UNIVERZITET U BEOGRADU

FAKULTET ORGANIZACIONIH NAUKA

Dijana T. Petrović Đorđević

MODELIRANJE, ANALIZA I MERENJE EFIKASNOSTI SPORTSKIH ORGANIZACIONIH JEDINICA PRIMENOM DEA METODE

doktorska disertacija

Beograd, 2015.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF ORGANIZATIONAL SCIENCES

Dijana T. Petrović Djordjević

MODELING, ANALYSIS AND MEASURING EFFICIENCY OF SPORTS DECISION MAKING UNITS USING DEA METHOD

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

KOMISIJA

za pregled i ocenu i usmenu odbranu doktorske disertacije

1. Dr Mirko Vujošević, redovni profesor, mentor,
Redovni član Akademije inženjerskih nauka Srbije,
Katedra za operaciona istraživanja i statistiku Fakulteta organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu

2. Dr Milan Martić, redovni profesor,
Katedra za operaciona istraživanja i statistiku Fakulteta organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu

3. Dr Nenad Cakić, redovni profesor,
Katedra za primenjenu matematiku Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

4. Dr Gordana Savić, docent,
Katedra za operaciona istraživanja i statistiku Fakulteta organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu

5. Dr Aleksandar Đoković, docent,
Katedra za operaciona istraživanja i statistiku Fakulteta organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu

Datum usmene odbrane: ___________ 2015. godine

Modeliranje, analiza i merenje efikasnosti sportskih organizacionih jedinica primenom DEA metode

Sadržaj: Inicijalna ideja na kojoj je DEA (*Data Envelopment Analysis*) metoda nastala počiva na makroekonomskim analizama efikasnosti i još je prvih godina XX veka okupirala velika imena evropske naučne scene. Razvijajući se od evropskog do američkog kontiinenta, bazirana na proširenju Farelove mere efikasnosti, DEA metoda pruža mogućnost evaluacije performansi skupa istorodnih entiteta (organizacionih ili produkcionih jedinica), odnosno jedinica o kojima se odlučuje (*DMU: Decision Making Unit*). Definicija DMU je generalna i visoko fleksibilna, što implicira primenu DEA u određivanju performansi različitih entiteta, koji koriste veći broj iste vrste ulaza u realizaciji većeg broja iste vrste izlaza, što pre matematičke formalizacije DEA nije bilo moguće. Efikasnost definiše delotvornost angažovanih resursa u produkciji ostvarenih rezultata, dakle definiše odnos izlaza prema ulazu. Efikasnost DMU, koristeći prethodnu formu koeficijenta, u uslovima više ulaza i izlaza postaje količnik virtuelnog izlaza i virtuelnog ulaza dobijenih agregacijom odgovarajućih realnih ulaza i izlaza. Da bi se traženi količnik izračunao, potrebno je prethodno usvojiti način skaliranja ulaznih (izlaznih) podataka i odrediti relativne važnosti, težinske koeficijenate, za sve veličine koje učestvuju u formiranju agregirane ulazne (izlazne) veličine. Suštinski problem u praktičnim primenama nastaje iz činjenice da se preferencije donosioca odluka razlikuju i da svaka DMU može da zahteva da se virtuelni ulaz i izlaz računaju na način na koji njoj najviše odgovara. Autori DEA metode polaze od stava da su takvi zahtevi opravdani i da ih treba uvažiti, odnosno, da svaka DMU ima slobodu određivanja vrednosti težinskih koeficijenata u cilju maksimiziranja sopstvene efikasnosti i prikazivanja sebe u najboljem svetlu. Naknadnom analizom i poređenjem jedinica o kojima se odlučuje treba izvesti zaključke koje jedinice efikasno koriste resurse (ulaze) za pravljenje traženih rezultata (izlaza), a koje to čine manje efikasno, odnosno neefikasno. Dok su parametarski pristupi koji podrazumevaju estimaciju funkcionalne zavisnosti ulaza i izlaza okrenuti

procenama performansi na osnovu prosečne performanse – centralnim tendencijama, DEA je tehnika matematičkog programiranja koja izračunava maksimalnu meru performansi u odnosu na sve druge posmatrane produkcione jedinice, što je čini „graničnom metodom“. Rezultat dobijen DEA metodom je relativna efikasnost posmatrane jedinice, a njegov relativitet leži u činjenici da zavisi od više faktora (vrste i ukupnog broja opserviranih DMU, kao i od dimenzije i strukture ulaza i izlaza u analizi).

U ovom radu se razmatra efikasnost sportskih organizacionih jedinica, posebno fudbalskih timova, koji su za traženu analizu efikasnosti veoma specifičnog karaktera, ali istovremeno poseduju izvesne iste i bitne karakteristike organizacionih jedinica iz drugih ekonomskih sektora. Proizvodna aktivnost, kao osnovna karakteristika fudbalske igre, implicira, dakle, pripadnost fudbalskog procesa skupu proizvodnih procesa. Polazeći od fleksibilnosti DEA metode u rešavanju različitih zadataka optimizacije, u disertaciji je pokazano da na osnovu operativnih znanja vezanih za prirodu „produkcije“ u sportu, uz visoku tačnost statističkih podataka u analizi, DEA može biti uspešno korišćena u merenju i analizi performansi sportskih organizacionih jedinica. Na realnom primeru, korišćenjem teorijski i aplikativno verifikovanih naučnih modela DEA, na originalan način, prikazana je uspešna primena u analizi efikasnosti sportskih organizacionih jedinica (fudbalskoj reprezentaciji), prvi put u sportskoj industriji u Srbiji.

U prvoj logičkoj celini disertacije, koju čine drugo, treće i četvrto poglavlje, sistematičnim pristupom širem razvoju oblasti istraživanja, i u užem smislu razvoju DEA analize sa specifikumom primene u sportu, dati su sveobuhvatan pregled i tumačenje ideje efikasnosti i hronološki pravac razvoja oblasti. Ovakav originalni pristup pregledu stanja u oblasti istraživanja, doprinosi sagledavanju okvira dosadašnjeg, ali i budućeg razvoja i primene, ističući problem dosadašnjeg razvoja DEA analize, posebno nedovoljne primene DEA analize u sportskim organizacionim jedinicama, kao i smernice za razvoj i modifikaciju DEA modela sportskih, posebno fudbalskih ekonomija. U okviru drugog, trećeg i četvrtog poglavlja disertacije, problemi modeliranja, merenja i analize efikasnosti proizvodnih jedinica su rešavani etapnim prilazom i kroz striktan, matematički formalan pristup. Prikazan je sveobuhvatan pregled DEA algoritama zasnovanih na konusnoj i/ili konveksnoj analizi i računarskoj geometriji. Da bi se razumela uloga sračunavanja u DEA, uspostavljena je veza između njenih algoritama i poznatog problema u računarskoj geometriji: problem određivanja ekstremnih tačaka poliedra sa konačnim brojem tačaka.

U uvodu u peto poglavlje disertacije, dat je predlog višestepenih DEA modela, odnosno kaskadne sprege modela. U cilju određivanja relativne efikasnosti napada i odbrane, kao i atletske i socijalne efikasnosti svake sportske organizacione jedinice, izvršeno je razdvajanje na ove tri dominantne komponente – radnu, operativnu i socijalnu. Analogno ideji rešavanja dvostepenog DEA modela i sračunavanju ukupne efikasnosti kroz definisanje novog optimizacionog procesa, identifikovana je potreba za uspostavljanje sličnih relacija u trostepenom, ili ako je to moguće, u opštem slučaju višestepenom DEA modelu, na primer, za k kaskadno povezanih DEA blokova.

U istom poglavlju, na originalan način pristupljeno je problemu analize efikasnosti sportskih organizacionih jedinica, u konkretnom slučaju i sa originalnom primenom na fudbalsku reprezentaciju Srbije u periodu kvalifikacija za FIFA Svetsko prvenstvo u Južnoj Africi 2010. godine. Kroz odvojene analize efikasnosti napada i odbrane, kao i sublimirajući indekse ovih različitih, ali svakako neodvojivih aspekata fudbalske igre, pokazano je da rezultati dobijeni korišćenim BCC (*Banker, Charnes and Cooper*) modelom izlazne orijentacije, konveksne granice efikasnosti i promenljivim prinosom na obim, korespondiraju polaznoj hipotezi da se DEA može uspešno koristiti u merenju i analizi efikasnosti sportskih organizacionih jedinica. Eksperiment je implicirao identifikaciju metodološkog koncepta, koji može biti korišćen, generalno, u analizama efikasnosti sportskih organizacionih jedinica. Dostupnost podataka na osnovu preciznih statistika, prvi put uvedenih u ovom delu Evrope zaključivanjem ugovora između Fudbalskog saveza Srbije i Sport Universal Process SAS – tvorcem globalnog informacionog sistema AMISCO za pomoć u upravljanju u profesionalnom sportskom sektoru, zadovoljila je glavni preduslov signifikantnosti statističkih podataka korišćenih tehničko-taktičkih elemenata igre u analizi. Kao što se moglo naslutiti, razmatrana efikasnost je bila bazirana na tehničkim indikatorima, a ne na promenljivim koje imaju ekonomsku prirodu, zbog tajnog karaktera podataka vezanih za finansijske, ugovorom definisane elemente između naših reprezentativaca i njihovih matičnih inostranih klubova. Izbor ulaza i izlaza, izvršen je od strane autora disertacije uz konsultovanje eksperata fudbalske trenerske struke, a redukcije i ekspanzije strukture modela vršene su sa ciljem prilagođavanja zahtevima same metode. Numerička analiza podataka realizovana je primenom EMS (Efficiency Measurement System) softvera. Analiza i validacija dobijenih rezultata u eksperimentu u saglasnosti je sa stavovima članova stručnog štaba reprezentacije Srbije, posebno sa trenerima internacionalnog iskustva zaduženim za fudbalsku analitiku.

Na kraju ove disertacije naznačeno je da su mogući pravci daljeg istraživanja u ovoj oblasti aplikativni doprinos DEA metodologiji primenom algoritama na sličnim problemima različitih sportskih organizacionih jedinica i/ili usmeravanje istraživanja u cilju teorijskih doprinosa DEA analizi u postavci matematičkih uslova za svodjenje optimizacionog problema kaskadnih DEA blokova na linearni program.

Ključne reči: *Efikasnost, Jedinice o kojima se odlučuje (DMU), Metoda obavijanja podataka (DEA), Model, Sportske organizacione jedinice*

Naučna oblast: *Operaciona istraživanja*

***Uža naučna oblast*:** *Metoda obavijanja podataka*

UDK: 519.85

Modelling, Analysis and Measuring of Sports Organisational Units Efficiency by DEA Method

Abstract: Initial idea that produced DEA (Data Envelopment Analysis) method is based on macroeconomic efficiency analyses and already in the first years of 20th century occupied attention of great names of the European scientific scene. Developing itself from European to the American continent, and based on expanding Farrell's efficiency measure, DEA method enables performance evaluation of congener entities set (organisation or production units), namely decision making units (DMU: Decision Making Unit). DMU definition is general and highly flexible, which implies application of DEA in determining performances of different entities that use larger number of the same inputs in realisation of larger number of the same outputs, and which was not possible before mathematical formalisation of DEA. Efficiency defines efficacy of engaged resources in production of achieved results, therefore it defines correlation of input towards output. By using previous ratio form, in conditions of more inputs and outputs, DMU efficiency becomes correlation of virtual input and virtual output obtained by aggregation of observed inputs and outputs. In order to be possible to calculate this quotient it was necessary to overcome newly arisen problems of scaling input (output) data and determining relative significances - weight coefficients which take part in forming of aggregated input (output). Authors of DEA method are finding solution for newly arisen problems, and for overcoming subjectively, a priori imposed preference of decision maker they propose for each production unit to have freedom in determining weight coefficient values, in order to maximize own efficiency and presenting themselves in the best possible way. While parameter approaches that mean estimation of input and output functional dependence are oriented towards performance estimations according to average performance - central tendencies, DEA is a technique of mathematical programming that calculates maximal measure of performances in relation to all

other observed production units, which makes it a "frontier method". Result obtained by DEA method is relative efficiency of the observed unit, and its relativity is within the fact that it depends on more factors (type and total number of observed DMU, as well as on dimension and structure of inputs and outputs in analysis).

Although they do have some specificities, sports organisational units share some characteristics with organisational units in other economy fields. Therefore, production activity, as main characteristic of the football game, implies affiliation of football process to the set of production processes. Starting with flexibility of DEA method in solving various problems of optimisation, dissertation has shown that according to operative experience further to the nature of "production" in sports, with high statistic data accuracy in analysis, DEA can be successfully used in measuring and analysing performances of sports organisational units. Successful application in analysis of sports organisational units (football national team) has been presented for the first time in sports industry in Serbia, in original way and on a real example, by using theoretical and applicable verified DEA models.

In the first logical part of the dissertation, comprised of the second, the third and the fourth chapter, overall review and interpretation of efficiency and chronological path of this scientific field development were given by systematic approach to the wider development of the field of research, and in specific sense of DEA analysis development with specificum of application in sports. Such original approach to review of situation in the field of research, contributes to perceiving the frame of present, but also future development and application, emphasising the problem of the present development of DEA analysis, especially insufficient DEA analysis application in sports organisational units, and also guidelines for development and modification of DEA models of sports, and especially football economies. Within the second, the third and the fourth chapter of the dissertation, problems of modelling, measuring and analysis of production units' efficiency were solved by stage approach and through strict, mathematical formal approach. Overall review of DEA algorithms based on cone and/or convex analysis and computational geometry was presented. In order to understand role of calculation in DEA, a link was established between its algorithms and known problem in computational geometry: the problem of determining extreme point of polyhedral with the final number of points.

In introduction to the fifth chapter of the dissertation, a suggestion was given for multilevel DEA models, namely cascade connection. In order to determine relative efficiency of attack and defence, as well as athlete and social efficiency of every sports organisation unit, separation was done on these three dominant components - working, operative and social. Analogous to the idea of solving two-stage DEA model and calculation of total efficiency through defining new optimisation process, a need was identified for establishing similar relations in three-stage or, if possible in general case, in multi-stage DEA model, for *k* cascade connected DEA block, for example.

In the same chapter, by introducing methodological frame and aspects of cascade multi-stage blocks analysis, the problem of sports organisation units efficiency analysis was approached in original way, in a specific case and with original application on the Serbian football national team in the period of 2010 FIFA World Cup South Africa qualifications. Through separated analyses of attack and defence, and subliming indexes of these different, but certainly inseparable aspects of the football game, it was shown that results obtained by used BCC (Banker, Charnes and Cooper) model of output orientation, convex efficiency border and variable return to scale, correspond to starting hypothesis that DEA can be successfully used in measuring and analysis of sports organisational units efficiency. Data availability according to precise statistics, for the first time introduced in this part of Europe by concluding a contract between Football Association of Serbia and Sport Universal Process SAS - creator of global information system AMISCO for assistance in professional sports sector managing, satisfied the main precondition of significance of statistic data of used technical-tactical elements of the game in analysis. As it could be foreseen, considered efficiency was based on technical indicators, and not on variables that are of

economic nature, and due to secrecy of data regarding finances, contractually defined elements between our national team players and their mother foreign clubs. Choice of input and output was decided on by the author of the dissertation and in consultation with experts in the football coaching, and reductions and expansions of model structure were done with the aim to adjust to request of the method itself. Numerical data analysis was realized by using the EMS (Efficiency Measurement System) software application. Analysis and validation of the obtained results in the experiment is in compliance with opinions of the members of the Serbian national team technical staff, especially coaches with international experience in charge of football analytics.

At the end of this dissertation, possible directions of further research in more detailed scientific area were presented, especially application contribution to DEA methodology by applying algorithms on similar problems of various sports organisation units and/or directing research with the aim of theory contributions of DEA analysis in setting mathematic conditions for reducing optimisation problems of cascade DEA blocks on linear programme.

Keywords: *Data Envelopment Analysis (DEA), Decision Making Units (DMU), Efficiency, Model, Sport organisational units.*

Scientific field: *Operational Research*

Specialized scientific field: *Data Envelopment Analysis*

UDC: 519.85

SADRŽAJ

1. Uvod

Analiza obavijanja podataka, (*DEA: Data Envelopment Analysis*), je prilaz zasnovan na numeričkim podacima („data“ orijentisani prilaz) u evaluaciji performansi skupa istorodnih entiteta (organizacionih ili produkcionih jedinica), odnosno jedinica o kojima se odlučuje (*DMU*: *Decision Making Unit*). Definicija DMU je generalna i visoko fleksibilna, što implicira mogućnosti primene DEA u modeliranju procesa (ne)ekonomske i (ne)tehničke prirode (u državnom i privatnom vlasništvu, u profitnom i neprofitnom sektoru, privrednim i neprivrednim organizacijama, socijalnim i uslužnim delatnostima, sportskim profesionalnim i neprofesionalnim udruženjima, školama, fakultetima i univerzitetima, medicinskim ustanovama i osiguravajućim kompanijama, regionima i državama). Termin „DMU“ izabran je sa ciljem da ukaže da DEA metoda ne služi samo merenju efikasnosti različitih organizacija, već je, istovremeno i koristan alat, koji može da ukaže donosiocima odluka unutar ovih organizacija kako se efikasnost može dostići [Cooper*, 2014].

Ideja na kojoj je DEA metoda nastala počiva na makroekonomskim teorijama analize efikasnosti. Pojam efikasnosti je ranije bio definisan kao količnik (odnos, *racio)* izlaza i ulaza. U slučaju višestrukih resursa i rezultata predloženo je da se sintetički pokazatelj efikasnosti računa kao količnik težinskih suma izlaza i ulaza. Kreiranje virtuelnih ulaza (izlaza) podrazumeva određivanje težinskih koeficijenata pridruženih ulazima i izlazima koji učestvuju u analizi, u skladu sa preferencijama i ciljevima DMU. Kako sve DMU ne moraju a priori imati iste ciljeve, i iste stepene važnosti dodeliti svojim ulazima i izlazima, DEA metoda prevazilazi poteškoće pridruživanja važnosti ulazima i izlazima na taj način što svakoj od

DMU daje slobodu u određivanju težinskih koeficijenata sa ciljem maksimizacije sopstvene efikasnosti i prikazivanja u „najboljem svetlu“. Nakon sračunavanja mere efikasnosti za svaku DMU, DEA analiza pruža informaciju da li je DMU, na osnovu podataka o njenim ulazima i izlazima, relativno efikasna ili nije, u poređenju sa drugim DMU uključenim u analizu.

Kao polazna tačka u nastajanju DEA analize, ali i za razvoj čitave ove oblasti u decenijama koje slede, svakako se navodi Farelov rad [Farrell, 1957], u kome je identifikovan novi pristup problemu istraživanja i predlog procedure za merenje efikasnosti i procenu granice efikasnosti proizvodnje. Eksplicitni doprinos Farelovih ideja ogleda se u merenju efikasnosti organizacije koja u uslovima više ulaza proizvodi jedan izlaz, pod pretpostavkom da povećanje u njenim ulazima rezultuje proporcionalnim povećanjem njenih izlaza, odnosno u uslovima konstantnog prinosa na obim (*CRS: constant returns to scale*). Predloživši analitičku proceduru za merenje efikasnosti i procenu granice efikasnosti proizvodnje, Farel je definisao koncept granične proizvodne funkcije nasuprot do tada korišćenom konceptu prosečnih performansi za poredjenje posmatranih jedinica u ekonometrijskoj literaturi [Forsund and Sarofoglou, 2000]. U radu [Charnes et al. 1978], inicijalnoj referenci u razvoju DEA, inače baziranom na proširenju i formalizaciji Farelovih ideja u slučajevima produkcije većeg broja izlaza, autori ističu da je DEA „*model matematičkog programiranja primenjen na opservirani skup podataka u otkrivanju novih načina estimacije empirijskih relacija, poput produkcionih funkcija i/ili mogućih efikasnih produkcionih površina, koje se, upravo, nalaze u osnovi svih savremenih ekonomskih analiza*“, drugim rečima, DEA je metoda merenja i praćenja efikasnosti ravnopravnih produkcionih jedinica, odnosno merenja i praćenja efikasnosti različitih produkcionih jedinica koje posluju na sličan način.

Sportske organizacione jedinice dele neke karakteristike sa organizacionim jedinicama iz drugih ekonomskih sektora, mada imaju i neke specifičnosti, koje otežavaju jednostavnu analizu troškova i koristi zasnovanoj na standardnim (trokovi/dobit) kriterijumima organizacione jedinice, kakva je maksimizacija profita. Pri procenjivanju menadžmenta ovakvih organizacionih jedinica, obično se više polaže na sportske rezultate, nego na finansijsku analizu. Ovo je dovodilo do takvih ekonomskih kriza, da su neki slavni klubovi, jednostavno, nestajali.

1.1. DEA analiza i industrija sporta

Širom sveta, a posebno u Evropi i Južnoj Americi, smatra se da je (evropski) fudbal ne samo igra, već i neka vrsta religije. Dakle, fudbal je bez sumnje jedan od najvažnijih sportova na svetu. Osim strasti, fanatične podrške i uživanja kada tim za koji se navija pobeđuje, ili bola kada gubi, fudbal u Evropi je i velika industrija i značajan biznis. U prilog ovome govori da su mnogi timovi prisutni na berzanskim listama još od 90ih godina prošlog veka, da za izvor prihoda i finansiranje investicija glavni izvor pronalaze u trgovini, da je cena prava na emitovanje beležila enormni porast i sl. Fudbal je takođe i izvor beskonačnih diskusija o strategijama, odlukama sudija i performansama učesnika u fudbalskim mečevima među ekspertima, a može se reći, praktično i kod svakog pojedinačnog navijača. Debata na hiljade i hiljade budućih i aktuelnih menadžera ili trenera, kao i svakog ljubitelja fudbala, ne ide samo jednostavnom linijom o tome ko će pobediti u ligi, već i na relativne performanse: Da li timovi sa naizgled inferiornim startnim pozicijama, sa manjim budžetom i manje talentovanim igračima „igraju prevazilažeći očekivanja“ (*play over their heads*)? Kako suditi o timu za koga je većina eksperata očekivala da će pobediti u šampionatu, kada u poslednjem kolu završi na drugom ili trećem mestu? Ovakva pitanja, očigledno, imaju ekonomske korene, jer se oslanjaju na jedan od centralnih ekonomskih koncepata, naime, na efikasnost.

Poznajući ekonomsku relevantnost i socijalni status fudbala, iznenađuje činjenica da su retke ekonomske procene profesionalnih timova, prvenstveno zbog nedostupnosti i pouzdanosti podataka za empirijske studije, iako oni predstavljaju povoljno okruženje za ekonomsku analizu [Preston and Szymanski, 2000; Szymanski, 2000]. Analiza profesionalnih sportskih timova kakvi su bejzbol, košarka i američki fudbal, u Sjedinjenim Državama su uobičajene i imaju stalnu rastuću važnost. Slabija pozicija evropskog fudbala u Severnoj Americi najverovatnije pruža zadovoljavajuće objašnjenje za relativno mali broj ekonomskih procena evropskog fudbala. U opštem slučaju, sportska ekonomija ima manju ulogu u Evropi nego u SAD [Frick and Wagner, 1998].

Fudbal je takmičarski sport sa dva tima od po 11 igrača (od kojih se tri igrača, odlukom trenera, mogu zameniti tokom igre), čiji je cilj da talenat, veštine i taktiku pretvori u pobedu svog tima. Od 11 igrača prvog tima jedan je golman čija je uloga u sprečavanju protivničkog tima da postigne gol. Ostalih deset igrača, igrači odbrane, igrači sredine i igrači napada, razvijaju odbrambene i napadačke strategije koje definišu sistem igre, specifičan za njihov tim. Tri zamene se mogu iskoristiti za zamenu povredjenih igrača i/ili za modifikaciju usvojene strategije meča. Po pravilu, ali i u zavisnosti od tipa takmičenja, svaki tim igra sa svakim drugim timom dva puta, na domaćem terenu i u gostima – na terenu protivnika. Pobeda na utakmici donosi tri poena, nerešen rezultat – jedan poen, a izgubljena utakmica – ne donosi poene, dakle, to je igra sa zbirom različitim od nule. Tim koji ima najviše poena je pobednik (lige, kupa, ciklusa, itd.). Naravno, biti prvi nije jedini kriterijum, na primer, i drugo mesto vodi u sledeći ciklus takmičenja ili neka druga pozicija ili rezultat vode plasmanu u odgovarajući rang takmičenja.

Dakle, fudbalski timovi koriste iste jedinice ulaznih sposobnosti, takmiče se po istim pravilima, daju istorodne izlaze, koriste istu proizvodnu funkciju i dele istu tehnologiju. S obzirom da se ulaz – elementi igre i izlaz (rezultat) fudbalskog tima jasno uočavaju (i mere), produkciona funkcija profesionalnog fudbala može se odrediti na nivou tima [Scully, 1974].

Inicijalna ideja o korišćenju proizvodne funkcije [Rottenberg,1956] u sportskoj ekonomiji (u bejzbol ligi) definiše izlaz kao proizvod srednjih vrednosti prihoda i broja gledalaca u funkciji tehničkih veština i broja igrača, kao prve ulazne promenljive, i druge ulazne promenljive koja reprezentuje kvalitete trenera, stadiona, tehničke veštine protivničkog tima i transport. Kasnije, [Scully, 1974] prvi estimira proizvodnu funkciju, ponovo za bejzbol ligu, ali, za razliku od prethodnog prilaza, monetarni efekat i operativna efikasnost – rezultat utakmice – su izlazi modela. Drugim rečima, prva jednačina modela definiše prihod koji je odredjen procentom pobeda i geografskom veličinom tržišta, a druga, rezultat tima u kome se procenat pobeda determiniše agregacijom „udarača i bacača". Odnos izmedju individualnih rezultata igrača, kao ulaza, i rezultata tima, kao izlaza, je, do današnjih dana, standardizovana specifikacija proizvodne funkcije, a ideja je, nadalje, proširena u estimaciji efikasnosti timova u različitim sportskim disciplinama: košarke [Zak et al. 1979; Scott et al. 1985], ragbija [Carmichael and Thomas, 1995], i po prvi put, engleske Premjier fudbalske lige [Carmichael et al. 2000]. Doprinos ovih radova, objavljenih u časopisima posvećenih isključivo ekonomskim temama, ogleda se prvenstveno u supstituciji parametarskih tehnika procene proizvodnih funkcija, neparametarskim tehnikama procene, posebno primeni DEA modeliranja [Cooper et al. 2007].

Usvojeni nivoi merenja efikasnosti u ekonomiji sporta, dobijeni u bar tri različita pristupa, prvenstveno su zasnovani na tehničkim aspektima, ali i na promenljivim koje imaju i ekonomsku, ali i neku drugu prirodu:

– Efikasnost se može meriti na nivou utakmice, gde su ulazi, na primer, razlika izmedju dva tima u nizu statistika utakmice (razlika izmedju broja udaraca na gol, broja kontrola lopte u prvom dodiru sa njom, kornera, posed lopte,...), a izlazi – rezultat utakmice, odnosno razlika u ukupnom broju priznatih postignutih i primljenih golova: NBA [Zak et al. 1979], košarkaška liga Nemačke [Fraucke, 1979], Premijer liga u Engleskoj [Carmichael et al. 2000].

– Menadžerska ili trenerska efikasnost (istražuje se izlazni efekat varijacija menadžerskih veština), na primer, analiza efikasnosti trenera u britanskim fudbalskim timovima [Dawson et al. 2000], ili, slično: [Fizel and D'Itri,1996; Hadley et al.2000].

– Ukupna efikasnost fudbalskog tima u toku sezone (u okviru lige) ili u toku nekog ciklusa takmičenja [Haas et al. 2004; Haas, 2003].

Proizvodna aktivnost, kao osnovna karakteristika fudbalske igre, implicira, dakle, pripadnost fudbalskog procesa skupu proizvodnih procesa, koji se, tada, evidentno, u fudbalskoj industriji može modelirati proizvodnom funkcijom. Desetak godina unazad, iako ne tako učestale, aplikacije DEA u sportskoj ekonomiji se koncentrišu na pitanja individualne efikasnosti (na primer, statistike trčanja u profesionalnom bejzbolu) [Anderson and Sharp, 1997; Sueyoshi et al. 1999] ili se bave profesionalnim fudbalom u Evropi sa institucionalnog stanovišta, pružile su osnovu za proširenje primene u fudbalu na nivou tima [Haas et al. 2004; Haas, 2003; Garcia-Sanchez, 2007; Bosca et al. 2009; Sala-Garrido, 2009]. Ovo polje i način primene pruža mogućnost i tehnički usmerenim fudbalskim profesionalcima (i predstavnicima medija) na faktore koji odredjuju efikasnost, na postojanost rezultata na različite kombinacije ulaza i izlaza, na stepen korelacije efikasnosti i pozicije u konačnom plasmanu itd.

1.2. Predmet, cilj, hipoteze i naučni metod istraživanja

Nezavisno od korišćene tehnike istraživanja, kvantifikacija relativne važnosti svakog od ulaza u proizvodnji izlaza (određivanje stepene važnosti tehničkih aspekata igre), sa kontrolom faktora produkcije, omogućuje identifikaciju mehanizama koji uslovljavaju razliku u produktivnosti tj. performansama. Generalno, u ekonomskim analizama, pitanje produktivnosti je od centralnog značaja, ali, u uslovima istih tehnologija, razlika u produktivnosti dveju produkcionih jedinica je, po pravilu, posledica kvaliteta njihovog menadžmenta i/ili razlike efikasnosti njihovih proizvodnih procesa. Fudbalski timovi imaju pristup istom tehnološkom nivou, ali razlika u nivou efikasnosti implicira razlike u produktivnosti.

Na primeru nastupa reprezentacije Srbije u kvalifikacionom ciklusu za učešće na završnom turniru Svetskog prvenstva 2010. godine u Južnoj Africi, polazi se od hipoteze da se DEA može uspešno koristiti kao metoda matematičkog programiranja sa visokim praktičnim značajem u pogledu modeliranja, analize i merenja efikasnosti sportskih organizacionih jedinica. Adekvatnim izborom modela i manipulacijama podataka unutar izabranog modela na osnovu operativnih znanja vezanih za prirodu „produkcije“ u sportu, uz visoki kvalitet statističkih podataka korišćenih u aplikaciji metode, DEA se sa uspehom može pozicionirati i doprineti kvalitetu donošenja odluka kako u internacionalnom tako i u domaćem sportu, a posebno reprezentatativnom fudbalu.

Predmet istraživanja doktorske disertacije pripada, u širem smislu, naučnoj oblasti operacionih istraživanja, a u užem smislu, predstavlja multidisciplinarni pristup modeliranju, analizi i merenju efikasnosti organizacionih jedinica primenom DEA metode. Definisanim predmetom istraživanja implicitno je odredjen i cilj istraživanja u doktorskoj disertaciji. Drugim rečima, osnovni zadatak istraživanja je proučavanje verifikovanih, i u teorijskom i u aplikativnom smislu, naučnih metoda u modeliranju, analizi i merenju performansi organizacionih jedinica, ali i razvoj originalnih primena modela u okviru (za sada) jedinstvene aplikacije DEA metodologije na sport u Srbiji. S tim u vezi, posebne i pojedinačne hipoteze su date u petom poglavlju rada.

Mogućnost dekompozicije modela sportskih ekonomija, odnosno razdvajanje efikasnosti tima na tri dominantne komponente: operativne ili radne efikasnosti, atletske ili operativne efektivnosti i socijalne efektivnosti rezultuje modifikovanim višestepenim DEA modelom, kao i “mapom” realne (fudbalske i ekonomske) snage i identifikacijom “slabosti” fudbalskog tima.

DEA metodologija je neparametarska u smislu da joj nisu potrebne pretpostavke o funkcionalnoj formi proizvodne funkcije, odnosno efikasne granice, prema tome isključuje procenu vrednosti parametara, što je čini korisnom u velikom broju primena. DEA grupiše entitete kao „efikasne“ ili „neefikasne“, zavisno od njihove relativne geometrijske lokacije u odnosu na empirijski postavljenu efikasnu granicu baziranu ne na usrednjavanju već na „najboljoj praksi“. Skup podataka u DEA analizi je konačna kolekcija tačaka u multidimenzionalnom prostoru, pa su algoritmi DEA , zasnovani na konusnoj i/ili konveksnoj analizi i računarskoj geometriji [Dula, 2002]. Izborom DEA modela određenih karakteristika iz prezentovane grupe modela, kao i predlogom metodološkog okvira za analizu definisan je prilaz u istraživanju u teorijskom i aplikativnom smislu.

1.3. Struktura i sadržaj rada

U uvodnom delu, u kome je ukratko predstavljena ideja i koncepti na kojima počiva DEA i pregled primene, posebno u industriji sporta i fudbala, izloženi su problem, zadatak, hipoteze i primenjena metodologija istraživanja. U ovom delu ukazano je na osnovne očekivane doprinose ovog rada. Pored ovog uvodnog dela disertacija sadrži još pet poglavlja, spisak korišćene literature i tri priloga.

Drugo poglavlje, napisano korišćenjem obimne literature, počev od fundamentalnih radova u oblasti, prikazuje razvoj DEA analize kao oblasti matematičkog programiranja od baznih koncepata do savremenih primena. U ovom poglavlju se nastoji, da se uz unifikaciju korišćenih oznaka i termina, saglasno većem broju originalnih izvora [Farrell, 1957; Charnes et al. 1978;Banker et al. 1984; Cooper et al. 2007; Glover and Sueyoshi, 2009], pristup u izlaganju u najvećoj meri "oslobodi" striktnog matematičkog formalizma, što i jeste karakteristika aplikativno orijentisanih radova. Matematički "karakter" rada je izbegnut, u smislu nekorišćenja klasičnog prilaza Definicija-Lema-Teorema-Dokaz, ali ne i u postavljanju osnovnih teorijskih rezultata neparametarske analize, merenja efikasnosti produkcionih jedinica i razvoja DEA optimizacionih algoritama. Izložen je aksiomatski prilaz produkcionoj teoriji u uslovima više (ekonomskih) aksioma, data analiza granice efikasnosti i reprezenti neparametarskih estimatora produkcionih jedinica - DEA i FDH (*Free Disposal Hull*) estimatori. Tekst ovog poglavlja, u originalnoj interpretaciji autora disertacije, zasnovan je na većem broju navedenih referenci, prvenstveno na [Banker et al. 1984, 2004, Cooper et al. 2007, Tulkens, 1993, Hardle and Jeong, 2005, Emrouznejad et al. 2008].

Treće poglavlje ima za predmet razmatranja merenje efikasnosti proizvodnih jedinica. Postavljena je ekvivalentnost problema linearnog razlomljenog i linearnog programiranja. Razmatrani su DEA CCR (*Charnes, Cooper and Rhodes*) modeli sa konstantnim prinosom na obim i DEA BCC (*Banker, Charnes and Cooper*) modeli sa varijabilnim prinosom na obim. Analiza efikasnosti je zasnovana na referentnom skupu, koji je pridružen neefikasnoj proizvodnoj jedinici, u cilju razvoja CCR, odnosno BCC projektnih formula „efikasnosti". Ukazano je i na mogućnost svodjenja izlazno orijentisanih modela, transformacijom promenljivih, na ekvivalentne ulazno orijentisane modele. S druge strane, kombinacija orijentacija u jedan model vodi razvoju DEA aditivnih modela, a ako je eksplicitna mera efikasnosti zasnovana na izravnavajućim (*slack*) promenljivim – razvoju DEA SBM (*Slack Based Measures*) modela. I na kraju ovog poglavlja, prikazani su FDH modeli, kao alternativni prilaz analizi efikasnosti. Tekst i ovog poglavlja, u analizi i interpretaciji autora disertacije, u prikazu karakteristika odabranih DEA modela, zasnovan je na većem broju referenci, posebno na [Charnes et al. 1978, Banker et al. 1984, Cooper et al. 2007, Deprins et al. 1984, Fare et al. 1994, Tulkens, 1993, Seiford and Zhu, 1999, Glover and Sueyoshi, 2009].

Sadržaj četvrtog poglavlja posvećen je analizi DEA algoritama u estimaciji ekonomije obima poslovanja proizvodnih jedinica i usmeren na uspostavljanju odnosa vektora koeficijenata potporne hiperravni i dualnog optimalnog rešenja BCC modela. Razmatra se i dekompozicija tehničke efikasnosti, koja je jedinstvena i „otkriva" izvore neefikasnosti implicirane neefikasnošću operacija i izvore neefikasnosti u uslovima gubitaka iskazanih kroz efikasnost obima. Izloženi sadržaj poglavlja zasnovan je na referencama [Banker, 1984, Banker et al. 1984, Cooper et al. 2007, Deprins et al. 1984, Fare et al. 1994, Banker and Thrall, 1992, Banker et al. 1996, 2004, Tone, 1996, Golany and Yu, 1997].

U petom poglavlju, u fokusu su prvenstveno tehnički indikatori fudbalske igre u estimaciji tehničke efikasnosti, koja odredjuje odnos uloženih resursa i postignutih rezultata. Različiti nivoi produktivnosti napada i odbrane protivničkih timova, saglasno klasifikaciji efikasnosti, su rezultat razlika u kvalitetu menadžmenta i/ili efikasnosti organizacije resursa. Budući da akumulirani bodovi odredjuju konačan plasman tima, u ekonomskom smislu, ovaj rezultat korespondira operativnoj ili atletskoj efektivnosti tima. Atletska efektivnost, realno, determiniše benefit realizovan postignutim pobedama, kao rezultat efikasnosti u napadu i odbrani koju je fudbalski tim pokazao na terenu u toku ligaške sezone ili kvalifikacionog cilusa takmičenja. Upravo, sagledavanje efikasnosti fudbalskih timova, razvojem DEA modela sportskih ekonomija, posebno modifikacijom modela fudbalskih ekonomija, identifikacijom metodološkog koncepta u teorijskom smislu, i originalnom primenom na merenje efikasnosti fudbalske reprezentacije Srbije u utakmicama kvalifikacija za učešće na Svetskom prvenstvu 2010. god. u Južnoj Africi, u aplikativnom smislu, dati su osnovni naučni doprinosi doktorske disertacije. U eksperimentu je korišćen BCC model konveksne granice efikasnosti i promenljivim prinosom na obim, u izlaznoj orijentaciji, koja treba da omogući maksimizaciju izlaza sa datom količinom ulaza. U prvoj fazi merena je efikasnost napada i odbrane posebno, radi dobijanja indeksa efikasnosti, koji će u drugoj fazi biti u ulozi ulaznih veličina u produkciji dva različita konteksta postignutih rezultata (učešće postignutih golova naše reprezentacije u ukupnom broju primljenih golova protivnika i gol razlika koju je Srbija postigla na svakom pojedinačnom meču). Deo rezultata istraživanja publikovan je u radovima [Petrović Đorđević i dr. 2010], [Petrović Đorđević i Martić, 2010], [Petrovic Djordjevic et al. 2015].

Rezultati rada, završna razmatranja, kao i neka usmerenja daljih istraživanja su naznačena u šestom poglavlju. Na kraju je data lista korišćenih referenci, koje su, u najvećem broju, bile na raspolaganju autoru, u štampanoj i/ili elektronskoj formi, a samo mali broj je naveden na osnovu njihovog prikaza na mreži. U cilju neposrednog praćenja imena autora radova, ali i imena autora algoritama, kao i sagledavanja vremenskog perioda razvoja – usvojena oznaka citiranih referenci je uglasta zagrada, u koju se unosi prezime prvog autora, ukoliko ih ima više od dva, ili prezimena prvog i drugog autora, odnosno prezime jedinog autora, sa godinom objavljivanja rada. Disertacija sadrži i tri priloga, koji su izdvojeni iz integralnog teksta, a sadrže podatke i izveštaje koji su sastavni deo eksperimenta.

2. Koncepti efikasnosti organizacionih jedinica: Neparametarski pristup analizi efikasnosti

2.1. Koncept DEA i hronologija razvoja oblasti

Princip efikasnosti, kao jedan od najvažnijih principa u poslovanju produkcionih jedinica i profitnog i neprofitnog sektora, sastoji se u realizaciji što većih (ne)ekonomskih produkata (izlaza), uz korišćenje što je moguće manjih (ne)ekonomskih resursa (ulaza). Efikasnost je reč preuzeta iz latinskog jezika (efficax-uspešnost) i definiše delotvornost angažovanih resursa, odnosno ulaganja (ulaza), u produkciji (ne)materijalnih dobara, odnosno ostvarenih rezultata (izlaza), dakle definiše odnos izlaza prema ulazu: (efikasnost)=(izlaz)/(ulaz).

Saglasno proširenoj Pareto-Kupmansovoj [Pareto, 1906; Koopmans, 1951] definiciji, produkciona jedinica postiže potpuno efikasnost ako i samo ako (akko) nijedan od njenih ulaza ili izlaza ne može biti poboljšan bez pogoršanja nekih drugih ulaza ili izlaza.

Međutim, posebno u oblasti menadžmenta socijalnim i političkim entitetima, mogući teorijski nivoi efikasnosti nisu poznati. Zasnovana na empirijski dostupnim informacijama, prethodna definicija (relativne) efikasnosti se modifikuje i ističe da se na osnovu dostupnih podataka, produkciona jedinica može smatrati potpuno efikasnom akko se performanse drugih produkcionih jedinica ne mogu poboljšati na nekom od ulaza ili izlaza, bez pogoršavanja na nekim drugim ulazima ili izlazima [Athanassopoulos, 1995].

Upravo gornjom definicijom je izbegnuta potreba direktnog poznavanja, na primer, cena i/ili vrednosti težinskih faktora koji ukazuju na relativni značaj drugih ulaza ili izlaza, kao i potreba neposredne specifikacije formalnih veza koje postoje izmedju ulaza i izlaza. Ova efikasnost, tzv. „tehnička efikasnost“ (*technical efficiency*), definiše, meru operativnosti produkcione jedinice, ne uzimajući u obzir cenu i troškove generisane procesom transformacije ulaza u izlaze (u različitim ekonomskim analizama, modifikacija koja uključuje cene, jedinične troškove i sl. je moguća i u primeni DEA metode).

Dakle, ocena efikasnosti poslovanja ne pretpostavlja poznavanje (analitičkog) oblika proizvodne funkcije, koja je, po pravilu, nepoznata. Estimacija analitičkog obiika funkcije, definisana odnosom nezavisnih i zavisnih promenljivih, implicira parametarski pristup. Nadalje, formiranje analitičkog oblika proizvodne funkcije zahteva primenu, na primer, regresione analize, zahteva i pretpostavku o funkciji raspodela greške, kao i neka druga ograničenja nametnuta njenim parametrima [Dawson et al. 2000a].

Koncept koji leži u teorijsko – matematičkoj osnovi DEA metode baziran je na proširenju Farelovog empirijskog rada u slučajevima većeg broja produkcionih jedinica, koje koriste veći broj iste vrste ulaza u realizaciji većeg broja iste vrste izlaza, što do tada nije bilo moguće. Efikasnost produkcione jedinice je, koristeći prethodnu racio formu, postala odnos virtuelnog izlaza i virtuelnog ulaza dobijenih agregacijom posmatranih ulaza i izlaza. Da bi ovaj količnik bilo moguće sračunati, bilo je potrebno prevazići dva novonastala problema: prvi, vezano za skaliranje ulaznih (izlaznih) podataka i određivanje relativnih važnosti – težinskih koeficijenata koji učestvuju u formiranju agregirane ulazne (izlazne) veličine. Autori DEA metode nalaze rešenje za prevazilaženje subjektivno, a priori nametnutih preferencija donosioca odluka, predlažući da svaka proizvodna jedinica ima slobodu određivanja vrednosti težinskih koeficijenata, u cilju maksimiziranja sopstvene efikasnosti i prikazivanja sebe u najboljem svetlu. Dok su pristupi koji podrazumevaju estimaciju funkcionalne zavisnosti ulaza i izlaza okrenuti procenama performansi na osnovu prosečne performanse – centralnim tendencijama, DEA je tehnika matematičkog programiranja koja izračunava maksimalnu meru performansi u odnosu na sve druge posmatrane produkcione jedinice, što je čini „graničnom metodom“. Rezultat dobijen DEA metodom je relativna efikasnost posmatrane jedinice, a njegov relativitet leži u činjenici da zavisi od više faktora (vrste i ukupnog broja opserviranih DMU, kao i od dimenzije i strukture ulaza i izlaza u analizi). Takođe, ocenjena efikasnost zavisi od usvojenih linearnih ograničenja pridruženih (eksperimentalnom) skupu podataka. Četiri različita konveksna modela sa definisanim prinosom na obim su rezultat različitih linearnih kombinacija u istom skupu podataka.

Varijabilni prinos na obim je uslovljen konveksnom kombinacijom podataka i opisan je tzv. „BCC“ modelu (*Banker-Charnes-Cooper models*) [Banker et al. 1984], dok polazeći od konusne kombinacije podataka, u uslovima konstantnog prinosa na obim, obezbeđuje pripadnost klasi CCR modela (*Charnes-Cooper-Rhodes models*) [Charnes et al. 1978]. Izmedju varijabilnog i konstantnog prinosa na obim mogu se razmatrati nerastući, odnosno neopadajući prinosi na obim u zavisnosti da li je, pored uslova nenegativnosti koeficijenata, njihov zbir manji ili veći od jedan.

Četiri pretpostavke o karakteru prinosa na obim proizvode poliedarske skupove koji „obavijaju“ podatke na četiri različita načina. Svaki od ovih skupova naziva se produkcionim skupom ili skupom zadate produkcione mogućnosti u DEA analizi. Poliedarski skupovi su definisani ograničenim linearnim operacijama konačne liste tačaka i prikazani su, ne unutrašnjom reprezentacijom okarakterisanom presekom poluprostora, već eksternom reprezentacijom konusnih i/ili konveksnih karakteristika [Dula, 2002]. Odredjivanje indeksa efikasnosti entiteta, za ma koji usvojeni prinos na obim, zahteva pronalaženje položaja vektora entiteta u skupu produkcionih mogućnosti u odnosu na njegove granice. Posebni deo te granice naziva se granica efikasnosti.

Fundamentalna pitanja na koja u okviru DEA analize treba naći odgovore su pitanja da li su polažaji tačaka u unutrašnjosti ili na granici skupa, i ako se tačka nalazi na granici, da li je to granica efikasnosti.

Položaj tačke unutar granica ili na granici skupa produkcionih mogućnosti, može se utvrditi korišćenjem potpornih hiperpovršina. Neka tačka se nalazi na granici skupa produkcionih mogućnosti akko egistira potporna hiperpovršina sa potpornim skupom koji sadrži tu tačku. Ovakva veza između tačke i potporne hiperpovršine omogućuje analizu sledećih pristupa. Prvi, startovati sa nekom hiperpovršinom i identifikovati skup tačaka potpornog skupa njenom translacijom. Takve tačke su sigurno granične tačke u skupu produkcionih mogućnosti. Drugi, krenuti sa nekom od tačaka, a zatim utvrditi egzistenciju potporne hiperpovršine. Pristup je uslovljen formiranjem linearnog sistema, takvog da rešenje egzistra samo ako se tačka nalazi na granici. Ovaj pristup, za razliku od prvog, može se sistematski koristiti za svaku od tačaka, kako bi se odredio njihov položaj u odnosu na granicu skupa produkcionih mogućnosti. Jedan od praktičnih načina za određivanje dopustivosti rešenja linearnih sistema je korišćenje linearnih programa matematičkog programiranja.
Drugi, gore predloženi pristup je fundamentalnog karaktera, ali uslovljen nizom teorijskih i računarskih, odnosno numeričkih poteškoća. Utvrđivanje da li se neka granična tačka nalazi na granici efikasnosti nije ekvivalentna analizi njenog položaja na granici ili van nje.Upravo ova razlika dovodi do niza, gore naglašenih, i teorijskih i numeričkih problema, koji se, u nekim analizama, i ne razmatraju. Granica skupa produkcionih mogućnosti može se podeliti na dva regiona: granicu efikasnosti i region „slobodnog razmeštaja“. Deo problema je u tome što nijedan od ovih regiona nije konveksan.

Mogu se postaviti potrebni i dovoljni uslovi klasifikacije tačaka unutar ovih regiona. Naime, neka tačka je na granici efikasnosti skupa produkcionih mogućnosti akko postoji potporna hiperpovršina u toj tački, tako da su svi koeficijenti atributa različiti od nule. Problem je u tome što egzistencija potporne hiperpovršine u nekoj tački, tako da su jedan ili više koeficijenata atributa nula, nije dovoljna da bi se zaključilo da ta tačka nije na granici efikasnosti.

Ovaj uslov pretpostavlja da postoji izvesna hiperpovršina sa zahtevanom karakteristikom. Tačke podataka u regionu sa slobodnim razmeštajem skupa produkcionih mogućnosti nazivaju se slabo efikasnim, što je u kontekstu DEA netačno, budući da to nisu tačke na granici efikasnosti. Rešavanje ovog problema postavljeno je u fundamentalnim radovima [Charnes et al. 1978, 1979], koji su, u inicijalnoj formi, kao što je već naglašeno, i definisali ovu oblast istraživanja matematičkog programiranja i numeričke optimizacije. Njihov linearni program odredjuje potrebne i dovoljne uslove „smeštaja“ tačke na granici efikasnosti. Međutim, implementacija ovog linearnog programa je u numeričkom smislu neprihvatljiva, budući da pretpostavlja unošenje eksplicitne numeričke vrednosti za proizvoljno malu konstantu, tzv.neArhimedian konstantu. O ulozi slabe efikasnosti u sračunavanjima u DEA, biće više reči i u sledećim poglavljima ovog rada.

Savremena DEA i linearno programiranje povezani su još od njenih početaka u 1978. god. DEA je originalno izložena, interpretirana i prihvaćena prema rešenju linearnog programa [Charnes et al. 1978]. DEA klasifikacija pretpostavlja rešavanje jednog od primalno-dualnog para linearnih programa: težinskog ili programa u formi obavijanja. Težinski linearni program određen je prostorom atributa plus još jedna strukturna promenljiva ukoliko prinos na obim nije konstantan. Optimalno rešenje težinskog linearnog programa su parametri potporne hiperravni skupa produkcionih mogućnosti. Strukturne promenljive u obavijajućim formulacijama linearnih programa su pridružene DEA tačkama podataka. Rešenje DEA modela klasifikuje (neku) tačku unutar ili na granici skupa produkcionih mogućnosti. Na osnovu ovih osobina (posebnih) formulacija linearnih programa dolazi se do algoritama DEA metoda. Algoritam se ogleda, u osnovi, u iterativnom rešavanju linearnog programa za svaku tačku u skupu podataka. To je standardni osnovni algoritam DEA metodologije i u numeričkom smislu se široko primenjuje. Ovaj algoritam mora rešiti onoliko linearnih programa, koliko je tačaka u skupu podataka. Ovo, međutim, znači da će standardna DEA analiza velikih skupova podataka računarski biti veoma intenzivna. To nadalje znači i da je DEA računarski zahtevnija i podložnija povećanju broja atributa i posmatranih tačaka u odnosu na standardne procedure linearne regresije [Dawson et al. 2000a].

S druge strane, da bi se razumela uloga sračunavanja u DEA, poželjno je uspostaviti vezu između njenih algoritama i dobro poznatog problema u računarskoj geometriji: problem određivanja ekstremnih tačaka poliedra sa konačnim brojem tačaka.

Konačni obrazovani poliedarski skup je konveksni poliedar konstruisan pomoću linearnih operacija nad konačnom listom tačaka podataka, tzv. skupova generatora. Ovi skupovi su poliedarske ljušture tačaka. Njihov oblik zavisi od prirode linearnih operacija i ograničenja koeficijenata u generatorima. Skupovi produkcionih mogućnosti u DEA su poliedarske ljušture sa *n* tačaka podataka koje odgovaraju DMU-ovima u modelu. Pretpostavke o različitim prinosima na obim definišu operacije i ograničenja nad primenjenim na skupu od *n* DMU, koje definišu i različite poliedarske strukture. Pretpostavka konstantnog prinosa na obim generiše konus, a u uslovima varijabinog prinosa – poliedarske ljušture, odnosno poliedre sa mogućim višestrukim ekstremnim tačkama, što usmerava, a to je i željeni rezultat, ka rešavanju problema razgraničenja efikasnog od neefikasnog u DEA analizama.

U uslovima visoke primenljivosti algoritama DEA metodologije, savremenom čitaocu rada [Farrell, 1957] ne može da promakne (autorova) kolosalna ideja zamene neadekvatnih indeksa radne produktivnosti, kapitalne produktivnosti, konceptom efikasnosti produkcionih jedinica, primenljivim, po njegovim rečima „od radionice do čitave ekonomije“. Saglasno Farelovom prilazu analizi aktivnosti, merenje relativne efikasnosti (neke) produkcione jedinice ili DMU sa sličnim, u okviru posmatranog skupa od, na primer, *n* DMU, se sastoji u estimaciji „best practice“ granice (dakle, najbolje moguće prakse koja je odredjena vrednostima ulaza i izlaza svih DMU), u ulozi (nepoznate) teorijske granice efikasnosti, koja, u ekonomskom smislu, definiše empirijski maksimum produkta (izlaza), koji sa datom količinom resursa (ulaza), proizvodi svaka DMU. Inicijalni DEA model zasnovan upravo na Farelovom prilazu je CCR model, predložen u već pomenutom kultnom radu [Charnes et al. 1978].

Ovaj rad je bio “odgovor” na iznalaženje rešenja na probleme sa kojima se susreo Rodes u izradi svoje doktorske disertacije [Rhodes, 1978], pod mentorstvom Kupera, u cilju formiranja edukacionih programa za učenike sa smetnjama u razvoju. Rodes i Kuper koriste Farelov koncept analize aktivnosti, kao i sličan Kupmansov koncept [Koopmans, 1951], i formalizuju gore izložene definicije: proširenu Pareto-Kupmansovu definiciju efikasnosti i definiciju relativne efikasnosti, koje se nalaze u osnovi svih daljih istraživanja u ovoj oblasti.

U svom priručniku za političku ekonomiju [Pareto, 1906], švajcarsko-italijanski ekonomista Vilfredo Pareto postavlja osnove savremene „ekonomije blagostanja“ u odnosu na deo ekonomije koja se bavi „javnom“ politikom, naglašavajući da je socijalna politika opravdana ukoliko neke osobe čini „boljim“, bez da druge čini „lošijim“. Potreba za komparacijom vrednosti koji nekima čini „dobitak“, a nekima „gubitak“ je izbegnuta, a izbegnuta je i neophodnost uvodjenja „funkcija korisnosti“ i/ili „merenja“ relativnog značaja svakog individualnog dobitka ili gubitka. Ovaj tzv. Paretov kriterijum je usvojen i adaptiran u Kupmansovom radu na analizi aktivnosti produkcije i alokacije [Koopmans, 1951]. U tom kontekstu, „finalna dobra“ (izlazi) – sa navedenom karakteristikom – trebalo bi da budu zadovoljena u propisanim količinama, dok bi resurse (ulaze) trebalo optimalno odrediti u skladu sa cenama i količinama koje su fiksne za svaki izlaz (finalno dobro). Kupmansove „efikasne cene“ su cene pridružene efikasnoj alokaciji resursa, koje će zadovoljiti unapred date zahteve za finalnim dobrima. Prikaz mehanizma analize aktivnosti je dat u [Charnes and Cooper, 1961].

Pareto i Kupmans su bili usredsredjeni na analizu čitave ekonomije, pa je prirodno pretpostaviti da se cene resursa i količine odredjuju prema mogućnostima zadovoljenja finalnih zahteva. Farel, medjutim, proširuje Pareto-Kupmansov prilaz i na ulaze i na izlaze i eksplicitno ignoriše ma kakvo korišćenje cena i/ili odgovarajućih „mehanizama razmene“. Šta više, što je i od većeg značaja, koristi performanse ostalih DMU, u odredjivanju (relativnih) karakteristika svakog od DMU, u odnosu na ulaze i izlaze svih DMU, što implicira estimaciju relativne efikasnosti empirijskim putem.

Rezultujuća mera, u nazivu „Farelova mera efikasnosti“ – a u Farelovoj terminologiji: „tehnička efikasnost“ ili „količina gubitaka“ (*technical efficiency or the amount of waste*) – može se eliminisati bez pogoršanja ma kojeg ulaza ili ma kojeg izlaza. Saglasno ekonomskoj terminologiji, Farel razgraničava tehničku efikasnost od alokativne ili cenovne efikasnosti (*allocative or price efficiency* – korišćenje ulaza u uslovima minimizacije cene proizvodnje) i ukupne efikasnosti (*overall efficiency* – data proizvodom tehničke i alokativne efikasnosti). Kasnije je dodata i komponenta efikasnosti obima (*scale efficiency*).

Farelov prilaz evaluaciji efikasnosti, sadržan u Farelovoj meri, pretpostavlja podjednak pristup svim ulazima DMU. Pretpostavka podjednakog pristupa je relativno blaga, bar što se tiče dostupnosti podataka. Na primer, mogu se uvesti nediskrecione promenljive i ograničenja za rad u uslovima koji su van kontrole upravljanja DMU– u formi egzogenih fiksiranih resursa koji su, u principu, različiti za svaki DMU. Uvodjenje kategorijskih promenljivih na ulazu i/ili na izlazu – koje su van i/ili pod kontrolom DMU – osigurava analizu efikasnosti u uslovima kada promenljive poseduju (neke) različite karakteristike, tj. pripadaju različitim kategorijama [Cooper et al. 2007].

Dakle, treba naglasiti, da su navedene definicije „proširene Pareto-Kupmans efikasnosti“ i „relativne efikasnosti“ CCR formalizovane, mada su saglasne sa Farelovim modelima i načinom na koji ih je on koristio. U svakom slučaju, dalji razvoj ove oblasti istraživanja bio je zasnovan upravo na ovim definicijama.

Društveni eksperiment velikih razmera u vezi sa državnim obrazovanjem u Americi, kojim se bavio Rodes u radu na svojoj doktorskoj disertaciji [Rhodes, 1978], u jednoj od analiza, označio je izlaze kao povećano samopoštovanje deteta ograničenog u razvoju, a ulaze, kao vreme koje majka provede u čitanju detetu – saglasno opisu u psihološkim testovima i izveštajima zasnovanim na direktnom kontaktu, institucija koje su učestvovale u njemu. Farelova eliminacija potrebe za informacijom o cenama upravo je visoko atraktivna za empirijska istraživanja sa ulazima i izlazima na ovakvim ili sličnim modelima. Medjutim, Farelov empirijski rad se odnosio samo na modele sa jednim izlazom, a ekstenzija na modele sa više izlaza nije mogla biti primenjena na skupove sa visokim brojem podataka, saglasno Rodesovim istraživanjima. Rešavanje ovog problema uslovljava razvoj CCR dualnog para računarski implementiranih formi modela, multiplier i envelopment dualnih formi, sa direktnim dokazom da Farel u svojim analizama, u numeričkoj interpretaciji, na razmatra nenula izravnjavajuće (slack) promenljive, a u analizi efikasnosti – ne detektuje promenu u proporcijama u prisustvu miksovane neefikasnosti (*mix inefficincies*) i na ulazu i na izlazu. Prisustvo izravnjavajućih promenljivih različitih od nule, u matematičkom smislu, kao izvora miksovanih neefikasnosti, zahteva posebnu analizu, čak i u odnosu na tehničku efikasnost.

Problem izravnjavajućih promenljivih različitih od nule u prisustvu alternativnih optimalnih vrednosti linearnog programa, Farel rešava uvodjenjem tačaka u beskonačnosti (*points at infinity*), ali s obzirom na odsustvo operativno primenljive forme, ideja nije realizovana. Niz radova je posvećeno rešavanju ovog problema, navedimo najznačajnije: [Debreu, 1951; Shephard, 1970; Afriat, 1972]. Medjutim, CCR uvode matematički koncept zasnovan na ne-Arhimedian konstanti, implicirajući maksimalne vrednosti izravnjavajućih promenljivih različitih od nule, bez promene vrednosti Farelove mere. Dualna analiza je proširila primenu gornjih ideja i na modele sa više ulaza i više izlaza, ali na način koji omogućava identifikaciju neefikasnosti za svaki ulaz i svaki izlaz, svih DMU. S obzirom na ukupna merenja i postavljenog odnosa linearnih frakcionih i

linearnih programa [Charnes and Cooper, 1962], CCR modeli unificiraju prilaz uvodjenjem ekvivalentnog CCR modela [Charnes et al. 1978], koji se nalazi u osnovi, može se reći, intenzivnog razvoja, do današnjih dana, ove oblasti istraživanja.

U radu [Tavares, 2002], autor navodi da je od utemeljenja oblasti istraživanja 1978., do kraja 2001. objavljeno 3203 publikacija (1259 radova u medjunarodnim časopisima, 115 istraživačkih radova, 50 knjiga udžbeničkog ili monografskog karaktera, 171 doktorskih disertacija,... 2152 različitih autora iz 49 zemalja, u okviru 305 institucija – 213 univerziteta, 73 departmenta – uključujući i dva rada iz Srbije, naših autora: [Martić and Savić, 1998, 2001]. Survey rad koji je novijeg datuma [Emrouznejad et al. 2008] citira zaključno sa 2006. god. (i publikacijama iz 2007. koje nisu ušle u formiranu statistiku) više od 4000 radova u časopisima i u vidu poglavlja u knjigama, 2500 različitih autora, a uključivanjem u statistiku odbranjenih disertacija, tehničkih izveštaja univerziteta i instituta, kao i radova sa konferencija i simpozijuma, broj objavljenih publikacija premašuje fantastičnih 7000 naučnih (teorijskih i primenjenih) rasprava u okviru DEA analize.

U preglednom radu po pozivu [Glover and Sueyoshi, 2009] objavljenom povodom 95. rodjendana prof. Kupera, jednog je od autora koji su formirali DEA oblast, istaknuto je da je značajan deo njegovog naučnog rada (autor je 27 knjiga i više od 520 radova u vodećim medjunarodnim časopisima) posvećen DEA analizi (teorija, algoritmi, primene).

Na srpskom jeziku treba istaći rad [Martić i dr, 1998], kao i doktorsku disertaciju [Savić, 2012].

2.2. Analiza granice efikasnosti

Aktivnosti organizacionih (produkcionih) jedinica, ranije definisanih kao jedinice o kojima se odlučuje DMU, od zanatskih radionica, administracija, banaka, univerziteta, vlada, fudbalskih timova i drugih sportskih klubova, do ekonomija zemalja, čija se zajednička karakteristika ogleda u korišćenju ulaznih faktora ili resursa i produkciji izlaznih faktora ili produkta, mogu biti opisane, na apstraktnom nivou, uvodjenjem *produkcionog skupa* (production set), u oznaci F, saglasno relaciji [Banker et al. 1984; Hardle and Jeong, 2005]

$$F = \{(x,y) \in R_+^m x R_+^s \mid x \text{ može da proizvede } y\} \tag{2.1}$$

gde su:

$x \in R_+^m$ - vektor resursa (vektor ulaza) dimenzije *m*,

$y \in R_+^s$ - vektor produkcije (vektor izlaza) dimenzije *s*.

Uvedena oznaka, na primer, $z \in R_+^k$, reprezentuje vektor *z* dimenzije *k*, sa ekvivalentnim zapisom $z \geq 0,\ z \neq 0$, čiji je smisao da ukaže da su sve koordinate $z_i,\ i = 1,2,\ldots,k$ vektora *z*: $z = [z_1\ z_2\ \ldots z_k]^T$ nenegativne, a najmanje jedna koordinata je (strogo) pozitivna. Tada oznake $z \in R_+^k$ ili $z \geq 0,\ z \neq 0$ reprezentuju tzv. *semipozitivni* vektor u prostoru R^k.

Opis aktivnosti produkcionih jedinica zasnovan na empirijskim opservacijama, estimacijom skupa eksperimentalnih podataka

$$\chi = \left\{ (x_j, y_j) \middle|\ j = 1,2,\ldots,n \right\} \tag{2.2}$$

gde je *n* – broj produkcionih jedinica uključenih u analizu, impliciran je, po pravilu, nepoznavanjem produkcionog skupa *F*.

Produkcionom skupu (2.1), odnosno svakom dopustivom ulazno-izlaznom paru vektora (x, y) ili svakoj dopustivoj aktivnosti (x, y), može se odmah pridružiti (ekonomska) aksioma *neefikasnosti*, saglasno relacijama [Athanassopoulos, 1995]:

$$(x, y) \in F \wedge x' \geq x \Rightarrow (x', y) \in F \tag{2.3a}$$

$$(x, y) \in F \wedge y' \leq y \Rightarrow (x, y') \in F \tag{2.3b}$$

ili, za dato $(x, y) \in F$, svako (x', y'), sa osobinama $x' \geq x$ i $y' \leq y$, pripada produkcionom skupu *F.*

Ukoliko je izlaz *y* – jednodimenzionalan (*s=1)*, produkcioni skup *F* može biti okarakterisan funkcijom *g*, koja se nalazi u ulozi tzv. *granične funkcije* ili *produkcione funkcije*:

$$F = \left\{ (x,y) \in R_+^m x R_+ \middle| \; y \le g(x) \right\} \tag{2.4}$$

Aksioma neefikasnosti produkcionog skupa *F* implicira egzistenciju monotono neopadajuće produkcione funkcije *g* po vektoru ulaza *x*. Na sl.2.1(a) ilustrovan je mogući oblik produkcione funkcije *g* i produkcionog skupa *F*, za slučaj produkcione jedinice sa jednim ulazom i jednim izlazom (*m=s=1)*. Monotono neopadajuća kriva reprezentuje produkcionu funkciju, a oblast ispod krive – definiše produkcioni skup. Neka tačka A reprezentuje ulazno-izlazni par produkcione jedinice. Performansa produkcione jedinice može se sagledati projekcijom tačke A u tačku B, paralelno *x*-osi, i u tačku C, paralelno *y*-osi, na produkcionoj funkciji. Evidentno je da manji ulaz *x* može proizvesti isti izlaz *y* (tačka B), odnosno ulaz A može proizvesti izlaz C.

Definicija produkcionog skupa *F* je moguća [Hardle and Jeong, 2005] i korišćenjem tzv.:

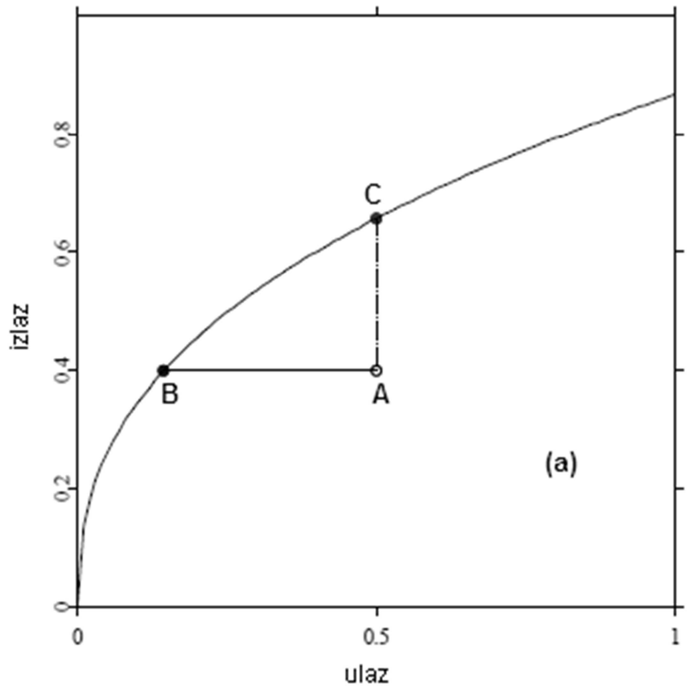
– Ulaznog skupa (sastoji se od svih ulaznih vektora koji mogu da proizvedu izlazni vektor $y \in R_+^s$):

$$X(y) = \left\{ x \in R_+^m \middle| (x,y) \in F \right\} \tag{2.5}$$

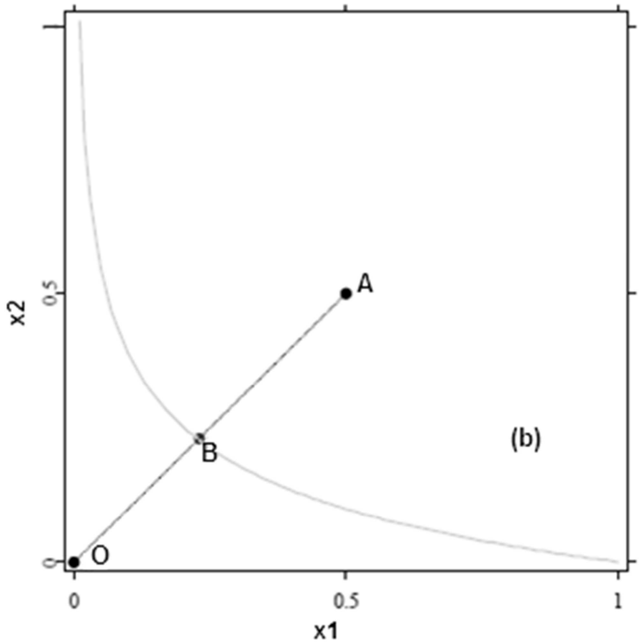
Za *m*=2, na sl.2.1(b), oblast iznad glatke krive reprezentuje ulazni skup $X(y)$, za dati nivo izlaza *y*.

– Izlaznog skupa (sastoji se od svih izlaznih vektora koji su proizvedeni datim ulaznim vektorom $x \in R_+^m$):

$$Y(x) = \left\{ y \in R_+^s \middle| (x,y) \in F \right\} \tag{2.6}$$

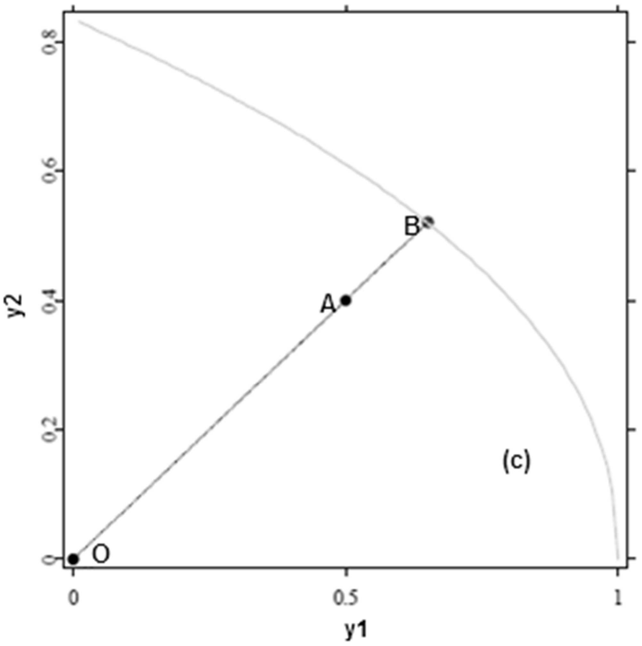


Sl.2.1(a) Produkcioni skup i granica efikasnosti (*m=s=1*), [Hardle and Jeong, 2005]



Sl.2.1(b) Reprezentacija ulaznog skupa $X(y)$, za dati nivo izlaza y (*m=2*),

[Hardle and Jeong, 2005]



Sl.2.1(c) Reprezentacija izlaznog skupa $Y(x)$, za dati nivo ulaza *x* (*s=2*), [Hardle and Jeong, 2005]

Za *s*=2, na sl.2.1(c), oblast ispod glatke krive reprezentuje izlazni skup $Y(x)$, za dati nivo ulaza *x*.

Iz (2.1), (2.5) i (2.6), neposredno sledi relacija:

$$(x,y) \in F \Leftrightarrow x \in X(y) \wedge y \in Y(x) \qquad (2.7)$$

koja ukazuje da je reprezentacija *tehnologije (produkcionog modela)* ulaznim $X(y)$ i izlaznim $Y(x)$ skupom [Hardle and Jeong, 2005], ekvivalentna reprezentaciji produkcionim skupom *F*.

S druge strane, pored aksiome o neefikasnosti, koju ćemo ponovo razmatrati, aksiomatski prilaz produkcionoj teoriji pretpostavlja analizu produkcionog modela u uslovima više (ekonomskih) aksioma, koje se, na ekvivalentan način, mogu definisati [Athanassopoulos, 1995] i u odnosu na F, $Y(x)$ i $X(y)$:

EA1: Neefikasnost (inefficiency or free disposability): Pored ulazno-izlazne neefikasnosti:

$$\forall (x,y) \in F \Rightarrow (x',y') \in F, \quad \forall x' \geq x, \quad \forall y' \leq y \tag{2.8}$$

slede i definicije:

– Izlazna neefikasnost:

$$y_1 \in Y(x),\ y_2 \leq y_1 \Rightarrow\ y_2 \in Y(x) \ \text{ ili } \ y_1 \leq y_2 \Rightarrow\ X(y_2) \subset X(y_1) \tag{2.9a}$$

– Ulazna neefikasnosti:

$$x_1 \in X(y),\ x_2 \geq x_1 \Rightarrow\ x_2 \in X(y) \ \text{ ili } \ x_1 \leq x_2 \Rightarrow\ Y(x_1) \subset Y(x_2) \tag{2.9b}$$

Nadalje, slede i definicije:

– Slabe ulazne neefikasnosti:

$$y \in Y(x),\ \alpha \in [0,1]\ \Rightarrow\ \alpha y \in Y(x) \ \text{ ili } \ X(\alpha y) \subset X(y) \tag{2.10a}$$

– Slabe izlazne neefikasnosti:

$$x \in X(y),\ \alpha \geq 1\ \Rightarrow\ \alpha x \in X(y) \ \text{ ili } \ Y(x) \subset Y(\alpha x) \tag{2.10b}$$

EA2: „Nema besplatnog ručka“ (*„no free lunch“*):

$$(x,y) \notin F,\ ako\ \ je\ x = 0,\ y \geq 0,\ y \neq 0 \tag{2.11}$$

Naravno, neaktivnost produkcione jedinice je moguća, tj. nulti izlaz može biti proizveden ulaznim vektorom $x \in R_+^m$, ali je nemoguća produkcija izlaza, u odsustvu ulaza.

EA3: Ograničenost i zatvorenost (*bounded and closeness*):

Skupovi $Y(x),\ \forall x \in R_{+}^{m},\ \ X(y),\ \forall y \in R_{+}^{s}$ i $F,\ \forall (x,y) \in R_{+}^{m} x R_{+}^{s}$ su ograničeni i zatvoreni.

EA4: Konveksnost (*convexity*):

Produkcioni skup $F,\ \forall (x,y) \in R_{+}^{m} x R_{+}^{s}$ je konveksan, saglasno:

$(x_1,y_2),(x_2,y_2) \in F \Rightarrow (x,y) \in F$, ako je

$$(x,y) = \alpha(x_1,y_1) + (1-\alpha)(x_2,y_2),\ za\ \forall \alpha[0,1] \tag{2.12a}$$

U opštem slučaju, ako $(x_j,y_j) \in F,\ j=1,2,\ldots,n$, tada i

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j\right) \in F \text{, za } \forall \alpha_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n\ i\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \tag{2.12b}$$

Iz konveksnosti skupa *F*, sledi i konveksnost skupova $Y(x),\ \forall x \in R_{+}^{m}$ i $X(y),\ \forall y \in R_{+}^{s}$.

EA5: Linijska neograničenost (*ray unboundedness*):

$$(x,y) \in F\ \Rightarrow\ (kx,ky) \in F,\ \forall k \geq 0 \tag{2.13}$$

EA6: Minimalna ekstrapolacija (*minimum extrapolation*):

F je presek svih skupova $\hat{F}$, koji zadovoljavaju aksiome EA1–EA5, uz uslov da svaki estimirani skup vektora, odnosno svaka estimirana aktivnost $(x_j,y_j) \in \hat{F},\ j=1,2,\ldots,n$. Drugim rečima, *F* je „najmanji“ skup, konzistentan sa posmatranim podacima i navedenim aksiomatskim osobinama, a njegova zasnovanost na uslovima konveksnosti i linijskoj neograničenosti implicira i njegovu poliedralnost (*polyhedral set*).

Granice efikasnosti ili *izokvante* (efficient boundaries or isoquants) na ulaznom skupu $X(y),\ \forall y \in R_{+}^{s}$ i izlaznom skupu $Y(x),\ \forall x \in R_{+}^{m}$, u oznaci, redom, $\partial X(y)$ *i* $\partial Y(x)$, u radijalnom smislu [Farrell, 1957; Debreu, 1951], su definisane relacijama:

$$\partial X(y) = \left\{ x \middle| \; x \in X(y), \theta x \notin X(y), \; 0 < \theta < 1 \right\} \tag{2.14a}$$

$$\partial Y(x) = \left\{ y \middle| \; y \in Y(x), \theta y \notin Y(x), \; \theta > 1 \right\} \tag{2.14b}$$

Slično, granicu efikasnosti ili *graf tehnologije G* produkcionog skupa *F* formiraju ulazno-izlazni parovi vektora (aktivnosti) (x,y) sa osobinom

$$G = \left\{ (x,y) : (x,y) \in F \wedge \alpha > 1 \Rightarrow (x, \alpha y) \notin F; \; 0 < \beta < 1 \Rightarrow (\beta x, y) \notin F \right\} \tag{2.15}$$

Najpre, koristeći granicu efikasnosti *G*, formalan prikaz efikasnosti aktivnosti (x,y) je dat u simboličnoj optimizacionoj formi:

– ulazna efikasnost (ulazno orijentisana efikasnost) $e_x = \theta^{in}$, gde je

$$\theta^{in} = \min \theta : (\theta x, y) \in G \tag{2.17}$$

– izlazna efikasnost (izlazno orijentisana efikasnost) $e_y = \dfrac{1}{\theta^{out}}$, gde je

$$\theta^{out} = \max \theta : (x, \theta y) \in G \tag{2.18}$$

odakle neposredno sledi $\theta^{in} \leq 1$ *i* $\theta^{out} \geq 1$.

I relacije (2.14) direktno karakterišu svaku aktivnost (x,y) sa gledišta ulazne i izlazne (ne)efikasnosti:

ulazna efikasnost: $x \in \partial X(y)$, ulazna neefikasnost $x \notin \partial X(y)$ (2.19a)

izlazna efikasnost $y \in \partial Y(x)$, izlazna neefikasnost $y \notin \partial Y(x)$ (2.19b)

Drugim rečima, produkciona jedinica je efikasna sa ulaznom orijentacijom ako se njen vektor ulaza $x \in R_+^m$ nalazi na granici efikasnosti ulaznog skupa $X(y)$: $x \in \partial X(y)$. U protivnom, produkciona jedinica je ulazno neefikasna. Slično, produkciona jedinica je efikasna sa izlaznom orijentacijom ako se njen vektor izlaza $y \in R_+^s$ nalazi na granici efikasnosti izlaznog skupa $Y(x)$: $y \in \partial Y(x)$. U protivnom, produkciona jedinica je izlazno neefikasna.

Na primer, za produkcioni skup *F* sa skalarnim izlazom *y*, produkciona funkcija *g*, za svako $x \in R_+^m$, formalno je data u obliku

$$g(x) = \sup\{y \mid (x,y) \in F\} \tag{2.20}$$

ili u odnosu na ulazni i izlazni skup

$$g(x) = \sup\{y \mid x \in X(y)\} \tag{2.21a}$$

$$= \sup\{y \mid y \in Y(x)\} \tag{2.21b}$$

Ako produkciona jedinica funkcioniše na nivou $(x_o, y_o) \in F$, ulazna efikasnost je definisana relacijom

$$\theta^{in}(x_o, y_o) = \inf\{\theta \mid \theta x_o \in X(y_o)\} = \inf\{\theta \mid (\theta x_o, y_o) \in F\} \tag{2.22a}$$

Nivo efikasnosti ulaza koji odgovara izlaznom nivou y_0

$$x^{\partial}(y_o) = \theta^{in}(x_o, y_o)\, x_o \tag{2.22b}$$

nalazi se, na sl.2.1(b), u preseku $\partial X(y_o)$ i prave θx_o, $\theta > 0$. Ako tačka A reprezentuje ulaz produkcione jedinice, a tačka B – nivo efikasnosti ulaza, skor ulazne efikasnosti produkcione jedinice je odredjen odnosom OB/OA.

Slično, izlazna efikasnost i nivo efikasnosti izlaza koji odgovara ulaznom nivou x_0, redom, su definisani relacijama:

$$\theta^{out}(x_o,y_o)=\sup\left\{\theta \middle| \ \theta y_o \in Y(x_o)\right\}=\sup\left\{\theta \middle| \ (x_o,\theta y_o)\in F\right\} \qquad (2.23a)$$

$$y^{\partial}(x_o)=\theta^{out}(x_o,y_o)y_o \qquad (2.23b)$$

Ako tačka A na sl.2.1(c) reprezentuje izlaz produkcione jedinice, a tačka B – nivo efikasnosti izlaza, skor izlazne efikasnosti produkcione jedinice je odredjen odnosom OB/OA.

Razmotrimo, ponovo, uslove ulazne i izlazne (ne)efikasnosti (2.19). Uslovi $x\in\partial X(y)$ i/ili $y\in\partial Y(x)$ ne rezultuju uvek efikasnim funkcionisanjem produkcione jedinice. Ovakav ishod je i očekivan, budući da su Pareto-Kupmans [Pareto, 1906, 1927; Koopmans, 1951] skupovi efikasnosti, u oznaci, $eff\ X(y)\ i\ eff\ Y(x)$, podskupovi Farel-Debro granice efikasnosti, redom, $\partial X(y)\ i\ \partial Y(x)$:

$$eff\ X(y)=\left\{x \middle| \ x\in X(y),\ \bar{x}\notin X(y),\ \forall\bar{x}\le x,\ \bar{x}\ne x\right\}\subset\partial X(y) \qquad (2.24)$$

$$eff\ Y(x)=\left\{y \middle| \ y\in Y(x),\ \bar{y}\notin Y(x),\ \forall\bar{y}\ge y,\ \bar{y}\ne y\right\}\subset\partial Y(x) \qquad (2.25)$$

(što se u optimizacionom algoritmu u numeričkom smislu manifestuje prisustvom ne nula izravnavajućih promenljivih).

Ako je efikasan podskup produkcionog skupa definisan, mera efikasnosti produkcione jedinice u tački (x_o,y_o) se odredjuje razmatranjem rastojanja od te tačke do granice efikasnosti. Pristup iniciran Farelom [Farrell, 1957], na Debroovoj pravoj [Debreu, 1951], koristi radijalnu distancu od tačke do odgovarajuće granice, saglasno do sada izloženoj radijalnoj meri efikasnosti. Naravno, granica efikasnosti se koristi ili u ulaznom pravcu, efikasan podskup je okarakterisan granicom $\partial X(y)$ ili u izlaznom pravcu, efikasan podskup je okarakterisan granicom $\partial Y(x)$.

Farelova metrika ulazne i izlazne efikasnosti produkcione jedinice je odredjena, redom, relacijama (2.22a) i (2.23a). Pri tome je $\theta^{in}(x_o, y_o) \le 1$ radijalna redukcija vektora ulaza produkcione jedinice u cilju postizanja ulazne efikasnosti u smislu da je (tačka) aktivnost $\left(\theta^{in}(x_o, y_o)x_o, y_o\right)$ - granična tačka. Analogno, $\theta^{out}(x_o, y_o) \ge 1$ je proporcionalno povećanje vektora izlaza produkcione jedinice u cilju postizanja izlazne efikasnosti u smislu da je (tačka) aktivnost $\left(x_o, \theta^{out}(x_o, y_o)y_o\right)$ - granična tačka.

Interesantno je naglasiti da granica efikasnosti produkcionog skupa *F*, u radijalnom smislu, može biti okarakterisana kao jedinica (x, y), takva da je $\theta^{in}(x, y) = 1$, u ulaznoj orijentaciji, pripada $\partial X(y)$, i kao jedinica (x, y), takva da je $\theta^{out}(x, y) = 1$, u izlaznoj orijentaciji, pripada $\partial Y(x)$. Uslov neprekidnosti granice efikasnosti implicira $\theta^{in}(x, y) = \theta^{out}(x, y) = 1$ u graničnim tačkama, odnosno jedinstvena granica efikasnosti je okarakterisana na dva načina: u ulaznoj ili u izlaznoj orijentaciji.

Veoma često je jednostavnije meriti radijalnu distancu njenim inverznim vrednostima, tzv. Šepardovim distancionim funkcijama [Shephard, 1970].

Šepardova ulazna distanciona funkcija, u oznaci $\delta^{in}(x, y)$, zasnovana je na normalizovanoj meri Euklidovog rastojanja od tačke $(x, y) \in R_+^{m+s}$ do granice skupa *F*, u radijalnom pravcu, ortogonalno na *y*:

$$\delta^{in}(x, y) = \sup\left\{\theta^{in} > 0 \,\middle|\, \left(\frac{1}{\theta^{in}}x, y\right) \in F\right\} = \frac{1}{\theta^{in}(x, y)} \tag{2.26a}$$

sa osobinom

$\delta^{in}(x,y) \geq 1$, za svako $(x,y) \in F$. (2.26b)

Slično, Šepardova izlazna distanciona funkcija, u oznaci $\delta^{out}(x,y)$, zasnovana je na normalizovanoj meri Euklidovog rastojanja od tačke $(x,y) \in R_{+}^{m+s}$ do granice skupa *F*, u radijalnom pravcu, ortogonalno na *x*:

$$\delta^{out}(x,y) = \inf\left\{\theta^{out} > 0 \,\middle|\, \left(x, \frac{1}{\theta^{out}} y\right) \in F\right\} = \frac{1}{\theta^{out}(x,y)} \quad (2.27a)$$

sa osobinom

$\delta^{out}(x,y) \leq 1$, za svako $(x,y) \in F$. (2.27b)

Ako je ili $\delta^{in}(x,y) = 1$ ili $\delta^{out}(x,y) = 1$, (tačka) aktivnost (x,y) produkcione jedinice pripada granici skupa *F*, što implicira njenu (tehničku) efikasnost.

Analiza granice efikasnosti mora biti zasnovana i na karakteru *ekonomije obima* (*ES: economies of scale*) poslovanja, odnosno konstantnog ili varijabilnog (rastućeg ili opadajućeg) *prinosa na obim* (*RTS: returns to scale*) poslovanja. Saglasno standardnoj ekonomskoj definicij, RTS iskazuje odnos proporcionalne promene u svim ulazima produkcione jedinice, neka je to $\beta\ (>0)$, i rezultujućim proporcionalnim promenama u svim njenim izlazima, neka je to $\alpha\ (>0)$:

$$(x,y) \in F \quad \Rightarrow \quad (\beta x, \alpha y) \in F, \quad \forall \beta, \alpha > 0 \quad (2.28)$$

Na nivou skupova *F*, $X(y)$ i/ili $Y(x)$, RTS je određen saglasno odnosu konstanti proporcionalnosti kojima su definisane promene na ulazu i izlazu (najbolje moguće poboljšanje efikasnosti se postiže minimizacijom $\beta\ (>0)$, odnosno maksimizacijom $\alpha\ (>0)$, što se postiže ili minimizacijom odnosa β / α ili maksimizacijom recipročne vrednosti: α / β). Saglasno (2,28), vrednosti parametara $\beta\ (>0)$ i $\alpha\ (>0)$ uslovljavaju [Golany and Yu, 1997]:

– Konstantan prinos na obim (*CRS: Constant Returns to Scale*): $\beta = \alpha$ (2.29)

– Rastući prinos na obim (*IRS: Increasing Returns to Scale*): $\alpha > \beta > 1$ (2.30)

– Opadajući prinos na obim (*DRS:Decreasing Returns to Scale*): $1 > \alpha > \beta$ (2.31)

a odnos: $\alpha > 1 \geq \beta$ ili $\alpha \geq 1 > \beta$ rezultuje u neefikasnost produkcione jedinice.

Varijabilni prinos na obim (*VRS: Variable Returns to Scale*), dakle, obuhvata IRS i DRS, može se reći, kao specijalan slučaj, i CRS, kojima se mogu pridružiti i *nerastući prinos na obim* (*NIRS: Non-increasing Returns to Scale*), kao i *neopadajući prinos na obim* (*NDRS: Non-decreasing Returns to Scale*), čiji se formalni opisi na nivou produkcionog skupa *F* mogu postaviti.

S druge strane, u svetlu osobina ulaznog skupa $X(y)$ ili izlaznog skupa $Y(x)$ CRS poslovanja produkcione jedinice ima oblik: $x \in \partial X(y) \Rightarrow \beta x \in \partial X(\beta y)$, ekvivalentno: $X(\beta y) = \beta X(y)$, ili, u odnosu na izlazni skup, $Y(\beta x) = \beta Y(x)$.

Dakle, u zaključku, aktivnosti na granici efikasnosti produkcionih jedinica, u njenim različitim intervalima (segmentima, oblastima), mogu biti uslovljene i različitim prinosima na obim poslovanja.

2.3. Neparametarski estimatori produkcionih skupova

Ekonomski model produkcionih jedinica, u prethodnom poglavlju, reprezentovan je produkcionim skupom (2.1) i njemu pridruženim (ekonomskim) aksiomama EA1-EA6. Medjutim, u praktičnim analizama, produkcioni skup *F*, a samim tim i Farrellova metrika, su nepoznati, što implicira estimaciju skupa eksperimentalnih podataka, iskazanih relacijom (2.2), koju prikazujemo ponovo:

$$\chi = \{(x_j, y_j) \mid j = 1, 2, \ldots, n\} \tag{2.32}$$

gde je n – broj produkcionih jedinica, uključenih u analizu (relativne) efikasnosti.

Postavljeni problem je ekonometrijske prirode: estimirati skup F, a zatim, na primer, i produkcionu funkciju, za jedan izlaz, u oznaci g, granice $\partial X(y)$ i $\partial Y(x)$, efikasnosti $\theta^{in}(x,y)$ i $\theta^{out}(x,y)$, koristeći skup eksperimentalnih podataka χ.

Za produkcionu jedinicu sa jednim izlazom (s=1), struktura skupa χ može se sagledati na osnovu relacija:

$$y_j = g(x_j) - u_j \quad \text{ili} \quad y_j = g(x_j) v_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{2.33}$$

gde je g – produkciona funkcija, dok su $u_j \geq 0$ i $v_j \leq 1$ (slučajni) članovi, koji pokazuju nepouzdanost merenja aktivnosti $(x_j, y_j) \in \hat{F}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dakle, estimacija F (ili g) zasnovana je na skupu podataka χ.

U razvoju *determinističkih modela* granice efikasnosti, uvodi se (osnovna) pretpostavka odsustva (slučajnih) članova $u_j \geq 0$ i $v_j \leq 1$ u (2.33), što je ekvivalentno usvajanju $u_j = 0$ ili $v_j = 1$, dakle, formira se skup podataka χ, u odsustvu šuma merenja, koji je, sa verovatnoćom 1, podskup (teorijskog, apstraktnog) produkcionog skupa F:

$$\mathrm{P}\{\chi \subset F\} = 1 \quad \text{ili} \quad \mathrm{P}\{(x_j, y_j) \in F,\ j = 1, 2, \ldots, n\} = 1 \tag{2.34}$$

U realnim uslovima rada, svaka, po pretpostavci, od n produkcionih jedinica (n DMU) definisana je kao entitet, istaknuto u dosadašnjem izlaganju, koji ima mogućnosti da konvertuje (svoje) ulaze u (svoje) izlaze. Pridružimo svakom od n DMU (nadalje, umesto termina „produkciona jedinica", u cilju pogodnijeg zapisa, koristiće se, po pravilu, sinonim “DMU”), na primer, *j*-tom DMU, u oznaci DMU_j, redom, *mx1* vektor ulaza $x_j \in R_+^m$ i *sx1* vektor izlaza $y_j \in R_+^s$:

$$x_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{bmatrix}, \quad y_j = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ x_{sj} \end{bmatrix}, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{2.35}$$

Uz pretpostavku da aktivnosti $(x_j, y_j) \in \hat{F},\ j = 1,2,\ldots,n$, definisanom u okviru (ekonomske) aksiome EA6 o minimalnoj ekstrapolaciji, uz važeći uslov neefektivnosti (2.8) – aksioma EA1 i važeći uslov konveksnosti (2.12) – aksioma EA4, produkcioni skup (2.1), sada u oznaci [Banker et al. 1984; Cooper et al. 2007]

$$\bar{F}_{CRS} = \left\{ (x,y) \middle| \ x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j,\ \lambda_j \geq 0 \right\} \tag{2.36}$$

definiše CRS ekonomiju poslovanja rezultantne DMU, čija je aktivnost odredjena ulazno izlaznim parom vektora $(x,y) \in R_+^m x R_+^s$.

Isključenjem iz analize uslova (2.13) – aksiome EA5 (linijska neograničenost (2.13) je ekvivalentna CRS uslovu (2.28)), produkcioni skup (2.1), sada u oznaci [Banker et al. 1984; Cooper et al. 2007]

$$\bar{F}_{VRS} = \left\{ (x,y) \middle| \ x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j,\ \lambda_j \geq 0 \ \wedge \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\} \tag{2.37}$$

definiše VRS ekonomiju poslovanja rezultantne DMU, čija je aktivnost, ponovo, odredjena ulazno izlaznim parom vektora $(x,y) \in R_+^m x R_+^s$.

Može se smatrati da su vrednosti nenegativnih koeficijenata λ_j, $j = 1,2,\ldots,n$ (*nx1* vektor $\lambda = [\lambda_1\ \lambda_2\ \ldots\ \lambda_n]^T \in R_+^n$, odnosno λ je semipozitivan vektor u prostoru R^n) pridruženi svakoj DMU_j, $j = 1,2,\ldots,n$ i ukazuju, posredno, na njihov (relativni) značaj.

Uslov konveksnosti determiniše karakter granica efikasnosti formiranih produkcionih skupova. U slučaju (2.36): granica efikasnosti je *konveksni konus* (convex cone or conicall hull), a u slučaju (2.37): granica efikasnosti je *konveksni omotač* (convex hull).

U uslovima kada produkcioni skup ne zadovoljava uslov konveksnosti, uz uslov neefikasnosti (2.8) – aksioma EA1, produkcioni skup (2.1), sada u oznaci [Cooper et al. 2007]

$$\bar{F}_{FDH} = \left\{ (x,y) \middle| \ x \geq x_j,\ y \leq y_j,\ j = 1,2,\ldots,n \right\}, \text{ za, kao i ranije,}$$
$$(x,y) \in R_+^m x R_+^s \tag{2.38}$$

definiše FDH (Free Desposal Hull) nekonveksnu granicu efikasnosti.

Nastavak izlaganja je posvećen (determinističkim) neparametarskim estimatorima granica efikasnosti produkcionih skupova (2.37) i (2.38).

2.3.1. Estimacija konveksnih granica efikasnosti: DEA estimatori

DEA (Data Envelopment Analysis) estimator produkcionog skupa [Cooper et al. 2007], iniciran u radu [Farrell, 1957] i operacionalizovan kao estimator linearnog programiranja [Charnes et al. 1987; Banker et al. 1984], definisan u uslovima neefikasnosti i konveksnosti produkcionog skupa *F*, odredjuje granicu efikasnosti konveksnog omotača skupa eksperimentalnih podataka χ:

$$\bar{F}_{DEA} = \bar{F}_{DEA-VRS} = \left\{ (x,y) \middle| \; x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j ,\; y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j ,\; \lambda_j \geq 0 \; \wedge \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\},$$

$$(x,y) \in R_{+}^{m} x R_{+}^{s} \tag{2.39}$$

Analiza karaktera ekonomije obima poslovanja može biti postavljena blagom modifikacijom (2.39):

CRS: Ne uvodi se u analizu (izostavlja se) ograničenje tipa jednakosti $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$

NIRS: Ograničenje tipa jednakosti $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ se modifikuje u $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \leq 1.$

NDRS: Ograničenje tipa jednakosti $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ se modifikuje u $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \geq 1.$

Nadalje, direktno proizilazi:

– Estimacija ulaznog skupa (za svako *y*):

$$\bar{X}(y) = \left\{ x \in R_{+}^{m} \middle| \; (x,y) \in \bar{F}_{DEA} \right\} \quad \Rightarrow \quad \partial \bar{X}(y) \tag{2.40}$$

– Estimacija izlaznog skupa (za svako *x*):

$$\bar{Y}(x) = \left\{ y \in R_{+}^{s} \middle| \; (x,y) \in \bar{F}_{DEA} \right\} \quad \Rightarrow \quad \partial \bar{Y}(x) \tag{2.41}$$

– Estimacija skora ulazne efikasnosti za datu aktivnost (x_o, y_o) postiže se rešavanjem linearnog programa (ovde i kasnije razmatra se VRS ekonomija obima):

$$\bar{\theta}_{DEA}^{in}(x_o, y_o) = \inf \left\{ \theta \middle| \; (\theta x_o, y_o) \in \bar{F}_{DEA} \right\}$$

$$= \min \left\{ \theta \middle| \; \theta x_o \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j ,\; y_o \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j ,\; \lambda_j \geq 0 \; \wedge \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\} \tag{2.42}$$

– Estimacija skora izlazne efikasnosti za datu aktivnost (x_0,y_0) postiže se rešavanjem linearnog programa

$$\bar{\theta}^{out}_{DEA}(x_o,y_o)=\sup\left\{\theta\middle|\ (x_o,\theta y_o)\in\bar{F}_{DEA}\right\}$$

$$=\max\left\{\theta\middle|\ x_o\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j,\ \theta y_o\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j,\ \lambda_j\geq 0\ \wedge\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\right\} \tag{2.43}$$

– DEA nivoi efikasnosti za datu aktivnost (x_o,y_o):

(a) Projekcija x_o na granicu efikasnosti:

$$\bar{x}^{\partial}(y_o)=\bar{\theta}^{in}_{DEA}(x_o,y_o)x_o \tag{2.44}$$

(b) Projekcija y_o na granicu efikasnosti:

$$\bar{y}^{\partial}(x_o)=\bar{\theta}^{out}_{DEA}(x_o,y_o)x_o \tag{2.45}$$

– Prisustvo izravnjavajućih promenljivih različitih od nule, na primer, na *i*-tom ulazu DMU_j odredjuje se u uslovima ispunjenja relacija tipa nejednakosti, za neke vrednosti koeficijenata $\lambda_j,\ j=1,2,\ldots,n$ [Fare et al. 1994].

2.3.2. Estimacija nekonveksnih granica efikasnosti: FDH estimatori

FDH granica efikasnosti i produkcioni skup generirani FDH modelom (2.38) zasnovanom na eksperimentalnim podacima, odnosno FDH estimacija rezultata efikasnosti za dati ulazno izlazni nivo (x_o,y_o) se dobija smenom $\bar{F}_{DEA}$ u DEA estimaciji rezultata efikasnosti, skupom $\bar{F}_{FDH}$ [Tulkens, 1993]:

$$\bar{X}(y)=\left\{x\in R^m_+\middle|\ (x,y)\in\bar{F}_{FDH}\right\}\ \Rightarrow\ \partial\bar{X}(y)=\left\{x\middle|\ x\in\bar{X}(y),\ \theta x\notin\bar{X}(y),\ 0<\theta<1\right\}$$

$$\bar{Y}(x)=\left\{y\in R^s_+\middle|\ (x,y)\in\bar{F}_{FDH}\right\}\ \Rightarrow\ \partial\bar{Y}(x)=\left\{y\middle|\ y\in\bar{Y}(x),\ \theta y\notin\bar{Y}(x),\ \theta>1\right\}$$

$$\bar{\theta}^{in}_{FDH}(x_o,y_o)=\inf\left\{\theta\middle|\ \theta x_o\in\bar{X}(y_o)\right\}=\inf\left\{\theta\middle|\ (\theta x_o,y_o)\in\bar{F}_{FDH}\right\} \tag{2.46}$$

$$\bar{\theta}^{out}_{FDH}(x_o,y_o)=\sup\left\{\theta\middle|\ \theta x_0\in\bar{Y}(x_o)\right\}=\sup\left\{\theta\middle|\ (x_o,\theta y_o)\in\bar{F}_{FDH}\right\}$$

Za datu (aktivnost) tačku $\left(x_o, y_o\right)$, estimirana distanca do granice se odredjuje u smislu ulazno orijentisane distance, u ulaznom prostoru, od $\left(x_o, y_o\right)$ do estimirane granice $\partial\bar{X}\left(y\right)$ ulaznog skupa $\bar{X}\left(y\right)$. Slično, u izlaznom prostoru odredjuje se izlazno orijentisana distanca od $\left(x_o, y_o\right)$ do estimirane granice $\partial\bar{Y}\left(x\right)$ izlaznog skupa $\bar{Y}\left(x\right)$.

Interesantno je naglasiti da se FDH nekonveksan skup (2.38) može okarakterisati skupom [Cooper et al. 2007]

$$\bar{F}_{FDH} = \left\{ \left(x, y\right) \middle| \; x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \; y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \; \lambda_j \in \{0,1\} \; \wedge \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\} \tag{2.47}$$

pa se estimacija efikasnosti vrši primenom mešovitog 0-1 linearnog programa (samo se jednoj produkcionoj jedinici pridružuje jedinični težinski koeficijent, što uslovljava zasnovanost FDH pristupa na principu *dominacije* – samo opservirane nedominirane DMU formiraju skup efikasnih DMU), redom, ulazne i izlazne orijentacije:

$$\bar{\theta}^{in}_{FDH}\left(x_o, y_o\right) = \min\left\{ \theta \middle| \; \theta x_o \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \; y_o \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \; \lambda_j \in \{0,1\} \; \wedge \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\} \tag{2.48}$$

$$\bar{\theta}^{out}_{FDH}\left(x_o, y_o\right) = \max\left\{ \theta \middle| \; x_o \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \; \theta y_o \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \; \lambda_j \in \{0,1\} \; \wedge \; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\} \tag{2.49}$$

Upravo komparacija (2.48) i (2.49), sa analognim izrazima (2.42) i (2.43), omogućuje uporednu analizu FDH i DEA estimatora.

U numeričkom smislu, za najjednostavniji slučaj, svih *n* DMU, tj. svih DMU_j, za svako $j = 1, 2, \ldots, n$, sa jednim ulazom i jednim izlazom (vektori (2.35) se svode na skalarne vrednosti: $x_j = x_{1j}\ i\ y_j = y_{1j},\ j = 1,2,\ldots,n$), skup opservacija koje dominiraju nad $\left(x_o, y_o\right)$ je definisan sa

$$D_0 = \left\{ j \middle|\ x_0 \geq x_j,\ y_0 \leq y_j,\ \left(x_j, y_j\right) \in \chi \right\} \tag{2.50}$$

tako da je

$$\bar{\theta}_{FDH}^{in}\left(x_o, y_o\right) = \min_{j \in D_0}\left(\frac{x_j}{x_o}\right) \leq 1 \quad \text{i} \quad \bar{\theta}_{FDH}^{out}\left(x_o, y_o\right) = \max_{j \in D_0}\left(\frac{y_j}{y_o}\right) \geq 1 \tag{2.51}$$

Slično, u numeričkom smislu, za $DMU_j,\ j = 1,2,\ldots,n$, sa *mx1* vektorom ulaza x_j i *sx1* vektorom izlaza y_j – vektori su dati u (2.35) – estimacija efikasnosti, redom, ulazne i izlazne orijentacije vrši se na osnovu:

$$\bar{\theta}_{FDH}^{in}\left(x_o, y_o\right) = \min_{j \in D_0}\, [\max_{i=1,2,\ldots,m}\left(\frac{x_{ij}}{x_{io}}\right)] \quad \text{i} \quad \bar{\theta}_{FDH}^{out}\left(x_o, y_o\right) = \max_{j \in D_0}\, [\min_{r=1,2,\ldots,s}\left(\frac{y_{rj}}{y_{ro}}\right)] \tag{2.52}$$

gde je, i dalje, $D_0 = \left\{ j \middle|\ x_0 \geq x_j,\ y_0 \leq y_j,\ \left(x_j, y_j\right) \in \chi \right\}$, ali sada u vektorskom smislu ($x_o,\ y_o,\ x_j\ i\ y_j$ su vektori, sa već definisanim dimenzijama).

3. Merenje efikasnosti organizacionih jedinica

Neka se razmatra *n* organizacionih (produkcionih) jedinica, odnosno *n* DMU i neka *j*-ti DMU, u (već uvedenoj) oznaci DMU_j, koristi *mx1* vektor resursa (vektor ulaza) $x_j \in R_+^m$ u generisanju *sx1* vektora produkcije (vektora izlaza) $y_j \in R_+^s$, u oznakama – videti (2.35):

$$x_j = \{x_{ij}\} = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{bmatrix}, \quad y_j = \{y_{rj}\} = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{rj} \\ \vdots \\ x_{sj} \end{bmatrix}, \quad j = 1,2,\dots,n \tag{3.1}$$

Ako su cene ili težinski faktori $\bar{u}_r$, $r = 1,2,\dots,s$ i $\bar{v}_i$, $i = 1,2,\dots,m$ pridruženi, redom, koordinatama y_{rj} vektora izlaza i koordinatama x_{ij} vektora ulaza, poznati, saglasno konvencionalnoj dobit/troškovi (benefit/cost) teoriji, efikasnost svake DMU_j se može iskazati kao odnos zbira težinskih izlaza i težinskih ulaza:

$$\bar{e}_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} \bar{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i x_{ij}}, \quad , j = 1,2,\dots,n \tag{3.2}$$

Ovaj koeficijent dobit/troškovi (*benefit/cost ratio*) se nalazi u osnovi analize standardnog inženjerskog prilaza u merenju produktivnosti DMU.

3.1. Ekvivalentnost linearnog razlomljenog i linearnog programa

U uslovima nepoznavanja težinskih faktora, Charnes, Cooper i Rhodes (CCR) u radu [Charnes et al. 1978] definišu tzv. *ulazno orijentisani model* merenja relativne (tehničke) efikasnosti date $DMU_j = DMU_o$, $j = 1,2,\ldots,n$, koji je zasnovan na rešenju nelinearnog nekonveksnog frakcionog problema matematičkog programiranja (*ulazno orijentisani CCR razlomljeni model*), u odredjivanju maksimuma kriterijumske funkcije h_0:

$$\max \quad h_0 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} \tag{3.3a}$$

pod ograničenjima (p.o.):

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.3b}$$

$$u_r,\ v_i \ge 0, \quad r = 1,2,\ldots,s; \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.3c}$$

Koordinate x_{ij}, y_{rj} reprezentuju ulazne i izlazne podatke svake DMU_j, sa definisanim intervalima promene indeksa i, r, j u okviru modela optimizacije. Skup podataka je odredjen teorijskom analizom svih DMU ili je dat, po pravilu, u formi empirijskih opservacija. DMU uključen u kriterijumsku funkciju je sa indeksom „o" ($DMU_j = DMU_o$, $j = 1,2,\ldots,n$), a količnik zbira težinskih izlaza i težinskih ulaza svake DMU_j, uključujući i DMU u kriterijumskoj funkciji, nije veći od jedan, što implicira interval promene optimalne (maksimalne) vrednosti $h_0^* = \max h_0$ u granicama $0 \le h_0^* \le 1$, a rešenje problema ogleda se i u sračunavanju optimalnih vrednosti težinskih faktora $u_r^*,\ v_i^* \ge 0, \quad r = 1,2,\ldots,s; \quad i = 1,2,\ldots,m$.

Gornji odnos se može invertovati i postaviti analogni *izlazno orijentisani model* merenja relativne (tehničke) efikasnosti date $DMU_j = DMU_o$ *(izlazno orijentisani CCR razlomljeni model):*

$$\min \quad f_0 = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}} \tag{3.4a}$$

p.o.

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}} \geq 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.4b}$$

$$u_r,\ v_i \geq 0, \quad r = 1,2,\ldots,s; \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.4c}$$

što implicira, sada, interval promene optimalne (minimalne) vrednosti $f_0^* = \min f_0$ u granicama $1 \leq f_0^* < \infty$, a rešenje problema ogleda se, takodje, i u sračunavanju optimalnih vrednosti težinskih faktora $u_r^*,\ v_i^* \geq 0, \quad r = 1,2,\ldots,s; \quad i = 1,2,\ldots,m$.

Oba programa, i (3.3) i (3.4), su nelinearna nekonveksna razlomljena (frakciona) zadatka matematičkog programiranja, ali u njihovom najjednostavnijem obliku, budući na linearni karakter funkcija koje učestvuju u formiranju kriterijuma i funkcija ograničenja. U tom smislu, programi (3.3) i (3.4) pripadaju klasi tzv. linearnih razlomljenih programa, a imenilac u kriterijumskoj funkciji mora biti istog znaka, odnosno različit od nule, na skupu dopustivih rešenja. Kriterijumska funkcija je istovremeno i pseudokonveksna i pseudokonkavna, drugim rečima, pseudolinearna, a svoje optimalne vrednosti poprima, osim u tačkama u unutrašnjosti skupa, i u ekstremalnim tačkama skupa dopustivih rešenja, što implicira „ekvivalentnost” linearnih frakcionih programa i rešenja linearnih programa zasnovanih na simpleks algoritmima.

U tom smislu, neka se razmatraju, redom, primalni i njemu dualni linearni program:

Primalni linearni program:

$$\max \ z_0 \tag{3.5a}$$

$$\text{p.o.} \ \ y_{r0}z_o - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \leq 0, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.5b}$$

$$-x_{io} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.5c}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.5d}$$

Dualni linearni program:

$$\min \ \ g_0 = \sum_{i=0}^{m} v_i x_{io} \tag{3.6a}$$

$$\text{p.o.} \ \ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.6b}$$

$$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} = 1 \tag{3.6c}$$

$$\mu_r, v_i \geq 0, \quad r = 1,2,\ldots,s, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.6d}$$

Smenom promenljivih, saglasno Čarnes-Kuperovim transformacionim relacijama [Charnes and Cooper, 1962]:

$$v_i = tv_i, \ \ i = 1,2,\ldots,m, \quad \mu_r = tu_r, \ \ r = 1,2,\ldots,s, \quad t^{-1} = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \ \ \Rightarrow \ \ t > 0 \tag{3.7a}$$

linearni program (3.6) se svodi na linearni razlomljeni program (3.4).

Slično, transformacionim relacijama

$$v_i = tv_i, \ \ i = 1,2,\ldots,m, \quad \mu_r = tu_r, \ \ r = 1,2,\ldots,s, \quad t^{-1} = \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} \ \ \Rightarrow \ \ t > 0 \tag{3.7b}$$

linearni razlomljeni program (3.3) se svodi na sledeći linearni ekvivalent:

$$\max \ \ h_0 = \sum_{r=0}^{s} \mu_r y_{ro} \tag{3.8a}$$

p.o. $-\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \leq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$ (3.8b)

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 \tag{3.8c}$$

$$\mu_r, v_i \geq 0, \quad r = 1,2,\ldots,s, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.8d}$$

čiji je dual

$$\min \quad \theta \tag{3.9a}$$

p.o. $x_{io}\theta - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \geq 0, \; i = 1,2,\ldots,m$ (3.9b)

$$-y_{ro} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq 0, \; r = 1,2,\ldots,s \tag{3.9c}$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.9d}$$

Na primer, iz uslova ekvivalentnosti programa (3.4) i (3.6) i dualnosti programa (3.5) i (3.6), sledi i jednakost njihovih optimalnih vrednosti kriterijumskih funkcija: $f_0^* = g_0^* = z_0^*$, odnosno $z_0^* = 1/h_0^*$. Drugim rečima, ne zahteva se ništa više od iznalaženja rešenja (3.6) ili (3.5), u odredjivanju $f_0^* > 1$ ili $h_0^* < 1$, a efikasnost $DMU_j = DMU_o$ je postignuta akko je $f_0^* = h_0^* = 1$.

3.1.1. Jedinična invarijantnost modela

U prethodnoj analizi izložena je [Charnes and Cooper, 1962] ekvivalentnost linearnih razlomljenih programa (3.3) i (3.4) i linearnih programa, redom, (3.8) i (3.6). Ekvivalentnost znači da su optimalne vrednosti, na primer, max $h = h_0^*$ (brojno) jednake i po programu (3.3) i po programu (3.8), kao i optimalne vrednosti težinskih koeficijenata: $v_i^* = v_i^*$, $i = 1,2,\ldots,m$ i $u_r^* = \mu_r^*$, $r = 1,2,\ldots,s$ (iz tih razloga, ne gubeći na opštosti razmatranja, umesto skupa koeficijenata v_i, μ_r, u modelu (3.8) i nadalje se može koristiti skup koeficijenata u oznaci v_i, u_r).

Merenje efikasnosti modelima (3.3) i (3.8), ista analiza je u važnosti i za modele (3.4) i (3.6), poseduje osobinu *jedinične invarijantnosti* (*units invariance*) u smislu da su optimalne vrednosti max $h = h_0^*$ u (3.3) i (3.8) nezavisne od mernih jedinica u kojima se iskazuju (mere) ulazi i izlazi [Cooper et al. 2007], pod pretpostavkom korišćenja istih jedinica za svaki DMU (u nekoj analizi, ulazi se mogu meriti u metrima, kilogramima,..., a izlazi: danima, amperima,..., a u nekoj drugoj analizi, istog problema, ulazi se mogu meriti u miljama, tonama,..., a izlazi – nedeljama, kiloamperima,..., dolazi se do istih rezultata optimizacije). Analitički se ova osobina može iskazati množenjem svakog ulaza konstantom $a_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,m$ i svakog izlaza konstantom $b_r > 0,\ r = 1,2,\ldots,s$ - brojna vrednost optimalnog rešenja (h_0^*, v_i^*, u_r^*) ostaje nepromenjena. U tom smislu, originalne promenljive y_{rj} i x_{ij} svedimo na $b_r y_{rj}$ i $a_i x_{ij}$. Definicijom $\bar{u}_r = u_r^* / b_r$ i $\bar{v}_i = v_i^* / a_i$, transformisani problem poseduje rešenje $\bar{h}_0^* = h_0^*$, što se na relativno jednostavan način može zaključiti i u analizi linearnog razlomljenog programa (3.3) i u analizi njegovog ekvivalenta – linearnog programa (3.8). Optimalna vrednost kriterijumske funkcije je, redom, na osnovu modela (3.3) ili modela (3.8):

$$h_0^* = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^* x_{io}} \text{ ili } h_0^* = \sum_{r=1}^{s} u_r^* y_{ro} \text{ za } \sum_{r=1}^{m} v_i^* x_{io} = 1 \tag{3.10}$$

Neka je (h_0^*, v^*, u^*) optimalno rešenje linearnog programa (3.8). $DMU_j = DMU_o$ je CCR-efikasna ako je $h_0^* = 1$ i ako egzisrira bar jedan skup (v^*, u^*) sa osobinom $v^* > 0$ i $u^* > 0$. U protivnom, $DMU_j = DMU_o$ je CCR-neefikasna: CCR-neefikasnost implicira da je ili (i) $h_0^* < 1$ ili (ii) $h_0^* = 1$ i najmanje jedna koordinata vektorskog para (v^*, u^*) je jednaka nuli u svakom optimalnom rešenju programa (3.8).

3.1.2. Vektorska forma modela

Neka se i nadalje razmatra *n* produkcionih jedinica, odnosno neka DMU_j koristi *mx1* vektor resursa (vektor ulaza) $x_j \in R_+^m$ u generisanju *sx1* vektora produkcije (vektora izlaza) $y_j \in R_+^s$. Matrica *X* ulaznih podataka, dimenzije *mxn,* i matrica *Y* izlaznih podataka, dimenzije *sxn*, čije su kolone upravo vektori (3.1), su oblika [Cooper et al. 2007]:

$$X = \left[x_1\, x_2\, \dots\, x_j\, \dots\, x_n \right] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \tag{3.11}$$

$$Y = \left[y_1\, y_2\, \dots\, y_j\, \dots\, y_n \right] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2j} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{r1} & y_{r2} & \cdots & y_{rj} & \cdots & y_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sj} & \cdots & y_{sn} \end{bmatrix}_{sxn} \tag{3.12}$$

Definišimo i vektor ulaza $x_o \in R_+^m$ i vektor izlaza $y_o \in R_+^s$ DMU_0, redom:

$$x_o = \{x_{io}\} = \begin{bmatrix} x_{1o} \\ \vdots \\ x_{io} \\ \vdots \\ x_{mo} \end{bmatrix}, \qquad y_o = \{y_{ro}\} = \begin{bmatrix} y_{1o} \\ \vdots \\ y_{ro} \\ \vdots \\ x_{so} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

zatim i konstantan *1xn* vektor vrstu e čiji su svi članovi jednaki jedan:

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1xn} \tag{3.14}$$

kao i semipozitivne *1xs* i *1xm* vektor vrste *u* i *v* težinskih koeficijenata u optimizacionom modelu:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_r & \cdots & u_s \end{bmatrix}_{1xs} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_i & \cdots & v_m \end{bmatrix}_{1xm} \tag{3.15}$$

i, naravno, semipozitivan *nx1* vektor kolonu λ koeficijenata u dualnom optimizacionom modelu:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in R_+^n \qquad (3.16)$$

Data je, paralelno, i skalarna i vektorska forma u dosadašnjoj analizi postavljenih modela:

Ulazno orijentisani CCR razlomljeni model:

Skalarna, odnosno, posle znaka $\Rightarrow$, vektorska forma linearnog programa, tzv. *težinska forma*:

$$\max \ \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \ \Rightarrow \ \max \ u y_o$$

$$\text{p.o.} \ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 \ \Rightarrow \ v x_o = 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \ \Rightarrow \ -vX + uY \le 0 \qquad (3.3) \Rightarrow (3.17)$$

$$u_r, \ v_i \ge 0, \quad r = 1,2,\ldots,s; \quad i = 1,2,\ldots,m \ \Rightarrow \ v \ge 0, \ u \ge 0$$

Skalarna, odnosno, posle znaka $\Rightarrow$, vektorska dualna forma linearnog programa, tzv. *obavijajuća forma*:

$$\min \ \theta \ \Rightarrow \ \min \ \theta$$

$$\text{p.o.} \ x_{io}\theta - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge 0, \ i = 1,2,\ldots,m \ \Rightarrow \ \theta x_o - X\lambda \ge 0 \qquad (3.9) \Rightarrow (3.18)$$

$$-y_{ro} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge 0, \ r = 1,2,\ldots,s \ \Rightarrow -y_o + Y\lambda \ge 0$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \ \Rightarrow \ \lambda \ge 0$$

Izlazno orijentisani CCR razlomljeni model:

Skalarna, odnosno, posle znaka $\Rightarrow$, vektorska forma linearnog programa, tzv. *težinska forma*:

$$\min \sum_{i=0}^{m} v_i x_{io} \quad \Rightarrow \quad \min\ vx_o$$

$$\text{p.o.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad vX - uY \geq 0 \qquad (3.6) \Rightarrow (3.19)$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} = 1 \quad \Rightarrow \quad uy_o = 1$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad r = 1,2,\ldots,s, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad \Rightarrow \quad u,v \geq 0$$

Skalarna, odnosno, posle znaka $\Rightarrow$, vektorska dualna forma linearnog programa (sa izmenjenom oznakom z_0 u η), tzv. *obavijajuća forma*:

$$\max\ \eta \quad \Rightarrow \quad \max\ \eta$$

$$\text{p.o.} \quad \eta y_{ro} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \leq 0, \quad r = 1,2,\ldots,s \quad \Rightarrow \quad \eta y_o - Y\lambda \leq 0 \qquad (3.5) \Rightarrow (3.20)$$

$$-x_{io} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m \quad \Rightarrow \quad -x_o + X\lambda \leq 0$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq 0$$

Upravo, obavijajući model ulazne orijentacije (3.18) i obavijajući model izlazne orijentacije (3.20) definišu klasu CCR, tzv. DEA modela sa konstantnim prinosom na obim, što će biti u nastavku detaljno razmatrano.

3.2. DEA modeli sa konstantnim prinosom na obim

Produkcioni skup CCR DEA modela, u skalarnoj, odnosno vektorskoj formi, redom, oblika [hardle and Jeong, 2005]:

$$\bar{F}_{CRS} = \left\{ (x,y) \middle| \; x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \; y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \; \lambda_j \geq 0 \right\}, \quad (x,y) \in R_+^m x R_+^s \tag{3.21a}$$

$$\bar{F}_{CRS} = \{ (x,y) | \; x \geq X\lambda, \; y \leq Y\lambda, \; \lambda \geq 0 \}, \quad (x,y) \in R_+^m x R_+^s, \; \lambda \in R_+^n \tag{3.21b}$$

formiran je uz pretpostavku da aktivnosti (x_j, y_j) $j = 1,2,\ldots,n$, pripadaju skupu definisanom u okviru (ekonomske) aksiome EA6 o minimalnoj ekstrapolaciji, uz važeći uslov neefikasnosti (2.8) – aksioma EA1 i važeći uslov konveksnosti (2.12) – aksioma EA4, definiše CRS ekonomiju poslovanja rezultantne DMU, čija je aktivnost odredjena ulazno izlaznim parom vektora $(x,y) \in R_+^m x R_+^s$.

Naime, promenljiva λ_j, $j = 1,2,\ldots,n$, kao koordinata semipozitivnog vektora λ, implicira značaj koji je pridružen DMU_j pri formiranju (linearne) konusne ($\lambda_j \geq 0$, $j = 1,2,\ldots,n$, odnosno $\lambda \geq 0$) kombinacije opserviranih DMU ($X\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, $Y\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$) kao članova produkcionog skupa. Svaki od izlaza konusne kombinacije: $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}$, $r = 1,2,\ldots,s$ nije manji od odgovarajućeg ispitivanog izlaza , odnosno svaki od ulaza konusne kombinacije: $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m$ nije veći od odgovarajućeg ispitivanog ulaza razmatranog DMU. Drugim rečima, DMU_o je (Pareto) efikasna u skupu (3.21) akko ne egzistira aktivnost $(x,y) \in \bar{F}_{CRS}$ takva da je $(y,-x) \geq (y_o, -x_o)$.

3.2.1. CCR ulazno orijentisani modeli

Zasnovan na matričnom ulazno izlaznom paru *(X,Y)*, CCR model ulazne orijentacije [Charnes et al. 1978; Cooper et al. 2007] formulisan je kao linearan program sa semipozitivnim vektorom vrstom *v* ulaznih težinskih faktora i semipozitivnim vektorom vrstom u izlaznih težinskih faktora. Ulazni i izlazni težinski faktori su promenljive postavljenog linearnog programa u težinskoj formi, u matrično-vektorskoj notaciji:

$$\begin{aligned} &\max_{u,v}\ uy_o \\ &\text{p.o.}\ \ vx_o = 1 \\ &\quad -vX + uY \leq 0 \\ &\quad v \geq 0,\ u \geq 0 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Realna promenljiva θ i semipozitivan vektor λ su promenljive dualnog linearnog programa u obavijajućoj formi, u matrično-vektorskoj notaciji, oblika:

$$\begin{aligned} &\min_{\theta,\lambda}\ \ \theta \\ &\text{p.o.}\ \ \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\ &\quad -y_o + Y\lambda \geq 0 \\ &\quad \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Obavijajuća forma poseduje dopustivo rešenje $\theta = 1,\ \lambda_0 = 1,\ \lambda_j = 0\ (j \neq 0)$, što implicira da optimalna vrednost θ, u oznaci θ^*, nije veća od 1. S druge strane, iz uslova semipozitivnosti podataka, ograničenje $-y_o + Y\lambda \geq 0\ \Rightarrow\ Y\lambda \geq y_o$ “forsira” nenula vrednost λ, a iz ograničenja $\theta x_o - X\lambda \geq 0$ sledi da θ mora biti veće od nule. Dakle, $0 < \theta^* \leq 1$.

Nadalje, uspostavimo vezu izmedju članova produkcionog skupa (3.21) i obavijajućeg modela (3.23). Ograničenja modela impliciraju pripadnost skupu $\overline{F}_{CRS}$ (proizvodni skup sa pretpostavkom konstantnog prinosa naobim) aktivnosti $(\theta x_o, y_o)$, dok kriterijum teži minimumu θ, redukujući ulazni vektor x_o radijalno na vrednost θx_0 na skupu $\overline{F}_{CRS}$. U modelu (3.23), traži se aktivnost u $\overline{F}_{CRS}$ koja garantuje bar izlazni nivo y_0 DMU_o, redukujući ulazni vektor x_0 proporcionalno (radijalno) na što je moguće manju vrednost. Pod navedenim pretpostavkama, sledi da $(X\lambda, Y\lambda)$ nadmašuje $(\theta x_o, y_o)$, kada je $\theta^* < 1$. Saglasno ovoj osobini, može se definisati "ulazni višak" $s^- \in R^m$ i „izlazni manjak" $s^+ \in R^s$ u identifikaciji izravnavajućeg vektora:

$$s^- = \theta x_o - X\lambda \quad \text{i} \quad s^+ = Y\lambda - y_o \tag{3.24}$$

za $s^- \geq 0,\ s^+ \geq 0$ u svakom dopustivom rešenju (θ, λ) obavijajućeg modela.

Značaj vektora izravnjavajućih promenljivih prikazan je u dvofaznom numeričkom rešavanju linearnog programa [Cooper et al. 2007]:

Faza 1: Rešava se obavijajući model čije je rešenje optimalna vrednost kriterijuma θ^*. Saglasno teoremi dualnosti linearnog programiranja, θ^* je istovremeno i optimalna vrednost (max) težinskog modela. Ova vrednost θ^* se inkorporira u prošireni obavijajući model u sledećoj fazi numeričkog sračunavanja.

Faza 2: Korišćenjem sračunate vrednosti θ^*, rešava se linearni program čije su promenljive optimizacije (λ, s^-, s^+):

$$\max_{\lambda, s^-, s^+} \ \omega = es^- + es^+$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\quad & s^- = \theta^* x_o - X\lambda \\ & s^+ = Y\lambda - y_o \\ & \lambda, s^-, s^+ \geq 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

gde je $e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{1xn}$ konstantan vektor – definisan u (3.14) – tako da je desna strana kriterijuma odredjena sa $es^- = \sum_{i=1}^{m} s_i^-$ i $es^+ = \sum_{r=1}^{s} s_r^+$.

Neka su $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ optimalne vrednosti promenljivih (λ, s^-, s^+) programa druge faze, a $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ optimalne vrednosti promenljivih $(\theta, \lambda, s^-, s^+)$ programa i prve i druge faze. $DMU_j = DMU_o$ je CCR-efikasna akko je

$$(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (1,\ \lambda^*,\ 0,\ 0) \quad \Rightarrow \quad (i)\ \ \theta^* = 1, \quad (ii)\ \ s^* = \begin{bmatrix} s^{-*} \\ s^{+*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.26)$$

U protivnom, $DMU_j = DMU_o$ je CCR-neefikasna.

Uslov $\theta^* = 1$ se naziva *radijalnom efikasnošću,* često *tehničkom efikasnošću*, budući da vrednost $\theta^* < 1$ implicira simultanu redukciju vrednosti ulaza bez narušavanja odnosa (proporcije) u kome su do tada korišćeni. S obzirom da je $(1-\theta^*)$ maksimalna vrednost redukcije dopuštena produkcionim skupom, ma koje buduće redukcije pridružene nenula izravnjavajućem vektoru menjaju proporciju korišćenja ulaznih koordinata. Stoga, neefikasnost pridružena nenula izravnjavajućem vektoru identifikovana programom optimizacije u drugoj fazi se naziva *miksovanom neefikasnošću*. Koriste se i drugi termini u opisu uzroka neefikasnosti. Termin *slaba efikasnost* ili *Farelova efikasnost* se, po pravilu, odnosi samo na uslov (i), dok uslovi (i) i (ii) u (3.26) opisuju tzv. *jaku efikasnost* ili *Pareto-Kupmans efikasnost* koja se može i rečima iskazati: $DMU_j = DMU_o$ je (potpuno) efikasna akko nije moguće poboljšati ma koji ulaz ili ma koji izlaz bez pogoršavanja nekog drugog ulaza ili nekog drugog izlaza [Charnes et al. 1985].

Pareto-Kupmans efikasnost ili jaka efikasnost je ekvivalentna CCR-efikasnosti linearnog programa (3.8), odnosno programa (3.22) u težinskoj formi: $(\theta^*, v^*, u^*) = (1,\ v^* > 0,\ u^* > 0)$. Naime, vektori v i u su dualni težinskim koeficijentima u ograničenjima $\theta x_o - X\lambda \geq 0$ i $-y_o + Y\lambda \geq 0$ obavijajućeg modela (3.23). Uslov komplementarnosti izmedju optimalnih rešenja (v^*, u^*) i $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ ima oblik

$$v^* s^{-*} = 0 \quad i \quad u^* s^{+*} = 0 \qquad (3.27)$$

odakle direktno sledi da je ma kojoj pozitivnoj koordinati vektora v^* ili u^* pridružena koordinata vektora, redom, s^{-*} ili s^{+*}, koja mora biti jednaka nuli i obrnuto, uz mogućnost da obe koordinate koje se množe budu jednake nuli.

CCR-(ne)efikasnost programa (3.8), odnosno programa (3.22) u težinskoj formi, u oznaci Definicija 1, sledi iz upravo gore izložene analize (ne)efikasnosti, u oznaci Definicija 2:

(i) Ako je $\theta^* < 1$, tada je $DMU_j = DMU_o$ CCR-neefikasna na osnovu Definicije 1 (optimalne vrednosti kriterijuma težinskog i obavijajućeg programa su identične i jednake θ^*),

(ii) Ako je $\theta^* = 1$ i izravnjavajući vektor različit od nula vektora ($s^{-*} \neq 0$ i/ili $s^{+*} \neq 0$), tada, saglasno uslovu komplementarnosti (3.27), koordinate vektora v^* ili u^* pridružene koordinatama vektora, redom, s^{-*} ili s^{+*}, koje su različite od nule, moraju biti jednake nuli: $DMU_j = DMU_o$ je CCR-neefikasna na osnovu Definicije 1,

(iii) Konačno, ako je $\theta^* = 1$ i izravnjavajući vektor jednak nula vektoru: $s^* = \begin{bmatrix} s^{-*} \\ s^{+*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, *jaka teorema komplementarnosti* garantuje egzistenciju optimalnog rešenja $v^* > 0$ i $u^* > 0$: $DMU_j = DMU_o$ je CCR-efikasna na osnovu Definicije 1.

Važi i obrnuto, na osnovu komplementarne relacije i jake teoreme komplementarnosti izmedju (v^*, u^*) i (s^{-*}, s^{+*}), paralelnim prilazom se dokazuje da iz Definicije 1 sledi Definicija 2.

S druge strane, Faza 1 i Faza 2, odnosno programi (3.23) i (3.25), mogu biti reprezentovani jednim programom, na primer, u skalarnoj formi [Cooper et al. 2007]:

$$\min \quad \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right)$$

$$\text{p.o.} \quad \theta x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = s_i^-, \; i = 1,2,\ldots,m \qquad (3.28)$$

$$-y_{ro} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = s_r^+, \; r = 1,2,\ldots,s$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad r = 1,2,\ldots,s$$

sa idejom usvajanja brojne vrednosti malog (realnog) parametra $\varepsilon > 0$, na primer, $\varepsilon = 10^{-6}$. Ipak, ovaj pristup nije opravdan, jer može voditi u netačna numerička rešenja, čak i pri usvajanju manjih vrednosti $\varepsilon > 0$, od navedene [Ali and Seiford, 1993]. Uslov $\varepsilon > 0$ je formulisan kao *ne-Arhimedian infinitezimala,* u smislu da ima manju vrednost od ma kojeg pozitivnog realnog broja (dakle, nije realan broj), a detaljna analiza korišćenja *ne-Arimedian promenljivih* u okviru algoritama metoda matematičkog programiranja je izložena u [Arnold et al. 1998]. Medjutim, nije neophodna specifikacija njegove vrednosti, saglasno algoritmima optimizacije u okviru Faze 1 i Faze 2.

Dualan program programu (3.28)

$$\max \quad \theta = \sum_{r=0}^{s} u_r y_{ro}$$

$$\text{p.o.} \quad -\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \leq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (3.29)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon > 0, \quad r = 1,2,\ldots,s, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

ukazuje da su težinski koeficijenti striktno pozitivni.

Uvodjenjem u gornji model ne-Arhimedian infinitezimalne vrednosti $\varepsilon > 0$, CCR razlomljeni model (3.3) se modifikuje na sličan način. Naime, množenjem i deljenjem kriterijuma u (3.29) kostantom $t > 0$, množenjem levih i desnih strana svih ograničenja istom konstantom, formira se model

$$\max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s}(tu_r)y_{ro}}{t}$$

$$\text{p.o.} -\sum_{i=1}^{m}(tv_i)x_{ij} + \sum_{r=1}^{s}(tu_r)y_{rj} \le 0, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.30}$$

$$\sum_{i=1}^{m}(tv_i)x_{io} = t$$

$$(tu_r),(tv_i) \ge \varepsilon > 0, \quad r = 1,2,\ldots,s, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Definicijom novih težina $(tu_r),(tv_i)$, ponovo u oznaci u_r, v_i, dobija se

$$\max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}}$$

$$\text{p.o.} \ \frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}} \le 1, \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.31}$$

$$\frac{u_r}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}} \ge \varepsilon > 0, \quad r = 1,2,\ldots,s \quad \text{i} \quad \frac{v_i}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{io}} \ge \varepsilon > 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Poslednja dva ograničenja se svode na $u_r, v_i \ge \varepsilon > 0,$ s obzirom da suma u imeniocu ima vrednost 1. Optimalne vrednosti parametara zadovoljavaju – uporediti sa (3.10):

$$\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r^* y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m}v_i^* x_{io}} = \sum_{r=1}^{s}u_r^* y_{ro} = \theta^* - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^{-*} + \sum_{r=1}^{s}s_r^{+*}\right) \tag{3.32}$$

3.2.1.1. Referentni skup i analiza efikasnosti

Neefikasnoj $DMU_j = DMU_o$ može se pridružiti *referentni skup*, u oznaci E_o, zasnovan na optimalnom rešenju $(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$:

$$E_o = \left\{ j \,\middle|\, \lambda_j^* > 0 \right\}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{3.33}$$

U uslovima optimalnosti važe sledeće vektorske jednačine:

$$\theta^* x_o = X\lambda^* + s^{-*} \quad \Rightarrow \quad \theta^* v^* x_o = v^* X\lambda^* + v^* s^{-*} \quad \Rightarrow \quad \theta^* = v^* X \lambda^* \tag{3.34}$$

za $v^* x_0 = 1$, kao ograničenje multiplier modela, i $v^* s^{-*} = 0$, kao uslov komplementarnosti. Iz poslednje jednakosti u (3.34), uz uslov pozitivnosti θ^*, sledi da je vektor λ^* semipozitivan, odnosno E_o nije prazan skup.

Optimalno rešenje zadovoljava:

$$\theta^* x_o = \sum_{j \in E_o} x_j \lambda_j^* + s^{-*} \quad \text{i} \quad y_o = \sum_{j \in E_o} y_j \lambda_j^* - s^{+*} \tag{3.35}$$

koje se može interpretirati na osnovu nejednakosti [Cooper et al. 2007]:

$$x_o \geq \theta^* x_o - s^{-*} = \sum_{j \in E_o} x_j \lambda_j^* \quad = \text{tehnička – miksovana neefikasnost} \tag{3.36b}$$

= pozitivna kombinacija opserviranih vrednosti ulaza

$$y_o \leq y_o + s^{+*} = \sum_{j \in E_o} y_j \lambda_j^* \quad = \text{opservirani izlaz + izlazni manjak} \tag{3.36a}$$

= pozitivna kombinacija opseviranih vrednosti izlaza

Iz prethodnih relacija se vidi da se efikasnost aktivnosti (x_o, y_o) DMU_o može poboljšati ako se vrednosti ulaza radijalno redukuju za odnos θ_0, a ulazni višak unet u s^{-*} eliminisan. Slično, efikasnost se može postići ako se vrednosti izlaza uvećaju izlaznim manjkom u s^{+*}. Ovim je definisan pristup za poboljšanje efikasnosti aktivnosti (x_0, y_0) neefikasne DMU_0 saglasno Definiciji 2. Ukupno ulazno poboljšanje Δx_o i izlazno poboljšanje Δy_o mogu se sračunati na osnovu:

$$\Delta x_o = x_o - (\theta^* x_o - s^{-*}) = (1-\theta^*)x_o + s^{-*}, \qquad \Delta y_o = s^{+*} \tag{3.37}$$

a nova poboljšana aktivnost $(\overline{x}_o, \overline{y}_o)$, saglasno tzv. *CCR projektnim formulama,* odredjena relacijama:

$$\overline{x}_o = x_o - \Delta x_o = \theta^* x_o - s^{-*} \le x_o, \qquad \overline{y}_o = y_o + \Delta y_o = y_o + s^{+*} \ge y_o \tag{3.38}$$

je CCR-efikasna.

Njena efikasnost se može dokazati rešavanjem programa

$$\max_{\theta,\lambda,s^-,s^+} \theta$$

$$\text{p.o. } s^- = \theta^* \overline{x}_o - X\lambda \qquad \Rightarrow \qquad (\overline{\theta}^*, \overline{\lambda}^*, \overline{s}^{-*}, \overline{s}^{+*}) \tag{3.39}$$

$$s^+ = Y\lambda - \overline{y}_o$$

$$\lambda, s^-, s^+ \ge 0$$

Unošenjem (3.38) u ograničenja, u uslovima optimalnosti, sledi:

$\overline{\theta}\theta^* x_o = X\overline{\lambda} + \overline{s}^- + \overline{\theta} s^{-*} \;\Rightarrow\; \tilde{\theta} x_o = X\overline{\lambda} + \tilde{s}^-$ i

$$y_o = Y\overline{\lambda} - \overline{s}^+ - s^{+*} \;\Rightarrow\; y_o = Y\overline{\lambda} - \tilde{s}^+ \tag{3.40}$$

Kako je θ^* deo optimalnog rešenja, mora važiti $\tilde{\theta} = \overline{\theta}\theta^* = \theta^* \;\Rightarrow\; \overline{\theta} = 1$, odnosno

$$e\tilde{s}^- + e\tilde{s}^+ = (e\overline{s}^- + es^{-*}) + (e\overline{s}^+ + es^{+*}) \le es^{-*} + es^{+*} \tag{3.41}$$

budući da je $es^{-*}+es^{+*}$ maksimalno. Stoga mora biti $e\bar{s}^{-}+e\bar{s}^{+}=0$, a to znači da su sve koordinate vektora $\bar{s}^{-}$ i $\bar{s}^{+}$ jednake nuli. Uslovi (i) i (ii) u (3.26) su zadovoljeni, CCR efikasnost je postignuta.

Sledi još par osobina aktivnosti $(\bar{x}_o,\bar{y}_o)$ koje su direktna posledica izloženog dokaza :

– Tačka $(\bar{x}_o,\bar{y}_o)$:

$$\bar{x}_o = x_o - \Delta x_o = \theta^* x_o - s^{-*} = \sum_{j\in E_o} x_j \lambda_j^*, \quad \bar{y}_o = y_o + \Delta y_o = y_o + s^{+*} = \sum_{j\in E_o} y_j \lambda_j^* \qquad (3.42)$$

je postavljena na granici efikasnosti u sračunavanju performanse DMU_o.

– Tački $(\bar{x}_o,\bar{y}_o)$ se može pridružiti optimalno rešenje $(\bar{v}_0,\bar{u}_0)$ programa dualnog programu (3.39), sa osobinama: $\bar{v}_0>0,\ \bar{u}_0>0,\ \bar{v}_0 x_j=\bar{u}_0 y_j,\ \ j\in E_0$ i $\bar{v}_0 X\geq \bar{u}_0 Y$.

– DMU u E_o su CCR-efikasne.

– Ma koja semipozitivna kombinacija DMU u E_0 je CCR- efikasna. Naime, važi $x_c=\sum_{j\in E_o} c_j x_j$ i $y_c=\sum_{j\in E_o} c_j y_j$, za $c_j\geq 0\ \ (j\in E_o)$. Težine $(\bar{v}_0,\bar{u}_0)$ zadovoljava: $\bar{v}_0 x_c=\bar{u}_0 y_c,\ \ \bar{v}_0 X\geq \bar{u}_0 Y$ i $\bar{v}_0>0,\ \bar{u}_0>0$.

3.2.1.2. Numerička analiza

Faza 1 i Faza 2 u numeričkom pristupu modelima optimizacije se može prikazati i u obliku [Cooper et al. 2007]:

Faza 1: $\min\ \theta$

Faza 2: $\min \ -es^{-} - es^{+}$ (3.42)

$$\begin{aligned} \text{p.o. } & s^{-} = \theta x_o - X\lambda \\ & s^{+} = Y\lambda - y_o \\ & \theta,\ \lambda,\ s^{-},\ s^{+} \ \geq 0 \end{aligned}$$

pri čemu je u drugoj fazi promenljivoj θ pridružena konstantna vrednost $\min \ \theta = \theta^{*}$.

Korišćenjem standarne notacije linearnih programa, (3.42) se može prikazati na sledeći način:

Faza 1: $\min \ z_1 = cx$

Faza 2: $\min \ z_2 = dx$ (3.43)

$$\begin{aligned} \text{p.o. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

i uspostaviti direktan odnos promenljivih i parametara ova dva programa:

$$x = \begin{bmatrix} \theta & \lambda^T & s^{-T} & s^{+T} \end{bmatrix}^T, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -e & -e \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_o & -X & -I & 0 \\ 0 & Y & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ y_o \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

čime je omogućena neposredna primena simpleks algoritama linearnih programa.

Neka je posle primene gornjih optimizacionih algoritama odredjen skup R CCR efikasnih DMU, tj. DMU za koje je $(\theta^{*}, s^{-*}, s^{+*}) = (1,\ 0,\ 0)$ u svakom optimalnom rešenju. Faza 3 algoritma optimizacije za svaku neefikasnu DMU_o ogleda se u rešavanju sledećeg linearnog programa:

Faza 3: $\min \quad w$

$$
\begin{aligned}
\text{p.o.} \quad & \theta^{*} x_{io} = \sum_{j \in R} \lambda_j x_{ij} + \delta_i^{-} x_{io}, \; i = 1,2,\ldots,m && (1) \\
& y_{ro} = \sum_{j \in R} \lambda_j y_{rj} - \delta_r^{+} y_{ro}, \; r = 1,2,\ldots,s && (2) \\
& \delta_i^{-} \le p, \; i = 1,2,\ldots,m && (3) \\
& \delta_r^{+} \le q, \; r = 1,2,\ldots,s && (4) \\
& p \le w, \quad q \le w && (5) \\
& \lambda_j, \; \delta_i^{-}, \; \delta_r^{+} \ge 0, \quad (\forall j,i,r) && (6)
\end{aligned}
\qquad (3.45)
$$

Linearni program u Fazi 3 se može interpretirati na sledeći način. Leva strana ograničenja (1) je radijalno redukovana vrednost *i*-tog ulaza DMU_o, koja je iskazana kao zbir težinskih ulaza skupa *R* i izravnjavajućih promenljivih u obliku $\delta_i^{-} x_{io}$, na desnoj strani. Parametar δ_i^{-} definiše relativnu devijaciju opservirane vrednosti x_{io}. Ograničenje (3) definiše maksimalnu gornju granicu *p* promene δ_i^{-}. Sličnu ulogu ima i ograničenje (4). Konačno, i *p* i *q* u (5) su ograničeni kriterijumskom funkcijom w čiji minimum treba odrediti. Stoga, treba odrediti izravnjavajuće promenljive sa minimalnom devijacijom od opserviranih vrednosti.

Neka je optimalno rešenje $(\lambda^{*}, s^{-*}, s^{+*}, p^{*}, q^{*}, w^{*})$. Projekcija DMU_o na granicu efikasnosti je odredjena relacijama:

$$
\bar{x}_{io} \leftarrow (\theta^{*} - \delta_i^{-*}) x_{io}, \quad i = 1,2,\ldots,m, \qquad \bar{y}_{ro} \leftarrow (1 + \delta_r^{+*}) y_{ro}, \quad r = 1,2,\ldots,s \qquad (3.46)
$$

koja je i jedinično invarijantna, u smislu da nema uticaja na vrednosti δ_i^{-*}, δ_r^{+*} promena jedinica mere *i*-tog ulaza i *r*-tog izlaza, što se i direktno može sagledati iz ograničenja (1) i (2).

3.2.2. CCR izlazno orijentisani modeli

Zasnovan na matričnom ulazno izlaznom paru *(X,Y)*, i CCR model izlazne orijentacije formulisan je kao linearan program sa semipozitivnim vektorom vrstom, sada u oznaci, p ulaznih težinskih faktora i semipozitivnim vektorom vrstom, sada u oznaci, q izlaznih težinskih faktora. Ulazni i izlazni težinski faktori su promenljive postavljenog linearnog programa u težinskoj formi, u matrično-vektorskoj notaciji [Cooper et al. 2007]:

$$\min_{p,q} \; px_o$$

$$\text{p.o.} \quad pX - qY \geq 0 \qquad (3.6) \Rightarrow (3.19) \Rightarrow (3.47)$$

$$qy_o = 1$$

$$p,q \geq 0$$

Realna promenljiva η i semipozitivan vektor, sada u oznaci, μ su promenljive dualnog linearnog programa u oobavijajućoj formi, u matrično-vektorskoj notaciji, oblika:

$$\max_{\eta,\mu} \; \eta$$

$$\text{p.o.} \quad \eta y_o - Y\mu \leq 0 \qquad (3.5) \Rightarrow (3.20) \Rightarrow (3.48)$$

$$-x_o + X\mu \leq 0$$

$$\mu \geq 0$$

Definicijom promenljivih $\lambda = \mu / \eta$ i $\theta = 1/\eta$, obavijajuća forma (3.48) izlazno orijentisanog modela se svodi na obavijajuću formu (3.23) ulazno orijentisanog modela:

$$\min_{\theta,\lambda} \; \theta$$

$$\text{p.o.} \quad \theta x_o - X\lambda \geq 0 \qquad (3.23) \Rightarrow (3.49)$$

$$-y_o + Y\lambda \geq 0$$

$$\lambda \geq 0$$

Optimalna rešenja zadovoljavaju odnose $\eta^* = 1/\theta^*$, $\mu^* = \lambda^* / \theta^*$, a izravnjavajući vektor $(t^-,\ t^+)$ modela izlazne orijentacije definisan relacijama

$$X\mu + t^- = x_o \quad \text{i} \quad Y\mu - t^+ = \eta y_o \tag{3.50}$$

u uslovima optimalnosti je odredjen kao: $t^{-*} = s^{-*} / \theta^*$ i $t^{+*} = s^{+*} / \theta^*$.
Pri tome je, evidentno:

$$\theta^* \le 1 \quad \Rightarrow \quad \eta^* \ge 1 \tag{3.51}$$

Viša vrednost η^* znači manja efikasnost DMU: θ^* odredjuje procenat redukcije ulaza, dok η^* odredjuje procenat povećanja izlaza. Iz prethodnih relacija sledi da je ulazno orijentisani CCR model efikasan za datu DMU akko je takodje efikasan kada se koristi u evaluaciji performanse izlazno orijentisani model.

Projektne CCR formule su:

$$\bar{x}_o = x_o - t^{-*} \quad \text{i} \quad \bar{y}_o = \eta^* y_o + t^{+*} \tag{3.52}$$

I za težinske forme modela (3.22) i (3.47), u optimalnim uslovima, važi:

$$(v^*,\ u^*) \quad \Rightarrow \quad (p^*,\ q^*) = (v^* / \theta^*,\ u^* / \theta^*) \tag{3.53}$$

što se može dokazati, na primer, polazeći od: $\eta^* = 1/\theta^* \Rightarrow \eta^* = v^* x_o / \theta^*$ i $\eta^* = p^* x_o$, odakle sledi: $p^* = v^* / \theta^*$. Na sličan način dokaz se postavlja i za vekto q^*. Takodje, program (3.47) je ekvivalentan linearnom razlomljenom programu (3.4) izlaznog orijentisanog modela.

I na kraju ove analize, pretpostavka je da je data neefikasna aktivnost (x_o, y_o) i CCR projektne formule (3.38) – ulazno orijentisanog modela, i formule (3.52) – izlazno orijentisanog modela, koje ovde ponovo prikazujemo sa blago izmenjenim oznakama:

$$\hat{x}_o = \theta^* x_o - s^{-*} = X\lambda^*, \qquad \hat{y}_o = y_o + s^{+*} = Y\lambda^* \qquad (3.38) \Rightarrow (3.54)$$

$$\bar{x}_o = x_o - t^{-*} = X\mu^*, \qquad \bar{y}_o = \eta^* y_o + t^{+*} = Y\mu^* \qquad (3.52) \Rightarrow (3.55)$$

Aktivnost (x'_o, y'_o) iz skupa aktivnosti formiranih konveksnim zbirom prethodnih aktivnosti – tačka (x'_o, y'_o) postavljena na pravoj koja spaja tačke $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$ i $(\bar{x}_o, \bar{y}_o)$:

$$(x'_o, y'_o) = a_1(\hat{x}_o, \hat{y}_o) + a_2(\bar{x}_o, \bar{y}_o), \quad a_1 + a_2 = 1, \quad a_1, a_2 \geq 0 \qquad (3.56)$$

je CCR efikasna. Naime, polazeći od $\mu^* = \lambda^* / \theta^*$, sledi dokaz efikasnosti:

$$(x'_o, y'_o) = a_1(X,Y)\lambda^* + a_2(X,Y)\lambda^* / \theta^* \quad \Rightarrow \quad (x'_o, y'_o) = (a_1 + a_2 / \theta^*)(X\lambda^*, Y\lambda^*) \qquad (3.57)$$

Šta više, dokaz je validan i u uslovima ma koje nenegativne kombinacije dve aktivnosti: važi samo uslov $a_1, a_2 \geq 0$. Za $a_1 = 1, \ a_2 = 0$ - ulazna efikasnost, za $a_1 = 0, \ a_2 = 1$ - izlazna efikasnost. Slučaj $a_1 = a_2 = 1/2$ je kompromis izmedju dve aktivnosti.

3.3. DEA modeli sa varijabilnim prinosom na obim

Produkcioni skup CCR DEA modela, u skalarnoj, odnosno vektorskoj formi prikazan je relacijama (3.21). Isključenjem iz analize uslova (2.13) – aksiome EA5, produkcioni skup (2.1), sada u oznaci [Hardle and Jeong, 2005]:

$$\bar{F}_{VRS} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, \ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j, \ \lambda_j \geq 0 \ \wedge \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\} \qquad (3.58a)$$

ili u vektorskoj formi

$$\bar{F}_{VRS} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x \geq X\lambda, \ y \leq Y\lambda, \ \lambda \geq 0 \ \wedge \ e\lambda = 1 \right\} \qquad (3.58b)$$

definiše VRS ekonomiju poslovanja rezultantne DMU, čija je aktivnost, ponovo, odredjena ulazno izlaznim parom vektora $(x,y) \in R_{+}^{m} x R_{+}^{s}$.

Banker, Charnes i Cooper (BCC) u radu [Banker et al. 1984] razvijaju BCC DEA modele čiji je produkcioni skup upravo definisan sa (3.58). BCC model se razlikuje od CCR modela samo u dodatnom uslovu $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ (u vektorskoj formi: $e\lambda = 1$), koji zajedno sa uslovom $\lambda_j \geq 0$ definiše ograničenje konveksnosti, koje omogućuje analizu ekonomije poslovanja DMU i sa varijabilnim prinosom na obim. Naime, promenljiva λ_j, $j = 1,2,\ldots,n$, kao koordinata semipozitivnog vektora λ, implicira značaj koji je pridružen DMU_j pri formiranju (linearne), sada, za razliku od CCR DEA modele, konveksne ($\lambda_j \geq 0$, $j = 1,2,\ldots,n$, odnosno $\lambda \geq 0$ i $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, odnosno $e\lambda = 1$) kombinacije opserviranih DMU ($X\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$, $Y\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$) kao članova produkcionog skupa. Svaki od izlaza konveksne kombinacije: $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj}$, $r = 1,2,\ldots,s$ nije manji od odgovarajućeg ispitivanog izlaza , odnosno svaki od ulaza konveksne kombinacije : $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij}$, $i = 1,2,\ldots,m$ nije veći od odgovarajućeg ispitivanog ulaza razmatranog DMU. Drugim rečima, DMU_o je (Pareto) efikasna u skupu (3.58) akko ne egzistira aktivnost $(x,y) \in \bar{F}_{VRS}$ takva da je $(y,-x) \geq (y_o,-x_o)$.

3.3.1. BCC ulazno orijentisani modeli

S obzirom na dodatni uslov $e\lambda = 1$ u definiciji produkcionog skupa $\bar{F}_{VRS}$ na kome je zasnovan, BCC ulazno orijentisani model [Cooper et al. 2007] u evaluaciji efikasnosti $DMU_j = DMU_o$ je najjednostavnije postaviti u obavijajućoj formi (realna promenljiva, sada u oznaci θ_B, i semipozitivan vektor λ su promenljive modela), polazeći od obavijajuće forme (3.23) CCR modela ulazne orijentacije, u koji je prethodno inkorporiran upravo uslov $e\lambda = 1$:

$$\min_{\theta_B, \lambda} \quad \theta_B$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\quad & \theta_B x_o - X\lambda \geq 0 \\ & -y_o + Y\lambda \geq 0 \\ & e\lambda = 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Dualna težinska forma ovog linearnog programa sigurno je analogna težinskoj formi (3.22) CCR modela, ali sa dodatnim skalarnim članom u_0 (pandan članu $e\lambda = 1$ u primalnoj obavijajućoj formi):

$$\max_{u, v, u_0} \quad z = uy_o - u_0$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\quad & vx_o = 1 \\ & -vX + uY - u_0 e \leq 0 \\ & v \geq 0,\ u \geq 0,\ u_0 \in R \end{aligned} \tag{3.60}$$

gde su z i u_0 realne skalarne vrednosti, a oznaka $u_0 \in R$ ukazuje da (realan broj) u_0 može biti veći od nule, manji od nule ili jednak nuli. Ekvivalentan BCC linearni razlomljeni program se dobija neposredno iz dualnog težinskog programa.

Numerička analiza BCC obavijajuće forme (3.59) je moguća korišćenjem dvofaznog algoritma, sličnog CCR pristupu. U prvoj fazi, vrši se minimizacija θ_B a, u drugoj fazi, maksimizira suma koordinata izravnjavajućeg vektora, zadržavajući $\theta_B = \theta_B^*$ (vrednost kriterijuma sračunata u prvoj fazi). Nadalje, saglasno CCR analizi, optimalno rešenje BCC modela je reprezentovano vrednostima promenljivih $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$. Treba naglasiti da θ_B^* nije manje od optimalne vrednosti θ^* CCR modela, budući da sa dodatnim ograničenjem $e\lambda = 1$, dopustivi skup BCC modela je podskup dopustivog skupa CCR modela.

Slično CCR modelu, $DMU_j = DMU_o$ je BCC-efikasna (u VRS smislu) ako egzistira optimalno rešenje takvo da je $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (1,\ \lambda^*,\ 0,\ 0)$. U protivnom, DMU_o je BCC-neefikasna (jasno, CCR-efikasnost DMU implicira i njegovu BCC-efikasnost).

Za BCC-neefikasan DMU_o, referentni skup (3.33) zasnovan na optimalnom rešenju λ^* ima i dalje isti oblik:

$$E_o = \left\{ j \,\middle|\, \lambda_j^* > 0 \right\}, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\} \tag{3.61}$$

tako da optimalno rešenje zadovoljava:

$$\theta_B^* x_o = \sum_{j \in E_o} x_j \lambda_j^* + s^{-*} \quad \text{i} \quad y_o = \sum_{j \in E_o} y_j \lambda_j^* - s^{+*} \tag{3.62}$$

a nova poboljšana aktivnost $(\bar{x}_o, \bar{y}_o)$, saglasno, sada, tzv. B*CC projektnim formulama,* odredjena relacijama:

$$\bar{x}_o = \theta_B^* x_o - s^{-*}, \qquad \bar{y}_o = y_o + s^{+*} \tag{3.63}$$

je BCC-efikasna.

Treba navesti i [Tone, 1996]:

– Za poboljšanu aktivnost $(\bar{x}_o, \bar{y}_o)$ egzistira optimalno rešenje $(\bar{v}_0, \bar{u}_0, u_0')$ dualnog težinskog modela (3.60) sa osobinama ($\bar{u}_0$ - vektor, u_0' - skalar):

$\bar{v}_0 > 0,\ \bar{u}_0 > 0,\ \ \bar{v}_0 x_j = \bar{u}_0 y_j - u_0',\ \ j \in E_o$ i $\bar{v}_0 X \geq \bar{u}_0 Y - u_0' e.$

– DMU u E_o su BCC-efikasne.

– Neka DMU_o poseduje najmanju količinu resursa, na primer, na prvom ulazu, u odnosu na druge DMU, tj. važi $x_{1o} < x_{1j}, \quad \forall j \neq o$.

Tada, na osnovu ograničenja u modelu (3.59): $\theta_B x_o - X\lambda \geq 0$ i $e\lambda = 1$, sledi da DMU_o poseduje jedinstveno rešenje

$$(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (1,\ \lambda_o^* = 1,\ \lambda_j^* = 0,\ \forall j \neq o,\ 0,\ 0) \ \Rightarrow\ \theta_B^* = 1,\ s^* = 0 \qquad (3.64)$$

odnosno DMU_o je BCC-efikasna. Analogni dokaz se može postaviti i ako DMU_o poseduje najveću količinu produkta, na primer, na prvom izlazu, u odnosu na druge DMU (ovo je samo osobina BCC-efikasnosti ulazno orijentisane verzije modela).

3.3.2. BCC izlazno orijentisani modeli

Izlazno orijentisani obavijajući model, njemu dualan izlazno orijentisani težinski model i izlazno orijentisani BCC linearni razlomljeni model ekvivalentan težinskom modelu, redom, su:

$\max\limits_{\eta_B, \lambda} \ \eta_B$ (realna promenljiva, sada u oznaci, η_B i semipozitivan vektor λ su promenljive modela)

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\quad & \eta_B y_o - Y\lambda \leq 0 \\ & -x_o + X\lambda \leq 0 \\ & e\lambda = 1 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \qquad (3.65)$$

$\min\limits_{u,v,v_0} \ z = vx_o - v_0$ (z i v_0 su realne skalarne vrednosti)

$$\begin{aligned} \text{p.o.}\quad & uy_o = 1 \\ & -vX + uY + v_0 e \leq 0 \\ & v \geq 0,\ u \geq 0,\ v_0 \in R \end{aligned} \qquad (3.66)$$

(oznaka $v_0 \in R$ ukazuje da realan broj v_0 može biti veći od nule, manji od nule ili jednak nuli)

3.3.3. Translatorna invarijantnost BCC modela

Pokazano je da su CCR i BCC modeli jedinično invarijantni. Medjutim, *translatorna invarijantnost* (translation invariance) modela se ogleda u činjenici da indeks efikasnosti nije funkcija koordinatnog sistema u kome se model koristi. Drugim rečima, (neki) DEA model je translatorno invarijantan ako translacija originalnih ulaznih i/ili izlaznih podataka rezultuje u novi (obavijajući) program koji poseduje isto optimalno rešenje kao i originalni (obavijajući) program [Ali and Seiford, 1990].

Može se dokazati da CCR modeli, i ulazno i izlazno orijentisani, nisu translatorno invarijantni ni u odnosu na ulaze, ni u odnosu na izlaze. Medjutim, BCC ulazno orijentisani model je translatorno invarijantan u odnosu na izlaze (ali, ne i u odnosu na ulaze), dok je BCC izlazno orijentisani model translatorno invarijantan u odnosu na ulaze (ali, ne i u odnosu na izlaze) [Cooper et al. 2007].
Na primer, polazeći od ulazno orijentisanog BCC modela u obavijajućoj formi (3.59), ali sa uvedenim izravnjavajućim vektorom:

$$\begin{aligned} &\min \quad \theta_B \\ &\text{p.o.} \quad \theta_B x_o - X\lambda - s^- = 0 \\ &\qquad y_o - Y\lambda + s^+ = 0 \\ &\qquad e\lambda = 1 \\ &\qquad \lambda,\ s^-,\ s^+ \geq 0 \end{aligned} \qquad (3.59) \Rightarrow (3.67)$$

Translacijom izlaznih podataka Y za neku konstantnu vrednost b_r, $r = 1,2,\ldots,s$, sledi:

$$y'_{rj} = y_{rj} + b_r, \quad r = 1,2,\ldots,s; \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (3.68)$$

tako da ograničenje-jednakost u (3.67) u funkciji transliranih izlaznih podataka, sada u oznaci Y', u skalarnoj formi, ima oblik:

$$\sum_{j=1}^{n}(y'_{rj}-b_r)\lambda_j - s_r^+ = \sum_{j=1}^{n} y'_{rj}\lambda_j - b_r\sum_{j=1}^{n}\lambda_j - s_r^+ = y'_{ro} - b_r, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.69}$$

Uz uslov konveksnosti $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1$, i izostavljanjem istog člana b_r na levoj i desnoj strani poslednjeg izraza, dobija se

$$\sum_{j=1}^{n} y'_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y'_{ro}, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.70}$$

što je ekvivalentno originalnom-ograničenju $y_0 - Y\lambda + s^+ = 0$ u (3.67), ali u novim transliranim koordinatama izlaza.

Treba naglasiti da je uslov konveksnosti $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \quad \Rightarrow \quad e\lambda = 1$ ključna pretpostavka translatorne invarijantnosti ulazno orijentisanog BCC modela po koordinatama izlaza. Takodje, da se isti rezultat može proširiti na ulaze samo u specijalnom slučaju kada je $\theta_B^* = 1$.

Ovim je dokazano da je $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ optimalno rešenje i originalnog i transformisanog optimizacionog programa. Na sličan način se postavljaju dokazi i u drugim gore navedenim primerima translatorne (ne)invarijantnosti DEA modela.

3.4. DEA aditivni modeli

U poslednja dva poglavlja posebno je naglašeno da je radijalna mera efikasnosti dominantna karakteristika i DEA CCR modela i DEA BCC modela. Naime, u ulaznoj orijentaciji modela, vrednosti ulaza se proporcionalno redukuju, dok su vrednosti izlaza fiksirani na datom nivou. I obrnuto, u izlaznoj orijentaciji modela, postiže se proporcionalna ekspanzija izlaza, dok je vrednost ulaza konstantna. Kombinacija orijentacija u jedan model, tzv. *aditivni model* ili Pareto-

Kupmansov model [Charnes et al. 1985], rezultovala je klasom DEA neorijentisanih modela, sa neradijalnom merom efikasnosti DMU.

Razvijeno je više verzija aditivnih modela, na primer nu obavijajućem obliku:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\lambda, s^-, s^+} \quad z = es^- + es^+ \\
&\text{p.o.} \quad x_0 = X\lambda + s^- \\
&\qquad y_0 = Y\lambda - s^+ \\
&\qquad\qquad e\lambda = 1 \\
&\qquad \lambda,\ s^-,\ s^+ \geq 0
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

u kome uslov konveksnosti $e\lambda = 1$ implicira korišćenje VRS tehnologije (koristi isti produkcioni skup kao i BCC model). Granica efikasnosti generirana aditivnim modelom (3.73) je identična odgovarajućoj VRS strukturi (3.59) – primenom dvofaznog optimizacionog algoritma – tako da je DMU_o ADD-efikasan (aditivno efikasan) ili PK-efikasan (izravnavajući vektor je jednak nula vektoru u tački optimuma) akko je DMU_o VRS-efikasan, odnosno BCC-efikasan. Naravno, izostavljanjem uslova konveksnosti $e\lambda = 1$, formirani model pripada klasi aditivnih modela sa konstantnim prinosom na obim, drugim rečima aktivnosti DMU su uslovljene korišćenjem CRS tehnologije (koristi isti produkcioni skup kao i CCR model).

Dualan težinski program obavijajućem programu (3.71) je:

$$
\begin{aligned}
&\min_{u, v, u_0} \ w = vx_o - uy_o + u_0 \\
&\text{p.o.} \qquad vX - uY + u_0 e \geq 0 \\
&\qquad\qquad v \geq e,\ u \geq e,\ u_0 \in R
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Neka je optimalno rešenje envelopment modela (3.71) oblika $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$. DMU_o je ADD-efikasan akko je $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (\lambda^*,\ 0,\ 0)$, odnosno DMU_o je ADD-efikasan akko je BCC-efikasan.

Ipak, treba naglasiti da skor efikasnosti θ^* nije merljiv eksplicitno, već je implicitno prisutan u izravnavajućim promenljivim (s^{-*}, s^{+*}). S druge strane, θ^* reprezentuje samo Farelovu (slabu) efikasnost, dok kriterijumska funkcija u (3.73) reflektuje sve neefikasnosti koje model može da identifikuje i na ulazu i na izlazu.

Konačno, *ADD projektnim formulama* $\bar{x}_o = x_o - s^{-*}$, $\bar{y}_o = y_o + s^{+*}$ aktivnost $(\bar{x}_o, \bar{y}_o)$ (tačka na granici efikasnosti u evaluaciji DMU_0) je ADD-efikasna.

Moguća je primena modela (3.71) samo u redukciji ulaza (ulazno orijentisani model): usvaja se $(s^-, s^+) = (s^- \geq 0,\ 0)$, kriterijumska funkcija poprima oblik $\max\limits_{\lambda, s^-} \ z = es^-$ i dolazi do adekvatnih promena u ograničenjima: $y_o = Y\lambda$ i $\lambda,\ s^-, \geq 0$. Ako je željena ekspanzija izlaza (izlazno orijentisani model): usvaja se $(s^-, s^+) = (0,\ s^+ \geq 0)$, a kriterijumska funkcija i ograničenja se modifikaju na analogni način.

Nadalje, za razliku od CCR i BCC koji su jedinično invarijantni, aditivni modeli ne ispunjavaju uslov jedinične invarijantnosti. Medjutim, uslovi *translatorne invarijantnosti* obavijajuće forme aditivnih modela, uz uslov konveksnosti $e\lambda = 1$, su ispunjeni i po ulaznim i po izlaznim koordinatama.

Translacijom skupa podataka (X, Y) za konstantne vrednosti $a_i,\ i = 1,2,\ldots,m$ i $b_r,\ r = 1,2,\ldots,s$, sledi:

$$x'_{ij} = x_{ij} + a_i, \quad i = 1,2,\ldots,m; \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.73a}$$

$$y'_{rj} = y_{rj} + b_r, \quad r = 1,2,\ldots,s; \quad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.73b}$$

Da bi postavili dokaz invarijantnosti u odnosu na proizvoljnu translaciju ulaznih podataka, ograničenje-jednakost $x_o = X\lambda + s^-$ u modelu (3.71) treba da bude iskazano u funkciji novih koordinata (u skalarnoj formi):

$$\sum_{j=1}^{n}(x'_{ij} - a_i)\lambda_j + s_i^- = \sum_{j=1}^{n} x'_{ij}\lambda_j + s_i^- - a_i = x'_{io} - a_i \tag{3.74}$$

odnosno

$$\sum_{j=1}^{n} x'_{ij}\lambda_j + s_i^- = x'_{io}, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.75a}$$

pri čemu isto (λ_j, s_i^-) zadovoljava i

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{io}, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{3.75b}$$

Dokaz u odnosu na Y je paralelan prethodnom i svodi sa na uslov da isto (λ_j, s_r^+) zadovoljava ograničenje-jednakost $y_o = Y\lambda - s^+$ u modelu (3.71) i u originalnim i u novim koordinatama:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.76a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y'_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y'_{ro}, \quad r = 1,2,\ldots,s \tag{3.76b}$$

Kao i kod BCC modela, uslov konveksnosti $e\lambda = 1$ je ključni faktor u postavljanju gornjih relacija. Postavljeni uslovi pokazuju da je $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ optimalno rešenje i originalnog i transliranog programa. Konačno, vrednost izravnjavajućeg vektora u funkciji originalnih i transformisanih koordinata

$$s_i^- = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - x_{io} = \sum_{j=1}^{n} x'_{ij}\lambda_j - x'_{io} \quad \text{i} \quad s_r^+ = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j - y_{ro} = \sum_{j=1}^{n} y'_{rj}\lambda_j - y'_{ro} \tag{3.77}$$

nije promenjena, tako da je i kriterijumska funkcija modela optimizacije invarijanta na translaciju koordinatnog sistema u kome se vrši analiza efikasnosti DMU. Ova karakteristika aditivnog modela je od izuzetnog značaja za analizu DMU koji poseduju negativne ulazne i/ili negativne izlazne podatke, što je, po pravilu, uslovljeno fizičkim karakteristikama analiziranih entiteta.

3.5. DEA SBM modeli

Proširenje primene aditivnih modela uvodjenjem kriterijumske funkcije koja je, sada, jedinično invarijantna na koordinate i vektora ulaza i vektora izlaza (ali ne i translatorno invarijantna) i koja definiše eksplicitno meru efikasnosti (realan nenegativan broj, ne veći od jedan), zasnovana na izravnavajućim promenljivim (*SBM: Slack Based Measures*), kao i njena ulazna i izlazna modifikacija [Tone, 2001], iskazana je u vidu linearnog razlomljenog programa po promenljivim (λ, s^-, s^+):

SBM razlomljeni program:

$$\min_{\lambda, s^-, s^+} \quad \rho = \frac{1 - \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\dfrac{s_i^-}{x_{io}}}{1 + \dfrac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\dfrac{s_r^+}{y_{ro}}}, \text{ p.o. } x_o = X\lambda + s^-,\ y_o = Y\lambda - s^+,\ \lambda,\ s^-,\ s^+ \geq 0 \qquad (3.78)$$

Ulazno orijentisani SBM razlomljeni program:

$$\min_{\lambda, s^-} \quad \rho_{in} = 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{io}}, \text{ p.o. } x_o = X\lambda + s^-, \quad y_o \leq Y\lambda,\ \lambda,\ s^- \geq 0 \qquad (3.79a)$$

Izlazno orijentisani SBM razlomljeni program:

$$\min_{\lambda,, s^+} \quad \rho_{out} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\dfrac{s_r^+}{y_{ro}}}, \text{ p.o. } x_o \geq X\lambda, \quad y_o = Y\lambda - s^+, \quad \lambda,\ s^+ \geq 0 \qquad (3.79b)$$

Članovi u kojima je $x_{io} = 0$ i/ili $y_{ro} = 0$ se brišu iz modela. U svim slučajevima, kriterijumske funkcije su jedinično invarijantne (s_i^- i x_{io}, odnosno s_r^+ i y_{ro} su istih dimenzija) i monotono opadajuće funkcije po koordinatama izravnavajućih promenljivih. Takodje važi $0 \leq \rho \leq 1$, kao i $\rho_{in}, \rho_{out} \geq \rho$. Inače, ulazno orijentisani SBM razlomljeni program je ekvivalentan tzv. *Russellovoj meri ulazne tehničke efikasnosti* [Pastor et al. 1999].

Kriterijumska funkcija SBM modela može se transformisati u oblik :

$$\rho = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{io} - s_i^-}{x_{io}} \right) \left(\frac{1}{s} \sum_{r=1}^{s} \frac{y_{ro} + s_r^+}{y_{ro}} \right)^{-1} \tag{3.80}$$

Količnik $(x_{i0} - s_i^-)/x_{i0}$ procenjuje relativnu redukciju iznosa *i*-tog ulaza i, stoga, član u prvoj zagradi (3.80) korespondira srednjoj vrednosti proporcionalne redukcije iznosa koordinata vektora ulaza ili definiše tzv. *ulaznu miksovanu neefikasnost* (input mix inefficiencies). Slično, u drugom članu, količnik $(y_{r0} - s_r^+)/y_{r0}$ evaluira relativno proporcionalnu ekspanziju iznosa *r*-tog izlaza, a član u drugoj zagradi (ne uzimajući u obzir eksponent -1) je srednja proporcionalna ekspanzija iznosa koordinata vektora izlaza. Njegova inverzija, je mera *izlazne miksovane neefikasnosti* (*output mix inefficiency*). Drugim rečima, SBM ρ se može interpretirati kao odnos srednjih vrednosti ulazne i izlazne miksovane neefikasnosti.

U cilju uvodjenja definicije i značenja pojma “mix”, treba napraviti spregu da kod BCC ili CCR modela, vrednost $(1-\theta^*)$ definiše redukciju ulaznih promenljivih, ali bez promene njihovog uzajamnog (proporcionalnog) odnosa, drugim rečima, bez promene korišćenja njihovog ulaznog miksa. Slično, vrednost $(\eta^* - 1)$ definiše ekspanziju izlaznih promenljivih, ali bez promene njihovog uzajamnog (proporcionalnog) odnosa, drugim rečima, bez promene u produkciji njihovog izlaznog miksa.

U DEA analizama, kao i u ekonomskim analizama, ova proporcija reprezentuje *tehničku neefikasnost*, nasuprot *neefikasnosti obima* ili *alokativnoj neefikasnosti.* U drugoj fazi optimizacije, i kod CCR i kod BCC modela, maksimiziraju se vrednosti koordinata izravnavajućeg vektora, u cilju detekcije prisutva neefikasnosti. Promena ma koje nenula koordinate izravnavajućeg vektora rezultuje i u promenu miksa.

Iz samog prilaza se vidi da CCR i BCC modeli razlikuju tehničku i miksovanu neefikasnost. U DEA analizama ta razlika se posebno ne ističe i često gubi korišćenjem termina *tehnička efikasnost* kojim su obuhvaćene obe neefikasnosti. Kada je od posebne važnosti, terminologija se najčešće menja korišćenjem *čiste tehničke efikasnosti* za θ^* i η^*, a razlika u odnosu na miksovanu neefikasnost je tada očigledna.

Korišćenjem optimalnih vrednosti izravnavajućih vektora (s^{-*}, s^{+*}) SBM indeks efikasnosti ρ^* prikazuje dekompoziciju neefikasnosti

$$\rho^* = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^{*-}}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{s_r^{*+}}{y_{ro}}} = \frac{1 - \sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{1 + \sum_{r=1}^{s}\beta_r},$$

$$\alpha_i = \frac{1}{m}\frac{s_i^{-*}}{x_{io}},\ i = 1,2,\ldots,m;\quad \beta_r = \frac{1}{s}\frac{s_r^{+*}}{y_{ro}},\ r = 1,2,\ldots,s \qquad (3.81)$$

Dekompozicija informativno procenjuje "izvore" i veličinu neefikasnosti svakog ulaza i izlaza DMU čija se relativna efikasnost odredjuje. Ali, prethodno treba naći optimalne vrednosti koordinata izravnavajućeg vektora.

3.5.1. Ekvivalentni linearni program

SBM razlomljeni program (3.8), posle množenja brojioca i imenioca pozitivnom konstantom $t > 0$ i izjednačavanjem imenioca sa jedinicom, svodi se na model:

$$\min_{t,\lambda,s^-,s^+} \quad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{ts_i^-}{x_{io}},$$

p.o. $x_o = X\lambda + s^-$,

$$y_o = Y\lambda - s^+, \ \lambda, \ s^-, s^+ \geq 0 \tag{3.82}$$

$$t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{ts_r^+}{y_{ro}} = 1, \quad t > 0$$

Definicijom promenljivih: $\Lambda = t\lambda, \ S^- = ts^-, \ S^+ = ts^+$, prethodni program, odnosno originalni SBM razlomljeni program se svodi na ekvivalentni linearni program, čije su promenljive $(t, \ \Lambda, \ S^-, \ S^+)$:

$$\min \quad \tau = t - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{S_i^-}{x_{io}},$$

p.o. $tx_o = X\Lambda + S^-$, $ty_0 = Y\Lambda - S^+$ (3.83)

$$t + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{S_r^+}{y_{ro}} = 1, \quad t > 0$$

Iz optimalnog rešenja (3.83): $(\tau^*, \ t^*, \ \Lambda^*, \ S^{-*}, \ S^{+*})$, sledi optimalno rešenje polaznog SBM programa:

$$(\rho^*, \ \lambda^*, \ s^{-*}, \ s^{+*}) = (\tau^*, \ \Lambda^*/t^*, \ S^{-*}/t^*, \ S^{+*}/t^*) \tag{3.84}$$

DMU_o je SBM-efikasna akko je $\rho^* = 1$. Ovaj uslov je ekvivalentan $(s^{-*}, \ s^{+*}) = (0, \ 0)$.

Aktivnost (x_o, y_o) SBM-neefikasne DMU_o je odredjena izrazima $x_o = X\lambda^* + s^{-*}$ i $y_o = Y\lambda^* - s^{+*}$ i ona postaje efikasna saglasno SBM projektnim formulama $\bar{x}_o = x_o - s^{-*}$, $\bar{y}_o = y_o + s^{+*}$, koje su identične projektnim formulama aditivnog modela.

Definicijom referentnog skupa $E_o = \{j \mid \lambda_j^* > 0\}, \quad j \in \{1,2,\ldots,n\}$, aktivnost

$$\bar{x}_o = \sum_{j \in E_o} x_j \lambda_j^* \quad \text{i} \quad \bar{y}_o = \sum_{j \in E_o} y_j \lambda_j^* \tag{3.85}$$

(postavljena na granici efikasnosti) pripada referentnom skupu, formirana kao pozitivna kombinacija njegovih članova, je i SBM-efikasna.

Dualan program programu (3.83) se svodi na odredjivanje maksimalne vrednosti dualne skalarne realne promenljive $\sigma \in R$ u uslovima dualnih ograničenja koja formiraju vektor-vrste parametara *v* i *u*:

$$\max_{\sigma,\, v,\, u} \sigma, \;\; p.o. \;\; \sigma + vx_o - uy_o = 1, \;\; vX - uY \geq 0, \;\; v \geq \frac{1}{m}[1/x_o], \;\; u \geq \frac{\sigma}{s}[1/y_o] \tag{3.86}$$

gde je notacija $[1/x_o]$ ekvivalentna vektor vrsti $[1/x_{1o}, 1/x_{2o}, \ldots, 1/x_{mo}]$.

Eliminacijom promenljive σ iz ograničenja $\sigma + vx_o - uy_o = 1$, formira se ekvivalentni program:

$$\max \; uy_o - vx_o, \;\; p.o. \;\; vX - uY \geq 0, \;\; v \geq \frac{1}{m}[1/x_o], \;\; u \geq \frac{1 - vx_o + uy_o}{s}[1/y_o] \tag{3.87}$$

Dualne vektor-vrste promenljivih *v* i *u* se mogu interpretirati kao virtuelni troškovi i virtuelne cene, redom, ulaza i izlaza. Dualan program nalazi optimalne virtuelne troškove i cene za DMU_o, tako da virtuelni profit $uy_j - vx_j$ svake DMU, uključujući i DMU_o, nije veći od nule, i maksimizira profit $uy_o - vx_o$ za razmatranu DMU_o. Očigledno, optimalni profit je u najboljem slučaju jednak nuli i stoga je

$\sigma = 1$ za SBM-efikasnu DMU. Ograničenja na dopustive parametre v i u odredjuju njihovu pripadnost pozitivnom ortantu.

3.5.2. Odnos SBM i CCR efikasnosti

Iz optimalnog rešenja $(\theta^*, \mu^*, t^{-*}, t^{+*})$ CCR modela

$$\min \quad \theta$$

$$\text{p.o.} \quad \theta x_o - X\mu - t^- = 0\,, \quad y_o - Y\mu + t^+ = 0\,, \quad \mu,\ t^-,\ t^+ \geq 0 \tag{3.88}$$

i aktivnosti

$(x_o, y_o) = (X\mu^* + t^{-*} + (1-\theta^*)x_o,\ Y\mu^* - t^{+*})$,

definicijom SBM dopustivog skupa $(\lambda,\ s^-,\ s^+) = (\mu^*,\ t^{-*} + (1-\theta^*)x_o,\ t^{+*})$, kriterijumska SBM funkcija poprima oblik:

$$\rho = \frac{1 - \dfrac{1}{m}[\sum_{i=1}^{m} \dfrac{t_i^{-*}}{x_{io}} + m(1-\theta^*)]}{1 + \dfrac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \dfrac{t_r^{+*}}{y_{ro}}} = \frac{\theta^* - \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \dfrac{t_i^{-*}}{x_{io}}}{1 + \dfrac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \dfrac{t_r^{+*}}{y_{ro}}}, \quad \Rightarrow \quad \rho^* \leq \theta^* \tag{3.89}$$

Ovaj rezultat $(\rho^* \leq \theta^*)$ reflektuje činjenicu da je ρ^* SBM procena svih neefikasnosti, dok je θ^* procena samo čiste tehničke neefikasnosti. Može se primetit da koeficijent $1/(mx_{i0})$ ulaznog izravnavajućeg subvektora s_i^- u relaciji za ρ ina značajnu ulogu.

I obrnuto, za SBM oprimalno rešenje $(\rho^*,\ \lambda^*,\ s^{-*},\ s^{+*})$, transformacija ograničenja (originalnog frakcionog programa) $y_o = Y\lambda - s^+$, $x_o = X\lambda + s^-$ u $y_o = Y\lambda^* - s^{+*}$, $\theta x_o = X\lambda^* + (\theta - 1)x_o + s^{-*}$ i dodavanjem ograničenja $(\theta - 1)x_o + s^{-*} \geq 0$, tada CCR dopustivom skupu pripada θ, λ^*, $t^- = (\theta - 1)x_o + s^{-*}$ i $t^+ = s^{+*}$.

Relacija ekvivalentnosti izmedju CCR-efikasnosti i SBM-efikasnosti (DMU_0, odnosno aktivnost (x_o, y_o) je CCR-efikasna akko je SBM-efikasna), koristeći gornje rezultate može se dokazati [Cooper et al. 2007].

Naime, neka je aktivnost (x_0, y_0) CCR-neefikasna. Tada je ili $\theta^* < 1$ ili $\theta^* = 1$ i $(t^{-*},\ t^{+*}) \neq (0,\ 0)$. Tada iz (3.89), u oba slučaja, sledi $\rho < 1$ za dopustivo rešenje SBM. Aktivnost (x_0, y_0) je SBM-neefikasna.

Neka je, sada, aktivnost (x_0, y_0) SBM-neefikasna. Tada je $(s^{-*},\ s^{+*}) \neq (0,\ 0)$. Na osnovu $\theta x_o = X\lambda^* + (\theta - 1)x_o + s^{-*}$ i $y_o = Y\lambda^* - s^{+*}$, tada CCR dopustivom skupu pripada θ ,λ^*, $t^- = (\theta - 1)x_o + s^{-*}$ i $t^+ = s^{+*}$, uz uslov $(\theta - 1)x_o + s^{-*} \geq 0$ Moguća su dva slučaja: (1) $\theta = 1$ i $(t^- = s^{-*},\ t^+ = s^{+*}) \neq (0,\ 0)$. Optimalno rešenje (za CCR) je CCR-neefikasno, (2) $\theta < 1$, aktivnost (x_0, y_0) je CCR-neefikasna.

Dakle, CCR-neefikasnost je ekvivalentna SBM-neefikasnosti. Budući da su definicije efikasnosti i neefikasnosti uzajamno isključive, dokaz je u potpunosti postavljen.

3.6. DEA FDH modeli

Produkcioni skup CCR DEA modela, u skalarnoj, odnosno vektorskoj formi prikazan je relacijama (3.21), dok je produkcioni skup BCC DEA modela prikazan paralelnim relacijama (3.58). U radovima [Deprins et al. 1984; Tulkens, 1993] definisan je alternativni prilaz, sa uvedenom pretpostavkom da samo opservirana DMU formira granicu efikasnosti, ali ne i (linearna) konusna ili konveksna kombinacija opserviranih DMU, tj. produkcioni skup je usvojen u obliku:

$$\bar{F}_{FDH} = \left\{ (x, y) \middle|\ x \geq x_j,\ y \leq y_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \right\},\ (x, y) \in R_+^m x R_+^s \qquad (2.38) \Rightarrow (3.90)$$

gde su $x_j\ (\geq 0)$, $y_j\ (\geq 0)$ koordinate opservirane DMU_j, $j=1,2,\dots,n$. Drugim rečima, tačka je član produkcionog skupa ako su sve njene ulazne koordinate najmanje velike kao analogne koordinate vektora opserviranih vrednosti $x_j\ (\geq 0)$, $j=1,2,\dots,n$ i ako izlazne koordinate nisu veće od analognih u vektoru $y_j\ (\geq 0)$ opserviranih vrednosti za isto *j*. Skup (3.90) koji generira granicu efikasnosti je ekvivalentam skupu $\bar{F}_{VRS}$ u (3.58), ali sa restriktivnim uslovom $\lambda_j \in \{0,1\}$, $j=1,2,\dots,n$:

$$\bar{F}_{FDH} = \left\{ (x,y) \middle| \ x \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j,\ y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j,\ \lambda_j \in \{0,1\} \ \wedge \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\} \quad (2.47) \ \Rightarrow (3.91)$$

tako da je, kao i ranije, DMU_o (Pareto) efikasna u skupu (3.90) ili u ekvivalentnom skupu (3.91) akko ne egzistira aktivnost $(x,y) \in \bar{F}_{FDH}$ takva da je $(y,-x) \geq (y_o,-x_o)$, a u numeričkom smislu optimizacioni problem se rešava korišćenjem miksovanog (na primer, ulazno orijentisanog) celobrojnog linearnog programa:

$$\min \ \theta$$

$$\text{p.o.} \ \theta x_o - X\lambda \geq 0, \quad y_o - Y\lambda \leq 0, \quad e\lambda = 1, \quad \lambda_j \in \{0,1\} \qquad (3.92)$$

Kako promenljiva λ_j, $j=1,2,\dots,n$, kao koordinata semipozitivnog vektora λ, uzima samo vrednost nula ili jedan, uz uslov $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$ $(e\lambda = 1)$, za DMU_j, $j=1,2,\dots,n$, sa *mx1* vektorom ulaza x_j i *sx1* vektorom izlaza y_j – vektori su dati u (2.35) – estimacija efikasnosti, redom, ulazne i izlazne orijentacije vrši se na osnovu:

$$\overline{\theta}_{FDH}^{in}\left(x_o,y_o\right)=\min_{j\in D_0}\;[\max_{i=1,2,\ldots,m}\left(\frac{x_{ij}}{x_{io}}\right)]\text{ i }\overline{\theta}_{FDH}^{out}\left(x_o,y_o\right)=\max_{j\in D_0}\;[\min_{r=1,2,\ldots,s}\left(\frac{y_{rj}}{y_{ro}}\right)]\,(2.54)\Rightarrow(3.93)$$

gde je $D_0=\left\{j\,\middle|\;x_0\geq x_j,\;y_0\leq y_j,\;j=1,2,\ldots,n\right\}$, gde je za ulazno orijentisani model (3.92): $\theta^*=\overline{\theta}_{FDH}^{in}\left(x_o,y_o\right)$. DMU_o je FDH-efikasna akko je $\theta^*=\overline{\theta}_{FDH}^{in}\left(x_o,y_o\right)=1$. U protivnom, DMU_o je FDH-neefikasna. Ekvivalentno, DMU_o je FDH-efikasna akko optimalno rešenje $(\theta^*,\lambda^*,s^{-*},s^{+*})$, programa (3.92), posle unošenja izravnjavajućih promenljivih i modifikacije kriterijumske funkcije, zadovoljava $(\theta^*,\lambda^*,s^{-*},s^{+*})=(1,\;\lambda^*\;,0,\;0)$.

4. DEA algoritmi estimacije ekonomije obima poslovanja organizacionih jedinica

Neka se razmatra, i dalje, *n* organizacionih (produkcionih) jedinica, odnosno *n* DMU i neka $DMU_j = DMU_0,\ j = 1,2,\ldots,n$ koristi *mx1* vektor resursa (vektor ulaza) $x_j = x_0 \in R_+^m$ u generisanju *sx1* vektora produkcije (vektora izlaza) $y_j = y_0 \in R_+^s$. Aktivnost (x_0, y_0) DMU_0 se „odvija" u *n+m* dimenzionalnom (ulazno-izlaznom) prostoru R_+^{m+s}, a hiperravan koja prolazi kroz tačku reprezentovanu vektorom (x_0, y_0) može se opisati vektorskom jednačinom

$$u(y - y_0) - v(x - x_0) = 0$$

(*u* i *v* vektor-vrste koeficijenata dimenzija, redom, *s* i *m*) (4.1)

koja se može prikazati i u obliku

$uy - vx - u_0 = 0$ ($u_0 = uy_0 - vx_0$ - skalarna vrednost) (4.2)

gde je (x, y) tekuća tačka ravni.

U opštem slučaju, hiperravan deli ulazno-izlazni prostor od *n+m* dimenzija na dva poluprostora, naravno istih dimenzija. Ukoliko se svi članovi produkcionog skupa *F* nalaze samo sa jedne „strane" hiperravni, odnosno nalaze se samo „unutar" jednog od dva poluprostora, hiperravan se nalazi u ulozi tzv. *potporne hiperravni* (*supporting hyperplane*) produkcionog skupa *F* u tački (x_0, y_0). Kaže se da potporna hiperravan „dodiruje" produkcioni skup u toj tački.

Tačnije, za svaku tačku $(x,y) \in F$, kojoj je pridružena ma koja DMU, važi

$$uy - vx - u_0 \le 0 \tag{4.3}$$

Saglasno definiciji produkcionog skupa *F* BCC optimizacionih modela i prethodne osobine potporne hiperravni, može se usvojiti $u \ge 0$, $v \ge 0$, budući da se produkcioni skup nalazi samo sa jedne „strane" hiperravni. U dodatku, linearna vektorska jednačina je invarijanta na množenje nenula konstantom, pa u cilju otklanjanja nedefinisanosti, pridružuje se ograničenje u vidu uslova normalizacije: $vx_0 = 1$. Kako produkcioni skup generiše podatke reprezentovane matričnim parom (X,Y), relacija (4.3), u opisu svih DMU, poprima oblik

$$uY - vX - u_0 e \le 0 \quad (u_0 = uy_0 - vx_0, \quad vx_0 = 1 \;\Rightarrow\; uy_0 - u_0 = 1) \tag{4.4}$$

Može se zaključiti da je vektor koeficijenata $(v,\ u,\ u_0)$ potporne hiperravni (4.2) (dualno) optimalno rešenje BCC modela. Drugim rečima, ako je DMU_0, odnosno ako je aktivnost (x_0,y_0) BCC-efikasna, normalizovani vektor (koeficijenata) $(v,\ u,\ u_0)$ potporne hiperravni produkcionog skupa *F* u (x_0,y_0) je optimalno rešenje BCC modela i obrnuto.

4.1. Analiza ekonomije obima poslovanja

Standardni model analize prinosa na obim DEA metodologijom postavljen je u doktorskoj disertaciji [Banker, 1980], sukcesivno kasnije proširen i suštinski sadržajno definisan u [Banker, 1984; Banker et al. 1984; Fare et al. 1994]. Zatim, [Banker and Thrall, 1992] publikuju značajne rezultate u analizi ekonomije obima poslovanja u okviru algoritama DEA metode, da bi [Banker et al. 1996] razvili i numerički prilaz.

Mada je ekonomski koncept prinosa na obim (rastući, konstantan i opadajući) jasan samo u tačkama na granici efikasnosti, istraživanja proširuju analizu na neefikasne DMU projektujući ih na granicu efikasnosti [Fare, 1994; Banker et al. 1995]. Prirodno, u tom slučaju, prinos na obim zavisi od korišćene metode analize efikasnosti DMU. Pri tome, oba prilaza koriste dvofaznu estimaciju prinosa na obim. Specifično, [Fare, 1994] rešava, u prvoj fazi, BCC i CCR modele, a u drugoj, linearni program za svaki nekonstantan prinos na obim DMU. Drugim rečima, rešavaju se tri linearna programa u analizi nekonstantnog prinosa na obim DMU. S druge strane, [Banker et al. 1996; 2004] rešavaju CCR model u prvoj fazi, a zatim, u drugoj fazi, linearni program za svaku DMU sa nekonstantnim karakteristikama prinosa na obim. U radu [Tone, 1996] predloženo je rešenje BCC modela i odredjivanje BCC-efikasnih karakteristika prinosa na obim za svaku BCC-neefikasnu DMU, opservacijom karakteristika prinosa na obim, saglasno samo njihovim referentnim skupovima. Nadalje, navedeni prilazi će biti, sa manje ili više detalja, izloženi, za više klasa DEA modela.

Navedimo, uz odgovarajuće komentare, neke skraćene oznake, koje smo ranije, u većoj ili manjoj meri, već koristili. Analiza ekonomije obima poslovanja, odnosno *prinosa na obim* (*RTS: returns-to-scale*) DMU je funkcija orijentacije modela. Na primer, *rastući prinos na obim* (*IRS: Increasing Returns to Scale*) može rezultovati u analizi ulazno orijentisanog modela, dok primena izlazno orijentisanog modela, za isti skup podataka, može rezultovati u *opadajući prinos na obim* (DRS: Decreasing Returns to Scale) [Golany and Yu, 1997].

Inače, kao što je pokazano u drugom i trećem poglavlju, varijabilna ekonomija obima poslovanja ili varijabilni prinos na obim (*VRS: Variable Returns to Scale*) obuhvata IRS i DRS , kao specijalan slučaj i *konstantan prinos na obim* (*CRS: Constant Returns to Scale*), zatim *nerastući prinos na obim* (*NIRS: Non-Increasing Returns to Scale*) i *neopadajući prinos na obim* (*NDRS: Non-Decreasing Returns to Scale*).

4.1.1. Ekonomija obima poslovanja u BCC modelima

U prethodnom poglavlju postavljeni su BCC modeli ulazne orijentacije u obavijajućoj i težinskoj formi:

$$\min_{\theta_B,\lambda} \ \theta_B, \ \text{p.o. } \theta_B x_0 - X\lambda \geq 0, \ -y_0 + Y\lambda \geq 0, \ e\lambda = 1, \ \lambda \geq 0 \qquad (3.59) \Rightarrow (4.5)$$

$$\max_{u,v,u_0} \ z = uy_0 - u_0, \ \text{p.o. } vx_0 = 1, \ -vX + uY - u_0 e \leq 0, \ v \geq 0, \ u \geq 0, \ u_0 \in R \qquad (3.60) \Rightarrow (4.6)$$

U dvofaznoj optimizacionoj proceduri – $DMU_j = DMU_o$ je BCC-efikasna akko egzistira optimalno rešenje takvo da je $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (1, \ \lambda^*, \ 0, \ 0)$, u protivnom, DMU_o je BCC-neefikasna – detektuju se dva tipa neefikasnosti. Minimizacija u prvoj fazi identifikuje vrednost $(1-\theta_B^*)x_{io}$ koja reprezentuje iznos redukcije svakog ulaza, bez promene proporcija u kojima se ulazi koriste. Budući da je vrednost θ_B^* minimalna, proporcionalna redukcija svih ulaza reprezentovana iznosom $(1-\theta_B^*)$ je maksimalna. Stoga, svaka druga redukcija evidentirana nenula izravnavajućim promenljivim narušava korišćenu proporciju ulaza. Vrednost θ_B^* definiše meru koja se u ekonomskim analizama naziva *tehničkom efikasnošću*, dok je *miksovana neefikasnost* posledica prisustva nenula izravnavajućih promenljivih u alternativnim optimalnim rešenjima. Često se θ_B^* uzima kao mera *čiste tehničke efikasnosti*, tako da se pod pojmom tehničke efikasnosti podrazumeva i čista tehnička i miksovana neefikasnost.

$DMU_j = DMU_o$ BCC-efikasnost definiše optimalne vrednosti $(v^* > 0, \ u^* > 0, \ u_0^*)$ parametara (v, u, u_0) (dualnog) težinskog BCC modela optimizacije, a saglasno modelu potporne hiperravni, karakter RTS-a može se sagledati upravo analizom predznaka (negativan, pozitivan ili nula) optimalne vrednosti u_0^* skalarnog parametra u_0. RTS, u opštem slučaju, ima jasan smisao samo ako je DMU na granici efikasnosti. Ipak, ukoliko efikasnost nije postignuta, odnosno kada je DMU_o BCC-neefikasna, korišćenjem optimalnih vrednosti obavijajućeg modela projektuje se DMU na BCC granicu efikasnosti, saglasno projektnim formulama:

$$\bar{x}_o = \theta_B^* x_o - s^{-*} \quad \left(= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_j \right), \qquad \bar{y}_o = y_o + s^{+*} \quad \left(= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_j \right) \qquad (3.62) \Rightarrow (4.7a)$$

ili u skalarnoj formi:

$$\bar{x}_{io} = \theta_B^* x_{io} - s_i^{-*} \quad \left(= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* x_{ij} \right), \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (4.7b)$$

$$\bar{y}_{ro} = y_{ro} - s_r^{+*} \quad \left(= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* y_{rj} \right), \quad r = 1,2,\ldots,s \qquad (4.7c)$$

Uz pretpostavku da je tačka $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ na BCC granici efikasnosti, karakter RTS-a u toj tački je odredjen saglasno [Banker and Thrall, 1992]:

IRS $\Leftrightarrow$ $u_0^* < 0$, za sva optimalna rešenja (4.8a)

DRS $\Leftrightarrow$ $u_0^* > 0$, za sva optimalna rešenja (4.8b)

CRS $\Leftrightarrow$ $u_0^* = 0$, za neko optimalno rešenje (4.8c)

naglašavajući da su $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ koordinate tačke (aktivnosti) na granici efikasnosti koje su dobijene projektnim formulama (4.7) u evaluaciji DMU_o algoritmom optimizacije obavijajućeg modela (4.1).

Vektor parametara $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ odreduje optimalna rešenja obavijajućeg modela (4.5), dok je vektor parametara (v^*, u^*, u_0^*) – rezultat optimizacije težinskog modela (4.6).

Neka je optimum dostignut za $u_0^* < 0$. Saglasno [Banker et al. 1996], veličina i znak parametra u svim optimalnim rešenjima može se ispitati korišćenjem sledećeg modela:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \bar{u}_0 \\
&\text{p.o.} \quad -\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \bar{u}_0 \le 0, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad j \ne o \\
&\quad -\sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{io} + \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro} - \bar{u}_0 \le 0, \quad j = o \\
&\quad \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro} - \bar{u}_0 = 1 \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{io} = 1 \\
&\quad u_r, v_i \ge 0, \quad r = 1,2,\ldots,s, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad \bar{u}_o \le 0
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

gde su $\bar{x}_{io}$ i $\bar{y}_{ro}$ određeni na osnovu (4.7).

Ograničenja u (4.9) su iste forme kao i u težinskom modelu (4.6), izuzev dodatih ograničenja $\sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro} - \bar{u}_0 = 1$ i $\bar{u}_o \le 0$. Prvo ograničenje odnosi se na tačku na granici efikasnosti (definiše položaj hiperravni). Drugo, determiniše da li je optimalna vrednost dostignuta, tj. da li je $\max \bar{u}_o = 0$. Ako je $\max \bar{u}_o = \bar{u}_0^* = 0$ dostignut, tada je uslov (4.8c) zadovoljen i prinos na obim je konstantan. Ako je, ipak, $\max \bar{u}_o = \bar{u}_0^* < 0$, uslov (4.8a) je zadovoljen – prinos na obim je rastući. U drugom slučaju, u implementaciji uslova (4.8a), izbegnuta je potreba ispitivanja negativnosti parametra u svim alternativnim optimalnim rešenjima.

Sličan pristup se uvodi i kada je optimum dostignut za $u_0^* > 0$, s tom razlikom što se kriterijumska funkcija u (4.9) minimizira: $\min \ \bar{u}_0$, a ograničenje

$\bar{u}_o \le 0$ postaje $\bar{u}_o \ge 0$. Svi ostali uslovi ostaju nepromenjeni i ako je $\min \bar{u}_o = \bar{u}_0^* > 0$, uslov (4.8b) je zadovoljen, a ako je $\min \bar{u}_o = \bar{u}_0^* = 0$, uslov (4.8c) implicira konstantan prinos na obim.

S druge strane, ukoliko bi uslov konveksnosti $e\lambda = 1$ u BCC obavijajućem modelu bio oslabljen, na primer, $L \le e\lambda \le U$, $L \in [0,1]$, $U \in [1, \infty]$, moguća su neka tipična proširenja BCC modela (naglasimo da $L = 0$ i $U = \infty$ svodi prošireni model na osnovnu strukturu CCR modela, a izbor $L = U = 1$ - korespondira BCC modelu):

– Izbor $(L = 1,\ U = \infty)$, odnosno ograničenje na vektor λ: $e\lambda \ge 1$ definiše IRS ili NDRS model. Uslov $L = 1$ ograničava redukciju obima DMU, sa mogućom beskonačnom ekspanzijom. Prikazom produkcionog skupa IRS modela sa jednim ulazom i jednim izlazom, izlazno/ulazni ratio ma koje tačke na granici efikasnosti nije rastući u odnosu na ulaz, pa otuda i naziv modela: NDRS. Proporcionalno povećanje izlaza je uvek ne manje od proporcionalnog povećanja ulaza. Analitički, $\dfrac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \dfrac{x}{y}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \ge 1 \ \Rightarrow\ \dfrac{\Delta y}{y} \ge \dfrac{\Delta x}{x}$, gde su Δy, Δx priraštaji koordinata tačke (x, y) koja je postavljena na granici efikasnosti. Model je usredsređen na efikasnost obima relativno malih DMU.

– Izbor $(L = 0,\ U = 1)$, dakle, sa ograničenjem $0 \le e\lambda \le 1$, definiše DRS ili NIRS model.

Izlazni/ulazni priraštaj tačaka na granici efikasnosti je opadajući u odnosu na ulazni obim, tj. $\dfrac{\Delta y}{y} \le \dfrac{\Delta x}{x}$, sa znakom jednakosti (= CRS) za startni segment granice efikasnosti (uslov $U = 1$), a striktna nejednakost je zadovoljena kasnije, tako da model ističe veće DMU sa opdajućim prinosom na obim.

– Izbor $(0 \le L \le 1,\ U \ge 1)$ definiše GRS (Generalized Returns to Scale) model, budući da je moguće koristiti obe vrednosti u podešavanju veličine prinosa na obim. Na primer, usvajanjem $(L = 0.8,\ U = 1.2)$ znači da se prinos na obim može smanjivati najviše sa proporcijom 0.8, a povećavati – sa proporcijom 1.2. Efikasnost modela nije veća od efikasnosti odgovarajućeg BCC modela. Šta više, za svaku DMU, efikasnosti navedenih modela zadovoljavaju: $\theta^*_{CCR} \le \theta^*_{IRS},\ \theta^*_{DRS}, \theta^*_{GRS} \le \theta^*_{BCC}$.

4.1.2. Ekonomija obima poslovanja u CCR modelima

U DEA analizama CCR modeli se u ekonomiji obima, po pravilu, karakterišu konstantnim prinosom na obim. To je tehnički korektno, ali do izvesnog stepena, budući i da se taj model može koristiti i kada je prinos na obim rastućeg ili opadajućeg karaktera.

Postavljeni CCR modeli ulazne orijentacije u obavijajućoj (primalnoj) i težinskoj (dualnoj) formi (ponovo):

$$\min_{\theta,\lambda}\ \theta, \text{ p.o. } \theta x_o - X\lambda \ge 0, \quad -y_o + Y\lambda \ge 0, \quad \lambda \ge 0 \qquad (3.23) \Rightarrow (4.10)$$

$$\max_{u,v}\ uy_o, \text{ p.o. } vx_o = 1, -vX + uY \le 0, v \ge 0,\ u \ge 0 \qquad (3.22) \Rightarrow (4.11)$$

razlikuju se od BCC analognih programa: obavijajuća forma ne sadrži kao ograničenje uslov konveksnosti $e\lambda = 1$, dok u težinskoj formi parametar u_0 nije prisutan.

Uslovi CCR-efikasnosti $DMU_j = DMU_o$

$$(\theta^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (1,\ \lambda^*,\ 0,\ 0) \quad \Rightarrow (i)\ \theta^* = 1, (ii)\ s^* = \begin{bmatrix} s^{-*} \\ s^{+*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (3.26) \Rightarrow (4.12)$$

su identični uslovima BCC-efikasnosti, a projektne formule (4.7) su identične za oba obavijajuća modela.

Uz pretpostavku da je tačka $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ na CCR granici efikasnosti, karakter RTS-a u toj tački je odredjen saglasno [Banker and Thrall, 1992]:

IRS $\Leftrightarrow$ $e\lambda^* < 1$ za sva optimalna rešenja (4.13a)

DRS $\Leftrightarrow$ $e\lambda^* > 1$ za sva optimalna rešenja (4.13b)

CRS $\Leftrightarrow$ $e\lambda^* = 1$ za neko optimalno rešenje (4.13c)

Neka je optimum dostignut, u ovoj analizi, za $e\lambda^* > 1$. Saglasno [Banker et al. 1996], veličina i znak uslova u svim optimalnim rešenjima može se ispitati korišćenjem sledećeg modela:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j - \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_i^- + \sum_{r=1}^{s} \hat{s}_r^+ \right)$$

$$\text{p.o.} \quad \theta^* x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j x_{ij} = \hat{s}_i^-, \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{4.14}$$

$$-y_{ro} + \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j y_{rj} = \hat{s}_r^+, \quad r = 1,2,\ldots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j \geq 1$$

$$\hat{\lambda}_j, \hat{s}_i^-, \hat{s}_r^+ \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad r = 1,2,\ldots,s$$

gde je θ^* sračunato u prvoj fazi optimizacije, kao u (4.7). Projektne formule

$$\theta^* x_o - \hat{s}^{-*} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* x_j \qquad \text{i} \qquad y_o + \hat{s}^{+*} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j^* y_j \tag{4.15}$$

definišu koordinate efikasne tačke dobijene iz članova na levoj strani poslednjih relacija, kao nenegativnu kombinaciju DMU na desnoj strani. DMU na desnoj strani za koje je $\hat{\lambda}_j^* > 0$ konstituišu efikasne članove referentnog skupa korišćenom u evaluaciji DMU_o. Efikasna tačka reprezentovana izrazima na levoj strani (4.15) je iskazana u funkciji DMU koji definišu deo granice efikasnosti.

Postavljeni model (4.14), za θ^* sračunato u prvoj fazi optimizacije, formulisan je za $e\lambda^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* > 1$. Slučaj $e\lambda^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* = 1$ ne zahteva dalju analizu, s obzirom da je konstantan prinos na obim – uslov (4.13c) – dostignut u efikasnoj tački (4.15). I na kraju, uslov $e\lambda^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* < 1$ reprezentovan je u modelu (4.14) ograničenjem $\sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j \leq 1$, sa kriterijumskom funkcijom

$$\max \sum_{j=1}^{n} \hat{\lambda}_j + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{s}_i^- + \sum_{r=1}^{s} \hat{s}_r^+\right).$$

Analiza ekonomije poslovanja, najpre BCC modela, je pokazala da BCC modeli evaluiraju tehničku (i miksovanu) efikasnost korišćenjem obavijajućeg (primalnog) modela, a zatim, korišćenjem težinskog (dualnog) modela, odredjuju efikasnost ekonomije poslovanja. CCR modeli simultano evaluiraju oba tipa efikasnosti korišćenjem samo obavijajuće forme, naravno uz korišćenje i uslova (4.13). U analizi ekonomije poslovanja, iz prethodnog sledi, treba prednost dati CCR modelima, iz više razloga. Prvo, CCR modeli imaju manji broj ograničenja i numerički algoritmi sračunavanja su efikasniji. Drugo, rešenja se direktno koriste u formiranju projektnih formula, na primer, (4.7) i (4.15), kao i modela optimizacije (4.14).

Saglasno analizi, relacije koje povezuju karakteristike ekonomije poslovanja BCC modela i njemu odgovarajućeg CCR modela su:

$u_0^* < 0$, za sva opt. rešenja BCC $\Leftrightarrow$ $e\hat{\lambda}^* < 1$ za sva opt. rešenja CCR (4.15a)

$u_0^* > 0$, za sva opt. rešenja BCC $\Leftrightarrow$ $e\hat{\lambda}^* > 1$ za sva opt. rešenja CCR (4.15b)

$u_0^* = 0$, za neko opt. rešenje BCC $\Leftrightarrow$ $e\hat{\lambda}^* = 1$ za neko opt. rešenje CCR (4.15c)

Kao direktna posledica prethodne analize, u relacijama (4.15a,b,c) može svuda da stoji, umesto $e\hat{\lambda}^* < 1$, $e\hat{\lambda}^* > 1$ ili $e\hat{\lambda}^* = 1$, redom $e\lambda^* < 1$, $e\lambda^* > 1$ ili $e\lambda^* = 1$.

4.1.3. Ekonomija obima poslovanja u ADD modelima

Umesto modela (3.73) i (3.74), uveden je aditivni model u prisustvu težinskih koeficijenata u kriterijumskoj funkciji (primalne) obavijajuće forme u skalarnom obliku [Charnes et al 1985; Banker et al. 2004]:

$$\max_{\lambda,s^-,s^+} \left(\sum_{i=1}^{m} g_i^- s_i^- + \sum_{r=1}^{s} g_r^+ s_r^+ \right)$$

$$\text{p.o.} \quad x_{io} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} = s_i^-, \; i = 1,2,\dots,m \tag{4.15d}$$

$$-y_{ro} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} = s_r^+, \; r = 1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,n, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad r = 1,2,\dots,s$$

kao i njenog težinskog duala

$$\min_{v,u,u_0} \left(\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} + u_0 \right) \tag{4.16}$$

$$\text{p.o.} \quad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + u_0 \geq 0, \quad j = 1,2,\dots,n$$

$$v_i \geq g_i^-, \quad u_r \geq g_r^+, \quad u_0 \in R, \quad i = 1,2,\dots,m, \quad r = 1,2,\dots,s$$

Težinski vektor koeficijenata pridružen je u kriterijumskoj funkciji envelopment forme izravnavajućem vektoru, čiji je izbor uslovljen subjektivnim ili objektivnim faktorima. Po pravilu, izbor se vrši saglasno $g_i^- = 1/R_l^-$ i $g_r^+ = 1/R_r^+$ gde su R_l^- i R_r^+, redom, opsezi promene *i*-tog ulza i *r*-tog izlaza. Time se postiže i bezdimenzionalnost članova kriterijumske funkcije, pa je aditivni model jedinično invarijantan u odnosu na merne jedinice izravnavajućih promenljivih (za $g_i^- = 1$ i

$g_r^+ = 1$, postavljeni modeli su identični modelima (3.71), odnosno (3.72), čiji je prikaz dat u ekvivalentnoj vektorskoj formi).

Optimalno rešenje obavijajućeg modela (4.15d) oblika $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*})$ vodi u ADD-efikasan DMU_0 akko je $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (\lambda^*,\ 0,\ 0)$. Konačno, *ADD projektnim formulama* $\bar{x}_0 = x_0 - s^{-*}$, $\bar{y}_0 = y_0 + s^{+*}$ aktivnost $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ (tačka na granici efikasnosti u evaluaciji DMU_0) je ADD-efikasna.

Uočavajući razliku izmedju kriterijumskih funkcija modela (4.6) i (4.16), uključujući i promenu od $-\bar{u}_0$ na $+\bar{u}_0$, program (4.9) se modifikuje u program

$$\begin{aligned}
&\max \quad \bar{u}_0 \\
&\text{p.o.} \quad -\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \bar{u}_0 \le 0, \quad j = 1,2,\ldots,n, \quad j \ne o \\
&\qquad -\sum_{i=1}^{m} v_i \bar{x}_{io} + \sum_{r=1}^{s} u_r \bar{y}_{ro} - \bar{u}_0 = 0, \quad j = o \qquad\qquad (4.17) \\
&\qquad u_r \ge g_r^+, \quad v_i \ge g_i^+, \quad r = 1,2,\ldots,s, \quad i = 1,2,\ldots,m, \quad \bar{u}_o \le 0
\end{aligned}$$

Neka je sada $u_0^* < 0$ dobijeno optimizacijom (4.16). Stoga, ako je $\bar{u}_0^* < 0$ maksimum (4.17), saglasno (4.8a) odredjena je IRS ekonomija obima aktivnosti $(\bar{x}_o, \bar{y}_o)$. Ukoliko je $\bar{u}_0^* = 0$, primenjuje se (4.8c), prinos na obim je konstantan u tački $(\bar{x}_o, \bar{y}_o)$ na granici efikasnosti. Ako je optimizacija (u prvoj fazi) programa (4.16) rezultovala vrednošću $u_0^* > 0$, kriterijumska funkcija i ograničenje na $\bar{u}_0$ u promeni modela (4.17) se jednostavno postavljaju.

4.1.4. Referentni skup i ekonomija obima poslovanja

Neka se, najpre, razmatra (ulazno orijentisani) BCC model, za koji je produkcioni skup dat u relaciji (4.18), a obavijajuća i težinska forma modela identične datim u relacijama (3.59), odnosno, (3.60):

$$F_{BCC} = \{(x,y)\,|\; x \geq X\lambda,\; y \leq Y\lambda,\; \lambda \geq 0 \;\wedge\; e\lambda = 1\} \qquad (3.58) \Rightarrow (4.18)$$

Zatim naglašavamo [Banker et al. 2004]:

– $DMU_j = DMU_o$ je BCC-efikasna ako egzistira optimalno rešenje takvo da je $(\theta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (1,\ \lambda^*,\ 0,\ 0)$. U protivnom, DMU_o je BCC-neefikasna.

– Ako je $DMU_j = DMU_o$ BCC-efikasna, tada egzistira optimalno rešenje $(v^*,\ u^*,\ u_0^*)$ sa osobinom $(v^* > 0,\ u^* > 0,\ u_0^*)$.

– Za BCC-neefikasan DMU_o, referentni skup zasnovan na optimalnom rešenju λ^* ima oblik (svaka DMU koja pripada referentnom skupu je BCC-efikasna):

$$E_0 = \{j\,|\; \lambda_j^* > 0\}, \quad j \in \{1,2,\ldots,n\} \qquad (3.61) \Rightarrow (4.19)$$

tako da optimalno rešenje zadovoljava:

$$\theta_B^* x_0 = \sum_{j \in E_0} x_j \lambda_j^* + s^{-*} \quad \text{i} \quad y_0 = \sum_{j \in E_0} y_j \lambda_j^* - s^{+*} \qquad (3.62) \Rightarrow (4.20)$$

– Nova poboljšana aktivnost $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, saglasno BCC projektnim formulama (3.63) je BCC-efikasna.

Budući da je aktivnost $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ BCC-efikasna, egzistira optimalni vektor $(v^*,\ u^*,\ u_0^*)$ takav da je

$u^*\overline{y}_o - u_o^* = 1$ (hiperravan – relacija (4.4)) (4.21a)

$v^*\overline{x}_o = 1, \quad -v^*X + u^*Y - u_0^*e \le 0, \quad v^* > 0,\ u^* > 0$ (4.21b)

Za svako $j \in E_0$ (E_0 je referentni skup BCC-neefikasne $DMU_j = DMU_o$, odnosno neefikasne aktivnosti (x_0, y_0)) važi:

$-v^*x_j + u^*y_j - u_0^* \le 0$ (4.22)

Iz uslova $u^*\overline{y}_o - u_o^* = 1$ i $v^*\overline{x}_o = 1$ sledi: $-v^*\overline{x}_o + u^*\overline{y}_o - u_0^* = 0$ (4.23)

Smenom $\overline{x}_0 = \sum_{j \in E_0} x_j \lambda_j^*$ i $\overline{y}_0 = \sum_{j \in E_0} y_j \lambda_j^*$, poslednja relacija se svodi na oblik:

$-v^* \sum_{j \in E_0} x_j \lambda_j^* + u^* \sum_{j \in E_0} y_j \lambda_j^* - u_0^* = 0$ (4.24)

S obzirom na uslov konveksnosti $\sum_{j \in E_0} \lambda_j^* = 1$, (4.24) se transformiše u jednačinu

$\sum_{j \in E_0} \lambda_j^* (-v^*x_j + u^*y_j - u_0^*) = 0$ (4.25)

iz koje, s obzirom na (4.22) i uslov konveksnosti $\sum_{j \in E_0} \lambda_j^* = 1$, sledi

$-v^*x_j + u^*y_j - u_0^* = 0$, za svako $j \in E_0$ (4.26)

gde je $(v^*,\ u^*,\ u_0^*)$ vektor koeficijenata potporne hiperravni za svaku tačku (x_j, y_j) i svako $j \in E_0$. Neka je $t_j = 1/v^*x_j\ (>0)$, tada je $(t_jv^*,\ t_ju^*,\ t_ju_0^*)$ optimalno rešenje težinske forme za $j \in E_0$ (sledi iz osobine koeficijenata: $(t_ju^*)y_j - (t_ju_0^*) = 1$).

Pretpostavimo da E_0 sadrži IRS DMU *a* i DRS DMU *b*. Za DMU *a* u_0^* mora biti negativno, za DMU *b* – u_0^* mora biti pozitivno, što vodi zaključku: Referentni skup E_0 BCC-neefikasne $DMU_o\,(x_0,y_0)$, koji je odredjen sa (4.21), ne sadrži istovremeno IRS i DRS DMU.

Iz prethodnog rezultata neposredno sledi: Neka je E_0 referentni skup BCC-neefikasne $DMU_o\,(x_0,y_0)$. Članovi skupa E_0 čine jednu od sledećih kombinacija BCC-efikasnih DMU:

(1) Svi članovi skupa su IRS,
(2) Svi članovi skupa su IRS i CRS,
(3) Svi članovi skupa su CRS,
(4) Svi članovi skupa su CRS i DRS,
(5) Svi članovi skupa su DRS.

Saglasno postavljenim opservacijama, dalja analiza karaktera prinosa na obim se sastoji u sledećem: Neka je BCC projektovana aktivnost $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ BCC-neefikasne $DMU_o\,(x_0,y_0)$ sa referentnim skupom E_0. Tada $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ pripada:

(a) IRS , ako E_0 sadrži DMU iz skupa (1) ili skupa (2), (b) DRS, ako E_0 sadrži DMU iz skupa (4) ili (5).

Dokaz se temelji na činjenici da u slučajevina (1) ili (2) E_0 sadrži najmanje jednu DMU sa IRS karakteristikama, sa potpornom hiperravni u tački $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$, koja je i potporna hiperravan IRS DMU. Gornja granica u_0^* mora biti negativna. Iz istih razloga, u slučajevima (4) ili (5), projektovana aktivnost je DRS.

U slučaju (3), karakter prinosa na obim $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ ne može se identifikovati direktno iz referentnog skupa. U tom slučaju, $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, kao konveksna kombinacija BCC-efikasnih DMU, može posedovati IRS, CRS ili DRS karakteristike.

Korišćenjem prethodnih rezultata, može se definisati procedura u identifikaciji RTS karakteristika $DMU_o\,(x_0, y_0)$: Najpre se reši obavijajuća forma (ulazno orijentisanog) BCC modela (3.59):

(A) Ako je $DMU_o\,(x_0, y_0)$ BCC-efikasna, može se, u isto vreme, odrediti optimalna vrednost u_0^* u težinskoj formi (3.60), kao vrednost optimalne dualne promenljive pridružene konveksnom ograničenju $e\lambda = 1$ envelopment forme modela.

(A1) Ako je $u_0^* = 0$, može se identifikovati CRS u (x_0, y_0) na osnovu (4.8c).

(A2) Ako je $u_0^* < (>)\ 0$, treba rešiti sledeće linearne programe u težinskoj i obavijajućoj formi:

$$\begin{aligned}
&\max\ \ (\min)\ u_0 \\
&\text{p.o.}\ \ vx_o = 1,\ \ uy_o - u_0 = 1 \\
&-vX + uY - u_0 e \le 0 \\
&\qquad\qquad v \ge 0,\ u \ge 0,\ u_0 \in R
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
&\max\ \ (\min)\ z = \theta - \lambda_o \quad (\lambda_o - \theta) \\
&\text{p.o.}\ \ \theta x_o - X\lambda \ge 0 \\
&-\lambda_o y_o + Y\lambda \ge 0 \\
&-e\lambda + \lambda_o = 1 \qquad (e\lambda - \lambda_o = 1) \\
&\qquad \lambda \ge 0,\ \ \theta,\ \lambda_o \in R
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Oba linearna programa poseduju ista optimalna rešenja ako obavijajuća forma ima konačni minimum (maksimum). Ako težinska forma poseduje neograničenu vrednost (∞, za max, odnosno $-\infty$, za min), obavijajuća forma nema dopustivih rešenja. Neka je optimalna vrednost težinske forme $\overline{u}_0^*$ ($\underline{u}_0^*$) uključujući ∞ ($-\infty$). Tada, na osnovu (4.8) važi:

- Ako je $\overline{u}_0^* \geq 0$ ($\underline{u}_0^* \leq 0$), $DMU_o\,(x_0, y_0)$ ima CRS,
- Ako je $\overline{u}_0^* < 0$ ($\underline{u}_0^* > 0$), $DMU_o\,(x_0, y_0)$ ima IRS (DRS).

(B) Ako je $DMU_o\,(x_0, y_0)$ BCC-neefikasna, tada se RTS karakteristike projektovane $DMU\,(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ mogu sagledati na osnovu referentnog skupa E_0 u slučajevima (B1) i (B2), a na slučaj (B3) primenjuje se procedura pod (A), saglasno:

(B1) Projektovana DMU$(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ ima IRS, ako se referentni skup neefikasne $DMU_o\,(x_0, y_0)$ sastoji od ili IRS DMU ili IRS i CRS DMU,

(B2) Projektovana DMU$(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ ima DRS, ako se referentni skup neefikasne $DMU_o\,(x_0, y_0)$ sastoji od ili DRS DMU ili DRS i CRS DMU,

(B3) Ako se referentni skup neefikasne $DMU_o\,(x_0, y_0)$ sastoji samo od CRS DMU, primenjuje se procedura pod (A) u identifikaciji RTS karakteristika projektovane DMU $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$.

Značaj prethodne procedure se ogleda u činjenici da u identifikaciji RTS karakteristika BCC-neefikasnih DMU pod tačkama (B1) i (B2) ne zahteva dodatnih numeričkih sračunavanja.

Primena prethodne analize na izlazno orijentisani BCC model, u oznaci BCCout, je praktično direktna i neposredna. Naime, model je opisan u obavijajućoj (3.65) i težinskoj formi (3.66).

$DMU_j = DMU_o\ (x_0, y_0)$ je BCCout efikasna ako egzistira optimalno rešenje takvo da je $(\eta_B^*, \lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (1,\ \lambda^*,\ 0,\ 0)$, odnosno ako je $DMU_j = DMU_o\ (x_0, y_0)$ BCC-efikasna. U protivnom, $DMU_o\ (x_0, y_0)$ je BCCout-neefikasna.

RTS karakteristike BCCout-efikasnih DMU su iste kao i u BCC analizi. Za BCCout-neefikasnu $DMU_o\ (x_0, y_0)$, projektne formule aktivnosti $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ su:

$$\bar{x}_o = x_o - s^-, \quad \bar{y}_o = \eta_B^* y_o + s^+ \tag{4.28}$$

tako da su RTS karakteristike ove aktivnosti, generalno, različite od BCC projektne aktivnosti. Korišćenjem referentnog skupa, paralelno prethodnoj analizi, može se izvršiti identifikacija njenih RTS karakteristika.

Efikasnost $DMU_j = DMU_o\ (x_o, y_o)$ aditivnog modela se identifikuje rešavanjem linearnog obavijajućeg programa (3.71).

$DMU_j = DMU_o\ (x_o, y_o)$ je ADD-efikasan akko je $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) = (\lambda^*,\ 0,\ 0)$, odnosno $DMU_j = DMU_o\ (x_o, y_o)$ je ADD-efikasan akko je BCC-efikasan. RTS karakteristike efikasnih DMU su identične BCC karakteristikama. U slučaju ADD-neefikasnosti, tj. za $(\lambda^*, s^{-*}, s^{+*}) \neq (\lambda^*,\ 0,\ 0)$, projektne formule aktivnosti $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ su:

$$\bar{x}_o = x_o - s^-, \quad \bar{y}_o = y_o + s^+ \tag{4.29}$$

i njene RTS karakteristike se, ponovo, identifikaju na osnovu referentnog skupa neefikasne $DMU_j = DMU_o\ (x_o, y_o)$.

FGL (Fare, Grosskopf and Lovell) prilaz u radu [Fare et al. 1994] je dvofazni ili trofazni metod estimacije RTS-a. U prvoj fazi, koriste se BCC i CCR modeli u sračunavanju optimalnih vrednosti θ_B^* i θ_C^* kriterijumskih funkcija i definiše efiksnost obima θ_S^* na osnovu $\theta_S^* = \theta_C^* / \theta_B^*$. Vrednost $\theta_S^* = 1$ indicira CRS, dok vrednost $\theta_S^* < 1$ znači IRS ili DRS. U drugoj fazi, kada je $\theta_S^* < 1$, rešava se linearni program koji odredjuje da li se neefikasnost obima pridružuje IRS ili DRS DMU:

$$\theta_E^* = \min \ \theta_E$$

$$\begin{aligned} \text{p.o.} \quad & y_o - Y\lambda + s^+ = 0 \\ & -\theta_E x_o + X\lambda + s^- = 0 \\ & e\lambda = 1 \\ & \lambda,\ s^-,\ s^+ \geq 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Ukoliko je $\theta_E^* < 1$ i $\theta_E^* = \theta_B^*$, DMU poseduje IRS karakteristike, odnosno za $\theta_E^* < 1$ i $\theta_E^* < \theta_B^*$, radi se o DMU DRS.

Ovaj metod zahteva rešavanje tri linearna programa (BCC, CCR i (4.30)) za IRS i DRS DMU. Ovaj prilaz je pojednostavljen primenom procedure detaljno izložene u BCC analizi, osim u slučaju $\theta_S^* < 1$ i $\theta_B^* = 1$, kada je potrebno rešavati program (4.30). Dalja analiza i proširenja ovog prolaza mogu se naći u [Fare et al. 1994; Seiford and Zhu, 1999].

Nadalje, u radu [Banker et al. 1996] u prvoj fazi rešava se CCR model i ako je $e\lambda^* = 1$, DMU poseduje CRS, a ako je $e\lambda^* < 1$, rešava se sledeći linearni program u estimaciji CRS ili IRS karakteristika DMU:

$$z^* = \max \ e\lambda$$

$$\text{p.o.} \quad \theta_C^* x_o = X\lambda + s^-, \quad y_o = Y\lambda - s^+, \quad e\lambda \leq 1 \ \text{ i } \ \lambda,\ s^-,\ s^+ \geq 0 \tag{4.31}$$

gde je θ_C^* optimalna vrednost kriterijumske funkcije CCR modela. Ako je $z^* = 1$, DMU poseduje CRS, odnosno za $z^* < 1$, DMU poseduje IRS. Slučaj $e\lambda^* > 1$ u analizi CCR modela pretpostavlja modifikaciju programa (4.31). Metod zahteva dva sračunavanja linearnih programa, za $e\lambda^* \neq 1$ i usmeren je na analizu RTS karakteristika i informacija u odnosu na CCR model. Analiza BCC projektne DMU nije eksplicitno data.

4.2. Dekompozicija tehničke efikasnosti

*S*igurno je od visokog interesa, ekonomske ili neke druge prirode, detektovati izvore neefikasnosti u kojima DMU funkcioniše. Neefikasnost može biti posledica neadekvatnih strateških prilaza i nepovoljnih uslova pod kojima DMU operiše u produkciji izlaza na osnovu njegovih ulaza.

U tom smislu, uporednom analizom skora efikasnosti (ulazno orijentisanih) CCR i BCC modela mogu se postaviti odnosi operativnosti DMU u minimizaciji troškova proizvodnje [Cooper et al. 2007]. Produkcioni skup konstantnog prinosa na obim CCR modela pretpostavlja radijalnu ekspanziju izlaza i radijalnu redukciju ulaza svih opserviranih DMU, sa njihovom mogućom nenegativnom kombinacijom, tako da se CCR skor efikasnosti naziva *globalnom tehničkom efikasnošću* (*global technical efficiency*). S druge strane, BCC model pretpostavlja konveksnu kombinaciju opserviranih DMU formiranih produkcionim skupom, tako da se BCC skor efikasnosti može nazvati *lokalnom čistom tehničkom efikasnošću* (*local pure technical efficiency*). Ako je DMU potpuno efikasan (100%) i po CCR i po BCC indeksu efikasnosti, DMU funkcioniše sa *najproduktivnijom veličinom obima* (*most productive scale size*) poslovanja. Ako DMU ima punu BCC efikasnost, ali manji indeks CCR efikasnosti od mogućeg, DMU je lokalno, ali ne i globalno efikasna, saglasno njenoj veličini obima produkcije. Iz tih razloga je neophodno kvalifikovati DMU kroz *efikasnost obima* (*SE: scale efficiency*) količnikom CCR i BCC efikasnosti.

Zasnovana na CCR i BCC skoru efikasnosti, efikasnost obima SE je definisana količnikom:

$$SE = \frac{\theta^*_{CCR}}{\theta^*_{BCC}} \quad (SE \leq 1) \tag{4.32}$$

Za BCC efikasan DMU sa CRS karakteristikama, tj. u uslovima funkcionisanja DMU sa najproduktivnijom veličinom obima, efikasnost obima je jednaka 1: SE=1. CCR indeks efikasnosti se naziva (globalnom) *tehničkom efikasnošću* (TE: technical efficiency), dok, s druge strane, BCC iskazuje (lokalnu) *čistu tehničku efikasnost*

(*PTE: pure technical efficiency*) u uslovima varijabilnog prinosa na obim. Drugim rečima, relacija (4.32) demonstrira dekompoziciju efikasnosti:

$$\theta^*_{CCR} = \theta^*_{BCC}\ x\ SE \quad \Rightarrow \quad TE = PTE\ x\ SE \tag{4.33}$$

Dekompozicija, koja je jedinstvena, definiše izvore neefikasnosti, tj. izvor neefikasnosti impliciran neefikasnošću operacija (PTE) i izvor neefikasnosti u uslovima gubitaka iskazanih kroz efikasnost obima ili i jedno i drugo.

S druge strane, pored radijalnog merenja, može se koristiti i neradijalno merenje efikasnosti, u nazivu SBM. Usmeravanjem na SBM ulaznu orijentaciju, u kriterijumsku funkciju (3.82) unet je samo ulazna izravnavajuća s^-. Neka je ulazno orijentisani SBM model formulisan u obliku:

$$\min\ \rho_{in} = 1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{s_i^-}{x_{io}}, \quad \text{p.o.}\ \ x_o = X\lambda + s^-,\ y_o = Y\lambda - s^+,\ \lambda,\ s^-, s^+ \ge 0 \tag{4.34}$$

čije je optimalno rešenje $(\rho^*_{in},\ \lambda^*,\ s^{-*}, s^{+*})$. Tada je $\rho^*_{in} \le \theta^*_{CCR}$, pri čemu znak jednakosti važi akko ulazno orijentisani CCR model poseduje ulazne izravnavajuće promenljive jednake nuli u svim optimalnim rešenjima. Striktna nejednakost je u važnosti akko CCR rešenje „otkriva“ ulaznu miksovanu neefikasnost (videti poglavlje 3.5.2).

Miksovana efikasnost je definisana u vidu količnika

$$MIX = \frac{\rho^*_{in}}{\theta^*_{CCR}} \quad (MIX \le 1) \tag{4.35}$$

čime je izvršena dekompozicija neradijalne efikasnosti na radijalnu i miksovanu efikasnost: [ulazno orijentisana SBM] = [radijalna efik. TE] x [miksovana efik. MIX], odnosno neradijalna tehnička efikasnost ρ^*_{in} je dekomponovana saglasno relaciji: $\rho^*_{in} = [MIX]x[PTE]x[SE]$. Dekompozicija je jedinstvena i interpretira izvore neefikasnosti svake neradijalne neefikasnosti DMU.

5. DEA modeli sportskih ekonomija

Niz empirijskih studija i teorijskih radova ekonomske analize performansi sportskih organizacionih jedinica kao entiteta profesionalnih sportova (na primer: ragbija, bejzbola i košarke, u ovoj deceniji, posebno, i fudbala), impliciran je:

- Visokim finansijskim značajem i svojstvima sportskih ekonomija, na koja je ukazano mnogo ranije [Neale, 1964],
- Emocionalnim efektima i, konačno,
- Dostupnim pouzdanim statističkim podacima (tehnički indikatori igre)

Prema vrsti metoda primenjenih u merenju efikasnosti, reference u ovoj oblasti istraživanja, generalno, mogu se razvrstati u tri dominantne grupe:

- radovi koji način merenja efikasnosti baziraju na analizi stohastičkih granica - pristup analizi efikasnosti preko parametarskih metoda, odnosno ekonometrijskog modeliranja granica efikasnosti (najčešće korišćenjem neke iz skupa regresionih tehnika) [Rottenberg, 1956; Scully, 1974; Zak et al. 1979; Scott et al. 1985; Carmichael and Thomas, 1995; Fizel and D'Itri, 1996; Carmichael et al. 2000; Dawson et al. 2000a; Dawson et al. 2000b; Hadley et al. 2000],

- radovi koji u oceni efikasnosti koriste neparametarski pristup, konkretno, DEA metodu [Sexton and Lewis, 2003; Garcia-Sanchez, 2007; Bosca et al. 2009; Sala-Garrido et al. 2009;],

- radovi koji se baziraju na istovremenoj primeni i parametarskih i neparametarskih metoda [Sueyoshi et al. 1999; Haas, 2003; Haas et al. 2004].

S obzirom da je sportska produkcija višedimenzionalna pojava okarakterisana dešavanjima na terenu, ali i van njega, raznolikost parametara koji učestvuju u modelima sportskih ekonomija je velika. Klasifikacija radova prema prirodi podataka koji se koriste u analizi efikasnosti DMU upućuje na radove koji u fokusu imaju isključivo sportske (tehničke) indikatore [Carmichael et al. 2000; Garcia – Sanchez, 2007; Bosca et al. 2009; Sala-Garrido et al. 2009], radovi koji razmatraju finansijski aspekt sportskih ekonomija, uzimajući u obzir promenljive ekonomske prirode [Scott et al. 1985; Haas, 2003; Haas et al. 2004]i radovi koji tretiraju oba aspekta integralno [Scully, 1974; Fizel and D'Itri, 1996; Sexton and Lewis, 2003] . Finansijske parametre u sportu, posebno profesionalnom fudbalu, treba uzeti sa izvesnim otklonom, s obzirom da su isti često teško dostupni ili vrlo nepouzdani, posebno kada su u pitanju podaci o visini primanja igrača i trenera [Sala-Garrido et al. 2009]. S druge strane, u ekonomskom smislu, visina godišnjeg budžeta mora biti direktno srazmerna usvojenim sportskim titulama i sportskim trofejima, učešćem u internacionalnim takmičenjima, što, nadalje, vodi prestižu i, naravno, visokim profitima.

Podela referenci u oblasti istraživanja moguća je i prema potkategorijama uslovljenim konkretnim izborom ulaznih i izlaznih veličina korisćenih u analizi, orijentaciji modela i sl. [Thanasis, 2010]. Takođe, moguće je napraviti razliku u analizama i u odnosu na to da li se aplikacije u sportskoj ekonomiji koncentrišu na pitanja individualne efikasnosti (na primer statistike trčanja u profesionalnom bejzbolu, u cilju merenja performansi individualnih igrača) [Anderson and Sharp, 1997; Sueyoshi et al. 1999] ili se bave analizom efikasnosti na nivou tima [Haas 2003; Haas et al, 2004; Garcia-Sanchez, 2007; Bosca et al. 2009; Sala-Garido, 2009].

5.1. Višestepeni DEA modeli

Sportske produkcione jedinice izdvaja specifičnost da njihov proces produkcije, za razliku od produkcije kod jedinica nesportskih organizacija, zahteva prisustvo protivnika [Neale, 1964]. Doprinos ekonomskom značaju sportske, u ovom razmatranju, fudbalske industrije, daje i emocionalna snaga navijača (*socijalna efektivnost*), pojačana nivoom uspeha (*atletska efektivnost*) fudbalskog tima. Dekompozicija modela sportskih ekonomija, odnosno „razdvajanje“

ponašanja tima, saglasno izloženom, može biti izvršena na tri dominantne komponente [Garcia-Sanchez, 2007]:

– Operativne ili radne efikasnosti,
– Atletske ili operativne efektivnosti i
– Socijalne efektivnosti

Ovakav pristup ima za cilj sagledavanje realne snage i identifikaciju „slabosti“ fudbalskog tima.

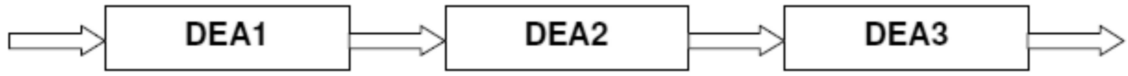
Operativna ili radna efikasnost fudbalskih timova, koji se odlikuju izvesnim nivoom sposobnosti i veštinama merenih *ex post*, ogleda se u napadačkim akcijama u kojima se postižu golovi i defanzivnim akcijama u kojima treba sprečiti igrače protivničkog tima da postižu golove. Dakle, može se govoriti o odredjivanju efikasnosti napada – koja odredjuje odnos veština igrača i broja postignutih priznatih golova (broj postignutih golova treba maksimizirati) – i efikasnosti odbrane – koja odredjuje odnos sposobnosti igrača odbrane i inverzne vrednosti priznatih primljenih golova (broj primljenih golova, jasno, treba minimizirati).

Korišćenjem tehničkih indikatora fudbalske igre, estimirana tehnička efikasnost odredjuje odnos uloženih resursa i postignutih rezultata (u fizičkim jedinicama). Čista tehnička efikasnost, kao deo tehničke efikasnosti, je direktna funkcija tehničkih koncepata igre, odnosno reprezentuje način korišćenja ulaza u produkciji izlaza. Efikasnost obima, kao drugi deo tehničke efikasnosti, je reprezent tehnologije produkcije, tj. njenih dimenzija i radne veličine, determinišući ekonomiju obima poslovanja (konstantan ili varijabilni prinos na obim) produkcione funkcije. Različiti nivoi produktivnosti napada i odbrana protivničkih timova, saglasno klasifikaciji efikasnosti, su rezultat razlika u kvalitetu menadžmenta ili efikasnosti organizacije resursa, što je dato čistom tehničkom efikasnošću komparacijom timova čiji igrači poseduju identične tehničke veštine (ulaze) i neadekvatnošću radne veličine tima (koja odražava sastav tima čiji kvalitet, generalno, zavisi od dopustivog budžeta za „upis“ igrača) reprezentovane efikasnošću obima.

Budući da akumulisani bodovi određuju konačan plasman tima u ligaškom takmičenju ili kvalifikacinom ciklusu (balans odnosno veza izmedju primljenih i datih golova odredjuje pobedu, nerešen rezltat ili poraz), u ekonomskom smislu ovaj rezultat korespondira operativnoj ili atletskoj efektivnosti tima. Atletska efektivnost, realno, determiniše benefit realizovan postignutim pobedama, kao rezultat efikasnosti u napadu i odbrani koju je fudbalski tim pokazao na terenu u toku ligaške sezone ili kvalifikacionog cilusa takmičenja. Rezultati analize ove efikasnosti su direktna funkcija značaja tehničkih aspekata igre, napada ili odbrane, u realizaciji boljeg plasmana u okviru takmičenja [Garcia-Sanchez, 2007].

Učešće tima u višim nacionalnim ili značajnim medjunarodnim takmičenjima ima direktan uticaj na prodaju TV prava, trgovinu, sponzorstvo i prodaju karata, što upućuje da konačni plasman tima favorizuje (komercijalne) prihode iz fudbala kao sporta. Komercijalni prihodi su, u manjoj ili većoj meri, uslovljeni brojem navijača koje neki fudbalski tim ima, a broj gledalaca po utakmici se „pretvara“ u najbolju zamenu za „predstavljanje“ konačnog ishoda fudbalske utakmice ili *socijalnog izlaza.* Emotivni efekat tima predstavljen brojem onih koji ga podržavaju definiše socijalnu efektivnost (ovaj broj je rezultat tehničkih veština, talenta igrača, efikasnosti trenera s obzirom na stil igre, sposobnosti tima da svoje veštine pretvori u golove, a njih u pobede, tj. operativne efektivnosti).

$DMU_j, \ j = 1,2,\ldots,n$



$x_{ij}, \ i = 1,2,\ldots,m$ $\quad z_{dj}, \ d = 1,2,\ldots,D$ $\quad w_{ej}, \ e = 1,2,\ldots,E$ $\quad y_{rj}, \ r = 1,2,\ldots,s$

Sl.5.1. Višestepeni (trostepeni) DEA model sportskih ekonomija

Prethodnom analizom, zapravo, definisan je trostepeni DEA model, generalno, sportskih ekonomija. Ekonomsko ponašanje tima dekomponovano je na tri komponente, u cilju odredjivanja relativne efikasnosti napada i odbrane, kao i atletske i socijalne efektivnosti svakog tima, i predstavljeno hibridnim modelom u vidu kaskadne sprege tri DEA modela, tako da drugi DEA2 model za ulaze ima izlaze DEA1 modela, dok su ulazi DEA3 modela izlazi DEA2 modela (sl.5.1) [Garcia-Sanchez, 2007].

Neka se, umesto trostepenog DEA modela na sl.5.1, razmatra dvostepeni DEA model (usvaja se $z_{dj} = w_{ej}$, $d = e = 1,2,\ldots,D = E$, nadalje će se koristi oznaka z_{dj}, a blok DEA3 preuzima ulogu bloka DEA2). Zasnovan na CCR modelu, CRS skor efikasnosti θ_j dvostepenog DEA modela i skor efikasnosti θ_j^1 bloka DEA1, kao i skor efikasnosti θ_j^2 bloka DEA2 modela su, redom, odredjeni relacijama:

$$\theta_j = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}}, \quad \theta_j^1 = \frac{\sum_{d=1}^{D} \eta_d z_{dj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \quad \text{i} \quad \theta_j^2 = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{d=1}^{D} \eta_d z_{dj}} \tag{5.1}$$

gde su v_i, η_d i u_r nenegativni nepoznati težinski faktori (koji formiraju odgovarajuće semipozitivne vektor vrste težinskih faktora).

Sračunavanje ukupne efikasnosti, pored evidentnog uslova $\theta_j = \theta_j^1 \theta_j^2$, može biti definisan i kao novi optimizacioni proces $(\sigma_1 + \sigma_2 = 1)$:

$$\max[\sigma_1 \theta_{jo}^1 + \sigma_2 \theta_{jo}^2], \ \text{p.o.} \ \theta_j^1 \le 1, \ \ \theta_j^2 \le 1, \ \ v_i, \ \eta_d, \ u_r \ \ge 0, \ \ j = 1,2,\ldots,n \tag{5.2}$$

koji se može konvertovati u linearni program [Chen et al. 2009]. Slične relacije se mogu postaviti i u analizi BCC modela VRS obima poslovanja.

Od interesa bi bilo postaviti analogne relacije trostepenog DEA modela, ili, ako je to moguće, i u opštem slučaju, višestepenog DEA modela, na primer, za k kaskadno povezanih DEA blokova, gde je $k = 1, 2, \ldots$ realan, ceo pozitivan broj.

5.2. Metodološki aspekti višestepene DEA analize produkcionih jedinica u fudbalu

DEA modeli ekonomske analize, prvi put korišćeni u analizi efikasnosti bejzbol timova [Sexton and Lewis, 2003], trebalo bi da omoguće sagledavanje realnih fudbalskih i ekonomskih vrednosti i identifikuju „slabosti" fudbalskog tima, s obzirom na taktiku njegovog napada i odbrane, efektivnosti ili preciznosti u igri, kao i njegovu socijalnu relevantnost koja je direktno povezana sa sadašnjim i stvaranjem budućih prihoda. Na primer, u prvoj fazi može se talenat igrača iskoristiti da da dva izlaza, jedan pozitivan (postignuti golovi) i drugi negativan (primljeni golovi), koji treba minimizirati, što nezavisno odredjuje efikasnost napada i efikasnost odbrane fudbalskog tima. U drugoj fazi, uvode se obe efikasnosti kao ulazi za dobijanje finalnog izlaza – bodova – koje je tim osvojio na kraju takmičenja, odredjujući značaj svakog od stilova igre, u napadu i odbrani, u atletskoj ili operativnoj efektivnosti. Treća faza, koja za ulaz koristi izlaz (rezultat) prethodnog koraka, dakle, ulaz je atletska efektivnost, imajući u vidu broj gledalaca i ostvareni prihod u ciklusu takmičenja, omogućuje odredjivanje socijalne efektivnosti [Garcia-Sanchez, 2007].

Promenljive u prvoj fazi su ulazni indikatori sposobnosti napada i odbrane, čiji predznaci mogu biti pozitivni i negativni, što vodi estimaciji granice efikasne produkcije napada nezavisno od one za odbranu.

Iz perspektive napada, posedovanje lopte i njeno kretanje putem pasova, driblinga, udaraca na gol..., su aktivne akcije stvaranja šansi za postizanje golova. Statistički, napadi, prolazi u kazneni prostor ispred gola protivnika i udarci ka golu definišu napadačke akcije fudbalskog tima. Na primer, upravo ove tri promenljive mogu biti promenljive ulaza, u kojima je sadržan i relativni značaj vremena u kojem je tim bio u posedu lopte, pokazujući nivo napada tima.

Defanzivno, akcije igrača se posmatraju kao oduzimanje lopte od protivničkog tima, u želji da se, na primer, realizuje novi napad. Ove akcije znače presretanje i sprečavanje protivnika u postizanju golova, dakle, statistika povraćaja poseda lopte i akcije golmana su jasni indikatori navedenih aktivnosti. Ulazi mogu (ali ne moraju) biti prikazani relativizirano, na primer, vremenom poseda lopte protivničkog tima, pokazujući nivo odbrane tima [Bosca et al. 2007].

Dekompozicijom ekonomske analize, izlazne promenljive koje omogućuju trijumf tima, mogu se definisati nezavisno, u vidu pozitivnih izlaza i inverznih negativnih izlaza (umesto, na primer, da je rezultat tima definisan procentom pobeda). Merenja korišćenih izlaza kombinuju produktivnost napada (postizanje golova), sa efikasnošću odbrane (sprečavanje da protivnik postigne gol), pa se kao izlazi mogu koristiti postignuti golovi (broj golova) i inverzni broj primljenih golova (autogolovi se ubrajaju u golove koje je postigao protivnički tim) u toku ciklusa takmičenja.

Ulazne promenljive druge faze su oba indikatora čiste tehničke efikasnosti napada i odbrane, estimirani prethodnom fazom, dok je izlaz – plasman koji je fudbalski tim ostvario, zasnovan na kumulativnom rezultatu koji je dobijen u svakom meču individualno. Ova analiza estimira značaj primenjenih taktika – napada, odbrane ili njihove kombinacije – koje karakterišu timove u zavisnosti od konačnih rezultata ostvarenog u ciklusu takmičenja.

Ulazna promenljiva treće faze je indeks operativne efektivnosti estimiran u drugoj fazi, koji definiše ukupni nivo igre koji je postigao fudbalski tim. Prihod ili socijalni izlaz je odredjen brojem gledalaca na svim utakmicama, i na domaćem terenu i u gostima, u okviru kvalifikacionog ciklusa i definiše socijalne reperkusije taktike igre. S obzirom da broj gledalaca zavisi od veličine stadiona i broja stanovnika grada u kome se stadion nalazi, kao nekontrolisani ulazi uvode se dve promenljive: kapacitet stadiona i broj stanovnika grada. Ukoliko mesto u kome se odvija utakmica ima više od jednog fudbalskog kluba, poslednja nekontrolisana promenljiva deli se brojem tih timova. Za odredjeni nivo igre, u ovoj fazi je odredjen socijalni efekat svakog fudbalskog tima u okviru kvalifikacionog ciuklusa ili ligaškog takmičenja [Garcia-Sanchez, 2007].

Jedna moguća redukcija strukture modela i broja promenljivih ogleda se u svodjenju višestepenog modela sa sl. 5.1, na primer, na „običan“ (jednostepeni) DEA model ekonomske analize fudbala sa (nezavisnim) ulazima: plata igrača i plata trenera (dva ulaza), i izlazima: osvojeni bodovi, prosečna iskorišćenost stadiona i ukupni prihodi (tri izlaza) [Haas et al. 2004].

S obzirom da treneri značajno doprinose uspehu tima na terenu, posebno njihove taktičke i motivacione veštine, plata trenera je nezavisna ulazna promenljiva u odnosu na ukupnu platu (svih) igrača angažovanih u timu u datom ciklusu takmičenja, kao druge nezavisne promenljive. Cene transfera, po pravilu, ne ulaze u plate igrača, prvenstveno zbog pouzdanosti i dostupnosti podataka, ali i zbog činjenice da timovi mogu preuzeti igrače čiji je ugovor istekao, bez plaćanja transfera timovima u kojima su prethodno igrali.

Prva izlazna promenljiva, osvojeni bodovi u kvalifikacionom ciklusu ili šampionatu, je atletski izlaz tima i odredjuje rang, odnosno odredjuje fudbalske timove koji su se kvalifikovali za viši nivo takmičenja.

Druga izlazna promenljiva, prosečna iskorišćenost stadiona, indikator je socijalnog izlaza tima (tim „proizvodi“ socijalnu vrednost ili zahvalnost gledalaca) i reprezentuje zamenu za „korisnost“ koju je generisao tim. Prosečno iskorišćenje stadiona, a ne apsolutni broj gledalaca, je usvojena izlazna promenljiva, (s obzirom da bi timovi sa relativno malim stadionima bili u potpuno neravnopravnom položaju) i odredjuje se kao odnos ukupne posećenosti i kapaciteta stadiona, iskazanog u procentima.

Treća izlazna promenljiva, ukupni prihodi (prodaja prava TV prenosa, prodaja ulaznica, reklame, sponzorstva,...) u toku ciklusa takmičenja, je indikator komercijalnog izlaza tima.

Od izuzetnog interesa bi bila analiza efikasnosti timova u korelaciji sa osvojenom pozicijom u takmičenju, rezultatski skor „slabijih“ timova u odnosu na unapred favorizovane, kao i analiza različitih ulazno-izlaznih kombinacija, na primer, razmatranjem modela sa samo jednim, uvek različitim, od dva ulaza, odnosno tri definisana izlaza.

5.3. Merenje tehničke efikasnosti fudbalske reprezentacije Srbije u utakmicama kvalifikacija za FIFA SP 2010. godine u Južnoj Africi

U ovom poglavlju rada biće izvršena analiza efikasnosti srpskog nacionalnog tima koji je učestvovao u kvalifikacionom ciklusu za SP 2010 u Južnoj Africi i uspešno se plasirao na završni turnir [Petrović Đorđević i dr. 2010, Petrović Đorđević i Martić, 2010, Petrovic Djordjevic et al. 2015]. Efikasnost je zasnovana na tehničkim aspektima sporta, a ne i na promenljivim koje imaju ekonomsku prirodu, zbog tajnog karaktera podataka vezanih za finansijske elemente, ugovorom definisane, između naših reprezentativaca i njihovih matičnih (mahom inostranih) klubova. Još jedan razlog za neuključivanje novčanih komponenti u ovu analizu je i to što nacionalna reprezentacija, za razliku od profesionalnih klubova, nema novčanu komponentu kao motiv, sredstvo ili izlaz. Pripadnost nacionalnoj selekciji, od strane igrača je na dobrovoljnoj bazi, uslovljeno jakom emocionalnom komponentom pripadnosti državi i osećajem časti i odgovornosti da ste baš vi izabrani u elitni odred koji predstavlja “snagu” države u tom sportu. Poziv igrača u reprezentaciju određuje aktuelni trener – selektor, izborom iz grupe već dokazanih, internacionalno prepoznatljivih i jednom rečju najboljih igrača jedne države. S tim u vezi, visina transfera ili plate ovih igrača u njihovim klubovima mogle bi da oslikavaju individualni potencijal i tržišne uslove klubova i liga u kojima nastupaju, kao i pretpostavljeni igrački talenat meren *"ex ante"*, ali potpuno nezavisno od eventualnog dorinosa u performansu nacioalnog tima.

Cilj ovog istraživanja je postavka metodološkog okvira za analizu tehničke efikasnosti i sagledavanje performansi fudbalske reprezentacije Srbije, koristeći tehničke indikatore odigranih utakmica tokom kvalifikacionog ciklusa za Svetsko prvenstvo 2010. u Južnoj Africi, odosno u periodu od 6. septembra 2008. godine, kada je odigrana prva kvalifikaciona utakmica protiv reprezentacije Farskih ostrva u Beogradu, do 18. novembra 2009. godine, protiv reprezentacije Južne Koreje u Londonu. Cilj istraživanja definisan je sledećim hipotezama:

H0: DEA metoda se može uspešno koristiti kao metoda matematičkog programiranja sa visokim praktičnim značajem u pogledu modeliranja, analize i merenja efikasnosti sportskih organizacionih jedinica, kao što je naglašeno u poglavlju 1.2.
H1: Projektovanje i/ili identifikacija metodološkog koncepta za merenje tehničke efikasnosti reprezentativnih selekcija može biti zasnovana na primeni DEA metode.
H2: Ocena tehničke efikasnosti napada, tehničke efikasnosti odbrane i integralna analiza efikasnosti napada i odbrane rezultuje identifikacijom operativne (ateletske) efikasnosti.
H3: Identifikovani metodološki koncept može biti korišćen u analizi analognih sportskih organizacionih jedinica.
H4: Primena faktorske analize uspešno doprinosi fazi strukturiranja podataka u oceni efikasnosti sportskih organizacionih jedinica (fudbalske reprezentacije Srbije).
H5: Efikasne DMU, u analizi napada i odbrne, su efikasne i u integralnom prilazu.

Primena DEA modeliranja na ocenu efikasnoti fudbala u Srbiji postala je moguća zaključivanjem ugovora između Fudbalskog saveza Srbije i Sport Universal Process SAS (SUP SAS) koji je razvio globalni informacioni sistem nazvan AMISCO za pomoć u upravljanju u profesionalnom sportskom sektoru. AMISCO meri tačne pozicije svih igrača na terenu tokom cele utakmice. Mere pozicija i kretanja igrača omogućava generisanje 2D animacije utakmice, zajedno sa taktičkim i sportskim informacijama za pojedinačne i ekipne učinke igrača. SUP je razvio dopunski softver za analizu (Video Pro) koji omogućava punu taktičku analizu fudbalske igre obuhvatanjem svakog kontakta igrača sa loptom i direktan pristup digitalno sinhronizovanoj taktičkoj analizi i ekipe i igrača. Ovakva sinergija oblasti može se smatrati pilot projektom u našoj zemlji, imajući u vidu da od kvalifikacionog ciklusa za SP 2010, možemo obezbediti signifikantne podatke relevantne za našu nacionalnu selekciju i adekvatne za primenu u ovoj i predstojećim analizama.

Dakle, podaci koji su korišćeni u ovom radu (ponovimo, obezbedio ih je Sport Universal zahvaljujući autorskom softveru za analizu fudbalskih utakmica AMISCO, koji predstavlja lidera medju programima za primenjenu statistiku u fudbalu), zasnovani su na detaljnoj statističkoj analizi tehničko-taktičkih elemenata igre, prema zapisu specifičnih kamera koje u opsegu snimanja obuhvataju celokupan prostor terena i ukupnu aktivnost svih igrača, bez obzira na poziciju lopte. U analizi koja sledi, koristiće se samo mali deo ukupnih podataka iz ove baze, dati u tabelama 1-17 u Prilogu 1.

5.3.1. Izbor DMU uključenih u analizu

U fokusu merenja tehničke efikasnosti fudbalske reprezentacije Srbije u kvalifikacijama za SP 2010. god. u Južnoj Africi je tehnički učinak našeg tima na ukupno 17 utakmica, od kojih je 10 pripadalo kvalifikacionom ciklusu, a 7 je imalo karakter prijateljskog susreta. Od ukupnog broja utakmica, tim Srbije je odigrao 8 utakmica kao domaćin, dok je na 9 bio u ulozi gosta. Polazeći od mišljenja da ova analiza može biti od pomoći tehnički usmerenim fudbalskim radnicima i/ili predstavnicima medija, da razumeju kako je tehnička efikasnost tima u različitim operacijama (recimo, odbrambenim i napadačkim) i različitim situacijama (kod kuće, i u gostima) povezana sa ostvarenim rezultatima, analizi su svesno pridruženi performansi reprezentacije u prijateljskim susretima, jer dodatnih 7 nastupa daju širu sliku tehničko-taktičkog nivoa reprezentacije u kvalifikacionom ciklusu. Obuhvatanjem svih utakmica koje su odigrane u vremenskom intervalu kvalifikacinog ciklusa, proces je sagledan u stvarnoj dimenziji. U ulozi DMU u ovoj analizi je tehnički performans reprezentacije Srbije na nivou utakmica.

5.3.2. Izbor ulaza i izlaza

Izbor ulaza i izlaza pripada specifikaciji operativnog modela. Predstavlja veoma važan korak jer direktno utiče na kvalitet interpretacije i mogućnosti manipulacije rezultatima dobijenih primenom DEA analize. Ulazni i izlazi moraju postojati za sve DMU uključene u analizu i pored zahtevane visoke pouzdanosti (tačnosti), neophodno je da poseduju osobine pozitivnosti i izotonosti. Osobina izotonosti funkcionalne zavisnosti izlaza i ulaza je fundamentalna za pripadnost dobijenih rešenja klasi Pareto optimuma [Savić, 2012].

Za izbor ulaza, kao i kod analize ma kog ekonomskog problema gde se koriste proizvodne funkcije i granice, želimo da pronađemo najpouzdanije indikatore toka aktivnosti za različite faktore proizvodnje. U fudbalu, jedini proizvodni faktor je tim sa fudbalerima, dakle, potrebno je odabrati takve indikatore, koji će precizno meriti veštine igrača u ekipi.

Fudbalska igra, tokom svog razvoja, unapređivana je kroz sve svoje segmente. Jedan od najvažnijih segmenata, ako ne i najvažniji, su tehnički elementi fudbalske igre. Evolucijom tehničkih elemenata, evoluirali su i novi zahtevi za razvoj fudbalske igre, i uslovili su razvoj fudbalske taktike. Ako se pažljivo analiziraju pojedini elementi i podelementi fudbalske tehnike, onda će se doći do nedvosmislenog zaključka, da su oni, u stvari, svi odreda, i svojevrsna sredstva taktike. Drugim rečima, element tehnike pojedinačno ili u kombinaciji sa drugim elementima omogućava razvoj ciljnih kombinacija koje predstavljaju taktičku zamisao. Nemoguće je, osim teorijski, postaviti adekvatne fudbalske definicije sledećih pojmova, koji su izabrani zbog dostupnosti podataka u svim opservacijama, kao i ličnog mišljenja autora disertacije (uz konsultacije sa stručnim trenerskim kadrom), kao potencijalno značajnim za postizanje rezultata.

Ulazne veličine:

- Ukupan broj centaršuteva - *NC*

Centaršut - vrsta najčešćeg dugog dodavanja u kome igač, koji ga izvodi, pokušava da doda loptu (po zemlji ili u vazduhu) svom saigraču u protivničkom šesnestercu.

- Broj uspešnih centaršuteva - *NsC*

Saigrač kome je upućena lopta je stupio u kontakt sa loptom

- Ukupan broj centaršuteva iz igre - *NCP*

Centaršutevi ostvareni u toku aktivne igre, tj. pre centaršuta je bio prisutan neki drugi tehnički element

- Broj uspešnih centaršuteva iz igre – *NsCP*

- Ukupan broj pasova iz igre (dodavanje lopte iz igre) – *NPP*

Dodavanje lopte je element kolektivne taktike i čini više od 70% ukupnih događanja na terenu u toku fudbalske utakmice. Lopta se dodaje onda, kada je neki drugi saigrač u povoljnijem položaju da ugrozi protivnički gol od onoga kod koga je lopta. Takođe, može biti sigurno sredstvo savlađivanja prostora ili jednog/više protivničkih igrača, ili u situaciji kada je igrač kod koga je lopta napadnut i postoji mogućnost da je izgubi iz poseda. Dodavanje lopte iz igre podrazumeva dodavanje kome je prethodio ovaj ili neki drugi tehnički element igre.

- Broj uspešnih pasova iz igre – *NsPP*

- Broj šuteva – *NS*

Šut je vrsta udarca po lopti, nogom, najčešće stopalom, a podaci prezentovani pod ovim faktorom predstavljaju udarce na protivnički gol, koji predstavljaju isključivo sredstvo napadačke taktike. U poziciju šuta, u savremenim uslovima igre, u zgusnutoj odbrani, teško se dolazi, pa se retka šansa ne sme olako propuštati. Može biti blokiran, precizan i neprecizan.

- Broj šuteva u okvir gola – *NST*

Šut u okvir gola je udarac koji završava u okvir gola i najbliže je povezan sa postignutim rezultatom. Može biti uspešan pogodak - gol ili odbranjen udarac od strane protivničkog golmana.

- Ukupan broj napravljenih faulova – *NFm*

Faul - povreda pravila igre od strane igrača jednog tima fizičkim nedozvoljenim kontaktom nad igračem protivničkog tima. Nastaje najčešće prilikom "agresivnijih" napadačkih ili odbrambenih akcija.

- Ukupan broj vazdušnih duela – *NAD*

Vazdušni duel - kontakt protivničkih igrača za posed lopte koja se kreće u vazduhu

- Broj osvojenih vazdušnih duela – *NADw*

Broj vazdušnih duela iz kojih su igrači jednog tima izašli sa loptom u posedu

- Ukupan broj duela na zemlji – *NGD*

Duel na zemlji - kontakt protivničkih igrača za posed lopte koja se kreće po zemlji

- Broj osvojenih duela na zemlji – *NGD*

- Broj uspešnih driblinga – *NsD*

Dribling - predstavlja ujedno i tehnički i taktički element, koji kroz zavaravajuće pokrete telom i radnje sa loptom ima za cilj da iznudi reakciju protivnika u suprotnom smeru od onog u kome će lopta zaista biti odneta, tj. da reakciju protivnika učine zakasnelom. Taktički se najčešće koristi u napadačkim akcijama, ali može biti i odbrambene prirode, nametnut od strane protivničkog igrača.

Izlazne veličine:

- Ukupan broj priznatih postignutih golova - *NG*

Postignut i priznat rezultat tima, s tim što se autogolovi posmatraju, kako se i fudbalski vrednuju, kao učinak protivničkog tima.

Tabela 5.1: Podaci reprezentacije Srbije za napad kod kuće i u gostima

DMU/ Utakmica	NG	NC	NsC	NCP	NsCP	NPP	NsPP	NS	NST	NFm	NAD	NADw	NGD	NGDw	NsD
SRB/FRO	2	51	10	45	9	545	493	19	9	19	30	21	42	19	9
SRB/LTU	3	31	9	23	4	398	326	14	6	27	36	19	43	25	12
SRB/BLG	6	22	10	16	9	349	291	20	11	27	31	21	29	16	8
SRB/UKR	0	14	2	13	2	351	278	17	5	23	53	33	52	21	7
SRB/SWE	2	39	8	25	8	336	266	13	5	20	48	33	37	18	5
SRB/AUT	1	14	6	9	3	277	213	12	5	21	39	15	33	17	7
SRB/FRA	1	19	4	14	2	346	278	15	4	21	48	32	26	14	7
SRB/ROM	5	33	13	23	8	280	222	27	9	33	40	26	24	12	9
FRA/SRB	1	20	9	15	6	344	275	7	1	18	32	16	55	27	5
AUT/SRB	3	11	2	9	2	351	295	7	5	27	36	17	30	11	13
CYP/SRB	2	25	9	18	8	471	380	17	7	23	28	20	39	21	10
ROM/SRB	3	17	3	12	2	265	166	8	3	21	40	22	15	7	2
FRO/SRB	2	44	8	37	8	569	512	21	10	19	36	23	38	18	7
RSA/SRB	3	18	7	*16*	6	435	350	7	4	16	26	14	18	12	0
LTU/SRB	1	25	10	13	7	294	182	16	6	19	37	20	31	17	10
NIR/SRB	1	25	7	19	4	530	458	18	6	17	35	21	20	12	7
KOR/SRB	1	13	4	18	2	383	320	11	5	21	29	16	20	13	7

Tabela 5.2: Podaci reprezentacije Srbije za odbranu kod kuće i u gostima

DMU/ Utakmica	NG	NC	NsC	NCP	NsCP	NPP	NsPP	NS	NST	NFm	NAD	NADw	NGD	NGDw	NsD
SRB/FRO	0	5	1	3	0	188	137	4	0	16	30	9	42	23	5
SRB/LTU	0	25	4	18	2	363	285	8	2	19	36	17	43	18	4
SRB/BLG	1	23	6	16	3	414	347	18	10	21	31	10	29	13	6
SRB/UKR	1	14	2	13	2	321	247	8	4	33	53	20	52	31	2
SRB/SWE	0	39	8	25	7	299	224	15	4	21	48	15	37	19	5
SRB/AUT	0	26	6	17	4	326	248	15	2	30	39	24	33	16	4
SRB/FRA	1	21	1	15	1	357	298	15	4	12	48	16	26	12	17
SRB/ROM	0	16	6	14	4	264	202	14	1	33	40	14	24	12	6
FRA/SRB	2	24	7	17	6	519	454	23	10	19	32	16	55	28	14
AUT/SRB	1	44	7	36	5	401	329	10	2	30	36	19	30	19	8
CYP/SRB	0	15	4	11	3	344	262	9	4	18	28	8	39	18	1
ROM/SRB	2	34	10	27	9	424	311	14	4	30	40	18	15	8	8
FRO/SRB	0	12	3	9	3	190	141	9	3	18	36	13	38	20	6
RSA/SRB	1	27	5	18	2	482	397	12	8	9	26	12	18	6	0
LTU/SRB	2	21	4	13	1	259	141	19	12	18	37	17	31	14	4
NIR/SRB	0	27	7	19	3	383	310	13	2	20	35	14	20	8	2
KOR/SRB	0	23	5	18	2	409	328	11	6	28	29	13	20	7	9

U tabeli 5.1 i tabeli 5.2 dati su podaci za identifikovane faktore. Reprezentacije zemalja su predstavljene troslovnim skraćenicama, jedinstvenim oznakama država, prema FIFA nomenklaturi, odnosno Srbija (SRB), Farska ostrva (FRO), Litvanija (LTU), Bugarska (BLG), Ukraina (UKR), Švedska (SWE), Austrija (AUT), Francuska (FRA), Rumunija (ROM), Kipar (CYP), Južnoafrička Republika (RSA), Severna Irska (NIR) i Južna Koreja (KOR).

Osim prethodno navedenih razmatranja, izbor ulaza za napad i odbranu, zasnovan je, takođe, na analizi korelacije ulaza sa izlaznom veličinom, i svi izabrani ulazi pokazuju pozitivne korelacije (generalno statistički značajne) sa relevantnim izlazom, čime je potvrdjeno da osobina izotonosti nije narušena. Formalno, izotonost podrazumeva da povećanje ulaza rezultuje povećanjem izlaza bez smanjenja bilo kog drugog ulaza. Što se tiče ulaza za napad, izabrani faktori su dovoljni za napor i sposobnosti koje je tim uložio u napadačke zadatke. Kada je odbrana u pitanju, ideja je slična, mada treba uvesti dodatne kvalifikacije. U ovom slučaju, za defanzivne ulaze će biti uzeti događaji u igri koje je ostvario protivnički tim, a ne akcije tima čije odbrambene sposobnosti želimo da analiziramo. Prema tome, u ovakvoj postavci, značenje efikasnosti odbrane može se izraziti kao sposobnost da se primi manje golova uz više šansi protivničkog tima.

5.3.2.1. Redimenzionisanje modela

U prvoj etapi razmatranja problema, nameće se zaključak da je sve identifikovane ulazne veličine nemoguće zadržati, iz razloga nesaglasnosti sa pravilima modeliranja koja se odnose na dimenziju problema. Opšte pravilo je da je potrebno da broj jedinica za odlučivanje bude bar 3 puta veći od ukupnog broja ulaza i izlaza uključenih u analizu. Sva pravila upućuju na neophodnost da broj DMU bude značajno veći od ukupnog broja ulaza i izlaza [Savić, 2012]. U ovoj analzi biće prihvaćeno pravilo za dimenziju problema iz [Cooper et al. 2000]: $m+s<n/2$.

S obzirom da je identifikovano 14 ulaznih i jedna izlazna veličina, a da je jedinica odlučivanja 17, jasno je da se neke redukcije moraju izvršiti.

5.3.2.2. Eliminacija ulaza sažimanjem istorodnih veličina

Prva predložena redukcija dimenzije ulaza se odnosi na uvođenje novih parametara, koji će reprezentovati učinak tima kroz odnos uspešnih i ukupnih istorodnih veličina, saglasno tabelama 5.3 i 5.4.

Kao što se može videti u tabeli 5.3 i tabeli 5.4, uvedene su nove veličine:
C - Učinak uspešnih u ukupnim centaršutevima
CP - Učinak uspešnih u ukupnim centaršutevima iz igre
PP - Učinak uspešnih u ukupnim pasovima iz igre
AD - Učinak osvojenih u ukupnom broju vazdušnih duela
GD - Učinak osvojenih u ukupnom broju duela na zemlji

Tabela 5.3: Podaci reprezentacije Srbije za napad kod kuće i u gostima - redukcija

DMU/ Utakmica	NG	C	CP	PP	NS	NST	NFm	AD	GD	NsD
SRB/FRO	2	19,61	20,00	90,46	19	9	19	70,00	45,24	9
SRB/LTU	3	29,03	17,39	81,91	14	6	27	52,78	58,14	12
SRB/BLG	6	45,45	56,25	83,38	20	11	27	67,74	55,17	8
SRB/UKR	0	14,29	15,38	79,20	17	5	23	62,26	40,38	7
SRB/SWE	2	20,51	32,00	79,17	13	5	20	68,75	48,65	5
SRB/AUT	1	42,86	33,33	76,90	12	5	21	38,46	51,52	7
SRB/FRA	1	21,05	14,29	80,35	15	4	21	66,67	53,85	7
SRB/ROM	5	39,39	34,78	79,29	27	9	33	65,00	50,00	9
FRA/SRB	1	45,00	40,00	79,94	7	1	18	50,00	49,09	5
AUT/SRB	3	18,18	22,22	84,05	7	5	27	47,22	36,67	13
CYP/SRB	2	36,00	44,44	80,68	17	7	23	71,43	53,85	10
ROM/SRB	3	17,65	16,67	62,64	8	3	21	55,00	46,67	2
FRO/SRB	2	18,18	21,62	89,98	21	10	19	63,89	47,37	7
RSA/SRB	3	38,89	37,50	80,46	7	4	16	53,85	66,67	0
LTU/SRB	1	40,00	53,85	61,90	16	6	19	54,05	54,84	10
NIR/SRB	1	28,00	21,05	86,42	18	6	17	60,00	60,00	7
KOR/SRB	1	30,77	11,11	83,55	11	5	21	55,17	65,00	7

Tabela 5.4: Podaci reprezentacije Srbije za odbranu kod kuće i u gostima - redukcija

DMU/ Utakmica	NG	C	CP	PP	NS	NST	NFm	AD	GD	NsD
SRB/FRO	0	20,00	0,00	72,87	4	0	16	30,00	54,76	5
SRB/LTU	0	16,00	11,11	78,51	8	2	19	47,22	41,86	4
SRB/BLG	1	26,09	18,75	83,82	18	10	21	32,26	44,83	6
SRB/UKR	1	14,29	15,38	76,95	8	4	33	37,74	59,62	2
SRB/SWE	0	20,51	28,00	74,92	15	4	21	31,25	51,35	5
SRB/AUT	0	23,08	23,53	76,07	15	2	30	61,54	48,48	4
SRB/FRA	1	4,76	6,67	83,47	15	4	12	33,33	46,15	17
SRB/ROM	0	37,50	28,57	76,52	14	1	33	35,00	50,00	6
FRA/SRB	2	29,17	35,29	87,48	23	10	19	50,00	50,91	14
AUT/SRB	1	15,91	13,89	82,04	10	2	30	52,78	63,33	8
CYP/SRB	0	26,67	27,27	76,16	9	4	18	28,57	46,15	1
ROM/SRB	2	29,41	33,33	73,35	14	4	30	45,00	53,33	8
FRO/SRB	0	25,00	33,33	74,21	9	3	18	36,11	52,63	6
RSA/SRB	1	18,52	11,11	82,37	12	8	9	46,15	33,33	0
LTU/SRB	2	19,05	7,69	54,44	19	12	18	45,95	45,16	4
NIR/SRB	0	25,93	15,79	80,94	13	2	20	40,00	40,00	2
KOR/SRB	0	21,74	11,11	80,20	11	6	28	44,83	35,00	9

Primenjenim postupkom broj ulaza je redukovan sa 14 na 9. Međutim, potrebno je izvršiti dodatnu redukciju u cilju prilagođavanja dimenzije problema prihvaćenom pravilu - primenom, na primer, nekom od multivarijacionih metoda za istraživanja podataka, na primer, faktorskom analizom.

5.3.2.3. Faktorska analiza

U multivarijacione metode spadaju statističke metode koje nad matricom podataka vrše analizu njihove medjuzavisnosti ili zavisnosti sa ciljem redukcije dimenzije problema ili predikcije zavisnih promenljivih na osnovu skupa nezavisnih promenljivih [Jeremić, 2012] . Za prodor u unutrašnju strukturu podataka, od multivarijacionih tehnika za analizu medjuzavisnosti podataka u cilju redukcije dimenzije problema primenićemo faktorsku analizu kako bi od mnoštva podataka, polazeći od pretpostavke da među njima postoji linearna korelacija, izdvojili one koji nisu u korelaciji sa drugim izdvojenim faktorima. Rezultat toga će biti da će se umesto nad velikim brojem koreliranih izvornih varijabli dalja analiza sprovoditi nad nekorelisanim faktorima. Teorijski standardi primene faktorske analize se razlikuju, ali su podudarni da u primeni na malim uzorcima, koeficijenti korelacije su manje pouzdani i daju lošije rezultate od onih dobijenih iz većih skupova podataka. U literaturi se mogu naći i egzaktna uputstva da je ona primenljiva samo u problemima sa velikim uzorkom (preko 300 opservacija). S obzirom da se u ovoj analizi radi o malom uzorku, biće izvršen test opravdanosti primene faktorske analize, kojih u SPSS programskom paketu ima dva: Bartletov test sferičnosti i Kajzer-Majer-Olkinov (KMO) pokazatelj adekvatnosti uzorka. Značajnost se može smatrati potvrđenom za iznos parametra Bartletovog testa sferičnosti (za $p<0.05$), da bi primena faktorske analize bila opravdana. KMO pokazatelj može imati vrednost između *0* i *1* pa se *0.6* preporučuje kao najmanji iznos originalnog skupa ulaza [Pallant, 2009].

Ekstrakcija faktora obuhvata određivanje najmanjeg broja faktora koji dobro predstavljaju međuveze u skupu početnih ulaza. Postoje različite tehnike izdvajanja, a mi ćemo izabrati najčešće korišćenu od njih - analizu glavnih komponenata, što podrazumeva da treba napraviti izbor faktora takav da se odabere najmanji mogući broj faktora, ujedno objašnjavajući što veći deo varijanse originalnog skupa ulaza. Iako je analiza glavnih komponenata prepoznata kao posebna multivarijaciona tehnika od klasične faktorske analize je razlikuje samo način posmatranja podataka. Kod faktorske analize u razmatranje se uzimaju vandijagonalni elementi disperzione matrice – kovarijanse, dok se analiza glavnih komponenata zasniva na dijagonalnim elementima – varijansama [Jeremić, 2012]. U kontekstu SPSS računarske simulacije, pod faktorskom analizom će se podrazumevati PCA *(principal component analysis)* sugerisana kao bolja tehnika za uobičajeno empirijsko sažimanje skupa podataka. S obzirom da imaju iste ciljeve i sličan postupak sprovođenja, metoda glavnih komponenata se neretko svrstava u porodicu tehnika faktorske analize [Pallant, 2009]. Kako je u računarskoj simulaciji korišćen SPSS programski paket, treba napomenuti da je u ovom programskom paketu metoda glavnih komponenata jedna od tehnika za izdvajanje faktora u okviru metode faktorske analize.

Za određivanje broja faktora koje treba zadržati takođe postoji više tehnika, a u ovoj analizi je korišćen Kajzerov kriterijum poznat kao kriterijum karakterističnih vrednosti. Karakteristična vrednost faktora je ukupna varijansa svih promenljivih objašnjena tim faktorom. Po ovom pravilu, za dallju analizu zadržavaju se samo oni faktori čije su karakteristične vrednosti veće od *1,0*.

Analiza nad konkretnim skupom podataka pokazuje da je skup podataka prikladan za faktorsku analizu (sa delom korelacija unutar korelacione matrice većih od *0,3*). Vrednost KMO pokazatelja je *0,602* i značajnost je potvrđena Bartletovim pokazateljem (*p=0,000*), pa se može smatrati da je primena faktorske analize u ovom slučaju opravdana. Rezultati i tabele faktorske analize su date u Prilogu 2.

Na osnovu karakterističnih vrednosti komponenti izdvajaju se promenljive ulaza: centaršutevi, centaršutevi iz igre, pasovi iz igre sa karakterističnim vrednostima većim od *1* (*2.709, 1.856, 1.137*). Te tri komponente objašnjavaju ukupno *63,352%* procenata varijanse.

Tabela 5.5: Izdvajanje komponenti – Kajzerov kriterijum

Komponente		karakteristične vrednosti	objašnjeni deo vaijanse originalnog skupa podataka - kumulativno(%)
C	centaršutevi	2.709	30.104
CP	centaršutevi iz igre	1.856	50.724
PP	pasovi iz igre	1.137	63.352

Na dijagramu prevoja (videti Prilog 2), grafičkoj prestavi karakterističnih vrednosti, takođe se može uočiti da je tačka kojom je predstavljena karakteristična vrednost pasova iz igre prelomna tačka u kojoj se oblik krive menja i prelazi u horizontalu.

Uključivanjem promenljivih dobijenih primenjenom faktorskom analizom u radni model, hipoteza H4 je dokazana.

S obzirom da je faktorska analiza samo tehnika istraživanja podataka, tumačenju rezultata pridodaće se neke "fudbalske sugestije". Poštujući pravilo o dimenziji problema ($m+s<n/2$), dozvoljeno je uključiti još dva ulaza u analizu. Izolovanim faktorima, biće pridruženi ulazi: broj šuteva i broj šuteva u okvir gola, prvenstveno zato što predstavljaju elemente igre koji su najbliže povezani sa mogućim pogotcima, odnosno, datim golovima.

Na kraju, identifikovani elementi, kojima će polazni problem biti modeliran u analizi efikasnosti metodom obavijanja podataka, dati su u tabeli 5.6.

Tabela 5.6. Elementi za DEA analizu

NAPAD / ODBRANA					
DMU/Utakmica		ULAZI		IZLAZI	
naziv	opis	naziv	opis	naziv	opis
SRB/FRO	performans SRB na meču	C	učinak centaršuteva	NG	broj golova
SRB/LTU	performans SRB na meču	CP	učinak centaršuteva iz igre		
SRB/BLG	performans SRB na meču	PP	učinak pasova iz igre		
SRB/UKR	performans SRB na meču	NS	broj šuteva		
SRB/SWE	performans SRB na meču	NST	broj šuteva u okvir gola		
SRB/AUT	performans SRB na meču				
SRB/FRA	performans SRB na meču				
SRB/ROM	performans SRB na meču				
FRA/SRB	performans SRB na meču				
AUT/SRB	performans SRB na meču				
CYP/SRB	performans SRB na meču				
ROM/SRB	performans SRB na meču				
FRO/SRB	performans SRB na meču				
RSA/SRB	performans SRB na meču				
LTU/SRB	performans SRB na meču				
NIR/SRB	performans SRB na meču				
KOR/SRB	performans SRB na meču				

5.3.3. Izbor modela

U skladu sa prirodom problema i postavljenim ciljevima za analizu efikasnosti neophodno je definisanje operativnog modela. Faktor koje treba uzeti u obzir prilikom izbora modela su orijentacija modela kojom se odredjuje pravac projekcije neefikasnih DMU na granicu efikasnosti. To bi značilo da izborom ulazne orijentacije efikasnost neefikasnih jedinica bi se postizala smanenjem ulaza za dati nivo izlaza, dok bi izlazna orijentacija značila projekciju sa ciljem povećanja izlaza za date ulazne nivoe. Klasu neorijentisanih modela karakteriše istovremena mogućnost smanjenja ulaza i povećanja izlaza. Izbor ulazne orijentacija modela u ovoj analizi implicirao bi da DMU nastoji da održi svoj performans na postignutom nivou, što je čini se kontradiktorno iskonskoj takmičarskoj prirodi svakog sporta. Slično je i za primenu neorijentisanih modela. Iz tog razloga, opravdano je primeniti izlazno orijentisani model kojim se pretpostavlja proporcionalna ekspanzija izlaza, dok je vrednost ulaza konstanta.

Naredni faktor se odnosi na pretpostavku prinosa na obim, odnosno zahteva odabir izmedju konstantnog i varijabilnog. Poznavanje suštine problema konvergira zaključcima donetim na osnovu prethodne analize. Primena modela sa varijabilnim prinosom na obim očekivana je u analizama koje se vrše na nivou utakmica, dok je konstantan prinos na obim karakterističan izbor za analizu kompletnih liga. Razumno je očekivati da veći nivo ulaza može u manjem ili većem obliku povećati broj postignutih golova na nivou utakmica. U analizama kompletnih liga, ovaj efekat bi drastično bio ublažen brojem odigranih utakmica, što i potvrđuje činjenica da se rezultati analiza nisu drastično razlikovali u slučajevima poredjenja sa rezultatima dobijenim pretpostavkom nekonstantnog prinosa [Bosca et al. 2009].

S obzirom da izlazna orijentacija i varijabilni prinos na obim upućuju na BCC klasu modela, ovi modeli imaju dominantnu karakteristiku da se indeks efikasnosti određuje kao radijalna distanca posmatrane DMU od njene referentne jedinice (ili hipotetičke kompozitne jedinice).

5.3.4. Analiza rezultata

U Prilogu 3 dati su izlazi generisani primenom EMS (Efficiency Measurement System) softvera.

Dobijeni rezultati za napadački aspekt igre reprezentacije Srbije, pokazuju da je ofanzivna igra bila efikasna u utakmicama "kod kuće" protiv reprezentacija Bugarske, Ukrajine, Francuske i Rumunije, dok su efikasni ofanzivni segmenti igre u situaciji "u gostima" mapirali izvođenja na utakmicama protiv Francuske, Austrije, Rumunije, Južne Afrike, Litvanije i Južne Koreje. Indeksi efikasnosti dati su u tabeli 5.7.

Tabela 5.7: Indeksi efikasnosti u analizi napada

DMU/ Utakmica	rezultat utakmice	Indeks efikasnosti	Prosečna efikasnost
SRB/FRO	2:0	140,38%	126,16%
SRB/LTU	3:0	102,00%	
SRB/BLG	6:1	100,00%	
SRB/UKR	0:1	100,00%	
SRB/SWE	2:0	143,64%	
SRB/AUT	1:0	237,50%	
SRB/FRA	1:1	100,00%	
SRB/ROM	5:0	100,00%	
FRA/SRB	1:2	100,00%	126,98%
AUT/SRB	3:1	100,00%	
CYP/SRB	2:0	183,33%	
ROM/SRB	3:2	100,00%	
FRO/SRB	2:0	135,26%	
RSA/SRB	3:1	100,00%	
LTU/SRB	1:2	100,00%	
NIR/SRB	1:0	224,21%	
KOR/SRB	1:0	100,00%	

U izlaznoj orijentaciji modela teži se maksimizaciji izlaza sa datom količinom ulaza, pa su neefikasne jedinice, sa indeksom većim od 1 (100%), obavijene odozdo. Za svaku od neefikasnih igračkih partija se može konstruisati referentna jedinica na granici efikasnosti. Za utakmicu Srbija - Farska Ostrva (DMU1), to je hipotetička jedinica (H), koja nastaje kao linearna kombinacija ulaza i izlaza napadačke igre na utakmicama Srbija - Bugarska (DMU3) i Rumunija - Srbija (DMU12), pošto se hipotetička jedinica nalazi na duži koja spaja ove dve DMU. Indeks efikasnosti se može izračunati i kao odnos radijalnog rastojanja njene referentne tačke od koordinatnog početka (OH/ODMU1). Vrednost količnika predstavlja indeks efikasnosti za DMU1 i govori za koliko procentualno jedinica treba da poveća izlaz da bi postala efikasna. U slučaju utakmice Srbija - Farska ostrva (DMU1), izlaz bi morao biti povećan 1,4 puta, odnosno ukoliko bi broj postignutih golova bio 4, DMU1 bi se nalazila u blizini hipotetičke tačke (H) na granici efikasnosti.

U tabeli 5.8 prikazane su neefikasne utakmice po ofanzivnim parametrima, sa stvarnim ulazima i izlazom i ciljanim ulazima i izlazom koji bi im obezbedili efikasnost. Da bi relativno neefikasne jedinice poboljšale svoju produkciju, suočavaju se sa skupom ulazno-izlaznih nivoa sa kojima bi postale efikasne. Optimalno rešenje obavijajućeg modela omogućava sagledavanje ciljanih vrednosti ulaza i izlaza. U modelima izlazne orijentacije, ciljane vrednosti ulaza se generišu kao razlika stvarnih i izravnavajućih vrednosti, dok se željena vrednost izlaza dobija kao proizvod stvarne vrednosti i indeksa efikasnosti uvećan za izravnjavajuću promenljivu (projektne formule u jednačinama 3.52).

Tabela 5.8. Stvarne i ciljane vrednosti neefikasnih DMU u analizi napada

DMU/Utakmica	C	CP	PP	NS	NST	NG
SRBvsFRO	19,61 (19,61)	20,00 (19,46)	90,46 (64,11)	19 (9)	9 (4)	2 (3)
SRBvsLTU	29,03 (18,51)	17,39 (17,39)	81,91 (63,31)	14 (9)	6 (3)	3 (3)
SRBvsSWE	20,51 (20,51)	32,00 (20,75)	79,17 (64,78)	13 (9)	5 (4)	2 (3)
SRBvsAUT	42,86 (24,60)	33,33 (26,56)	76,90 (67,83)	12 (11)	5 (5)	1 (4)
CYPvsSRB	36,00 (31,55)	44,44 (36,45)	80,68 (73,01)	17 (14)	7 (7)	2 (4)
FROvsSRB	18,18 (18,18)	21,62 (17,43)	89,98 (63,04)	21 (8)	10 (3)	2 (3)
NIRvsSRB	28,00 (22,91)	21,05 (21,05)	86,42 (66,68)	18 (13)	6 (4)	1 (3)

U analizi efikasnosti odbrane, za izlaz modela su uzete recipročne vrednosti golova koji su primljeni, kako bi se efikasnost odbrane reprezentacije Srbije kroz neefikasnost napada njihovih protivnika. Rezultati analize dati su u tabeli 5.9.

Interesantno je primetiti dve DMU: Severna Irska - Srbija i Južna Koreja - Srbija koje imaju indeks efikasnosti jednak 1 (100%), ali su proglašene neefikasnim. Na eventualno prikazanim grafikonima bi se moglo videti da se one nalaze na isprekidanim odsečcima granice efikasnosti koji su paralelni sa apscisom ili ordinatom. Za “odbranu” na meču protiv Južne Koreje uzorna je bila odbrana u duelu sa Litvanijom kod kuće, dok za odbranu na meču sa Severnom Irskom, uzornu jedinicu predstavlja hipotetička jedinica generisana linearnom kombinacijom igre na utakmicama sa Litvanijom, Švedskom, Austrijom i Rumunijom kod kuće i Kiprom u gostima, sa vektorima intenziteta uticaja, redom, *0.75*, *0.02*, *0.05*, *0.12*, *0.06*. U oba slučaja, vrednost izravnavajućih promenljivih, koje su veće od nule, ukazuju na njihovu neefikasnost.

Tabela 5.9: Indeksi efikasnosti u analizi odbrane

DMU/Utakmica	rezultat utakmice	Indeks efikasnosti	Prosečna efikasnost
SRB/FRO	2:0	100,00%	
SRB/LTU	3:0	100,00%	
SRB/BLG	6:1	200,00%	
SRB/UKR	0:1	100,00%	114,29%
SRB/SWE	2:0	100,00%	
SRB/AUT	1:0	100,00%	
SRB/FRA	1:1	100,00%	
SRB/ROM	5:0	100,00%	
FRA/SRB	1:2	300,30%	
AUT/SRB	3:1	100,00%	
CYP/SRB	2:0	100,00%	
ROM/SRB	3:2	291,57%	
FRO/SRB	2:0	100,00%	154,65%
RSA/SRB	3:1	200,00%	
LTU/SRB	1:2	100,00%	
NIR/SRB	1:0	100,00%	
KOR/SRB	1:0	100,00%	

U tabeli 5.10 prikazane su utakmice sa neefikasnim odbrambenim partijama našeg tima, sa stvarnim ulazima i izlazom i ciljanim ulazima i izlazom koji bi im obezbedili efikasnost. Ciljane vrednosti izlaza generisane su u skladu sa transformacijama koje su bile izvršene za njihovo prilagođavanje modelu.

Tabela 5.10. Stvarne i ciljane vrednosti neefikasnih DMU u analizi odbrane

DMU/Utamica	C	CP	PP	NS	NST	NG
SRBvsBLG	26,09 (20,13)	18,75 (15,71)	83,82 (78,22)	18 (10)	10 (3)	1 (0)
FRAvsSRB	29,17 (22,16)	35,29 (19,99)	87,48 (77,34)	23 (11)	10 (3)	2 (0)
ROMvsSRB	29,41 (24,74)	33,33 (32,21)	73,35 (73,35)	14 (10)	4 (3)	2 (0)
RSAvsSRB	18,52 (16,65)	11,11 (11,11)	82,37 (78,71)	12 (8)	8 (2)	1 (0)
NIRvsSRB	25,93 (19,64)	15,79 (15,24)	80,94 (77,90)	13 (9)	2 (2)	0 (0)
KORvsSRB	21,74 (16,00)	11,11 (11,11)	80,20 (78,52)	11 (8)	6 (2)	0 (0)

U rezultatu analize tehničke efikasnosti napada i odbrane reprezentacije Srbije na utakmicama kvalifikacionog cikluca za Svetsko prvenstvo 2010. u Južnoj Africi, treba naglasiti da je od 17 utakmica u uzorku, 7 okarakterisano kao neefikasno sa stanovišta napada, dok je odbrana reprezentacije Srbije bila neefikasna 6 puta. U izvršenoj analizi, interesantno je da je, uprkos pobedi ostvarenoj na tom meču (0:1), utakmica protiv Severne Irske, koju smo igrali u Belfastu 14. novembra 2009. godine, jedina okarakterisana kao neefikasna i sa aspekta napada i sa aspekta odbrane. Takođe, u obe analize se javlja, za jednu od uzornih jedinica, igra ostvarena na meču protiv reprezentacije Rumunije odigranom u Beogradu.

Posmatrajući analizu efikasnosti napada, kao uzorna jedinica svim neefikasnim jedinicama, pojavljuje se igra na meču protiv reprezentacije Rumunije, u Konstanci 28. marta 2009. godine, kada je reprezentacija Srbije pobedila golom razlike. Za najneefikasniju jedinicu okarakterisana je utakmica Srbija - Austrija, gde uprkos ostvarenoj pobedi, uz smanjenje stvarnih ulaza, efikasnost bi obezbedila tri pogotka više od stvarno postignutog jednog.

U analizi odbrane, fudbalska igra na utakmici Srbija - Litvanija, svih šest puta, predstavlja jedinu ili jednu od uzornih jedinica. Kao najneefikasnija se javlja igra protiv reprezentacije Francuske, kada bi uz nedozvoljavanje tolikog nivoa napadačkih ulaza Francuske, efikasnost odbrane našeg tima osiguralo bi i da smo izbegli dva primljena gola.

Približno za trećinu odigranih utakmica (5 od 17), analiza je pokazala da su efikasne i sa napadačkog aspekta i kada je u pitanju odbrana, odnosno nemogućnost protivničkog tima da maksimizira svoj ofanzivni učinak. Među njima su dve utakmice na kojima je tim Srbije ostvario veliku rezultatsku prednost i dominirao u svim aspektima igre (Srbija 6 - 1 Bugarska, Rumunija 0 - 5 Srbija). Takođe, tu je utakmica protiv Francuske, na domaćem terenu, kada je Srbija uprkos sjajnoj igri igrala nerešeno, ali i utakmica protiv Litvanije u gostima, kada je nacionalni tim Srbije pretrpeo poraz.

5.4. Dvofazna DEA analiza

I pored mogućnosti pristupa istom tehnološkom nivou (planiranje, fizički treninzi, psihološki aspekti, taktika,...), nacionalne reprezentacije – kao fudbalski timovi – se razlikuju, očigledno, po svom nivou efikasnosti, što implicira i objašnjava razlike u njihovoj produktivnosti. Koncept dekompozicije efikasnosti u modelima sportskih ekonomija na radnu, operativnu i socijanu osnov je dalje pretpostavke da se opservirani rezultati iz prve faze mogu koristiti u oceni operativne efikasnosti reprezentacije Srbije, integralnim razmatranjem na nivou utakmice. S obzirom da operativna efikasnost korespondira ostvarenom rezultatu na takmičenju, odnosno plasmanu na Svetsko prvenstvo, u analizi je pretpostavljeno da uzorak treba korigovati na utakmice isključivo takmičarskog karaktera (10). U prilog tome govori činjenica da su na plasman na završni turnir uticaj imale isključivo utamice kvalifikacija, odnosno rezultati postignuti na njima.

Ranije ocenjeni indeksi efikasnosti napada i odbrane za kvalifikacione utakmice biće uvršteni u analizu u vidu novo-identifikovanih ulaznih veličina.
U analizi koja sledi pretpostavlja se da su ocenjene efikasnosti tehničkih aspekata igre u formalnom odnosu sa učešćem postignutih golova reprezentacije u ukupnom broju primljenih golova protivnika, kao i sa gol razlikom koju je Srbija postigla na svakom pojedinačnom meču. Upravo su ove dve veličine, identifikovane kao izlazi u drugoj fazi. Kao što je rečeno, modeliranje će biti izvršeno na uzorku od 10 kvalifikacionih utakmica, dok su vrednosti efikasnosti napada i odbrane, generisane na osnovu tehničko-taktičkih elemenata obuhvatajući i prijateljske susrete (u cilju sagledavanja ukupnog kvaliteta igre na svim utakmicama naše reprezentacije u vremenskom intervalu koji je odredjen trajanjem kvalifikacionog perioda).

Kao i u prethodnoj analizi, takođe, biće korišćen izlazno orijentisan model, dok će dobijeni indeksi efikasnosti zastupljeni u ulozi ulaza u novom razmatranju, biti modifikovani u svoje recipročne vrednosti (zbog prirode uticaja na fenomen efikasnosti – očuvanja izotonosti funkcionalne zavisnosti). Takođe, zbog uslova nenegativnosti podataka, jednostavnom transformacijom modifikovan je izlaz koji predstavlja gol razliku.

Radi lakše komparacije prethodnih i novodobijenh rezultata date su tabele 5.11 i 5.12, koje sadrže deo podataka iz tabela 5.7 i 5.9, a sada se odnose isključivo na utakmice sa takmičarskim karakterom.

Tabela 5.11: Indeksi efikasnosti u analizi napada za utakmice od takmičarskog značaja

DMU/Utakmica	rezultat utakmice	Indeks efikasnosti	Prosečna efikasnost
SRB/FRO	2:0	140,38%	135,97%
SRB/LTU	3:0	102,00%	
SRB/AUT	1:0	237,50%	
SRB/FRA	1:1	100,00%	
SRB/ROM	5:0	100,00%	
FRA/SRB	1:2	100,00%	107,05%
AUT/SRB	3:1	100,00%	
ROM/SRB	3:2	100,00%	
FRO/SRB	2:0	135,26%	
LTU/SRB	1:2	100,00%	

Tabela 5.12: Indeksi efikasnosti u analizi odbrane za utakmice od takmičarskog značaja

DMU/Utakmica	rezultat utakmice	Indeks efikasnosti	Prosečna efikasnost
SRB/FRO	2:0	100,00%	100,00%
SRB/LTU	3:0	100,00%	
SRB/AUT	1:0	100,00%	
SRB/FRA	1:1	100,00%	
SRB/ROM	5:0	100,00%	
FRA/SRB	1:2	300,30%	178,37%
AUT/SRB	3:1	100,00%	
ROM/SRB	3:2	291,57%	
FRO/SRB	2:0	100,00%	
LTU/SRB	1:2	100,00%	

Kako je u analizi efikasnosti napada, za efikasnu jedinicu proglašena igra reprezentacije Srbije „kod kuće“ u duelima sa reprezentacijama Francuske i Rumunije, kao i na svim utakmicama odigranim „u gostima“, a u analizi defanzivne efikasnosti konstatovano da se sve utakmice na domaćem terenu i susreti sa Austrijom, Farskim ostrvima i Litvanijom "na strani" bile efikasne, interesantno je sagledati i komparirati prethodne sa novodobijenim rezultatima.

Tabela 5.13. Indeksi efikasnosti napada, odbrane i ukupni indeks efikasnosti u analizi operativne efikasnosti reprezentacije Srbije

DMU/Utakmica	rezultat utakmice	Indeks efikasnosti napada	Indeks efikasnosti odbrane	Indeks ukupne efikasnosti	Prosečna efikasnost
SRB/FRO	2:0	140,38%	100,00%	125,31%	134,92%
SRB/LTU	3:0	102,00%	100,00%	100,00%	
SRB/AUT	1:0	237,50%	100,00%	100,00%	
SRB/FRA	1:1	100,00%	100,00%	249,32%	
SRB/ROM	5:0	100,00%	100,00%	100,00%	
FRA/SRB	1:2	100,00%	300,30%	100,00%	154,64%
AUT/SRB	3:1	100,00%	100,00%	138,50%	
ROM/SRB	3:2	100,00%	291,57%	100,00%	
FRO/SRB	2:0	135,26%	100,00%	129,97%	
LTU/SRB	1:2	100,00%	100,00%	304,73%	

Posle razmatranja pojedinačnih indeksa efikasnosti napada i odbrane kao ulaznih veličina i učešća broja postignutih golova od strane reprezentacije Srbrije u ukupnom broju primljenih golova naših protivnika, kao i gol razliku na svakoj kvalifikacionoj utakmici, dolazi do evidentnih izmena u rezultatima dobijenim ponovnom primenom DEA modela.

Ukupan učinak zalaganja na terenu, ovog puta sublimirajući indekse različitih, ali svakako neodvojivih, aspekata ofanzivnog i defanzivnog delovanja tima Srbije, u relaciji sa izlaznim parametrima koji detaljnije oslikavaju karakter postignutog rezultata, efikasne "partije" naših fudbalera ostaju u duelu sa Litvanijom, Austrijom i Rumunijom u Beogradu, kao i prilikom "posete" Francuskoj i Rumuniji. Značajno je primetiti da mečevi protiv austrijske i litvanske državne selekcije, iako u nezavisnim analizama proglašenim za efikasne, u rezultatima nove analize identifikovani su kao neefikasni. U tumačenju rezultata, efikasnost naše selekcije bi se mogla očekivati na pomenutim mečevima da je ciljani nivo izlaza bio 1.385 (tj. 3.047) puta veći (umanjen za izravnjavajuću promenljivu). Konkretnije, na primeru ove dve utakmice, sa nivoom efikasnosti napada i odbrane koji je genersan na osnovu tehničko-taktičkih performansi prikazanih za vreme trajanja dogadjaja, očekivani rezultat bi morao donositi 4 gola prednosti Srbiji (u odnosu na stvarno postignuta 3) i učinak od oko 0.227 u ukupno primljenim golovima reprezentacije Austrije, odnosno, u analognoj analizi meča sa Litvanijom, bar nerešen rezultat. Slično rezltatima dobijenim u analizi efikasnosti napada, u meču sa Farskim ostrvima u Beogradu, sada, uzornu jedinicu predstavlja podjednaka kombinacija uticaja igara sa Austrijom i Rumunijom "kod kuće", što implicira da, bez obzira što je sa defanzivne tačke bila proglašena efikasnom jedinicom, u ovoj analizi je zadržala status neefikasne. Promena statusa jedinice iz efikasne u neefikasnu je vidljiva i na primeru utakmice Srbija - Francuska. Efikasna u oba pojedinačna razmatranja, sada ostaje udaljena od granice efikasnosti formirane uzorom na igru protiv selekcije Rumunije "kod kuće". Neefikasnost bi bila prevaziđena u slučaju da je tom prilikom došlo do gola prednosti za Srbiju, uz rezultatske okolnosti tako da broj datih golova Francuskoj na tom meču čini malo više od četvrtine ukupnog broja golova koje je ta reprezentacija primila u toku kvalifikacija. U kontekstu rezultata datih u tabeli 5.13, treba svakako ukazati na utakmicu Srbija - Rumunija u Beogradu, koja je, sama ili u linearnoj kombinaciji sa drugim performansima, kao uzorna jedinica svim neefikasnim jedinicama, što je opravdano i postigutim fantastičnim rezultatom na toj utakmici, odnosno, ubedljivom pobedom Srbije 5: 0.

Izolovanje taktičkih i tehničkih elemenata fudbalske igre, datih u numeričkom obliku kao evaluacija aktivnosti naših igrača na terenu (ili u slučaju defanzve: kroz nemogućnost da spreče identična kretanja i aktivnosti protivnika), doprinelo je stvaranju preduslova za primenu DEA modela u analizi efikasnosti pojedinačnog ili, kao u ovom slučaju, celog kruga fudbalskih dogadjaja. Svakako, neizostavnu ulogu ponovo dobija varijabilni izlazno orijentisan DEA model, koji sada, umesto separatnih razmatranja (u prethodnom poglavlju) efikasnosti napada i odbrane, integralno razmatra efikasnost naše reprezentacije na kvalifikacionom turniru za najveću fudbalsku smotru nacionalnih selekcija, uzmajući u obzir prethodno dobijene indekse efikasnosti u formi ulaznih veličina, i dva konteksta postignutog rezultata setovanog u vidu vrednosti izlaza. S obzirom da izlazne veličine modela u drigoj fazi direktno definišu „plasman" reprezentacije, dobijena ukupna efikasnost odgovara atletskoj (operativnoj) efikasnosti što implicira direktnu potvrdu hipoteze H2.

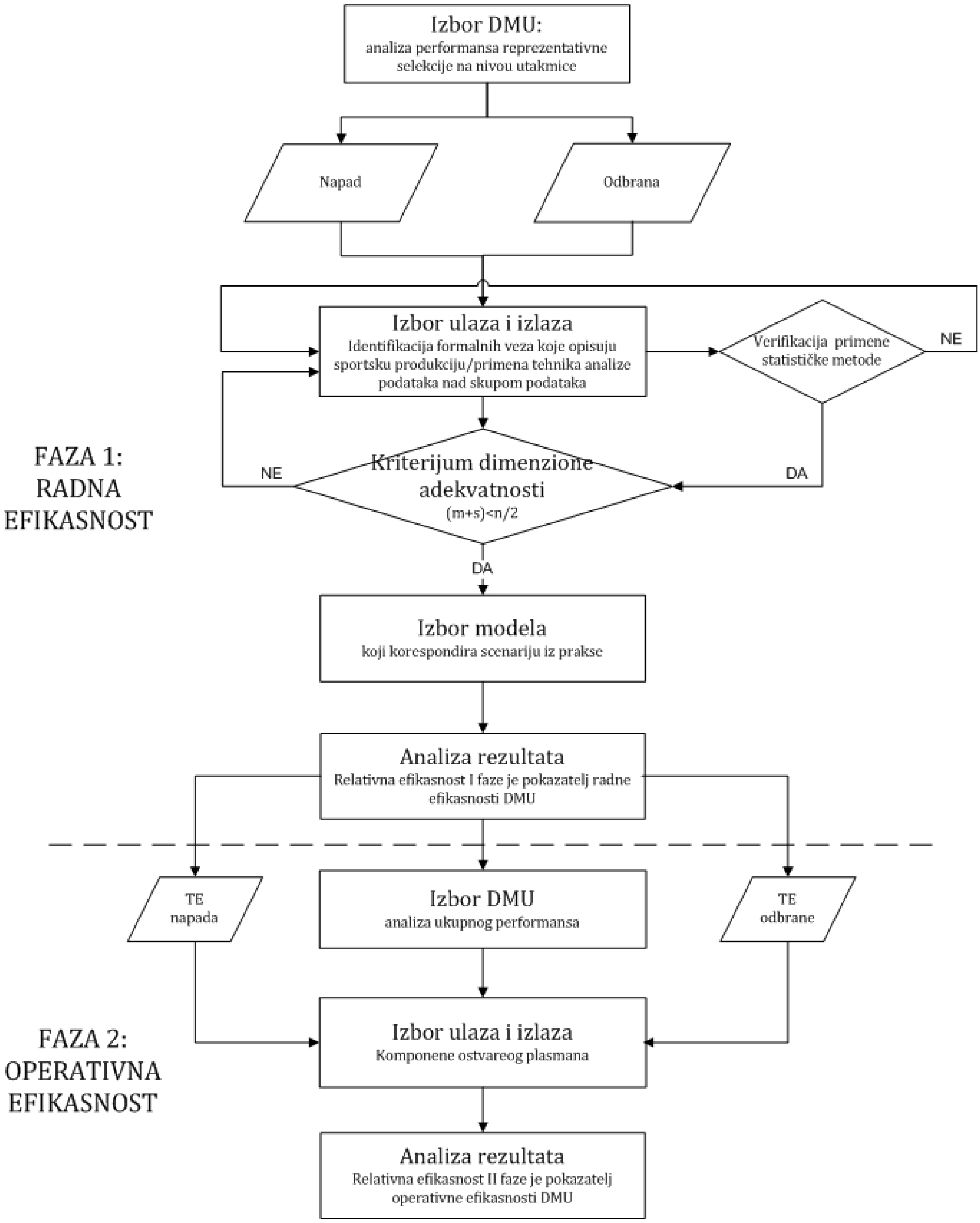
Osvrtom na rezultate, nedvosmisleno se može zaključiti da je karakteristika efikasnosti ukupne igre promenjena, tj. da je prezentovana igra i postignut rezultat našeg tima u utakmicama za plasman u grupnu fazu takmicenja na Svetskom prvenstvu 2010, pretprpeo transformacije u integralnom modelu. Utakmice na kojima je reprezentacija Srbije bila efikasna po oba aspekta, ali separatno, udruživanjem rezultata prethodne analize, ponele su epitet "neefikasne" i obrnuto. Time je opovrgnuta hipoteza H5 kojom efikasnost ofanzivnog i defanzivnog aspekta igre implicira operativnu efikasnost na nivou utakmice.

5.5. Metodološki koncept ocene efikasnosti sportskih organizacionih jedinica

Predloženi koncept, identifikovan eksperimentom merenja efikasnosti reprezentacije Srbije u kvalifikacionom ciklusu za Svetsko prvenstvo 2010. godine u Južnoj Africi, izložen je u vidu algoritamskog prikaza na sl. 5.2.

Prikazan metodološki postupak za ocenu radne i operativne efikasnosti obuhvata “sportski” segment produkcije u sportu. U implementaciji podrazumeva primenu dva odvojena DEA programa, čiji rezultati konvergiraju tumačenju fenomena sportske produkcije u integralnom kontekstu. Analiza efikasnosti napada i odbrane, zasnovana na tehničkim indikatorima igre, može se primeniti u različitim scenarijima iz prakse, u svim situacijama, generalno, gde proces produkcije implicira neophodnost koegzistencije sa “konkurencijom”, odnosno neposredno prisustvo protivnika. To dalje upućuje na primenljivost koncepta u široj klasi sportskih produkcionih jedinica. Svaka od predloženih faza, implementira se posebno, i u zavisnosti od identifikovanih ciljeva, koji svakako prethode uvođenju ovog (i svakog drugog) metodološkog okvira, može biti predmet posebnih razrada i modifikacija, a sve u interesu dobijanja svrsishodnih rezultata integralne analize.

Različite dekompozicije problema i razlike u polaznim strategijama u izboru pravca istraživanja upućuju na činjenicu da kompleksan proces modeliranja egzaktnih pojava sa ekonomskom relevantošću i socijalnim statusom kakvu sport poseduje, pored poteškoća, autoru predstavlja i veliki izazov i neisrpnu inspiraciju za dalji rad.



Sl. 5.2. Metodološki koncept za analizu fikasnosti sportskih organizacionih jedinica

6. Zaključak

U disertaciji je pokazano da se na osnovu operativnih znanja vezanih za prirodu „produkcije“ u sportu, uz visoku tačnost statističkih podataka u analizi, DEA može uspešno koristiti u pogledu merenja i analize performansi sportskih organizacionih jedinica. Na realnom primeru, korišćenjem teorijski i aplikativno verifikovanih naučnih modela DEA, razvijen je motodološki koncept i prikazana njegova uspešna primena u analizi efikasnosti sportskih organizacionih jedinica (fudbalskoj reprezentaciji), po prvi put u sportskoj industriji u Srbiji.

Imajući u vidu postavljene ciljeve, u disertaciji se mogu izdvajiti dve logičke celine. U prvom delu disertacije, koji čine drugo, treće i četvrto poglavlje, sistematičnim pristupom širem razvoju oblasti istraživanja, i u užem smislu, razvoju DEA analize sa specifikumom primene u sportu, dati su sveobuhvatan pregled i tumačenje ideje efikasnosti i hronološki pravac razvoja oblasti. Ovakav originalni pristup pregledu stanja u oblasti istraživanja, vodio je sagledavanju okvira dosadašnjeg, ali i budućeg razvoja i primene analize DEA metodom. Posebno je naglašena nedovoljna primena DEA u analizi efikasnosti sportskih organizacionih jedinica, kao i smernice za razvoj i moguće modifikacije DEA modela sportskih, posebno fudbalskih ekonomija. U okviru drugog, trećeg i četvrtog poglavlja disertacije, problemi modeliranja, merenja i analize efikasnosti proizvodnih jedinica su rešavani etapnim prilazom i kroz striktan, matematički formalan pristup. Prikazan je sveobuhvatan pregled DEA algoritama zasnovanih na konusnoj i/ili konveksnoj analizi i računarskoj geometriji. Da bi se razumela uloga sračunavanja u DEA, uspostavljena je veza između njenih algoritama i poznatog problema u računarskoj geometriji: problem određivanja ekstremnih tačaka poliedra sa konačnim brojem tačaka. Skup podataka u DEA analizi je konačna kolekcija tačaka u multidimenzionalnom prostoru. Jedinica o kojoj se odlučuje, DMU, kao entitet DEA, definisana je vektorom vrednosti, reprezentovanim tačkom u prostoru, čija dimenzija odredjuje za svaki entitet broj njegovih tzv. atributa (na primer, ulazi plus izlazi). Pretpostavka o tehnologiji rezultuje u četiri standardna „konveksna“ prinosa na obim DEA modela, za razliku od nekonveksnog modela sa „slobodnim razmeštajem“. Četiri različita konveksna modela sa definisanim prinosom na obim su rezultat različitih linearnih kombinacija u istom skupu podataka. Varijabilni prinos na obim je uslovljen konveksnom kombinacijom podataka i vodi tzv. „BCC“ modelu, dok konusna kombinacija podataka, u uslovima konstantnog prinosa na obim, rezultuje u klasu CCR modela. Izmedju varijabilnog i konstantnog prinosa na obim su razmatrani nerastući, odnosno neopadajući prinosi na obim, u zavisnosti da li je, pored uslova nenegativnosti koeficijenata, njihov zbir manji ili veći od jedan. Četiri pretpostavke o karakteru prinosa na obim proizvode poliedarske skupove koji „obavijaju“ podatke na četiri različita načina. Svaki od ovih skupova naziva se produkcionim skupom ili skupom zadate produkcione mogućnosti u DEA analizi. Poliedarski skupovi su definisani ograničenim linearnim operacijama konačne liste tačaka i prikazani su, ne unutrašnjom reprezentacijom okarakterisanom presekom poluprostora, već eksternom reprezentacijom konusnih i/ili konveksnih karakteristika. Odredjivanje indeksa efikasnosti DMU za ma koji usvojeni prinos na obim zahteva pronalaženje položaja vektora entiteta u skupu produkcionih mogućnosti u odnosu na njegove granice. Analizom položaja DMU - u unutrašnjosti ili na granici skupa, i ako se nalazi na granici, da li je to granica efikasnosti, DEA analiza daje odgovor na fundamentalno pitanje da li je efikasnost postignuta ili ne.

U uvodu petog poglavlja rada, u kome je opisan izvedeni eksperiment i rezultati koji su u njemu dobijeni, dat je pregled literature iz oblasti sportskih ekonomija i izložen je višestepeni DEA model, odnosno kaskadna sprega modela. U cilju određivanja relativne efikasnosti napada i odbrane, kao i atletske i socijalne efikasnosti svake sportske organizacione jedinice, primenjena je dekompozicija na tri dominantne komponente – radnu, operativnu i socijalnu. Analogno ideji rešavanja dvostepenog DEA modela i sračunavanju ukupne efikasnosti kroz definisanje novog optimizacionog procesa, identifikovana je potreba za uspostavljanje sličnih relacija u trostepenom, ili ako je to moguće, u opštem slučaju višestepenom DEA modelu, na primer, za *k* kaskadno povezanih DEA blokova. Uvodjenjem metodološkog okvira i metodoloških aspekata analize višestepenih blokova, na originalan način pristupljeno je problemu analize efikasnosti sportskih organizacionih jedinica, u konkretnom slučaju nacionalnog fudbalskog tima – reprezentacije Srbije u periodu kvalifikacija za FIFA Svetsko prvenstvo u Južnoj Africi 2010. godine. Kroz odvojene analize efikasnosti napada i odbrane, kao i sublimirajući indekse ovih različitih, ali svakako neodvojivih aspekata fudbalske igre, pokazano je da je DEA uspešna tehnika matematičkog programiranja, čiji rezultati korespondiraju polaznoj hipotezi u ovom slučaju. Dostupnost podataka na osnovu preciznih statistika, prvi put uvedenih u ovom delu Evrope zaključivanjem ugovora između Fudbalskog saveza Srbije i Sport Universal Process SAS – tvorcem globalnog informacionog sistema AMISCO za pomoć u upravljanju u profesionalnom sportskom sektoru, zadovoljila je glavni preduslov značajnosti statističkih podataka korišćenih tehničko-taktičkih elemenata igre u analizi. Izbor modela za merenje tehničke efikasnosti fudbalske reprezentacije izvršen je u saglasnosti sa generalnim DEA okvirom tako da odgovara specifičnom scenariju iz prakse. Kao što se moglo naslutiti, razmatrana efikasnost je bila bazirana na tehničkim aspektima sporta, a ne na promenljivim koje imaju ekonomsku prirodu. Izbor ulaza i izlaza, izvršen je od strane autora disertacije uz konsultovanje eksperata fudbalske trenerske struke, a redukcije i ekspanzije strukture modela vršene su sa ciljem prilagođavanja zahtevima same metode i uz pomoć odgovarajuće multivarijacione tehnike za analizu podataka. Računarska analiza podataka realizovana je primenom EMS (Efficiency Measurement System) softvera.

U primeru je korišćen BCC model konveksne granice efikasnosti i promenljivim prinosom na obim, u izlaznoj orijentaciji, kojom se težilo maksimizaciji izlaza (umesto smanjenja ulaza) sa datom količinom ulaza što odgovara iskonskoj takmičarskoj prirodi svakog sporta. U prvoj fazi ocenjena je efikasnost napada i odbrane posebno, da bi se u drugoj fazi dobijeni indeksi efikasnosti našli u ulozi ulaznih veličina u produkciji dva različita konteksta postignutih rezultata (učešće postignutih golova naše reprezentacije u ukupnom broju primljenih golova protivnika i gol razlika koju je Srbija postigla na svakom pojedinačnom meču). Pokazano je da je karakteristika efikasnosti ukupne igre u odnosu na efikasnost zasebnih aspekata promenjena, odnosno da su utakmice, iako efikasne po nekom od zasebnih aspekata igre, u integralnoj analizi predstavljene kao neefikasne što suštinski korespondira postignutim rezultatima u praksi. Analiza i validacija dobijenih rezultata u eksperimentu u saglasnosti je sa stavovima članova stručnog štaba reprezentacije Srbije, posebno sa trenerima internacionalnog iskustva zaduženim za fudbalsku analitiku. Primenjeni eksperment uslovio je razvoj metodološkog koncepta, koji može biti korišćen u analizi efikasnosti analognih sposrtkih organizacionih jedinica.

U doktorskoj disertaciji ostvareni su sledeći naučni i stručni doprinosi, delimično objavljeni u radovima [Petrović Đorđević i dr. 2010, Petrović Đorđević i Martić, 2010, Petrović Djordjević et al. 2015]:

- Na originalan način dat je sistematski hronološki prikaz razvoja oblasti od fundamentalnih radova koji su učestvovali u formiranju oblasti do savremenih rezultata objavljenih u vodećim naučnim publikacijama;

- Dat je hronološki pregled radova sa osvrtom na transformaciju i razvoj ideje primene DEA u oblasti industrije sporta, posebno u fudbalu, kao i pregled po vrsti primenjenih metoda, razmatranih indikatora i sl.

- Na sveobuhvatan način je pristupljeno striktnoj matematičkoj formalizaciji DEA algoritama i insistiranju na ulozi sračunavanja u DEA uspostavljanjem veza izmedju prikazanih algoritama;

- Dat je kritički osvrt na analizu rezultata neparametarske analize modela organizacionih jedinica u estimaciji nekonveksnih i konveksnih granica efikasnosti u uslovima aksiomatskog prilaza produkcionoj teoriji i analiza granice efikasnosti zasnovanoj na karakteru obima poslovanja u ulozi reprezenata neparametarskih estimatora organizacionih jedinica;

- Izložena je dekompozicija efikasnosti na tri dominantne komponente u modelima sportskih ekonomija;

- Saglasno predlogu za rešavanje dvostepenog DEA modela i sračunavanju ukupne efikasnosti kroz definisanje novog optimizacionog procesa u metodološkim okvirima, identifikovana je potreba za uspostavljanje analognih relacija u trostepenom, ili ako je to moguće, u opštem slučaju višestepenog DEA modela, na primer, za *k* kaskadno povezanih DEA blokova;

- Izveden je eksperiment, tj. realizovana je originalna primena DEA za analizu efikasnosti sportskih organizacionih jedinica, konkretno fudbalske reprezentacije Srbije u kvalifikacionom ciklusu za FIFA Svetsko prvenstvo 2010. godine u Južnoj Africi, nakon niza predloženih transformacija, redukcija i ekspanzija u strukturi primenjenog modela radi prilagodjavanja zahtevima metode i prirode problema;

- Dobijeni rezultati potvrđuju postavljene hipoteze da se DEA uspešno može koristiti u analizi efikasnosti, kako pojedinačnih aspekata napada i odbrane – parcijalnim pokazateljima radne efikasnosti, tako i u integralnoj analizi oba aspekta fudbalskih veština, što korespondira operativnoj efikasnosti;

- Eksperment je implicirao identifikaciju metodološkog koncepta, koji može biti korišćen, generalno, i u analizi efikasnosti analognih sportskih organizacionih jedinica.

Doktorska disertacija otvara mogućnost daljih pravaca istraživanja u užoj naučnoj oblasti, na bar dva načina. „Aplikacije vođene teorijom“ mogu dati doprinos DEA metodologiji primenom algoritama na sličnim problemima različitih sportskih organizacionih jedinica – u drugim sportskim ekonomijama (npr. košarci, rukometu, vaterpolu) u uslovima različitih scenarija iz prakse. Suprotno, pravac istraživanja koji bi mogao doprineti u teorijskom smislu razvoju DEA, podrazumevao bi identifikaciju rigoroznih matematičkih uslova koji bi garantovali generalnu prihvatljivost rešavanja opšteg problema *k* kaskadnih DEA blokova, pružajući matematički striktno okruženje i opravdanost konvertovanja kaskadnih problema u nove optimizcione probleme iz grupe linearnog programiranja.

REFERENCE

[Afriat, 1972] S. Afriat, *Efficiency estimation of production functions,* International Economic Review, 13(1972), pp. 568-598.

[Ali and Seiford, 1990] I. Ali and L. Seiford, *Translation invariance in DEA,* Operational Research Letters, 9(1990), pp. 403-405.

[Ali and Seiford, 1993] I. Ali and L. Seiford, *Computational accuracy and infinitesimals in data envelopment analysis,* INFOR, 31(1993), pp. 290-297.

[Anderson and Sharp, 1977] T.R. Anderson and G.P. Sharp, *A new measure of baseball batters using DEA,* Annals of Operations Research, 73(1977), pp. 141-151.

[Arnold et al, 1998] V. Arnold, I. Bardhan, W.W. Cooper and A. Gallegos, *Primal and dual optimality in computer codes using two-stage solution procedures in DEA,* in: J.E. Aronson and S. Zionts, ed., *Operations Research: Models and Applications,* Westport, Quorum Books, 1998.

[Athanassopoulos, 1995] H.D. Athanassopoulos, *The evolution of non-parametric frontier amalysis methods: A review and recent developments,* SPOUDAI, 45(1995), pp. 13-45.

[Banker, 1980] R.D. Banker, *Studies in cost allocation and efficiency evaluation,* DBA Thesis, Harvard University Graduate School of Business, 1980.

[Banker, 1984] R.D. Banker, *Estimating most productive scale size using data envelopment analysis,* European Journal of Operational Research, 17(1984), pp.33-44.

[Banker and Thrall, 1992] R.D. Banker and R.M. Thrall, *Estimation of returns to scale using data envelopment analysis,* European Journal of Operational Research, 62(1992), pp. 74-84.

[Banker et al. 1984] R.D. Banker, A. Charnes and W.W. Cooper, *Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis,* Management Science, 30(1984), pp. 1078-1092.

[Banker et al. 1996] R.D. Banker, I. Bardhan and W.W. Cooper, *A note on returns of scale in DEA,* European Journal of Operational Research, 88(1996), pp. 583-585.

[Banker et al. 2004] R.D. Banker, W.W. Cooper, L.M. Seiford, R.M. Thrall and J. Zhu, *Returns to scale in different DEA models,* European Journal of Operational Research, 154(2004), pp. 345-362.

[Bosca et al. 2009] J.E. Bosca, V. Liern, A. Martinez and R. Sala*, Increasing offensive or defensive efficiency: An analysis of Italian and Spanish football,* Omega, 37(2009), pp. 63-78.

[Carmichael and Thomas, 1995] F. Carmichael and D. Thomas, *Production and efficiency in team sports : An investigation og rugby league football,* Applied Economics, 27(1995), pp. 859-869.

[Carmichael et al. 2000] F. Carmichael, D. Thomas and R. Ward, *Team performance 2 : Production and efficiency in English premiership football,* Aberystwyth Research Paper 3, 2000.

[Charnes and Cooper, 1962] A. Charnes, W.W. Cooper, *Programming with linear fractional functionals,* Naval Research Logistics Quarterly, 9(1962), pp. 181-185.

[Charnes et al. 1978] A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units,* European Journal of Operational Research 2(1978), pp. 429-444.

[Charnes et al. 1979] A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, *Short communication : Measuring the efficiency of decision making units,* European Journal of Operational Research 3(1979), p.339.

[Charnes et al. 1985] A. Charnes, W.W. Cooper, B. Golany, L.M. Seiford and J. Stutz, *Foundations of data envelopment analysis and Pareto-Koopmans empirical production functions,* Journal of Econometrics, 30(1985), pp. 91-107.

[Chen et al. 2009] Y. Chen, W.D. Cook, N. Li and J. Zhu, *Additive efficiency decomposition in two-stage DEA,* European Journal of Operational Research, (2009), pp. 401-406.

[Cooper et al. 2000] W.W. Cooper, M.S. Seiford and K. Tone, Introduction to *Data Envelopment Analysis and its uses: with DEA-Solver Software and References,* Springer, 2000.

[Cooper et al. 2007] W.W. Cooper, L.M. Seiford and K. Tone, *Data Envelopment Analysis : A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software,* Second Edition, Springer, 2007.

[Cooper*, 2014] W.W. Cooper*, *Origin and Development of Data Envelopment Analysis> Challenges and Opportunities,* Data Envelopment Analysis Journal 1(2014), pp. 3-10. /*Deceased. Editorial changes in the manuscript required by the review process after his death were made by members of the DEAJ Senior Editorial Board/

[Dawson et al. 2000a] P. Dawson, S. Dobson and B. Gerrard, *Stochastic frontiers and the temporal structure of managerial efficiency in English soccer,* Journal of Sports Economics, 1-4(2000), pp. 341-362.

[Dawson et al. 2000b] P. Dawson, S. Dobson and B. Gerrard, *Estimating coach efficiency in professional team sports: Evidence from English Association Eootball,* Scottish Journal of Political Economy, 47(2000), pp. 399-421.

[Debreu, 1951] G. Debreu, *The coefficient of resource utilization,* Econometrica, 19(1951), pp. 273-292.

[Deprins et al. 1984] L. Deprins, L. Simar and H. Tulkens, *Measuring labor efficiency in post offices,* in: M. Marchand, P. Pestieau, H. Tulkens, eds., *The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurement,* North Holland, pp. 243-267.

[Dula, 2002] J.H. Dula, *Computations in DEA,* Pesquisa Operational, 22(2002), pp. 165-182.

[Emrouznejad et al. 2008] A. Emrouznejad, B. Parker and G. Tavares, *Evaluation of research in efficiency and productivity: A survey and analysis of the first 30 years of scholarly literature in DEA,* Journal of Socio-Economics Planning Science, 42(2008), pp. 151-157.

[Fare et al. 1994] R. Fare, S. Grosskopf and C.A.K. Lovell, *Production Frontiers,* Cambridge University Press, 1994.

[Farrell, 1957] M.J. Farrell, *The measurement of productive efficiency,* Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 120(1957), pp. 253-290.

[Fizel and D'Itri, 1996] J.L. Fizel and M. D'Itri, *Estimating managerial efficiency: The case of college basketball coaches,* Journal of Sport Management, 10(1996), pp. 435-445.

[Forsund and Sarafoglou, 2000] F.R. Forsund and N. Sarafoglou, *On the Origins of Data Envelopment Analysis,* Discussion paper, Department of Economics and Social Sciences, NLH, University of Oslo

[Fraucke, 1999] W. Fraucke, *Produktionsfunktionen im professionellen Teamsport: Das Beispiel der Basketball-Bundesliga,* in: D. Horch, ed., *Professionalisierung im Sportmanagement,* Meyer and Meyer, 1999, pp. 308-324.

[Frick and Wagner, 1998] B. Frick and G. Wagner, *Sport als forschungsgegenstand der institutionen-okonomik,* Sportwissenschaft, 28(1998), pp. 328-343.

[Garcia-Sanchez, 2007] I.M. Garcia-Sanchez, *Efficiency and effectiveness of Spanish football teams: A three-stage-DEA approach,* Springer-Verlag, 2007.

[Glover and Sueyoshi, 2009] F. Glover and T. Sueyoshi, *Contributions of Professor William W. Cooper in Operations Research and Management Science,* European Journal of Operational Research, 197(2009), pp. 1-16.

[Golany and Yu, 1997] B. Golany and G. Yu, *Estimating returns to scale in DEA,* European Journal of Operational Research, 103 (1997), pp. 28-37.

[Haas, 2003] D.J. Haas, *Productive efficiency of English football teams: A data envelopment analysis approach,* Managerial and Decision Economics, 24(2003), pp. 403-410.

[Haas et al. 2004] D.J. Haas, M.G. Kocher and M. Sutter, *Measuring efficiency of German football teams by data envelopment analysis,* Central European Journal of Operations Research, 12(2004), pp. 251-268.

[Hadley et al. 2000] L. Hadley, M. Poitras, J. Ruggiero and S. Knowles, *Performance evaluation of National Football League teams,* Managerial and Decision Economics, 21(2000), pp. 63-70.

[Hardle and Jeong, 2005] W. Hardle and S.O. Jeong, *Nonparametric productivity analysis,* SFB 649, Economic Risk, Berlin, 2005.

[Hoehn and Szymanski, 1999] T. Hoehn and S. Szymanski, *The Americanization of European football,* Economic Policy, 28(1999), pp. 63-70.

[Jeremić, 2012] V.M. Jerenić, *Statistički model efikasnosti zasnovan na Ivanovićevom odstojanju,* Doktorska disertacija, Fakultet organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu, 2012.

[Koopmans, 1951] T.C. Koopmans, *Activity Analysis of Production and Allocation,* John Wiley and Sons, New York, 1951.

[Martić i dr. 1998] M. Martić, G. Savić i M. Vujošević, *Poređenje analize obavijanja podataka i metode PROMETHEE pri izboru personalnog računara,* Info science, 6(1998), pp. 23-29.

[Martić and Savić, 1998] M. Martić and G. Savić, *An application of DEA for comparative analysis and ranking of regions in Serbia with regards to social-economic development,* Presented at ESI XVI: DEA-20 years on, Coventry, UK, 1998, 8/16-8/26.

[Martić and Savić, 2001] M. Martić and G. Savić, *An application of DEA for comparative analysis and ranking of regions in Serbia with regards to social-economic development,* European Journal of Operational Research, 132(2001), pp. 343-356.

[Моргунов, 2003] Е.П. Моргунов, *Многомерня классификация на основе аналитического метода оценки эффективности сложных систем,* диссертация, Красноярск, 2003.

[Моргунова, 2006] О.Н. Моргунова, *Методы и алгоритмы исследования эффективности сложных иерархических систем,* диссертация, Красноярск, 2006.

[Neale, 1964] W.C. Neale, *The peculiar economics of professional sports: A contribution to the theory of the firm I sporting competition and in market competition,* The Quarterly Journal of Economics, 78(1964), pp. 1-14.

[Pallant, 2009] J. Pallant, *SPSS Priručnik za preživljavanje,* Mikro knjiga, Beograd, 2009

[Pareto, 1906] V. Pareto, *Manuale d'economia politico,* Milan, 1906 (*Manuel d'economie politique,* Marcel Giard, Paris, 1927).

[Pastor et al. 1999] J.T. Pastor, J.L. Ruiz and I. Sirvent, *An enhanced DEA Russell graph efficiency measure,* European Journal of Operational Research, 115(1999), pp. 596-607.

[Petrović Đorđević i dr. 2010] D. Petrović Đorđević, A. Đoković i G. Savić, *Merenje tehničke efikasnosti fudbalske reprezentacije Srbije u utakmicama kvalifikacija za SP 2010,* CD Zbornik radova, SymOrg, 2010.

[Petrović Đorđević i Martić, 2010] D. Petrović Đorđević i M. Martić, *Primena dvofazne DEA u merenju tehničke efikasnosti fudbalske reprezentacije Srbije na utakmicama kvalifikacija za Svetsko prvenstvo u Južnoj Africi 2010* , SYM-OP-IS, 2010.

[Petrović Djordjević et al. 2015] D. Petrovic Djordjevic, M. Vujosevic and M. Martic, *Measuring Efficiency of Football Teams by Multy Stage DEA Model*, Technical Gazette, Vol.22, No. 3, June 2015. Print: ISSN 1330-3651, Online: ISSN 1848-6339, Acceptance of Article ID: TV-20140306134047. Original scientific paper. The Journal indexed in Web of Science (Science Citation Index Expanded), Journal Citation Reports (IF = 0,615 for 2013), Scopus, INSPEC, Compendex, Geo Abstracts etc. M22

[Preston and Szymanski, 2000] I. Preston and S. Szymanski, *Racial discrimination in English football,* Scottish Journal of Political Economy, 47(2000), pp. 342-363.

[Rhodes, 1978] E.L. Rhodes, *Data envelopment analysis and related approaches for measuring the efficiency of decision making units with an application to program follow through in U.S. education,* Ph.D. thesis, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1978.

[Rottenberg, 1956] S. Rottenberg, *The baseball player's labor-market,* Journal of Political Economy, 64(1956), pp. 242-258.

[Sala-Garrido et al. 2009] R. Sala-Garrido, V.L. Carrion, A.M. Esteve and J.E. Bosca, *Analysis and evolution of efficiency in the Spanish soccer league (2000/01-2007/08),* Journal of Quantitative Analysis in Sports, 5(2009), pp. 1-22.

[Savić, 2012] G.I. Savić, *Komparativna analiza efikasnosti u finansijskom sektoru*, Doktorska disertacija, Fakultet organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu, 2012.

[Scott et al. 1985] F.A. Scott, J.E. Long and K. Somppi, *Salary vs marginal revenue product under monopsony and competition: The case of professional basketball,* Atlantic Economic Journal, 13(1985), pp. 50-59.

[Scully, 1974] G.W. Scully, *Pay and performance in Major league baseball,* American Economic Review, 64(1974), pp. 915-930.

[Seiford and Zhu, 1999] L.M. Seiford and J. Zhu, *An investigation of returns to scale in data envelopment analysis,* OMEGA, 27(1999), pp. 1-11.

[Sexton and Lewis, 2003] T.R. Sexton and H.F. Lewis, *Two-stage DEA: An application to major league baseball,* Journal of Productivity Analysis, 19(2003), pp. 227-249.

[Shephard, 1970] R.W. Shephard, *Theory of Cost and Production Functions,* Princeton University Press, 1970.

[Szymanski, 2000] S. Szymanski, *A market test for discrimination in the English professional soccer leagues,* Journal of Political Economy, 108(2000), pp. 590-603.

[Sueyoshi et al. 1999] T. Sueyoshi, K. Ohnishi and Y. Konase, *A benchmark approach for baseball evaluation,* European Journal of Operational Research, 115(1999), pp. 429-448.

[Tavares, 2002] G. Tavares, *A Bibliography of data envelopment analysis (1978-2001),* Rutcor Research Report, 2002.

[Thanasis, 2010] B.P. Thanasis, *Analyzing the operating efficiency of Greek football clubs,* Master thesis, University of Macedonia, 2010.

[Tone, 1996] K. Tone, *A simple characterization of returns to scale in DEA,* Journal of the Operational Research, Society of Japan, 39 (1996), pp. 604-613.

[Tone, 2001] K. Tone, *A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis,* European Journal of Operational Research, 130 (2001), pp. 243-250.

[Tulkens, 1993] H. Tulkens, *On FDH efficiency analysis: Some methodological issues and applications to retail banking, courts and urban transit,* Journal of Productivity Analysis, 4(1993), pp. 183-210.

[Zak et al. 1979] T. Zak, C. Huang and J. Siegfried, *Production efficiency: The case of professional basketball,* Journal of Business, 52(1979), pp. 379-392.

Prilog 1-

Podaci o odigranim utakmicama (AMISCO PRO)

Tabela 1: AMISCO analiza utakmice : Srbija – Farska ostrva

	SRB			FRO		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	46:05	48:22	94:28	46:05	48:22	94:28
Efektivno vreme (mm:ss)	29:35	24:24	53:59	29:35	24:24	53:59
% vreme poseda lopte	67.17	58.27	63.2	32.73	41.73	36.8
Golovi	1	1	2	0	0	0
Faulovi	5	4	9	6	9	15
Korneri	3	3	6	1	0	1
Ofsajdi	2	1	3	0	1	1
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	11	8	**19**	2	2	**4**
% udaraca u okvir gola	36	63	**47**	0	0	**0**
Br pasova iz igre	330	215	**545**	98	90	**188**
% uspešnih pasova iz igre	92	88	**90**	67	79	**73**
Br pasova iz igre u napred	90	62	**152**	39	29	**68**
% uspešnih pasova iz igre u napred	84	74	**80**	38	45	**41**
Br prodora u 1/3	67	47	**114**	19	13	**32**
% uspešnih prodora u 1/3	73	83	**77**	26	46	**34**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	23	9	**32**	2	1	**3**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	91	89	**91**	0	0	**0**
Br prodora u 1/3 – po sredini	29	28	**57**	11	6	**17**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	55	75	**65**	18	33	**24**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	15	10	**25**	6	6	**12**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	80	90	**84**	50	0	**58**
Br ulaza u kazneni prostor	9	11	**20**	2	1	**3**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	33	45	**40**	50	0	**33**
Br centaršuteva	31	20	**51**	3	2	**5**
% uspešnih centar šuteva	16	25	**20**	0	50	**20**
Br asistencija po udarcu	34.91	32.13	**33.74**	67.5	71	**69.25**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	43.46	39.35	**41.71**	36.06	31.84	**33.77**
Br individualnih poseda lopte	406	289	**695**	152	161	**313**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	107	103	**210**	18	16	**34**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2.18	2.22	**2.2**	2.05	2.12	**2.08**
Vreme u ind. posedu lopte	08:50	06:31	**15:22**	03:44	04:27	**08:12**
Br dobijenih poseda lopte	44	39	**83**	37	35	**72**
Br izgubljenih poseda lopte	54	55	**109**	54	54	**108**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0.13	0.19	**0.16**	0.36	0.34	**0.35**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	38	42	**80**	38	42	**80**
% osvojenih duela	58	48	**53**	42	52	**48**
N duela na zemlji	23	19	**42**	23	19	**42**
% osvojenih duela na zemlji	52	37	**45**	48	63	**55**
Br duela sa obaranjem igrača	1	7	**8**	1	7	**8**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	0	29	**25**	100	71	**75**
Br vazdušnih duela	14	16	**30**	14	16	**30**
% osvojenih vazdušnih duela	71	69	**70**	29	31	**30**

Tabela 2: AMISCO analiza utakmice : Srbija – Litvanija

	SRB			LTU		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	46:24	47:04	93:28	46:24	47:04	93:28
Efektivno vreme (mm:ss)	25:06	29:13	54:19	25:06	29:13	54:19
% vreme poseda lopte	55,49	49,21	52,11	44,51	50,79	47,89
Golovi	2	1	3	0	0	0
Faulovi	10	8	18	8	7	15
Korneri	3	5	8	0	1	1
Ofsajdi	2	1	3	1	1	2
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	7	7	**14**	3	5	**8**
% udaraca u okvir gola	29	57	**43**	0	40	**25**
Br pasova iz igre	207	191	**398**	163	192	**355**
% uspešnih pasova iz igre	81	83	**82**	73	83	**78**
Br pasova iz igre u napred	71	65	**136**	78	54	**132**
% uspešnih pasova iz igre u napred	76	72	**74**	71	67	**69**
Br prodora u 1/3	35	32	**67**	39	32	**71**
% uspešnih prodora u 1/3	57	56	**57**	59	53	**56**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	10	6	**16**	7	3	**10**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	50	100	**69**	43	100	**60**
Br prodora u 1/3 – po sredini	20	21	**41**	21	20	**41**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	60	29	**44**	67	45	**56**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	5	5	**10**	11	9	**20**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	60	80	**70**	55	0	**55**
Br ulaza u kazneni prostor	2	7	**9**	6	4	**10**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	50	29	**33**	33	0	**20**
Br centaršuteva	14	17	**31**	14	11	**25**
% uspešnih centar šuteva	29	29	**29**	14	18	**16**
Br asistencija po udarcu	36.29	33.43	**34.86**	68	46.8	**54.75**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	43.04	37.59	**40.24**	46.72	33.71	**38.73**
Br individualnih poseda lopte	286	261	**547**	233	264	**497**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	50	50	**100**	57	42	**99**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	1.99	2.05	**2.02**	2.03	2.28	**2.16**
Vreme u ind. posedu lopte	05:54	06:13	**12:07**	04:22	06:56	**11:18**
Br dobijenih poseda lopte	50	52	**102**	54	49	**103**
Br izgubljenih poseda lopte	69	59	**128**	70	59	**129**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0.24	0.23	**0.23**	0.3	0.22	**0.26**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	49	37	**86**	49	37	**86**
% osvojenih duela	55	54	**55**	45	46	**45**
N duela na zemlji	27	16	**43**	27	16	**43**
% osvojenih duela na zemlji	63	50	**58**	37	50	**42**
Br duela sa obaranjem igrača	0	7	**7**	0	7	**7**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	-	43	**43**	-	57	**57**
Br vazdušnih duela	22	14	**36**	22	14	**36**
% osvojenih vazdušnih duela	45	64	**53**	55	36	**47**

Tabela 3: AMISCO analiza utakmice : Srbija – Bugarska

	SRB			BLG		
Utakmica – statistički podaci	**1st**	**2nd**	**Total**	**1st**	**2nd**	**Total**
Ukupno vreme(mm:ss)	45:09	45:14	90:23	45:09	45:14	90:23
Efektivno vreme (mm:ss)	26:36	29:47	56:23	26:36	29:47	56:23
% vreme poseda lopte	49,46	45,22	47,22	50,54	54.78	52,78
Golovi	4	2	6	1	0	1
Faulovi	9	8	17	8	7	15
Korneri	3	1	4	0	5	5
Ofsajdi	3	0	3	3	1	4
Elementi taktike – statistički podaci	**1st**	**2nd**	**Total**	**1st**	**2nd**	**Total**
Udarci na gol	14	6	**20**	7	11	**18**
% udaraca u okvir gola	57	50	**55**	71	45	**56**
Br pasova iz igre	160	145	**305**	172	164	**336**
% uspešnih pasova iz igre	86	79	**83**	81	83	**82**
Br pasova iz igre u napred	51	51	**102**	58	45	**103**
% uspešnih pasova iz igre u napred	78	69	**74**	71	67	**69**
Br prodora u 1/3	21	17	**38**	23	22	**45**
% uspešnih prodora u 1/3	57	47	**53**	57	64	**60**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	9	6	**15**	9	3	**12**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	78	50	**67**	56	100	**67**
Br prodora u 1/3 – po sredini	8	5	**13**	12	16	**28**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	25	20	**23**	50	50	**50**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	4	6	**10**	2	3	**5**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	75	50	**60**	100	0	**100**
Br ulaza u kazneni prostor	3	2	**5**	2	3	**5**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	33	50	**40**	50	0	**20**
Br centaršuteva	12	10	**22**	5	18	**23**
% uspešnih centar šuteva	58	30	**45**	20	28	**26**
Br asistencija po udarcu	14.14	40.33	**22**	30.86	26.73	**28.33**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	32.26	46.85	**38.93**	35.55	41.19	**37.56**
Br individualnih poseda lopte	230	263	**493**	242	330	**572**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	57	40	**91**	46	109	**155**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2,37	2,02	**2,18**	2,24	2,11	**2,16**
Vreme u ind. posedu lopte	06:08	05:09	**11,18**	06:26	07:08	**13:34**
Br dobijenih poseda lopte	37	49	**86**	36	51	**87**
Br izgubljenih poseda lopte	50	63	**113**	50	63	**113**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,22	0,24	**0,23**	0,21	0,19	**0,2**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	42	36	**78**	42	36	**78**
% osvojenih duela	60	61	**60**	40	39	**40**
N duela na zemlji	17	12	**29**	17	12	**29**
% osvojenih duela na zemlji	65	42	**55**	35	58	**45**
Br duela sa obaranjem igrača	7	11	**18**	7	11	**18**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	43	64	**56**	57	36	**44**
Br vazdušnih duela	18	13	**31**	18	13	**31**
% osvojenih vazdušnih duela	61	77	**68**	39	23	**32**

Tabela 4: AMISCO analiza utakmice : Srbija – Ukrajina

	SRB			UKR		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	46:04	47:58	94:03	46:04	47:58	94:03
Efektivno vreme (mm:ss)	17:24	28:03	55:27	17:24	28:03	55:27
% vreme poseda lopte	48,36	58,04	53.26	54,64	41,96	46,74
Golovi	0	0	0	1	0	1
Faulovi	7	10	17	11	20	31
Korneri	4	3	7	0	0	0
Ofsajdi	3	0	3	1	0	1
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	9	8	**17**	2	6	**8**
% udaraca u okvir gola	22	38	**29**	50	50	**50**
Br pasova iz igre	169	171	**340**	185	135	**320**
% uspešnih pasova iz igre	78	80	**79**	77	77	**77**
Br pasova iz igre u napred	65	65	**130**	58	47	**105**
% uspešnih pasova iz igre u napred	60	60	**60**	62	64	**63**
Br prodora u 1/3	36	29	**65**	39	26	**65**
% uspešnih prodora u 1/3	56	31	**45**	46	54	**49**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	11	4	**15**	12	7	**19**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	64	75	**67**	50	57	**53**
Br prodora u 1/3 – po sredini	22	20	**42**	22	16	**38**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	50	30	**40**	50	50	**50**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	3	5	**8**	5	3	**8**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	67	0	**25**	20	0	**38**
Br ulaza u kazneni prostor	5	0	**5**	4	4	**8**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	20	-	**20**	0	25	**13**
Br centaršuteva	21	12	**33**	4	10	**14**
% uspešnih centar šuteva	24	8	**18**	0	20	**14**
Br asistencija po udarcu	26,22	31,13	**28,53**	118,5	32,5	**54**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	42,94	32,81	**37,07**	41,96	50,78	**45,53**
Br individualnih poseda lopte	263	291	**554**	256	213	**469**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	65	35	**100**	43	42	**85**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2,07	2,2	**2,14**	1,91	1,75	**1,84**
Vreme u ind. posedu lopte	05:29	07:35	**13:05**	05:38	03:50	**09:29**
Br dobijenih poseda lopte	50	57	**107**	56	52	**108**
Br izgubljenih poseda lopte	67	69	**136**	68	69	**137**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,25	0,24	**0,25**	0,27	0,32	**0,29**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	55	63	**118**	55	63	**118**
% osvojenih duela	56	52	**54**	44	48	**46**
N duela na zemlji	29	23	**52**	29	23	**52**
% osvojenih duela na zemlji	48	30	**40**	52	70	**60**
Br duela sa obaranjem igrača	4	9	**13**	4	9	**13**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	50	89	**77**	50	11	**23**
Br vazdušnih duela	22	31	**53**	22	31	**53**
% osvojenih vazdušnih duela	68	58	**62**	32	42	**38**

Tabela 5: AMISCO analiza utakmice : Srbija – Švedska

	SRB			SWE		
Utakmica – statistički podaci	**1st**	**2nd**	**Total**	**1st**	**2nd**	**Total**
Ukupno vreme(mm:ss)	47:40	48:05	95:45	47:40	48:05	95:45
Efektivno vreme (mm:ss)	26:18	26:21	52:40	26:18	26:21	52:40
% vreme poseda lopte	43,18	58,54	50,87	56,82	41,46	49,13
Golovi	1	1	2	0	0	0
Faulovi	3	8	11	8	5	13
Korneri	2	5	7	8	3	11
Ofsajdi	3	2	5	0	0	0

Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	8	5	**13**	8	7	**15**
% udaraca u okvir gola	38	40	**38**	38	14	**27**
Br pasova iz igre	134	155	**289**	179	103	**282**
% uspešnih pasova iz igre	77	81	**79**	77	72	**75**
Br pasova iz igre u napred	36	39	**75**	65	47	**112**
% uspešnih pasova iz igre u napred	58	62	**60**	54	60	**56**
Br prodora u 1/3	28	22	**50**	34	31	**65**
% uspešnih prodora u 1/3	46	55	**50**	38	52	**45**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	5	4	**9**	6	4	**10**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	60	75	**67**	50	75	**60**
Br prodora u 1/3 – po sredini	18	13	**31**	23	18	**41**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	44	46	**45**	26	39	**32**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	5	5	**10**	5	9	**14**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	40	60	**50**	80	0	**71**
Br ulaza u kazneni prostor	6	4	**10**	6	6	**12**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	17	25	**20**	33	33	**33**
Br centaršuteva	11	12	**23**	25	14	**39**
% uspešnih centar šuteva	64	17	**39**	24	14	**21**
Br asistencija po udarcu	24	51	**34,38**	29,88	24	**27,13**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	51,06	41,86	**45,37**	41,73	43,08	**42,28**
Br individualnih poseda lopte	224	275	**499**	257	191	**448**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	59	53	**112**	63	42	**105**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	1,85	2,07	**1,97**	1,97	1,93	**1,95**
Vreme u ind. posedu lopte	03:45	06:05	**09:51**	05:43	03:54	**09:37**
Br dobijenih poseda lopte	44	51	**95**	50	45	**95**
Br izgubljenih poseda lopte	63	63	**126**	63	63	**126**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,28	0,23	**0,25**	0,25	0,33	**0,28**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	60	29	**89**	60	29	**89**
% osvojenih duela	62	55	**60**	38	45	**40**
N duela na zemlji	29	8	**37**	29	8	**37**
% osvojenih duela na zemlji	52	38	**49**	48	63	**51**
Br duela sa obaranjem igrača	0	4	**4**	0	4	**4**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	-	50	**50**	-	50	**50**
Br vazdušnih duela	31	17	**48**	31	17	**48**
% osvojenih vazdušnih duela	71	65	**69**	29	35	**31**

Tabela 6: AMISCO analiza utakmice : Srbija – Austrija

	SRB			AUT		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	44:29	48:06	92:35	44:29	48:06	92:35
Efektivno vreme (mm:ss)	25:13	25:13	50:26	25:13	25:13	50:26
% vreme poseda lopte	54,32	46,85	50,58	46,68	53,15	49,42
Golovi	1	0	1	0	0	0
Faulovi	11	4	15	11	13	24
Korneri	1	1	2	1	6	7
Ofsajdi	1	1	2	1	1	2

Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	3	9	**12**	6	9	**15**
% udaraca u okvir gola	33	44	**42**	0	22	**13**
Br pasova iz igre	159	118	**277**	167	143	**310**
% uspešnih pasova iz igre	75	79	**77**	77	77	**77**
Br pasova iz igre u napred	52	38	**90**	67	60	**127**
% uspešnih pasova iz igre u napred	58	53	**56**	57	52	**54**
Br prodora u 1/3	36	26	**52**	37	30	**67**
% uspešnih prodora u 1/3	50	54	**52**	57	53	**55**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	10	5	**15**	7	2	**9**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	70	80	**73**	100	50	**89**
Br prodora u 1/3 – po sredini	19	19	**38**	26	20	**46**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	32	42	**73**	50	45	**48**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	7	2	**9**	4	8	**12**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	71	100	**78**	25	0	**58**
Br ulaza u kazneni prostor	5	0	**5**	8	4	**12**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	40	-	**40**	0	25	**8**
Br centaršuteva	7	7	**14**	6	20	**26**
% uspešnih centar šuteva	29	57	**43**	33	20	**23**
Br asistencija po udarcu	63,33	19,11	**31,42**	34,33	24,11	**28,2**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	34,45	33,96	**34,23**	46,43	45,89	**46,15**
Br individualnih poseda lopte	224	203	**427**	234	241	**475**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	48	41	**89**	40	80	**120**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2,12	1,94	**203**	1,92	2,07	**2**
Vreme u ind. posedu lopte	05:57	05:03	**11:00**	040:26	04:43	**09:09**
Br dobijenih poseda lopte	49	43	**92**	47	41	**88**
Br izgubljenih poseda lopte	64	56	**120**	63	56	**119**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,29	0,28	**0,28**	0,27	0,23	**0,25**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	45	42	**87**	45	42	**87**
% osvojenih duela	53	45	**49**	47	55	**51**
N duela na zemlji	8	25	**33**	8	25	**33**
% osvojenih duela na zemlji	63	48	**52**	38	52	**48**
Br duela sa obaranjem igrača	13	2	**15**	13	2	**15**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	77	50	**73**	23	50	**27**
Br vazdušnih duela	24	15	**39**	24	15	**39**
% osvojenih vazdušnih duela	38	40	**38**	63	60	**62**

Tabela 7: AMISCO analiza utakmice : Srbija – Francuska

	SRB			FRA		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	48:04	47:19	95:23	48:04	47:19	95:23
Efektivno vreme (mm:ss)	27:11	24:15	51:27	27:11	24:15	51:27
% vreme poseda lopte	49,51	42,68	46,29	50,49	57,32	53,71
Golovi	1	0	1	1	0	1
Faulovi	5	12	17	5	6	11
Korneri	1	0	1	2	2	4
Ofsajdi	3	1	4	2	3	5
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	8	7	**15**	7	8	**15**
% udaraca u okvir gola	25	29	**27**	43	13	**27**
Br pasova iz igre	204	142	**346**	188	165	**353**
% uspešnih pasova iz igre	81	79	**80**	84	83	**83**
Br pasova iz igre u napred	76	43	**119**	64	53	**117**
% uspešnih pasova iz igre u napred	61	67	**63**	70	66	**68**
Br prodora u 1/3	28	18	**46**	34	38	**72**
% uspešnih prodora u 1/3	29	50	**37**	56	66	**61**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	5	3	**8**	10	12	**22**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	20	67	**38**	50	75	**64**
Br prodora u 1/3 – po sredini	17	11	**28**	18	19	**37**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	24	45	**32**	56	47	**51**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	6	4	**10**	6	7	**13**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	50	50	**50**	67	0	**85**
Br ulaza u kazneni prostor	5	3	**8**	2	3	**5**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	0	0	**0**	0	33	**20**
Br centaršuteva	10	9	**19**	10	11	**21**
% uspešnih centar šuteva	30	11	**21**	10	0	**5**
Br asistencija po udarcu	30,25	25,71	**28,13**	32,57	27,88	**30,07**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	45,18	43,18	**44,3**	39,53	34,35	**36,79**
Br individualnih poseda lopte	268	205	**473**	253	256	**509**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	30	36	**66**	58	75	**133**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	1,96	2,2	**2,06**	2,18	2,5	**2,34**
Vreme u ind. posedu lopte	05:21	04:10	**09:31**	05:46	06:22,	**12:15**
Br dobijenih poseda lopte	42	46	**88**	46	46	**92**
Br izgubljenih poseda lopte	57	60	**117**	56	61	**117**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,21	0,29	**0,25**	0,22	0,24	**0,23**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	45	54	**99**	45	54	**99**
% osvojenih duela	58	56	**57**	42	44	**43**
N duela na zemlji	12	14	**26**	12	14	**26**
% osvojenih duela na zemlji	50	57	**54**	50	43	**46**
Br duela sa obaranjem igrača	8	17	**25**	8	17	**25**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	50	35	**40**	50	65	**60**
Br vazdušnih duela	25	23	**48**	25	23	**48**
% osvojenih vazdušnih duela	64	70	**67**	36	30	**33**

Tabela 8: AMISCO analiza utakmice : Srbija – Rumunija

	SRB			ROM		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	45:07	46:02	91:09	45:07	46:02	91:09
Efektivno vreme (mm:ss)	24:36	29:22	53:58	24:36	29:22	53:58
% vreme poseda lopte	67,24	54,14	60,69	32,76	45,86	40,31
Golovi	2	3	5	0	0	0
Faulovi	9	8	17	8	4	12
Korneri	2	5	7	4	4	8
Ofsajdi	2	1	3	3	1	4

Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	14	6	**20**	7	11	**18**
% udaraca u okvir gola	57	50	**55**	71	45	**56**
Br pasova iz igre	160	145	**305**	172	164	**336**
% uspešnih pasova iz igre	86	79	**83**	81	83	**82**
Br pasova iz igre u napred	51	51	**102**	58	45	**103**
% uspešnih pasova iz igre u napred	78	69	**74**	71	67	**69**
Br prodora u 1/3	21	17	**38**	23	22	**45**
% uspešnih prodora u 1/3	57	47	**53**	57	64	**50**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	9	6	**15**	9	3	**12**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	78	50	**67**	56	100	**67**
Br prodora u 1/3 – po sredini	8	5	**13**	12	16	**28**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	25	20	**23**	50	50	**50**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	4	6	**10**	2	3	**5**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	75	50	**60**	100	0	**100**
Br ulaza u kazneni prostor	3	2	**5**	2	3	**5**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	33	50	**40**	50	0	**20**
Br centaršuteva	12	10	**22**	5	18	**23**
% uspešnih centar šuteva	58	30	**45**	20	28	**26**
Br asistencija po udarcu	55,2	28,22	**37,86**	68,67	32	**45,75**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	48,03	45,67	**46,87**	46,75	41,83	**44,46**
Br individualnih poseda lopte	268	205	**473**	253	256	**509**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	30	36	**66**	58	75	**133**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	1,96	2,2	**2,06**	2,18	2,5	**2,34**
Vreme u ind. posedu lopte	05:21	04:10	**09:31**	05:46	06:29	**12:15**
Br dobijenih poseda lopte	76	64	**140**	80	57	**137**
Br izgubljenih poseda lopte	96	74	**170**	95	75	**170**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,32	0,26	**0,29**	0,42	0,41	**0,42**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	45	54	**99**	45	54	**99**
% osvojenih duela	58	56	**57**	42	44	**43**
N duela na zemlji	12	14	**26**	12	14	**26**
% osvojenih duela na zemlji	50	57	**54**	50	43	**46**
Br duela sa obaranjem igrača	8	17	**25**	8	17	**25**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	50	35	**40**	50	65	**60**
Br vazdušnih duela	25	23	**48**	25	23	**48**
% osvojenih vazdušnih duela	64	70	**67**	36	30	**33**

Tabela 9: AMISCO analiza utakmice : Francuska – Srbija

	FRA			SRB		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	47:07	48:54	96:02	47:07	48:54	96:02
Efektivno vreme (mm:ss)	30:56	29:57	60:53	30:56	29:57	60:53
% vreme poseda lopte	53,6	56,77	55,16	46,4	43,23	44,84
Golovi	0	2	2	0	1	1
Faulovi	8	4	12	4	5	9
Korneri	4	2	6	3	2	5
Ofsajdi	1	2	3	1	2	3
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	11	12	**23**	1	6	**7**
% udaraca u okvir gola	45	42	**43**	0	17	**14**
Br pasova iz igre	268	251	**519**	181	157	**338**
% uspešnih pasova iz igre	87	88	**87**	83	76	**80**
Br pasova iz igre u napred	93	88	**181**	70	46	**116**
% uspešnih pasova iz igre u napred	76	81	**78**	64	52	**59**
Br prodora u 1/3	36	36	**72**	19	26	**45**
% uspešnih prodora u 1/3	69	72	**71**	37	42	**40**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	13	10	**23**	6	3	**9**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	85	70	**78**	50	67	**56**
Br prodora u 1/3 – po sredini	15	16	**31**	7	16	**23**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	60	81	**71**	14	31	**26**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	8	10	**18**	6	7	**13**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	63	60	**61**	50	0	**54**
Br ulaza u kazneni prostor	5	8	**13**	1	2	**3**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	40	50	**46**	0	50	**33**
Br centaršuteva	16	8	**24**	10	10	**20**
% uspešnih centar šuteva	25	38	**29**	30	60	**45**
Br asistencija po udarcu	27,27	24,92	**26,04**	224	35,83	**82,71**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	37,09	39,79	**38,39**	36,24	42,09	**38,88**
Br individualnih poseda lopte	334	338	**672**	252	240	**492**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	85	99	**184**	30	40	**70**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2,37	2,3	**2,34**	2,09	2,08	**2,09**
Vreme u ind. posedu lopte	08:05	07:30	**15:36**	06:10	05:06	**11:17**
Br dobijenih poseda lopte	53	47	**100**	47	37	**84**
Br izgubljenih poseda lopte	60	63	**123**	59	64	**123**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,18	0,19	**0,18**	0,23	0,27	**0,25**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	49	64	**113**	49	64	**113**
% osvojenih duela	51	52	**51**	49	48	**49**
N duela na zemlji	31	24	**55**	31	24	**55**
% osvojenih duela na zemlji	45	58	**51**	55	42	**49**
Br duela sa obaranjem igrača	10	16	**26**	10	16	**26**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	60	50	**54**	40	50	**46**
Br vazdušnih duela	8	24	**32**	8	24	**32**
% osvojenih vazdušnih duela	63	46	**50**	38	54	**50**

Tabela 10: AMISCO analiza utakmice : Austrija – Srbija

	AUT			SRB		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	47:02	49:09	96:11	47_02	49:09	96:11
Efektivno vreme (mm:ss)	26:43	26:34	53:17	26:43	26:34	53:17
% vreme poseda lopte	51,66	54,02	52,83	48,34	45,92	47,14
Golovi	0	1	1	3	0	3
Faulovi	12	11	23	14	11	25
Korneri	4	2	6	1	1	2
Ofsajdi	0	5	5	0	3	3
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	6	4	**10**	6	1	**7**
% udaraca u okvir gola	17	25	**20**	83	0	**71**
Br pasova iz igre	190	211	**401**	175	173	**348**
% uspešnih pasova iz igre	82	82	**82**	86	83	**84**
Br pasova iz igre u napred	54	74	**128**	51	56	**107**
% uspešnih pasova iz igre u napred	67	59	**63**	73	71	**72**
Br prodora u 1/3	24	26	**50**	19	11	**30**
% uspešnih prodora u 1/3	46	46	**46**	53	55	**53**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	7	9	**16**	10	2	**12**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	71	67	**69**	60	100	**67**
Br prodora u 1/3 – po sredini	8	14	**22**	7	5	**12**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	38	21	**27**	57	40	**50**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	9	3	**12**	2	4	**6**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	33	33	**33**	0	0	**33**
Br ulaza u kazneni prostor	3	7	**10**	6	1	**7**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	0	0	**0**	17	0	**14**
Br centaršuteva	21	23	**44**	7	4	**11**
% uspešnih centar šuteva	14	17	**16**	14	25	**18**
Br asistencija po udarcu	41,17	66,75	**51,4**	35,67	225	**62,71**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	41,84	41,34	**41,58**	38,8	44,22	**41,4**
Br individualnih poseda lopte	271	298	**569**	243	250	**493**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	63	69	**132**	42	20	**62**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2,04	2,12	**2,08**	2,06	1,99	**2,02**
Vreme u ind. posedu lopte	05:54	06:27	**12:21**	05:30	05:05	**10:36**
Br dobijenih poseda lopte	37	53	**90**	39	44	**83**
Br izgubljenih poseda lopte	51	68	**119**	51	68	**119**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,19	0,23	**0,21**	0,21	0,27	**0,24**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	38	38	**76**	38	38	**76**
% osvojenih duela	53	55	**54**	47	45	**46**
N duela na zemlji	23	7	**30**	23	7	**30**
% osvojenih duela na zemlji	61	71	**63**	39	29	**37**
Br duela sa obaranjem igrača	3	7	**10**	3	7	**10**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	0	43	**30**	100	57	**70**
Br vazdušnih duela	12	24	**36**	12	24	**36**
% osvojenih vazdušnih duela	50	54	**53**	50	46	**47**

Tabela 11: AMISCO analiza utakmice : Kipar – Srbija

	CYP			SRB		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	46:08	48:02	94:10	46:08	48:02	94:10
Efektivno vreme (mm:ss)	28:51	29:55	58:47	28:51	29:55	58:47
% vreme poseda lopte	49,78	43,15	46,4	50,22	56,85	53,6
Golovi	0	0	0	2	0	2
Faulovi	2	12	14	10	4	14
Korneri	3	0	3	3	3	6
Ofsajdi	1	2	3	0	0	0
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	5	4	**9**	7	10	**17**
% udaraca u okvir gola	40	50	**44**	29	50	**41**
Br pasova iz igre	151	179	**330**	211	205	**416**
% uspešnih pasova iz igre	73	79	**76**	76	84	**80**
Br pasova iz igre u napred	73	59	**132**	85	65	**150**
% uspešnih pasova iz igre u napred	56	51	**54**	60	71	**65**
Br prodora u 1/3	41	27	**68**	41	32	**73**
% uspešnih prodora u 1/3	29	26	**28**	41	50	**45**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	7	3	**10**	9	7	**16**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	71	0	**50**	78	43	**63**
Br prodora u 1/3 – po sredini	26	16	**42**	24	18	**42**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	8	25	**14**	21	39	**29**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	8	8	**16**	8	7	**15**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	63	38	**50**	63	0	**73**
Br ulaza u kazneni prostor	7	4	**11**	9	7	**16**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	0	0	**0**	22	29	**25**
Br centaršuteva	12	3	**15**	11	14	**25**
% uspešnih centar šuteva	25	33	**27**	45	29	**36**
Br asistencija po udarcu	43,8	58	**50,11**	35,86	31,6	**33,35**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	53,37	48,2	**50,58**	48,63	47,05	**47,73**
Br individualnih poseda lopte	239	251	**490**	274	346	**620**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	47	28	**75**	49	72	**121**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	1,81	1,98	**1,9**	2,02	2,05	**2,03**
Vreme u ind. posedu lopte	04:06	04:48	**08:55**	05:09	06:43	**11:52**
Br dobijenih poseda lopte	53	46	**99**	57	50	**107**
Br izgubljenih poseda lopte	79	65	**144**	68	62	**130**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,33	0,26	**0,29**	0,25	0,18	**0,21**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	48	25	**73**	48	25	**73**
% osvojenih duela	48	20	**38**	52	80	**62**
N duela na zemlji	23	16	**39**	23	16	**39**
% osvojenih duela na zemlji	57	31	**46**	43	69	**54**
Br duela sa obaranjem igrača	6	0	**6**	6	0	**6**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	33	-	**33**	67	-	**67**
Br vazdušnih duela	19	9	**28**	19	9	**28**
% osvojenih vazdušnih duela	42	0	**29**	58	100	**71**

Tabela 12: AMISCO analiza utakmice : Rumunija – Srbija

	ROM			SRB		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	46:28	49:07	95:35	46:28	49:07	95:35
Efektivno vreme (mm:ss)	26:57	23:34	50:31	26:57	23:34	50:31
% vreme poseda lopte	58,25	56,64	57,5	41,75	43,36	42,5
Golovi	0	2	2	2	1	3
Faulovi	10	10	20	8	10	18
Korneri	3	2	5	2	3	5
Ofsajdi	1	2	3	5	3	8

Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	5	9	**14**	3	5	**8**
% udaraca u okvir gola	20	33	**29**	67	20	**38**
Br pasova iz igre	217	207	**424**	155	110	**265**
% uspešnih pasova iz igre	70	77	**73**	62	64	**63**
Br pasova iz igre u napred	94	93	**187**	78	50	**128**
% uspešnih pasova iz igre u napred	54	68	**61**	50	44	**48**
Br prodora u 1/3	44	47	**91**	30	14	**44**
% uspešnih prodora u 1/3	48	45	**46**	30	36	**32**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	10	8	**18**	8	3	**11**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	70	63	**67**	63	33	**55**
Br prodora u 1/3 – po sredini	26	34	**60**	20	10	**30**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	35	38	**37**	20	30	**23**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	8	5	**13**	2	1	**3**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	63	60	**62**	0	0	**33**
Br ulaza u kazneni prostor	12	8	**20**	7	1	**8**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	17	38	**25**	14	100	**25**
Br centaršuteva	15	19	**34**	10	7	**17**
% uspešnih centar šuteva	33	26	**29**	10	29	**18**
Br asistencija po udarcu	55,22	28,22	**37,86**	68,67	32	**45,75**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	48,03	45,67	**46,87**	46,75	41,83	**44,46**
Br individualnih poseda lopte	300	289	**589**	225	183	**408**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	76	94	**170**	37	26	**63**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	1,86	2,07	**1,96**	1,66	1,67	**1,67**
Vreme u ind. posedu lopte	05:44	05:33	**11:18**	04:24	03:49	**08:13**
Br dobijenih poseda lopte	76	64	**140**	80	57	**137**
Br izgubljenih poseda lopte	96	74	**170**	95	75	**170**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,32	0,26	**0,29**	0,42	0,41	**0,42**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	40	40	**80**	40	40	**80**
% osvojenih duela	38	55	**46**	63	45	**54**
N duela na zemlji	9	6	**15**	9	6	**15**
% osvojenih duela na zemlji	44	67	**53**	56	33	**47**
Br duela sa obaranjem igrača	10	15	**25**	10	15	**25**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	40	47	**44**	60	53	**56**
Br vazdušnih duela	21	19	**40**	21	19	**40**
% osvojenih vazdušnih duela	33	58	**45**	67	42	**55**

Tabela 13: AMISCO analiza utakmice : Farska ostrva – Srbija

	FRO			SRB		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	45:59	48:22	94:22	45:59	48:22	94:22
Efektivno vreme (mm:ss)	30:27	25:47	56:14	30:27	25:47	56:14
% vreme poseda lopte	27,09	39,71	32,88	72,91	60,29	67,12
Golovi	0	0	0	1	1	2
Faulovi	7	8	15	5	6	11
Korneri	0	2	2	1	5	6
Ofsajdi	0	,	,	0	0	0
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	4	5	**9**	13	8	**21**
% udaraca u okvir gola	50	20	**33**	46	50	**48**
Br pasova iz igre	73	117	**190**	321	240	**561**
% uspešnih pasova iz igre	70	77	**74**	91	89	**90**
Br pasova iz igre u napred	33	49	**82**	99	66	**165**
% uspešnih pasova iz igre u napred	58	67	**63**	85	77	**82**
Br prodora u 1/3	20	24	**44**	52	25	**77**
% uspešnih prodora u 1/3	50	42	**45**	83	80	**82**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	4	4	**8**	14	5	**19**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	50	50	**50**	79	80	**79**
Br prodora u 1/3 – po sredini	8	11	**19**	27	16	**43**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	50	36	**42**	85	81	**84**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	8	9	**17**	11	4	**15**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	50	44	**47**	82	0	**80**
Br ulaza u kazneni prostor	2	5	**7**	9	3	**12**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	0	40	**29**	33	33	**33**
Br centaršuteva	5	7	**12**	24	20	**44**
% uspešnih centar šuteva	20	29	**25**	25	10	**18**
Br asistencija po udarcu	31,5	34,2	**33**	29,69	37,25	**32,57**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	46,72	48,21	**47,57**	39,08	48,75	**42,77**
Br individualnih poseda lopte	143	190	**333**	431	322	**753**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	21	42	**63**	144	75	**219**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	1,79	1,88	**1,84**	2,24	2,11	**2,19**
Vreme u ind. posedu lopte	02:41	03:32	**06:14**	09:52	06:06	**15:59**
Br dobijenih poseda lopte	52	30	**82**	53	26	**79**
Br izgubljenih poseda lopte	68	44	**112**	68	43	**111**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,48	0,23	**0,34**	0,16	0,13	**0,15**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	46	36	**82**	46	36	**82**
% osvojenih duela	50	39	**45**	50	61	**55**
N duela na zemlji	21	17	**38**	21	17	**38**
% osvojenih duela na zemlji	62	41	**53**	38	59	**47**
Br duela sa obaranjem igrača	5	3	**8**	5	3	**8**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	80	0	**50**	20	100	**50**
Br vazdušnih duela	20	16	**36**	20	16	**36**
% osvojenih vazdušnih duela	30	44	**36**	70	56	**64**

Tabela 14: AMISCO analiza utakmice : Južna Afrika – Srbija

	RSA			SRB		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	46:20	49:36	95:57	46:20	49:36	95:57
Efektivno vreme (mm:ss)	32:59	30:26	63:25	32:59	30:26	63:25
% vreme poseda lopte	47,98	48,86	48,4	52,02	51,14	51,6
Golovi	0	1	1	0	3	3
Faulovi	1	3	4	5	4	9
Korneri	6	4	10	1	2	3
Ofsajdi	2	3	5	0	0	0

Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	5	7	**12**	1	6	**7**
% udaraca u okvir gola	40	86	**67**	100	50	**57**
Br pasova iz igre	249	199	**448**	226	166	**392**
% uspešnih pasova iz igre	82	84	**83**	81	81	**81**
Br pasova iz igre u napred	68	63	**131**	73	51	**124**
% uspešnih pasova iz igre u napred	78	71	**75**	74	67	**71**
Br prodora u 1/3	27	40	**67**	35	15	**50**
% uspešnih prodora u 1/3	48	58	**54**	43	47	**44**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	5	13	**18**	8	5	**13**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	60	54	**56**	25	60	**38**
Br prodora u 1/3 – po sredini	18	13	**31**	19	8	**27**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	44	38	**42**	42	50	**44**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	4	14	**18**	8	2	**10**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	50	71	**67**	63	0	**50**
Br ulaza u kazneni prostor	7	3	**10**	3	2	**5**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	43	33	**40**	0	50	**20**
Br centaršuteva	18	9	**27**	10	8	**18**
% uspešnih centar šuteva	28	0	**19**	50	25	**39**
Br asistencija po udarcu	61,6	40,57	**49,33**	279	42	**75,86**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	44,08	45,46	**44,74**	35,57	32,27	**33,92**
Br individualnih poseda lopte	320	308	**628**	287	280	**567**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	80	83	**163**	61	43	**104**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2,23	2,18	**2,21**	2,31	2,4	**2,35**
Vreme u ind. posedu lopte	06:59	06:14	**13:14**	07:50	07:48	**15:39**
Br dobijenih poseda lopte	60	57	**117**	66	67	**133**
Br izgubljenih poseda lopte	76	81	**157**	77	80	**157**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,24	0,26	**0,25**	0,27	0,29	**0,28**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	52	60	**112**	52	60	**112**
% osvojenih duela	42	45	**44**	58	55	**56**
N duela na zemlji	7	11	**18**	7	11	**18**
% osvojenih duela na zemlji	43	27	**33**	57	73	**67**
Br duela sa obaranjem igrača	29	39	**68**	29	39	**68**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	34	54	**46**	66	46	**54**
Br vazdušnih duela	16	10	**26**	16	10	**26**
% osvojenih vazdušnih duela	56	30	**46**	44	70	**54**

Tabela 15: AMISCO analiza utakmice : Litvanija – Srbija

	LTU			SRB		
Utakmica – statistički podaci	**1st**	**2nd**	**Total**	**1st**	**2nd**	**Total**
Ukupno vreme(mm:ss)	45:02	48:20	93:22	45:02	48:20	93:22
Efektivno vreme (mm:ss)	29:35	24:22	53:55	29:35	24:22	53:55
% vreme poseda lopte	67,27	58,27	63,2	32,73	41,73	36,8
Golovi	0	1	1	1	1	2
Faulovi	4	5	9	6	6	12
Korneri	3	0	3	3	3	6
Ofsajdi	2	1	3	3	1	4
Elementi taktike – statistički podaci	**1st**	**2nd**	**Total**	**1st**	**2nd**	**Total**
Udarci na gol	1	6	**7**	11	12	**23**
% udaraca u okvir gola	0	17	**14**	45	42	**43**
Br pasova iz igre	163	192	**355**	207	191	**398**
% uspešnih pasova iz igre	73	83	**78**	81	83	**82**
Br pasova iz igre u napred	78	54	**132**	71	65	**136**
% uspešnih pasova iz igre u napred	71	67	**69**	76	72	**74**
Br prodora u 1/3	38	32	**71**	35	32	**67**
% uspešnih prodora u 1/3	59	53	**56**	57	56	**57**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	7	3	**10**	10	6	**16**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	43	100	**60**	50	100	**69**
Br prodora u 1/3 – po sredini	21	20	**41**	20	21	**41**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	67	45	**56**	60	29	**44**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	11	9	**20**	5	5	**10**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	55	0	**55**	60	80	**70**
Br ulaza u kazneni prostor	6	4	**10**	2	7	**9**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	33	0	**20**	50	29	**33**
Br centaršuteva	14	11	**25**	14	17	**31**
% uspešnih centar šuteva	14	18	**16**	29	29	**29**
Br asistencija po udarcu	68	46,8	**54,75**	36,29	33,43	**34,86**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	46,72	33,71	**38,73**	43,04	37,59	**40,24**
Br individualnih poseda lopte	233	264	**497**	286	261	**547**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	57	42	**99**	50	55	**105**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2,036	2,28	**2,16**	1,99	2,05	**2,02**
Vreme u ind. posedu lopte	04:22	06:52	**11:14**	05:12	06:14	**11:26**
Br dobijenih poseda lopte	50	48	**98**	50	52	**102**
Br izgubljenih poseda lopte	70	59	**129**	69	50	**119**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0.3	0,22	**0,26**	0,23	0,24	**0,23**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	49	37	**89**	49	37	**89**
% osvojenih duela	45	46	**45**	55	54	**55**
N duela na zemlji	27	16	**43**	27	16	**43**
% osvojenih duela na zemlji	37	50	**42**	63	50	**58**
Br duela sa obaranjem igrača	0	7	**7**	0	7	**7**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	-	57	**57**	-	43	**43**
Br vazdušnih duela	22	14	**36**	22	14	**36**
% osvojenih vazdušnih duela	55	36	**47**	45	64	**33**

Tabela 16: AMISCO analiza utakmice : Severna Irska – Srbija

	NIR			SRB		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	47:07	48:55	96:03	47:07	48:55	96:03
Efektivno vreme (mm:ss)	25:06	29:13	54:19	25:06	29:13	54:19
% vreme poseda lopte	44,54	50,79	47,89	55,49	49,21	52,11
Golovi	1	0	1	0	0	0
Faulovi	12	11	23	14	11	25
Korneri	4	2	6	1	1	2
Ofsajdi	0	2	2	0	3	3
Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	6	4	**10**	6	1	**7**
% udaraca u okvir gola	83	0	**71**	17	25	**20**
Br pasova iz igre	268	251	**519**	181	157	**338**
% uspešnih pasova iz igre	87	88	**87**	83	76	**80**
Br pasova iz igre u napred	93	88	**181**	70	46	**116**
% uspešnih pasova iz igre u napred	76	81	**78**	64	52	**59**
Br prodora u 1/3	36	36	**72**	19	26	**45**
% uspešnih prodora u 1/3	69	72	**71**	37	42	**40**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	13	10	**23**	6	3	**9**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	85	70	**78**	50	67	**56**
Br prodora u 1/3 – po sredini	15	16	**31**	7	16	**23**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	60	81	**71**	14	31	**26**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	8	10	**18**	6	7	**13**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	63	60	**61**	50	0	**54**
Br ulaza u kazneni prostor	5	8	**13**	1	2	**3**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	40	50	**46**	0	50	**33**
Br centaršuteva	16	8	**24**	10	10	**20**
% uspešnih centar šuteva	25	38	**29**	30	60	**45**
Br asistencija po udarcu	29,88	24	**27,13**	24	51	**34,38**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	41,73	43,08	**42,28**	51,06	41,86	**45,37**
Br individualnih poseda lopte	257	191	**448**	224	275	**499**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	63	42	**105**	59	53	**112**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	1,97	1,93	**1,95**	1,85	2,07	**1,97**
Vreme u ind. posedu lopte	05:43	03:54	**09:37**	03:45	06:05	**09:51**
Br dobijenih poseda lopte	50	45	**95**	44	51	**95**
Br izgubljenih poseda lopte	63	63	**126**	63	63	**126**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,25	0,33	**0,28**	0,28	0,23	**0,25**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	49	37	**86**	49	37	**86**
% osvojenih duela	55	54	**55**	45	46	**45**
N duela na zemlji	27	16	**43**	27	16	**43**
% osvojenih duela na zemlji	63	50	**58**	37	50	**42**
Br duela sa obaranjem igrača	0	7	**7**	0	7	**7**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	-	43	**43**	-	57	**57**
Br vazdušnih duela	22	14	**36**	22	14	**36**
% osvojenih vazdušnih duela	45	64	**53**	55	36	**47**

Tabela 17: AMISCO analiza utakmice : Južna Koreja – Srbija

	KOR			SRB		
Utakmica – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Ukupno vreme(mm:ss)	45:09	45:02	90:11	45:09	45:02	90:11
Efektivno vreme (mm:ss)	36:26	29:14	65:40	36:26	29:14	65:40
% vreme poseda lopte	49,46	45,22	47,22	50,54	54,78	52,78
Golovi	0	0	1	0	0	0
Faulovi	3	8	11	8	1	9
Korneri	8	3	11	5	2	7
Ofsajdi	3	2	5	0	4	4

Elementi taktike – statistički podaci	1st	2nd	Total	1st	2nd	Total
Udarci na gol	11	8	**19**	2	2	**4**
% udaraca u okvir gola	36	63	**47**	0	0	**0**
Br pasova iz igre	73	117	**190**	321	240	**561**
% uspešnih pasova iz igre	70	77	**74**	91	89	**90**
Br pasova iz igre u napred	33	49	**82**	99	66	**165**
% uspešnih pasova iz igre u napred	58	67	**63**	85	77	**82**
Br prodora u 1/3	20	24	**44**	52	25	**77**
% uspešnih prodora u 1/3	50	42	**45**	83	80	**82**
Br prodora u 1/3 – po levoj strani	4	4	**8**	14	5	**19**
% uspešnih prodora u 1/3 – levo	50	50	**50**	79	80	**79**
Br prodora u 1/3 – po sredini	8	11	**19**	27	16	**43**
% uspešnih prodora u 1/3 – sredina	50	36	**42**	85	81	**84**
Br prodora u 1/3 – po desnoj strani	8	9	**17**	11	4	**15**
% uspešnih prodora u 1/3 – desno	50	44	**47**	82	0	**80**
Br ulaza u kazneni prostor	2	5	**7**	9	3	**12**
% uspešnih ulaza u kazneni prostor	0	40	**29**	33	33	**33**
Br centaršuteva	5	7	**12**	24	20	**44**
% uspešnih centar šuteva	20	29	**25**	25	10	**18**
Br asistencija po udarcu	27,27	24,92	**26,04**	68	46,8	**54,75**
Br dodavanja u minutu po askciji/posedu	37,09	39,79	**38,39**	46,72	33,71	**38,73**
Br individualnih poseda lopte	334	338	**672**	252	240	**492**
Br. ind, poseda lopte u ofanzivnoj trećini	85	99	**184**	57	42	**99**
Avg. broj kontakata sa loptom u ind. posedu	2,37	2,3	**2,34**	2,03	2,28	**2,16**
Vreme u ind. posedu lopte	08:05	07:30	**16:36**	04:22	06:56	**11:18**
Br dobijenih poseda lopte	39	44	**83**	37	53	**90**
Br izgubljenih poseda lopte	51	68	**119**	51	68	**119**
Gubitak lopte po individualnom posedu	0,21	,27	**0,24**	0,19	0,23	**0,21**
Br pokušaja oduzimanja lopte/ duela	52	60	**112**	52	60	**112**
% osvojenih duela	42	45	**44**	58	55	**56**
N duela na zemlji	7	11	**18**	7	11	**18**
% osvojenih duela na zemlji	43	27	**33**	57	73	**67**
Br duela sa obaranjem igrača	29	39	**68**	29	39	**68**
% osvojenih lopti iz duela sa obaranjem	34	54	**46**	66	46	**54**
Br vazdušnih duela	16	10	**26**	16	10	**26**
% osvojenih vazdušnih duela	56	30	**46**	44	70	**54**

Prilog 2 –
Faktorska analiza u SPSS programskom paketu (IBM SPSS Statistics 21)

Tabela P.2.1. SPSS ulaz: Matrica podataka za faktorsku analizu

C	CP	PP	NS	NST	NFM	AD	GD	NSD
19.61	20.00	90.46	19.00	9.00	19.00	70.00	45.24	9.00
29.03	17.39	81.91	14.00	6.00	27.00	52.78	58.14	12.00
45.45	56.25	83.38	20.00	11.00	27.00	67.74	55.17	8.00
14.29	15.38	79.20	17.00	5.00	23.00	62.26	40.38	7.00
20.51	32.00	79.17	13.00	5.00	20.00	68.75	48.65	5.00
42.86	33.33	76.90	12.00	5.00	21.00	38.46	51.52	7.00
21.05	14.29	80.35	15.00	4.00	21.00	66.67	53.85	7.00
39.39	34.78	79.29	27.00	9.00	33.00	65.00	50.00	9.00
45.00	40.00	79.94	7.00	1.00	18.00	50.00	49.09	5.00
18.18	22.22	84.05	7.00	5.00	27.00	47.22	36.67	13.00
36.00	44.44	80.68	17.00	7.00	23.00	71.43	53.85	10.00
17.65	16.67	62.64	8.00	3.00	21.00	55.00	46.67	2.00
18.18	21.62	89.98	21.00	10.00	19.00	63.89	47.37	7.00
38.89	37.50	80.46	7.00	4.00	16.00	53.85	66.67	.00
40.00	53.85	61.90	16.00	6.00	19.00	54.05	54.84	10.00
28.00	21.05	86.42	18.00	6.00	17.00	60.00	60.00	7.00
30.77	11.11	83.55	11.00	5.00	21.00	55.17	65.00	7.00
20.00	.00	72.87	4.00	.00	16.00	30.00	54.76	5.00
16.00	11.11	78.51	8.00	2.00	19.00	47.22	41.86	4.00
26.09	18.75	83.82	18.00	10.00	21.00	32.26	44.83	6.00
14.29	15.38	76.95	8.00	4.00	33.00	37.74	59.62	2.00
20.51	28.00	74.92	15.00	4.00	21.00	31.25	51.35	5.00
23.08	23.53	76.07	15.00	2.00	30.00	61.54	48.48	4.00
4.76	6.67	83.47	15.00	4.00	12.00	33.33	46.15	17.00
37.50	28.57	76.52	14.00	1.00	33.00	35.00	50.00	6.00
29.17	35.29	87.48	23.00	10.00	19.00	50.00	50.91	14.00
15.91	13.89	82.04	10.00	2.00	30.00	52.78	63.33	8.00
26.67	27.27	76.16	9.00	4.00	18.00	28.57	46.15	1.00
29.41	33.33	73.35	14.00	4.00	30.00	45.00	53.33	8.00
25.00	33.33	74.21	9.00	3.00	18.00	36.11	52.63	6.00
18.52	11.11	82.37	12.00	8.00	9.00	46.15	33.33	.00
19.05	7.69	54.44	19.00	12.00	18.00	45.95	45.16	4.00
25.93	15.79	80.94	13.00	2.00	20.00	40.00	40.00	2.00
21.74	11.11	80.20	11.00	6.00	28.00	44.83	35.00	9.00

```
FACTOR
  /VARIABLES C CP PP NS NST NFM AD GD NSD
  /MISSING PAIRWISE
  /ANALYSIS C CP PP NS NST NFM AD GD NSD
  /PRINT INITIAL CORRELATION KMO EXTRACTION ROTATION
  /FORMAT SORT BLANK(0.3)
  /PLOT EIGEN
  /CRITERIA MINEIGEN(1) ITERATE(25)
  /EXTRACTION PC
  /CRITERIA ITERATE(25) DELTA(0)
  /ROTATION OBLIMIN
  /METHOD=CORRELATION.
```

Sl. P.2.1. SPSS izlaz: Komanda generisana izborom faktorske analize – Izlaz iz SPSS

Correlation Matrix

		C	CP	PP	NS	NST	NFM	AD	GD	NSD
Correlation	C	1.000	.775	-.027	.171	.108	.182	.170	.359	-.024
	CP	.775	1.000	-.020	.281	.200	.172	.305	.268	.119
	PP	-.027	-.020	1.000	.204	.522	-.018	.252	.002	.312
	NS	.171	.281	.204	1.000	.744	.138	.451	-.054	.404
	NST	.108	.200	.522	.744	1.000	-.087	.359	-.144	.592
	NFM	.182	.172	-.018	.138	-.087	1.000	.140	.175	.146
	AD	.170	.305	.252	.451	.359	.140	1.000	.475	.165
	GD	.359	.268	.002	-.054	-.144	.175	.475	1.000	.017
	NSD	-.024	.119	.312	.404	.592	.146	.165	.017	1.000

Sl. P.2.2. SPSS izlas: Korelaciona matrica ulaznih podataka

KMO and Bartlett's Test

Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy.		.602
Bartlett's Test of Sphericity	Approx. Chi-Square	83.400
	df	36
	Sig.	.000

Sl. P.2.3. SPSS izlaz: Ocena prikladnosti podataka za faktorsku analizu

Communalities

	Initial	Extraction
C	1 000	.812
CP	1 000	.799
PP	1 000	.496
NS	1 000	.802
NST	1 000	.822
NFM	1 000	.428
AD	1 000	.448
GD	1 000	.535
NSD	1 000	.560

Extraction Method: Principal Component Analysis.

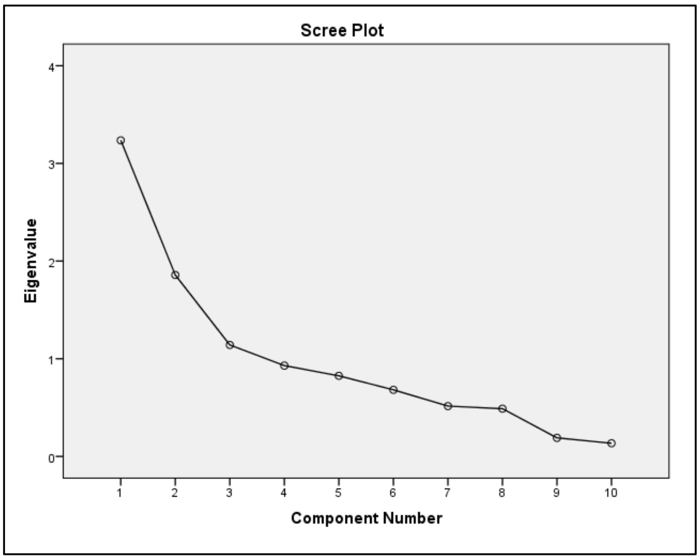
Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Extraction Sums of Squared Loadings			Rotation Sums of Squared Loadings[a]
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %	Total
1	2.709	30.104	30.104	2.709	30.104	30.104	2.122
2	1.856	20.617	50.721	1.856	20.617	50.721	2.200
3	1.137	12.631	63.352	1.137	12.631	63.352	1.642
4	.926	10.287	73.639				
5	.788	8.754	82.394				
6	.677	7.518	89.911				
7	.507	5.635	95.546				
8	.211	2.343	97.890				
9	.190	2.110	100.000				

Extraction Method: Principal Component Analysis.

a. When components are correlated, sums of squared loadings cannot be added to obtain a total variance.

Sl. P.2.4. SPSS izlaz: Prikaz komunaliteta, karakterističnih vrednosti komponenti i kumulativiteta objašnjene varijanse



Sl. P.2.5. SPSS izlaz: Dijagram prevoja

Prilog 3 –

EMS programski paket - Izbor radnog modela i izveštaji

Prvo je potrebno uneti izabrane podatke i to u *.xls* ili *.txt* formatu, nakon čega se vrši učitavanje, prilikom pokretanja softvera.

Sledeći korak je izbor modela u okviru *softverskog dijaloga*. U segmentu *Model*, postoje četiri dela gde će se izabrati odgovarajući DEA model za posmatrani problem. U našem slučaju, biće izabrana konveksna granica efikasnosti (neefikasna jedinica se poredi sa hipotetičkom jedinicom koja se dobija kao linearna kombinacija dve ili više efikasnih jedinica), promenljiv prinos na obim i radijalna metoda za izračunavanje distanci pretpostavljeni BCC modelom. Poslednja izbor u okviru definisanja modela je određivanje njegove orijentacije, tj. izbor izlazno-orijentisanog modela.

Posle odabira željenog modela i njegovog izvršavanja, slika P.3.1. prikazuje rezultate ocene efikasnosti napada tima reprezentacije Srbije. Slika P.3.2. prikazuje rezultate ocene efikasnosti odbrane.

	DMU	Score	C {I} {V}	CP {I} {V}	PP {I} {V}	NS {I} {V}	NST {I} {V}	NG {O} {V}	Benchmarks	{S} C {I}	{S} CP {I}	{S} PP {I}	{S} NS {I}	{S} NST {I}	{S} NG {O}
1	SRBvsFRO	140.38%	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	3 (0.07) 12 (0.93)	0.00	0.54	26.35	10.15	5.44	0.00
2	SRBvsLTU	102.00%	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	8 (0.04) 12 (0.96)	0.52	0.00	18.60	5.24	2.76	0.00
3	SRBvsBLG	100.00%	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	1.00	5						
4	SRBvsUKR	100.00%	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0						
5	SRBvsSWE	143.64%	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	3 (0.10) 12 (0.90)	0.00	11.25	14.39	3.76	1.18	0.00
6	SRBvsAUT	237.50%	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	3 (0.25) 12 (0.75)	8.26	6.77	9.07	1.00	0.00	0.00
7	SRBvsFRA	100.00%	0.23	0.59	0.00	0.00	0.18	1.00	0						
8	SRBvsROM	100.00%	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	2						
9	FRAvsSRB	100.00%	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	0						
10	AUTvsSRB	100.00%	0.11	0.00	0.00	0.78	0.00	1.00	0						
11	CYPvsSRB	183.33%	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	3 (0.50) 12 (0.50)	4.45	7.99	7.67	3.00	0.00	0.00
12	ROMvsSRB	100.00%	0.03	0.08	0.81	0.08	0.00	1.00	7						
13	FROvsSRB	135.26%	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	3 (0.02) 12 (0.98)	0.00	4.19	26.94	12.77	6.85	0.00
14	RSAvsSRB	100.00%	0.03	0.00	0.34	0.64	0.00	1.00	0						
15	LTUvsSRB	100.00%	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	0						
16	NIRvsSRB	224.21%	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	8 (0.24) 12 (0.76)	5.09	0.00	19.74	5.40	1.55	0.00
17	KORvsSRB	100.00%	0.00	0.75	0.00	0.25	0.00	1.00	0						

Slika P.3.1. EMS - ocena efikasnosti napada

	DMU	Score	C {I}{V}	CP {I}{V}	PP {I}{V}	NS {I}{V}	NST {I}{V}	NG {O}{V}	Benchmarks	{S} C {I}	{S} CP {I}	{S} PP {I}	{S} NS {I}	{S} NST {I}	{S} NG {O}
1	SRBvsLTU	100.00%	0.00	0.29	0.44	0.22	0.04	1.00	6						
2	SRBvsBLG	200.00%	0.46	0.21	0.15	0.14	0.04	1.00	1 (0.54) 4 (0.04) 5 (0.08) 7 (0.04) 10	5.96	3.04	5.60	7.99	7.37	0.00
3	SRBvsUKR	100.00%	0.19	0.00	0.68	0.12	0.00	1.00	0						
4	SRBvsSWE	100.00%	0.12	0.00	0.88	0.00	0.00	1.00	4						
5	SRBvsAUT	100.00%	0.06	0.00	0.89	0.00	0.06	1.00	4						
6	SRBvsFRA	100.00%	0.65	0.35	0.00	0.00	0.00	1.00	0						
7	SRBvsROM	100.00%	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.00	4						
8	FRAvsSRB	300.30%	0.61	0.11	0.23	0.02	0.03	1.00	1 (0.36) 4 (0.09) 5 (0.12) 7 (0.08) 10	7.01	15.30	10.14	12.19	7.40	0.00
9	AUTvsSRB	100.00%	0.59	0.00	0.00	0.00	0.41	1.00	0						
10	CYPvsSRB	100.00%	0.00	0.00	0.67	0.32	0.00	1.00	3	5.03	3.44	0.02	0.03	1.38	0.00
11	ROMvsSRB	291.57%	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	1.00	12 (0.96) 14 (0.04)	4.67	1.12	0.00	4.56	0.61	0.00
12	FROvsSRB	100.00%	0.00	0.00	0.87	0.07	0.06	1.00	5						
13	RSAvsSRB	200.00%	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1 (0.89) 16 (0.11)	1.87	0.00	3.66	3.66	5.55	0.00
14	LTUvsSRB	100.00%	0.00	0.03	0.97	0.00	0.00	1.00	1						
15	NIRvsSRB	100.00%	0.05	0.59	0.18	0.02	0.15	1.00	1 (0.75) 4 (0.02) 5 (0.05) 7 (0.12) 10	6.29	0.55	3.04	3.71	0.01	0.00
16	KORvsSRB	100.00%	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1 (1.00)	5.74	0.00	1.68	3.00	4.00	0.00

Slika P.3.2. EMS - ocena efikasnosti odbrane

Struktura tabele rezultata sadrži sledeće elemente:

DMU - naziv jedinice za odlučivanje - naziv meča na kome se posmatra efikasnost našeg nacionalnog tima

Indeks efikasnosti - sve DMU koje imaju vrednost 1 (100%) su ocenjene kao efikasne jedinice jer se radi o izlazno orjentisanom modelu. Sve one koje imaju vrednost veću od 1 (100%) su neefikasne i za njih su referentne one koje formiraju obvojnicu.

U trećoj, četvrtoj, petoj, šestoj, sedmoj i osmoj koloni date su *vrednosti virtuelnih ulaza i izlaza.* Pošto se radi o izlazno orijentisanom modelu, kao što je pomenuto, virtuelni izlaz ima vrednost 1.

U koloni *Benchmarks* razlikuju se zapisi za efikasne i neefikasne jedinice.

Za efikasne jedinice, broj predstavlja koliko je puta ta jedinica referentna jedinica za neefikasne entitete; za neefikasne jedinice, prikazan redni broj jedinice koja joj je uzorna (ili jedinica ukoliko ih je više) i u zagradi je dat odgovarajući vektor intenziteta njenog uticaja.

Slack - {S} su dopunske (izravnavajuće) promenljive. Kod efikasnih jedinica dopunske promenljive su jednake nuli.
Generisane vrednosti ulaznih i izlazne varijable za II fazu DEA analize date su u tabeli 5.10.

Pozivanjem EMS softvera za rešavanje problema druge faze, kao što je rečeno u poglavlju 5.4. izabran je ponovo model izlazne orijentacije, konveksne granice efikasnosti i promenljivog prinosa na obim, kao i radijalna metodu za izračinavanje distanci. Prezentacija rezultata data na Sl. P.3.3.

	DMU	Score	En {I}{V}	Eo {I}{V}	UG {O}{V}	GR {O}{V}	Benchmarks	{S} En {I}	{S} Eo {I}	{S} UG {O}	{S} GR {O}
1	SRB/FAO	125.31%	0.62	0.38	0.00	1.00	3(0.50) 5(0.50)	0.00	0.00	0.05	0.00
2	SRB/LTU	100.00%	0.80	0.20	1.00	0.00	0				
3	SRB/AUT	100.00%	0.50	0.50	0.91	0.09	2				
4	SRB/FRA	249.32%	0.47	0.53	1.00	0.00	5(1.00)	0.00	0.00	0.00	2.01
5	SRB/ROM	100.00%	0.00	1.00	0.00	1.00	5				
6	FRA/SRB	100.00%	0.12	0.88	0.99	0.01	0				
7	AUT/SRB	138.50%	0.47	0.53	1.00	0.00	5(1.00)	0.00	0.00	0.00	0.07
8	ROM/SRB	100.00%	0.41	0.59	0.00	1.00	0				
9	FAO/SRB	129.97%	0.62	0.38	0.00	1.00	3(0.45) 5(0.55)	0.00	0.00	0.05	0.00
10	LTU/SRB	304.73%	0.26	0.74	1.00	0.00	5(1.00)	0.00	0.00	0.00	3.95

Slika P.3.3. EMS - ocena ukupne (operativne) efikasnosti

Osnovni biografski podaci o kandidatu

Dijana Petrović Đorđević je rodjena 27. januara 1984. god. u Beogradu. Posle završene osnovne škole *Vojvoda Radomir Putnik* u Beogradu i *IV gimnazije u Beogradu,* školske 2001/2002. god. upisala je Fakultet organizacionih nauka, *Odsek za informacione sisteme*, u svojoj 17. godini (dvogodišnju prednost nad svojom generacijom stekla je, kao jedina predložena, ispunjenjem svih uslova "ubrzanog" školovanja), kao jedan od najmladjih studenata Univerziteta u Beogradu. Visoko obrazovanje i stručni naziv *diplomirani inženjer organizacionih nauka – odsek za informacione sisteme* stekla je diplomiranjem 6. decembra 2006.godine, sa prosečnom ocenom 8.58 u toku studija i ocenom 10 na diplomskom radu (po Zakonu o Univerzitetu, pre stupanja na snagu danas važećeg Zakona o Univerzitetu): *Analiza linearnih i linearizovanih regresionih modela primenom softverskih paketa SPSS, MATLAB i STATISTIKA* (mentor: Prof. Dr Milica Bulajić, Katedra za operaciona istraživanja i statistiku).

I pored ispunjenih uslova za direktan upis doktorskih studija, školske 2006/2007.god. upisala je i završila 3. oktobra 2007.god. diplomske akademske studije – master studije drugog stepena na Fakultetu organizacionih nauka na studijskom programu za *Informacione sisteme i tehnologije*, sa prosečnom ocenom 10 u toku studija, odbranom master rada: *Analiza primenjenih statističkih modela* (mentor: Prof. Dr Milica Bulajić, Katedra za operaciona istraživanja i statistiku) i stekla visoko obrazovanje i akademski naziv *diplomirani inženjer organizacionih nauka – master iz oblasti informacionih sistema i tehnologija.* Master rad je ocenjen najvišom ocenom 10.
Školske 2007/2008. god. upisala je i završila 18. februara 2010. god. na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu diplomske akademske master studije drugog stepena na studijskom programu *Diplomske akademske studije Elektrotehnika i računarstvo – modul Signali i sistemi*, sa prosečnom ocenom 10 u toku studija, odbranom master rada: *Stohastičko modeliranje cena finansijskih derivata* (mentor: Prof. Dr Nenad Cakić, Katedra za primenjenu matematiku) i stekla visoko obrazovanje i akademski naziv *diplomirani inženjer elektrotehnike i računarstva – master.* Master rad je ocenjen najvišom ocenom 10.
Paralelno sa master studijama na Elektrotehničkom fakultetu, školske 2007/2008.god. upisala je doktorske studije na Fakultetu organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu, na studijskom programu *Operaciona istraživanja*. Svih devet ispita predvidjenih planom i programom studija položila je sa najvišom ocenom 10. Pristupni rad za izradu doktorske

disertacije pod naslovom *Modeliranje, analiza i merenje efikasnosti sportskih organizacionih jedinica primenom DEA metode* (mentor: Prof. Dr Mirko Vujošević, Katedra za operaciona istraživanja i statistiku) odbranila je na Fakultetu organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu, na studijskom programu *Operaciona istraživanja,* a pod istim naslovom odobren joj je i rad na doktorskoj disertaciji.

Dijana Petrović Đorđević je 9. januara 2006. godine, kao apsolvent Fakulteta organizacionih nauka, zasnovala stalni radni odnos u Fudbalskom savezu Srbije i trenutno obavlja dužnost Šefa kancelarije generalnog sekretara Saveza.

Изјава о ауторству

Потписани-а Дијана Т. Петровић Ђорђевић

број индекса 15/2007

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Моделирање, анализа и мерење ефикасности спортских организационих јединица применом ДЕА методе

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 9. марта 2015. год.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Дијана Петровић Ђорђевић

Број индекса 15/2007

Студијски програм Операциона истраживања

Наслов рада Моделирање, анализа и мерење ефикасности спортских организационих јединица применом ДЕА методе

Ментор проф. др Мирко Вујошевић

Потписани/а Дијана Петровић Ђорђевић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 9. марта 2015. год.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Моделирање, анализа и мерење ефикасности спортских организационих јединица применом ДЕА методе

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

Потпис докторанда

У Београду, 9. марта 2015. год.