AP \wedge (CE \vee L))) \right)^\otimes \\
& = MC \otimes AP + MC \otimes F + MC \otimes CE - MC \otimes AP \otimes F - MC \otimes AP \otimes CE - MC \otimes F \otimes CE + MC \otimes AP \otimes F \otimes CE \\
& \quad + AP \otimes CE + AP \otimes L - AP \otimes CE \otimes L - MC \otimes AP \otimes CE - MC \otimes AP \otimes L + MC \otimes AP \otimes CE \otimes L \\
& \quad - \emptyset \\
& = MC \otimes AP + MC \otimes F + MC \otimes CE + AP \otimes CE + AP \otimes L \\
& \quad - MC \otimes AP \otimes F - 2 * MC \otimes AP \otimes CE - MC \otimes F \otimes CE - AP \otimes CE \otimes L - MC \otimes AP \otimes L \quad (1) \\
& \quad + MC \otimes AP \otimes F \otimes CE + MC \otimes AP \otimes CE \otimes L
\end{aligned}$$

Исто правило може да се декомпонује и помоћу правила тзв. конвенционалне (класичне) фази логике:

$$\begin{aligned}
& \left((MC \wedge (AP \vee F \vee CE)) \vee (\neg MC \wedge (AP \wedge (CE \vee L))) \right) \\
& = (MC \wedge (AP \vee F \vee CE)) + (\neg MC \wedge (AP \wedge (CE \vee L))) - (MC \wedge (AP \vee F \vee CE)) * (\neg MC \wedge (AP \wedge (CE \vee L))) \\
& = MC * AP + MC * F + MC * CE - MC * AP * F - MC * AP * CE - MC * F * CE + MC * AP * F * CE \\
& \quad + AP * CE + AP * L - AP * CE * L - MC * AP * CE - MC * AP * L + MC * AP * CE * L \\
& \quad - (MC * AP + MC * F + MC * CE - MC * AP * F - MC * AP * CE - MC * F * CE + MC * AP * F * CE) \\
& \quad * (AP * CE + AP * L - AP * CE * L - MC * AP * CE - MC * AP * L + MC * AP * CE * L) \quad (2)
\end{aligned}$$

Детаљан опис корака трансформације дат је у раду (*Dragović, Turajlić, Pilčević, Petrović & Radojević, 2015*). Након што су предузети сви кораци трансформације (што је у предложеном решењу, због његове сложености, аутоматизован процес) тежиште се пребацује на вредносни ниво. На овом нивоу потребно је генерализовани производ \otimes заменити одговарајућим оператором. У конкретном случају, за генерализовани производ \otimes изабран је оператор стандардни производ.

4.2. Резултати експеримента

Подаци коришћени у овом раду добијени су на основу медицинских картона 156 пацијената који су учествовали у програму дијализе трбушне марамице у периоду од 2001. до 2010. године на Војномедицинској академији (ВМА) у Београду.

На основу података о 156 пацијената, код њих 126 дијагностификован је перитонитис. Пацијенти (74 мушкарца и 82 жене) били су стари између 18 и 85 година.

Медицински подаци указују да је дијагноза била потврђена на основу:

1. клиничких симптома и знакова упале трбушне марамице (као што су температура или бол у абдомену),
2. замућеност урина и висине тј. броја леукоцита > 100 ћелија/ μ l (преко 50% PMN) и
3. идентификација микроорганизама (грам или културе бактерија). Од свих пацијената узет је узорак за лабораторијску анализу.

Остала 33 пацијента, код којих није дијагностификован перитонитис, имала су неке клиничке индикације (као што су бол у пределу абдомена, температура, значајан број леукоцита или замућен урин) али је изостала потврда осталих дијагностичких критеријума. Наведени симптоми нису могли да се припишу перитонитису јер дијагноза није потврђена. Присуство (број случајева и проценат учесталости) релевантних дијагностичких критеријума код 123 пацијента којима је дијагностификован перитонитис и преосталих 33 код којих није, респективно, дат је у следећој табели:

Табела 3. Присуство дијагностичких критеријума у посматраном узорку

Критеријум	Потврђено		Није потврђено	
	Број	Процентуално	Број	Процентуално
Температура	48	39.02%	16	48.48%
број Леукоцита	123	100%	11	33.33%
Бол	108	87.80%	26	78.79%
Замућеност	114	92.68%	14	42.42%
Микроорганизми	107	86.99%	0	0%

Од 123 случаја перитонитиса, 16 пацијената имало је стерилни перитонитис тј. имали су негативне резултате културе микроорганизама. Код осталих пацијената потврђен је узрочник, тј. присуство различитих микроорганизама (табела 4).

Најозбиљније епизоде биле су изазване бактеријама *Staphylococcus aureus*, *Enterococcus*, гљивицама (*Candida*), комбинованим узрочницима (*Gram-positive* and *Gram-negative*) и бактеријама *Gram-negative*, док су *Coagulase-negative staphylococcus (CNS)* изазивали блаже клиничке форме.

Табела 4. Дистрибуција микробиолошких узрочника

Узрочник	Број	Процент
Грам-позитивни		
<i>Coagulase-negative staphylococcus</i>	50	(46.73%)
<i>Staphylococcus aureus</i>	9	(8.41%)
<i>Streptococcus viridans</i>	9	(8.41%)
<i>Enterococcus</i>	6	(5.61%)
<i>Corynebacterium</i>	5	(4.67%)
	79	(73.83%)
Грам-негативни		
<i>Escherichia Coli</i>	7	(6.54%)
<i>Acinetobacter</i>	6	(5.61%)
<i>Klebsiella</i>	3	(2.80%)
<i>Stenotrophomonas</i>	2	(1.87%)
<i>Pseudomonas</i>	1	(0.93%)
<i>Enterobacter</i>	1	(0.93%)
<i>Proteus mirabilis</i>	1	(0.93%)
<i>Morganella</i>	1	(0.93%)
	22	(20.56%)
Комбиновани	4	(3.74%)
Гљивице (<i>Candida</i>)	2	(1.87%)

Предложен приступ потврдио је своју ваљаност на основу поређења потврђених дијагноза (код 156 пацијената) и добијених резултата предвиђања на основу улазних података (и одговарајућих функција припадности) доступних из њихових медицинских картона. Добијене вредности функција припадности унете су у једначине тј. за конзистентан ФИС и конвенционални ФИС. Подаци за тестирање подељени су у два скупа: први чине 123 пацијента са потврђеним перитонитисом а други, преостала 33 пацијента код којих су клиничке манифестације биле последица других болести.

Код 123 пацијента са потврђеном дијагнозом, оба присуца су проценила вероватноћу (да пацијент болује од перитонитиса) већу од 60% у 114 случајева

(што је 92.68% узорка), док је са вероватноћом већом од 75% стање процењено у 106 случајева (што је 86.18% узорка).

За преостала 33 пацијента, оба приступа проценила су да је могућност обољевања мања од 37.5%. Штавише, процена могућности која се сматра безначајном (мање од 4%) односила се на 25 пацијената (што је 75.76% узорка).

Другим речима оба приступа, дала су исту вредност процене обољевања у 29/123, тј. 33/33 случаја. Конзистентан ФИС показао се доминантним у односу на класичан приступ јер је у преостала 94 од 123 случаја (што је 76.42% узорка) давао веће вероватноће. У чак 36 случајева (што је 29.27% узорка) ова вероватноћа се разликовала за више од 10%.

Добијени резултати указују на чињеницу да два примењена приступа не воде увек ка истим резултатима, тј. ка истим закључцима. У светлу претходног разматрања добијених резултата, можемо рећи да је предложени конзистентан ФИС надмашио класичан приступ јер је давао боље процене у случају пацијената код којих је дијагностификована болест.

У табели 5 приказане су највеће разлике у резултатима која су дала два примењена ФИС-а. На основу озбиљности посматраних симптома (*колоне 1-5*) можемо скоро са сигурношћу, рећи да ови пацијенти болују од перитонитиса и да им је хитно потребан одговарајући третман. Вредности 100% дате у *колони 6 табеле 5* посматране табеле показују да је конзистентан ФИС адекватно проценио озбиљност посматраних симптома (што је потврђено у њиховим медицинским картонима). Резултати добијени класичним ФИС-ом (*колона 7 табеле 5*) потцењују могућност да је пацијент оболео од перитонитиса у просеку за 21.25%.

Појашњења ради, променљиве потребне за израчунавање последњег реда горње табеле (*колоне 6 и 7*), у складу са претходно добијеним једначинама 1 (за конзистентан приступ) и 2 (за класичан приступ) имају следеће вредности функција припадности:

- $F=\mu_F(x)=0.99817$
- $L=\mu_L(x)=1$
- $AP=\mu_{AP}(x)=1$
- $CE=\mu_{CE}(x)=1$
- $MC=\mu_{MC}(x)=0.67863$

Табела 5. Поређење резултата

F	L	AP	CE*	MC	PL Конзистентан ФИС	PL Класичан ФИС
38.2	168	1	E3	$6.1 \cdot 10^4$	100.00%	78.19%
38.9	186	1	E3	$7 \cdot 10^4$	100.00%	78.19%
38.2	198	1	E3	$1.4 \cdot 10^5$	100.00%	83.39%
37.7	164	1	E3	$8.3 \cdot 10^4$	100.00%	78.19%
39.2	258	1	E3	$2 \cdot 10^4$	100.00%	75.19%
39.1	187	1	E3	$8 \cdot 10^5$	100.00%	88.66%
38.4	176	1	E3	$3.3 \cdot 10^5$	100.00%	83.39%
38.1	163	1	E3	$5.1 \cdot 10^5$	100.00%	88.66%
38.4	164	1	E3	$3 \cdot 10^5$	100.00%	83.39%
38.1	157	1	E3	10^6	100.00%	92.82%
38.7	205	1	E3	$6.5 \cdot 10^5$	100.00%	88.66%
39.3	298	1	E3	$5.9 \cdot 10^4$	100.00%	78.19%

* (E3 – означава Екстремну Замућеност).

Експериментални резултати показују да је конзистентан ФИС константно давао боља предвиђања тј. боље оценио степен могућности да је пацијент на дијализи обелео од перитонитиса у свим тестираним случајевима (са више од 10% разлике, тј. 23.08% разлике на целокупном узорку). Класичан ФИС потценио је озбиљност појединих симптома, што, имајући у виду озбиљност последица, даје значајну предност предложеном приступу и потврђује његову оправданост.

Конзистентан фази систем закључивања први пут је коришћен у области медицине. Предложени поступак је општи и може да се користи за одређивање дијагностичких критеријума за било коју болест. У овом раду, само илустрације ради, примењен је за одређивање могућности да је пацијент на дијализи оболео од перитонитиса што никако не ограничава домен његове примене. Конзистентан фази систем закључивања чува транспарентност и интерпретативност својствену фази системима закључивања, али уједно уводи конзистентност у приступ.

5. КОНЗИСТЕНТАН НЕУРО-ФАЗИ СИСТЕМ ЗАКЉУЧИВАЊА

Класична теорија управљања заснива се на строгим математичким моделима којима се апроксимира реални систем. Насупрот томе, заједничко и неуронским мрежама и фази системима је њихова могућност управљања нелинеарним, динамичким системима за које не постоји одговарајући математички модел. Недостатак неуронских мрежа, који се често наводи у литератури, јесте мањак транспарентности, тј. то што није очигледан начин на који се дошло до решења управљачког проблема. Оне не дају могућност генерисања нити успостављања било какве врсте структурног знања на пример у форми правила, нити могућност коришћења претходног знања како би се смањило време обучавања, јер процес учења увек почиње од почетка (*Nauck & Kruse, 1993*). Насупрот томе, фази системи дају потпуно транспарентно управљање кроз дефинисање скупа конкретних лингвистичких правила. Дефинисањем *if-then* правила и функција припадности пројектује се систем али је присутан недостатак одговарајућих алгоритама учења који би обављали подешавања истих, а истовремено задржали одговарајућу семантику (*Nauck & Kruse, 1993*).

Параметри фази система имају јасно физичко тумачење па правила и лингвистичке информације могу се систематски припојити адаптивном фази систему (*Lin & Lee, 1996*). Са друге стране, мноштво моћних алгоритама за тренирање различитих модела неуронских мрежа обезбеђује комплексна улазно-излазна мапирања. Идеја која се налази у основи спајања ове две технике је да се искористи могућност учења које поседују неуронске мреже како би се имплементирао и аутоматизовао фази систем који је способан да опонаша процес људског резонувања на високом нивоу (*Lin & Lee, 1996*).

(*Nauck, Klawonn & Kruse, 1993*) управо указују да спецификација одговарајућих лингвистичких правила зависи од знања експерта, али превођење тих правила у фази скупове није формализовано, при чему је потребно извршити одговарајући избор облика и опсега. Вредности функција припадности могу драстично утицати на својства и ефикасност фази контролера. Самим тим, неходне су методе за

њихово подешавање. Аутори даље наводе да управо неуронске мреже пружају могућност за решавање проблема оптимизације као и да комбинација неуронских мрежа и фази контролера омогућава да се њихове предности искористе а мане превазиђу.

Дефинисање функција припадности може да буде нарочито тешко у неким доменима а истовремено, захваљујући процесу учења, можемо располагати већим знањем које се пре свега огледа у дефинисању фази скупова који учествују у правилима.

Предмет овог рада је дефинисање и имплементација адаптивног конзистентног неуро-фази система. Основна идеја предложеног приступа је да је при пројектовању фази система закључивања потребно укључити искуства експерата. На овај начин може се искористити главна предност овог приступа, могућност примене искуства, интуиције и хеуристика (*Kickert & Mamdani, 1978*). На основу низа лингвистичких правила који дефинишу стратегију, гради се алгоритам у коме су речи представљене фази скуповима (*Kickert & Mamdani, 1978*). Захваљујући једноставности, правила могу дефинисати и експерти из различитих области који немају специфична математичка знања.

Предложени систем се може посматрати као адаптивна *feedforward* неуронска мрежа која уместо тежина користи функције припадности представљене одговарајућим фази скуповима. Неуронска мрежа је само проширење ФИС-а које обезбеђује квалитетније управљање. Улазни чворови прихватају променљиве стања динамичког система, док излазни чвор генерише одговарајућу управљачку акцију, тј. излаз на основу ког се дефинише одлука. Задатак неуронске мреже је да, кроз алгоритам учења, обезбеди фина подешавања функције припадности како би се на што бољи начин представило знање садржано у подацима. У супротном, параметри би се ручно могли подешавати поступком пробе и грешке све док пресликавање не постане задовољавајуће.

5.1. Пројектовање система

Веома је тешко наћи глобалну структуру нелинеарних система (процеса) па је идеја фази моделовања налажење скупа локалних улазно-излазних релација којима се описује тај систем (процес), (*Sugeno & Kang, 1988*). Ово, наравно, даље повлачи проблеме везане за идентификацију фази модела пошто не постоји утврђена процедура за дефинисање или верификацију његове структуре. Циљ идентификације система јесте да се дефинише модел који највише одговара посматраном систему.

У већини радова под пројектовањем система подразумевају се:

- структурна идентификација
- параметарска идентификација.

Структурна идентификација састоји се из дефинисања структуре узрочног дела правила и дефинисања структуре последичног дела правила. Структурна идентификација премисе односи се дефинисање правила и њиховог броја али је такође неопходно одредити променљиве које учествују у премиси и одредити оптималну поделу простора фази улаза (енгл. *fuzzy partition*) (*Sugeno & Kang, 1988*). Потребно је одредити број функција припадности, њихове центре и ширине као и њихово међусобно преклапање. Идентификација структуре премисе је проблем истоветан проблему поделе фази улазног простора при чему број фази потпростора одговара броју дефинисаних импликација (*Sugeno & Kang, 1988*). Ово разматрање се односи и на последични део правила, уз олакшицу да се он најчешће састоји из само једног фази скупа. Одређивање одговарајућег броја правила и подела карактеристика улазног и излазног простора у већини случајева представља уметност (*Sun, 1994*). Структурна идентификација може да буде задатак експерта или може да се добије различитим методама на основу расположивог скупа улазно-излазних података.

(*Mamdani, 1976*) сматра да су будуће тежње везане за практичну примену фази система без сумње такве, да препознају човека као кључни фактор у пројектовању фази система. Управо то је једна од полазних претпоставки предложеног неуро-

фази система, тј. сматра се да можемо очекивати да ће експерт из одређене области моћи да своја знање исказа одговарајућим правилима.

Постоје бар два начина за добијање правила на основу нумеричких података: у првом се фази скупови премисе и закључка добијају на основу података, док се у другом иницијално дефинишу фази скупови премисе и закључка након чега се на неки начин повезују са подацима (*Jacquin & Shamseldin, 2009*). Када обављамо идентификацију система на основу посматраних података, генерално постоји већи број структура које могу да буду адекватне, па је критеријум верификације структуре од велике важности (*Sugeno & Kang, 1988*). Задовољавајућа структура често се добија итеративним поступком.

У литератури је предложено мноштво метода и поступака за идентификацију структуре. (*Takagi & Sugeno, 1985*) предлажу да се структура бира на основу минималне средње квадратне грешке. У (*Sun, 1994*) аутори користе адаптивне мреже и Калманов филтер за идентификацију параметара Јанговог (*Jang, 1993*) модела. Предложен је генерализовани модел који може да решава класификационе проблеме за различите параметризовне t -норме као и неколико начина поделе фази простора и њиховог вредновања. Недостатак модела је што величина мреже експоненцијално расте у случају великог броја променљивих код сложеног система па је ефикасност мала. Алгоритам за одређивање центра кластера нумеричких података, који се може проширити на одређивање њиховог броја и почетних вредности, искоришћен је у комбинацији са методом најмањих квадрата као основа за идентификацију фази модела у (*Chiu, 1994*). У сваком случају предложених решења је много.

Параметарска идентификација састоји се из идентификације параметара премисе и идентификације параметара закључка а односи се на параметре функција припадности, коефицијенте линеарне функције закључка или реализацију логичких веза (*Sugeno & Kang, 1988*).

Како би фази систем закључивања описао понашање што приближније реалном систему, имало би смисла располагати неким поступком који може да модификује вредности параметара система у том правцу. Додатни проблем је што се са порастом сложености система смањује могућност прецизне конструкције модела. Број параметара које је потребно подесити директно зависи од броја правила и од начина на који је реализован последични део правила (да ли је потребно подешавати параметре функција припадности или коефицијенте линеарне функције).

За подешавање параметара модела, тј. облика и позиција функција припадности неки аутори користе и генетске алгоритме. Генерално гледано, хеуристике су нашле велику примену у процесу оптимизације параметара. У принципу, поступак оптимизације параметара представља проблем нелинеарне оптимизације.

Велика пажња се поклања и неуронским мрежа које могу да фино подесе функције припадности (*Jang & Sun, 1995*) и управо је то идеја на којој се заснива овај рад. Предложени конзистентан неуро-фази систем за подешавање параметара фази система закључивања користи неуронску мрежу, то јест, прецизније, њен алгоритам учења, чиме заправо долазимо до конзистентног неуро-фази система закључивања.

5.2. Архитектура

Као што је већ речено, моделовање засновано на фази правилима подразумева избор структуре (подела улазно-излазног простора, дефинисање броја правила, променљивих и последичног и узрочног дела сваког од *if-then* правила) и избор параметара како би се постигло жељено улазно-излазно пресликавање. Фази моделовање предложеног конзистентног фази-неуро система се заснива на идеји да експерт може своја знања исказати кроз скуп правила који обезбеђује целовито и ефикасно управљање односно одлучивање. Поред правила у првом кораку неопходно је дефинисати и одговарајуће функције припадности тј. дефинисати фази скупове којима су представљени лингвистички атрибути као што су мали,

средњи, велики. Њих дефинише експерт на основу свог знања и искуства и могуће је да поседују неки степен субјективности. Може се рећи да дефинисање правила не захтева од експерта никаква специфична техничка знања, док дефинисање фази скупова захтева разумевање функција (троугаоних, трапезоидних, сигмоидних, Гаусових итд.) као и разумевање утицаја параметара ових функција на њихов коначан облик. Из овог разлога конзистентан неуро-фази систем кроз алгоритам учења врши фина подешавања функција припадности на основу скупа улазно-излазних података којима располажемо а који се односе на проблем који проучавамо. На овај начин може се и у великој мери елиминисати субјективност која је присутна приликом иницијалног избора параметара система.

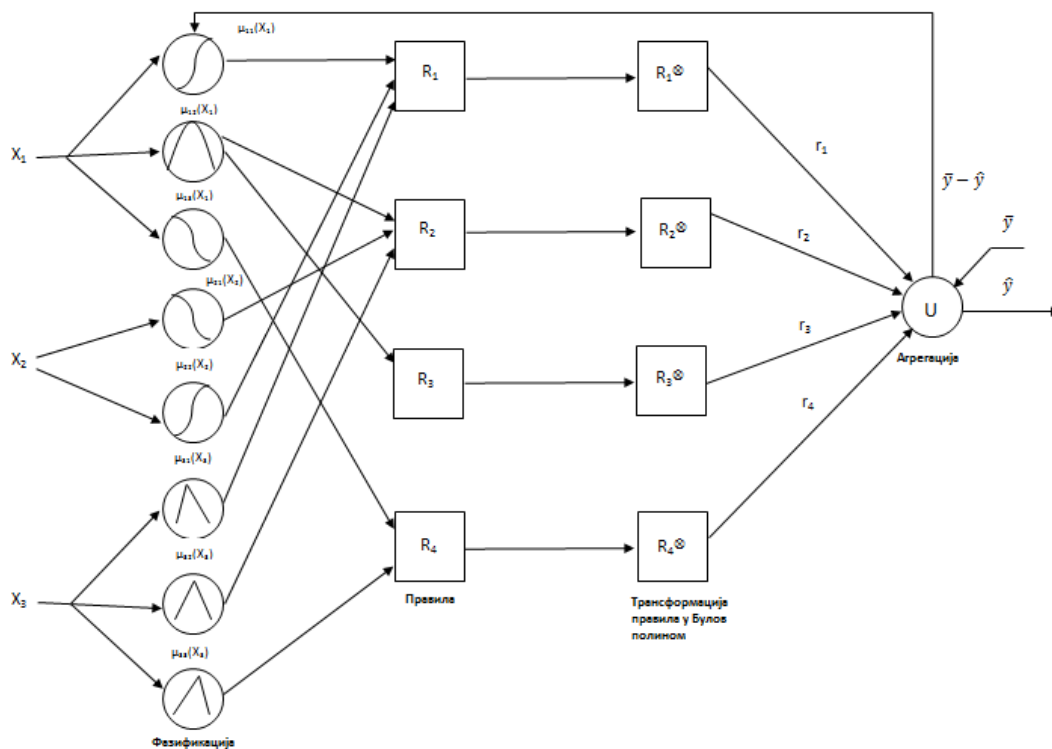
Како би се помогло експерту при моделовању система, било би сврсисходно обезбедити могућност визуелног дефинисања функција припадности уместо да се захтева од њега да их он математички дефинише. Софтверско решење које је развијено као подршка предложеном приступу нуди ову могућност као што је приказано у прилогу рада.

Улаз система прихвата променљиве стања динамичког система док излаз генерише одговарајућу управљачку акцију. Скривени слојеви задужени су за мапирање ових улаза у излазе.

Као што се може видети предложени систем састоји се из четири слоја:

- слој за фазификацију улаза
- слој за дефинисање правила
- слој који врши трансформацију правила у Булов полином
- слој за агрегацију појединачних излаза сваког од правила

На следећој слици круговима су представљени параметри фази скупова, то су тзв. адаптивни чворови. Квадратни чворови или тзв. непромењиви чворови не поседују параметре и у њима се само врше израчунавања. Скуп параметара неуро-фази система је унија скупа параметара свих адаптивних чворова. Архитектуром је представљен структурни модел система.



Слика 27. Архитектура предложеног модела

Архитектура предложена у овој дисертацији може се схватити и као специјалан тип мреже са простирањем сигнала унапред (енгл. *feed-forward neural network*) код које су тежине замењене одговарајућим фази скуповима. Овако дефинисана структура мреже може да се интерпретира као фази систем закључивања. Задатак мреже овде није да дефинише структуру, као у неким приступима, јер је она задата од стране експерта, већ да подешава параметре мреже. Путем алгорита учења неуронска мрежа обавља додатна подешавања функција припадности како би се на што бољи начин представило знање садржано у подацима. Неуронска мрежа овде је само проширење конзистентног фази система закључивања са циљем да се обезбеди што квалитетније управљање. Предложени приступ, као и сваки неуро-фази систем, заправо интегрише неуронске мреже и фази системе закључивања у нов систем како би се кориситиле предности и превазишли њихови појединачни недостаци.

- *Слој фазификације*

Идентификација и одређивање главних управљачких променљивих, тј. улаза система, задатак је експерта. Свака од улазних променљивих које одражавају стање система пролази кроз први слој где се врши њихова фазификација: $\mu_{ij}(x_i)$. Индекс i односи се на одговарајући улаз при чему $i=1,2,\dots,n$. Индекс j односи се на одговарајућу функцију припадности за дату улазну променљиву при чему $j=1,2,\dots,m$. Број чворова (неурона) у првом слоју једнак је производу броја улазних променљивих и броја придружених функција припадности за сваку променљиву. Број лингвистичких атрибута који је придружен појединачним улазима дефинисан је од стране експерта и он се разликује од једне до друге улазне променљиве у зависности од тога какву семантику носи и колико фина подела простора улаза се жели постићи. Поступак одређивања параметара функција припадности није толико интуитиван па се намеће потреба да се управо у том делу примени нека метода која има способност учења на основу података. Наравно, као што је раније већ напоменуто, поред неуронских мрежа постоје и многи други приступи који су погодни за оптимизацију параметара фази система али имајући у виду предмет овог рада они неће бити детаљније разматрани.

- *Слој за дефинисање правила*

Следећи слој односи се на премису правила. Разумно је очекивати да ће експерт из одређене области моћи да своја знање искаже одговарајућим правилима. У случају великог броја правила, приликом њиховог дефинисања може му помоћи дрво одлучивања. Више о овом поступку може се наћи у (Quinlan, 1986) и (Quinlan, 1987). Свако правило повезано је са одговарајућим вредностима $\mu_{ij}(x_i)$ које учествују у датом правилу. Једна улазна променљива са истом лингвистичком вредношћу може учествовати у више правила али се у једном правилу, тј. његовој премиси може појавити само једанпут. Број улаза у чвор правила R_k једнак је броју фази променљивих које се налазе у премиси правила. Индекс k односи се на правило при чему $k=1,2,\dots,p$.

- *Слој трансформације*

Трећи слој обавља трансформацију сваког од правила у одговарајући Булов полином R_k^{\otimes} где је декомпозиција правила сведена на ниво атома. У претходним поглављима указано је на разлике између класичне и конзистентне реално-вредносне логике фази логике као и на разлике које постоје на вредносном и симболичком нивоу. Такође, на примеру конзистентног фази система закључивања показано је да управо негација може да доведе до различитих резултата, самим тим до различитих управљачких одлука. Трансформација у Булов полином који је сведен на ниво атома није једноставан задатак, па самим тим то није посао експерта већ се изводи аутоматизовано путем имплементираних програмског решења.

Израз трансформисаног правила R_k^{\otimes} је вредност r_k која представља израчунати степен задовољења премисе. Ова вредност зависи од избора t -норме, тј. фази оператора као и од међузависности тј. корелисаности улазних променљивих система. Изложени поступак трансформације у поглављу 2.3.2. омогућава да се избор t -норме за генерализовани производ прилагоди природи самих променљивих које се агрегирају. Наиме, у случају да се ради о променљивима исте природе, као генерализовани производ треба узети функцију минимума. У случају независних елемената треба користити производ. Управо ови постулати чувају све Булове законе.

Корелација међу улазним променљивима може се добити на два начина. Први се ослања на експерта који, познајући природу сваке од променљивих, може да одреди њихов међусобни однос. Други се ослања на статистичке методе којима се израчунава степен корелације. Оба начина подржана су у развијеном програмском решењу.

Вредност Буловог полинома за конкретан вектор улаза, по својој природи, се увек креће у интервалу $[0,1]$, тј. можемо рећи да је нормирана. Из овог разлога није нам потребан слој одговоран за дефазификацију јер су оне имплицитно већ дефазификоване.

Дата архитектура се може проширити још једним слојем који је одговоран за скалирање вредности сваког Булових полинома r_k . У том случају излаз r_k би се прослеђивао наредном слоју који би одређивао некалиранану вредност закључка правила (вредност која није на интервалу $[0,1]$). Ово скалирање $\bar{v}_k(y_k) = r_k$ врши се на основу излазне функције припадности \bar{v}_k . У том смислу, у предложеној архитектури би се користила модификација Цукамото модела који захтева монотоност излазних функција припадности, тј. дефазификацију своди на одређивање инверзне функције. Излазне функције припадности, поред услова монотоности, морале би да задовоље и услов $\bar{v}: [g_d, g_g] \rightarrow [0,1]$, тј. $\bar{v}(g_d) = 0$ а $\bar{v}(g_g) = 1$. Захваљујући монотоности процес дефазификације би се лако обављао јер се једнозначна инверзна функција увек може наћи.

Под подешавањем параметара последице подразумева се скалирање излазних вредности (Сугенов модел нултог реда). Увођењем слоја за скалирање добио би се знатно већи број параметара, самим тим би процес оптимизације тих параметара био доста дужи. Експериментално је показано да овим поступком није добијена значајно већа прецизност предвиђања.

Број чворова у другом, трећем и четвртном слоју увек је једнак јер сваком чвору правила R_k одговара само једна трансформисана вредност.

- *Слој агрегације*

Евалуација свих правила изводи се паралелно, а појединачни излази последњег слоја агрегирају се како би се добила једна вредност излаза. Предложена су (и програмски имплементирана) два начина агрегације. Први начин се односи на линеарну комбинацију и она се предлаже у случајевима када не постоји зависност између правила. У том случају заправо свако правило учествује у коначном излазу у зависности од његовог значаја. Уколико постоји међузависност, за агрегацију се предлаже оператор максимум (што на неки начин одговара *Zadeh Mamdani* процедури). Коначана одлука о избору начина агрегације остављена је експерту. Независно од примењеног начина агрегације резултат представља излаз система.

Упоредивањем добијених и жељених излаза добијамо информацију о грешци предвиђања, на основу које можемо вршити корекције. Претходно је потребно извршити нормирање стварних вредности излаза u на интервал $[0,1]$ (чиме добијамо вредност \bar{u}) како би оне биле у складу са излазима система \hat{u} . Разлика $\bar{u} - \hat{u}$ се затим прослеђује назад систему како би се исправили поремећаји настали лошим избором иницијалних функција припадности.

Алгоритам учења прослеђује вредност грешке од излаза до првог слоја са циљем да се добију оптималне вредности параметара функција припадности. Кроз процес учења, на основу података за тренирање, обавља се модификација параметара све док грешка предвиђања не почне да се приближава некој прихватљивој вредности. Подешавањем параметара функција припадности добијају се боље перформансе самог система док сама структура система, дата кроз фази правила, остаје непромењена па се добијени резултати лако интерпретирају.

Примена овог система захтева скуп података за тренирање како би се излаз апроксимирао што ближе жељеном излазу али се овај поступак обавља само једном. Потреба за новим подешавањем параметара може се јавити у случају да се располаже новим подацима, тј. да се промени скуп за тренирање.

5.3. Алгоритам учења

Генерално гледано, независно од тога да ли алгоритам учења има задатак да изврши структурну и/или параметарску идентификацију система, од његове ефикасности умногоме зависи успешност конкретног неуро-фази система. Из овог разлога, бројни алгоритми учења (оптимизације) су нашли своју примену у неуро-фази системима или су развијени специјално за конкретне неуро-фази системе.

Циљ сваког алгоритма учења јесте да пронађе оптималне параметре система како би се обезбедило адекватно управљање динамичким системом. У конкретном случају, потребно је пронаћи оптималне параметре функција припадности конзистентног неуро-фази система за дати проблем и за дати скуп података. Алгоритам почиње од предефинисаних правила и не мења њихову структуру (не мења се број правила, узрочни и последични део правила, улазне и излазне променљиве које учествују у правилима као ни лингвистички атрибути којима се описују променљиве) већ се коригују грешке настале (лошим) избором параметара функција припадности. Подешавањем параметара добијају се боље перформансе самог система. Семантика *if-then* правила датих од стране експерта остаје непромењена па се, последично, резултати добијени применом алгоритма лако интерпретирају и једноставно је пратити промене параметара система.

Алгоритам тражи минимум функције грешке при чему се она комбинација параметара која даје ову минималну вредност сматра решењем проблема обучавања (Rojas, 1996). Да бисмо нашли минимум функције грешке тражимо га у правцу максималног опадања вредности функције тј. у правцу негативног градијента. Како би ишли у правцу најстрмијег спуста потребно је израчунамо градијент функције грешке у сваком кораку, што значи да ова функција мора да буде диференцијабилна.

Функција грешке, чију вредност желимо да минимизирамо, представља средњу вредност суме квадрата појединачних грешака добијених за сваки од l узорака при чему $l = 1, 2, \dots, q$. За норму $\|\cdot\|$ узима се Еуклидска норма.

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^q \|\bar{y}_l - \hat{y}_l\|^2$$

Метода најстрмијег спуста (енгл. *gradient descent*) је вероватно једна од најкоришћених метода учења а у овом раду примењује се као метода пакетног (енгл. *batch*) тренирања пошто се полази од претпоставке да су сви подаци доступни за време тренирања. То значи да се параметри подешавају тек кад имамо кумулативну вредност грешке. Уколико би се применило *on-line* тренирање не би значајно утицало на алгоритам и имплементацију модела.

Детаљан поступак добијања градијентног вектора за структуру мреже дат је у поглављу 2.5.1.

Како бисмо приближили излазе \hat{y}_l што је могуће ближе жељеним вредностима \bar{y}_l параметар θ модификујемо на следећи начин:

$$\begin{aligned} \theta_{ij}(t+1) &= \theta_{ij}(t) + \Delta\theta_{ij}(t) \\ &= \theta_{ij}(t) - \alpha \frac{\partial E(t)}{\partial \theta_{ij}(t)} \\ &= \theta_{ij}(t) - \alpha \frac{\partial E(t)}{\partial \hat{y}(t)} \frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial \theta_{ij}(t)} \\ &= \theta_{ij}(t) - \alpha \sum_{l=1}^q (\bar{y}_l - \hat{y}_l) \frac{\partial \hat{y}(t)}{\partial \theta_{ij}(t)} \\ &= \theta_{ij}(t) - \alpha \sum_{l=1}^q (\bar{y}_l - \hat{y}_l) \frac{\partial U_{k=1}^p r_k}{\partial \theta_{ij}(t)} \\ &= \theta_{ij}(t) - \alpha \sum_{l=1}^q (\bar{y}_l - \hat{y}_l) \frac{\partial U_{k=1}^p R_k^\otimes}{\partial \theta_{ij}(t)} \\ &= \theta_{ij}(t) - \alpha \sum_{l=1}^q (\bar{y}_l - \hat{y}_l) \frac{\partial U_{k=1}^p R_k^\otimes}{\partial \mu_{ij}(x_i)} \frac{\partial \mu_{ij}(x_i)}{\partial \theta_{ij}} \end{aligned}$$

где је $\theta_{ij}(t+1)$ вредност параметра j -те функције припадности којом се описује i -та улазне променљиве а која се подешава у $(t+1)$ итерацији на основу вредности

прираштаја. Величина α односи се на стопу учења којом се дефинише дужина корака којим се иде у правцу негативног градијента. Обично α узима вредност у распону од 0.01 до 0.1.

Појединачни излази се могу агрегирати у јединствену излазну вредност на два начина. У првом случају користи се линеарна комбинација са тежинским факторима која се најчешће примењује у случајевима када су правила независна и када сваки појединачни излаз има утицаја на коначан резултат. Друга могућност је агрегација применом оператора максимума и односи се на случај када је довољно да једно од правила буде испуњено у некој мери да се одреди коначан излаз.

Другим речима, када се израчуна укупна грешка узорка у итерацији t и израчуна вредност градијента по параметру добијемо вредност тог параметра у $(t + 1)$ итерацији. То значи да, поред функције грешке, и функција припадности мора да буде диференцијабилна (или има коначно много прекида прве врсте). Грешка се рачуна на основу трансформација унапред (од улазног до излазног слоја) и она се кроз повратну спрегу враћа уназад (од излазног слоја ка улазном слоју) како би се добила она вредност параметара за коју је грешка предвиђања минимална. Број итерација се може унапред задати или се као критеријум заустављања може узети максимална вредност грешке.

Оператор минимума, који се користи за генерализовани производ у случају када су променљиве међусобно зависне, тј. корелисане, је функција која није диференцијабилна на целом интервалу. Из овог разлога ће се користити следећа релација: $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

Параметри функција припадности подешавају се само једном, након чега се конзистентан неуро-фази систем сматра подешеним и може се корисити без икаквих даљих измена. Структура остаје непромењена кроз дата фази правила али подешавањем су добијене перформансе самог система. Поновно подешавање

параметара потребно је у случају промена у окружењу када треба обезбедити нови улазно-излазни скуп.

5.3.1. Други алгоритми учења у неуро-фази системима

Мноштво алгоритама учења развијено је за неуро-фази системе. Како је алгоритам простирања грешке уназад (енгл. *backpropagation*) један од најчешће коришћених алгоритама за подешавање тежина неуронских мрежа, много радова посвећено је његовој модификацији како би се његова примена проширила и на неуро-фази системе.

У (*Nauck & Kruse, 1993*), (*Hayashi, Buckley & Czogala, 1993*) и (*Ishibuchi, Fujioka & Tanaka, 1993*) развијени су различити *backpropagation* алгоритми за фази приступ. Развијене су и модификације *backpropagation* алгоритма коришћењем α пресека.

У (*Ishibuchi, Tanaka & Okada, 1993*) предложена су и међусобно упоређена три начина: коришћење стандардног *backpropagation* алгоритма који користи вредности функција припадности уместо фази бројева, коришћење стандардног *backpropagation* алгоритма који користи горњу и доњу границу фази бројева и коришћење модификованог *backpropagation* алгоритма. Прва два приступа приликом подешавања дају велику прецизност, али захтевају и велики број неурона. Модификовани *backpropagation* алгоритам показао је већу могућност интерполације у простору правила али је и захтевао мањи број неурона.

У раду (*Stoeva & Nikov, 2000*) предложен је алгоритам обучавања, назван *fuzzy backpropagation*, који се заснива на Сугеновом интегралу. Његова предност је што брже конвергира ка жељеној вредности у односу на стандардни алгоритам, без осцилирања и без испуњења било каквих претпоставки везаних за расподелу вероватноће или некорелисаност улазних података.

Неки фази контролери способни су да уче фази правила (*Jang, 1993*), (*Nauck & Kruse, 1992*) и (*Looney & Dascalu, 2007*). (*Paiva & Dourado, 2004*) предлажу методологију која у првој фази методом кластеровања (на основу улазно-излазног

скупа података) одређује релевантна правила, тј. структуру система док у другој фази неуронска мрежа, путем тренирања, врши подешавање параметара. Како би људи лакше тумачили правила, уведена су додатна ограничења приликом подешавања параметара система. Без ових, додатних ограничења (на пример леви и десни центар Гаусове функције не могу да замене места), могу се добити неконзистентне функције припадности, као и функције припадности којима је, након тренирања, тешко придружити лингвистичке појмове. Такође, како би се избегло дефинисање гломазних база функција припадности, сличне функције спајају се у једну.

У раду (*Koprinkova-Hristova, 2010*) коришћен је стандардни *backpropagation* алгоритам за подешавање фази неуро система, али се користи он користи и за подешавање функција припадности и за подешавање параметара оператора *t*-норме. У овој дисертацији операторе није потребно подешавати јер на њихов избор утиче корелисаност улазних података а не улазно-излазни скуп.

5.4. Резултати експеримената

Као функцију циља, коју је потребно минимизовати, коришћена је квадратна грешка. Следеће табеле показују промену вредност ове функције кроз процес учења у зависности од броја епоха, почетне вредности стопе учења, вредности за које се стопа учења мења, као и од тога да ли процес тренирања подразумева промену параметара последице. Као што је већ речено, имплементирана је хеуристика која мења стопу учења на следећи начин: уколико се мера грешке смањује у четири узастопне епохе, потребно је корак k повећати за 10%, а уколико се два пута заредом јавља комбинација у којој једном мера грешке расте а затим опада потребно је корак k смањити за 10% (*Jang, 1993*). Слична хеуристика предложена је у Matlab-у за опадајућу градијентну методу са адаптивном стопом учења али су предложене вредности у случају повећања стопе 30%, а у случају смањења 5% ¹. Из овог разлога тестирање везано за промену параметара учења проширено је на две варијанте: прва означава промену [0.9, 1.1] а друга [0.7, 1.05]. Такође, треба напоменути да су уведена ограничења приликом ажурирања параметара (на пример код сигмоидних функција припадности не може да се промени знак параметра који се односи на стрмину криве или врх троугаоне функције припадности мора да се налази између темена основица).

Целокупан скуп података подељен је на скуп за тренирање и скуп за валидацију. Након извршеног тренирања добијене подешене вредности параметара функција припадности примеће су на скуп за валидацију како би се оценила ваљаност класификације односно предвиђања. У наредним потпоглављима биће приказани детаљи извршених експеримената са различитих аспеката тренирања, али и утицај резултата тренирања на класификацију података за валидацију.

Следећа два потпоглавља илуструју примену предложеног конзистентног неуро-фази система у два различита домена.

¹ <http://www.mathworks.com/help/nnet/ref/traingda.html>

Најпре ће се, у домену медицине, разматрати унапређење примера датог у поглављу 4.1. који се односи на процену могућности да је пацијент, који је на дијализи трбушне марамице, оболео од перитонитиса. Намера је да се покаже да се резултати добијени применом конзистентног система закључивања (поглавље 4.2.) могу додатно унапредити применом неуронских мрежа, тј. њиховог алгоритма учења. Показаће се да се параметри функција припадности, почетно дефинисани од стране експерта – нефролога, могу подесити учењем тако да више одговарају реалном скупу података. Будући да експерт не мора да има специфична математичка знања, може се десити да почетне вредности заправо не буду сасвим у складу са расположивим подацима.

Затим ће бити дат пример из области финансија, везан за одређивање кредитне оцене предузећа на основу појединих финансијских показатеља. У овом случају акценат је на томе да се укаже на то колико заправо почетни параметри система могу имати утицаја на резултате предвиђања. Наиме, показаће се да лош избор почетних параметера може водити ка великим грешкама у предвиђању, али да се, захваљујући неуро компоненти, утицај почетних параметара може неутралисати, тј. подешавањем параметара могу се добити значајно тачнији резултати.

Сви изложени резултати потврђују оправданост увођења неуро компоненте у конзистентан систем закључивања.

5.4.1. Илустративни пример из домена медицине

У наставку ће бити приказани детаљи експеримената везани за увођење неуро компоненте у пример конзистентног система закључивања, који је детаљно изложен у поглављу 4.1. Биће дати детаљи процеса учења са аспеката различитих поставки експеримената и њихов утицај на тачност предвиђања.

У наредним табелама биће приказани детаљи изведених експеримената са различитих аспеката тренирања (прве три колоне), али и утицај резултата тренирања на класификацију података за валидацију (централни део табела).

5.4.1.1. ДЕТАЉИ РЕЗУЛТАТА ТРЕНИРАЊА

Зависност резултата од максималног броја епоха:

Табела 6. Резултати експеримената на 100 епоха

Стопа учења	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
0.1	[0.7, 1.05]	100	2.6514	25	6	0	2	31	2	25	8	1.0000	0.2500	0.8065	0.8182
0.2	[0.9, 1.1]	99	3.2517	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	[0.9, 1.1]	100	3.3090	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	[0.7, 1.05]	99	3.5749	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.9, 1.1]	100	4.1370	25	2	0	6	27	6	25	8	1.0000	0.7500	0.9259	0.9394
0.1	[0.9, 1.1]	100	4.9410	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.7, 1.05]	89	5.0073	21	0	4	8	21	12	25	8	0.8400	1.0000	1.0000	0.8788
0.02	[0.7, 1.05]	96	5.7759	20	0	5	8	20	13	25	8	0.8000	1.0000	1.0000	0.8485
0.05	[0.7, 1.05]	88	6.9105	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
0.02	[0.9, 1.1]	83	7.0484	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
	Најмања вредност	83	2.6514	17	0	0	2	17	2			0.6800	0.2500	0.7931	0.7576
	Највећа вредност	100	7.0484	25	6	8	8	31	16			1.0000	1.0000	1.0000	0.9394
	Просечна вредност	95.4	4.6607	21.7	3.2	3.3	4.8	24.9	8.1			0.8680	0.6000	0.8905	0.8030
	Процент смањења укупне грешке		42%												

Резултати показују да, у случају када је максималан број епоха био 100, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена са стопом учења 0.1 и стопом промене стопе учења [0.7, 1.05], при чему се укупна грешка смањила за 67%. Најлошији резултат је добијен са стопом учења 0.02 и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 12%. Када се посматрају сви експерименти извршени на 100 епоха, укупна грешка у просеку се смањила за 42%.

Табела 7. Резултати експеримената на 250 епоха

Стопа учења	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
0.1	[0.7, 1.05]	124	3.4859	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	[0.7, 1.05]	181	3.6735	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	[0.9, 1.1]	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	[0.9, 1.1]	250	3.9951	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.7, 1.05]	250	4.2684	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
0.2	[0.7, 1.05]	250	4.4574	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	[0.9, 1.1]	250	4.4698	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	[0.9, 1.1]	250	4.4948	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.9, 1.1]	250	5.5040	25	8	0	0	33	0	25	8	1.0000	0.0000	0.7576	0.7576
0.02	[0.7, 1.05]	226	6.7161	18	0	7	8	18	15	25	8	0.7200	1.0000	1.0000	0.7879
	Најмања вредност	124	3.4859	18	0	0	0	18	0			0.7200	0.0000	0.7576	0.7576
	Највећа вредност	250	6.7161	25	8	7	8	33	15			1.0000	1.0000	1.0000	0.9697
	Просечна вредност	215.7	4.4748	22.9	5.1	2.1	2.9	28	5			0.9160	0.3625	0.8271	0.7818
	Процент смањења укупне грешке		44%												

Резултати показују да, у случају када је максималан број епоха био 250, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена са стопом учења 0.1 и стопом промене стопе учења [0.7, 1.05], при чему се укупна грешка смањила за 56%. Штавише, најбоља вредност параметара, на скупу за тренирање, је добијена у 124. епохи, што указује на то да је тренирање могло и раније да се заврши, будући да се током преосталих епоха није остварило никакво побољшање. Најлошији резултат је добијен са стопом учења 0.02 и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 16%. Када се посматрају сви експерименти извршени на 250 епоха, укупна грешка у просеку се смањила за 44%.

Табела 8. Резултати експеримената на 500 епоха

			Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
Стопа учења	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
0.1	[0.7, 1.05]	124	3.4859	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	[0.7, 1.05]	181	3.6735	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	[0.9, 1.1]	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	[0.7, 1.05]	429	3.7206	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.9, 1.1]	433	3.9079	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	[0.9, 1.1]	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	[0.9, 1.1]	500	4.0802	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	[0.7, 1.05]	500	4.2293	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.7, 1.05]	500	4.2514	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
0.2	[0.9, 1.1]	499	4.4959	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Најмања вредност	124	3.4859	23	1	0	2	26	4			0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Највећа вредност	500	4.4959	25	6	2	7	29	7			1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
	Просечна вредност	375.3	3.9443	23.2	5.5	1.8	2.5	28.7	4.3			0.9280	0.3125	0.8099	0.7788
	Процент смањења укупне грешке		51%												

Резултати показују да, у случају када је максималан број епоха био 500, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена са стопом учења 0.1 и стопом промене стопе учења [0.7, 1.05], при чему се укупна грешка смањила за 56%. Штавише, као и у претходном случају, најбоља вредност параметара, на скупу за тренирање, је добијена у 124. епохи, што указује на то да се додатним тренирањем није остварило никакво побољшање. Најлошији резултат је добијен са стопом учења 0.2 и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 44%. Када се посматрају сви експерименти извршени на 500 епоха, укупна грешка у просеку се смањила за 51%.

Табела 9. Резултати експеримената на 750 епоха

Стопа учења	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
0.05	[0.9, 1.1]	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	[0.7, 1.05]	429	3.7206	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	[0.7, 1.05]	750	3.8618	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	[0.9, 1.1]	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.9, 1.1]	709	3.9347	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	[0.9, 1.1]	750	3.9578	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	[0.7, 1.05]	750	4.0219	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.7, 1.05]	750	4.2359	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
0.1	[0.7, 1.05]	750	4.2637	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	[0.9, 1.1]	750	4.4931	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Најмања вредност	126	3.6828	23	1	0	2	26	4			0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Највећа вредност	750	4.4931	25	6	2	7	29	7			1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
	Просечна вредност	622.5	4.0088	23.2	5.5	1.8	2.5	28.7	4.3			0.9280	0.3125	0.8099	0.7788
	Процент смањења укупне грешке		50%												

Резултати показују да, у случају када је максималан број епоха био 750, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена са стопом учења 0.05 и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], при чему се укупна грешка смањила за 54%. Најбоља вредност параметара, на скупу за тренирање, је добијена у 126. епохи, а додатним тренирањем није остварило никакво побољшање. Најлошији резултат је добијен са стопом учења 0.2 и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 44%. Када се посматрају сви експерименти извршени на 750 епоха, укупна грешка у просеку се смањила за 50%.

Табела 10. Резултати експеримената на 1000 епоха

			Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
Стопа учења	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
0.05	[0.9, 1.1]	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	[0.7, 1.05]	1000	3.8073	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	[0.9, 1.1]	1000	3.8917	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	[0.9, 1.1]	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	[0.7, 1.05]	1000	3.9250	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.9, 1.1]	709	3.9347	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	[0.7, 1.05]	1000	4.0345	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	[0.7, 1.05]	1000	4.0831	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	[0.7, 1.05]	1000	4.2201	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
0.2	[0.9, 1.1]	1000	4.4931	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Најмања вредност	126	3.6828	23	1	0	2	26	4			0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Највећа вредност	1000	4.4931	25	6	2	7	29	7			1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
	Просечна вредност	829.6	3.9988	23.2	5.5	1.8	2.5	28.7	4.3			0.9280	0.3125	0.8099	0.7788
	Процент смањења укупне грешке		50%												

Резултати показују да, у случају када је максималан број епоха био 1000, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена са стопом учења 0.05 и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], при чему се укупна грешка смањила за 54%. Најбоља вредност параметара је добијена у 126. епохи, а кроз додатне епохе се укупна грешка на скупу за тренирање није смањивала. Најлошији резултат на скупу за валидацију је добијен у експерименту са стопом учења 0.2 и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 44%. Када се посматрају сви експерименти извршени на 1000 епоха, укупна грешка у просеку се смањила за 50%.

Зависност резултата од почетне стопе учења:

Табела 11. Резултати експеримента са почетном стопом учења 0.01

Број епоха	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
100	[0.7, 1.05]	89	5.0073	21	0	4	8	21	12	25	8	0.8400	1.0000	1.0000	0.8788
100	[0.9, 1.1]	100	4.1370	25	2	0	6	27	6	25	8	1.0000	0.7500	0.9259	0.9394
250	[0.7, 1.05]	250	4.2684	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
250	[0.9, 1.1]	250	5.5040	25	8	0	0	33	0	25	8	1.0000	0.0000	0.7576	0.7576
500	[0.7, 1.05]	500	4.2514	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
500	[0.9, 1.1]	433	3.9079	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.7, 1.05]	750	4.2359	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
750	[0.9, 1.1]	709	3.9347	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.7, 1.05]	1000	4.2201	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697
1000	[0.9, 1.1]	709	3.9347	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
Најмања вредност			3.9079	21	0	0	0	21	0			0.8400	0.0000	0.7576	0.7576
Највећа вредност			5.5040	25	8	4	8	33	12			1.0000	1.0000	1.0000	0.9697
Просечна вредност			4.3401	24	3.2	1	4.8	27.2	5.8			0.9600	0.6000	0.8909	0.8727
Процент смањења укупне грешке			46%												

Резултати показују да, у случају када је почетна стопа учења 0.01, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена у експерименту са максимално 500 епоха и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], при чему се укупна грешка смањила за 51%. Најбоља вредност параметара је добијена у 433. епохи. Најлошији резултат на скупу за валидацију је добијен у експерименту са са максимално 250 епоха и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 31%. Када се посматрају сви експерименти са почетном стопом учења 0.01, укупна грешка се смањила у просеку за 46%.

Табела 12. Резултати експеримената са почетном стопом учења 0.02

Број епоха	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
100	[0.7, 1.05]	96	5.7759	20	0	5	8	20	13	25	8	0.8000	1.0000	1.0000	0.8485
100	[0.9, 1.1]	83	7.0484	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
250	[0.7, 1.05]	226	6.7161	18	0	7	8	18	15	25	8	0.7200	1.0000	1.0000	0.7879
250	[0.9, 1.1]	250	3.9951	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
500	[0.7, 1.05]	429	3.7206	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
500	[0.9, 1.1]	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.7, 1.05]	429	3.7206	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.9, 1.1]	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.7, 1.05]	1000	4.0831	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.9, 1.1]	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Најмања вредност		3.7206	17	0	2	2	17	4			0.6800	0.2500	0.7931	0.7576
	Највећа вредност		7.0484	23	6	8	8	29	16			0.9200	1.0000	1.0000	0.8485
	Просечна вредност		4.6807	21.6	4.2	3.4	3.8	25.8	7.2			0.8640	0.4750	0.8552	0.7697
	Процент смањења укупне грешке		41%												

Резултати показују да, у случају када је почетна стопа учења 0.02, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена у експериментима са стопом промене стопе учења [0.7, 1.05] и са максимално 500, односно 750 епоха, при чему се укупна грешка смањила за 53%. Најбоља вредност параметара је, у оба случаја, добијена у 429. епохи. Најлошији резултат на скупу за валидацију је добијен у експерименту са са максимално 100 епоха и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 12%. Када се посматрају сви експерименти са почетном стопом учења 0.02, укупна грешка се смањила у просеку за 41%.

Табела 13. Резултати експеримената са почетном стопом учења 0.05

Број епоха	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
100	[0.7, 1.05]	88	6.9105	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
100	[0.9, 1.1]	100	3.3090	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
250	[0.7, 1.05]	181	3.6735	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
250	[0.9, 1.1]	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
500	[0.7, 1.05]	181	3.6735	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
500	[0.9, 1.1]	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.7, 1.05]	750	3.8618	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.9, 1.1]	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.7, 1.05]	1000	3.8073	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.9, 1.1]	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
Најмања вредност			3.3090	17	0	2	2	17	4			0.6800	0.2500	0.7931	0.7576
Највећа вредност			6.9105	23	6	8	8	29	16			0.9200	1.0000	1.0000	0.7576
Просечна вредност			3.9967	22.4	5.4	2.6	2.6	27.8	5.2			0.8960	0.3250	0.8138	0.7576
Процент смањења укупне грешке			50%												

Резултати показују да, у случају када је почетна стопа учења 0.05, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена у експерименту са максимално 100 епоха и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], при чему се укупна грешка смањила за 59%. Најбоља вредност параметара је добијена у 100. епохи. Најлошији резултат на скупу за валидацију је добијен у експерименту са максимално 100 епоха али са стопом промене стопе учења [0.7, 1.05], када се укупна грешка смањила за 13%. Када се посматрају сви експерименти са почетном стопом учења 0.05, укупна грешка се смањила у просеку за 50%.

Табела 14. Резултати експеримената са почетном стопом учења 0.1

Број епоха	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
100	[0.7, 1.05]	100	2.6514	25	6	0	2	31	2	25	8	1.0000	0.2500	0.8065	0.8182
100	[0.9, 1.1]	100	4.9410	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
250	[0.7, 1.05]	124	3.4859	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
250	[0.9, 1.1]	250	4.4948	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
500	[0.7, 1.05]	124	3.4859	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
500	[0.9, 1.1]	500	4.0802	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.7, 1.05]	750	4.2637	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.9, 1.1]	750	3.9578	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.7, 1.05]	1000	4.0345	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.9, 1.1]	1000	3.8917	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Најмања вредност		2.6514	23	6	0	2	29	2			0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Највећа вредност		4.9410	25	6	2	2	31	4			1.0000	0.2500	0.8065	0.8182
	Просечна вредност		3.9287	23.2	6	1.8	2	29.2	3.8			0.9280	0.2500	0.7944	0.7636
	Процент смањења укупне грешке		51%												

Резултати показују да, у случају када је почетна стопа учења 0.1, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена у експерименту са максимално 100 епоха и стопом промене стопе учења [0.7, 1.05], при чему се укупна грешка смањила за 67%. Најбоља вредност параметара је добијена у последњој епохи тренирања. Најлошији резултат на скупу за валидацију је добијен у експерименту са истим бројем епоха али са стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 38%. Када се посматрају сви експерименти са почетном стопом учења 0.1, укупна грешка се смањила у просеку за 51%.

Табела 15. Резултати експеримената са почетном стопом учења 0.2

Број епоха	Стопа промене стопе учења	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
100	[0.7, 1.05]	99	3.5749	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
100	[0.9, 1.1]	99	3.2517	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
250	[0.7, 1.05]	250	4.4574	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
250	[0.9, 1.1]	250	4.4698	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
500	[0.7, 1.05]	500	4.2293	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
500	[0.9, 1.1]	499	4.4959	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.7, 1.05]	750	4.0219	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
750	[0.9, 1.1]	750	4.4931	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.7, 1.05]	1000	3.9250	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
1000	[0.9, 1.1]	1000	4.4931	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Најмања вредност		3.2517	23	6	2	2	29	4			0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Највећа вредност		4.4959	23	6	2	2	29	4			0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Просечна вредност		4.1412	23	6	2	2	29	4			0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
	Процент смањења укупне грешке		48%												

Резултати показују да, у случају када је почетна стопа учења 0.2, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена у експерименту са максимално 100 епоха и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], при чему се укупна грешка смањила за 59%. Најбоља вредност параметара је добијена у претпоследњој епохи тренирања. Најлошији резултат на скупу за валидацију је добијен у експерименту са максимално 500 епоха, са истом стопом промене стопе учења, када се укупна грешка смањила за 44%. Када се посматрају сви експерименти са почетном стопом учења 0.2, укупна грешка се смањила у просеку за 48%.

Зависност резултата од стопе промене стопе учења:

Табела 16. Резултати експеримената са променом стопе учења [0.7, 1.05]

Стопа учења	Број епоха	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност	
			Почетне вредности													
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576	
0.01	100	89	5.0073	21	0	4	8	21	12	25	8	0.8400	1.0000	1.0000	0.8788	
0.01	250	250	4.2684	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697	
0.01	500	500	4.2514	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697	
0.01	750	750	4.2359	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697	
0.01	1000	1000	4.2201	25	1	0	7	26	7	25	8	1.0000	0.8750	0.9615	0.9697	
0.02	100	96	5.7759	20	0	5	8	20	13	25	8	0.8000	1.0000	1.0000	0.8485	
0.02	250	226	6.7161	18	0	7	8	18	15	25	8	0.7200	1.0000	1.0000	0.7879	
0.02	500	429	3.7206	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.02	750	429	3.7206	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.02	1000	1000	4.0831	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.05	100	88	6.9105	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576	
0.05	250	181	3.6735	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.05	500	181	3.6735	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.05	750	750	3.8618	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.05	1000	1000	3.8073	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.1	100	100	2.6514	25	6	0	2	31	2	25	8	1.0000	0.2500	0.8065	0.8182	
0.1	250	124	3.4859	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.1	500	124	3.4859	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.1	750	750	4.2637	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.1	1000	1000	4.0345	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.2	100	99	3.5749	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.2	250	250	4.4574	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.2	500	500	4.2293	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.2	750	750	4.0219	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
0.2	1000	1000	3.9250	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576	
Најмања вредност			2.651401	17	0	0	2	17	2				0.68	0.25	0.7931034	0.7576
Највећа вредност			6.910526	25	6	8	8	31	16				1	1	1	0.9697
Просечна вредност			4.24223	22.76	4.24	2.24	3.76	27	6				0.9104	0.47	0.8536904	0.8036
Процент смањења укупне грешке			47%													

Резултати показују да је најмања грешка на скупу за валидацију добијена у експерименту са максимално 100 епоха и почетном стопом учења 0.1, при чему се укупна грешка смањила за 67%. Најбоља вредност параметара је добијена у 100. епохи тренирања. Најлошији резултат на скупу за валидацију је добијен у експерименту са истим бројем епоха, али са почетном стопом учења 0.05, када се укупна грешка смањила за 13%. Укупна грешка се смањила у просеку за 47%.

Табела 17. Резултати експеримента са променом стопе учења [0.9, 1.1]

Стопа учења	Број епоха	Епоха са најмањом грешком	Укупна квадратна грешка	Стварно позитивни	Лажно позитивни	Лажно негативни	Стварно негативни	Добијено позитивни	Добијено негативни	Реално позитивни	Реални негативни	Сензитивност	Специфичност	Прецизност	Тачност
			Почетне вредности												
			7.9801	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
0.01	100	100	4.1370	25	2	0	6	27	6	25	8	1.0000	0.7500	0.9259	0.9394
0.01	250	250	5.5040	25	8	0	0	33	0	25	8	1.0000	0.0000	0.7576	0.7576
0.01	500	433	3.9079	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	750	709	3.9347	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.01	1000	709	3.9347	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	100	83	7.0484	17	0	8	8	17	16	25	8	0.6800	1.0000	1.0000	0.7576
0.02	250	250	3.9951	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	500	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	750	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.02	1000	461	3.9159	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	100	100	3.3090	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	250	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	500	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	750	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.05	1000	126	3.6828	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	100	100	4.9410	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	250	250	4.4948	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	500	500	4.0802	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	750	750	3.9578	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.1	1000	1000	3.8917	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	100	99	3.2517	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	250	250	4.4698	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	500	499	4.4959	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	750	750	4.4931	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
0.2	1000	1000	4.4931	23	6	2	2	29	4	25	8	0.9200	0.2500	0.7931	0.7576
Најмања вредност			3.251744	17	0	0	0	17	0			0.68	0	0.7575758	0.7576
Највећа вредност			7.048377	25	8	8	8	33	16			1	1	1	0.9394
Просечна вредност			4.192751	22.92	5.68	2.08	2.32	28.6	4.4			0.9168	0.29	0.8052711	0.7648
Процент смањења укупне грешке			47%												

Резултати показују да је најмања грешка на скупу за валидацију добијена у експерименту са максимално 100 епоха и почетном стопом учења 0.2, при чему се укупна грешка смањила за 59%. Најбоља вредност параметара је добијена у 99. епохи тренирања. Најлошији резултат на скупу за валидацију је добијен у експерименту са истим бројем епоха, али са почетном стопом учења 0.02, када се укупна грешка смањила за 12%. Укупна грешка се смањила у просеку за 47%.

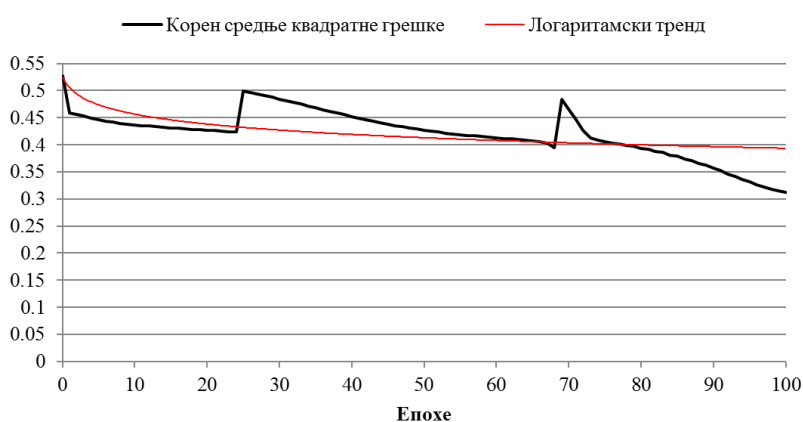
Коначно, може се закључити следеће:

- *Са аспекта броја епоха:* експерименти показују, да је у свим случајевима било довољно између 100 и 126 епоха да се, на основу улазно-излазног скупа за тренирање добију вредности параметара система које резултују најмањом укупном грешком на скупу за валидацију.
- *Са аспекта почетне вредности стопе учења:* експерименти показују да је грешка на скупу за валидацију, у просеку највише опала код експеримената где је почетна стопа учења била 0.1. Поред тога, таква почетна стопа учења је резултовала и највећим смањењем укупне грешке на скупу за валидацију.
- *Са аспекта стопе промене стопе учења:* анализом резултата може се закључити да корекција почетне стопе учења предложена у Matlab-у даје у просеку исте резултате као и вредности предложене у (*Jang, 1993*). Међутим, први приступ је ипак резултовао највећим смањењем укупне грешке на скупу за валидацију.

5.4.1.2. ДЕТАЉИ ПРОЦЕСА ТРЕНИРАЊА

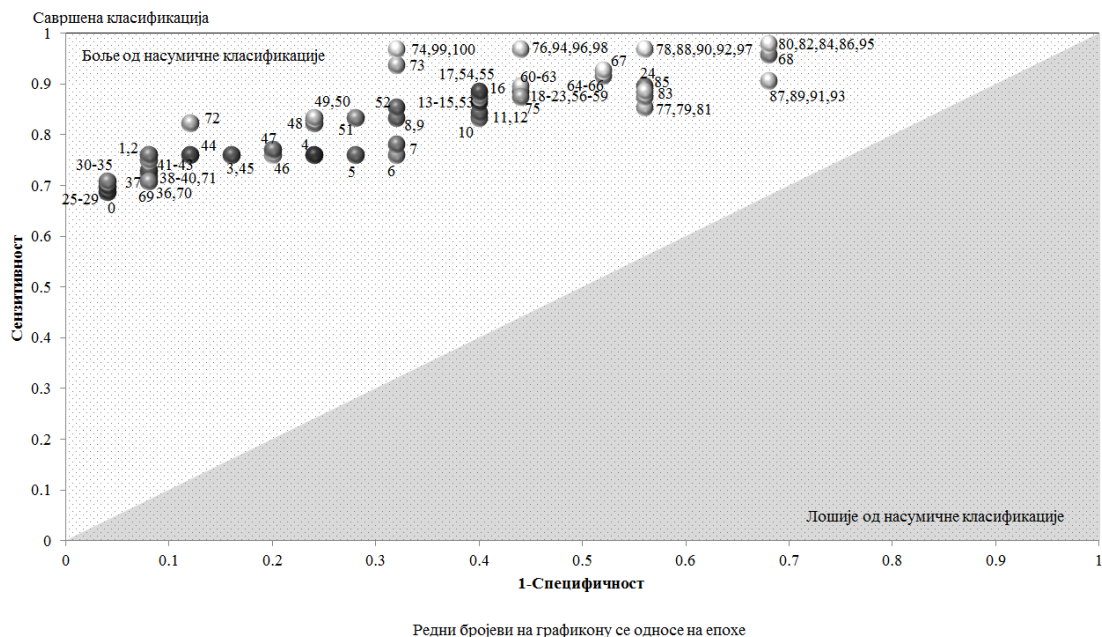
Илустрације ради, у наставку су приказани детаљи експеримента који је резултовао најмањом укупном квадратном грешком (2.6514) на скупу за валидацију. Поставка експеримента је била следећа: максималан број епоха је био 100, почетна стопа учења је била 0.1 (са стопом промене [0.7, 1.05]), без подешавања параметара последице.

На слици 28 дат је графички приказ кретања корена средње квадратне грешке кроз епохе као и логаритамски тренд.



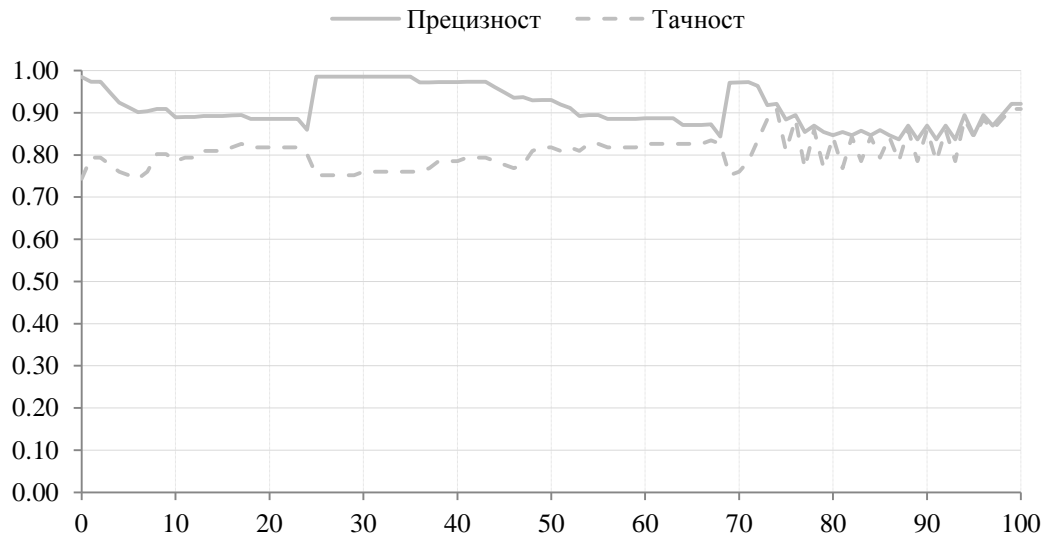
Слика 28. Кретање корена средње квадратне грешке кроз епохе

На следећој слици је приказан простор испод ROC криве са вредностима оствареним у појединачним епохама.



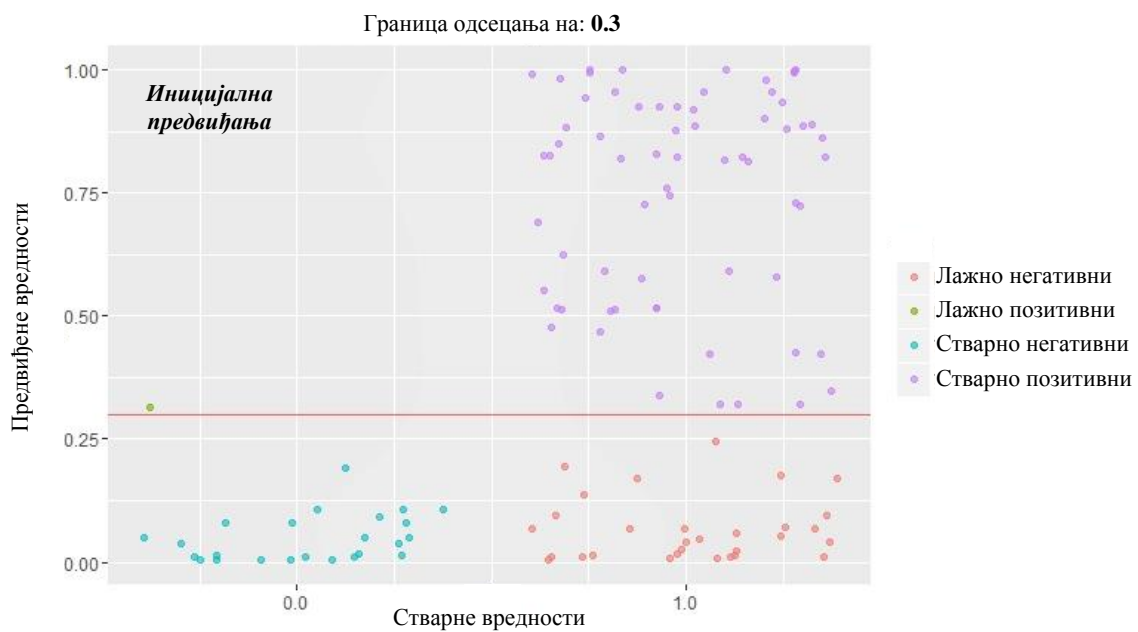
Слика 29. ROC простор са приказним вредностима у епохама

Слика 30 приказује кретање тачности и прецизности кроз 100 епоха тренирања.

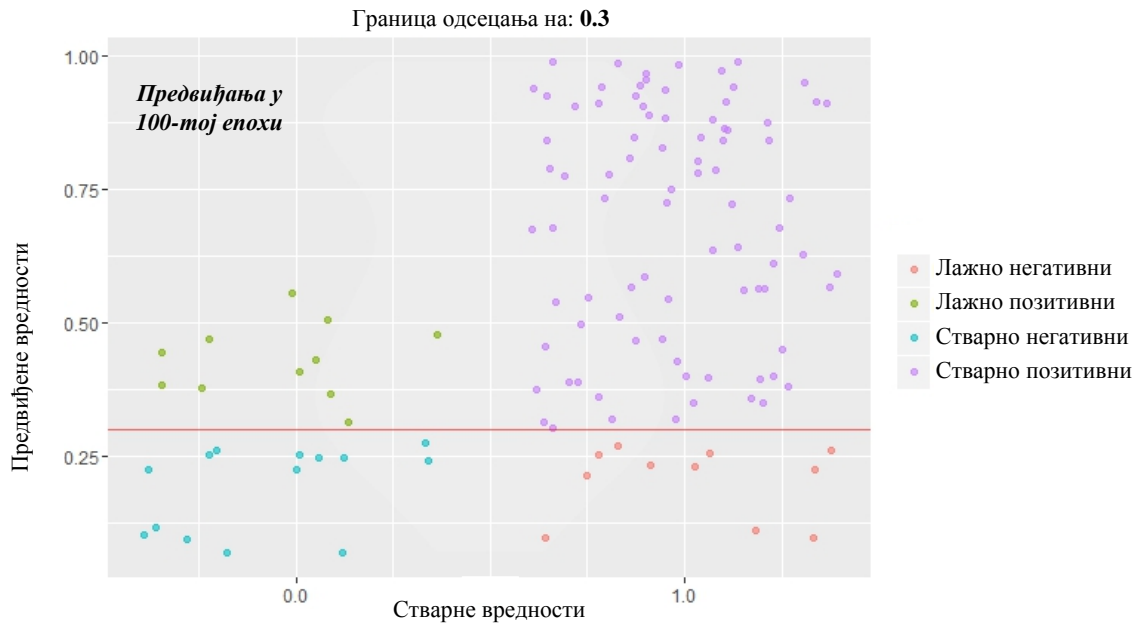


Слика 30. Кретање тачности и прецизности кроз епохе

На следеће две слике илустрована је класификације података за тренирање у почетној, односно последњој епохи.

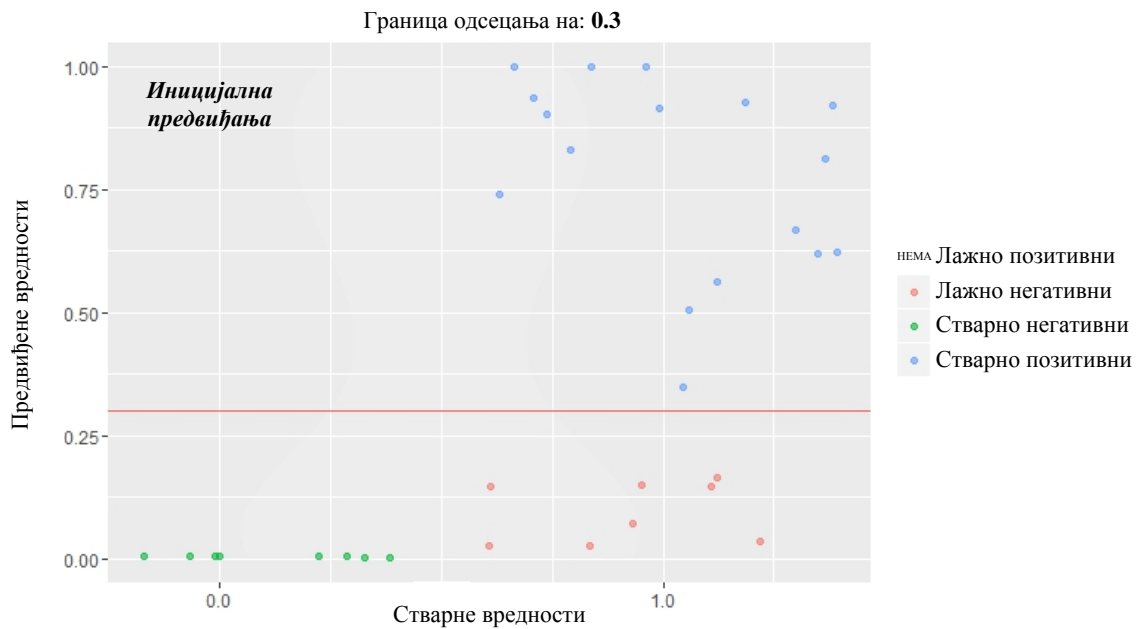


Слика 31. Почетна класификација податак за тренирање

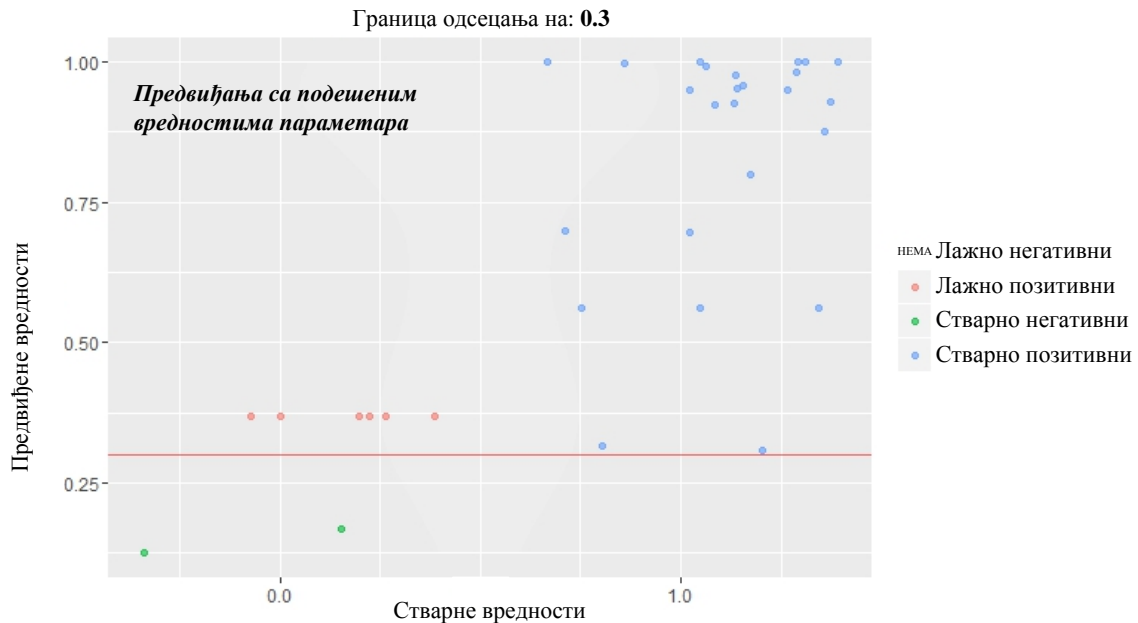


Слика 32. Класификација података за тренирање након тренирања

Коначно, на последње две слике илустрована је класификације података за валидацију на основу почетних и подешених вредности параметара функција припадности.



Слика 33. Почетна класификација података за валидацију



Слика 34. Класификација података за валидацију са подешеним параметрима

На крају треба напоменути да када се предложени конзистентан неуро-фази систем закључивања користи за класификацију, потребно је одредити и границу одсецања (енгл. *cut-off*). У неким проблемима она се може одредити аутоматизовано, тј. на основу података (Liu, 2012), међутим, постоје и проблеми код којих ова граница носи одређену семантику па би требало препустити експерту њено одређивање. Дакле, у зависности од природе проблема, екперт би могао да изабере једну или другу опцију.

У примеру који је дат не би било оправдано да се граница одсецања аутоматски одређује, будући да зависи од ризика примене терапије у случају да пацијент није болестан. Како примена терапије у оваквим случајевима није опасна имало би више смисла да граница одсецања буде нижа, тим пре што изостанак терапије може довести до озбиљних последица, па чак и смртог исхода.

5.4.2. Илустративни пример из домена финансија

Други илустративан пример изабран је из домена финансија. У овом случају циљ је био да се, на основу расположивих података, процени кредитна оцена предузећа. За одређивање кредитне оцене предузећа користи се читав низ показатеља који се могу сврстати у показатеље ликвидности, показатеље активности, показатеље финансијске структуре и показатеља профитабилности.

Имајући у виду критеријуме значајне за кредитну оцену предузећа, за улазе модела изабране су следеће променљиве:

- EM – ЕБИТДА Маржа
- SPD – Стопа Пословне Добити
- PUL – Показатељ Убрзане Ликвидности
- DK – рацио Дуга и Капитала
- DVZ – Дани Везивања Залиха

Одговарајуће функције припадности одређене су на основу искуства доменског експерта и доступне литературе. Дефиниције ових појмова су дате на основу (*Fabozzi & Peterson, 2003*).

ЕБИТДА маржа је један од начина процене тока новца, који се лако израчунава. Представља добит предузећа пре одбијања расхода камата, пореза и амортизације тј. указује на то колико је предузеће у стању да заради. Стопа пословне добити се изражава процентуално и представља однос пословне добити и нето прихода од продаје. Показатељ убрзане ликвидности представља однос укупних новчаних средстава и потраживања, са једне стране, и краткорочних обавеза, са друге стране. Рацио дуга и капитала, тј. њихов однос треба да буде што мањи, као и дани везивања залиха.

Излазна променљива, тј. излаз система указује оцену кредитне способности предузећа:

Оцена – Кредитна оцена

Доменски експерт дефинисао је следећа два правила:

правило 1:

If (EM is „veliko“ *or* SPD is „veliko“) *and* (DK is „malo“)
then Оцена

правило 2:

if
(EM is „veliko“ *and* (SPD is „veliko“ *and* DVZ is „malo“))
or
(*not* EM is „veliko“ *and* (PUL is „veliko“ *and* DK is „malo“))
then Оцена

За агрегацију ова два правила коришћена је тежинска сума.

Скуп за тренирање чинили су подаци о 295 предузећа, док је скуп за валидацију чинило 80 предузећа.

5.4.2.1. ДЕТАЉИ РЕЗУЛТАТА ТРЕНИРАЊА

У овом делу биће анализирани извршени експерименти са становишта утицаја вредности параметара функција припадности добијених тренирањем, а примењеним на скуп за валидацију. Као репрезентативни одабрани су експерименти са максималним бројем од 100 односно 500 епоха.

У табелама су приказани детаљи извршених експеримената са различитих аспеката тренирања (прве две колоне), али и утицај резултата тренирања на скуп података за валидацију (централни део табела) где је, поред укупне квадратне грешке, приказана и тачност предвиђене кредитне оцене, при чему су у заградама наведене и процентуалне вредности у односу број узорака (предузећа) у скупу за валидацију.

Табела 18. Резултати експеримената на 100 епоха

		Укупна квадратна грешка	Тачне вредности	Разлика 2 и мање	Разлика између 2 и 5	Разлика између 5 и 10	Разлика преко 10
		Почетне вредности					
Стопа учења	Стопа промене стопе учења	4.115519408	15 (19%)	29 (36%)	21 (26%)	14 (18%)	1 (1%)
0.01	[0.9, 1.1]	0.547722558	56 (70%)	24 (30%)	0	0	0
0.01	[0.7, 1.05]	0.570087713	54 (68%)	26 (33%)	0	0	0
0.02	[0.9, 1.1]	0.547722558	56 (70%)	24 (30%)	0	0	0
0.02	[0.7, 1.05]	0.591607978	52 (65%)	28 (35%)	0	0	0
0.05	[0.9, 1.1]	0.547722558	56 (70%)	24 (30%)	0	0	0
0.05	[0.7, 1.05]	0.570087713	54 (68%)	26 (33%)	0	0	0
0.1	[0.9, 1.1]	0.536190265	57 (71%)	23 (29%)	0	0	0
0.1	[0.7, 1.05]	0.570087713	54 (68%)	26 (33%)	0	0	0
0.2	[0.9, 1.1]	0.62249498	55 (69%)	25 (31%)	0	0	0
0.2	[0.7, 1.05]	0.580947502	53 (66%)	27 (34%)	0	0	0
Најмања вредност		0.536190265	52	23			
Највећа вредност		0.62249498	57	28			
Просечна вредност		0.568467154	54.7	25.3			
Процент побољшања у односу на најмању вредност		87%	+347%	21%			
Процент побољшања у односу на највећу вредност		85%	+380%	3%			
Процент побољшања у односу на просечну вредност		86%	+365%	13%			

Резултати показују да, у случају када је максималан број епоха био 100, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена са стопом учења 0.1 и стопом промене

стопе учења [0.9, 1.1], при чему се укупна грешка смањила за 87%, а број тачно процењених кредитних оцена на скупу за валидацију је порастао за 380%. Најлошији резултат је добијен са стопом учења 0.2 и стопом промене стопе учења [0.9, 1.1], када се укупна грешка смањила за 85%, а број тачно процењених кредитних оцена на скупу за валидацију порастао је за 347%. Када се посматрају сви експерименти извршени на 100 епоха, укупна грешка се у просеку смањила за 86%.

Табела 19. Резултати експеримената на 500 епоха

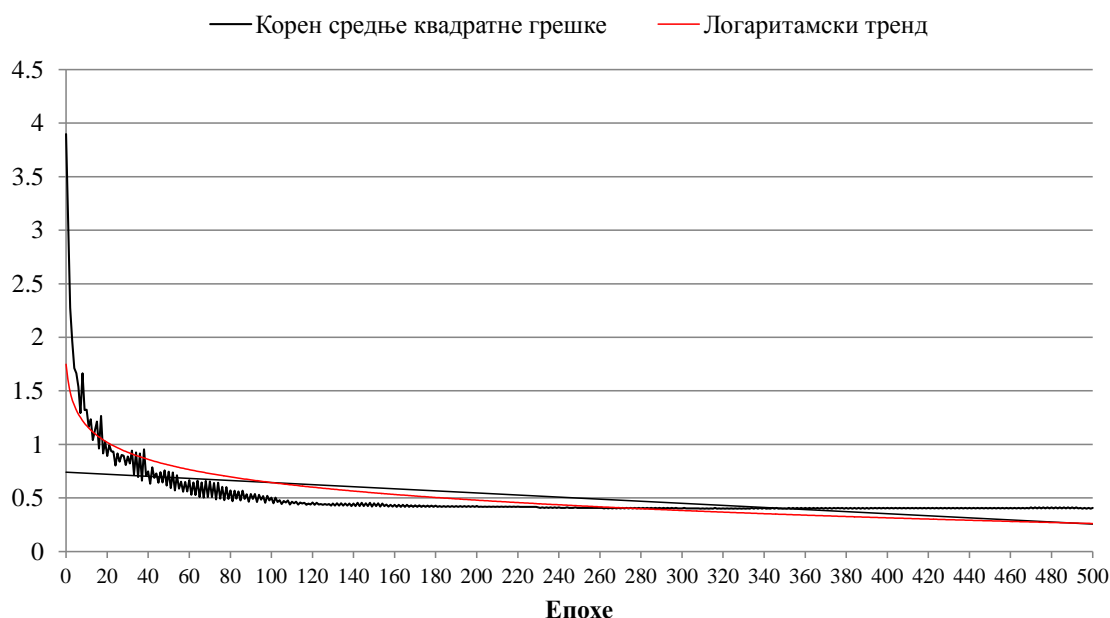
		Укупна квадратна грешка	Тачне вредности	Разлика 2 и мање	Разлика између 2 и 5	Разлика између 5 и 10	Разлика преко 10
		Почетне вредности					
Стопа учења	Стопа промене стопе учења	4.115519408	15 (19%)	29 (36%)	21 (26%)	14 (18%)	1 (1%)
0.01	[0.9, 1.1]	0.512347538	59 (74%)	21 (26%)	0	0	0
0.01	[0.7, 1.05]	0.512347538	59 (74%)	21 (26%)	0	0	0
0.02	[0.9, 1.1]	0.5	60 (75%)	20 (25%)	0	0	0
0.02	[0.7, 1.05]	0.512347538	59 (74%)	21 (26%)	0	0	0
0.05	[0.9, 1.1]	0.487339717	61 (76%)	19 (24%)	0	0	0
0.05	[0.7, 1.05]	0.512347538	59 (74%)	21 (26%)	0	0	0
0.1	[0.9, 1.1]	0.487339717	61 (76%)	19 (24%)	0	0	0
0.1	[0.7, 1.05]	0.512347538	59 (74%)	21 (26%)	0	0	0
0.2	[0.9, 1.1]	0.487339717	61 (76%)	19 (24%)	0	0	0
0.2	[0.7, 1.05]	0.5	60 (75%)	20 (25%)	0	0	0
Најмања вредност		0.487339717	59	19			
Највећа вредност		0.512347538	61	21			
Просечна вредност		0.502375684	59.8	20.2			
Процент побољшања у односу на најмању вредност		88.16%	+393.33%	-34.48%			
Процент побољшања у односу на највећу вредност		87.55%	+406.67%	-27.59%			
Процент побољшања у односу на просечну вредност		87.79%	+398.67%	-30.34%			

Резултати показују да, у случају када је максималан број епоха био 500, најмања грешка на скупу за валидацију је добијена са стопама учења 0.05, 0.1 и 0.2, при стопи промене стопе учења [0.9, 1.1], при чему се укупна грешка смањила за 88.16%, а број тачно процењених кредитних оцена на скупу за валидацију је порастао за 406.67%. Када се посматрају сви експерименти извршени на 500 епоха, укупна грешка се у просеку смањила за 87.79%.

5.4.2.2. ДЕТАЉИ ПРОЦЕСА ТРЕНИРАЊА

Ради илустрације, у наставку су приказани детаљи експеримента који је резултовао најмањом укупном квадратном грешком (0.4873) на скупу за валидацију. Поставка експеримента била је следећа: максималан број епоха је био 500, почетна стопа учења је била 0.1 (са стопом промене $[0.9, 1.1]$), без подешавања параметара последице.

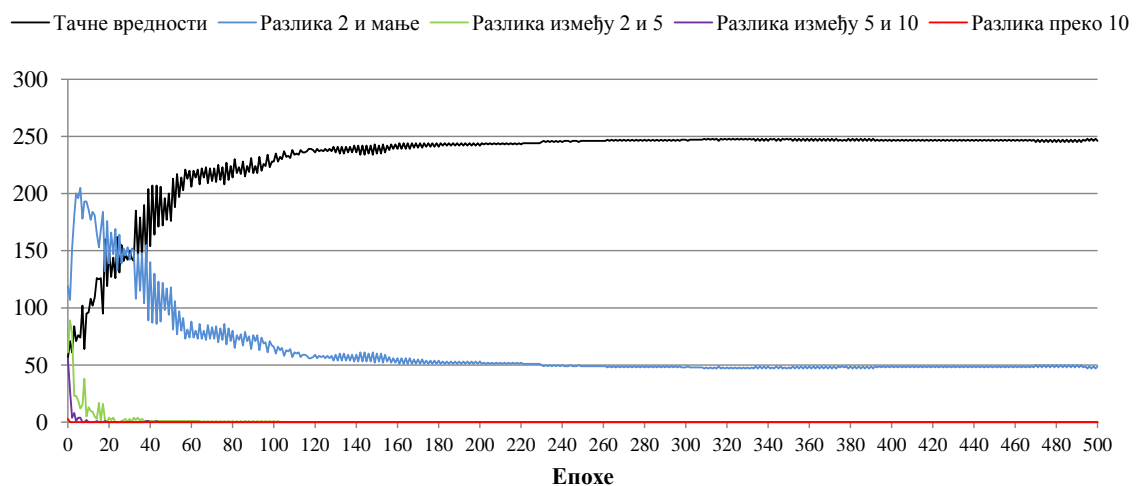
На следећој слици је дат графички приказ кретања корена средње квадратне грешке кроз епохе као и логаритамски тренд.



Слика 35. Кретање корена средње квадратне грешке кроз епохе

Са слике се може приметити да је грешка једно време осцилирала да би се затим усталио тренд опадања, да би се након завршетка процеса тренирања тј. након 500 епоха грешка смањила за 89.54%. Већ у 100. епохи грешка се смањила за 87.06%.

На следећој слици је приказано кретање тачности предвиђања. На слици се може видети да се, као је и очекивано током процеса тренирања, број тачно предвиђених вредности повећава кроз епохе.



Слика 36. Кретање тачности предвиђања кроз епохе

У следећој табели су, ради илустрације, дата одступања предвиђених кредитних оцена скупа за тренирање од реалних вредности, и то за почетно предвиђање, предвиђање у 100. и у последњој епохи.

Табела 20. Тачност предвиђања

	Почетно предвиђање	100-та епоха	500-та епоха
Тачне вредности	56	228	246
Разлика 2 и мање	119	66	49
Разлика између 2 и 5	61	1	0
Разлика између 5 и 10	56	0	0
Разлика преко 10	3	0	0

Као што се може видети из табеле проценат тачно предвиђених кредитних оцена је износио 18.98% пре почетка тренирања, тј. са почетним вредностима параметара фунцкија припадности, да би тај проценат у 100. епохи износио 77.29%, а на крају процеса тренирања чак 83.39%.

6. МОГУЋНОСТИ ПРИМЕНЕ

У последњих неколико деценија фази и неуро-фази системи закључивања потврдили су своју изузетно ефикасну примену у процесу одлучивања и управљања у најразличитијим доменима (од индустријског инжењерства преко финансија до медицине). С обзиром, на ширину области практично би било немогуће направити свеобухватну синтезу радова који се односе на могуће примене фази система закључивања. Имајући у виду да, иако је систем предложен у овом раду по својој намени општи, у илустративним примерима показана је примена предложеног приступа у области медицине и финансија, па ће се уједно и преглед радова сузити на ова два домена.

У овом поглављу је приказана примена постојећих система, како фази тако и неуро-фази, у одабраним доменима управо са циљем да се нагласи да у свим тим доменима је могуће применити и предложени приступ. Конзистентан неуро-фази систем закључивања, коришћењем конзистентне реално вредносне $[0,1]$ фази логике, даје боље резултате у већини случајева у којима се премиса правила не састоји искључиво од конјункције атрибута. У претходном делу дисертације показано је да примена овог приступа може довести до различитих резултата односно тачнијих предвиђања. Уколико располажемо улазно-излазним подацима система, алгоритам учења увек може функције припадности подесити тако да боље одговарају посматраном систему. Подешавањем функција припадности можемо помоћи доменском експерту при дефинисању поделе улазног простора и уколико постоји, елиминисати субјективност. Као, што је већ речено, предложени систем је по својој намени општи па се може применити у свим наведеним ситуацијама.

6.1. Примене фази система закључивања у медицини

Још је *Zadeh* у својим радовима сугерисао да управо медицина треба да буде једна од области примене фази система с обзиром на то да су, како он каже, симптоми и болести фази по својој природи, а фази скупови подесни за представљање медицинских категорија и знања. Подаци потребни за дијагностиковање болести су бројни, потичу из различитих извора, често су тешки за праћење, а њихова

анализа је временски захтевна, па су компјутерски подржани системи за подршку одлучивању пожељни.

(*Steimann & Adlassnig, 1998*) као први разлог за примену фази система у медицини наводе чињеницу да је веза између дијагнозе и симптома ретко једнозначна, па је утврђивање тачне дијагнозе међу могућим, које деле цео низ преклапајућих симптома, веома тешка. Као други разлог наводе да су опсервације подложне грешкама чију је стохастичку природу тешко описати и захтевају испуњење одређених претпоставки ретко одрживих у пракси. И коначно сматрају да, захтеване опсервације често нису направљене на континуалним основама. Из овог разлога потребна је структура која је погодна за формализацију аутоматизованог закључивања. Експерти су свесни да су њихова знања из области медицине, које резултују успостављањем дијагнозе, прожета неизвесношћу тј. њихово резонување обилује непрецизним формулацијама (*Steimann & Adlassnig, 1998*).

Традиционалне методе често нису адекватне за комплексне медицинске поступке па се у последње време све чешће користе методе вештачке интелигенције. Међу бројним методама меког рачунарства, концепт фази логике примењен је у многим истраживањима због њене способности да доноси одлуке у окружењу са непрецизним, неизвесним и некомплетним информацијама (*Djam, Wajiga, Kimbi & Blamah, 2011*) какве управо преовладавају у медицинским системима.

Експертни системи су интелигентни компјутерски програми који систематизују, складиште и користе потребна знања лекара и медицинских стручњака за решавање сложених случајева и наговештавање одговарајућих дијагноза у процесу доношења одлука, и чији је значај на пољу медицине већ доказан (*Mishra & Jha, 2014*). У њих су уграђена знања која су одраз вишегодишње праксе и искуства једног или више стручњака. Најчешћи задатак експертних система је да воде рачуна о клиничким потребама као што су успостављање одговарајућих дијагноза и њихова брза процена како би се избегле здравствене компликација, непотребно узимање лекова или њихово штетно дејство (*Garg et al, 2005*). Већина аутора као њихове предности наводи ниске трошкове, мали утрошак времена уз

велику ефикасност, помоћ будућим лекарима који уче да дијагностификују. Предности су видљиве када је присутан недостатак медицинских стручњака (нарочито специјалиста) или може бити веома добра алтернатива када се они налазе на великој удаљености.

Са порастом здравствене бриге за здравље становништва као и самог интересовања људи за њихово здравље свакако ће истраживања још више бити усмерена ка решавању проблема у медицини.

У раду (*Garg et al, 2005*) статистички је обрађено сто радова који се односе на компјутерске системе за подршку одлучивању из области медицине. Међу значајним прегледима налазе се (*Phuong & Kreinovich, 2001*), (*Prasath, Lakshmi, Nathiya, Bharathan & Neetha, 2013*), (*Steimann & Adlassnig, 1998*), (*Yardimci, 2009*), (*Abbasi & Kashiyarndi, 2006*) и други. Овде је дат приказ по обољењима.

Срчана обољења

Циљ система предложеног у (*Adeli & Neshat, 2010*) је предвиђање ризика настанка срчаних обољења. Систем користи Мамдани метод закључивања, како би на основу 11 улазних података ризик сврстао у једну од пет предефинисаних категорија (повећањем категорије расте и ризик, док нулта категорија означава да обољење није присутно).

Дијагностиковање кардиоваскуларних болести такође је и у фокусу рада (*Oad, DeZhi & Butt, 2014*). Захваљујући *data mining* техникама укупан број атрибута на основу којих се врши предвиђања редукован је са 14 на 6.

Фази експертни систем (*Allahverdi, Torun & Saritas, 2007*) предвиђа ризик развоја коронарних болести у наредних десет година. Прво, мања база правила, на основу одређених фактора, рачуна укупни ризик па уколико је он већи од неке предефинисане вредности укључује се фази систем. У случају повећаног ризика, предвиђа кроз три резултата: (1) нормалан живот,

(2) дијета и (3) уз коришћење лекова. Као механизам закључивања коришћен је Мамдани метод.

Систем (Apooj, 2012) дефинише потребна знања на основу клиничких података о пацијенту, независно од медицинских стручњака како би се одредио ризик срчаних обољења. У првој фази, на основу *data mining* техника, избором атрибута и њихових тежина одређују се отежана фази правила. На основу опсега девијације образују се правила за која се рачуна фреквенција појављивања у бази знања. Фреквенција одређује тежину сваког правила. Закључивање се врши Мамдани методом помоћу правила са припадајућим тежинама.

У (Setiawan, Venkatachalam & Hani, 2009) истражују се могућности развоја фази система за подршку одлучивању при дијагностиковању коронарних артеријских болести. Систем учи на основу података и представља знање у форми *if-then* правила зашта је коришћен метод заснован на теорији грубих скупова (енгл. *Rough Set Theory*). Како би се смањио број правила и изабрала најзначајнија, коришћен је метод филтрирања (у конкретном примеру 3881 правило редуковано је на 27).

Такође са циљем утврђивања срчаних обољења, развијен је модел (Kumar, 2013) који се заснива на Сугено типу фази система и унапређеном механизму одлучивања како би се повећала тачност резултата.

Студија (Abdullah, Zakaria & Mohamad, 2011) има за циљ креирање фази експертског система за одређивање ризика хипертензије при чему се разликују пацијенти мушког и женског пола и то у двадесетим, тридесетим и четрдесетим годинама. Правила, лингвистичке променљиве и одговарајуће функције припадности дефинисане су од стране експерта, на основу статистичке анализе података и литературе. У поређењу са другим статистичким методама предложено решење је дало брже, јефтиније и тачније резултате.

Користећи информационо-комуникационе технологије имплементиран је (*Djam & Kimbi, 2011*) фази експертски систем заснован на вебу (енгл. *web*) за управљање хипертензијом. За дефазификацију коришћен је метод корена суме квадрата.

У (*Tsipouras, Exarchos, Fotiadis, Kotsia, Vakalis, Naka & Michalis, 2008*) представљен је систем за подршку одлучивању који аутоматски генерише правила. Коришћена методологија може се поделити у четири корака: (1) увођење дрвета одлучивања на основу података (2) извођење скупа правила у дисјунктивној нормалној форми на основу дрвета одлучивања и формулација класичног (*crisp*) модела (3) трансформација класичног (*crisp*) скупа правила у фази модел и (4) оптимизација параметара фази модела које систем аутоматски генерише на основу иницијалног скупа података. Систем обезбеђује дијагностиковање болести коронарне артерије као и интерпретацију предложене одлуке.

Малигна обољења

У раду (*Saritas, Allahverdi & Sert, 2003*) фази експертни систем коришћен је за дефинисање опсега у коме се креће проценат ризика рака простате. На основу ове вредности може се утврдити да ли постоји потреба за биопсијом која може бити веома ризична и опасна метода.

На основу фази правила у (*Balanică, Dumitrache, Caramihai, Rae & Herbst, 2011*) прогнозира се ризик настанка рака дојке применом фази логике за описивање и класификацију мамографских слика. У првом кораку вршен је избор визуелних атрибута за класификацију израслина као и процена утицаја сваког од атрибута на класификацију. Током процеса обраде слика, пет радиолога, дефинисали су карактеристике сваког атрибута као и њихове вредности на основу чега је дизајнирана и имплементирана база података за складиштење добијених података. На бази ових информација моделован је систем, тј. фази скупови и фази база правила. У другом кораку креиран је ФИС који користи Мамдани метод. Такође, коришћен је фази Омега

алгоритам за генерисање функција припадности, који се заснива на статистичкој анализи података.

Фази систем закључивања дизајниран у (*Lavana, Durai & Iyengar, 2011*) има за циљ идентификацију канцера плућа. Доменски експерти генерисали су правила којима се на основу улазних података, односно симптома, одбацује или потврђује болест као и њен стадијум.

У раду (*Nawgaje & Kanphade, 2011*) предложен је ФИС за детекцију ивица боје коштане сржи на микроскопском приказу чиме је омогућено да се подражавају идентификација и пребројавање белих крвних зрнаца од стране стручњака. Класичан приступ ручног пребројавања различитих класа белих крвних зрнаца је временски захтеван посао чији је циљ препознавање и адекватно лечење инфекције, анемије или леукемије.

Респираторна обољења

Рад (*Zarandi, Zolnoori, Moin & Heidarnesjad, 2010*) је мотивисан значајем дијагностиковања астме у раним фазама. Аутори предлажу два одвојена ФИС-а за одређивање вероватноће да пацијент има астму. У првом, као улази коришћени су само релевантни симптоми (без лабораторијских анализа). Други представља линеарну комбинацију излаза два одвојена ФИС-а, једног заснованог на симптомима и другог заснованог на резултатима лабораторијских анализа које се односе на плућне функције.

Сврха система предложеног у (*Anand, Kalpana & Vijayalakshmi, 2013*) је откривање проблема везаних за поремећај функције плућа, превасходно астме и хроничне опструктивне болести плућа. Систем је дизајниран тако да узима у обзир детаље различитих пацијената и на основу тога идентификује проблем одређеног пацијента. Како би се превазишла сложеност односног система направљено је неколико независних подсистема. Поједини улази су мање осетљиви и не воде до великих промена излаза али се не могу занемарити, па је из овог разлога извршена анализа осетљивости. Помоћу

методе фактор по фактор (енгл. *One Factor at a Time*) тестирана је значајност појединачних улаза.

(*Patel, Choubey, Gupta, Verma, Prasad & Rahman, 2012*) развили су аутоматизован самоорганизујући фази систем који омогућава дијагностиковање различитих стања астме на основу пет симптома како би се на време открила болест. Систем има способност да се носи са неизвесношћу и непотпуним подацима.

Фази когнитивне мапе и фази логика коришћени су у (*Innocent & John, 2004*) за решавање проблема класификације и процену стадијума болести, нарочито у присуству нејасних симптома. У раду су тестиране три различите респираторне болести: грип, астма и рак плућа што је посебно значајно са аспекта мера које се спроводе на бази прелиминарне дијагнозе.

Маларија

На основу клиничких посматрања, медицинских дијагноза и знања експерата (*Djam, Wajiga, Kimbi & Blamah, 2011*) предложили су систем за откривање маларије, што је нарочито значајно у руралним срединама где медицинске установе могу бити веома удаљене.

Са циљем раног откривања маларије у подручјима где је тешко доћи до мишљења медицинског стручњака предложен је систем у (*Sharma, Singh, Bandil & Mishra, 2013*).

У (*Uzoka, Osuji & Obot, 2011*) поређена је ефикасности фази и АХП (аналитички хијерархијски процес) методологије при дијагностиковању маларије. Показало се да обе технике се могу успешно применити али да нешто боље резултате ипак даје фази логика.

Друге болести

За разлику од већине болести, како наводи аутор у (*Chandra, 2014*), где се на основу одређеног теста или одређене вредности теста, може одредити њено присуство, мигрену је тешко тачно утврдити. Њена специфичност се огледа у томе што не постоје тачне одреднице, тест који ће тачно утврдити њено присуство, трајно лечење и симптоми се разликују од особе до особе. Фази логика је коришћена како би се дефинисао степен појединих симптома и проценио степен главобоље.

Намена предложеног система (*Kadhim, Alam & Kaur, 2011*) је утврђивање проблема са леђима и, у складу с тим, предлаже се одговарајући медицински савет пацијенту. Фази експертски систем почива на правилима у које су уграђени симптоми на основу медицинских посматрања.

У (*Koutsojannis & Hatzilygeroudis, 2004*) дизајниран је и имплементиран фази експертски систем намењен дијагностиковању и лечењу мушке импотенције. На основу знања експерата и литературе, у првом кораку, формира се модел са циљем да се установи почетна дијагноза која се даље потврђује укључивањем лабораторијских тестова. Модел разликује улазне, међу и коначне параметре па је потребно назначити сваки од њих са припадајућом улогом. Коришћена је Пирсонова (енгл. *Pearson*) анализа за одређивање значајности појединих параметара. Затим се, на основу знања експерта и података о самом пацијенту, формира коначан модел који пролази кроз неколико итерација како би се подесили параметри модела.

За дијагностиковање и лечење проблема са простатом предложен је систем (*Koutsojannis, Tsimara & Nabil, 2008*) заснован на знању експерата, резултатима тестова и клиничким подацима пацијената.

У истраживању (*Neshat, Yaghobi, Naghibi & Esmaelzadeh, 2008*) дизајниран је фази систем који као резултат даје стопу ризика обољења јетре.

Развојем различитих система праћења, упозоравања и анализе пацијената број података који се прикупља и контролише постаје веома велики и самим тим тежак за контролу од стране човека. Експертски системи, у том случају, немају за циљ да замене медицинско особље већ да му помогну у анализи великог броја информација коју пружа различита медицинска опрема. Основни циљ истраживања датог у (*Baig, Gholamhosseini & Harrison, 2012*) је да унапреди дијагностички систем упозоравања који препознаје критичне ситуације током анестезије. Технике филтрирања примењене су како би се смањио шум у подацима. За тренирање модела коришћен је АНФИС.

Алгоритам заснован на фази логици за откривање ретког патолошког стања малигне хипертермије дат је у (*Lowe & Harrison, 1999*). Правила су изведена како би се на време опазиле промене у симптомима захваљујући чему је систем у стању да препозна малигну хипертермију девет минута пре анестезиолога.

У студији (*Zarei, Kamyad, & Heydari, 2012*) фази модел ХИВ инфекције је представљен системом линеарних фази диференцијалних једначина. Апроксимација решења изведена је за фази проблем оптималног управљања са циљем минимизације вирусног оптерећења и трошкова лекова.

(*Jafelice, de Barros, Bassanezi, & Gomide, 2004*) упоређују фази модел (изграђен на биолошким принципима) са класичним Андерсоновим моделом (подешеним тако да најбоље одговара подацима) над подацима из литературе.

6.2. Примене неуро-фази система у области финансија

Имајући у виду да је АНФИС један од најчешће коришћених неуро-фази система у овом поглављу ће се најпре дати осврт на могућности његове примене. Примене АНФИС-а у најразличитијим областима су бројне, па ће овде бити дат и осврт на релевантне радове из области управљања и одлучивања у финансијским и организационим системима.

Предвиђање приноса на тржишту акција је веома сложено јер зависи од веома великог броја фактора из окружења а неке од њих тешко је предвидети и измерити (политички догађаји, економски услови, очекивања трговаца). Са друге стране, ова предвиђања су од великог значаја јер утичу на одлуке „купи“ или „продај“ као инструменте трговаца и финансијских стручњака. С обзиром на значај предвиђања велики је број радова који истражују могућност примене АНФИС-а на финансијским тржиштима.

Quek, 2005

Аутори применом АНФИСа и неуро-фази система успешно предвиђају цене акција на америчкој берзи *U.S. Stock Exchange Trade*.

Malhotra & Malhotra, 2002.

Користећи АНФИС покушавају да идентификују „лоше“ кредите за које је вероватно да неће бити враћени. Резултате предвиђања пореде са резултатима добијеним помоћу дискриминационе анализе. Неуро-фази системи су флексибилнији, мање осетљиви на непрецизне податке и могу да моделују нелинеарне функције са задатом тачношћу.

Trinkle, 2006

Тестиране су тачности предвиђања годишњих приноса за три компаније применом АНФИС-а и неуронских мрежа. Извршено је поређење добијених резултата са ауторегресивним моделом покретних средина (енгл. *autoregressive moving average – ARMA*). АНФИС и неуронске мреже оствариле су профит за све сценарије трговања. Ипак, ниједна техника није се показала значајно доминантнијом у односу на друге.

Abbasi & Abouec, 2008

Успешно се предвиђа тренд кретања цена акција *IRAN KHODRO* корпорације коришћењем АНФИС-а. За дугорочни период оптимална се показала комбинација две троугаоне функције припадности и четири улазне променљиве: обим трговања, *Dividend Per Share (DPS)*, *Price to Earning Ratio (P/E)* и цена на затварању. За краткорочни период оптималан модел састојао се

од комбинација које су биле различите за сваки квартал у току године а улази су обим трговања, *Price to Earning* рацио и цена на затварању.

Yunos, Shamsuddin & Sallehuddin, 2008

Развијен је хибридни неуро-фази систем заснован на АНФИС-у како би се на дневној основи предвидело кретање KLCI (*Kuala Lumpur Composite Index*). Изабрана су четири техничка индикатора за анализу података. Два одвојена експеримента показала су да значајно тачнија предвиђања добијамо коришћењем АНФИС-а у односу на предвиђања добијена вештачким неуронским мрежама.

Kablan, 2009

Аутор разматра проширење АНФИС-а чији је задатак подршка трговању. Фази резоновање комбиновано је са могућношћу неуронских мрежа да препознају патерне искоришћено је за предвиђање и трговање на финансијском тржишту. Коришћен је нови модел који препознаје специфичне и сензонске догађаје међу подацима чиме су обезбеђени већа прецизност и побољшање укупних перформанси АНФИС-а.

Alizadeh, Rada, Balagh & Esfahani, 2009

На основу техничке и фундаменталне анализе добијени су улази АНФИС-а како би се предвидео USD/JPY курс.

Ansari, Kumar, Shukla, Dhar & Tiwari, 2010

Циљ рада је предвиђање берзанског индекса комбиновањем економетријских тестова како би се оптимизовале функције АНФИС и ФИС система. На основу статистичких и економетријских тестова долази се до природе података и односа међу њима. Помоћу *Optimized subtractive data clustering* методе кластерују се подаци и креирају се фази функције припадности коришћењем фази система закључивања.

Boyacioglu & Avci, 2010

Истражују могућности предвиђања стопе приноса на Истамбулској берзи коришћењем АНФИС-а. За анализу су коришћени месечни макроекономки

индикатори *DJI (Dow Jones Industrial Average)*, *DAX (Deutsche Aktien Index)*, *BOVESPA (Bolsa de Valores de São Paulo)* и приноси *ISE National 100* индекса. Ови подаци су изабрани јер су позитивно корелисани са *ISE*. Показано је да тачност предвиђања расте са смањењем броја улазних функција. Са друге стране, након одређене вредности грешка почиње да расте заједно са порастом сложености АНФИС-а. Са порастом броја улазних функција припадности расте и сложеност структуре тако да је за конвергенцију стопе грешке потребно више итерација и временски је захтевније.

Atsalakis, Dimitrakakis & Zopounidis, 2011

Предложен је систем заснован на неуро-фази архитектури за предвиђање тренда цена акција. Систем је заснован на АНФИС-у који користи *Elliot*-ову теорију таласа.

Chang, Wei & Cheng, 2011

Аутори наводе као главне недостатке конвенционалних модела временских серија то што користе само једну променљиву за предвиђање а правила добијена неуронским мрежама тешко су разумљива. Из тог разлога за предвиђање индекса *TAIEX (Taiwan stock exchange capitalization weighted stock index)* предлажу АНФИС модел заснован на ауторегресији и волатилности.

Ebrahimpour, Nikoo, Masoudnia, Yousefi & Ghaemi, 2011

Предложен је нови метод за предвиђање тренда временских серија који комбинује три неуронске мреже и АНФИС. Предложени приступ је примењен на Техеранској берзи у два различита експеримента.

Schott & Kalita, 2011

У раду је коришћен АНФИС како би препознавао патерне на подацима временских серија. Креиран је скуп једноставних правила који претражују скадишта података како би се изабрала она акција која поседује жељене карактеристике.

Wei, Chen & Ho, 2011

Аутори указују на основне недостатке модела који су коришћени у прошлости и то 1) модела за предвиђање заснованих на вештачкој интелигенцији, као што су неуронске мреже и генетски алгоритми, који дефинишу сложена и конфузна правила 2) модела за предвиђање заснованих на статистици, као што су временске серије, који захтевају да буду унапред испуњене одређене претпоставке везане за променљиве а математичке једанчине које се добијају углавном су неразумљиве инвеститорима. Предложен је нови хибридни модел који користи техничке индикаторе као факторе који утичу на предвиђање и коришћење три нове методе (корелациону матрицу, *subtractive clustering* методу и АНФИС) за предвиђање на тржишту акција.

Melin, Soto, Castillo & Soria, 2012

Аутори описују и користе скуп различитих архитектура АНФИС-а са нагласком њихове примене на предвиђање хаотичних временских серија са циљем минимизације грешке предвиђања. Разматране су следеће временске серије: *Mackey–Glass*, *Dow Jones* и Мексичка берза. За сваки појединачни дан коришћен је различит АНФИС, а за њихову интеграцију коришћени су просек и отежани просек. Променом типа функција припадности разматрао се њихов утицај на сложеност тренирања.

Chen, 2013

Истражује могућности *particle swarm optimization (PSO)* технике за одређивање вредности *subtractive clustering* параметара и АНФИС модела за предвиђање пословних неуспеха на основу пет финансијских рација. Експериментално је показано, на основу 160 компанија на Тајванској берзи, да су задовољене следеће карактеристике: моментум метод првог реда адекватан је за *on-line* учење (брзина учења и конвергенције је мала) и показао се добар за краткорочне предикције док је моментум метод другог реда адекватан за инкрементално учење (због његове могућности да се адаптира великим финансијским скуповима података) и одговара дугорочним предикцијама.

Bagheri, Mohammadi Peyhani & Akbari, 2014

АНФИС је коришћен како би се предвиделе будуће цене на тржишту. За подешавање функција припадности коришћена је *Quantum-behaved Particle Swarm Optimization – QPSO* оптимизација. У раду је предложена и нова метода којом се аутоматизовано долази до патерна. Резултати указују да је овај хибридни метод ефикасан при предвиђању цена и дефинисању патерна у финансијама.

Поред могућности примене АНФИС-а у домену финансијских тржишта он се успешно примењује и у другим областима овог домена:

Wang & Chen, 2008

У раду су примењена два алгоритма АНФИС и КЕРНЕЛ за предвиђање хитних наруџбина како би се унапред прилагодили расположиви капацитети и план производње. Генерисањем функција припадности и фази правила на основу историјских података могу се предвидети појединачне ставке (што је била улога АНФИС-а) и њихове количине (што је била улога КЕРНЕЛ система са више улаза и више излаза). Предвиђањем ставки и потребних количина смањује се негативан утицај који хитне наруџбине имају на производни систем.

Efendigil, Öniit & Kahraman, 2009

Има за циљ предвиђање очекиване тражње одређеног производа за одређени период времена што један је од најважнијих циљева предизећа. У раду су предложене нове технике предвиђања засноване на вештачкој интелигенцији и извршено је њихово међусобно поређење. АНФИС је, на примеру ланаца снабдевања, дао боље резултате у односу на неуронске мреже.

Akkoç, 2012

Аутори су користили АНФИС за кредитну анализу.

Efendigil & Öniit, 2012

Предложена је методологија заснована на АНФИС-у и неуронским мрежама која је применљива у случајевима непотпуних захтева.

Giovanis, 2012

Два приступа коришћена су за предикцију периода рецесије и експанзије у САД. Први приступ користи *Logit and Probit* моделе док други користи АНФИС са Гаусовом и генерализованом звонастом функцијом. Већу поузданост показао је неуро-фази модел.

Kannan, Jafarian, Khamene & Olfat, 2013

Аутори полазе од тога да је основни циљ расподеле буџета да усмери све активности предузећа ка остваривању постављених организационих циљева. Пословне стратегије предузећа разматране у светлу конкурентског и унутрашњег окружења, одређене од стране топ менаџмента, коришћене су као улази у АНФИС. Излаз је затим коришћен за иницијалну *Quality function development – QFD* матрицу (алат који се користи за стратегијско планирање). Стратегијски план директно је у вези са делом буџета који ће бити додељен појединим програмима.

Liu, Leng & Fang, 2013

Предложен је нови метод за тренирање и одређивање параметара АНФИС-а који се заснива на *Quantum-behaved Particle Swarm Optimization – QPSO* оптимизацији.

Shekarian & Gholizadeh, 2013

Разматра се економско благостање које као ниво напретка и квалитета животног стандарда представља важан социо-економски елемент. Углавном је разматран традиционалним методама, нарочито економетријским. Емпиријски резултати су показали да је АНФИС модел надмашио вишеструку линеарну регресију.

Када је реч о примени других неуро-фази система у, за овај рад релевантним доменама, могли би се издвојити следећи радови:

Wong, Wang, Goh & Quek, 1992

Добијени су задовољавајући резултати коришћењем предложеног неуро-фази система за предвиђање годишње добити.

Abra Abraham, Nath & Mahanti, 2001

Аутори су користили хибридни модел који се ослања на технике меког рачунарства за предвиђање тржишта акција и анализу тренда. Након претпроцесирања података анализом главних компоненти (енгл. *principal component analysis - PCA*) помоћу неуронске мреже изводе се предвиђања за дан унапред. Неуро-фази систем врши оцену тренда предвиђених вредности што је демонстрирано над подацима *Nasdaq-100*.

Wu, Fung & Flitman, 2001

Предложен је *Feed Forward Neuro Fuzzy (FFNF)* систем за предвиђање месечног тренда за *S&P500* индекс на основу претходних података и економских индикатора.

Afolabi & Olatoyosi, 2007

Користи фази логику неуро-фази мреже и Кохоненове самоорганизујуће шеме (енгл. *Kohonen's self-organizing plan*) за предвиђање цене акција. Показано је да су одступања мања код Кохоненове самоорганизујуће шеме него код других техника.

Chang & Liu, 2008

У раду је развијен *Takagi-Sugeno-Kang* тип фази система заснован на фази правилима за предвиђање промена цена на Тајванској берзи. Овај модел је предвиђао *TSE* индекс са тачношћу од скоро 97.6%.

Chen, Huang, & Lin, 2009

У првом делу рада дају преглед предности и мана досадашњих техника које су коришћене за предвиђање банкротства. Дат је детаљан опис предложеног новог неуро-фази система који је затим детаљно тестиран. Извршено је међусобно поређење експерименталних резултата добијених применом предложеног решења и осталих техника како би се показала ваљаност предложеног решења.

Pokropińska & Scherer, 2008

Дефинисан је неуро-фази модел Мамдани типа за предвиђање сигнала „купи“ или „продај“. Улази модела су цена на затварању, цена на отварању, минимална и максимална цена, обим, покретна средина (енгл. *moving averages*) и елементи техничке анализе.

Atsalakis & Valavanis, 2009

Аутори су развили адаптивни неуро-фази систем за управљање како би предвидели сутрашњи тренд цена акција за *ASE* и *NYSE* индекс. Експериментални резултати показују да се предложени систем показао добрим у симулацијама трговања а проценат успешности у предвиђању тренда цена акција је значајан.

Детаљан преглед осталих примена фази-неуро система по категоријама: у медицинским системима, економским системима и електронским системима, примена у обради слика и издвајање карактеристика, у управљању саобраћајем, примена у предвиђањима, друштвеним наукама, моделовању система и производњи дат је у раду (*Kar, Das & Ghosh, 2014*). Преглед неуро-фази система са аспекта хардверске подршке дат је у (*Bosque, del Campo & Echanobe, 2014*).

6.3. Могућности примене предложеног решења

На основу претходног, можемо видети да су бројни домени и проблеми на које се може применити предложени конзистентан неуро-фази систем. Предложени систем је по својој намени општи и може се применити у свим изложеним ситуацијама али и у свим другим ситуацијама у којима је потребно донети одлуку.

Како је објашњено и показано у поглављу 4, конзистентан фази систем закључивања, коришћењем конзистентне реално-вредносне $[0,1]$ фази логике, даје другачије резултате у случајевима где се премиса правила не састоји искључиво од конјункције атрибута. У истом поглављу је, илустративним примером, показано да примена овог приступа може да доведе до различитих резултата, односно тачнијих предвиђања.

У поглављу 5, указано је на то да, уколико располажемо подацима о понашању посматраног система у прошлости, неуро компонента увек може да функције припадности боље прилагоди посматраном проблему. Подешавањем функција припадности можемо помоћи доменском експерту при дефинисању поделе улазног простора. Такође, можемо и елиминисати субјективност експерта који почетне вредности параметара дефинише на основу свог знања и искуства. Експериментални резултати показују да се подешавањем параметара (тј. предложеним конзистентним неуро-фази системом) могу додатно унапредити резултати предвиђања.

Уколико би се развијено софтверско решење учинило доступним у виду веб сервиса, предложени приступ могао би да буде од помоћи у свакодневном доношењу одлука ширем кругу корисника који немају одређена техничка знања.

Поступак тренирања би се спровео само једном за дати проблем одлучивања, како би се добиле оптималне вредности параметара (у складу са жељеном тачношћу). Потребе за новим подешавањем параметара могу се јавити у случају да се располаже новим подацима. Уколико је почетни скуп података довољно велики, као што је то на пример случај у области медицине, ретко би се јављала потреба за новим подешавањима. Са друге стране, ако би промене података биле честе, време потребно за тренирање било би краће будући да би тренирање могло да започне од претходно утврђених оптималних вредности параметара. Додатно побољшање би се могло постићи применом неког другог алгоритма оптимизације приликом учења (на пример хеуристичког, уколико је потребно обавити тренирање у краћем временском оквиру уз што боље резултате).

7. ЗАКЉУЧАК

Циљ сваког, па и овде предложеног експертског система јесте да опонаша начин на који човек (доменски експерт) решава проблем, тј. да дефинише управљачку акцију или помогне у процесу доношења одлука.

Велики број аутора сматра да велике могућности експертских система леже у хибридном системима, где синергетским деловањем појединачних методологија могу да се унапреде постојећи модели. Мотивисан тиме, предложени модел система у основи представља интеграцију неуронских и фази система, чиме се користе предности оба приступа а самим тим и умањују појединачни недостаци.

Фази системи закључивања у бази правила „складиште знање“ есперата и на основу тог знања могу да закључују. Знање есперата било ког домена лако се може формулисати вербалним исказима а теорија фази скупова и фази логике омогућава превођење оваквих исказа (чак независно од њихове сложености) у одговарајуће математичке изразе. Фази логика коришћењем различитих оператора и различитих норми, даје велики број могућих улазно-излазних пресликавања.

Класична теорија фази скупова не налази се у Буловом оквиру јер нису задовољене све Булове аксиоме, што се пре свега односи на два основна (Аристотелова) закона: закон искључења трећег и контрадикцију. Из овог разлога у раду је примењена конзистентна реално-вредносна $[0,1]$ логика. Она се заснива на интерполативној Буловој алгебри (ИБА) која представља конзистентну реално-вредносну реализацију коначне Булове алгебре. Свака логичка функција може једнозначно да се трансформише у одговарајући генерализовани Булов полином (ГБП) коришћењем ИБА (*Radojević, 2008b*). Основни појмови, разлика у структурном и вредносном нивоу, као и детаљни кораци трансформација дати су у поглављу 2.3.

Оправданост коришћења конзистентног приступа најпре је илустрована на примеру конзистентног фази система закључивања (КФИС). Сврха овог КФИС-а је да процени могућност да је пацијент на дијализи трбушне марамице (лат.

peritoneum) оболео од перитонитиса. Ово је прва примена КФИС-а у медицини, при чему је дати поступак општи и може да се примени у било којој области.

Коришћени су подаци добијени на основу медицинских картона 156 пацијената који су учествовали у програму дијализе трбушне марамице (код њих 123 дијагностификован је перитонитис). Експериментални подаци показују да су оба приступа (класичан фази систем закључивања и конзистентан фази систем закључивања) дала исту процену могућности обољевања у 29/123 (код пацијената који су оболели) тј. 33/33 случаја (код пацијената који нису оболели). У преостала 94 од 123 случаја оболелих пацијената (што је 76.42% узорка) конзистентан ФИС показао се доминантним у односу на класичан приступ јер је указивао на значајно већу оцену могућности да је пацијент оболео. У чак 36 случајева (што је 29.27% узорка) ова процена се разликовала за више од 10%. Можемо рећи да је конзистентан ФИС надмашио класичан приступ, који је (у просеку за 21.25%) потценио озбиљност симптома који су имали поједини пацијенти.

Добијени резултати указују на чињеницу да два примењена приступа не воде увек ка истим резултатима, тј. ка истим закључцима. Разлика у резултатима је најочљивија када се приликом дефинисања правила користи негација. За разлику од система управљања, у системима одлучивања може се јавити потреба за негацијом (нпр. „ако број леукоцита није велики“). Важно је напоменути и да се особине које се добијају негацијом једног лингвистичког атрибута не могу, у општем случају, добити комбинацијом осталих атрибута којима је описана улазна променљива.

Као могућност даљег унапређена предложеног КФИС-а види се коришћење неког алгорита учења који би, на основу скупа улазно-излазних података, подесио параметре тако да више одговарају реалном систему. На тај начин би се унапредило закључивање, а такође би се могла елиминисати субјективност коју експерти у некој мери изражавају приликом дефинисања параметара система. У том циљу могу се користити неуронске мреже, генетски алгоритми или неке од метода насумичне претраге. У овој дисертацији предложен је неуро-фази систем.

Предложени модел система не претендује да у потпуности замени човека, већ да користи његово знање и искуство. Понашање система, кроз скуп лингвистичких правила, описују управо они који систем највише познају и разумеју (насупротив аутоматски генерисаним правилима која су најчешће рогобатна, неразумљива и често ограничена само на конјункцију или дисјункцију променљивих). Дакле, реализација система започиње структурном идентификацијом, која је задатак експерта. Доменски експерт дефинише правила, њихов број, поделу улазно-излазног простора (која зависи од конкретног проблема, тј. колико фину поделу проблем захтева), променљиве узрочног и последичног дела правила као и почетне параметаре функција припадности. Приликом пројектовања фази система могу да се појаве тешкоће при одређивању функција припадности јер не постоји прецизна процедура која указује на то који облик фази скупа највише одговара ком проблему. Адекватан избор облика функција припадности, њиховог центра и ширине као и њиховог међусобног преклапања има велики утицај на ефикасност самог система. Поступак одређивања параметара функција припадности није толико интуитиван експертима из различитих области, па се намеће потреба да се управо у том делу примени нека метода која има способност учења на основу података.

Конзистентан неуро-фази систем кроз алгоритам учења обавља фина подешавања функција припадности на основу скупа улазно-излазних података који описују понашање система у прошлости. Неуронске мреже, путем алгоритма учења, подешавају почетне вредности параметара система, чиме се остварује адаптивност модела. Параметарска идентификација добија се итеративним поступком, тако да вредности што више одговарају реалном систему. Семантика правила остаје непромењена.

Како проблем, који се проучава у овом раду, подразумева да постоји скуп улазно-излазних података којима се описује понашање система, од интереса су нам само методе надзираног учења. Примењен је алгоритам простирања грешке уназад (енгл. *backpropagation*), који је уједно и најчешће коришћени алгоритам. Он кроз

итеративни поступак, на основу разлике у стварним и жељеним излазима, врши подешавање применом опадајуће градијентне процедуре. На основу дефинисане процедуре добијања градијентних вектора за структуру мреже (коришћењем ланчаног правила), прослеђује се вредност грешке од излаза до првог слоја да би се добиле оптималне вредности параметара функција припадности. Процес учења се одвија у *off-line* режиму, а подешавања се врше на основу укупне грешке модела, па редослед појављивања елемената у скупу за тренирање није од утицаја. Имплементирана је и хеуристика која подешава брзину учења у зависности од начина на који се мењала грешка током процеса учења.

Предложени конзистентан неуро-фази систем подразумева четворослојну архитектуру. Први слој врши фазификацију улазних променљивих на основу иницијалних вредности функција припадности. Други слој се односи на предуслов правила. Једна улазна променљива са истом лингвистичком вредношћу може да учествује у више правила, али у једном правилу, тј. његовој премиси може се појавити само једном. Трећи слој обавља трансформацију премисе у одговарајући Булов полином. Овај поступак је аутоматизован (у оквиру програмског решења) јер би, у супротном, био временски захтеван и тражио специфична знања. Евалуација свих правила изводи се паралелно, а појединачни излази последњег слоја се агрегирају. У следећем слоју врши се агрегација резултата појединачних правила како би се добио коначан излаз. Доменски експерти такође, могу да доделе значајност правилима (у том случају се за агрегацију користи линеарна комбинација) или да их сматрају подједнако значајним и међусобно независним (када је оператор максимум прикладнији). Оба начина су програмски имплементирана. Како последични део није фази скуп, време процесирања је брже јер је тежинска сума рачунски и временски мање захтевна него процес дефазификације.

Треба напоменути да одговарајуће везе и начини закључивања умногоме зависе од начина дефинисања логичких оператора. Експерту је дата могућност да на основу степена корелације улазних променљивих дефинише различите операторе.

Имплементирани конзистентан неуро-фази систем је детаљно је тестиран како би се оценила валидност предложеног решења. Разматрано је у којој мери, кроз процес учења, на промену укупне грешке као функције циља, утичу број епоха, почетне вредности стопе учења и вредности за које се почетна стопа учења мења.

Очекивано, са порастом броја епоха тачност превиђања расте, односно укупна грешка опада (након 500 епохе укупна грешка се значајно не мења). На основу добијених вредности можемо закључити да мање стопе учења дају већу тачност класификације (што није у директној вези са смањењем укупне грешке). Анализа резултата показује да корекција почетне стопе учења предложене у Matlab-у даје незнатно боље резултате у односу на вредности предложене у (Jang, 1993). Подешавање последичног дела правила није дало значајно бољу тачност (а процес обучавања је трајао дуже).

Предложени конзистентан неуро-фази систем, као један општи модел, може да се примени у најразличитијим областима од финансијских и организационих наука до медицине, итд.

Обезбеђена је и имплементација предложеног конзистентног неуро-фази система у виду оригиналног софтверског решења *CNFS-niiv* како би експерти из најразличитијих домена, али и шири круг корисника, могли да користе предложени систем без посебног техничког предзнања.

7.1. Осврт на постављене хипотезе и остварене доприносе

Са гледишта постављених хипотеза може се закључити следеће:

- *Знање експерата се може адекватно изразити коришћењем сложених вербалних исказа.*

Знање доменских експерата, нарочито из области којима није блиско математичко моделовање, може се најлакше вербално изразити јер је такав опис ослобођен математичког формализма. Независно од њиховог математичког знања, потребно је да начин изражавања знања и искуства буде што природнији и интуитивнији а управо то пружају сложени вербални искази.

- *Применом фази логике могуће је сложене вербалне исказе превести у правила.*

Правила представљају квалитативни опис људског знања. Теорија фази скупова, тј. фази логике омогућава трансформацију сложених исказа у правила користећи логичке операторе и лингвистичке атрибуте.

- *Применом конзистентне фази логике могуће је сложене вербалне исказе превести у логичке функције дефинисане у Буловом оквиру тј. тако да важе сви закони класичне логике.*

Класична фази логика не налази се у Буловом оквиру јер нису задовољени закон искључења трећег и контрадикција. Конзистентна фази логика разликује два нивоа: структурни и вредносни ниво. Принцип да се уводе вредности тек након што су примењена сва правила трансформације на структурном нивоу, води до тога да предложени приступ чува све законе Булове логике.

- *Премиса правила не мора бити ограничена само на конјункцију тј. дисјункцију фази (лингвистичких) променљивих.*

У највећем броју случајева премиса правила ограничена је искључиво на конјункцију, ређе дисјункцију. У експертским системима одлучивања, за разлику од система управљања, потреба за негацијом свакако постоји (на пример некад је од значаја да нека вредност само не буде висока). Како је у раду показано, негацију једног лингвистичког атрибута не можемо, у општем случају, добити комбинацијом осталих атрибута једне променљиве. Самим тим потреба за негацијом постоји а изузетно ретко се користи.

- *Начин на који се третира негација у постојећим приступима није адекватан.*

Класична фази логика не третира негацију на адекватан начин јер не важе закон искључења трећег и контрадикција. Из овог разлога предложени приступ, применом конзистентне реално-вредносне $[0,1]$ фази логике, омогућава испуњење свих Булових аксиома чиме је обезбеђен адекватан приступ негацији. Експериментално је потврђено да предложени конзистентан неуро-фази систем закључивања, нарочито у случају негације, даје у појединим случајевима боља решења.

- *Неуронске мреже могу унапредити фази системе закључивања.*

Разумно је очекивати да доменски експерти, који систем најбоље познају и разумеју могу да опишу начин на који закључују. Њихов задатак је да дефинишу поделу простора улаза система на фази скупове (лингвистичке атрибуте) и одреде почетне вредности параметара, што им не мора нужно бити блиско. Такође, могуће је да почетне вредности функција припадности поседује неки степен субјективног искуства. Са друге стране, познато је да неуронске мреже, захваљујући алгоритму тренирања, имају способност учења и прилагођавања подацима. Из тог разлога неуро компонента предложеног решења, омогућава подешавање и прилагођавање параметара на основу понашања реалног система у прошлости. На тај начин користи се знање садржано у подацима, олакшава се доменским експертима и елиминише се њихова евентуална субјективност, једном речју унапређује се систем закључивања.

- *Конзистентни неуро-фази системи могу се применити као подршка одлучивању у најразличитијим доменима.*

Предложени систем је по својој намени општи. Конкретно, у овој дисертације приказана је примена у два сасвим различита домена: у области медицине и у области финансијске анализе. Примена у

медицини има за циљ предвиђање могућности да је пацијент на перитонеумској дијализи оболео од запаљења трбушне марамице (перитонитиса) и то на основу клиничких симптома и лабораторијских анализа. У области финансија на основу финансијских рација врши се кредитна оцена предузећа. Експериментални резултати потврдили су ваљаност предложеног приступа.

Коначно, може се закључити да је потврђена и основна хипотеза:

- *Досадашњи фази системи закључивања се могу унапредити на такав начин да експерти могу адекватније изразити своја знања и искуства.*

Међу оствареним доприносима се издвајају:

- Преглед и анализа досадашњих неуро-фази система за подршку одлучивању.
- Проширење постојећих приступа дефинисања правила у фази системима закључивања.
- Дефинисање новог модела базираног на интеграцији два најчешће коришћена приступа меког рачунарства: фази система закључивања и неуронских мрежа.
- Друштвени допринос се огледа у могућности примене предложеног система у различитим областима.

7.2. Могући правци будућег истраживања

Будуће истраживање могло би да иде у неколико праваца.

Предложени конзистентан неуро-фази систем закључивања по својој намени је општи, али је у раду конкретно коришћен у домену медицине и финансија. Будућа истраживања могла би да буду усмерена на конкретну примену и у другим доменима како би предложени приступ потврдио своју ваљаност.

Затим, за подешавање функција припадности предложеног система, могли би да се примене различити алгоритми. У основи, могле би се применити различите методе оптимизације, егзактне или хеуристичке. Неки домени примене захтевају велику прецизност док други приоритет дају брзини, па би се, у зависности од захтева, предност дала егзактним методама или хеуристици. Као што је наведено у (*Jang, Sun & Mizutani, 1997*) поред градијентне методе, постоје и многе друге методе засноване на изводима које би се могле применити, као што су, на пример: Њутнова метода, Гаус-Њутнова метода, метода конјугованих градијената итд.. Са друге стране, аутори наводе и разноврсне хеуристичке методе као што су: генетски алгоритми или симулирано каљење (енгл. *Simulated Annealing*). Поред тога, могла би да се размотри и примена других метахеуристичких метода које се већ успешно примењују за тренирање неуронских мрежа (*Alba & Martí, 2006*) као што су, на пример, метода промене околине (енгл. *Variable Neighbourhood Search – VNS*) или табу претраживање.

Коначно, како би могао да се унапреди систем у делу који се односи на дефинисање функције припадности, могле би се подржати и кориснички дефинисане функције. Такође могла би се размотрити и могућност да кроз процес учења мења и облик функција припадности, а не само њихови параметри.

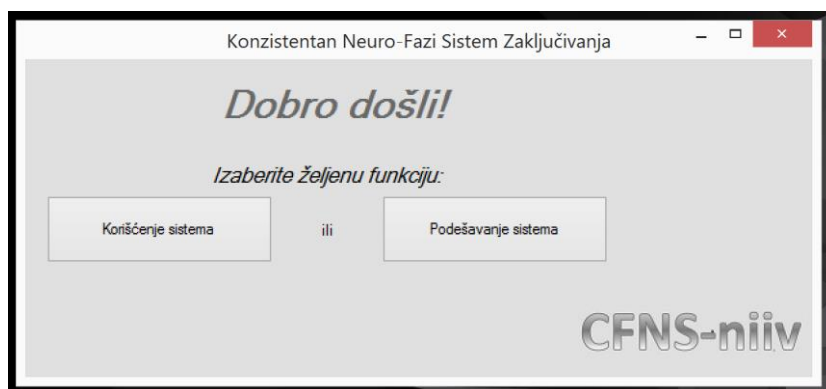
.

8. ПРИЛОГ: ПРИКАЗ ПРОГРАМСКОГ РЕШЕЊА

У овом поглављу представљене су функционалности оригиналног софтверског решења *CNFS-niiv* као имплементације предложеног конзистентног неуро-фази система. Такође, како би се помогло експерту при моделовању система, имплементирано софтверско решење нуди графички кориснички интерфејс захваљујући коме није потребно математичко дефинисање функција припадности већ се оне визуелно подешавају. Софтверско решење на основу скупа улазно-излазних података дефинише опсег вредности улазних променљивих, тј. покривеност целокупног простора улаза. Скуп података којима располажемо, као и постојање и број граничних случајева неће утицати на структуру система, тј. број, облик и променљиве правила, али ће имати утицај на параметре система.

Програмско решење реализовано је на *.NET* платформи коришћењем програмског језика *C#*, а развијено је у *Microsoft Visual Studio* алату. Апликација је замишљена да води корисника корак по корак, при чему је обезбеђена провера исправности унетих података, као и испис одговарајућих порука. Све дефиниције памте се у форми XML (eXtensible Markup Language) докумената, будући да је XML данас *de facto* стандард за размену докумената на вебу док се подаци памте у форми *.csv* (*comma-separated values*) докумената који се лако могу приказати у *Excel*-у.

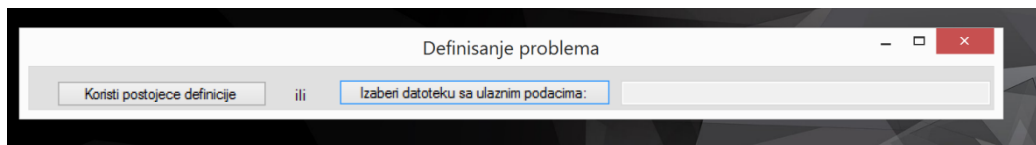
По покретању програма, најпре треба изабрати жељену функцију, тј. одредити се за коришћење постојећег, претходно подешеног система (како би се добио излаз за нови скуп улаза), или за подешавање новог (или постојећег) система.



Слика 1. Почетни прозор

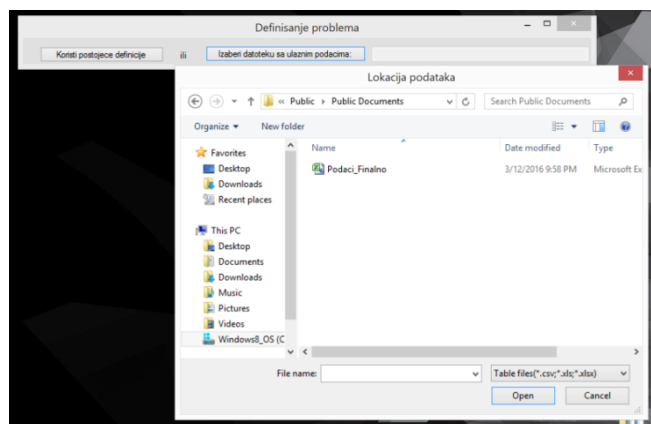
Подешавање система

Уколико се одабере опција за подешавање система, отвара се нови прозор. Најпре је потребно изабрати да ли се користи претходно креирана дефиниција проблема или се дефинише нов проблем.



Слика 2. Учитавање дефиниција улазних података

Уколико се жели дефинисати нов проблем, потребно је изабрати опцију „Изабери датотеку са улазним подацима“ – чиме се отвара прозор за избор датотеке у којој су дати улазни подаци.



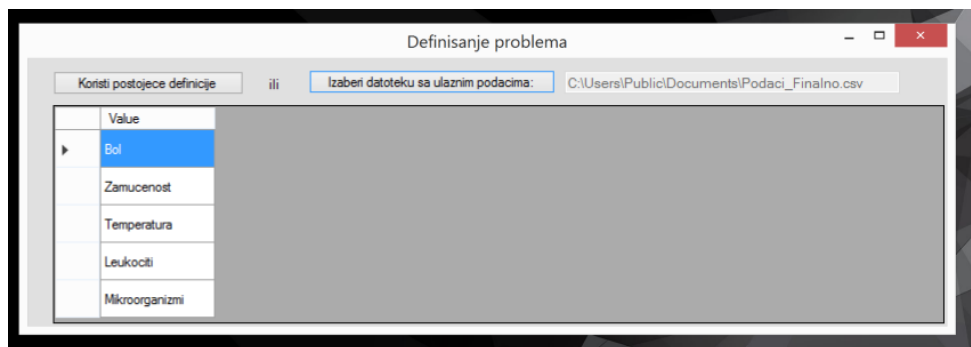
Слика 3. Избор локације дефиниција улазних података

Из улазне датотеке, приказане на следећој слици:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Pacijent	Bol	Zamucenost	Temperatura	Leukociti	Mikroorganizmi	Bolest
2		1	4	2	38.8	135	1000
3		2	8	2	38.6	145	100000
4		3	6	3	38.2	168	300000
5		4	5	0	0	24	600000
6		5	2	3	38.9	193	100000

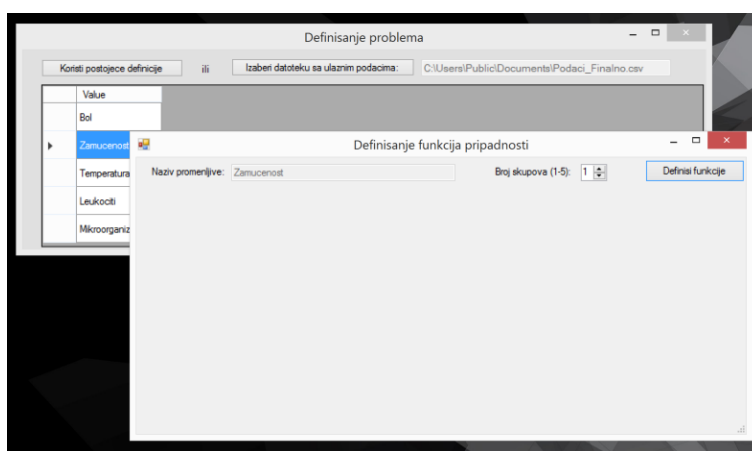
Слика 4. Структура датотеке са улазним подацима

извлаче се информације о улазним променљивим, при чему се претпоставља да се прва колона односи на идентификатор одређеног реда, а да се у последњој колони налазе стварне излазне вредности, док се све остале колоне односе на улазне променљиве.



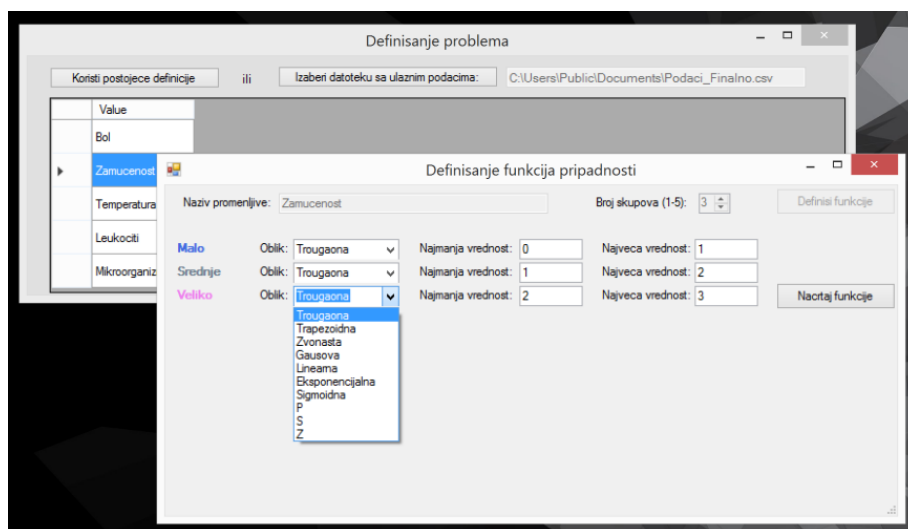
Слика 5. Приказ идентификованих улазних променљивих

Двоструким кликом на одређену променљиву отвара се прозор за дефинисање почетних функција припадности за дату променљиву.



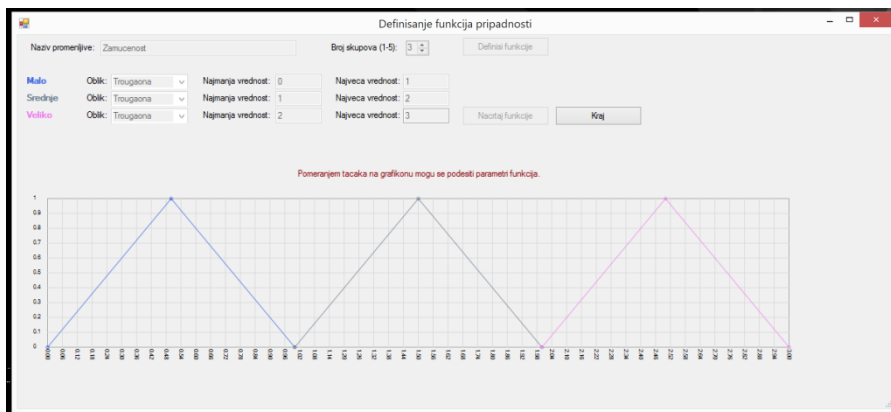
Слика 6. Избор броја фази скупова за изабрану променљиву

Корисник најпре бира колико скупова (лингвистичких променљивих) жели да дефинише за сваки од улаза система, а затим за сваки од скупова дефинише облик, као и најмању и највећу могућу вредност датог скупа.



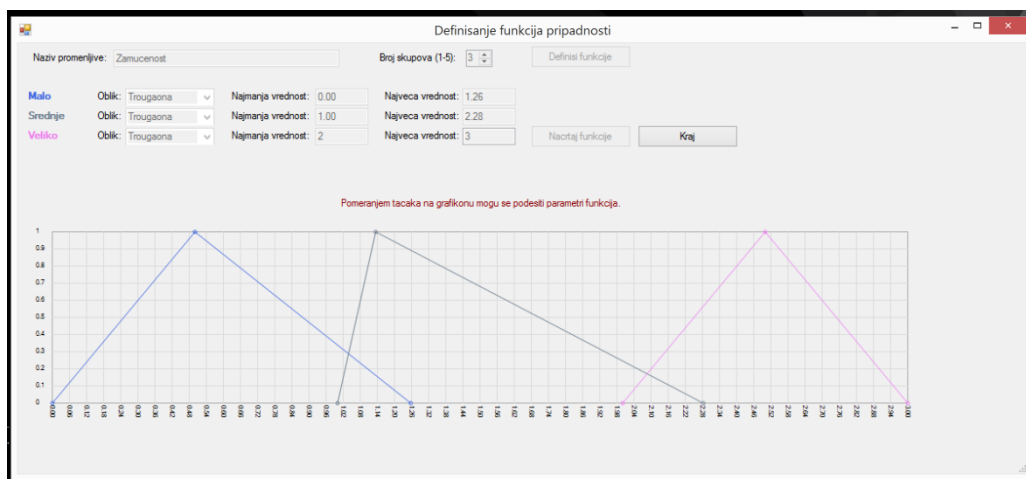
Слика 7. Дефинисање функција припадности за сваки од скупова

Кликом на дугме „Нацртај функције“ добија се графички приказ дефинисаних функција припадности.



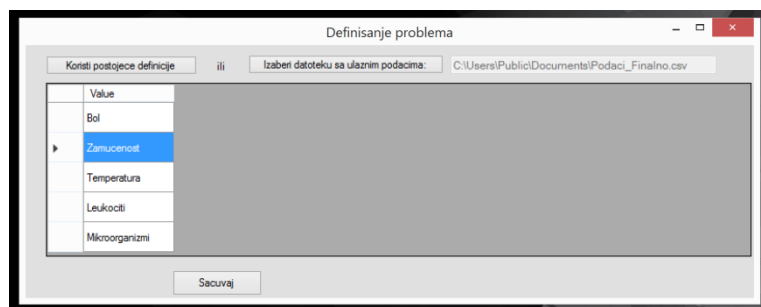
Слика 8. Графички приказ дефинисаних функција припадности

Померањем тачака на графикону могуће је визуелно подешавати параметре дефинисаних функција.



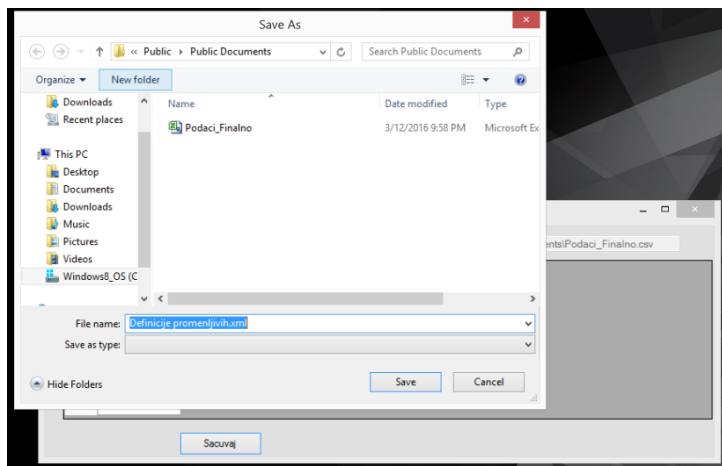
Слика 9. Подешавање дефинисаних функција припадности

Када је корисник задовољан изгледом дефинисаних функција припадности, он то потврђује кликом на дугме „Крај“, чиме се враћа на почетни прозор.



Слика 10. Подешавање дефинисаних функција припадности

Након дефинисања почетних функција припадности за све улазне променљиве система, потребно их је сачувати кликом на дугме „Сачувај“.



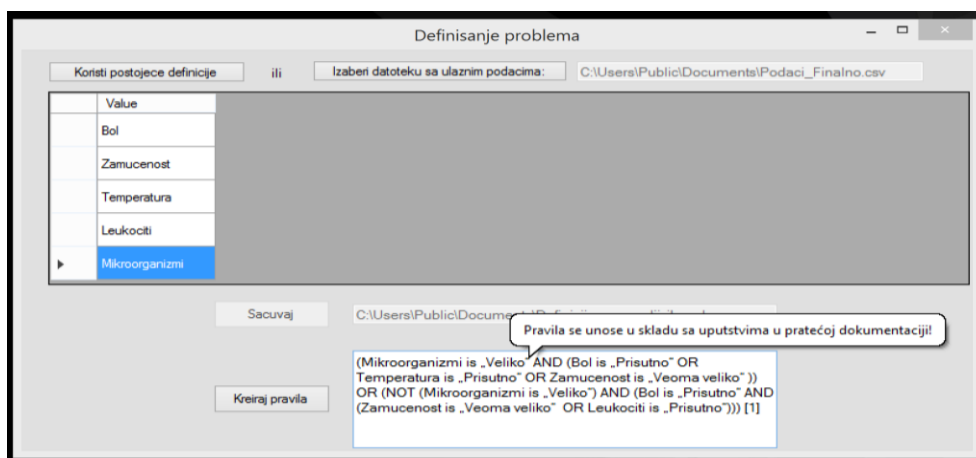
Слика 11. Чување дефиниција улазних променљивих

Почетне дефиниције се чувају као XML документ.



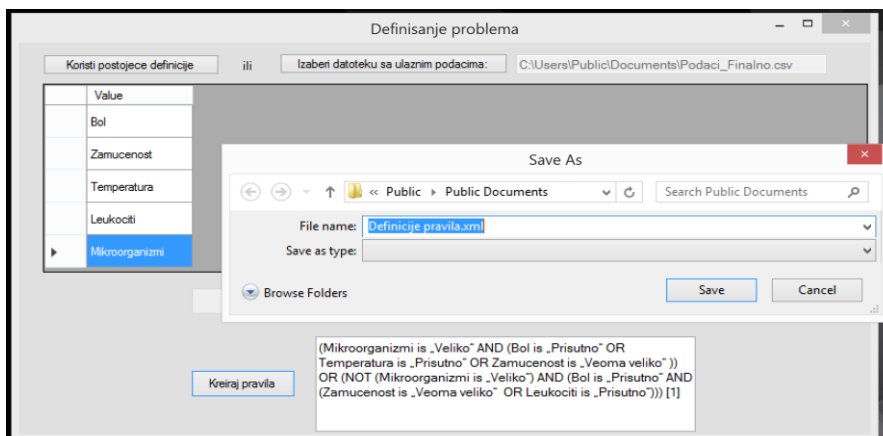
Слика 12. Сачуване почетне дефиниције улазних променљивих

Следећи корак је дефинисање правила:



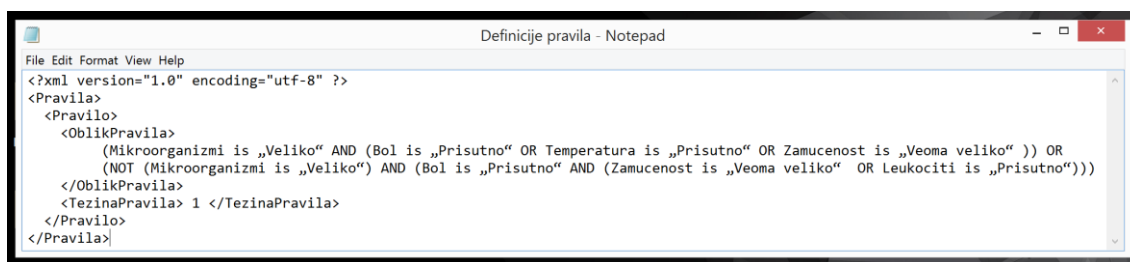
Слика 13. Дефинисање правила

Правила се након креирања памте кликом на дугме „Креирај правила“.



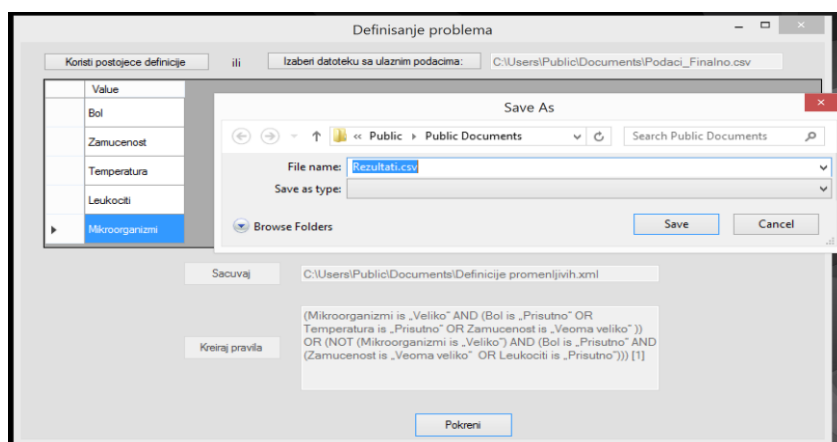
Слика 14. Чување дефинисаних правила

Дефинисана правила такође се памте у форми XML документа како би се лако омогућило њихово поновно коришћење.



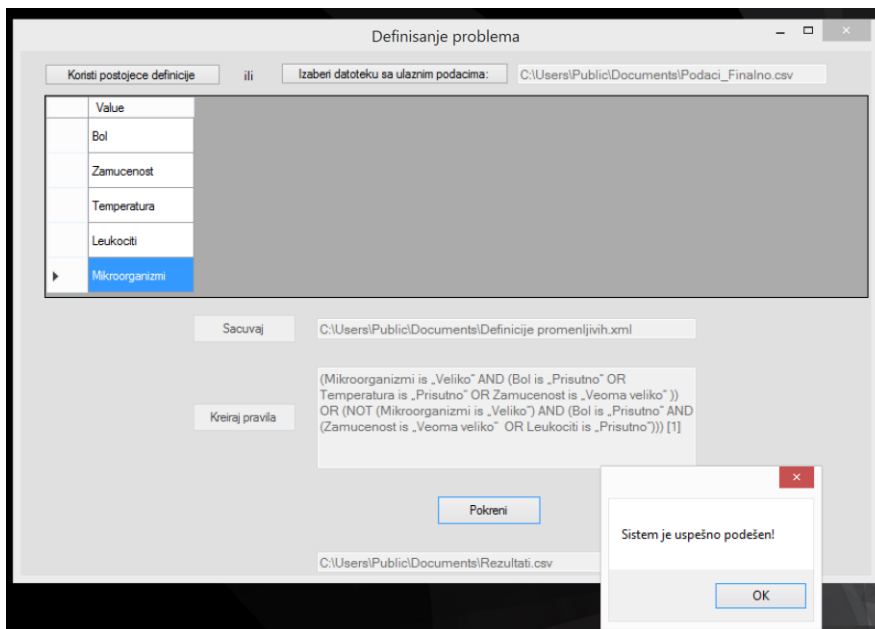
Слика 15. Сачуване дефиниције правила

Након дефинисања проблема, последњи корак је покретање алгорита за подешавање параметара. Кликом на дугме „Покрени“, најпре се отвара прозор за избор локације на којој ће се чувати коначни излази (тј. резултати предвиђања), који ће се евалуирати тек након што се подесе сви параметри система.



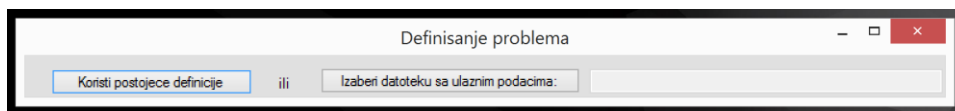
Слика 16. Избор локације на којој ће се чувати резултати предвиђања

По завршетку процеса подешавање параметара ажурираће се XML документ у коме се налазе дефиниције функција припадности за све улазне променљиве, и то тако што ће се почетне вредности сваког параметра заменити оптималним вредностима.



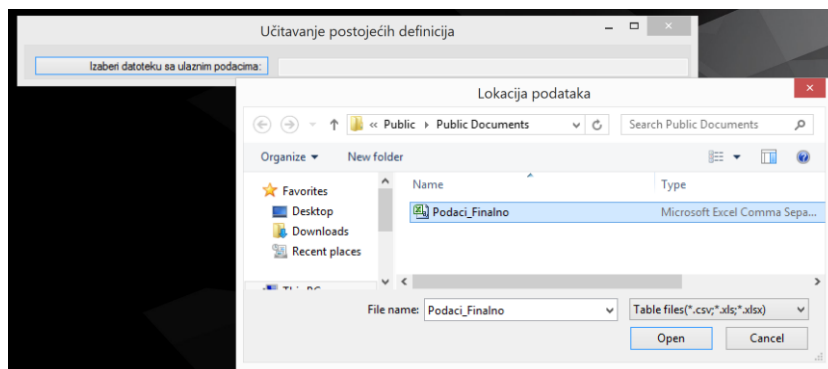
Слика 17. Обавештење о успешном подешавању система

Уколико је корисник на почетку подешавања система изабрао да жели да користи постојеће дефиниције:



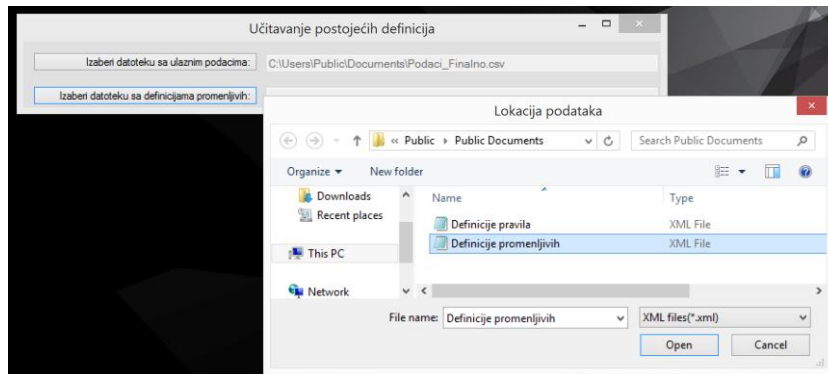
Слика 18. Коришћење постојећих дефиниција

потребно је да најпре изабере датотеку у којој се налазе подаци.



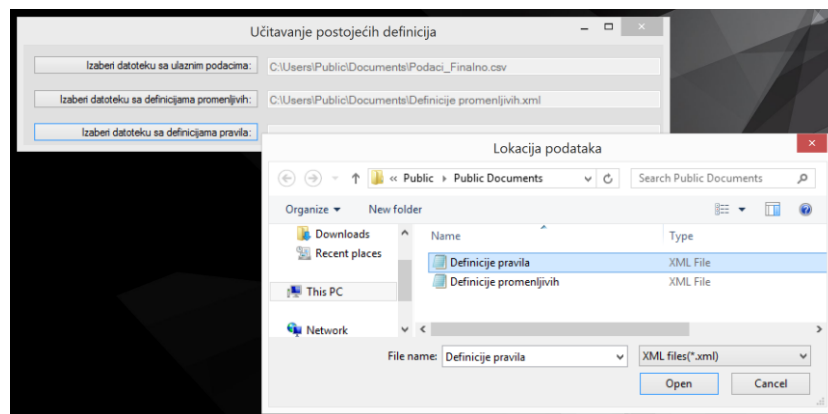
Слика 19. Избор датотеке са улазним подацима

Затим је потребно да одабере датотеку у којој су сачуване дефиниције улазних променљивих система



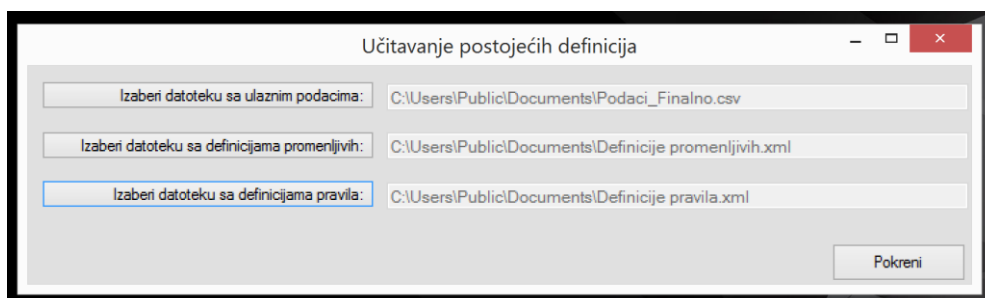
Слика 20. Избор датотеке са дефиницијама улазних променљивих

И на крају је потребно да изабере датотеку у којој су сачуване дефиниције правила.



Слика 21. Избор датотеке са дефиницијама правила

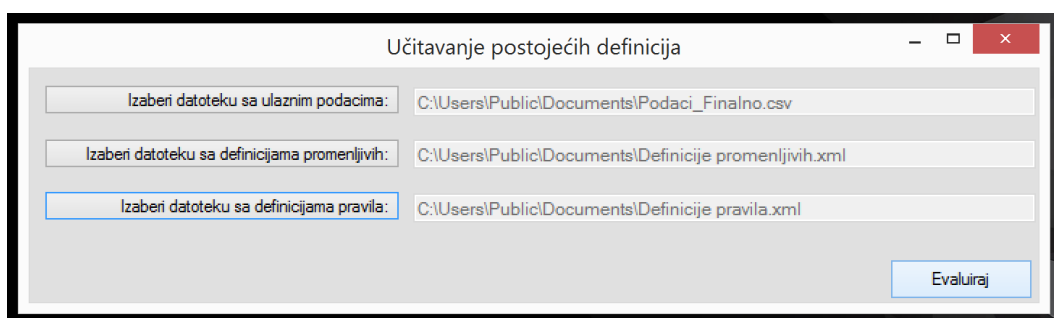
Након што обезбеди све неопходне дефиниције кликом на дугме „Покрени“ покреће се исти поступак подешавања параметара система као и у претходном случају када је корисник дефинисао нови проблем.



Слика 22. Покретање подешавања постојећег система

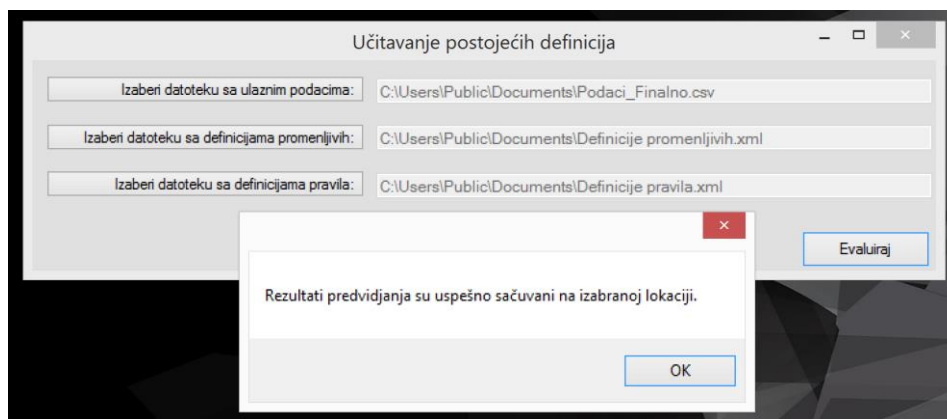
Коришћење система

Уколико се, на почетку рада, у почетном прозору одабере опција за коришћење система, отвара се прозор, за учитавање свих неопходних информација: локација датотеке у којој се налазе подаци, локација датотеке у којој су сачуване дефиниције улазних променљивих (са подешеним вредностима свих параметара), као и локација датотеке у којој су сачуване дефиниције правила. Поступак је исти као и поступак приказан на претходним сликама (слике 19-21), али се завршава кликом на дугме „Евалуирај“.



Слика 23. Покретање процеса евалуације

На овај начин покреће се процедура евалуације дефинисних правила за жељени скуп улазних података.



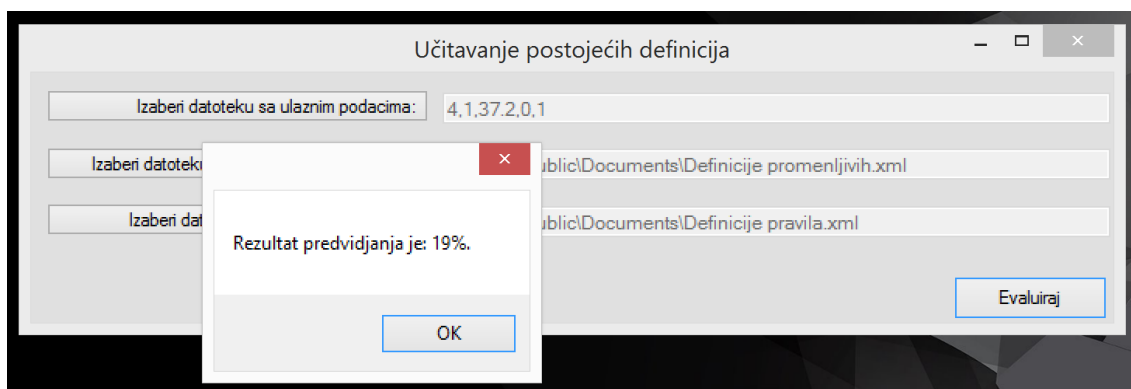
Слика 24. Обавештење о успешној евалуацији

Добијени коначни излази се чувају на изабраној локацији у форми *.csv* (*comma-separated values*) докумената који се лако могу приказати у *Excel*-у.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Pacijent	Bol	Zamucenost	Temperatura	Leukociti	Mikroorganizmi	Prognozirana vrednost
2	27	5	2	37.5	137	1	58%
3	28	1	1	36	42	600	52%
4	29	1	3	39.1	187	70	5%
5	30	2	0	36	32	8	1%

Слика 25. Приказ датотеке са резултатима

Уколико улазни скуп садржи само једну инстанцу улазних података, корисник уместо локације датотеке може само унети вредности улазних променљивих а резултат ће бити у одговарајућем прозору.



Слика 26. Резултат појединачне евалуације

Утисци задовољних корисника:



9. ЛІТЕРАТУРА

- Abbasi, E., & Abouec, A. (2008). Stock price forecast by using neuro-fuzzy inference system. *Engineering and Technology*, 46, pp. 320-323.
- Abbasi, M.M. & Kashiyarndi, S. (2006). *Clinical Decision Support Systems: A discussion on different methodologies used in Health Care*. Marlaedalen University Sweden. Preuzeto Marta 2016 sa: http://www.idt.mdh.se/kurser/ct3340/ht10/FinalPapers/15-Abbasi_Kashiyarndi.pdf
- Abdullah, A.A., Zakaria, Z. & Mohamad, N.F. (2011). Design and Development of Fuzzy Expert System for Diagnosis of Hypertension. In *Proceedings of the Second International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation – ISMS 2011*, (Kuala Lumpur, Malaysia & Phnom Penh, Cambodia), pp. 113-117.
- Abra Abraham, A., Nath, B., & Mahanti, P. K. (2001). Hybrid intelligent systems for stock market analysis. In *Computational Science-ICCS 2001*, pp. 337-345.
- Abraham, A. (2005). Adaptation of fuzzy inference system using neural learning. In *Fuzzy Systems Engineering* (pp. 53-83). Springer Berlin Heidelberg
- Adeli, A. & Neshat, M. (2010). A fuzzy expert system for heart disease diagnosis. In *Proc. of International MultiConference of Engineers and Computer Scientists – IMECS 2010*, (Hong Kong) (Vol. 1), pp. 134–139.
- Afolabi, M., & Olatoyosi, O. (2007). Predicting stock prices using a hybrid Kohonen self-organizing map (SOM). In *40th Annual Hawaii international conference on system sciences*.
- Akkoç, S. (2012). An empirical comparison of conventional techniques, neural networks and the three stage hybrid Adaptive Neuro Fuzzy Inference System (ANFIS) model for credit scoring analysis: The case of Turkish credit card data. *European Journal of Operational Research*, 222(1), pp. 168-178.
- Alba, E., & Martí, R. (Eds.). (2006). *Metaheuristic procedures for training neural networks* (Series: Operations Research/Computer Science Interfaces, Vol. 35). Springer Science & Business Media.
- Ali Akcayol, M. (2004). Application of adaptive neuro-fuzzy controller for SRM. *Advances in Engineering software*, 35(3), pp. 129-137.
- Alizadeh, M., Rada, R., Balagh, A. K. G., & Esfahani, M. M. S. (2009). Forecasting Exchange Rates: A Neuro-Fuzzy Approach. In *IFSA/EUSFLAT Conf.*, pp. 1745-1750.
- Allahverdi, N., Torun, S. & Saritas, I. (2007). Design of a fuzzy expert system for determination of coronary heart disease risk. In *Proc. of the 2007 International*

- Conference on Computer Systems and Technologies – CompSysTech'07*, (Rousse, Bulgaria), pp IIIA. (14-1)-(14-8).
- Altug, S., Chen, M. Y., & Trussell, H. J. (1999). Fuzzy inference systems implemented on neural architectures for motor fault detection and diagnosis. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 46(6), pp. 1069-1079.
- Anand, S.K., Kalpana, R. & Vijayalakshmi, S. (2013). Design and implementation of a fuzzy expert system for detecting and estimating the level of asthma and chronic obstructive pulmonary disease. *Middle-East Journal of Scientific Research*, 14(11), pp. 1435-1444.
- Anooj, P.K. (2012). Clinical decision support system: Risk level prediction of heart disease using weighted fuzzy rules. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*, 24(1), pp. 27-40.
- Ansari, T., Kumar, M., Shukla, A., Dhar, J., & Tiwari, R. (2010). Sequential combination of statistics, econometrics and Adaptive Neural-Fuzzy Interface for stock market prediction. *Expert Systems with Applications*, 37(7), pp. 5116-5125.
- Atsalakis, G. S., & Valavanis, K. P. (2009). Forecasting stock market short-term trends using a neuro-fuzzy based methodology. *Expert Systems with Applications*, 36(7), pp. 10696-10707.
- Atsalakis, G. S., Dimitrakakis, E. M., & Zopounidis, C. D. (2011). Elliott Wave Theory and neuro-fuzzy systems, in stock market prediction: The WASP system. *Expert Systems with Applications*, 38(8), pp. 9196-9206.
- Bagheri, A., Mohammadi Peyhani, H., & Akbari, M. (2014). Financial forecasting using ANFIS networks with Quantum-behaved Particle Swarm Optimization. *Expert Systems with Applications*, 41(14), pp. 6235-6250.
- Baig, M. M., Gholamhosseini, H., & Harrison, M. J. (2012). Fuzzy logic based smart anaesthesia monitoring system in the operation theatre. *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*, 11(1), pp. 21-32.
- Balanică, V., Dumitrache, I., Caramihai, M., Rae, W. & Herbst, C. (2011). Evaluation of breast cancer risk by using fuzzy logic. *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin, Series C*, 73(1), pp. 53-64.
- Baldwin, J. F., & Pilsworth, B. W. (1980). Axiomatic approach to implication for approximate reasoning with fuzzy logic. *Fuzzy sets and systems*, 3(2), pp.193-219
- Bardossy, A., Duckstein, L., & Bogardi, I. (1995). Fuzzy rule-based classification of atmospheric circulation patterns. *International Journal of Climatology*, 15(10), pp. 1087-1097.

- Berenji, H. R. (1992). A reinforcement learning—based architecture for fuzzy logic control. *International Journal of Approximate Reasoning*, 6(2), pp. 267-292.
- Berenji, H. R., & Khedkar, P. (1992). Learning and tuning fuzzy logic controllers through reinforcements. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 3(5), pp. 724-740.
- Bojadziev, G., & Bojadziev, M. (1997). Fuzzy logic for business, finance, and management (Vol. 12). *World Scientific*.
- Bosque, G., del Campo, I., & Echanobe, J. (2014). Fuzzy systems, neural networks and neuro-fuzzy systems: A vision on their hardware implementation and platforms over two decades. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 32, pp. 283-331.
- Boyacioglu, M. A., & Avci, D. (2010). An adaptive network-based fuzzy inference system (ANFIS) for the prediction of stock market return: the case of the Istanbul stock exchange. *Expert Systems with Applications*, 37(12), pp. 7908-7912.
- Buckley, J. J., & Hayashi, Y. (1993). Hybrid neural nets can be fuzzy controllers and fuzzy expert systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 60(2), pp.135-142
- Buckley, J. J. & Hayashi, Y. (1994). Fuzzy neural networks: A survey. *Fuzzy sets and systems*, 66(1), pp. 1-13.
- Chandra, V. (2014). Fuzzy Expert System for Migraine Analysis and Diagnosis. *International Journal of Science and Research*, 3(6), pp.956-959.
- Chang, J. R., Wei, L. Y., & Cheng, C. H. (2011). A hybrid ANFIS model based on AR and volatility for TAIEX forecasting. *Applied Soft Computing*, 11(1), pp. 1388-1395.
- Chang, P.-C., & Liu, C. H. (2008). A TSK type fuzzy rule based system for stock price prediction. *Expert Systems with Applications*, 34(1), pp. 135–144.
- Chen, H. J., Huang, S. Y., & Lin, C. S. (2009). Alternative diagnosis of corporate bankruptcy: A neuro fuzzy approach. *Expert Systems with Applications*, 36(4), 7710-7720.
- Chen, M. S., & Wang, S. W. (1999). Fuzzy clustering analysis for optimizing fuzzy membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 103(2), pp. 239-254
- Chen, M. Y. (2013). A hybrid ANFIS model for business failure prediction utilizing particle swarm optimization and subtractive clustering. *Information Sciences*, 220, pp. 180-195.
- Chiu, S. L. (1994). Fuzzy model identification based on cluster estimation. *Journal of intelligent and Fuzzy systems*, 2(3), pp. 267-278

- Cordón, O. (2001). *Genetic fuzzy systems: evolutionary tuning and learning of fuzzy knowledge bases*, Vol. 19, World Scientific.
- Dhar, V. & Stein, R. M. (1997). *Seven Methods for Transforming Corporate Data into Business Intelligence*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Djam, X.Y. & Kimbi, Y.H. (2011). Fuzzy expert system for the management of hypertension. *The Pacific Journal of Science and Technology*, 12(1), pp. 390-402.
- Djam, X.Y., Wajiga, G.M., Kimbi, Y.H. & Blamah, N.V. (2011). A fuzzy expert system for the management of Malaria. *International Journal of Pure and Applied Sciences and Technology*, 5(2), pp. 84-108.
- Dragović, I., Turajlić, N., Pilčević, D., Petrović, B., & Radojević, D. (2015). A Boolean Consistent Fuzzy Inference System for Diagnosing Diseases and Its Application for Determining Peritonitis Likelihood. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2015.
- Dubois, D. J. & Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: theory and applications* (Vol. 144). New York, NY: Academic press.
- Ebrahimpour, R., Nikoo, H., Masoudnia, S., Yousefi, M. R., & Ghaemi, M. S. (2011). Mixture of MLP-experts for trend forecasting of time series: A case study of the Tehran stock exchange. *International Journal of Forecasting*, 27(3), pp. 804-816.
- Efendigil, T., & Önüt, S. (2012). An integration methodology based on fuzzy inference systems and neural approaches for multi-stage supply-chains. *Computers & Industrial Engineering*, 62(2), pp. 554-569.
- Efendigil, T., Önüt, S., & Kahraman, C. (2009). A decision support system for demand forecasting with artificial neural networks and neuro-fuzzy models: A comparative analysis. *Expert Systems with Applications*, 36(3), pp. 6697-6707.
- Fabozzi, F. J., & Peterson, P. P. (2003). *Financial management and analysis 2nd Edition*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- Fasanghari, M., & Montazer, G. A. (2010). Design and implementation of fuzzy expert system for Tehran Stock Exchange portfolio recommendation. *Expert Systems with Applications*, 37(9), pp. 6138-6147.
- Figueiredo, M., & Gomide, F. (1999). Design of fuzzy systems using neurofuzzy networks. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 10(4), pp. 815-827.
- Funahashi, K. I. (1989). On the approximate realization of continuous mappings by neural networks. *Neural networks*, 2(3), pp. 183-192
- Gaines, B. R. (1976). Foundations of fuzzy reasoning. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8(6), pp. 623-668

- Garg, A.X., Adhikari, N.K., McDonald, H., Rosas-Arellano, M.P., Devereaux, P.J., Beyene, J., Sam, J. & Haynes, R.B. (2005). Effects of computerized clinical decision support systems on practitioner performance and patient outcomes: a systematic review. *Journal of the American Medical Association*, 293(10), pp. 1223-1238.
- Giarratano, J. C. & Riley, G. (1998). *Expert systems*. Boston, MA: PWS Publishing Co.
- Giovanis, E. (2012). Study of discrete choice models and adaptive neuro-fuzzy inference system in the prediction of economic crisis periods in USA. *Economic Analysis and Policy*, 42(1), 79.
- Goodwin, G. C., & Sin, K. S. (2014). *Adaptive filtering prediction and control*. Mineola, NY: Dover Publications, Inc.
- Gupta, M. M., & Gorzalczany, M. B. (1992). Fuzzy neuro-computational technique and its application to modelling and control. In *Fuzzy Systems, IEEE International Conference on*, pp. 1271-1274
- Hagan, M. T., Demuth, H. B., Beale, M. H., & De Jesús, O. (1996). *Neural network design* (Vol. 20). Boston: PWS publishing company.
- Hamam, A., & Georganas, N. D. (2008). A comparison of Mamdani and Sugeno fuzzy inference systems for evaluating the quality of experience of Hapto-Audio-Visual applications. In *Haptic Audio visual Environments and Games, 2008. HAVE 2008. IEEE International Workshop on*, pp. 87-92.
- Hayashi, Y., & Buckley, J. J. (1994). Approximations between fuzzy expert systems and neural networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, 10(1), pp. 63-73.
- Hayashi, Y., Buckley, J. J., & Czogala, E. (1992). Systems engineering applications of fuzzy neural networks. In *Neural Networks, IJCNN., International Joint Conference on (Vol. 2)*, pp. 413-418
- Hayashi, Y., Buckley, J. J., & Czogala, E. (1993). Fuzzy neural network with fuzzy signals and weights. *International Journal of Intelligent Systems*, 8(4), pp. 527-537.
- Haykin, S. (1999). *Neural Networks: A Comprehensive Foundation 2nd Edition*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Pearson Education.
- Innocent, P.R. & John, R.I. (2004). Computer aided fuzzy medical diagnosis. *Information Sciences*, 162(2), pp. 81-104.
- Ishibuchi, H., Fujioka, R., & Tanaka, H. (1993). Neural networks that learn from fuzzy if-then rules. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 1(2), pp. 85-97

- Ishibuchi, H., Tanaka, H., & Okada, H. (1993). Fuzzy neural networks with fuzzy weights and fuzzy biases. *In Neural Networks, IEEE International Conference on*, pp. 1650-1655.
- Jacquin, A., & Shamseldin, A. (2009). Review of the application of fuzzy inference systems in river flow forecasting. *Journal of Hydroinformatics*, 11(3-4), pp. 202-210
- Jafelice, R. M., de Barros, L. C., Bassanezi, R. C., & Gomide, F. (2004). Fuzzy modeling in symptomatic HIV virus infected population. *Bulletin of Mathematical Biology*, 66(6), pp. 1597-1620.
- Jang, J. R. & Sun, C. T. (1995), Neuro-fuzzy modeling and control, *Proceedings of the IEEE*, vol. 83, pp. 378–406
- Jang, J. S. (1993). ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 23(3), pp.665-685.
- Jang, J. S. R., Sun, C. T., & Mizutani, E. (1997). *Neuro-fuzzy and soft computing: a computational approach to learning and machine intelligence*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Juang, C. F., & Lin, C. T. (1998). An online self-constructing neural fuzzy inference network and its applications. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 6(1), pp. 12-32.
- Kablan, A. (2009). Adaptive neuro-fuzzy inference system for financial trading using intraday seasonality observation model. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 58(2009), pp. 479-488.
- Kacprzyk, J., & Pedrycz, W. (Eds.). (2015). *Springer Handbook of Computational Intelligence*. Heidelberg: Springer
- Kadhim, M.A., Alam, M.A. & Kaur, H. (2011). Design and implementation of fuzzy expert system for back pain diagnosis. *International Journal of Innovative Technology & Creative Engineering*, 1(9), pp. 16-22.
- Kannan, D., Jafarian, A., Khamene, H. A., & Olfat, L. (2013). Competitive performance improvement by operational budget allocation using ANFIS and fuzzy quality function deployment: a case study. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 68(1-4), pp. 849-862.
- Kar, S., Das, S., & Ghosh, P. K. (2014). Applications of neuro fuzzy systems: A brief review and future outline. *Applied Soft Computing*, 15, pp. 243-259.
- Kasabov, N. K., & Song, Q. (2002). DENFIS: dynamic evolving neural-fuzzy inference system and its application for time-series prediction. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 10(2), 144-154

- Kaufmann, A. (1975). *Introduction to the theory of fuzzy subsets, Volume 1*. New York, NY: Academic Press.
- Kaur, A., & Kaur, A. (2012). Comparison of mamdani-type and sugeno-type fuzzy inference systems for air conditioning system. *International Journal of soft computing and engineering*, 2(2), pp. 2231-2307
- Keller, J. M., & Tahani, H. (1992). Implementation of conjunctive and disjunctive fuzzy logic rules with neural networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, 6(2), pp. 221-240.
- Kickert, W.M & Mamdani, E.H. (1978). Analysis of a fuzzy logic controller, *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), pp.29-44.
- Koprinkova-Hristova, P. (2010). Backpropagation through time training of a neuro-fuzzy controller. *International Journal of Neural Systems*, 20(05), pp. 421-428
- Kosko, B. (1991). Fuzzy associative memories. In NASA, Lyndon B. Johnson Space Center, *Proceedings of the 2nd Joint Technology Workshop on Neural Networks and Fuzzy Logic, Volume 1*, pp. 3-58
- Kosko, B. (1992). *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice hall.
- Koutsojannis, C. & Hatzilygeroudis, I. (2004). FESMI: A Fuzzy Expert System for Diagnosis and Treatment of Male Impotence. *Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems, LNCS 3214*, pp. 1106-1113.
- Koutsojannis, C., Tsimara, M., & Nabil, E. (2008). HIROFILOS: a medical expert system for prostate diseases. *In Proceedings of the CIMMACS*, 8, pp. 254-260.
- Kumar, A. S. (2013). Diagnosis of heart disease using Advanced Fuzzy resolution Mechanism. *International Journal of Science and Applied Information Technology (IJSAIT)*, 2(2), pp. 22-30.
- Larsen, P. M. (1980). Industrial applications of fuzzy logic control. *International Journal of Man-Machine Studies*, 12(1), pp. 3-10
- Lavanya, K., Durai, M.S. & Iyengar, N.C.S.N. (2011). Fuzzy rule based inference system for detection and diagnosis of lung cancer. *International Journal of Latest Trends in Computing*, 2(1), pp. 165-171.
- Lee, C. C. (1990). Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller. II. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, 20(2), pp. 419-435
- Lee, V., & Tshung Wong, H. (2007). A multivariate neuro-fuzzy system for foreign currency risk management decision making. *Neurocomputing*, 70(4), pp. 942-951.
- Li, H. (2000). Fuzzy logic systems are equivalent to feedforward neural networks. *Science in China Series E: Technological Sciences*, 43(1), 42-

- Lin, C. T., & Lee, C. S. G. (1991). Neural-network-based fuzzy logic control and decision system. *Computers, IEEE Transactions on*, 40(12), pp. 1320-1336.
- Lin, C. T., & Lee, C. S. G. (1996). *Neural Fuzzy Systems*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Liu, P., Leng, W., & Fang, W. (2013). Training anfis model with an improved quantum-behaved particle swarm optimization algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013.
- Liu, X. (2012). Classification accuracy and cut point selection. *Statistics in medicine*, 31(23), pp.2676–2686.
- Looney, C. G., & Dascalu, S. (2007). A Simple Fuzzy Neural Network. In *CAINE*, pp. 12-16.
- Lowe, A. & Harrison, M. J. (1999). Computer-enhanced diagnosis of malignant hyperpyrexia. *Anaesthesia and Intensive Care*, 27(1), pp. 41-44
- Łukasiewicz, J. (1970). *Selected works (Studies in logic and the foundations of mathematics)*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- Malhotra, R., & Malhotra, D. K. (2002). Differentiating between good credits and bad credits using neuro-fuzzy systems. *European journal of operational research*, 136(1), pp. 190-211.
- Mamdani, E. H. (1974). Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. In *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, Vol. 121, No. 12, pp. 1585-1588
- Mamdani, E. H. (1976). Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers, *International Journal of Man-Machine Studies*, 8(6), pp. 669-678.
- Mamdani, E. H., & Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1), pp. 1-13.
- Medsker, L. R., & Zadeh, L. A. (1995). *Hybrid intelligent systems*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Melin, P., Soto, J., Castillo, O., & Soria, J. (2012). A new approach for time series prediction using ensembles of ANFIS models. *Expert Systems with Applications*, 39(3), pp. 3494-3506.
- Mendel, J. M. (1995). Fuzzy logic systems for engineering: a tutorial. *Proceedings of the IEEE*, 83(3), pp.345-377.
- Menger, K. (1942). Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 28(12), pp. 535-537.

- Milošević, P. (2012). *Softverska podrška za primenu interpolativne Bulove algebre*. Master rad, Fakultet organizacionih nauka, Univerzitet u Beogradu.
- Mishra, N., & Jha, P. (2014). A review on the applications of fuzzy expert system for disease diagnosis. *International Journal of Advanced Research in Engineering and Applied Sciences*, 3(12), pp. 28-43.
- Mitra, S., & Hayashi, Y. (2000). Neuro-fuzzy rule generation: survey in soft computing framework. *Neural Networks, IEEE Transactions on*, 11(3), pp. 748-768.
- Mizumoto, M. (1981). Note on the arithmetic rule by Zadeh for fuzzy conditional inference. *Cybernetics and System*, 12(3), pp. 247-306.
- Nauck, D. (1997). Neuro-fuzzy systems: review and prospects. *In Proceedings of Fifth European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing (EUFIT'97)*, pp. 1044-1053.
- Nauck, D., & Kruse, R. (1992). A neural fuzzy controller learning by fuzzy error propagation. *In Proc. Workshop of North American Fuzzy Information Processing Society NAFIPS92*, pp. 388-397
- Nauck, D., & Kruse, R. (1993). A fuzzy neural network learning fuzzy control rules and membership functions by fuzzy error backpropagation. *In Neural Networks, IEEE International Conference on*, pp. 1022-1027
- Nauck, D., & Kruse, R. (1994a). NEFCON-I: An X-Window based simulator for neural fuzzy controllers. *In Neural Networks, 1994. IEEE World Congress on Computational Intelligence., 1994 IEEE International Conference on, Vol. 3*, pp. 1638-1643.
- Nauck, D., & Kruse, R. (1994b). Choosing appropriate neuro-fuzzy models, *In Proc. Second European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies (EUFIT94)*, pp. 552-557
- Nauck, D., & Kruse, R. (1995). NEFCLASS - a neuro-fuzzy approach for the classification of data. *In Proceedings of the 1995 ACM symposium on applied computing*, pp. 461-465.
- Nauck, D., & Kruse, R. (1997). A neuro-fuzzy method to learn fuzzy classification rules from data. *Fuzzy sets and Systems*, 89(3), pp. 277-288.
- Nauck, D., & Kruse, R. (1998). A neuro-fuzzy approach to obtain interpretable fuzzy systems for function approximation. *In Fuzzy Systems Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence, Vol. 2*, pp. 1106-1111
- Nauck, D., & Kruse, R. (1999). Neuro-fuzzy systems for function approximation. *Fuzzy Sets and Systems*, 101(2), pp. 261-271.

- Nauck, D., Klawonn, F., & Kruse, R. (1993). Combining neural networks and fuzzy controllers. In *Proceedings of the 8th Austrian Artificial Intelligence Conference - FLAI '93*, pp. 35-46.
- Nauck, D., Kruse, R., & Stellmach, R. (1995). New learning algorithms for the neuro-fuzzy environment NEFCON-I. In *Proceedings of Neuro-Fuzzy-Systeme'95*.
- Nawgaje, D. D., & Kanphade, R. D. (2011). Implementation of fuzzy inference system for white blood cell cancer detection using DSP TMS320C6711. *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*, pp.123-127.
- Nayak, P. C., Sudheer, K. P., Rangan, D. M., & Ramasastri, K. S. (2004). A neuro-fuzzy computing technique for modeling hydrological time series. *Journal of Hydrology*, 291(1), pp. 52-66.
- Neshat, M., Yaghobi, M., Naghibi, M.B. & Esmaelzadeh, A. (2008). Fuzzy expert system design for diagnosis of liver disorders. In *Proc. of the International Symposium on Knowledge Acquisition and Modeling – KAM'08* (Wuhan, China), pp. 252-256.
- Nomura, H., Hayashi, I., & Wakami, N. (1992). A learning method of fuzzy inference rules by descent method. In *Fuzzy Systems, 1992., IEEE International Conference on* (pp. 203-210). IEEE.
- Oad, K.K., DeZhi, X. & Butt, P.K. (2014). A Fuzzy Rule Based Approach to Predict Risk Level of Heart Disease. *Global Journal of Computer Science and Technology*, 14(3), pp. 17-22.
- Paiva, R. P., & Dourado, A. (2004). Interpretability and learning in neuro-fuzzy systems. *Fuzzy sets and systems*, 147(1), pp. 17-38.
- Patel, A., Choubey, J., Gupta, S.K., Verma, M.K., Prasad, R. & Rahman, Q. (2012). Decision support system for the diagnosis of asthma severity using fuzzy logic. In *Proc. of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists – IMECS 2010*, (Hong Kong) (Vol. 1).
- Pedrycz, W. (1993). *Fuzzy control and fuzzy systems 2nd Edition*. Research Studies Press Ltd.
- Pedrycz, W., & Card, H. C. (1992). Linguistic interpretation of self-organizing maps. In *Fuzzy Systems, 1992., IEEE International Conference on* (pp. 371-378). IEEE
- Phuong, N. H. & Kreinovich, V. (2001). Fuzzy logic and its applications in medicine. *International journal of medical informatics*, 62(2), pp. 165-173.
- Piegat, A. (2001). *Fuzzy modeling and control*. Heidelberg: Physica-Verlag.
- Pokropińska, A., & Scherer, R. (2008). Financial prediction with neuro-fuzzy systems. In *Artificial Intelligence and Soft Computing–ICAISC 2008*, pp. 1120-1126.

- Prasath, N., Lakshmi, N., Nathiya, M., Bharathan, N. & Neetha, P. (2013). A Survey on the Applications of Fuzzy Logic in Medical Diagnosis. *Int. Journal of Scientific & Engineering Research*, 4(4), pp. 1199-1203.
- Proakis, J. G. (2001). *Digital Communications 4th Edition*. New York: McGraw-Hill.
- Quek, C. (2005). Predicting The Impact Of Anticipator Action On U.S. Stock Market— An Event Study Using ANFIS (A Neural Fuzzy Model). *Computational Intelligence*, No.23., pp. 117–141.
- Quinlan, J. R. (1986). Induction of decision trees. *Machine learning*, 1(1), pp. 81-106.
- Quinlan, J. R. (1987). Simplifying decision trees. *International journal of man-machine studies*, 27(3), pp. 221-234.
- Radojević, D. (2000). [0, 1]-valued logic: A natural generalization of Boolean logic. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 10(2), pp. 185-216.
- Radojević, D. (2005). Interpolative relations and interpolative preference structures. *Yugoslav Journal of Operations Research*, 15(2), pp. 171-189
- Radojević, D. (2006). Boolean Frame is Adequate for Treatment of Gradation or Fuzziness Equally as for Two-Valued or Classical Case. *In Proceedings of the 4th Serbian-Hungarian Joint Symposium on Intelligent Systems – SISY 2006*, pp. 43-57.
- Radojević, D. (2008a). Fuzzy set theory in Boolean frame. *International Journal of Computers, Communications & Control (IJCCC)*, 3(5), pp. 121-131.
- Radojević, D. (2008b). Interpolative Realization of Boolean Algebra as a Consistent Frame for Gradation and/or Fuzziness. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 218, pp. 295-317.
- Radojević, D. (2010). Logical Aggregation – Why and How. *In Proc. of FLINS'10, (Chengdu, China, 2010)*, pp. 511-517.
- Rojas, R. (1996). The backpropagation algorithm (pp. 149-182) chapter in *Neural networks*. Heidelberg: Springer.
- Rong, H. J., Sundararajan, N., Huang, G. B., & Saratchandran, P. (2006). Sequential adaptive fuzzy inference system (SAFIS) for nonlinear system identification and prediction. *Fuzzy sets and systems*, 157(9), 1260-1275
- Ross, T. J. (2010). *Fuzzy logic with engineering applications 3rd Edition*. John Wiley & Sons.
- Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J. (1985). *Learning internal representations by error propagation* (No. ICS-8506). CALIFORNIA UNIV SAN DIEGO LA JOLLA INST FOR COGNITIVE SCIENCE.

- Sanz, F., Ramírez, J., & Correa, R. (2012). Fuzzy Inference Systems Applied to the Analysis of Vibrations in Electrical Machines. *INTECH Open Access Publisher*.
- Saritas, I., Allahverdi, N. & Sert, I.U. (2003). A fuzzy expert system design for diagnosis of prostate cancer. In *Proc. of the 4th international conference on Computer systems and technologies: e-Learning - CompSysTech'2003*, (Sofia, Bulgaria), pp. 345-351.
- Schott, J., & Kalita, J. (2011). Neuro-fuzzy time-series analysis of large-volume data. *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 18(1), pp. 39-57.
- Setiawan, N.A., Venkatachalam, P.A. & Hani, A.F.M. (2009). Diagnosis of coronary artery disease using artificial intelligence based decision support system. In *Proc. of the International Conference on Man-Machine Systems (ICoMMS)*, pp. 1C3-1 - 1C3-5.
- Sharma, P., Singh, D. B. V., Bandil, M. K., & Mishra, N. (2013). Decision Support System for Malaria and Dengue Disease Diagnosis (DSSMD). *International Journal of Information and Computation Technology*, 3(7), pp. 633-640.
- Shekarian, E., & Gholizadeh, A. (2013). Application of adaptive network based fuzzy inference system method in economic welfare. *Knowledge-Based Systems*, 39, pp.151-158.
- Shoorehdeli, M. A., Teshnehlab, M., Sedigh, A. K., & Khanesar, M. A. (2009). Identification using ANFIS with intelligent hybrid stable learning algorithm approaches and stability analysis of training methods. *Applied Soft Computing*, 9(2), pp. 833-850.
- Steimann, F. & Adlassnig, K.P. (1998). Fuzzy medical diagnosis. In: E.H. Ruspini, P.P. Bonissone & W. Pedrycz (Eds.), *Handbook of fuzzy computation* (pp. G13.1:1-16). IOP Publishing Ltd./Oxford University Press, Bristol, UK.
- Stoeva, S., & Nikov, A. (2000). A fuzzy backpropagation algorithm. *Fuzzy Sets and Systems*, 112(1), pp. 27-39.
- Sugeno, M. (1985). *Industrial applications of fuzzy control*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- Sugeno, M., & Kang, G. T. (1988). Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy sets and systems*, 28(1), pp. 15-33
- Sulzberger, S. M., Tschichold-Gurman, N., & Vestli, S. J. (1993). FUN: Optimization of fuzzy rule based systems using neural networks. In *Neural Networks, 1993., IEEE International Conference on*, pp. 312-316.
- Sun, C. T. (1994). Rule-base structure identification in an adaptive-network-based fuzzy inference system. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 2(1), pp. 64-73.

- Tadić D., Stanojević P., Aleksić M., Mišković V. & Bukvić V. (2006). *Teorija fazi skupova-promene u rešavanju menadžment problema*. Kragujevac: Mašinski fakultet.
- Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, (1), pp. 116-132.
- Tano, S. I., Oyama, T., & Arnould, T. (1996). Deep combination of fuzzy inference and neural network in fuzzy inference software - FINEST. *Fuzzy Sets and Systems*, 82(2), pp. 151-160.
- Thole, U., Zimmermann, H. J., & Zysno, P. (1979). On the suitability of minimum and product operators for the intersection of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and systems*, 2(2), pp. 167-180
- Trinkle, B. S. (2006). Forecasting annual excess stock returns via an adaptive network-based fuzzy inference system. *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, 13(3), pp. 165–177.
- Tsekouras, G., Sarimveis, H., & Bafas, G. (2003). A simple algorithm for training fuzzy systems using input–output data. *Advances in Engineering software*, 34(5), pp. 247-259
- Tsipouras, M.G., Exarchos, T.P., Fotiadis, D., Kotsia, A.P., Vakalis, K.V., Naka, K.K. & Michalis, L.K. (2008). Automated diagnosis of coronary artery disease based on data mining and fuzzy modeling. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 12(4), pp. 447-458.
- Tsukamoto, Y. (1979). An approach to fuzzy reasoning method. *Advances in fuzzy set theory and applications*, pp. 137-149.
- Turajlić N. (2014). *Novi modeli i metode za selekciju i kompoziciju web servisa na osnovu nefunkcionalnih karakteristika*. Doktorska disertacija, Fakultet organizacionih nauka, Univerzitet u Beogradu.
- Uzoka, F.M.E., Osuji, J. & Obot, O. (2011). Clinical decision support system (DSS) in the diagnosis of malaria: A case comparison of two soft computing methodologies. *Expert Systems with Applications*, 38(3), pp. 1537-1553.
- Wang, W. P., & Chen, Z. (2008). A neuro-fuzzy based forecasting approach for rush order control applications. *Expert Systems with Applications*, 35(1), pp. 223-234.
- Wei, L. Y., Chen, T. L., & Ho, T. H. (2011). A hybrid model based on adaptive-network-based fuzzy inference system to forecast Taiwan stock market. *Expert Systems with Applications*, 38(11), pp. 13625-13631.
- Wong, F. S., Wang, P. Z., Goh, T. H., & Quek, B. K. (1992). Fuzzy neural systems for stock selection. *Financial Analysts Journal*, pp. 47-74.

- Wu, X., Fung, M., & Flitman, A. (2001). Forecasting stock market performance using hybrid intelligent system. *In Computational Science-ICCS 2001*, pp. 447-456.
- Yager, R. R., & Filev, D. P. (1994). *Essentials of fuzzy modeling and control*. New York, NY: John Wiley & Sons.
- Yamakawa, T., & Furukawa, M. (1992). A design algorithm of membership functions for a fuzzy neuron using example-based learning. *In Fuzzy Systems, IEEE International Conference on*, pp. 75-82.
- Yardimci, A. (2009). Soft computing in medicine. *Applied Soft Computing*, 9(3), pp. 1029-1043
- Yunos, Z. M., Shamsuddin, S. M., & Sallehuddin, R. (2008). Data Modeling for Kuala Lumpur Composite Index with ANFIS. *In Second Asia international conference on modeling and simulation, AICMS 08, Kuala Lumpur* , pp. 609–614.
- Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), pp. 338-353.
- Zadeh, L. A. (1972). Fuzzy languages and their relation to human intelligence. *Proceedings of the International Conference Man and Computer*, Bordeaux, France. Basel: S. Karger, pp. 130-165
- Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, 8(3), pp. 199-249.
- Zadeh, L. A. (1998). Some reflections on soft computing, granular computing and their roles in the conception, design and utilization of information/intelligent systems. *Soft Computing-A fusion of foundations, methodologies and applications*, 2(1), pp. 23-25.
- Zarandi, M.F., Zolnoori, M., Moin, M. & Heidarnejad, H. (2010). A fuzzy rule-based expert system for diagnosing asthma. *Transaction E: Industrial Engineering*, 17(2), pp. 129-142.
- Zarei, H., Kamyad, A. V., & Heydari, A. A. (2012). Fuzzy modeling and control of HIV infection. *Computational and mathematical methods in medicine*.

Биографија

Ивана Драговић је рођена 30. новембра 1977. године у Београду, где је завршила основну школу и Математичку гимназију. Дипломирала је на 2006. године на Факултету организационих наука на Смеру за информационе системе, одбранивши дипломски рад „Дистрибуирано претраживање у програмском систему АДМИС” са највишом оценом. Основне студије завршила је са просечном оценом 8.40. Радила је на неколико пројеката током студија: КАДРИС - програм за кадровску службу ФОН-а, програм за евиденцију оцена студената из предмета Увод у информационе системе итд. Уписала је последипломске докторске студије на Факултету организационих наука у Београду (изборно подручје Управљање системима) 2008. године. Испити положени у току докторских студија обухватају поред курсева из Теорије система и вештачке интелигенције и курсеве са Економског Факултета. Одбранила је приступни рад под називом „Конзистентан неуро-фази систем закључивања“ 2014. године.

Говори, чита и пише енглески језик.

Радно искуство

- 2007-2010 године запослена је на Факултету организационих наука у звању сарадник у настави.
- од 2010. године запослена је на Факултету организационих наука у звању асистент.

Наставне активности

Још током студија радила је као демонстратор на предметима: Програмски језици и преводиоци (школске 2003/2004, 2004/2005 и 2005/2006 године), Пројектовање програма (школске 2003/2004 године) и Принципи програмирања (школске 2004/2005 године). Након завршетка студија, од 2007. године запослена је прво као сарадник у настави, а затим од 2010. године као асистент, на Факултету организационих наука на Катедри за управљање системима. Ангажована је на основним студијама на предметима: Теорија система, Динамика организационих система, Неуронске мреже и системи, Фази логика и системи и Теорија система 2. На мастер студијама је ангажована на предметима: Фази логика и системи, Неуронске мреже и системи, Теорија система 2 – одабрана поглавља.

Преглед објављених радова

Ивана Драговић објавила је више научних радова у часописима међународног у националног значаја, као и у зборницима са домаћих и међународних конференција.

Категорија М23:

1. **Драговић И.**, Турајлић Н., Пилчевић Д., Петровић Б., Радојевић Д.: „*A Boolean Consistent Fuzzy Inference System for Diagnosing Diseases and its Application for Determining Peritonitis Likelihood*“, Computational and Mathematical Methods in Medicine, Volume 2015, Article ID 147947, 10 pages (DOI: <http://dx.doi.org/10.1155/2015/147947>). [eSCI, Impact factor 2015 = 0.766]
2. Поледица А., Милошевић П., **Драговић И.**, Петровић Б., Радојевић Д.: „*Modeling consensus using logic-based similarity measures*“, Soft Computing, Vol. 19, Issue 11, 2015, pp. 3209-3219, ISSN 1432-7643 (DOI: 10.1007/s00500-014-1476-5)
3. **Драговић И.**, Турајлић Н., Радојевић Д., Петровић Б.: „*Combining Boolean Consistent Fuzzy Logic and AHP Illustrated on the Web Service Selection Problem*“, International Journal of Computational Intelligence Systems, Vol. 7, Supplement 1, 2013, pp. 84-93, ISSN 1875-6891 (Print), 1875-6883 (Online), (DOI: 10.1080/18756891.2014.853935). [eSCI, Impact factor 2013 = 0.451]

Категорија М33:

1. Маринковић Д., Николић Б., **Драговић И.**: „*Predicting Bankruptcy of Companies Using Neural Networks and Regression Models*“, зборник радова XIV међународне конференције - SymOrg'14, (Златибор, Србија), (pp. 157-164, ISBN 978-86-7680-295-1).
2. Поледица А., Милошевић П., **Драговић И.**, Радојевић Д., Петровић Б.: „*A Consensus Model based on Interpolative Boolean Algebra*“, зборник радова VIII међународне EUSFLAT конференције - EUSFLAT 2013, (Milano, Italy), (pp. 648-654, ISBN-978-90786-77-78-9).
3. Милошевић П., Поледица А., **Драговић И.**, Радојевић Д., Петровић Б.: „*Logic-based Similarity Measures for Consensus*“, зборник радова XI Балканске конференције о операционим истраживањима - BALCOR 2013, (Београд и Златибор, Србија), (pp. 473-481, ISBN-978-86-7680-285-2).
4. Јеремих М., Ковачевић Ј., Ракићевић А., **Драговић И.**: „*Multi-criteria routing algorithm based on interpolative Boolean algebra*“, зборник радова XI Балканске конференције о операционим истраживањима - BALCOR 2013, (Београд и Златибор, Србија), (pp. 465-472, ISBN-978-86-7680-285-2).

5. Турајлић Н., Петровић М., Вучковић М., Драговић И.: „*Groundwork for Presentation Pattern Metamodels*“, зборник радова XII међународног научно-стручног Симпозијума INFOTЕН-ЈАНОРИНА - INFOTЕН-ЈАНОРИНА 2013, (Јахорина, Босна и Херцеговина), (CD Издање: Vol. 12, Ref. RSS-3-11, pp. 731-736, ISBN-978-99955-763-1-8).
6. Турајлић Н., Драговић И.: „*A Hybrid Metaheuristic Based on Variable Neighborhood Search and Tabu Search for the Web Service Selection Problem*“, Electronic Notes in Discrete Mathematics, Vol. 39, pp. 145-152, ISSN 1571-0653, (DOI: 10.1016/j.endm.2012.10.020).
7. Драговић И., Турајлић Н., Радојевић Д.: „*Extending AHP with Boolean Consistent Fuzzy Logic and Its Application in Web Service Selection*“, зборник радова X међународне FLINS конференције - FLINS 2012,(Istanbul, Turkey), (pp. 576-591, ISBN 978-981-4417-73-0).
8. Ракићевић А., Петровић Б., Драговић И., „*Logical aggregation for strategic management*“, зборник радова IX међународне FLINS конференције - FLINS 2010,(Chengdu, China), (pp. 622-627, ISBN-13 978-981-4324-69-4).

Категорија М53:

1. Петровић М., Турајлић Н., Драговић И.: „*Преглед и упоредна анализа презентационих патерна*“, Journal of Information technology and multimedia systems Info M, Vol. 34/2010, 2010, pp. 35-41, ISSN 1451-4397.

Категорија М63:

1. Ковачевић Ј., Јеремић М., Драговић И., Ракићевић А.: „*Коришћење неуронских мрежа за предвиђање правца кретања индекса на финансијском тржишту*“, зборник радова XL Симпозијума о операционим истраживањима - SYM-OP-IS 2013, (Златибор, Србија), (pp. 663-668, ISBN-978-86-7680-286-9).
2. Драговић И., Турајлић Н., Радојевић Д., Петровић Б.: „*Коришћење логичке агрегације за селекцију веб сервиса*“, зборник радова XXXIX Симпозијума о операционим истраживањима - SYM-OP-IS 2012, (Тара, Србија), (pp. 377-380, ISBN-978-86-7488-086-9).
3. Драговић И., Једнак С., Турајлић Н.: „*Предвиђање стопе економског раста коришћењем неуронских мрежа и АНФИС-а*“, зборник радова XXXVIII Симпозијума о операционим истраживањима - SYM-OP-IS 2011, (Златибор, Србија), (pp. 407-410, ISBN-978-86-403-1168-7).
4. Драговић И., Ракићевић А., Петровић Б., „*Унапређење BCG портфолио матричне анализе применом логичке агрегације*“, зборник радова XXXVII Симпозијума о операционим истраживањима - SYM-OP-IS 2010, (Тара, Србија), (pp. 435-438, ISBN 978-86-335-0299-3).

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора _____ Ивана Драговић _____

Број индекса _____ 28/2008 _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

_____ Конзистентан неуро-фази систем закључивања _____

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 16.06.2016.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _____ Ивана Драговић _____
Број индекса _____ 28/2008 _____
Студијски програм _____ Управљање системима _____
Наслов рада _____ Конзистентан неуро-фази систем закључивања _____
Ментор _____ проф. др Братислав Петровић _____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 16.06.2016.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Конзистентан неуро-фази систем закључивања

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 16.06.2016.

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.