УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Тања Б. Стојадиновић

КОМБИНАТОРНЕ ХОПФОВЕ АЛГЕБРЕ

докторска дисертација

Београд, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Tanja B. Stojadinović

COMBINATORIAL HOPF ALGEBRAS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013

Ментор:

др Жарко Мијајловић, редовни професор, Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Александар Липковски, редовни професор, Математички факултет, Универзитет у Београду

др Зоран Петровић, ванредни професор, Математички факултет, Универзитет у Београду,

др Душко Јојић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци

Датум одбране:

Захвалност

Захваљујем се свим члановима Катедре за алгебру и математичку логику на помоћи и разумевању у последњих пар година, што ми је много помогло да докторску дисертацију приведем крају. Посебно се захваљујем свом ментору, професору Жарку Мијајловићу, на подршци, драгоценим саветима и охрабрењу.

Својој породици и пријатељима захваљујем се на стрпљењу и подршци свих ових година.

. . . Владимиру, Николи и Данилу

Резиме

Над многим класама комбинаторних објеката природно се могу увести множење и комножење који задају структуру Хопфове алгебре. Познате су Хопфове алгебре посета, пермутација, дрвета, графова и друге. Многе класичне комбинаторне инваријанте, као што су Мебијусова функција посета, хроматски полином графа, Ден-Сомервилове релације, изводе се из одговарајуће Хопфове алгебре. Теорију комбинаторних Хопфових алгебри засновали су Агиар, Бергерон и Сотил у раду из 2003. године. Терминални објекти у категорији комбинаторних Хопфових алгебри су алгебре квазисиметричних и симетричних функција. Ове функције се појављују као функције генератрисе у комбинаторици.

Предмет изучавања ове дисертације је комбинаторна Хопфова алгебра хиперграфова и њене подалгебре градивних скупова и клатера. Ове алгебре појављују се у различитим комбинаторним проблемима, као што су бојења хиперграфова, партиције симплицијалних комплекса и комбинаторика простих политопа. Изведене су структурне везе између ових алгебри, као и њихових непарних подалгебри. Применом теорије карактера дат је један метод за добијање интересантних нумеричких идентитета.

Уопштене Ден-Сомервилове релације за застава f-векторе Ојлерових посета доказали су Бајер и Биљера. Ове релације дефинисане су у свакој комбинаторној Хопфовој алгебри и одређују њену непарну подалгебру. У дисертацији се решавају уопштене Ден-Сомервилове једначине за комбинаторну Хопфову алгебру хиперграфова. По аналогији са Ротином Хопфовом алгебром посета, дефинише се Ојлерова подалгебра Хопфове алгебре хиперграфова. Добијена је комбинаторна карактеризација Ојлерових хиперграфова, која зависи од нерва припадајућег клатера. На тај начин добијена је једна класа решења Ден-Сомервилових релација за хиперграфове. Ови резултати примењени су на Хопфову алгебру симплицијалних комплекса.

Кључне речи: Хопфова алгебра, хиперграф, градивни скуп, клатер, симплицијални комплекс, квазисиметрична функција, симетрична функција, Ден-Сомервилове релације

Научна област: Математика

Ужа научна област: Алгебра, Комбинаторика

УДК број: 512.667:519.179.1(043.3)

Abstract

Multiplication and comultiplication, which define the structure of a Hopf algebra, can naturally be introduced over many classes of combinatorial objects. Among such Hopf algebras are well-known examples of Hopf algebras of posets, permutations, trees, graphs. Many classical combinatorial invariants, such as Möbius function of poset, the chromatic polynomial of graphs, the generalized Dehn-Sommerville relations and other, are derived from the corresponding Hopf algebra. Theory of combinatorial Hopf algebras is developed by Aguiar, Bergerone and Sottille in the paper from 2003. The terminal objects in the category of combinatorial Hopf algebras are algebras of quasisymmetric and symmetric functions. These functions appear as generating functions in combinatorics.

The subject of study in this thesis is the combinatorial Hopf algebra of hypergraphs and its subalgebras of building sets and clutters. These algebras appear in different combinatorial problems, such as colorings of hypergraphs, partitions of simplicial complexes and combinatorics of simple polytopes. The structural connections among these algebras and among their odd subalgebras are derived. By applying the character theory, a method for obtaining interesting numerical identities is presented.

The generalized Dehn-Sommerville relations for flag f-vectors of eulerian posets are proven by Bayer and Billera. These relations are defined in an arbitrary combinatorial Hopf algebra and they determine its odd subalgebra. In this thesis, the generalized Dehn-Sommerville relations for the combinatorial Hopf algebra of hypergraphs are solved. By analogy with Rota's Hopf algebra of posets, the eulerian subalgebra of the Hopf algebra of hypergraphs is defined. The combinatorial characterization of eulerian hypergraphs, which depends on the nerve of the underlying clutter, is obtained. In this way we obtain a class of solutions of the generalized Dehn-Sommerviller relations for hypergraphs. These results are applied on the Hopf algebra of simplicial complexes.

Keywords: Hopf algebra, hypergraph, building set, clutter, simplicial complex, quasisymmetric function, symmetric function, Dehn-Sommerville relations

Research area: Mathematics

Research subarea: Algebra, Combinatorics

UDK number: 512.667:519.179.1(043.3)

Садржај

Увод

Хопфове алгебре се први пут појављују у алгебарској топологији, у раду Хајнца Хопфа о топологији Лијевих група [20]. Проучавање Хопфових алгебри као алгебарских објеката иницирано је шездесетих година прошлог века радом Милнора и Мура [25]. Након тога, Хопфове алгебре налазе широку примену у многим областима математике.

Комбинаторика као математичка дисциплина измиче строгом заснивању. Можемо рећи да је комбинаторика математика дискретних структура. Хопфове алгебре у комбинаторику је увео Рота почетком седамдесетих година прошлог века. На многим класама комбинаторних објеката природно се могу дефинисати множење и комножење. На тај начин добијене су Хопфове алгебре посета, графова, пермутација, дрвета и друге. Теорија комбинаторних Хопфових алгебри заснована је у раду [1]. Комбинаторна Хопфова алгебра (H, ζ) је градуисана Хопфова алгебра H са истакнутим карактером ζ. Карактер је мултипликативни морфизам у основно поље, $\zeta : H \to k$, који често представља неко мултипликативно комбинаторно својство.

Квазисиметричне функције, индексиране композицијама природних бројева, значајне су као функције генератрисе у комбинаторици. Хопфову алгебру квазисиметричних функција $QSym$ увео је Гесел 1984. године у раду [15]. Ова алгебра је терминални објекат у категорији комбинаторних Хопфових алгебри. Природни морфизам $\Psi : H \to QSym$ додељује функцију генератрису чији коефицијенти зависе од природе изабраног карактера. Симетричне функције се јављају као функције генератрисе кокомутативних комбинаторних Хопфових алгебри.

Ротина Хопфова алгебра коначних градуисаних посета је полазни пример комбинаторне Хопфове алгебре, из ког потиче мотивација и терминологија целе теорије. У формализму Хопфових алгебри, изводе се класични комбинаторни појмови. Мебијусова функција посета се појављује као инверзни карактер у Ротиној алгебри. Природни морфизам у квазисиметричне функције додељује посету функцију генератрису његовог застава f-вектора. Следећи познати пример је хроматска Хопфова алгебра простих графова. Као функција генератриса графа у овој алгебри добија се Стенлијева хроматска функција.

Комбинаторној Хопфовој алгебри (H, ζ) додељујемо њену непарну подалгебру $S_{-}(H, \zeta)$, као највећу Хопфову подалгебру на којој је карактер непаран. Ова подалгебра је на хомогеним елементима одређена једначинама

$$(id \otimes (\overline{\zeta} - \zeta^{-1}) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(h) = 0,$$

које називамо уопштеним Ден-Сомервиловим релацијама. У Хопфовој алгебри квазисиметричних функција ове релације су еквивалентне систему линеарних једначина које су изворно добили Бајер и Биљера, као једначине које задовољавају застава $f-$вектори Ојлерових посета.

У овој дисертацији проучавају се комбинаторне Хопфове алгебре дефинисане на градивним скуповима (building sets), хиперграфовима и симплицијалним комплексима. Појам градивног скупа први пут се појављује у раду [8] у вези са аранжманима потпростора. Потом се појам градивног скупа примењује и даље развија у теорији политопа у радовима [13] и [27]. Градивни скуп је колекција подскупова коначног скупа. Основни пример је градивни скуп графа, ког чине подскупови темена простог графа на којима су индуковани подграфови повезани. Хопфова алгебра градивних скупова је посебан случај алгебре Витнијевих система која је уведена у раду Шмита [30]. Хопфова алгебра хиперграфова даје најшири алгебарски оквир за проблеме бојења у комбинаторици.

У дисертацији су, по аналогији са Ојлеровим посетима, дефинисане класе Ојлерових градивних скупова, хиперграфова и симплицијалних комплекса, као једне класе решења уопштених Ден-Сомервилових релација за одговарајуће комбинаторне Хопфове алгебре. Такође је дата њихова комплетна комбинаторна карактеризација.

Рад је организован на следећи начин.

У првом поглављу дајемо преглед основних дефиниција и особина Хопфових алгебри.

У другом поглављу описујемо неке најважније Хопфове алгебре које се појављују у алгебарској комбинаторици. Ове Хопфове алгебре су конструисане на пермутацијама, композицијама, партицијама и планарним бинарним дрветима.

У трећем поглављу дајемо преглед теорије комбинаторних Хопфових алгебри. Дефинисане су парна и непарна подалгебра комбинаторне Хопфове алгебре и изведене универзалне релације које описују непарну подалгебру. Такође је дата једна примена теорије карактера у добијању разних нумеричких идентитета [32].

У четвртом поглављу уведена је Хопфова алгебра градивних скупова $\mathcal{B}Set$. Из основних структурних теорема за Хопфову алгебру Витнијевих система, добијамо структурне идентитете за алгебру $\mathcal{B}Set$ и њен градуисани дуал $\mathcal{B}Set^*$. Уводи се хроматска симетрична функција градивног скупа. Разматра се у којој мери она разликује градивне скупове и у каквој је вези са Стенлијевом хроматском симетричном функцијом графа. Изводе се уопштене Ден-Сомервилове релације за градивне скупове и дефинишу Ојлерови градивни скупови. Добијамо комплетну комбинаторну карактеризацију Ојлерових градивних скупова. Резултати овог поглавља објављени су у раду [17].

У петом поглављу разматрамо комбинаторну Хопфову алгебру хиперграфова. Свака класа хиперграфова затворена за дисјунктне уније и рестрикције даје неку подалгебру Хопфове алгебре хиперграфова. Важни примери таквих класа хиперграфова су графови, градивни скупови и клатери (clutter). Дефинишемо појам Ојлеровог хиперграфа и одговарајуће Ојлерове подалгебре хиперграфова. Испоставља се да је хиперграф Ојлеров ако и само ако је његов антиланац минималних елемената Ојлеров. То омогућава карактеризацију Ојлерових хиперграфова преко комбинаторике антиланаца минималних елемената, која је изведена за градивне скупове у претходном поглављу.

Операције спајање (join) и рестрикција задају структуру Хопфове алгебре на симплицијалним комплексима. Кореспонденција клатера и њихових комплекса независности представља изоморфизам ове алгебре и Хопфове алгебре клатера. Овим изоморфизмом је одређена класа Ојлерових симплицијалних комплекса, као класа решења уопштених Ден-Сомервилових релација за Хопфову алгебру симплицијалних комплекса.

1 Хопфове алгебре

У овом поглављу изложићемо основне дефиниције и особине Хопфових алгебри, са посебним освртом на градуисане повезане Хопфове алгебре. Од стандардне литературе наводимо [9] и [33].

1.1 Алгебре и коалгебре

Почећемо са дефиницијама основних структура и пресликавања, које претходе појму Хопфове алгебре, а прва је добро позната дефиниција алгебре. У овом поглављу, као и у целом раду, k је поље карактеристике нула.

Дефиниција 1.1.1. Нека је k поље и A векторски простор над k. Асоцијативна k-*алгебра* са јединицом је пар (A, m), где је $m : A \otimes A \to A$ једно k-линеарно пресликавање, које зовемо *множење*, тако да:

1. следећи дијаграм комутира:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{m \otimes id} & A \otimes A \\ {\scriptstyle id \otimes m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A \otimes A & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

2. постоји k-линеарно пресликавање $u : k \to A$, које зовемо *јединица*, тако да следећи дијаграми комутирају:

$$\begin{array}{ccccc} k \otimes A & \xrightarrow{u \otimes \mathrm{id}} & A \otimes A & \xleftarrow{\mathrm{id} \otimes u} & A \otimes k \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle m} & & \Big\downarrow \\ A & = & A & = & A \end{array},$$

где су пресликавања $k \otimes A \to A$ и $A \otimes k \to A$ канонска.

Овакво пресликавање u мора бити јединствено. Први од ових дијаграма значи да је алгебра A асоцијативна, а други даје егзистенцију *јединице* у A, $u(1) = 1_A$.

Предност дефинисања појма алгебре коришћењем дијаграма је то што окретањем стрелица добијамо дуални појам.

Дефиниција 1.1.2. *Коалгебра* над пољем k је пар (C, Δ), где је C векторски простор над k, а $\Delta : C \to C \otimes C$ једно k-линеарно пресликавање које зовемо *комножење*, тако да:

1. следећи дијаграм комутира:

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C \otimes C & \xleftarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes C \\ {\scriptstyle id \otimes \Delta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Delta} \\ C \otimes C & \xleftarrow{\Delta} & C \end{array}$$

2. постоји k-линеарно пресликавање $\epsilon : C \to k$, такво да следећи дијаграми комутирају:

$$\begin{array}{ccccc} k \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & C \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \epsilon} & C \otimes k \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Delta} & & \uparrow \\ C & = & C & = & C \end{array}.$$

Пресликавање ϵ зовемо *којединица* и оно је једнозначно одређено паром (C, Δ). Први од ових дијаграма изражава *коасоцијативност* комножења.

Коалгебра C је *кокомутативна* ако је $\tau \circ \Delta = \Delta$, где је $\tau : C \otimes C \to C \otimes C$ пресликавање које зовемо *твист* (или *флип*), дефинисано са $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$.

Сигма нотација

Сада ћемо увести такозване *сигма ознаке* које ћемо даље користити.

Ако је C коалгебра и $c \in C$, тада је $\Delta(c)$, као елемент из $C \otimes C$, облика

$$\Delta(c) = \sum c_i \otimes c^i,$$

где су c_i и c^i елементи из C. Ово ћемо записивати у скраћеном облику

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)},$$

или још краће

$$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}.$$

На пример, коасоцијативност се у сигма ознакама може изразити са

$$(c_{(1)})_{(1)} \otimes (c_{(1)})_{(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(1)} \otimes (c_{(2)})_{(2)},$$

за свако $c \in C$. То значи да, ако означимо са

$$\Delta_2(c) := (\Delta \otimes id) \circ \Delta(c) = (id \otimes \Delta) \circ \Delta(c),$$

можемо писати

$$\Delta_2(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}.$$

Дефинишући индуктивно $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_{n+1} = (\Delta \otimes id^n) \circ \Delta_n$, $n \geq 1$, видимо да нема двосмислености у запису

$$\Delta_n(c) = c_{(1)} \otimes \ldots \otimes c_{(n+1)}.$$

Слично, услов за ϵ у сигма нотацији изгледа овако:

$$\epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c = c_{(1)}\epsilon(c_{(2)}).$$

1.2 Морфизми и биалгебре

Дефиниција 1.2.1. Нека су A и B алгебре и $f : A \to B$ линеарно пресликавање. За f кажемо да је *морфизам алгебри* ако следећи дијаграми комутирају:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{f \otimes f} & B \otimes B \\ {\scriptstyle m_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_B} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle u_A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle u_B} \\ k & = & k \end{array}$$

Поново, окретањем стрелица, добијамо:

Дефиниција 1.2.2. Нека су C и D коалгебре и $g : C \to D$ линеарно пресликавање. За g кажемо да је *морфизам коалгебри* ако следећи дијаграми комутирају:

$$\begin{array}{ccc} C \otimes C & \xrightarrow{g \otimes g} & D \otimes D \\ {\scriptstyle \Delta_C}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Delta_D} \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ {\scriptstyle \epsilon_C}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_D} \\ k & = & k \end{array} .$$

Дефиниција 1.2.3. Тројка (A, m, Δ) је *биалгебра* ако је (A, m) алгебра са јединицом u, (A, Δ) коалгебра са којединицом ϵ, и $\Delta : A \to A \otimes A$ и $\epsilon : A \to k$ су морфизми алгебри.

У претходној дефиницији се услов да су Δ и ϵ морфизми алгебри може заменити еквивалентним условом да су m и u морфизми коалгебри.

Напоменимо да у претходној дефиницији $A \otimes A$ има природну структуру алгебре, тј. множење је дефинисано као на тензорском производу две алгебре A и B:

$$(a \otimes b)\,(c \otimes d) = ac \otimes bd, \ \ (a, c \in A,\ b, d \in B),$$

Еквивалентно, множење $m_{A \otimes B}$ можемо представити као композицију

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{id \otimes \tau \otimes id} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{m_A \otimes m_B} A \otimes B.$$

Такође, ако су C и D коалгебре, на тензорском производу $C \otimes D$ комножење дефинишемо као композицију

$$C \otimes D \xrightarrow{\Delta_C \otimes \Delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{id \otimes \tau \otimes id} C \otimes D \otimes C \otimes D,$$

а којединицу са $C \otimes D \xrightarrow{\epsilon_C \otimes \epsilon_D} k \otimes k \simeq k$.

Приметимо да се компатибилност множења и комножења најједноставније види означавањем множења m са $\cdot$ и коришћењем инфиксне нотације:

$$\Delta(a_1 \cdot a_2) = \Delta(a_1) \cdot \Delta(a_2),$$

за све елементе a_1, a_2 у биалгебри.

1.3 Хопфове алгебре

Дефиниција 1.3.1. За биалгебру (H, m, Δ) кажемо да је *Хопфова алгебра* ако постоји k-линеарно пресликавање $S : H \to H$, које ћемо звати *антипод*, тако да следећи дијаграми комутирају:

$$\begin{array}{ccccc} H \otimes H & \xleftarrow{\Delta} & H & \xrightarrow{\Delta} & H \otimes H \\ {\scriptstyle id \otimes S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u\epsilon} & & \downarrow{\scriptstyle S \otimes id} \\ H \otimes H & \xrightarrow{m} & H & \xleftarrow{m} & H \otimes H \end{array},$$

односно, $m \circ (id \otimes S) \circ \Delta = u\epsilon = m \circ (S \otimes id) \circ \Delta$.

Користећи сигма ознаке, антипод задовољава релације

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = \epsilon(h)1 = h_{(1)}S(h_{(2)}),$$

за све $h \in H$.

Ово можемо видети и на други начин. Нека је (C, Δ, ϵ) коалгебра и (A, m, u) алгебра. Ако $f, g \in Hom(C, A)$, дефинисаћемо ново пресликавање из C у A са

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{m} A.$$

Линеарно пресликавање добијено на овај начин зове се *конволуција* пресликавања f и g и означава се $f * g$. У сигма ознакама имамо да је

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}).$$

Лако се провери да је овако дефинисано множење асоцијативно, као и да је $u \circ \epsilon$ јединични елемент алгебре $Hom(C, A)$.

Сада услов за антипод можемо записати овако

$$id_H * S = S * id_H = u \circ \epsilon,$$

па је антипод конволуцијски инверз идентитете. Као такав мора бити јединствен.

Теорема 1.3.2. *[9] Нека је H Хопфова алгебра са антиподом S. Тада је:*

а) $S(hg) = S(g)S(h)$ за све $g, h \in H$;

б) $S(1) = 1$, тј. $S \circ u = u$;

в) $\Delta(S(h)) = \Sigma S(h_2) \otimes S(h_1)$;

г) $\epsilon(S(h)) = \epsilon(h)$.

Прва два тврђења значе да је S антиморфизам алгебри, а преостала два да је S антиморфизам коалгебри.

□

Пример 1.3.3. Сваком k-векторском простору V може се придружити његова *тензорска алгебра* $T(V)$. Као векторски простор она је дефинисана са

$$T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}, \text{ где је } V^{\otimes 0} = k \text{ и } V^{\otimes(n+1)} := V \otimes V^{\otimes n}.$$

Множење се дефинише као *надовезивање*, тј.

$$m(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m.$$

Јединица је $1 \in k = V^{\otimes 0}$.

Комножење је на елементима $x \in V^{\otimes 1} = V$ дато са

$$\Delta(x) := 1 \otimes x + x \otimes 1,$$

(тј. тако да су сви $x \in V$ *примитивни*), а алгебарско продужење на остале тензоре даје

$$\Delta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum (v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_r}) \bigotimes (v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_{n-r}}),$$

где се сумирање врши по свим уређеним паровима $(i_1, i_2, \ldots, i_r), (j_1, j_2, \ldots, j_{n-r})$ комплементарних подречи речи $(1, 2, \ldots, n)$.

Којединица се добија као природна пројекција $T(V)$ у k, тј. $\epsilon(1) = 1$ и $\epsilon_{|V} = 0$. Ово обезбеђује да је $T(V)$ кокомутативна биалгебра. Како морфизам $S : T(V) \to T(V)$ дефинисан са $S(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = (-1)^n \, v_n \otimes \ldots \otimes v_1$ задовољава аксиому антипода, $T(V)$ је Хопфова алгебра.

Наводимо још неколико дефиниција појмова везаних за Хопфове алгебре.

Дефиниција 1.3.4. Нека је H Хопфова алгебра. За елемент $h \in H$ кажемо да је *груполики* ако је $h \neq 0$ и $\Delta(h) = h \otimes h$, а да је *примитиван* ако је $\Delta(h) = 1 \otimes h + h \otimes 1$.

Ако је h примитивни елемент, лако се провери да је $\epsilon(h) = 0$, као и $S(h) = -h$.

Дефиниција 1.3.5. Нека је C коалгебра и D потпростор од C такав да је $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$. Тада је D заједно са рестрикцијама комножења и којединице, коалгебра за коју кажемо да је *подкоалгебра* од C.

Дефиниција 1.3.6. Нека је C коалгебра и I потпростор од C. Тада I зовемо:

1) *леви (десни) коидеал* ако је $\Delta(I) \subseteq C \otimes I$ (респективно $\Delta(I) \subseteq I \otimes C$).

2) *коидеал* ако је $\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I$ и $\epsilon(I) = 0$.

Дефиниција 1.3.7. Нека је H Хопфова алгебра. Потпростор K од H је *Хопфова подалгебра* ако је подалгебра, подкоалгебра, и $S(K) \subseteq K$, где је S антипод од H .

Дефиниција 1.3.8. Нека је H Хопфова алгебра са антиподом S. За потпростор I кажемо да је *Хопфов идеал* ако је I идеал алгебре H, коидеал коалгебре H, и $S(I) \subseteq I$. У том случају количнички векторски простор има природну структуру Хопфове алгебре, и канонска пројекција $p : H \to H/I$ је морфизам Хопфових алгебри.

1.4 Дуална алгебра Хопфове алгебре

За дати векторски простор V над пољем k, *дуални простор* V^* дефинишемо као скуп свих линеарних пресликавања простора V у његово поље скалара k, тј. $V^* = Hom(V, k)$.

Нека су V и W k-векторски простори. Из линеарне алгебре је познато да постоји мономорфизам

$$\rho : V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*,$$

дат са

$$\rho(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v)g(w)$$

за $f \in V^*$, $g \in W^*$, $v \in V$, $w \in W$.

Ако су ови простори коначне димензије, ρ је изоморфизам.

За k-линеарно пресликавање $L : V \to W$, $L^* : W^* \to V^*$ означава пресликавање дато са

$$L^*(f) = f \circ L,$$

за $f \in W^*$.

Нека је сада (C, Δ, ϵ) коалгебра. Тада $\Delta : C \to C \otimes C$ и $\epsilon : C \to k$ индукују $\Delta^* : (C \otimes C)^* \to C^*$ и $\epsilon^* : k^* \to C^*$. Дефинисаћемо $m : C^* \otimes C^* \to C^*$ као композицију

$$C^* \otimes C^* \xrightarrow{\rho} (C \otimes C)^* \xrightarrow{\Delta^*} C^*$$

и $u : k \to C^*$ као композицију

$$k \longrightarrow k^* \xrightarrow{\epsilon^*} C^*,$$

где је $k \to k^*$ природни изоморфизам, а ρ поменута инјекција. Ако означимо $m(f \otimes g)$ са $f * g$, из дефиниције имамо

$$(f * g)(c) = (\Delta^* \rho)(f \otimes g)(c) = \rho(f \otimes g)(\Delta(c)) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}),$$

па видимо да је множење у C^* заправо конволуција. Такође, пошто је $1 = u(1_k)$, по дефиницији је $1(c) = \epsilon(c)$.

Дакле, C^* је алгебра са јединицом ϵ.

Дуални проблем је следећи: ако имамо алгебру (A, m, u), да ли можемо увести природну структуру коалгебре на A^*? У коначно димензионом случају одговор је потврдан, јер је тада $\rho : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ бијекција и можемо користити ρ^{-1}. Значи, ако је (A, m, u) коначно димензиона алгебра, дефинисаћемо $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ као композицију

$$A^* \xrightarrow{m^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\rho^{-1}} A^* \otimes A^*$$

и $\epsilon : A^* \to k$ као композицију

$$A^* \xrightarrow{u^*} k^* \longrightarrow k,$$

где је $k^* \to k$ природни изоморфизам, $f \mapsto f(1)$, за $f \in k^*$.

Приметимо да ако је $\Delta(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$, где $f_{(1)}, f_{(2)} \in A^*$, тада је, из дефиниције, $f(xy) = f_{(1)}(x) f_{(2)}(y)$, за свако $x, y \in A$. Пошто је пресликавање ρ инјективно, закључујемо да

$$\Delta(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$$

значи да је

$$f(xy) = f_{(1)}(x) f_{(2)}(y).$$

Коасоцијативност се сада лако проверава, па следи да је (A^*, Δ, ϵ) коалгебра са којединицом $\epsilon(f) = f(1)$, за $f \in A^*$.

Нека је сада H коначно димензиона Хопфова алгебра. Знамо да је тада H^* алгебра и коалгебра, па након провере да су дуално комножење и којединица морфизми алгебри, као и да S^* задовољава аксиому антипода, имамо:

Теорема 1.4.1. *Нека је H коначно димензиона Хопфова алгебра с антиподом S. Тада је H^* Хопфова алгебра с антиподом S^*, где је $S^*(f) = f \circ S$.*

$\square$

1.5 Градуисана Хопфова алгебра

Дефиниција 1.5.1. Коалгебра (C, Δ, ϵ) над пољем k је *градуисана* ако је директна сума k-потпростора C_n, $C = \bigoplus_{n \geq 0} C_n$, тако да

$$\Delta(C_n) \subseteq \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes C_j, \quad \epsilon(C_i) = 0, \ i > 0.$$

Ако уз то важи и да је $C_0 \cong k$, за коалгебру C кажемо да је *повезана градуисана*.

Дефиниција 1.5.2. Хопфова алгебра $(H, m, \Delta, u, \epsilon, S)$ над k је *градуисана* ако је градуисана као коалгебра, и множење, јединица и антипод чувају градуацију, тј. постоји декомпозиција $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$ тако да

$$m(H_n \otimes H_m) \subseteq H_{n+m}, \quad u(k) \subseteq H_0, \quad S(H_n) \subseteq H_n.$$

Заправо, свака градуисана биалгебра мора бити Хопфова алгебра, тј. у градуисаној биалгебри се антипод може дефинисати рекурзивно.

Рекурзивна дефиниција антипода је: $S(1) = 1$, а ако $x \in H_n$ и

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + \sum_{i=1}^{m} y_i \otimes z_i,$$

онда је

$$S(x) = -\sum_{i=1}^{m} S(y_i) z_i.$$

Навешћемо овде и општу формулу за антипод градуисане повезане Хопфове алгебре, коју је дао Такеучи у [34].

Нека је $(H, m, \Delta, u, \epsilon, S)$ Хопфова алгебра. На њој можемо дефинисати и такозване више или итериране производе: нека је $m^{(1)} = m$, $\Delta^{(1)} = \Delta$, и за свако $k \geq 2$,

$$m^{(k)} = m(m^{(k-1)} \otimes id) : H^{\otimes(k+1)} \to H,$$
$$\Delta^{(k)} = (\Delta^{(k-1)} \otimes id)\Delta : H \to H^{\otimes(k+1)}.$$

Такође ћемо дефинисати

$$m^{(-1)} = u,\ \Delta^{(-1)} = \epsilon \text{ и } m^{(0)} = \Delta^{(0)} = id.$$

Ако је $f : H \to H$ произвољно линеарно пресликавање, конволуцијски степени од f су

$$f^{*k} = m^{(k-1)} f^{\otimes k} \Delta^{(k-1)},$$

за свако $k \geq 0$. Посебно, $f^{*0} = u\epsilon$ и $f^{*1} = f$.

Означимо са $\pi := id - u\epsilon$. Ако је пресликавање π локално нилпотентно у односу на конволуцију, тада је $id = u\epsilon + \pi$ инверзибилно у односу на конволуцију. Како је конволуцијски инверз идентитете управо антипод, следи да је тада

$$S = \sum_{k\geq 0} (-\pi)^{*k} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k m^{(k-1)} \pi^{\otimes k} \Delta^{(k-1)}. \tag{1}$$

То ће свакако важити ако је H градуисана повезана биалгебра, јер се у том случају π анулира на компонентама степена 0 (па се π^{*k} анулира на компонентама степена мањег од k). Дакле, (1) је општа формула за антипод градуисане повезане Хопфове алгебре.

Дефиниција 1.5.3. *Градуисани дуал* градуисане Хопфове алгебре $H = \bigoplus_{n\geq 0} H_n$ је

$$H^* = \bigoplus_{n\geq 0} H_n^*.$$

Све Хопфове алгебре које ћемо разматрати су *локално коначне*, то јест, H_n је коначне димензије за свако n. То значи да је градуисани дуал од H такође Хопфова алгебра.

Навешћемо и теорему која даје критеријум за утврђивање да су две Хопфове алгебре дуалне.

Унутрашњи производ на градуисаној повезаној Хопфовој алгебри H је недегеративна симетрична линеарна функција $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \otimes H \to k$, таква да је $\langle a, b \rangle = 0$ за хомогене $a, b \in H$ различитог степена.

Теорема 1.5.4. [19] *Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ градуисане повезане локално коначне Хопфове алгебре са унутрашњим производима $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{A}}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$. Тада су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ дуалне Хопфове алгебре ако постоји линеарно пресликавање*

$$\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

које чува градуацију, тако да за све $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$ *важи:*

- $\diamond$ $\langle a_1, a_2 \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \phi(a_1), \phi(a_2) \rangle_{\mathcal{B}}$;
- $\diamond$ $\langle a_1 a_2, a_3 \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \phi(a_1) \otimes \phi(a_2), \Delta(\phi(a_3)) \rangle_{\mathcal{B}}$;
- $\diamond$ $\langle a_1 \otimes a_2, \Delta(a_3) \rangle_{\mathcal{A}} = \langle \phi(a_1)\phi(a_2), (\phi(a_3)) \rangle_{\mathcal{B}}$.

$\square$

Приметимо да из претходне теореме следи да је градуисана повезана локално коначна Хопфова алгебра самодуална ако се на њој може дефинисати унутрашњи производ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ такав да је

$$\langle a_1 \otimes a_2, \Delta(a_3) \rangle = \langle m(a_1 \otimes a_2), a_3 \rangle$$

за све $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$.

2 Примери Хопфових алгебри у комбинаторици

У овом поглављу дајемо примере неких Хопфових алгебри које се јављају у комбинаторици, тј. чије базе су параметризоване комбинаторним објектима као што су пермутације, дрвета, композиције, партиције. Хопфове алгебре посета и графова представићемо у наредном поглављу, након што уведемо карактере.

2.1 Хопфова алгебра пермутација

Малвенуто иРојтенауер су 1995. конструисали Хопфову алгебру на простору

$$\mathcal{S}Sym = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{Q}S_n,$$

где је S_n симетрична група степена n [26]. Базни елемент који одговара пермутацији $u \in S_n$, за $n > 0$, означаваћемо са $\mathcal{F}_u$, а базни елемент степена нула са 1.

За пермутацију $u \in S_n$ ћемо писати $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, где је $u_i = u(i)$, или још краће $u = u_1 \ldots u_n$. За $u \in S_n$ и $v \in S_m$ означићемо са $u \times v$ пермутацију из S_{n+m} код које u пермутује $\{1, 2, \ldots, n\}$, а v $\{n+1, \ldots, n+m\}$. Пермутација $\sigma \in S_{n+m}$ је (n, m)-*шафл* ако је $\sigma_1 < \cdots < \sigma_n$ и $\sigma_{n+1} < \cdots < \sigma_{n+m}$.

Производ два базна елемента у $\mathcal{S}Sym$ дефинишемо на следећи начин:

$$\mathcal{F}_u \cdot \mathcal{F}_v = \sum_{\sigma} \mathcal{F}_{(u \times v) \cdot \sigma^{-1}},$$

где $u \in S_n$ и $v \in S_m$, а σ је (n, m)-шафл.

На пример,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{21} \cdot \mathcal{F}_{231} &= \mathcal{F}_{21453} + \mathcal{F}_{24153} + \mathcal{F}_{24513} + \mathcal{F}_{24531} + \mathcal{F}_{42153} \\ &\quad + \mathcal{F}_{42513} + \mathcal{F}_{42531} + \mathcal{F}_{45213} + \mathcal{F}_{45231} + \mathcal{F}_{45321}. \end{aligned}$$

У односу на овако дефинисан производ $\mathcal{S}Sym$ је градуисана алгебра са јединицом 1.

Алгебра $\mathcal{S}Sym$ је такође градуисана коалгебра, где је копроизвод дат разбијањем пермутације на све могуће начине. Прецизније, нека је за n-торку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ различитих природних бројева, њена стандардна пермутација $st(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ пермутација $u \in S_n$ дата са

$$u_i < u_j \Leftrightarrow a_i < a_j.$$

На пример, $st(7143) = (4132)$. Копроизвод $\Delta : \mathcal{S}Sym \to \mathcal{S}Sym \otimes \mathcal{S}Sym$ је дефинисан са

$$\Delta(\mathcal{F}_u) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}_{st(u_1,\ldots,u_i)} \otimes \mathcal{F}_{st(u_{i+1},\ldots,u_n)},$$

за $u \in S_n$.

На пример,

$$\begin{aligned} \Delta(\mathcal{F}_{35214}) &= 1 \otimes \mathcal{F}_{35214} + \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_{4213} + \mathcal{F}_{12} \otimes \mathcal{F}_{213} + \mathcal{F}_{231} \otimes \mathcal{F}_{12} \\ &\quad + \mathcal{F}_{3421} \otimes \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_{35214} \otimes 1. \end{aligned}$$

Уведене операције на $\mathcal{S}Sym$ су сагласне и дају структуру градуисане повезане биалгебре, па је $\mathcal{S}Sym$ и Хопфова алгебра. Из дефиниција множења и комножења је јасно да ова Хопфова алгебра није ни комутативна ни кокомутативна. Она је себи дуална, при чему је изоморфизам дат са $\mathcal{F}_u \mapsto \mathcal{F}^*_{u^{-1}}$, [26].

Хопфова алгебра Малвенуто-Ројтенауера је веома значајна јер се међу њеним Хопфовим подалгебрама и количницима налазе неке од најважнијих алгебри у алгебарској комбинаторици, као што су алгебра симетричних функција, алгебра квази-симетричних функција, алгебра некомутативних симетричних функција, Лодеј -Ронко алгебра бинарних дрвета и друге.

2.2 Квази-симетричне функције, симетричне и некомутативне симетричне функције

Нека је $\mathcal{B}$ подалгебра алгебре формалних степених редова $k[[x_1, x_2, \ldots]]$ са пребројиво промењљивих, која се састоји од формалних степених редова ограниченог степена, при чему је сваки x_i степена 1. Елемент $f \in \mathcal{B}$ је *симетрична функција* ако су му коефицијенти уз мономе

$$x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k} \text{ и } x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k}$$

једнаки за сваки низ различитих природних бројева $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Елемент $f \in \mathcal{B}$ је *квази-симетрична функција* ако су му коефицијенти уз наведене мономе једнаки за сваки строго растући низ $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ природних бројева. На пример,

$$f = x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + +x_1 x_4^2 + x_2 x_4^2 + x_3 x_4^2 + \cdots$$

је квази-симетрична функција, а

$$g = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + \cdots$$

је симетрична.

Скупови $\mathcal{S}ym$ симетричних и $\mathcal{QS}ym$ квази-симетричних функција су подалгебре алгебре формалних степених редова ограниченог степена, и очигледно је $\mathcal{S}ym \subset \mathcal{QS}ym$.

Композиција α ненегативног целог броја n, у означи $\alpha \models n$, је $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, тако да је $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. Композицији α броја n придружићемо скуп $I(\alpha) := \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\}$. Ово придруживање је бијекција између композиција од n и подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. За композиције $\alpha, \beta \models n$ рећи ћемо да је α *финија* од β ако је $I(\beta) \subseteq I(\alpha)$ и писаћемо $\beta \preceq \alpha$.

Алгебра $\mathcal{QS}ym$ квази-симетричних функција има линеарну базу сачињену од мономијалних квази-симетричних функција M_α, које су индексиране композицијама $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$:

$$M_\alpha := \sum_{i_1 < \cdots < i_k} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}.$$

Производ ових монома у алгебри степених редова може се представити као преклапајући (или квази) шафл њихових композиција. *Квази-шафл* композиција α и β је шафл њихових компонената, где додатно можемо заменити произвољно парова суседних компоненти (α_i, β_j) у шафлу са $\alpha_i + \beta_j$. Тада имамо

$$M_\alpha \cdot M_\beta = \sum_\gamma M_\gamma,$$

где сумирамо по свим преклапајућим шафловима γ композиција α и β. Јединични елемент је индексиран празном композицијом броја 0, $1 = M_{()}$.

На пример,

1.

$$M_{(1)} \cdot M_{(1)} = \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j x_j\right) = \sum_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j = M_{(2)} + 2M_{(1,1)}.$$

2.

$$\begin{aligned} M_{(1)} \cdot M_{(1,1)} &= \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_{j<k} x_j x_k\right) = \sum_{i<j} x_i^2 x_j + \sum_{i<j} x_i x_j^2 + 3\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k \\ &= M_{(2,1)} + M_{(2,1)} + 3M_{(1,1,1)}. \end{aligned}$$

Комножење $\Delta : \mathcal{Q}Sym \to \mathcal{Q}Sym \otimes \mathcal{Q}Sym$ је на мономијалним квази-симетричним функцијама дефинисано са:

$$\Delta(M_{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}) = \sum_{i=0}^{k} M_{(\alpha_1,\dots,\alpha_i)} \otimes M_{(\alpha_{i+1},\dots,\alpha_k)}.$$

На пример,

$$\Delta(M_{(1,1)}) = 1 \otimes M_{(1,1)} + M_1 \otimes M_1 + M_{(1,1)} \otimes 1.$$

Којединица је морфизам алгебри који слика све променљиве x_i у 0.

Алгебру квази-симетричних функција је увео Гесел 1981. године [15]. То је градуисана повезана Хопфова алгебра чије су компоненте степена n генерисане оним мономима M_α за које је α композиција природног броја n. То значи да је $dim(\mathcal{Q}Sym)_0 = 1$ и $dim(\mathcal{Q}Sym)_n = 2^{n-1}$ за $n \geq 1$.

Ако занемаримо редослед у композицији, добијамо партицију. Прецизније, *партиција* λ ненегативног целог броја n, у ознаци $\lambda \vdash n$ је $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$, тако да је $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$ и $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$. Са $Par(n)$ ћемо означити скуп свих партиција броја n, при чему се $Par(0)$ састоји од празне партиције $(0, 0, \dots, 0)$. Дефинишемо

$$Par := \bigcup_{n \geq 0} Par(n).$$

Као векторски простор, $\mathcal{S}ym$ има базу коју чине мономијалне симетричне функције

$$m_\lambda = \sum_{\phi(\alpha)=\lambda} M_\alpha,$$

где је $\phi(\alpha)$ партиција која одговара композицији α. На пример, $m_{(2,1,1)} = M_{(2,1,1)} + M_{(1,2,1)} + M_{(1,1,2)}$.

Као алгебра, $\mathcal{S}ym$ је слободно генерисана следећим алгебарски независним скуповима симетричних функција [29]:

1) елементарним симетричним функцијама $e_n = m_{1^n}$, где 1^n значи 1 поновљено n пута, па је

$$e_n = \sum_{i_1<\cdots<i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n},\ n \geq 1 \quad (e_0 = m_\emptyset = 1).$$

2) комплетним хомогеним симетричним функцијама

$$h_n = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda = \sum_{\alpha\models n} M_\alpha = \sum_{i_1\leq\cdots\leq i_n} x_{i_1}\cdots x_{i_n},\ n \geq 1 \quad (h_0 = m_\emptyset = 1).$$

3) степеним симетричним функцијама

$$p_n = m_n = \sum_i x_i^n,\ n \geq 1 \quad (p_0 = m_\emptyset = 1).$$

Ако за партицију $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ дефинишемо $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2}\cdots e_{\lambda_k}$, онда је скуп $\{e_\lambda : \lambda \in Par(n)\}$ база од $\mathcal{S}ym_n$, односно $\{e_\lambda : \lambda \in Par\}$ је база од $\mathcal{S}ym$. Исто то важи и за скупове $\{h_\lambda : \lambda \in Par\}$ и $\{p_\lambda : \lambda \in Par\}$.

Структура Хопфове алгебре је на овим базама дата са

$$\Delta(e_n) = \sum_{i+j=n} e_i \otimes e_j,\ \Delta(h_n) = \sum_{i+j=n} h_i \otimes h_j,$$

$$\Delta(p_n) = 1 \otimes p_n + p_n \otimes 1, \text{ тј. } p_n \text{ су примитивни,}$$

док за антипод важи

$$S(p_n) = -p_n, \quad S(e_n) = (-1)^n h_n, \quad S(h_n) = (-1)^n e_n.$$

За мономијалне симетричне функције важи

$$\Delta(m_\lambda) = \sum_{\lambda=\mu\cup\nu} m_\mu \otimes m_\nu,$$

где се сумирање врши по свим паровима (μ, ν) таквим да је λ њихова скуповна унија. На пример,

$$\Delta(m_{2,1,1}) = 1 \otimes m_{2,1,1} + m_1 \otimes m_{2,1} + m_2 \otimes m_{1,1} + m_{1,1} \otimes m_2 + m_{2,1} \otimes m_1 + m_{2,1,1} \otimes 1.$$

Хопфова алгебра симетричних функција је Хопфова подалгебра алгебре квази-симетричних функција. Она је комутативна и кокомутативна. $\mathcal{S}ym$ је самодуална, јер се на њој може дефинисати унутрашњи производ $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda,\mu}$, за све партиције λ, μ, који задовољава услове теореме 1.5.4, и онда важи

$$m_\lambda \leftrightarrow (h_\lambda)^*.$$

Нека је $\mathcal{NS}ym = k\langle H_1, H_2, \ldots \rangle$ некомутативна алгебра слободно генерисана променљивим $\{H_n\}_{n\geq 1}$. Комножење на $\mathcal{NS}ym$ дефинишемо са

$$\Delta(H_n) = \sum_{i+j=n} H_i \otimes H_j,$$

где је $H_0 = 1$.

Ако уведемо градуацију тако да је H_n степена n, $\mathcal{NS}ym$ постаје градуисана повезана Хопфова алгебра, коју зовемо Хопфова алгебра некомутативних симетричних функција.

Линеарну базу за хомогене компоненте степена n чине $\{H_\alpha\}_{\alpha\models n}$, где је

$$H_{(a_1,a_2,\ldots,a_k)} := H_{a_1} H_{a_2} \cdots H_{a_k}.$$

Идеал $\mathcal{I}$ генерисан комутаторима је Хопфов идеал у $\mathcal{NS}ym$, а количник $\mathcal{NS}ym/\mathcal{I}$ је $\mathcal{S}ym$, Хопфова алгебра симетричних функција. Количничко пресликавање слика H_α у комплетну хомогену симетричну функцију $h_{\phi(\alpha)}$.

Градуисане Хопфове алгебре $\mathcal{QS}ym$ и $\mathcal{NS}ym$ су дуалне, у градуисаном смислу [14]. Идентификација између $\mathcal{QS}ym$ и $(\mathcal{NS}ym)^*$ је

$$M_\alpha \leftrightarrow (H_\alpha)^*.$$

Такође, пресликавања $\mathcal{NS}ym \to \mathcal{S}ym$ и $\mathcal{S}ym \hookrightarrow \mathcal{QS}ym$ су међусобно дуална.

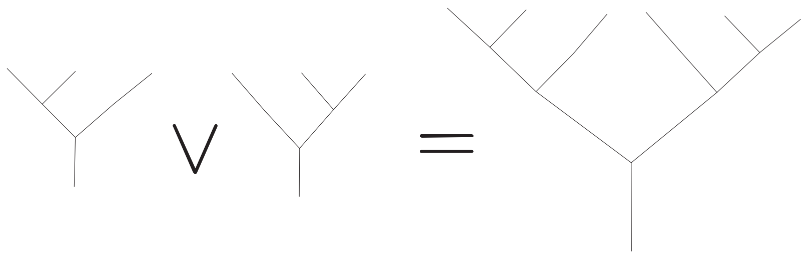
2.3 Хопфова алгебра дрвета

Лодеј и Ронко су 1998. године дефинисали Хопфову алгебру на простору генерисаном планарним бинарним дрветима [24].

Планарно дрво је оријентисани граф у равни са једним истакнутим теменом које ћемо звати корен. Оно је бинарно ако му је свако теме тровалентно. Означићемо са Y_n скуп планарних бинарних дрвета са n унутрашњих темена. Елемент $T \in Y_n$ ћемо звати n-дрво, а n ће бити његов степен. Број елемената у Y_n је n-ти Каталанов број

$$c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Графтинг дрвета $T_1 \in Y_m$ и $T_2 \in Y_n$ је дрво $T_1 \vee T_2$ из Y_{m+n+1} које се добија спајањем корена дрвета T_1 и T_2.



Слика 1: *Графтинг дрвета*

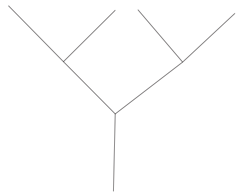
За свако дрво T постоје јединствена дрвета T_1 и T_2 тако да је $T = T_1 \vee T_2$.

Планарно бинарно дрво са нивоима је планарно бинарно дрво, на пример из Y_n, чијем је сваком унутрашњем темену придружен број из скупа $1, \ldots, n$. По дефиницији, ниво корена је n. Тако, на пример, дрвету на Слици 2 одговарају два дрвета са нивоима, што је приказано на Слици 3.

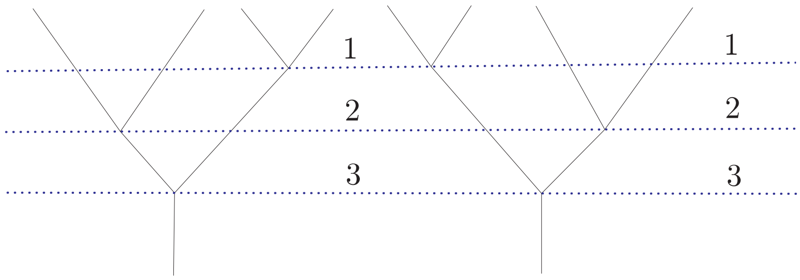
Означићемо са $\widetilde{Y_n}$ скуп планарних бинарних дрвета са n нивоа.

Сваком бинарном дрвету са нивоима може се придружити пермутација σ на следећи начин: $\sigma(i)$ је ниво темена које се налази између листова $i-1$ и i, рачунајући слева надесно. Тако дрветима са Слике 3 одговарају пермутације (231) и (132).

Такође, свакој пермутацији $\sigma \in S_n$ одговара тачно једно дрво из $\widetilde{Y_n}$. То се може показати индукцијом: низ $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ поделимо на два



Слика 2: *Дрво*



Слика 3: *Дрвета са нивоима*

дела, онај пре n и онај после n. Стандардизацијом сваког од њих добијамо две пермутације, којима по индуктивној претпоставци одговарају дрвета са нивоима. Графтинг ова два дрвета даје дрво за σ.

Дакле, постоји бијекција између планарних бинарних дрвета са нивоима и пермутација. Означимо са $\psi : S_n \to Y_n$ пресликавање које је композиција те бијекције и *заборављајућег* пресликавања $\widetilde{Y_n} \to Y_n$. Индуковано линеарно пресликавање $\psi : k[S_n] \to k[Y_n]$ има линеарни дуал $\psi^* : [Y_n] \to k[S_n]$ добијен идентификовањем сваке базе са њеним дуалом.

Тада важи $\psi^*(T) = \sum_{\sigma \in Z_T} \sigma$, где је $Z_T := \{\sigma \in S_n \mid \psi(\sigma) = T\}$.

Ако инклузионо пресликавање $\psi^* : [Y_n] \to k[S_n]$ проширимо линеарно на $\psi^* : \mathcal{Y}Sym \to \mathcal{S}Sym$, где је $\mathcal{Y}Sym = \bigoplus_{n \geq 0} k[Y_n]$, важи следеће:

Теорема 2.3.1. *[24] Слика инклузионог пресликавања $\psi^* : \mathcal{Y}Sym \to \mathcal{S}Sym$ је Хопфова подалгебра од $\mathcal{S}Sym$, односно, $\mathcal{Y}Sym$ наслеђује структуру Хопфове алгебре.*

Доказ. Довољно је доказати да је слика овог пресликавања затворена за множење и комножење из $\mathcal{S}Sym$. Ово је последица следеће две леме, доказане у [24], које повезују графтинг са операцијама у $\mathcal{S}Sym$.

Лема 1. Рестрикција шафл множења из $\mathcal{S}Sym$ на $\mathcal{Y}Sym$ задовољава формулу

$$T \cdot T' = T_1 \vee (T_2 \cdot T') + (T \cdot T_1') \vee T_2',$$

где је $T = T_1 \vee T_2$ и $T' = T_1' \vee T_2'$ и

$$| \cdot T = T = T \cdot | \, .$$

Дакле, $\mathcal{Y}Sym$ је затворена за множење.

Лема 2. Нека је $T = T_1 \vee T_2 \in Y_{n+m+1}$, где $T_1 \in Y_n$ и $T_2 \in Y_m$. Рестрикција комножења из $\mathcal{S}Sym$ на $\mathcal{Y}Sym$ задовољава релацију

$$\Delta(T) = \sum_{j,k} (T_{1(j)} \cdot T_{2(k)}) \otimes (T'_{1(n-j)} \cdot T'_{2(m-k)}) + T \otimes |,$$

где је $\Delta(T_1) = \sum_j (T_{1(j)} \otimes T'_{1(n-j)})$ и $\Delta(T_2) = \sum_k (T_{2(k)} \otimes T'_{2(m-k)})$.
Ово значи да је $\mathcal{Y}Sym$ затворена и за комножење. $\square$

Дакле, $\mathcal{Y}Sym$ има структуру Хопфове алгебре, и зовемо је Лодеј-Ронко Хопфова алгебра. Она је некомутативна, некокомутативна, и самодуална [4].

Хопфове алгебре на простору планарних дрвета су 1998. године дефинисали Кон и Крајмер [21], као и Браудер и Фрабети [7], да би описали процес ренормализације у квантној теорији поља. Познато је да су Лодеј-Ронко, Браудер-Фрабети и некомутативна Кон-Крајмер Хопфова алгебра међусобно изоморфне.

Следећи дијаграм приказује везе између градуисаних Хопфових алгебри представљених у овом поглављу. У овом дијаграму дуалност објеката, као и морфизама, представљена је рефлексијом у односу на средњу хоризонталну линију.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{Q}Sym & & \\
Sym \arrow[ur, hook] & & \mathcal{Y}Sym \arrow[ul, two heads] \arrow[r, hook, shift left] & \mathcal{S}Sym \arrow[l, two heads, shift left] \\
 & \mathcal{N}Sym \arrow[ul, two heads] \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

3 Комбинаторне Хопфове алгебре

У овом поглављу представљена је теорија карактера комбинаторних Хопфових алгебри, развијена у [1]. Ротина Хопфова алгебра коначних градуисаних посета је полазни пример комбинаторне Хопфове алгебре. Представљене су Хопфова алгебра графова и квазисиметричних функција. Показано је да Хопфова алгебра квазисиметричних функција представља терминални објекат у категорији комбинаторних Хопфових алгебри. Изведени су класични комбинаторни појмови, као што су Мебијусова функција посета, застава $f-$вектор посета и хроматска симетрична функција графа. Дефинисане су парна и непарна подалгебра комбинаторне Хопфове алгебре и дата једна примена теорије карактера у добијању разних нумеричких идентитета [32]. Дате су универзалне релације, познате као уопштене Ден-Сомервилове релације, које описују непарну подалгебру Хопфове алгебре квазисиметричних функција.

3.1 Група карактера Хопфове алгебре

Дефиниција 3.1.1. Нека је H Хопфова алгебра над пољем k. *Карактер* на H је мултипликативни линеарни функционал $\zeta : H \to k$. Дакле, ζ је линеарно пресликавање за које важи да је $\zeta(ab) = \zeta(a)\zeta(b)$, за свако $a, b \in H$ и $\zeta(1) = 1$.

Конволуцијски производ два карактера $\varphi, \psi : H \to k$, дат са

$$H \xrightarrow{\Delta_H} H \otimes H \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} k \otimes k \xrightarrow{m_k} k$$

такође је карактер. Овај производ ћемо означавати са $\varphi\psi$. Скуп карактера $\mathbb{X}(H)$ произвољне Хопфове алгебре је група у односу на конволуцијско множење. Јединични елемент је којединица ϵ_H, а инверз карактера φ је $\varphi \circ S_H$, где је S_H антипод од H. То можемо лако проверити користећи аксиому антипода и чињеницу да је φ морфизам алгебри:

$$\varphi(\varphi \circ S_H) = m_k \circ (\varphi \otimes (\varphi \circ S_H)) \circ \Delta_H = m_k \circ (\varphi \otimes \varphi) \circ (id \otimes S_H) \circ \Delta_H =$$

$$= \varphi \circ m_H \circ (id \otimes S_H) \circ \Delta_H = \varphi \circ u_H \circ \epsilon_H = u_k \circ \epsilon_H = \epsilon_H,$$

где су u_H и u_k јединице од H и k.

Ако је Хопфова алгебра H кокомутативна, група карактера $\mathbb{X}(H)$ је Абелова.

Сваки морфизам Хопфових алгебри $\alpha : H' \to H$ индукује морфизам група карактера $\alpha^* : \mathbb{X}(H) \to \mathbb{X}(H')$ који је дефинисан са $\alpha^*(\varphi) = \varphi \circ \alpha$ за $\varphi \in \mathbb{X}(H)$. Ово је тачно, јер из чињенице да је α морфизам алгебри следи да је $\alpha^*(\varphi)$ карактер на H', а пошто је α и морфизам коалгебри, α^* ће бити хомоморфизам група.

На свакој градуисаној Хопфовој алгебри можемо дефинисати канонски аутоморфизам

$$h \mapsto \bar{h} := (-1)^n h,$$

где је $h \in H_n$ хомогени елемент степена n. Ово пресликавање је очигледно инволуција: $\bar{\bar{h}} = h$, па индукује инволуцију $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ на групи карактера од H, дату са

$$\bar{\varphi}(h) = (-1)^n \varphi(h) \text{ за } h \in H_n.$$

Дефиниција 3.1.2. За карактер φ градуисане Хопфове алгебре H кажемо да је *паран* ако је

$$\bar{\varphi} = \varphi,$$

а да је *непаран* ако је

$$\bar{\varphi} = \varphi^{-1}.$$

Парни карактери чине подгрупу групе $\mathbb{X}(H)$ коју ћемо означити са $\mathbb{X}_+(H)$. Скуп непарних карактера $\mathbb{X}_-(H)$ у општем случају није подгрупа од $\mathbb{X}(H)$, али ће то важити када је H кокомутативна.

Сваки морфизам Хопфових алгебри $\alpha : H' \to H$ чува канонску инволуцију, што значи да морфизам група $\alpha^* : \mathbb{X}(H) \to \mathbb{X}(H')$ чува парне и непарне карактере.

Пример 3.1.3. За произвољан карактер ζ градуисане Хопфове алгебре H постоји природан начин да се конструише непаран карактер помоћу њега. Дефинишимо

$$\nu := \overline{(\zeta^{-1})}\zeta.$$

Тада је

$$\overline{\nu} = \overline{\overline{\zeta^{-1}}}\ \overline{\zeta} = \zeta^{-1}\overline{\zeta} = \nu^{-1},$$

па је ν непаран. Дефинишимо и карактер

$$\chi := \overline{\zeta}\zeta.$$

За њега важи

$$\overline{\chi} = \overline{\overline{\zeta}}\,\overline{\zeta} = \zeta\overline{\zeta}.$$

Ако је H кокомутативна, тада је $\zeta\overline{\zeta} = \overline{\zeta}\zeta$, па је χ паран.

Надаље ћемо претпоставити да је H градуисана, повезана, локално коначна Хопфова алгебра. Са H^* означићемо градуисани дуал од H, $H^* = \bigoplus_{n\geq 0} H_n^*$. За дати линеарни функционал $\varphi : H \to k$ уводимо ознаку

$$\varphi_n := \varphi|_{H_n} \in H_n^*.$$

Пошто комножење на H чува градуацију, имамо

$$(\varphi\psi)_n = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i \psi_{n-i}.$$

За карактер φ ће важити и $\varphi_0 = \epsilon$. Такође, ако је карактеристика поља k различита од 2, карактер ζ је паран ако и само ако је $\zeta_{2n+1} = 0$ за све $n \geq 0$.

У [1] је доказана следећа важна теорема о разлагању карактера на паран и непаран део. Наводимо укратко доказ, јер су нам ти делови веома битни у ономе што следи.

Теорема 3.1.4. *Нека је H градуисана повезана Хопфова алгебра над пољем k чија је карактеристика различита од 2. Сваки карактер $\zeta : H \to k$ може се на јединствен начин представити као производ једног парног и једног непарног карактера:*

$$\zeta = \zeta_+\zeta_-.$$

Посебно, једини карактер који је и паран и непаран је тривијални, тј. којединица.

Доказ. Показаћемо прво да за дати карактер $\zeta : H \to k$ постоји јединствени карактер $\rho : H \to k$ тако да важи:

$$\overline{\zeta} = \rho\zeta^{-1}\rho \text{ и } \rho_0 = \epsilon.$$

Из $(\overline{\zeta})_n = (\rho\zeta^{-1}\rho)_n$ следи да, ако хоћемо да конструишемо ρ, морамо да решимо следеће једначине у H^*, за свако $n \geq 1$:

$$\overline{\zeta}_n = 2\rho_n + \zeta_n^{-1} + \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k<n}} \rho_i(\zeta^{-1})_j\rho_k.$$

Пошто је поље карактеристике различите од 2, ове једначине имају јединствено решење ρ_n, конструисано рекурзивно из $\rho_0 = \epsilon$.

Докажимо сада да је карактер ρ паран. Имамо

$$\overline{\zeta} = \rho\zeta^{-1}\rho \;\Rightarrow\; \zeta = \overline{\rho}\,\overline{\zeta^{-1}}\,\overline{\rho} \;\Rightarrow\; \overline{\zeta^{-1}} = \overline{\rho}^{-1}\zeta\overline{\rho}^{-1} \;\Rightarrow\; \overline{\zeta} = \overline{\rho}\zeta^{-1}\overline{\rho}.$$

Из јединствености горе конструисаног ρ, следи да мора бити $\rho = \overline{\rho}$, то јест, ρ је паран. Означимо ρ са ζ_+.

Нека је $\zeta_- := (\zeta_+)^{-1}\zeta$. Тада је $\zeta = \zeta_+\zeta_-$, и

$$\overline{\zeta_-} = \overline{\zeta_+^{-1}}\,\overline{\zeta} = \zeta_+^{-1}(\zeta_+\zeta^{-1}\zeta_+) = \zeta^{-1}\zeta_+ = (\zeta_-)^{-1},$$

па је ζ_- непаран. Овим смо показали егзистенцију парног и непарног карактера чији је производ ζ.

Нека је $\zeta = \varphi\psi$, где је φ паран и ψ непаран, друга декомпозиција. Тада је

$$\overline{\zeta} = \overline{\varphi}\,\overline{\psi} = \varphi\psi^{-1},$$

а с друге стране

$$\varphi\zeta^{-1}\varphi = \varphi\psi^{-1}\varphi^{-1}\varphi = \varphi\psi^{-1}.$$

Дакле, $\overline{\zeta} = \varphi\zeta^{-1}\varphi$. Због јединствености овакве декомпозиције мора важити $\varphi = \zeta_+$, а онда је и $\psi = \varphi^{-1}\zeta = \zeta_-$.

□

Карактере ζ_+ и ζ_- називаћемо парним, односно непарним делом карактера ζ.

Канонски карактери ν и χ из примера 3.1.3 повезани су са овом декомпозицијом на следећи начин:

$$\nu = (\zeta_-)^2 \text{ и, ако је } H \text{ кокомутативна, } \chi = (\zeta_+)^2\ .$$

Заиста, из једнакости $\overline{\zeta} = \zeta_+\zeta^{-1}\zeta_+$ следи да је $(\overline{\zeta})^{-1} = (\zeta_+)^{-1}\zeta(\zeta_+)^{-1}$, па је

$$(\zeta_-)^2 = (\zeta_+)^{-1}\zeta(\zeta_+)^{-1}\zeta = \overline{\zeta}^{-1}\zeta = \nu,$$

по самој дефиницији ν. Ако је H кокомутативна, једнакост $\overline{\zeta} = \zeta_+\zeta^{-1}\zeta_+$ постаје $\overline{\zeta} = (\zeta_+)^2\zeta^{-1}$, одакле, по дефиницији χ, следи $\chi = (\zeta_+)^2$.

3.2 Увођење комбинаторних Хопфових алгебри

Дефиниција 3.2.1. *Комбинаторна Хопфова алгебра* је пар (H, ζ), где је H градуисана, повезана, локално коначна Хопфова алгебра над пољем k, а $\zeta : H \to k$ је карактер.

Морфизам комбинаторних Хопфових алгебри $\alpha : (H', \zeta') \to (H, \zeta)$ је морфизам $\alpha : H' \to H$ градуисаних Хопфових алгебри такав да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}' \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\zeta'"'] & & \mathcal{H} \arrow[dl, "\zeta"] \\ & \mathbb{k} & \end{tikzcd}$$

Комбинаторне Хопфове алгебре над пољем k, заједно са својим морфизмима, чине категорију комбинаторних Хопфових алгебри над k. Канонски карактери које придружујемо ζ-карактеру комбинаторне Хопфове алгебре су:

$$\zeta^{-1} = \zeta \circ S_H \text{ је Мебијусов карактер,}$$
$$\chi = \bar{\zeta}\zeta \text{ је Ојлеров карактер,}$$
$$\nu = \bar{\zeta}^{-1}\zeta \text{ је непаран карактер.}$$

Пример 3.2.2. **Ротина Хопфова алгебра**

Нека је P коначан парцијално уређен скуп (посет) са минималним елементом 0_P и максималним елементом 1_P. Рећи ћемо да је P градуисан ако сви његови максимални ланци имају исту дужину. Ранг посета P је дужина максималног ланца од 0_P до 1_P. За градуисани посет P функција ранга $rk : P \to \mathbb{N}$ је дата са $rk(x)$ је ранг посета $([0, x])$, где је $[0, x] = \{y : 0 \leq y \leq x\}$. Ако је P градуисан посет ранга $n+1$, његов *f-вектор* дефинише се као

$$f(P) = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}),$$

где је f_i број елемената посета P ранга $i+1$. Како P има јединствен минимални елемент 0_P и максимални елемент 1_P, важи $f_{-1} = f_n = 1$.

Такође, за градуисан посет P ранга $n+1$ и композицију $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \models n+1$, са f_α означимо број ланаца $0_P = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = 1_P$ таквих да је $rk[x_{i-1}, x_i] = \alpha_i$ за свако $i = 1, \ldots, k$. Низ $\{f_\alpha(P)\}_{\alpha \models n+1}$ назива се *флег* или *застава f-вектор* посета P.

Нека је $\mathcal{R}$ векторски простор над пољем k, чија је база скуп свих класа изоморфних коначних градуисаних посета. $\mathcal{R}$ је градуисана, повезана Хопфова алгебра, где је градуација дата по рангу посета. Множење је Декартов производ посета

$$P \cdot Q := P \times Q,$$

јединични елемент је једночлани посет, комножење је

$$\Delta(P) := \sum_{0_P \leq z \leq 1_P} [0_P, z] \otimes [z, 1_P],$$

а којединица је

$$\epsilon(P) := \begin{cases} 1, & \text{ако је } 0_P = 1_P, \\ 0, & \text{ако је } 0_P < 1_P. \end{cases}$$

Овде је, за $x, y \in P$, са $[x, y]$ означен потпосет $\{z \in P | x \leq z \leq y\}$.

Ова Хопфова алгебра се први пут јавља у раду Јони и Роте [23]. Она је и комбинаторна Хопфова алгебра, при чему је *зета функција посета* дата са $\zeta(P) = 1$ за сваки посет P.

Израчунајмо вредност Мебијусовог карактера ζ^{-1}. Из $\zeta^{-1}\zeta = \epsilon$ добијамо

$$\zeta^{-1}([x, x]) = 1 \text{ за свако } x \in P \text{ и } \sum_{x \leq z \leq y} \zeta^{-1}([x, z]) = 0 \text{ за свако } x < y \text{ из } P.$$

Ово је тачно дефиниција Мебијусове функције на посетима, па следи да је Мебијусов карактер ζ^{-1} класична Мебијусова функција μ, у смислу $\zeta^{-1}(P) = \mu([0_P, 1_P])$.

Размотримо сада Ојлеров карактер χ. Имамо

$$\chi(P) = \sum_{z \in P} (-1)^{rk[0_P, z]} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_i(P),$$

где је $n = rk(P)$, а $f_i(P)$ је број елемената из P ранга i, тј. компонента f-вектора.

Пример 3.2.3. Нека је $\mathcal{P}$ k-векторски простор чија је база скуп свих класа изоморфизама коначних посета, који не морају бити градуисани. $\mathcal{P}$ је градуисана, повезана Хопфова алгебра, где је степен посета P број његових елемената, у ознаци $\#P$. Производ је дисјунктна унија посета

$$P \cdot Q := P \sqcup Q,$$

јединица је празан скуп, а копроизвод је

$$\Delta(P) := \sum_{I \leq P} I \otimes (P \setminus I).$$

Овде $I \leq P$ значи да је I *доњи идеал* од P, то јест, ако је $x \in P, y \in I$ и $x \leq y$, тада $x \in I$.

Простор $\mathcal{P}$ постаје комбинаторна Хопфова алгебра ако дефинишемо карактер $\zeta : \mathcal{P} \to k$ са $\zeta(P) = 1$ за сваки посет P.

3.3 Терминални објекат у категорији комбинаторних Хопфових алгебри

На Хопфовој алгебри квази-симетричних функција $\mathcal{Q}Sym$ дефинисаћемо канонски карактер, тј. морфизам алгебри $\zeta_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}Sym \to k$ са

$$\zeta_{\mathcal{Q}}(x_1) = 1 \text{ и } \zeta_{\mathcal{Q}}(x_i) = 0 \text{ за све } i \neq 1.$$

Вредност канонског карактера на мономијалној бази је

$$\zeta_{\mathcal{Q}}(M_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \alpha = (n) \text{ или } (), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пошто је Хопфова алгебра некомутативних симетричних функција $\mathcal{NS}ym$ дуална алгебри квази-симетричних функција, при чему елементу M^*_α одговара H_α, важиће једнакост

$$\zeta_{\mathcal{Q}}|_{(\mathcal{Q}Sym)_n} = H_n,$$

међу елементима из $(\mathcal{Q}Sym_n)^* = \mathcal{NS}ym_n$.

У категорији комбинаторних Хопфових алгебри $(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ је терминални објекат [1].

Теорема 3.3.1. *За сваку комбинаторну Хопфову алгебру* (H, ζ) *постоји јединствени морфизам комбинаторних Хопфових алгебри*

$$\Psi : (H, \zeta) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}}),$$

који је за $h \in H_n$ *дат са*

$$\Psi(h) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(h) M_\alpha. \tag{2}$$

Овде је, за $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, ζ_α *композиција*

$$H \xrightarrow{\Delta^{(k-1)}} H^{\otimes k} \longrightarrow H_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes H_{\alpha_k} \xrightarrow{\zeta^{\otimes k}} k,$$

где је неозначено пресликавање канонска пројекција на хомогене компоненте.

□

Када је реч о кокомутативним Хопфовим алгебрама, Хопфова алгебра симетричних функција задовољава исто универзално својство. Нека је $\zeta_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}ym \to k$ рестрикција канонског карактера $\zeta_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}Sym \to k$,

$$\zeta_{\mathcal{S}}(m_\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \lambda = (n) \text{ или } (), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 3.3.2. *За сваку кокомутативну комбинаторну Хопфову алгебру* (H, ζ) *постоји јединствени морфизам комбинаторних Хопфових алгебри*

$$\Psi : (H, \zeta) \to (\mathcal{S}ym, \zeta_{\mathcal{S}}).$$

□

Пример 3.3.3. Нека је $\mathcal{R}$ Ротина Хопфова алгебра. По теореми 3.3.1 постоји морфизам градуисаних Хопфових алгебри $\Psi : \mathcal{R} \to \mathcal{Q}Sym$. Ако је P градуисан посет ранга n и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ композиција броја n, тада је $\zeta_\alpha(P)$ број ланаца

$$0_P = z_0 < z_1 < \cdots < z_k = 1_P$$

у P таквих да је $rk[z_{i-1}, z_i] = \alpha_i$ за свако $i = 1, \dots, k$. Ово значи да је $\zeta_\alpha(P)$ заправо $f_\alpha(P)$, застава f-вектор од P, па имамо

$$\Psi(P) = \sum_{\alpha \models n} f_\alpha(P) M_\alpha = \sum_{\substack{0_P = z_0 < z_1 < \cdots < z_k = 1_P, \\ i_1 < \cdots < i_k}} x_{i_1}^{rk[z_0, z_1]} \cdots x_{i_k}^{rk[z_{k-1}, z_k]}.$$

Овај морфизам је увео Еренборг [11].

Пример 3.3.4. **Хроматска Хопфова алгебра**

Нека је $\mathcal{G}$ векторски простор над пољем k чија је база скуп свих класа изоморфизама коначних графова. Нека $V(G)$ означава скуп темена графа G. За $S \subseteq V(G)$ означимо са $G|_S$ граф чији је скуп темена S, а ивице су му оне ивице из G чија су оба краја у S. $\mathcal{G}$ је градуисана, повезана Хопфова алгебра, где је градуација дата по броју темена графа $|G| := \#V(G)$, множење је дисјунктна унија графова $G \cdot H := G \sqcup H$, а копроизвод

$$\Delta(G) := \sum_{S \subseteq V(G)} G|_S \otimes G|_{S^C}.$$

Приметимо да је овако дефинисано комножење кокомутативно.

За граф кажемо да је *дискретан* ако нема ивице. Ако дефинишемо пресликавање $\zeta : \mathcal{G} \to k$ са

$$\zeta(G) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } G \text{ дискретан} \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$(\mathcal{G}, \zeta)$ постаје кокомутативна комбинаторна Хопфова алгебра. По теореми 3.3.2, постоји морфизам $\Psi : \mathcal{G} \to \mathcal{S}ym$. Ако је G граф са n темена и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ композиција броја n, тада је $\zeta_\alpha(G)$ број уређених декомпозиција

$$V(G) = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_k$$

таквих да је $G|_{S_i}$ дискретан и $\#S_i = a_i$ за свако $i = 1, \ldots, k$.

Правилно бојење графа G је пресликавање $f : V(G) \to \mathbb{N}$ такво да је $f(v) \neq f(w)$ када су темена v и w повезана ивицом. Приметимо да за сваку уређену декомпозицију скупа темена $V(G) = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_k$ и позитивне бројеве $i_1 < \cdots < i_k$ постоји правилно бојење f дато са $f|_{S_j} = i_j$, и обрнуто. Из дефиниције мономијалне базе и формуле (2) следи да је

$$\Psi(G) = \sum_f \prod_{v \in V(G)} x_{f(v)},$$

где се сумирање врши по свим правилним бојењима графа G. Функцију $\Psi(G)$ зовемо *Стенлијева хроматска симетрична функција* графа [30].

У наредним примерима посматраћемо Хопфову алгебру квазисиметричних функција и морфизам $\Psi : \mathcal{Q}Sym \to \mathcal{Q}Sym$ из теореме 3.3.1, за различите карактере ζ на $\mathcal{Q}Sym$.

Ако су α и β две композиције броја n, из дефиниције комножења у $\mathcal{Q}Sym$ следи да је

$$\zeta_\alpha(M_\beta) = \begin{cases} \zeta(M_{\beta_1}) \cdots \zeta(M_{\beta_l}), & \text{ако је } \alpha \leq \beta \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где су композиције $\beta_1, \ldots, \beta_l$ дефинисане са $\beta = \beta_1 \cdots \beta_l$ (надовезивање композиција) и $\alpha = (|\beta_1|, \ldots, |\beta_l|)$. Формула (2) тада гласи

$$\Psi(M_\beta) = \sum_{\beta = \beta_1 \cdots \beta_l} \zeta(M_{\beta_1}) \cdots \zeta(M_{\beta_l}) M_{(|\beta_1|, \ldots, |\beta_l|)}. \tag{3}$$

Пример 3.3.5. Нека је $m \in \mathbb{Z}$ и $\Psi_m : \mathcal{Q}Sym \to \mathcal{Q}Sym$ јединствен морфизам Хопфових алгебри за који је $\zeta_{\mathcal{Q}} \circ \Psi_m = \zeta_{\mathcal{Q}}^m$, m-ти конволуцијски степен од $\zeta_{\mathcal{Q}}$. Поново из дефиниције комножења у $\mathcal{Q}Sym$ следи да је за сваку композицију β и ненегативни цео број m

$$\zeta_{\mathcal{Q}}^m(M_\beta) = \binom{m}{k(\beta)}, \tag{4}$$

где је $k(\beta)$ дужина композиције β.

Онда, по (3), имамо

$$\Psi_m(M_\beta) = \sum_{\beta=\beta_1\cdots\beta_h} \binom{m}{k(\beta_1)} \cdots \binom{m}{k(\beta_h)} M_{(|\beta_1|,\ldots,|\beta_h|)}.$$

Пример 3.3.6. За дату коалгебру C, *коопозитна* коалгебра C^{cop} се добија променом редоследа тензорских фактора у копроизводу из C, тј. $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$, где је τ твист пресликавање. Применимо универзално својство на $(H,\zeta) = (\mathcal{Q}Sym^{cop}, \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})$. Морфизам Хопфових алгебри $\mathcal{Q}Sym^{cop} \to \mathcal{Q}Sym$ је управо антипод S из $\mathcal{Q}Sym$, пошто је $S : \mathcal{Q}Sym \to \mathcal{Q}Sym$ антиморфизам коалгебри и важи $\zeta_{\mathcal{Q}} \circ S = \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}$. То значи да ћемо из теореме 3.3.1 добити експлицитну формулу за антипод у $\mathcal{Q}Sym$. Из (4), имајући у виду да је $\binom{-1}{k} = (-1)^k$, добијамо

$$\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}(M_\beta) = (-1)^{k(\beta)}. \tag{5}$$

Тада, пошто је $\Delta^{cop}(M_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}) = \sum_{i=0}^{k} M_{(\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_k)} \otimes M_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_i)}$, формула (2) даје

$$S(M_\beta) = (-1)^{k(\beta)} \sum_{\alpha \le \tilde{\beta}} M_\alpha,$$

где је за $\beta = (\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_k)$, $\tilde{\beta} = (\beta_k, \ldots, \beta_2, \beta_1)$.

3.4 Неки идентитети за мултиномне и централне биномне коефицијенте

Парни и непарни делови, $(\zeta_{\mathcal{Q}})_+$ и $(\zeta_{\mathcal{Q}})_-$, универзалног карактера $\zeta_{\mathcal{Q}}$ Хопфове алгебре квази-симетричних функција $\mathcal{Q}Sym$ су експлицитно израчунати у [2](Теорема 3.2.). За композицију $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ броја n, нека $k_e(\alpha)$ и $k_o(\alpha)$ редом означавају бројеве парних и непарних делова у α. Означимо са $C(0,m) = \binom{2m}{m}$ централни биномни коефицијент, а са $\frac{1}{2}C(1,m) = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$ m-ти Каталанов број. Тада је

$$(\zeta_{\mathcal{Q}})_-(M_\alpha) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k_e(\alpha)}}{2^{2\lfloor k_o(\alpha)/2 \rfloor}} C(0, \lfloor k_o(\alpha)/2 \rfloor), & \text{за } a_k \text{ непаран} \\ 0, & \text{за } a_k \text{ паран;} \end{cases} \tag{6}$$

$$(\zeta_{\mathcal{Q}})_+(M_\alpha) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k_e(\alpha)+1}}{2^{k_o(\alpha)}} C(1, k_o(\alpha)/2 - 1), & \text{за } a_1, a_k \text{ непарне, } n \text{ паран} \\ 1, & \text{за } \alpha = (n), \ n \text{ паран} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{7}$$

Парни и непарни делови инверза универзалног карактера $\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}$, који су израчунати у [2], (Теорема 8.4.), дати су са

$$(\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})_-(M_\alpha) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k(\alpha)}}{2^{2\lfloor k_o(\alpha)/2\rfloor}} C(0, \lfloor k_o(\alpha)/2 \rfloor), & \text{за } a_1 \text{ непаран} \\ 0, & \text{за } a_1 \text{ паран;} \end{cases} \tag{8}$$

$$(\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})_+(M_\alpha) = \begin{cases} \frac{(-1)^{k(\alpha)}}{2^{k_o(\alpha)}} C(0, k_o(\alpha)/2), & \text{за } n \text{ паран} \\ 0, & \text{за } n \text{ непаран.} \end{cases} \tag{9}$$

Тврђења која следе до краја овог одељка формулисана су и доказана у раду [32].

Теорема 3.4.1. *Канонски карактери ζ_+ и ζ_- комбинаторне Хопфове алгебре (H, ζ) су на хомогеним елементима $h \in H_n$ дати са:*

$$\zeta_\pm(h) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(h)(\zeta_{\mathcal{Q}})_\pm(M_\alpha). \tag{10}$$

Парни и непарни део $(\zeta^{-1})_+$ и $(\zeta^{-1})_-$ инверзног карактера ζ^{-1} дати су на хомогеним елементима $h \in \mathcal{H}_n$ са:

$$(\zeta^{-1})_\pm(h) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(h)(\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})_\pm(M_\alpha). \tag{11}$$

Доказ. Нека је $\Psi : (H, \zeta) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ универзални морфизам из Теореме 3.3.1. Идентитет (10) непосредно следи из

$$\zeta_\pm = (\zeta_{\mathcal{Q}})_\pm \circ \Psi.$$

Нека су S_H и $S_{\mathcal{Q}}$ антиподи Хопфових алгебри H и $\mathcal{Q}Sym$. Инверзни карактери ζ^{-1} и $\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}$ дати су са $\zeta^{-1} = \zeta \circ S_H$ и $\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1} = \zeta_{\mathcal{Q}} \circ S_{\mathcal{Q}}$. Морфизам Ψ, као морфизам Хопфових алгебри, комутира са антиподима, $S_{\mathcal{Q}} \circ \Psi = \Psi \circ S_H$. Одавде је

$$\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1} \circ \Psi = \zeta_{\mathcal{Q}} \circ S_{\mathcal{Q}} \circ \Psi = \zeta_{\mathcal{Q}} \circ \Psi \circ S_H = \zeta \circ S_H = \zeta^{-1}.$$

То значи да је $\Psi : (H, \zeta^{-1}) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})$ морфизам комбинаторних Хопфових алгебри. Онда је

$$(\zeta^{-1})_{\pm} = (\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})_{\pm} \circ \Psi.$$

Ово доказује једнакост (11). $\square$

Последица 3.4.2. *За комбинаторну Хопфову алгебру графова* $(\mathcal{G}, \zeta)$ *важе следеће једнакости:*

$$\zeta(G) = \sum_{J \subset V(G)} \sum_{\alpha \models |J|, \beta \models |J^c|} \zeta_\alpha(G|_J)\zeta_\beta(G|_{J^c})(\zeta_{\mathcal{Q}})_+(M_\alpha)(\zeta_{\mathcal{Q}})_-(M_\beta), \tag{12}$$

$$\zeta^{-1}(G) = \sum_{J \subset V(G)} \sum_{\alpha \models |J|, \beta \models |J^c|} \zeta_\alpha(G|_J)\zeta_\beta(G|_{J^c})(\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})_+(M_\alpha)(\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})_-(M_\beta). \tag{13}$$

Доказ. Ове једнакости добијамо када заменимо формуле (10) и (11) за Хопфову алгебру $\mathcal{G}$, у идентитете

$$\zeta = \zeta_+\zeta_- \quad \text{и} \quad \zeta^{-1} = (\zeta^{-1})_+(\zeta^{-1})_-.$$

$\square$

Из формула (10)-(13) могу се добити занимљиви нумерички идентитети, у зависности од комбинаторике графова.

Означимо са $\binom{n}{\alpha} = \binom{n}{a_1\ a_2 \dots a_k} = \frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_k!}$ мултиномијални коефицијент који одговара композицији $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k) \models n$.

Тврђење 3.4.3. *За сваки паран природан број n важе једнакости:*

$$1 + \sum_{\substack{\alpha \models n \\ a_1, a_{k(\alpha)} \text{ непарни}}} \binom{n}{\alpha} \frac{(-1)^{k_e(\alpha)+1}}{2^{k_o(\alpha)}} C(1, k_o(\alpha)/2 - 1) = 0,$$

$$\sum_{\alpha \models n} \binom{n}{\alpha} \frac{(-1)^{k(\alpha)}}{2^{k_o(\alpha)}} C(0, k_o(\alpha)/2) = 0.$$

Доказ. Означимо са D_n дискретан граф са n темена. Пошто су карактери ζ_+ и ζ_+^{-1} парни и мултипликативни, имамо да је $\zeta_+(D_n) = \zeta_+^{-1}(D_n) = 0$ за све природне n. Горњи идентитети се онда добијају из (7) и (9), замењујући $h = D_n$ у (10) и (11). □

Тврђење 3.4.4. *За сваки природан број m важе једнакости:*

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{l}\binom{2l-2}{l-1}\binom{2m-2l}{m-l} = \frac{1}{2}\binom{2m}{m},$$

$$\sum_{l=0}^{m} \binom{2l}{l}\binom{2m-2l}{m-l} = 2^{2m}.$$

Доказ. Нека је K_n комплетни граф са n темена, тј. граф чија су свака два темена повезана ивицом.

Тада је $\zeta_\alpha(K_n) = \begin{cases} n!, & \text{за } \alpha = (1,\ldots,1), \\ 0, & \text{за } \alpha \neq (1,\ldots,1). \end{cases}$ Тражене једнакости се онда добијају из (6)-(9), замењујући $G = K_{2m}$ у (12) и (13).

□

Напомена 3.4.5. Идентитети из Тврђења 3.4.4 су класични нумерички идентитети. За други од њих постоји више комбинаторних доказа, од Геселовог приказаног у [22], до најновијих [10].

3.5 Парна и непарна подалгебра комбинаторне Хопфове алгебре

Дефиниција 3.5.1. Нека је H градуисана, повезана Хопфова алгебра и нека су дати карактери $\varphi, \psi : H \to k$. Са $S(\varphi, \psi)$ означићемо највећу градуисану подкоалгебру од H такву да је

$$\forall\, h \in S(\varphi, \psi),\ \varphi(h) = \psi(h),$$

док ћемо са $I(\varphi, \psi)$ означити идеал од H^* генерисан елементима

$$\varphi_n - \psi_n,\ n \geq 0.$$

Теорема 3.5.2. *[1] За $S(\varphi,\psi)$ и $I(\varphi,\psi)$ важи следеће:*

(а) $S(\varphi,\psi) = \{h \in H \mid (\forall f \in I(\varphi,\psi))\ f(h) = 0\}$.

(б) $I(\varphi,\psi)$ *је градуисан Хопфов идеал у* H^*.

(в) $S(\varphi,\psi)$ *је градуисана Хопфова подалгебра од* H.

(г) Хомогени елемент $h \in H$ *припада* $S(\varphi,\psi)$ *ако и само ако*

$$(id \otimes (\varphi - \psi) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(h) = 0. \tag{14}$$

Доказ. Означимо са $I(\varphi,\psi)^\perp := \{h \in H \mid (\forall f \in I(\varphi,\psi))\ f(h) = 0\}$. Пошто је $I(\varphi,\psi)$ генерисан хомогеним елементима, он је градуисан идеал у H^*. По тврђењу 1.5.23 из [9], $I(\varphi,\psi)^\perp$ је градуисана подкоалгебра од H.

Ако $h \in I(\varphi,\psi)^\perp$, тада је

$$\varphi(h) = \Sigma_n \varphi_n(h) = \Sigma_n \psi_n(h) = \psi(h),$$

јер $\varphi_n - \psi_n \in I(\varphi,\psi)$, па је $I(\varphi,\psi)^\perp \subseteq S(\varphi,\psi)$.

Нека је сада C градуисана подкоалгебра од H таква да је $\varphi(h) = \psi(h)$ за све $h \in C$, и нека је $h = \sum_n h_n$ из C. Пошто је C градуисана, сваки $h_n \in C$, па је

$$(\varphi_n - \psi_n)(h) = (\varphi_n - \psi_n)(h_n) = (\varphi - \psi)(h_n) = 0.$$

Дакле, $(\varphi_n - \psi_n)(C) = 0$ за све $n \geq 0$. Како је C подкоалгебра и $I(\varphi,\psi)$ идеал генерисан са $\varphi_n - \psi_n$, $n \geq 0$, следи да је $f(C) = 0$ за све $f \in I(\varphi,\psi)$. Значи, $C \subseteq I(\varphi,\psi)^\perp$, па смо доказали и да је $S(\varphi,\psi) \subseteq I(\varphi,\psi)^\perp$, тј. тврђење (*а*).

Ако су C и D градуисане подкоалгебре од H, то је и њихов производ $C \cdot D$. Такође, пошто су φ и ψ карактери, имамо

$$(\varphi - \psi)(xy) = (\varphi - \psi)(x)\varphi(y) + \psi(x)(\varphi - \psi)(y).$$

Одавде, ако је $(\varphi - \psi)(C) = (\varphi - \psi)(D) = 0$, онда је $(\varphi - \psi)(C \cdot D) = 0$, па следи да је $S(\varphi,\psi) \cdot S(\varphi,\psi) \subseteq S(\varphi,\psi)$. Такође, $H_0 = k \cdot 1$ је градуисана подкоалгебра од H и $\varphi(1) = \psi(1) = 1$, па је она садржана у $S(\varphi,\psi)$. Дакле, $S(\varphi,\psi)$ је подалгебра од H, па је, по (*а*) и тврђењу 1.5.26 из [9], $I(\varphi,\psi)$ коидеал у H^*. Овим је комплетиран доказ тврђења (*б*) и (*в*).

Остаје да докажемо део (*г*). Нека је h хомогени елемент, који задовољава (14). Тада је

$$\sum_{n\geq 0}(id \otimes (\varphi_n - \psi_n) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(h) = 0.$$

Сваки члан у овој суми је хомоген и њихови степени су различити. Зато је, за свако $n \geq 0$,

$$(id \otimes (\varphi_n - \psi_n) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(h) = 0.$$

Нека су λ и ρ произвољни елементи из H^*. Закључујемо да је за свако $n \geq 0$,

$$(\lambda(\varphi_n - \psi_n)\rho)(h) = (\lambda \otimes (\varphi_n - \psi_n) \otimes \rho) \circ \Delta^{(2)}(h) = 0.$$

Следи да је за свако $f \in I(\varphi, \psi)$, $f(h) = 0$. Одавде, по (*а*), $h \in S(\varphi, \psi)$.

Обрнуто, нека је C градуисана подкоалгебра од H таква да је $(\varphi - \psi)(C) = 0$. Тада је

$$(id \otimes (\varphi - \psi) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(C) \subseteq C \otimes (\varphi - \psi)(C) \otimes C = 0.$$

Дакле, сваки хомогени елемент из C задовољава (14). Посебно, ово важи и за $C = S(\varphi, \psi)$, што комплетира доказ тврђења (*г*). $\square$

Из претходне теореме непосредно следи да постоји изоморфизам градуисаних Хопфових алгебри

$$S(\varphi, \psi)^* \cong H^*/I(\varphi, \psi).$$

Следећа два тврђења за општи случај биће нам неопходна за парну и непарну подкоалгебру.

Тврђење 3.5.3. *[1] Нека су $\varphi, \varphi', \psi, \psi'$ карактери на Хопфовој алгебри H. Претпоставимо да важи*

$$\psi^{-1}\varphi = \psi'^{-1}\varphi' \text{ или } \varphi\psi^{-1} = \varphi'\psi'^{-1}.$$

Тада је

$$S(\varphi, \psi) = S(\varphi', \psi') \text{ и } I(\varphi, \psi) = I(\varphi', \psi').$$

$\square$

Тврђење 3.5.4. *[1] Нека је $\alpha : H' \to H$ морфизам градуисаних повезаних Хопфових алгебри. Нека су φ, ψ карактери од H и $\varphi' := \varphi \circ \alpha$ и $\psi' := \psi \circ \alpha$. Тада је*

(а) $\alpha(S(\varphi', \psi')) \subseteq S(\varphi, \psi)$;

(б) $I(\varphi', \psi')$ је идеал од $(H')^*$ генерисан са $\alpha^*(I(\varphi, \psi))$.

Посебно, ако је α инјективно, тада је

$S(\varphi', \psi')) = \alpha^{-1}(S(\varphi, \psi))$ и $I(\varphi', \psi') = \alpha^*(I(\varphi, \psi))$. □

Дефиниција 3.5.5. Нека је (H, ζ) комбинаторна Хопфова алгебра. *Парна* и *непарна подкоалгебра* од H су, респективно,

$$S_+(H, \zeta) := S(\bar{\zeta}, \zeta) \text{ и } S_-(H, \zeta) := S(\bar{\zeta}, \zeta^{-1}).$$

Парни и *непарни идеал* од H^* су, редом,

$$I_+(H, \zeta) := I(\bar{\zeta}, \zeta) \text{ и } I_-(H, \zeta) := I(\bar{\zeta}, \zeta^{-1}).$$

Користећи претходне резултате, добијамо основне особине парних и непарних подалгебри и идеала.

Тврђење 3.5.6. *[1] Нека је (H, ζ) комбинаторна Хопфова алгебра.*

(а) $S_+(H, \zeta)$ и $S_-(H, \zeta)$ су градуисане Хопфове подалгебре од H, $I_+(H, \zeta)$ и $I_-(H, \zeta)$ су градуисани Хопфови идеали од H^*, и постоји изоморфизам градуисаних Хопфових алгебри

$$S_\pm(H, \zeta)^* \cong H^*/I_\pm(H, \zeta).$$

(б) $S_+(H, \zeta)$ је највећа подкоалгебра за коју је $\zeta(h) = (-1)^n \zeta(h)$ за свако h степена n, а $S_-(H, \zeta)$ је највећа подкоалгебра за коју је $\zeta^{-1}(h) = (-1)^n \zeta(h)$ за свако h степена n.

(в) ζ је паран ако и само ако је $S_+(H, \zeta) = H$, а непаран ако и само ако је $S_-(H, \zeta) = H$.

(г) Нека су $\nu = \bar{\zeta}^{-1}\zeta$ и $\chi = \bar{\zeta}\zeta$ канонски карактери. Важи

$$S_+(H, \zeta) = S(\nu, \epsilon) \text{ и } S_-(H, \zeta) = S(\chi, \epsilon),$$

и слично за $I_\pm(H, \zeta)$.

(д) Нека је $\alpha : (H', \zeta') \to (H, \zeta)$ морфизам комбинаторних Хопфових алгебри. Тада је

$$\alpha(S_{\pm}(H', \zeta')) \subseteq S_{\pm}(H, \zeta),$$

а $I_{\pm}(H', \zeta')$ је идеал од $(H')^*$ генерисан са $\alpha^*(I_{\pm}(H, \zeta))$.

Ако је α и инјективно, тада је

$$S_{\pm}(H', \zeta') = \alpha^{-1}(S_{\pm}(H, \zeta)) \text{ и } I_{\pm}(H', \zeta') = \alpha^*(I_{\pm}(H, \zeta)).$$

□

3.6 Уопштене Ден-Сомервилове релације

Посматрајмо непарну подалгебру комбинаторне Хопфове алгебре (H, ζ),

$$S_{-}(H, \zeta) = S(\bar{\zeta}, \zeta^{-1}) = S(\chi, \epsilon).$$

Нека је $h \in H$ хомогени елемент. На основу (14), следећи услови су еквивалентни:

$$h \in S_{-}(H, \zeta)$$

$$(id \otimes (\bar{\zeta} - \zeta^{-1}) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(h) = 0 \tag{15}$$

$$(id \otimes (\chi - \epsilon) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(h) = 0. \tag{16}$$

Једначине (15) или (16) зваћемо *уопштене Ден-Сомервилове релације* за комбинаторну Хопфову алгебру (H, ζ). Пошто обе дефинишу исту подалгебру од H, имају и иста решења.

Пример 3.6.1. Описаћемо уопштене Ден-Сомервилове релације за Хопфову алгебру квази-симетричних функција. Прво, из (5), добијамо

$$(\bar{\zeta_{\mathcal{Q}}} - \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})(M_\beta) = \begin{cases} 0, & \text{ако је } \beta = () \\ (-1)^n + 1, & \text{ако је } \beta = (n) \\ -(-1)^{k(\beta)}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{17}$$

Нека је дат елемент $h = \sum_{\alpha \models n} f_\alpha(h) M_\alpha \in \mathcal{Q}Sym_n$.

Из дефиниције комножења у $\mathcal{Q}Sym$ и (17) добијамо

$$(id \otimes (\bar{\zeta_{\mathcal{Q}}} - \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(h) = \sum_{\alpha \models n} \sum_{i=1}^{k(\alpha)} E_{\alpha,i}(h) \cdot M_{\alpha_i} \otimes M_{\alpha^i},$$

где је, за композицију $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \models n$ и број $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\alpha_i := (a_1, \ldots, a_{i-1})$, $\alpha^i := (a_{i+1}, \ldots, a_k)$, а

$$E_{\alpha,i}(h) := (-1)^{a_i} f_\alpha(h) - \sum_{\beta \models a_i} (-1)^{k(\beta)} f_{\alpha \circ_i \beta}(h).$$

Овде $\alpha \circ_i \beta$ означава композицију од n добијену заменом a_i члановима композиције β; ако је $\beta = (b_1, \ldots, b_l)$, онда је

$$\alpha \circ_i \beta := (a_1, \ldots, a_{i-1}, b_1, \ldots, b_l, a_{i+1}, \ldots, a_k).$$

Пошто је горњи израз за Ден-Сомервилове релације сума линеарно независних тензора, следи да је

$$E_{\alpha,i}(h) = 0 \text{ за свако } \alpha \models n \text{ и } i \in \{1, \ldots, k(\alpha)\},$$

или експлицитно

$$(-1)^{a_i} f_\alpha(h) = \sum_{\beta \models a_i} (-1)^{k(\beta)} f_{\alpha \circ_i \beta}(h).$$

Дакле, елемент $h \in \mathcal{Q}Sym$ степена n припада $S_-(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ ако и само ако су задовољене ове релације.

Размотримо сада (16), други облик уопштених Ден-Сомервилових релација. Из самих дефиниција карактера $\zeta_{\mathcal{Q}}$ и $\chi_{\mathcal{Q}}$, имамо

$$(\chi_{\mathcal{Q}} - \epsilon_{\mathcal{Q}})(M_\beta) = \begin{cases} 1 + (-1)^n, & \text{ако је } \beta = (n) \\ (-1)^i, & \text{ако је } \beta = (i, n-i) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Одавде је

$$(id \otimes (\chi_{\mathcal{Q}} - \epsilon_{\mathcal{Q}}) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(h) = \sum_{\alpha \models n} \sum_{i=1}^{k(\alpha)} B_{\alpha,i}(h) \cdot M_{\alpha_i} \otimes M_{\alpha^i},$$

где је

$$B_{\alpha,i}(h) = \sum_{j=0}^{a_i} (-1)^j f_{(a_1,\ldots,a_{i-1},j,a_i-j,a_{i+1},\ldots,a_k)}(h).$$

Овде се подразумева да су нула делови изостављени. Дакле, релације (16) за елемент h су

$$\sum_{j=0}^{a_i} (-1)^j f_{(a_1,\ldots,a_{i-1},j,a_i-j,a_{i+1},\ldots,a_k)}(h) = 0 \text{ за све } (a_1,\ldots,a_k) \models n,\ i \in \{1,\ldots,k\}.$$

Ово су тачно уопштене Ден-Сомервилове релације које су увели Бајер и Биљера [6]. Оне су заправо формулисане за застава векторе Ојлерових посета. Подсетимо се Ротине Хопфове алгебре $(\mathcal{R}, \zeta)$. За коначан градуисан посет P кажемо да је *Ојлеров* ако његова Мебијусова функција задовољава $\mu([x,y]) = (-1)^{rk[x,y]}$ за све $x < y$ из P. Нека је $\mathcal{E}$ потпростор од $\mathcal{R}$ генерисан свим Ојлеровим посетима. Пошто су интервали Ојлерових посета такође Ојлерови, што важи и за њихове Декартове производе, $\mathcal{E}$ је Хопфова подалгебра од $\mathcal{R}$.

Како за сваки Ојлеров посет P важи да је $\zeta^{-1}(P) = \bar{\zeta}(P)$, $\mathcal{E}$ је садржана у непарној подалгебри од $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{E} \subseteq S_-(\mathcal{R}, \zeta).$$

Нека је $\Psi : (\mathcal{R}, \zeta) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ јединствени морфизам комбинаторних Хопфових алгебри, који је, по примеру 3.3.3 дат са

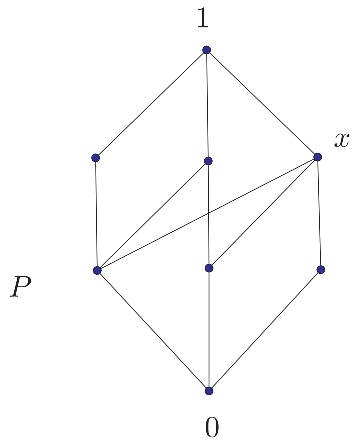
$$\Psi(P) = \sum_{\alpha \models n} f_\alpha(P) M_\alpha,$$

где је $f_\alpha(P)$ застава вектор од P. По делу (∂) Тврђења 3.5.6 је

$$\Psi(\mathcal{E}) \subseteq \Psi(S_-(\mathcal{R}, \zeta)) \subseteq S_-(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}}).$$

Дакле, застава вектор било ког Ојлеровог посета мора да задовољава уопштене Ден-Сомервилове релације из примера 3.6.1.

Напомена 3.6.2. Ојлерови посети генеришу праву подалгебру непарне подалгебре Хопфове алгебре посета. Постоје посети који задовољавају уопштене Ден-Сомервилове релације за Ротину Хопфову алгебру посета, али нису Ојлерови. Овде дајемо један пример таквог посета, који се може наћи у [12]:



Заиста, за посет P је $f_{(111)} = 6$ и $f_{(12)} = f_{(21)} = 3$, па су уопштене Ден-Сомервилове релације $2f_{(12)} = 2f_{(21)} = f_{(111)}$ задовољене. Такође, $\mu(x) = 2$, па P није Ојлеров.

4 Хопфова алгебра градивних скупова

У овом поглављу уведена је Хопфова алгебра градивних скупова(building sets) $\mathcal{B}Set$. Коришћењем основних теорема за Хопфову алгебру Витнијевих система [30], добијени су структурни идентитети за алгебру $\mathcal{B}Set$ и њен градуисани дуал $\mathcal{B}Set^*$. Уведена је хроматска симетрична функција градивног скупа. Разматра се у којој мери она разликује градивне скупове и у каквој је вези са Стенлијевом хроматском симетричном функцијом графа. Изводе се уопштене Ден-Сомервилове релације за градивне скупове и дефинишу Ојлерови градивни скупови. На крају је дата комплетна комбинаторна карактеризација Ојлерових градивних скупова.

Резултати овог поглавља објављени су у раду [17].

4.1 Дефиниција и основни појмови

Дефиниција 4.1.1. Колекција $\mathcal{B}_X \subset \mathcal{P}(X)$ непразних подскупова коначног скупа X је *градивни скуп* на X ако задовољава следећа два услова:

(Б1) Ако су $S, S' \in \mathcal{B}_X$ и $S \cap S' \neq \emptyset$, тада је $S \cup S' \in \mathcal{B}_X$;

(Б2) $\{x\} \in \mathcal{B}_X$ за све $x \in X$.

Елементе основног скупа X ћемо звати теменима. Градивни скупови на X су уређени инклузијом. За минимални градивни скуп, $\mathcal{D}_X = \{\{x\}|\ x \in X\}$, кажемо да је *дискретан*. Максимални градивни скуп $\mathcal{P}_X = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ садржи све непразне подскупове од X.

Ранг градивног скупа $\mathcal{B}_X$ дефинишемо као кардиналност основног скупа X. Рестрикција градивног скупа $\mathcal{B}_X$ на $I \subset X$ је $(\mathcal{B}_X)|_I = \{S \in \mathcal{B}_X | S \subset I\}$. То је градивни скуп на I.

Дефиниција 4.1.2. Нека су $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ градивни скупови на коначним скуповима X и Y. Пресликавање $f : X \to Y$ је пресликавање градивних скупова ако је $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}_X$ за све $S \in \mathcal{B}_Y$. За градивне скупове $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ кажемо да су *еквивалентни* ако постоји бијекција $f : X \to Y$ таква да је $f(S) \in \mathcal{B}_Y \Leftrightarrow S \in \mathcal{B}_X$.

Елементи градивног скупа су уређени инклузијом. Рестрикција $\mathcal{B}_X|_I$ на максимални елемент $I \in \mathcal{B}_X$ назива се *компонента повезаности* градивног скупа $\mathcal{B}_X$. Сваки градивни скуп је дисјунктна унија својих компоненти повезаности. За градивни скуп $\mathcal{B}_X$ кажемо да је *повезан* ако је $X \in \mathcal{B}_X$. Минимални повезани градивни скуп који садржи $\mathcal{B}_X$ је $\overline{\mathcal{B}_X} = \mathcal{B}_X \cup \{X\}$.

Претпоставимо да је дата произвољна колекција $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ подскупова коначног скупа X, таква да је сваки елемент $S \in \mathcal{C}$ ове колекције бар двочлан. Дефинисаћемо индуктивно низ колекција

$$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C},\ \mathcal{C}_{k+1} = \mathcal{C}_k \cup \{S \cup S' | S \in \mathcal{C}_0, S' \in \mathcal{C}_k, S \cap S' \neq \emptyset\},\ k \geq 0.$$

Унија $\mathcal{B}(\mathcal{C}) = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{C}_k$, заједно са свим $\{x\}$, $x \in X$, је градивни скуп на X. За сваки градивни скуп $\mathcal{B}_X$ постоји јединствена минимална колекција $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ таква да је $\mathcal{B}_X = \mathcal{B}(\mathcal{C})$. Ту колекцију зовемо *генеришућа колекција* градивног скупа $\mathcal{B}_X$.

Пример 4.1.3. Нека је G граф са скупом темена $V(G)$. Тада је колекција $\mathcal{B}(G) = \{I \subset V(G) : G|_I \text{ је повезан}\}$ градивни скуп на $V(G)$, који ћемо звати *градивни скуп графа*. Скуп ивица графа $E(G)$ је генеришућа колекција градивног скупа графа $\mathcal{B}(G)$.

Приметимо да је градивни скуп графа, $\mathcal{B}(G)$, повезан ако и само ако је граф G повезан. Такође, за сваки подскуп скупа темена $I \subset V(G)$, рестрикција $\mathcal{B}(G)|_I$ је градивни скуп $\mathcal{B}(G|_I)$ графа $G|_I$.

Нека је $\mathcal{B}Set_n$ векторски простор над пољем k генерисан класама еквиваленције градивних скупова ранга $n \in \mathbb{N}$, и нека је

$$\mathcal{B}Set = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{B}Set_n.$$

Надаље ћемо под градивним скупом $\mathcal{B}_X$ подразумевати његову класу еквиваленције. Производ градивних скупова $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$ дефинишемо са

$$\mathcal{B}_X \cdot \mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_X \sqcup \mathcal{B}_Y,$$

где је $\mathcal{B}_X \sqcup \mathcal{B}_Y = \{S \subset X \sqcup Y : S \in \mathcal{B}_X \text{ или } S \in \mathcal{B}_Y\}$ градивни скуп на дисјунктној унији $X \sqcup Y$.

На овај начин смо увели множење $m : \mathcal{B}Set \otimes \mathcal{B}Set \to \mathcal{B}Set$ на простору $\mathcal{B}Set$, које је независно од представника класа еквиваленције фактора. Са овако дефинисаним множењем, векторски простор $\mathcal{B}Set$ постаје слободна градуисана комутативна алгебра. Јединица ове алгебре је градивни скуп празног скупа, $\mathcal{B}_\emptyset$. Означимо са $Conn$ фамилију свих класа еквиваленције повезаних градивних скупова. Тада је алгебра $\mathcal{B}Set$ изоморфна полиномијалној алгебри $k[Conn]$.

Даље, за градивни скуп $\mathcal{B}_X$ дефинишемо

$$\Delta(\mathcal{B}_X) = \sum_{I \subset X} (\mathcal{B}_X)|_I \otimes (\mathcal{B}_X)|_{I^c}.$$

За операцију $\Delta : \mathcal{B}Set \to \mathcal{B}Set \otimes \mathcal{B}Set$ лако се провери да је коасоцијативна и кокомутативна.

Теорема 4.1.4. *У односу на претходно дефинисане операције, $\mathcal{B}Set$ је градуисана комутативна и кокомутативна Хопфова алгебра.*

Доказ. Довољно је показати да је горе дефинисано Δ морфизам алгебри. Заиста,

$$\Delta(\mathcal{B}_X \cdot \mathcal{B}_Y) = \Delta(\mathcal{B}_X \sqcup \mathcal{B}_Y) = \sum_{I \subset X \sqcup Y} (\mathcal{B}_X \sqcup \mathcal{B}_Y)|_I \otimes (\mathcal{B}_X \sqcup \mathcal{B}_Y)|_{I^c} =$$

$$= \sum_{I \subset X \sqcup Y} (\mathcal{B}_X)|_{I \cap X} (\mathcal{B}_Y)|_{I \cap Y} \otimes (\mathcal{B}_X)|_{I^c \cap X} (\mathcal{B}_Y)|_{I^c \cap Y} = \Delta(\mathcal{B}_X)\Delta(\mathcal{B}_Y).$$

Пошто је $\mathcal{B}Set$ градуисана, повезана биалгебра, антипод можемо израчунати по општој формули (1):

$$S(\mathcal{B}_X) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \sum_{J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_k = X} \prod_{i=1}^{k} (\mathcal{B}_X)|_{J_i},$$

за градивне скупове на $X \neq \emptyset$, где је унутрашња сума по свим уређеним k-торкама $(J_1, \ldots, J_k)$ непразних подскупова чија је дисјунктна унија X. $\square$

4.2 Дуал Хопфове алгебре $\mathcal{B}Set$

Нека је
$$\mathcal{B}Set^* = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{B}Set_n^*$$
градуисани дуал Хопфове алгебре градивних скупова $\mathcal{B}Set$. Означимо вредност $\delta \in \mathcal{B}Set^*$ на $\mathcal{B} \in \mathcal{B}Set$ са $\langle \delta, \mathcal{B} \rangle$. На основу дефиниција операција у дуалу, производ и копроизвод на $\mathcal{B}Set^*$ су одређени са

$$\langle \delta\eta, \mathcal{B} \rangle = m \circ (\delta \otimes \eta) \circ \Delta(\mathcal{B}),$$

$$\langle \Delta(\delta), \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 \rangle = \langle \delta, \mathcal{B}_1\mathcal{B}_2 \rangle.$$

Како је $\mathcal{B}Set$ комутативна и кокомутативна Хопфова алгебра, таква је и $\mathcal{B}Set^*$. Као векторски простор, $\mathcal{B}Set^*$ је генерисана свим $\delta_{\mathcal{B}_X}$, где је

$$\langle \delta_{\mathcal{B}_X}, \mathcal{B}_Y \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \mathcal{B}_X = \mathcal{B}_Y, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

за сваки пар градивних скупова $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$. Користећи [28], доказаћемо следећу структурну теорему:

Теорема 4.2.1. *Градуисани дуал $\mathcal{B}Set^*$ Хопфове алгебре градивних скупова $\mathcal{B}Set$ је изоморфан полиномијалној Хопфовој алгебри $k[Conn]$, генерисаној фамилијом $Conn$ свих класа еквиваленције повезаних градивних скупова, и при том су неодређене примитивни елементи.*

Да бисмо доказали претходну теорему, дефинисаћемо парцијално уређење на градивним скуповима, а затим искористити одговарајућу алгебру инциденције.

За градивне скупове $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_{X_1}, \ldots \mathcal{B}_{X_k}$, са $\binom{\mathcal{B}_X}{\mathcal{B}_{X_1},\ldots,\mathcal{B}_{X_k}}$ означићемо број уређених декомпозиција $I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k = X$ таквих да је $(\mathcal{B}_X)|_{I_j} = \mathcal{B}_{X_j}$ за све $j = 1, \ldots, k$. На пример, $\binom{\mathcal{D}_n}{\mathcal{D}_k,\mathcal{D}_{n-k}} = \binom{n}{k}$, где је $\mathcal{D}_j$ дискретан градивни скуп са j елемената.

Тада важи следећа формула за производ

$$\delta_{\mathcal{B}_{X_1}} \cdots \delta_{\mathcal{B}_{X_k}} = \sum_{\mathcal{B}_X \in BSet_n} \binom{\mathcal{B}_X}{\mathcal{B}_{X_1}, \ldots, \mathcal{B}_{X_k}} \delta_{\mathcal{B}_X}, \tag{18}$$

где је $n = |X_1| + \cdots + |X_k|$.

За два градивна скупа $\mathcal{B}_X$ и $\mathcal{B}_Y$, дефинишемо $\binom{\mathcal{B}_X}{\mathcal{B}_Y} = \binom{\mathcal{B}_X}{\mathcal{B}_{Y_1},\ldots,\mathcal{B}_{Y_k}}$, где је $\mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_{Y_1}\cdots\mathcal{B}_{Y_k}$ декомпозиција $\mathcal{B}_Y$ на компоненте повезаности. Сада можемо да дефинишемо релацију $\preceq$ на $\mathcal{B}Set$ са

$$\mathcal{B}_Y \preceq \mathcal{B}_X \text{ ако и само ако } \binom{\mathcal{B}_X}{\mathcal{B}_Y} \neq 0 \text{ или } X = \emptyset.$$

Тврђење 4.2.2. *Релација $\preceq$ је парцијално уређење на $\mathcal{B}Set$.*

Доказ. Пресликавање $i : Y \to X$ ћемо звати утапање градивних скупова ако је инјективно и $(\mathcal{B}_Y)|_I = (\mathcal{B}_X)|_{i(I)}$, за све $I \in \mathcal{B}_Y$. Релација $\mathcal{B}_Y \preceq \mathcal{B}_X$ је онда еквивалентна томе да постоји бијективно утапање. Свако утапање задовољава $i(I) \in \mathcal{B}_X$ за све $I \in \mathcal{B}_Y$. Идентично пресликавање је утапање, као и композиција два утапања. Дакле, $\preceq$ је рефлексивна и транзитивна релација. Нека су $i : Y \to X$ и $j : X \to Y$ утапања градивних скупова $\mathcal{B}_Y$ и $\mathcal{B}_X$. Тада је ji пермутација коначног скупа Y, па је коначног реда r. Како је у питању утапање, имамо да је $I \in \mathcal{B}_Y \Rightarrow i(I) \in \mathcal{B}_X \Rightarrow ji(I) \in \mathcal{B}_Y \Rightarrow \cdots \Rightarrow (ji)^r(I) = I \in \mathcal{B}_Y$. Одавде следи да је i еквиваленција градивних скупова. $\square$

Пресликавање $D : \mathcal{B}Set \to \mathcal{B}Set^*$ које сваком градивном скупу придружује његов дуал $D(\mathcal{B}_X) = \delta_{\mathcal{B}_X}$, није морфизам алгебри, пошто је $\delta_{\mathcal{B}_X\mathcal{B}_Y} \neq \delta_{\mathcal{B}_X}\delta_{\mathcal{B}_Y}$, али његова рестрикција на повезане градивне скупове даје изоморфизам алгебри.

Тврђење 4.2.3. *Морфизам алгебри $\Phi : \mathcal{B}Set \to \mathcal{B}Set^*$, дефинисан на повезаним градивним скуповима са $\Phi(\mathcal{B}_X) = \delta_{\mathcal{B}_X}$, је изоморфизам.*

Доказ. Алгебра $\mathcal{B}Set$ је изоморфна полиномијалној алгебри $k[Conn]$, генерисаној фамилијом $Conn$ свих класа еквиваленције повезаних градивних скупова. Из формуле (18) следи да је пресликавање Φ дефинисано на бази векторског простора $BSet$ са

$$\Phi(\mathcal{B}_Y) = \sum_{\mathcal{B}_Y \preceq \mathcal{B}_X} \binom{\mathcal{B}_X}{\mathcal{B}_Y} \delta_{\mathcal{B}_X}.$$

Матрица градуисаног линеарног пресликавања Φ је троугаона са дијагоналним елементима $\binom{\mathcal{B}_Y}{\mathcal{B}_Y} \neq 0$. Следи да је Φ изоморфизам алгебри. $\square$

Сада ћемо експлицитно одредити инверзни морфизам $\Phi^{-1} : \mathcal{B}Set^* \to \mathcal{B}Set$. У ту сврху подсетићемо се дефиниције алгебре инциденције.

Ако је $(P, \leq)$ посет, интервал у P је непразан потпосет облика

$$[x, y] = \{z \in P | \ x \leq z \leq y\}.$$

За посет кажемо да је *локално коначан* ако су сви његови интервали коначни. Сваком локално коначном посету P можемо придружити *алгебру инциденције* $I(P)$ над датим пољем k. Елементи алгебре $I(P)$ су све функције облика $f : P \times P \to k$, такве да је $f(x, y) = 0$ ако је $x > y$. Означимо са $Int(P) = \{[x, y] | x \leq y\}$ скуп свих интервала посета P. Тада елемент $f \in I(P)$ можемо посматрати и као функцију $f : Int(P) \to k$.

Сабирање и множење скаларима су дефинисани са

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y), \ (\lambda f)(x, y) = \lambda f(x, y).$$

Производ два елемента $f, g \in I(P)$ је конволуција $f * g$:

$$(f * g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y).$$

Јединични елемент δ алгебре $I(P)$ је Кронекерова делта функција

$$\delta(x, y) = \delta_{x,y}, \ x \leq y.$$

Елемент $f \in I(P)$ има конволуцијски инверз ако и само ако је $f(x, x) \neq 0$ за све $x \in P$. У том случају f^{-1} је одређен рекурзивно из једнакости

$$f^{-1}(x, x) = \frac{1}{f(x, x)}, \ x \in P$$

$$f^{-1}(x, y) = -\frac{1}{f(y, y)} \sum_{x \leq z < y} f^{-1}(x, z) f(z, y), \ x < y.$$

Ова рекурзија даје директну формулу за конволуцијски инверз:

$$f^{-1}(x, y) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\mathcal{L}_k} (-1)^k \frac{f(x_0, x_1) f(x_1, x_2) \cdots f(x_{k-1}, x_k)}{f(x_0, x_0) f(x_1, x_1) \cdots f(x_k, x_k)}, \tag{19}$$

где је унутрашња сума по свим ланцима $\mathcal{L}_k : x = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = y$ дужине $k \geq 0$.

Нека је сада $I(\mathcal{B}Set)$ алгебра инциденције за $\mathcal{B}Set$ у односу на уређење $\preceq$, са вредностима у алгебри $\mathcal{B}Set^*$. Због једноставнијег записа, поистоветићемо рационални број r и $r\cdot\epsilon \in \mathcal{B}Set^*$, где је ϵ јединица алгебре $\mathcal{B}Set^*$. Дефинишимо елементе $a, b \in I(\mathcal{B}Set)$ са $a([\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_X]) = \binom{\mathcal{B}_X}{\mathcal{B}_Y}$ и $b([\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_X]) = \delta_{\mathcal{B}_Y}$. Тада је пресликавање Φ конволуцијски производ

$$\Phi(\mathcal{B}_Y) = (a * b)([\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_\emptyset]).$$

Пошто је $a([\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_Y]) = \binom{\mathcal{B}_Y}{\mathcal{B}_Y} \neq 0$ за све градивне скупове $\mathcal{B}_Y$, функција a има конволуцијски инверз a^{-1} у $I(\mathcal{B}Set)$, који је дат са

$$a^{-1}([\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_X]) = \sum_{k\geq 0}\sum_{\mathcal{L}_k}(-1)^k \frac{\prod_{j=1}^{k}\binom{\mathcal{B}_{X_j}}{\mathcal{B}_{X_{j-1}}}}{\prod_{j=0}^{k}\binom{\mathcal{B}_{X_j}}{\mathcal{B}_{X_j}}},$$

при чему је унутрашња сума по свим ланцима $\mathcal{L}_k : \mathcal{B}_Y = \mathcal{B}_{X_0} \preceq \mathcal{B}_{X_1} \preceq \cdots \preceq \mathcal{B}_{X_k} = \mathcal{B}_X$ дужине k. Онда је пресликавање $\Phi^{-1} : \mathcal{B}Set^* \to \mathcal{B}Set$ одређено са

$$\Phi^{-1}(\delta_{\mathcal{B}_Y}) = D^{-1} \circ (a^{-1} * b)([\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_\emptyset]) = \sum_{\mathcal{B}_Y \preceq \mathcal{B}_X} a^{-1}([\mathcal{B}_Y, \mathcal{B}_X])\mathcal{B}_X.$$

Коначно имамо:

Доказ Теореме 4.2.1. Нека је $\widetilde{\Delta} : k[Conn] \to k[Conn] \otimes k[Conn]$ комножење на полиномијалној Хопфовој алгебри $k[Conn]$. На повезаним градивним скуповима оно је дефинисано са $\widetilde{\Delta}(\mathcal{B}_X) = 1 \otimes \mathcal{B}_X + \mathcal{B}_X \otimes 1$ и алгебарски проширено на $k[Conn]$.

Комножење на $\mathcal{B}Set^*$ је дато са

$$\langle \Delta(\delta_{\mathcal{B}_X}), \mathcal{B}_{Y_1} \otimes \mathcal{B}_{Y_2}\rangle = \langle \delta_{\mathcal{B}_X}, \mathcal{B}_{Y_1}\mathcal{B}_{Y_2}\rangle = \sum_{\mathcal{B}_{X_1}\mathcal{B}_{X_2} = \mathcal{B}_X} \langle \delta_{\mathcal{B}_{X_1}}, \mathcal{B}_{Y_1}\rangle\langle \delta_{\mathcal{B}_{X_2}}, \mathcal{B}_{Y_2}\rangle.$$

Одавде је

$$\Delta(\delta_{\mathcal{B}_X}) = \sum_{\mathcal{B}_{X_1}\mathcal{B}_{X_2} = \mathcal{B}_X} \delta_{\mathcal{B}_{X_1}} \otimes \delta_{\mathcal{B}_{X_2}},$$

за све градивне скупове $\mathcal{B}_X \in \mathcal{B}Set$. Посебно, за повезане градивне скупове је $\Delta(\delta_{\mathcal{B}_X}) = \epsilon \otimes \delta_{\mathcal{B}_X} + \delta_{\mathcal{B}_X} \otimes \epsilon$. То значи да је $(\Phi \otimes \Phi)(\widetilde{\Delta}(\mathcal{B}_X)) = \Delta(\Phi(\mathcal{B}_X))$ за сваки повезан градивни скуп $\mathcal{B}_X \in \mathcal{B}Set$, па је изоморфизам алгебри $\Phi : k[Conn] \to \mathcal{B}Set^*$ заправо изоморфизам Хопфових алгебри. $\square$

4.3 Хроматска симетрична функција градивних скупова

На Хопфовој алгебри градивних скупова $\mathcal{B}Set$ можемо дефинисати карактер ζ са

$$\zeta(\mathcal{B}_X) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \mathcal{B}_X \text{ дискретан} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тако смо добили комбинаторну Хопфову алгебру $(\mathcal{B}Set, \zeta)$, па постоји јединствен морфизам комбинаторних Хопфових алгебри $\Psi : (\mathcal{B}Set, \zeta) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$, који је на n-тој хомогеној компоненти $\mathcal{B}_X \in \mathcal{B}Set_n$ дат са

$$\Psi(\mathcal{B}_X) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(\mathcal{B}_X) M_\alpha. \tag{20}$$

Из дефиниције ζ_α имамо да је за градивни скуп $\mathcal{B}_X$ на скупу X са n елемената и композицију $\alpha = (a_1, \dots, a_k)$ броја n, вредност $\zeta_\alpha(\mathcal{B}_X)$ управо број уређених декомпозиција $X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_k$ таквих да је $(\mathcal{B}_X)|_{X_i}$ дискретан и $|X_i| = a_i$, за све $i = 1, \dots, k$.

Функцију $f : X \to \mathbb{N}$, називаћемо *правилно бојење* градивног скупа $\mathcal{B}_X$ ако за сваки скуп $S \in \mathcal{B}_X$ који има бар два елемента, постоје $i, j \in S$ такви да је $f(i) \neq f(j)$. За сваку уређену декомпозицију $X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_k$ такву да је $(\mathcal{B}_X)|_{X_i}$ дискретан за све $i = 1, \dots, k$, и природне бројеве $n_1 < \cdots < n_k$, постоји правилно бојење f дато са $f|_{X_i} = n_i$. Обрнуто, свако правилно бојење $f : X \to \mathbb{N}$ градивног скупа $\mathcal{B}_X$, са скупом вредности $n_1 < \cdots < n_k$, дефинише уређену декомпозицију $X = f^{-1}(\{n_1\}) \sqcup \cdots \sqcup f^{-1}(\{n_k\})$, где је $(\mathcal{B}_X)|_{f^{-1}(\{n_i\})}$ дискретан за све $i = 1, \dots, k$.

По аналогији са Стенлијевом хроматском функцијом на графовима, слику $\Psi(\mathcal{B}_X)$ зваћемо *хроматска функција* градивног скупа $\mathcal{B}_X$.

Функција $\Psi(\mathcal{B}_X)$ је очигледно симетрична, па ћемо је надаље називати *хроматска симетрична функција* градивног скупа. У терминима правилних бојења она је дата са

$$\Psi(\mathcal{B}_X) = \sum_{\substack{\text{правилно} \\ f: X \to \mathbb{N}}} \prod_{i \in X} x_{f(i)}.$$

Главна специјализација функције $\Psi(\mathcal{B}_X)$ броји правилна бојења коначним бројем боја.

Дефиниција 4.3.1. *Хроматски полином* $\chi(\mathcal{B}_X, m)$ градивног скупа $\mathcal{B}_X$ је главна специјализација

$$\chi(\mathcal{B}_X, m) = \Psi(\mathcal{B}_X)(1^m).$$

Пошто је главна специјализација на мономијалној бази дата са $M_\alpha(1^m) = \binom{m}{k(\alpha)}$, где је $k(\alpha)$ дужина композиције $\alpha \models n$, добијамо

$$\chi(\mathcal{B}_X, m) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(\mathcal{B}_X) \binom{m}{k(\alpha)}. \tag{21}$$

Посебно ће нас занимати вредност хроматског полинома градивног скупа у $m = -1$, која је дата са

$$\chi(\mathcal{B}_X, -1) = \sum_{\alpha \models n} (-1)^{k(\alpha)} \zeta_\alpha(\mathcal{B}_X). \tag{22}$$

Та вредност дефинише нумеричку инваријанту, коју ћемо звати $(-1)-$*инваријанта* градивних скупова.

Нека је $\mathcal{G}$ Хопфова алгебра графова из примера 3.3.4. Морфизам комбинаторних Хопфових алгебри $\Psi_\mathcal{G} : (\mathcal{G}, \zeta_\mathcal{G}) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_\mathcal{Q})$, дат на $G \in \mathcal{G}_n$ са

$$\Psi_\mathcal{G}(G) = \sum_{\alpha \models n} (\zeta_\mathcal{G})_\alpha(G) M_\alpha$$

је Стенлијева хроматска симетрична функција графа G. Њена главна специјализација даје хроматски полином графа $\chi(G, m) = \Psi_\mathcal{G}(G)(1^m)$.

Нека је $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{B}Set$ пресликавање које графу G додељује одговарајући градивни скуп $\mathcal{B}(G)$.

Теорема 4.3.2. *Пресликавање $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{B}Set$ је мономорфизам комбинаторних Хопфових алгебри за који важи $\Psi \circ \beta = \Psi_\mathcal{G}$.*

Доказ. Прво ћемо показати да је β морфизам алгебри. Заиста, $\beta(G_1 \cdot G_2)$ је градивни скуп графа који одговара дисјунктној унији $G_1 \sqcup G_2$. Он садржи све подскупове $S \subset V(G_1) \sqcup V(G_2)$ такве да је рестрикција $(G_1 \sqcup G_2)|_S$ повезана. То је тачно производ градивних скупова графова, $\mathcal{B}(G_1) \cdot \mathcal{B}(G_2)$.

Поновимо да је $\mathcal{B}(G|_I) = \mathcal{B}(G)|_I$. Следи да је

$$\Delta(\beta(G)) = \sum_{I \subset V(G)} \mathcal{B}(G)|_I \otimes \mathcal{B}(G)|_{I^c} = \sum_{I \subset V(G)} \mathcal{B}(G|_I) \otimes \mathcal{B}(G|_{I^c}) = (\beta \otimes \beta)(\Delta(G)),$$

то јест, β је морфизам коалгебри.

Пошто је градивни скуп графа $\mathcal{B}(G)$ дискретан ако и само ако је граф G дискретан, имамо да је $\zeta \circ \beta = \zeta_{\mathcal{G}}$.

Такође, из дефиниције градивног скупа графа следи да је скуп ивица графа G садржан у $\mathcal{B}(G)$. То значи да је β једна $1-1$ кореспонденција између графова и њихових градивних скупова. $\square$

Из претходне теореме следи да се хроматски полином градивног скупа графа и хроматски полином графа поклапају, $\chi(\mathcal{B}(G), m) = \chi(G, m)$.

Ово својство хроматских полинома се може уопштити на произвољне градивне скупове и одговарајуће хиперграфове.

Дефиниција 4.3.3. Произвољна колекција подскупова скупа X, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, је *хиперграф* на X, а елементи те колекције су ивице хиперграфа.

Правилно бојење хиперграфа $\mathcal{H}$ је пресликавање $f : X \to \mathbb{N}$ такво да свака ивица $S \in \mathcal{H}$ која је бар двочлана није обојена истом бојом. Опет по аналогији са графовима, дефинишемо хроматску симетричну функцију хиперграфа као

$$\Psi(\mathcal{H}) = \sum_{\substack{\text{правилно} \\ f:X\to\mathbb{N}}} \prod_{i\in X} x_{f(i)}.$$

Она зависи само од минималних ивица хиперграфа, које чине антиланац у Буловом посету $\mathcal{P}(X)$.

Следећа теорема, која је једноставна последица дефиниција, показује у којој мери хроматска симетрична функција разликује градивне скупове.

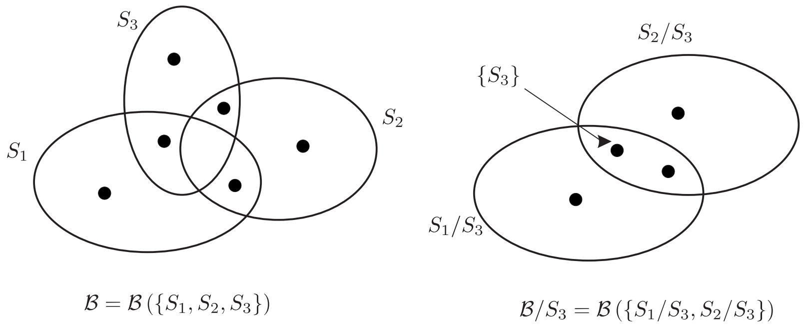
Теорема 4.3.4. *Нека је $\mathcal{C}_{\min}$ колекција минималних елемената генеришуће колекције $\mathcal{C}$ градивног скупа $\mathcal{B}(\mathcal{C})$. Тада је*

$$\Psi(\mathcal{B}(\mathcal{C})) = \Psi(\mathcal{C}_{\min}),$$

где је $\Psi(\mathcal{C}_{\min})$ хроматска симетрична функција хиперграфа $\mathcal{C}_{\min}$.

Доказ. Бојење $f : X \to \mathbb{N}$ је правилно бојење градивног скупа $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ ако и само ако произвољно $S \in \mathcal{C}_{\min}$ није обојено истом бојом. Дакле, градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ и хиперграф $\mathcal{C}_{\min}$ имају исте скупове исправних бојења, па су и њихове хроматске симетричне функције једнаке. $\square$

Из претходне теореме следи да градивни скупови $\mathcal{B}(\mathcal{C}')$ и $\mathcal{B}(\mathcal{C}'')$ на основном скупу X, који имају исте колекције минималних елемената $\mathcal{C}'_{\min} = \mathcal{C}''_{\min}$, имају једнаке хроматске симетричне функције



Слика 4: *Скупљање градивног скупа*

$$\Psi(\mathcal{B}(\mathcal{C}')) = \Psi(\mathcal{B}(\mathcal{C}'')).$$

Специјално, такви градивни скупови имају исте хроматске полиноме $\chi(\mathcal{B}(\mathcal{C}'), m) = \chi(\mathcal{B}(\mathcal{C}''), m)$.

Основна особина хроматских полинома графова је особина избацивање-скупљање:

$$\chi(G, m) = \chi(G \setminus e, m) - \chi(G/e, m),$$

где је $G \setminus e$ граф који настаје када из G избацимо ивицу $e \in E(G)$, а G/e је G са e скупљеном у тачку. По аналогији са графовима, дефинишемо избацивање и скупљање градивних скупова. Нека је $S \in \mathcal{C}_{\min}$ минимални елемент генеришуће колекције $\mathcal{C}$ градивног скупа $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ на основном скупу X. *Избацивање* је градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{C} \setminus \{S\})$ на X, генерисан колекцијом $\mathcal{C} \setminus \{S\}$. Означићемо га са $\mathcal{B} \setminus S$, без мешања са скуповном разликом. Означимо са $X/S = X \setminus S \cup \{S\}$. За подскуп $A \subset X$ означимо са

$$A/S = \begin{cases} A, & A \cap S = \emptyset \\ A \setminus S \cup \{S\}, & A \cap S \neq \emptyset \end{cases},$$

што је подскуп од X/S. *Скупљање* је градивни скуп $\mathcal{B}/S = \mathcal{B}(\mathcal{C}/S)$ на X/S, генерисан колекцијом $\mathcal{C}/S = \{A/S | A \in \mathcal{C}\}$. Следећа теорема уопштава особину избацивање-скупљање хроматских полинома графова.

Теорема 4.3.5. *Нека је $S \in \mathcal{C}_{\min}$ минимални елемент генеришуће колекције $\mathcal{C}$ градивног скупа $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$. Тада за хроматске полиноме градивног скупа $\mathcal{B}$ и његовог избацивања $\mathcal{B} \setminus S$ и скупљања $\mathcal{B}/S$ важи једнакост*

$$\chi(\mathcal{B}, m) = \chi(\mathcal{B} \setminus S, m) - \chi(\mathcal{B}/S, m).$$

Доказ. Свако правилно бојење $f : X \to [m]$ градивног скупа $\mathcal{B}$ уједно је и правилно бојење $\mathcal{B} \setminus S$. С друге стране, правилно бојење $f : X \to [m]$ градивног скупа $\mathcal{B} \setminus S$ је правилно бојење од $\mathcal{B}$ ако и само ако је $f(i) \neq f(j)$ за неке $i, j \in S$. Формула следи из чињенице да скуп правилних бојења $f : X \to [m]$ од $\mathcal{B} \setminus S$ која су монохроматска на S и скуп свих правилних бојења од $\mathcal{B}/S$ имају исти број елемената. □

Дефиниција 4.3.6. Нека је $\mathcal{L} = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ антиланац непразних коначних подскупова Буловог посета $\mathcal{P}(X)$. За $S_i \in \mathcal{L}$ кажемо да је *слободан скуп* антиланца $\mathcal{L}$ ако је $S_i \cap (\cup_{j \neq i} S_j)$ највише једночлан скуп.

Следеће тврђење је непосредна последица особине избацивање-скупљање хроматских полинома градивних скупова.

Тврђење 4.3.7. *Нека је* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ *и* $\mathcal{C}_{\min} = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$. *Ако је* S_i *слободан скуп антиланца* $\mathcal{C}_{\min}$*, тада*

(*i*) $\chi(\mathcal{B}, m) = \chi(\mathcal{B}(\mathcal{C}_{\min}) \setminus S_i), m)(m^{|S_i|} - m)$ *ако* $S_i \cap (\cup_{j \neq i} S_j) = \emptyset$

(*ii*) $\chi(\mathcal{B}, m) = \chi(\mathcal{B}(\mathcal{C}_{\min}) \setminus S_i), m)(m^{|S_i|-1} - 1)$ *ако је* $S_i \cap (\cup_{j \neq i} S_j)$ *једночлан.*

У следећим двема теоремама дати су развоји хроматских симетричних функција градивних скупова у степеној бази симетричних функција. Ови развоји су само преформулације Стенлијевих развоја хроматских симетричних функција хиперграфова [31], који су опет аналогни развојима хроматских симетричних функција графова [30]. Изведене формуле за хроматске полиноме градивних скупова уопштавају класичне Витнијеве формуле за хроматске полиноме графова [35]. Ради потпуности, овде ће бити представљени и докази тих теорема.

Теорема 4.3.8. *([31], Теорема 3.5) Нека је* $\mathcal{C}_{\min}$ *колекција минималних елемената генеришуће колекције* $\mathcal{C}$ *градивног скупа* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ *на основном скупу* X. *За потколекцију* $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_{\min}$*, нека је* $\lambda(\mathcal{S})$ *партиција броја* $|X|$ *чији су делови једнаки ранговима повезаних компоненти градивног скупа* $\mathcal{B}(\mathcal{S})$. *Тада је*

$$\Psi(\mathcal{B}) = \sum_{\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_{\min}} (-1)^{|\mathcal{S}|} p_{\lambda(\mathcal{S})}.$$

Доказ. За потколекцију $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_{\min}$, означимо са $K_{\mathcal{S}}$ скуп свих бојења $f : X \to \mathbb{N}$ која су монохроматска на повезаним компонентама градивног скупа $\mathcal{B}(\mathcal{S})$. Тада је

$$p_{\lambda(\mathcal{S})} = \sum_{f \in K_{\mathcal{S}}} x_f,$$

где је $x_f = \prod_{i\in X} x_{f(i)}$.
За бојење $f : X \to \mathbb{N}$, нека је $\mathcal{C}_f = \{S \subset \mathcal{C}_{\min} |\ f(i) = f(j),\ i, j \in S\}$. Онда је

$$\sum_{\mathcal{S}\subset\mathcal{C}_{\min}} (-1)^{|\mathcal{S}|} p_{\lambda(\mathcal{S})} = \sum_{\mathcal{S}\subset\mathcal{C}_{\min}} (-1)^{|\mathcal{S}|} \sum_{f\in K_{\mathcal{S}}} x_f = \sum_{f:X\to\mathbb{N}} x_f \sum_{\mathcal{S}\subset\mathcal{C}_f} (-1)^{|\mathcal{S}|}.$$

Сума по $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_f$ је нула ако је $\mathcal{C}_f$ непразан. Ако је $\mathcal{C}_f$ празан, у ком случају је f правилно, сума је 1. $\square$

Главне специјализације степених симетричних функција су дате са $p_\lambda(1^m) = m^{|\lambda|}$, где је $|\lambda|$ дужина партиције λ. За потколекцију $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}_{\min}$ означимо са $c(\mathcal{S}) = |\lambda(\mathcal{S})|$ број повезаних компонената градивног скупа $\mathcal{B}(\mathcal{S})$. Из претходне теореме добијамо следећу формулу за хроматске полиноме градивних скупова

$$\chi(\mathcal{B}, m) = \sum_{\mathcal{S}\subset\mathcal{C}_{\min}} (-1)^{|\mathcal{S}|} m^{c(\mathcal{S})},$$

што се такође може добити и као директна последица особине избацивање-скупљање. Она даје следећу интерпретацију $(-1)-$инваријанте градивних скупова

$$\chi(\mathcal{B}, -1) = \sum_{\mathcal{S}\subset\mathcal{C}_{\min}} (-1)^{|\mathcal{S}|+c(\mathcal{S})}. \tag{23}$$

Нека је $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ антиланац у Буловом посету $\mathcal{P}(X)$. Означимо са $\mathcal{L}_I = \{S_i | i \in I\}$ потколекцију од $\mathcal{L}$ одређену подскупом $I \subset [m]$. *Посет пресека* колекције $\mathcal{L}$, $P(\mathcal{L})$, је скуп $P(\mathcal{L}) = \{I \subset [m] | \cap \mathcal{L}_I \neq \emptyset\}$, уређен инклузијом.

Тврђење 4.3.9. *Нека су $\mathcal{L}' = \{S'_1, \ldots, S'_m\}$ и $\mathcal{L}'' = \{S''_1, \ldots, S''_m\}$ антиланци коначних скупова са истим посетом пресека P. Ако је $|\cap\mathcal{L}'_I| \equiv |\cap\mathcal{L}''_I| \pmod 2$ за сваки $I \in P$, тада је*

$$\chi(\mathcal{B}(\mathcal{L}'), -1) = \chi(\mathcal{B}(\mathcal{L}''), -1).$$

Доказ. За дати антиланац коначних скупова $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ означимо са $S_I = \cap_{i\in I} S_i$ и $X_I = \cup_{i\in I} S_i$, за сваки $I \subset [m]$. Нека су $c(I)$ и c_I редом бројеви повезаних компоненти градивног скупа $\mathcal{B}(\mathcal{L}_I)$ на основним скуповима $X_{[m]}$ и X_I. Тада је $c(I) = c_I + |X_{[m]}| - |X_I|$, што је, по формули укључења-искључења

$$c(I) = c_I + |X_{[m]}| + \sum_{J\subset I} (-1)^{|J|} |S_J|.$$

По формули (23), имамо да је $\chi(\mathcal{B}(\mathcal{L}),-1)=\sum_{I\subset[m]}(-1)^{|I|+c(I)}$, а то зависи само од посета пресека $P(\mathcal{L})$ и парности бројева $|S_I|$ за све $I\in P(\mathcal{L})$. $\square$

Градивном скупу $\mathcal{B}$ на основном скупу X придружићемо мрежу $L(\mathcal{B})$ његових повезаних партиција. За партицију π од X кажемо да је *повезана* ако су рестрикције на блокове $\mathcal{B}|_A,\ A\in\pi$, повезане као градивни скупови. Скуп свих повезаних партиција је уређен по финоћи партиција, са јединственим минималним елементом $\widehat{0}$, који је партиција од X на једночлане блокове. За партицију $\pi=\{A_1,A_2,\ldots,A_k\}$ од X нека $type(\pi)$ означава партицију од $|X|$ чије су компоненте величине блокова од π.

Означимо са $|\pi|$ број блокова партиције π. По теореми 4.3.4, градивни скупови $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{C}_{\min})$ имају једнаке хроматске симетричне функције. Дакле, градивном скупу $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{C})$ можемо придружити и једноставнију мрежу $L_{\mathcal{B}}=L(\mathcal{B}(\mathcal{C}_{\min}))$. Нека је μ Мебијусова функција мреже $L_{\mathcal{B}}$.

Теорема 4.3.10. *([31], Теорема 3.4) Нека је $L_{\mathcal{B}}$ мрежа повезаних партиција градивног скупа $\mathcal{B}(\mathcal{C}_{\min})$ придружена градивном скупу $\mathcal{B}=\mathcal{B}(\mathcal{C})$. Тада је*

$$\Psi(\mathcal{B})=\sum_{\pi\in L_{\mathcal{B}}}\mu(\widehat{0},\pi)p_{type(\pi)}.$$

Доказ. Бојењу $f:X\to\mathbb{N}$ поново ћемо придружити колекцију $\mathcal{C}_f=\{S\subset\mathcal{C}_{\min}|\ f(i)=f(j),\ i,j\in S\}$. Дефинишимо партицију σ_f од X као колекцију повезаних компоненти градивног скупа $\mathcal{B}(\mathcal{C}_f)$. За произвољну партицију $\sigma\in L_{\mathcal{B}}$, нека је K_σ скуп свих бојења $f:X\to\mathbb{N}$ таквих да

(i) f је монохроматско на блоковима од σ

(ii) ако су $i,j\in X$ у различитим блоковима од σ и такви да је $i,j\in S$ за неко $S\in\mathcal{C}_{\min}$, тада f није монохроматско на S.

За партицију $\sigma\in L_{\mathcal{B}}$, нека је $\Psi_\sigma=\sum_{f\in K_\sigma}x_f$. За свако $\pi\in L_{\mathcal{B}}$ имамо $p_{type(\pi)}=\sum_{\sigma\geq\pi}\Psi_\sigma$. По Мебијусовој инверзији добијамо $\Psi_\pi=\sum_{\sigma\geq\pi}\mu(\pi,\sigma)p_{type(\sigma)}$. Како је $\Psi(\mathcal{B})=\Psi_{\widehat{0}}$, следи тврђење. $\square$

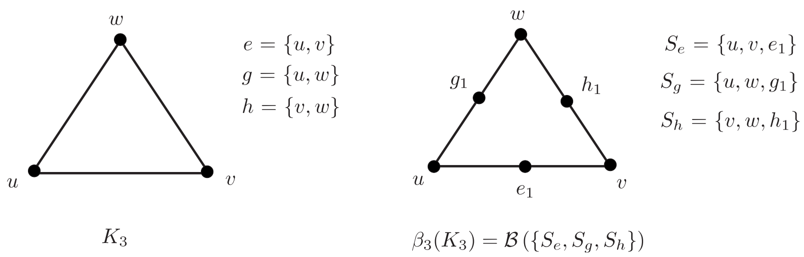
Из главне специјализације степених симетричних функција и претходне теореме добијамо следеће интерпретације хроматског полинома и $(-1)-$инваријанте градивног скупа

$$\chi(\mathcal{B},m)=\sum_{\pi\in L_{\mathcal{B}}}\mu(\widehat{0},\pi)m^{|\pi|},$$

$$\chi(\mathcal{B},-1)=\sum_{\pi\in L_{\mathcal{B}}}\mu(\widehat{0},\pi)(-1)^{|\pi|}. \tag{24}$$

4.4 Симетричне функције графова изведене из градивних скупова

Простом графу $G = (V, E)$ и природном броју $n \geq 2$ придружићемо колекцију скупова $\mathcal{C}_{G,n}$ на следећи начин. Ивици $e \in E$ доделићемо скуп нових објеката $\{e_1, \ldots, e_{n-2}\}$. Дефинишимо $S_e = \{u, v, e_1, \ldots, e_{n-2}\}$, где је $e = \{u, v\} \in E$ ивица са теменима $u, v \in V$. Колекција $\mathcal{C}_{G,n} = \{S_e |\ e \in E\}$ је антиланац на основном скупу $X = V \cup \{e_i |\ e \in E, i \in [n-2]\}$ који јединствено генерише градивни скуп $\mathcal{B}_{G,n} = \mathcal{B}(\mathcal{C}_{G,n})$ на X.



Слика 5: *Градивни скуп* $\beta_3(K_3)$

Дефинишимо низ пресликавања $\beta_n : \mathcal{G} \to BSet,\ n \geq 2$, са $\beta_n(G) = \mathcal{B}_{G,n}$, за $G \in \mathcal{G}$. Приметимо да је β_2 мономорфизам Хопфових алгебри β из теореме 4.3.2. Из конструкције је јасно да су сва пресликавања β_n мономорфизми алгебри. Сваком графу G придружићемо хроматске симетричне функције $\Psi(\beta_n(G))$ градивних скупова $\beta_n(G)$ и одговарајуће хроматске полиноме $\chi(\beta_n(G), m)$. Тако добијамо низ мултипликативних инваријанти графова.

По тврђењу 4.3.9, ако је $n_1 \equiv n_2 \pmod 2$, тада је $\chi(\beta_{n_1}(G), -1) = \chi(\beta_{n_2}(G), -1)$ за сваки прост граф G. То значи да добијамо две нумеричке мултипликативне инваријанте графова, изведене из $(-1)-$инваријанте градивних скупова, а то су $\chi(\beta_2(G), -1)$ и $\chi(\beta_3(G), -1)$. Прва инваријанта

$$\chi(\beta_2(G), -1) = \chi(\mathcal{B}(G), -1) = \chi(G, -1)$$

је позната као број ацикличних оријентација графа. Означимо са $c(S)$ број повезаних компоненти подграфа (V, S) одређеног ивицама $S \subset E$. Кореспонденција између подскупова $S \subset E$ ивица графа G и потколекција $\mathcal{S} = \{S_e |\ e \in S\}$ генеришуће колекције $\mathcal{C}_{G,n}$ градивног скупа $\beta_n(G)$ је бијективна. Из конструкције $\beta_n(G)$, имамо да су $c(S)$ и број повезаних компоненти $c(\mathcal{S})$ одговарајућег градивног скупа $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ повезани са

$$c(\mathcal{S}) = c(S) + (n-2)(|E| - |S|).$$

За $n = 2, 3$, из (23) следи да је

$$\chi(\beta_2(G), -1) = \chi(G, -1) = \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|+c(S)}.$$
$$\chi(\beta_3(G), -1) = (-1)^{|E|} \sum_{S \subset E} (-1)^{c(S)}.$$

Следећи пример показује да се инваријанта $\chi(\beta_3(G), -1)$ не може извести из хроматске симетричне функције графа.

Пример 4.4.1. У [30] Стенли је дао пример неизоморфних графова са пет темена који имају једнаке хроматске симетричне функције (Слика 6). Директним рачуном добијамо

$$\Psi(\beta_3(\Gamma_1)) - \Psi(\beta_3(\Gamma_2)) = -p_{5,3,1,1,1} + p_{6,3,1,1} + p_{7,1,1,1,1} - 2p_{8,1,1,1} + 2p_{9,1,1} - p_{10,1}.$$

Инваријанта $\chi(\beta_3(\Gamma), -1)$ разликује ове графове.

$\chi\left(\beta_3\left(\Gamma_1\right), -1\right) = -4$ $\chi\left(\beta_3\left(\Gamma_2\right), -1\right) = 0$

Слика 6: *Стенлијев пример графова са једнаким хроматским симетричним функцијама*

4.5 Ден-Сомервилове релације за Хопфову алгебру градивних скупова

Подсетимо се да је за Хопфову алгебру (H, m, Δ) дефинисана Хопфова алгебра H^{cop}, код које је множење исто као у H, а комножење је $\Delta^{cop} = \tau \circ \Delta$, где је τ твист пресликавање.

Лема 4.5.1. *Нека је (H, ζ) комутативна комбинаторна Хопфова алгебра. Тада је антипод $S_H : (H^{cop}, \zeta^{-1}) \to (H, \zeta)$ морфизам комбинаторних Хопфових алгебри.*

Доказ. Антипод $S_H : H \to H$ је антиморфизам коалгебри. Пошто је H комутативна, имамо да је $S_H : H^{cop} \to H$ морфизам Хопфових алгебри. Како је инверз карактера ζ композиција $\zeta^{-1} = \zeta \circ S_H$, тврђење следи. $\square$

Лема 4.5.2. *Нека су $S_{\mathcal{Q}}$ и $S_{\mathcal{B}}$ редом антиподи Хопфових алгебри $\mathcal{Q}Sym$ и $\mathcal{B}Set$. Тада је следећи дијаграм морфизама комбинаторних Хопфових алгебри комутативан:*

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{B}Set^{cop}, \zeta^{-1}) & \xrightarrow{S_{\mathcal{B}}} & (\mathcal{B}Set, \zeta) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ (\mathcal{Q}Sym^{cop}, \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}) & \xrightarrow{S_{\mathcal{Q}}} & (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}}) \end{array}$$

где је $\Psi : (\mathcal{B}Set, \zeta) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ универзални морфизам из теореме 3.3.1.

Доказ. Пресликавање Ψ комутира са антиподима као морфизам Хопфових алгебри, тако да треба само показати да су горња пресликавања заиста морфизми комбинаторних Хопфових алгебри.

Хопфове алгебре $\mathcal{Q}Sym$ и $\mathcal{B}Set$ су комутативне. По леми 4.5.1 имамо да су $S_{\mathcal{Q}} : (\mathcal{Q}Sym^{cop}, \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ и $S_{\mathcal{B}} : (\mathcal{B}Set^{cop}, \zeta^{-1}) \to (\mathcal{B}Set, \zeta)$ морфизми комбинаторних Хопфових алгебри. Пресликавање $\Psi : \mathcal{B}Set^{cop} \to \mathcal{Q}Sym^{cop}$ је очигледно морфизам Хопфових алгебри. Из

$$\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1} \circ \Psi = \zeta_{\mathcal{Q}} \circ S_{\mathcal{Q}} \circ \Psi = \zeta_{\mathcal{Q}} \circ \Psi \circ S_{\mathcal{B}} = \zeta \circ S_{\mathcal{B}} = \zeta^{-1},$$

следи да је $\Psi : (\mathcal{B}Set^{cop}, \zeta^{-1}) \to (\mathcal{Q}Sym^{cop}, \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1})$ такође морфизам комбинаторних Хопфових алгебри. $\square$

Из претходне леме добијамо формулу за инверз карактера ζ Хопфове алгебре градивних скупова.

Тврђење 4.5.3. *Вредност $\zeta^{-1}(\mathcal{B}_X)$ је $(-1)-$инваријанта градивног скупа $\mathcal{B}_X \in \mathcal{B}Set_n$:*

$$\zeta^{-1}(\mathcal{B}_X) = \chi(\mathcal{B}_X, -1). \tag{25}$$

Доказ. Инверз универзалног карактера $\zeta_{\mathcal{Q}}$ Хопфове алгебре квазисиметричних функција је, по формули (5), на мономијалној бази дат са

$$\zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}(M_\alpha) = (-1)^{k(\alpha)}.$$

Одавде, по леми 4.5.2, имамо

$$\zeta^{-1}(\mathcal{B}_X) = \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1} \circ \Psi(\mathcal{B}_X) = \zeta_{\mathcal{Q}}^{-1}(\sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(\mathcal{B}_X) M_\alpha) = \sum_{\alpha \models n} (-1)^{k(\alpha)} \zeta_\alpha(\mathcal{B}_X).$$

Ово је, тачно, на основу (22), $(-1)-$инваријанта градивног скупа $\mathcal{B}_X$. $\square$

Пример 4.5.4. Нека је $\mathcal{D}_n$ дискретан градивни скуп ранга n и $d_n = \zeta^{-1}(\mathcal{D}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Из дефиниције инверза карактера, $\zeta^{-1} * \zeta = \epsilon$, имамо следећу рекурзивну релацију

$$d_0 = \zeta^{-1}(\mathcal{B}_\emptyset) = 1 \text{ и } \sum_{i=0}^{n} d_i \binom{n}{i} = 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Одавде следи да је $d_n = \zeta^{-1}(\mathcal{D}_n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Исто то добијамо рачунајући вредност хроматског полинома дискретног градивног скупа $\chi(\mathcal{D}_n, m) = m^n$ у $m = -1$. Означимо са $\binom{n}{\alpha} = \binom{n}{a_1 \ a_2 \dots a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}$ мултиномијални коефицијент који одговара композицији $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k) \models n$. За дискретан градивни скуп $\mathcal{D}_n$ и композицију $\alpha \models n$, имамо $\zeta_\alpha(\mathcal{D}_n) = \binom{n}{\alpha}$. Користећи претходно тврђење, добијамо следећи идентитет

$$\sum_{\alpha \models n} (-1)^{k(\alpha)} \binom{n}{\alpha} = (-1)^n. \tag{26}$$

По теореми 4.3.5, инверзни карактер ζ^{-1} задовољава особину избацивање-скупљање. Нека је $\mathcal{C}$ генеришућа колекција градивног скупа $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ и $S \in \mathcal{C}_{\min}$ минимални елемент колекције $\mathcal{C}$. Тада је

$$\zeta^{-1}(\mathcal{B}) = \zeta^{-1}(\mathcal{B} \setminus S) - \zeta^{-1}(\mathcal{B}/S).$$

Следећа лема је непосредна последица тврђења 4.3.7.

Лема 4.5.5. *Нека је $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ градивни скуп такав да минимална колекција $\mathcal{C}_{\min}$ садржи слободан скуп са непарним бројем елемената. Тада је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}) = 0$.*

Конјуговани карактер $\bar{\zeta}$ на $\mathcal{B}Set$ је дат са

$$\bar{\zeta}(\mathcal{B}_X) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{ако је } \mathcal{B}_X \text{ дискретан, ранга } n \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{27}$$

Према уопштеним Ден-Сомервиловим релацијама (15), за комбинаторну Хопфову алгебру градивних скупова $(\mathcal{B}Set, \zeta)$ имамо да

$$\mathcal{B}_X \in S_-(\mathcal{B}Set, \zeta) \text{ ако и само ако је } \ (id \otimes (\zeta^{-1} - \bar{\zeta}) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(\mathcal{B}_X) = 0.$$

Из

$$\begin{aligned}(id \otimes (\zeta^{-1} - \bar{\zeta}) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(\mathcal{B}_X) &= \sum_{I \sqcup J \sqcup K = X} (\mathcal{B}_X)|_I \otimes (\zeta^{-1} - \bar{\zeta})((\mathcal{B}_X)|_J) \otimes (\mathcal{B}_X)|_K \\ &= \sum_{J \subset X} (\zeta^{-1} - \bar{\zeta})((\mathcal{B}_X)|_J) \Delta((\mathcal{B}_X)|_{J^c})\end{aligned}$$

следи да

$$\mathcal{B}_X \in S_-(\mathcal{B}Set, \zeta) \text{ ако је } (\zeta^{-1} - \bar{\zeta})((\mathcal{B}_X)|_J) = 0, \text{ за све } \ J \subset X. \tag{28}$$

Дефиниција 4.5.6. За градивни скуп $\mathcal{B}_X$ кажемо да је *Ојлеров* ако је за све подскупове $J \subset X$ или $(\mathcal{B}_X)|_J$ дискретан или $\zeta^{-1}((\mathcal{B}_X)|_J) = 0$.

На основу тврђења 4.5.3 и формуле 23, то да ли ће градивни скуп $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$, генерисан колекцијом коначних скупова $\mathcal{C}$, бити Ојлеров зависи само од колекције минималних елемената $\mathcal{C}_{\min}$, то јест, $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ је Ојлеров ако и само ако је $\mathcal{B}(\mathcal{C}_{\min})$ Ојлеров.

Из (27) и (28) добијамо следеће тврђење:

Тврђење 4.5.7. *Ако је $\mathcal{B}_X$ Ојлеров градивни скуп, онда $\mathcal{B}_X \in S_-(\mathcal{B}Set, \zeta)$.*

□

Из дефиниције следи да је за Ојлеров градивни скуп $\mathcal{B}_X$ и произвољан подскуп $J \subset X$, рестрикција $(\mathcal{B}_X)|_J$ такође Ојлеров градивни скуп. Нека је $\mathcal{E}Set$ потпростор од $\mathcal{B}Set$ генерисан свим Ојлеровим градивним скуповима. Рестрикције Ојлеровог градивног скупа, као и дисјунктне уније Ојлерових скупова су поново Ојлерове, па је потпростор $\mathcal{E}Set$ Хопфова подалгебра Хопфове алгебре градивних скупова $\mathcal{B}Set$.

Пример 4.5.8. Нека је $\overline{\mathcal{D}}_n = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, [n]\}$. Из (26) добијамо $\zeta^{-1}(\overline{\mathcal{D}}_n) = (-1)^n + 1$. То исто се може добити као једноставна последица особине избацивање-скупљање. Дакле, $\overline{\mathcal{D}}_n$ је Ојлеров ако и само ако је n непаран. Одавде се може извести још један важан закључак. Нека је $\mathcal{C}$ генеришућа колекција произвољног Ојлеровог градивног скупа $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{C})$ и $S \in \mathcal{C}_{\min}$ минимални елемент колекције $\mathcal{C}$. Рестрикција $\mathcal{B}|_S = \overline{\mathcal{D}}_{|S|}$ је Ојлеров скуп, па S мора да има непаран број елемената.

Посебно, недискретни градивни скупови графова нису Ојлерови, јер су код њих минимални елементи двочлани, па не постоји аналоган појам Ојлерових графова у комбинаторној Хопфовој алгебри $(\mathcal{G}, \zeta_{\mathcal{G}})$.

Пример 4.5.9. Конструисаћемо примере неких Ојлерових градивних скупова до ранга $n = 4$. Из претходног примера, Ојлеров градивни скуп $\mathcal{B}_X$ не садржи ниједан двочлани подскуп $S \subset X$.

Једини недискретан Ојлеров градивни скуп на скупу [3] је

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Једини повезан Ојлеров градивни скуп на [4] је

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Теорема 4.5.10. *Сваки Ојлеров градивни скуп* $\mathcal{B}_X$ *задовољава уопштене Ден-Сомервилове релације, тј.*

$$\sum_{j=0}^{a_i} (-1)^j \zeta_{(a_1,\dots,a_{i-1},j,a_i-j,a_{i+1},\dots,a_k)}(\mathcal{B}_X) = 0, \tag{29}$$

за произвољну композицију $\alpha = (a_1, \dots, a_k) \models |X|$ *и* $i \in \{1, \dots, k(\alpha)\}$.

Доказ. Нека је $\Psi : (\mathcal{B}Set, \zeta) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ јединствен морфизам комбинаторних Хопфових алгебри. Како је

$$\mathcal{E}Set \subset S_{-}(\mathcal{B}Set, \zeta),$$

а према делу (∂) Тврђења 3.5.6 је

$$\Psi(S_{-}(\mathcal{B}Set, \zeta)) \subset S_{-}(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}}),$$

једнакости (29) следе из уопштених Ден-Сомервилових релација за Хопфову алгебру $(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$. □

Пример 4.5.11. Одредићемо градивне скупове $\mathcal{B}$ ранга $n = 5$ који задовољавају уопштене Ден-Сомервилове релације (29). Како је алгебра $\mathcal{B}Set$ кокомутативна (теорема 4.1.4), по теореми 3.3.2, коефицијенти $\zeta_\alpha(\mathcal{B}), \alpha \models 5$, су симетрични, то јест важи $\zeta_\alpha(\mathcal{B}) = \zeta_\beta(\mathcal{B})$ за све композиције $\alpha, \beta \models 5$ којима одговара иста партиција $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$. Релације (29) се тада своде на

(а) $4\zeta_{2,2,1}(\mathcal{B}) = 2\zeta_{2,1,1,1}(\mathcal{B}) = \zeta_{1,1,1,1,1}(\mathcal{B})$,

(б) $2\zeta_{3,2}(\mathcal{B}) = \zeta_{3,1,1}(\mathcal{B})$, (в) $2\zeta_{4,1}(\mathcal{B}) - 2\zeta_{3,1,1}(\mathcal{B}) + \zeta_{2,2,1}(\mathcal{B}) = 0.$

Из $\zeta_{1,1,1,1,1} = 5! = 120$ следи $\zeta_{2,1,1,1} = 60$ и $\zeta_{2,2,1}(\mathcal{B}) = 30$, па $\mathcal{B}$ не сме имати двочлане елементе. У том случају једначине (а) и (б) су задовољене. Преостао је још услов (в) који је еквивалентан са $\zeta_{3,1,1}(\mathcal{B}) - \zeta_{4,1}(\mathcal{B}) = 15$. Означимо са $\mathcal{C}_{\min}$ скуп минималних елемената генеришуће колекције градивног скупа $\mathcal{B}$. Ако је k број трочланих елемената од $\mathcal{C}_{\min}$ тада је $\zeta_{3,1,1}(\mathcal{B}) = 2(10-k)$. Из (в) следи да је $k = 0, k = 1$ или $k = 2$. За $k = 0$ је $\zeta_{4,1}(\mathcal{B}) = 5$, односно $\mathcal{B} = \mathcal{D}_5$ или $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{D}_5}$. За $k = 1$ је $\zeta_{4,1}(\mathcal{B}) = 3$ што задовољавају градивни скупови за које је $\mathcal{C}_{\min} = \{\{1,2,3\}\}$. За $k = 2$ је $\zeta_{4,1}(\mathcal{B}) = 1$. Уколико се два трочлана елемента колекције $\mathcal{C}_{\min}$ секу у једном темену добијамо $\mathcal{C}_{\min} = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}$. Уколико се два трочлана елемента колекције $\mathcal{C}_{\min}$ секу у два темена добијамо $\mathcal{C}_{\min} = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,3,4,5\}\}$.

4.6 Ојлерови градивни скупови

Овде ћемо дати комплетну геометријску карактеризацију класе Ојлерових градивних скупова. Антиланцу $\mathcal{L}$ подскупова основног скупа X придружујемо његов *нерв* $\Delta(\mathcal{L})$, који је апстрактни симплицијални комплекс на скупу темена $\mathcal{L}$, дефинисан са

$$\Delta(\mathcal{L}) = \{\mathcal{S} \subset \mathcal{L} | \cap \mathcal{S} \neq \emptyset\}.$$

Нека је $|\Delta(\mathcal{L})|$ геометријска реализација нерва $\Delta(\mathcal{L})$ и $link_{\Delta(\mathcal{L})}(\{S\}) = \{\mathcal{S} \in \Delta(\mathcal{L})| \ S \notin \mathcal{S}, (\cap\mathcal{S}) \cap S \neq \emptyset\}$ и $star_{\Delta(\mathcal{L})}(\{S\}) = \{\mathcal{S} \in \Delta(\mathcal{L})| \ S \in \mathcal{S}\}$ *линк* и *звезда* темена $\{S\}$ у комплексу $\Delta(\mathcal{L})$.

Дефиниција 4.6.1. Нека је $e_{\mathcal{L}} : \Delta(\mathcal{L}) \to \mathbb{N}$ додељивање броја елемената пресека $\cap\mathcal{S}$ симплексу $\mathcal{S} \in \Delta(\mathcal{L})$, $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) = |\cap\mathcal{S}|$. Колекција $\mathcal{L}$ је *непарна* ако је $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ непаран за свако $\mathcal{S} \in \Delta(\mathcal{L})$. Симплекс $\mathcal{S} \in \Delta(\mathcal{L})$ је *близу* темена $S \in \mathcal{L}$ ако је $S' \cap S \neq \emptyset$ за све $S' \in \mathcal{S}$. Симплекс $\mathcal{S}$ је *удаљен* од темена S ако му није близу.

Следећа лема следи непосредно из дефиниција.

Лема 4.6.2. *Нека је дат елемент $S \in \mathcal{L}$ антиланца $\mathcal{L}$. Тада је*

$$\Delta(\mathcal{L} \setminus \{S\}) = \Delta(\mathcal{L}) \setminus \mathrm{star}_{\Delta(\mathcal{L})}(\{S\}),$$

$$e_{\mathcal{L}\setminus\{S\}}(\mathcal{S}) = e_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}),\ \textit{за све}\ \mathcal{S} \in \Delta(\mathcal{L} \setminus \{S\}),$$

$$\Delta(\mathcal{L}/S) = \Delta(\mathcal{L} \setminus \{S\}) \cup \mathcal{P}(\{S' \in \mathcal{L} | S' \cap S \neq \emptyset\}),$$

$$e_{\mathcal{L}/S}(\mathcal{S}/S) = \begin{cases} e_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}), & \textit{ако је}\ \mathcal{S} \textit{удаљен од}\ S \\ e_{\mathcal{L}}(\mathcal{S}) - e_{\mathcal{L}}(\mathcal{S} \cup \{S\}) + 1, & \textit{ако је}\ \mathcal{S}\ \textit{близу}\ \ S \end{cases}.$$

Дефиниција 4.6.3. Антиланац $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ подскупова од X је k-*клик* ако је $\cap\mathcal{L} \neq \emptyset$, то јест, нерв $\Delta(\mathcal{L})$ је симплекс на скупу темена $\mathcal{L}$.

Лема 4.6.4. *Нека је $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ k-клик на скупу X. Градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ је Ојлеров ако и само ако је $\mathcal{L}$ непарна колекција.*

Доказ. Доказ ћемо извести индукцијом по k. За $k = 1$, имамо $\mathcal{B}(S) = \overline{\mathcal{D}}_{|S|}$. На основу примера 4.5.8, $\mathcal{B}(S)$ је Ојлеров ако и само ако је $|S|$ непаран. Претпоставимо да је тврђење тачно за сваки $(k-1)$-клик. Нека је k-клик $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ непарна колекција и $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{L})$. На основу особине избацивање-скупљање, имамо

$$\zeta^{-1}(\mathcal{B}) = \zeta^{-1}(\mathcal{B} \setminus S_k) - \zeta^{-1}(\mathcal{B}/S_k).$$

По претходној леми колекције $\mathcal{L} \setminus \{S_k\}$ и $\mathcal{L}/S_k$ су непарни $(k-1)$-кликови, па је по индукцији $\zeta^{-1}(\mathcal{B}) = 0$. За произвољан прави подскуп $J \subset X$ нека су $I = \{i \in [k] |\ S_i \subset J\}$, $X_I = \cup_{i \in I} S_i$ и $\mathcal{L}_I = \{S_i |\ i \in I\}$. Тада је

$$\mathcal{B}|_J = \mathcal{B}(\mathcal{L}_I) \sqcup \mathcal{D}_{|J|-|X_I|}.$$

Колекције $\mathcal{L}_I, I \subset [k]$, су непарни кликови, па је $\mathcal{B}$ Ојлеров по индукцији.

Претпоставимо сада да је $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ k-клик такав да је $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ непаран за све праве потколекције $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, а $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{L})$ је паран. Рећи ћемо да је таква колекција скоро непарна. Колекција $\mathcal{L} \setminus \{S_k\}$ је непаран $(k-1)$-клик. По особини избацивање-скупљање имамо

$$\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})) = -\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})/S_k).$$

Опет по претходној леми, колекција $\mathcal{L}/S_k$ је скоро непарна. Индукцијом по k добијамо да је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})) = (-1)^{k-1}\zeta^{-1}(\overline{\mathcal{D}}_d)$, за неки паран број d. Одавде је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})) = (-1)^{k-1}2$ и $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ није Ојлеров.

Ако $\mathcal{L}$ није ни непаран ни скоро непаран, он садржи минималну скоро непарну потколекцију $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ је рестрикција од $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ таква да је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{S})) \neq 0$. То значи да $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ није Ојлеров. $\square$

Симплицијални комплекс Δ на скупу темена V је *флег или заставичаст комплекс* ако за произвољан подскуп темена $S \subset V$, такав да $\{i, j\} \in \Delta$ за све $i, j \in S$, следи да $S \in \Delta$.

Тврђење 4.6.5. *Нека је $\mathcal{L}$ антиланац подскупова скупа X, такав да је одговарајући градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ Ојлеров. Тада је $\mathcal{L}$ непаран и нерв $\Delta(\mathcal{L})$ је флег комплекс.*

Доказ. Нека је $\mathcal{S} \in \Delta(\mathcal{L})$ клик. Градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ је Ојлеров као рестрикција од $\mathcal{B}(\mathcal{L})$. По претходној леми, $\mathcal{S}$ је непарна колекција. Одавде је $e_{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ непаран за све $\mathcal{S} \in \Delta(\mathcal{L})$, па је колекција $\mathcal{L}$ непарна.

Показаћемо да су сви минимални не-симплекси комплекса $\Delta(\mathcal{L})$ ивице. Претпоставимо да постоји колекција $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_k\} \subset \mathcal{L}$, где је $k > 2$, која је минимални не-симплекс од $\Delta(\mathcal{L})$. То значи да је $\cap\mathcal{S} = \emptyset$ и $\cap\mathcal{S}_i \neq \emptyset$ за све потколекције $\mathcal{S}_i = \mathcal{S} \setminus \{S_i\},\ i \in [k]$. Довољно је показати да је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{S})) \neq 0$. Према леми 4.6.4 је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{S}_k)) = 0$, па из особине избацивање-скупљање следи да је

$$\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{S})) = -\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{S})/S_k).$$

Из леме 4.6.2 добијамо $e_{\mathcal{S}/S_k}(\mathcal{S}_k/S_k) = e_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}_k) + 1$, што је парно, и $e_{\mathcal{S}/S_k}(\mathcal{S}'/S_k) = e_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}') - e_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}' \cup \{S_k\}) + 1$, за све $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}_k$, што је непарно. Значи, клик $\mathcal{S}/S_k$ је скоро непаран. Из доказа леме 4.6.4 имамо $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{S})/S_k) = (-1)^{k-2}2$, па је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{S})) = (-1)^{k-1}2$, што је у супротности са условом да је $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ Ојлеров. $\square$

Антиланцу $\mathcal{L} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ придружујемо *пресечни граф* $G(\mathcal{L})$, са скупом темена $V(G(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$ и скупом ивица $E(G(\mathcal{L})) = \{\{S_i, S_j\} |\ S_i \neq S_j, S_i \cap S_j \neq \emptyset\}$. То је прост граф. С друге стране, простом графу $G = (V, E)$ придружујемо апстрактни симплицијални комплекс $\Delta(G)$, који ћемо звати *клик комплекс*. Подскуп темена $S \subset V$ је *клик* од G ако $\{i, j\} \in E$ за све $i, j \in S$. Клик комплекс дефинишемо са $\Delta(G) = \{S \subset V |\ S \text{ је клик од } G\}$. Јасно је да је флег комплекс клик комплекс свог 1-скелетона. Према тврђењу 4.6.5, за Ојлеров градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{L})$, нерв $\Delta(\mathcal{L})$ антиланца $\mathcal{L}$ је клик комплекс $\Delta(G(\mathcal{L}))$ пресечног графа $G(\mathcal{L})$.

Лема 4.6.6. *Нека је $\mathcal{L}$ непаран антиланац коначних скупова такав да је нерв $\Delta(\mathcal{L})$ једнодимензиони цикл на $n = |\mathcal{L}|$ темена. Тада је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})) = 2(-1)^{n-1}$.*

Доказ. По тврђењу 4.3.9, имамо $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})) = \zeta^{-1}(\beta_3(C_n))$, где је C_n циклични граф са n темена. Из особине избацивање-скупљање следи да

$$\zeta^{-1}(\beta_3(C_n)) = -\zeta^{-1}(\beta_3(L_n)) - \zeta^{-1}(\beta_3(C_{n-1})),$$

где је L_n пут на n темена. По леми 4.5.5 је $\zeta^{-1}(\beta_3(L_n)) = 0$, одакле индукцијом по n добијамо $\zeta^{-1}(\beta_3(C_n)) = (-1)^{n-3}\zeta^{-1}(\beta_3(C_3))$. Директан рачун даје $\zeta^{-1}(\beta_3(C_3)) = 2$. □

Нека је Δ апстрактни симплицијални комплекс на скупу темена V. Рестрикција $\Delta|_I$ комплекса Δ на подскуп $I \subset V$ је дефинисана са $\Delta|_I = \{\sigma \in \Delta | \sigma \subset I\}$. Поткомплекс облика $\Delta|_I$ зовемо *пун* поткомплекс.

Дефиниција 4.6.7. Рећи ћемо да је апстрактни симплицијални комплекс Δ *потпуно ацикличан* ако не садржи пун поткомплекс који је једнодимензиони цикл.

Приметимо да је 1-скелетон потпуно ацикличног симплицијалног комплекса тетивни граф. За граф G кажемо да је *тетивни* (chordal) ако за сваки његов цикл са више од три темена постоји ивица која спаја два несуседна темена у том циклу.

Тврђење 4.6.8. *Нека је $\mathcal{L}$ антиланац коначних скупова такав да је градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ Ојлеров. Тада је нерв $\Delta(\mathcal{L})$ потпуно ацикличан комплекс.*

Доказ. Претпоставимо да постоји потколекција $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ таква да је нерв $\Delta(\mathcal{S})$ пун поткомплекс од $\Delta(\mathcal{L})$ који је једнодимензиони цикл. По тврђењу 4.6.5, $\mathcal{S}$ је непаран као потколекција непарне колекције $\mathcal{L}$. Из леме 4.6.6, имамо $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{S})) \neq 0$, што је у супротности са условом да је $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ Ојлеров. □

Флег симплицијални комплекс је потпуно ацикличан ако и само ако је његов 1-скелетон кордалан. Класа потпуно ацикличних флег комплекса је затворена за рестрикције симплицијалних комплекса.

Тврђење 4.6.9. *Нека је $\mathcal{L}$ непаран антиланац коначних скупова такав да је нерв $\Delta(\mathcal{L})$ потпуно ацикличан флег комплекс. Тада је градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ Ојлеров.*

Доказ. Тврђење ћемо доказати индукцијом по броју елемената $n = |\mathcal{L}|$ антиланца $\mathcal{L}$. Директно се уверавамо да је тврђење тачно за $n = 2$. Претпоставимо да је тврђење тачно за сваки антиланац са највише $n-1$ елемената. Нека је $\mathcal{L}$ повезани непарни антиланац од n коначних скупова, такав да је нерв $\Delta(\mathcal{L})$ потпуно ацикличан флег комплекс. Рестрикције $\Delta(\mathcal{S})$ су потпуно ациклични флег комплекси за све потколекције $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$. Дакле, по индукцији, потребно је само доказати да је $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})) = 0$. Нека је $S_0 \in \mathcal{L}$ произвољан елемент. Пошто је на основу индукцијске претпоставке $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L}) \setminus S_0) = 0$, по особини избацивање-скупљање добијамо

$$\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})) = -\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})/S_0).$$

Нека је $\mathcal{S}_0 = \{S \in \mathcal{L} \setminus \{S_0\} | \ S \cap S_0 \neq \emptyset\}$ колекција темена која су близу темена S_0. Нека су, затим, $\sigma = |\mathcal{P}(\mathcal{S}_0)|$ геометријски симплекс на теменима $\mathcal{S}_0$ и $\Delta(\mathcal{S}_0)$ нерв колекције $\mathcal{S}_0$. По леми 4.6.2, геометријска реализација нерва $\Delta(\mathcal{L}/S_0)$ се добија као

$$|\Delta(\mathcal{L}/S_0)| = |\Delta(\mathcal{L} \setminus \{S_0\})| \cup_{|\Delta(\mathcal{S}_0)|} \sigma.$$

Нерв $\Delta(\mathcal{S}_0 \cup \{S_0\})$ колекције $\mathcal{S}_0 \cup \{S_0\}$ је флег комплекс као пун поткомплекс флег комплекса $\Delta(\mathcal{L})$. На основу леме 4.6.2 и чињенице да је $\mathcal{L}$ непаран, имамо да је $e_{\mathcal{L}/S_0}(\mathcal{S}/S_0)$ непаран за све симплексе $\mathcal{S}/S_0 \in \Delta(\mathcal{L}/S_0)$, где је $\mathcal{S} \subset \mathcal{L} \setminus \{S_0\}$. Ако је $\mathcal{S}/S_0 \in \Delta(\mathcal{L}/S_0)$ колекција која није у $\Delta(\mathcal{L} \setminus \{S_0\})$, важиће $e_{\mathcal{L}/S_0}(\mathcal{S}/S_0) = 1$. Стога је $\mathcal{L}/S_0$ непарна колекција.

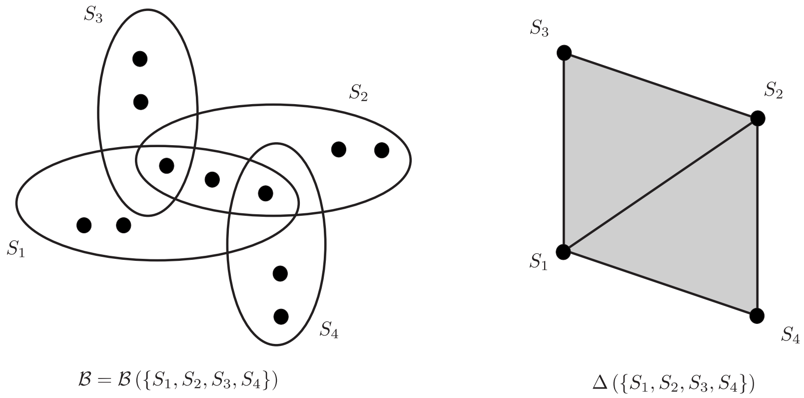
Претпоставимо да је $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ колекција таква да је $\mathcal{S}/S_0$ минимални несимплекс нерва $\Delta(\mathcal{L}/S_0)$ са бар три темена. Колекција $\mathcal{S}$ је подељена на $\mathcal{S}_c = \{S \in \mathcal{S} | \ S \cap S_0 \neq \emptyset\}$ и $\mathcal{S}_f = \{S \in \mathcal{S} | \ S \cap S_0 = \emptyset\}$. Из услова да $\mathcal{S}/S_0$ није симплекс, имамо да $\mathcal{S}_f \neq \emptyset$ и $|\mathcal{S}_c| \geq 2$. То значи да можемо наћи два темена $S^{'}, S^{''} \in \mathcal{S}_c$ тако да $S^{'} \cap S^{''} = \emptyset$ и теме $S \in \mathcal{S}_f$ тако да $S \cap S^{'} \neq \emptyset$ и $S \cap S^{''} \neq \emptyset$. Тада $\{S_0, S, S^{'}, S^{''}\}$ чине пун цикл у $\Delta(\mathcal{L})$, супротно услову да је $\Delta(\mathcal{L})$ потпуно ацикличан.

Претпоставимо сада да постоји колекција $\mathcal{S} \subset \mathcal{L} \setminus \{S_0\}$ таква да је $\Delta(\mathcal{S}/S_0)$ пун поткомплекс од $\Delta(\mathcal{L}/S)$ који је једнодимензиони цикл. Тада је $\Delta(\mathcal{S} \cup \{S_0\})$ једнодимензиони цикл који је пун поткомплекс од $\Delta(\mathcal{L})$, што је опет у супротности са условом да је $\Delta(\mathcal{L})$ потпуно ацикличан.

Дакле, закључујемо да је $\Delta(\mathcal{L}/S_0)$ потпуно ацикличан флег комплекс. По индуктивној претпоставци, $\mathcal{B}(\mathcal{L})/S_0$ је Ојлеров. Значи, $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})/S_0) = 0$, што имплицира $\zeta^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{L})) = 0$. □

Три тврђења која смо навели у овом параграфу дају комплетну карактеризацију Ојлерових градивних скупова у терминима комбинаторике нерава антиланаца коначних скупова.

Теорема 4.6.10. *Нека је $\mathcal{L}$ антиланац коначних скупова. Градивни скуп $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ је Ојлеров ако и само ако је колекција $\mathcal{L}$ непарна и њен нерв $\Delta(\mathcal{L})$ је потпуно ацикличан флег комплекс, то јест клик комплекс кордалног графа.*



Слика 7: *Ојлеров градивни скуп* $\mathcal{B} \in \mathcal{E}Set_{11}$

Пример 4.6.11. Једнодимензиони потпуно ацикличан флег комплекс је дрво. Нека је $\mathcal{L}$ антиланац коначних скупова такав да је нерв $\Delta(\mathcal{L})$ дрво. Тада је $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ Ојлеров ако и само ако је колекција $\mathcal{L}$ непарна.

Пример 4.6.12. Нека је $\beta_{2k+1}(G)$ градивни скуп додељен простом графу $G = (V, E)$, за $k \geq 1$. Нерв колекције $\{S_e|\ e \in E\}$ је клик комплекс $\Delta(G^*)$ дуалног графа G^*, који је потпуно ацикличан ако и само ако је G дрво. Дакле, $\beta_{2k+1}(G)$ је Ојлеров ако и само ако је G дрво.

5 Хиперграфови и симплицијални комплекси

У овом поглављу разматрамо комбинаторну Хопфову алгебру хиперграфова [18]. Подалгебре ове Хопфове алгебре су Хопфове алгебре графова, градивних скупова и клатера. Дефинишемо појам Ојлеровог хиперграфа и одговарајућу Ојлерову подалгебру хиперграфова. Испоставља се да је хиперграф Ојлеров ако и само ако је антиланац његових минималних ивица Ојлеров. Користећи резултате из претходног поглавља добијамо комбинаторну карактеризацију класе Ојлерових хиперграфа.

Такође дефинишемо структуру комбинаторне Хопфове алгебре на симплицијалним комплексима. Кореспонденција клатера и њихових комплекса независности задаје изоморфизам ове алгебре и Хопфове алгебре клатера. Овим изоморфизмом је одређена класа Ојлерових симплицијалних комплекса, као једна класа решења уопштених Ден-Сомервилових релација за Хопфову алгебру симплицијалних комплекса.

5.1 Хопфова алгебра хиперграфова

Поновимо да је *хиперграф* H на коначном скупу темена $V = V(H)$ колекција $H \subset \mathcal{P}(V)$ непразних подскупова од V. Подскупове $e \in H$ ћемо звати ивице хиперграфа и захтеваћемо да свака ивица има бар два елемента. Хиперграф D који нема ивице је дискретан хиперграф на V. Хиперграфови H_1 и H_2 су изоморфни ако постоји бијекција $f : V(H_1) \to V(H_2)$ таква да $e \in H_1$ ако и само ако $f(e) \in H_2$. Рестрикција хиперграфа H на скуп темена $I \subset V(H)$ је хиперграф $H|_I = \{e \in H |\ e \subset I\}$.

Нека је $\mathcal{H}(\mathbf{H}) = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{H}_n(\mathbf{H})$ градуисани k-векторски простор чија је база скуп $\mathbf{H}$ свих класа изоморфних хиперграфова, а градуација дата по броју темена. На овом простору дефинишемо множење као дисјунктну унију

$$H_1 \sqcup H_2 = \{e \subset V_1 \sqcup V_2 \mid e \in H_1 \text{ или } e \in H_2\},$$

а комножење помоћу рестрикција

$$\Delta(H) = \sum_{I \subset V} H|_I \otimes H|_{V \setminus I}.$$

На тај начин простор $\mathcal{H}(\mathbf{H})$ постаје градуисана повезана комутативна и кокомутативна Хопфова алгебра. Њена јединица је хиперграф $H_\emptyset$ на празном скупу темена, а којединица

$$\epsilon(H) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } H = H_\emptyset \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Дефинишимо карактер $\zeta_\mathbf{H} : \mathcal{H}(\mathbf{H}) \to k$ са

$$\zeta_\mathbf{H}(H) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } H \text{ дискретан} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Тако добијамо комбинаторну Хопфову алгебру хиперграфова $(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_\mathbf{H})$. Антипод од $\mathcal{H}(\mathbf{H})$ је, по (1), дат са

$$S(H) = \sum_{k \geq 1} (-1)^k \sum_{I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_k = V} H|_{I_1} \sqcup \ldots \sqcup H|_{I_k},$$

где се сумирање врши по свим уређеним декомпозицијама скупа темена.

Канонски морфизам из $\mathcal{H}(\mathbf{H})$ у $\mathcal{Q}Sym$ је дат са

$$\Psi(H) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(H) M_\alpha, \;\; H \in \mathcal{H}_n(\mathbf{H}), \tag{30}$$

при чему је за композицију $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \models n$ коефицијент $\zeta_\alpha(H)$ број уређених декомпозиција $(I_1, \ldots, I_k)$ скупа темена V таквих да је $H|_{I_j}$ дискретан ранга a_j за све $j = 1, \ldots, k$. Пошто је $\mathcal{H}(\mathbf{H})$ кокомутативна Хопфова алгебра, функција $\Psi(H)$ је симетрична. То је генеришућа функција *правилних бојења* хиперграфа H

$$\Psi(H) = \sum_{f \text{ правилно}} \prod_{v \in V} x_{f(v)},$$

Поновимо да је бојење $f : V \to \mathbb{N}$ правилно ако ниједна ивица од H није обојена истом бојом. Ако је H прост граф, $\Psi(H)$ је Стенлијева хроматска симетрична функција графа.

Главна специјализација $\chi(H,m) = \Psi(H)(1^m)$ дефинише *хроматски полином* хиперграфа H који броји његова бојења са највише m боја. Дакле, по дефиницији карактера $\zeta_{\mathbf{H}}$ имамо

$$\chi(H,m) = \zeta_{\mathbf{H}}^m(H).$$

Формула за антипод онда даје

$$\chi(H,-1) = \zeta_{\mathbf{H}}^{-1}(H) = \zeta_{\mathbf{H}} \circ S(H) = \sum_{\alpha \models n} (-1)^{k(\alpha)} (\zeta_{\mathbf{H}})_\alpha(H).$$

Нека је сада $\mathbf{S}$ произвољна фамилија класа изоморфизама хиперграфова, која је затворена за дисјунктне уније и рестрикције. Тада је k-векторски простор $\mathcal{H}(\mathbf{S})$ са базом $\mathbf{S}$ и карактером $\zeta_{\mathbf{S}} = \zeta_{\mathbf{H}}|_{\mathcal{H}(\mathbf{S})}$ комбинаторна Хопфова подалгебра алгебре хиперграфова $(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}})$.

Пример 5.1.1. Нека је $\mathbf{D} = \{D_n\}_{n\geq 0}$ фамилија дискретних хиперграфова. Тада је $\mathcal{H}(\mathbf{D})$ изоморфна полиномијалној Хопфовој алгебри $k[x]$, где је $x = D_1$. Карактер $\zeta_1 = \zeta_{\mathbf{H}}|_{\mathcal{H}(\mathbf{D})}$ дефинисан је са $\zeta_1(p) = p(1),\ p \in k[x]$.

Пример 5.1.2. Нека је $\mathbf{G}$ класа простих графова. Тада је $(\mathcal{H}(\mathbf{G}), \zeta_{\mathbf{G}})$ хроматска Хопфова алгебра графова $(\mathcal{G}, \zeta_{\mathcal{G}})$.

Постоје две важне класе хиперграфова које су затворене за рестрикције и дисјунктне уније, а које су нам познате из претходног поглавља.

Клатери *Клатер* (clutter) C на коначном скупу V је хиперграф који је антиланац у Буловом посету $\mathcal{P}(V)$ свих подскупова од V. У литератури су клатери познати и као Шпернерови или независни системи, антиланци и прости хиперграфови. Фамилија свих класа изоморфних клатера $\mathbf{C}$ дефинише комбинаторну Хопфову алгебру клатера $(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}})$. Следеће инклузије су очигледне

$$(\mathcal{H}(\mathbf{D}), \zeta_{\mathbf{D}}) \subset (\mathcal{H}(\mathbf{G}), \zeta_{\mathbf{G}}) \subset (\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}}).$$

Клатере природно идентификујемо са симплицијалним комплексима. Симплицијални комплекс K дефинише клатер својих максималних страна.

За хиперграф H означићемо са $C(H)$ клатер минималних ивица од H.

Градивни скупови Градивни скуп $\mathcal{B}$ на скупу V поистоветићемо са хиперграфом $\mathcal{B} \setminus \{\{v\} \mid v \in V\}$. Ако је $\mathbf{B}$ фамилија свих класа изоморфних градивних скупова, онда је $(\mathcal{H}(\mathbf{B}), \zeta_{\mathbf{B}})$ Хопфова алгебра градивних скупова $(\mathcal{B}Set, \zeta_{\mathcal{B}})$. Хиперграф H на скупу темена V генерише јединствени градивни скуп $\mathcal{B}(H)$ на начин описан у претходном поглављу. Дефинишимо индуктивно низ хиперграфова $H_0 = H$ и $H_{k+1} = H_k \cup \{e \cup e' \mid e \in H_0, e' \in H_k, e \cap e' \neq \emptyset\}, k \geq 1$. Тада је $\mathcal{B}(H) = \bigcup_{k\geq 0} H_k \ \cup \ \bigcup_{v\in V}\{v\}$.

Теорема 5.1.3. *Следећа пресликавања су цепајући мономорфизми комбинаторних Хопфових алгебри:*

$$(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}}) \stackrel{i_1}{\to} (\mathcal{H}(\mathbf{B}), \zeta_{\mathbf{B}}) \stackrel{i_2}{\to} (\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}}),$$

где је $i_1(C) = \mathcal{B}(C)$ и $i_2(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Пресликавања

$$(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}}) \stackrel{p_2}{\to} (\mathcal{H}(\mathbf{B}), \zeta_{\mathbf{B}}) \stackrel{p_1}{\to} (\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}}),$$

где је $p_1(\mathcal{B}) = C(\mathcal{B})$ и $p_2(H) = \mathcal{B}(H)$ су епиморфизми комбинаторних Хопфових алгебри који задовољавају $p_1 \circ i_1 = 1_{\mathcal{H}(\mathbf{C})}$ и $p_2 \circ i_2 = 1_{\mathcal{H}(\mathbf{B})}$.

Доказ. Тврђење теореме лако следи из чињенице да придруживање клатера $C(H)$ и градивног скупа $\mathcal{B}(H)$ хиперграфу H задовољавају

$$\mathcal{B}(H_1 \sqcup H_2) = \mathcal{B}(H_1) \sqcup \mathcal{B}(H_2) \text{ и } C(H_1 \sqcup H_2) = C(H_1) \sqcup C(H_2),$$

$$\mathcal{B}(H|_I) = \mathcal{B}(H)|_I \text{ и } C(H|_I) = C(H)|_I$$

за све хиперграфове H_1 и H_2 и за сваки $I \subset V(H)$. □

По аналогији са Ојлеровим градивним скуповима имамо дефиницију и карактеризацију Ојлерових хиперграфова.

Дефиниција 5.1.4. Хиперграф H је *Ојлеров* ако је $\chi_{\mathbf{H}}(H|_I) = \epsilon(H|_I)$ за све $I \subset V(H)$, где је $\chi_{\mathbf{H}} = \overline{\zeta}_{\mathbf{H}}\zeta_{\mathbf{H}}$ Ојлеров карактер комбинаторне Хопфове алгебре $(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}})$.

Следећа карактеризација Ојлерових хиперграфова је једноставна последица дефиниција.

Лема 5.1.5. *Хиперграф $H \neq H_{\emptyset}$ је Ојлеров ако и само ако за све $\emptyset \neq I \subset V(H)$ важи: или је $H|_I$ дискретан или је $\zeta_{\mathbf{H}}^{-1}(H|_I) = 0$.*

Доказ. Услов $\chi_{\mathbf{H}}(H) = \epsilon(H)$ еквивалентан је услову $\zeta_{\mathbf{H}}^{-1}(H) = \overline{\zeta}_{\mathbf{H}}(H)$. Ако је D_n дискретан хиперграф на n темена, из $\chi(D_n, m) = m^n$ следи да је $\zeta^{-1}(D_n) = \chi(D_n, -1) = (-1)^n = \overline{\zeta}(D_n)$. Како је $\overline{\zeta}_{\mathbf{H}}(H) = 0$ за недискретан граф H, следи тврђење. □

Дисјунктне уније и рестрикције Ојлерових хиперграфова су такође Ојлерови хиперграфови, тако да фамилија свих Ојлерових хиперграфова чини Хопфову подалгебру $\mathcal{E}(\mathbf{H})$ комбинаторне Хопфове алгебре $\mathcal{H}(\mathbf{H})$, коју ћемо звати *Ојлерова подалгебра* хиперграфова.

Лема 5.1.6. *Ојлерова подалгебра $\mathcal{E}(\mathbf{H})$ је подалгебра непарне алгебре $S_-(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}})$.*

Доказ. Непарна подалгебра $S_-(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}})$ је одређена уопштеним Ден-Сомервиловим релацијама

$$(id \otimes (\zeta^{-1} - \overline{\zeta}) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(H) = \sum_{I \sqcup J \sqcup K = V(H)} H|_I \otimes (\zeta^{-1} - \overline{\zeta})(H|_J) \otimes H|_K =$$

$= \sum_{J \subset V(H)} (\zeta^{-1} - \overline{\zeta})(H|_J) \Delta(H|_{J^c}) = 0.$

Следи да $H \in S_-(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}})$ ако је $(\zeta^{-1} - \overline{\zeta})(H|_J) = 0$ за све $J \subset X$, што је по претходној леми еквивалентно са $H \in \mathcal{E}(\mathbf{H})$. □

Нека је $\mathcal{E}(\mathbf{C}) = \mathcal{E}(\mathbf{H}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{C})$ Ојлерова подалгебра клатера.

Теорема 5.1.7. *Пресликавање $p : \mathcal{H}(\mathbf{H}) \to \mathcal{H}(\mathbf{C})$, дефинисано са $p(H) = C(H)$, индукује изоморфизме комбинаторних Хопфових алгебри:*

(*i*)
$$\mathcal{H}(\mathbf{C}) \cong \mathcal{H}(\mathbf{H}) / \ker p,$$

(*ii*)
$$\mathcal{E}(\mathbf{C}) \cong \mathcal{E}(\mathbf{H}) / (\ker p \cap \mathcal{E}(\mathbf{H})),$$

(*iii*)
$$S_-(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}}) \cong \ S_-(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}}) / \ker p.$$

Доказ. Пресликавање p је епиморфизам комбинаторних Хопфових алгебри. Језгро $\ker p$ је генерисано свим $H - C(H)$. Хиперграф H се на јединствен начин може представити као $H = C(H) + (H - C(H))$, па добијамо директну суму векторских простора: $\mathcal{H}(\mathbf{H}) = \mathcal{H}(\mathbf{C}) \oplus \ker p$. Језгро $\ker p$ је идеал за који још важи $\Delta(\ker p) \subset \ker p \otimes \ker p$ и $S(\ker p) \subset \ker p$. Дакле, $\ker p$ је Хопфов идеал од $\mathcal{H}(\mathbf{H})$ и тврђење (i) следи.

Пошто је пројекција p морфизам комбинаторних Хопфових алгебри, имамо $\chi_{\mathbf{H}}(H) = \chi_{\mathbf{C}}(C(H))$ за све хиперграфове H. Рестрикција $\overline{p} = p|_{\mathcal{E}(\mathbf{H})} : \mathcal{E}(\mathbf{H}) \to \mathcal{E}(\mathbf{C})$ је епиморфизам комбинаторних Хопфових алгебри и $\ker \overline{p} = \ker p \cap \mathcal{E}(\mathbf{H})$ је Хопфов идеал од $\mathcal{E}(\mathbf{H})$, што доказује (ii).

Генератори језгра $\ker p$ задовољавају $(id \otimes (\zeta_{\mathbf{H}}^{-1} - \overline{\zeta}_{\mathbf{H}}) \otimes id) \circ \Delta^{(2)}(H - C(H)) = 0$, па је $\ker p \subset S_-(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}})$. Како је инклузија $i : (\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}}) \to (\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}})$ морфизам комбинаторних Хопфових алгебри, имамо $S_-(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}}) = S_-(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}}) \cap \mathcal{H}(\mathbf{C})$. То значи да је добро дефинисан епиморфизам комбинаторних Хопфових алгебри $p : S_-(\mathcal{H}(\mathbf{H}), \zeta_{\mathbf{H}}) \to S_-(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}})$. □

Последица 5.1.8. *Хиперграф H је Ојлеров ако и само ако је клатер $C(H)$ Ојлеров.*

Као у претходном поглављу, клатеру C ћемо придружити апстрактни симплицијални комплекс на скупу темена C, његов нерв $\Delta(C) = N(C) = \{C' \subset C | \cap C' \neq \emptyset\}$. Пресечни граф $G(C)$ клатера је 1-скелетон нерва $G(C) = N(C)^{(1)}$. Као и раније, рећи ћемо да је C *непаран клатер* ако је $\cap C'$ скуп са непарним бројем елемената за све стране C' нерва $N(C)$. Комплетна комбинаторна карактеризација Ојлерових клатера је непосредна последица теореме 4.6.10.

Теорема 5.1.9. *Клатер C је Ојлеров ако и само ако је непаран и*

(i) *пресечни граф $G(C)$ је тетивни граф*

(ii) *нерв $N(C)$ је клик комплекс пресечног графа $G(C)$.*

Доказ. Нека је $\mathcal{B}(C)$ градивни скуп генерисан клатером C. По последици 5.1.8, клатер $C = C(\mathcal{B}(C))$ је Ојлеров ако и само ако је градивни скуп $\mathcal{B}(C)$ Ојлеров, што је, по теореми 4.6.10, еквивалентно са горњим условима. □

Нека је C клатер на скупу темена V. За подклатер $S \subset C$, нека је $\lambda(S) \vdash |V|$ партиција броја темена $|V|$ чији су делови једнаки бројевима темена повезаних компоненти од S. Хроматска симетрична функција $\Psi(C)$ клатера C је, по теореми 4.3.8, у степеној бази симетричних функција дата са

$$\Psi(C) = \sum_{S \subset C} (-1)^{|S|} p_{\lambda(S)}.$$

Претпоставимо сада да C задовољава уопштене Ден-Сомервилове релације, то јест $C \in S_-(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}})$. Тада $\Psi(C) \in S_-(Sym, \zeta_S)$. За партицију λ ћемо рећи да је непарна ако су сви њени делови непарни.

Непарна подалгебра Хопфове алгебре симетричних функција је као векторски простор генерисана скупом свих непарних степених симетричних функција, (Тврђење 7.1, [1])

$$S_{-}(Sym, \zeta_S) = \mathcal{L}\{p_\lambda | \ \lambda \text{ непарна}\}.$$

Лема 5.1.10. *Број темена повезаног Ојлеров клатера $C \in \mathcal{E}(\mathbf{C})$ је непаран.*

Доказ. Нека је $n = |V(C)|$ број темена клатера C и нека је $S \subset C$ минималан повезан подклатер такав да је $\cup S = V(C)$. Тада је S непаран и нерв $N(S)$ је пун подкомплекс нерва $N(C)$. Комплекс $N(C)$ је клик комплекс тетивног графа $G(C)$, па је $N(S)$ клик комплекс тетивног графа $G(S)$. Дакле, S је Ојлеров клатер. Отуда је $S \in S_{-}(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}})$, односно $\Psi(S) \in S_{-}(Sym, \zeta_S)$. Како је S минималан подклатер за који је $\cup S = V(C)$, у развоју $\Psi(S)$ преко степених симетричних функција, сабирак p_n се добија искључиво као $p_n = p_{\lambda(S)}$. Одатле је n непарно. □

Теорема 5.1.11. *Клатер C је Ојлеров $C \in \mathcal{E}(\mathbf{C})$ ако и само ако је партиција $\lambda(S)$ непарна за сваки подклатер $S \subset C$.*

Доказ. Нека је $C \in \mathcal{E}(\mathbf{C})$ и нека за неки подклатер $S \subset C$ имамо да партиција $\lambda(S)$ није непарна. То значи да постоји повезана компонента S' подклатера S са парним бројем темена $|S'|$. Као рестрикција Ојлеровог клатера C, повезана компонента S' је такође Ојлеров клатер. По леми 5.1.10, број темена $|S'|$ је непаран. Контрадикција.

Претпоставимо сада да је $\lambda(S)$ непарна партиција за сваки подклатер $S \subset C$. Посебно, за сваки симплекс $C' \in N(C)$ нерв комплекса имамо да је $\lambda(C')$ непарно. Одавде следи да је клатер C непаран. Применом особине укључења-искључења, показаћемо да клатер C задовољава и остале услове теореме 5.1.9:

(i) Претпоставимо да постоји нететивни цикл $e_1 \dots e_k,\ k > 3$, у пресечном графу $G(C)$. Како је $\lambda(\{e_1, \dots, e_k\})$ непарна партиција, закључујемо да је $|e_1 \cup \dots \cup e_k|$ непаран. С друге стране

$$|e_1 \cup \dots \cup e_k| = |e_1| + |e_2| + \dots + |e_k| - |e_1 \cap e_2| - |e_2 \cap e_3| - \dots - |e_k \cap e_1|,$$

што је парно, контрадикција!

(ii) Нека је $\{e_1, \dots, e_k\},\ k > 2$, минимална не-страна нерва $N(C)$. Тада је

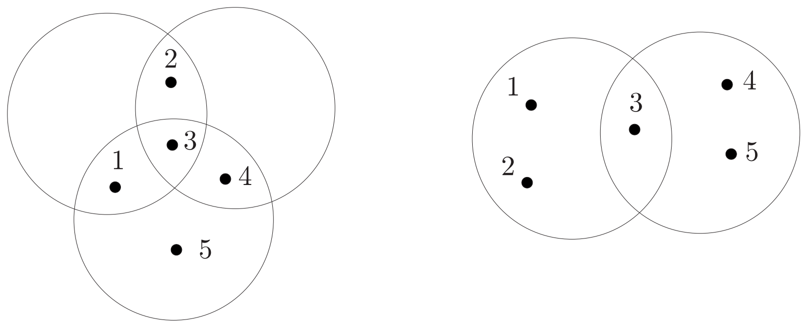
$$0 = |e_1 \cap \dots \cap e_k| = |e_1 \cup \dots \cup e_k| - \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} \sum_{i_1 < \dots < i_j} |e_{i_1} \cap \dots \cap e_{i_j}|.$$

Свих $2^k - 1$ сабирака на десној страни је непарно пошто је клатер C непаран, контрадикција. Дакле, нерв $N(C)$ је флег комплекс, односно клик комплекс пресечног графа $G(C)$. $\square$

Теореме 5.1.9 и 5.1.11, заједно са последицом 5.1.8, дају комплетну карактеризацију класе Ојлерових хиперграфова $\mathcal{E}(\mathbf{H})$.

Напомена 5.1.12. Ојлерова алгебра клатера $\mathcal{E}(\mathbf{C})$ је права подалгебра непарне алгебре клатера $S_-(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}})$. Постоје клатери који задовољавају Ден-Сомервилове релације, а нису Ојлерови. На слици 8 је дат пример таквог клатера на пет темена. Приметимо да наведени клатери имају исте хроматске симетричне функције.

Непарна алгебра $S_-(\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}})$ има и друге генераторе осим клатера који задовољавају Ден-Сомервилове релације. На пример, нека су $C_1 = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ и $C_2 = \{\{1,2\}\}$ клатери на скупу темена $V = \{1,2,3\}$. Тада елемент $h = C_2 - 2C_1$ задовољава уопштене Ден-Сомервилове релације, али није у Ојлеровој подалгебри.



$C_1 \notin \mathcal{E}(\mathbf{C})$ $\qquad$ $C_2 \in \mathcal{E}(\mathbf{C})$

$$\Psi(C_1) = \Psi(C_2) = p_{1,1,1,1,1} - 2p_{3,1,1} + p_5$$

Слика 8: *Не-Ојлеров клатер који задовољава Ден-Сомервилове релације*

5.2 Хопфова алгебра симплицијалних комплекса

Апстрактни симплицијални комплекс K на скупу темена $V = V(K)$ је доњи идеал у Буловом посету $\mathcal{P}(V)$ свих подскупова од V. Захтеваћемо да $\{v\} \in K$ за сва темена $v \in V$. Индуковани подкомплекс $K|_I$ од K на скупу темена $I \subset V(K)$ је фамилија $K|_I = \{\sigma \in K|\ \sigma \subset I\}$.

Два симплицијална комплекса су изоморфна ако постоји бијекција њихових скупова темена $f : V(K_1) \to V(K_2)$ таква да $\sigma \in K_2$ ако и само ако $f^{-1}(\sigma) \in K_1$.

Нека је $\mathcal{H}(\mathbf{K}) = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{H}_n(\mathbf{K})$ градуисани k-векторски простор чија је база скуп $\mathbf{K}$ свих класа изоморфних коначних симплицијалних комплекса и са градуацијом датом бројем темена. У односу на производ дефинисан *спајањем* симплицијалних комплекса

$$K_1 * K_2 = \{\sigma \cup \tau|\ \sigma \in K_1, \tau \in K_2\},$$

који је симплицијални комплекс на дисјунктној унији $V(K_1) \sqcup V(K_2)$, и копроизвод дефинисан индукованим подкомплексима

$$\Delta(K) = \sum_{I\subset V(K)} K|_I \otimes K|_{I^c},$$

простор $\mathcal{H}(\mathbf{K})$ је градуисана повезана комутативна и кокомутативна Хопфова алгебра. Јединични елемент је празан симплицијални комплекс, а којединица је $\epsilon(K) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } K = \emptyset \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$.

Дефинишимо карактер $\zeta_{\mathbf{K}} : \mathcal{H}(\mathbf{K}) \to k$ са

$$\zeta_{\mathbf{K}}(K) = \begin{cases} 1, & \text{ако је К симплекс} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Тако смо добили комбинаторну Хопфову алгебру симплицијалних комплекса $(\mathcal{H}(\mathbf{K}), \zeta_{\mathbf{K}})$.

Антипод S ове алгебре одређен је са

$$S(K) = \sum_{k\geq 1}(-1)^k \sum_{I_1\sqcup\ldots\sqcup I_k = V(K)} K|_{I_1} * \cdots * K|_{I_k},$$

где сумирамо по свим уређеним декомпозицијама скупа темена.

Канонски морфизам $\Psi : (\mathcal{H}(\mathbf{K}), \zeta_{\mathbf{K}}) \longrightarrow (QSym, \zeta_Q)$ дат је са

$$\Psi(K) = \sum_{\alpha \models n} (\zeta_{\mathbf{K}})_\alpha(K) M_\alpha, \ K \in \mathcal{H}_n(\mathbf{K}).$$

Дефинишимо *партицију* симплицијалног комплекса K као уређену декомпозицију $(I_1, \ldots, I_k)$ скупа темена $V(K)$ такву да су сви индуковани подкомплекси $K|_{I_j}$, $1 \leq j \leq k$, симплекси. За композицију $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \models n$ коефицијент $(\zeta_{\mathbf{K}})_\alpha(K)$ је број партиција од K чији делови имају дате бројеве елемената, $|I_j| = a_j$, $1 \leq j \leq k$. Пошто је $\mathcal{H}(\mathbf{K})$ кокомутативна, функција $\Psi(K)$ је симетрична.

Дефинишимо *функцију партиције* симплицијалног комплекса K као пресликавање $f : V(K) \to \mathbb{N}$ такво да је $f^{-1}(\{i\})$ симплекс од K за све $i \in f(V(K))$. За функцију партиције f означимо са $\mathbf{x}_f = \prod_{v \in V(K)} x_{f(v)}$ моном у прстену полинома $k[x_1, x_2, \ldots]$. Тада је

$$\Psi(K) = \sum_{f \text{ функција партиције}} \mathbf{x}_f$$

генеришућа функција свих функција партиције симплицијалног комплекса K.

Главна специјализација $\chi(K, m) = \zeta_{\mathbf{K}}^m(K) = \Psi(K)(1^m)$ дефинише *полином партиције* симплицијалног комплекса K који броји функције партиције $f : V(K) \to [m]$. Од посебног значаја је вредност $\chi(K, -1)$ и по формули за антипод имамо

$$\chi(K, -1) = \zeta_{\mathbf{K}}^{-1}(K) = \sum_{\alpha \models n} (-1)^{k(\alpha)} (\zeta_{\mathbf{K}})_\alpha(K).$$

Комплекс независности клатера C је симплицијални комплекс

$$\mathrm{Ind}(C) = \{I \subset V(C) |\ C|_I \text{ је дискретан}\}.$$

Симплицијални комплекс K одређује клатер својих минималних нестрана

$$C(K) = \{I \subset V(K) |\ I \notin K, J \in K \text{ за сваки прави подскуп } J \subset I\}.$$

Ова два придруживања су међусобно инверзна

$$\mathrm{Ind}(C(K)) = K \text{ и } C(\mathrm{Ind}(C)) = C.$$

Теорема 5.2.1. *Пресликавање* $\mathrm{Ind} : (\mathcal{H}(\mathbf{C}), \zeta_{\mathbf{C}}) \to (\mathcal{H}(\mathbf{K}), \zeta_{\mathbf{K}})$ *које клатеру* C *придружује комплекс независности* $\mathrm{Ind}(C)$ *је изоморфизам комбинаторних Хопфових алгебри.*

Доказ. Пресликавање Ind задовољава

$$\mathrm{Ind}(C_1 \sqcup C_2) = \mathrm{Ind}(C_1) * \mathrm{Ind}(C_2),$$

$$\mathrm{Ind}(C)|_I = \mathrm{Ind}(C|_I)$$

за све C_1 и C_2 и за сваки $I \subset V(C)$. Комплекс $\mathrm{Ind}(C)$ је симплекс ако и само ако је C дискретан, па је $\zeta_{\mathbf{K}} \circ \mathrm{Ind} = \zeta_{\mathbf{C}}$. Дакле Ind је морфизам комбинаторних Хопфових алгебри. □

Вредност Ојлеровог карактера на симплицијалном комплексу K је дата са

$$\chi(K) = \overline{\zeta}_{\mathbf{K}} \zeta_{\mathbf{K}}(K) = \sum_{\text{партиције } (I, I^c)} (-1)^{|I|}.$$

Ојлерова подалгебра $\mathcal{E}(\mathbf{K})$ је дефинисана аналогно као Ојлерова подалгебра хиперграфова. Она је генерисана свим класама изоморфних симплицијалних комплекса који имају особину да је вредност Ојлеровог карактера на свим рестрикцијама нула, $\chi(K|_I) = 0,\ \emptyset \neq I \subset V(K)$.

Пример 5.2.2. Претпоставимо да је $\{i, j\}$ минимална нестрана симплицијалног комплекса K. Тада је $\chi(K|_{\{i,j\}}) = -2$, па K није Ојлеров. Потребан услов да комплекс K буде Ојлеров је да је његов 1-скелетон комплетан граф на $V(K)$. Због тога комплекс независности недискретног простог графа није Ојлеров.

На основу изоморфизма из теореме 5.2.1 и из теорема 5.1.11 и 5.1.9, добијамо комплетну карактеризацију Ојлерових симплицијалних комплекса $K \in \mathcal{E}(\mathbf{K})$.

Теорема 5.2.3. *Симплицијални комплекс* K *је Ојлеров ако и само ако је комплекс независности* $K = \mathrm{Ind}(C)$ *Ојлеровог клатера* $C \in \mathcal{E}(\mathbf{C})$ *или еквивалентно, ако и само ако је његов клатер минималних не-страна* $C(K)$ *Ојлеров.*

Пример 5.2.4. 1. Нека је $\Delta[n]$ симплекс на n темена. Гранични комплекс $\partial\Delta[n]$ је Ојлеров ако и само ако је n непаран.

2. Нека је C клатер такав да је нерв комплекс $N(C)$ или дрво или симплекс. Тада је комплекс независности $\mathrm{Ind}(C)$ Ојлеров ако и само ако је C непаран.

Литература

[1] M. Aguiar, N. Bergeron, F. Sottile, Combinatorial Hopf algebras and generalized Dehn-Sommerville relations, Compositio Mathematica 142 (2006) 1-30.

[2] M. Aguiar, S. Hsiao, Canonical characters on quasi-symmetric functions and bivariate Catalan numbers, Electronic Journal of Combinatorics 11(2), 2004-2005, R15: 34pp. Special volume in honor of Richard Stanley

[3] M. Aguiar, F. Sottile, Structure of the Malvenuto-Reutenauer Hopf algebra of permutations, Adv. Math. 191 (2005) 225-275.

[4] M. Aguiar, F. Sottile, Structure of the Loday-Ronco Hopf algebra of trees, Jour. of Alg. 295 n2 (2006) 473-511.

[5] N. Andruskiewitsch, W. F. Santos, The beginnings of the theory of Hopf algebras, Acta Apll. Math. 108 (2009) 3-17.

[6] M. Bayer, L. Billera, Generalized Dehn-Sommerville relations for polytopes, spheres, and Eulerian partially ordered sets, Invent. Math. 79 (1985) 143-157.

[7] C. Brouder, A. Frabetti, Renormalization of QED with planar binary trees, Europ. Phys. J. C 19 (2001) 715-741.

[8] C. De Concini, C. Procesi, Wonderful models for subspace arrangements, Selecta Math. (N.S.) 1 (1995) 459-494.

[9] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu, Hopf algebras, An Introduction, Marcel Dekker, Inc. (2001).

[10] R. Duarte, A. G. de Oliveira, A short proof of a famous combinatorial identity, arXiv:1307.6693

[11] R. Ehrenborg, On posets and Hopf algebras, Adv. Math. 119 (1996) 1-25.

[12] R. Ehrenborg, M. Readdy, Coproducts and the $\mathbf{cd}-$index, Journal of Alg. Comb. 8(3) (1998) 273-299.

[13] E. M. Feichtner, B. Sturmfels, Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans, Port. Math. (N.S.) 62(4) (2005) 437-468.

[14] I. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Lecrerc, V. Retakh, and J.-Y. Thibon, Non-commutative symmetric functions, Adv. in Math. 112 (1995) 218-348.

[15] I.Gessel, Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions, Contemp. Math. AMS vol.34 (1984) 289-317.

[16] R. Grossman, R. Larsson, Hopf algebraic structure of families of trees, J. Algebra 126 (1989), no. 1, 184-210.

[17] V. Grujić, T. Stojadinović, Hopf algebra of building sets, Electron. J. Combin. 19(4) (2012) P42.

[18] V. Grujić, T. Stojadinović, D. Jojić, Generalized Dehn-Sommerville relations for hypergraphs, preprint

[19] Michael E. Hoffman, Quasi-shuffle products, J. Alg. Combin. 11 (2000), no. 1, 49-68.

[20] H. Hopf, Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, Ann. of Math. 42 (1941) 22-52.

[21] D. Kreimer, On the Hopf Algebra structure of perturbative quantum field theories, Adv. Theory. Math. Phis. 2 (1998) 303-334.

[22] D. Jojić, Elementi enumerativne kombinatorike, Naša knjiga, Beograd, 2011.

[23] S. Joni, G.-C. Rota, Coalgebras and bialgebras in combinatorics, Stud. Appl. Math. 61 (1979) 93-139.

[24] J.-L. Loday, M. O. Ronco, Hopf algebra of the planar binary trees, Adv. Math. 139 (1998), no. 2, 293-309.

[25] J. W. Milnor, J.C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Annals of Math. 81 (1965) 211-264.

[26] C. Malvenuto, C. Reutenauer, Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra, J. Algebra 177 (1995) 967-982.

[27] A. Postnikov, Permutohedra, Associahedra, and Beyond, Int. Math. Res. Notices 6 (2009) 1026-1106.

[28] W. R. Schmitt, Hopf Algebra Methods in Graph Theory, Journal of Pure and Applied Algebra 101 (1995) 77-90.

[29] R. Stanley, Enumerative combinatorics. Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[30] R. Stanley, A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph, Adv. in Math. 111 (1995) 166-194.

[31] R. Stanley, Graphs colorings and related symmetric functions: Ideas and Apllications, Discrete Math. 193 (1998) 267-286.

[32] T. Stojadinović, Canonical characters on simple graphs, Czech. Math. Jour. 63(1) (2013) 107-113.

[33] Moss E. Sweedler, Hopf algebras, W. A. Benjamin, Inc., New York, (1969).

[34] M. Takeuchi, Free Hopf algebras generated by coalgebras, J. Math. Soc. Japan 23 (1971) 561-582.

[35] H. Whitney, A logical expansion in mathematics, Bull. Amer. Math. Soc. 38, 572-579 (1932)

БИОГРАФИЈА АУТОРА

Тања Стојадиновић рођена је 2. маја 1977. године у Јагодини, где је завршила основну школу и гимназију, као ђак генерације и носилац Вукове дипломе . Школске 1996/97. године уписала је Математички факултет Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене. Дипломирала је у јулу 2001. године са просечном оценом 9,86. На Математичком факултету завршила је и магистарске студије на смеру Алгебра. У марту 2007. године одбранила је магистарску тезу под називом *Хопфове алгебре димензије* p^2 под руководством др Драгане Тодорић.

Запослена је на Математичком факултету у Београду од октобра 2002. године, најпре као асистент приправник, а затим као асистент. Држи вежбе из групе алгебарских предмета. Учествује у раду пројекта 174034 *Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама.* Главна научна интересовања су јој Хопфове алгебре и алгебарска комбинаторика. Објавила је три научна рада, од којих су два у часописима са SCI листе, а још два су у процесу рецензије.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписана **Тања Стојадиновић**

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Комбинаторне Хопфове алгебре

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршила ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 14.12.2013.

Тања Стојадиновић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Тања Стојадиновић

Студијски програм: Алгебра

Наслов рада: Комбинаторне Хопфове алгебре

Ментор: др Жарко Мијајловић

Потписана **Тања Стојадиновић**

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предала за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 14.12.2013.

Тања Стојадиновић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом

Комбинаторне Хопфове алгебре

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучила.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 14.12.2013.

Тања Стојадиновић

1. **Ауторство** - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство - некомерцијално** – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство - некомерцијално** – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прераде.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство** - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.