

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Оливера Латковић

**МОДЕЛИРАЊЕ
ЗВЕЗДАНИХ ОСЦИЛАЦИЈА
У ТЕСНО ДВОЈНИМ СИСТЕМИМА**

докторска дисертација

Београд, 2013

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Olivera Latković

**MODELING OF
STELLAR OSCILLATIONS
IN CLOSE BINARY SYSTEMS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2013

Ментор: проф др Олга Атанацковић
Математички факултет Универзитета у Београду

Чланови комисије: проф др Олга Атанацковић
Математички факултет Универзитета у Београду

др Гојко Ђурашевић
Астрономска опсерваторија у Београду

др Иштван Винце
Астрономска опсерваторија у Београду

Спољни саветник: др Барна И. Биро
Астрономска опсерваторија у Баји (Мађарска)

Датум одбране:

Захвалнице

Рад на овој дисертацији финансирао је Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије кроз пројекат „Физика звезда“ (бр. 176004). Као руководиоци и саветници, у њеној изради су учествовали др Гојко Ђурашевић, др Иштван Винце и др Олга Атанацковић, као и др Биро Барна. Свима се захваљујем на сарадњи, подршци и помоћи при писању текста. Посебно Гојку, за стрпљење, разумевање и вођство без наметања, те за несебично финансирање пословних путовања и пројеката; и Иштвану, за дугогодишње пријатељство, усмеравање и инсистирање на високим стандардима како у теоријском знању, тако и у практичној примени. Special thanks to dr Bíró Barna, who shared with me not only his invaluable ideas, genius and expertise, but also a lasting bond of friendship. Хвала колегама истраживачима и особљу Астрономске опсерваторије и Катедре за астрономију за све услуге велике и мале, за дружење и расправе и обиље различитих погледа на свет. Thanks to dr Hegedus Tibor, for being a thoughtful host on many occasions, and to all the staff of Baja Astronomical Observatory, for their hospitality. Заувек сам захвална Чеки Атили, пријатељу, сараднику и животном сапутнику, за непресушну љубав и подршку у овом и свим изазовима; ово не би било могуће без тебе, срце моје. Love and gratitude to Jocelyn Hamilton, for inspiration, encouragement, and useful programming tips. Хвала Говедарицама, Стојановићима, Симићима, Васиљевићима и породици Чеки, јер су најбоља фамилија на свету; и Ани Симоновић, јер ме је светлим примером, храброшћу и самопоуздањем, извела на пут науке.

Посвећујем овај рад мојим драгим родитељима, Десанки и Душану Латковићу. Иако нисте ту, знам да сте поносни на мене.

О. Л.

Моделирање звезданих осцилација у тесно двојним системима

Предмет дисертације је моделирање звезданих осцилација у тесно двојним системима. Ова тема је значајна како са становишта проучавања двојних звезда, тако и са становишта астросеизмологије.

Један од горућих проблема астросеизмологије је „идентификација мода“ звезданих осцилација. Идентификација мода је процес повезивања фреквенције осцилације детектоване у фотометријским или спектроскопским мерењима са сферним хармоником хармонијског степена ℓ и азимуталног реда m , који описује просторне карактеристике моде. Главна препрека овом кључном кораку на путу од прикупљања података до коришћења осцилација за астросеизмолошка истраживања је симетрија у обрасцу осцилација, која чини да се промене у сјају, односно у радијалним брзинама елемената површине међусобно потиру, смањујући посматране амплитуде. Последица ове појаве је веома мала осетљивост фотометрије и спектроскопије на моде хармонијског степена ℓ већег од 4 односно 6, што отежава и детекцију и идентификацију осцилација.

У дисертацији се развија метода идентификације мода фитовањем сферних хармоника на фотометријску криву сјаја пулсирајуће звезде у тесно двојном систему. Ефекти помрачења пулсирајуће звезде од стране другог члана двојног система се јасно одражавају на посматране особине осцилација: помрачење доводи до јединствене модулације фреквенције, амплитуде и фазе сваке појединачне моде, што представља обележје које се може фитовати. За фитовање је, међутим, потребан модел двојног система са пулсирајућом компонентом.

Једина постојећа реализација методе фитовања сферних хармоника користи веома поједностављен модел двојног система, са идеализованим сферним звездама на кружној орбити, при чему се осцилације представљају као синусне пертурбације произвољне равнотежне расподеле сјаја. У дисертацији се предлаже много сложенији модел, заснован на Рошовој геометрији, у који су укључени сви најважнији ефекти који проистичу из близине компонената. Побољшани модел ук-

ључује и ефекте плимске деформације и ротације на фреквенције и просторне карактеристике осцилација.

Научни циљ дисертације је развој поуздане методе – методе фитовања сферних хармоника – за идентификацију мода код пулсирајућих звезда у тесно двојним системима, како би се омогућило астросеизмолошко истраживање особина и структуре таквих звезда.

Основна претпоставка од које се полази је да се тесно двојни систем може представити помоћу Рошовог модела, који се заснива на апроксимацији потпуне централне кондензације. Другим речима, сматра се да је удео масе изван самог средишта звезде занемарљив. Ова апроксимација омогућава да се гравитациона интеракција компонената двојног система третира као интеракција две материјалне тачке.

У оквиру Рошовог модела, облик звезде је одређен такозваним Рошовим потенцијалом, који одговара суперпозицији гравитационе и центрифугалне силе. Расподела температуре на површини је одређена фон Цајпеловим законом зависности флукса од локалне вредности ефективног гравитационог убрзања.

Осцилације на површини звезде се тада моделирају као пертурбације локалних вредности Рошовог потенцијала и температуре. Претпоставља се да су осцилације адијабатске, малих амплитуда и да се могу представити помоћу сферних хармоника. Такође се сматра да се оса симетрије осцилација поклапа са доминантном геометријском осом (на пример са осом ротације звезде или, у случају плимски изобличене звезде, са линијом која повезује центре компонената двојног система).

Предложена метода за идентификацију мода код пулсирајућих звезда у двојним системима реализована је као део програма *Infinity* за моделирање двојних система. *Infinity* се заснива на Рошовом моделу и укључује све физичке појаве које имају утицај на формирање кривих сјаја и радијалних брзина, од потамњења ка рубу и расподеле температуре услед изобличености, преко ефекта рефлексије, до нехомогености у површинском сјају и присуства акреционог диска. Звездане осцилације се могу моделирати на једној или на обе компоненте система.

За верификацију предложене методе користе се тестови на синтетичким подацима. Другим речима, резултати фитовања се пореде са оним звезданим параметрима и параметрима двојног система са којима је генерисана синтетичка крива сјаја, односно вештачки „посматрачки материјал“. Тестови су направљени тако да се покрије низ како повољних, тако и неповољних конфигурација (потпуна и делимична помрачења, сферне и изобличене звезде, моде малог и великог степена симетрије, итд). Добијени резултати се коначно пореде са резултатима сродне технике идентификације мода мапирањем помоћу помрачења.

Закључак дисертације је да предложена метода идентификације мода даје поуздане резултате, тј. успешно идентификује моде на приближно сферним звездама у добро одвојеним двојним системима. Резултати за плимски изобличене звезде су охрабрујући, али ће за поуздану примену методе у таквим случајевима бити потребно у поступак идентификације уградити симултано фитовање фреквенције, амплитуде и фазе за сваку пробну моду, као и разрешити питање неједнозначних идентификација, што је главни правац будућег рада.

Кључне речи: звезде: двојни системи: тесни – звезде: двојни системи: еклипсни – звезде: осцилације – звезде: променљиве – звезде: појединачне: NY Vir – звезде: појединачне: AU Mon – методе: нумеричке – технике: фотометријске

Научна област: Астрономија
Ужа научна област: Астрофизика
УДК број: 524.387:[550.348:52](043.3)

Modeling of stellar oscillations in close binary systems

The dissertation deals with modeling of stellar oscillations in close binary systems. This topic is important not only for the study of binary stars, but also for asteroseismology.

One of the key problems of asteroseismology is the “mode identification” of stellar oscillations. Mode identification is the process of associating an oscillation frequency measured from photometric or spectroscopic observations with a spherical harmonic of degree ℓ and order m which describes the spatial characteristics of the mode. The main obstacle for this crucial step between the collection and interpretation of data is the symmetry inherent to the patterns of oscillations that makes the periodic changes in the brightness and the radial velocities of surface elements cancel each other out, resulting in diminishing of observed amplitudes. Low sensitivity of both photometry and spectroscopy to high degree modes ($\ell > 4$ and $\ell > 6$ in photometric and spectroscopic observations, respectively), is one of the consequences of this phenomenon, making the detection and identification of oscillations a difficult task.

A method for mode identification by grid-fitting spherical harmonics to photometric light curves of pulsating stars inside eclipsing binary systems is developed in the dissertation. The eclipse of the pulsating star by its binary companion has visible effects on the observed properties of the oscillations because the eclipse spoils the symmetry of oscillation pattern, producing a modulation of frequency, amplitude and phase unique for each mode that can be recognized and fitted. Fitting, however, requires a model of a binary system with pulsating components.

The only existing implementation of the method of fitting spherical harmonics to light curves uses a very simple model of the binary, with ideally spherical stars in circular orbits, and does not account for any of the proximity effects. Moreover, the oscillations are represented as sinusoidal perturbations of an arbitrary surface brightness distribution. This dissertation uses a much more detailed model, based on Roche geometry that includes all the important proximity effects. Modeling of stellar oscillations is improved by representing them as direct perturbations of local tempe-

rature and gravitational potential and including the effects of tidal distortion and rotation on the frequencies and spatial properties of the modes.

The scientific goal of the dissertation is to develop a reliable method – the method of fitting spherical harmonics – for mode identification on pulsating stars in close binary systems, in order to enable asteroseismological studies of their interiors.

The basic assumption is that a close binary system can be represented using the Roche model, which is based on the approximation of total central condensation. In other words, it is assumed that the contribution of outer layers of the star to its total mass can be neglected. With this approximation, it is possible to treat the gravitational interaction of the components as the interaction of point masses.

Within the Roche model, the shape of the star is determined by the Roche potential that corresponds to the superposition of the gravitational and the centrifugal force. The temperature distribution across the surface is determined by the von Zeipel law that defines the dependence of flux on the effective gravitational acceleration.

Stellar oscillations are then modeled as perturbations of the local values of the Roche potential and temperature. It is assumed that the oscillations are adiabatic, of small amplitudes, and that they can be represented using spherical harmonics. It is also assumed that the symmetry axis of the oscillations will coincide with the dominant geometrical axis (usually with the rotation axis, or in the case of tidally distorted stars, with the line connecting the centers of the components).

The proposed method of mode identification on pulsating components of close binary systems is implemented as a part of the modeling program *Infinity*. *Infinity* is based on the Roche model and accounts for all the phenomena that influence the formation of light and radial velocity curves, from limb darkening and surface temperature distribution caused by departures from spherical shape, to the reflection effect, irregularities in surface brightness and the presence of the accretion disc. Stellar oscillations can be modeled on one or both components of the system.

The method is verified by means of tests using synthetic data. In other words, the results of fitting are compared to the stellar and orbital parameters that were used to generate

the synthetic light curves, or the fake “observations”. The tests encompass both favorable and unfavorable configurations (total and partial eclipses, approximately spherical and tidally distorted stars, modes of low and high degrees and so forth). The results are finally compared to the results of a similar technique of mode identification – the method of eclipse mapping.

From the obtained results, we can conclude that the proposed method of mode identification is reliable (i.e. provides correct identification) for approximately spherical stars in detached binary systems. The results for tidally distorted stars are encouraging, but show that before an attempt is made to apply the method on real observation of that nature, it will be necessary to include the simultaneous fitting of frequency, amplitude and phase for each trial mode into the procedure of mode identification, and to try to solve the problem of ambiguous identifications. This will be the focus of my future work.

Keywords: stars: binaries: close – stars: binaries: eclipsing – stars: oscillations – stars: variables: general – stars: individual: NY Vir – stars: individual: AU Mon – methods: numerical – techniques: photometric

Scientific field: Astronomy

Scientific subfield: Astrophysics

UDK number: 524.387:[550.348:52](043.3)

Садржај

1. Увод	1
1.1. Од хелио- до астро-сеизмологије	2
1.2. Осврт на равнотежну структуру	6
1.3. Пертурбациона анализа	7
1.4. Геометријско поништавање	14
1.5. Асимптотски режим	15
1.6. Ефекти ротације	18
1.7. Механизми побуђивања	19
1.8. Пулсирајуће звезде у двојним системима	21
2. Проблем идентификације мода	23
2.1. Идентификација мода на Сунцу	24
2.2. Идентификација мода код других звезда	24
2.2.1. Фотометријске методе	25
2.2.2. Спектроскопске методе	26
2.2.3. Мешовите методе	27
2.3. Идентификација мода у еклипсно двојним системима	28
2.3.1. Мапирање помрачењем	30
2.3.2. Директно фитовање кривих сјаја	32
2.3.3. Директно фитовање кривих сјаја у оквиру Рошовог модела	36
3. Модел двојног система	37
3.1. Основне претпоставке	37
3.2. Геометријска репрезентација	38
3.3. Рачун физичких величина	40
4. Модел звезданих осцилација	43
4.1. Основне претпоставке	43

4.2.	Особине мода као параметри модела.....	44
4.3.	Пертурбација температуре.....	46
4.4.	Пертурбација гравитационог потенцијала	48
4.5.	Орјентација осе симетрије	50
5.	Демонстрација на синтетичким подацима.....	54
5.1.	Узорак	55
5.2.	Поступак	59
5.2.1.	Синтеза „посматране“ криве сјаја.....	60
5.2.2.	Одузимање орбиталног решења.....	62
5.2.3.	Анализа сигнала.....	69
5.2.4.	Калибрација фреквенције, амплитуде и фазе	71
5.2.5.	Урачунавање ротационог цепања фреквенција.....	77
5.2.6.	Формирање мреже пробних модела	80
5.2.7.	Избор најбољег модела	82
5.3.	Резултати за приближно сферну пулсирајућу компоненту	85
5.4.	Резултати за изобличену пулсирајућу компоненту.....	90
5.5.	Дискусија	99
6.	Примена на посматрачке податке.....	100
6.1.	Услови и ограничења.....	100
6.2.	Шта са не-синусоидалним варијацијама? Случај NY Vir.....	101
6.3.	Шта са хармоничима орбиталне фреквенције? Случај AU Mon.....	104
7.	Закључак	109
8.	Преглед типова и особина пулсирајућих звезда	111
8.1.	Осцилације на главном низу.....	112
8.1.1.	Осцилације код звезда Сунчевог типа.....	112
8.1.2.	Звезде типа γ Dor	114

8.1.3.	Звезде типа δ Sct	114
8.1.4.	Брзо-ротирајуће Ap звезде	116
8.1.5.	Споро-пулсирајуће B звезде	116
8.1.6.	Звезде типа β Cep	116
8.1.7.	Пулсирајуће Be звезде	117
8.2.	Осцилације код протозвезда	117
8.3.	Осцилације код еволуираних звезда	118
8.3.1.	Звезде типа RR Lyr	118
8.3.2.	Цефеиде	119
8.3.3.	Мира и неправилно променљиве звезде	121
8.3.4.	Осцилације Сунчевог типа у црвеним џиновима	121
8.3.5.	Променљиви суперџинови типова A и B и WR звезде	122
8.4.	Осцилације код компактних објеката	122
8.4.1.	Променљиве суб-патуљасте B звезде	122
8.4.2.	Пулсирајући бели патуљци	122
8.4.3.	Неутронске звезде	123
9.	Код за моделирање осцилација у тесно двојном систему	125
9.1.	Помоћне функције и константе	125
9.2.	Рачун сферних хармоника	131
9.2.1.	Лежандрови полиноми	131
9.2.2.	Вигнерова матрица ротације	132
9.2.3.	Сферни хармоници	133
9.3.	Моде осциловања	135
9.4.	Рачун пертурбација температуре и положаја	138
	Литература	141
	Биографија аутора	150

Напомене

За разлику од астросеизмологије, која се још увек сматра за ново и младо поље истраживања звезда, проучавање двојних звезда има дугу традицију. Као један од основних и најпоузданијих извора физичких параметара звезда, двојни системи су заслужено уврштени у основне студије астрофизике. Из тог разлога се у дисертацији претпоставља да су читаоци упознати са основним појмовима и теоријом двојних звезда, па та тема овде неће бити детаљно изложена. На почетку се, међутим, даје подробен увод у астросеизмологију, са посебним освртом на пулсирајуће звезде у двојним системима.

У другом поглављу изложен је проблем идентификације мода са прегледом постојећих решења. Треће и четврто поглавље приказују, редом, модел двојног система употребљен за ову студију и предложени модел звезданих осцилација, а у петом поглављу је дата демонстрација предложене методе идентификације мода на синтетичким подацима, са детаљним објашњењем поступка и дискусијом резултата. На крају се, у шестом поглављу, испитују могућности за примену методе на посматрачке податке, са неколико примера из мог досадашњег искуства. Као додатни материјал дати су преглед типова и особина пулсирајућих звезда и код за моделирање звезданих осцилација.

Основну литературу за израду дисертације чине следеће књиге: „Asteroseismology“ (Aerts, et al., 2010) и „An introduction to close binary stars“ (Hilditch, 2001). Најважнији рад који се цитира је „Photometric mode identification methods of non-radial pulsations in eclipsing binaries – I. Dynamic eclipse mapping“ (Bíró & Nuspl, 2011), у коме је представљена техника идентификације мода мапирањем помоћу помрачења (видети одељак 2.3.1). Верификација методе предложене у овој дисертацији – тј. тестирање на синтетичким подацима – прати процедуру осмишљену у поменутом раду, а један од примера је преузет директно одатле ради лакшег поређења са новим резултатима.

Међу мојим досад објављеним радовима, за истраживање представљено у овој дисертацији најважнији су следећи:

- „Photometric mode identification methods in eclipsing binaries“ (Latković & Bíró, 2008)
- “Mapping pulsations on rapidly rotating components of eclipsing binaries” (Bíró & Latković, 2009)
- “Accretion disc in the eclipsing binary AU Mon” (Djurašević, et al., 2010) и
- „WASP Light Curve of the Eclipsing Binary VZ CVn“ (Latković, 2012)

Прва два поменута чланка су саопштења са међународних конференција у којима је у општим цртама представљена метода идентификације мода фитовањем сферних хармоника у оквиру аналитичког модела двојног система са сферним звездама и осцилацијама које су моделиране као директне пертурбације површинске расподеле сјаја. Метода предложена у дисертацији се заснива на истим принципима, али је реализована у оквиру Рошовог модела двојног система, при чему се осцилације моделирају као пертурбације локалних вредности температуре и ефективног гравитационог потенцијала.

Друга два рада су примери двојних система са примарном звездом на којој су детектоване нерадијалне осцилације малих амплитуда, а један од њих (AU Mon) ће бити детаљно дискутован у поглављу 6 као потенцијални кандидат за примену предложене методе.

Велики део посла на припреми дисертације састојао се од изградње и употребе специјализованог астрономског софтвера. На првом месту је програм за моделирање двојних система, *Infinity* (Čeki, 2013, у припреми). Предложени модел звезданих осцилација у тесно двојном систему је реализован управо као проширење овог програма и у поглављу 9 су одштампани делови кода који су релевантни за моделирање осцилација.

Претеча предложеног модела је програм *Pulzem* (Bíró & Latković, 2014, у припреми, Latković & Bíró, 2008, Bíró & Latković, 2009), у коме је реализован раније поменути аналитички модел двојног система са сферним звездама и директном пертурбацијом површинског сјаја. У поглављу 5 се поређењем синтетичких кривих сјаја из ова два програма демонстрира добро поклапање за приближно сферне звезде.

Коначно, за анализу сигнала у оквиру демонстрације предложене методе у поглављу 5, коришћен је програм *Period04* (Lenz & Breger, 2005) – општеприхваћена алатка за изолацију и мерење фреквенција Фуријеовом анализом.

Напомене завршавам списком појмова који су, колико ми је познато, по први пут преведени са енглеског на српски језик у овој дисертацији:

- *Eclipse mapping* – **мапирање помрачењем** – техника одређивања расподеле сјаја на површини звезде или акреционог диска техникама реконструкције слике (Horne, 1985)
- *Prewhitening* – **избељивање сигнала** – техника итеративног одузимања синусних функција одговарајућих фреквенција и амплитуда од података док се не уклоне сви сигнали из Фуријеовог периодаграма
- *Overtone of pulsation* – **виши хармоник пулсације** – осцилација чија је фреквенција једнака целобројном умношку неке основне фреквенције

1. Увод

Разумевање структуре и еволуције звезда је камен темељац модерне астрофизике. Но, и поред истраживачких резултата постигнутих током последњих неколико деценија, оно се и даље у највећој мери ослања на употребу спектроскопских, фотометријских, астрометријских и интерферометријских посматрања, односно метода које дају директне информације о површини звезда, али не и о њиховој унутрашњој структури. Из ових типова посматрања може се закључивати о испољавању познатих физичких закона у звезданим условима, али појаве попут конвекције, ротације, атомске дифузије, магнетохидродинамички и други процеси за које се засигурно зна да играју значајну улогу, не могу се на задовољавајући начин проучавати класичним техникама. Модели звездане структуре који се базирају на основним физичким законима су екстремно једноставни с обзиром на огромну комплексност унутрашњости звезда.

Астросеизмологија има за циљ да унапреди наше знање о структури звезда на сличан начин као што је хелиосеизмологија довела до великог напретка у проучавању Сунца: кроз употребу *звезданих осцилација*. Звездане осцилације пружају могућност употребе методе параметарског мерења физичких величина, одн. индиректног посматрања унутрашњих процеса код пулсирајућих звезда, јер се они јасно одражавају на фреквенције осцилација површинских, директно мерљивих физичких величина као што су сјај и радијална брзина. Поређењем измерених и предвиђених фреквенција, модели унутрашње структуре звезда могу се довести до прецизности која се не може постићи другим методама.

Тесно двојни системи који садрже пулсирајуће звезде су привлачни за астросеизмолошке студије из два разлога. Први је тај што се у двојним системима могу измерити фундаментални звездани параметри компонената, као што су маса, величина и луминозност, док се изведени параметри, као што су старост и еволутивни статус, могу одредити далеко прецизније него код усамљених звезда. Други разлог је тај што се помрачење у еклипсно двојним системима може искористити као извор додатних информација о геометрији, одн. модама осцилација.

С друге стране, тесно двојни системи су компликовани астрофизички објекти, са обиљем ефеката који настају као последица интеракције међу компонентама. Ови ефекти отежавају примену како основних, тако и комплексних астросеизмолошких техника, од мерења до интерпретације фреквенција, што чини проучавање пулсирајућих звезда у тесно двојним системима компликованим и донекле непривлачним за истраживаче из поља астросеизмологије.

Циљ ове дисертације је да се развије метода која ће довести до приближавања и бољег повезивања ових двеју области астрофизике. Могућност детаљног и флексибилног моделирања звезданих осцилација у тесно двојним системима, уз урачунавање свих познатих ефеката међусобне интеракције блиских звезда, заједно са предложеном методом идентификације мода, има потенцијал да учини астросеизмолошка истраживања двојних звезда приступачнијим и продуктивнијим од досадашњих метода.

1.1. Од хелио- до астро-сеизмологије

Сунце је звезда јединствена по томе што можемо да је проучавамо до ситних детаља. Сунце је такође једна сасвим типична звезда: на средини је свог животног циклуса, са отприлике половином почетних залиха водоника и релативно мирним условима у унутрашњости, за разлику од неких других типова звезда. Зато је Сунце идеалан објекат за тестирање теорија звездане структуре и еволуције.

Успех таквих тестова је дуго био под знаком питања. Моделирање унутрашњости Сунца зависи од почетне заступљености хелијума и параметра којим се задаје ефикасност конвекције. Ови параметри се могу подешавати тако да се добије модел са Сунчевом масом који одговара Сунчевом радијусу и луминозности за Сунчеву старост. Проблем је у томе што се до 70-тих година (открића осцилација на Сунцу) посматране површинске особине Сунца нису могле употребити као независна провера овог модела. Шта више, модели Сунца су у прошлости патили од два озбиљна проблема. Први је такозвани проблем бледог младог Сунца; наиме, модели су предвиђали да је луминозност Сунца на почетку сагоревања водоника била за 30% мања од данашње, али не постоје геолошки докази да је у последњих 3.5 милијарде година на Земљи било значајних климатских промена (Sagan & Mullen, 1972). Други, озбиљнији проблем био је то што је детекција

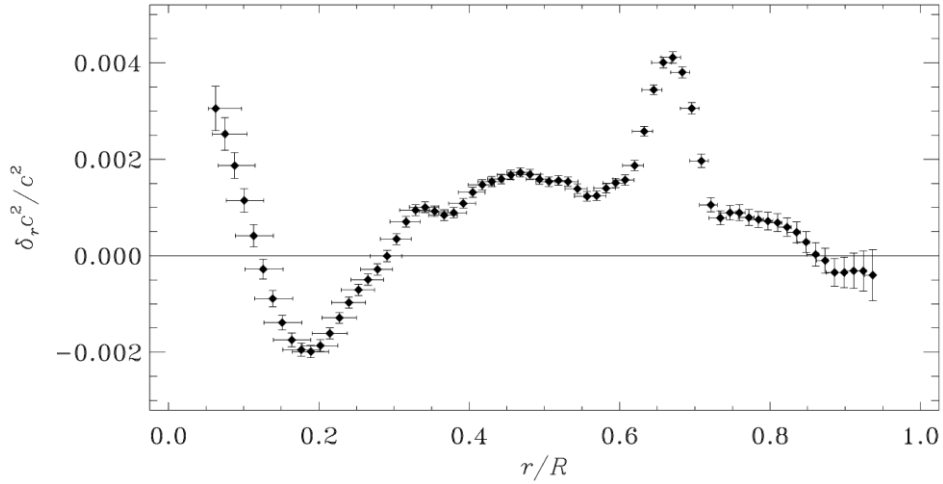
неутрина емитованих из Сунчеве унутрашњости конзистентно давала резултате око три пута мање од предвиђених на основу стандардног модела Сунца.

Међутим, у последњих неколико деценија дошло је до драматичног напретка у разумевању Сунчеве унутрашњости, захваљујући детекцији, посматрањима и интерпретацији осцилација на површини Сунца, односно хелиосеизмологији.

Хелиосеизмологија је релативно млада грана соларне физике, зачета 1975. године открићем да периодична кретања у Сунчевој фотосфери, откривена још 60-тих година (Leighton, et al., 1962) и позната под именом „петоминутне осцилације“, имају спектар дискретних фреквенција (Deubner, 1975). Откривен је велики број оваквих „мода“ са периодима између 3 и 12 минута, и идентификоване су као звучни таласи, односно „п-моде“, код којих улогу релативне силе игра градијент притиска. Услед рефлектовања таласа на границама различитих слојева у унутрашњости, фреквенције осцилација чине дискретан спектар који се може употребити за анализу унутрашње структуре Сунца путем поређења са моделима (Christensen-Dalsgaard & Gough, 1980).

Теорија звезданих осцилација предвиђа и постојање осцилација на ниским фреквенцијама, са периодима дужим од једног сата, код којих улогу релативне силе игра потисак. Такве моде се зову гравитационе, или „г-моде“ и њихово постојање зависи од стабилне стратификације, тј. могу да се јаве само у зонама у којима нема конвекције. Како се код Сунца радијативни слојеви налазе дубоко у унутрашњости, г-моде имају веома мале амплитуде на површини, и још нису дефинитивно детектоване.

Посматрања Сунчевих осцилација омогућила су детаљно моделирање његове унутрашњости, нпр. радијалне расподеле брзине ротације (Duvall, et al., 1984) и расподеле брзине звука (Christensen-Dalsgaard, et al., 1985). Поређење брзине звука предвиђене моделом Сунца, и добијене хелиосеизмолошким методама, приказано је на слици 1.1, и предстаља симбол успеха хелиосеизмологије.



Слика 1.1: Одступање предвиђене и измерене брзине звука у Сунчевој унутрашњости, на основу фреквенција посматраних уз помоћ пројеката BiSON (Elsworth, et al., 1994) и LOWL (Tomczyk, et al., 1995), и модела „S“ (Christensen-Dalsgaard, et al., 1996). Овај график је симбол успеха хелиосеизмологије, зато што су највећа одступања мања од једног процента. Слика преузета из (Aerts, et al., 2010).

Хелиосеизмологија је одиграла важну улогу у решавању поменутог проблема соларних неутрина тако што је недвосмислено показала да порекло проблема није у моделима Сунчеве унутрашњости, већ у стандардном моделу елементарних честица. Проблем је решен модификацијом стандардног модела тако да дозволи постијање и осцилације масивних неутрина. Преглед ове теме дат је у, нпр. Naughton, et al. (2006).

Друге звезде, осим Сунца, такође пулсирају. Већ се вековима зна да су многе сјајне звезде *променљиве*, али тек је у последњих сто година постало јасно да би променљивост могла бити последица пулсирања саме звезде. Проучавање таквих звезда је, из практичних разлога, дуго било ограничено на звезде са осцилацијама великих амплитуда, као што су Цефеиде. Променљивост ових звезда може се протумачити као пулсирање у фундаменталној радијалној моди: звезда се шири, а затим сажима, при чему је у сваком тренутку очувана њена сферна симетрија. Брзо је откривено да је период оваквог кретања приближно одређен динамичком временском скалом (Shapley, 1914):

1.1

$$t_{dyn} \cong \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \cong 1/\sqrt{G\rho},$$

где је R радијус звезде, M маса, $\bar{\rho}$ средња густина материје, а G , константа гравитације. Овако се из мерења периода директно добија процена једног фундаменталног звезданог параметра: средње густине.

Карактеристично за Цефеиде је то што се све налазе у уској, скоро вертикалној области X-P дијаграма, у такозваној зони нестабилности. Отуд постоји добро дефинисан однос између луминозности ових звезда и њихових величина; с обзиром на једначину 1.1, а под претпоставком да се такође зна однос између луминозности и масе, може се успоставити релација период-луминозност, и тада се из периода пулсирања може одредити даљина звезде. Зато су Цефеиде један од најважнијих индикатора удаљености у астрофизици.

Ране студије феномена звезданих пулсација биле су углавном фокусиране на разумевање зашто одређени типови звезда пулсирају, и зашто се сви налазе у тако добро дефинисаној области X-P дијаграма. У овом, као и у другим пољима астрофизику, велики допринос дао је Едингтон (Eddington, 1926), али су за идентификацију узрока пулсација и за објашњење положаја пулсирајућих звезда на X-P дијаграму заслужни Zhevakin (1953) и Cox & Whitney (1958).

Откривено је да многе звезде пулсирају на компликованији начин него Цефеиде. Код већине је истовремено побуђено неколико мода осцилација, међу којима могу бити хармоници фундаменталне радијалне моде, али такође и нерадијалне моде, код којих долази до одступања звезде од сферне симетрије. Ова чињеница је од великог значаја за астросеизмологију зато што, у принципу, свака измерена мода представља независан извор информација о унутрашњој структури звезде. Најједноставнији пример су Цефеиде са удвојеним периодом које истовремено пулсирају у две моде: фундаменталној радијалној, и њеном првом хармонику. Мерење једне моде, у смислу илустрованом на примеру релације период-луминозност, дозвољава одређивање средње густине звезде; на сличан начин, мерење две моде дозвољава одређивање масе и радијуса (Petersen, 1973).

Друге звезде имају већи број мода. Сунце је у овом смислу екстреман случај, са хиљадама измерених мода, а мале осцилације Сунчевог типа детектоване су и на другима звездама, нарочито у протеклих неколико година захваљујући посматрањима са сателитских телескопа *Corot* и *Kepler* (Hekker, et al., 2012). Код

осцилација Сунчевог типа могу се применити асимптотске апроксимације које омогућавају процену величине, хемијског састава и површинског гравитационог убрзања из међусобних растојања детектованих фреквенција (видети одељак 1.5).

Основни подаци о различитим врстама пулсирајућих звезда и њиховим особинама могу се наћи у поглављу 8, а у наставку је дат кратак увод у основне теоријске и практичне аспекте астросеизмологије.

1.2. Осврт на равнотежну структуру

У равнотежном стању, структура звезде је статична, стационарна, и сферно-симетрична. Претпоставља се да нема ротације, ни магнетних поља. Такав систем тривијално задовољава једначину континуитета, а једначина хидростатичке равнотеже се своди на

1.2

$$\frac{dp_0}{dr} = -g_0\rho_0,$$

где је p притисак, r растојање у радијалном правцу, g гравитационо убрзање, и ρ густина. Овде и надаље се индексом 0 означавају равнотежне вредности свих величина. Из Поасонове једначине,

1.3

$$\nabla^2\Phi_0 = 4\pi G\rho_0,$$

интеграцијом се може добити израз

1.4

$$g_0 = \frac{Gm_0}{r^2},$$

где је m маса унутар сфере радијуса r . Флукс F је усмерен ка спољашњости, па се једначина одржања енергије може написати у облику

1.5

$$\frac{dL_0}{dr} = 4\pi r^2\rho_0\epsilon_0,$$

где је $L = 4\pi r^2 F$ укупна енергија која у јединици времена прође кроз сферу радијуса r , а ϵ је стопа производње енергије. Коначно, једначина радијативног преноса енергије је

1.6

$$\frac{dT_0}{dr} = -\frac{3\kappa_0\rho_0}{16\pi r^2 acT_0^3} L_0,$$

где је T температура, κ непрозрачност, a је константа густине зрачења, а c брзина светлости у вакууму.

1.3. Пертурбациона анализа

Једначине 1.2 – 1.6 су познате једначине структуре звезде. Звездане осцилације се сада уводе као мале пертурбације равнотежног стања. У оквиру пертурбационе анализе, све величине (нпр. притисак) се могу представити једначинама типа:

1.7

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}) + p'(\mathbf{r}, t),$$

где је p' мали поремећај у датој тачки (Ојлерова пертурбација). С друге стране, у референтном систему који прати кретање флуида, пертурбација се може изразити и као промена притиска између тачака \mathbf{r}_0 и $\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}$ (Лагранжева пертурбација):

1.8

$$\delta p(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}_0 + \delta\mathbf{r}) - p_0(\mathbf{r}_0) = p'(\mathbf{r}_0) + \delta\mathbf{r} \cdot \nabla p_0.$$

Брзина кретања тада одговара изводу помераја $\delta\mathbf{r}$ по времену:

1.9

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \delta\mathbf{r}}{\partial t}.$$

Једначине пертурбоване звездане структуре се добијају тако што се изрази аналогни једначини 1.7 убаце у једначине 1.2 – 1.6 уместо равнотежних величина, па се онда одузму равнотежне једначине, и занемаре се све величине редова већег од један за p' , ρ' , v' итд. Тако се за једначину континуитета добија израз:

1.10

$$\rho' + \text{div}(\rho_0 \delta \mathbf{r}) = 0.$$

Једначина кретања постаје:

1.11

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \rho_0 g' + \rho' g_0,$$

где је $g' = -\nabla \Phi'$, а пертурбација гравитационог потенцијала је дата пертурбованом Поасоновом једначином,

1.12

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho'.$$

Пертурбована једначина одржања енергије је

1.13

$$\frac{\partial \delta q}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0(\Gamma_{3,0} - 1)} \left(\frac{\partial \delta p}{\partial t} - \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right),$$

где су Γ_1 и Γ_3 адијабатски експоненти. Овај израз се за адијабатско кретање своди на

1.14

$$\delta p = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \delta \rho.$$

Ако се претпостави хомогена равнотежна структура, и занемари пертурбација гравитационог потенцијала, једначина кретања се може довести до облика

1.15

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial^2 t} = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} \nabla^2 \rho'.$$

Овај израз очигледно има облик таласне једначине, и решења у виду равних таласа:

1.16

$$\rho' = a e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)},$$

где је \mathbf{k} таласни вектор, а ω кружна фреквенција са дисперзионом релацијом

1.17

$$\omega^2 = \frac{\Gamma_{1,0} p_0}{\rho_0} |\mathbf{k}|^2$$

Ово идентификује величину $\Gamma_{1,0} p_0 / \rho_0$ као квадрат адијабатске брзине звука:

1.18

$$c_0^2 = \frac{\Gamma_{1,0} k_B T_0}{\mu m_u}.$$

Дакле једно решење једначине кретања у оквиру пертурбоване структуре звезде су акустични таласи – тзв. п-моде.

Други тип мода су г-моде, односно унутрашњи гравитациони таласи. Ово решење се налази разматрањем гаса подељеног на слојеве различитих густина под утицајем гравитације. Детаљи овог нешто компликованијег извођења могу се наћи у књизи Aerts, et al. (2010, pp. 148-152). Битно је истаћи да се ове две врсте решења разликују у неколико битних аспеката:

Код п-мода, реститутивна сила која се јавља као одговор на поремећај који изводи звезду из равнотежног стања, је притисак; код г-мода, то је *потисак*. Доминантан правац кретања изазваног п-модама је вертикалан, а г-модама – хоризонталан. Но са посматрачког становишта, најважнија је разлика у облику дисперзионе релације. Као што се види из једначине 1.17, код п-мода дисперзија је линеарна. Код г-мода, дата је изразом

1.19

$$\omega^2 = \frac{N^2}{1 + k_r^2 / k_h^2}.$$

Овде су k_r и k_h радијална и хоризонтална компонента таласног вектора, $\mathbf{k} = k_r \mathbf{e}_r + k_h \mathbf{a}$ је тзв. фреквенција потиска:

1.20

$$N^2 = g_0 \left(\frac{1}{\Gamma_{1,0}} \frac{d \ln p_0}{dr} - \frac{d \ln \rho_0}{dr} \right).$$

За појаву осцилаторног кретања у виду γ -мода мора да буде испуњен услов $N^2 > 0$, који се може записати и у облику

1.21

$$\frac{d \ln \rho_0}{d \ln p_0} < \frac{1}{\Gamma_{1,0}}.$$

Када овај услов није испуњен, ω је имагинаран број, што значи да је кретање експоненцијално, као у случају конвективне нестабилности. Другим речима, унутрашњи гравитациони таласи се јављају само у зонама у којима нема конвекције, и обрнуто.

Постоји још један тип осцилација на звездама: површински гравитациони таласи, или „ ϕ -моде“, које по особинама наликују обичним таласима на површини воде. Дисперзиона релација за ϕ -моде је

1.22

$$\omega^2 = g_0 k_h,$$

тј. њихове фреквенције зависе само од таласног броја и гравитације, као код обичног клатна. Овакви таласи су уочени на површини Сунца, а могу се јавити у унутрашњости звезда на прелазу између конвективног језгра и радијативног омотача. Када се ϕ -моде појаве на прелазној површини између два слоја различитих густина (*interfacial modes*, отуд и име), то се одражава на дисперзиону релацију, која постаје

1.23

$$\omega^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} g_0 k_h.$$

Линеарне једначине звезданих осцилација се, полазећи од једначина 1.10 – 1.15, добијају раздвајањем променљивих у оквиру сферног координатног система:

1.24

$$\begin{aligned}\xi_r(r, \theta, \phi; t) &= a(r)Y_\ell^m(\theta, \phi)e^{-i\omega t} \\ \xi_\theta(r, \theta, \phi; t) &= b(r)\frac{\partial Y_\ell^m(\theta, \phi)}{\partial \theta}e^{-i\omega t} \\ \xi_\phi(r, \theta, \phi; t) &= \frac{b(r)}{\sin \theta}\frac{\partial Y_\ell^m(\theta, \phi)}{\partial \phi}e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

где су ξ_r , ξ_θ и ξ_ϕ компоненте вектора помераја $\delta\mathbf{r}$; $a(r)$ и $b(r)$ су амплитуде, а ω кружна фреквенција осцилације. $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ је сферни хармоник, дефинисан као

1.25

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi},$$

при чему је $P_\ell^m(\cos \theta)$ Лагранжев полином реда ℓ и степена m , дефинисан као

1.26

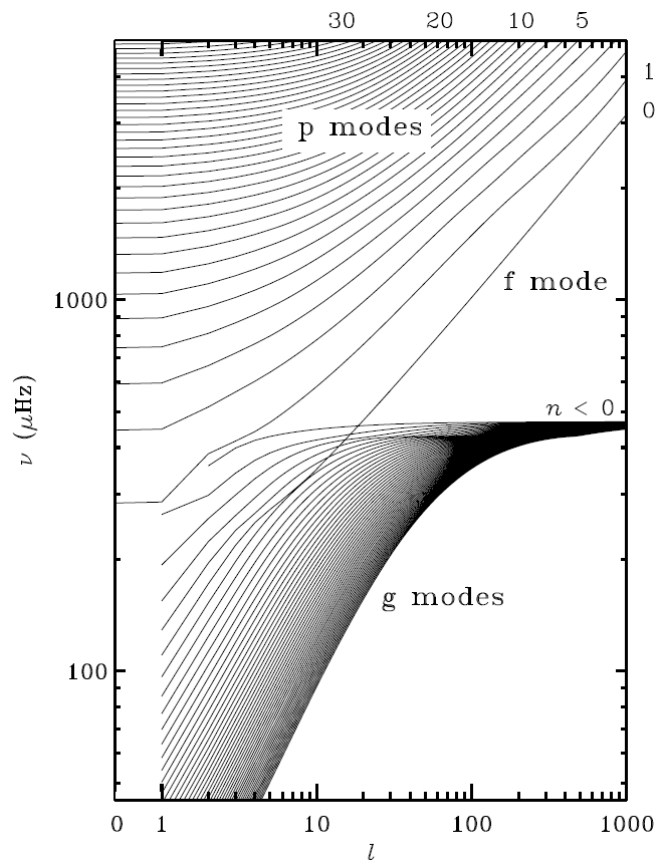
$$P_\ell^m(\cos \theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!} (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{d \cos^{\ell+m} \theta} (\cos^2 \theta - 1)^\ell.$$

Нормалне моде осцилација у звездама имају чворове у три димензије: дуж радијуса r , колатитуде θ (мерене од пола, односно осе симетрије пулсација), и лонгитуде ϕ . Код већине пулсирајућих звезда оса симетрије пулсација се поклапа са осом ротације звезде. Међу усамљеним звездама, изузетак у овом смислу су брзо-ротирајуће Ар звезде (одељак 8.1.4), док се у тесно двојним системима са израженим плимским интеракцијама за доминантну осу симетрије може узети права која спаја центре компонената и пролази кроз центар масе (одељци 4.5 и 5.2.5).

Геометријска својства мода су одређена са три квантна броја: n је број чворова у радијалном правцу и зове се тон, хармоник или радијални степен моде; ℓ је укупан број површинских чворова, и зове се хармонијски степен (или само степен) моде; m је број површинских чворова који пролазе кроз пулсациону осу, и зове се азимутални ред моде.

Најједноставније моде су радијалне моде, код којих је степен ℓ једнак нули (нема површинских чворова, и кретање очувава сферну симетрију). Код, на пример, Цефеида, обично је побуђена само фундаментална радијална мода ($n = 0, \ell = 0, m = 0$), тј. звезда се наизменично шири и сажима, хлади и загрева – одн. пулсира. Први хармоник радијалне пулсације има један чвор у унутрашњости звезде – сферну љуску која се не помера, при чему се кретање изнад и испод чвора одвија у анти-фази.

Најједноставнија *нерадијална* мода је осно-симетрична диполна мода код које је $\ell = 1, m = 0$. Чвор ове моде је екватор, а осцилација се одвија овако: северна хемисфера се проширује и хлади док се јужна сажима и загрева, по синусоидном правилу $P_\ell^m(\cos \theta) = \cos \theta$, при чему се центар масе звезде не помера. Нерадијалне моде се јављају само за $n \geq 1$, па у случају диполне моде постоји бар један радијални чвор унутар звезде. Моде са два површинска чвора ($\ell = 2$) зову се квадруполне моде, а са три ($\ell = 3$) октуполне (видети слику 1.5).



Слика 1.2: Фреквенције мода у зависности од њиховог степена ℓ за модел Сунца. Свака линија одговара једном броју хармоника n . Преузето од Aerts et al. (2010).

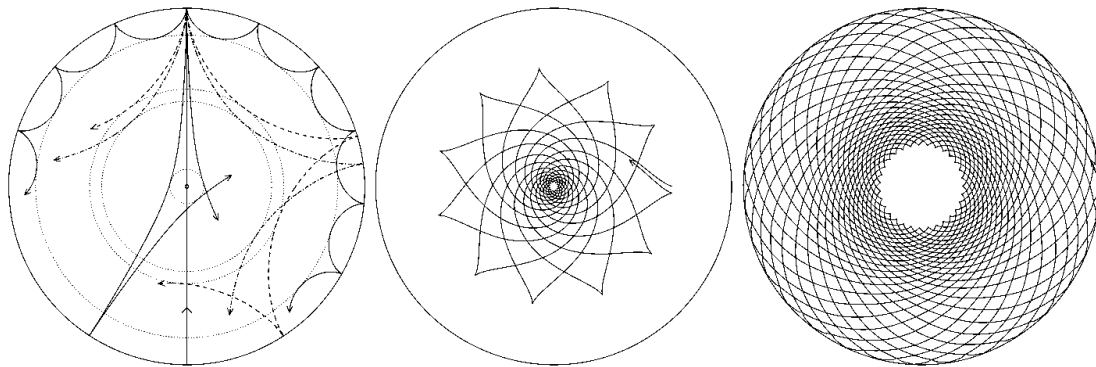
Астросейсмолошко проучавање звездане унутрашњости је у принципу могуће захваљујући преламању, односно одбијању звучних таласа (п-мода) о слојеве одређених особина, специфичних за сваку моду. Број рефлексција је повезан са степеном моде релацијом

1.27

$$\frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} = k_h^2,$$

где је k_h дужина хоризонталне компоненте (односно, хоризонтални таласни број) таласног вектора. Одавде следи да дубина до које мода продире зависи од њеног степена: моде високог степена не продиру дубоко, док моде ниског степена допиру скоро до центра звезде. Фреквенција моде је одређена брзином звука дуж путање којом се мода простире, па је тако из мерења фреквенција мода различитих степенова могуће утврдити брзину звука у различитим слојевима, а из расподеле брзине звука се, уз разумне претпоставке о хемијском саставу, може закључивати о расподели температуре.

И п- и г-моде високог степена могу се описати линијама (зрацима) које прате простирање таласа (Gough, 1993). Оваква репрезентација мода јасно илуструје неке од њихових најважнијих особина, сличности и разлика.



Слика 1.3: Простирање „зрака“ за звучне (лево) и гравитационе таласе (у средини и десно). Путање звучних таласа су закривљене зато што се брзина звука повећава са дужином, и на дубини одређеној степеном моде, талас се рефлектује. На површини се рефлектују због нагле промене густине. Приказани су зраци који одговарају модама фреквенције од 3000 μHz и степена $\ell = 2, 20, 25$ и 75. Путање гравитационих таласа одговарају модама фреквенција 190 μHz и степена $\ell = 5$ за модел сличан Сунцу (у средини), односно 50 μHz и степена $\ell = 50$ (десно), за модел сличан младој звезди масе $8 M_{\odot}$. Види се да је прва мода „заробљена“ испод, а друга изнад конвективне зоне. Преузето од Aerts, et al. (2010).

1.4. Геометријско поништавање

Што је више површинских чворова, све су мањи делови површине који се крећу, као и амплитуде њихових помераја. На Сунцу није проблем посматрати индивидуалне моде, те им доделити њихове квантне бројеве на основу чисто геометријских разматрања. Овај процес, који се зове *идентификација мода*, је на жалост много тежи кад су у питању друге звезде, зато што на њима не можемо разлучити делове површине који се крећу, већ само посматрати сјај и радијалне брзине усредњене по читавој видљивој површини. Код мода са површинским чворовима постоји тежња да се ефекти осцилација међусобно пониште; на пример, док се материјал унутар једне елементарне површине загрева, подиже и самим тим, више зрачи, суседни елемент се истовремено хлади, спушта и зрачи мање, па се усредњавањем варијације изгубе.

Ова појава зове се *геометријско поништавање варијација* (у даљем тексту, геометријско поништавање, са ознаком GP). За ригорозно извођење ефеката усредњавања читалац може да погледа поглавље 6 у књизи Aerts, et al. (2010). Овде ће ова појава бити илустрована уз помоћ интеграла интензитета по видљивом диску звезде, датим са

1.28

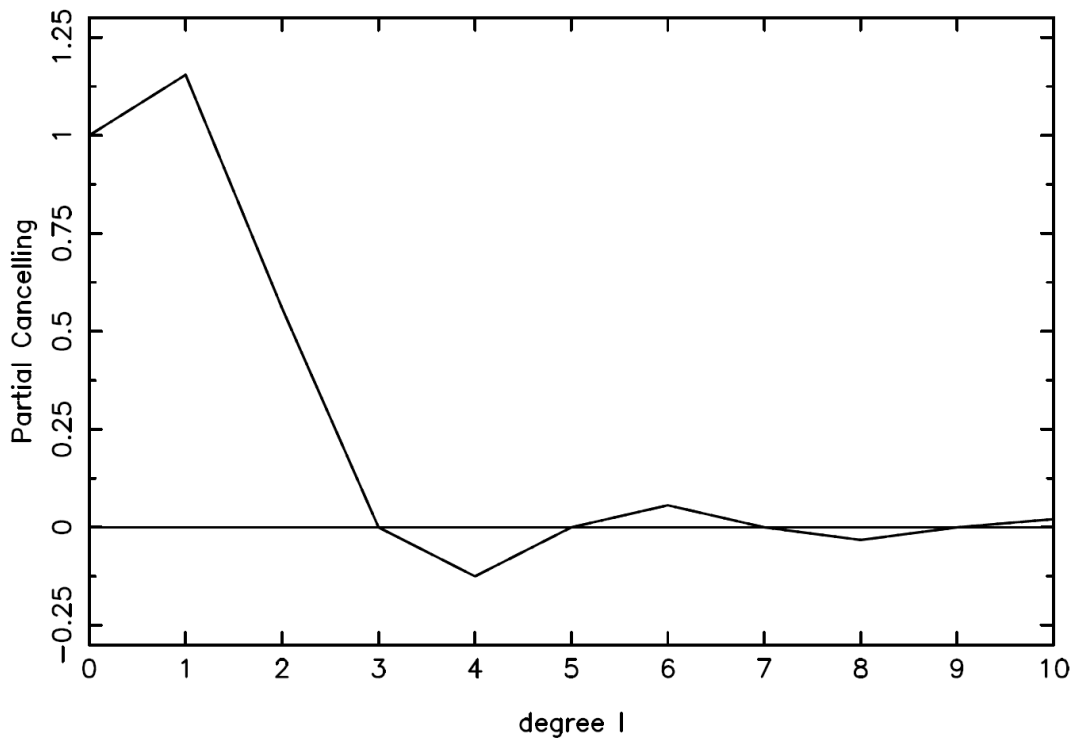
$$GP = c_{\ell,0} \int_0^{\pi/2} P_{\ell}(\cos \theta) \sin \theta \cos \theta \, d\theta,$$

где је

1.29

$$c_{\ell,m} \equiv \sqrt{\frac{(2\ell + 1) (\ell - m)!}{4\pi (\ell + m)!}}$$

Зависност фактора геометријског поништавања од степена моде приказана је на слици 1.4. Радијалне моде нису погођене овим ефектом, па је код њих $GP = 1$. Већ за моду степена $\ell = 2$, ефекат је дупло већи, одн. она је упола мање видљива. Осно-симетрична мода степена $\ell = 3$ је практично невидљива у смислу варијација интензитета, а исто важи и за моде вишег степена.



Слика 1.4: Фактор геометријског поништавања, GP , за интензитет интегрисан по видљивој површини за осно-симетричне моде степенова $\ell = 0, \dots, 10$, при чему потамњење ка рубу и други ефекти који утичу на интензитет нису узети у обзир. Овај дијаграм представља теоријску криву осетљивости фотометријских посматрања на различите моде. Слика преузета од Christensen-Dalsgaard (2002).

Укључивање ефеката гравитационог потамњења, као и потамњења ка рубу, уноси додатну сложеност у ова разматрања, али не мења квалитативни закључак: да је моде високог степена тешко детектовати.

1.5. Асимптотски режим

Опште једначине звезданих осцилација су веома компликоване, а аналитичка решења се могу добити само у изузетним случајевима (Сох, 1980). Као и у другим областима астрофизике, и овде се коришћење апроксимација показало неопходним. Асимптотска апроксимација за радијалне моде високог хармоника (Ledoux, 1962) је основа репрезентације помоћу зракова (слика 1.3), а оправдана је чињеницом да су посматране моде углавном управо моде високог хармоника (као код Сунца и Сунцу сличних звезда и брзо-ротирајућих Ар звезда, код којих се јављају акустичне моде високог хармоника, те код белих патуљака, споро-пулсирајућих В звезда и звезда типа γ Dor, где се јављају гравитационе моде високог хармоника; видети поглавље 8 за детаље о типовима пулсирајућих звезда).

У асимптотској апроксимацији (Tassoul, 1980), фреквенција моде хармоника n и степена ℓ је приближно одређена са

1.30

$$\nu_{n\ell} = \frac{\omega_{n\ell}}{2\pi} \simeq \Delta\nu \left(n + \frac{\ell}{2} + \frac{1}{4} + \alpha(\nu) \right) + \epsilon_{n\ell},$$

где је $\alpha(\nu)$ функција фреквенције чији тачан облик зависи од усвојеног модела површинских слојева звезде (Christensen-Dalsgaard & Thompson, 1997), $\epsilon_{n\ell}$ мала поправка, а $\Delta\nu$ такозвана велика сепарација, обрнуто пропорционална времену за које звучни талас са површине звезде стигне до центра:

1.31

$$\Delta\nu = \nu_{n+1\ell} - \nu_{n,\ell} = \left(2 \int_0^R \frac{dr}{c(r)} \right)^{-1},$$

где је $c(r)$ радијална расподела брзине звука. Велика сепарација, коју је релативно лако измерити са дијаграма снаге осцилација, је осетљива на радијус звезде, па се код звезда у околини главног низа користи као индикатор њихових димензија. Ако се усвоји претпоставка да је звезда хомологна, може се показати да је велика сепарација сразмерна средњој густини (Belkacem, 2012), при чему се за калибрацију користе одговарајуће величине за Сунце:

1.32

$$\Delta\nu = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{\odot}}} \Delta\nu_{\odot}.$$

Члан $\epsilon_{n\ell}$ у једначини 1.30 је повезан са такозваном малом сепарацијом, $\delta\nu$, дефинисаном као

1.33

$$\delta\nu = \nu_{n,\ell} - \nu_{(n-1)\ell+2} \approx -\frac{(4\ell + 6)\Delta\nu}{4\pi^2\nu_{n\ell}} \int_0^R \frac{dc(r)}{dr} \frac{dr}{r}.$$

Мала сепарација је осетљива на градијент брзине звука у средишту звезде, и користи се као индикатор профила хемијског састава.

С друге стране, периоди γ -мода су у асимптотском режиму дати са

1.34

$$\Pi_{n\ell} = \frac{\Pi_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}(n + \epsilon),$$

и скоро су сасвим еквидистантни. Овде је ϵ мала константа, а Π_0 је величина повезана са фреквенцијом потиска (једначина 1.20), релацијом

1.35

$$\Pi_0 = 2\pi^2 \left(\int \frac{N}{r} dr \right)^{-1},$$

где се интеграција врши по „шупљини“ у којој је дозвољено простирање моде. Одступања мерених периода γ -мода од ове расподеле се користи за дијагностику стратификације хемијског састава у унутрашњости звезда.

Фреквенција најјачег сигнала (v_{\max}) на периодограму звезде која пулсира у асимптотском режиму може се повезати са хидростатичком скалом притиска:

1.36

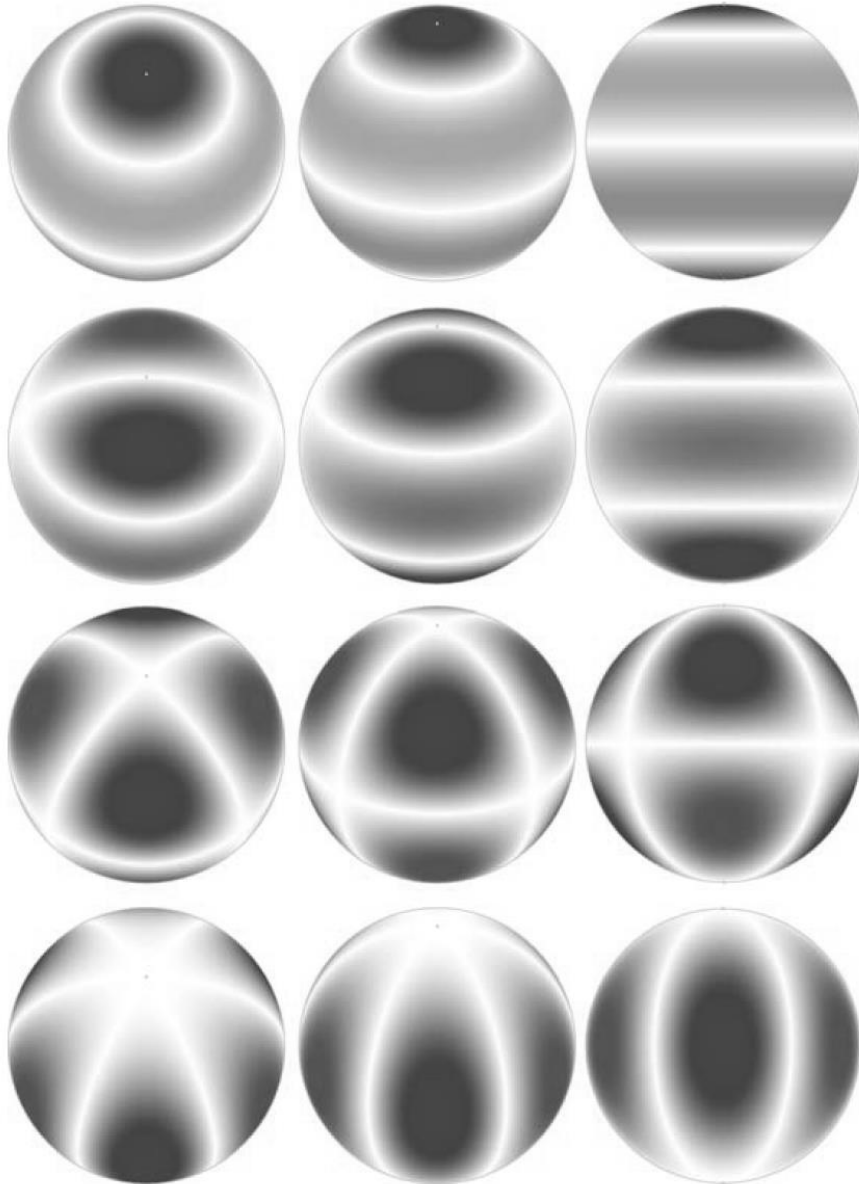
$$v_{\max} \propto \frac{c}{2H_p}.$$

Како је брзина звука $c \propto \sqrt{T}$ (једначина 1.18), а $H_p = p/\rho g$, а $p \propto \rho T$, следи да је $v_{\max} \propto g/\sqrt{T} \propto M/R^2\sqrt{T}$. На основу ове сразмерности и сразмерности велике сепарације са средњом густином звезде (једначина 1.32), могу се успоставити следеће опште релације које повезују мерене фреквенције са особинама звезде:

1.37

$$\frac{M}{M_\odot} \propto \left(\frac{v_{\max}}{v_{\max \odot}} \right)^3 \left(\frac{\Delta v}{\Delta v \odot} \right)^{-4} \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff \odot}} \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{R}{R_\odot} \propto \left(\frac{v_{\max}}{v_{\max \odot}} \right) \left(\frac{\Delta v}{\Delta v \odot} \right)^{-2} \left(\frac{T_{eff}}{T_{eff \odot}} \right)^{1/2}.$$



Слика 1.5: Нерадијална мода са три површинска чвора ($\ell = 3$). Свака колона приказује звезду из различитог угла, а редови, различите вредности реда моде, m . У првом реду је мода $\ell = 3, m = 0$, у другом, $\ell = 3, m = 1$, у трећем, $\ell = 3, m = 2$, а у четвртом, $\ell = 3, m = 3$. Слика преузета од Aerts, et al. (2010).

1.6. Ефекти ротације

Као што се може видети из једначина 1.24 и 1.25, код мода реда већег од нуле ($m \neq 0$), експоненцијални члан представља временску зависност облика $e^{-i(\omega t - m\phi)}$. Фазни фактор значи да су моде са $m \neq 0$ путујући таласи, при чему се по договору узима да се моде са позитивним m крећу у смеру ротације (проградне моде), док се оне са негативним m крећу у супротном смеру (ретроградне моде). Моде са истим ℓ а различитим m чине такозвани *мултиплет* и за дато ℓ их има

$2\ell + 1$. У одсуству ротације, фреквенције свих мода у једном мултиплету ће бити исте; ротација доводи до појаве Кориолисове силе која делује у смеру супротном од смера ротирања, па пулсационо кретање које би у стационарном случају ишло горе-доле, иде у круг. Због овог, и других, сложенијих ефеката ротације, проградне моде, које се крећу у правцу ротације, имају фреквенције нешто више, а ретроградне, које се крећу насупрот ротацији, нешто ниже од осно-симетричне моде $m = 0$, у посматрачевом референтном систему. Ово „цепање“ фреквенција услед ротације је дато изразом

1.38

$$\nu_{n\ell m} = \nu_{n\ell 0} + \frac{m(1 - C_{n\ell})\Omega}{2\pi},$$

где је $\nu_{n\ell m}$ посматрана фреквенција, $\nu_{n\ell 0}$ је равнотежна централна фреквенција мултиплета (за коју је $m = 0$), на коју ротација не утиче, $C_{n\ell}$ је позитивна величина мања од јединице која зависи од моде (као и од модела), а Ω , угаона брзина. Из једначине 1.38 се види да Кориолисова сила повећава фреквенције проградних, а смањује фреквенције ретроградних мода. Уместо једне фреквенције, мултиплет се дели на спектар у коме су индивидуалне моде раздвојене константном величином званом *ротационо цепање*, датом са

1.39

$$\Delta_{rot} = \frac{(1 - C_{n\ell})\Omega}{2\pi}.$$

Код већине звезда ротација није униформна и ротационо цепање зависи од особина појединачних мода на сложенији начин. Без обзира на потешкоће, ова појава се у астросеизмологији користи за мерење брзине ротације. Шта више, када је могуће измерити мултиплете мода различитих степенова, може се мерити и брзина ротације унутрашњих слојева, што се не може извести другим методама.

1.7. Механизми побуђивања

На крају излагања основа астросеизмологије, треба се осврнути и на питања побуђивања, пригушивања и селекције мода. Звезде пулсирају у својим природним модама осциловања, за које се на основу дуготрајних посматрања зна

да су стабилна појава. То значи да постоји неки механизам одговоран за побуђивање, односно снабдевање осцилација енергијом.

Онај слој у унутрашњости звезде који прима топлоту током фазе компресије је слој који побуђује осцилацију; сви остали слојеви губе топлоту приликом компресије и тако пригушују осцилацију. Звезда се, дакле, понаша као топлотна машина: претвара термалну у механичку енергију. Код Цефеида, звезда типа RR Луг и δ Sct – шта више, код већине пулсирајућих звезда на слици 8.1 на делу су управо топлотни механизми, уско повезани са *непрозрачношћу*.

Рецимо да у одређеном слоју у унутрашњости звезде непрозрачност делимично јонизованог гаса постане довољно велика да почне да блокира зрачење. Слој се тада загрева, а растући притисак тера звезду да се прошири преко своје равнотежне величине. Пораст температуре доводи до потпуне јонизације, што онда смањује непрозрачност, тако да зрачење бива пропуштено, материјал се хлади и више не може да издржи тежину слојева изнад себе, па се као резултат тога звезда сажима. У хладнијој средини, атоми гаса се рекомбинују, што доводи до блокирања зрачења, и циклус се понавља од почетка.

Механизми побуђивања засновани на непрозрачности су углавном везани за јонизацију водоника и хелијума, али постоје и друге могућности. Код звезда типа β Сер и суб-патуљастих В звезда за осцилације је одговорна јонизација елемената из групе гвожђа.

Друга врста механизма побуђивања, присутна на Сунцу и сличним звездама, као и на неким пулсирајућим црвеним џиновима, је *насумично побуђивање*, за које је одговорна конвекција. Хаотично кретање гаса на горњој граници конвективне зоне је у стању да побуди неке од природних мода осцилација звезде. Другим речима, акустичка енергија конвективног кретања се претвара у енергију глобалног осцилаторног кретања.

Без обзира на механизам побуђивања, никада неће бити побуђене *све* природне моде осциловања. На основу чега се врши селекција побуђених мода је питање на које још не постоји дефинитиван одговор. Један од одлучујућих фактора је засигурно положај зоне која генерише осцилације. Код брзо-ротирајућих Ар

звезда, диполно магнетно поље је свакако одговорно за селекцију претежно диполних мода, а код белих патуљака са израженом стратификацијом средње молекулске тежине, велики градијент у хемијском саставу мења понашање неких, односно побуђује или пригушује друге моде. Постоји, међутим, обиље случајева где се не зна зашто одређене моде, које би према свим показатељима требало да буду побуђене, нису детектоване. У том смислу је разјашњавање механизма селекције мода један од најважнијих проблема астросеизмологије.

1.8. Пулсирајуће звезде у двојним системима

Пулсирајуће звезде често се налазе у двојним и вишеструким системима. Овде неће бити речи о системима код којих је орбитално растојање довољно велико да компоненте могу да еволуирају као усамљене звезде, без поремећаја изазваних близином друге звезде. Напротив, фокус дисертације је управо на пулсирајућим звездама у тесно двојним системима, у којима се плимске силе одражавају на брзину ротације и облик компонената, а њихова еволуција је одређена међусобним гравитационим утицајем.

Близина звезда у тесно двојном систему утиче и на евентуалне пулсације. У системима у којима је у току, или су у прошлости постојале фазе трансфера масе, атмосфера примаоца је хемијски контаминирана материјалом са даваоца, што се одражава на особине осцилација. Плимска деформација звезде може довести до тога да ефекти одступања од сферног облика постану доминантни у односу на ефекте ротације, и очекује се да утичу на орјентацију осе симетрије осцилација. Природне моде побуђене самосталним механизмима у унутрашњости звезде су подложне плимским утицајима који се могу одразити на фреквенције и амплитуде посматраних осцилација; с друге стране, код звезда у којима нису побуђене сопствене осцилације, двојност може довести до појаве плимски изазваних мода, о којима ће бити више речи у одељку 6.3.

Постоје индикације да су и све звезде типа RV Тау (видети одељак 8.3.2) чланице двојних система, те да се њихова „прашњавост“, утврђена полариметријским методама, може протумачити као присуство околзвезданог диска преосталог из фазе еволуције када је пулсирајућа компонента била црвени цин. Двојна природа ових звезда и даље није недвосмислено потврђена зато што су промене радијалне

брзине услед осцилација великих амплитуда, и упоредиве са променама које се очекују као последица орбиталног кретања.

Око две трећине свих познатих суб-патуљастих В звезда (видети одељак 8.4.1) такође се налазе у двојним системима. У пољу астросеизмологије славан је пример двојног система NY Vir, који се састоји од суб-патуљасте В звезде температуре од око 30000 K, и патуљасте звезде типа М, температуре од око 3000. Кривом сјаја овог система, која је приказана на слици 6.1, доминира ефекат рефлексије, односно загревања хладније секундарне зрачењем топлије, примарне звезде, али су међусобна помрачења, као и пулсације, јасно видљиве. Више речи о овом интересантном систему биће у одељку 6.2.

И међу катаклизмичним двојним системима пронађени су примери где су компактни објекти пулсирајући бели патуљци различитих типова, а код неких се хемијске аномалије тумаче управо као последица трансфера масе са друге компоненте.

Значај проучавања пулсирајућих звезда у двојним системима превазилази њихову заступљеност. Позната је чињеница да се за звезде у тесно двојним системима основни параметри – маса, величина, ефективна температура и ефективно гравитационо убрзање – могу одредити на релативно директан начин са много већом тачношћу него код усамљених звезда, што омогућава непосредну проверу мерења и закључака донетих на основу астросеизмолошких или међудисциплинарних метода, као што је предложена метода идентификације мода. С друге стране, астросеизмолошке студије унутрашње структуре звезда би свакако допринеле разумевању мноштва комплексних процеса који се одвијају у тесно двојним системима, почевши од ефеката ротације убрзане орбиталном синхронизацијом, преко међусобног загревања, до заједничких омотача у контактним системима, те измена хемијског састава услед трансфера масе, и тако даље.

Међутим, један од основних корака у астросеизмолошком истраживању – поступак идентификације мода – је у великој мери отежан, или чак немогућ, услед већ поменутог проблема делимичног поништавања. У наставку ће овај проблем бити детаљно описан заједно са неким постојећим методама идентификације мода.

2. Проблем идентификације мода

Основни подаци у астросеизмолошким истраживањима су фреквенције осцилација, које се одређују директно из посматрања употребом Фуријеове анализе и аналогних техника за детекцију сигнала. Да би се фреквенције могле користити за детаљно моделирање звездане структуре, што је циљ астросеизмологије, неопходно је одредити која мода осцилације је изазвала одређену фреквенцију. Поступак којим се долази до овог знања зове се *идентификација мода*.

Као што се може видети из једначина 1.30 и 1.31, фреквенција осцилације је мера променљиве брзине звука дуж путање простирања таласа. Дужина и облик ове путање су одређени геометријом сваке појединачне моде, односно дискретним квантним бројевима (ℓ, m) сферног хармоника којим се описују просторне особине моде. Количина астрофизичких информација које се могу добити из посматраних осцилација директно зависи од броја тачно идентификованих мода.

Код осцилација у асимптотском режиму, мерење размака међу фреквенцијама или периодима је најчешће довољно да би се идентификовале моде. Ово је могуће код Сунца и Сунцу-сличних звезда и белих патуљака. Али када је побуђен (или видљив) мали број мода, односно када посматране фреквенције не формирају правилну расподелу, одређивање (ℓ, m) из самих фреквенција је немогуће. Тада се у принципу разматрају сви могући сферни хармоници, уз претпоставку да ће, због ефекта геометријског поништавања (слика 1.4), у подацима бити присутан „потпис“ само оних мода са степеном $\ell \leq 3$ или чак $\ell \leq 2$, а реда $m = 0$, што је валидна претпоставка када нема доказа о присуству ротационог цепања.

Међутим, ова процедура је далеко од задовољавајуће, не само зато што ротација не доводи у свим случајевима до лако препознатљивог, еквиливантног цепања, него и зато што се код великог броја пулсирајућих звезда очекује присуство мода већег степена. Зато је потрага за методама поуздане емпиријске идентификације мода постала један од најважнијих и још увек нерешених проблема астросеизмологије.

Постојеће технике идентификације мода су засноване на два типа дијагностике: на фотометријским посматрањима у више боја (филтера) и спектроскопији високе

временске резолуције. О њима ће бити речи у наставку. С друге стране, метода идентификације мода у тесно двојним системима путем фитовања посматране криве сјаја, предложена у овој дисертацији, је у принципу применљива и на једнобојне фотометријске податке, што је повољно с обзиром на то да сателитске мисије *Corot* и *Kepler* обезбеђују управо оваква посматрања.

2.1. Идентификација мода на Сунцу

Посматрање Сунца као звезде, односно посматрање Сунчеве светлости интегрисане по читавом видљивом диску, се у суштини не разликује од посматрања удаљених звезда, и погодно је за проучавање осцилација ниског степена, као и за поређење са другим пулсирајућим звездама сличних особина. Када су у питању моде вишег степена, код Сунца у интегрисаној светлости такође долази до делимичног поништавања, мада је крива осетљивости (слика 1.4) нешто другачије облика него код других звезда услед израженог ефекта потамњења ка рубу.

Међутим, очигледна предност Сунца над другим звездама је то што Сунце не морамо да посматрамо у интегрисаном светлу. То што смо у стању да разлучимо елементе Сунчеве површине драматично мења ситуацију кад је у питању идентификација мода. Наиме, мода која одговара пару (ℓ_0, m_0) могла би се изоловати посматрањем промена сјаја елемента површине са координатама (θ, ϕ) , множењем са сферним хармоником $Y_{\ell_0}^{m_0}(\theta, \phi)$, и интеграцијом по читавој површини; из особине ортогоналности сферних хармоника следи да ће резултат садржати само оне моде са квантним бројевима $(\ell, m) = (\ell_0, m_0)$. Ова метода се зове *сепарација мода* (Aerts, et al., 2010, p. 457), и иако није практично применљива у овом поједностављеном облику (зато што никад не видимо читаву површину Сунца, већ само хемисферу окренуту ка посматрачу, а и због потамњења ка рубу), у принципу се користи за идентификацију мода и из фотометријских и из спектроскопских посматрања.

2.2. Идентификација мода код других звезда

Идентификација мода код удаљених звезда врши се фотометријским или спектроскопским методама. Фотометријске методе, код којих се проучавају подаци добијени истовремено са више филтера, заснива се на зависности амплитуда и фа-

за осцилација од таласне дужине. Код спектроскопских метода, осцилације се детектују у виду периодичних варијација у профилима спектралних линија.

2.2.1. Фотометријске методе

Код пулсирајуће звезде током времена се мења и температура и геометријски попречни пресек. Обе промене доприносе варијацији у болометријској луминозности. Фотометријска посматрања су, међутим, увек ограничена на одређени опсег електромагнетног спектра, а амплитуде осцилација су веће у плавом него у црвеном делу спектра (Aerts, et al., 2010, p. 379). Тако је зато што, с једне стране, промене температуре услед осцилација доприносе промени сјаја далеко више него промене облика односно величине; с друге стране, зато што је зависност интензитета од температуре израженија у плавом него у црвеном делу спектра. Резултат ове појаве је значајна зависност амплитуда осцилација од таласне дужине, односно од криве пропусне моћи филтера који се користи за посматрања.

Поред овог основног ефекта, варијације сјаја на различитим таласним дужинама зависе од геометрије појединачних мода – другим речима, од одговарајућих сферних хармоника. И амплитуде и фазе осцилација су у том смислу функције квантних бројева (ℓ, m) и таласне дужине. Тако се, у принципу, „потпис“ појединачних мода може пронаћи поређењем посматрања у различитим филтерима.

У литератури се могу наћи различите верзије фотометријских метода за идентификацију мода. Први су технику представили Stamford & Watson (1981), на основу теоријских основа које су разрадили Dziembowski (1977), Balona & Stobie (1979) и Buda & Smith (1979). Заједничко за све приступе пре 2003. године је ослањање на адијабатску апроксимацију, у којој се површински ефекти представљају помоћу *ad hoc* параметра R (Garrido, 2000). Велики напредак у развоју фотометријских метода идентификације направили су Dupret, et al. (2003), развојем детаљног, не-адијабатског поступка, у коме се тај параметар елиминише.

Теоријски изрази за амплитуду и фазу варијација у посматраној кривој сјаја у различитим филтерима зависе, између осталог, од геометријске конфигурације чворишта одговарајућег сферног хармоника у односу на посматрача, односно од

квантних бројева (ℓ, m) и од инклинације i осе симетрије пулсација. У већини случајева се сматра да се ова оса поклапа са осом ротације. Код брзо-ротирајућих Ар звезда (одељак 8.1.4), и у принципу, код објеката са јаким магнетним пољима, уместо тога се претпоставља да се оса пулсација поклапа са магнетном осом, док се код тесно двојних звезда за главну осу симетрије узима тзв. плимска оса, односно оса која пролази кроз центре компонената. Облик зависности амплитуде и фазе од геометрије моде дозвољава да се чланови који зависе од реда моде m и инклинације i групишу у фактор који не зависи од таласне дужине, те да се елиминишу из фотометријске анализе, из које се тада, у најбољем случају, добија идентификација степена моде, ℓ .

Како би се постигла идентификација ℓ , неопходно је извести теоријске изразе за односе амплитуда и разлике у фазама у различитим филтерима, за шта је потребна детаљна разрада ефеката потамњења ка рубу и рачунање пертурбација излазног флукса у функцији ефективне температуре и гравитационог убрзања, као и адекватан третман конвекције код звезда са конвективним омотачима. Другим речима, успех ове методе у великој мери зависи од тачности и софистицираности атмосферских модела.

2.2.2. Спектроскопске методе

Осцилације доводе до промене локалне температуре, али такође и до померања елементарних површина. Ово померање услед Доплеровог ефекта за последицу има периодичне промене у профилима спектралних линија (слика 2.1). Спектроскопски подаци високе спектралне резолуције пружају веома детаљну слику брзинског поља услед нерадијалних осцилација, а испоставља се да интерпретација ових података у смислу идентификације (ℓ, m) мање зависи од детаљног третмана осцилација у атмосфери него што је то случај код фотометријских метода. Интерпретација се ослања на извођење вектора брзине осцилација из посматраног радијалног помераја ξ , уместо на варијације у температури и флуксу.

Међутим, са посматрачке тачке гледишта је и даље велики изазов добити посматрања довољне дужине, резолуције и квалитета (у смислу односа сигнала према шуму), а са добром *временском резолуцијом*. Наиме, за проучавање

варијација профила спектралних линија услед осцилација чији су периоди, рецимо, реда једног минута, неопходно је да појединачни снимци буду начињени сваких двадесетак секунди.

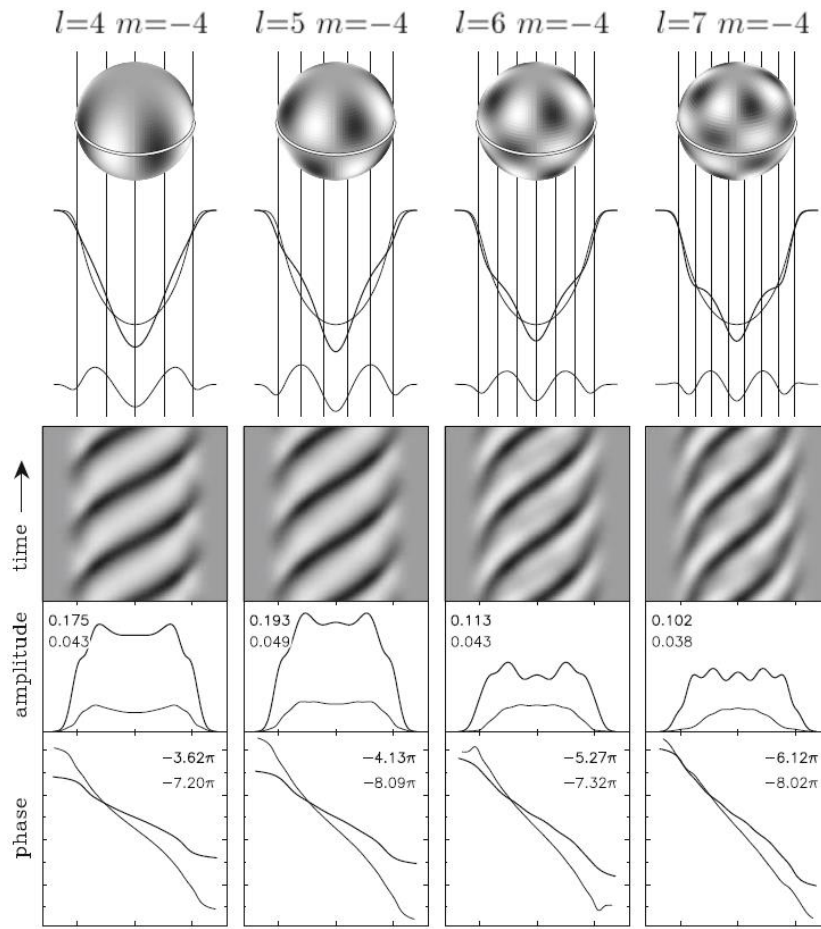
Извођење потпуне теорије пулсација на основу поља брзина такође представља изазов, а методологија која повезује посматрања са теоријом је компликована. Из ових разлога, многи посматрачи се и даље радије опредељују за фотометријске методе идентификације, које су изводљиве са мањим телескопима и уз једноставнији теоријски приступ, иако се из њих може добити само степен моде, ℓ .

Као и у другим пољима астрономије, најбољи резултати се постижу комбинавањем различитих метода и типова података.

2.2.3. Мешовите методе

Идентификација мода комбинованим фотометријским и спектроскопским, или спектроскопским и интерферометријским методама, је још увек у повоју. У литератури се могу наћи бројни примери где се резултати постигнути једном техником пореде, односно верификују употребом неке друге; у већини случајева идентификација буде потврђена, али не увек, као што показује пример β Ctu, звезде типа β Cep (одељак 8.1.6), код које је фотометријски идентификована једна једина мода степена $\ell = 2$ (Cugier, et al., 1994), док су спектроскопским подацима пронађене моде степенова $\ell = 3$ или 4 (Aerts, et al., 1998). Више од поређења резултата може се постићи симултаним фотометријским и спектроскопским посматрањем и упоредном анализом добијених података, као што су урадили Daszynska-Daszkiewicz, et al. (2005) за звезде δ Cet 3 и v Eri, типа β Cep.

Истовремена примена спектроскопских и интерферометријских метода такође обећава добре резултате. За звезде у Сунчевој околини, интерферометријски се могу реконструисати периодичне промене у расподели површинског сјаја, што, као код Сунца, омогућава идентификацију мода на основу геометријских принципа (слика 2.2). Улога спектроскопије код ове мешовите методе је у идентификацији мода ниског степена.

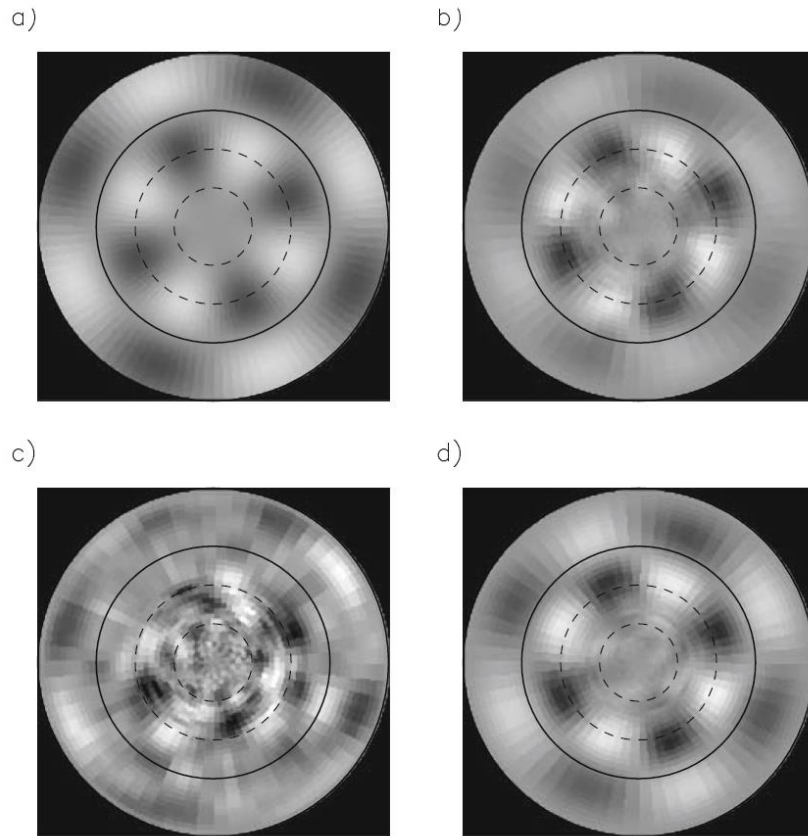


Слика 2.1: Симулација варијација у профилима спектралних линија услед нерадијалних осцилација са различитим квантним бројевима (l, m). Полазећи од горе, видимо: репрезентацију реалног дела радијалне компоненте одговарајућег сферног хармоника, профил линије услед дотичне моде у задатој фази у поређењу са профилу у одсуству осцилација, репрезентацију варијација у односу на средњи профил током три циклуса осциловања, расподелу амплитуде за дату моду (дебела линија) и њен први хармоник (танка линија), и расподелу фазе за дату моду (дебела линија) и њен први хармоник (танка линија). Преузето из Telting & Schrijvers (1997).

Опширан приказ овог и других потенцијалних начина да се интерферометрија искористи за астросеизмолошка истраживања може се наћи у прегледном раду Cunha, et al. (2007).

2.3. Идентификација мода у еклипсно двојним системима

Феномен помрачења у еклипсно двојним системима у принципу може да се искористи као *просторни филтер* који омогућава разлучивање делова површине помрачене звезде. Као што се може видети из примера Сунца и звезда из Сунчеве околине које се могу посматрати интерферометријски, ако је могуће снимити светлост са одређеног дела површине уместо интегрисане светлости са читаве површине, могућа је и идентификација мода на основу геометријских принципа.



Слика 2.2: (а) Симулирана пројекција расподеле површинског сјаја услед присуства моде $\ell = 5, m = 4$ око пола звезде са инклинацијом $i = 45^\circ$. Екватор и латитуде од 30 односно 60 степени су приказане као пуни и испрекидани кругови. Реконструкције на основу (б) синтетичког спектра, (с) померања фото-центра, и (д) комбинованих техника. Преузето из Jankov, et al. (2002).

Током помрачења пулсирајуће звезде, неки део њене површине је у свакој фази сакривен диском друге, помрачујуће компоненте. Ово очигледно мења геометрију обрасца пулсација. На непомраченим деловима површине, ефекат геометријског поништавања (слика 1.4) биће умањен, што значи да ће амплитуде (односно видљивост) мода бити увећана. Повећање амплитуде зависи од геометријске конфигурације сваке појединачне моде; код мода за које је разлика $\ell - m$ непарна, у општем случају, за орбиталну инклинацију блиску 90° и компоненте сличних димензија, неће бити великог повећања амплитуде; највећи ефекти могу се очекивати код мода за које је $\ell = m$ (као илустрација може да послужи слика 5.7). У екстремним случајевима, осцилације које се ван помрачења уопште не могу детектовати, могу постати видљиве унутар еклипсе. Овакве осцилације зову се *скривене моде*.

Просторно филтрирање путем помрачења, као и модулација амплитуде и фазе, која зависи од геометријских особина сваке моде (односно од степена ℓ и реда m), два су аспекта астросеизмологије јединствена за пулсирајуће звезде у двојним системима и на њима се заснивају два главна начина идентификације мода: мапирање помрачењем и директно фитовање кривих сјаја.

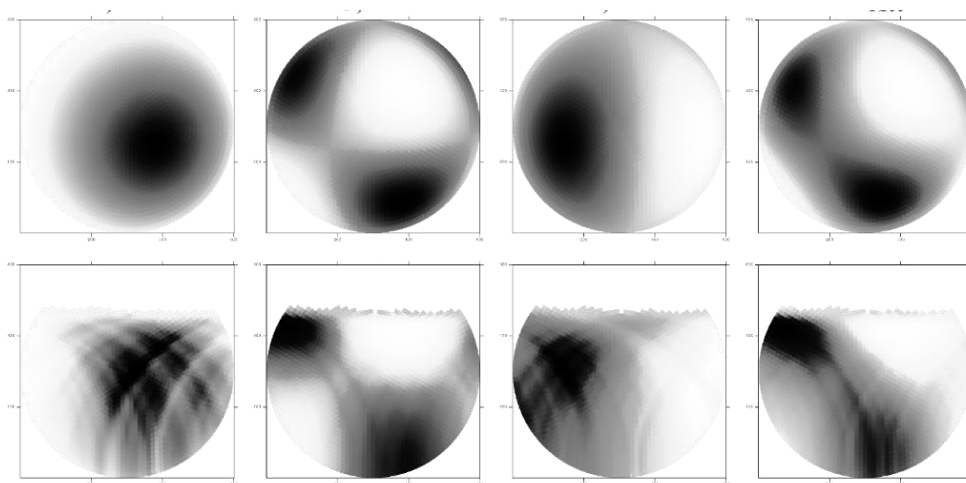
2.3.1. Мапирање помрачењем

Мапирање помрачењем (*Eclipse Mapping*) је техника којом се проналази мапа (расподела) површинског сјаја која најбоље репродукује посматрану криву сјаја променљиве звезде. Ова техника спада међу методе реконструкције слике (*image reconstruction* или *imaging*). Успешно се примењује за проучавање структуре акреционих дискова у катаклизмичним променљивим звездама, за које је у почетку и осмишљена (Horne, 1985). Користи се такође и за мерење величине и положаја звезданих пега, а може се употребити и за реконструкцију обрасца осцилација код пулсирајућих звезда у двојним системима. Модификацију Horne-ове методе у ову сврху први су описали Nuspl & Bíró (2002), и Nuspl et al. (2004) у саопштењима са конференција; детаљну разраду дали су Bíró & Nuspl (2011).

У основи ове методе лежи претпоставка да посматраној кривој сјаја неког објекта једнозначно одговара одређена расподела сјаја која се, захваљујући просторном филтрирању, може реконструисати на основу промена видљивих током помрачења. Ово се постиже итеративним поступком: на почетку се узима да је мапа сјаја нека позната расподела (нпр. униформна или ротационо симетрична), и прорачуна се вероватноћа да та мапа репродукује посматрану криву сјаја. У следећем кораку се мапа модификује на основу уочених разлика између посматране криве сјаја и оне која би се добила за почетну мапу. Поступак се понавља док се не пронађе мапа која репродукује посматрања са максималном вероватноћом.

Код примене на идентификацију нерадијалних мода у еклипно двојним системима, оно што треба реконструисати је временски променљива мапа расподеле сјаја, која представља суперпозицију мапа за сваку појединачну моду (слика 2.3). Ако је реконструкција успешна, идентификација појединачних мода може да се постигне једноставно, визуелном инспекцијом (поређења ради, видети

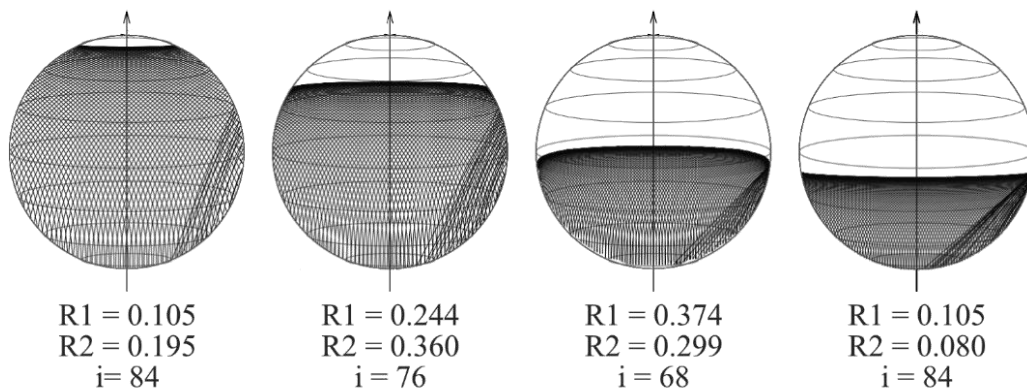
слику 1.5). Формално се идентификација врши анализирањем расподеле амплитуде и фазе на реконструисаним сликама.



Слика 2.3: Симулиране расподеле сјаја услед назначених мода осциловања (горњи ред), и реконструкције постигнуте техником мапирања помоћу помрачења (доњи ред). Прве три колоне (с лева на десно) показују појединачне моде, редом: $(\ell = 1, m = 1)$, $(\ell = 3, m = 2)$, $(\ell = 2, m = 2)$; а последња, њихову суперпозицију. Из Latković & Bíró (2008).

Код ове технике важну улогу игра геометрија помрачења, која је код сферних звезда у потпуности одређена орбиталном инклинацијом, те растојањем и величинама компонената, односно њиховим релативним радијусима. Корисне информације о расподели сјаја на површини звезде могу се добити само са оних делова површине који пролазе кроз сенку током помрачења, што види на сликама 2.3 и 2.4.

Успех примене ове методе, осим од геометрије система, зависи у великој мери и од квалитета и количине расположивих података. Идеална крива сјаја треба да има висок однос сигнала према шуму, високу временску резолуцију и да добро покрива неколико узастопних орбиталних периода. Ако је присутан велики број мода, или су присутне моде са сличним фреквенцијама, које ступају у интерференцију, за поуздану реконструкцију могу бити неопходне и десетине орбиталних периода, што је тешко постићи, поготово код добро одвојених, сферних звезда, које обично имају периоде од десетак и више дана. Ови захтеви су строги чак и у односу на стандарде астросеизмологије и до скоро су спречавали озбиљну примену ове технике на посматрачке податке. Захваљујући континуалним посматрањима са сателитских телескопа *Kepler* и *Corot*, то ће се сигурно променити у блиској будућности.



Слика 2.4: Приказ узорковања површине пулсирајуће звезде диском помрачујуће компоненте током еклипсе у зависности од геометријске конфигурације система. Осенчени делови представљају помрачену површину. R_1 и R_2 су радијуси пулсирајуће и помрачујуће компоненте, а i је орбитална инклинација. Из Latković & Birić (2008).

2.3.2. Директно фитовање кривих сјаја

Рачунање орбиталних и физичких параметара звезда у двојним системима путем фитовања синтетичких кривих сјаја и посматрања је добро проучена и поуздана техника која се успешно примењује на најразличитије типове двојних звезда већ деценијама. Стога се идеја да би се и особине звезданих осцилација могле рачунати на исти начин природно намеће.

Под фитовањем се подразумева дводелни процес:

Први део је такозвано решавање директног проблема, односно моделирање; циљ моделирања је да се, полазећи од задатих параметара модела (у случају двојних звезда то би биле масе, величине и температуре компонената, њихово растојање и период орбиталног кретања, итд), израчунају величине које се могу посматрати (нпр, фотометријске и спектроскопске промене током времена, односно криве сјаја и радијалних брзина код двојних система). Дobar модел производи синтетичке податке који су упоредиви са посматрањима.

Други део је такозвано решавање инверзног проблема, односно фитовање у ужем смислу; овде је циљ управо обрнут од решавања директног проблема: полазећи од посматраних података односно величина, траже се такви параметри са којима ће модел произвести симулацију која најбоље одговара (фитује) посматрања. Тако се у случају двојних звезда однос маса и растојање компонената могу одредити фитовањем кривих радијалних брзина, док се величине и температуре компонената могу одредити фитовањем кривих сјаја.

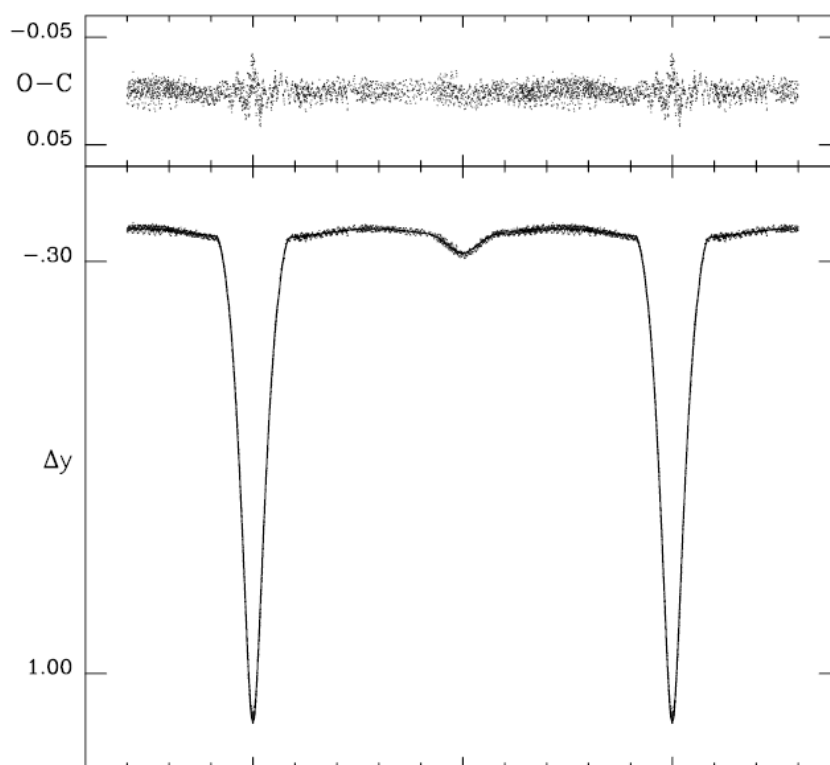
Али ово свакако нису једини параметри који се могу одредити фитовањем. Обиље секундарних ефеката, као што су тамне пеге на површини једне или обе компоненте, присуство и особине акреционог диска и гасне струје, брзина ротације, па чак и особине атмосфере (преко ефеката потамњења ка рубу и гравитационог потамњења), остављају препознатљива обележја на посматрањима, и могу се одредити, или макар проценити, фитовањем.

Звездане осцилације су још једна појава која се може уврстити у модел двојног система и њихове особине, међу којима су и особине придруженог сферног хармоника, се такође могу одредити фитовањем.

Ово није нова идеја и у литератури се може пронаћи низ покушаја да се она оствари и употреби за идентификацију мода. Прву примену пријавили су Gamagova et al. (2003), у раду у коме је испитана крива сјаја двојног система са пулсирајућом компонентом RZ Cas. Gamagova је поредила посматрану модулацију амплитуде и фазе осциловања током помрачења са низом модела у којима је варијирала квантне бројеве (ℓ, m) придруженог сферног хармоника, као и инклинацију осе симетрије у односу на осу ротације, под претпоставком да је побуђена само једна мода. Резултати нису били убедљиви, што су аутори образложили присуством додатних мода осциловања, те акреционог диска, гасне струје и одбачене материје око система, које нису могли да представе у оквиру свог једноставног модела. Идентификација коју су опрезно предложили је касније потврђена применом исте методе на мултиколор посматрања (Rodríguez, et al., 2004a). Крива сјаја RZ Cas и резидуи после одузимања орбиталног решења приказани су на слици 2.5, а варијације амплитуде и фазе се могу видети на слици 2.6.

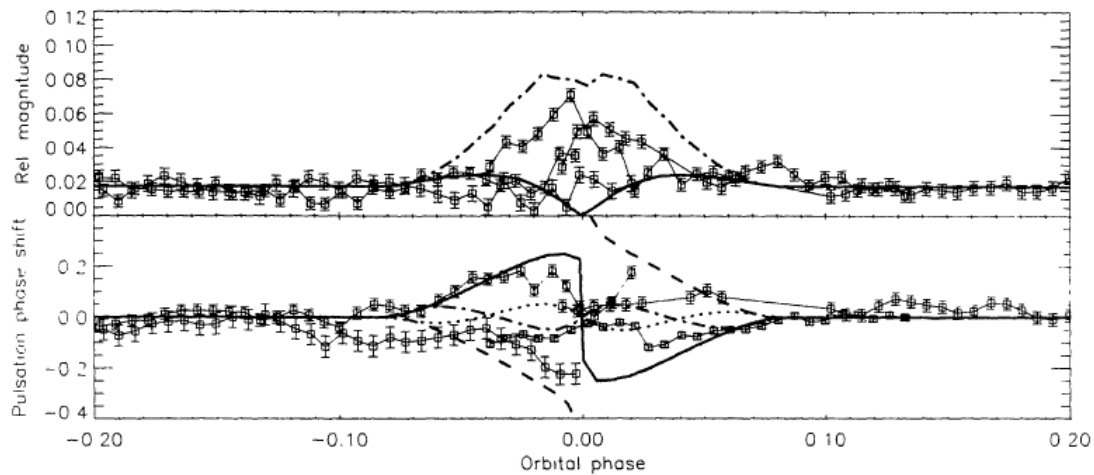
Други покушаји да се ова и сличне технике примене на посматрачке податке могу се наћи у, нпр, Mkrtichian, et al. (2004), Rodriguez, et al. (2004b), Reed, et al. (2005), Reed & Whole Earth Telescope (2006a), Reed & Whole Earth Telescope (2006b), са ограниченим успехом и непоузданим резултатима који су углавном последица недоступности непрекидних посматрачких података највишег квалитета, какве је данас могуће добити са сателитских телескопа. Међу овим радовима, саму методу су најбоље документовали Reed, et al. (2005). Њихов модел двојног система је потпуно аналитички, односно састоји се од сферних звезда у кружној орбити, при

чему се сматра да је секундарна компонента (она која не пулсира) тамна, односно да не зрачи. Осцилације су представили као сферне хармонике чија је оса симетрије један од параметара модела, тј. може се поставити под било којим углом у односу на осу ротације. Ове претпоставке су оправдане у случајевима који су ауторима били интересантни, а то су добро одвојени системи са патуљастим компонентама.



Слика 2.5: Крива сјаја двојног система RZ Cas (доле) са резидуима након одузимања орбиталног решења (горе). Осцилације се јасно разазнају, као и појачање амплитуде током помрачења пулсирајуће компоненте. Преузето из Rodríguez, et al. (2004a).

Приликом прегледања поменуте литературе, пажњу треба обратити на чињеницу да неки аутори, нпр. Reed, et al. (2005), све технике које користе помрачење као просторни филтер називају мапирањем помрачењем. Ово није исправно. Мапирање помрачењем, као што је објашњено у претходном одељку, је метода реконструкције слике и у принципу нема ништа заједничко са методама фитовања. За њу није потребно имати модел двојног система, нити звезданих осцилација, а реконструкција се постиже не минимизацијом разлике између посматране и референтне слике (фитовањем), већ максимизацијом ентропије (вероватноће да су разлике између референтне и посматране слике случајне), као што су детаљно објаснили Bíró & Nuspl (2011).



Слика 2.6: Горе – посматрана варијација амплитуде доминантне моде осцилације RZ Cas током помрачења, са два размотрена модела (приказана пуном и испрекиданом линијом). Доле – посматрана варијација фазе. Посматрања су дата за неколико ноћи и приказана су тачкама са грешкама. Преузето из (Gamarova, et al., 2003).

Метода идентификације мода која се предлаже у овој дисертацији је модификација технике директног фитовања коју су представили Latković & Bíró (2008) у раду под насловом „Photometric mode identification methods in eclipsing binaries“ („Фотометријске методе идентификације мода у еклипсно двојним системима“). У њему је приказано поређење између методе директног фитовања и методе мапирања помрачењем, пошто смо паралелно радили на развоју обе технике. За методу директног фитовања коришћен је модел двојног система са сферним звездама у кружној орбити, при чему се звездане осцилације представљају као пертурбације произвољне расподеле излазног интензитета са задатом амплитудом, фреквенцијом и фазом и геометријом одређеном придруженим сферним хармоником. Овај модел, иако једноставан у поређењу са постојећим моделима двојних звезда, је веома напредан у односу на постојеће моделе *двојних звезда са пулсирајућим компонентама*, који се свде на поједностављене, идеалне, аналитичке репрезентације.

Поређење две технике идентификације мода изведено је тестирањем на синтетичким подацима генерисаним са параметрима насумично изабраним из разумних опсега. Укључени су параметри модела који утичу на геометрију помрачења и осцилација: величине и растојање између звезда, те фреквенције и амплитуде осцилација, орјентација осе симетрије у односу на ротациону осу, као и квантни бројеви (ℓ, m). Ова симулирана посматрања су „покварена“ додавањем

вештачког шума и затим независно обрађена двома техникама. Успех технике мери се поклапањем улазних параметара модела и резултата идентификације, при чему је у разматрању резултата већа тежина дата исправној идентификацији степена ℓ . Резултати су показали да је метода директног фитовања поузданији начин за идентификацију мода, али са важном напоменом да је, због своје суштинске зависности од модела двојног система и звезданих осцилација и даље инфериорна у односу на мапирање путем помрачења.

Намеће се закључак да би се уз употребу детаљног, општијег модела двојног система, метода директног фитовања кривих сјаја могла показати као моћно и поуздано средство за идентификацију мода, и управо је то циљ ове дисертације.

2.3.3. Директно фитовање кривих сјаја у оквиру Рошовог модела

Дакле, проблем који се у дисертацији решава је симулирање звезданих осцилација на компонентама тесно двојних система у оквиру Рошовог модела, ради идентификације мода путем директног фитовања кривих сјаја.

Рошов модел се заснива на претпоставци да је облик звезда у двојном систему одређен суперпозицијом гравитационе силе међусобног привлачења и центрифугалне силе која потиче од комбинације орбиталне револуције и ротације сваке компоненте око сопствене осе. Расподела сјаја на површини звезде није униформна као код сферних звезда, већ зависи од локалног ефективног гравитационог потенцијала, према фон Цајпеловом закону (von Zeipel, 1924). На расподелу сјаја утичу и потамњење ка рубу, међусобно загревање компонената (такозвани ефекат рефлексије), те присуство тамних или светлих пега на површини, и додатних компонената као што су гасна струја и акрециони диск. Све ове појаве могу се моделирати у оквиру програма *Infinity* (Џеки, 2013, у припреми), који је употребљен као основа за моделирање звезданих осцилација.

Звездане осцилације се симулирају као периодичне пертурбације локалне температуре и гравитационог потенцијала. Претпоставља се да се осцилације могу представити као сферни хармоници без обзира на то што звезде нису сферне. Да је ово оправдано у случају благо изобличених звезда показали су Reyniers & Smeyers (2003). У дисертацији се ова претпоставка усваја и за значајно изобличене звезде.

3. Модел двојног система

Модел двојног система који је употребљен као основа за предложени модел звезданих осцилација практично је реализован у виду компјутерског програма *Infinity* (Ћеки, 2013, у припреми). *Infinity* је пројекат модернизације и проширивања програма за моделирање двојних звезда др Гојка Ђурашевића, описаног у Ђурашевић (1991) и заснован је на истим физичким принципима, који ће овде бити набројани и описани само у општим цртама. За детаљан опис модела двојног система и његове практичне реализације, читалац се упућује на Ћеки (2013, у припреми).

3.1. Основне претпоставке

Претпоставља се да су за кретање и облик компонената двојног система одговорне силе међусобног гравитационог привлачења и центрифугална сила која потиче од ротације и орбиталне револуције. Све остале интеракције (нпр. магнетна поља, звездани ветар, притисак зрачења итд.) се занемарују. Усваја се апроксимација потпуне централне кондензације, што значи да се, прво, кретање компонената разматра као кретање материјалних тачака и друго, да се не разматра њихова унутрашња структура. Оваква репрезентација двојног система позната је као *Рошов модел*.

У оквиру Рошовог модела, облик сваке компоненте система одређен је ефективним гравитационим потенцијалом, који је дефинисан изразом:

3.1

$$\psi = G \frac{m_1}{r_1} + G \frac{m_2}{r_2} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \omega_k^2 x.$$

Овде је ψ ефективни гравитациони потенцијал у тачки на површини звезде, задатој Декартовим координатама (x, y, z) . Координатни систем је везан за центар примарне компоненте, а оријентисан је тако да се центар секундарне компоненте увек налази на x оси, док се y оса налази у орбиталној равни (у смеру револуције система), а z оса је нормална на орбиталну раван и пролази кроз пол примарне компоненте. (Под примарном компонентом се подразумева звезда која је

помрачена у тренутку фотометријског примарног минимума.) Једноставности ради, велика полуоса орбите (односно сепарација у случају кружне орбите), узима се за јединицу растојања, односно $a_{ORB} = 1$. G је гравитациона константа, величине m_1 и m_2 су масе компонената, а r_1 и r_2 су удаљености пробне тачке од њихових центара:

3.2

$$\begin{aligned} r_1 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ r_2 &= (1 - x)^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Угаона брзина ротације сваке компоненте се изражава као:

3.3

$$\omega = f \omega_k,$$

где f је параметар асинхроне ротације, а ω_k Кеплеровска угаона брзина револуције система, дата изразом:

3.4

$$\omega_k^2 = G \frac{m_1 + m_2}{R^3}.$$

Полазећи од једначине 3.1, може се показати да су величина и облик звезде у двојном систему једнозначно одређени односом маса $q = m_2/m_1$, великом полуосом орбите и параметром асинхроне ротације (Hilditch, 2001).

3.2. Геометријска репрезентација

У оквиру програма *Infinity*, површина компонената се представља помоћу полигоналне мреже налик геодезијској мрежи (слика 3.1), при чему се финоћа контролише параметром поделе p , који се задаје засебно за сваку компоненту система.

Елементарни троугао се карактерише следећим особинама:

- Вектором положаја \vec{r}_i који се задаје у сферном координатном систему. Удаљеност од центра звезде r_i се задаје у јединицама велике полуосе орбите. Колатитуда θ_i се мери од северног ка јужном полу и узима вредности од 0 до 180 степени. Лонгитуда ϕ_i се мери од правца који спаја

центре компонената у правцу револуције система и узима вредности од 0 до 360 степени. Веза са Декартовим координатним системом (из једначине 3.1) је дата уобичајеним релацијама:

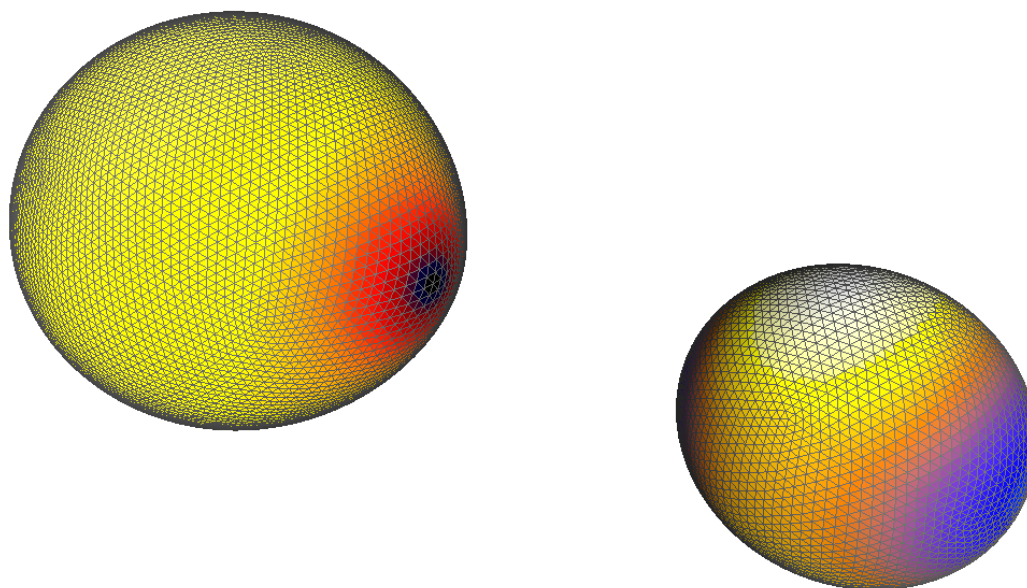
3.5

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Вектором нормале \vec{n}_i који фигурише у прорачунима видљивости и потамњења ка рубу
- Површином S_i
- Локалном температуром T_i (израженом у Келвинима)
- Локалним гравитационим убрзањем g_i (израженим у ЦГС систему јединица).



Слика 3.1: Подела површине на елементарне троуглове за Систем 1, описан у одељку 5.1. Већа звезда (с леве стране) је подељена са параметром поделе 32, а мања (с десне стране) са параметром поделе 20, како би се добиле сличне површине троуглова на обе компоненте. Боје одражавају расподелу температуре. На мањој (топлијој) компоненти, $T_{min} = 7467K$ има плаву, а $T_{max} = 7536K$ белу боју. На већој (хладнијој) компоненти, $T_{min} = 4590K$ има црну, а $T_{max} = 5091K$ жуту боју.

3.3. Рачун физичких величина

Положај троугла одговара оној тачки (r_i, θ_i, ϕ_i) у којој је потенцијал дат једначином 3.1 једнак задатој константи која је одређена величином звезде у односу на велику полуосу орбите, односом маса и параметром асинхроности. Локална температура T_i се онда, према фон Цајпеловом закону (von Zeipel, 1924), одређује на основу ефективне температуре T_{eff} (која се за сваку звезду задаје као параметар модела) и локалног ефективног гравитационог убрзања:

3.6

$$T_i = T_{eff} \left(\frac{g_i}{g_{eff}} \right)^\beta,$$

где је β експонент гравитационног потамњења, а g_{eff} средње ефективно гравитационо убрзање. Овако се добија равнотежна локална температура, која се пре израчунавања излазног флукса по потреби модификује како би се урачунали додатни ефекти: ефекат рефлексије, површинске нехомогености (звездане пеге) и звездане осцилације.

Ефектом рефлексије назива се појава међусобног загревања компонената, која код система где се температуре компонената значајно разликују, има значајан утицај на расподелу температуре. Услед ове појаве, она страна звезде која је окренута ка другој компоненти се загрева, те више зрачи, што за резултат има пораст укупног излазног флукса у орбиталним фазама када је загрејана страна звезде видљива. Ефекат рефлексије се у програму *Infinity* израчунава преко израза:

3.7

$$T_i^R = \sqrt[4]{T_i^4 + \frac{L}{4\pi\sigma\rho^2} A \cos \alpha},$$

где је T_i^R температура i -тог елементарног троугла после урачунавања ефекта рефлексије, A је албедо текуће компоненте, L је луминозност друге компоненте, ρ је удаљеност троугла од центра друге компоненте, а σ је Штефан-Болцманова константа. Угао α се мери између вектора нормале i -тог троугла и вектора који

спаја његов центроид са центром друге компоненте. Овај начин обрачунавања рефлексије предложила је Khruzina (1985).

Претпоставља се да сваки елементарни троугао зрачи као црно тело температуре T_i па се локални излазни флуks рачуна према Планковом закону:

3.8

$$B_{i,\lambda}(T_i) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T_i}} - 1}.$$

Овде је λ ефективна таласна дужина филтера за који се синтетише крива сјаја, c је брзина светлости у вакууму, h Планкова, а k_B Болцманова константа.

До посматрача, међутим, долази само онај део флуksа који је израчен у правцу ка посматрачу, и то умањен услед потамњења ка рубу. Овај ефекат се обрачунава према следећој апроксимацији:

3.9

$$\begin{aligned} LD_i(T_i, g_i, \vec{n}_i) = & X_1(T_i, g_i)(1 - \sqrt{\cos \gamma}) \\ & - X_2(T_i, g_i)(1 - \cos \gamma) \\ & - X_3(T_i, g_i)(1 - \sqrt[3]{\cos \gamma}) \\ & - X_4(T_i, g_i)(1 - \cos^2 \gamma). \end{aligned}$$

где је γ угао између вектора нормале i -тог елементарног троугла и правца ка посматрачу, а X_1, \dots, X_4 су коефицијенти потамњења ка рубу који се добијају интерполацијом између утабличених вредности преузетих од Claret & Bloemen (2011).

У свакој орбиталној фази, излазне величине се добијају интеграцијом локалних вредности по свим видљивим елементарним троугловима, пројектованим на раван управну на правац ка посматрачу (на посматрачево „небо“). Видљивост троугла у датом тренутку се одређује на основу тога да ли је његов центроид покривен неким другим троуглом који је ближе посматрачу (Џеки, 2013, у припреми). Тако се, у тренутку t , укупни излазни флуks рачуна као

$$F_{\lambda}(t) = \sum_i^{N_v} LD_i(T_i, g_i, \vec{n}_i) B_{i,\lambda}(T_i) S_i,$$

где је N_v укупан број елементарних троуглова видљивих на обе компоненте у тренутку t . Низ флуксева израчунатих у различитим тренуцима чини синтетичку криву сјаја која се може поредити са посматрањима.

Овиме, наравно, нису исцрпљене све могућности програма *Infinity*, у оквиру ког се такође моделирају радијалне брзине, ексцентричне орбите, акрециони дискови, звездане пеге, те у коме је могуће користити алтернативне начине рачунања излазног флукса, ефекта рефлексije, итд. Овде су приказани само они аспекти модела двојног система који су употребљени у процесу изградње и тестирања модела звезданих осцилација, а који ће бити детаљно описан у наставку.

4. Модел звезданих осцилација

У истом смислу у ком се у оквиру програма *Infinity* (Čeki, 2013, у припреми), моделирање појава у вези са двојношћу заснива на принципима успостављеним у моделу др Гојка Ђурашевића (Ђурашевић, 1991), моделирање појава у вези са осцилацијама се ослања на постојећу реализацију методе директног фитовања за сферне звезде у виду програма *Pulzem* (Latković & Bíró, 2008; Bíró & Nuspl, 2011). Управо се на искуствима стеченим у раду како са том техником, тако и са техником мапирања помрачењем, темељи и успостављање методе директног фитовања у оквиру Рошовог модела.

У предложеном моделу, звездане осцилације се представљају као периодичне пертурбације локалне температуре и ефективног гравитационог потенцијала. То утиче на излазне величине (првенствено на криву сјаја) тако што се сви остали прорачуни (потамњење ка рубу, ефекат рефлексије и рачун флукса), изводе након урачунавања пертурбација. Овај приступ се фундаментално разликује од модела које су представили Latković & Bíró (2008) и Bíró & Nuspl (2011), у коме се осцилације моделирају као директне пертурбације излазног флукса. Поређење дато у поглављу 5 показује да ова разлика у моделу не доводи до радикалних одступања у синтетичким кривама сјаја за сферне звезде, али предложени приступ је природнији и представља напредак у моделирању.

Друга битна разлика у односу на постојеће моделе двојних звезда са пулсирајућом компонентом је то што се у предложеном моделу могу симулирати осцилације и на звездама изобличеним услед плимских сила. Код значајно изобличених звезда за доминанту осу симетрије (такозвану осу пулсација) у односу на коју се изводи рачун пертурбација, уместо осе ротације се узима правац ка центру друге компоненте.

4.1. Основне претпоставке

Основна претпоставка је да се просторна, односно геометријска конфигурација сваке моде осциловања може представити помоћу одговарајућег сферног хармоника (једначине 1.25), а временска, помоћу синусне функције коју карактеришу фреквенција, амплитуда и фаза, а чији је општи облик:

$$f(t) = Ae^{-i(\omega t + \varphi)}.$$

Ова претпоставка, међутим, подразумева усвајање следећих, основних апроксимација:

- 1) Адијабатска апроксимација, у оквиру које се занемарује члан који представља загревање у једначини 1.13. Ова апроксимација се користи у теорији звезданих осцилација да би се избегле компликације приликом рачунања фреквенција, а оправдана је зато што су типични периоди звезданих осцилација за неколико редова величине мањи од Келвин-Хелмхолцове временске скале (Aerts, et al., 2010, pp. 142-143). Ова апроксимација је валидна у звезданој унутрашњости, а често се мора одбацити при разматрању површинских појава, где се карактеристична временска скала поклапа са радијативном скалом.
- 2) Линеарна апроксимација, у оквиру које се занемарује ротација као и присуство других брзинских поља, магнетног поља, као и сви изводи по времену, а осцилације се разматрају као мали поремећаји равнотежног стања. Да је репрезентација помоћу сферних хармоника валидна и код звезда у двојним системима, које мало одступају од сферне (одн. цилиндричне) симетрије услед плимских сила, показали су Reyniers & Smeysers (2003). У оквиру ове дисертације претпоставља се да ово важи и за значајно изобличене звезде. Да ли је ово оправдано или није, може се показати поређењем модела са посматрањима, што ће свакако бити део будућег истраживања, али превазилази оквир ове дисертације, из разлога објашњених у поглављима 5 и 6.

4.2. Особине мода као параметри модела

Свака мода осцилација у моделу се представља као објекат који поседује следеће особине:

- Фреквенцију, ν , задату у јединицама периода пулсације по орбиталном периоду. Ово ће бити цео број у случајевима када се моделирају плимски побуђене моде.

- Хармонијски степен ℓ , који се поклапа са степеном придруженог сферног хармоника. Ово је укупан број чворова стојећег таласа на површини звезде и може имати било коју позитивну, целобројну вредност.
- Азимутални ред m , који се поклапа са редом придруженог сферног хармоника. Ово је број чворова који пролазе кроз осу симетрије пулсација и не може бити већи од хармонијског степена: $-\ell \leq m \leq \ell$.
- Амплитуду пертурбације температуре, A^T , у Келвинима.
- Фазу пертурбације температуре, ψ^T , у степенима, која се дефинише као одступање локалне температуре од равнотежне вредности у тренутку примарног фотометријског минимума, односно у тренутку када је орбитална фаза једнака нули.
- Амплитуду пертурбације положаја, A^r , у јединицама велике полуосе орбите, a_{ORB} .
- Фазу пертурбације положаја, ψ^r .

Програм којим се овај модел практично реализује дат је у поглављу 9.

За сваку појединачну моду, свака физичка особина је параметар модела који се у принципу може фитовати. Пажњу треба обратити на чињеницу да су све наведене величине реални бројеви, осим квантних бројева придруженог сферног хармоника, ℓ и m , који су целобројни. Ова околност је несрећна и проблематична за решавање инверзног проблема, поготово зато што су управо ово величине које желимо да добијемо као коначни резултат. Наиме, целобројне променљиве се не могу фитовати класичним техникама, које се заснивају на претпоставци да оптимални скуп параметара даје најмање одступање модела од посматрања, одн. представља минимум у глатком континууму могућих решења. Са целобројним параметрима, параметарски простор неће бити континуалан, а кад су у питању конкретно ℓ и m , није гарантовано ни да ће се разлика између модела и посматрачких података монотонно смањивати како се пробне вредности приближавају оптималним, односно истинским.

Из тог разлога се уместо фитовања у правом смислу речи, у дисертацији користи техника претраживања мреже унапред генерисаних модела, као што ће бити објашњено у поглављу 5.

4.3. Пертурбација температуре

У присуству N мода осциловања, пертурбована температура сваке елементарне ћелије у тренутку t се рачуна као:

4.2

$$T(\theta, \phi, t) = T_0(\theta, \phi) + \Re \left(\sum_{k=1}^N A_k^T Y_m^\ell(\theta, \phi) e^{-2\pi i(\nu_k t + \psi_k^T)} \right),$$

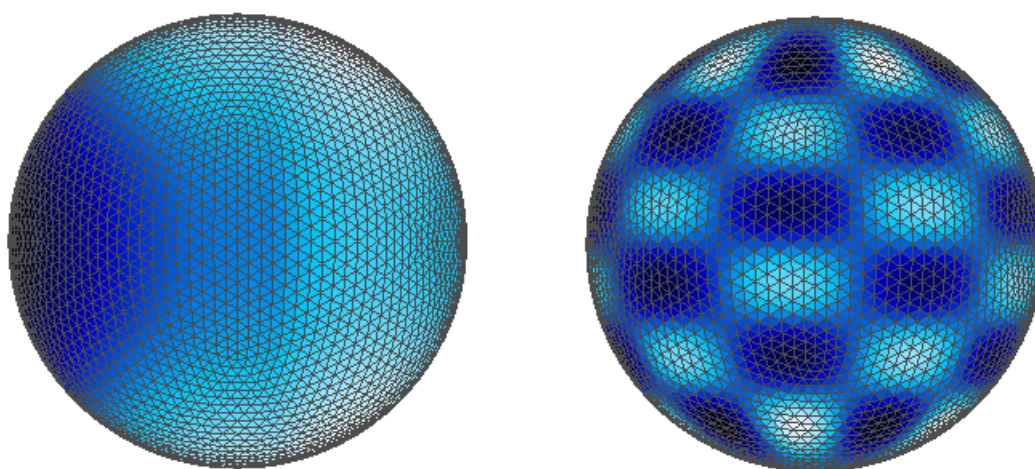
где је $T_0(\theta, \phi)$ равнотежна локална температура дата једначином 3.6, A_k^T је амплитуда пертурбације температуре за k -ту моду, док је ν_k њена фреквенција, а ψ_k^T њена фаза. Израз за сферни хармоник, $Y_m^\ell(\theta, \phi)$, дат је једначином 1.25, а члан $e^{-2\pi i(\nu_k t + \psi_k^T)}$ изражава периодичност временске зависности. Обично се узима реална вредност комплексног броја у загради.

Овако пертурбована температура се затим користи за рачун ефекта рефлексије и рачун излазног флукса. С обзиром на то да је пертурбација адитивна, одн. $T(\theta, \phi, t) = T_0(\theta, \phi) + \Delta T$, а рачун ефекта рефлексије није (једначина 3.7), није свеједно којим се редом урачунава утицај ових појава. Ако се прво урачуна рефлексија, па се онда на ту расподелу температуре додају пертурбације које потичу од осцилација, амплитуде осцилација (у односу на равнотежне локалне вредности) ће у датом тренутку бити исте на читавој површини звезде. Ако се, с друге стране, прво обрачунају осцилације, па онда рефлексија, осцилације ће бити израженије на оном делу површине који је захваћен ефектом рефлексије. Иако је овај поступак (одн. закључак) на први поглед неинтуитиван, овде је усвојен у процесу моделирања са следећим оправдањем:

Уколико осцилације нису изазване плимским силама, њихово побуђивање није повезано са присуством друге компоненте у систему, одн. осцилације би постојале и када би пулсирајућа звезда била усамљена. У том смислу су осцилације „старија“ или „основнија“ појава од ефекта рефлексије и стога се прве рачунају и у моделу. Уз то, ако су за побуђивање осцилација одговорни топлотни механизми, слој у коме долази до побуђивања је урођен дубоко у звездану унутрашњост и према основној претпоставци о централној кондензацији, неће

бити пертурбован плимским силама, а самим тим, ни рефлексijом, чак ни код изобличених звезда у тесно двојним системима.

Исправност усвојеног поступка морала би се преиспитати у случајевима када су осцилације изазване плимским силама, као и код звезда где се побуђивање мода догађа у површинским слојевима (нпр. код звезда сличних Сунцу, где је за побуђивање одговорна турбуленција на горњој граници конвективне зоне, дакле практично у самој атмосфери). Испитивање таквих модела је, међутим, ван оквира ове дисертације.



Слика 4.1: Равнотежна (лево) и пертурбована расподела температуре (десно) на приближно сферној звезди за моду $\ell = 10, m = 5$. Светлији троуглови су топлији.

Моделирање осцилација путем пертурбовања температуре доводи до једног интересантног ефекта који се не може произвести, односно уочити, ако се осцилације моделирају као пертурбације излазног флукса (нпр. у моделу који су представили Latković & Bíró (2008), одн. Bíró & Nuspl (2011)). Наиме, они делови видљиве површине пулсирајуће звезде који у датом тренутку имају температуре веће од локалних равнотежних вредности, чине већи допринос у излазном флуксу од оних делова који имају мање температуре. Стога у фази када доминантна мода достиже своју максималну амплитуду, долази до повећања укупног излазног флукса, одн. ефективне температуре, иако се *средња* температура по видљивој површини не мења у односу на равнотежно стање. То се одражава на синтетичку криву сјаја тако што осцилације нису строго синусоидалне, већ имају извесну асиметрију, а резидуи после одузимања орбиталног решења имају средњу вредност различиту од нуле. Овај ефекат је, међутим, уочљив само код осцилација

великих амплитуда, реда десетог дела ефективне температуре, код којих се у питање доводи и сам пертурбациони приступ. Демонстрација описана у поглављу 5 извршена је са модама код којих амплитуде нису довољно велике да изазову овај ефекат.

4.4. Пертурбација гравитационог потенцијала

У оквиру предложеног модела могу се симулирати не само пертурбације температуре, већ и пертурбације ефективног локалног гравитационог потенцијала, односно положаја елемената површине услед звезданих осцилација. Међутим, метода идентификације мода путем фитовања кривих сјаја у поглављу 5 ће бити демонстрирана са моделима у које је укључена само пертурбација температуре. За ово има неколико разлога.

Први разлог је поређење са постојећим, објављеним моделима и техникама, ради верификације. Наиме, у тренутку писања овог текста, предложени модел је једини за који знам, у коме се могу симулирати периодичне промене облика звезде у двојном систему услед нерадијалних звезданих осцилација.

Други разлог је велики број непознатих фактора у вези са периодичним променама положаја елемената површине. На пример, најприроднији начин да се оне моделирају је кроз пертурбацију ефективног гравитационог потенцијала, док се, с друге стране, у теорији линеарних звезданих осцилација (једначине 1.24), ова пертурбација занемарује. Поставља се и питање да ли треба пертурбације температуре и положаја моделирати као засебне физичке појаве, с обзиром на то да ће пертурбација положаја сама по себи, у оквиру фон Цајпеловог приступа (von Zeipel, 1924), довести до промене локалне температуре и то управо тако што ће елементарне ћелије које су најдаље од центра звезде бити најхладније и обрнуто, услед чега ће се промене температуре и радијалних брзина природно поставити у антифазу, што се поклапа са посматрањима. С друге стране, порекло промена температуре гаса приликом ширења односно сажимања је термодинамичке природе и строго гледано, нема везе са удаљеношћу ћелије од центра звезде, већ само са локалним особинама атмосфере. Уз све то, није јасно ни да ли би у случају радијалних осцилација велике амплитуде, исправно било моделирати

временску зависност као синусоидну, пошто су криве сјаја радијално пулсирајућих звезда углавном асиметричне.

Због ових питања је употреба предложеног модела ограничена на пертурбације температуре, које се могу релативно лако упоредити са директним пертурбацијама излазног интензитета које користе Bíró & Nuspl (2011). Пертурбације положаја ће бити приказане као једна од могућности, али неће бити укључене у моделирање ради идентификације мода.

Тренутни ефективни гравитациони потенцијал у тачки са координатама θ и ϕ , рачуна се према изразу:

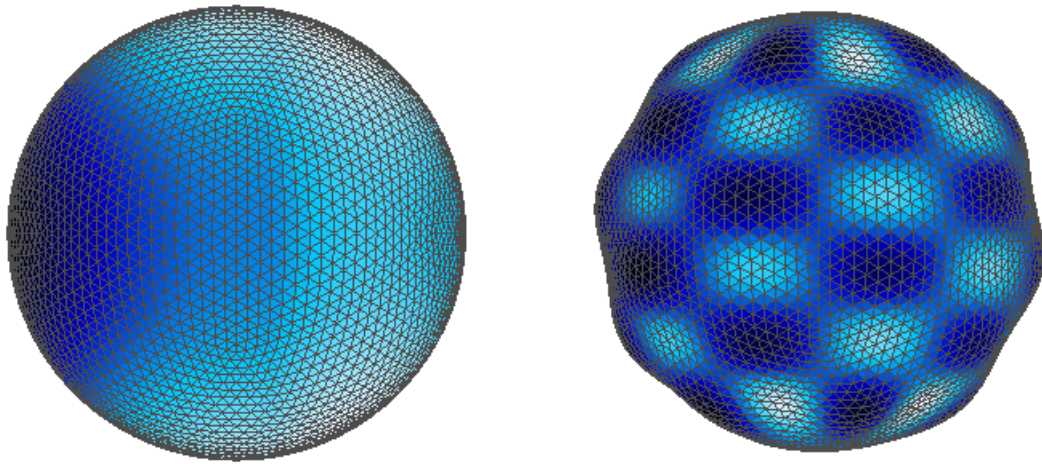
4.3

$$g(\theta, \phi, t) = g_0(\theta, \phi) + \Re \left(\sum_{k=1}^N A_k^r Y_m^l(\theta, \phi) e^{-2\pi i(\nu_k t + \psi_k^r)} \right),$$

где је $g_0(\theta, \phi)$ равнотежни ефективни гравитациони потенцијал, а A_k^r и ψ_k^r су амплитуда и фаза пертурбације, при чему се, као и код рачуна пертурбације температуре, узима само реални део комплексне вредности у загради.

У оквиру Рошовог модела, облик површине звезде одређен је управо ефективним гравитационим потенцијалом. Другим речима, удаљеност сваког елементарног дела површине звезде од њеног центра зависи од локалног ефективног гравитационог потенцијала. Из тога следи да ће се пертурбације гравитационог потенцијала испољити као пертурбације положаја елементарних површина, одн. као мале деформације облика звезде, што се може видети на слици 4.2.

Заједно са пертурбацијом положаја, мења се и оријентација нормале, што утиче на видљивост хелије, као и на количину топлоте коју хелија прима од друге звезде услед ефекта рефлексије.



Слика 4.2: Иста звезда која је приказана на слици 4.1, са модом $\ell = 10$, $m = 5$, али са пертурбацијама ефикавног гравитационог потенцијала, одн. положаја (с десне стране), у поређењу са равнотежним стањем (с леве стране). Боје одражавају расподелу температуре: тамнији су хладнији, и обрнуто.

На крају скрећем пажњу на то да се, иако су главна тема ове дисертације нерадијалне звездане осцилације, рачун пертурбације гравитационог потенцијала може искористити за моделирање радијалних пулсација великих амплитуда, какве су присутне код нпр. Цефеида и осталих класичних пулсирајућих звезда. Познатих еклипсо двојних система са радијално пулсирајућим компонентама је мало и то су углавном добро одвојени системи са дугим периодима, што увек представља изазов за сакупљање података. Без обзира на то, моделирање радијалних пулсација у двојним системима је један од предмета будућег рада са предложеним моделом.

4.5. Орјентација осе симетрије

У предложеном моделу могу се симулирати осцилације и на звездама изобличеним услед плимских сила. Код значајно изобличених звезда за доминанту осу симетрије (осу пулсација) у односу на коју се изводи рачун пертурбација, уместо осе ротације се узима правац ка центру друге компоненте. Оријентација осе пулсација могла би, у принципу, бити негде „на пола пута“ између ове две главне осе симетрије; и заиста, у предложеном моделу може да се зада произвољна орјентација осе пулсација као један од параметара модела. Међутим, за исправан третман нагнуте осе требало би у обзир узети и могућност да оса пулсација врши прецесионо кретање око осе ротације, аналогно магнетној оси код звезда са јаким магнетним пољем. Сматрала сам да је ово ван опсега

дисертације, те да представља тему за неки будући рад, тако да се овде разматрају само два екстремна случаја: поравнање са ротационом осом за приближно сферне звезде, тј. осно-симетричне звезде (приказан на слици 4.2), одн. са осом која пролази кроз центре компонената, за изобличене звезде (приказан на слици 4.3).

Ако имамо сферни хармоник $Y_l^m(\theta, \phi)$ у координатном систему везаном за орбиталну раван, где се оса симетрије поклапа са осом ротације пулсирајуће звезде, у произвољно ротираном координатном систему он се представља помоћу тзв. Вигнеровог оператора ротације (Wigner, 1959):

4.4

$$P_{\alpha, \beta, \gamma} Y_l^m(\theta, \phi) = \sum_{m'=-l}^l \mathcal{D}_{m', m}^l(\alpha, \beta, \gamma) Y_l^{m'}(\theta, \phi).$$

Овде су α, β, γ Ојлерови углови којима се задаје ротација у три димензије тако што се прво врши ротација око почетне Z осе за угао α , затим око нове Y' осе за угао β и коначно око крајње Z'' осе за угао γ (тј. ротација се врши у оквиру тзв. $Z - Y' - Z''$ конвенције). У случају који се овде разматра, ротација се увек врши у равни која је нормална на орбиталну раван и садржи осу ротације, и то око Y осе почетног координатног система. Другим речима, само ће угао β бити различит од нуле, и представљаће инклинацију нове осе симетрије у односу на осу ротације.

Величина $\mathcal{D}_{m', m}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ у једначини 4.4 представља матрични елемент Вигнерове матрице ротације, дат изразом:

4.5

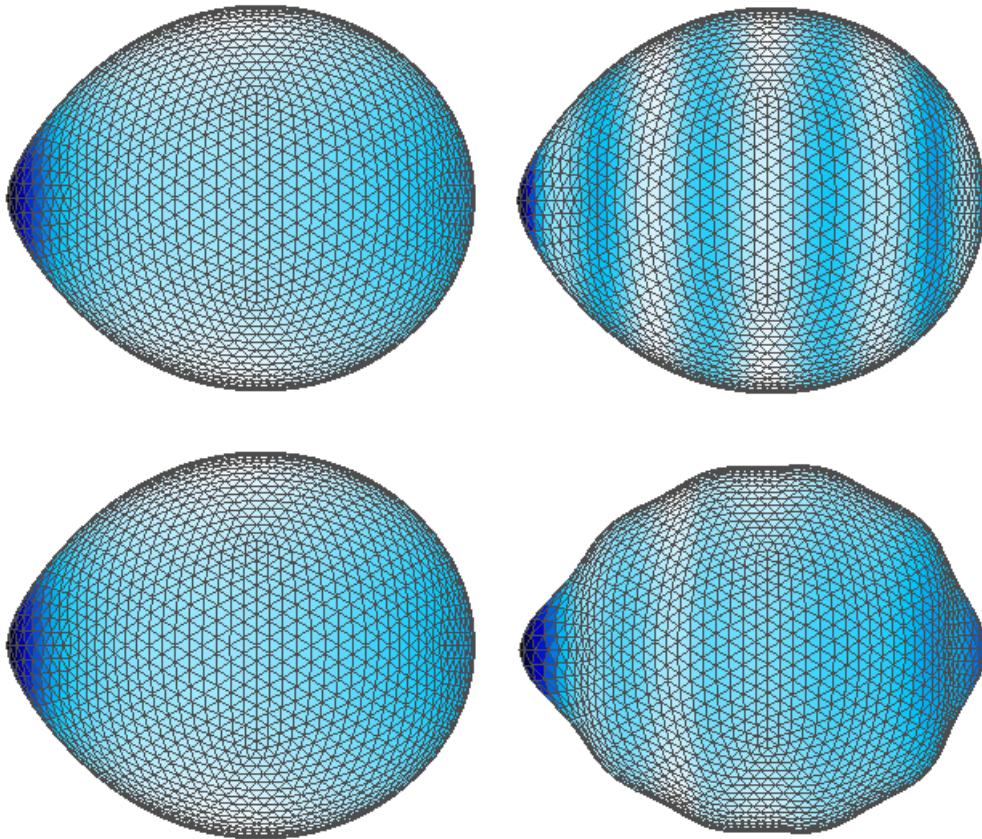
$$\mathcal{D}_{m', m}^l(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\alpha} d_{m', m}^l(\beta) e^{im\gamma},$$

где је

4.6

$$d_{m', m}^l(\beta) = \sqrt{(l+m')!(l-m')!(l+m)!(l-m)!} \cdot \sum_s \frac{(-1)^{m'-m+s}}{(l+m-s)!s!(m'-m+s)!(l-m'-s)!} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2l+m-m'-2s} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2s}$$

тзв. мало Вигнерово d . У оквиру Вигнеровог формализма, који је развијен и користи се у квантној механици, разматрају се и случајеви где се у новом координатном систему почетни сферни хармоник азимуталног реда m „види“ као сферни хармоник реда m' у ротираном координатном систему, али се у примени на звездане осцилације узима да је увек $m' = m$, што донекле поједностављује изразе 4.4 и 4.6.



Слика 4.3: Мода $\ell = 10, m = 5$ моделирана преко пертурбација температуре (горњи ред) и ефективног гравитационог потенцијала (доњи ред) на плимски изобличеној звезди. Боје, као и раније, одражавају расподелу температуре.

Дакле, у координатном систему са осом симетрије која одступа од осе ротације за угао β , једној моди осциловања, односно сферном хармонику степена ℓ , одговара суперпозиција $2\ell + 1$ мода, које све имају исти степен, ℓ и различите редове m – односно *мултиплету* степена ℓ . Као што је већ поменуто у одељку 1.6, фреквенције чланова мултиплета нису исте као фреквенција почетног, неротираног сферног хармоника, већ се „цепају“ на еквидистантан спектар у ком свака фреквенција одговара једном члану мултиплета. Амплитуде чланова мултиплета су одређене

одговарајућим Вигнеровим матричним елементима. О овоме ће бити речи поново у контексту идентификације мода на изобличеним звездама.

5. Демонстрација на синтетичким подацима

Проверу поузданости предложене методе за идентификацију мода идеално би било извршити фитовањем посматраних кривих сјаја двојних система са пулсирајућим компонентама и поређењем резултата са идентификацијом мода постигнутом другим, независним методама (видети поглавље 2 за преглед постојећих техника). Међутим, тренутно не постоји довољан број поузданих идентификација уопште, а камоли у тесно двојним системима за спровођење таквих тестова. Стога ће у дисертацији бити усвојен приступ тестирања на синтетичким подацима, а могућности примене методе на посматрачке податке ће бити дискутоване у поглављу 6.

Под синтетичким подацима се подразумевају криве сјаја израчунате помоћу модела двојног система и модела звезданих осцилација описаних у поглављима 3 и 4. Ове вештачке криве сјаја су конструисане са намером да се представи репрезентативан узорак геометријских конфигурација двојног система и фреквентних одлика осцилација, али не у статистички ригорозном смислу. Објективна покривеност читавог опсега геометријских и фреквентних параметара погодна за статистичку анализу могло би се постићи генерисањем мреже модела, или насумичним одабиром параметара, као што су урадили Latković & Bíró (2008). Уместо тога, у оквиру овог рада усвојен је метод тестирања који су представили Bíró & Nuspl (2011), а који се састоји од одабира групе система и осцилација, те поређења улазних параметара са коначним решењима која се добијају као резултат предложене методе.

У том смислу су тестирани системи са сасвим одвојеним компонентама, у којима је пулсирајућа звезда приближно сферног облика, а резултати су, где је било могуће, упоређени са резултатима које су добили Bíró & Nuspl (2011) употребом програма *Pulzem* и технике мапирања помрачењем. Затим су тестирани системи у којима је пулсирајућа компонента изобличена услед ротације и плимских ефеката; у овом случају се претпоставља да се оса пулсација не поклапа са осом ротације, већ са осом која пролази кроз центре компонената, јер је то доминантна оса симетрије.

Да би се синтетички подаци и процес њихове обраде пре фитовања учине што сличнијим обради правих посматрања, на синтетичке криве сјаја се додаје вештачки шум, а уместо тачних фреквенција, амплитуда и фаза употребљених за њихово генерисање, у процесу идентификације се користе параметри осцилација измерени из криве сјаја помоћу програма *Period04* (Lenz & Breger, 2005), који је стандардна алатка у астросеизмолошким истраживањима.

Успех, односно неуспех идентификације мода своди се на поређење улазних и резултујућих квантних бројева (ℓ, m) свих моделираних осцилација, те њихових фреквенција, амплитуда и фаза. У том смислу су резултати ове демонстрације позитивни и охрабрујући, а биће приказани и дискутовани након детаљног објашњења поступка, које следи у наставку.

5.1. Узорак

За тестирање идентификације мода на приближно сферним, односно изобличеним звездама одабрана су по два система – један где је друга, помрачујућа компонента приближно сферног облика (одвојен, односно полу-одвојен систем са делимичним помрачењем пулсирајуће компоненте), и један где помрачујућа компонента попуњава свој Рошов овал (полу-одвојен систем, односно скоро контактни систем са потпуним помрачењем пулсирајуће компоненте) – са две различите инклинације. Дакле тестирана су укупно четири система, чији су геометријски параметри дати у табели 5.1.

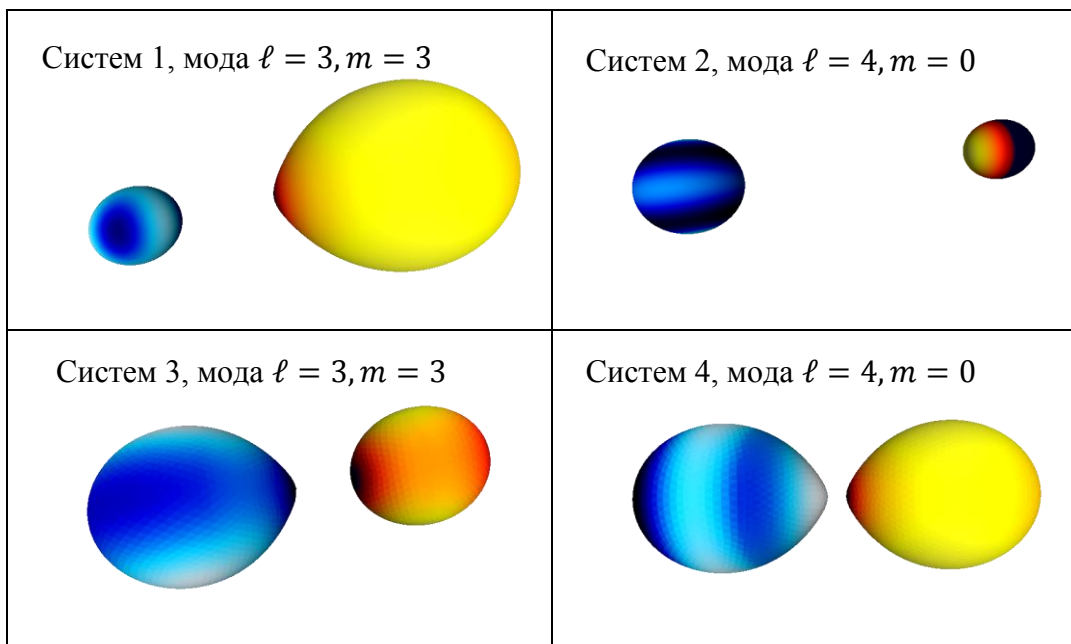
Табела 5.1: Геометријске конфигурације одабране за тестирање примене предложене методе на сферним звездама. R_1 и R_2 су поларни радијуси компонената у јединицама орбиталног растојања, i је орбитална инклинација у степенима, а F_1 је фактор попуњености пулсирајуће компоненте.

Узорак	R_1	R_2	i	F_1
Систем 1	0.153	0.352	79.4	0.429617
Систем 2	0.153	0.097	83.6	0.429617
Систем 3	0.352	0.265	80.7	0.988401
Систем 4	0.352	0.352	90.0	0.988401

Као мера изобличености компоненте усвојен је однос између њеног задњег и предњег радијуса:

$$W = \frac{R_b}{R_f}.$$

Задњи радијус, R_b , је удаљеност од центра звезде оног елемента површине који се налази на X оси, на страни звезде окренутој насупрот другој компоненти, са координатама $r = R_b, \theta = 90^\circ, \varphi = 180^\circ$ у сферном координатном систему описаном у поглављу 3. Предњи радијус, R_f , је удаљеност од центра звезде оног елемента површине који се налази на X оси, на страни звезде окренутој ка другој компоненти, са координатама $r = R_f, \theta = 90^\circ, \varphi = 0^\circ$. Како у оквиру Рошовог модела површина звезде никад није савршена сфера, предњи радијус је увек већи од задњег радијуса, али ће у добро одвојеним системима они бити приближно исти, одн. W ће бити приближно 1.



Слика 5.1: Приказ конфигурација одабраних за демонстрацију, са модама $\ell = 3, m = 3$ (системи 1 и 3), одн. $\ell = 4, m = 0$ (системи 2 и 4) моделираним на примарној (плавој) компоненти. Боје одражавају расподелу температуре, са одвојеним скалама за сваку звезду. На примеру система 2 је јасно уочљив и ефекат рефлексије на секундарној компоненти.

Овај однос мери не само одступање звезде од сферног, већ и од ротационо-симетричног облика, што је у овом случају значајније, јер се тражи критеријум када је оправдано моделирати осцилације око осе симетрије која се не поклапа са осом ротације. Понашање усвојене мере изобличености у зависности од релативне величине звезде приказано је на слици 5.2, са које се види да већ при одступању

задњег од предњег радијуса од два процента, одн. $W = 0.98$, звезда више не може да се сматра за осно-симетричну. За мање вредности, доминантна оса симетрије очигледно лежи на правцу који повезује центре компонената и не поклапа се са осом ротације. Стога се, у оквиру ове демонстрације, $W = 0.98$ усваја као критеријум за избор осе симетрије осцилација приликом моделирања.

Код свих система у табели 5.1, параметри су бирани тако да пулсирајућа компонента по физичким особинама наликује типичној звезди типа δ Sct (видети одељак 8.1.3), са температуром од 7500 К, средњим површинским гравитационим убрзањем од $\log g = 2.5$ и Сунчевом металичношћу. За секундарну компоненту произвољно је одабрана температура од 5000 К. Усвојене су типичне вредности за експонент гравитационог потамњења и фотометријског албеда, $\beta_1 = 0.25$ одн. $\beta_2 = 0.75$ и $B_1 = 1.0$ одн. $B_2 = 0.5$ (Lucy, 1967), (von Zeipel, 1924). Однос маса, орбитални период и растојање су јединични, а рачун излазног флукса је у свим примерима рађен за ефективну таласну дужину стандардног филтера Johnson V.

Параметри за систем 1 су дословце преузети из рада *Vígó & Nuspl (2011)*, ради поређења са њиховим моделом. Иако су у том раду звезде сферне (то је аналитички модел и не базира се на Рошовој геометрији), испоставило се да са задатим параметрима, систем 1 у оквиру Рошовог модела има значајно изобличену секундарну компоненту. То, међутим, није од суштинског значаја зато што је током помрачења ка посматрачу окренута задња страна секундара, и његова пројекција на посматрачево „небо“ не одступа значајно од кружног облика. Систем 2 има исту примарну, пулсирајућу компоненту као систем 1, али је секундарна компонента смањена да би се испитали ефекти делимичног помрачења на посматрачки потпис осцилација.

У системима 3 и 4 пулсирајућа компонента значајно одступа од сферног облика, тј. у великој мери попуњава Рошов овал и моделирање осцилација се врши у односу на осу симетрије која пролази кроз центре компонената уместо кроз осу ротације пулсирајуће звезде. Систем 3 има секундарну компоненту која је знатно мања од примарне, те је помрачење делимично; у систему 4 секундарна компонента је исте величине као примарна, а инклинација је постављена на тачно 90 степени како би се моделирало потпуно помрачење.

Овај узорак очигледно није потпун. За ригорозно тестирање понашања модела у зависности од геометријских и физичких особина двојног система било би потребно формирати вишедимензиону мрежу примера у којима би се одабрани параметри варирали унутар великог опсега. Друга могућност била би формирање узорка на основу великог броја модела са насумично одабраним параметрима, као што је урађено приликом упоредног тестирања методе мапирања помрачењем и методе директног фитовања за сферне звезде (Latković & Bíró, 2008). Међутим, с обзиром на то да је за обраду појединачних случајева потребно доста рачунарског времена (реда величине једног дана за обраду синтетичке криве сјаја са једном модом осцилације на обичном канцеларијском, једно-процесорском рачунару), овакво ригорозно тестирање је било изван могућности у оквиру доступног времена и опреме, па сам се, пратећи поступак примењен у Bíró & Nuspl (2011), определила за демонстрацију на описаним репрезентативним примерима.

У сваком од четири система у табели 5.1, осцилације су моделиране на примарној компоненти (оној која је помрачена у дубљем минимуму). Тестиране су све појединачне моде степена $\ell \leq 4$, као и по један случај са три истовремено присутне моде. Параметри за све моде преузети су из рада Bíró & Nuspl (2011) ради лакшег поређења и приказани су у табели 5.2, при чему су амплитуде пертурбација температуре биране тако да се амплитуде осцилација у излазном флуксу нађу у опсегу између 0.0005 и 0.002, а на основу калибрације модела (о којој ће бити речи у следећем одељку).

Табела 5.2: Параметри моделираних мода осцилација. Фреквенције су задате у јединицама орбиталне фреквенције, $\nu_{ORB} = 1/P_{ORB}$, а амплитуде у јединицама излазног флукса.

Моде	ℓ	m	ν [ν_{ORB}]	A [F]	Ψ [$^\circ$]
Појединачне	0 – 4	$-\ell \leq m \leq \ell$	63.1234	0.0005 – 0.002	-180 – 180
Вишеструке					
Мода 1	1	0	49.4322	0.0045	120.65
Мода 2	3	1	63.9534	0.0035	60.99
Мода 3	2	2	95.2067	0.0031	26.13

5.2. Поступак

Да подсетим, под идентификацијом мода се подразумева додељивање сферног хармоника степена ℓ и реда m (једначина 1.25) свакој осцилацији детектованој у посматрањима. Током помрачења пулсирајуће звезде у еклипсно двојном систему, долази до модулације фреквенције, амплитуде и фазе, јединствене за сваку моду. Другим речима, из облика модулације током помрачења се може закључивати о томе који сферни хармоник одговара којој уоченој осцилацији.

У оквиру предложене методе, ово се постиже путем формирања мреже модела у којима су орбитални параметри двојног система и физички параметри компонената фиксирани и у којима се варирају само параметри осцилација. Фреквенције, амплитуде и фазе се могу измерити из посматране криве сјаја независним методама анализе сигнала (нпр. Фуријеовом анализом), тако да као слободни параметри остају квантни бројеви ℓ и m . Ово су, међутим, целобројне величине па се не могу фитовати стандардним методама минимизације. Стога се за сваку моду морају испробати сви могући сферни хармоници степена $\ell \leq 4$. Моде већег степена се не разматрају јер се не могу детектовати у фотометријским посматрањима услед ефекта делимичног поништавања (једначина 1.28). У случају када је присутно више мода, мрежа пробних модела је јако велика (реда величине 10000 модела за три детектоване моде), пошто се за сваку моду испитују сви могући сферни хармоници.

За сваки пробни модел израчуна се крива сјаја, која се пореди са посматрањима и затим се издвоји модел који даје најбоље поклапање. Посматраним осцилацијама се онда придружују сферни хармоници из оптималног модела, чиме је поступак идентификације мода завршен.

Процес тестирања предложене методе прати процедуру изложену у пионирском раду о идентификацији мода применом технике мапирања помоћу помрачења (Bíró & Nuspl, 2011). Уместо посматрачког материјала, за сврху тестирања користе се синтетичке криве сјаја добијене из модела са једном или три моде осцилација, описаних у претходном одељку. Успешност методе се процењује

поређењем улазних параметара за ове моделе и крајњих резултата идентификације мода.

5.2.1. Синтеза „посматране“ криве сјаја

Синтеза кривих сјаја које ће у наставку играти улогу посматрачког материјала почиње уносом орбиталних параметара двојног система и физичких параметара компонената описаних у одељку 5.1.

За сваки систем из табеле 5.1 генерише се 25 кривих сјаја: 24 са по једном модом степена $\ell \leq 4$ и једна са три моде пулсирања, са параметрима осциловања датим у табели 5.2. Криве сјаја са појединачним модама генеришу се у опсегу који покрива пет узастопних помрачења, а криве сјаја са три моде у опсегу који покрива десет узастопних помрачења, како би се покрили периоди интерференције блиских фреквенција.

Случајне грешке неизбежно присутне у свим фотометријским мерењима у сврху ове демонстрације се симулирају додавањем вештачког Гаусовог шума на генерисане криве сјаја. Ниво шума се задаје параметром који представља детектовани однос сигнала према шуму:

5.2

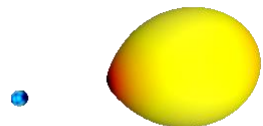
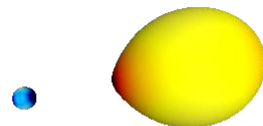
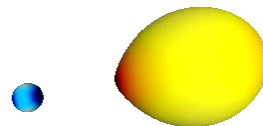
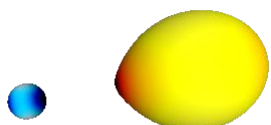
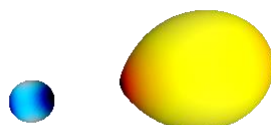
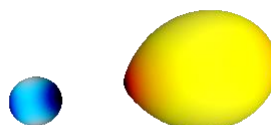
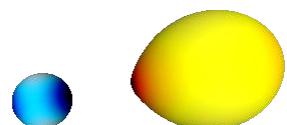
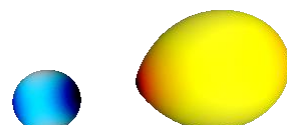
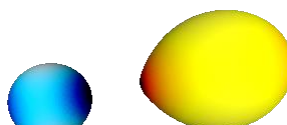
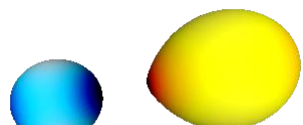
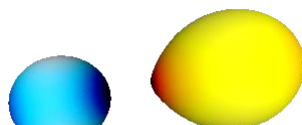
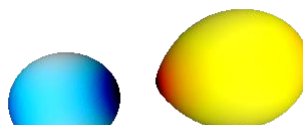
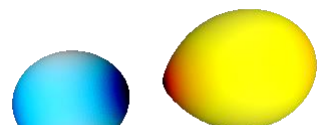
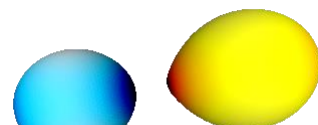
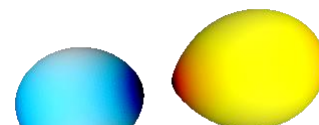
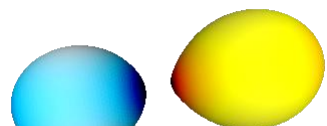
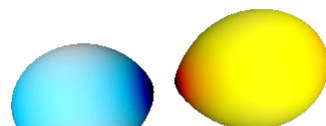
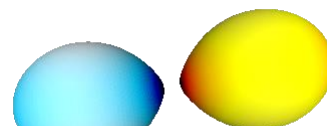
$$d = \frac{S}{N},$$

где се за сигнал узима вредност рачунатог флукса у датом временском тренутку, а за шум се узима вредност од 3σ , усвојена из рада *Bíró & Nuspl (2011)*, где је σ полу-ширина Гаусове расподеле. Дакле,

5.3

$$\sigma = \frac{S}{3d},$$

при чему је d параметар који се задаје, а σ се рачуна и затим користи за генерисање шума.

$R_p = 0.05, W = 0.999986$ 	$R_p = 0.07, W = 0.999951$ 	$R_p = 0.09, W = 0.999865$ 
$R_p = 0.11, W = 0.999701$ 	$R_p = 0.13, W = 0.999403$ 	$R_p = 0.15, W = 0.998910$ 
$R_p = 0.17, W = 0.998148$ 	$R_p = 0.19, W = 0.997006$ 	$R_p = 0.21, W = 0.995309$ 
$R_p = 0.23, W = 0.992838$ 	$R_p = 0.25, W = 0.989232$ 	$R_p = 0.27, W = 0.983912$ 
$R_p = 0.30, W = 0.970243$ 	$R_p = 0.31, W = 0.963036$ 	$R_p = 0.32, W = 0.953520$ 
$R_p = 0.33, W = 0.940397$ 	$R_p = 0.34, W = 0.920856$ 	$R_p = 0.35, W = 0.885927$ 

Слика 5.2: Промена облика и смањивање односа задњег и предњег радијуса примарне (плаве) звезде са порастом поларног радијуса R_p , за фиксиран однос маса. Величине су, као и другде, дате у јединицама орбиталног растојања.

Употребљене вредности односа детектованог сигнала према шуму се крећу од 100 до 5000 и биране су на основу изгледа криве сјаја (видети, нпр. слике 5.7 и 5.17). Поређења ради, посматрања са сателита *Kepler* имају детектовани однос сигнала према шуму од 100 до 10000 за звезде између 15 и 11 магнитуде (KSC, 2009).

5.2.2. Одузимање орбиталног решења

Уобичајен поступак у анализи двојних система са пулсирајућом компонентом је да се кратко-периодичне варијације које потичу од осцилација издвоје одузимањем тзв. орбиталног решења од посматране криве сјаја. До орбиталног решења се долази тако што се кратко-периодичне варијације игноришу, одн. сматрају за шум и крива сјаја се анализира на исти начин као код обичних двојних система – решавањем инверзног проблема, тј. налажењем скупа параметара који оптимално описују промене сјаја услед орбиталног кретања.

После одузимања орбиталног решења од криве сјаја, добијају се резидуи у којима, идеално, преостају само варијације услед осцилација, и који се даље обрађују техникама за анализу сигнала (описаним у одељку 5.2.3). У случајевима када су амплитуде осцилација упоредиве са амплитудом орбиталне криве сјаја, овај поступак се врши итеративно: од почетне криве сјаја се одузме прелиминарно орбитално решење, резидуи се употребе за налажење прелиминарног осцилаторног решења, које се онда одузме од почетне криве сјаја да би се у тако „очишћеним“ подацима тражило тачније орбитално, а затим и тачније осцилаторно решење (Debosscher, et al., 2013, у припреми). Пошто у оквиру ове демонстрације није било таквих примера (у свим случајевима су амплитуде осцилација мале у односу на амплитуде помрачења), усвојен је једноставан приступ са простим одузимањем.

Криве сјаја генерисане у претходном кораку третиране су као посматрачки материјал, при чему се сматрало да су следећи орбитални и физички параметри познати из независних мерења:

- Однос маса и велика полуоса орбите (пошто су то величине које се у пракси добијају из спектроскопских истраживања)
- Температура примарне компоненте (на основу спектралне класификације)
- Период и тренутак примарног минимума (који се у пракси обично добијају из независних фотометријских истраживања)

У оквиру демонстрације, ови параметри преузети су директно из модела употребљеног за генерисање „посматране“ криве сјаја и третирани су као тачни. Орбитално решење сам онда тражила фитовањем следећих параметара:

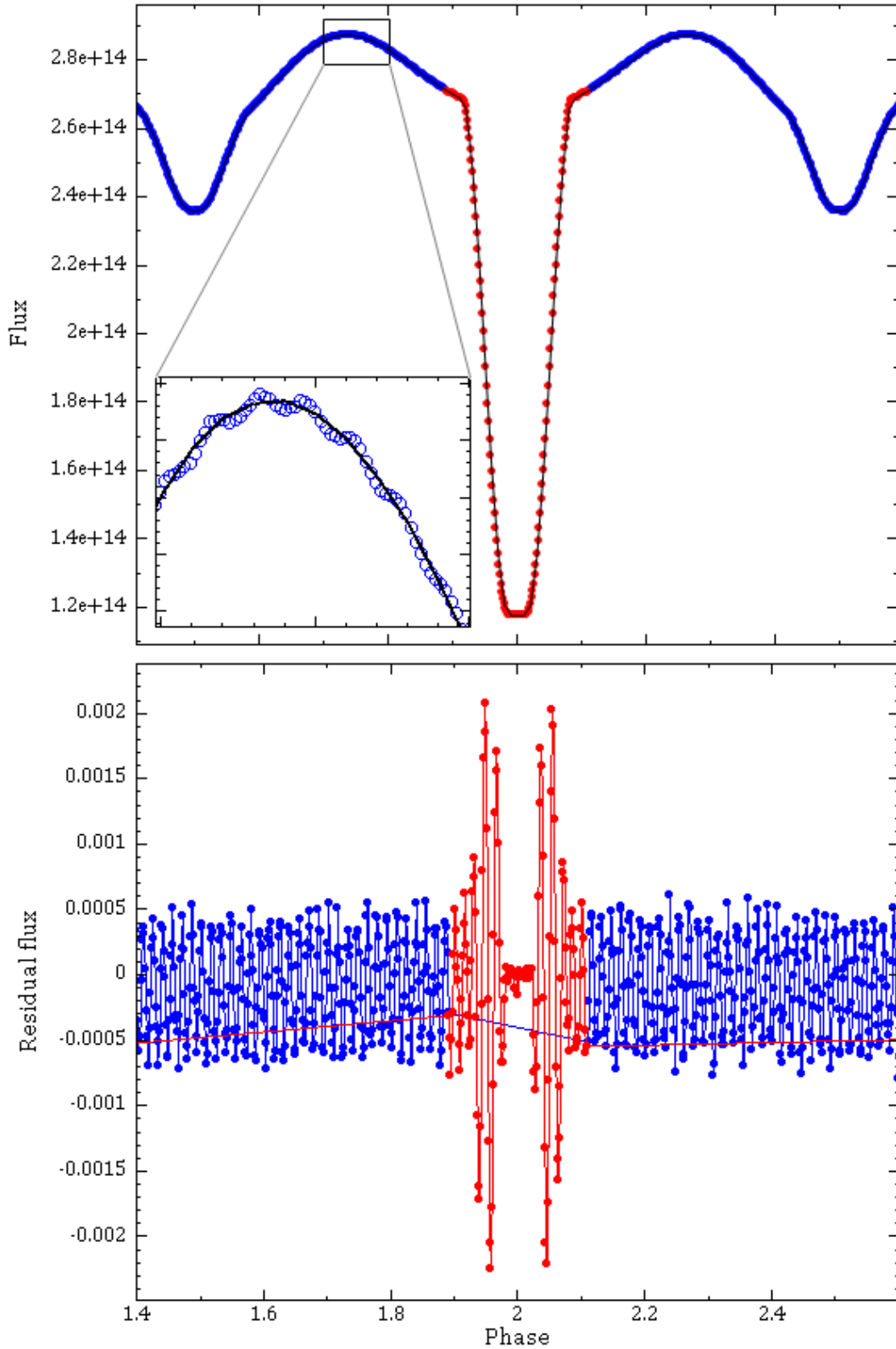
- Орбитална инклинација
- Температура секундарне компоненте
- Радијуси примарне и секундарне компоненте

Сви остали физички параметри, као што су експоненти гравитационог потамњења, металичност, алbedo итд., су били фиксирани на вредности наведене у одељку 5.1.

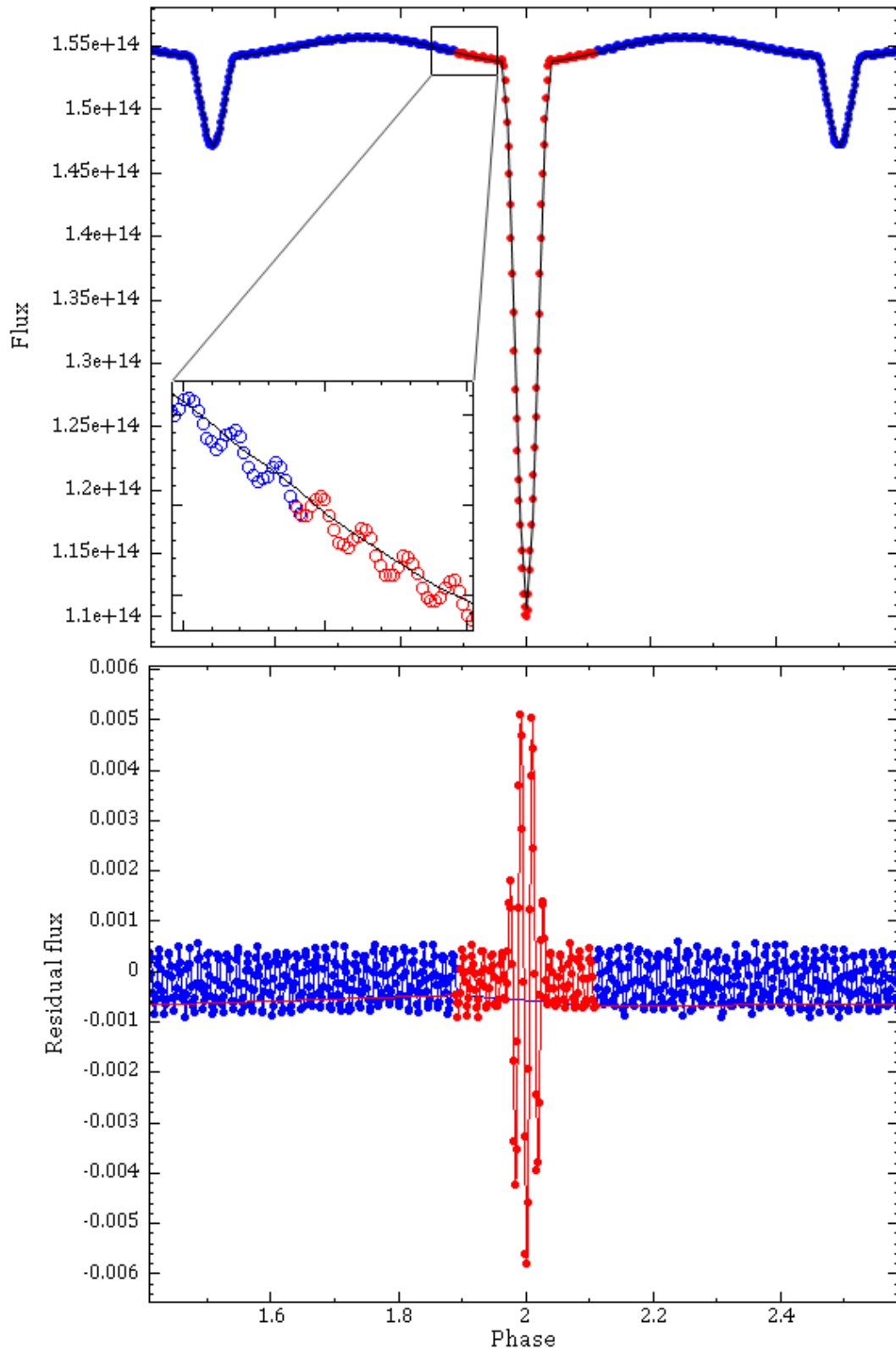
Фитовање је у овом и свим следећим примерима извршено помоћу алгоритма Симплекс (Nelder & Mead, 1965), који је имплементиран као метода решавања инверзног проблема у оквиру програма *Infinity* (Џеки, 2013, у припреми).

Табела 5.3: Параметри добијени из „посматране“ криве сјаја решавањем инверзног проблема.

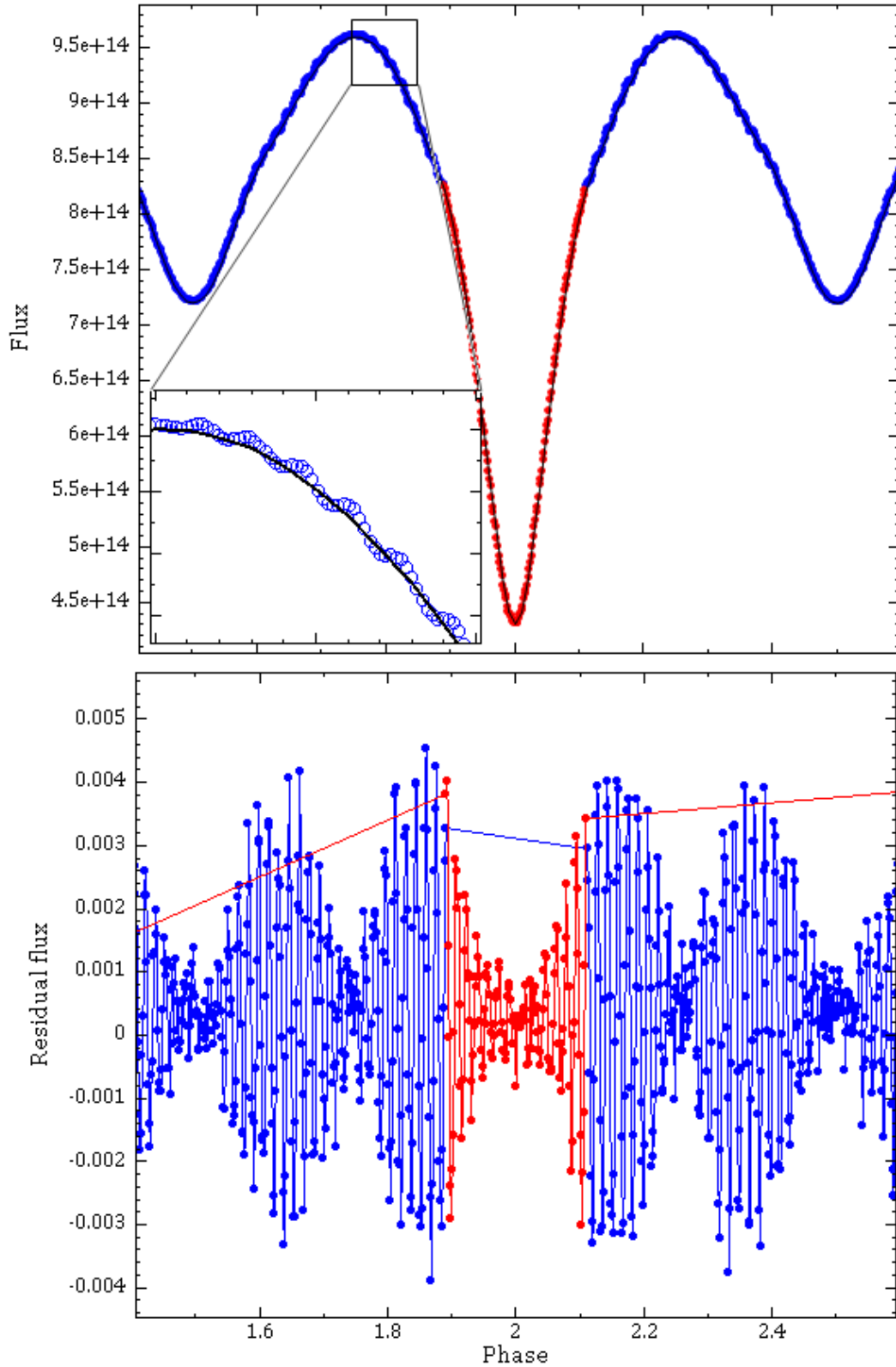
	i	T_2	R_1	R_2
Систем 1	80.2	5100	0.153	0.349
Систем 2	82.8	5000	0.154	0.103
Систем 3	81.1	5100	0.348	0.261
Систем 4	90.0	4900	0.352	0.353



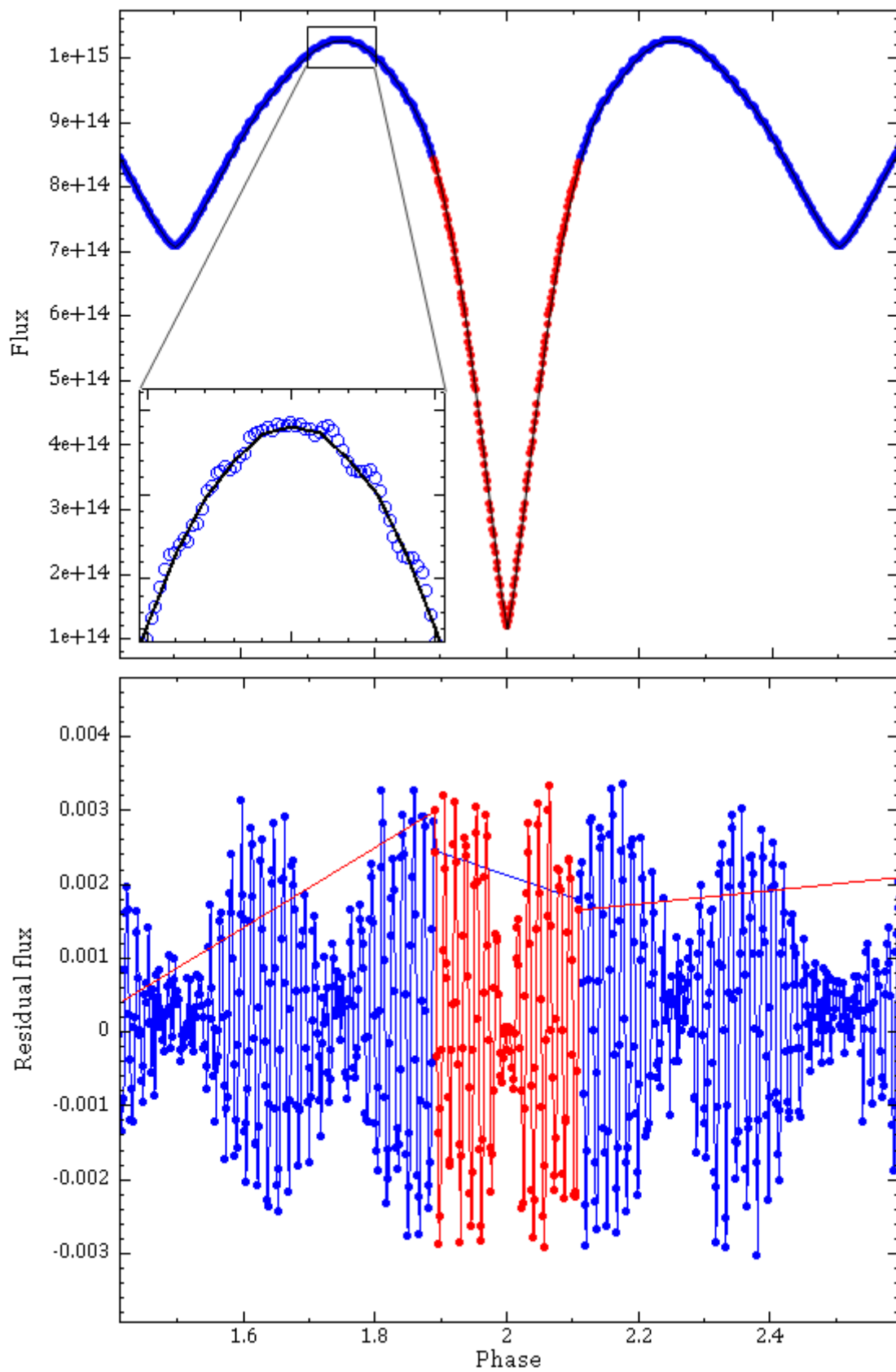
Слика 5.3: Горе – синтетичка крива сјаја за систем 1 са модом $\ell = 3, m = 2$ (обојене тачке) и орбитално решење (линија). Осцилације су малих амплитуда па су увећане у исечку. Доле – резидуи после одузимања орбиталног решења. Црвене тачке (овде и на сликама које следе) означавају временски интервал током помрачења примарне компоненте, а плаве, податке погодне за анализу сигнала. Однос сигнала према је $S/N = 5000$. У случају ове моде, модулација амплитуде током помрачења је очигледна.



Слика 5.4: Исто као на слици 5.3, за систем 2. Однос сигнала према је $S/N = 5000$. У овом примеру помрачење није потпуно, што доводи до изразитог повећања амплитуде јер се нарушава геометријска симетрија која изазива ефекат делимичног поништавања.



Слика 5.5: Исто као на слици 5.3, за систем 3. Континуална промена сјаја током читавог периода је последица изобличености примарне компоненте. Однос сигнала према је $S/N = 1000$. У резидуној кривој сјаја се уочава интерференција 7 мода из мултиплета $\ell = 3$ (за $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$), иако је, као и на претходним сликама, у модел укључена само једна мода, $\ell = 3, m = 2$. Ово је последица моделирања осцилација око осе симетрије која се не поклапа са осом ротације (видети одељак 4.5).



Слика 5.6: Исто као на слици 5.5, за систем 4. Однос сигнала према је $S/N = 1000$.

Орбитална решења добијена овим поступком приказана су у табели 5.3 и на сликама 5.3, 5.4, 5.5 и 5.6. Као што се може видети, крајњи параметри се врло мало разликују од почетних. Ово је на први поглед оптимистично, али није у супротности са резултатима који се могу очекивати од анализе најквалитетнијих посматрачких података. С друге стране, анализа коју су извршили Víró & Nuspl (2011) приликом демонстрације методе идентификације мода мапирањем помоћу помрачења, показује да мала одступања параметара двојног система од тачних вредности не утичу значајно на успешност методе.

За успех анализе осцилација битно је да се постигне добро поклапање са посматрањима. У супротном, након одузимања орбиталног решења у резидуима ће се појавити периодичне структуре (нпр. региони доброг и лошег поклапања са посматрањима произвешће у резидуима регионе малог и великог растурања око средње вредности), са периодом који је или једнак орбиталном периоду, или је неки његов умножак. Такве структуре се у даљој анализи детектују као сигнали са орбиталном фреквенцијом и/или њеним хармоницима. Ово уноси додатну несигурност у резултате анализе сигнала и представља проблем приликом интерпретације зато што се, у принципу, не може искључити могућност да су заиста побуђене звездане осцилације на тим фреквенцијама и то управо услед утицаја двојности на пулсирајућу компоненту. Један пример овакве ситуације дат је у поглављу 6. Међутим, у оквиру ове демонстрације нису се појавили, те нису били ни разматрани, проблеми ове врсте.

Као што је наговештено раније, систем 1 је моделиран по узору на један од примера које су обрадили Víró & Nuspl (2011), ради поређења и верификације. У том смислу је први корак било поређење синтетичких кривих сјаја, које је дато на слици 5.7. Са овог упоредног приказа се види да, за сферну пулсирајућу компоненту, модели *Pulzem* и *Infinity* дају приближно исте резултате на основу истих улазних параметара, што потврђује да је предложени модел звезданих осцилација исправан. Разлике које се могу уочити потичу од: 1) другачије расподеле површинског сјаја, који је у програму *Infinity* одређен ефективном температуром, гравитационим потамњењем, потамњењем ка рубу и ефектом рефлексије, док се у програму *Pulzem* обрачунава само ефекат потамњења ка рубу; и од 2) другачије геометрије помрачења, с обзиром на то да се у програму

Pulz могу моделирати само строго сферне звезде, а на основу параметара из табеле 5.1, секундарна компонента је у овом случају значајно изобличена.

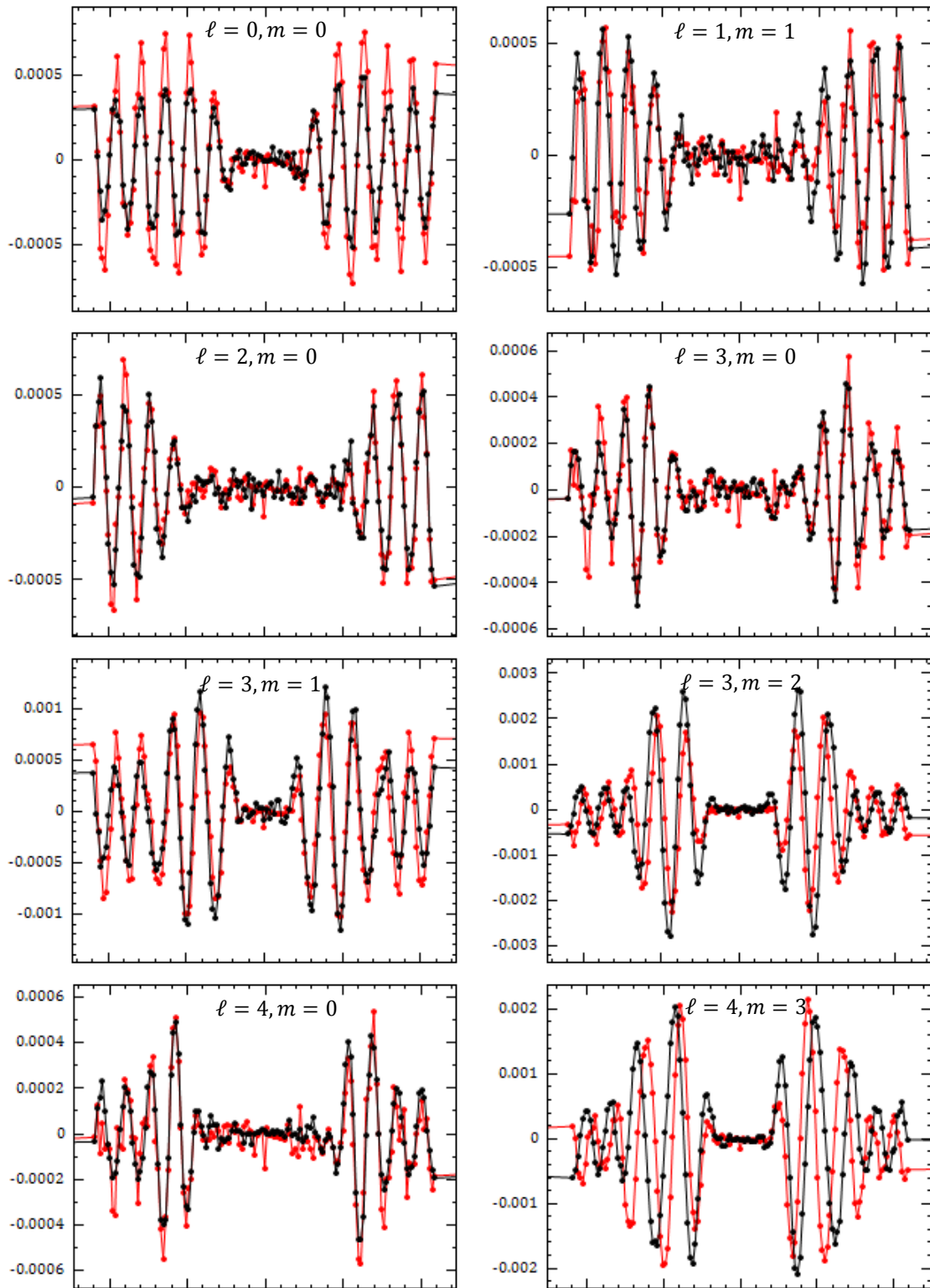
На слици 5.7 се јасно види како модулација амплитуде осцилација током помрачења зависи од геометрије мода. Код неких мода амплитуда се смањује заједно са смањивањем видљиве површине примарне компоненте; код неких се повећава зато што помрачење нарушава симетрију расподеле сјаја која доводи до ефекта делимичног поништавања. Ово је одређено квантним бројевима ℓ и m придружених сферних хармоника и управо је ова зависност оно што омогућава идентификацију мода предложеним поступком.

5.2.3. Анализа сигнала

Анализа резидуа у потрази за сигнаlima периодичне променљивости прати стандардни, у астросеизмолошким истраживањима опште-прихваћени поступак итеративног фитовања, а урађена је помоћу програма *Period04* (Lenz & Breger, 2005). Процедура је следећа:

- 1) Фуријеовом анализом се добије периодограм података;
- 2) Идентификује се сигнал са највећом амплитудом;
- 3) Од података се одузме синусна функција облика $A_1 \sin(\omega_1 t - \phi_1)$, где је A_1 амплитуда, ω_1 кружна фреквенција, а ϕ_1 фаза сигнала из корака 2;
- 4) Кораци од 1 до 3 се понове са овако „очишћеним“ подацима, после чега се одузима нова синусна функција $A_2 \sin(\omega_2 t - \phi_2)$, која одговара следећем најјачем сигналу и тако се наставља док год се могу уочити сигнали изнад нивоа шума.

Ова метода се зове итеративно избељивање података (*prewhitening*, видети нпр. Aerts, et al. (2010)) и као резултат се добија списак сигнала са амплитудама $A_1 \dots A_N$, фреквенцијама $\nu_1 \dots \nu_N$ (где је $\nu_i = \omega_i/2\pi$) и фазама $\phi_1 \dots \phi_N$. Идеално, суперпозиција N синусоидних функција са овим параметрима, дата изразом:



Слика 5.7: Поређење резидуних синтетичких кривих сјаја из програма *Pulzem* (Bíró & Nuspl, 2011), приказаних црном бојом, и из програма *Infinity*, приказаних црвеном бојом, за неколико мода из опсега $\ell \leq 4$, моделираних у систему 1, са различитим амплитудама пертурбације температуре. На X оси је орбитална фаза у опсегу од -0.15 до 0.15, а на Y оси је резидуни излазни флуks.

$$F(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t - \phi_i)$$

тачно фитује податке и може се рећи да су откривени сви сигнали. У реалној примени, ретко је могуће сасвим „избелити“ посматрања, те се итеративно фитовање прекида када се уочи да додавање нових синусоида више не поправља фит.

Овде напомињем да се за налажење осцилаторног решења не користи читаву криву сјаја, већ само делови изван помрачења. Ово је неопходно зато што унутар помрачења долази до значајне модулације фреквенције, амплитуде и фазе осцилација, која негативно утиче на тачно одређивање ових параметара. Насупрот овом поступку, приликом идентификације мода користе се управо делови криве сјаја *унутар* помрачења, зато што је „потпис“ различитих мода изван помрачења тешко уочљив. Више о томе биће речено приликом приказа конкретних примера.

5.2.4. Калибрација фреквенције, амплитуде и фазе

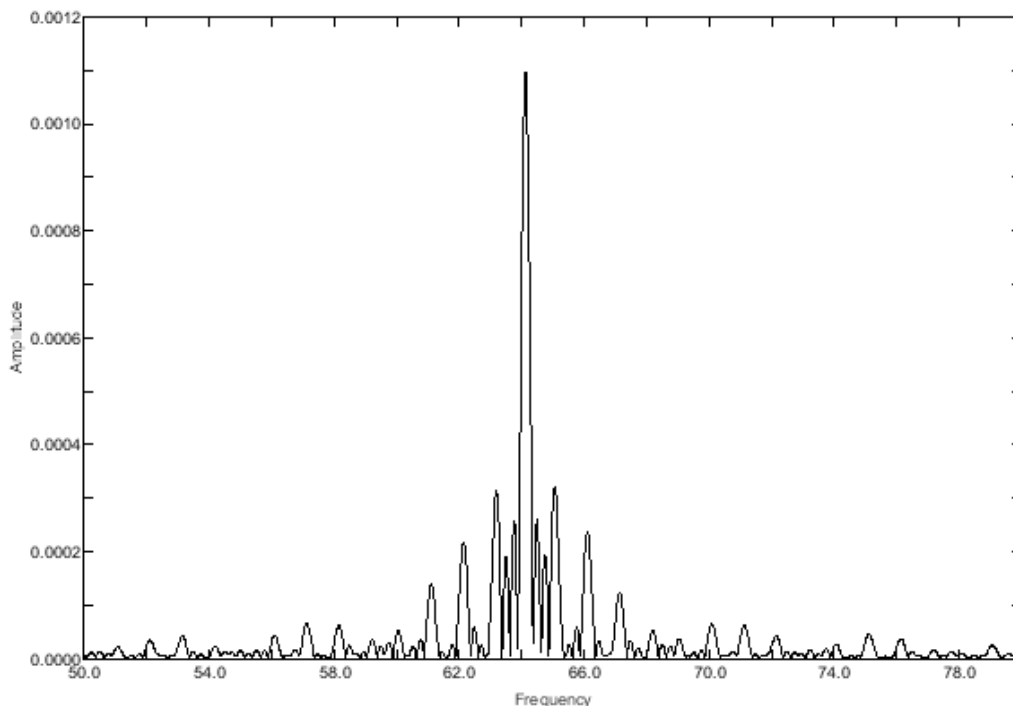
Под калибрацијом се овде подразумева налажење функционалне везе између параметара сигнала који се добијају као излаз из претходног корака (тј. излаз из програма *Period04*) и улазних параметара за предложени модел осцилација у двојном систему (тј. улаз за програм *Infinity*).

Када је у питању фреквенција, функционална зависност је очигледна:

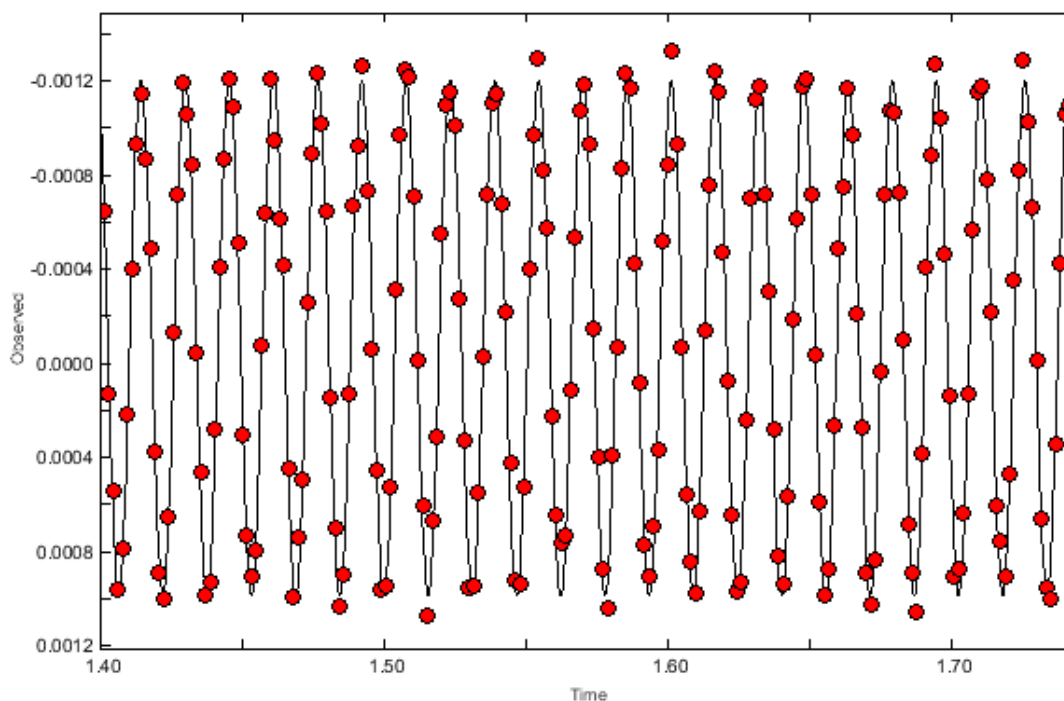
$$\nu_{Infinity} = \nu_{Period04} P_{ORB}$$

С обзиром да је у оквиру ове демонстрације орбитални период $P_{ORB} = 1$, имамо директну једнакост: $\nu_{Infinity} = \nu_{Period04}$.

Када су у питању амплитуда и фаза, веза између излаза из програма *Period04* и улаза за програм *Infinity* није тривијална.

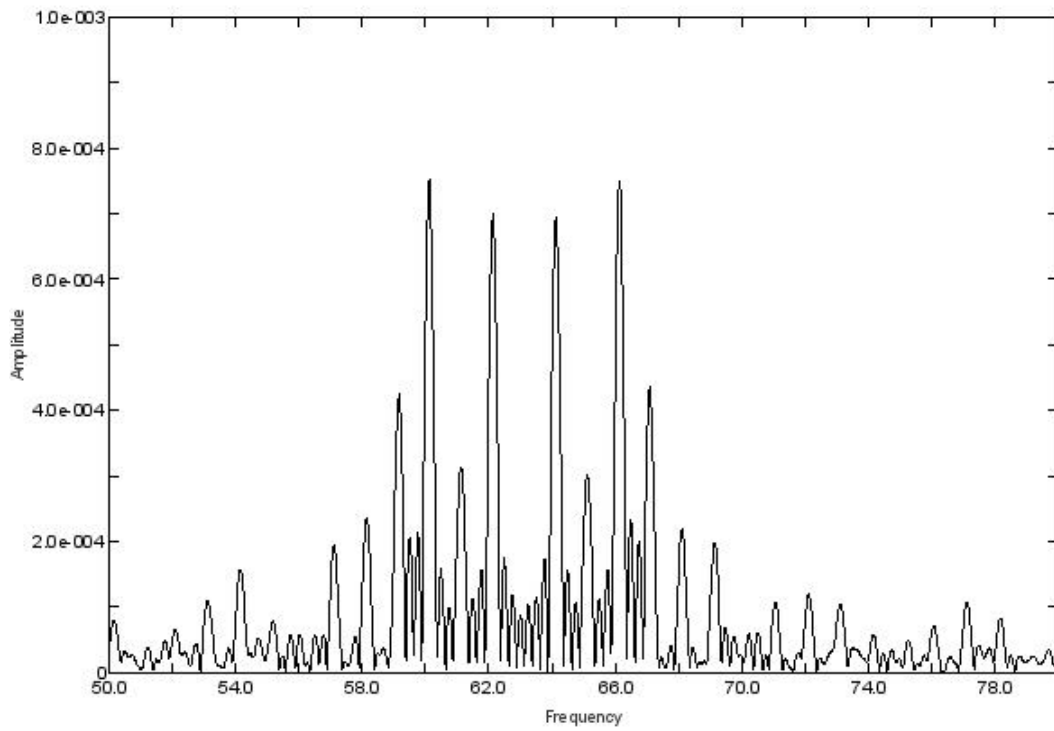


Слика 5.8: Периодограм резидуа после одузимања орбиталног решења за систем 2 и моду $\ell = 3, m = 1$. Централна фреквенција је 64.123124 (табела 5.6), а сигнали који се уочавају са стране су алијаси¹ и хармоници орбиталног периода.

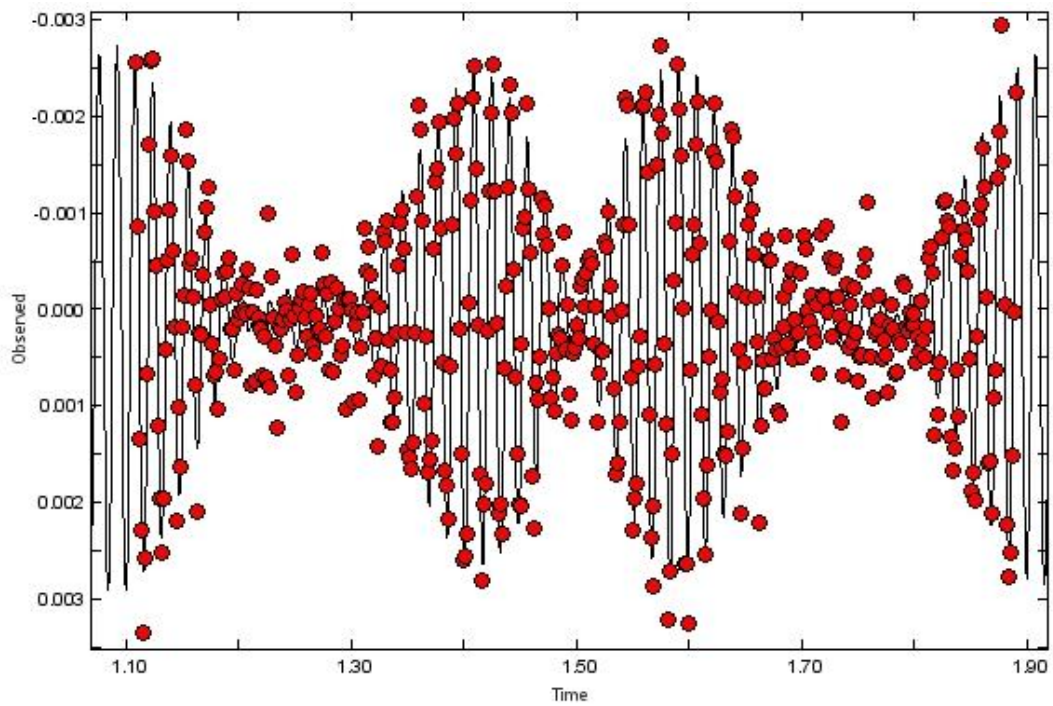


Слика 5.9: Резидуи после одузимања орбиталног решења (црвене тачке) и синусна функција као у једначини 5.4, са фреквенцијом од 64.123124, која одговара најјачем сигналу на слици 5.8.

¹ Локални максимуми у периодограму који не одговарају фреквенцијама детектованих сигнала и јављају се услед присуства шума, ограниченог интервала мерења сигнала и/или правилних прекида у посматрањима (тзв. „дневни алијаси“ се уочавају у посматрањима која се понављају из ноћи у ноћ. Видети поглавље 5 у Aerts, et al. (2010).



Слика 5.10: Исто као на слици 5.8, за систем 4. Једна мода моделирана око осе симетрије која пролази кроз центре компонента детектује се као мултиплет.

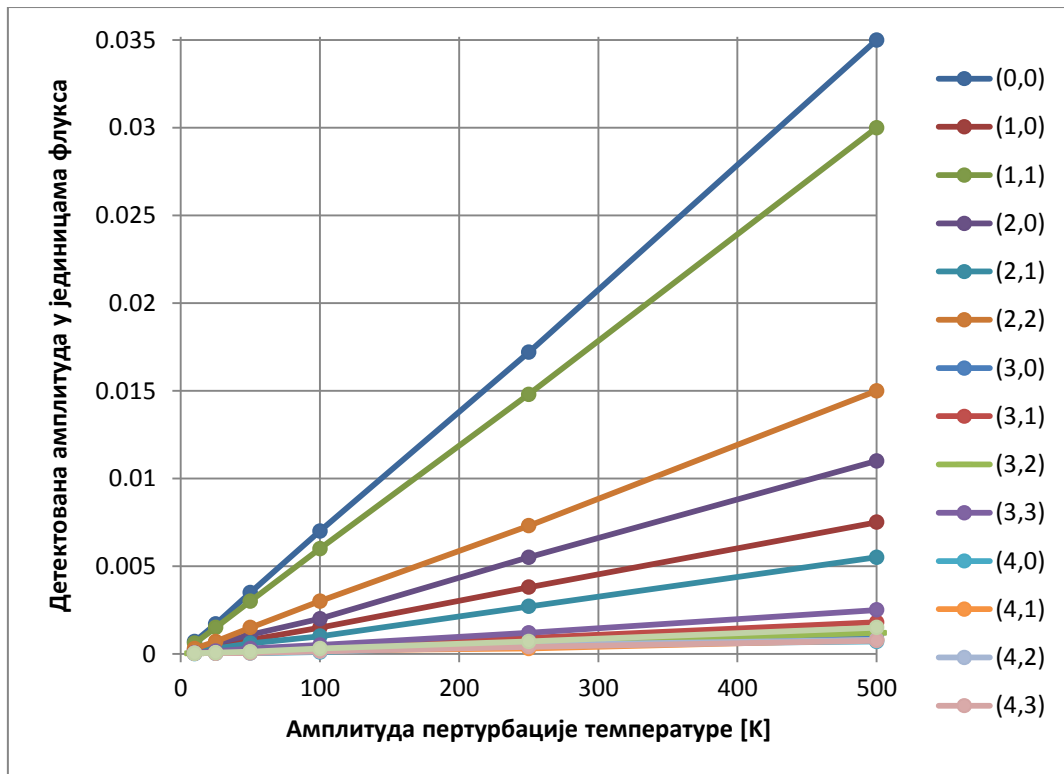


Слика 5.11: Исто као на слици 5.9, за систем 4. Релативно добар фит се постиже са седам синусних функција, што је за очекивати на основу једначине 4.4.

Прво, улазна амплитуда за програм *Infinity* се задаје у физичким јединицама – Келвинима, пошто представља амплитуду пертурбације температуре. С друге стране, излазна амплитуда из програма *Period04* је у произвољним јединицама, одн. у истим јединицама у којима су улазни подаци – у овом случају, у јединицама излазног флукса. Показало се да проналажење везе између задате амплитуде пертурбације температуре и амплитуде осцилација у резултујућем излазном флуксу није једноставно. Наиме, посматрана амплитуда се мења од моде до моде услед ефекта геометријског поништавања (једначина 1.28). Тако ће, за задату пертурбацију температуре, мода (1,0) имати и до два реда величине већу амплитуду него мода (4,4). Највећу посматрану амплитуду, за задату пертурбацију температуре, има, наравно, радијална мода, (0,0). У идеалном случају, код сферних звезда и у одсуству других појава које утичу на површинску расподелу температуре (као што су гравитационо потамњење, потамњење ка рубу и ефекат рефлексије), веза између пертурбације температуре, сферног хармоника, и посматране амплитуде могла би се изразити аналитички, преко интеграла по видљивој површини сличног једначини 1.28. Али чак и у таквим околностима, посматрана амплитуда би и даље зависила од ефективне температуре пулсирајуће компоненте, као и од односа луминозности компонената.

С обзиром на комплексност ове зависности, усвојен је емпиријски, одн. нумерички приступ калибрацији улазних и излазних амплитуда: за задату орбиталну геометрију, величине и ефективне температуре компонената, формира се мрежа модела у којима је присутна једна мода осциловања са растућим вредностима пертурбације температуре (у опсегу од 10 до 500 K) и са свим могућим квантним бројевима (ℓ, m) за $\ell \leq 4$. Затим се за сваки модел генерише крива сјаја, одузме се тачно орбитално решење и амплитуда осцилација се измери помоћу програма *Period04*. Тако се, за сваку моду, добије низ измерених амплитуда за одговарајуће пертурбације температуре.

Испоставило се да мерене амплитуде линеарно зависе од улазне пертурбације температуре, при чему се коефицијенти зависности мењају од моде до моде, као што је приказано на слици 5.12, на којој се виде калибрационе криве за систем 1.



Слика 5.12: Емпиријска калибрација амплитуда осцилација у „посматраној“ кривој сјаја након одузимања орбиталног решења за систем 1. Свака права одговара једној моди, као што је назначено у легенди. Калибрација је рађена само за моде са позитивним азимуталним редом m , зато што негативне вредности дају исте амплитуде.

Иако суштински једноставан, овакав поступак калибрације одузима јако много времена и било би пожељно да се аутоматизује. Ово ће свакако бити један од првих корака у будућем унапређивању предложене методе идентификације мода.

Што се тиче фазе, ситуација је оваква. Појединачне моде осциловања се моделирају према изразу:

5.6

$$T(\theta, \phi, t) = T_0(\theta, \phi) + \Re(A^T Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{-2\pi i(\nu t + \varphi)}),$$

где су A^T , ν и φ амплитуда perturbације температуре, фреквенција и почетна фаза моде, θ и ϕ су сферне координате посматране тачке на површини звезде, а t је време. Почетна фаза се дефинише као величина perturbације у тренутку $t = 0$, тј.:

5.7

$$T(\theta, \phi, 0) = T_0(\theta, \phi) + \Re(A^T Y_\ell^m(\theta, \phi) e^{-2\pi i\varphi}).$$

С друге стране, у програму *Period04*, сигнал се моделира према изразу:

5.8

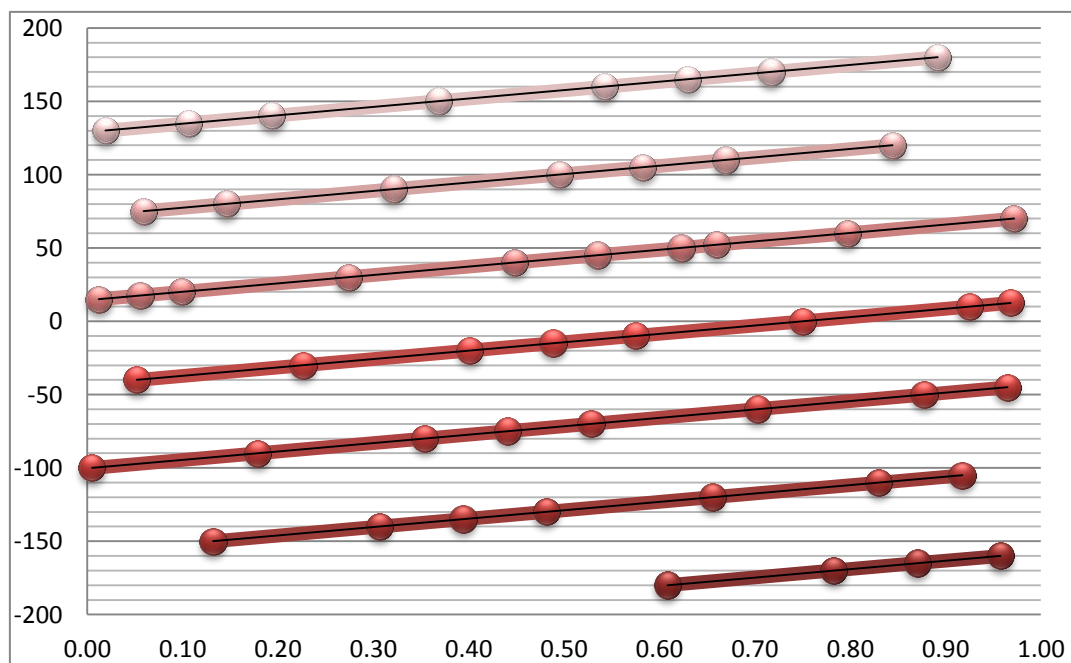
$$F(t) = A \sin(2\pi(vt + \varphi))$$

одн. за $t = 0$:

5.9

$$F(0) = A \sin(2\pi\varphi),$$

при чему је A амплитуда излазног флуksа. Иако се оперише са истим величинама, очигледно је да изрази 5.7 и 5.9 нису директно упоредиви. Извођење аналитичке везе између ових једначина подлеже истим тешкоћама као и када је била у питању амплитуда, те сам и за фазе усвојила сличну емпиријску калибрацију. Испоставило се да однос излазне фазе из програма *Period04* и улазне фазе за програм *Infinity* не зависи од параметара компонената и двојног система, као ни од сферног хармоника, те да такође задовољава линеаран закон. Калибрационе криве су приказане на слици 5.13; види се да ће једној вредности излазне фазе одговарати читав низ могућих улазних фаза које све производе еквивалентне криве сјаја.



Слика 5.13: Калибрација излазних фаза из програма *Period04* (на X оси) и улазних фаза за програм *Infinity* (на Y оси). Тачке представљају појединачне моделе употребљене за калибрацију.

Захваљујући овим калибрацијама, могућа је директна употреба резултата обраде сигнала помоћу програма *Period04* у даљој анализи. Међутим, важно је истаћи да се овај корак може у потпуности прескочити ако се фреквенција, амплитуда и фаза осцилација укључених у модел третирају као слободни параметри приликом даљег процеса идентификације. У примени на прави посматрачки материјал, описана калибрација амплитуде и фазе би се употребила само као начин да се дође до добрих почетних вредности ових параметара пре фитовања. Међутим, за потребе ове демонстрације (у којој је, подсећам, обрађено преко стотину синтетичких кривих сјаја, уз рачунање преко 50 000 пробних модела), калибрација је била од велике помоћи зато што је скратила неопходно рачунарско време за неколико редова величине.

5.2.5. Урачунавање ротационог цепања фреквенција

О ротационом цепању фреквенција код мода реда m различитог од нуле било је речи у Уводу (одељак 1.6, једначине 1.38 и 1.39). Овде је описан поступак укључивања овог ефекта у идентификацију мода.

Наиме, у системима 1 и 2, у којима је пулсирајућа компонента приближно сферног облика, а оса пулсација се поклапа са осом ротације, фреквенције измерене у резидуима након одузимања орбиталног решења од криве сјаја задовољавају релацију

5.10

$$\nu_m = \nu_0 + m,$$

где је ν_0 фреквенција измерена за моду реда $m = 0$, а ν_m , за моде реда $|m| > 0$. Ово је очекивано с обзиром на то да пулсирајућа звезда ротира синхроно, тј. угаона брзина ротације је једнака угаоној брзини орбиталног кретања, $\Omega = 2\pi/P_{ORB}$. Пошто је $P_{ORB} = 1$, релација 5.10 следи директно из једначине 1.38 за константу $C_{nl} = 0$. Предвидиво понашање феномена ротационог цепања фреквенција се у поступак идентификације уграђује тако што се у сваком пробном моделу фреквенција измерена из резидуалне криве сјаја модификује на основу реда m моде. Другим речима, уместо измерене фреквенције, пробни модел садржи фреквенцију померену за износ ротационог цепања:

$$\nu_{probno} = \nu_{mereno} - m_{probno},$$

што повећава осетљивост идентификације. Наиме, ако је сферни хармоник придружен посматраној осцилацији $(\ell, m) = (3, 2)$, а фреквенција употребљена за синтетисање посматране криве сјаја $\nu = 63.1234$, услед ротационог цепања у резидуној кривој сјаја биће измерена фреквенција $\nu_{mereno} \approx \nu + 2 = 65.1234$. Приликом прављења мреже пробних модела, са пробном модом $(3, 0)$ биће упарена фреквенција $\nu_{probno} = \nu_{mereno} - 0 = 65.1234$; са модом $(3, 1)$, фреквенција $\nu_{probno} = \nu_{mereno} - 1 = 64.1234$; и тек са модом $(3, 2)$, „исправна“ фреквенција, $\nu_{probno} = \nu_{mereno} - 2 = 63.1234$. Овако се, осим облика модуларације моде током помрачења, у идентификацију укључује и информација о ротационом цепању.

У системима 3 и 4, где је пулсирајућа компонента изобличена, а оса пулсација се поклапа са правцем који повезује центре компонената и нагнута је у односу на осу ротације за 90 степени, ситуација је другачија. Као што се може очекивати на основу једначине 4.4, једној моделираној моди степена ℓ и реда m у синтетичкој кривој сјаја одговара суперпозиција $N = 2\ell + 1$ детектованих мода степенова $\ell_k = \ell$ и редова $m_k = -\ell, \dots, \ell$ ($k = 1, \dots, N$), са амплитудама које су одређене матричним елементима Вигнерове матрице ротације (одељак 4.5). Другим речима, уместо једне моде, детектује се *мултиплет*. У овом случају се не може говорити о ротационом цепању фреквенција, зато што је оса ротације управна на осу симетрије осцилација. Шта више, геометријски, улогу коју код система 1 и 2 игра ред моде, m , код система 3 и 4 унеколико игра степен ℓ , као што се види са слике 5.15.

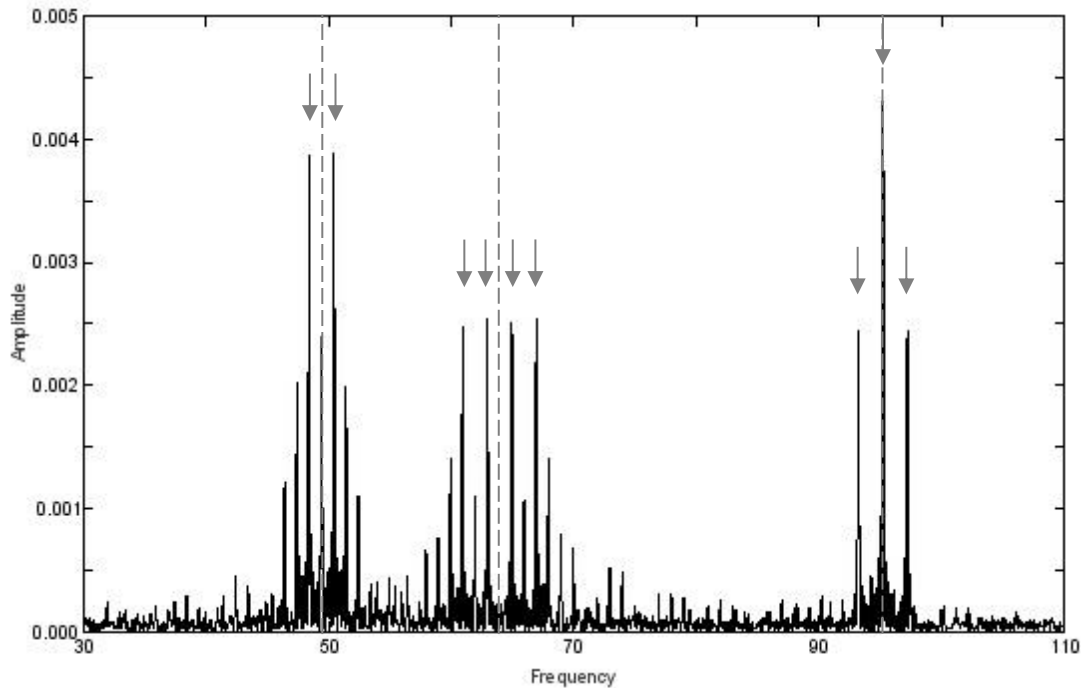
Приликом формирања мреже модела за идентификацију мода у системима 3 и 4 подразумева се да је изобличеност пулсирајуће компоненте, евидентна како из облика орбиталне криве сјаја, тако и из физичких параметара добијених у оквиру орбиталног решења, довољно оправдање да се у пробним моделима претпостави поклапање осе пулсација са правцем који повезује центре компонената, уместо са осом ротације. Дакле, иако се у резидуима детектује низ сигнала, у идентификацију је уграђена претпоставка да се они групишу око централних фрек-

венција које одговарају појединачним модама осциловања, симетричним око ове, алтернативне осе, а не низу независних мода симетричних око осе ротације. То је разлог зашто се и код система 3 и 4 после анализе сигнала бира *једна* фреквенција (односно амплитуда и фаза) за пробне моделе. Пример ове ситуације приказан је на слици 5.14.

Усвојила сам следећа правила за одређивање фреквенција, амплитуда и фаза осцилација за формирање мреже пробних модела:

- За „значајне“ се сматрају сви сигнали са амплитудама истог реда величине као доминантни сигнал. Критеријум који се обично користи у астросеизмолошким истраживањима је да амплитуда сигнала буде бар четири пута већа од локалног нивоа шума (Aerts, et al., 2010). Овде то није било погодно јер се унапред зна да се ради о мултиплетима, те да се тражи нека врста средњег сигнала. Мултиплет се лако може препознати као група еквидистантних сигнала.
- Фреквенција за пробне моделе се рачуна као медијана фреквенције свих „значајних“ сигнала, пошто нема јасног оправдања за увођење ротационог цепања по степену ℓ . Искуство је показало да у већини случајева медијана одговара „истинској“ фреквенцији, али не увек, при чему одступања нису предвидива као код система 1 и 2. Као што ће се видети у одељку 5.4, ово је довело до неуспеха у идентификацији појединих мода.
- Амплитуда и фаза за пробне моделе се рачунају као средње вредности свих „значајних“ сигнала – отуд потреба да се у обзир узму само сигнали упоредивих амплитуда.

Овакав поступак је дао задовољавајуће резултате у анализи синтетичких података, али би се могло показати да неће бити погодан за права посматрања. Алтернативно би се централна фреквенција мултиплета могла израчунати фитовањем Гаусове криве кроз измерене сигнале, што би такође обезбедило и меру грешке. Амплитуда би тада одговарала висини оптималне Гаусове криве, а фаза би могла бити слободан параметар приликом фитовања пробних модела на посматрања. Ово и друга унапређења поступка ће бити предмет будућег рада на развоју методе.



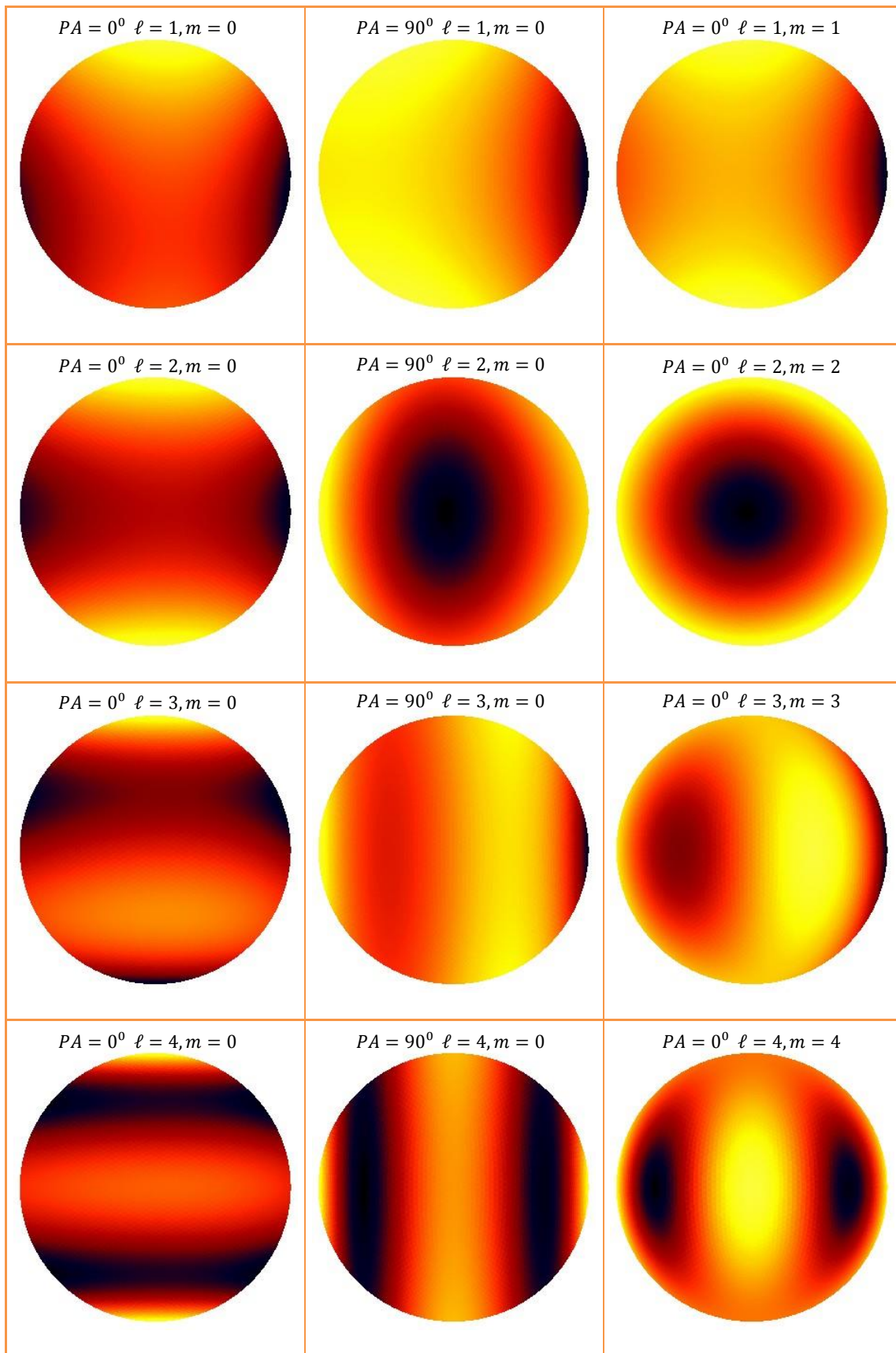
Слика 5.14: Периодограм добијен анализом резидуа после одузимања орбиталног решења за случај суперпозиције три моде у систему 4. Свака група сигнала представља мултиплет који одговара једној моделираној моди и центрирана је око њене улазне фреквенције (испрекидане линије). Стрелицама су означени сигнали који су узети у обзир приликом одређивања фреквенција, амплитуда и фаза за мрежу пробних модела.

5.2.6. Формирање мреже пробних модела

У претходним корацима је за сваки систем из табеле 5.1 синтетисана по једна крива сјаја за сваку појединачну моду степена $\ell \leq 4$ и по једна за три истовремено побуђене моде са параметрима набројаним у табели 5.2. Од овако добијеног „посматрачког“ материјала одузете су орбиталне криве сјаја, а из резидуа су измерене фреквенције, амплитуде и фазе осцилација.

Параметри двојних система добијени као решење почетних кривих сјаја и параметри осцилација мерени из резидуа, су улаз за следећи корак у поступку: за формирање мреже пробних модела.

Мрежа се формира тако што се фиксирају орбитални и физички параметри компонента, а варирају се квантни бројеви мода, (ℓ, m) . За сваку „посматрану“ криву сјаја у којој је детектована само једна мода (одн. само један мултиплет у случају алтернативне осе симетрије код плимски изобличених звезда), формира се мрежа од 25 модела са свим модама за $\ell \leq 4$; дакле, за:



Слика 5.15: Зоналне моде ($m = 0$) око осе ротације (прва колона), око осе кроз центре компонента (друга колона) и секторалне моде ($m = \ell$) опет око осе ротације (трећа колона).

$$(\ell, m) = (0,0), (1, -1), (1,0), (1,1), (2, -2), \dots, (4,4).$$

Код кривих сјаја са више детектованих мода (одн. мултиплета), мрежа се формира тако да се покрију све могуће комбинације мода за $\ell \leq 4$, а под претпоставком да неће бити понављања (тј. да једној фреквенцији одговара један сферни хармоник); низ комбинација за три моде почиње овако:

Табела 5.4: Првих двадесет пробних комбинација сферних хармоника за суперпозицију три моде са $\ell \leq 4$.

Модел	Мода 1	Мода 2	Мода 3	Модел	Мода 1	Мода 2	Мода 3
1	(0, 0)	(1, 0)	(1, -1)	11	(0, 0)	(1, 0)	(3, 0)
2	(0, 0)	(1, 0)	(1, 1)	12	(0, 0)	(1, 0)	(3, 1)
3	(0, 0)	(1, 0)	(2, -2)	13	(0, 0)	(1, 0)	(3, 2)
4	(0, 0)	(1, 0)	(2, -1)	14	(0, 0)	(1, 0)	(3, 3)
5	(0, 0)	(1, 0)	(2, 0)	15	(0, 0)	(1, 0)	(4, -4)
6	(0, 0)	(1, 0)	(2, 1)	16	(0, 0)	(1, 0)	(4, -3)
7	(0, 0)	(1, 0)	(2, 2)	17	(0, 0)	(1, 0)	(4, -2)
8	(0, 0)	(1, 0)	(3, -3)	18	(0, 0)	(1, 0)	(4, 0)
9	(0, 0)	(1, 0)	(3, -2)	19	(0, 0)	(1, 0)	(4, 1)
10	(0, 0)	(1, 0)	(3, -1)	20	(0, 0)	(1, 0)	(4, 2)

За сваки од ових модела се, на основу фреквенције, амплитуде и фазе измерене из резидуа (одн. медијане свих измерених фреквенција, и средње вредности амплитуда и фаза код изобличених звезда), рачунају пробни параметри осцилација према поступку калибрације изложеном у одељцима 5.2.4 и 5.2.5.

Пробни модели се праве без додавања шума, а од кривих сјаја се одузима тачно орбитално решење (тј. орбитална крива сјаја са истим параметрима двојног система, само без осцилација). Резидуи после одузимања су онда спремни за поређење са „посматрањима“.

5.2.7. Избор најбољег модела

У овом, завршном кораку, сви пробни модели се пореде са „посматрањима“. Као мера доброг поклапања користи се сума квадрата разлика:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N (O_i - C_i)^2,$$

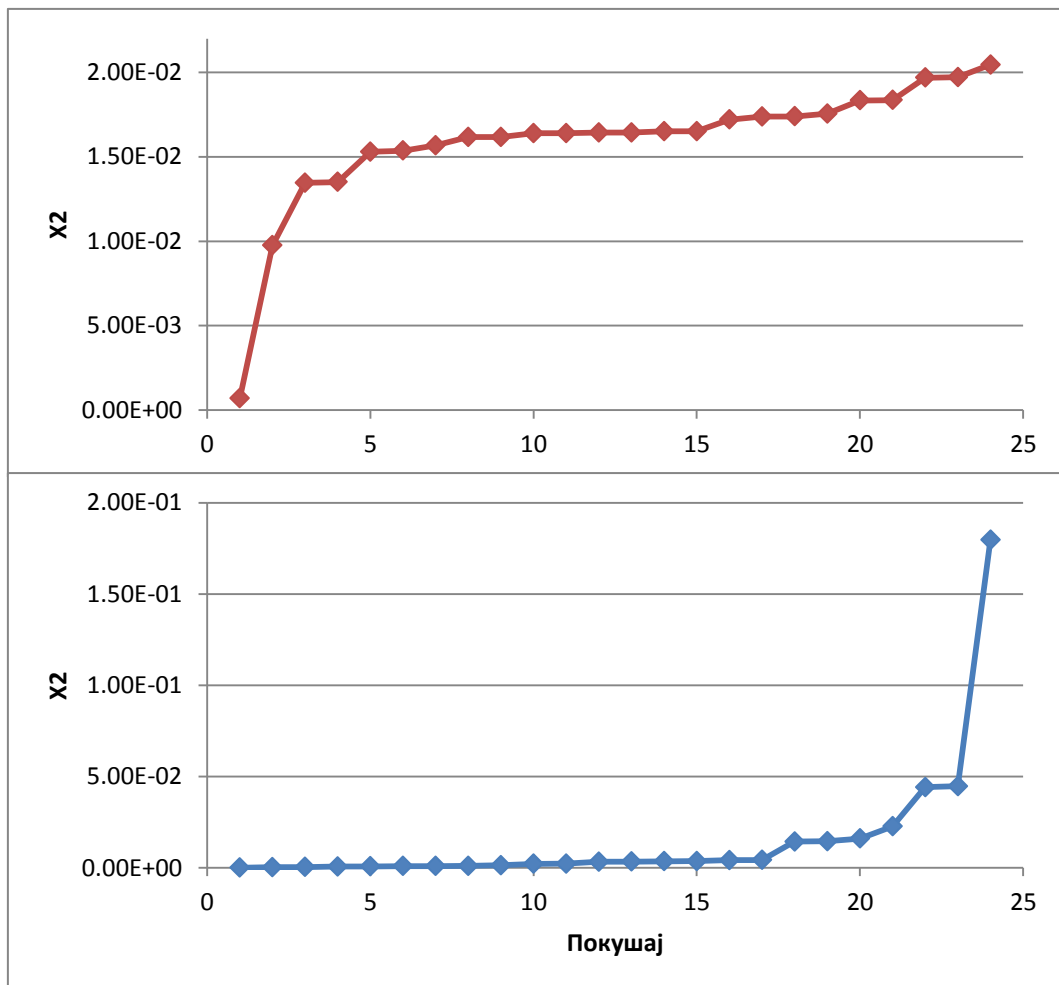
где су O_i тачке које чине посматрану, C_i тачке које чине пробну (резидуну) криву сјаја, а N је укупан број тачака. Модел који се најбоље поклапа са посматрањима имаће најмањи χ^2 . Уколико је поклапање добро, идентификација мода присутних у посматрањима се своди на читавање квантних бројева ℓ и m мода присутних у оптималном моделу. Ово је илустровано на слици 5.16, где се види селективност методе за две појединачне моде у Систему 3. Поузданост идентификације се може проценити на основу понашања вредности χ^2 од једног пробног модела до другог.

Алтернативно би се у поступак могло укључити и фитовање посматране криве сјаја за сваки пробни модел (тј. за сваку комбинацију сферних хармоника), при чему би се као слободни параметри тражиле фреквенције, амплитуде и почетне фазе мода. Тада би се, као што је раније наговештено, калибрације описане у одељцима 5.2.4 и 5.2.5 користиле за успостављање почетних вредности параметара који се фитују. На крају би се идентификација мода извршила на исти начин као и код простог поређења: налажењем пробног модела за који је постигнут најбољи фит на посматрања.

Фитовање је, међутим, изузетно захтеван поступак (у смислу потребног рачунарског времена). За двадесетак мода (колико се може очекивати код, на пример, звезда типа δ Sct), било би потребно направити преко милион пробних модела. У таквој ситуацији, чак би и идентификација простим поређењем постала проблематична. Фитовање на то додаје још један до два реда величине, јер је обично потребно од 20 до 200 итерација да симплекс конвергира.

Иако је у оквиру ове дисертације просто поређење дало сасвим задовољавајуће резултате, у примени на права посматрања ће вероватно бити неопходно укључити и фитовање у поступак. Један начин да се неопходно рачунарско време скрати (и тиме поступак учини практичним), јесте да се и овде, као и код анализе сигнала, за случајеве са више присутних мода усвоји итеративни приступ. Уместо формирања мреже модела која покрива све могуће вредности (ℓ, m) , сферни

хармоници се фиксирају за све моде осим за ону са највећом амплитудом, и онда се такав систем третира као случај са једном модом: формира се мрежа од 25 модела (за $\ell_{max} \leq 4$) и за сваки од њих се изврши фитовање фреквенције, амплитуде и фазе на посматрања. На основу најбољег пробног модела се тада фиксирају вредности (ℓ, m) за прву моду, а поступак се понови за другу и тако док се не добију прелиминарне идентификације за све присутне моде. Онда се читав поступак може поновити још једном или више пута, док се не постигне задовољавајући фит на посматрања.



Слика 5.16: χ^2 као мера поклапања између улазне синтетичке криве сјаја и пробних модела за систем 3 са појединачним модама $\ell = 4, m = 0$ (горе) и $\ell = 1, m = 0$ (доле). Селекција је очигледно боља у првом случају.

Итеративни приступ смањује број неопходних рачунања модела довољно да поступак постане применљив и уз употребу обичних канцеларијских рачунара и свакако ће бити уврштено међу прве оптимизације предложене методе.

5.3. Резултати за приближно сферну пулсирајућу компоненту

Резултати демонстрације предложене методе идентификације мода за системе 1 и 2, у којима је примарна, пулсирајућа компонента приближно сферног облика, су приказани у табелама 5.5, 5.6, 5.7 и 5.8. Колоне са насловом „Посматрања“ садрже параметре осцилација са којима су генерисане синтетичке криве сјаја које су у даљем процесу играле улогу посматрачког материјала, као и однос сигнала према шуму употребљен за додавање симулираних случајних грешака. Као и другде, ℓ и m су ознаке за квантне бројеве придруженог сферног хармоника; са F су означене фреквенције, са A амплитуде, а са P , почетне фазе. У скупу колона означеном са „*Period04*“ дати су параметри осцилација који су из синтетичких кривих сјаја, после одузимања орбиталног решења, измерени стандардним поступком анализе сигнала у програму *Period04*. У колонама под насловом „Најбољи модел“ налазе се параметри осцилација добијени поступком калибрације описаном у одељцима 5.2.4 и 5.2.5, а израчунатих на основу параметара добијених анализом сигнала. Коначно, у последње три колоне су квантни бројеви из модела који су дали најбоље поклапање са „посматрањима“, као и индикатор успеха идентификације.

С обзиром да се „посматрања“ састоје од симулираних података, одн. задатих величина, нема јасних критеријума за одређивање броја сигурних и значајних цифара код утабличених вредности. Тачност фреквенције је процењена као реципрочна вредност корена из броја тачака помноженог са укупним трајањем криве сјаја, а тачност детектоване амплитуде, као реципрочна вредност нивоа сигнала према шуму. Овако груб приступ оправдан је, с једне стране, резултатима тестирања, који показују да мала одступања параметара осцилација од „правих“ вредности не утичу значајно на успешност методе; и с друге стране, искуством у раду са сателитским посматрањима из којих се, у принципу, ови параметри могу измерити са много већом тачношћу од оне која је овде усвојена.

Као што се види из табела 5.5, 5.6, 5.7 и 5.8, за све криве сјаја за системе 1 и 2, идентификација мода је била успешна.

Што се тиче појединачних мода, овај резултат није неочекиван јер су све појединачне моде успешно идентификоване и методом мапирања помоћу помрачења (Bíró & Nuspl, 2011) приликом тестова на синтетичким подацима.

У случају суперпозиције три моде, представљена метода је дала боље резултате него мапирање помоћу помрачења. Ово такође није изненађење, јер су једнако добри резултати постигнути применом методе директног фитовања на сферним звездама (Latković & Bíró, 2008). Као и у том раду и овде се може закључити да је фитовање криве сјаја као метода идентификација мода поузданије од реконструкције слике.

Улазне криве сјаја и криве сјаја добијене из оптималних модела са вишеструким модама за системе 1 и 2 приказане су, редом, на сликама 5.17 и 5.18. Као и раније, криве сјаја за систем 1 пореде се са аналогним примером из програма *Pulzem* (Bíró & Nuspl, 2011).

Табела 5.5: Идентификација појединачних мода за систем 1. За објашњење ознака и садржаја колона видети текст.

Систем 1: Појединачне моде													
"Посматрања"					Period04				Најбољи модел				
ℓ	m	S/N	F	A [K] P [deg]	F	A [Flux] P [rad]	F	A [K] P [deg]	ℓ	m	Успех		
1	0	5000	63.1234	35 77.28	63.1226	0.0005 0.10	63.1226	37 77.03	1	0	✓		
1	1	4000	63.1234	8 163.25	64.1247	0.0004 0.60	63.1247	8 163.18	1	1	✓		
1	-1	4000	63.1234	8 134.09	62.1232	0.0004 0.59	63.1232	8 134.04	1	-1	✓		
2	0	5000	63.1234	24 52.97	63.1237	0.0005 0.67	63.1237	25 52.97	2	0	✓		
2	1	4000	63.1234	43 88.65	64.1287	0.0005 0.79	63.1287	42 88.05	2	1	✓		
2	-1	4000	63.1234	43 59.87	62.1236	0.0005 0.79	63.1236	42 59.82	2	-1	✓		
2	2	5000	63.1234	18 80.06	65.1230	0.0005 0.65	63.1230	18 80.08	2	2	✓		
2	-2	5000	63.1234	18 81.06	61.1244	0.0004 0.66	63.1244	14 80.86	2	-2	✓		
3	0	5000	63.1234	75 24.33	63.1242	0.0002 0.67	63.1242	91 24.30	3	0	✓		
3	1	4000	63.1234	180 162.16	64.1224	0.0007 0.08	63.1224	186 162.18	3	1	✓		
3	-1	4000	63.1234	180 133.30	62.1239	0.0007 0.08	63.1239	184 133.26	3	-1	✓		
3	2	5000	63.1234	210 98.99	65.1231	0.0005 0.48	63.1231	210 99.06	3	2	✓		
3	-2	5000	63.1234	210 98.26	61.1228	0.0005 0.47	63.1228	210 98.30	3	-2	✓		
3	3	5000	63.1234	98 95.91	66.1231	0.0005 0.42	63.1231	97 95.91	3	3	✓		
3	-3	5000	63.1234	98 9.60	60.1238	0.0005 0.42	63.1238	96 9.51	3	-3	✓		
4	0	5000	63.1234	137 53.68	63.1241	0.0002 0.69	63.1241	115 53.72	4	0	✓		
4	1	4000	63.1234	350 -162.76	64.1234	0.0005 0.41	63.1234	344 -162.79	4	1	✓		
4	-1	4000	63.1234	350 -134.46	62.1233	0.0005 0.40	63.1233	348 -134.46	4	-1	✓		
4	2	5000	63.1234	300 -119.94	65.1227	0.0005 0.16	63.1227	278 -119.91	4	2	✓		
4	-2	5000	63.1234	300 -120.72	61.1236	0.0005 0.14	63.1236	280 -120.75	4	-2	✓		
4	3	5000	63.1234	300 -134.00	66.1228	0.0004 0.41	63.1228	294 -133.95	4	3	✓		
4	-3	5000	63.1234	300 -163.55	60.1244	0.0004 0.39	63.1244	290 -163.71	4	-3	✓		
4	4	5000	63.1234	172 27.39	67.1225	0.0005 0.23	63.1225	169 27.45	4	4	✓		
4	-4	5000	63.1234	172 25.49	59.1257	0.0005 0.19	63.1257	168 25.24	4	-4	✓		

Табела 5.6: Идентификација мода на примеру модела са суперпозицијом три моде за систем 1.

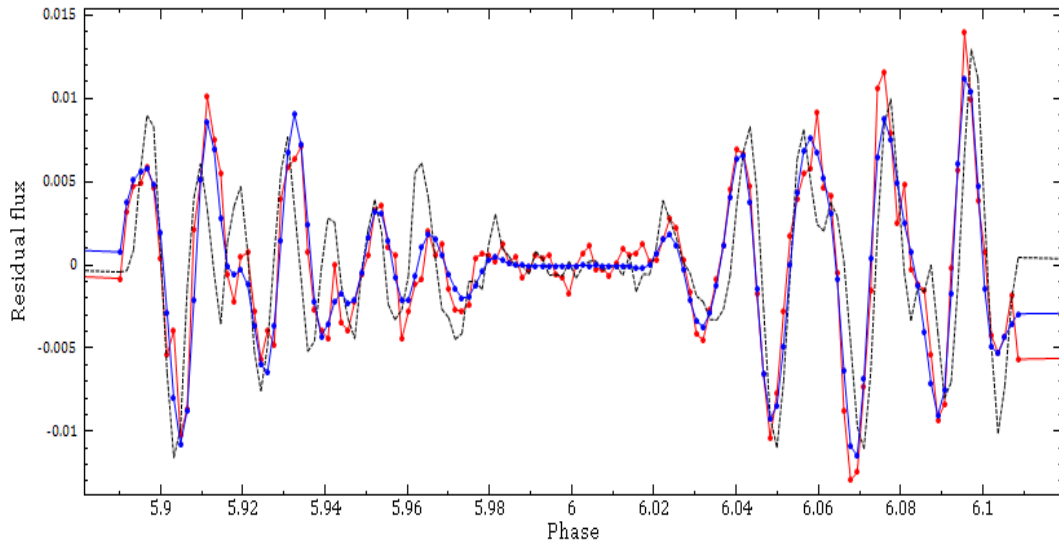
Систем 1: Суперпозиција три моде													
"Посматрања"					Period04				Најбољи модел				
ℓ	m	S/N	F	A [K] P [deg]	F	A [Flux] P [rad]	F	A [K] P [deg]	ℓ	m	Успех		
1	0		49.4322	301 120.65	49.4323	0.005 0.86	49.4323	310 120.63	1	0	✓		
3	1	250	63.9534	988 60.99	64.9534	0.004 0.31	63.9534	987 60.95	3	1	✓		
2	2		95.2067	104 26.13	97.2067	0.003 0.71	95.2067	100 26.10	2	2	✓		

Табела 5.7: Идентификација појединачних мода за систем 2.

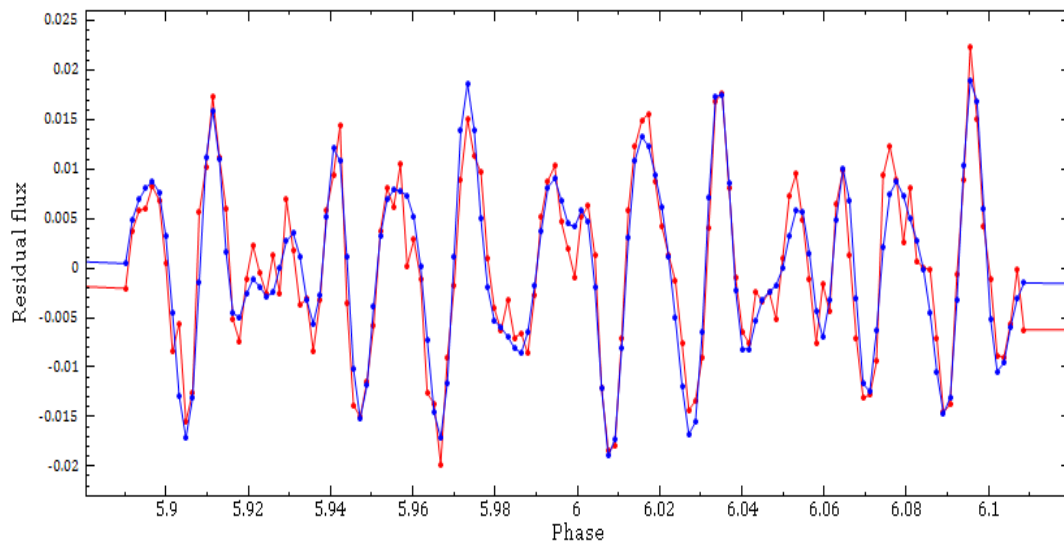
Систем 2: Појединачне моде														
"Посматрања"					Period04				Најбољи модел					
ℓ	m	S/N	F	A [K]	P [deg]	F	A [Flux]	P [rad]	F	A [K]	P [deg]	ℓ	m	Успех
1	0	2500	63.1234	68	77.28	63.1230	0.0012	0.10	63.1230	73	77.03	1	0	✓
1	1	2000	63.1234	17	163.25	64.1238	0.0018	0.60	63.1238	17	163.18	1	1	✓
1	-1	2000	63.1234	17	134.09	62.1233	0.0018	0.59	63.1233	17	134.04	1	-1	✓
2	0	2000	63.1234	47	52.97	63.1235	0.0021	0.67	63.1235	49	52.97	2	0	✓
2	1	2500	63.1234	92	88.65	64.1236	0.0011	0.80	63.1236	91	88.05	2	1	✓
2	-1	2500	63.1234	92	59.87	62.1234	0.0011	0.79	63.1234	91	59.82	2	-1	✓
2	2	2000	63.1234	34	80.06	65.1234	0.0018	0.65	63.1234	34	80.08	2	2	✓
2	-2	2000	63.1234	34	81.06	61.1235	0.0018	0.66	63.1235	34	80.86	2	-2	✓
3	0	2500	63.1234	228	24.33	63.1237	0.0007	0.67	63.1237	226	24.30	3	0	✓
3	1	2500	63.1234	135	162.16	64.1231	0.0011	0.08	63.1231	151	162.18	3	1	✓
3	-1	2500	63.1234	135	133.30	62.1234	0.0011	0.08	63.1234	151	133.26	3	-1	✓
3	2	2500	63.1234	210	98.99	65.1233	0.0006	0.48	63.1233	189	99.06	3	2	✓
3	-2	2500	63.1234	210	98.26	61.1227	0.0006	0.47	63.1227	189	98.30	3	-2	✓
3	3	2500	63.1234	98	95.91	66.1236	0.0009	0.42	63.1236	97	95.91	3	3	✓
3	-3	2500	63.1234	98	9.60	60.1233	0.0009	0.42	63.1233	96	9.51	3	-3	✓
4	0	2500	63.1234	262	53.68	63.1236	0.0008	0.69	63.1236	388	53.72	4	0	✓
4	1	2500	63.1234	259	-162.76	64.1234	0.0005	0.41	63.1234	290	-162.79	4	1	✓
4	-1	2500	63.1234	259	-134.46	62.1233	0.0005	0.40	63.1233	293	-134.46	4	-1	✓
4	2	2500	63.1234	237	-119.94	65.1228	0.0009	0.16	63.1228	287	-119.91	4	2	✓
4	-2	2500	63.1234	237	-120.72	61.1237	0.0009	0.14	63.1237	288	-120.75	4	-2	✓
4	3	2500	63.1234	265	-134.00	66.1234	0.0005	0.41	63.1234	270	-133.95	4	3	✓
4	-3	2500	63.1234	265	-163.55	60.1238	0.0005	0.39	63.1238	266	-163.71	4	-3	✓
4	4	2500	63.1234	139	27.39	67.1235	0.0008	0.23	63.1235	140	27.45	4	4	✓
4	-4	2500	63.1234	139	25.49	59.1242	0.0008	0.19	63.1242	139	25.24	4	-4	✓

Табела 5.8: Идентификација мода на примеру модела са суперпозицијом три моде за систем 2.

Систем 2: Суперпозиција три моде														
"Посматрања"					Period04				Најбољи модел					
ℓ	m	S/N	F	A [K]	P [deg]	F	A [Flux]	P [rad]	F	A [K]	P [deg]	ℓ	m	Успех
1	0		49.4322	301	120.65	49.4323	0.0052	0.86	49.4323	324	120.33	1	0	✓
3	1	150	63.9534	988	60.99	64.9534	0.0075	0.31	63.9534	1068	60.66	3	1	✓
2	2		95.2067	104	26.13	97.2068	0.0056	0.71	95.2068	103	26.08	2	2	✓



Слика 5.17: Синтетичка крива сјаја за суперпозицију три моде: (1,0), (3,1) и (2,2) у систему 1 (црвена крива), најбољи модел (плава крива), и, поређења ради, синтетичка крива сјаја за исте моде и исти систем (испрекидана крива), из програма *Pulzem* (Bíró & Nuspl, 2011).



Слика 5.18: Исто као на слици 5.17, за систем 2, без поређења са програмом *Pulzem*.

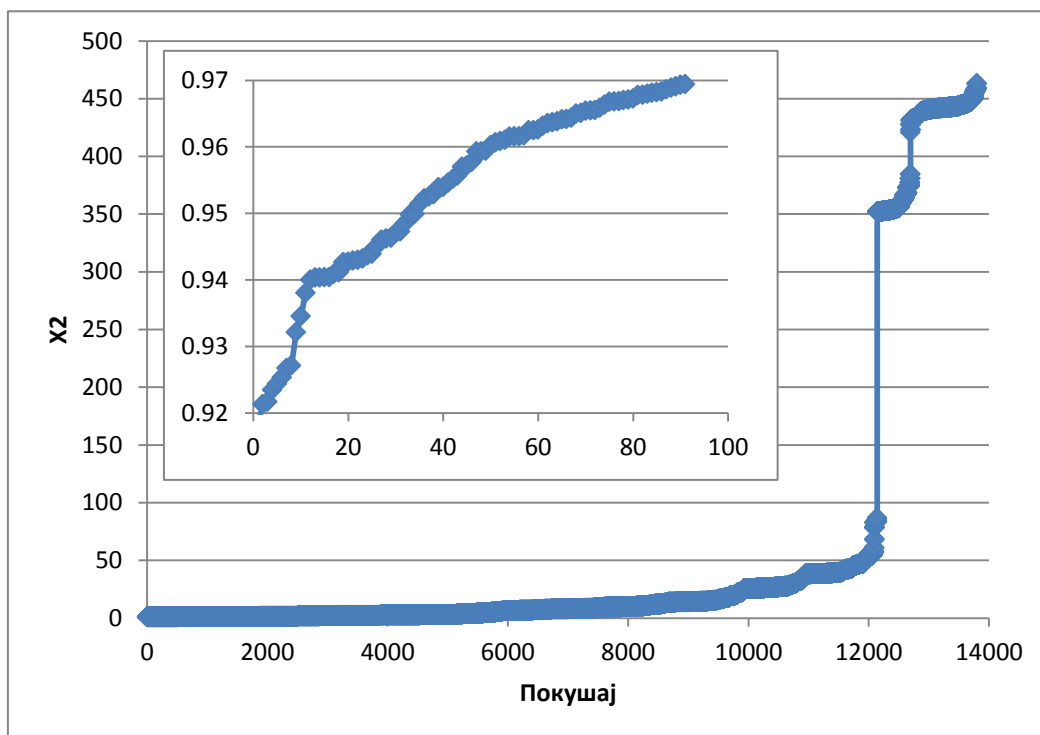
5.4. Резултати за изобличену пулсирајућу компоненту

Резултати демонстрације предложене методе идентификације мода за системе 3 и 4, у којима је примарна, пулсирајућа компонента изражено изобличена плимским утицајем секундара, су приказани у табелама 5.9, 5.10, 5.11 и 5.12. У средњој групи колона дати су параметри свих сигнала измерених из резидуалних кривих сјаја, а према критеријуму успостављеном у одељку 5.2.5. Да подсетим, код изобличених звезда се доминантна оса симетрије не поклапа са осом ротације, већ са осом која пролази кроз центре компонената двојног система и то постаје оса симетрије и звезданих осцилација. Као последица ротиране осе симетрије, једна мода осциловања детектује се као мултиплет.

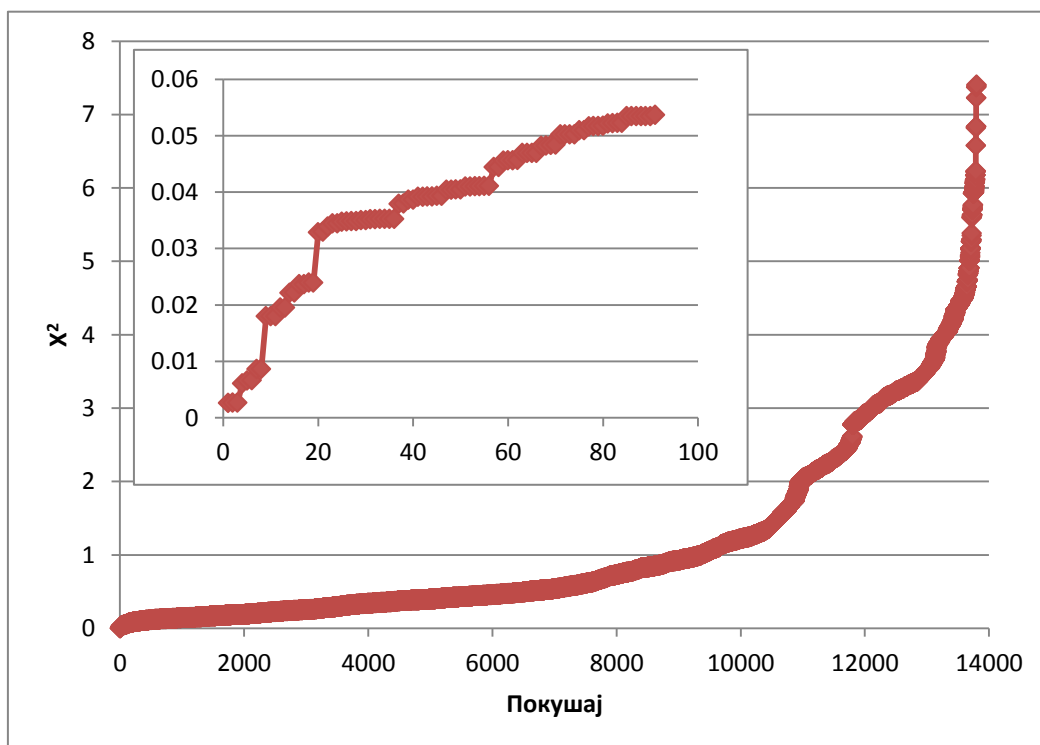
Без обзира на ову компликацију, све појединачне моде су успешно идентификоване и на изобличеним звездама. У табели 5.10 има неколико примера где је идентификација означена као успешна иако је уместо улазног реда m најбољи фит дао модел реда $-m$. Разлог зашто се то и даље сматра за добру идентификацију је то што су криве сјаја за моде (ℓ, m) и $(\ell, -m)$, у ситуацији где се оса пулсација не поклапа са осом ротације, идентичне. Између позитивних и негативних редова могуће је направити разлику код осно-симетричних звезда само због присуства утицаја ротације на фреквенције (једначине 1.38 и 1.39). Пошто се код система 3 и 4 оса симетрије осцилација не поклапа са осом ротације, нема ни ротационог цепања.

Као што се види из табеле 5.11, у случају суперпозиције три моде за систем 3, идентификација је била неуспешна. Разлог за то је погрешно одређена фреквенција доминантне моде, тј. моде са највећом амплитудом. Због грешке у фреквенцији, дошло је до фазног помака између тачног модела са исправним модама и испитиване криве сјаја, тако да се током сваког другог периода налазе у антифази, па је немогуће добити добар фит. Ситуација је приказана на слици 5.21, на којој се види и крива сјаја која је проглашена за „оптималну“ иако очигледно не даје добар фит. Већ је наговештено у одељку 5.2.5 да би се овај проблем могао решити на два начина: налажењем алтернативног начина да се из детектованог мултиплета добије једна, централна фреквенција, или фитовањем фреквенције за сваки пробни модел. Као што је објашњено у одељку 5.2.7, укључивање фитовања

параметара осцилација није било изводљиво у оквиру ове дисертације, али ће бити предмет даљег развоја предложене методе.



Слика 5.19: Понашање X^2 од једног пробног модела до другог за суперпозицију три моде у систему 3, где је идентификација била неуспешна. Тачан модел је по реду 2747-ми према вредности X^2 . На исечку је приказано најбољих сто модела.



Слика 5.20: Исто као на слици 5.19, за систем 4. Тачан модел је трећи према вредности X^2 .

Табела 5.9: Идентификација појединачних мода у систему 3. Приказане су улазне и измерене фреквенције, а крајње вредности су добијене као медијане измерених. Слично, крајње амплитуде и фазе су израчунате из средњих вредности детектованих сигнала.

Систем 3: Појединачне моде														
"Посматрања"						Period04			Најбољи модел					
ℓ	m	S/N	F	A [K]	P [deg]	F	A [Flux]	P [rad]	F	A [K]	P [deg]	ℓ	m	Успех
1	0	500	63.1234	68	77.28	62.1231	0.0044	0.10	63.1225	78	77.04	1	0	✓
						64.1219	0.0044	0.10						
1	1	1000	63.1234	19	163.25	62.1237	0.0010	0.10	63.1164	15	163.18	1	1	✓
						64.1267	0.0010	0.60						
						63.1164	0.0004	0.11						
1	-1	1000	63.1234	19	134.09	64.1193	0.0010	0.10	63.1139	15	134.19	1	-1	✓
						62.1240	0.0010	0.59						
						63.1139	0.0004	0.10						
2	0	1500	63.1234	47	52.97	61.1241	0.0014	0.17	63.1226	63	52.98	2	0	✓
						65.1221	0.0014	0.18						
2	1	500	63.1234	165	88.65	65.1249	0.0042	0.79	63.1157	122	88.05	2	1	✓
						61.1202	0.0041	0.30						
						62.1187	0.0017	0.31						
						64.1127	0.0011	0.31						
2	-1	500	63.1234	165	59.87	61.1204	0.0042	0.30	63.1301	123	59.19	2	-1	✓
						62.1294	0.0012	0.78						
						64.1308	0.0017	0.78						
						65.1251	0.0041	0.79						
2	2	3000	63.1234	34	80.06	63.1213	0.0009	0.15	63.1213	34	80.08	2	2	✓
						65.1262	0.0005	0.64						
						61.1262	0.0004	0.64						
						64.1165	0.0003	0.16						
						62.1270	0.0003	0.64						
2	-2	3000	63.1234	34	81.06	61.1254	0.0004	0.66	63.1219	34	80.86	2	-2	✓
						62.1211	0.0003	0.17						
						63.1219	0.0009	0.17						
						64.1292	0.0003	0.66						
						65.1254	0.0005	0.66						
3	0	500	63.1234	244	24.33	66.1246	0.0017	0.18	64.1212	285	24.44	3	0	✓
						64.1212	0.0014	0.18						
						60.1293	0.0013	0.16						
						62.1266	0.0012	0.17						
3	1	1000	63.1234	135	162.16	66.1210	0.0008	0.58	63.1100	73	162.18	3	1	✓
						64.1279	0.0007	0.58						
						60.1255	0.0005	0.07						
						62.1274	0.0003	0.07						
						63.1100	0.0002	0.09						
						59.1149	0.0001	0.60						
3	-1	1000	63.1234	137	133.30	60.1221	0.0008	0.58	62.1234	54	133.26	3	-1	✓
						62.1234	0.0007	0.58						
						66.1318	0.0005	0.07						
						64.1138	0.0003	0.09						
						63.1078	0.0002	0.10						
						58.1347	0.0001	0.56						
						59.1135	0.0001	0.60						

Систем 3: Појединачне моде, наставак														
"Посматрања"						Period04			Најбољи модел					
ℓ	m	S/N	F	A [K]	P [deg]	F	A [Flux]	P [rad]	F	A [K]	P [deg]	ℓ	m	Успех
3	2	1000	63.1234	334	98.99	66.1227	0.0012	0.48	64.1227	289	99.06	3	2	✓
						60.1231	0.0011	0.48						
						64.1227	0.0010	0.98						
						62.1245	0.0009	0.98						
						61.1217	0.0009	0.48						
3	-2	1000	63.1234	334	98.26	60.1229	0.0012	0.47	62.1249	289	98.43	3	-2	✓
						66.1220	0.0011	0.47						
						62.1249	0.0010	0.96						
						64.1235	0.0009	0.96						
						65.1224	0.0009	0.47						
3	3	5000	63.1234	108	95.91	62.1238	0.0006	0.42	63.1250	76	95.91	3	3	✓
						63.1250	0.0004	0.42						
						64.1221	0.0003	0.93						
						66.1225	0.0002	0.42						
						59.1281	0.0001	0.42						
3	-3	5000	63.1234	108	9.60	64.1237	0.0005	0.42	63.1247	88	9.53	3	-3	✓
						63.1247	0.0004	0.41						
						62.1230	0.0003	0.92						
						60.1260	0.0002	0.41						
4	0	1500	63.1234	332	53.68	58.1150	0.0002	0.21	63.1214	268	53.72	4	0	✓
						59.1202	0.0004	0.69						
						61.1177	0.0004	0.20						
						63.1214	0.0003	0.19						
						65.1261	0.0004	0.18						
						67.1220	0.0004	0.69						
						68.1204	0.0002	0.19						
4	1	2500	63.1234	307	-162.76	58.1266	0.0002	0.90	63.1225	386	-162.79	4	1	✓
						59.1237	0.0003	0.41						
						61.1242	0.0011	0.91						
						62.1239	0.0010	0.91						
4	-1	2500	63.1234	307	-134.46	57.1240	0.0001	0.91	63.1218	389	-134.46	4	-1	✓
						59.1230	0.0007	0.90						
						60.1225	0.0001	0.91						
						61.1214	0.0003	0.41						
						63.1218	0.0006	0.91						
						64.1230	0.0010	0.90						
						65.1232	0.0011	0.90						
						67.1208	0.0003	0.40						
						68.1199	0.0002	0.91						
4	2	2500	63.1234	337	-119.94	63.1240	0.0008	0.66	63.1240	220	-119.91	4	2	✓
						67.1211	0.0005	0.66						
						59.1227	0.0005	0.66						
						60.1227	0.0005	0.66						
						61.1218	0.0004	0.16						
						65.1240	0.0004	0.15						
						64.1265	0.0003	0.66						
						66.1287	0.0003	0.15						

Систем 3: Појединачне моде, наставак												
"Посматрања"					Period04			Најбољи модел				
ℓ	m	S/N	F	A [K] P [deg]	F	A [Flux]	P [2π R]	F	A [K] P [deg]	ℓ	m	Успех
4	-2	2500	63.1234	337 -120.72	63.1225	0.0008	0.64	63.1225	220 -120.75	4	-2	✓
					59.1205	0.0005	0.65					
					67.1203	0.0005	0.65					
					66.1198	0.0005	0.65					
					65.1257	0.0004	0.14					
					61.1259	0.0004	0.14					
					62.1180	0.0003	0.65					
					60.1301	0.0003	0.13					
4	3	2500	63.1234	297 -134.00	60.1229	0.0005	0.91	62.1294	318 -133.95	4	3	✓
					65.1238	0.0004	0.91					
					59.1223	0.0004	0.91					
					66.1242	0.0004	0.91					
					63.1174	0.0002	0.92					
					58.1263	0.0002	0.90					
					67.1132	0.0002	0.42					
					57.1274	0.0001	0.90					
4	-3	2500	63.1234	297 -163.55	66.1227	0.0005	0.90	63.1237	347 -163.71	4	-3	✓
					61.1235	0.0004	0.90					
					60.1214	0.0004	0.90					
					67.1256	0.0004	0.90					
					63.1237	0.0002	0.90					
					59.1313	0.0001	0.38					
					68.1184	0.0001	0.90					
4	4	5000	63.1234	176 27.39	64.1287	0.0003	0.22	63.1097	225 26.65	4	4	✓
					63.1097	0.0002	0.25					
					60.1455	0.0001	0.18					
4	-4	5000	63.1234	176 25.49	59.1242	0.0008	0.19	63.1288	236 24.42	4	-4	✓
					62.1293	0.0003	0.19					
					63.1288	0.0003	0.18					
					66.1407	0.0002	0.18					
					67.1348	0.0001	0.17					

Табела 5.10: Идентификација мода на примеру модела са суперпозицијом три моде за систем 3.

Систем 3: Суперпозиција три моде												
"Посматрања"					Period04			Најбољи модел				
L	M	S/N	F	A [K] P [deg]	F	A [Flux]	P [rad]	F	A [K] P [deg]	L	M	Успех
1	0	100	49.4322	301 120.65	48.4319	0.0198	0.86	48.9344	845 120.33	2	-2	✗
					50.4326	0.0198	0.85					
3	1	100	63.9534	988 60.99	64.9522	0.0053	0.82	64.4511	970 60.62	3	2	✗
					66.9525	0.0056	0.81					
					60.9519	0.0031	0.33					
					62.9524	0.0021	0.31					
					63.9501	0.0012	0.32					
2	2	100	95.2067	104 26.13	97.2068	0.0056	0.71	96.2076	539 26.08	3	-3	✗
					95.2114	0.0031	0.18					
					96.2076	0.0017	0.20					

Табела 5.11: Идентификација појединачних мода у систему 4. Приказане су улазне и измерене фреквенције, а крајње вредности су добијене као медијане измерених. Слично, крајње амплитуде и фазе су израчунате из средњих вредности детектованих сигнала.

Систем 4: Појединачне моде														
"Посматрања"			<i>Period04</i>			Најбољи модел								
ℓ	m	S/N	F	A [K]	P [deg]	F	A [Flux]	P [rad]	F	A [K]	P [deg]	ℓ	m	Успех
1	0	500	63.1234	23	77.28	64.1287	0.0014	0.08	63.1225	78	77.04	1	0	✓
						62.1305	0.0014	0.09						
1	1	1000	63.1234	20	163.25	62.1305	0.0010	0.09	63.1164	15	163.18	1	1	✓
						64.1287	0.0010	0.59						
1	-1	1000	63.1234	20	134.09	64.1155	0.0010	0.10	63.1139	15	134.19	1	-1	✓
						62.1305	0.0010	0.58						
2	0	2000	63.1234	90	52.97	61.1249	0.0025	0.17	63.1226	63	52.98	2	0	✓
						65.1216	0.0025	0.18						
						63.1231	0.0017	0.17						
						67.1219	0.0002	0.18						
						59.1354	0.0002	0.15						
2	1	250	63.1234	90	88.65	61.1115	0.0022	0.32	63.1157	122	88.05	2	1	✓
						65.1212	0.0022	0.80						
2	-1	250	63.1234	90	59.87	65.1212	0.0021	0.30	63.1301	123	59.19	2	-1	✓
						61.1247	0.0021	0.79						
2	2	1000	63.1234	98	80.06	63.1230	0.0025	0.15	63.1213	34	80.08	2	-2	✓
						65.1212	0.0012	0.65						
						61.1247	0.0012	0.64						
2	-2	1000	63.1234	98	81.06	63.1230	0.0025	0.17	63.1219	34	80.86	2	-2	✓
						65.1212	0.0012	0.67						
						61.1247	0.0012	0.66						
3	0	500	63.1234	207	24.33	66.1137	0.0013	0.20	64.1212	285	24.44	3	0	✓
						60.1455	0.0013	0.13						
						62.1305	0.0011	0.16						
						64.1155	0.0011	0.19						
3	1	1000	63.1234	196	162.16	60.1190	0.0009	0.09	63.1100	73	162.18	3	1	✓
						62.1305	0.0007	0.07						
						66.1269	0.0009	0.57						
						64.1287	0.0007	0.57						
3	-1	1000	63.1234	196	133.30	66.1402	0.0009	0.05	62.1234	54	133.26	3	-1	✓
						64.1287	0.0007	0.06						
						60.1190	0.0009	0.59						
						62.1172	0.0007	0.59						
3	2	1000	63.1234	277	98.99	66.1269	0.0008	0.47	64.1227	289	99.06	3	-2	✓
						60.1190	0.0008	0.49						
						64.1287	0.0010	0.97						
						62.1172	0.0010	0.99						
						63.0965	0.0002	0.03						
3	-2	1000	63.1234	277	98.26	66.1269	0.0008	0.46	62.1249	289	98.43	3	-2	✓
						60.1190	0.0008	0.47						
						64.1287	0.0010	0.95						
						62.1172	0.0010	0.98						
						63.0965	0.0002	0.02						

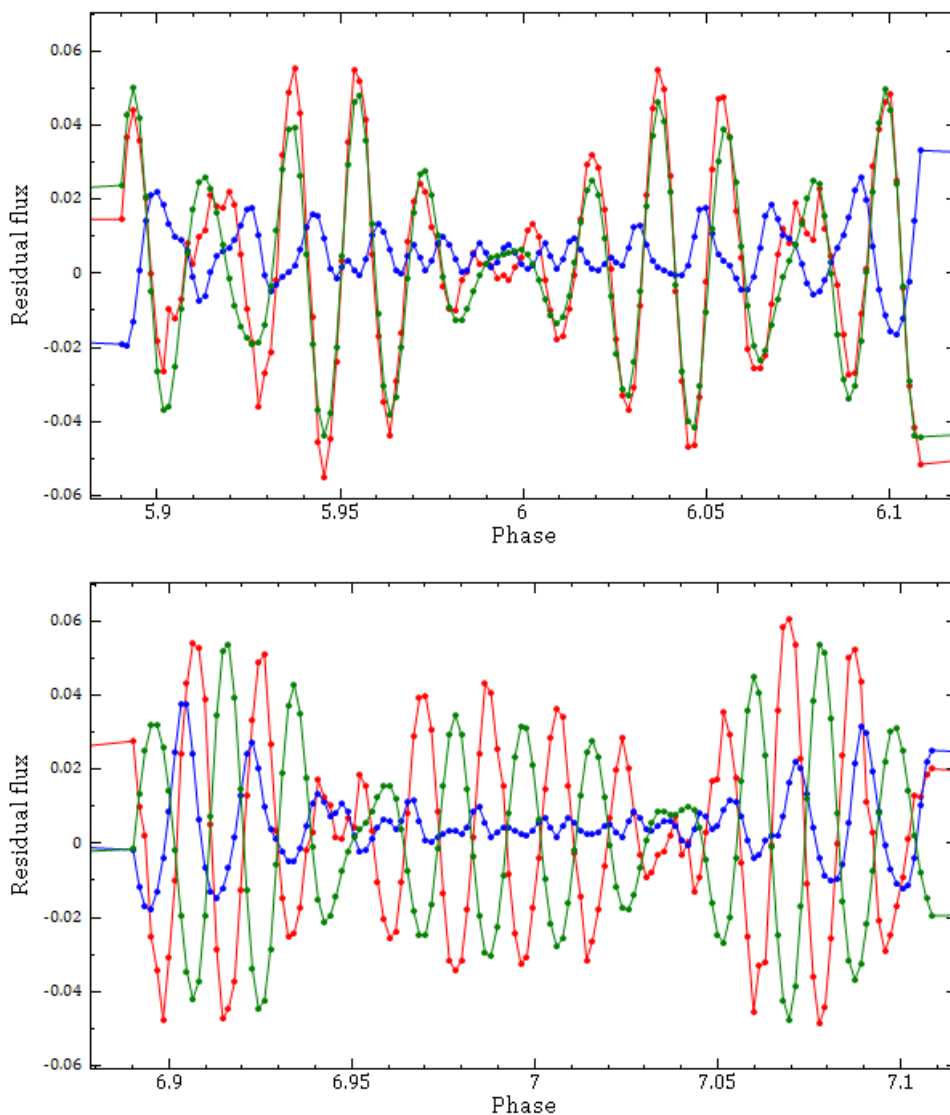
Систем 4: Појединачне моде, наставак														
"Посматрања"						Period04			Најбољи модел					
ℓ	m	S/N	F	A [K]	P [deg]	F	A [Flux]	P [rad]	F	A [K]	P [deg]	ℓ	m	Успех
3	3	5000	63.1234	228	95.91	64.1155	0.0009	0.94	63.1250	76	95.91	3	-3	✓
						62.1305	0.0009	0.41						
						66.1402	0.0003	0.39						
						60.1190	0.0003	0.93						
3	-3	5000	63.1234	228	9.60	62.1305	0.0009	0.90	63.1247	88	9.53	3	-3	✓
						64.1287	0.0009	0.41						
						60.1190	0.0003	0.43						
						66.1269	0.0003	0.91						
4	0	1500	63.1234	388	53.68	59.1133	0.0004	0.71	63.1214	268	53.72	4	0	✓
						67.1327	0.0004	0.67						
						58.1208	0.0003	0.20						
						61.1380	0.0002	0.16						
						68.1252	0.0003	0.18						
						65.1080	0.0002	0.22						
						64.1419	0.0002	0.65						
						62.1172	0.0002	0.70						
4	1	2500	63.1234	196	-162.76	65.1477	0.0004	0.36	63.1225	386	-162.79	4	-1	✗
						64.1287	0.0003	0.40						
						59.1265	0.0003	0.40						
						61.1115	0.0004	0.93						
						67.1194	0.0003	0.92						
						62.1172	0.0003	0.92						
4	-1	2500	63.1234	196	-134.46	61.0983	0.0004	0.45	63.1218	389	-134.46	4	-1	✓
						62.1172	0.0003	0.42						
						67.1194	0.0003	0.41						
						65.1477	0.0004	0.85						
						59.1265	0.0003	0.90						
						64.1287	0.0003	0.89						
4	2	2500	63.1234	243	-119.94	61.1247	0.0004	0.16	63.1240	220	-119.91	4	-2	✗
						65.1212	0.0004	0.16						
						59.1265	0.0003	0.65						
						63.1230	0.0004	0.66						
						67.1194	0.0003	0.66						
4	-2	2500	63.1234	243	-120.72	61.1247	0.0004	0.14	63.1225	220	-120.75	4	-2	✓
						65.1212	0.0004	0.15						
						59.1265	0.0003	0.64						
						63.1230	0.0004	0.65						
						67.1194	0.0003	0.65						

Систем 4: Појединачне моде, наставак												
"Посматрања"					Period04			Најбољи модел				
ℓ	m	S/N	F	A [K] P [deg]	F	A [Flux] P [rad]	F	A [K] P [deg]	ℓ	m	Успех	
4	3	2500	63.1234	340 -134.00	61.1115	0.0004	0.43	62.1294	318 -133.95	4	3	✓
					65.1212	0.0004	0.91					
					67.1194	0.0002	0.41					
					59.1265	0.0002	0.90					
4	-3	2500	63.1234	340 -163.55	65.1344	0.0004	0.37	63.1237	347 -163.71	4	-3	✓
					61.1247	0.0004	0.89					
					59.1265	0.0002	0.39					
					67.1194	0.0002	0.91					
4	4	1000	63.1234	321 27.39	65.1344	0.0017	0.71	63.1097	225 26.65	4	4	✓
					67.1194	0.0008	0.24					
					64.1155	0.0008	0.75					
					62.1172	0.0004	0.25					
					68.1516	0.0005	0.67					
					66.1402	0.0003	0.69					
					61.0983	0.0002	0.29					
					64.9492	0.0001	0.07					
4	-4	1000	63.1234	321 25.49	63.1230	0.0003	0.19	63.1288	236 24.42	4	-4	✓
					65.1212	0.0003	0.70					
					61.1247	0.0003	0.69					

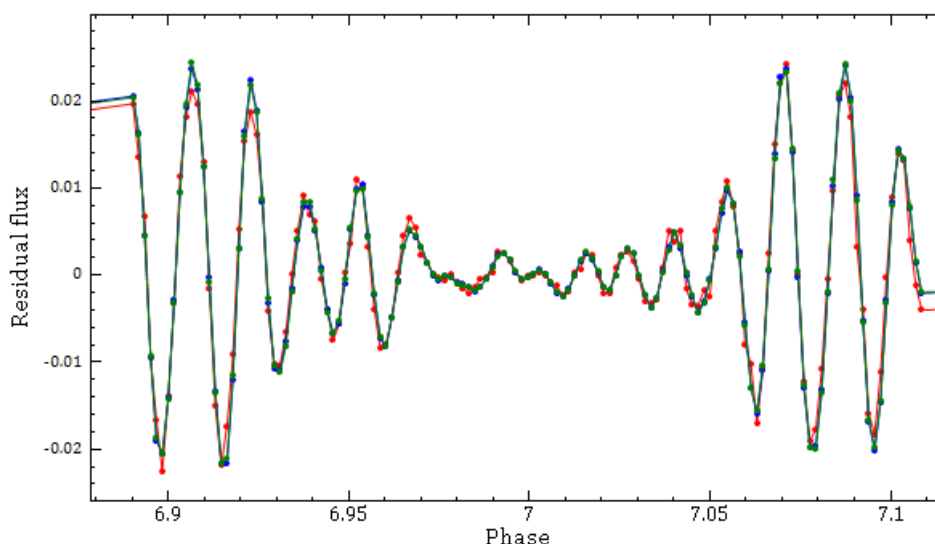
Табела 5.12: Идентификација мода на примеру модела са суперпозицијом три моде за систем 4.

Систем 4: Суперпозиција три моде												
"Посматрања"					Period04			Најбољи модел				
ℓ	m	S/N	F	A [K] P [deg]	F	A [Flux] P [rad]	F	A [K] P [deg]	ℓ	m	Успех	
1	0	250	49.4322	79 120.65	50.4318	0.0048	0.86	49.4323	90 120.32	1	0	✓
					48.4328	0.0048	0.85					
3	1	250	63.9534	691 60.99	62.9558	0.0025	0.30	63.9524	711 60.63	3	1	✓
					60.9510	0.0031	0.33					
					66.9539	0.0031	0.81					
					64.9491	0.0025	0.83					
2	2	250	95.2067	143 26.13	95.2082	0.0036	0.20	95.2082	26 26.78	0	0	✗
					97.2073	0.0018	0.71					
					93.2035	0.0018	0.72					

У случају суперпозиције три моде за систем 4, ситуација је мало боља: исправно су идентификоване прве две, а погрешно трећа мода најмање амплитуде. Оптимални модел, иако садржи једну погрешно идентификовану моду, даје јако добар фит на улазну криву сјаја (слика 5.22) и практично га је немогуће разликовати од тачног модела, који такође даје добар фит. Дакле овде се испољава проблем у селективности, односно осетљивости методе, јер се она у потпуности заснива на добром поклапању посматране и пробне криве сјаја: ако две комбинације мода дају јако сличне криве сјаја, метода не може да гарантује једнозначну идентификацију.



Слика 5.21: Синтетичка крива сјаја за суперпозицију три моде: (1,0), (3,1) и (2,2) у систему 3 (црвена крива), најбољи модел (плава крива), који је дао погрешну идентификацију све три моде: (2,2), (3,2) и (3,-3) и тачан модел (зелена крива). На горњем и доњем делу су приказана два суседна помрачења. Идентификација није успела због разлике у фреквенцијама између улазног и пробних модела (видети табелу 5.11).



Слика 5.22: Синтетичка крива сјаја за суперпозицију три моде: $(1,0)$, $(3,1)$ и $(2,2)$ у систему 4 (црвена крива); најбољи модел (плава крива), који је дао погрешну идентификацију моде са најмањом амплитудом: $(1,0)$, $(3,1)$, $(0,0)$ и тачан модел (зелена крива). Криве сјаја за најбољи и тачан модел се не разликују довољно за успешну идентификацију свих мода.

5.5. Дискусија

Из приказаних примера може се закључити да, у примени на синтетичке податке, предложена метода идентификације мода поређењем посматрања са мрежом пробних модела даје коректне резултате за осно-симетричне, а делимично коректне резултате за плимски изобличене звезде. Код осно-симетричних звезда, идентификација мода је била успешна у свим случајевима. Код плимски изобличених звезда, идентификација је била успешна у свим случајевима са појединачним модама; у случајевима са суперпозицијом три моде, на примеру система са потпуним помрачењем успешно су идентификоване две од три моде, а на примеру система са парцијалним помрачењем идентификација је била неуспешна.

Неуспех методе у појединим случајевима може се објаснити недостацима у поступку идентификације који се у принципу могу отклонити: поузданост методе може се повећати увођењем фитовања параметара осцилација у поступак идентификације, а брзина методе може се повећати усвајањем итеративног приступа у случајевима када се детектују вишеструке моде.

Међутим, први и најдиректнији циљ будућег рада биће примена предложене методе на посматрачке податке.

6. Примена на посматрачке податке

У овом, завршном делу дисертације, дискутују се могућности за будућу примену предложеног модела звезданих осцилација и методе идентификације мода на реалне посматрачке податке. Као што је већ напоменуто у одељку 2.2, основна потешкоћа је управо то што су успеси постојећих метода ограничени на појединачне примере где је идентификација мода потврђена употребом различитих техника, а међу тим примерима нема еклипно двојних система. С друге стране, постоји извешан број еклипно двојних система са пулсирајућим компонентама у којима је идентификација мода извршена појединачно фотометријским или спектроскопским методама, али остаје непотврђена, и била би само половично погодна за верификацију нове методе.

Без обзира на то, примена на права посматрања је главни приоритет за даљи рад, а са реалним подацима иду и реални проблеми. У наставку су укратко изложени услови које је неопходно остварити да би се уопште могло приступити астросеизмолошком истраживању, а затим су дати примери неких конкретних двојних система са пулсирајућим компонентама са којима сам се сусрела током припрема за израду дисертације.

6.1. Услови и ограничења

Први корак у сваком астросеизмолошком истраживању је детекција периодичних сигнала у посматрањима и мерење њихових фреквенција и амплитуда. Без обзира на одабрану технику анализе сигнала, за добре резултате неопходно је имати дугачку и густу временску серију прецизних мерења, идеално без прекида и систематских ефеката који производе лажне сигнале. Фотометријска мерења погодна за астросеизмолошке студије могу се добити посматрањима са Земље само уз доста муке; у том смислу је астросеизмолошка заједница богато награђена посматрањима са сателитских телескопа *Corot* и *Kepler*, која испуњавају све поменуте услове.

За примену предложене методе је, међутим, потребно још да пулсирајућа звезда буде компонента релативно тесног, а у сваком случају еклипног двојног система чије се геометријске и физичке карактеристике могу одредити са задовољавајућом

тачношћу. Због појаве модулације фреквенције, амплитуде и фазе звезданих осцилација током помрачења, неопходно је имати мерења која покривају најмање три до пет узастопних орбиталних периода, а тај број расте са бројем детектованих сигнала за које се тражи идентификација. Ово је изазов чак и кад су у питању сателитска посматрања за системе са периодима дужим од десетак дана.

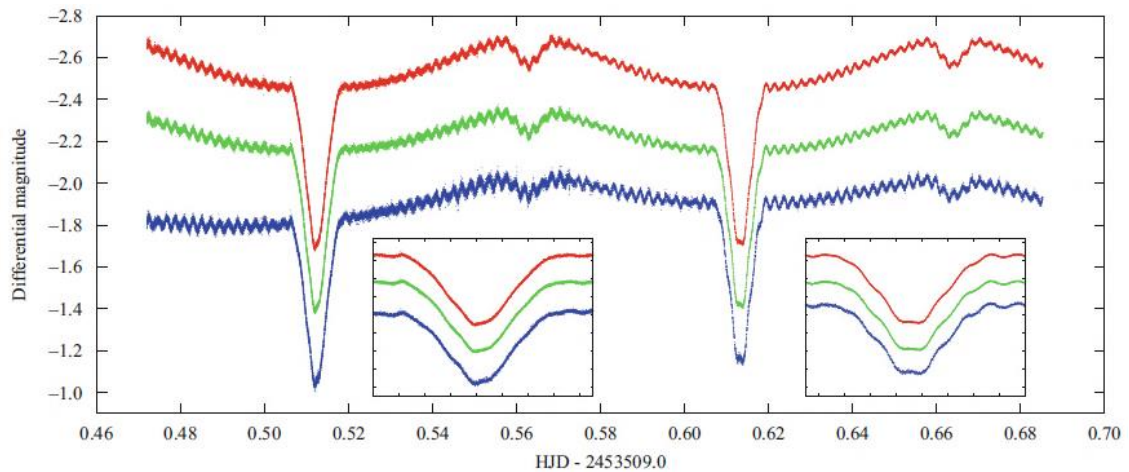
С обзиром на комплексност модела, у догледној будућности биће могуће применити предложену методу на звезде са пет до десет мода осциловања; уз побољшања поступка у смислу брзине, можда и до двадесет. У сваком случају не може се говорити о примени на звезде са осцилацијама Сунчевог типа, где се у пракси детектују стотине фреквенција. Највећа је вероватноћа успешне примене на звезде са неколико добро одвојених и поуздано измерених осцилација, какве се виђају код звезда типа γ Dor и δ Sct (одељци 8.1.2 и 8.1.3).

Ови услови и ограничења сужавају избор кандидата за примену, при чему сваки долази са сопственим скупом проблема и изазова.

6.2. Шта са не-синусоидалним варијацијама? Случај NY Vir

Међу најпознатијим двојним системима са пулсирајућом компонентом је NY Vir, чија је крива сјаја приказана на слици 6.1. NY Vir се састоји од две патуљасте звезде у малој, кружној орбити, и има период од свега 0.101 дана. Примарна компонента припада класи тзв. пулсирајућих суб-патуљастих В звезда (видети одељак 8.4.1), радијуса од $0.14R_{\odot}$ и високе ефективне температуре (31000 К), док је пратилац патуљак типа М, радијуса од $0.15 R_{\odot}$ и ефективне температуре од 3000 К. Велика разлика у температурама доводи до израженог ефекта рефлексije. Осцилације су лако уочљиве током целог орбиталног циклуса, укључујући примарно и секундарно помрачење.

На први поглед, овај систем је идеалан за примену предложеног модела и методе идентификације мода. Посматрања приказана на слици 6.1 била су ми на располагању захваљујући љубазности аутора, орбитални и физички параметри компонената су већ одређени са задовољавајућом тачношћу из комбиноване спектроскопске и фотометријске анализе, а одређене су такође и фреквенције доминантних осцилација (Vuckovic, et al., 2007).



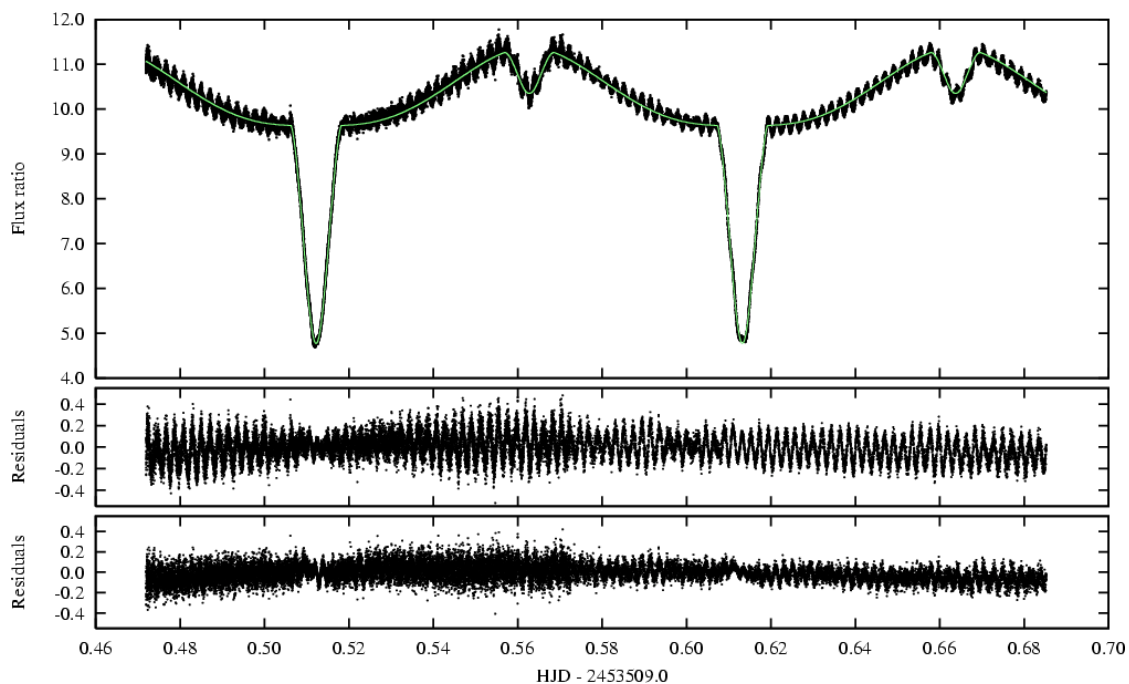
Слика 6.1: Крива сјаја NY Vir у три филтера. Преузето из Vuckovic, et al. (2007).

Испоставило се, међутим, да класичним методама анализе временских серија није могуће идентификовати све сигнале присутне у кривој сјаја. На сликама 6.2 и 6.3 се виде резидуне криве сјаја NY Vir после одузимања орбиталног решења и итеративног фитовања синусоида које одговарају најјачим детектованим осцилацијама (поступком изложеним у одељку 5.2.3). Идеално, резидуи после овог поступка требало би да изгледају као шум: да буду без структуре и да буду значајно мање амплитуде него саме осцилације. Али очигледно није тако.

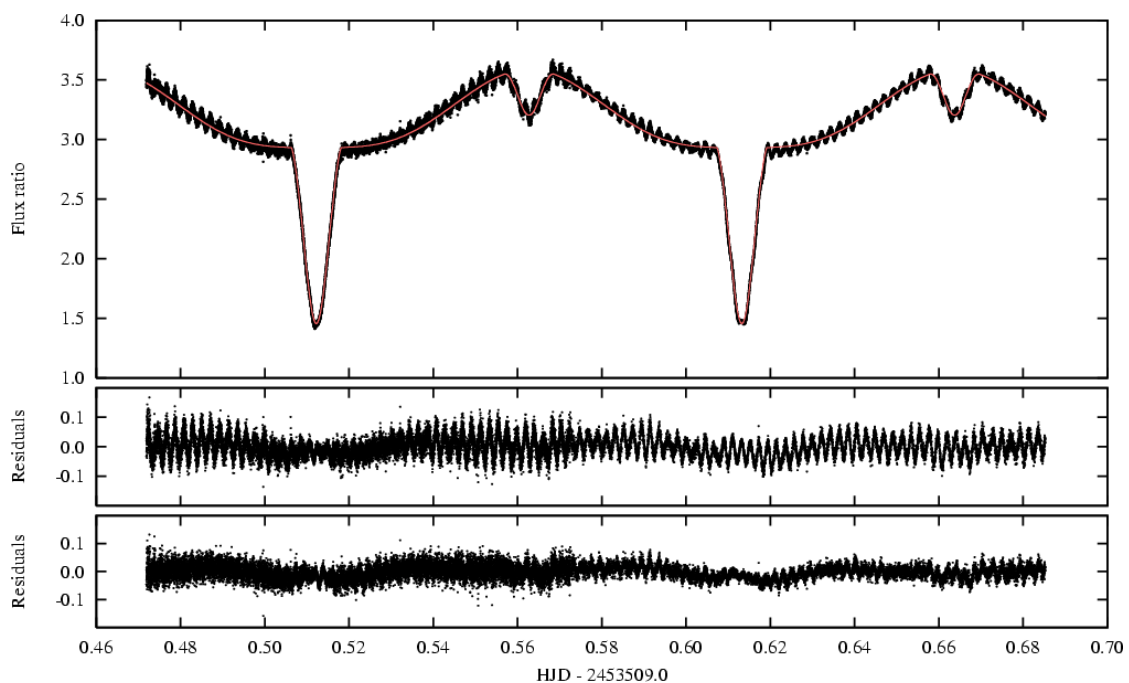
Vuckovic, et al. (2007) су пријавили четири поуздано измерене фреквенције. Међутим, резидуи задржавају периодичну структуру и после укључивања десетина сигнала малих амплитуда у Фуријеов фит. Другим речима, ове осцилације нису погодне за анализу Фуријеовом и сличним методама – зато што нису синусоидалне.

Ово је велика препрека за даљу анализу и како тренутно ствари стоје, представља непремостив проблем за примену предложене методе идентификације мода. Ако у резидуима после одузимања орбиталног решења постоје периодични сигнали који се не могу укључити у анализу, они ће неизбежно довести до погрешне идентификације. Конкретно, у овом случају би у пробне моделе било могуће укључити четири моде са параметрима које су измерили Vuckovic, et al. (2007), при чему у посматрањима очигледно постоје још неке моде, чији се параметри не знају, што значи да ће се сваки пробни модел лоше поклапати са посматрањима. Као што је показано у претходном поглављу, резултати идентификације се не

могу сматрати за поуздане уколико не доводе до доброг поклапања са посматрањима.



Слика 6.2: Крива сјаја NY Vir у g филтеру, заједно са орбиталним решењем (горе); резидуи после одузимања орбиталног решења (у средини) и резидуи после итеративног уклањања осцилаторних сигнала (доле). Преузето из Vuckovic, et al. (2007).



Слика 6.3: Исто као на слици 6.2, за филтер r. Преузето из Vuckovic, et al. (2007).

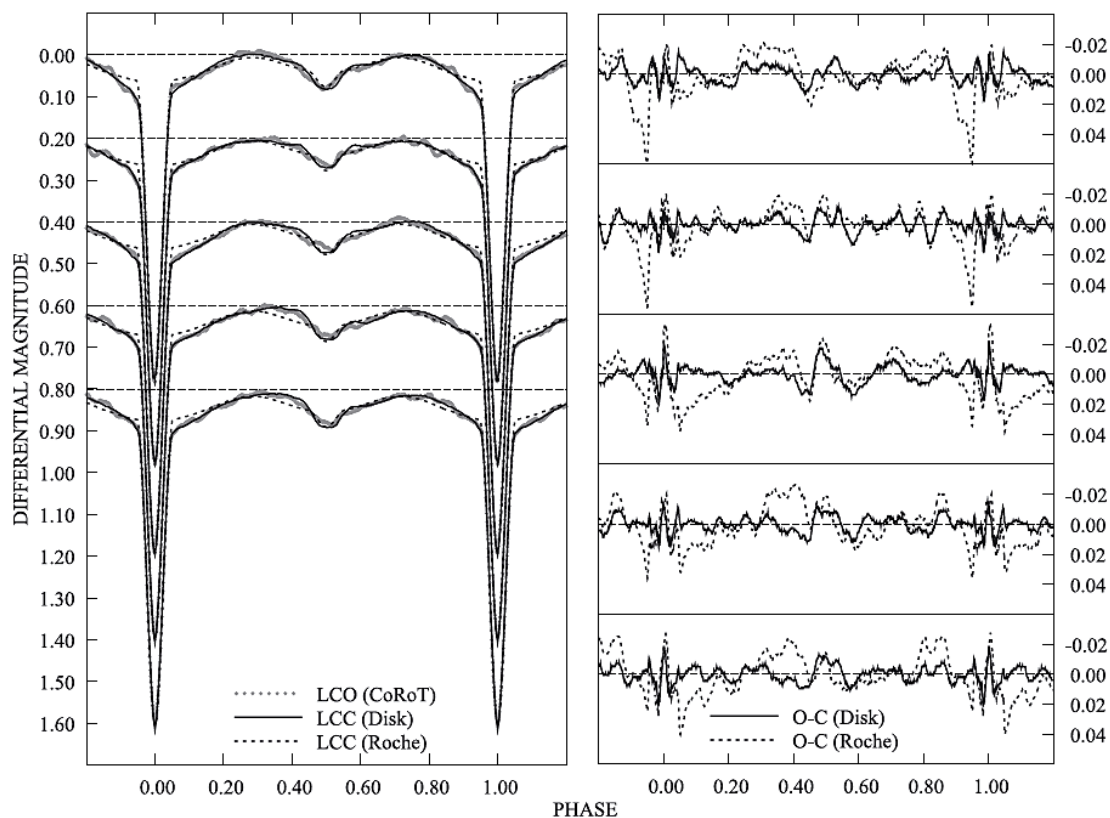
Једно могуће решење за овај проблем је изоловање и карактеризација преосталих сигнала алтернативним техникама. Како су осцилације великих амплитуда код класичних пулсирајућих променљивих такође не-синусоидалне, у сваком случају ће бити неопходно осмислити неки приступ таквим кривама сјаја у току будућег истраживања.

6.3. Шта са хармоницима орбиталне фреквенције? Случај AU Mon

Као што је наговештено у одељку 1.8, код звезда чланица тесно двојних система у којима нису побуђене сопствене осцилације, двојност може довести до појаве такозваних плимски изазваних мода. Наиме, плимски потенцијал у двојном систему способан је да наметне осцилације одређене фреквенције. Када се ова фреквенција поклопи са фреквенцијом неке од сопствених природних мода звезде, та мода бива резонантно побуђена.

Другим речима, посматрачки „потпис“ плимски индукованих осцилација су фреквенције које су целобројни умношци орбиталне фреквенције. Међутим, испоставља се да је веома тешко доказати да се детектоване фреквенције могу протумачити на овај начин (видети, на пример, Aerts & Harmanec (2004), Claret, et al. (2005) и њихове референце). Детекција фреквенција које су тачни умношци орбиталне фреквенције недвосмислено је потврђена за само два двојна система до сад: за хибридную δ Sct/ γ Dor звезду HD 209295 (Handler, et al., 2002) и споропулсирајућу В звезду HD 177863 (De Cat, et al., 2000). У оба случаја пулсирајуће звезде су чланови ексцентричних система кратког периода, у којима је ситуација повољна за плимско побуђивање. Међутим, астросеизмолошке студије ових објеката нису могуће зато што код HD 209295 моде нису идентификоване, а код HD 177863 је установљена само једна фреквенција.

Један пример потешкоћа везаних за мерење и тумачење фреквенција детектованих на звезди чланица тесно двојног система описан је у раду „Accretion disc in the eclipsing binary AU Mon“ (Djurašević, et al., 2010), у ком сам потписана као други аутор. Овде ћу укратко резимирати садржај рада, са детаљнијим освртом на изложену дискусију о проналажењу и интерпретацији периодичних сигнала у кривој сјаја.

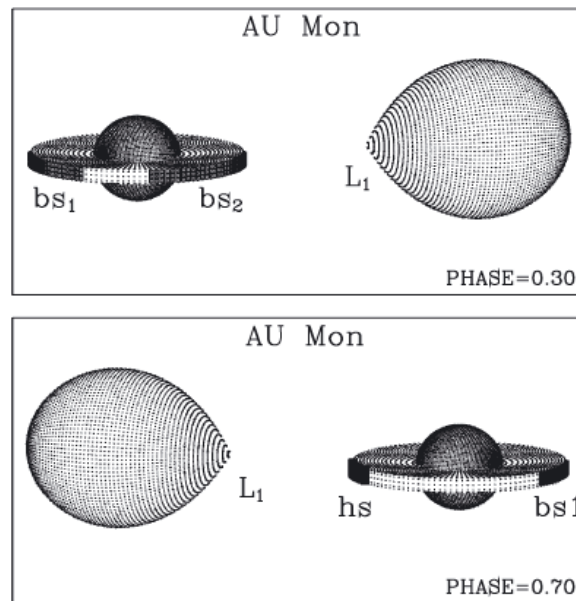


Слика 6.4: Посматране и синтетичке криве сјаја двојног система AU Mon. Посматрања су преузета из јавне архиве мисије *COROT*, а модел је начињен помоћу програма описаног у Đurašević (1991) и Đurašević (1992). Са леве стране је дато поређење посматрања и три понуђена модела, а са десне, резидуи.

AU Mon је еклипсна, спектроскопски двојна звезда са примарном (масивнијом и топлијом) компонентом спектралне класе Ве и секундарном (хладнијом, али већом) компонентом спектралне класе G. Удвојене емисионе линије у спектру примарне компоненте упућују на постојање акреционог диска кроз који се врши трансфер масе на примарну са секундарне звезде, која испуњава свој Рошов овал. Звезде су у кружној орбити са периодом од око 11 дана, при чему је од раније била позната додатна променљивост са периодом од око 417 дана и амплитудом од око 0.25 mag. Ова променљивост сврстава AU Mon у недавно откривену класу двојних звезда са дуплим периодом (Mennickent, et al., 2003).

Детаљно моделирање система, укључујући и акрециони диск, било је могуће захваљујући фотометријским подацима из јавне архиве сателитске мисије *Corot* и спектроскопски одређеним односом маса, те растојањем, преузетим из студије истог објекта од стране Desmet et al. (2010). Криве сјаја и поклапање са моделима приказани су на слици 6.4.

Главна одлика нашег модела је присуство акреционог диска око примарне компоненте. Диск је оптички и геометријски дебео; то значи да, осим што ре-емитује, такође и апсорбује зрачење са централне звезде, те је делимично заклања. Облик диска је конкаван, тј. диск се проширује од централне звезде ка спољашњем ободу. Расподела температуре је експоненцијална, а комплексне асиметрије у кривој сјаја успешно се описују додавањем активних региона (светлих пега) на руб диска. Геометрија модела је приказана на слици 6.5.



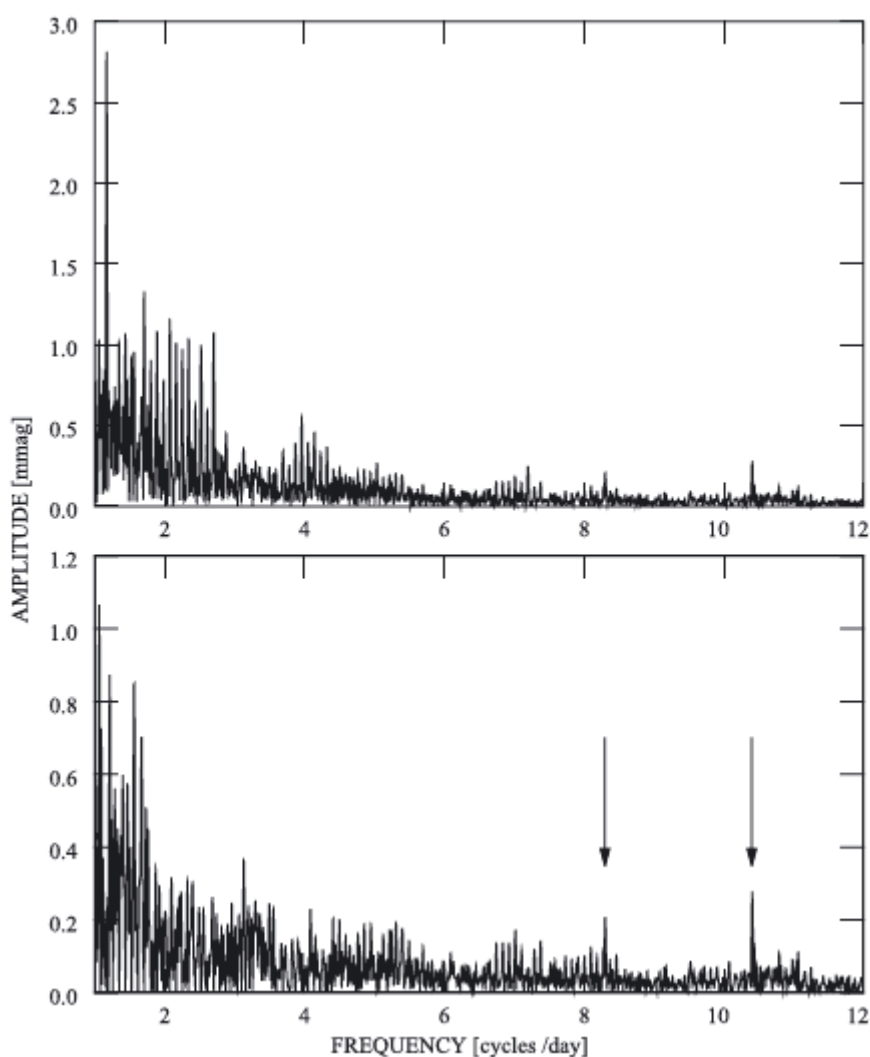
Слика 6.5: Приказ геометрије двојног система AU Mon.

У оквиру овог модела, дуги период од 417 дана се тумачи променама у структури акреционог диска, који осцилује заједно са стопом трансфера масе. Ово је објашњење тренутно прихваћено и у другим случајевима двојних звезда са дуплим периодом. С друге стране, кратко-периодичне промене уочљиве у кривој сјаја смо протумачили као индикацију да на обе компоненте постоје звездане осцилације.

Наиме, секундарна звезда је кандидат за осцилације Сунчевог типа, и могла би бити одговорна за велики број сигнала који су очигледно изнад нивоа шума (видети слику 6.6). С друге стране, током примарног помрачења у кривој сјаја уочавају се промене које на први поглед делују периодично, али је, услед кратког трајања помрачења и правилно распоређених прекида (односно, непомрачених делова криве сјаја), било немогуће поуздано измерити фреквенцију овог сигнала.

Без обзира на то, предложили смо да би његово порекло могло бити присуство скривених мода (видети одељак 2.3) на примарној звезди.

У одељку 5.2.2 било је речи о томе зашто је битно да се, у потрази за осцилацијама на компонентама двојних система, пронађе и од посматрања одузме орбитално решење које се добро поклапа са посматрањима. Свако одступање модела од посматрања доводи до појаве лажних сигнала у периодограму криве сјаја и то управо на фреквенцијама које су хармоници орбиталне фреквенције.



Слика 6.6: Фурије-периодограм израчунат на основу резидуа између посматране и моделиране криве сјаја двојне звезде AU Mon, у опсегу фреквенција од 0 до 12 циклуса по дану. Горе је оригинални спектар фреквенција, а доле, исти спектар после итеративног уклањања хармоника орбиталне фреквенције.

Изазов је, дакле, у распетљавању орбиталних сигнала и сигнала који заиста потичу од сопствене променљивости једне или обе компоненте. У случају AU Mon, ово се показало као немогућа мисија. Иако је детаљно моделирање довело

до великог побољшања у слагању са посматрањима у односу на претходне modele који нису у обзир узимали акрециони диск, резидуима добијеним после наше анализе и даље су доминирали хармоници орбиталног периода. На слици 6.6 се види периодограм резидуа у опсегу фреквенција до 12 циклуса по дану (веће фреквенције нису приказане зато што на њима нема сигнала са амплитудама изнад нивоа шума), пре и после уклањања више од четрдесет хармоника орбиталног периода техником итеративног избељивања. Иако је могуће да су неки од ових сигнала изазвани плимски побуђеним модама, не постоји објективни критеријум на основу којег би се они разликовали од лажних сигнала који потичу од неслагања између посматрања и модела.

Процедура итеративног избељивања је, међутим, уродила плодом у том смислу што су нашом анализом потврђене две претходно откривене фреквенције на 8.3 и 10.4 циклуса по дану, које засигурно потичу од сопствене променљивости једне од компонената, или самог акреционог диска.

Као кандидат за примену предложене методе идентификације мода путем директног фитовања сферних хармоника, AU Mon је далеко од идеалног система. Наш рад је показао да његова асиметрична и неправилна крива сјаја осликава комплексну природу самог система. Две поуздано детектоване фреквенције су малих амплитуда у односу на хармонике орбиталног периода, чије порекло није утврђено, а притом није јасно са које компоненте поуздане фреквенције потичу. Иако би се у принципу могли конструисати модели где се одговарајуће осцилације јављају или на примарној или на секундарној компоненти, могућност да потичу са акреционог диска се не може искључити, а у овом тренутку, такве варијације се не могу представити у оквиру употребљеног модела. За успешну примену предложене методе ипак би било много повољније (и информативније) одабрати једноставнији систем у коме се орбитални ефекти могу лакше раздвојити од других типова променљивости.

7. Закључак

Циљ овог рада био је да се направи модел звезданих осцилација у тесно двојним системима у оквиру Рошовог формализма, те да се осмисли и тестира поступак идентификације мода на основу фотометријских посматрања таквих система. Ови циљеви су остварени са успехом већим него што се могло очекивати на основу ранијих искустава и на основу успешности технике идентификације мода мапирањем помоћу помрачења (Bíró & Nuspl, 2011).

Проблем идентификације мода описан је у поглављу 2, а модел двојног система и звезданих осцилација, у поглављима 3 и 4. Предложена метода идентификације мода поређењем посматрања са мрежом пробних модела приказана је у поглављу 5. На низу представљених примера се види да у примени на синтетичке податке, метода даје коректне резултате за осно-симетричне звезде, а делимично коректне резултате за плимски изобличене звезде, при чему се неуспех методе у појединим случајевима може објаснити недостацима у поступку идентификације који се могу отклонити увођењем фитовања параметара осцилација.

Осим у смислу усавршавања поступка на основу искустава стечених током израде дисертације, предложени модел и метода идентификације мода могу се даље развијати у неколико различитих праваца, као на пример:

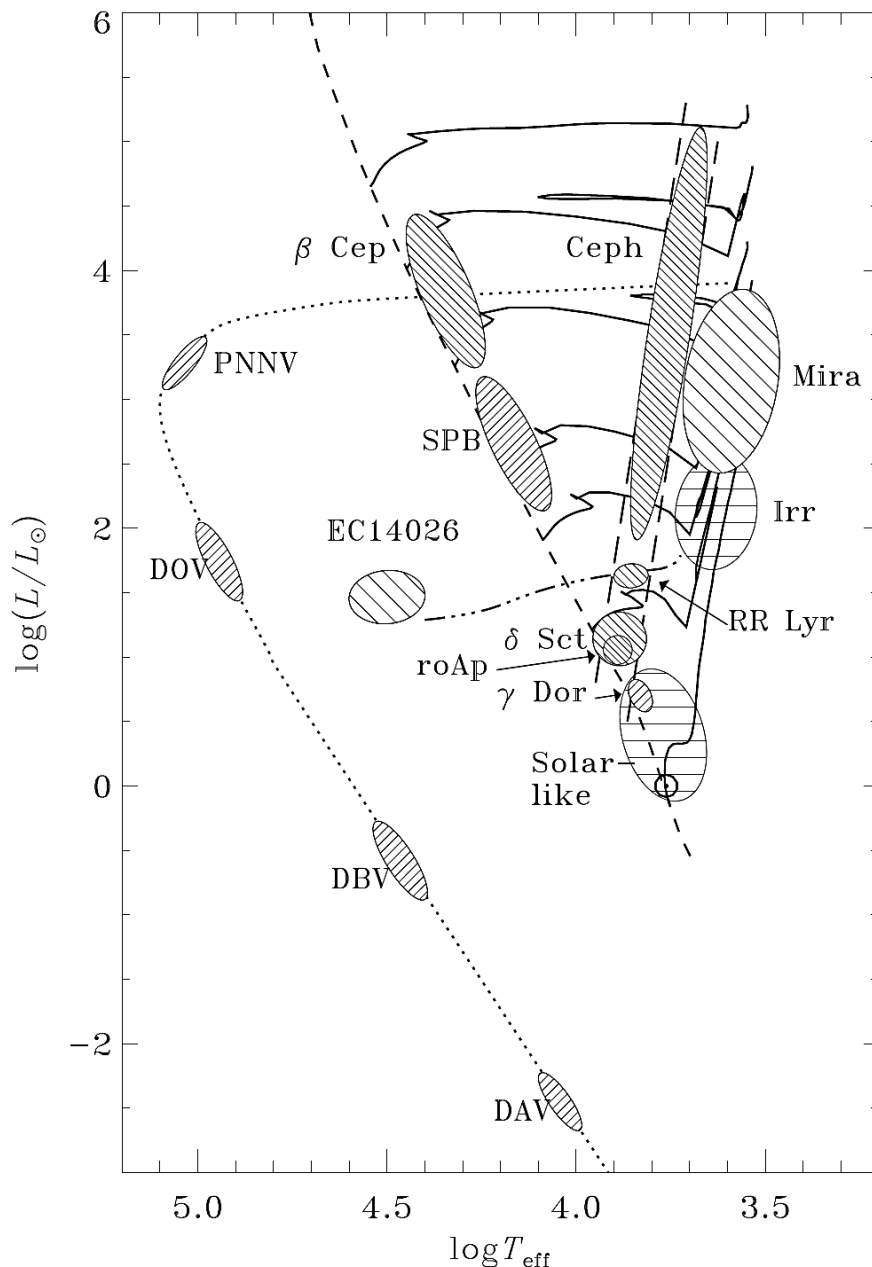
- Моделирање радијалних осцилација великих амплитуда какве се јављају код класичних пулсирајућих променљивих
- Укључивање пертурбација положаја у методу идентификације мода, те моделирање варијација у радијалним брзинама ради поређења са спектроскопским подацима
- Испитивање утицаја акреционог диска на видљивост осцилација
- Испитивање утицаја звезданих пега на видљивост осцилација
- Моделирање зависности амплитуда, фаза и фреквенција осцилација од ефективне таласне дужине филтера.

Али као први корак у будућем раду се намеће примена методе на посматрачке податке. У поглављу 6 се разматрају примери двојних система са пулсирајућим компонентама у којима није било могуће извести фотометријску идентификацију

мода због различитих отежавајућих околности. Најбољи кандидати за примену предложене методе су одвојени еклипсно двојни системи кратких периода у којима се детектују звездане осцилације типа γ Dor (видети одељак 8.1.2) или δ Sct (одељак 8.1.3) на приближно сферној звезди. Фотометријски подаци морају бити високог квалитета и обухватати неколико узастопних орбиталних периода како би се поуздано могле одредити фреквенције свих присутних осцилација. Оваква посматрања је данас могуће добити са сателитских опсерваторија као што су *Corot* и *Kepler*. У идеалном случају, идентификација мода извршена неком другом, независном техником (нпр. анализом варијација профила спектралних линија), могла би се поредити са резултатима примене методе предложене у овој дисертацији. Међутим, примера који задовољавају све ове критеријуме још нема у литератури, што није зачуђујуће с обзиром на то да је астросеизмологија, а поготово у тесно двојним системима, и даље област у повоју.

8. Преглед типова и особина пулсирајућих звезда

У овом поглављу биће укратко описане најважније врсте пулсирајућих звезда, по реду по коме су приказане на Х-Р дијаграму на Слика 8.1, са које се може одмах закључити да се осцилације јављају у практично свим фазама еволуције звезда.



Слика 8.1: Положај зона нестабилности за најважније типове променљивих звезда. Испрекидана линија представља главни низ нулте старости; пуне линије су изабране еволутивне путање за масе од 1, 2, 3, 4, 7, 12 и 20 маса Сунца; испрекидана линија са тачкама је хоризонтална грана; тачкаста линија је крива хлађења белих патуљака. Преузето из Aerts, et al. (2010).

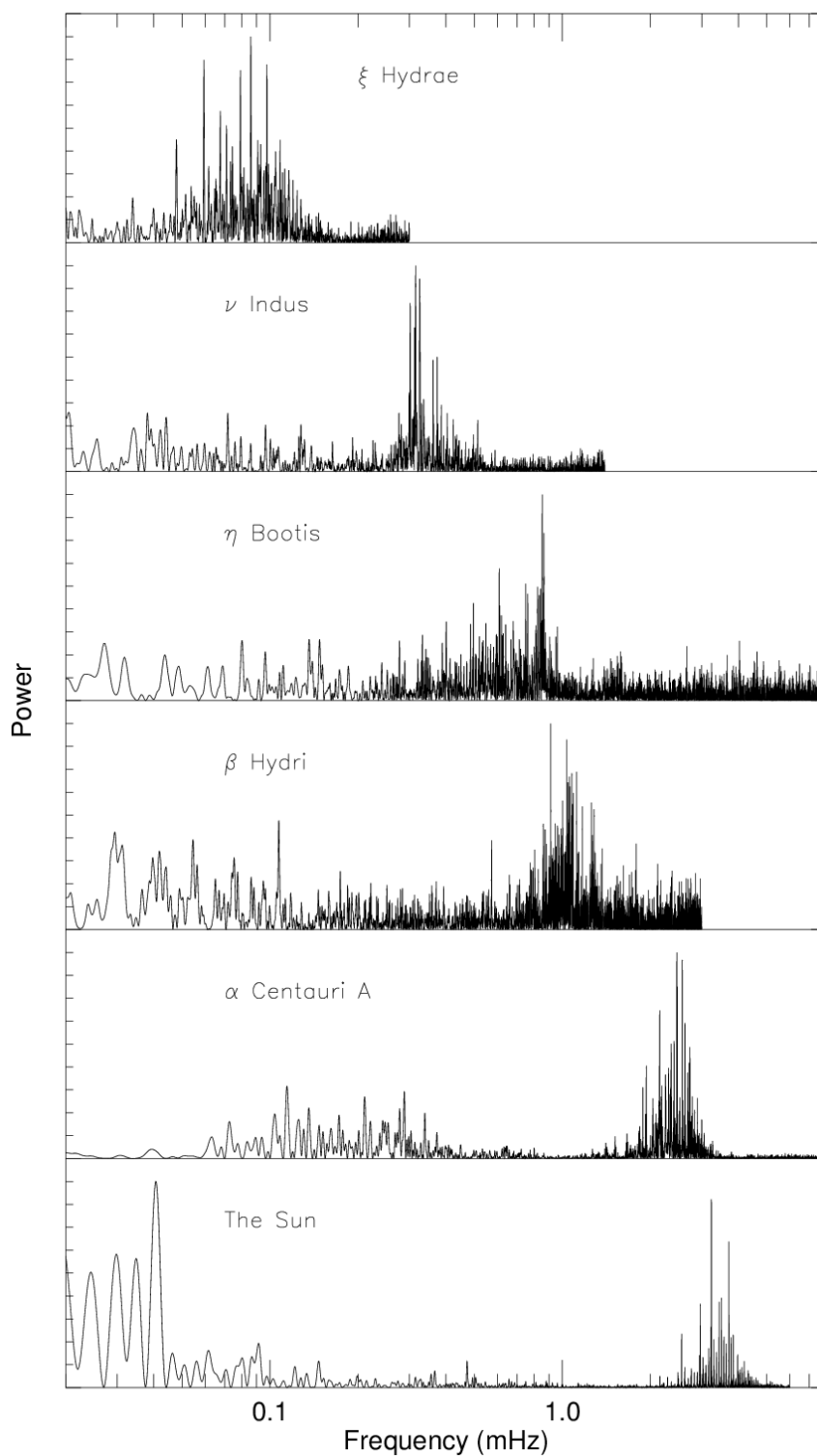
Највећи број пулсирајућих звезда се ипак налази у области између две испрекидане, скоро вертикалне линије – у класичној зони нестабилности. Осцилације код звезда у овој области су узроковане топлотним механизмом у слоју где долази до друге парцијалне јонизације хелијума, односно тамо где се мешају He II и He III. С друге стране, за осцилације код црвених цинова и суперцинова попут Море и других полу-периодичних променљивих, одговорни су слојеви у којима долази до прве парцијалне јонизације водоника и хелијума, заједно са конвекцијом. Коначно, код најтоплијих звезда као што су звезде типа β Сер, споро-пулсирајуће В звезде, суперцинови и субпатуљци В типа, осцилације изазивају слојеви у којима долази до јонизације елемената из групе гвожђа. Насумично побуђене пулсације се могу очекивати код свих звезда које имају спољашњу конвективну зону. Код компактних објеката као што су пулсирајући бели патуљци, звезде типа GW Vir и WR звезде, јављају се γ -моде које настају услед парцијалне јонизације угљеника и кисеоника у површинским слојевима. О свим овим типовима звезда биће речи у наставку.

8.1. Осцилације на главном низу

Преглед пулсирајућих звезда на главном низу почиње са звездама малих маса, а завршава се са звездама великих маса.

8.1.1. Осцилације код звезда Сунчевог типа

Мале петоминутне осцилације на Сунцу настају услед конвективног, турбулентног кретања при површини, па је за очекивати да ће сличне осцилације постојати и на другим звездама са површинским конвективним зонама. Пошто се ове осцилације побуђују насумице и имају веома мале амплитуде, тешко их је детектовати. Потрага за малим осцилацијама на звездама у близини Сунца је почела раних 1980-тих, а прво откриће спектра фреквенција са расподелом сличном Сунчевој пријавили су Brown et al. (1991), за α CMi (Procyon, F5IV). За прву детекцију индивидуалних фреквенција на η Boo заслужни су Kjeldsen et al. (1995), док је детекција на Procyon-у непобитно успостављена тек 1999. године (Martić, et al.). Ова пионирска открића су била увод за читав низ детекција током 2000-тих.



Слика 8.2: Дијаграми снаге за пет звезда код којих су детектоване мале осцилације Сунчевог типа, у поређењу са Сунчевим подацима са инструмента GOLF. Преузето из Christensen-Dalsgaard (2002).

Откривене фреквенције на свим звездама (видети узорак на слици 8.2), се понашају у складу са општим предвиђањима која проистичу из проучавања

Сунца, али су детаљне студије насумично побуђених осцилација још увек у повоју у поређењу са хелиосеизмологијом.

8.1.2. Звезде типа γ Dor

Након открића да три звезде раног F-типа – γ Doradus (F4III), HD 96008 (F0V) и HD 164515 (F2IV-V) – имају сличне пулсационе особине (Krisciunas, et al., 1993), успостављен је нови тип пулсирајућих звезда који, према прототипу, носи назив γ Dor (Kaue, et al., 1999). На X-P дијаграму, ове звезде се налазе на пресеку црвене ивице класичне зоне нестабилности и главног низа, а карактерише их мулти-периодична променљивост са индивидуалним периодима између 0.4 и 3 дана. Периоди те дужине су за ред величине већи од периода који би се могли очекивати за п-моде на оваквим звездама, те се њихова променљивост тумачи у смислу нерадијалних г-мода високог реда (n) и ниског степена (ℓ), које настају услед блокирања конвективног флуksа на доњој граници конвективног омотача (Guzik, et al., 2000).

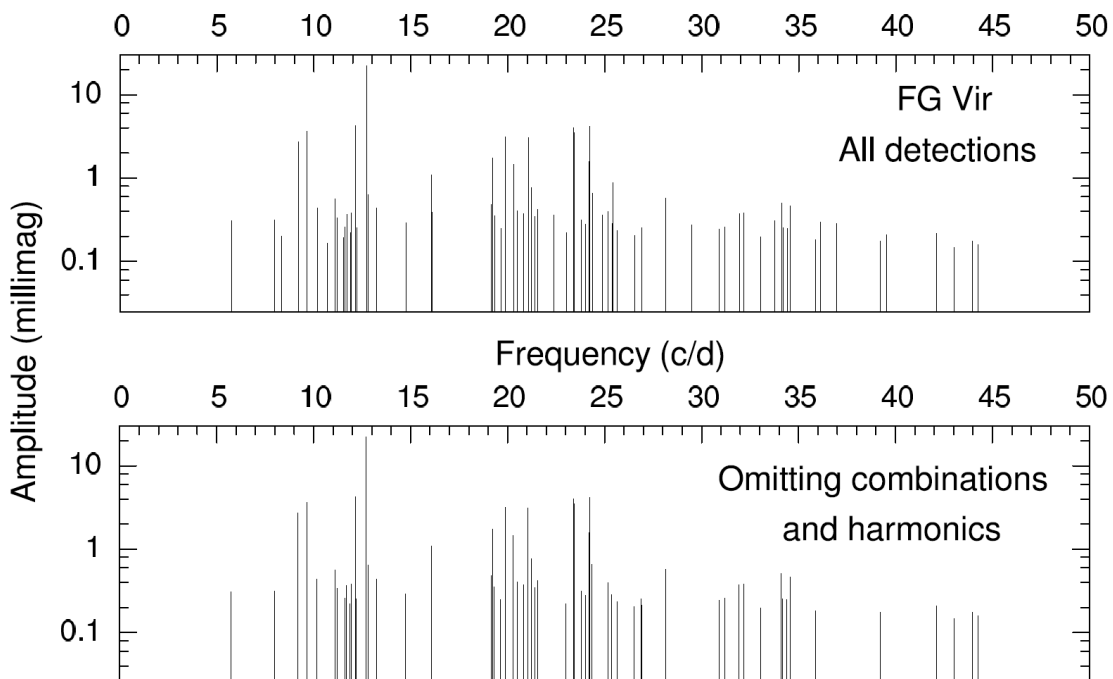
Дуги периоди су проблематични за прикупљање посматрачког материјала довољно високог квалитета за астросеизмолошке студије. До 2005. године знало се за не више од педесетак представника ове класе, од којих је само неколико било проучено (Aerts, et al., 2010). Без обзира на потешкоће, γ Dor звезде су привлачни објекти зато што је могуће да ће на њима, поред г-мода, бити откривене и п-моде Сунчевог типа.

8.1.3. Звезде типа δ Sct

Ове пулсирајуће звезде чине добро дефинисану групу. То су објекти популације I, са масама између 1.5 и 2.5 масе Сунца, које се на X-P дијаграму налазе управо на месту где класична зона нестабилности сече главни низ. Осцилације су побуђене топлотним механизмом у слоју где долази до друге парцијалне јонизације хелијума и могу бити и радијалне и нерадијалне. То су п-моде ниског степена (ℓ) са периодима од 18 минута до 8 сати и са великим опсегом амплитуда, од хиљадитих до десетих делова магнитуде. Велике амплитуде и кратки периоди чине ове променљиве звезде привлачним за посматрање; стотине примера откривених до 2000. године могу се наћи у каталогу који су сачинили Rodriguez et al. (2000), а број се стално повећава захваљујући сателитским посматрањима.

Код извесних δ Sct звезда су откривене многе радијалне и нерадијалне моде. Примери су FG Vir (слика 8.3), са 79 детектованих фреквенција (Breger, et al., 2005), 4 CVn, са 34 фреквенције (Breger, 2000) и XX Puc, са 30 фреквенција (Handler, et al., 2000). Спектри фреквенција код ових звезда су јако комплексни и не показују правилности уочене код малих Сунчевих осцилација, што отежава, или сасвим онемогућава идентификацију мода, а самим тим и детаљну астросеизмолошку интерпретацију.

Како се δ Sct звезде налазе на прелазу између структуре са конвективним и радијативним омотачем, успешна примена астросеизмолошких метода би могла значајно да прошири наше разумевање процеса који учествују у прелазу из једног режима у други – од радијативног и конвективног преноса енергије, до феномена везаних за дифузију у мешање. Из тог разлога, δ Sct звезде су међу приоритетним метама сателитских посматрања. Зато и модели на којима је била демонстрирана предложена метода за идентификацију мода, имају особине типичне за ову врсту пулсирајућих звезда.



Слика 8.3: Дијаграм фреквенција за звезду FG Vir типа δ Sct (Breger, et al., 2005), са и без „лажних“ детекција. Упоредити са спектрима осцилација на Сунцу и Сунцу сличним звездама.

Постоји посебна класа за звезде Популације II које се понашају слично звездама типа δ Sct: то су звезде типа SX Phe. Њихове главне карактеристике су велике

амплитуде осцилација и мала металичност и углавном се налазе у глобуларним јатима. На основу узорка од око 150 примера из наше и суседних галаксија, Rodriguez & Lopez-Gonzales (2000) су закључили да се периоди детектованих осцилација код ових звезда повећавају са металичношћу.

8.1.4. Брзо-ротирајуће Ар звезде

У истом региону X-P дијаграма налази се још једна класа пулсирајућих звезда: брзо-ротирајуће Ар звезде – звезде типа А са атипичним хемијским саставом, површинским нехомогеностима (хемијским пегама) и јаким магнетним пољима, те мулти-периодичним осцилацијама малих амплитуда (око стотих делова магнитуде) и периодима између 5 и 20 минута. Ове фреквенције одговарају п модама високог реда и ниског степена и често се јављају у мултиплетима који се тумаче у смислу ротационе модулације до које долази када се оса ротације звезде не поклапа са осом симетрије осцилација, односно магнетном осом (Reed, et al., 2005). Раздвајање мода на мултиплете може се употребити за дијагностику јачине магнетног поља, као и за одређивање инклинације између ротационе и магнетне осе (Aerts, et al., 2010).

8.1.5. Споро-пулсирајуће В звезде

Младе звезде типова од В3 до В9, са масама између 2 и 7 маса Сунца, променљиве на сличан начин као звезде типа γ Dor али са периодима од 0.8 до 3 дана, чине посебну класу пулсирајућих звезда – споро-пулсирајуће В звезде. Мултипериодичне осцилације на овим звездама су г-моде високог реда побуђене топлотним механизмом повезаним са повећањем непрозрачности за које су одговорни метали из групе гвожђа, познато и као *Z bump* (Dziembowski & Pamiatnykh, 1993) и (Gautschy & Saio, 1993).

8.1.6. Звезде типа β Cep

Група променљивих звезда за које је прототип β Cep позната је још од почетка двадесетог века. Ово су звезде на главном низу, са масама између 8 и 12 маса Сунца, које осцилују у п-модама високог и г-модама ниског реда са периодима од 2 до 8 часова. Познат је велики број примера (Stankov & Handler, 2005). Код већине су промене у сјају израженије на плавим него на црвеним таласним

дужинама и фазно су померене у односу на варијације радијалне брзине за четвртину периода, што је типично за адијабатске осцилације (Dupret, et al., 2003). Нерадијалне осцилације код ових звезда су изазване истим топлотним механизмом који покреће осцилације код споро-пулсирајућих В звезда; шта више, постоји извесно преклапање између теоријских зона нестабилности за ова два типа пулсирајућих звезда и очекује се откриће хибридних примерака.

8.1.7. Пулсирајуће Ве звезде

Ве звезде су В звезде са емисионим линијама из Балмерове серије које по свој прилици настају у околзвезданом екваторијалном диску. Многе Ве звезде су чланови тесно двојних система, где се диск формира услед претицања критичног Рошовог овала, односно размене масе. Није јасно да ли је диск код усамљених Ве звезда нормална фаза еволуције, или последица неке необичне појаве, на пример магнетног поља или нерадијалних осцилација. Неке звезде из ове класе ротирају брзинама које су блиске критичној брзини ротације, па би диск могао настати од материјала одбеглог са екватора.

У астросеизмолошком смислу, Ве звезде имају сличне особине као њихови „нормални“ суседи, споро-пулсирајуће В и β Сер звезде, па зато и нису приказане као посебна класа на слици 8.1. Без обзира на то, ови интересантни објекти су привлачни за астросеизмолошко проучавање и налазе се међу примарним метама сателитских посматрања.

8.2. Осцилације код протозвезда

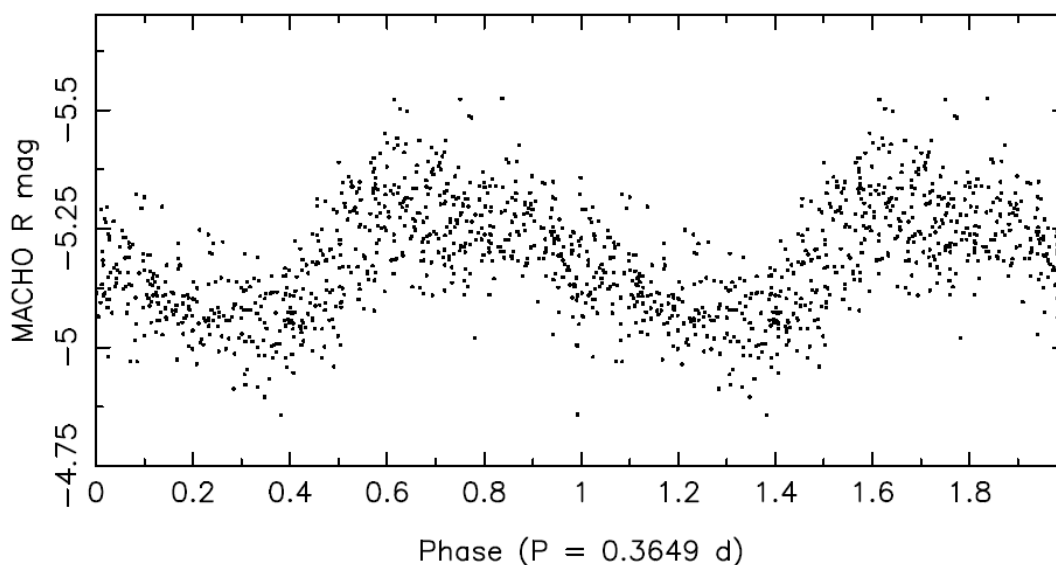
Протозвезде већих маса током сажимања ка главном низу пролазе кроз класичну зону нестабилности. Током ове фазе еволуције, звезде су веома променљиве, како фотометријски тако и спектроскопски, на временским скалама од минута до година и ова нестабилност је углавном последица активности и интеракције са међузвезданом околином. Али могуће је да део краткопериодичне променљивости потиче од осцилација. С обзиром да је структура протозвезда другачија од структуре звезда на главном низу, проучавање њихових осцилација би било од помоћи, између осталог, при утврђивању тачне фазе еволуције за објекте сличних температура и луминозности.

8.3. Осцилације код еволуираних звезда

Еволуција звезда после главног низа се драстично разликује за звезде малих ($M < 9M_{\odot}$) и великих маса. Звезде из прве групе (звезде типа RR Lyr, Цефеиде, звезде типа RV Тау, Мира и полу-периодичне променљиве), неминовно завршавају на тзв. „кривој хлађења“ белих патуљака (слика 8.1), док звезде из друге (променљиви суперцинови типова А и В, и WR звезде) експлодирају као супернове и остављају за собом егзотичне компактне објекте.

8.3.1. Звезде типа RR Lyr

Заједно са Цефеидама (о којима ће бити више речи у наставку), звезде типа RR Lyr се сматрају класичним радијално пулсирајућим звездама. Углавном су то звезде са једним периодом од отприлике пола дана. Као такве, нису од великог интереса за астросеизмолошке студије, али су и даље од велике важности у смислу одређивања космичке скале даљина.



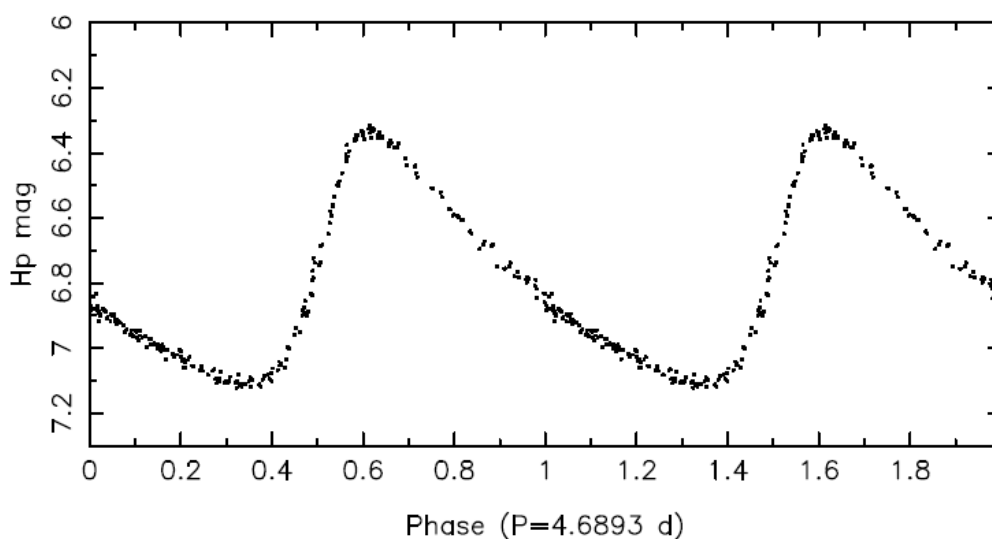
Слика 8.4: Крива сјаја једне MACHO RRd звезде, сведена на фазе доминантне осцилације. Преузето из (Kovacs, 2000).

Механизам побуђивања осцилација код звезда типа RR Lyr је добро познат тоplotни механизам који делује у зони парцијалне јонизације He II – He III. Према амплитуди и закривљености криве сјаја, као и према периоду осциловања, деле се на три класе: RRa, RRb, и RRc звезде, при чему се данас прва два типа разматрају као исти, RRab тип. Оне пулсирају у фундаменталној радијалној моди

и имају асиметричне криве сјаја; RRc звезде, с друге стране, осцилују у првом хармонику и имају синусоидалне криве сјаја. Уведена је и четврта класа, RRd, у коју се сврставају звезде код којих се амплитуда пулсација мења на релативно малим временским скалама. Испоставља се да ове звезде пулсирају у две моде: фундаменталној радијалној и њеном првом хармонику, што их чини привлачним за астросеизмолошка истраживања.

8.3.2. Цефеиде

Значај Цефеида, осим када пулсирају у две или више мода, није толико велики за астросеизмологију, колико за друге области астрономије које зависе од одређивања удаљености објеката. Цефеиде су познате по фундаменталној релацији између периода и сјаја, коју је открила Хенријета Левит (Leavitt & Pickering, 1912), а калибрисао Еинар Хершпрунг (Hertzsprung, 1914). Као што је напоменуто у одељку 1.1, из ове релације може се израчунати апсолутна магнитуда, а онда и удаљеност звезде.



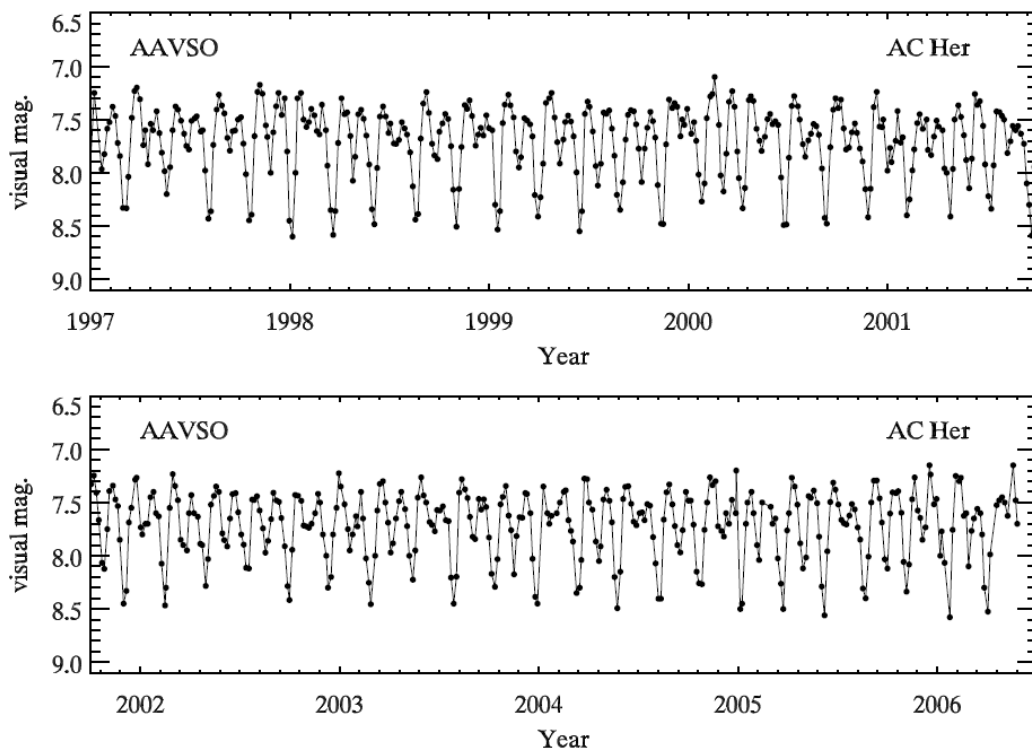
Слика 8.5: Крива сјаја класичне Цефеиде HD 112044 са мисије Hipparcos.

Класичне Цефеиде (Цефеиде Популације I), су цинови и суперцинови спектралних класа између F5 и G5, а са периодима од 1 до 50 дана. Њихове криве сјаја су асиметричне и строго периодичне, што се види на слици 8.5. Амплитуде пулсација су око једне магнитуде на видљивим таласним дужинама. Промене у сјају прате и промене спектралне класе, боје и температуре. Код прототипа, δ Сер, спектрална класа у максимуму сјаја је F5, а у минимуму, G2, при чему је

одговарајућа промена температуре око 1500 K. Између фотометријског и спектроскопског екстремума пулсације (обично максимуму сјаја одговара минимум радијалне брзине), постоји мали фазни помак. Такође постоји и добро дефинисана зависност боје (B-V) и периода; за дату луминозност, Цефеиде каснијих спектралних класа имаће дуже периоде.

Као и код звезда типа RR Луг и код Цефеида су пронађени примерци који осцилују у две моде. Обично су то фундаментална радијална мода и њен први хармоник, или први и други хармоник. Овакве звезде се зову дупло-периодичне Цефеиде и код њих се астросеизмолошким техникама могу измерити маса и радијус (Petersen1973). Први резултати ове врсте били су у супротности са очекивањима, с обзиром на положај Цефеида на ХР дијаграму и довели су до опсежне ревизије утабличених непрозрачности, после које је проблем био решен.

Откривено је и неколико Цефеида које пулсирају у три моде, где се трећа мода тумачи као други хармоник фундаменталне радијалне моде. Код ових звезда су осим масе и радијуса добро одређени и еволутивни статус, металичност и дубина конвективне зоне током живота на главном низу.



Слика 8.6: Крива сјаја звезде AC Her типа RV Тау током деценије од 1997 до 2007 године. Преузето од Aerts, et al. (2010).

Цефеиде Популације II се према периоду деле на три групе: звезде типа BL Her имају периоде између 1 и 5 дана и сличне су луминозности као звезде типа RR Lyr; периоде од 10 до 20 дана имају звезде типа W Vir, а дуже периоде имају звезде типа RV Tau. Ове класе објеката до зоне нестабилности стижу различитим еволутивним путањама. Интересантна одлика RV Tau звезда је то што имају плитке и дубоке минимуме који се смењују на правилан начин (Слика 7.6). Порекло различитих минимума још није објашњено, а дуги периоди осцилација (50-150 дана) свакако нису повољни за детаљне студије осцилација. Још једна занимљива појава у вези са овом класом Цефеида је што се већином налазе у двојним системима дугих периода.

8.3.3. Мира и неправилно променљиве звезде

Звезде Популације I са луминозностима од хиљаду до десет хиљада пута већим од луминозности Сунца и ниским температурама, између 2500 и 3500 K, се зову Миридама када су им амплитуде промене сјаја веће од 2.5 mag на видљивим таласним дужинама, односно неправилно променљивим звездама када су им амплитуде мање, иако су код многих звезда из ове друге класе осцилације једнако периодичне као и код других, „правилно“ пулсирајућих звезда, тако да је ова подела донекле произвољна. Неки од ових објеката имају плитке и дубоке минимуме на смену, као звезде типа RV Tau. Код ових звезда, у регионима у којима долази до побуђивања мода, конвекција потпуно доминира као вид преноса енергије, што јако компликује теорију звезданих осцилација. Захваљујући пројектима MACHO и OGLE и анализи бројних крива сјаја, установљено је да Мира и сличне звезде пулсирају у фундаменталној радијалној моди, док неправилно променљиве звезде имају побуђене и више радијалне хармонике, али и даље није јасно које физичке карактеристике доводе до овог разилажења у посматраним особинама.

8.3.4. Осцилације Сунчевог типа у црвеним џиновима

Као што је наговештено раније, очекује се да све звезде са конвективним омотачима имају мале осцилације какве постоје на Сунцу. Овакве осцилације је тешко детектовати на променљивама великих амплитуда, као што су Мириде, али су откривене на великом броју црвених џинова (Hekker, et al., 2012).

8.3.5. Променљиви суперцинови типова А и В и WR звезде

Звезде које на главни низ ступе са почетном масом већом од 9 маса Сунца еволуирају ка све већим односима луминозности и масе како старе и приближавају се Едингтоновој граници – граничној вредности односа L/M при коме се гравитациона сила изједначава са силом притиска зрачења. Звезде у близини Едингтонове границе су нестабилне, склоне изненадним ерупцијама и константном губљењу масе путем јаког радијативног ветра узрокованог притиском зрачења. Иако је периодична променљивост установљена код неких примерака, теорија звезданих осцилација још није у стању да се носи са веома масивним звездама, јер су, с једне стране, модели с великим масама непоздани, а с друге, комплексни површински феномени отежавају успостављање чврстих посматрачких захтева.

8.4. Осцилације код компактних објеката

Под компактним објектима овде се подразумевају, осим еволуираних објеката са дегенерисаним језгрима (бели патуљци, неутронске звезде) и такозване суб-патуљасте В (укратко, „sdB“) звезде, од којих почињемо излагање у овом одељку.

8.4.1. Променљиве суб-патуљасте В звезде

То су звезде спектралне класе В са израженим недостатком хелијума и другим хемијским аномалијама, те необично малом луминозношћу, ефективним температурама од 23000 К до 32000 К, и масама испод 0.5 маса Сунца. Откривене су релативно скоро (Kilkenny, et al., 1997) и брзо су постале омиљена мета астросеизмолошких студија јер често имају мултипериодичне осцилације са периодима од 80 до 600 секунди и амплитудама од 0.001 до 0.3 mag у видљивом делу спектра. Механизам побуђивања је повезан са јонизацијом гвожђа, а према природи побуђених мода деле се на две подгрупе – променљиве са п-модама и г-модама, слично као код δ Sct и γ Dor звезда, односно β Cep и споро-пулсирајућих В звезда на главном низу.

8.4.2. Пулсирајући бели патуљци

Бели патуљци се деле на неколико спектроскопских класа у зависности од температуре; најврелији бели патуљци имају температуре и до 200000 К и често

се налазе у средиштима планетарних маглина, а неки и пулсирају. Бели патуљци температура мањих од 80000 К са јаким линијама He II зову се „DO“ звезде, аналогно звездама O класе. Патуљци класе „DB“ имају температуре између 12000 и 30000 К и линије He I, са мало или нимало линија H. Код „DA“ звезда у спектрима доминирају водоникове линије из Балмерове серије, али им се температуре не поклапају са температурама A звезда на главном низу: могу се наћи бели патуљци овог типа са температурама од 4500 до чак 170000 К.

Важан процес који одређује структуру белих патуљака (и неких променљивих звезда на главном низу, као што су β Сер, споро-пулсирајуће В и брзо-ротирајуће А звезде), је атомска дифузија. У њему се гравитационо слегање и радијативна левитација натичу са турбулентним мешањем, поготово с конвекцијом. У присуству јаког гравитационог поља, слегање материјала доводи до раслојавања по хемијском саставу, тако да се најлакши елементи налазе у атмосфери и одређују спектралну класу. Стабилна стратификација (одсуство конвекције) обезбеђује услове за појаву γ -мода (видети једначину 1.21).

И заиста, откривен је велики број пулсирајућих белих патуљака који осцилују у γ -модама високих хармоника, а ниских степенова ($\ell \leq 2$), које су побуђене топлотним механизмима у различитим слојевима где долази до јонизације водоника или хелијума, зависно од класе објекта. Пошто за беле патуљке постоји строг однос између масе и радијуса, периоди осцилација су слични код свих примера и реда величине су од једног минута.

8.4.3. Неутронске звезде

Одмах по открићу пулсара (Hewish, et al., 1968), као једно од предложених објашњења за пулсирање појавиле су се и нерадијалне осцилације (Ruderman, 1968). Овај предлог је касније одбачен у корист идеје о прецесији магнетне осе око осе ротације. Осцилације су поново поменуте у контексту неутронских звезда тек релативно скоро (Strohmayer, et al., 1992), као објашњење за низ комплексних посматраних феномена, од покретних пулсева до стационарних под-пулсева, који се не могу описати у оквиру стандардних ротирајућих модела. Clemens & Rosen (2004) су предложили модел са осцилацијама чија се оса симетрије поклапа са магнетном осом уместо са осом ротације (такозвани „oblique pulsator model“), у

коме се квази-периодичне варијације описују смењивањем мода различитих хармоника и степенова. Но тренутно не постоје посматрања довољне поузданости да се ова и друге теорије осцилација на неутронским звездама потврде или елиминишу.

9. Код за моделирање осцилација у тесно двојном систему

Већ је неколико пута напоменуто да је предложени модел звезданих осцилација надограђен на постојећи модел двојног система, који је практично реализован у виду програма *Infinity* (Џеки, 2013, у припреми). Овде ће бити дати само они делови кода који су релевантни за моделирање осцилација, док се за детаље о моделирању самог двојног система, укључујући и код програма *Infinity*, читалац упућује на дату референцу.

Код за моделирање осцилација написан је у програмском језику C#, који је сличан познатом објектно-оријентисаном језику C++. Математички модели се у објектно-оријентисаним језицима реализују на веома природан начин, путем дефинисања *објеката*, њихових особина и операција које с њима могу да се врше. На пример, у моделу двојног система, сам систем је један објекат; однос маса, период, велика полуоса орбите, итд. су његове особине. На сличан начин се дефинише објекат који представља звезду, чије су особине ефективна температура, маса, радијус, итд. Двојни систем онда садржи две тако дефинисане звезде.

У оквиру модела звезданих осцилација, основни објекат је мода осциловања (одељак 9.3), према опису датом у одељку 4.2. У наставку су дате и најважније помоћне функције и објекти.

9.1. Помоћне функције и константе

```
1 using System;
2 using System.Numerics;
3
4 namespace Infinity.Numerics {
5     /// <summary>
6     /// Provides constants and static methods for trigonometric, logarithmic, and other
7     /// common mathematical functions.
8     /// </summary>
9     public static class Calc
10    {
11        /// <summary>
12        /// Represents the ratio of the circumference of a circle to its diameter,
13        /// specified by the constant,  $\pi$ .
14        /// </summary>
15        public const double Pi = Math.PI;
```

```

16    /// <summary>
17    /// Represents the constant  $2\pi$ , or 360 degrees in angular units.
18    /// </summary>
19    public const double TwoPi = 2.0 * Math.PI;
20
21    /// <summary>
22    /// Represents the constant  $3\pi$ .
23    /// </summary>
24    public const double ThreePi = 3.0 * Math.PI;
25
26    /// <summary>
27    /// Represents the constant  $4\pi$ .
28    /// </summary>
29    public const double FourPi = 4.0 * Math.PI;
30
31    /// <summary>
32    /// Represents the constant  $\pi/2$ , or 90 degrees in angular units.
33    /// </summary>
34    public const double PiOver2 = Math.PI / 2.0;
35
36    /// <summary>
37    /// Represents the constant  $\pi/3$ , or 60 degrees in angular units.
38    /// </summary>
39    public const double PiOver3 = Math.PI / 3.0;
40
41    /// <summary>
42    /// Represents the constant  $\pi/4$ , or 45 degrees in angular units.
43    /// </summary>
44    public const double PiOver4 = Math.PI / 4.0;
45
46    /// <summary>
47    /// Represents the constant  $\pi/6$ , or 30 degrees in angular units.
48    /// </summary>
49    public const double PiOver6 = Math.PI / 6.0;
50
51    /// <summary>
52    /// Represents the natural logarithmic base, specified by the constant, e.
53    /// </summary>
54    public const double e = Math.E;
55
56    /// <summary>
57    /// Represents the imaginary unit, i.
58    /// </summary>
59    public readonly static Complex i = Complex.ImaginaryOne;
60
61    /// <summary>
62    /// Returns a specified number raised to the specified power.
63    /// </summary>
64    public static double Pow(double x, double y)
65    {
66        return Math.Pow(x, y);
67    }
68
69    /// <summary>
70    /// Returns the square of a specified number.
71    /// </summary>
72    public static double Pow2(double x)
73    {
74        return x * x;
75    }

```

```

76     /// <summary>
77     /// Returns the cube of a specified number.
78     /// </summary>
79     public static double Pow3(double x)
80     {
81         return x * x * x;
82     }
83
84     /// <summary>
85     /// Returns the fourth power of a specified number.
86     /// </summary>
87     public static double Pow4(double x)
88     {
89         return x * x * x * x;
90     }
91
92     /// <summary>
93     /// Returns the fifth power of a specified number.
94     /// </summary>
95     public static double Pow5(double x)
96     {
97         return x * x * x * x * x;
98     }
99
100    /// <summary>
101    /// Returns the N-th power of a specified number.
102    /// </summary>
103    /// <param name="x">A real number.</param>
104    /// <param name="n">An integer number that specifies a power.</param>
105    /// <returns>The N-th power of x; that is, x^N.</returns>
106    public static double PowN(double x, int n)
107    {
108        if (n == 0 || x == 1.0)
109            return 1.0;
110
111        if (x == -1)
112            return n.IsOdd() ? -1.0 : 1.0;
113
114        double result = 1.0;
115
116        int absN = n < 0 ? -n : n;
117        for (int i = 1; i <= absN; i++)
118            result *= x;
119
120        if (n < 0)
121            return 1 / result;
122        else
123            return result;
124    }
125
126    /// <summary>
127    /// Returns the square root of a specified number.
128    /// </summary>
129    public static double Root2(double number)
130    {
131        return Math.Sqrt(number);
132    }

```

```

133     /// <summary>
134     /// Returns the cubic root of a specified number.
135     /// </summary>
136     public static double Root3(double number)
137     {
138         return Math.Pow(number, 1 / 3);
139     }
140
141     /// <summary>
142     /// Returns the fourth root of a specified number.
143     /// </summary>
144     public static double Root4(double number)
145     {
146         return Math.Sqrt(Math.Sqrt(number));
147     }
148
149     /// <summary>
150     /// Calculates the factorial of a small integer.
151     /// </summary>
152     /// <param name="n">A positive integer less than or equal to 20.</param>
153     /// <returns>The factorial of n, or n!</returns>
154     /// <remarks>For larger n, use the BigFactorial function.</remarks>
155     public static ulong Factorial(int n)
156     {
157         if (n <= 0)
158             return 1;
159         else
160         {
161             ulong result = 1;
162             for (uint i = 1; i <= n; i++)
163                 result *= i;
164             return result;
165         }
166     }
167
168     /// <summary>
169     /// Calculates the factorial of an integer number.
170     /// </summary>
171     /// <param name="n">A positive integer.</param>
172     /// <returns>The factorial of n, or n!</returns>
173     public static BigInteger BigFactorial(int n)
174     {
175         if (n <= 0)
176             return 1;
177         else
178         {
179             BigInteger result = 1;
180             for (uint i = 1; i <= n; i++)
181                 result *= i;
182             return result;
183         }
184     }
185

```



```

186     /// <summary>
187     /// Calculates the double factorial of a small integer.
188     /// </summary>
189     /// <param name="n">A positive integer less than or equal to 30.</param>
190     /// <returns>The double factorial of n, n!!</returns>
191     /// <remarks>For larger n, use the BigDoubleFactorial function.</remarks>
192     public static ulong DoubleFactorial(int n)
193     {
194         if (n <= 0)
195             return 1;
196         else
197         {
198             ulong result = 1;
199             for (int i = n; i > 1; i -= 2)
200                 result *= (ulong)i;
201             return result;
202         }
203     }
204
205     /// <summary>
206     /// Calculates the double factorial of an integer number.
207     /// </summary>
208     /// <param name="n">A positive integer.</param>
209     /// <returns>The double factorial of n, n!!</returns>
210     public static BigInteger BigDoubleFactorial(int n)
211     {
212         if (n <= 0)
213             return 1;
214         else
215         {
216             BigInteger result = 1;
217             for (int i = n; i > 1; i -= 2)
218                 result *= i;
219             return result;
220         }
221     }
222
223     /// <summary>
224     /// Calculates the binomial coefficient "n over k", where n and k are integers.
225     /// </summary>
226     /// <param name="n">A positive integer.</param>
227     /// <param name="k">A positive integer less than or equal to n.</param>
228     /// <returns>The binomial coefficient, or "n over k".</returns>
229     public static double BinomialCoefficient(int n, int k)
230     {
231         if (n <= 20)
232             return Round((double)Factorial(n) / (double)(Factorial(k)
233                 * Factorial(n - k)), 0);
234         else
235             return Round((double)BigFactorial(n) / (double)(BigFactorial(k)
236                 * BigFactorial(n - k)), 0);
237     }

```

```

238     /// <summary>
239     /// Calculates the falling factorial of a real number x,
240     ///  $(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1))$ .
241     /// </summary>
242     /// <param name="x">The real argument.</param>
243     /// <param name="n">A positive integer.</param>
244     /// <returns>The falling factorial of a real number x,
245     ///  $(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1))$ .</returns>
246     public static double FallingFactorial(double x, int n)
247     {
248         if (n == 0)
249             return 1;
250         else
251         {
252             double result = x;
253             for (uint i = 1; i < n; i++)
254                 result *= (x - i);
255
256             return result;
257         }
258     }
259
260     /// <summary>
261     /// Calculates the rising factorial of a real number x,
262     ///  $x^{(n)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+(n-1))$ .
263     /// </summary>
264     /// <param name="x">The real argument.</param>
265     /// <param name="n">A positive integer.</param>
266     /// <returns>The rising factorial of a real number
267     /// x,  $x^{(n)} = x(x+1)(x+2)\dots(x+(n-1))$ .</returns>
268     public static double RisingFactorial(double x, int n)
269     {
270         if (n == 0)
271             return 1;
272         else
273         {
274             double result = x;
275             for (uint i = 1; i < n; i++)
276                 result *= (x + i);
277
278             return result;
279         }
280     }
281
282     /// <summary>
283     /// Calculates the binomial coefficient x over k, where x is a real number and
284     /// k is an integer.
285     /// </summary>
286     /// <param name="x">The real part of the coefficient.</param>
287     /// <param name="k">The integer part of the coefficient.</param>
288     /// <returns>The binomial coefficient "x over k".</returns>
289     public static double BinomialCoefficient(double x, int k)
290     {
291         return FallingFactorial(x, k) / Factorial(k);
292     }
293 } }
294

```

9.2. Рачун сферних хармоника

9.2.1. Лежандрови полиноми

```
1 namespace Infinity.Numerics.Functions {
2   /// <summary>
3   /// Defines the Associated Legendre Polynomial.
4   /// </summary>
5   public class AssociatedLegendrePolynomial
6   {
7     /// <summary>
8     /// The azimuthal order of the associated spherical harmonic.
9     /// </summary>
10    public int M;
11
12    /// <summary>
13    /// The harmonic degree of the associated spherical harmonic.
14    /// </summary>
15    public int L;
16
17    /// <summary>
18    /// Initializes the AssociatedLegendrePolynomial with the given degree L and
19    /// the order M.
20    /// </summary>
21    public AssociatedLegendrePolynomial(int l, int m)
22    {
23      L = l;
24      M = m;
25    }
26
27    /// <summary>
28    /// Evaluates the AssociatedLegendrePolynomial for the specified argument.
29    /// </summary>
30    public override double Evaluate(double x)
31    {
32      double result = 0;
33
34      double Pmm
35        = Calc.PowN(-1.0, m) * Calc.DoubleFactorial(2 * m - 1)
36          * Calc.Pow(1.0 - Calc.Pow2(x), m / 2.0);
37      double Pmm1 = x * (2 * m + 1) * Pmm;
38
39      if (l == m)
40        return Pmm;
41      else if (l == m + 1)
42        return Pmm1;
43      else
44      {
45        for (int n = m + 2; n <= l; n++)
46        {
47          result = (x * (2 * n - 1) * Pmm1 - (n + m - 1) * Pmm) / (n - m);
48          Pmm = Pmm1;
49          Pmm1 = result;
50        }
51      }
52      return result;
53    }
54  }
55 }
```

9.2.2. Вигнерова матрица ротације

```
1 using System.Numerics;
2
3 namespace Infinity.Numerics.Functions {
4     /// <summary>
5     /// Defines an element of the Wigner rotation matrix,  $D[L'L; M'M](\alpha, \beta, \gamma)$ .
6     /// </summary>
7     public class WignerMatrixElement
8     {
9         /// <summary>
10        /// The azimuthal order of the spherical harmonic in the initial
11        /// reference frame, M.
12        /// </summary>
13        public int M;
14
15        /// <summary>
16        /// The azimuthal order of the spherical harmonic in the final
17        /// reference frame (M').
18        /// </summary>
19        public int N;
20
21        /// <summary>
22        /// The harmonic degree of the spherical harmonic in the initial reference frame.
23        /// Since the element is multiplied by  $\delta_{L'L}$ , L', the harmonic degree of
24        /// the spherical harmonic in the final reference frame must be equal to L.
25        /// </summary>
26        public int L;
27
28        /// <summary>
29        /// Initializes the WignerMatrixElement with the given degree (L),
30        /// final order (M'), and initial order (M).
31        /// </summary>
32        public WignerMatrixElement(int l, int n, int m)
33        {
34            L = l;
35            N = n;
36            M = m;
37        }
38
39        /// <summary>
40        /// Calculates the element of the inner matrix, or the "small d matrix"
41        /// element,  $d[L; M'M](\beta)$ , where  $\beta$  is the inclination of the final Z axis
42        /// relative to the initial Z axis. The [big] D matrix element is then given by
43        ///  $D[L'L; M'M](\alpha, \beta, \gamma) = e^{iM'\alpha} * d[L; M'M](\beta) * e^{iM\gamma}$ .
44        /// </summary>
45        public double SmallD(double beta)
46        {
47            double smallD = 0;
48            int i = (m - n > 0 ? m - n : 0);
49            int f = (1 - n < 1 + m ? 1 - n : 1 + m);
50
51            for (int k = i; k <= f; k++)
52                smallD += (Calc.PowN(-1, k)
53                    / ((double)Calc.Factorial(1 - n - k)
54                        * (double)Calc.Factorial(1 + m - k)
55                        * (double)Calc.Factorial(k)
56                        * (double)Calc.Factorial(k + n - m)))
57                    * Calc.Pow(Calc.Cos(beta / 2.0), 2.0 * 1 + m - n - 2.0 * k)
58                    * Calc.Pow(Calc.Sin(beta / 2.0), 2.0 * k + n - m);
59        }
60    }
61 }
```

```

59         smallD *= Calc.Root2((double)Calc.Factorial(1 + m)
60             * (double)Calc.Factorial(1 - m)
61             * (double)Calc.Factorial(1 + n) * (double)Calc.Factorial(1 - n));
62
63     return smallD;
64 }
65
66     /// <summary>
67     /// Evaluates the WignerMatrixElement for the specified Euler angles  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ .
68     /// </summary>
69     /// <param name="alpha">The Euler angle  $\alpha$ , measuring the
70     /// counter-clockwise rotation around the initial Z axis.</param>
71     /// <param name="beta">The Euler angle  $\beta$ , measuring the
72     /// counter-clockwise rotation around the intermediate Y' axis.</param>
73     /// <param name="gamma">The Euler angle  $\gamma$ , measuring the
74     /// counter-clockwise rotation around the final Z'' axis.</param>
75     /// <returns>The element of the Wigner rotation matrix given by Euler angles
76     /// alpha, beta and gamma.</returns>
77     /// <remarks>The rotation is done in a right-handed coordinate using the
78     /// Z - Y' - Z'' convention. This means that the final state is reached by three
79     /// consecutive rotations: first around the initial Z axis by angle  $\alpha$ , then
80     /// around the new Y' axis by angle  $\beta$  and finally around the final Z'' axis by
81     /// angle  $\gamma$  </remarks>
82     public Complex Evaluate(Complex alpha, Complex beta, Complex gamma)
83     {
84         Complex eAlpha =
85             new Complex(Calc.Cos(n * alpha.Real), Calc.Sin(n * alpha.Real));
86         Complex eGamma =
87             new Complex (Calc.Cos(m * gamma.Real), Calc.Sin(m * gamma.Real));
88
89         return eAlpha * SmallD(beta.Real) * eGamma;
90     }
91 } }

```

9.2.3. Сферни хармоници

```

92 using System.Numerics;
93
94 namespace Infinity.Numerics.Functions {
95     /// <summary>
96     /// Defines the Spherical Harmonic.
97     /// </summary>
98     public class SphericalHarmonic
99     {
100         /// <summary>
101         /// The azimuthal order of the Spherical Harmonic.
102         /// </summary>
103         public int M;
104
105         /// <summary>
106         /// The harmonic degree of the Spherical Harmonic.
107         /// </summary>
108         public int L;
109         /// <summary>
110         /// Initializes the SphericalHarmonic with the given degree L and the order M.
111         /// </summary>
112         public SphericalHarmonic(int l, int m)
113         {
114             L = l;
115             M = m;
116         }

```

```

117     /// <summary>
118     /// Evaluates the SphericalHarmonic at the specified spherical coordinates
119     ///  $\theta$  and  $\phi$ .
120     /// </summary>
121     /// <param name="theta">The polar spherical coordinate,  $0 < \theta < \pi$ . </param>
122     /// <param name="phi">The azimuthal spherical coordinate,  $0 < \phi < 2\pi$ . </param>
123     /// <returns>The value of the SphericalHarmonic,  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ .</returns>
124     public Complex Evaluate(double theta, double phi)
125     {
126         int absM = m < 0 ? -m : m;
127
128         AssociatedLegendrePolynomial Plm = new AssociatedLegendrePolynomial(l, absM);
129
130         Complex phase = Complex.FromPolarCoordinates(1.0, m * phi.Real);
131
132         Complex Ylm = Calc.Root2(((ulong)(2 * l + 1)
133             * Calc.Factorial(l - absM)) / ((4 * Calc.Pi)
134             * Calc.Factorial(l + absM)))
135             * Plm.Evaluate(Calc.Cos(theta.Real)) * phase;
136         if (m < 0)
137             Ylm *= Calc.PowN(-1, m);
138
139         return Ylm;
140     }
141 }
142
143     /// <summary>
144     /// Evaluates the SphericalHarmonic at the specified spherical coordinates
145     ///  $\theta$  and  $\phi$ , rotated by the specified Euler angles  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$ .
146     /// </summary>
147     /// <param name="theta">The polar spherical coordinate,  $0 < \theta < \pi$ . </param>
148     /// <param name="phi">The azimuthal spherical coordinate,  $0 < \phi < 2\pi$ . </param>
149     /// <param name="alpha">The Euler angle  $\alpha$ , measuring the
150     /// counter-clockwise rotation around the initial Z axis.</param>
151     /// <param name="beta">The Euler angle  $\beta$ , measuring the
152     /// counter-clockwise rotation around the intermediate Y' axis.</param>
153     /// <param name="gamma">The Euler angle  $\gamma$ , measuring the
154     /// counter-clockwise rotation around the final Z'' axis.</param>
155     /// <returns>The element of the Wigner rotation matrix given by Euler angles
156     /// alpha, beta and gamma.</returns>
157     /// <returns>The value of the Spherical Harmonic,  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ .</returns>
158     public Complex Evaluate(double theta, double phi,
159         double alpha, double beta, double gamma)
160     {
161         Complex sum = 0;
162
163         for (int i = -L; i <= L; i++)
164         {
165             WignerMatrixElement W = new WignerMatrixElement(L, i, M);
166             SphericalHarmonic Y = new SphericalHarmonic(L, M);
167
168             sum += W.Evaluate(alpha, beta, gamma) * Y.Evaluate(theta, phi);
169         }
170         return sum;
171     } }

```

9.3. Моде осциловања

```
1 using Infinity.Numerics;
2 using Infinity.Numerics.Functions;
3
4 namespace Infinity {
5     /// <summary>
6     /// Represents a single mode of stellar pulsation.
7     /// </summary>
8     public class Mode
9     {
10         /// <summary>
11         /// The frequency of the signal, in units of orbital frequency.
12         /// </summary>
13         public double Frequency;
14
15         /// <summary>
16         /// The amplitude of the temperature perturbation, in Kelvins.
17         /// </summary>
18         public double TemperatureAmplitude;
19
20         /// <summary>
21         /// The amplitude of the displacement, in units of orbital separation.
22         /// </summary>
23         public double DisplacementAmplitude;
24
25         /// <summary>
26         /// The initial phase of the temperature perturbation in angular units.
27         /// </summary>
28         public double TemperaturePhase;
29
30         /// <summary>
31         /// The initial phase of the displacement in angular units.
32         /// </summary>
33         public double DisplacementPhase;
34
35         /// <summary>
36         /// The incilation of the pulsation axis relative to the rotation axis, within
37         /// the plane defined by the rotation axis and the direction connecting the
38         /// centers of components.
39         /// </summary>
40         public double PulsationAxisInclination;
41
42         /// <summary>
43         /// The harmonic degree of the associated spherical harmonic.
44         /// </summary>
45         public int L;
46
47         /// <summary>
48         /// The azimuthal order of the associated spherical harmonic.
49         /// </summary>
50         public int M;
```

```

51     /// <summary>
52     /// Creates a Mode with the specified frequency, amplitude, phase and (l,m).
53     /// </summary>
54     public Mode(double frequency, int l, int m, double temperatureAmplitude,
55                double displacementAmplitude, double temperaturePhase,
56                double displacementPhase, double pulsationAxisInclination)
57     {
58         Frequency = frequency;
59
60         TemperatureAmplitude = temperatureAmplitude;
61         DisplacementAmplitude = displacementAmplitude;
62         TemperaturePhase = temperaturePhase;
63         DisplacementPhase = displacementPhase;
64         PulsationAxisInclination = pulsationAxisInclination;
65
66         L = l;
67         M = m;
68     }
69
70     /// <summary>
71     /// Calculates the time dependence of a perturbation at the given moment,
72     /// for the given frequency and phase.
73     /// </summary>
74     private Complex TimeDependence(double time, double frequency, double phase)
75     {
76         return new Complex(Calc.Cos(Calc.TwoPi * (frequency * time + phase)),
77                            Calc.Sin(Calc.TwoPi * (frequency * time + phase)));
78     }
79
80     /// <summary>
81     /// Calculates the temperature perturbation at the given spherical coordinates
82     ///  $\theta$ ,  $\phi$ , at the given moment t.
83     /// </summary>
84     public double GetTemperaturePerturbationAt(double theta, double phi, double time)
85     {
86         SphericalHarmonic Y = new SphericalHarmonic(L, M);
87         if (PulsationAxisInclination != 0)
88             return TemperatureAmplitude
89                 * (Y.Evaluate(theta, phi, 0, PulsationAxisInclination, 0)
90                  * TimeDependence(time, Frequency, TemperaturePhase)).Real;
91         else
92             return TemperatureAmplitude
93                 * (Y.Evaluate(theta, phi)
94                  * TimeDependence(time, Frequency, TemperaturePhase)).Real;
95     }
96
97     /// <summary>
98     /// Calculates the displacement at the given spherical coordinates
99     ///  $\theta$ ,  $\phi$ , at the given moment t.
100    /// </summary>
101    public double GetDisplacementAt(double theta, double phi, double time)
102    {
103        SphericalHarmonic Y = new SphericalHarmonic(L, M);
104        if (PulsationAxisInclination != 0)
105            return DisplacementAmplitude
106                * (Y.Evaluate(theta, phi, 0, PulsationAxisInclination, 0)
107                 * TimeDependence(time, Frequency, DisplacementPhase)).Real;
108        else
109            return DisplacementAmplitude
110                * (Y.Evaluate(theta, phi)
111                 * TimeDependence(time, Frequency, DisplacementPhase)).Real;
112    }

```



```

113     /// <summary>
114     /// Calculates the temperature perturbation needed to cause the given
115     /// amplitude detected in Period04.
116     /// </summary>
117     public double TemperatureFromDetection(double amplitude, int system = 0)
118     {
119         List<double> k, n;
120
121         switch (system)
122         {
123             case 1: // System1
124                 k = new List<double>() {14309, 66757, 16695, 45381, 91203,
125                 33403, 469224, 280358, 414791, 203126, 626838, 631960,
126                 591577, 650532, 332217};
127                 n = new List<double>() {0.5781, 1.6022, 0.2919, 1.3851, 0.6366,
128                 1.0666, -6.8311, -4.9054, 3.0519, -3.6205, 11.661, 6.2694,
129                 0.5442, 4.5847, 6.0591};
130             break;
131             case 2: // System2
132                 k = new List<double>() {8037.6, 62491.0, 9108.7, 22854.0,
133                 83523.0, 18505.0, 337257.0, 144194.0, 330858.0, 100390.0,
134                 462346.0, 630904.0, 338579.0, 646415.0, 168516.0};
135                 n = new List<double>() {-1.2339, 0.6486, 0.5292, 0.9952,
136                 -1.7464, 0.0821, -8.8606, -6.8654, 3.0873, 7.4227, 7.8826,
137                 -8.2016, -1.6059, -26.25, 7.8203};
138             break;
139             case 3: // System3
140                 k = new List<double>() {8698.23, 15984.38, 19201.46, 41933.11,
141                 40729.9, 41981.21, 203095.16, 194782.93, 281758.25, 221749.7,
142                 766889.13, 329910.83, 456963.22, 1194558.19, 1098000.15};
143                 n = new List<double>() {0.19, 7.26, 0.87, 6.08, 9.02, 13.55,
144                 4.08, 1.04, -4.93, 5.82, 4.91, 31.07, 14.32, -18.62, -8.46};
145             break;
146             case 4: // System4
147                 k = new List<double>() {9286.98, 16974.13, 20685.57, 44382.98,
148                 42712.86, 35201.66, 224481.54, 254930.65, 326593.79,
149                 234010.65, 712970.66, 411032.15, 429223.96, 1069483.94,
150                 1074119.26};
151                 n = new List<double>() {3.59, 7.94, 0.04, 4.24, -0.07, 28.82,
152                 -2.57, -4.02, 8.83, 9.43, 7.33, 23.86, 23.72, -9.22, -4.43};
153             break;
154             default: //Unknown, leave as is
155                 k = new List<double>() {1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0,
156                 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0};
157                 n = new List<double>() {0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0,
158                 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0};
159             break;
160         }
161
162         int index = L * (L + 1) / 2 + (int)Calc.Abs(M);
163
164         return k[index] * amplitude + n[index];
165     }

```

```

166     /// <summary>
167     /// Calculates the phase in degrees from the given phase in  $2\pi$  radians, obtained
168     /// from Period04.
169     /// </summary>
170     public double PhaseFromDetection(double phase)
171     {
172         return 57.294 * phase + 14.315;
173     }
174     /// <summary>
175     /// Calculates the frequency appropriate for the mode, taking into account the
176     /// rotational splitting.
177     /// </summary>
178     public double FrequencyFromDetection(double frequency)
179     {
180         return frequency - M;
181     }
182 } }

```

9.4. Рачун пертурбација температуре и положаја

```

1  using Infinity.Numerics;
2  using Infinity.Numerics.Functions;
3
4  namespace Infinity {
5  /// <summary>
6  /// Encapsulates the application of temperature and gravity perturbations
7  /// on the equilibrium values provided by the underlying model of the binary.
8  /// </summary>
9  public class Pulsation
10 {
11     /// <summary>
12     /// The 'Star' object represents the physical properties of the star within
13     /// the underlying model; such as effective temperature, polar radius,
14     /// and any excited modes of oscillation.
15     /// </summary>
16     private Star star;
17
18     /// <summary>
19     /// The 'Mesh3' object represents geometrical properties of the star within
20     /// the underlying model; such as the collection of triangles comprising the
21     /// grid that approximates the stellar surface.
22     /// </summary>
23     private Mesh3 mesh;
24
25     /// <summary>
26     /// Initializes Pulsation calculation with for the given star and its mesh.
27     /// </summary>
28     public Pulsation(Star star, Mesh3 mesh)
29     {
30         this.star = star;
31         this.mesh = mesh;
32     }
33 }

```

```

34     /// <summary>
35     /// Performs the calculation of temperature perturbation on each triangle
36     /// of the mesh in the specified moment.
37     /// </summary>
38     public void DoTemperaturePreturbation(double time)
39     {
40         int pointCount = mesh.TriangleCount;
41
42         for (int i = 0; i < pointCount; i++)
43         {
44             double x = mesh.Triangles[i].Centroid.X;
45             double y = mesh.Triangles[i].Centroid.Y;
46             double z = mesh.Triangles[i].Centroid.Z;
47
48             double phi = Calc.ArcTan(y, x);
49             phi = (phi >= 0) ? phi : phi + Calc.TwoPi;
50             double theta = Calc.ArcCos(z / Calc.Root2(x * x + y * y + z * z));
51
52             int modeCount = star.ModeCount;
53             for (int j = 0; j < modeCount; j++)
54                 mesh.Triangles[i].Temperature +=
55                     star.Modes[j].GetTemperaturePreturbationAt(theta, phi, time);
56         }
57     }
58
59     /// <summary>
60     /// Performs the calculation of displacement on each triangle
61     /// of the mesh in the specified moment.
62     /// </summary>
63     public void DoPositionPreturbation(double time)
64     {
65         int pointCount = mesh.TriangleCount;
66
67         for (int i = 0; i < pointCount; i++)
68         {
69             double Ax = mesh.Triangles[i].PointA.X;
70             double Ay = mesh.Triangles[i].PointA.Y;
71             double Az = mesh.Triangles[i].PointA.Z;
72
73             double Aphi = Calc.ArcTan(Ay, Ax);
74             Aphi = (Aphi >= 0) ? Aphi : Aphi + Calc.TwoPi;
75             double Ar = Calc.Root2(Ax * Ax + Ay * Ay + Az * Az);
76             double Atheta = Calc.ArcCos(Az / Ar);
77
78             double Bx = mesh.Triangles[i].PointB.X;
79             double By = mesh.Triangles[i].PointB.Y;
80             double Bz = mesh.Triangles[i].PointB.Z;
81
82             double Bphi = Calc.ArcTan(By, Bx);
83             Bphi = (Bphi >= 0) ? Bphi : Bphi + Calc.TwoPi;
84             double Br = Calc.Root2(Bx * Bx + By * By + Bz * Bz);
85             double Btheta = Calc.ArcCos(Bz / Br);
86
87             double Cx = mesh.Triangles[i].PointC.X;
88             double Cy = mesh.Triangles[i].PointC.Y;
89             double Cz = mesh.Triangles[i].PointC.Z;
90
91             double Cphi = Calc.ArcTan(Cy, Cx);
92             Cphi = (Cphi >= 0) ? Cphi : Cphi + Calc.TwoPi;
93             double Cr = Calc.Root2(Cx * Cx + Cy * Cy + Cz * Cz);
94             double Ctheta = Calc.ArcCos(Cz / Cr);
95

```

```

96     int modeCount = star.ModeCount;
97     for (int j = 0; j < modeCount; j++)
98     {
99         Ar += star.Modes[j].GetDisplacementAt(Atheta, Aphi, time);
100
101         mesh.Triangles[i].PointA.X = Ar*Calc.Sin(Atheta)*Calc.Cos(Aphi);
102         mesh.Triangles[i].PointA.Y = Ar*Calc.Sin(Atheta)*Calc.Sin(Aphi);
103         mesh.Triangles[i].PointA.Z = Ar*Calc.Cos(Atheta);
104
105         mesh.Triangles[i].PointB.X = Br*Calc.Sin(Btheta)*Calc.Cos(Bphi);
106         mesh.Triangles[i].PointB.Y = Br*Calc.Sin(Btheta)*Calc.Sin(Bphi);
107         mesh.Triangles[i].PointB.Z = Br*Calc.Cos(Btheta);
108
109         mesh.Triangles[i].PointC.X = Cr*Calc.Sin(Ctheta)*Calc.Cos(Cphi);
110         mesh.Triangles[i].PointC.Y = Cr*Calc.Sin(Ctheta)*Calc.Sin(Cphi);
111         mesh.Triangles[i].PointC.Z = Cr*Calc.Cos(Ctheta);
112     }
113 }
114 } }

```

Литература

- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J. & Kurtz, D. W., 2010. *Asteroseismology*, Springer.
- Aerts, C. et al., 1998. Evidence for binarity and multiperiodicity in the β Cephei star β Crucis. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 329, p. 137 – 146.
- Aerts, C. & Harmanec, P., 2004. Pulsating components in close binaries. *Spectroscopically and Spatially Resolving the Components of the Close Binary Stars, Proceedings of the Workshop held 20-24 October 2003 in Dubrovnik, Croatia. Edited by R. W. Hilditch, H. Hensberge and K. Pavlovski. ASP Conference Series, Volume 318, pp. 325-333.*
- Balona, L. A. & Stobie, R. S., 1979. The effect of radial and non-radial stellar oscillations on the light, colour and velocity variations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 189, p. 649 – 658.
- Belkacem, K., 2012. Determination of the stars fundamental parameters using seismic scaling relations. *SF2A-2012: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics. Eds.: S. Boissier, P. de Laverny, N. Nardetto, R. Samadi, D. Valls-Gabaud and H. Wozniak, pp. 173-188.*
- Bíró, B. I. & Latković, O., 2009. Mapping pulsations on rapidly rotating components of eclipsing binaries. *Communications in Asteroseismology*, Volume 159, pp. 127-128.
- Bíró, B. I. & Latković, O., 2014, у припреми. *Photometric mode identification methods of non-radial pulsations in eclipsing binaries – II. Direct fitting of spherical harmonics.*
- Bíró, B. I. & Nuspl, J., 2011. Photometric mode identification methods of non-radial pulsations in eclipsing binaries - I. Dynamic eclipse mapping. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 416, pp. 1601-1615.
- Breger, M., 2000. The multiperiodic δ Scuti star 4 Canum Venaticorum: amplitude variability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 313, pp. 129-135.
- Breger, M. et al., 2005. Detection of 75+ pulsation frequencies in the δ Scuti star FG Virginis. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 435, p. 955 – 965.

- Brown, T. M., Gilliland, R. L., Noyes, R. W. & Ramsey, L. W., 1991. Detection of possible p-mode oscillations on Procyon. *Astrophysical Journal*, Volume 368, pp. 599-609.
- Buta, R. J. & Smith, M. A., 1979. The light variations of nonradial pulsators - Theory and application to the line profile variable 53 Persei. *Astrophysical Journal*, Volume 232, p. 213 – 235.
- Čeki, A., 2013, у припреми. *Usavršavanje modela tesno dvojnih sistema saglasno sa rezultatima posmatranja visoke preciznosti*, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Christensen-Dalsgaard, J., 2002. Helioseismology. *Reviews of Modern Physics*, 74(4), pp. 1073-1129.
- Christensen-Dalsgaard, J., Dappen, W. & Ajukov, S. V., 1996. The Current State of Solar Modeling. *Science*, Volume 272, pp. 1286-1292.
- Christensen-Dalsgaard, J. et al., 1985. Speed of Sound in the Solar Interior. *Nature*, Volume 315, pp. 378-382.
- Christensen-Dalsgaard, J. & Gough, D. O., 1980. Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation. In: *Lecture Notes in Physics*, Springer, pp. 184-190.
- Christensen-Dalsgaard, J. & Thompson, M. J., 1997. On solar p-mode frequency. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 284, p. 527 – 540.
- Claret, A. & Bloemen, S., 2011. Gravity and limb-darkening coefficients for the Kepler, CoRoT, Spitzer, uvby, UBVRIJHK, and Sloan photometric systems. *Astronomy & Astrophysics*, Volume 529, pp. A75, 1-5.
- Claret, A., Giménez, A. & Zahn, J.-P., 2005. Tidal Evolution and Oscillations in Binary Stars. *Tidal Evolution and Oscillations in Binary Stars: Third Granada Workshop on Stellar Structure, ASP Conference Series*, Volume 333.
- Clemens, J. C. & Rosen, R., 2004. Observations of Nonradial Pulsations in Radio Pulsars. *Astrophysical Journal*, Volume 609, p. 340 – 353.
- Cox, J. P., 1980. *Theory of Stellar Pulsation*, Princeton University Press.

- Cox, J. P. & Whitney, C., 1958. Stellar pulsation IV. A semitheoretical period-luminosity relation for classical Cepheids. *Astrophysical Journal*, Volume 127, pp. 561-572.
- Cugier, H., Dziembowski, W. A. & Pamyatnykh, A. A., 1994. Nonadiabatic observables in beta Cephei models. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 291, pp. 143-154.
- Cunha, M. S. et al., 2007. Asteroseismology and interferometry. *Astronomy and Astrophysics Review*, Volume 14, p. 217 – 360.
- Daszynska-Daszkiwicz, J., Dziembowski, W. A. & Pamyatnykh, A. A., 2005. Constraints on parameters of B-type pulsators from combined multicolour photometry and radial velocity data. I. β Cephei stars. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 441, p. 641 – 651.
- De Cat, P. et al., 2000. A study of bright southern slowly pulsating B stars. I. Determination of the orbital parameters and of the main frequency of the spectroscopic binaries. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 355, pp. 1015-1030 .
- Debosscher, J. et al., 2013, у припреми. KIC 11285625: a double-lined spectroscopic binary with a γ Dor pulsator discovered from Kepler space photometry. *Astronomy & Astrophysics*.
- Desmet, M. et al., 2010. CoRoT photometry and high-resolution spectroscopy of the interacting eclipsing binary AU Monocerotis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 401(1), pp. 418-432.
- Deubner, F. L., 1975. Observations of low wavenumber nonradial eigenmodes of the Sun. *Astronomy & Astrophysics*, Volume 44, pp. 371-375.
- Djurašević, G., Latković, O., Vince, I. & Cséki, A., 2010. Accretion disc in the eclipsing binary AU Mon. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 409(1), pp. 329-336.
- Dupret, M. A. et al., 2003. A photometric mode identification method, including an improved non-adiabatic treatment of the atmosphere. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 398, p. 677 – 685.

Đurašević, G., 1991. Ispitivanje aktivnih tesnih dvojnih sistema na osnovu fotometrijskih merenja. *Publication of the Astronomical Observatory of Belgrade*, Volume 42, p. 1'215.

Đurašević, G., 1992. An analysis of active close binaries (CB) based on photometric measurements. I - A model of active CB with spots on the components. *Astrophysics and Space Science*, 196(2), pp. 241-265.

Duvall, T. L. et al., 1984. The Internal Rotation of the Sun. *Nature*, Volume 310, pp. 22-25.

Dziembowski, W., 1977. Light and radial velocity variations in a nonradially oscillating star. *Acta Astronomica*, Volume 27, p. 203 – 211.

Dziembowski, W. A. & Pamiatnykh, A. A., 1993. The opacity mechanism in B-type stars. I - Unstable modes in Beta Cephei star models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 262, p. 204 – 212.

Eddington, A. S., 1926. *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge University Press.

Elsworth, Y. et al., 1994. Solar p-mode frequencies and their dependence on solar activity: recent results from the BISON network. *The Astrophysical Journal*, Volume 434, pp. 801-806.

Gamarova, A. Y. et al., 2003. Application of the Spatial Filtration Method to RZ Cas. *Interplay of Periodic, Cyclic and Stochastic Variability in Selected Areas of the H-R Diagram*, Ed. C. Sterken, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Volume 292, p. 369.

Garrido, R., 2000. Photometric Modal Discrimination in δ Scuti and γ Doradus Stars. *Delta Scuti and Related Stars*, Eds M. Breger, M. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Volume 210, pp. 67-89.

Gautschy, A. & Saio, H., 1993. On non-radial oscillations of B-type stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 262, p. 213 – 219.

Gough, D. O., 1993. Course 7. Linear adiabatic stellar pulsation. *Astrophysical fluid dynamics, Les Houches Session XLVII, Eds J.-P. Zahn, J. Zinn-Justin, Elsevier, Amsterdam*, p. 399 – 560.

Guzik, J. A. et al., 2000. Driving the gravity-mode pulsations in γ Doradus variables. *Astrophysical Journal*, Volume 542, p. L57 – L60.

Handler, G. et al., 2000. Delta Scuti Network observations of XX Pyx: detection of 22 pulsation modes and of short-term amplitude and frequency variations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 318, pp. 511-525.

Handler, G. et al., 2002. Discovery and analysis of p-mode and g-mode oscillations in the A-type primary of the eccentric binary HD 209295. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 333, pp. 262-279.

Haxton, W. C., Parker, P. D. & Rolfs, C. E., 2006. Solar hydrogen burning and neutrinos. *Nuclear Physics A*, Volume 777, p. 226 – 253.

Hekker, S. et al., 2012. Solar-like oscillations in red giants observed with Kepler: influence of increased timespan on global oscillation parameters. *Astronomy & Astrophysics*, Volume 544, pp. 90-101.

Hertzsprung, E., 1914. Über die raumliche Verteilung der Veränderlichen vom δ Cephei-Typus. *Astronomische Nachrichten*, Volume 196, p. 201 – 205.

Hewish, A. et al., 1968. Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nature*, Volume 217, pp. 709-711.

Hilditch, R. W., 2001. *An Introduction to Close Binary Stars*, Cambridge University Press.

Horne, K., 1985. Images of accretion discs. I - The eclipse mapping method. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 213, p. 129 – 141.

Jankov, S., Vakili, F., Domiciano de Souza, A. & Janot-Pacheco, E., 2002. Interferometric-Doppler Imaging of Nonradial Stellar Pulsations. *Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics, Publications of the Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Volume 259, p. 172 – 173.

- Kaye, A. B. et al., 1999. γ Doradus Stars: Defining a New Class of Pulsating Variables. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111(761), pp. 840-844.
- Khruzina, T., 1985. Synthesis of the Lightcurves of X-Ray Binary Systems with Eccentric Orbits. *Soviet Astronomy*, Volume 29, pp. 55-59.
- Kilkenny, D., Koen, C., O'Donoghue, D. & Stobie, R. S., 1997. A new class of rapidly pulsating star - I. EC 14026-2647, the class prototype. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 285, p. 640 – 644.
- Kjeldsen, H., Bedding, T. R., Viskum, M. & Frandsen, S., 1995. Solar-like oscillations in η Boo. *Astronomical Journal*, Volume 109, pp. 1313-1319.
- Kovacs, G., 2000. The distance modulus of the Large Magellanic Cloud based on double-mode RR Lyrae stars. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 363, pp. L1-L4.
- Krisciunas, K. et al., 1993. The 9-AURIGAE System. *Monthly Notices of the Royal*, Volume 263, p. 781 – 788.
- KSC, 2009. *Signal-to-Noise Characteristics*. [Online]
Available at: <http://keplergo.arc.nasa.gov/CalibrationSN.shtml>
[Accessed 13 March 2013].
- Latković, O., 2012. WASP Light Curve of the Eclipsing Binary VZ CVn. *Serbian Astronomical Journal*, Volume 184, pp. 77-82.
- Latković, O. & Bíró, B. I., 2008. Photometric mode identification methods in eclipsing binaries. *Communications in Asteroseismology*, Volume 157, pp. 330-331.
- Leavitt, H. S. & Pickering, E. C., 1912. Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud. *Harvard College Observatory Circular*, Volume 173, pp. 1-3.
- Ledoux, P., 1962. Sur la forme asymptotique des pulsations radiales adiabatiques d'une étoile. I. *Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Classe des sciences, 5ième série*, Volume 48, p. 240 – 254.
- Leighton, R. B., Noyes, R. W. & Simon, G. W., 1962. Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report.. *Astrophysical Journal*, Volume 135, p. 474.

- Lenz, P. & Breger, M., 2005. Period04 User Guide. *Communications in Asteroseismology*, Volume 146, p. 53.
- Lucy, L. B., 1967. Gravity-Darkening for Stars with Convective Envelopes. *Zeitschrift fur Astrophysik*, Volume 65, p. 89.
- Martić, M. et al., 1999. Evidence for global pressure oscillations on Procyon. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 351, pp. 993-1002.
- Mennickent, R. E., Pietrzynski, G., Diaz, M. & Gieren, W., 2003. Double-periodic blue variables in the Magellanic Clouds. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 399, pp. 47-50.
- Mkrtychian, D. E. et al., 2004. Frequency spectrum of the rapidly-oscillating mass-accreting component. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 419, p. 1015 – 1024.
- Nelder, J. A. & Mead, R., 1965. A simplex method for function minimization. *Computer Journal*, Volume 7, p. 308.
- Nuspl, J. & Bíró, I. B., 2002. EclipseMapping of Non-Radial Pulsation in Binary Stars. *IAU Colloquium 185: Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics*, Eds C. Aerts, T. R. Bedding, J. Christensen-Dalsgaard, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Volume 259, p. 100 – 101.
- Nuspl, J., Biro, I. B. & Hegedus, T., 2004. Reconstruction of dynamical features in eclipsing binaries. *Spectroscopically and Spatially Resolving the Components of the Close Binary Stars*, Eds R. W. Hilditch, H. Hensberge, K. Pavlovski, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Volume 318, pp. 350-352.
- Petersen, J. O., 1973. Masses of double mode Cepheid variables determined by analysis of period ratios. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 27, pp. 89-93.
- Reed, M. D., Brondel, B. J. & Kawaler, S. D., 2005. Pulsating stars in close binaries. I. Investigations of eclipse mapping and oblique pulsations. *The Astrophysical Journal*, Volume 634, p. 602–615.

- Reed, M. D. & Whole Earth Telescope, X. 2. a. 2. C., 2006a. “The observational search for tidally tipped pulsation axes in subdwarf B stars. *Memorie della Societa Astronomica Italiana*, Volume 77, p. 417.
- Reed, M. D. & Whole Earth Telescope, X. 2. a. 2. C., 2006b. Searching for Observational Evidence of Tidally Inclined Pulsations. *Baltic Astronomy*, Volume 15, pp. 269-274.
- Reyniers, K. & Smeyers, P., 2003. Tidal perturbations of linear, isentropic oscillations in components of circular-orbit close binaries. I. Synchronously rotating components. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 404, pp. 1051-1065.
- Rodríguez, E. et al., 2004a. δ Sct-type pulsations in eclipsing binary systems: AB Cas. *Monthly Notices of the*, Volume 353, p. 310 – 318.
- Rodríguez, E., Lopez-Gonzalez, M. J. & Lopez de Coca, P., 2000. A revised catalogue of delta Sct stars. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, Volume 144, pp. 469-474.
- Rodríguez, E. et al., 2004b. δ Sct type pulsations in eclipsing binary systems: RZ Cas. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 347, p. 1317 – 1326.
- Rodríguez, E. & Lopez-Gonzalez, M. J., 2000. SX Phe stars in globular clusters. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 359, pp. 597-600.
- Ruderman, M. A., 1968. Crystallization and Torsional Oscillations of Superdense Stars. *Nature*, Volume 2018, pp. 1128-1130.
- Sagan, C. & Mullen, G., 1972. Earth and Mars: evolution. *Science*, Volume 177, pp. 52-56.
- Shapley, H., 1914. On the nature and cause of Cepheid variation. *Astrophysical Journal*, Volume 40, pp. 448-465.
- Stamford, P. A. & Watson, R. D., 1981. Baade-Wesselink and related techniques for mode discrimination in nonradial stellar pulsations. *Astrophysics and Space Science*, Volume 77, pp. 131-158.

- Stankov, A. & Handler, G., 2005. Catalog of Galactic β Cephei Stars. *Astrophysical Journal Supplement Series*, Volume 158, pp. 193-216.
- Sterne, T. E., 1939. Apsidal motion in binary stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 99, pp. 451-462.
- Stix, M., 1989. *The Sun*, Springer.
- Strohmayer, T. E., Cordes, J. M. & van Horn, H. M., 1992. Determining the coherence of micropulses. *Astrophysical Journal*, Volume 389, pp. 685-694.
- Tassoul, M., 1980. Asymptotic approximations for stellar nonradial pulsations. *Astrophysical Journal Supplement Series*, Volume 43, p. 469 – 490.
- Telting, J. H. & Schrijvers, C., 1997. Line-profile variations of non-radial adiabatic pulsations of rotating stars. II. The diagnostic value of amplitude and phase diagrams derived from time series of spectra. *Astronomy and Astrophysics*, Volume 217, p. 723 – 741.
- Tomczyk, S. et al., 1995. An instrument to observe low-degree solar oscillations. *Solar Physics*, Volume 159, pp. 1-21.
- von Zeipel, H., 1924. The radiative equilibrium of a rotating system of gaseous masses. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 84, pp. 665-683.
- Vuckovic, M. et al., 2007. The binary properties of the pulsating subdwarf B eclipsing binary PG 1336-018 (NY Virginis). *Astronomy and Astrophysics*, 471(2), pp. 605-615.
- Wigner, E. P., 1959. *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra*. 2nd ed. New York and London: Academic Press.
- Zhevakin, S. A., 1953. К Теории Цефеид (in Russian). *Astronomicheskii Zhurnal*, Volume 30, pp. 161-179.

Биографија аутора

Оливера Латковић је рођена 18. августа 1980. године у Београду. Као матурант XIV Београдске гимназије, 1999. године је уписала Математички факултет у Београду, на смеру Астрофизика. Дипломирала је у децембру 2005. године са просеком 9.46 и у фебруару 2006. године постала стипендиста Министарства науке. Докторске студије на Математичком факултету у Београду уписала је у марту 2007. године.

Од јануара 2007. године, запослена је као истраживач приправник у Астрономској опсерваторији у Београду. У децембру 2009. године стекла је научно звање истраживач сарадник. Аутор је два самостална рада, а коаутор два рада објављена у међународним научним часописима, пет радова у домаћим часописима од међународног значаја и више радова представљених на конференцијама у земљи и иностранству.

У својству стипендисте Министарства науке, а касније као запослена у Астрономској опсерваторији у Београду, Оливера Латковић је од 2006. до 2010. године била ангажована са пуним истраживачким временом на пројекту „Физика Сунца и звезда“ (146003), а од 2010. и тренутно на пројекту „Физика звезда“ (176004), под руководством др Гојка Ђурашевића.

Изјава о ауторству

Потписана Оливера Латковић

број уписа _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Моделирање звезданих осцилација у тесно двојним системима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 11. септембра 2013.

Оливера Латковић

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Оливера Латковић

Број уписа _____

Студијски програм Астрономија и астрофизика

Наслов рада Моделирање звезданих осцилација у тесно двојним системима

Ментор проф. др Олга Атанацковић

Потписана Оливера Латковић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 11. септембра 2013.

Оливера Латковић

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Моделирање звезданих осцилација у тесно двојним системима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 11. септембра 2013.



1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.