

UNIVERZITET U BEOGRADU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Sabina R. Ramović

REALIZACIJA NOVIH  
METAMATERIJALA NA BAZI KVANTNIH  
KASKADNIH LASERA U VRLO JAKOM  
MAGNETNOM POLJU

Doktorska Disertacija

Beograd 2014

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Sabina R. Ramović

THE REALIZATION OF NEW  
METAMATERIALS BASED ON  
QUANTUM CASCADE LASERS IN A  
VERY STRONG MAGNETIC FIELD

Doctoral Dissertation

Belgrade 2014

**Mentor:**

Profesor emeritus, dr Vitomir Milanović, Univerzitet u Beogradu,  
Elektrotehnički fakultet

**Članovi komisije za javnu odbranu:**

1. Profesor emeritus, dr Vitomir Milanović, Univerzitet u Beogradu,  
Elektrotehnički fakultet
2. Vanredni profesor, dr Jelena Radovanović, Univerzitet u Beogradu,  
Elektrotehnički fakultet
3. Naučni savetnik, dr Ljupčo Hadžievski, Univerzitet u Beogradu, Institut  
za nuklearne nauke Vinča
4. Redovni profesor, dr Jovan Radunović, Univerzitet u Beogradu,  
Elektrotehnički fakultet
5. Redovni profesor, dr Dejan Raković, Univerzitet u Beogradu,  
Elektrotehnički fakultet

## Zahvalnica

Koristim priliku da se na ovom mestu zahvalim, pre svega, svojim mentorima prof. Vitomiru Milanoviću i prof. Jeleni Radovanović bez čijeg vođenja, zalaganja, razumevanja i prijateljstva izrada ove teze ne bi bila moguća, ali i svima koji su bili uz mene i, neposredno ili posredno, doprineli realizaciji disertacije.

Posebnu zahvalnost dugujem profesoru Vitomiru Milanoviću, na rukovođenju, podršci, strpljenju i nesebičnoj pomoći, bez čijih ideja, usmeravanja i razmevanja moje istraživanje i rad ne bi postojali.

Profesorki Jeleni Radovanović sam veoma zahvalna na svakom komentaru, vremenu, bezgraničnom strpljenju, pomoći i korisnim sugestijama.

Želela bih da se zahvalim svojim dionim kolegama i još boljim prijateljima dr Petri Beličev Šutulović (koja je, na poseban način, bila uz mene i razumela me) i dr Aleksandru Daničiću na velikoj podršci i brojnim savetima koje su mi pružili tokom izrade disertacije.

Zahvalnost dugujem i sjajnim kolegama iz Instituta za nuklearne nauke „Vinča“ i kolegama sa Elektrotehničkog fakulteta, među kojima bih izdvojila (budućeg dr) Nemanju Čukarića i Gorana Anđelkovića, sa kojima sam provela najviše vremena tokom doktorskih studija i koji su doprineli prijateljskoj atmosferi i lepoj saradnji.

Svojoj porodici i prijateljima dugujem zahvalnost na ljubavi, razumevanju i podršci.

Na samom kraju, zahvaljujem se nekome ko je bio sa mnom i na samom početku - svom ocu, profesoru Rifatu Ramoviću. Samo za njega i zbog njega je sve ovo počelo, a zahvaljujući njemu je sve privedeno kraju.

Sabina Ramović

# *Realizacija novih metamaterijala na bazi kvantnih kaskadnih lasera u vrlo jakom magnetnom polju*

## **Rezime**

Metamaterijali su veštački elektromagnetni materijali, dizajnirani tako da obezbeđuju realizaciju unapred zadatih karakteristika koje se ne mogu naći kod materijala u prirodi. Zbog mogućnosti inženjeringa efektivnih parametara medijuma (dielektrične permitivnosti i magnetske permeabilnosti), kao i slobode u dizajniranju „neprirodnih“ karakteristika ovih struktura obezbeđujući tako interakciju elektromagnetskih talasa sa sistemom na željeni način, metamaterijali privlače značajnu pažnju šire naučne zajednice.

Predmet ove disertacije je dizajniranje jednostruko negativnih poluprovodničkih struktura koje pri odgovarajućim uslovima pokazuju osobinu negativnog indeksa prelamanja na određenim frekvencijama upadnog zračenja.

Osnovni doprinos rada se ogleda u izboru adekvatne poluprovodničke strukture za modelovanje metamaterijala. U pitanju je anizotropna struktura sastavljena od naizmenično postavljenih slojeva dva različita poluprovodnika koja čini kvantnikaskadni laser (QCL), dizajnirana tako da može dostići optičko pojačanje u srednjem infracrvenom i terahercnom delu spektra. Teorijski je razmatrana propagacija elektromagnetnog zračenja u ovakvoj strukturi i izložena su detaljna izvođenja njenog indeksa prelamanja. Posebna pažnja je posvećena razmatranju uticaja jakog spoljašnjeg magnetnog polja usmerenog u pravcu rasta strukture na osobine metamaterijala. Strukturni profil QCL-a smešten u takvo polje dozvoljava postizanje dovoljno velike inverzne populacije neophodne za manipulaciju permitivnosti i ostvarivanje levorukog (engl. „*left-handed*“) režima.

Razmatran je dizajn metamaterijala na bazi GaAs/AlGaAs kvantnih kaskadnih lasera, a simulacije su rađene za strukturu koja emituje svetlost u srednjem infracrvenom ( $\lambda = 7,3\mu\text{m}$ ) i dve koje emituju u terahercnom delu spektra (4,6THz i 3,9THz). Urađena je teorijska analiza uslova pri kojima QCL radi kao metamaterijal sa negativnim indeksom prelamanja, pa su za analizirane strukture numerički određivani opsezi talasnih dužina pri kojima se ovaj efekat javlja. Kako veličine tih opsega mogu da variraju, posebno je bilo interesantno ispitati kako se one menjaju sa temperaturom, nivoom dopiranja i jačinom magnetnog polja. Analizirani su i uslovi pri kojima ovi opsezi izostaju, pa se QCL za sve talasne dužine ponaša kao metamaterijal sa pozitivnim indeksom prelamanja. Određene su minimalne površinske koncentracije za svaku od posmatranih struktura koje je neophodno ostvariti kako bi se QCL ponašao kao LH metamaterijal u magnetnom polju.

Dobijeni numerički rezultati pokazuju kako se promenama jačine magnetnog polja menja opseg frekvencija na kojima metamaterijal ostvaruje negativno prelamanje, i kako je moguće prelaziti iz jednog u drugi režim rada - iz LH u RH, i obrnuto. Međutim, kod terahercne strukture sa dve kvantne jame po periodi javlja se neosetljivost na promene intenziteta polja.

**Ključne reči:** Metamaterijali, Kvantni kaskadni laseri, Negativni indeks prelamanja, Negativna dielektrična permitivnost, Magnetno polje

**Naučna oblast:** Elektrotehnika

**Uža naučna oblast:** Kvantne poluprovodničke nanostrukture

**UDK broj:** 621.3

*The realization of new metamaterials based on quantum cascade lasers in a very strong magnetic field*

**Abstract**

Metamaterials are artificial electromagnetic materials, designed to have characteristics otherwise not found in nature. Due to possibility of engineering effective parameters of the medium (dielectric permittivity and magnetic permeability), as well as designing “unnatural” characteristics of these structures, therefore controlling the interaction of electromagnetic waves with the medium, metamaterials are getting significant attention in the scientific community.

The subject of this dissertation is design of single negative semiconductor structures which, under certain circumstances, exhibit negative refraction at specific frequencies.

The main contribution of this thesis lies in choosing of an appropriate semiconductor structure for the metamaterial design. It is an anisotropic nanostructure with the structural arrangement as in a quantum cascade laser (QCL), designed to achieve optical gain in the mid-infrared and terahertz part of the spectrum. The propagation of the electromagnetic waves through this type of structure is theoretically analyzed, as well as the refractive index, with detailed derivations exposed. The entire structure is placed in a strong external magnetic field, which facilitates the attainment of sufficient population inversion, necessary to manipulate the permittivity, and enable a left-handed regime.

The calculations are performed for three GaAs/AlGaAs QCLs which are designed to emit radiation in mid-infrared (at  $\lambda = 7,3\mu\text{m}$ ) and terahertz part

of spectrum (at 4,6THz and 3,9THz). It is shown at which conditions QCL can be used as metamaterial with negative refracting index, and it is numerically analyzed at which wavelengths this effect appears. As these wavelength ranges can vary, it was interesting to see how material's characteristics change with temperature, doping levels and magnetic field strength. It is analyzed at which conditions these frequencies cannot be found, so QCL behaves as metamaterial with positive refractive index. The minimal total sheet doping density is found for each analyzed structure, so that QCL can be considered to be LH metamaterial in magnetic field.

The numerical results show that by changing the magnetic field value one can change the frequency range at which metamaterial exhibit negative refraction, and that it is possible to go from one working regime to another – from LH to RH, and vice versa. However, the terahertz structure with two quantum wells per period remains insensitive to magnetic field changes.

**Keywords:** Metamaterials, Quantum cascade lasers, Negative refractive index, Negative dielectric permittivity, Magnetic field

**Scientific field:** Electrical Engineering

**Specific topic:** Quantum semiconductor nanostructures

**UDK number:** 621.3



## Sadržaj

<b>1. Uvod</b> .....	<b>1</b>
<b>2. Metamaterijali</b> .....	<b>5</b>
2.1. Istorijski razvoj metamaterijala .....	7
2.2. Različite kategorije metamaterijala .....	15
2.2.1. Složeni metal-dielektrik metamaterijali .....	15
a) Struktura negativne permitivnosti: Niz metalnih žica.....	15
b) Materijal sa negativnom permeabilnošću: SRR .....	17
c) Metamaterijali sa negativnim indeksom prelamanja .....	20
2.2.2. Nemetalni metamaterijali .....	23
<b>3. Poluprovodnički metamaterijali</b> .....	<b>24</b>
3.1. Osobine poluprovodničkih metamaterijala i njihova interakcija sa EM talasima .....	25
3.1.1. Anizotropija .....	26
3.1.2. Homogenizacija metamaterijala .....	29
3.1.3. Helmholtz-ova jednačina za anizotropnu sredinu; indeks prelamanja i propagacija talasa .....	31
a) TE modovi .....	32
b) TM modovi.....	36
3.2. QCL kao anizotropni metamaterijal .....	40
3.3. Indeks prelamanja i propagacija .....	42
3.3.1. TM modovi .....	42
3.3.2. TE modovi.....	49
<b>4. Kvantni kaskadni laseri</b> .....	<b>53</b>
4.1. Razvoj kvantnih kaskadnih lasera .....	54
4.2. Princip funkcionisanja .....	56

4.3. Terahercni kvantni kaskadni laseri.....	65
4.3.1. Dizajn aktivne oblasti terahercnog kvantnog kaskadnog lasera ....	67
a) CSL-dizajn .....	68
b) BTC- dizajn.....	69
c) RP-dizajn.....	69
4.4. Kvantni kaskadni laseri u magnetnom polju .....	70
4.4.1. Rasejanje u kvantnim kaskadnim laserima u prisustvu magnetnog polja.....	81
a) Rasejanje na longitudinalnim optičkim fononima.....	82
b) Rasejanje na akustičnim fononima .....	89
c) Rasejanje na neravninama pri uticaju magnetnog polja .....	89
4.5. Indeks prelamanja kvantnog kaskadnog lasera.....	100
<b>5. Određivanje komponenti tenzora dielektrične permitivnosti kvantnog kaskadnog lasera .....</b>	<b>106</b>
<b>6. Numerički rezultati.....</b>	<b>118</b>
6.1. Proračuni za aktivnu oblast GaAs/AlGaAs kvantnog kaskadnog lasera, koji radi u srednjem infracrvenom delu spektra .....	119
6.2. Proračuni za aktivnu oblast GaAs/AlGaAs kvantnog kaskadnog lasera, koji radi u terahercnom delu spektra .....	133
6.2.1. Struktura sa dve kvantne jame po periodi.....	133
6.2.2. Struktura sa tri kvantne jame po periodi .....	145
<b>7. Zaključak .....</b>	<b>155</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>159</b>
<b>Dodatak 1 .....</b>	<b>173</b>
<b>Dodatak 2 .....</b>	<b>183</b>

## 1. Uvod

Način na koji neki materijal interaguje sa elektromagnetnim zračenjem (npr. vidljivom svetlošću, radio talasima ili mikrotalasima) predstavlja osnovu za njegovo korišćenje u tehnologiji. Parče stakla, obrađeno u sočivo ili optički fiber, može manipulirati svetlom na način na koji parče metala ne može. Ove razlike potiču od dva osnovna parametra kojima je okarakterisan svaki materijal: dielektrične permitivnosti i magnetske permeabilnosti, a koje zajedno opisuju indeks prelamanja neke sredine. Kod prirodnih materijala ova veličina ima uvek pozitivnu vrednost.

Fenomen koji se ne javlja kod prirodnih materijala, a izuzetno je interesantan i u poslednje vreme predstavlja jednu od najispitivanijih karakteristika koja može biti ostvarena, jeste negativni indeks prelamanja. Poslednjih godina nova kategorija veštačkih materijala – metamaterijali [1], je načinila preokret u svetu fizike svojim neuobičajenim osobinama koje do sada nisu uočene u prirodi. Metamaterijali se realizuju od blokova prirodnih

materijala, s tim da se adekvatnim dizajniranjem postižu željene optičke osobine bitno drugačije od optičkih osobina koje ispoljavaju prirodni materijali (negativna permitivnost, negativna permeabilnost, negativan indeks prelamanja strukture) [2]. Usled svoje periodičnosti, ove strukture imaju sposobnost da kontrolišu elektromagnetne talase i da se ponašaju kao frekvencijski i prostorni filtri, a kako su mogućnosti njihove primene u različitim sektorima industrije i zdravstva velike, interesovanje za njih ne jenjava što ih poslednjih godina stavlja u fokus istraživanja.

Skoro svi metamaterijali konstruisani su tako da sadrže metalne delove (žicice, zasečeni prstenovi (engl. *split-ring resonators*), *fishnet* strukture, itd...) koji su u određenim delovima spektra uzrok velikim gubicima, a zahtevaju i složen način izrade. Postavlja se pitanje: da li je moguće dizajnirati metamaterijal bez metalnih delova? Odgovor je: moguće je, ako se koriste aktivne poluprovodničke strukture kod kojih je moguće realizovati anizotropiju dielektrične permitivnosti i koje imaju potencijal da proizvedu veliko optičko pojačanje [2,3,4,5]. Za razliku od većine klasičnih metamaterijala, ovako realizovani metamaterijali ne sadrže feromagnetne delove. Jedna od takvih, aktivnih poluprovodničkih komponenti je kvantni kaskadni laser, QCL (engl. *Quantum Cascade Laser*) [7]. QCL-ovi su unipolarni poluprovodnički izvori koherentnog zračenja čiji se rad zasniva na unutarzonskim prelazima [8,9]. Oni predstavljaju periodične strukture sačinjene od velikog broja kvantnih jama i barijera koje su „odgovorne“ za stvaranje energijskih podzona, a osnovna perioda sastoji se od aktivne i injektorske/kolektorske oblasti. Putem spoljašnjeg električnog polja ostvaruje se kaskadni režim rada i omogućava prelazak elektrona u narednu periodu. Ovi laseri su predstavnici tehnologije koja ima potencijal da proizvede jeftine i snažne izvore svetlosti, a pokrivaju srednji infracrveni i terahercni deo spektra. Dodatnom primenom vrlo jakog magnetnog polja u pravcu narastanja

strukture laserske podzone se diskretizuju na serije Landauovih nivoa, pa se elektronska struktura QCL-a može bitno promeniti [6,7,8,9].

Predmet ove disertacije je teorijska analiza uslova pri kojima QCL radi kao metamaterijal sa negativnim indeksom prelamanja, kao i numeričko određivanje opsega talasnih dužina pri kojima se ovaj efekat javlja.

Strukture koje su posmatrane su GaAs/AlGaAs kaskadni laseri dizajnirani da emituju u srednjem infracrvenom delu spektra i terahercnom delu spektra. Posebna pažnja je posvećena razmatranju uticaja jakog spoljašnjeg magnetnog polja na izlazne karakteristike lasera, kao i efekat različitih mehanizama rasejanja na rad lasera u takvim uslovima. Razmatrana rasejanja su rasejanje na longitudinalnim, rasejanje na akustičnim fononima i rasejanje na neravninama na spoju između slojeva.

Rad je, pored uvoda i zaključka, podeljen na pet poglavlja. U drugom poglavlju je data definicija metamaterijala, ukratko je opisan njihov istorijat i razvoj do danas. Izložena je opšta struktura i dat je pregled različitih kategorija metamaterijala. Posebna pažnja je posvećena poluprovodničkim metamaterijalima i za njih je izdvojeno posebno poglavlje, treće. U tom poglavlju opisane su neke osobine struktura koje su od značaja za ovaj rad, kao i interakcija tih struktura sa elektromagnetnim talasima. Kao osnova odgovarajućeg poluprovodničkog metamaterijala uzet je QCL i za takvu strukturu su izvedeni izrazi za indeks prelamanja i prostiranje talasa kroz ovakav sistem. Četvrto poglavlje se odnosi na QCL-ove koji emituju zračenje u srednjem infracrvenom delu i one koji pokrivaju terahercni deo spektra; njihov razvoj, strukturu i ponašanje u magnetnom polju. Objašnjena je ideja dizajniranja metamaterijala na bazi QCL-a uz prateća izvođenja i uslove koji moraju biti ispunjeni da bi takav materijal imao negativan indeks prelamanja. U petom poglavlju je dato detaljno izvođenje komponenti tenzora dielektrične permitivnosti QCL-ova odakle se vidi koji parametri i na koji način utiču na

postizanje ciljane vrednosti dielektrične permitivnosti koja će ispunjavati odgovarajuće uslove za negativno prelamanje. Ovi rezultati mogu biti od velikog značaja za izradu fotonskih heterostruktura i efikasno manipulisanje svetlošću. U šestom poglavlju su predstavljene numerički rezultati dobijeni za tri analizirane strukture - u okviru prvog dizajna, posmatrani laser emituje zračenje u srednjem infracrvenom delu spektra, dok se ostala dva dizajna odnose na izvore koji se razlikuju po broju jama unutar periode, a emituju zračenje u terahercnom opsegu frekvencija. Pored uticaja magnetnog polja i uticaja promene jačine polja na izlazne karakteristike metamaterijala, posmatrani su i uticaji temperature i nivoa dopiranosti strukture. Određeni su opsezi frekvencija/talasnih dužina na kojima QCL radi kako metamaterijal sa negativnim indeksom prelamanja, kao i promene opsega i režima rada u zavisnosti od promene parametara i jačine primenjenog magnetnog polja.

## **2. Metamaterijali**

Prema najopštijoj definiciji, pojam metamaterijal obuhvata sve veštačke strukture koje su dizajnirane tako da poseduju osobine koje prevazilaze neke od ograničenja sa kojim smo se susretali prilikom istraživanja prirodnih materijala i kakve nije moguće pronaći ni kod jednog poznatog prirodnog materijala. Elektromagnetni metamaterijali su, prema toj definiciji, veštačke elektromagnetne strukture dizajnirane tako da na određeni način interaguju sa elektromagnetskim talasima, kontrolišu njihovo ponašanje (prostiranje) i time obezbeđuju unapred zadate karakteristike koje se ne mogu ostvariti kod prirodnih materijala [2,3,10,11,12].

Poslednjih godina metamaterijali su privukli značajnu pažnju. Veliko interesovanje za metamaterijale potiče od mogućnosti inženjeringa efektivnih parametara medijuma, dielektrične permitivnosti i magnetne permeabilnosti. Samim tim moguće je kontrolisati transmisiju i refleksiju upadnih elektromagnetskih talasa na željeni način. Posebno interesantna osobina

metamaterijala je mogućnost ostvarivanja negativnog indeksa prelamanja u širokom opsegu učestanosti, pa se metamaterijali najčešće i povezuju sa negativnim prelamanjem. Ovo svojstvo je uzrok drugačijeg prelamanja svetlosti od uobičajenog i njemu je danas posvećena posebna pažnja zbog potencijala za konstruisanje uređaja koji bi omogućavali efekte nevidljivog plašta ili bili korišćeni kao mikroskopski uređaji super rezolucije [13]. Metamaterijali su našli primenu u industrijskim sektorima kao što su informacione i komunikacione tehnologije, svemir, bezbednost i odbrana, ali se njihova primena predviđa i na poljima zdravstva, energije i ekologije [4,5,7,8,14,15]. Primeri uređaja koji su realizovani poslednjih godina su:

- Senzori
- Super-sočiva
- Plašt
- Svetleće diode

Ovi uređaji su bazirani na kontrolisanju prostiranja talasa i za njihovu izradu su korišćeni dinamički materijali koji se mogu rekonfigurisati i fino podešavati.

Elektromagnetske osobine metamaterijala, koji predstavljaju periodične strukture, zavise od oblika i rasporeda periodičnih elemenata ubačenih u osnovni materijal, a ne samo od hemijskog sastava samog materijala. Zbog povećane složenosti u opisivanju parametara sistema, karakterizacija metamaterijala je postala nauka za sebe. Efektivni parametri, koeficijenti refleksije i transmisije, se mogu izdvojiti numeričkim simulacijama ili se njihove vrednosti mogu eksperimentalno izmeriti. Tradicionalno, pod efektivnim parametrima se podrazumevaju suštinski parametri materijala: dielektrična permitivnost i magnetska permeabilnost.

Dimenzije jediničnih ćelija od kojih se sastoje metamaterijali su znatno manje od talasne dužine elektromagnetnog zračenja (reda desetine talasne



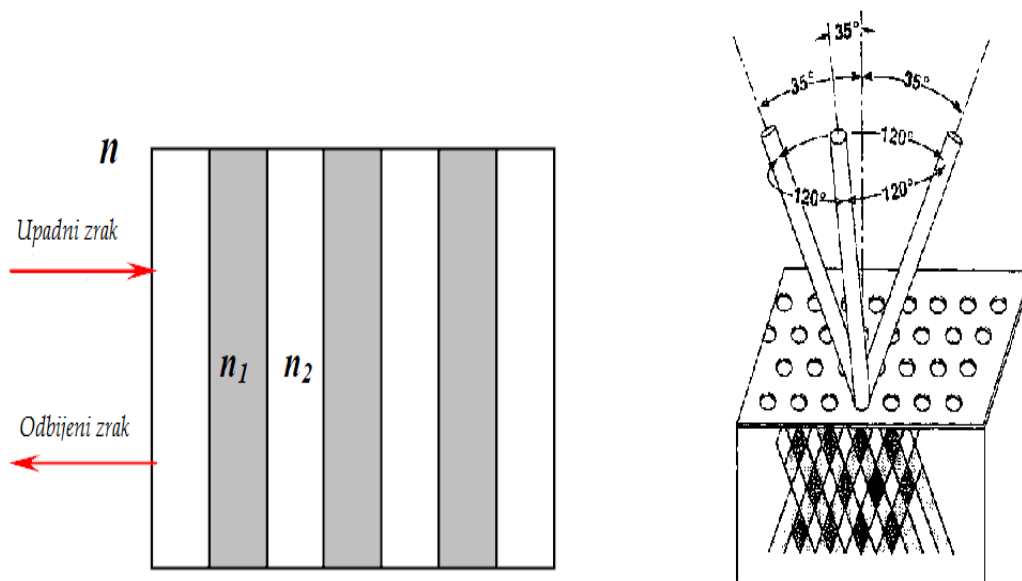
dužine), tako da se na metamaterijale može primeniti koncept efektivnog medijuma. Ovo znači da se metamaterijali mogu posmatrati kao homogene sredine sa efektivnim parametrima- efektivnom permitivnošću i efektivnom permeabilnošću, o čemu će biti reči kasnije. Pažljivim izborom oblika i geometrijske raspodele jediničnih ćelija, vrednost efektivnih parametara se može povećavati, smanjivati, ili, čak, učiniti negativnom.

## 2.1. Istorijski razvoj metamaterijala

Prvi fotonski kristal je 1915. godine predložio poznati britanski fizičar William Lawrence Bragg [19]. Kristal se sastojao od naizmenično postavljenih transparentnih, ravnih slojeva različitih indeksa prelamanja koji mogu reflektovati 99,5% upadne svetlosti. Svetlost (upadni talas) je delimično reflektovana i transmitovana na svakoj graničnoj površi između dva sloja, dok je incidencija bliska normalnoj, kao što je ilustrovano na slici ([Slika 1a](#)). Iako su bili izučavani još od 1887. godine [20], tek pionirskim radovima Yablonovicha, 1987. godine, takve strukture su dobile naziv fotonski kristali i postale poseban pravac teorijskog i ekperimentalnog izučavanja [21].

Yablonovitch je pokušavao da smanji spontanu emisiju svetlosti u laserima i poluprovodnicima [22]. Predložio je da se proširi koncept Braggovih ogledala na domen mikrotalasnih frekvencija za bilo koji upadni ugao zračenja dizajnom u dve i tri dimenzije. 1991. godine predlaže veštački materijal sa fotonskim zonskim procepom koji je nazvan „Yablonovite“ čija je radna frekvencija iznosila oko 14 GHz ([Slika 1b](#)) [23,24]. Ova struktura je sačinjena od bloka pleksiglasa koji je mašinski obrađivan u sve tri dimenzije u cilju reprodukovanja kristalne strukture dijamanta koja se smatra najboljom prirodnom strukturom u oblasti prelamanja svetlosti. Yablonovitch je teorijski i eksperimentalno pokazao da periodične strukture imaju sposobnost sprečavanja prostiranja modova u određenim frekvencijskim opsezima.

Materijali sa fotonskim energijskim procepom su prvo bili dizajnirani za primene u optici, kao što su: poluprovodničko emitovanje svetlosti, visoko reflektivna ogledala, mikrošupljine i filtri. Materijali sa fotonskim energijskim procepom koji rade na centimetarskim i milimetarskim talasnim dužinama, a koje je mnogo lakše napraviti, takođe su privukli pažnju istraživača, naročito na polju antena u cilju suzbijanja površinskih talasa.



Slika 1 (a) Principl rada Braggovih (dielektričnih) ogledala, (b) „Yablonovite“, veštački materijal sa fotonskim procepom koji je predložio E. Yablonovitch [25].

Fotonski kristali su sačinjeni od periodično postavljenih dielektričnih, ili kombinacije metal-dielektrik, nano i mikrostruktura koje utiču na prostiranje elektromagnetnih talasa na isti način kao što periodični potencijal u poluprovodničkom kristalu utiče na kretanje elektrona definišući dozvoljene i zabranjene energetske zone. U suštini, fotonski kristali imaju unutrašnje opsege frekvencija sa visokom i niskom dielektričnom permitivnošću koji se naizmenično ponavljaju. Fotoni, koji imaju i talasnu prirodu, prostiru se, odnosno ne prostiru, kroz ovakvu strukturu što je određeno njihovom talasnom dužinom. Svetlosni talasi čije talasne dužine pripadaju oblastima

frekvencija za koje je moguće prostiranje kroz sistem, nazivaju se svojstvenim modovima, a grupe dozvoljenih modova formiraju zone. Nedoovoljene zone talasnih dužina su nazvane fotonskim zonskim procepima.

Prema analogiji sa materijalima sa fotonskim energijskim procepom, za metamaterijale je uvedena nova terminologija: strukture sa elektromagnetskim energijskim procepom (u literaturi skraćeno EBG – engl. *Electromagnetic Band Gap*), kako bi se odredila nova klasa veštačkih materijala koji sprečavaju prostiranje talasa pri određenim upadnim uglovima i određenim frekvencijskim opsezima u mikrotalasnom režimu. Jednačina propagacije elektromagnetnog talasa u ovakvim strukturama dobija se na osnovu Maxwellovih jednačina, i analogna je Schrodingerovoj jednačini koja opisuje talasnu funkciju elektrona u kristalu.

Lamb je još 1904. godine dopunio istraživanja Schustera [26] navodeći u svom radu da je negativna grupna brzina, odnosno grupna brzina, znaka suprotnog od znaka fazne brzine, moguća zbog postojanja anomalne disperzije. U aktuelnim opisivanjima prostiranja svetlosti ovo je ekvivalentno materijalima sa negativnim indeksom prelamanja i mogućnost postojanja takvog materijala prvi put se pominje u Schusterovom radu [27] u kome je on povezo fenomen negativne grupne brzine propagirajućeg talasa sa negativnim indeksom prelamanja materijala kroz koji se talas prostire. U vremenskom periodu od 1904. do 1967. godine, kada je Veselago objavio rad koji se danas smatra pionirskim u oblasti metamaterijala [1], publikovani su brojni radovi koji su se bavili problematikom negativnog indeksa prelamanja materijala i mogućih posledica takvog svojstva, kao i radovi koji su se bavili teorijskim istraživanjem struktura koje bi ispoljavale takve osobine. Ipak, ti radovi su, kao i sam Veselagov rad, ostali neprimećeni sve do kraja prošlog veka.

Ideja o metamaterijalima i prihvatanje koncepta materijala sa negativnim indeksom prelamanja su se početkom prošle decenije našli u fokusu interesovanja naučne zajednice. Ključni momenat je bio pomenuti rad Veselaga o negativnom indeksu prelamanja u drugoj polovini prošlog veka, nakon čega je usledilo objavljivanje revolucionarnog rada engleskog fizičara Pendrya i na teorijskom i na praktičnom polju istraživanja vezanom za materijale sa negativnim indeksom prelamanja [28,29]. Ono što je potom usledilo jeste eksperimentalno posmatranje fenomena negativnog prelamanja koje je ostvareno na početku novog milenijuma [30].

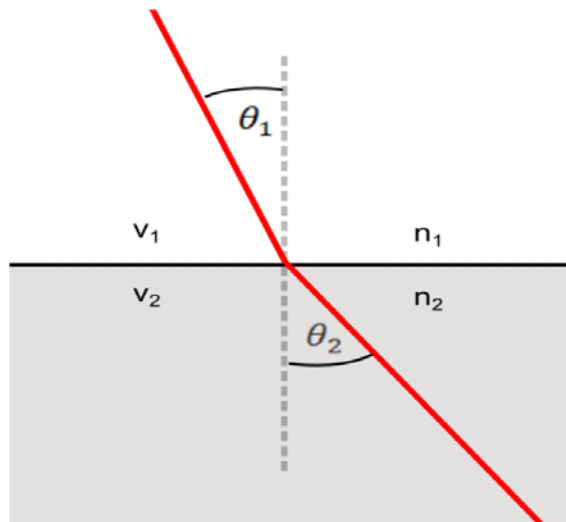
Da bi se pristupilo konceptima koji proizilaze iz radova Pendrya i Veselaga, moraju se poznavati neke osnovne tačke njihovih istraživanja. Prvo, svakodnevno opažanje je da različite supstance različito prelamaju elektromagnetni talas na optičkim frekvencijama. Opšte viđenje bi bilo da sve zavisi od veličine zvane indeks prelamanja, koji predstavlja meru koliko svetlost usporava kada prelazi iz medijuma kao što je vazduh u neki drugi medijum, na primer, staklo. Uobičajeno je i usvajanje pozitivne vrednosti indeksa prelamanja, kao i to da se ovaj optički parametar prvenstveno povezuje sa transparentnim materijalima. U slučaju prolaska svetlosti kroz dve optički različite sredine (sa indeksima prelamanja  $n_1$  i  $n_2$ ), prelamanje svetlosti je definisano Snellovim zakonom (Slika 2) iz koga sledi da je odnos indeksa prelamanja sredina obrnuto srazmeran odnosu faznih brzina talasa u jednoj ( $v_1$ ), tj. drugoj oblasti ( $v_2$ ). Isto tako, iz Snellovog zakona je moguće izvesti da je odnos  $n_2/n_1$  obrnuto proporcionalan odnosu sinusa upadnog ugla ( $\theta_1$ ) i ugla prelamanja ( $\theta_2$ ):

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.1)$$

gde je indeks prelamanja neke sredine bezdimenziona veličina, a dat je izrazom:

$$n = \frac{c}{v} . \quad (2.2)$$

Ovde,  $c$  označava brzinu svetlosti.



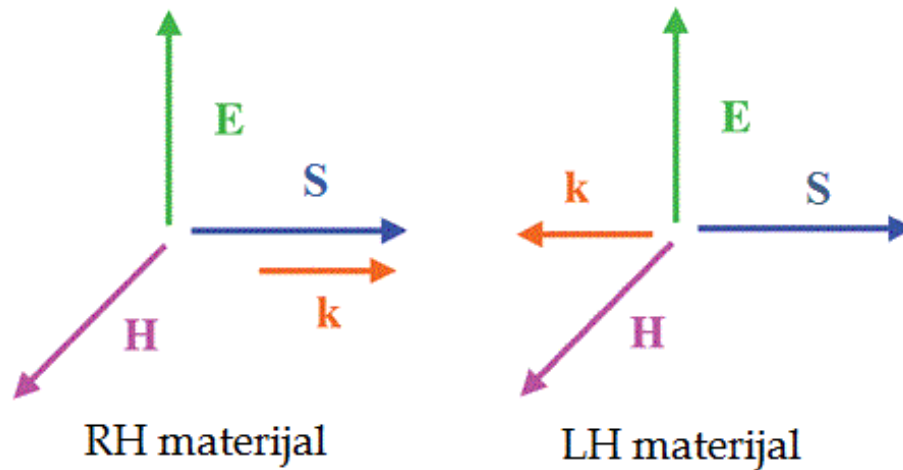
*Slika 2* Grafički prikaz Snellovog zakona: horizontalna linija predstavlja razdvojnu površ dve sredine različitih indeksa prelamanja,  $n_1$  i  $n_2$ , dok isprekidana linija predstavlja normalu na razdvojnu površinu. Crvenom linijom je označen pravac kretanja talasa koji se kroz posmatrane sredine prostire brzinama  $v_1$  i  $v_2$ . Uglovi  $\theta_1$  i  $\theta_2$  predstavljaju upadni ugao i ugao prelamanja talasa u odnosu na normalu, respektivno.

Ideja dodeljivanja negativnog indeksa prelamanja transparentnim materijalima kao što su staklo ili vodene kapljice, izgledala je besmisleno, pa je pridruživanje pozitivne vrednosti ove veličine bilo sasvim dovoljno. Ovakvo objašnjenje važi bez upotreba Maxwellovih jednačina kada je reč o običnim, izotropnim, staklenim ili sličnim transparentnim materijalima. Kako je indeks prelamanja po definiciji jednak kvadratnom korenu proizvoda relativne dielektrične permitivnosti i relativne magnetne permeabilnosti materijala, sledi da njegova vrednost može biti ili pozitivna ili negativna. Isto tako, može se pretpostaviti da dielektrična permitivnost i magnetna permeabilnost mogu biti istovremeno negativne.

Uvođenje termina metamaterijal za opisivanje efektivnog ponašanja kompozita se pripisuje Walseru [31]. Uprkos ovoj atraktivnoj terminologiji za novi spektar kompozita, reč metamaterijal nije izazvala preveliko interesovanje, ali ono što jeste, kao što je navedeno ranije, zapravo je bila ideja o negativnom prelamanju u izotropnim sredinama. Ipak, nedostajala je eksperimentalna potvrda ovog fenomena.

Danas važi uverenje da je istorija metamaterijala započeta 1967. godine Veselagovim radom na temu elektrodinamike izotropnih supstanci sa istovremeno negativnim, realnim vrednostima dielektrične permitivnosti i magnetne permeabilnosti u određenom frekvencijskom opsegu [1]. U ovom radu Veselago je predvideo jedinstvene elektromagnetske osobine levorukih (engl. *left-handed*, skraćeno LH) medijuma i pokazao da je moguće prostiranje elektromagnetnih talasa u takvoj sredini, ali sa negativnom konstantom prostiranja. Elektromagnetska energija (koja je povezana sa Poyntingovim vektorom) bi se prostirala od izvora, ali bi talasni frontovi putovali u suprotnom smeru. Kao posledica ovoga, vektori električnog i magnetskog polja bi sa vektorom prostiranja talasa formirali trojku po pravilu „leve ruke“, tako da ih je on prema tome, a u poređenju sa „desnorukim“ (engl. *right-handed*, skraćeno RH) materijalima, za koje važi pravilo „desne ruke“, nazvao LH materijalima (Slika 3). Kod LH metamaterijala vektori fazne i grupne brzine su istog pravca, ali suprotnog smera (Slika 4), što uzrokuje da je indeks prelamanja negativan.

Veselago je istakao da do tada nije izveden ni jedan eksperiment u kome bi LH supstanca bila makar identifikovana, ali je za njen razvoj predložio čiste feromagnetske metale ili poluprovodnike kod kojih su i permitivnost i permeabilnost tenzori.



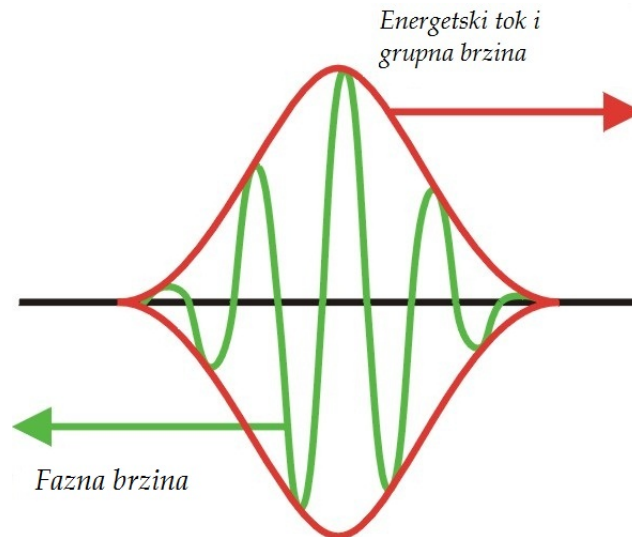
*Slika 3* Orijentacija vektora električnog,  $\vec{E}$ , magnetskog,  $\vec{H}$  polja i vektora prostiranja talasa,  $\vec{k}$  koji formiraju trojku po pravilu (a) desne ruke za RH, (b) leve ruke za LH materijale, kao što je opisano u tekstu. Energija (Poyntingov vektor  $\vec{S}$ ) i talasni frontovi se prostiru u (a) istom smeru, dok u (b) slučaju LH materijala putuju u suprotnom smeru.

Prema Veselagu, jedna od poteškoća koje su postojale u traganju za prirodnom, dvostruko-negativnom supstancom je u tome što su opsezi rezonantnih učestanosti pri kojima se javljaju negativna permitivnost i negativna permeabilnost veoma uski, pri čemu su rezonantne učestanosti pri kojima permitivnost postaje negativna najčešće mnogo veće od onih za koje je permeabilnost manja od nule.

Glavni koncept daljeg istraživanja na ovom polju je bio konstruisati nove materijale od veštačkih objekata koji se mogu nazvati metačestice. Takvi materijali bi bili kompoziti koji nisu samo superpozicija svojih delova.

Prva eksperimentalna potvrda Veselagovih teorijskih istraživanja desila se tek tridesetak godina kasnije kada je Pendry sa svojim saradnicima projektovao prvi eksperimentalni uzorak koji ispoljava negativnu permitivnost na mikrotalasnim učestanostima [28]. Tri godine kasnije on je predložio i element koji je nazvan prekinuti prstenasti rezonator, SRR (engl.

*split-ring resonator*), a kojeg karakteriše negativna permeabilnost u uskom opsegu učestanosti [29].



**Slika 4** Posledica koja proizilazi iz negativnog prelamanja je to da brzina zraka (odnosno grupna brzina) ilustrovana crvenom bojom na slici i fazna brzina (zelena) moraju biti suprotno usmerene.

Superpozicijom ove dve Pendryeve jedinične ćelije, šuplje žičane strukture koja obezbeđuje negativnu permitivnost i prekinutog prstenastog rezonatora koji daje negativnu permeabilnost, grupa koju su činili Shelby, Smith i Schultz prva je eksperimentalno potvrdila postojanje materijala koji istovremeno pokazuju negativnu permitivnost i permeabilnost. Oni su 2001. godine napravili i predstavili prvi LH materijal i izmerili negativni indeks prelamanja [30]. Ovaj LH metamaterijal je imao negativni indeks prelamanja na uskom opsegu učestanosti (od 10-11 GHz).

Počevši od radova Veselaga [1], Pendrya [29,32] i Shelbya [30] i njihovih saradnika, mnogobrojni istraživači su doprineli razvoju i rastu ove nove generacije materijala koja nudi mogućnosti za manipulisanje elektromagnetnim talasima na željeni način [33,34].



## 2.2. Različite kategorije metamaterijala

U ovom delu će biti reči o različitim tipovima metamaterijala koji su predloženi u poslednjih par godina od strane nekoliko istraživačkih grupa u cilju dobijanja željenih elektromagnetnih osobina.

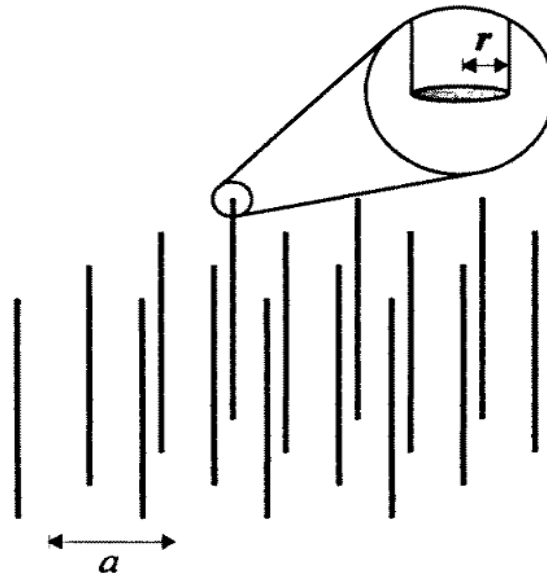
Kako bi se obezbedili uslovi koji će omogućiti da elektromagnetno polje koje se prostire kroz periodičnu strukturu nju vidi kao balkovski materijal, prosečne dimenzije jedinične ćelije ovih metamaterijala mogu biti mnogo manje od talasne dužine upadnog zračenja, pa se optičke osobine metamaterijala mogu predstaviti preko efektivnih parametara.

### 2.2.1. Složeni metal-dielektrik metamaterijali

Složeni metamaterijali bazirani na metalnim dodacima u dielektričnoj sredini su bili prvi koji su predloženi. Oni su dali mogućnost za prvu realizaciju negativnog indeksa prelamanja superpozicijom dve različite strukture: SRR [32] i tanke žice [29] u frekvencijskom opsegu gde su  $\epsilon$  i  $\mu$  permitivnost i permeabilnost bile istovremeno negativne.

#### *a) Struktura negativne permitivnosti: Niz metalnih žica*

Imajući u vidu makroskopsku elektroneutralnost, plazma je smatrana jedinim dostupnim dielektrikom koji pokazuje negativnu permitivnost (a pozitivnu magnetnu permeabilnost). U cilju aproksimacije električnih osobina plazme u mikrotalasnom režimu, ranih pedesetih godina prošlog veka predložena je struktura sačinjena od dielektričnog materijala sa nizom periodično raspoređenih metalnih štapića [35,36]. Nešto kasnije, Pendry [32] je uveo teoriju koja dozvoljava povezivanje kvantnih parametara plazme sa geometrijskim dimenzijama niza štapića.



Slika 5 Prvi metamaterijal (niz tankih žica), predložen od strane Pendrya, koji obezbeđuje negativnu efektivnu permitivnost  $\epsilon$  [32]. Razmak između elemenata,  $a$ , je mnogo veći od poluprečnika štapića,  $r$ .

Plazmonska frekvencija metala se obično nalazi u vidljivom i bliskom ultraljubičastom ( $\sim$ PHz (petahertz)) delu spektra i koncept plazmona dozvoljava asimilirajuće ponašanje metala prema elektronskoj plazmi. Jednom izložen elektromagnetnom zračenju, elektronski oblak metalnih atoma se pomera od jedne oblasti do druge, što stvara višak naelektrisanja suprotnih znakova u poređenju sa inicijalnim ravnotežnim stanjem. To dovodi do povratne sile usled kretanja harmonika koje je okarakterisano sledećom ugaonom frekvencijom [28]:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m^*}, \quad (2.3)$$

gde je  $\omega_p$  ugaona plazmonska frekvencija,  $N$  zapreminska koncentracija naelektrisanja, a  $e$  i  $m_{eff}$  su naelektrisanje i efektivna masa elektrona, respektivno. Dielektrična funkcija se, tada, može izraziti na sledeći način:

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\gamma)}, \quad (2.4)$$

gde je  $\gamma$  parametar disipacije, a  $\omega$  kružna učestanost upadnog talasa.

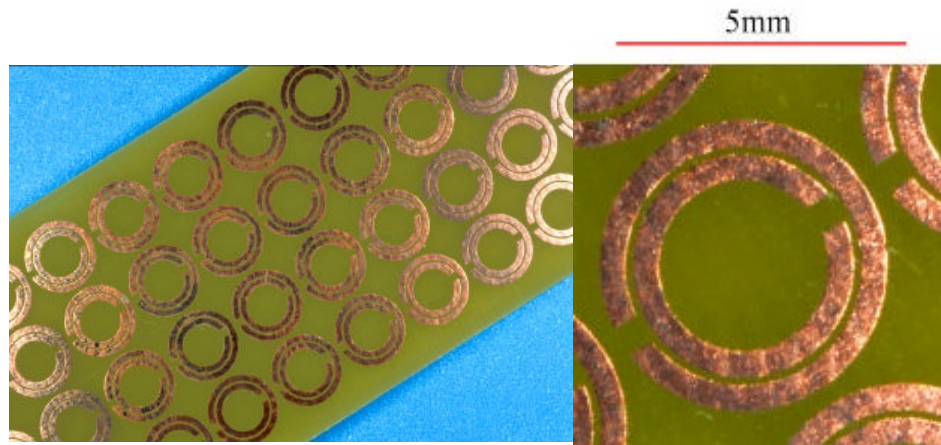
Na nižim frekvencijama ( $\sim$ GHz), disipacija je veoma bitna i čini praktično nemogućim posmatranje ovog fenomena. Rešenje koje je Pendry predložio [32] podrazumeva periodičnu strukturu sastavljenu od niza metalnih žica (Slika 5), što dozvoljava smanjivanje prosečne koncentracije naelektrisanja u materijalu. Osim toga, na strukturu je primenjeno električno polje paralelno osi žica, pa će se duž žica indukovati struja. Dolazi i do povećavanja efektivne mase elektrona zbog sopstvene induktivnosti svakog od štapića, što vodi do pomeranja plazmonske frekvencije u mikrotalasni opseg, prema gore navedenoj jednačini.

#### ***b) Materijal sa negativnom permeabilnošću: SRR***

U cilju realizovanja struktura sa drugačijim magnetskim odzivima, a bez korišćenja magnetskih materijala, Pendry [29] je predložio periodičnu strukturu sastavljenu od niza prekinutih metalnih prstenastih rezonatora koja bi imala pozitivnu permitivnost, a negativnu permeabilnost (Slika 6). Pri izlaganju magnetnom polju, normalnom na ravan prstenova, u petlji će se indukovati rezonantna struja, te će se generisati i ekvivalentni magnetski dipolni momenti. Svaki element strukture se ponaša kao magnetski dipol i struktura se može smatrati materijalom čija je zavisnost relativne magnetske permeabilnosti od frekvencije plazmanskog tipa:

$$\mu(\omega) = 1 - \frac{A\omega_{0m}^2}{\omega^2 - \omega_{0m}^2 + j\gamma\omega}, \quad (2.5)$$

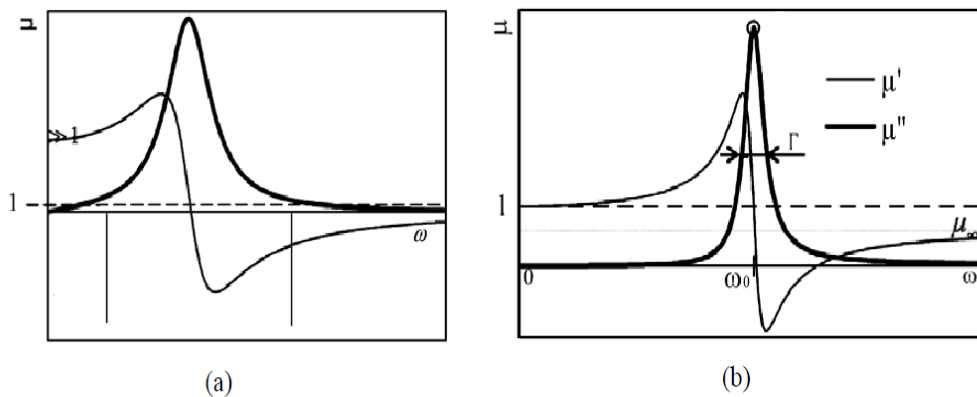
gde je  $A$  konstanta koja zavisi od unutrašnjeg poluprečnika manjeg prstena,  $\omega_{0m}$  je podesiva magnetska rezonantna frekvencija, a  $\gamma$  predstavlja faktor prigušenja koji obuhvata sve gubitke (i mehanizme rasejanja) u metalu.



*Slika 6* Prvi metamaterijal sa negativnom magnetnom permeabilnošću predložen od strane Pendrya [37].

Bitno je napraviti presek i ukazati na mesto konvencionalnih magnetskih materijala u poređenju sa metamaterijalima. Interesantno je podsetiti se sredstava korišćenih za stvaranje statičke magnetne indukcije  $B$ , kao i onih za generisanje efektivnog magnetnog odziva na visokim frekvencijama. Statička polja se mogu generisati pomoću materijala (stalni magneti), struja (solenoidi, Helmholtz-ovi kalemovi,...) ili kombinovanjem materijala i struja (elektro-magnet). U slučaju metamaterijala, efektivni magnetski odziv proizilazi iz struja koje su indukovane u induktivnim metalnim strukturama pod uticajem upadnog magnetnog polja  $H$ .

Tradicionalni magnetski materijali su uglavnom poželjni zbog svojih velikih vrednosti permeabilnosti. Za aplikacije kao što su: induktorsko jezgro, jezgro transformatora i magnetna glava za snimanje, traži se nizak stepen gubitaka. Nasuprot tome, za filtriranje ili aplikacije za apsorpciju parazitnih visokih frekvencija, traži se visok stepen gubitaka u frekvencijskom opsegu koji treba odbaciti. Na [Slici 7](#) je prikazana tipična permeabilnost tankog magnetnog sloja.



**Slika 7** Poređenje između magnetne permeabilnosti konvencionalnog magnetskog materijala **(a)** i metamaterijala baziranog na nemagnetskim materijalima **(b)**, prema radu [38].  $\mu'$  označava realnu komponentu magnetne permeabilnosti, a  $\mu''$  njenu imaginarnu komponentu, dok  $\Gamma$  označava širinu linije.

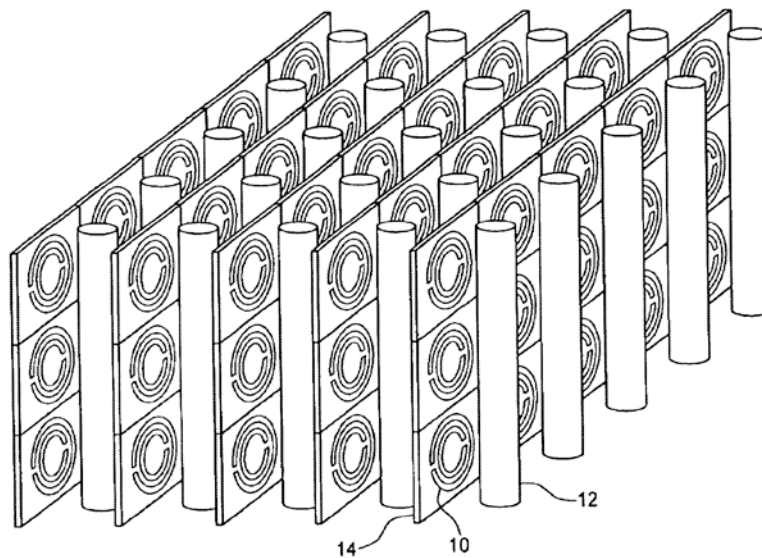
Oblast u kojoj je magnetna funkcija lokalizovana ispod rezonantne frekvencije je veoma korisna za aplikacije gde su potrebni mali gubici, dok je zona gde je permeabilnost oko rezonantne frekvencije pogodnija za aplikacije sa velikim gubicima. Izvan ove spektralne oblasti, realni deo permitivnosti je manji od jedan (i čak i negativan delom svoje krive) sa niskim nivoom gubitaka. Ova spektralna oblast je veoma obećavajuća s obzirom na to da nudi mogućnost smanjivanja površinskih efekta u klasičnim provodnicima [39].

Imajući u vidu da većina primena baziranih na običnim magnetskim materijalima zahteva visoke nivoe permeabilnosti, onda se upravo permeabilnost čini dobrim kriterijumom za poređenje performansi metamaterijala i standardnih magnetnih materijala. Tipična efektivna permeabilnost metamaterijala je prikazana na slici (Slika 8b). Poređenjem magnetne permeabilnosti konvencionalnog materijala i metamaterijala baziranog na nemagnetskim materijalima, može se zaključiti da standardni magnetski materijali ostaju efikasniji od metamaterijala kada su poželjni visoki nivoui permeabilnosti i za radnu frekvenciju ispod 10 GHz [38]. Ipak,

na visokim frekvencijama metamaterijali mogu pokazati nivoe permeabilnosti i spektralne širine koji prevazilaze značajno ono što se može dostići tradicionalnim magnetskim materijalima.

*c) Metamaterijali sa negativnim indeksom prelamanja*

2001. godine Shelby je sa saradnicima eksperimentalno pokazao da je negativan indeks prelamanja moguć [30]. Autori su bili inspirisani teorijskim radovima Pendrya i njegovih saradnika [32,29] i predložili spajanje njihovih struktura u jednu, TW-SRR (enlg. *Thin Wire-Split Ring Resonator*) (Slika 8). Koristeći odgovarajuću polarizaciju upadnog elektromagnetnog talasa, gde je električna komponenta paralelna žicama, a magnetna normalna na ravan prstenova (SRR), i električna i magnetna aktivnost su dostignute pri ciljnoj frekvenciji. To je dovelo do negativne permitivnosti, negativne permeabilnosti, a na taj način i do negativnog indeksa prelamanja u opsegu frekvencija od 10,2 GHz do 10,8 GHz.



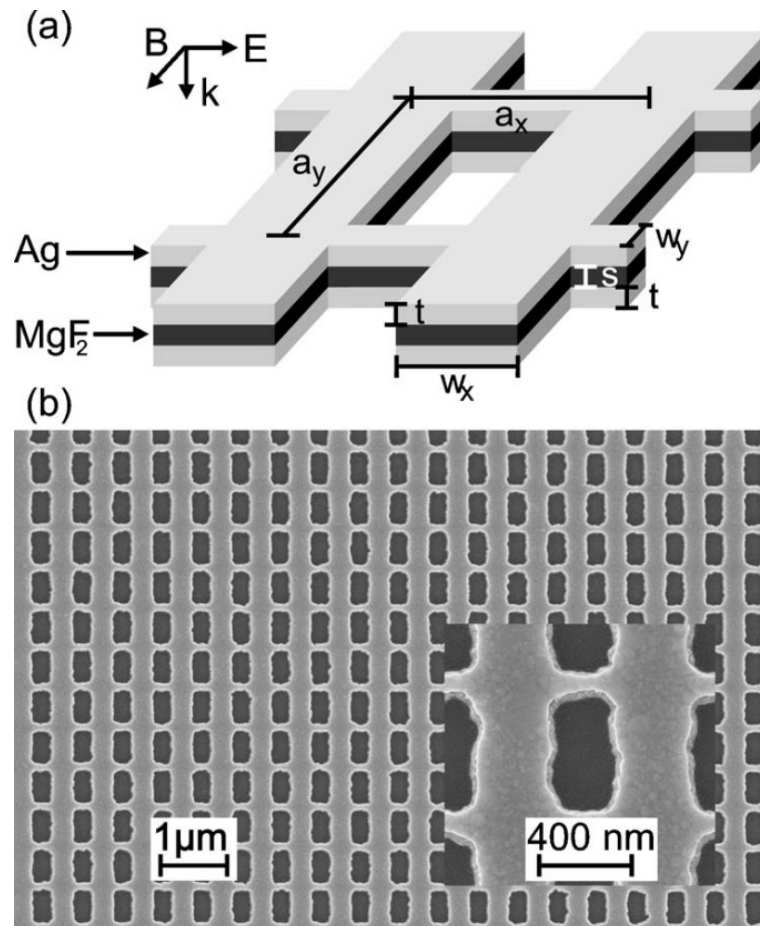
Slika 8 Skica prvog realizovanog kompozitnog LH materijala [30].

Posle ostvarivanja negativnog indeksa prelamanja, oblast metamaterijala je doživela ekspanziju. Predložene su brojne metalne strukture u cilju dobijanja željenih elektromagnetnih osobina i kontrolisanja istih. Neke od tih struktura su: strukture  $\Omega$ -oblika [40], strukture U-oblika [41], strukture oblika spajalice, upareni štapići [42].

Kada se radi o strukturama ove vrste, na veoma visokim frekvencijama, u obzir bi trebalo uzeti dve glavne poteškoće. Iz tehnološkog ugla, veoma je teško, ili, čak, praktično nemoguće fabrikovati jedinične ćelije kompleksne geometrije sa submikronskim i nano-dimenzijama. Drugo ograničenje vezano za zakon skaliranja bi, takođe, trebalo uzeti u obzir. U pogledu struktura koje ispoljavaju negativni indeks prelamanja, moguće je pomerati plazmonsku frekvenciju u srednjem infracrvenom delu spektra, modifikujući debljine i koncentracije metalnih žica. Van ovog frekvencijskog opsega, medijum nije dovoljno razređen i ponašanje strukture je pod velikim uticajem difrakcionih efekata. Što se tiče struktura sa magnetnom aktivnošću, povećanje frekvencije se ne može postići samo smanjivanjem geometrijskih dimenzija, već se u proračunu mora uzeti nekoliko dodatnih fizičkih efekata vezanih za efektivnu masu elektrona i apsorpciju energije. Ovo je istaknuto u istraživačkom radu O'Briena i Pendrya u kome su predložili strukturu koja pokazuje magnetsku aktivnost u infracrvenom frekvencijskom opsegu [43].

*Fishnet* (u prevodu sa engleskog na srpski: ribarska mreža) metamaterijali su predloženi kao alternativa TW-SRR strukturama za prevazilaženje nekih poteškoća nametnutih smanjenjem geometrijskih dimenzija i inercijalnim svojstvima elektrona [44]. Ova vrsta metamaterijala je dobila ime *Fishnet* zbog svog izgleda koji podseća na ribarsku mrežu (Slika 9) – struktura je sastavljena od dve metalne ploče koje su postavljene jedna uz drugu i razdvojene dielektrikom, i ravnomerno je izbušena (kroz oba sloja). *Fishnet* metamaterijali imaju jednostavniji dizajn od prethodno

razmatranih struktura, veoma su jednostavni za fabrikaciju, pa ih je lakše implementirati na manjim dimenzijama.



**Slika 9 (a)** Šema dizajna metamaterijala sa negativnim indeksom prelamanja, **(b)** Mikroskopski snimak strukture bazirane na srebru. Umetnuta slika je uveličani prikaz dela strukture [44].

Jedinična ćelija ovog metamaterijala ima iste rezonantne osobine kao i jedinična ćelija TW-SRR metamaterijala. Pri smanjivanju dimenzija jediničnih ćelija tj. povećanju frekvencija na kojima ova vrsta metamaterijala ima negativan indeks prelamanja, osnovna jedinica strukture zadržava rezonantna svojstva kao kod TW-SRR struktura. Taj fenomen, tačnije težnja da se on objasni, je poslednjih godina interesantnija tema nego sam dizajn ovakvih struktura.



### **2.2.2. Nemetalni metamaterijali**

U dizajnu metamaterijala na bazi metala, ili metamaterijala koji sadrže određene metalne komponente, ideja je iskoristiti rezonantne frekvencije metalnih struktura kako bi se dobile istovremeno negativne permitivnost i permeabilnost, a time i negativna vrednost indeksa prelamanja. Glavna mana ovakvih struktura su, upravo, ti metalni delovi koji na određenim frekvencijama unose velike gubitke u sistem. Jedan od novih pravaca u razvoju metamaterijala bila je ideja o dizajniranju aktivnih metamaterijala. To podrazumeva kompenzovanje gubitaka uključivanjem pojačanja, što bi se moglo izvesti eliminisanjem metalnih delova i dizajniranjem čisto poluprovodničke strukture na bazi kvantnih nanostrukture kod kojih se može ostvariti veliko pojačanje [3,4,45]. Kao posebno pogodne nanostrukture istakli su se kvantni pojačavač i kvantni kaskadni laser, pre svega zbog velikog pojačanja koje mogu ostvariti.

O ovim materijalima će biti više reči u narednom poglavlju.

### **3. Poluprovodnički metamaterijali**

Poluprovodnički metamaterijali su veštačke elektromagnetne strukture čija se jedinična ćelija sastoji samo od poluprovodničkih materijala. Pogodne strukture za dizajn poluprovodničkih metamaterijala su kvantne nanostrukture sačinjene od naizmenično postavljenih tankih slojeva dva poluprovodnika. Primeri takvih struktura su kvantni pojačavač i QCL .

Prednost ovih metamaterijala u odnosu na metamaterijale koji sadrže metalne delove je to što ne zahtevaju nikakav magnetni odziv materijala od kojih su napravljeni. Druga bitna prednost je ta što imaju nisku apsorpciju, a treća je način izrade ovakvih materijala. Ovi metamaterijali se realizuju dobro poznatom tehnikom epitaksijalnog rasta, te je time njihova izrada značajno lakša, brža i jeftinija od izrade materijala sa metalnim delovima [3,4].

Navedene kvantne strukture, pogodne za realizaciju ove vrste metamaterijala, predstavljaju poluprovodničke strukture na bazi kvantnih jama kod kojih je izražena anizotropija u optičkim osobinama. Ta anizotropija

se ogleda u postojanju jake interakcije između elektrona provodne zone i svetlosti polarizovane u pravcu narastanja strukture, dok komponenta svetlosti koja je polarizovana u ravni slojeva, skoro i ne oseća uticaj nanostrukture [46]. Podolskiy i Narimanov su 2005. godine razvili teorijski poluprovodnički model za dobijanje negativnog indeksa prelamanja korišćenjem anizotropije. Taj model je dve godine kasnije eksperimentalno predstavljen od strane univerzitetske grupe (*Princeton University*), u kojoj su bili i Podolskiy i Narimanov, i predstavljao je prvi poluprovodnički metamaterijal [47,48].

### **3.1. Osobine poluprovodničkih metamaterijala i njihova interakcija sa EM talasima**

Elektromagnetni talasi pokazuju različitu dinamiku u zavisnosti od toga da li su njihove talasne dužine uporedive ili mnogo veće od karakteristične veličine jediničnih ćelija veštačkih ili prirodnih materijala. Prvi slučaj je povezan sa studijama o veštačkim strukturama sa energijskim procepom kao što su fotonski, plazmonski, fononski i magnonski kristali. Neki autori su ove materijale svrstavali u definicije metamaterijala, dok drugi nisu. Drugi slučaj (elektromagnetni talasi čije su talasne dužine značajno veće od karakteristične veličine jedinične ćelije) je u fokusu nauke o metamaterijalima s obzirom na to da ove strukture pokazuju efektivno kontinualne osobine i mogu se, bez ikakve diskusije, zvati metamaterijalima.

Materijali sa veštačkom periodičnom promenom indeksa prelamanja, čija je periodičnost uporediva sa talasnom dužinom elektromagnetnih talasa u vidljivom opsegu, poznati su kao strukture sa fotonskim procepom. Analogno tome, periodične strukture dizajnirane za mikrotalasni frekvencijski opseg su nazvane strukturama sa elektromagnetskim procepom. Magnetski veštački

materijali sa periodično modulisanim svojstvima u kojima se javljaju dozvoljena magnonska stanja i procepi, su magnonski kristali.

Poluprovodnički kristali su materijali sa energijskim procepom i periodičnim potencijalom koji utiče na kretanje elektrona definišući dozvoljene i zabranjene zone. Kako bi ovakav materijal mogao da funkcioniše, neophodno je da svaka jedinična ćelija bude kombinacija dva različita poluprovodnička materijala. Korišćenjem takvih, veštačkih, struktura, može se omogućiti propagacija svetlosti u određenim pravcima, moguće je lokalizovati je u odabranim kanalima ili zonama ili, čak, onemogućiti propagaciju svetla na frekvencijama unutar procepa, uvođenjem defekata na određeni način.

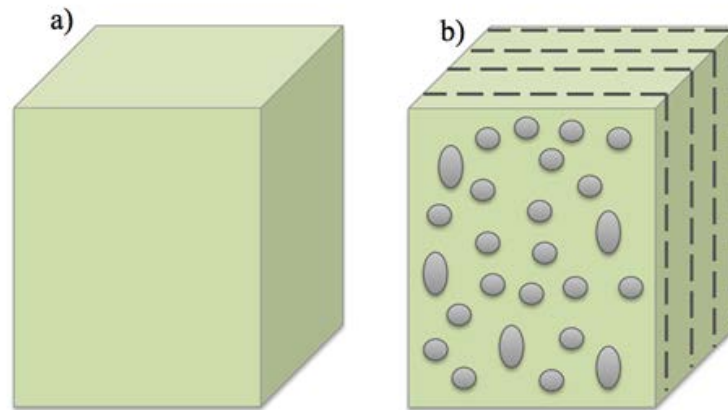
Interakcija elektromagnetnog zračenja sa materijalom opisuje se preko parametara sredine kao što su dielektrična permitivnost i magnetna permeabilnost. Kod nemagnetnih poluprovodničkih materijala relativna magnetna permeabilnost iznosi  $\mu = 1$ , dok se dielektrična permitivnost može odrediti na osnovu Lorentz-ovog modela [49,50].

Više o ovom modelu će biti dato u posebnom poglavlju.

### **3.1.1. Anizotropija**

Izotropna sredina ne poseduje ni jedan specijalan pravac u svojoj strukturi, odnosno ima visok stepen prostorne simetrije. To znači da elektromagnetni odziv ne zavisi od toga kako je materijal pozicioniran ili rotiran u odnosu na polje. Za izotropne sredine, tenzori parametara materijala su umnošci jediničnog tenzora, te je skalarno množenje dovoljno. Za razliku od pojma izotropija koji implicira identična svojstva materijala u svim pravcima, pojam anizotropija ukazuje na zavisnosti osobina materijala od pravca. Na [Slici 10](#) su ilustrovane izotropna i anizotropna sredina.

Materijali su često anizotropni. Prema najopštijoj definiciji može se reći da pojam anizotropije neke sredine označava nejednakost fizičkih i fizičko-hemijskih svojstava te sredine (kao što su električna i toplotna provodljivost, elastičnost, brzina zvuka, indeks prelamanja i mnoga druga svojstva) duž različitih pravaca unutar nje. Uopšteno govoreći, sredina može po jednom svojstvu biti izotropna, a po drugom, pak, anizotropna, a i sama anizotropija u anizotropnoj sredini može biti različitog stepena – može biti veoma izražena, a isto tako i skoro zanemarljiva. Uticaj anizotropije na konstitutivne parametre, permitivnost i permeabilnost, je takav da je neophodno predstavljati ih preko tenzorskog oblika.



Slika 10 Ilustracija izotropne (a) i anizotropne (b) sredine [51].

U oblasti optike anizotropija se vezuje za nejednakost indeksa prelamanja u različitim pravcima prostiranja elektromagnetnog talasa kroz posmatranu sredinu. S obzirom na to da se u oblasti optike pojam anizotropije najčešće vezuje za osobine kristala, nije iznenađujuće što se oblast koja izučava ponašanje anizotropnih materijala često naziva „optika kristala“. Kod određenih materijala koji nisu prirodno anizotropni, moguće je indukovati anizotropiju izlaganjem materijala spoljašnjem električnom ili spoljašnjem magnetnom polju. Jedan od najpoznatijih efekata koji se javlja kod određenih anizotropnih materijala je birefringencija, odnosno dvostruko prelamanje, koje

predstavlja fenomen dekompozicije zraka svetlosti na dva linearno polarizovana, prostorno razdvojena zraka [52].

Odziv materijala na pobudu u vidu EM polja (refleksija, prelamanje, disperzija, rasejanje, dvojno prelamanje, nelinearni efekti) opisuje se preko veličine nazvane vektor električne polarizacije. Poznato je da se dielektrici pri dejstvu spoljašnjeg električnog polja polarišu. Naime, EM polje izaziva premeštanje težišta elektronskog omotača atoma u odnosu na jezgro, što dovodi do stvaranja električnog dipolnog momenta atoma. Ova pojava je poznata kao elektronska polarizacija dielektrika. Pojava polarizacije dielektrika se kvantitativno opisuje vektorom polarizacije, koji predstavlja zapreminsku gustinu električnih dipolnih momenata, a posledica je dejstva spoljašnjeg električnog polja.

U linearnoj optici važi da vektor električne polarizacije ima linearnu zavisnost od jačine vektora električnog polja upadnog zračenja. Pod pretpostavkom da je odziv materijala na spoljašnje EM polje trenutno, veza između vektora električne polarizacije i električnog polja se kod linearnih dielektrika izražava na sledeći način:

$$[\vec{P}] = \varepsilon_0 \|\vec{\chi}\| [\vec{E}], \quad (3.1)$$

gde je  $\varepsilon_0$  permitivnost vakuumu, a  $\|\vec{\chi}(\vec{E})\|$  skalirani tenzor dielektrične susceptibilnosti sredine u kojoj se talas prostire.

U opštem slučaju susceptibilnost linearnih dielektrika je tenzorska veličina. Neka su  $\alpha_{i,j} = \varepsilon_0 \chi_{i,j}$ ,  $i, j = \{1, 2, 3\}$  komponente tenzora dielektrične susceptibilnosti. Ovaj tenzor je, osim u slučaju optički aktivnih materijala, simetričan, a odgovarajućim izborom koordinatnih osa, moguće ga je dovesti u dijagonalnu formu:

$$\|\alpha\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Međutim, neophodno je naglasiti da se dijagonalizacija može uraditi ako je u pitanju bulk-ovski materijal, dok u slučaju strukture od dva, ili više slojeva, to nije moguće.

U ovom radu se svuda razmatraju samo linearni dielektrici, kod kojih  $\alpha_{i,j}$  ne zavise od polja  $\vec{E}$ . Shodno tome, u daljem tekstu će biti analizirani samo linearni dielektrici koji mogu biti izotropni ili anizotropni.

Za izotropne sredine i kristale kubičnog sistema važi da je  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha$ , što odgovara slučaju proporcionalne zavisnosti vektora električne polarizacije  $\vec{P}$  od vektora jačine električnog polja  $\vec{E}$ . Slučaj kada je  $\alpha_{11} = \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$  odgovara jednoosnim kristalima koji imaju optičku osu usmerenu duž z-pravca, a slučaj kada je  $\alpha_{11} \neq \alpha_{22} \neq \alpha_{33}$  odgovara slučaju dvoosnih kristala. Jednoosni i dvoosni kristali spadaju u kategoriju anizotropnih materijala.

Relativna dielektrična permitivnost je definisana kao:

$$\|\vec{\epsilon}\| = \|I\| + \|\vec{\chi}\| \quad (3.3)$$

S obzirom na to da je tenzor  $\|I\|$  jedinični tenzor ranga 2, može se zaključiti da je, onda, i relativna dielektrična permitivnost tenzor i to analogan (dijagonalizovanom) tenzoru susceptibilnosti.

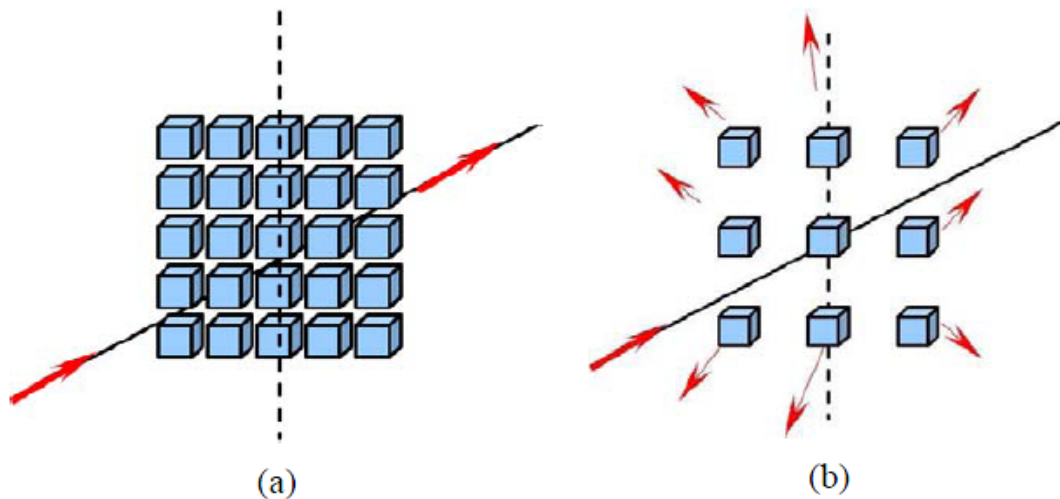
### 3.1.2. Homogenizacija metamaterijala

Glavni cilj teorije homogenizacije je da na jednostavan i makroskopski način opiše mikroskopsku složenost odziva objekta na upadno

elektromagnetno zračenje. Ideja je zameniti kompozitni sistem jednim ekvivalentnim, homogenim sistemom koji bi imao iste elektromagnetske odzive.

Heterogeni kompozitni materijali mogu rasejati elektromagnetno zračenje na dva različita načina. Jedan način rasejanja je kod kompozita čije su jedinice od kojih je sačinjena struktura male, a rastojanje između njih je reda veličine talasne dužine (Slika 11a). Polja, rasejana od svake čestice, interferiraju konstruktivno i ostaju globalno fokusirana u smerovima transmisije i refleksije. Takav kompozit se može razmatrati i zameniti homogenim materijalom. Dakle, u slučaju metamaterijala, ključ za opisivanje ovakvih složenih struktura kao efektivnih homogenih materijala je u tome da su jedinice strukture značajno manje od radne talasne dužine, tipično deset puta.

Druga mogućnost za heterogeni materijal je da raseje upadno elektromagnetno zračenje u različitim pravcima. U tom slučaju se kompozit ne može razmatrati kao homogeni materijal (Slika 11b).



Slika 11 Ilustracija rasejanja EM zračenja na heterogenim kompozitnim materijalima koji se (a) mogu posmatrati kao homogeni, (b) ne mogu smatrati homogenim.



### 3.1.3. Helmholtz-ova jednačina za anizotropnu sredinu; indeks prelamanja i propagacija talasa

Posmatra se opšti slučaj, u kome su tenzori permitivnosti i permeabilnosti dati u dijagonalnoj formi:

$$\|\varepsilon\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad \|\mu\| = \begin{vmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}, \quad (3.4)$$

pri čemu, u posmatranom modelu,  $\varepsilon_i, \mu_i$  zavise samo od  $x$ .

Polazeći od prve i druge Maxwell-ove jednačine (za anizotropnu sredinu):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\|\mu\| \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \|\varepsilon\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

menjanjem oblika prve jednačine i diferenciranjem druge jednačine po vremenu dobija se:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \|\varepsilon\| \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\|\mu^{-1}\|}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{E}). \quad (3.8)$$

U ovim jednačinama  $\|\mu^{-1}\|$  predstavlja inverznu matricu matrice  $\|\mu\|$  i data je izrazom:

$$\|\mu^{-1}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_z} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Zamenjujući  $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$  iz prve jednačine izrazom sa desne strane druge jednačine, dobija se izraz:

$$-\bar{\nabla} \times \frac{\|\mu^{-1}\|}{\mu_0} (\bar{\nabla} \times \bar{E}) - \|\varepsilon\| \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

Množeći ovu jednačinu sa  $\|\mu\| \mu_0$  i imajući u vidu da je:

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \quad (3.11)$$

dolazi se do:

$$\|\mu\| \bar{\nabla} \times \left[ \|\mu^{-1}\| (\bar{\nabla} \times \bar{E}) \right] + \frac{\|\varepsilon\| \|\mu\|}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.12)$$

Ako je električno polje oblika:

$$\bar{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ \bar{E}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \bar{E}^*(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right] \quad (3.13)$$

tada se prethodna jednačina (3.12) svodi na:

$$\|\mu\| \cdot \bar{\nabla} \times \left[ \|\mu^{-1}\| (\bar{\nabla} \times \bar{E}) \right] - \frac{\|\varepsilon\| \|\mu\|}{c^2} \omega^2 \bar{E} = 0 \quad (3.14)$$

#### a) TE modovi

Pretpostavljajući, dalje, da u strukturi propagiraju samo TE modovi, za koje važi:

$$\vec{E} = E_y(x, y, z) \vec{i}_y, \quad (3.15)$$

$$\vec{H} = H_x(x, y, z) \vec{i}_x + H_z(x, y, z) \vec{i}_z, \quad (3.16)$$

dobija se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{i}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{i}_z. \quad (3.17)$$

Prvi član jednačine (3.14) se dalje može predstaviti u obliku:

$$\|\mu^{-1}\|(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \begin{vmatrix} 1/\mu_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

Vodeći računa o tome da članovi tenzora permeabilnosti zavise samo od  $x$  komponente dobija se:

$$\vec{\nabla} \times [\|\mu^{-1}\|(\vec{\nabla} \times \vec{E})] = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial E_y}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

$$= \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} \vec{i}_x - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \vec{i}_y + \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \vec{i}_z$$

$$\|\mu\| \cdot \vec{\nabla} \times [\|\mu^{-1}\|(\vec{\nabla} \times \vec{E})] = \frac{\mu_x}{\mu_z} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} \vec{i}_x - \left\{ \mu_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right] \right\} \vec{i}_y + \frac{\mu_z}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \vec{i}_z \quad (3.20)$$

Imajući u vidu da se radi o prostiranju TE moda i da električno polje ima samo  $y$  komponentu, tada, posmatrajući drugi sabirak jednačine (3.14) možemo isti napisati u obliku:

$$-\frac{\|\varepsilon\|\|\mu\|}{c^2}\omega^2\vec{E} = -\frac{\|\varepsilon\|\|\mu\|}{c^2}\omega^2\{0, E_y, 0\} = -\frac{\varepsilon_y\mu_y}{c^2}\omega^2 E_y \vec{i}_y \quad (3.21)$$

Uporedimo sada „nove“ oblike prvog i drugog sabirka jednačine (3.14):

$$\frac{\mu_x}{\mu_z} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} \vec{i}_x - \left\{ \mu_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right\} \vec{i}_y + \frac{\mu_z}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} \vec{i}_z = -\frac{\varepsilon_y \mu_y}{c^2} \omega^2 E_y \vec{i}_y \quad (3.22)$$

Iz (3.15) sledi da su članovi uz  $\vec{i}_x$  i  $\vec{i}_z$  jednaki nuli:

$$\frac{\mu_x}{\mu_z} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial x} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\mu_z}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y \partial z} = 0 \quad (3.24)$$

pri čemu su  $\mu_x \neq 0$  i  $\mu_z \neq 0$  (materijali kod kojih je  $\mu_x = 0$  ili  $\mu_z = 0$  predstavljaju posebnu klasu materijala i u ovom radu neće biti razmatrani).

Rešenje poslednjeg sistema (3.23), (3.24) jednačina je  $E_y = E_y(y)$  ili  $E_y = E_y(x, y)$ . Ako je  $E_y = E_y(y)$  tada se izjednačavanjem članova uz  $\vec{i}_y$  dolazi do  $E_y(y) = 0$  što je trivijalno rešenje i nije interesantno za dalju analizu, pa je fizički prihvatljivo samo rešenje  $E_y = E_y(x, z)$ . Izjednačavanjem članova uz  $\vec{i}_y$  dolazi se do Helmholtz-ove jednačine u kojoj figuriše  $E_y(x, z)$ . Dakle, izvodi se zaključak da je prostorna zavisnost električnog polja, zapravo zavisnost po  $x$  i  $z$  dimenziji,  $E_y = E_y(x, y)$ , a jednačina se svodi na:

$$\mu_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_y \mu_y}{c^2} \omega^2 E_y = 0 \quad (3.25)$$

Pošto  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  i  $\varepsilon_y$  zavise samo od  $x$ ,  $E_y$  možemo razložiti na komponentu zavisnu od  $x$  i na komponentu zavisnu od  $z$ , a, zatim, električno polje u tom obliku zameniti u dobijenu jednakost (3.25) odakle sledi:

$$E_y(x, z) = E_y(x)E_y(z) = E_{yx} \cdot E_{yz} \quad (3.26)$$

$$\mu_y \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{dE_{yx}}{dx} \right) \right] E_{yz} + \frac{\mu_y}{\mu_x} \frac{d^2 E_{yz}}{dz^2} E_{yx} + \varepsilon_y \mu_y k_0^2 E_{yx} E_{yz} = 0 \quad (3.27)$$

Deljenjem jednačine (3.27) sa  $E_{yx} E_{yz} \frac{\mu_y}{\mu_x}$ , dobija se:

$$\frac{\mu_x}{E_{yx}} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{dE_{yx}}{dx} \right) + \varepsilon_y \mu_x k_0^2 + \frac{d^2 E_{yz}}{E_{yz} dz^2} = 0 \quad (3.28)$$

Na ovaj način su sabirci razdvojeni na one čiji članovi zavise samo od  $x$  i sabirak čiji članovi zavise samo od  $z$ , pa se može pisati:

$$\beta^2 = \frac{\mu_x}{E_{yx}} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{dE_{yx}}{dx} \right) + \varepsilon_y \mu_x k_0^2 \quad (3.29)$$

$$\beta^2 = - \frac{d^2 E_{yz}}{E_{yz} dz^2} \quad (3.30)$$

Veličina  $\beta$  ( $\beta \neq \beta(x, z)$ ) naziva se propagaciona konstanta i u opštem slučaju je kompleksna veličina. Helmholtzova jednačina za opšti slučaj anizotropne sredine se razdvaja na dve jednačine:

$$\frac{d^2 E_{yz}}{dz^2} + \beta^2 E_{yz} = 0 \quad (3.31)$$

$$\mu_x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{dE_{yx}}{dx} \right) + [\varepsilon_y \mu_x k_0^2 - \beta^2] E_{yx} = 0 \quad (3.32)$$

### b) TM modovi

Analogno je izvođenje i za TM modove. Kada je u pitanju izvođenje Helmholtz-ovih jednačina za prostiranje ovih modova, polazi se od istih, Maxwell-ovih, jednačina za anizotropnu sredinu, s tim što se traži jednačina po  $\vec{H}$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\|\mu\| \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.33)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \|\varepsilon\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.34)$$

Iz ovih jednačina diferenciranjem prve po vremenu i menjanjem oblika druge, proizilazi:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\|\mu\| \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\|\varepsilon^{-1}\|}{\varepsilon_0} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (3.36)$$

pri čemu  $\varepsilon_i, \mu_i$  zavise samo od  $x$ , a  $\|\varepsilon^{-1}\|$  je matrica inverzna matrici  $\|\varepsilon\|$  tj:

$$\|\varepsilon^{-1}\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon_z} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Zamenom  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  iz prve jednačine izrazom sa desne strane druge jednačine, dobija se sledeći izraz:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\|\varepsilon^{-1}\|}{\varepsilon_0} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) - \|\mu\| \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.38)$$

Množenjem gornje jednačine sa  $\|\varepsilon\| \cdot \varepsilon_0$ , dobija se:

$$\|\varepsilon\| \vec{\nabla} \times \left[ \|\varepsilon^{-1}\| (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right] - \frac{\|\varepsilon\| \|\mu\|}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.39)$$

Imajući u vidu da je vektor magnetnog polja oblika:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{H}(\vec{r}) e^{i\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r}) e^{-i\omega t} \right], \quad (3.40)$$

jednačina za  $\vec{H}(\vec{r})$  dobija oblik potpuno saglasan sa (3.14):

$$\|\varepsilon\| \cdot \vec{\nabla} \times \left[ \|\varepsilon^{-1}\| (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right] - \frac{\|\varepsilon\| \|\mu\|}{c^2} \omega^2 \vec{H} = 0 \quad (3.41)$$

Ako u strukturi propagiraju samo TM modovi, onda ono što opisuje takve talase je prema definiciji TM moda:

$$\vec{H} = H_y(x, y, z) \vec{i}_y, \quad (3.42)$$

$$\vec{E} = E_x(x, y, z) \vec{i}_x + E_z(x, y, z) \vec{i}_z, \quad (3.43)$$

pa se dalje dobija:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{i}_x + \frac{\partial H_y}{\partial x} \vec{i}_z \quad (3.44)$$

Prvi član jednačine (3.41) se dalje može razviti:

$$\|\varepsilon^{-1}\|(\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \begin{vmatrix} 1/\varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/\varepsilon_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{vmatrix} \quad (3.45)$$

Vodeći računa o tome da članovi tenzora permitivnosti zavise samo od  $x$  komponente, dobija se:

$$\vec{\nabla} \times \left[ \|\varepsilon^{-1}\|(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right] = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial H_y}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\varepsilon_y} \frac{\partial H_y}{\partial x} \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x} \vec{i}_x - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right] \vec{i}_y + \frac{1}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \vec{i}_z$$

odakle sledi:

$$\|\varepsilon\| \cdot \vec{\nabla} \times \left[ \|\varepsilon^{-1}\|(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \right] = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x} \vec{i}_x - \left\{ \varepsilon_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right\} \vec{i}_y + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \vec{i}_z \quad (3.47)$$

Imajući u vidu da se radi o prostiranju TM modova i da magnetno polje ima samo  $y$  komponentu, tada, analogno slučaju kada su u pitanju bili TE modovi, drugi sabirak jednačine (3.41) se može napisati u obliku:

$$-\frac{\|\varepsilon\| \|\mu\|}{c^2} \omega^2 \vec{H} = -\frac{\|\varepsilon\| \|\mu\|}{c^2} \omega^2 \{0, H_y, 0\} = -\frac{\varepsilon_y \mu_y}{c^2} \omega^2 H_y \vec{i}_y \quad (3.48)$$



što, dalje, dovodi do:

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x} \vec{i}_x - \left\{ \varepsilon_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} \right\} \vec{i}_y + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} \vec{i}_z = -\frac{\varepsilon_y \mu_y}{c^2} \omega^2 H_y \vec{i}_y . \quad (3.49)$$

Ovaj se izraz može predstaviti preko tri skalarne jednačine:

$$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x} = 0 \quad (3.50)$$

$$\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} = 0 \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_y \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \frac{\varepsilon_y \mu_y}{c^2} \omega^2 H_y = 0 \quad (3.52)$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina izvodi se zaključak da je  $H_y$  konstantno po  $y$  dimenziji, tj. da je traženo rešenje ovog sistema  $H_y = H_y(x, z)$ . Kako  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  i  $\mu_y$  zavise samo od  $x$ , to se  $H_y$  može razložiti na komponentu zavisnu od  $x$  i na komponentu zavisnu od  $z$ :

$$H_y(x, z) = H_y(x)H_y(z) = H_{yx} \cdot H_{yz} \quad (3.53)$$

i u takvom obliku zameniti u jednačinu (3.52), te dobiti:

$$\varepsilon_y \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{dH_{yx}}{dx} \right) \right] H_{yz} + \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \frac{d^2 H_{yz}}{dz^2} H_{yx} + \varepsilon_y \mu_y k_0^2 H_{yx} H_{yz} = 0 \quad (3.54)$$

Deljenjem dobijene jednačine sa  $H_{yx} H_{yz} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$ , sabirci se razdvajaju na one koji su zavisni samo od  $x$  i one koji zavise samo od  $z$ , pa se dobija:

$$\frac{\varepsilon_x}{H_{yx}} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{dH_{yx}}{dx} \right) + \mu_y \varepsilon_x k_0^2 + \frac{d^2 H_{yz}}{dz^2} = 0 \quad (3.55)$$

Odavde sledi:

$$\beta^2 = \frac{\varepsilon_x}{H_{yx}} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{dH_{yx}}{dx} \right) + \mu_y \varepsilon_x k_0^2 \quad (3.56)$$

$$\beta^2 = - \frac{d^2 H_{yz}}{dz^2} \quad (3.57)$$

Konačno, Helmholtz-ova jednačina za opšti slučaj anizotropne sredine se razdvaja na dve jednačine oblika:

$$\frac{d^2 H_{yz}}{dz^2} + \beta^2 H_{yz} = 0 \quad (3.58)$$

$$\varepsilon_x \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{dH_{yx}}{dx} \right) + [\mu_y \varepsilon_x k_0^2 - \beta^2] H_{yx} = 0 \quad (3.59)$$

### 3.2. QCL kao anizotropni metamaterijal

Kao jedno od rešenja za dizajniranje aktivnih metamaterijala, odnosno poluprovodničkih metamaterijala kod kojih će biti uključeno pojačanje u cilju kompenzovanja gubitaka, jeste korišćenje poluprovodničkih kvantnih struktura submikronskih dimenzija. Kao odgovarajući kandidat za dizajn takvih metamaterijala, u ovom radu, izabran je GaAs/AlGaAs kvantni kaskadni laser smešten u jako spoljašnje magnetno polje [53,54]. Nadalje će biti razmatran isključivo ovaj model.

Posmatrani model je nemetalna struktura, formirana od veoma tankih slojeva sačinjenih od različitih poluprovodničkih materijala, koji se narastaju u  $x$ -pravcu, i čiji su parametri pažljivo odabrani. S obzirom na to da su materijali koji čine QCL nemagnetni, to je magnetna permeabilnost svuda  $\mu = 1$ . Pošto se sve veličine u posmatranom QCL-u menjaju samo duž  $x$ -ose, dok je kretanje elektrona u  $y$ - $z$  ravni slobodno, to se u ovoj strukturi razlikuju paralelna i normalna komponenta dielektrične permitivnosti. U pravcu rasta slojeva normalna komponenta izrazito zavisi od naseljenosti energijskih nivoa elektronima, dok dielektrična permitivnost u pravcima normalnim na rast slojeva ostaje jednaka balkovskoj vrednosti čime je opisana optička anizotropnost materijala. U okviru ovog modela je:

$$\|\varepsilon\| = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{vmatrix}, \quad (3.60)$$

pri čemu je  $\varepsilon_{\parallel}$  komponenta permitivnosti paralelna ravni slojeva, jednaka srednjoj permitivnosti osnovnog materijala ( $\varepsilon_b$ ) i ne menja svoju vrednost duž strukture, dok je  $\varepsilon_{\perp}$  komponenta dielektrične permitivnosti koja opisuje interakciju polja sa strukturom u normalnom pravcu (duž  $x$ -ose), pa je  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp}(x)$ .

Helmholtz-ova jednačina, razdvojena na dve jednačine, u slučaju TE modova tada glasi:

$$\frac{d^2 E_{yz}}{dz^2} + \beta^2 E_{yz} = 0, \quad (3.61)$$

$$\frac{d^2 E_{yx}}{dx^2} + [\varepsilon_{\parallel} k_0^2 - \beta^2] E_{yx} = 0, \quad (3.62)$$

odakle se vidi da je jednačina za TE modove ista kao za slučaj izotropne sredine gde je dielektrična permitivnost nezavisna od  $x$ , odnosno  $\varepsilon = \varepsilon_{\parallel} \neq \varepsilon_{\parallel}(x)$ . Samim tim, slučaj TE modova nije interesantan za dalju analizu.

U slučaju TM modova jednačine su oblika:

$$\frac{d^2 H_{yz}}{dz^2} + \beta^2 H_{yz} = 0 \quad (3.63)$$

$$\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{d^2 H_{yx}}{dx^2} + [\varepsilon_{\perp} k_0^2 - \beta^2] H_{yx} = 0 \quad (3.64)$$

Pošto je normalna komponenta permitivnosti koja figuriše u jednačini (3.64), zavisna od  $x$ ,  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\perp}(x)$ , ta jednačina se bitno razlikuje od odgovarajuće jednačine za izotropne sredine. Ovaj slučaj je interesantan, pa će u daljem radu biti analiziran.

### 3.3. Indeks prelamanja i propagacija

Posmatra se balkovski materijal i polazi se od druge Maxwell-ove jednačine:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \|\varepsilon\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.65)$$

#### 3.3.1. TM modovi

Vektori polja u slučaju prostiranja TM modova imaju oblik:

$$\vec{H} = \{0, H_y, 0\} \quad (3.66)$$

$$\vec{E} = \{E_x, 0, E_z\}, \quad \vec{k} = \{k_x, 0, k_z\} \quad (3.67)$$

Prema definiciji Poynting-ovog vektora važi:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ E_x & 0 & E_z \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = -E_z H_y \vec{i}_x + E_x H_y \vec{i}_z = S_x \vec{i}_x + S_z \vec{i}_z \quad (3.68)$$

Odavde se mogu izdvojiti  $x$  i  $z$  komponenta:

$$S_x = -\frac{1}{4} [E_z(x, z) H_y^*(x, z) + E_z^*(x, z) H_y(x, z)] = -\frac{1}{4} \text{Re} [E_z(x, z) H_y^*(x, z)], \quad (3.69)$$

$$S_z = \frac{1}{4} [E_x(x, z) e^{i\omega t} + E_x^*(x, z) e^{-i\omega t}] [H_y(x, z) e^{i\omega t} + H_y^*(x, z) e^{-i\omega t}], \quad (3.70)$$

pa se njihovim usrednjavanjem po vremenu u okviru perioda  $T = (2\pi)/\omega$ , dobija:

$$\bar{S}_x = \frac{1}{4} [E_z(x, z) H_y^*(x, z) + E_z^*(x, z) H_y(x, z)] = \frac{1}{2} \text{Re} [E_z(x, z) H_y^*(x, z)], \quad (3.71)$$

$$\bar{S}_z = \frac{1}{2} \text{Re} [E_x(x, z) H_y^*(x, z)], \quad (3.72)$$

$$\vec{\bar{S}} = -\frac{1}{2} \text{Re} [E_z(x, z) H_y^*(x, z)] \vec{i}_x + \frac{1}{2} \text{Re} [E_x(x, z) H_y^*(x, z)] \vec{i}_z \quad (3.73)$$

Pošto se QCL posmatra kao homogeni, balkovski, materijal, jednačina (3.59) može se napisati u obliku ( $\epsilon_x, \epsilon_z \neq f(x)$ ,  $\mu_y = 1$ ):

$$\frac{d^2 H_{yx}}{dx^2} + \left[ \epsilon_z k_0^2 - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} \beta^2 \right] H_{yx} = 0 \quad (3.74)$$

odnosno:

$$\frac{d^2 H_{yx}}{dx^2} + k_x^2 H_{yx} = 0 \quad (3.75)$$

Razmatrajući slučaj prostiranja  $k_x^2 > 0$  jedno rešenje ove jednačine glasi:

$$H_{yx} = H_{yx0} e^{ik_x x} \quad (3.76)$$

Rešenje jednačine (3.58) za slučaj propagacije je ( $\beta = k_z$ ):

$$H_{yz} = H_{yz0} e^{ik_z z} \quad (3.77)$$

pa je:

$$H_y(x, z) = H_{y0} e^{i(k_x x + k_z z)} \quad (3.78)$$

Na osnovu (3.65) sledi:

$$E_z(x, z) = E_{z0} e^{i(k_x x + k_z z)} \quad (3.79)$$

$$E_x(x, z) = E_{x0} e^{i(k_x x + k_z z)} \quad (3.80)$$

pa je:

$$\vec{S} = -\frac{1}{2} \text{Re} [H_{y0} E_{z0}] \vec{i}_x + \frac{1}{2} \text{Re} [H_{y0} E_{x0}] \vec{i}_z \quad (3.81)$$

S druge strane, iz (3.65):

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \|\varepsilon\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

sledi:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{i}_x + \frac{\partial H_y}{\partial x} \vec{i}_z = \varepsilon_{\perp} \frac{\partial E_x}{\partial t} \vec{i}_x + \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial E_z}{\partial t} \vec{i}_z \quad (3.82)$$

Ako se izjednače članovi uz  $\vec{i}_x$  sa obe strane prethodne jednačine, dobija se:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon_{\perp} \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (3.83)$$

Kombinovanjem izraza za električno i magnetno polje sa prethodnom jednačinom:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = H_y \vec{i}_y \quad (3.84)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = E_x \vec{i}_x + E_z \vec{i}_z ,$$

dobija se jednostavna veza između komponente električnog polja i komponente magnetnog polja posmatranog talasa:

$$-H_{y0} k_z = -E_{x0} \omega \varepsilon_{\perp} , \quad (3.85)$$

odnosno:

$$E_{x0} = H_{y0} \frac{k_z}{\omega \varepsilon_{\perp}} . \quad (3.86)$$

Na isti način, izjednačavanjem članova uz  $\vec{i}_z$  u jednačini (3.82), dobija se:

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_{\parallel} \frac{\partial E_z}{\partial t} . \quad (3.87)$$

Ovaj skalarni izraz se može transformisati u

$$-\omega E_{z0} \varepsilon_{\parallel} = k_x H_{y0} , \quad (3.88)$$

odakle sledi:

$$E_{z0} = -\frac{k_x}{\omega \varepsilon_{\parallel}} H_{y0} . \quad (3.89)$$

Zamenom  $E_{x0}$  i  $E_{z0}$  odgovarajućim izrazima (3.86) i (3.89) u (3.81), izraz za srednju vrednost Poynting-ovog vektora postaje:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{k_x}{\omega \varepsilon_{\parallel}} |H_{y0}|^2 \right] \vec{i}_x + \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \frac{k_z}{\omega \varepsilon_{\perp}} |H_{y0}|^2 \right] \vec{i}_z , \quad (3.90)$$

pa je, konačno:

$$\bar{S} = \frac{k_x \varepsilon'_\parallel}{2\omega |\varepsilon_\parallel|^2} |H_{y0}|^2 \vec{i}_x + \frac{k_z \varepsilon'_\perp}{2\omega |\varepsilon_\perp|^2} |H_{y0}|^2 \vec{i}_z, \quad (3.91)$$

gde je:

$$\varepsilon_\perp = \varepsilon'_\perp + i\varepsilon''_\perp$$

$$\varepsilon_\parallel = \varepsilon'_\parallel + i\varepsilon''_\parallel$$

U daljem radu, radi jednostavnijeg obeležavanja, umesto oznake za srednju vrednost Poynting-ovog vektora  $\bar{S}$  biće korišćena oznaka  $\vec{S}'$ .

Neka  $x=0$  odgovara razdvojnoj površi dva materijala, i neka je za  $x < 0$  materijal izotropan ( $\varepsilon_b > 0$ ), dok je za  $x > 0$  u pitanju anizotropni materijal kompleksne permitivnosti (u kojoj razlikujemo normalnu i paralelnu komponentu). Pošto je ovde tenzor permitivnosti u funkciji od  $x$ -komponente, to je:

$$k_{zb} = k_z$$

Pored toga, važi i  $k_{xb} > 0$  i  $k_{zb} > 0$ . Pošto su u slučaju izotropnog materijala Poynting-ov vektor i talasni vektor kolinearni, to je i  $\vec{S}_b$  kolinearno sa  $\vec{k}_b$ , pa su i  $S_{xb} > 0$  i  $S_{zb} > 0$ .

Drugi uslov je:

$$S'_x > 0$$

što se vidi sa [Slike 12](#), pri čemu je  $S'_x \neq S_{xb}$ , dok  $S'_z$  može imati vrednosti i veće i manje od nule.

U zavisnosti od toga koje vrednosti uzimaju realni delovi normalne i paralelne komponente električne permitivnosti razlikujemo četiri slučaja:

a) Ukoliko je



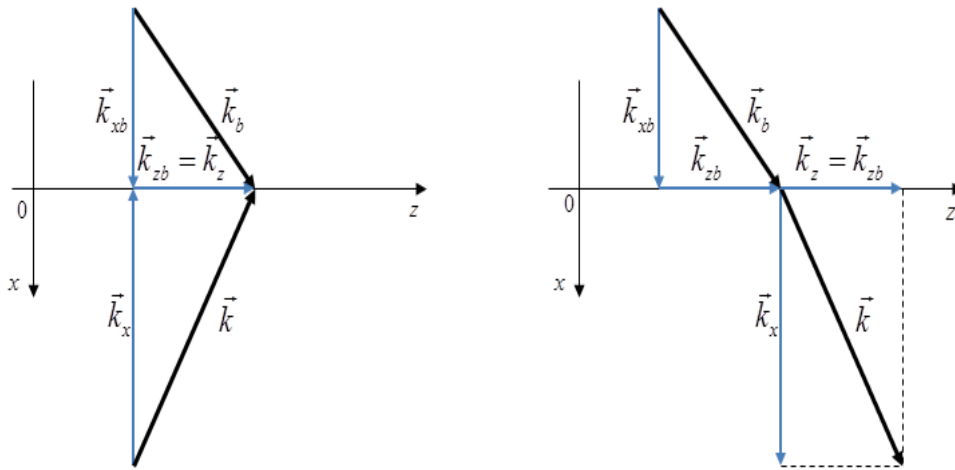
$$\varepsilon'_{\parallel} < 0, \quad \varepsilon'_{\perp} > 0$$

tada će vrednosti  $x$  i  $y$  komponente srednje vrednosti Poynting-ovog vektora, prema izrazu (3.91) biti:

$$S'_x = \frac{k_x \varepsilon'_{\parallel}}{2\omega |\varepsilon'_{\parallel}|^2} |H_0|^2 > 0 \quad \Rightarrow k_x < 0$$

$$S'_z = \frac{k_z \varepsilon'_{\perp}}{2\omega |\varepsilon'_{\perp}|^2} |H_0|^2 > 0 \quad S'_z > 0$$

Dakle, u ovom slučaju propagacija talasa je unazad, dok je prelamanje pozitivno, a samim tim i tok energije.



Slika 12 Propagacija talasa (a) unazad i (b) unapred.

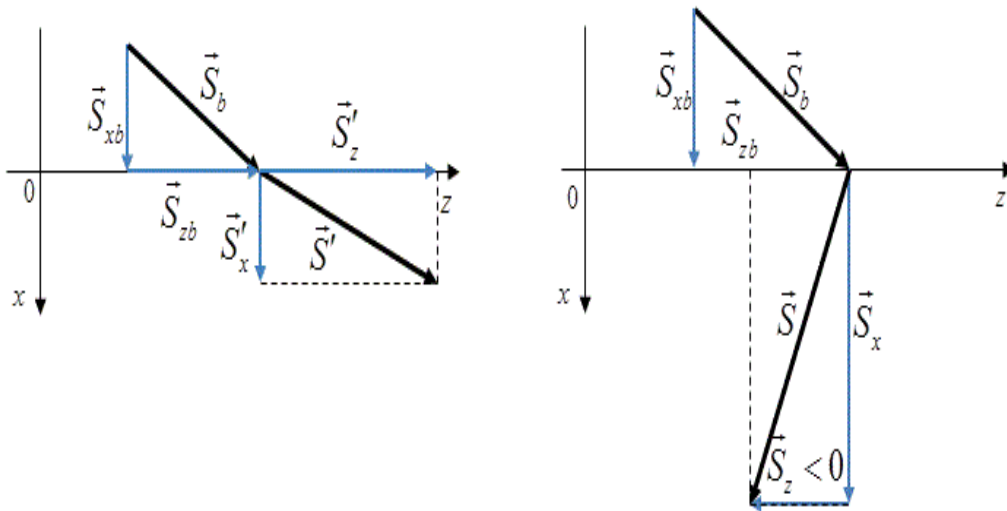
b) Ako je

$$\varepsilon'_{\parallel} > 0, \quad \varepsilon'_{\perp} < 0,$$

tada je:

$$S'_x = \frac{k_x \varepsilon'_{\parallel}}{2\omega |\varepsilon'_{\parallel}|^2} |H_0|^2 > 0 \quad \Rightarrow k_x > 0$$

$$S'_z = \frac{k_z \varepsilon'_{\perp}}{2\omega |\varepsilon'_{\perp}|^2} |H_0|^2 < 0 \quad S'_z < 0$$



Slika 13 (a) Pozitivno prelamanje i (b) Negativno prelamanje talasa.

c) Za slučaj

$$\varepsilon'_{\parallel} > 0, \quad \varepsilon'_{\perp} > 0,$$

vrednosti  $x$  i  $y$  komponente srednje vrednosti Poynting-ovog vektora će biti

$$S'_x = \frac{k_x \varepsilon'_{\parallel}}{2\omega |\varepsilon'_{\parallel}|^2} |H_0|^2 > 0 \quad \Rightarrow k_x > 0,$$

$$S'_z = \frac{k_z \varepsilon'_{\perp}}{2\omega |\varepsilon'_{\perp}|^2} |H_0|^2 > 0 \quad S'_z > 0,$$

d) U slučaju

$$\varepsilon'_{\parallel} < 0, \quad \varepsilon'_{\perp} < 0,$$

posmatrane komponente su:

$$S'_x = \frac{k_x \varepsilon'_{\parallel}}{2\omega |\varepsilon'_{\parallel}|^2} |H_0|^2 > 0 \quad \Rightarrow k_x < 0$$

$$S'_z = \frac{k_z \varepsilon'_{\perp}}{2\omega |\varepsilon'_{\perp}|^2} |H_0|^2 > 0 \quad S'_z < 0$$

Upoređivanjem prethodna četiri slučaja može se izvesti zaključak da vrednost, odnosno znak, realnog dela paralelne komponente permitivnosti određuje smer propagacije talasa, a znak realnog dela normalne komponente određuje vrstu prelamanja. Za posmatrani slučaj TM modova, ukoliko je realni deo paralelne komponente permitivnosti veći od nule, radi se o propagaciji talasa „unapred“, odnosno komponenta talasnog vektora u  $x$ -pravcu je  $k_x > 0$ . I obrnuto: ukoliko je realni deo paralelne permitivnosti manji od nule, tada je  $k_x < 0$ , pa se radi o propagaciji „u nazad“. Što se tiče normalne komponente električne permitivnosti, tačnije njenog realnog dela, ukoliko je on pozitivan, radi se o pozitivnom tj. standardnom prelamanju elektromagnetnog talasa na razdvojnoj površi dve sredine, dok do negativnog prelamanja dolazi ukoliko je vrednost ove komponente manja od nule.

Posmatrani poluprovodnički metamaterijal je kvantni kaskadni laser. U slučaju takve strukture paralelna komponenta permitivnosti je jednaka srednjoj permitivnosti osnovnog materijala, pa je uvek:  $\epsilon'_\parallel > 0$ . Dakle, može se zaključiti da su od četiri opisana slučaja, za metamaterijale na bazi kvantnih kaskadnih lasera, moguća samo dva: b) i c). U oba relevantna slučaja radi se o prostiranju talasa „u napred“, a da li će doći do pozitivnog ili negativnog prelamanja, zavisice od znaka realnog dela normalne komponente permitivnosti što se može videti iz izraza (3.91).

### 3.3.2. TE modovi

U slučaju prostiranja TE moda, izvođenje je analogno onom koje je rađeno za TM modove. Posmatra se balkovski materija i polazi se od prve Maxwell-ove jednačine:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\|\mu\| \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.92)$$

koja se, imajući u vidu (3.4), svodi na:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.93)$$

Pošto se radi o prostiranju TE modova, to važi da je:

$$\vec{E} = \{0, E_y, 0\}, \quad (3.94)$$

$$\vec{H} = \{H_x, 0, H_z\} \quad (3.95)$$

Kada se na električno polje, imajući u vidu da za TE modove postoji samo  $y$  komponenta tog polja, primeni operator  $\vec{\nabla}$  u jednačini (3.93) i kada se na desnoj strani iste ubaci izraz za magnetno polje, dobija se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{i}_x + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{i}_z = i(-k_z \vec{i}_x + k_x \vec{i}_z) \cdot \vec{E} \quad (3.96)$$

$$i(-k_z \vec{i}_x + k_x \vec{i}_z) \cdot \vec{E} = \mu_0 i \omega (H_{x0} \vec{i}_x + H_{z0} \vec{i}_z) \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Ovaj izraz se može napisati u obliku dva izraza, koja se dalje mogu transformisati u jednostavne relacije između komponenti magnetnog polja i komponente električnog polja posmatranog talasa:

$$H_{x0} = -\frac{k_z}{\mu_0 \omega} E_0 \Rightarrow H_x = -\frac{k_z}{\mu_0 \omega} E_y \quad (3.97)$$

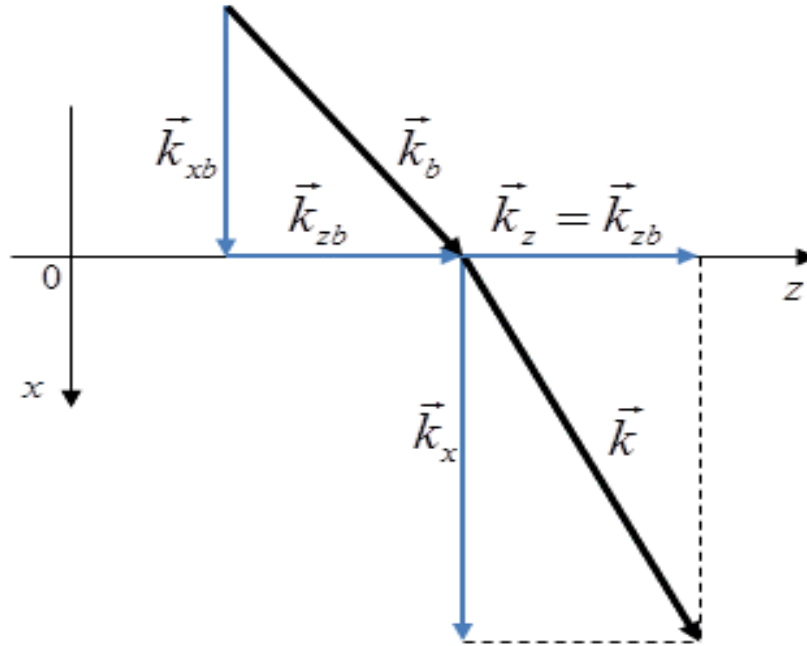
$$H_{z0} = \frac{k_x}{\mu_0 \omega} E_0 \Rightarrow H_z = -\frac{k_x}{\mu_0 \omega} E_y$$

Prema definiciji, kompleksni Poynting-ov vektor upadnog talasa se izračunava prema relaciji (3.68), a za slučaj TE moda na sledeći način:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ 0 & E_y & 0 \\ H_x & 0 & H_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (E_y H_z^*) \vec{i}_x + \frac{1}{2} (-E_y H_x^*) \vec{i}_z \quad (3.98)$$

Kada se u ovu relaciju ubace (3.97) i izraz za električno polje, izraz za izračunavanje Poynting-ovog vektora glasi:

$$\vec{S} = \frac{k_x}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \vec{i}_x + \frac{k_z}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \vec{i}_z = \frac{1}{2\mu_0\omega} |E_0|^2 \vec{k} \quad (3.99)$$



*Slika 14* Kod TE modova se za posmatrane uslove dešava samo pozitivno prelamanje talasa i propagacija unapred.

Dakle, u slučaju TE moda, Poynting-ov vektor  $\vec{S}$  i talasni vektor  $\vec{k}$  su kolinearni vektori. Na razdvojnoj površini  $x=0$  komponente talasnog vektora ( $k_x$  i  $k_z$ ) su realne veličine. Kako je:

$$k_x^2 = \varepsilon_{\parallel} k_0^2 - k_z^2 \Rightarrow k_x^2 + k_z^2 = \varepsilon_{\parallel} k_0^2$$

može se zaključiti da je za propagaciju talasa neophodno da  $\varepsilon_{\parallel}$  bude pozitivno. Pošto se radi o metamaterijalima na bazi QCL-a gde uvek važi  $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_b > 0$ , moguć je samo jedan slučaj bez obzira na vrednost normalne komponente permitivnosti. Samim tim, indeks prelamanja je uvek pozitivan, a

propagacija talasa je uvek unapred. Ova situacija je ista kao kod izotropnog, nemagnetnog materijala i nije interesantna za dalju analizu, jer ne pokazuje efekte koji su od interesa u ovom radu: negativan indeks prelamanja i propagaciju unazad.

#### **4. Kvantni kaskadni laseri**

Kvantni kaskadni laser je unipolarni poluprovodnički laser koji emituje zračenje u delu elektromagnetnog spektra koji obuhvata srednju, daleku infracrvenu i terahercnu oblast. QCL-ovi su sačinjeni od naizmenično postavljenih tankih slojeva poluprovodnika i zasnovani su na inženjeringu energijskih procepa. Struktura ovih sistema je predložena 1970. godine od strane Esakija i Tsua [50], dok su princip rada zasnovan na revolucionarnoj unutarzonskoj laserskoj strategiji uveli 1971. godine Kazarinov i Suris [56]. Zahvaljujući kontinualnom napretku u zonskom inženjeringu, ultrabrzoj spektroskopiji i poluprovodničkoj kvantnoj optici predloženo je i dalje razvijeno nekoliko uspešnih dizajna QCLa.

#### **4.1. Razvoj kvantnih kaskadnih lasera**

Jedan od problema koji je prouzrokovao potrebu za razvijanjem nove vrste lasera je taj što je bilo apsolutno nepraktično ostvariti rad izvora zračenja standardnim bipolarnim laserskim tehnologijama u infracrvenom i terahercnom regionu. Osnovni razlog ovog ograničenja je nedostatak materijala koji imaju zonski procep manji od 40 meV. Ovo je dovelo do novih ideja i razvoja nove generacije lasera kod kojih se radijativni prelazi u potpunosti dešavaju u provodnoj zoni, tj. između stanja u kvantnim jamama heterostrukture. Energija fotona koja je rezultat unutarzonskog prelaza, može se izabrati inženjeringom širine kvantnih jama i barijera, i to je ono što ovakve strukture čini idealnim za zračenja na većim talasnim dužinama.

Ideja o stvaranju poluprovodničkog lasera koji bi radio na principu na kom radi danas, javlja se veoma brzo posle rada o konceptu poluprovodničke superrešetke [55], i to u radu Kazarinova i Surisa [56]. Ideja autora je bila da se duž takve poluprovodničke strukture primeni odgovarajući napon kako bi se postiglo pojačanje zračenja, pri čemu bi energija fotona bila jednaka razlici energija između osnovnog stanja kvantne jame i prvog pobuđenog stanja energijski niže susedne jame. Ovaj predlog je sadržao ključnu ideju za nastajanje novog koherentnog izvora infracrvenog zračenja koji bi bio baziran na unutarzonskim prelazima u kvantnim jamama. Takav izvor bi omogućio da broj fotona generisanih od strane jednog elektrona, pri njegovom spuštanju niz kaskadu energijskih nivoa, bude jednak broju perioda u strukturi. Ipak, do realizacije QCL-a bilo je potrebno preko dvadeset godina. Bilo je neophodno uvesti značajne inovacije na polju dizajna materijala i naprava koje bi bile praćene odgovarajućim visokokvalitetnim heterostrukturama kako bi ovi laseri postali realnost.

Krajem osamdesetih godina prošlog veka nastala je ideja o inženjeringu zonske strukture koja bi omogućila dizajniranje kompleksnih



poluprovodničkih naprava sa željenim transportnim i elektronskim osobinama [57]. Centralnu ulogu u dizajniranju QCL-a imao je koncept energijske kaskade formirane primenom električnog polja na heterostrukturu gradiranog sastava [58]. Početkom poslednje decenije prošlog veka dizajnirani su prvi infracrveni fotodetektor na bazi kvantnih jama, QWIP (engl. *quantum well infrared photodetector* - fotodetektor infracrvenog zračenja na bazi kvantnih jama), čije je funkcionisanje bilo bazirano na diskretno-kontinualnim unutarzonskim prelazima [59]. Posle toga su usledili mnogobrojni pokušaji realizacije unutarzonskog lasera i, konačno, 1994. godine prvi put je predstavljen QCL od strane grupe koju su činili: D. Sivco, A. Cho, A. Hutchinson, C. Gmachl, A. Tredicucci i F. Capasso [5,60]. Taj laser je bio baziran na AlInAs/GaInAs heterostrukturi sa izuzetno tankim slojevima koji su nastali narastanjem, tehnikom koja se zove epitaksija molekularnim snopom (*Molecular Beam Epitaxy*- MBE). Talasna dužina zračenja iznosila je oko 4,3  $\mu\text{m}$ , injektor su bili dopirani, a aktivna oblast je bila u vidu trostruke kvantne jame kod koje je lasersku emisiju bilo moguće postići samo u impulsnom režimu na kriogenim temperaturama. Radijativni prelazi su dizajnirani kao dijagonalni sa gornjim laserskim stanjem prostorno lociranim u jami najbližoj injektoru i donjim laserskim stanjem koje se nalazilo u centralnoj jami aktivne oblasti. Ovakav dizajn je za cilj imao sprečavanje rasejanja elektrona iz injektora u kontinualna stanja. Osnovno stanje aktivne oblasti je postavljeno niže od energije donjeg laserskog nivoa i to za vrednost energije LO fonona, kako bi se postigla brza i efikasna ekstrakcija. Posledica prirode dijagonalnog prelaza je relativno mala vrednost optičkog matričnog elementa, odnosno mala vrednost pojačanja. Ovo ograničenje je prevaziđeno dizajniranjem strukture sa dvostrukom kvantnom jamom i vertikalnim prelazima koje karakteriše veliko prostorno preklapanje talasnih funkcija radijativnih nivoa. Prvi QCL-ovi koji su u impulsnom režimu mogli da rade na sobnim temperaturama, napravljeni su 1996. godine dodavanjem treće kvantne jame i upotrebom InP supstrata u omotaču talasovoda [60], a

modifikacijama vertikalnih prelaza omogućen je rad na većim talasnim dužinama, oko 8  $\mu\text{m}$  [62,63]. Porastom talasne dužine raste i brzina rasejanja nosilaca kod unutarzonskih prelaza [64], te je za postizanje većih talasnih dužina pogodnije dizajnirati dijagonalne prelaze kojima se obezbeđuje velika inverzna populacija. Dalji napredak u razvoju kvantnih kaskadnih lasera se ogleda u dizajniranju istih sa aktivnom oblašću u vidu superrešetke, a prvi je realizovan 1997. godine [65]. Ono što karakteriše ovakvu strukturu su optički prelazi između minizona i postizanje mnogo većih izlaznih snaga pri istom broju perioda [66]. Cilj narednih istraživanja i razvoja je bio usmeren ka povećanju maksimalnih radnih temperatura i izlaznih snaga, kao i ka proširenju opsega radnih talasnih dužina i ka terahercnim i ka telekomunikacionim frekvencijama [67,68].

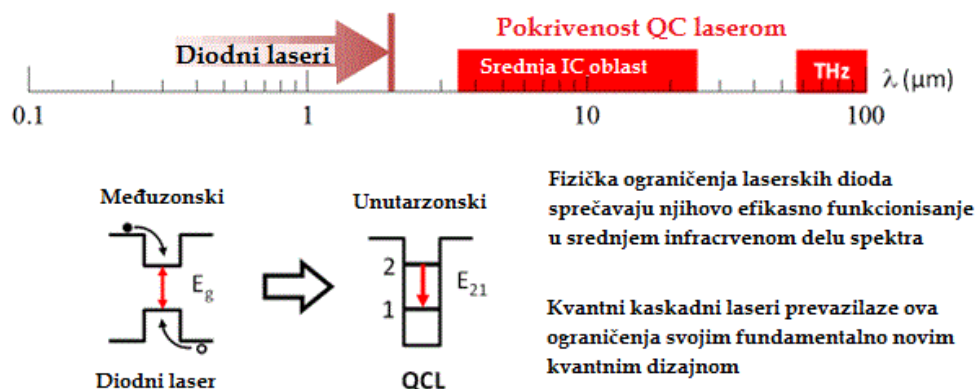
QCL-ovi na bazi GaAs su se pojavili 1998. godine, a prvi GaAs/AlGaAs laser je bio dizajniran tako da je njegova talasna dužina zračenja bila oko 9,4  $\mu\text{m}$  [69]. Zahvaljujući većoj efektivnoj masi i fleksibilnosti u pogledu izbora molskog udela aluminijuma, čime se može podešavati visina barijere, GaAs/AlGaAs heterostrukture su u prednosti u odnosu na GaInAs/AlInAs strukture kada je u pitanju ostvarivanje većih talasnih dužina, a smatraju se i najpogodnijim za izradu terahercnih lasera. Apsorpcija na slobodnim nosiocima, koja je dominantni proces među gubicima, obrnuto je proporcionalna efektivnoj masi i raste srazmerno kvadratu talasne dužine, pa je moguće ostvariti i veće izlazne snage što je od velikog značaja za dizajn GaAs/AlGaAs metamaterijala.

## **4.2. Princip funkcionisanja**

Kod standardnih poluprovodničkih lasera (laserske diode), emisija elektromagnetnog zračenja je zasnovana na međuzonskim prelazima i na rekombinaciji elektrona i šupljina. Foton biva emitovan kada negativno

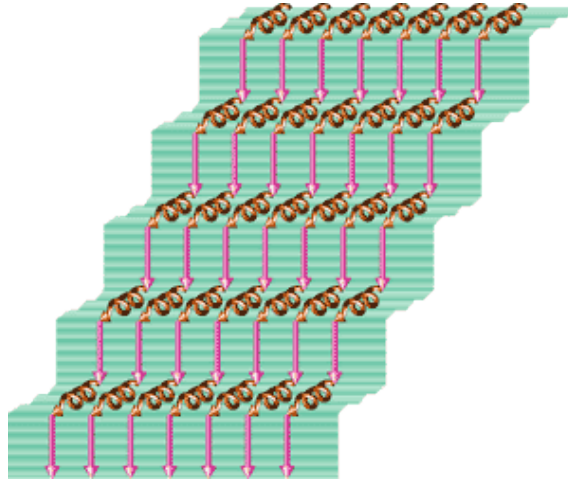
naelektrisanje (elektron), iz jedne zone- provodne zone poluprovodnika, izvrši prelaz u drugu zonu- valentnu zonu, i rekombinuje se sa „pozitivnim naelektrisanjem“ (šupljinom). Jednom kada dođe do rekombinacije elektron-šupljina, elektron više nije slobodan i prestaje emisija fotona. Na taj način, broj fotona koji se može generisati odgovara broju elektrona koji će se rekombinovati.

Fizička ograničenja laserskih dioda sprečavaju njihovo efikasno funkcionisanje u srednjem infracrvenom delu spektra, dok QCL-ovi prevazilaze ova ograničenja svojim fundamentalno novim kvantnim dizajnom. U poređenju sa konvencionalnim „međuzonskim“ laserima, QCL-ovi imaju sledeće prednosti: talasna dužina emisije je prvenstveno funkcija širine kvantnih jama što dovodi do toga da oni mogu biti dizajnirani tako da emituju na bilo kojoj talasnoj dužini u veoma širokom opsegu (3-215  $\mu\text{m}$  uz pomoć primene spoljašnjeg magnetnog polja na strukturu) koristeći istu kombinaciju materijala u aktivnoj oblasti, dizajnirani su kao stepeničasta struktura koja omogućuje da jedan elektron emituje mnogo fotona čime je emitovana optička snaga veća i, konačno, unutarzonske prelaze karakterišu ultrabrza kretanja elektrona i mala širina linije prelaza što, takođe, značajno utiče na performanse lasera (Slika 15).



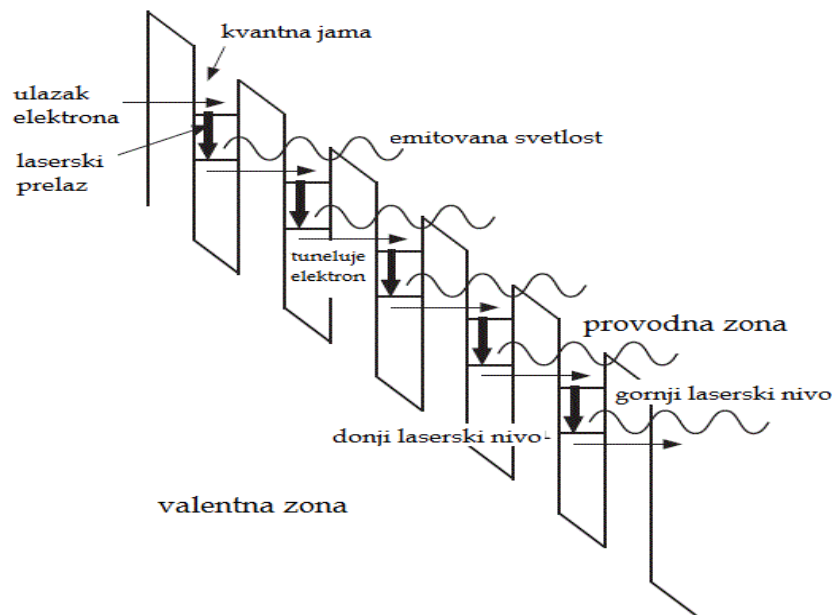
Slika 15 Ilustracija prelaza koji se dešavaju u diodnim laserima i QCL-ovima, kao i opsezi talasnih dužina na kojima oni mogu emitovati zračenje [70].

QCL se može slikovito predstaviti kao „elektronski vodopad“ (Slika 16). Kada struja elektrona prolazi kroz QCL, elektroni se spuštaju niz energijsko „stepenište“, emitujući po foton na svakom „stepeniku“. Zahvaljujući ovakvom mehanizmu emisije fotona, QCL se karakteriše vrlo visokom efikasnošću [71].



Slika 16 Elektronski „vodopad“: prelazanjem na niži energijski nivo, elektroni emituju po foton nakon čega se transportuju u sledeću periodu i proces se ponavlja [72].

QCL sadrži niz „zamki“ (a to su kvantne jame) za elektrone, pa elektron koji izvrši (unutarzonski) prelaz u jednom delu strukture, ostaje u istoj, provodnoj, zoni i prebacuje se u naredni deo strukture niže energije. Kako elektron izlazi iz prethodne periode strukture, odnosno ulazi u novu aktivnu oblast u vidu kvantnih jama, on emituje foton i ostaje bez dela energije. Kada elektron smanjene energije napusti tu aktivnu oblast, on ulazi u oblast strukture koja ima ulogu da ga prosledi do sledeće periode koja je na nižem energijskom nivou. Za QCL je tipično da ima niz od 25 do 75 perioda i svaka od njih je na nižem energijskom nivou u odnosu na prethodnu, što se postiže primenom spoljašnjeg električnog polja usmerenog u pravcu narastanja slojeva strukture. Upravo je to ono što proizvodi kaskadni efekat i omogućava da jedan elektron, tokom jednog putovanja kroz strukturu, stvori od 25 do 75 fotona.



Slika 17 Ilustracija emitovanja svetlosti i princip funkcionisanja QCL-a sa prikazom zona i stanja od interesa.

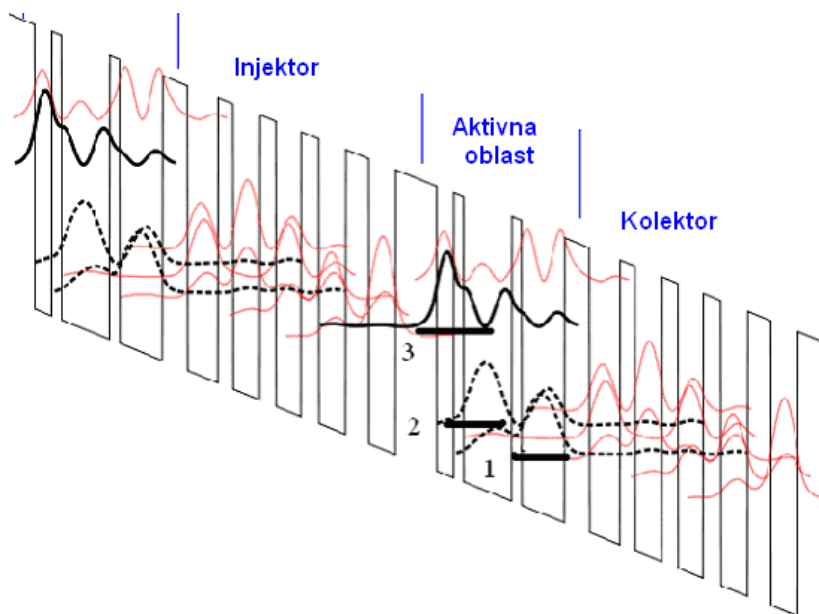
Kako bi se bolje razumeli osnovni fizički procesi koji upravljaju funkcionisanjem ovakvih elektrooptičkih uređaja, bez obzira na specifičnosti svakog dizajna ponaosob, potrebno je podsetiti se pojedinih glavnih karakteristika koje su zajedničke za mnoge kvantne kaskadne realizacije.

Dakle, QCL predstavlja periodični sistem koji u okviru jedne svoje periode obuhvata dve vrste struktura: segmente koji se mogu tretirati kao skoro<sup>1</sup> superrešetke i centralni deo koji se sastoji od nekoliko kvantnih jama i barijera i naziva se aktivna oblast. Superrešetke su strukture koje se sastoje od niza naizmenično postavljenih, različitih poluprovodničkih slojeva nanometarskih debljina. U strukturi lasera, naizmenično su postavljene dve vrste poluprovodnika: poluprovodnici koji imaju niže dno provodne zone i poluprovodnici koji imaju više dno provodne zone. Cilj korišćenja dve vrste

<sup>1</sup> Struktura ima vrlo mnogo slojeva, ali je, ipak, konačna, tako da je u pitanju „skoro“ superrešetka. Radi lakšeg praćenja kroz literaturu ovo ćemo nazivati superrešetkom, što je možda i opravdano, jer struktura ima izuzetno veliki broj perioda.

poluprovodnika različitih energijskih karakteristika je stvaranje kvantnih jama koje će „uhvatiti“ elektron i omogućiti njegovo ostajanje u provodnoj zoni. Poluprovodnici sa nižim dnom su jame, a oni sa višim barijere, a ovako napravljene superrešetke se nazivaju kompozicionim. Ukoliko se pretpostavi da su ove strukture beskonačne dužine, odgovarajući energijski spektar je trakast, odnosno sastoji se iz naizmenično poređanih zabranjenih i dozvoljenih energijskih opsega. Unutar jedne periode QCL-a, superrešetke su konačne dužine i predstavljaju, injektore/korektore elektrona čija je uloga da olakšaju transport elektrona iz jedne u drugu aktivnu oblast.

Kada se na ovakvu poluprovodničku strukturu primeni električno polje u pravcu rasta strukture, odnosno u pravcu normalnom na ravni slojeva, dno provodne zone dobija oblik koji je prikazan na **Slici 18**.



**Slika 18** Šematski prikaz dna provodne zone QCL-a. Talasne funkcije elektrona se ponavljaju u svakoj periodi. Kvadrat talasne funkcije koja odgovara gornjem stanju je prikazan crnom, punom linijom, a kvadrati talasnih funkcija koji odgovaraju donjem i osnovnom stanju isprekidanim linijama.

Klasičan dizajn aktivne oblasti QCL-a je u formi tri spregnute kvantne jame polarisane putem spoljašnjeg električnog polja  $\bar{K}$ . Ovakav sistem poseduje 3 stanja tj. podzone ( $n=1,2,3$ ) od kojih treće i drugo predstavljaju radne nivoe lasera i u literaturi su poznati kao gornje lasersko stanje i donje lasersko stanje, respektivno. Prvo stanje je označeno kao osnovno stanje. Iz naziva ovih stanja, tj. podnivoa, se lako može zaključiti da se laserski prelaz odvija između radnih nivoe lasera: stanja  $n=3$  i  $n=2$ . U ovoj oblasti dolazi do radijativnih prelaza, pa je stoga i nazvana aktivnom oblašću.

Kako bi se postigla i održala inverzna populacija između stanja zaduženih za radijativne prelaze, bilo je potrebno naći neko rešenje u dizajnu laserske strukture. Konkretno, brzine unutarzonskih rasejanja treba da budu na odgovarajući način prilagođene brzom i efikasnom pražnjenju donjih laserskih nivoe i sprečavanju elektrona da suviše brzo napuste gornje lasersko stanje. Cilj dizajna aktivne oblasti je ostvarivanje potrebne energije prelaza između laserskih stanja ( $E_3$  i  $E_2$ ) a da istovremeno razlika energija između najniža dva nivoe ( $E_2$  i  $E_1$ ) bude vrlo približno jednaka energiji LO fonona kako bi se putem rezonantne emisije optičkih fonona omogućila brza depopulacija donjeg laserskog stanja. Sa obe strane aktivne oblasti nalaze se injektorske/kolektorske strukture u formi superrešetke koje su dizajnirane kao Bragg-ovi reflektori. Njihova funkcija je dvostruka. Sa jedne strane aktivne oblasti injektuju elektrone u stanje  $n=3$ , dok, istovremeno, sa druge strane aktivne oblasti omogućavaju vrlo brzu ekstrakciju elektrona sa najnižeg nivoe energije  $E_1$  (stanje  $n=1$ ). Ako se posmatra [Slika 18](#), superrešetka sa leve strane aktivne oblasti za taj aktivni region predstavlja injektorsku oblast i ima ulogu populisanja gornjeg laserskog nivoe nosiocima. Injektorska oblast ima visoku transmisiju na energijama koje odgovaraju gornjem laserskom nivou ( $n=3$ ), dok na energijama koje odgovaraju osnovnom stanju i donjem laserskom nivou ( $n=1$  i  $n=2$ , respektivno) ima nisku transmisiju. Sa druge strane aktivne oblasti (desna strana strukture na [Slici 18](#)) nalazi se superrešetka koja za tu

aktivnu oblast ima ulogu kolektora. Njene osobine su suprotne osobinama injektorske oblasti, a to znači da na energijama koje odgovaraju energijskom stanju  $n=3$ , ona ima visoku reflektivnost, dok na energijama koje odgovaraju stanjima  $n=1$  i  $n=2$ , ima nisku reflektivnost. Ovakva superrešetka ima zadatak da obezbedi brzu ekstrakciju, odnosno, brzo pražnjenje osnovnog i donjeg laserskog nivoa. Emitterska i kolektorska struktura su, zapravo, identične, ali imaju ulogu emitera za aktivnu oblast koja dolazi posle njih, a ulogu kolektora za onu aktivnu oblast koja im prethodi.

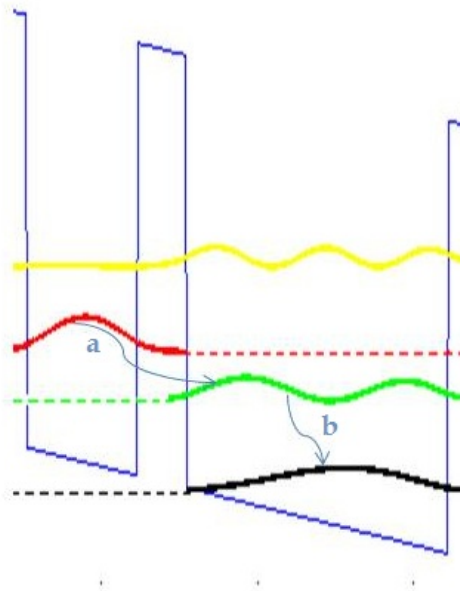
Struktura koja je opisana u prethodnom pasusu predstavlja osnovni gradivni element (blok) QCL-a i ponavlja se nekoliko desetina puta. Slojevi su projektovani tako da su osnovni nivo i donji laserski nivo jedne aktivne oblasti približno poravnati sa gornjim laserskim nivoom sledeće aktivne oblasti. Na taj način je između dva aktivna regiona omogućeno stvaranje injektorske oblasti kroz koju će elektroni, koji su u prvoj aktivnoj oblasti generisali fotone i spustili se na donje lasersko stanje (ili osnovno stanje), proći i ponovo biti injektovani u stanje  $n=3$  sledeće aktivne oblasti. Takvim ponašanjem sistema ostvaruje se kaskadni režim rada.

Različiti načini projektovanja QCL-ova se razlikuju najviše u načinu kombinovanja injektorsko-kolektorske oblasti sa aktivnom oblašću i samom broju kvantnih jama u okviru nje. Aktivne oblasti mogu biti dizajnirane tako da se sastoje iz dve ili više kvantnih jama. U zavisnosti od dizajna aktivne oblasti, karakteristika odabranih poluprovodničkih materijala i uslova koje je potrebno ispuniti, postoje različiti tipovi kvantnih kaskadnih lasera.

Pri analizi kvantne kaskadne strukture neophodno je razmatrati oba regiona - i aktivnu oblast u kojoj dolazi do same emisije zračenja, i injektorsku (kolektorsku) oblast. Transport elektrona kroz međupovršine injektor-aktivna oblast i aktivna oblast-kolektor dominantno je određen nekoherentnim mehanizmima rasejanja, dok je doprinos koherentnog rezonantnog



tunelovanja u ukupnoj gustini struje veoma mali. Kako bi se razumele osnovne osobine i svojstva poluprovodničkih lasera, neophodno je imati uvid u mehanizme relaksacije elektrona, pa treba pomenuti da se kod poluprovodničkih heterostruktura mogu razlikovati dve vrste prelaza: radijativni i neradijativni prelazi koje karakterišu emisije fotona i odsustvo te emisije, respektivno. Neradijativni mehanizmi relaksacije koji se mogu javiti u ovakvim strukturama su rasejanje elektron - LO fonon, rasejanje na akustičnim fononima, rasejanje na međupovršinskim neravninama, kao i rasejanje elektron-elektron.



*Slika 19* Ilustracija dijagonalnog prelaza (a) i vertikalnog prelaza (b) u aktivnoj oblasti.

Prelazi u aktivnoj oblasti opisuju se u zavisnosti od lokalizacije relevantnih talasnih funkcija gornjeg i donjeg laserskog nivoa. Kao što je ranije u radu pomenuto, ako se nalaze u istoj jami, prelazi u aktivnoj oblasti su vertikalni, dok dijagonalne prelaze karakterišu talasne funkcije određene u različitim jamama (*Slika 19*). Ono što je karakteristično za vertikalne prelaze jeste veća vrednost dipolnog matričnog elementa prelaza, ali i smanjeno odgovarajuće vreme života elektrona (na gornjem laserskom nivou), što je loše

sa stanovišta postizanja inverzne populacije. Sa druge strane, dijagonalni prelazi omogućuju duže vreme života nosilaca na gornjem laserskom nivou, ali je vrednost matričnog elementa značajno manja.

Kako se razlika energijskih stanja može smatrati približno konstantnom u odnosu na vrednost primenjenog napona, može se pretpostaviti da je zavisnost talasne dužine zračenja od spoljašnjeg polja i temperature jako mala kod realizacije aktivnih oblasti baziranih na vertikalnim prelazima. Ovakav tip lasera je manje osetljiv na defekte heteroslojeva, što za posledicu ima užu liniju prelaza, a samim tim i veće pojačanje. Što se tiče dijagonalnih prelaza, karakteristično je da su talasne funkcije gornjeg i donjeg laserskog stanja prostorno lokalizovane u različitim oblastima. Ove prelaze karakteriše nešto manji matrični element prelaza u odnosu na onaj kod vertikalnih, ali i duže vreme života nosilaca na gornjem laserskom nivou. S obzirom da talasna funkcija koja odgovara gornjem laserskom nivou značajno prodire u injektorsku barijeru, povećana je injekcija nosilaca, a samim tim su i poboljšani uslovi za postizanje inverzne populacije.

QCL-ovi za srednju-infracrvenu oblast i terahercni QCL-ovi funkcionišu na istom principu zasnovanom na unutarzonskim prelazima. Ipak, usled različitih energija radijativnih prelaza, koje su u slučaju QCL-a koji emituje u srednjoj infracrvenoj oblasti veće od energije LO fonona, a u slučaju terahercnih lasera manje, transportna dinamika elektrona se kvalitativno razlikuje u ova dva tipa lasera. U prvom slučaju, dominantan tip rasejanja elektrona je LO-rasejanje. Kod terahercnih uređaja razlika energija podnivoa među kojima se odvija laserski prelaz je manja od energije LO fonona. Ovo ima za rezultat značajno veću temperaturnu osetljivost pri transportu elektrona i mnogo veći značaj rasejanja tipa elektron-elektron, odnosno rasejanja na neravninama površina koje dominira u primerima koji su ovde razmatrani.

### **4.3. Terahercni kvantni kaskadni laseri**

Od prvog predstavljanja QCL-a 1994 godine, pa do danas, performanse ovih sistema su imale značajna poboljšanja, a opseg emisionih talasnih dužina je kontinualno proširivan. U principu, kvantni kaskadni uređaji se mogu dizajnirati tako da emituju zračenje bilo koje frekvencije u veoma širokom opsegu i to koristeći istu kombinaciju materijala, a samo menjajući dizajn nanostrukture. Ipak, prelazak konvencionalne kaskadne šeme u uređaje koji rade na energijama fotona koje su ispod praga LO fonona osnovnog materijala, definitivno nije pravolinijski posao. U ovakvoj konfiguraciji najveću poteškoću u postizanju režima inverzne populacije u aktivnoj oblasti predstavlja temperaturna osetljivost koja vodi ka povećanom rasejanju na LO fononima.

Kvantna kaskadna struktura prvog terahercnog QCL-a je bila dizajnirana da emituje zračenje na 4,4 THz (odnosno na oko 70  $\mu\text{m}$ ). Struktura je bila konvencionalnog dizajna, a bazirana je na vertikalnim prelazima koji omogućuju veći dipolni matrični element prelaza i užu liniju prelaza, a samim tim i veće pojačanje. Princip rada ovog lasera je bio isti kao i princip rada QCL-a koji rade u srednjoj infracrvenoj oblasti.

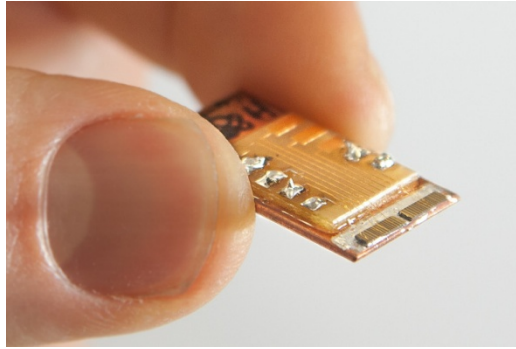
Terahercni talasi, iako nama nevidljivi, imaju veliki potencijal i primenu u mnogim privrednim i naučnim granama. Oni mogu prodreti u mnoge materijale koji su netransparentni za vidljivu svetlost i savršeni su za detekciju različitih molekula. Bez obzira na to da li se radi o dijagnostičkom „imidžingu“, analizi nepoznatih supstanci ili ultrabrzim komunikacijama, terahercni izvori zračenja postaju sve bitniji.

Za razliku od oblasti infracrvenih, upotreba oblasti terahercnih frekvencija (0,1-10 THz) je dosta nerazvijena. Uprkos činjenici da su potencijali za primenu terahercne oblasti veliki (spektroskopija, komunikacije, medicina,

hemijski detektori, itd.), problem je nepostojanje adekvatnih izvora terahercnog zračenja. Naime, ove frekvencije se nalaze između dva frekventna opsega u kojima konvencionalni poluprovodnički uređaji rade, frekvencijski opseg mikrotalasa i bliski infracrveni opseg.

Fotonski pristupi direktnom terahercnom generisanju su bili ograničeni nedostatkom odgovarajućih materijala sa dovoljno malim zonskim procepom. Poluprovodničke strukture bazirane na principu međuzonskih prelaza ograničene su na frekvencije veće od onih koje odgovaraju energijskom procepu poluprovodnika što je iznad 10 THz za većinu balkovskih poluprovodnika. Sa druge strane, ograničenje kod poluprovodničkih elektronskih uređaja koji rade na principu difuznog transporta elektrona i imaju dobre karakteristike u mikrotalasnom delu spektra, usled tranzitnih vremena i efekata otpornosti i kapacitivnosti, na visokim frekvencijama ne mogu generisati primenljive snage. Tako je i kod najboljih uređaja generisana snaga ispod nivoa od 1 mW za frekvencije iznad 1 THz. Uprkos ovim ograničenjima razvijen je širok spektar tehnika koje su omogućile generisanje zračenja na frekvencijama iznad 1 THz, ali je svaka od njih imala neka nova ograničenja koja su činila te nove izvore neisplativim ili neodgovarajućim, pa je potraga za „savršenim“ izvorom terahercnog zračenja nastavljena [67,68,69].

Danas terahercni QCL-ovi predstavljaju efikasne svetlosne izvore u oblastima koji se prostiru od dalekog infracrvenog do sub-THz dela elektromagnetnog spektra, uključujući naprave koje funkcionišu uz „pomoć“ magnetnog polja. Prvi put su demonstrirani 2002. godine, i od tada se intenzivno radi na njihovom razvoju [76,77]. Poslednje dostignuće u razvoju terahercnih QCL-ova je laser napravljen na Tehnološkom Univerzitetu u Beču ([Slika 20](#)) koji proizvodi zračenje od jednog vata [78].



*Slika 20* Novorazvijeni kvantni kaskadni laser na Bečkom Univerzitetu za tehnologiju [79].

Kao i kod QCL-ova za infracrvenu oblast, za elektrone u svakom od slojeva strukture dozvoljeni su samo određeni diskretni energijski nivoi. Ako se primeni odgovarajuća struja, elektroni prelaze iz sloja u sloj emitujući fotone i na taj način proizvode terahercno zračenje čije se talasne dužine nalaze između mikrotalasnih i infracrvenih. U odnosu na QCL-ove koji emituju u infracrvenom domenu, terahercne strukture imaju veoma uske energijske nivoe (energije terahercnih fotona su male  $h\nu \approx 4 - 20$  meV), pa je veoma teško dizajnirati kvantne jame takvih dimenzija tako da se ispune zahtevi odgovarajuće selektivne injekcije nosilaca na gornji laserski nivo i depopulacije donjeg laserskog nivoa, bilo tunelovanjem ili rasejanjima, u cilju obezbeđivanja neophodne inverzne populacije. Zahtevi koji se sreću prilikom fabrikacije, a tiču se adekvatnih i preciznih dimenzija, takođe mogu biti problem. Zbog velike gustine energijskih podnivoa posledice zagrevanja i rasejanja tipa elektron-elektron biće mnogo izraženije.

#### **4.3.1. Dizajn aktivne oblasti terahercnog kvantnog kaskadnog lasera**

Aktivna oblast QCL-ova se uobičajeno narasta korišćenjem epitaksije molekularnim snopom, u GaAs/AlGaAs sistemu materijala, i predstavlja „srce” bilo kog QCL-a. Kako bi se postiglo pojačanje EM talasa na željenoj frekvenciji, energijski nivoi, talasne funkcije i brzine rasejanja moraju biti adekvatno podešene kvantnim inženjeringom kako bi se ostvarila inverzna

populacija između stanja razdvojenih za energiju  $h\nu$ . Što se tiče aktivne oblasti terahercnih kvantnih kaskadnih lasera, mogu se izdvojiti tri glavna tipa dizajna: CLS (engl. *Chirped Superlattice*) [80], BTC (engl. *Bound-to-Continuum*) [81] i RP (engl. *Resonant-Phonon*). Takođe, dizajniran je i demonstriran i jako veliki broj hibridnih rešenja u kojima je kombinovan BTC dizajn sa depopulacijom pomoću fonona.

#### *a) CSL-dizajn*

Ovakav dizajn aktivne oblasti je baziran na sprezanju više kvantnih jama u superrešetku kako bi se primenom odgovarajućeg polja u strukturi formirale minizone stanja. Laserski prelazi se dešavaju između dve minizone umesto između podzona aktivne jame, tako što do radijativnog prelaza dolazi sa najnižeg energijskog stanja gornje minizone na najviše stanje donje minizone što je analogno konvencionalnim međuzonskim prelazima. S obzirom da je kod terahercnih QCL-ova širina minizone manja od energije LO fonona, verovatniji su procesi rasejanja među minizonama nego unutar nje, pa se elektroni relaksiraju na dno minizona ostavljajući radijativno stanje skoro praznim. Elektroni se, dalje, ekstrakuju sa najnižeg nivoa minizone procesom rasejanja (elektron-elektron rasejanja ili rasejanja na neravninama površina) i injektuju na više nivoe minizone sledeće periode.

Iako se kod ovakvog dizajna aktivne oblasti postiže veliko prostorno preklapanje talasnih funkcija i velika vrednost matričnog elementa prelaza, pa se time očekuje i veliko pojačanje, postoje ograničenja koja nastaju usled termalnog popunjavanja donje minizone i nedovoljne inverzne populacije.

**b) BTC- dizajn**

Jedna od varijacija CLS dizajna je BTC dizajn. Dok donja minizona i mehanizam njene depopulacije ostaju isti, gornje radijativno stanje predstavlja izolovano stanje u okviru miniprocepa [82]. Efekat takvog dizajna je dijagonalni laserski prelaz sa gornjeg stanja na donju minizonu. U poređenju sa CLS dizajnom, smanjivanjem preklapanja stanja minizona smanjuje se i oscilatorna snaga prelaza, ali se vreme života nosilaca na gornjem nivou povećava pošto je neradijativno rasejanje smanjeno. U ovakvom dizajnu aktivne oblasti dolazi do jačeg sprezanja injektorske oblasti sa gornjim laserskim stanjima nego sa stanjima donje minizone što dovodi do povećanja injekcione efikasnosti u odnosu na CLS aktivnu oblast. Rezultati ovakvog dizajna su poboljšanja radne temperature i izlazne snage u poređenju sa prethodnom strukturom.

**c) RP-dizajn**

Ovaj tip dizajna je zajednički sa dizajnom aktivnih oblasti za srednji infracrveni deo spektra. Razlika energija između donjeg laserskog i osnovnog stanja je oko 36 meV, što je energija LO fonona u GaAs, a time je omogućena brza depopulacija donjeg laserskog stanja putem emisije LO fonona.

Kada je u pitanju depopulacija donjeg laserskog stanja, korišćenje struktura koje se bazira na rasejanju na LO fononima, ima dosta prednosti [83,84]. U tom slučaju je kolektorsko stanje odvojeno od donjeg laserskog stanja najmanje za energiju LO fonona ( $\hbar\omega_{LO}$ ). Na taj način depopulacija može biti veoma brza i ne zavisi u velikoj meri ni od temperature, ni od raspodele elektrona. Obe ove osobine su veoma bitne za postizanje viših temperatura rada na većim talasnim dužinama.

Iako se princip rada QCL-ova za srednji infracrveni i terahercni deo spektra bazira na principu unutarzonskih prelaza, dinamika transporta nosilaca se dosta razlikuje za ova dva tipa lasera. Ta razlika u dinamici transporta je posledica razlike udaljenosti između energijskih nivoa u jednom i drugom slučaju (u slučaju lasera koji zrače na frekvencijama u srednjem infracrvenom delu spektra u pitanju su vrednosti veće od energije LO fonona, dok je kod terahercnih lasera obrnut slučaj). Pošto su u slučaju uređaja koji emituju u srednjem infracrvenom delu spektra razlike energije između laserskih stanja veće od energije LO fonona, dominantan proces rasejana je rasejanje na LO fononima. Kod terahercnih struktura je obrnut slučaj; razlika energija nivoa među kojima se odvija laserski prelaz je manja od energije LO fonona, što rezultuje u značajno većoj temperaturnoj osetljivosti pri transportu elektrona i mnogo većem značaju rasejanja na neravninama površina. U primerima terahercnih metamaterijala koji su razmatrani u ovom radu, upravo je dominantan proces rasejanja na neravninama (o tome će biti više reči u poglavlju o rasejanjima).

#### **4.4. Kvantni kaskadni laseri u magnetnom polju**

Kao što je već rečeno, mehanizam generacije fotona kod QCL-a se zasniva na unutarzonskim prelazima, odnosno na prelazima između diskretnih stanja provodne zone. Zbog toga, primenom spoljašnjeg magnetnog polja u pravcu rasta strukture i formiranjem diskretnih stanja optički prelazi postaju zanimljivi za analizu.

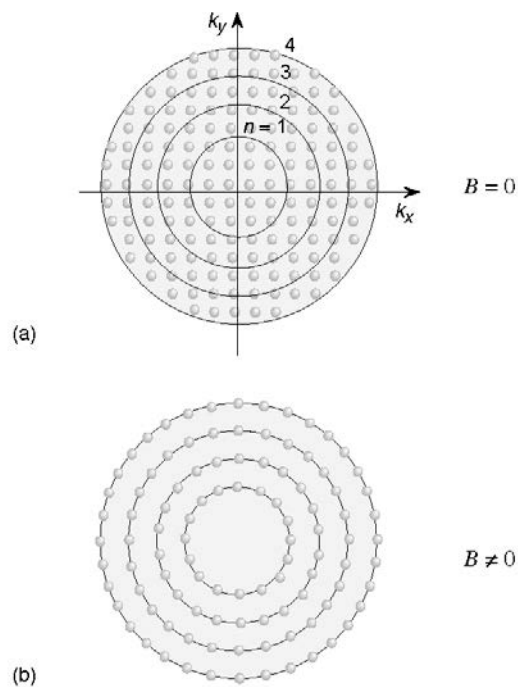
Kretanje elektrona u pravcu paralelnom ravnima slojeva je slobodno (kada nije prisutno magnetno polje), a neradijativno vreme života nosilaca u pobuđenom stanju (odnosno u stanju  $n=3$ ) je reda 1 ps. To ultrakratko vreme života je ograničeno dominantnim rasejanjem elektron - LO fonon, uz prelaze na dva niža stanja aktivne oblasti. Shodno tim vrednostima reda veličine



pikosekunde, vrednosti struje praga kod QCL-a su povećane u odnosu na klasične emitere čije je funkcionisanje zasnovano na međuzonskim prelazima, a samim tim je umanjeno optičko pojačanje [6]. U standardnom režimu rada (kada nije prisutno spoljašnje magnetno polje) energija svake podzone ima formu:

$$E_n(k_{\parallel}) = E_{n0} + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{\parallel n}}, \quad (4.1)$$

gde  $m_{\parallel n}$  predstavlja energijski-zavisnu transversalnu efektivnu masu, a  $k_{\parallel}$  odgovarajući transversalni talasni vektor. Neradijativno vreme života nosilaca na gornjem laserskom nivou  $|3, k_{\parallel}\rangle$  je određeno rasejanjem tipa elektron-LO fonon na niže podzone aktivne oblasti.



**Slika 21** Energija elektrona kvantizovana u  $x$ - $y$  ravni pod uticajem primenjenog spoljašnjeg magnetnog polja.

Poznato je da smanjenje dimenzionalnosti sistema, npr. primenom jakog spoljašnjeg magnetnog polja, dovodi do značajnih promena. Tačnije, ako je

primenjeno magnetno polje paralelno ravnima slojeva, onda ono ima jako mali, gotovo zanemarljiv, uticaj na osobine strukture (npr. apsorpciju i energijski spektar). Međutim, ukoliko se primeni jako spoljašnje magnetno polje normalno na epitaksijalne slojeve, tada dolazi do drastične promene vrednosti vremena života u gornjem laserskom stanju [8,85]. Kada se struktura kvantnog kaskadnog lasera izloži dejstvu jakog magnetnog polja  $B$ , čiji je pravac normalan na ravni slojeva, primenjeno polje uvodi dodatnu kvantizaciju kretanja elektrona u ravni slojeva i prevodi dvodimenzionalne, kontinualne podzone u nizove pojedinačnih, strogo diskretnih stanja energija (Slika 21).

Sa dovoljnom tačnošću disperziona relacija za provodnu zonu  $GaAs$  i  $Al_xGa_{1-x}As$  može se predstaviti relacijom ( $\vec{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ ) [86]:

$$E(k_x, k_y, k_z) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \alpha_0 k^4 + \beta_0 (k_x^2 k_y^2 + k_y^2 k_z^2 + k_z^2 k_x^2), \quad (4.2)$$

pri čemu je  $m$  efektivna masa posmatranog materijala na dnu provodne zone, dok su  $\alpha_0$  i  $\beta_0$  parametri koji određuju neparaboličnost (npr. za  $GaAs$   $m=0,0665m_0$ ,  $\alpha_0 = -2107 \text{ eV}\text{\AA}^4$ ,  $\beta_0 = -2288 \text{ eV}\text{\AA}^4$ ).

Posmatra se struktura sačinjena od više slojeva različitih materijala, s tim da slojevi narastaju duž  $z$ -ose. Prvo se posmatra slučaj kada je  $k_x = k_y = 0$ , odnosno  $k_{\parallel}^2 = k_x^2 + k_y^2 = 0$ . Schrodingerova jednačina u tom slučaju je:

$$-\frac{d}{dz} \frac{\hbar^2}{2m(z)} \frac{d\Psi}{dz} + \frac{d^2}{dz^2} \alpha_0(z) \frac{d^2\Psi}{dz^2} + U(z)\Psi = E\Psi, \quad (4.3)$$

s tim da je  $U(z)$  potencijalna energija koja uključuje diskontinuitete provodne zone, kao i postojanje koncentracije elektrona. Granični uslovi na spoju dva različita materijala su [87][Dodatak 2]:

1) neprekidnost talasne funkcije  $\Psi$  i

2) neprekidnost veličine  $\frac{\hbar^2}{2m(z)} \frac{d\Psi}{dz} - 2\alpha_0(z)k^2 \frac{d\Psi}{dz}$ ,

kao što je to egzaktno prikazano u radu [88]. Uzimajući u obzir granične uslove i rešavajući Schrodingerovu jednačinu (4.3), dobijaju se energije  $E_1^0, E_2^0, E_3^0, \dots, E_i^0, \dots$ , i odgovarajuće talasne funkcije  $\Psi_1^0, \Psi_2^0, \Psi_3^0, \dots, \Psi_i^0, \dots$ .

Primenjujući teoriju perturbacija [86], transverzalna masa  $n$ -te podzone je data relacijom:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m_{\parallel,n}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi_n^0)^* \left( \frac{\hbar^2}{2m(z)} - \frac{d}{dz} (\alpha_0(z) + \beta_0(z)) \frac{d}{dz} \right) \Psi_n^0 dz \\ &= \left\langle \frac{\hbar^2}{2m} - \frac{d}{dz} (\alpha_0 + \beta_0) \right\rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

Kada se na strukturu, normalno na njene slojeve, primeni spoljašnje magnetno polje  $\vec{B}$ , dolazi do cepanja  $n$ -te podzone na skup diskretnih nivoa. Energije svakog od nastalih diskretnih nivoa se mogu odrediti pomoću sledeće relacije čije je detaljno izvođenje dato u [86]:

$$E_{n,l}(B) = E_n^0 + \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar e B}{m_{\parallel,n}} + \left[ (8l^2 + 8l + 5) \langle \alpha_0 \rangle + (l^2 + l + 1) \langle \beta_0 \rangle \right] \frac{e^2 B^2}{2\hbar^2}, \quad (4.5)$$

gde je  $l$  ( $l=0, 1, 2, \dots$ ) Landauov kvantni broj, dok su  $\langle \alpha_0 \rangle$  i  $\langle \beta_0 \rangle$  usrednjene vrednosti odgovarajućih parametara na osnovu relacije (4.4).

Jednačina koja opisuje Landauove nivoe, tj. njihove energije, može se sa dovoljnom tačnošću, zamenjujući član proporcionalan sa  $B^2$ , zapisati u obliku:

$$E_{n,l}(B) = E_n^0 + \left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar e B}{m_{\parallel,n}}. \quad (4.6)$$

Iz navedene relacije je očigledno da se promenom jačine magnetnog polja menja energija, odnosno, konfiguracija diskretnih Landauovih stanja, a time

se menjaju i verovatnoće za različite tipove prelaza. Usled promene rasporeda Landauovih nivoa dolazi i do promene rastojanja među njima, a time i do promene onih rastojanja u strukturi koja odgovaraju laserskim prelazima. Ta rastojanja i laserski prelazi sada zavise od jačine magnetnog polja, a to, dalje, znači da talasna dužina emitovanog zračenja lasera postaje funkcija magnetnog polja. Ono što je bitno odrediti je koje su to vrednosti jačine magnetnog polja koje dovode do povećanja rezonantne emisije LO fonona i time, kao rezultat, dovode do drastičnog smanjenja stepena inverzne naseljenosti. Njihovo određivanje je moguće na osnovu jednačine:

$$E_{3,0} - E_{n,l} = \hbar\omega_{LO} , \quad (4.7)$$

za  $n=1,2$ , a gde  $\hbar\omega_{LO}$  predstavlja energiju LO fonona.

Može se pokazati da su optički prelazi u sistemu dozvoljeni samo između onih stanja koja imaju istu vrednost Landau-ovog indeksa, odnosno  $(i,l) \rightarrow (f,l)$ .

Da bi se odredila dielektrična permitivnost koja zavisi od stepena inverzne populacije, potrebno je odrediti površinskiu gustinu nosilaca  $N_{s_i}$  (odnosno  $N_{n,l}$  u diskretizovanom spektru). To znači da se najpre mora odrediti raspodela elektrona po svim diskretnim stanjima u aktivnoj oblasti. Ovo se postiže rešavanjem odgovarajućeg sistema brzinskih jednačina. Sistem brzinskih jednačina opisuje promenu naseljenosti nivoa kao razliku brzine kojom elektroni dolaze na posmatrani nivo i brzine kojom ga napuštaju [79].

Pretpostavljeni su sledeći uslovi:

- a) elektroni se injektuju u aktivni region konstantnom strujom čija je površinska gustina  $J$ , i ubacuju se samo u ograničeni broj Landauovih nivoa gornjeg laserskog stanja (nivoi  $3,0;3,1;...;3,l_{max3}$ ), pri čemu se nivo

$l_{max3}$  određuje iz pretpostavke da se svi nivoi iznad njega ( $(n,l)=(3, l_{max3})$ ) mogu smatrati nepopulisanim.

Znači, ukupna struja je  $J = \sum_{k=0}^{l_{max3}} J_{3,k}$ , pri čemu je:

$$J_{3,k} = J \frac{e^{-\frac{E_{3,k}}{k_B T}}}{\sum_{p=0}^{l_{max3}} e^{-\frac{E_{3,p}}{k_B T}}} . \quad (4.8)$$

b) Elektroni se ekstrakuju iz aktivnog regiona strujom čija je površinska gustina  $J$  i to samo iz ograničenog broja Landau-ovih nivoa najnižeg laserskog stanja od  $(1,0)$  do  $(1,l_{max1})$ . Nivo  $l_{max1}$  se određuje kao ona maksimalna vrednost  $l$  pri kojoj je zadovoljena nejednakost  $E_{1,l} < E_{3,l_{max}}$ .

Po analogiji sa slučajem a), ukupna struja je  $J = \sum_{k=0}^{l_{max1}} J_{1,k}$ , pri čemu je:

$$J_{1,k} = J \frac{e^{-\frac{E_{1,k}}{k_B T}}}{\sum_{p=0}^{l_{max1}} e^{-\frac{E_{1,p}}{k_B T}}} \quad (4.9)$$

Naročito na nižim temperaturama može se zanemariti proces apsorpcije fonona [90], tako da će sistem brzinskih jednačina obuhvatiti samo prelaze uz emisiju fonona.

Razlog zašto će u ovom radu biti posmatrani samo prelazi na dole tj. zašto se zanemaruje apsorpcija fonona je sledeći. Pokazaće se da je odnos brzina prelaza pri emisiji i pri apsorpciji dat opštom relacijom (za LO fonone energije  $\hbar\omega_{LO}$ ):

$$\frac{W_{i,j}^E}{W_{i,j}^A} = e^{\frac{\hbar\omega_{LO}}{k_B T}} . \quad (4.10)$$

U npr. GaAs-u je energija LO fonona  $\hbar\omega_{LO} \approx 36\text{meV}$ , pa je ovaj odnos pri temperaturi  $T=300\text{ K}$  približno jednak 4, dok za  $T=77\text{ K}$  već iznosi skoro 800, što znači da se, naročito pri nižim temperaturama, može zanemariti proces apsorpcije fonona.

Ako se uoče bilo koja dva nivoa  $(n,l)$  i  $(p,q)$  i pretpostavi da je  $E_{1,l} < E_{3,lmax}$ , pošto se zanemaruje apsorpcija fonona, brzina smanjenja broja elektrona usled rasejanja sa nivoa  $(n,l)$ , na nivo  $(p,q)$  biće:

$$\frac{\bar{f}(E_{p,q})}{\tau_{n,l;p,q}} N_{n,l} , \quad (4.11)$$

$$\bar{f}(E_{p,q}) = 1 - f_{FD}(E_{p,q}) , \quad (4.12)$$

gde je  $1/\tau_{n,l;p,q}$  brzina relaksacije elektrona sa posmatranih nivoa  $(n,l)$  na nivo  $(p,q)$  usled emisije fotona pri rasejanju na LO i akustičnim fononima, odnosno pri rasejanju na LO fononima i na neravninama.  $N_{n,l}$  je neravnotežna koncentracija na nivou  $(n,l)$ , dok  $\bar{f}(E_{p,q})$  predstavlja verovatnoću da je nivo  $(p,q)$  prazan. Funkcija  $f(E_{p,q})$  je neravnotežna (Fermi-Dirac-ova) funkcija raspodele sa Fermi-jevom energijom  $(E_F)_{p,q}$  za nivo  $(p,q)$ .

Kako je:

$$N_{p,q} = \frac{eB}{\pi\hbar} (f_{FD})_{p,q} = \frac{eB}{\pi\hbar} \frac{1}{e^{\frac{E_{p,q} - (E_F)_{p,q}}{kT}} + 1} , \quad (4.13)$$

to je:

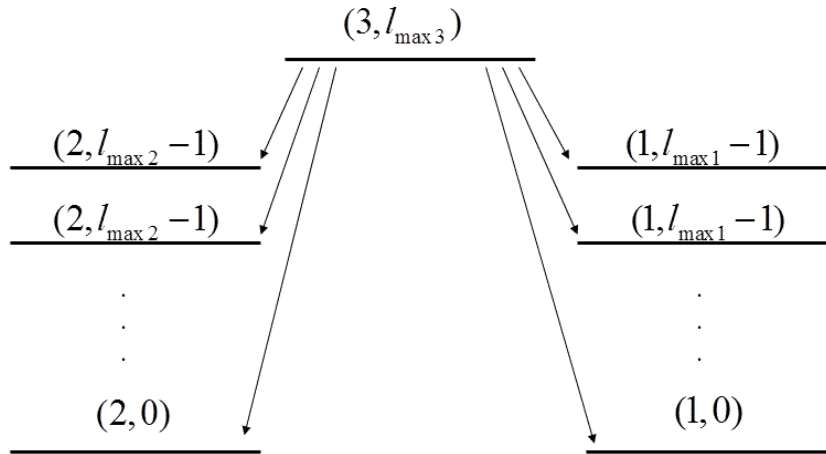
$$(\bar{f}_{FD})_{p,q} = 1 - \frac{\pi\hbar}{eB} N_{p,q} . \quad (4.14)$$

Brzina povećanja elektrona na nivou  $(p,q)$  usled njihovog dolaska sa nivoa  $(n,l)$  data je jednačinom (4.11).

Ako se posmatra najviši relevantni nivo, a to je nivo  $(3, l_{\max 3})$ , može se napisati odgovarajuća brzinska jednačina imajući u vidu da na posmatrani nivo elektroni dolaze brzinom  $J_{3,l_{\max 3}}/e$ , a odlaze na nivoe  $(3, l_{\max 3}-1)\dots(3,0)$ , kao i na nivoe  $(2, l_{\max 2}-1)\dots(2,0)$  i  $(1, l_{\max 1}-1)\dots(1,0)$ . Ovo se može predstaviti jednačinom:

$$\frac{\partial N_{3,l_{\max 3}}}{\partial t} = \frac{J_{3,l_{\max 3}}}{e} - N_{3,l_{\max 3}} \left[ \sum_{p=0}^{l_{\max 3}-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{3,l_{\max 3};3,p}} + \sum_{i=0}^{l_{\max 2}} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{3,l_{\max 3};2,i}} + \sum_{j=0}^{l_{\max 1}} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{3,l_{\max 3};1,j}} \right], \quad (4.15)$$

i njenim šematskim prikazom na **Slici 22**.



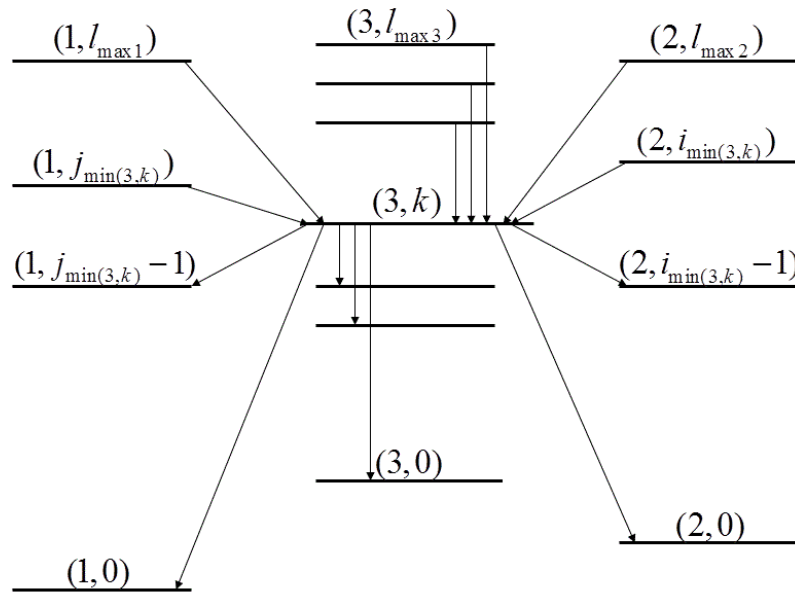
Slika 22 Šematski prikaz jednačine (4.15) čije je objašnjenje dato u tekstu.

Sada se posmatra nivo  $(3, k)$ , pri čemu je  $k \in [l_{\max 3} - 1, 1]$ . Na ovaj nivo dolaze elektroni koji potiču od ulazne struje brzinom  $J_{3,k}/e$  i elektroni sa nivoa koji su viši od posmatranog  $(3, k)$  nivoa. Posmatrani nivo napuštaju elektroni pri prelasku na nivoe koji su niži od  $(3, k)$ . Odgovarajuća brzinska jednačina glasi:

$$\frac{\partial N_{3,k}}{\partial t} = \frac{J_{3,k}}{e} + \bar{f}(E_{3,k}) \left[ \sum_{p=k+1}^{l_{\max 3}} \frac{N_{3,p}}{\tau_{3,p;3,k}} + \sum_{i=i_{\min(3,k)}}^{l_{\max 2}} \frac{N_{2,i}}{\tau_{2,i;3,k}} + \sum_{j=j_{\min(3,k)}}^{l_{\max 1}} \frac{N_{1,j}}{\tau_{1,j;3,k}} \right] - N_{3,k} \left[ \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{3,k;3,p}} + \sum_{i=0}^{i_{\min(3,k)}-1} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{3,k;2,i}} + \sum_{j=0}^{j_{\min(3,k)}-1} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{3,k;1,j}} \right], \quad (4.16)$$

Šematski prikaz ove brzinske jednačine je dat na slici (Slika 23), a sa nje se jasno vidi i značenje indeksa  $i_{\min(3,k)}$  i  $j_{\min(3,k)}$ .

Ako je u pitanju nivo  $(3,0)$ , poslednja jednačina (4.16) se mora modifikovati tako da četvrta suma u (4.16) izostaje, jer nema nivoa u skupu  $(3,k)$ , koji je niži od nivoa  $(3,0)$ .



Slika 23 Šematski prikaz jednačine (4.16) čije je objašnjenje dato u tekstu.

Za razliku od nivoa  $(3,k)$ , na nivoe  $(2,k)$ , pri čemu je sada  $k \in [l_{\max 2} - 1, 1]$ , elektroni koji potiču od ulazne/izlazne struje niti dolaze, niti odlaze sa njih. Odgovarajuća brzinska jednačina za  $(2,k)$  je:



$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{2,k}}{\partial t} = & \bar{f}(E_{2,k}) \left[ \sum_{p=p_{\min}(2,k)}^{l_{\max 3}} \frac{N_{3,p}}{\tau_{3,p;2,k}} + \sum_{i=i_{\min}(2,k)}^{l_{\max 2}} \frac{N_{2,i}}{\tau_{2,i;2,k}} + \sum_{j=j_{\min}(2,k)}^{l_{\max 1}} \frac{N_{1,j}}{\tau_{1,j;2,k}} \right] \\ & - N_{2,k} \left[ \sum_{p=0}^{p_{\min}(2,k)-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{2,k;3,p}} + \sum_{i=0}^{i_{\min}(2,k)-1} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{2,k;2,i}} + \sum_{j=0}^{j_{\min}(2,k)-1} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{2,k;1,j}} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Značenje indeksa  $p_{\min}(2,k)$ ,  $i_{\min}(2,k)$  i  $j_{\min}(2,k)$ , jasno je sa [Slike 23](#). Ako je  $k=l_{\max 2}$ , tada u odgovarajućoj jednačini izostaje druga suma. S druge strane, ako je  $k=0$ , tada se mora izostaviti peta suma.

Što se tiče postavljanja brzinskih jednačina za nivoe  $(1, k)$ , gde je  $k \in [l_{\max 1} - 1, 1]$ , treba uključiti sledeće faktore: 1) elektroni sa ovog nivoa odlaze brzinom  $J_{1,k} / e$ , 2) elektroni sa ovog nivoa odlaze i na nivoe koji su niži od  $(1,k)$ , 3) na ovaj nivo dolaze elektroni sa nivoa koji su viši od  $(1,k)$ . Brzinska jednačina za posmatrani nivo  $(1,k)$  je:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{1,k}}{\partial t} = & -\frac{J_{1,k}}{e} + \bar{f}(E_{1,k}) \left[ \sum_{p=p_{\min}(1,k)}^{l_{\max 3}} \frac{N_{3,p}}{\tau_{3,p;1,k}} + \sum_{i=i_{\min}(1,k)}^{l_{\max 2}} \frac{N_{2,i}}{\tau_{2,i;1,k}} + \sum_{j=j_{\min}(1,k)}^{l_{\max 1}} \frac{N_{1,j}}{\tau_{1,j;1,k}} \right] \\ & - N_{1,k} \left[ \sum_{p=0}^{p_{\min}(1,k)-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{1,k;3,p}} + \sum_{i=0}^{i_{\min}(1,k)-1} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{1,k;2,i}} + \sum_{j=0}^{j_{\min}(1,k)-1} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{1,k;1,j}} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Kao i u prethodnim brzinskim jednačinama, tako i u poslednjoj, značenje indeksa  $p_{\min}(1,k)$ ,  $i_{\min}(1,k)$  i  $j_{\min}(1,k)$ , jasno je sa slike.

Za slučaj kada je  $k=l_{\max 1}$ , izostaje treća suma u poslednjoj jednačini, dok jednačina koja se iz (4.18) formira za slučaj kada je  $k=0$ , ne sadrži šestu sumu.

U stacionarnom stanju brzina promene naseljenosti nivoa u aktivnoj oblasti je jednaka nuli, pa su i svi izvodi  $\partial N_{i,j} / \partial t$  jednaki nuli. Zbog toga se sistem opisanih brzinskih jednačina svodi na sistem nelinearnih jednačina sa  $N_{i,j}$  kao nepoznatim veličinama:

$$\begin{aligned}
 & \frac{J_{3,l_{\max 3}}}{e} - N_{3,l_{\max 3}} \left[ \sum_{p=0}^{l_{\max 3}-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{3,l_{\max 3};3,p}} + \sum_{i=0}^{l_{\max 2}} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{3,l_{\max 3};2,i}} + \sum_{j=0}^{l_{\max 1}} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{3,l_{\max 3};1,j}} \right] = 0, \\
 & \vdots \\
 & \frac{J_{3,k}}{e} + \bar{f}(E_{3,k}) \left[ \sum_{p=k+1}^{l_{\max 3}} \frac{N_{3,p}}{\tau_{3,p;3,k}} + \sum_{i=i_{\min(3,k)}}^{l_{\max 2}} \frac{N_{2,i}}{\tau_{2,i;3,k}} + \sum_{j=j_{\min(3,k)}}^{l_{\max 1}} \frac{N_{1,j}}{\tau_{1,j;3,k}} \right] \\
 & \quad - N_{3,k} \left[ \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{3,k;3,p}} + \sum_{i=0}^{i_{\min(3,k)}-1} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{3,k;2,i}} + \sum_{j=0}^{j_{\min(3,k)}-1} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{3,k;1,j}} \right] = 0, \\
 & \bar{f}(E_{3,l_{\max 2}}) \left[ \sum_{p=p_{\min(l_{\max 2})}}^{l_{\max 3}} \frac{N_{3,p}}{\tau_{3,p;3,l_{\max 2}}} + \sum_{j=j_{\min(2,l_{\max 2})}}^{l_{\max 1}} \frac{N_{1,j}}{\tau_{1,j;2,l_{\max 2}}} \right] \\
 & \quad - N_{2,l_{\max 2}} \left[ \sum_{p=0}^{p_{\min(l_{\max 2})}-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{2,l_{\max 2};3,p}} + \sum_{i=0}^{l_{\max 2}-1} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{2,l_{\max 2};2,i}} + \sum_{j=0}^{j_{\min(l_{\max 2})}-1} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{2,l_{\max 2};1,j}} \right] = 0 \\
 & \vdots \\
 & \bar{f}(E_{2,0}) \left[ \sum_{p=0}^{l_{\max 3}} \frac{N_{3,p}}{\tau_{3,p;2,0}} + \sum_{i=0}^{l_{\max 2}} \frac{N_{2,i}}{\tau_{2,i;2,0}} + \sum_{j=j_{\min(2,l_{\max 2})}}^{l_{\max 1}} \frac{N_{1,j}}{\tau_{1,j;2,0}} \right] - N_{2,0} \sum_{j=0}^{j_{\min(2,0)}} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{2,0;1,j}} = 0, \\
 & -\frac{J_{1,k}}{e} + \bar{f}(E_{1,k}) \left[ \sum_{p=p_{\min(1,k)}}^{l_{\max 3}} \frac{N_{3,p}}{\tau_{3,p;1,k}} + \sum_{i=i_{\min(3,k)}}^{l_{\max 2}} \frac{N_{2,i}}{\tau_{2,i;1,k}} + \sum_{j=k+1}^{l_{\max 1}} \frac{N_{1,j}}{\tau_{1,j;1,k}} \right] \\
 & \quad - N_{1,k} \left[ \sum_{p=0}^{p_{\min(1,k)}-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{1,k;3,p}} + \sum_{i=0}^{i_{\min(1,k)}-1} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{1,k;2,i}} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\bar{f}(E_{1,j})}{\tau_{1,k;1,j}} \right] = 0 \\
 & \vdots \\
 & -\frac{J_{1,1}}{e} + \bar{f}(E_{1,1}) \left[ \sum_{p=p_{\min(1,1)}}^{l_{\max 3}} \frac{N_{3,p}}{\tau_{3,p;1,1}} + \sum_{i=i_{\min(3,1)}}^{l_{\max 2}} \frac{N_{2,i}}{\tau_{2,i;1,1}} + \sum_{j=k+1}^{l_{\max 1}} \frac{N_{1,j}}{\tau_{1,j;1,1}} \right] \\
 & \quad - N_{1,1} \left[ \sum_{p=0}^{p_{\min(1,1)}-1} \frac{\bar{f}(E_{3,p})}{\tau_{1,1;3,p}} + \sum_{i=0}^{i_{\min(1,1)}-1} \frac{\bar{f}(E_{2,i})}{\tau_{1,1;2,i}} + \frac{\bar{f}(E_{1,0})}{\tau_{1,1;1,0}} \right] = 0
 \end{aligned}$$

(4.19)

Brzine radijativnih prelaza su nekoliko redova veličine manje od brzina neradijativnih prelaza, pa su iz tog razloga zanemarene u datom sistemu jednačina (4.19). Broj koncentracija  $N_{i,j}$  koje treba odrediti je  $l_{max1}+l_{max1}+l_{max1}+3$ , koliko ima i jednačina u opisanom sistemu. Međutim, jednačina koja se odnosi na nivo (1,0) nije nezavisna, već se može dobiti kao kombinacija ostalih jednačina. Sistem postaje saglasan ako se uvede jednačina globalne neutralnosti, odnosno zakon o održanju broja čestica:

$$\sum_{i,l} N_{i,l} = N_s \quad (i=1,2,3; l=0,\dots, l_{maxi}), \quad (4.20)$$

gde je  $N_s$  ukupna površinska koncentracija elektrona određena dopiranjem. Ona je jednaka ukupnoj površinskoj koncentraciji jonizovanih donora, koja se relativno jednostavno određuje ako su poznati koncentracija donora i širine dopiranih slojeva.

Sistem ovih brzinskih jednačina je nelinearan jer je<sup>2</sup>:

$$(\bar{f}_{FD})_{p,q} = 1 - \frac{\pi\hbar}{eB} N_{p,q}, \quad (4.21)$$

i jednačine, pored članova koji su proporcionalni sa  $N_{i,j}$ , sadrže i članove proporcionalne sa  $N_{i,j}N_{p,q}$ . Za razliku od slučaja kada nema magnetnog polja u sistemu i kada se sistem jednačina rešava složenim, samosaglasnim postupkom [71], u slučaju prisustva magnetnog polja samosaglasni postupak nije potreban i dovoljno je rešiti samo sistem nelinearnih jednačina.

#### 4.4.1. Rasejanje u kvantnim kaskadnim laserima u prisustvu magnetnog polja

Poznato je da je u strukturama nanometarskih dimenzija prisutan veliki broj različitih tipova rasejanja. Sva ta rasejanja utiču na osobine i ponašanje strukture.

---

<sup>2</sup> Ovo je pokazano u Dodatku 2

*a) Rasejanje na longitudinalnim optičkim fononima*

Najznačajniji mehanizmi rasejanja koji se javljaju u QCL-u i strukturama baziranim na njima u prisustvu magnetnog polja, svakako jesu rasejanja na LO fononima i neophodno ih je uključiti u proračune prilikom posmatranja transportnih procesa elektrona.

Kao što je već ranije rečeno, za održavanje inverzne populacije neophodno je sprečiti akumulaciju elektrona na donjem laserskom nivou brzom depopulacijom tog energijskog nivoa. To se postiže putem relaksacije na energijski nivo 1, iskorišćavanjem rezonantnog mehanizma rasejanja na LO fononima. S obzirom da su kod kvantnih kaskadnih struktura širine slojeva male, rastojanje između pojedinih diskretnih stanja se približava energiji LO fonona, pa se, u cilju održavanja inverzne populacije, donje lasersko i osnovno stanje projektuju tako da razlika energija među njima bude približno jednaka energiji LO fonona. Na taj način dominantan mehanizam relaksacije predstavljaju unutarzonski prelazi izazvani emisijom fonona [81] čime se postiže željena, veoma brza relaksacija.

Usvojen je i razmatran samo balkovski model. Zbog svog antifaznog karaktera, LO fononi dovode do stvaranja električnog polja koje se prostire kroz strukturu, a samim tim i do stvaranja potencijala. Fononski potencijal u balkovskom modelu ima oblik:

$$\Phi(\vec{r}) = C e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}, \quad \vec{q} = \{q_x, q_y, q_z\}, \quad (4.22)$$

gde je  $C$  konstanta normalizacije,  $\vec{q}$  talasni vektor fonona.

Pošto je usvojen balkovski model, zavisnost dielektrične konstante materijala od frekvencije data je relacijom:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} \frac{\omega^2 - \omega_{LO}^2}{\omega^2 - \omega_{TO}^2}, \quad (4.23)$$

pri čemu je sa  $\omega_{TO/LO}$  označena učestanost transverzalnih/longitudinalnih optičkih fonona, dok je sa  $\varepsilon_{\infty}$  označena dielektrična propustljivost pri velikim frekvencijama, odnosno za  $\omega \rightarrow \infty$ . Polazeći od relacije (4.23), može se pokazati da je:

$$C^2 = \frac{\hbar \omega_{LO}}{2V \varepsilon_p q^2}, \quad (4.24)$$

pri čemu je:

$$V = L_x \cdot L_y \cdot L_z, \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_p} = \frac{1}{\varepsilon_{\infty}} - \frac{1}{\varepsilon(0)}, \quad (4.26)$$

a  $q$  je apsolutna vrednost talasnog vektora fonona.

Konačni izraz za fononski potencijal je:

$$\Phi(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_{LO}}{2V \varepsilon_p q^2}} e^{i\vec{q}\vec{r}}. \quad (4.37)$$

Treba napomenuti da izraz (4.24) za konstantu normiranja  $C$  važi ako se posmatraju učestanosti u bliskoj okolini učestanosti LO fonona,  $\omega_{LO}$ , i ako je zavisnost permitivnosti od učestanosti,  $\varepsilon(\omega)$ , data sa (4.23).

Energija interakcije LO fonona i elektrona se opisuje proizvodom naelektrisanja elektrona i potencijala koji potiče od fonona, pa je Hamiltonijan interakcije između elektrona i LO-fonona oblika:

$$\hat{H}_{e-ph} = -e\Phi(\vec{r})[\hat{b}^+ + \hat{b}], \quad (4.38)$$

gde su  $\hat{b}^+$  i  $\hat{b}$  operatori kreacije i anihilacije. Odavde je brzina rasejanja  $\tilde{w}_{if}$  elektrona iz stanja  $i$  u stanje  $f$  uz emisiju i apsorpciju fonona tačno određenog talasnog vektora  $\vec{q}$  data Fermijevim zlatnim pravilom:

$$\begin{aligned} w_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} & \left| \left\langle f, N_0 + 1 \left| \hat{H}_{e-ph} \right| i, N_0 \right\rangle \right|^2 \cdot \delta(E_i - E_f - \hbar\omega_{LO}) + \\ & \frac{2\pi}{\hbar} \left| \left\langle f, N_0 - 1 \left| \hat{H}_{e-ph} \right| i, N_0 \right\rangle \right|^2 \cdot \delta(E_f - E_i - \hbar\omega_{LO}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Prvi sabirak u izrazu (4.39) odgovara procesu emisije fonona, dok drugi odgovara procesu apsorpcije fonona. Veličina:

$$N_0 = N_0(\hbar\omega_{LO}) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1}, \quad (4.40)$$

predstavlja broj fonona na određenoj energiji i temperaturi, pre rasejanja elektrona, pretpostavljajući, što je opravdano kod LO-fonona, da svi fononi imaju istu energiju  $\hbar\omega_{LO}$ .

Vodeći računa o osobinama operatora kreacije  $\hat{b}^+$  i anihilacije  $\hat{b}$ , prethodni izraz se može zapisati u formi:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} & \left| \int \Psi_f^*(-e\Phi)\Psi_i dV \right|^2 \cdot \delta(E_i - E_f - \hbar\omega_{LO}) [N_0(\hbar\omega_{LO}) + 1] + \\ & \frac{2\pi}{\hbar} \left| \int \Psi_f^*(-e\Phi)\Psi_i dV \right|^2 \cdot \delta(E_f - E_i - \hbar\omega_{LO}) N_0(\hbar\omega_{LO}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Brzina rasejanja pri apsorpciji i brzina rasejanja pri emisiji fonona razlikuju se samo u jednom činiocu, pa za datu temperaturu i fononski mod i definisano početno i krajnje stanje, odnos brzine rasejanja pri emisiji/apsorpciji fonona je konstantan i prema poslednjem izrazu sledi:

$$\frac{\tilde{w}_{i,f}^e}{\tilde{w}_{i,f}^a} = \frac{N_0(\hbar\omega_{LO}) + 1}{N_0(\hbar\omega_{LO})} = e^{\frac{\hbar\omega_{LO}}{kT}}. \quad (4.42)$$

Kao što je pomenuto ranije u tekstu, ovaj odnos je za, na primer, (slučaj GaAs)  $\hbar\omega_{LO} = 36 \text{ meV}$ , naročito za niže temperature znatno veći od jedan, pa se proces apsorpcije fonona može zanemariti. U nastavku će, zbog toga, biti analizirana samo emisija fonona:

$$\tilde{w}_{if} = \tilde{w}_{if}^e = \frac{2\pi}{\hbar} [N_0(\hbar\omega_{LO}) + 1] \left| \int \Psi_f^*(-e\Phi)\Psi_i dV \right|^2 \cdot \delta(E_i - E_f - \hbar\omega_{LO}) . \quad (4.43)$$

U poslednjoj jednačini,  $\Psi_i = \Psi_i(\vec{r})$  i  $\Psi_f = \Psi_f(\vec{r})$  predstavljaju talasne funkcije inicijalnog i finalnog stanja, dok su  $E_i$  i  $E_f$  odgovarajuće energije. U posmatranom slučaju kada je QCL u magnetnom polju, dolazi do cepanja energijskih stanja na diskretne Landau-ove nivoe, pa su ove talasne funkcije i energije opisane sledećim izrazima:

$$\Psi_{i,f}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_{y_i,f}y} u_{i,l_f}(x, k_{y_i,f}) \eta_{i,f}(z) , \quad (4.44)$$

$$E_{i,f} \approx E_{n_i,n_f} + (l_{i,f} + \frac{1}{2})\hbar\omega_c , \quad (4.45)$$

s tim da je  $u_l(x, k_y)$  Hermite-ova funkcija promenljive  $y$  i parametra  $k_y$ , dok  $\omega_c$  predstavlja ciklotronsku frekvenciju datu sa:

$$\omega_c = \frac{\hbar e B}{m_{||,n}} , \quad (4.46)$$

koja se mora računati sa efektom neparaboličnosti,  $l$  je indeks Landau-ovog nivoa, a  $n$  je red podzone. Ako se izrazi (4.44), kao i (4.37) uvrste u (4.43), dolazi se do izraza za  $\tilde{w}_{i,f}$  oblika:

$$\tilde{w}_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} [N_0(\hbar\omega_{LO}) + 1] \frac{e^2 \hbar \omega_{LO}}{2L^3 \varepsilon q^2} \left| \frac{1}{L} \int e^{i(k_{y_i} - k_{y_f} + q_y)y} dy \right|^2 \cdot \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_f(z) e^{iq_z z} \eta_i(z) dz \right|^2. \quad (4.47)$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_{l_f}(x, k_{y_f}) e^{iq_x x} u_{l_i}(x, k_{y_i}) dx \right|^2$$

Zbog ortonormiranosti funkcije  $\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_y y}$  tj.:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(k_y - k'_y)y} dy = \delta_{k_y, k'_y}, \quad (4.48)$$

prvi integral u (4.47) jednak je  $\delta_{k_{y_i} + q_y, k_{y_f}}$  tj. jednak je nuli ako je  $k_{y_f} \neq k_{y_i} + q_y$ , odnosno jednak je jedan za slučaj kada je  $k_{y_f} = k_{y_i} + q_y$ . Imajući ovu vezu u vidu može se odrediti drugi integral, pa se relevantna veličina  $|F(q_{\parallel}, l_i, l_f)|^2$ , posle složenog izvođenja svodi na:

$$|F(q_{\parallel}, l_i, l_f)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_{l_f}(x, k_{y_f}) e^{iq_x x} u_{l_i}(x, k_{y_i}) dx \right|^2 = e^{-\frac{q_{\parallel}^2}{2\beta^2}} \left( \frac{l_i!}{l_f!} \right)^{l_i - l_f} \left[ L_{l_i}^{l_f - l_i} \left( \frac{q_{\parallel}^2}{2\beta^2} \right) \right] \quad (4.49)$$

Izraz (4.49) je u važnosti ako je  $l_f > l_i$ , pri čemu su  $l_i$  i  $l_f$  indeksi početnog i krajnjeg Landauovog nivoa. Ako je, pak,  $l_f < l_i$ , treba zameniti mesta indeksima  $l_i$  i  $l_f$ . Pored toga, novouvedene veličine su  $q_{\parallel}^2 = q_x^2 + q_y^2$  i

$$\beta^2 = \frac{eB}{\hbar}.$$

Generalisani Laguerrov polinom koji figuriše u (4.49), definisan je relacijom:

$$L_n^a(x) = \frac{1}{n!} X^{-n} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (4.50)$$



Veličina  $\tilde{w}_{i,f}$  predstavlja brzinu verovatnoće emisije fonona tačno određenog talasnog vektora  $\{q_x, q_y, q_z\}$  pri prelazu  $i \rightarrow f$ . Fizički je, naravno, relevantna veličina koja predstavlja brzinu verovatnoće emisije fonona svih mogućih vrednosti talasnog vektora  $\vec{q}$ . Ta veličina će biti obeležena sa  $w_{i,f}$  i ona je jednaka sumi po svim  $q_x, q_y, q_z$  veličine  $\tilde{w}_{i,f}(q_x, q_y, q_z)$ , odnosno:

$$w_{i,f} = \sum_{q_x} \sum_{q_y} \sum_{q_z} \tilde{w}_{i,f}(q_x, q_y, q_z) . \quad (4.51)$$

Prelazeći sa sumiranja na integraljenje ( $\sum \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int () dq_x, \dots$ ), poslednji izraz (4.51) prelazi u:

$$w_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} [N_0 + 1] \frac{e^2 \hbar \omega_{LO}}{2\varepsilon_p} \cdot \frac{1}{L^3} \cdot \frac{L^3}{(2\pi)^3} \cdot \delta(E_i - E_f - \hbar\omega_{LO}) . \quad (4.52)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(q_{\parallel}, l_i, l_f)|^2 |P(q_z)|^2}{q_z^2 + q_{\parallel}^2} dq_x dq_y dq_z$$

pri čemu je novouvedena veličina:

$$P(q_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_f e^{iq_z z} \eta_i dz . \quad (4.53)$$

Pošto je podintegralna funkcija parna po  $q_x$ ,  $q_y$  i  $q_z$ , izrazu (4.52) se može dati jednostavnija forma:

$$w_{if} = \frac{[N_0 + 1]}{\pi^2} \frac{e^2 \hbar \omega_{LO}}{\varepsilon_p} \cdot \delta(E_i - E_f - \hbar\omega_{LO}) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{|F(q_{\parallel}, l_i, l_f)|^2 |P(q_z)|^2}{q_z^2 + q_{\parallel}^2} dq_x dq_y dq_z \quad (4.54)$$

Prelaz sa koordinata  $(q_x, q_y)$  na koordinate  $(q_{\parallel}, \varphi)$  vodi do konačnog izraza za brzinu emisije LO fonona,  $w_{if}$ , pri prelazu između inicijalnog i finalnog stanja:

$$w_{if} = \frac{e^2 \hbar \omega_{LO}}{2\pi \epsilon_p} [N_0(\hbar \omega_{LO}) + 1] \cdot \delta(E_i - E_f - \hbar \omega_{LO}) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} q_{\parallel} \frac{|F(q_{\parallel}, l_i, l_f)|^2 |P(q_z)|^2}{q_z^2 + q_{\parallel}^2} dq_{\parallel} dq_z \quad (4.55)$$

Delta funkcija u izrazu (4.55) se zamenjuje Lorencijanom ili Gausijanom. Ako su u pitanju prelazi u okviru istog indeksa podzone ( $i_f=i_i$ ), ali različitog Landauovog kvantnog broja ( $l_i \neq l_f$ ), tada je odgovarajući profil Gausijan. Ako su prelazi u okviru istog Landauovog kvantnog broja ( $l_i=l_f$ ), a različitog indeksa podzone ( $i_i \neq i_f$ ), tada je profil Lorencijan. U opštem slučaju:  $l_i \neq l_f$  i  $i_i \neq i_f$  profil se dobija superpozicijom Lorencijana i Gausijana. Ovo će biti izloženo detaljnije:

Poznato je da su Lorencijan i Gausijan dati izrazima:

$$L(x) = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{x^2 + \Gamma^2} \quad (4.56a)$$

i

$$G(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.56b)$$

pri čemu je  $\Gamma$  poluširina linije na polovini maksimuma (engl. *full width at half maximum*, FWHM), dok je  $\sigma$  disperzija. Konstruišimo takav Gausijan koji ima maksimum jednak maksimumu datog Lorencijana:

$$\frac{1}{\pi \Gamma} = \frac{1}{\sigma_L \sqrt{2\pi}} \Rightarrow \sigma_L = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma \approx 1,2533 \Gamma$$

Na ovaj način smo Lorencijan (sa parametrom  $\Gamma$ ) zamenili Gausijanom čija je disperzija  $\sigma_L = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma$ . Da ova aproksimacija nije bez osnova, govori podatak da puna širina linije na polovini maksimuma kod ovako dobijenog Gausijana iznosi  $2,087 \Gamma$ , dok je kod polaznog Lorencijana  $2 \Gamma$ .

Ako su u pitanju dva Gausijana sa disperzijama  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , tada rezultujući Gausijan ima disperziju  $\sigma_{REZ} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

Konačno, delta funkcija se zamenjuje Gausijanom čija je disperzija jednaka:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \sigma \quad i_i = i_f, l_i \neq l_f \\
 \text{b) } & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma \quad i_i \neq i_f, l_i = l_f, \\
 \text{c) } & \sqrt{\sigma^2 + \frac{\pi}{2} \Gamma^2} \quad i_i \neq i_f, l_i \neq l_f
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

pri čemu je  $\sigma$  proporcionalno sa  $\sqrt{B}$ .

### ***b) Rasejanje na akustičnim fononima***

Akustični (AC) fononi imaju dosta manji uticaj na elektronske transportne procese u odnosu na LO fonone. Međutim, neophodno ih je uključiti u model, jer u slučajevima kada nisu ispunjeni uslovi za emisiju LO fonona njihov doprinos postaje bitan.

Izraz za rasejanje na AC fononima je:

$$w_{if}^E = \frac{D_A^2 (E_i - E_f)^2}{\pi \rho v_s^4 \hbar^3} \frac{e^{\frac{E_i - E_f}{kT}}}{e^{\frac{E_i - E_f}{kT}} - 1} \int_0^{q_{z, \max}} |P(q_z)|^2 |F(q_{||0})|^2 dq_z, \tag{4.58}$$

gde je  $D_A$  potencijal deformacije,  $\rho$  gustina materijala, dok  $v_s$  predstavlja brzinu prostiranja AC fonona.

### ***c) Rasejanje na neravninama pri uticaju magnetnog polja***

Rasejanje na neravninama, u literaturi poznato kao IFR rasejanje (*Interface roughness*), je vrsta elastičnog rasejanja i javlja se na graničnim

površinama dva poluprovodnika. U razmatranom slučaju rasejanje se dešava na graničnim površinama GaAs i AlGaAs.

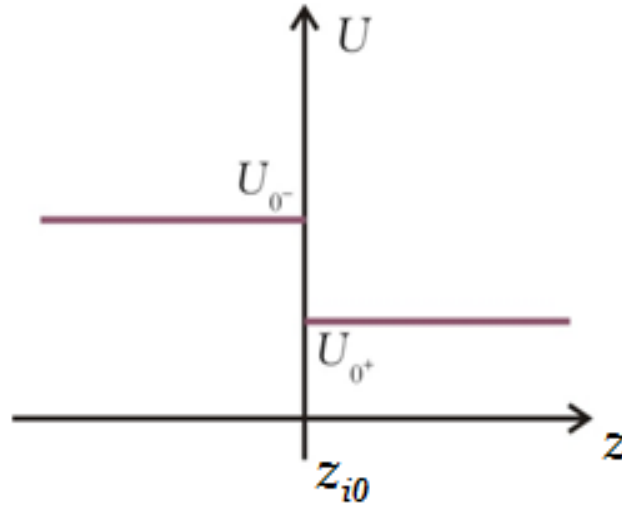
S obzirom na to da su QCL-ovi sačinjeni od niza veoma tankih slojeva i da, samim tim, imaju niz razdvojenih površi na kojima postoje neravnine i na kojima može doći do rasejanja, bitno je uključiti ih u proračune. Kod ovakve vrste rasejanja, smanjenjem razlika energija nivoa povećava se efekat relaksacije zbog čega je naročito bitan kod terahercnih QCL-ova. Kako se jačina magnetnog polja smanjuje, tako su prostorne udaljenosti energijskih nivoa manje i uticaj brzine relaksacije usled rasejanja na neravninama se povećava u odnosu na brzinu relaksacije na LO-fononima.

Ako se pretpostavi da je visina neravnine  $\Delta(\mathbf{r})$ , a  $\mathbf{r} = (x, y)$  pozicija te neravnine u ravni, može se uvesti sledeća korelaciona funkcija koja će ih povezati [12,92,93,94]:

$$\langle \Delta(\mathbf{r})\Delta(\mathbf{r}') \rangle = \Delta^2 \exp\left(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{\Lambda^2}\right), \quad (4.59)$$

gde je  $\Delta$  srednja vrednost visine neravnine, a  $\Lambda$  je korelaciona dužina. Traži se brzina rasejanja između nivoa  $(n_i, l_i)$  i  $(n_f, l_f)$  koji odgovaraju inicijalnom i finalnom stanju, respektivno.

Razlika potencijala između dva različita sloja u heterostrukturi, na njihovoj razdvojnoj površi je šematski prikazana na [Slici 24](#).



Slika 24 Razlika potencijala na razdvojnoj površi između dva različita sloja u heterostrukturi.

Ako potencijal ta dva sloja izgleda kao na [Slici 24](#), onda se on može predstaviti izrazom:

$$U(z) = U_{0^-} + (U_{0^+} - U_{0^-}) \cdot h(z - z_i), \quad (4.60)$$

u kome je sa  $h$  označena Heavyside-ova funkcija.

Diskontinuitet dna provodne zone između slojeva se označava sa  $U_0$  ( $U_0 = U_{0^+} - U_{0^-}$ ), a pošto je Heavyside-ova funkcija integral  $\delta$ -funkcije, onda važi:

$$\left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=z_i} = U_0 \cdot \delta(z - z_i), \quad (4.61)$$

Brzina rasejanja se može opisati Fermijevim „zlatnim“ pravilom:

$$\left\langle \frac{1}{\tau_{n_1, l_1; n_2, l_2}} \right\rangle = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{k_{x_1}, k_{x_2}} \left| \left\langle n_1, l_1, k_{x_1} \left| \hat{H} \right| n_2, l_2, k_{x_2} \right\rangle \right|^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(z_i) \delta[E_{n_1, l_1} - E_{n_2, l_2}] dz_i, \quad (4.62)$$

pri čemu su  $E_{n_1,l_1} = E_{n_1,l_1}(z_i)$  i  $E_{n_2,l_2} = E_{n_2,l_2}(z_i)$ . Ako  $E_{n_1,l_1}$  i  $E_{n_2,l_2}$  ne bi zavisili od  $z_i$ , tada bi umesto integrala, u izrazu (4.62), bila  $\delta(E_{n_1,l_1} - E_{n_2,l_2})$ , pri čemu je  $z_i = z_{i0}$ . Međutim, ako se pretpostavi da postoji zavisnost od  $z_i$ , onda u (4.62)  $\Pi(z_i)$  predstavlja Gauss-ovu gustinu verovatnoće i oblika je:

$$\Pi(z_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z_i - z_{i0})^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.63)$$

Treba napomenuti da se i matrični element menja sa  $z_i$ , ali se ta promena može zanemariti, te u daljem izvođenju nije uzeta u obzir.

$$E_{n_1,l_1}(z_i) - E_{n_2,l_2}(z_i) = E_{n_1,0}(z_i) - E_{n_1,0}(z_i) + (l_1 - l_2)\hbar\omega_c, \quad (4.64)$$

Ako se pretpostavi da je:

$$E_{n_1,0}(z_i) - E_{n_1,0}(z_i) \approx [E_{n_1,0}(z_{i0}) - E_{n_1,0}(z_{i0})] - \gamma(z_i - z_{i0}), \quad (4.65)$$

gde je  $\gamma$  koeficijent koji zavisi od  $n_1$  i  $n_2$  i ako se integral iz jednačine (4.62) označi sa  $J$  i uvede se zamena:

$$E_{n_1,0}(z_{i0}) - E_{n_1,0}(z_{i0}) = \Delta_{n_1,n_2}, \quad (4.66)$$

tada se integral  $J$  može napisati na sledeći način:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(z_i) \cdot \delta[\Delta_{n_1,n_2} - \gamma(z_i - z_{i0}) + (l_1 - l_2)\hbar\omega_c] dz_i, \quad (4.67)$$

Ako se posmatra  $\delta$ -funkcija, može se uočiti da argument funkcije ima nultu vrednost ako je ispunjeno:

$$\Delta_{n_1,n_2} - \gamma(z_i - z_{i0}) + (l_1 - l_2)\hbar\omega_c = 0, \quad (4.68)$$

To znači da:

$$(z_i - z_{i0})_0 = \frac{1}{\gamma} [\Delta_{n_1, n_2} - (l_1 - l_2) \hbar \omega_c] , \quad (4.69)$$

Kako je:

$$\int f(x) \delta[ax + b] dx = \frac{f(x_0)}{|a|} , \quad (4.70)$$

pri čemu je:

$$ax_0 + b = 0 , \quad (4.71)$$

posmatrani integral (4.67) se može napisati na sledeći način:

$$J = \frac{1}{\gamma \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\Delta_{n_1, n_2} + (l_1 - l_2) \hbar \omega_c]^2}{2(\gamma \sigma)^2}} , \quad (4.72)$$

Ako se uvede smena  $\delta_G = \gamma \sigma$ , prethodni izraz dobija sledeći oblik:

$$J = \frac{1}{\delta_G \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[E_{n_1, 0} - E_{n_2, 0} + (l_1 - l_2) \hbar \omega_c]^2}{2\delta_G^2}} , \quad (4.73)$$

Zamenom integrala izrazom za J (4.73) u jednačini koja opisuje brzinu rasejanja (4.62), dobija se jednačina:

$$\left\langle \frac{1}{\tau_{n_1, l_1; n_2, l_2}} \right\rangle = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\delta_G \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[E_{n_1, 0} - E_{n_2, 0} + (l_1 - l_2) \hbar \omega_c]^2}{2\delta_G^2}} \sum_{k_{x1}, k_{x2}} \left| \langle n_1, l_1, k_{x1} | \hat{H} | n_2, l_2, k_{x2} \rangle \right|^2 , \quad (4.74)$$

Neravnine na spoju dva različita poluprovodnička sloja se mogu posmatrati kao perturbacije u potencijalu i umesto koordinate  $z_{i0}$  u slučaju odsustva neravnina, a potencijal zavisi i od koordinata  $x$  i  $y$  tj.

$$U(z_{i0} + \Delta(x, y)) = U(z_i) + \left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=z_{i0}} \cdot \Delta(x, y) , \quad (4.75)$$

gde je  $\Delta$  srednja visina neravnine, pa se Hamiltonijan perturbacije može predstaviti kao:

$$\hat{H}' = \left. \frac{dU}{dz} \right|_{z=z_{i0}} \cdot \Delta(x, y) = U_0 \cdot \Delta(x, y) \delta(z - z_{i0}) , \quad (4.76)$$

Znajući da je talasna funkcija elektrona oblika:

$$\Psi_{n,l,k_x}(x, y, z) = \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{L}} \Phi_l(y, k_x) \eta_n(z) , \quad (4.77)$$

pri čemu je  $\Phi_l(y, k_x)$  Hermite-ova funkcija promenljive  $y$  i parametra  $k_x$ ,  $\eta_n(z)$   $z$ -komponenta talasne funkcije, dok je  $L$  širina strukture duž  $x$ -ose ( $L \rightarrow \infty$ ). Ubacivanjem ovog (4.76) oblika Hamiltonijana perturbacije u izraz za matrični element rasejanja

$$M_{12} = \langle n_1, l_1, k_{x1} | \hat{H}' | n_2, l_2, k_{x2} \rangle , \quad (4.78)$$

dobija se

$$M_{12} = \langle n_1, l_1, k_{x1} | U_0 \cdot \Delta(x, y) \delta(z - z_i) | n_2, l_2, k_{x2} \rangle , \quad (4.79)$$

$$M_{12} = \frac{1}{L} \iiint e^{i(k_{x1} - k_{x2})x} \Phi_{l1}(y, k_{x1}) \Phi_{l2}(y, k_{x2}) \eta_{n1}^*(z) \eta_{n2}(z) U_0 \cdot \Delta(x, y) \delta(z - z_i) dx dy dz \quad (4.80)$$

Ovaj izraz se može napisati i na sledeći način:

$$M_{12} = \frac{1}{L} F_{12} \iint e^{i(k_{x1} - k_{x2})x} \Phi_{l1}(y, k_{x1}) \Phi_{l2}(y, k_{x2}) \cdot \Delta(x, y) dx dy , \quad (4.81)$$

gde je definisano:

$$F_{12} = U_0 \eta_{n1}^*(z_i) \eta_{n2}(z_i) , \quad (4.82)$$

i u opštem slučaju je kompleksna veličina.



Sada se kvadrat modula matričnog elementa prelaza koji figuriše u izrazu za brzinu rasejanja, može računati kao:

$$\begin{aligned}
 |M_{12}|^2 = \frac{|F_{12}|^2}{L^2} \iiint \int e^{i(k_{x1}-k_{x2})(x_1-x_2)} \Phi_{11}(y_1, k_{x1}) \Phi_{12}(y_1, k_{x2}) \cdot \\
 \Phi_{11}(y_2, k_{x1}) \Phi_{12}(y_2, k_{x2}) \cdot \\
 \Delta(x_1, y_1) \Delta(x_2, y_2) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2
 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Usrednjavanjem se, dalje, dobija:

$$\begin{aligned}
 \langle |M_{12}|^2 \rangle = \frac{|F_{12}|^2}{L^2} \iiint \int e^{i(k_{x1}-k_{x2})(x_1-x_2)} \Phi_{11}(y_1, k_{x1}) \Phi_{12}(y_1, k_{x2}) \cdot \\
 \Phi_{11}(y_2, k_{x1}) \Phi_{12}(y_2, k_{x2}) \cdot \\
 \langle \Delta(x_1, y_1) \Delta(x_2, y_2) \rangle dx_1 dy_1 dx_2 dy_2
 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Vodeći računa da prostorna raspodela neravnina na međupovršni prati Gausovu korelacionu funkciju:

$$\langle \Delta(x_1, y_1) \Delta(x_2, y_2) \rangle = \Delta^2 e^{-\frac{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}{\Lambda^2}}, \quad (4.85)$$

i uvrštavanjem ove funkcije u (4.84), izraz za  $\langle |M_{12}|^2 \rangle$  dobija oblik:

$$\begin{aligned}
 \langle |M_{12}|^2 \rangle = \frac{|F_{12}|^2}{L^2} \Delta^2 \iiint \int e^{-\frac{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}{\Lambda^2}} e^{i(k_{x1}-k_{x2})(x_1-x_2)} \cdot \\
 \Phi_{11}(y_1, k_{x1}) \Phi_{12}(y_1, k_{x2}) \cdot \\
 \Phi_{11}(y_2, k_{x1}) \Phi_{12}(y_2, k_{x2}) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2
 \end{aligned} \quad (4.86)$$

Radi lakšeg izvođenja, zgodno je preći sa koordinata  $x_1, x_2, y_1, y_2$  na koordinate  $x_1, \xi_x = x_2 - x_1, \xi_y = y_2 - y_1, y_2$ :

$$\begin{aligned}
 \langle |M_{12}|^2 \rangle = \frac{|F_{12}|^2}{L^2} \Delta^2 \int dx_1 \int e^{i(k_{x1}-k_{x2})\xi_x - \frac{\xi_x^2}{\Lambda^2}} d\xi_x \cdot \\
 \cdot \iint \Phi_{11}(y_1, k_{x1}) \Phi_{12}(y_1, k_{x2}) e^{-\left(\frac{\xi_y^2}{\Lambda^2}\right)} \Phi_{11}(y_1 - \xi_y, k_{x1}) \Phi_{12}(y_1 - \xi_y, k_{x2}) d\xi_y dy_1
 \end{aligned} \quad (4.87)$$

Kako je  $\int dx_1 = L$ , i kako je

$$\int e^{i(k_{x1}-k_{x2})\xi_x - \frac{\xi_x^2}{\Lambda^2}} d\xi_x = \sqrt{\pi}\Lambda e^{-\frac{(k_{x1}-k_{x2})^2\Lambda^2}{4}}, \quad (4.88)$$

ako se sa  $I$  označi dvostruki integral iz jednačine (4.87):

$$I = \iint e^{\left(\frac{\xi_y^2}{\Lambda^2}\right)} \Phi_{l_1}(y_1, k_{x_1}) \Phi_{l_2}(y_1, k_{x_2}) \Phi_{l_1}(y_1 - \xi_y, k_{x_1}) \Phi_{l_2}(y_1 - \xi_y, k_{x_2}) dy_1 d\xi_y,$$

onda se sam izraz za usrednjenu vrednost kvadrata modula matričnog elementa prelaza može napisati u mnogo jednostavnijoj formi:

$$\langle |M_{12}|^2 \rangle = \frac{|F_{12}|^2 \Delta^2 \Lambda \sqrt{\pi}}{L} \cdot e^{-\frac{(k_{x1}-k_{x2})^2\Lambda^2}{4}} \cdot I. \quad (4.89)$$

Pošto je:

$$\Phi(y, k_x) = \sqrt{\frac{\beta}{2^j j! \sqrt{\pi}}} \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}(y-y_0)^2} H_j[\beta(y-y_0)] \quad (4.90)$$

gde su  $\beta = \sqrt{\frac{eB}{\hbar}}$ ,  $y_0 = \frac{k_x}{\beta^2}$ , a  $H_j$  je Hermiteov polinom  $j$ -og reda, i ako je:

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{\beta}{2^j j! \sqrt{\pi}}}, \quad (4.91)$$

usvajajući da je  $\xi = \xi_y$ , integral  $I$  je dalje:

$$I = (\alpha_{l_1} \alpha_{l_2})^2 \iint e^{-\frac{\beta^2}{2}(y-y_{01})^2} H_{l_1}[\beta(y_1 - y_{01})] e^{-\frac{\beta^2}{2}(y-y_{02})^2} H_{l_2}[\beta(y_1 - y_{02})] e^{-\frac{\xi^2}{\Lambda^2}} e^{-\frac{\beta^2}{2}(y-\xi-y_{01})^2} H_{l_1}[\beta(y_1 - \xi - y_{01})] \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}(y-\xi-y_{02})^2} H_{l_2}[\beta(y_1 - \xi - y_{02})] dy_1 d\xi \quad (4.92)$$

Kako važi da je:

$$(y_1 - y_{01})^2 + (y_1 - y_{02})^2 = 2 \left[ \left( y_1 - \frac{y_{01} + y_{02}}{2} \right)^2 + \frac{(y_{01} - y_{02})^2}{4} \right], \quad (4.93)$$

odatle sledi da važi i:

$$(y_1 - y_{01} - \xi)^2 + (y_1 - y_{02} + \xi)^2 = 2 \left[ \left( y_1 - \xi - \frac{y_{01} + y_{02}}{2} \right)^2 + \frac{(y_{01} - y_{02})^2}{4} \right]. \quad (4.94)$$

Dobijena relacija se može iskoristiti u izrazu za I, pa će on izgledati:

$$I = (\alpha_{l_1} \alpha_{l_2})^2 e^{-\frac{\beta^2}{2}(y_{01} - y_{02})^2} \iint e^{-\beta^2 \left( y_1 - \frac{y_{01} + y_{02}}{2} \right)^2} \cdot e^{-\beta^2 \left( y_1 - \xi - \frac{y_{01} + y_{02}}{2} \right)^2} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{\Lambda^2}} \cdot H_{l_1} [\beta(y_1 - y_{01})] H_{l_2} [\beta(y_1 - y_{02})] \cdot H_{l_1} [\beta(y_1 - y_{01} - \xi)] H_{l_2} [\beta(y_1 - \xi - y_{02})] d\xi dy_1 \quad (4.95)$$

Uvođenjem smene:

$$t = y_1 - \frac{y_{01} + y_{02}}{2}, \quad (4.96)$$

a time i:

$$y_1 - y_{01} = \frac{y_{02} - y_{01}}{2} + t, \quad (4.97)$$

$$y_1 - y_{02} = \frac{y_{01} - y_{02}}{2} + t, \quad (4.98)$$

integral I poprima oblik:

$$I = (\alpha_{l_1} \alpha_{l_2})^2 \cdot e^{-\frac{\beta^2}{2}(y_{01} - y_{02})^2} \iint e^{-\beta^2 t^2} e^{-\beta^2 (t - \xi)^2} H_{l_1} \left[ \beta \left( t - \frac{y_{01} - y_{02}}{2} \right) \right] \cdot H_{l_2} \left[ \beta \left( t + \frac{y_{01} - y_{02}}{2} \right) \right] e^{-\frac{\xi^2}{\Lambda^2}} H_{l_1} \left[ \beta \left( t - \xi - \frac{y_{01} - y_{02}}{2} \right) \right] \cdot H_{l_2} \left[ \beta \left( t - \xi + \frac{y_{01} - y_{02}}{2} \right) \right] d\xi dy_1 \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned}
 I = (\alpha_{l_1} \alpha_{l_2})^2 \cdot e^{-\frac{(k_{x_1} - k_{x_2})^2}{2\beta^2}} \iint e^{-\left[\beta^2(t^2 + (t-\xi)^2) + \frac{\xi^2}{\Lambda^2}\right]} H_{l_1} \left[ \beta t - \frac{(k_{x_1} - k_{x_2})}{2\beta} \right] \cdot \\
 H_{l_2} \left[ \beta t + \frac{(k_{x_1} - k_{x_2})}{2\beta} \right] H_{l_1} \left[ \beta(t - \xi) - \frac{(k_{x_1} - k_{x_2})}{2\beta} \right] \cdot \\
 H_{l_2} \left[ \beta(t - \xi) + \frac{(k_{x_1} - k_{x_2})}{2\beta} \right] d\xi dt
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Uvođenjem oznake  $G$  za deo integrala  $I$ , gde ta nova promenljiva označava:

$$\begin{aligned}
 G(k_{x_1} - k_{x_2}) = (\alpha_{l_1} \alpha_{l_2})^2 \iint e^{-\left[\beta^2(t^2 + (t-\xi)^2) + \frac{\xi^2}{\Lambda^2}\right]} H_{l_1} \left[ \beta t - \frac{(k_{x_1} - k_{x_2})}{2\beta} \right] \cdot \\
 H_{l_2} \left[ \beta t + \frac{(k_{x_1} - k_{x_2})}{2\beta} \right] H_{l_1} \left[ \beta(t - \xi) - \frac{(k_{x_1} - k_{x_2})}{2\beta} \right] \cdot \\
 H_{l_2} \left[ \beta(t - \xi) + \frac{(k_{x_1} - k_{x_2})}{2\beta} \right] d\xi dt
 \end{aligned}$$

jednačina (4.89) dobija se sledeći oblik:

$$\left\langle |M_{12}|^2 \right\rangle = \frac{|F_{12}|^2 \Delta^2 \Lambda \sqrt{\pi}}{L} \cdot e^{-\frac{(k_{x_1} - k_{x_2})^2 \Lambda^2}{4}} \cdot e^{-\frac{(k_{x_1} - k_{x_2})^2}{2\beta^2}} \cdot G(k_{x_1} - k_{x_2}) \tag{4.101}$$

Pošto  $\left\langle |M_{12}|^2 \right\rangle$  zavisi **samo** od  $\Delta k_x = k_{x_1} - k_{x_2}$ , sumiranje u (4.74) se vrši samo po  $\Delta k_x$ , uz:

$$\left\langle |M_{12}|^2 \right\rangle \equiv \frac{1}{L} \left\langle |\tilde{M}_{12}|^2 \right\rangle, \tag{4.102}$$

$$\left\langle \frac{1}{\tau_{n_1, l_1; n_2, l_2}} \right\rangle = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} e^{\frac{[E_{n_1, 0} - E_{n_2, 0} + (l_1 - l_2) \hbar \omega_c]^2}{2\delta^2}} \sum_{\Delta k_x} \left\langle |M_{12}|^2 \right\rangle \tag{4.103}$$

Suma u (4.103) se može zameniti integralom pošto je:

$$\sum_{\Delta k_{xi}} f(\Delta k_{xi}) \rightarrow \left( \frac{L_x}{2\pi} \right) \int f(\Delta k_{xi}) d(\Delta k_{xi}) \tag{4.104}$$

jer je  $\Delta k_{xi} = L_x/2\pi$ , pa je:

$$\frac{1}{L} \sum_{\Delta k_{xi}} \langle |\tilde{M}_{12}|^2 \rangle \rightarrow \frac{1}{L_x} \cdot \frac{L_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |\tilde{M}_{12}|^2 \rangle d(\Delta k_{xi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |\tilde{M}_{12}|^2 \rangle d(\Delta k_{xi}) \quad (4.105)$$

$$\left\langle \frac{1}{\tau_{n_1, l_1; n_2, l_2}} \right\rangle = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[E_{n1,0} - E_{n2,0} + (l_1 - l_2)\hbar\omega_c]^2}{2\delta^2}} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |\tilde{M}_{12}|^2 \rangle d(k_{x1} - k_{x2}) \quad (4.106)$$

Radi jednostavnosti pregleda i pisanja, sa  $A$  će biti označen deo prethodne jednačine:

$$A = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[E_{n1,0} - E_{n2,0} + (l_1 - l_2)\hbar\omega_c]^2}{2\delta^2}} \quad (4.107)$$

$$\left\langle \frac{1}{\tau_{n_1, l_1; n_2, l_2}} \right\rangle = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |M_{12}|^2 \rangle d(\Delta k_x) = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |\tilde{M}_{12}|^2 \rangle d(k_{x1} - k_{x2}) \quad (4.108)$$

Konačan izraz za brzinu rasejanja na neravninama je:

$$\left\langle \frac{1}{\tau_{n_1, l_1; n_2, l_2}} \right\rangle_{IFR} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[E_{n1,0} - E_{n2,0} + (l_1 - l_2)\hbar\omega_c]^2}{2\delta^2}} \frac{|F_{12}|^2 \Delta^2 \Lambda}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\Delta k_x)^2 \Lambda^2}{4}} \cdot e^{-\frac{(\Delta k_x)^2}{2\beta^2}} G(\Delta k_x) d(\Delta k_x) \quad (4.109)$$

pri čemu je  $\Delta k_x = k_{x1} - k_{x2}$ .

Usled prirode interakcije elektrona sa neravninama na razdvojnim površima, brzine rasejanja za prelaze sa viših na niže i sa nižih na više energijske nivoe su jednake. Ako se uporede konačni izrazi za brzinu rasejanja na neravninama (4.109) i za brzinu rasejanja na LO fononima (4.57), može se uočiti da za razliku od rasejanja na LO fononima koji ima maksimalan uticaj kada je energija između nivoa bliska energiji fonona  $\hbar\omega_{LO}$ , efekti rasejanja na

neravninama su maksimalni za razlike energija bliske nuli. Odavde se može zaključiti da su ova dva mehanizma rasejanja komplementarna.

#### 4.5. Indeks prelamanja kvantnog kaskadnog lasera

Kao što je već rečeno, QCL se može posmatrati i kao anizotropni metamaterijal sa paralelnom dielektričnom permitivnošću  $\varepsilon_{\parallel}$ , čija je vrednost jednaka srednjoj balkovskoj permitivnosti, i normalnom dielektričnom permitivnošću  $\varepsilon_{\perp}$ . Paralelna dielektrična permitivnost je realna i pozitivna veličina koja slabo zavisi od frekvencije upadnog zračenja. S druge strane, normalna komponenta permitivnosti je kompleksna veličina  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon'_{\perp} + i\varepsilon''_{\perp}$  i funkcija je frekvencije upadnog talasa.

Posmatrajmo strukturu prikazanu na [Slici 25](#), koja se sastoji od polubeskonačnog izotropnog materijala i polubeskonačnog anizotropnog materijala. Materijal u oblasti  $z < 0$  je izotropni materijal sa realnom dielektričnom propustljivošću  $\varepsilon_b$ , a materijal u oblasti  $z > 0$  je anizotropni materijal sa paralelnom komponentom permitivnosti ( $\varepsilon_{\parallel}$ ) koja je realna i pozitivna, i normalnom kompleksnom komponentom ( $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon'_{\perp} + i\varepsilon''_{\perp}$ ).

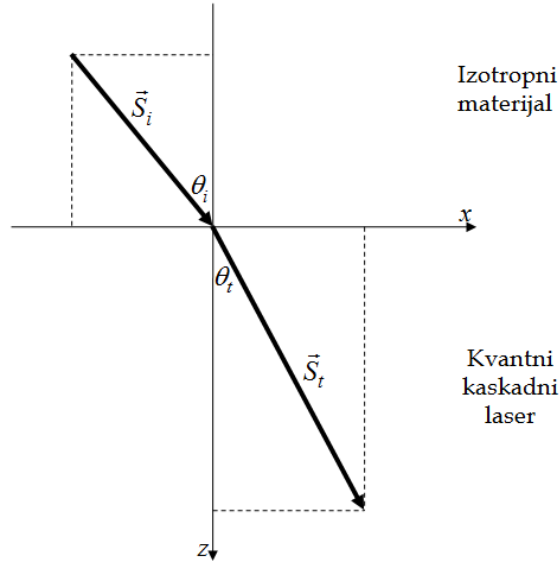
U oblasti izotropnog materijala ( $z < 0$ ), Poynting-ov vektor  $\vec{S}_i$  je dat sa:

$$\vec{S}_i = \left[ k_{xi} \vec{i}_x + k_{zi} \vec{i}_z \right] \frac{|H_0|^2}{2\varepsilon_b \omega}, \quad (4.110)$$

pri čemu su komponente talasnog vektora  $k_x$  i  $k_z$  realne. Dodatno važi i:

$$k_{xi}^2 + k_{zi}^2 = k_0^2 \varepsilon_b, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (4.111)$$

Treba napomenuti i to da su  $x$ -komponente talasnih vektora  $k_{xi}$  i  $k_{xt}$  međusobno jednake:  $k_{xi} = k_{xt} = k_x$ . Razlog za ovo jeste zavisnost tenzora dielektrične permitivnosti samo od  $z$ , a ne i od promenljive  $x$ .



*Slika 25* Struktura koja se sastoji od polubeskonačnog izotropnog materijala i polubeskonačnog anizotropnog metamaterijala (QCL-a).  $\vec{S}_{i/t}$  je Poyntingov vektor u izotropnoj/anizotropnoj sredini.

U oblasti anizotropnog materijala ( $z > 0$ ) Poynting-ov vektor  $\vec{S}_t$  je oblika:

$$\vec{S}_t = \left[ \operatorname{Re} \left( \frac{k_x}{\varepsilon_{\perp}} \right) \vec{i}_x + \operatorname{Re} \left( \frac{k_{zt}}{\varepsilon_{\parallel}} \right) \vec{i}_z \right] \frac{|H_0|^2 |T|^2}{2\omega} = \left[ \frac{k_x}{\tilde{\varepsilon}'_{\perp}} \vec{i}_x + \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \operatorname{Re}(k_{zt}) \vec{i}_z \right] \frac{|H_0|^2 |T|^2}{2\omega}, \quad (4.112)$$

pri čemu je novouvedena oznaka:

$$\frac{1}{\tilde{\varepsilon}'_{\perp}} = \frac{\varepsilon'_{\perp}}{|\varepsilon_{\perp}|^2}, \quad (4.113)$$

gde je  $k_{zt}$  kompleksna veličina, dok je  $T$  koeficijent transmisije.

Sa **Slike 25** vidi se da je:

$$\frac{S_{xt}}{S_{xi}} = \frac{S_t \sin \theta_t}{S_i \sin \theta_i} \quad (4.114)$$

Vodeći računa o izrazima (4.110) i (4.112), jednostavno se dolazi do izraza:

$$\frac{S_t \sin \theta_t}{S_i \sin \theta_i} = \frac{\varepsilon_b}{\tilde{\varepsilon}'_{\perp}} |T|^2 \quad (4.115)$$

Odnosno:

$$\varepsilon_b S_i \sin \theta_i = \frac{S_t}{|T|^2} \tilde{\varepsilon}'_{\perp} \sin \theta_t \quad (4.116)$$

Pošto se u oblasti  $z < 0$  nalazi linearni i izotropni materijal, indeks prelamanja  $n_i = \sqrt{\varepsilon_b}$  će biti pozitivna veličina. Izraz (4.116) možemo napisati u obliku:

$$n_i \sin \theta_i = \frac{S_t \tilde{\varepsilon}'_{\perp}}{S_i \sqrt{\varepsilon_b} |T|^2} \sin \theta_t \quad (4.117)$$

pa je očigledno da veličina:

$$n_t = \frac{S_t \tilde{\varepsilon}'_{\perp}}{S_i \sqrt{\varepsilon_b} |T|^2} = n_i A \quad (4.118)$$

opisuje indeks prelamanja metamaterijala ( $z > 0$ ), odakle sledi:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin \theta_t \quad (4.119)$$

što predstavlja Snellov zakon prelamanja.

Iz poređenja  $x$  komponenti upadnog i transmitovanog Poyntingovog vektora (4.116), može se odrediti veličina  $A$  i njen kvadrat:

$$A^2 \equiv \frac{\left( \frac{S_b}{|T|^2} \tilde{\varepsilon}'_{\perp} \right)^2}{\varepsilon_b^2 S_i^2} = \frac{k_x^2 + (\tilde{\varepsilon}'_{\perp})^2 \frac{\text{Re}(k_{zt})^2}{\varepsilon_{\parallel}^2}}{k_{xi}^2 + k_{zi}^2} \quad (4.120)$$

Iz disperzione relacije za anizotropnu sredinu (4.111) i koristeći izraz (3.64) dolazimo do:



$$\frac{(k_{zt})^2}{\varepsilon_{\parallel}^2} = \left( \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{\varepsilon_b \sin^2 \theta_i}{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}} \right) k_0^2 \quad (4.121)$$

Realni i imaginarni deo ove veličine dat je sa:

$$R = \operatorname{Re} \left[ \frac{k_{zt}^2}{\varepsilon_{\parallel}^2} \right] = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}^2} \operatorname{Re} [k_{zt}^2] = \left( \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} - \frac{\varepsilon_b \sin^2 \theta_i}{\tilde{\varepsilon}_{\perp}' \varepsilon_{\parallel}} \right) k_0^2 \quad (4.122)$$

$$I = \operatorname{Im} \left[ \frac{k_{zt}^2}{\varepsilon_{\parallel}^2} \right] = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}^2} \operatorname{Im} [k_{zt}^2] = \frac{\varepsilon_b \sin^2 \theta_i}{\varepsilon_{\parallel} \tilde{\varepsilon}_{\perp}''} k_0^2 \quad (4.123)$$

pri čemu je, prema analogiji sa (4.113), novouvedena veličina:

$$\frac{1}{\tilde{\varepsilon}_{\perp}''} = \frac{\varepsilon_{\perp}''}{|\varepsilon_{\perp}|^2} \quad (4.124)$$

U kompleksnoj analizi lako se pokazuje da ako je  $z^2 = a + ib$ , tada je:

$$(\operatorname{Re}(z))^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \quad (4.125)$$

Vodeći računa o izrazu (4.125), može se doći do:

$$A^2 \varepsilon_b = (\tilde{\varepsilon}_{\perp}')^2 \frac{R + \sqrt{R^2 + I^2}}{2} + k_x^2 = (\tilde{\varepsilon}_{\perp}')^2 \cdot \Omega + k_x^2 = (\tilde{\varepsilon}_{\perp}')^2 \cdot \Omega + \varepsilon_b \sin^2 \theta_i \quad (4.126)$$

Izraz (4.126) se može zapisati u kompaktnijem obliku:

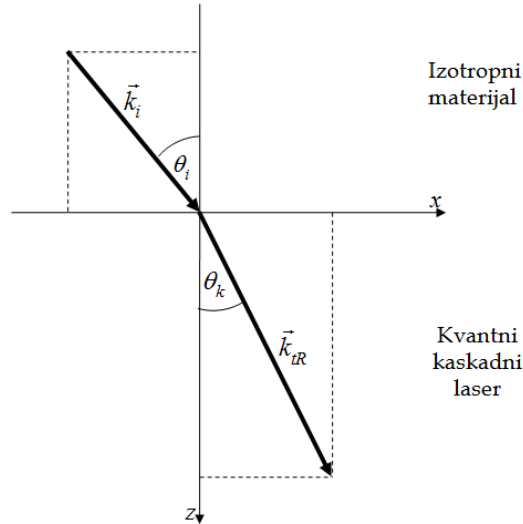
$$A^2 \varepsilon_b = \frac{|\varepsilon_{\perp}|^4}{\varepsilon_{\perp}'^2 \varepsilon_{\parallel}^2} \left[ \varepsilon_{\parallel} \Omega - \varepsilon_b \sin^2 \theta_i \left\{ \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}'}{|\varepsilon_{\perp}|^2} \Omega - \left( \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}'}{|\varepsilon_{\perp}|^2} \right)^2 \right\} \right] \quad (4.127)$$

pa je indeks prelamanja  $n_i$  anizotropne sredine ( $z > 0$ ), dat izrazom:

$$n_i^2 = A^2 \varepsilon_b \Rightarrow n_i = \pm \frac{|\varepsilon_{\perp}|^4}{\varepsilon_{\perp}'^2 \varepsilon_{\parallel}^2} \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \Omega - \varepsilon_b \sin^2 \theta_i \left\{ \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}'}{|\varepsilon_{\perp}|^2} \Omega - \left( \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}'}{|\varepsilon_{\perp}|^2} \right)^2 \right\}} \quad (4.128)$$

U izrazu (4.128) znak ispred korena je „+“, ako je  $\varepsilon_{\perp}' > 0$ , a znak „-“ ukoliko je  $\varepsilon_{\perp}' < 0$ .

Izraz (4.128) karakteriše prostiranje Poynting-ovog vektora. Kako se u anizotropnim sredinama, kao što je već analizirano, pravci i smerovi Poynting-ovog vektora i talasnog vektora ne poklapaju, kod anizotropnih metamaterijala se mora uzeti u obzir i funkcija indeksa prelamanja koji se odnosi na prostiranje talasnog vektora  $n_{ik}$ .



**Slika 26** Sematski prikaz prostiranja Poyntingovog vektora kroz strukturu koja se sastoji od polubeskonačnog izotropnog materijala i polubeskonačnog anizotropnog metamaterijala (kvantnog kaskadnog lasera).  $\vec{k}_{i/t}$  je Poyntingov vektor u izotropnoj/anizotropnoj sredini.

Iz jednakosti  $x$ -komponenti talasnog vektora u obe sredine sledi ( $\vec{k}_{tr}$  je realni deo transmitovanog talasnog vektora):

$$\left. \begin{array}{l} k_{xi} = k_b \sin \theta_i \\ k_{xt} = k_{tr} \sin \theta_k \end{array} \right\} \Rightarrow k_{tr} \sin \theta_k = k_b \sin \theta_i \quad (4.129)$$

Definišemo veličinu:  $B = k_{tr}/k_b$ , pa je tada:

$$B^2 = \frac{k_{tr}^2}{k_b^2} = \frac{k_{tz}^2 + k_x^2}{\varepsilon_b k_0^2}, \quad (4.130)$$

pri čemu je  $k_{tz}$   $z$ -komponenta realnog dela transmitovanog talasnog vektora. Pošto je iz (4.121):

$$k_{zt}^2 = \left( \varepsilon_{\parallel} - \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_b \sin^2 \theta_i}{\varepsilon_{\perp}} \right) k_0^2, \quad (4.131)$$

to će odgovarajuće veličine  $R_k$  i  $I_k$  imati oblik:

$$R_k = \operatorname{Re}(k_{zi}^2)$$

$$R_k = \varepsilon_{\parallel} - \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_b \sin^2 \theta_i}{|\varepsilon_{\perp}|^2} \varepsilon'_{\perp}, \quad (4.132)$$

i:

$$I_k = \operatorname{Im}(k_{zi}^2)$$

$$I_k = \frac{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon''_{\perp} \varepsilon_b \sin^2 \theta_i}{|\varepsilon_{\perp}|^2}. \quad (4.133)$$

Analogno, kao u prethodnoj analizi uvodeći smenu:

$$\Omega_k = \frac{1 + \sqrt{1 + \left( \frac{I_k}{R_k} \right)^2}}{2}, \quad (4.134)$$

dolazimo do izraza za  $B^2$ :

$$B^2 = \frac{\varepsilon_{\parallel} \Omega_k + \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\perp}|^2} \Omega_k \right) \varepsilon_b \sin^2 \theta_i}{\varepsilon_b}. \quad (4.135)$$

Odatle se direktno dobija izraz za indeks prelamanja  $n_k$ :

$$n_k = \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \Omega_k + \left( 1 - \frac{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}}{|\varepsilon_{\perp}|^2} \Omega_k \right) \varepsilon_b \sin^2 \theta_i}. \quad (4.136)$$

Kako je  $\varepsilon_{\parallel} > 0$ , to će vrednost korena biti uvek pozitivna veličina, bez obzira na znak  $\varepsilon'_{\perp}$ .

S druge strane, indeks prelamanja  $n_t$  QCL-a može biti pozitivan (ako je  $\varepsilon'_{\perp} > 0$ ) ili negativan (ako je  $\varepsilon'_{\perp} < 0$ ).

## 5. Određivanje komponenti tenzora dielektrične permitivnosti kvantnog kaskadnog lasera

QCL je struktura koja se sastoji od slojeva koji narastaju duž z-ose. U  $x$ - $y$  ravni, kretanje elektrona je slobodno i dielektrična permitivnost  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\parallel}$  jednaka je srednjoj dielektričnoj permitivnosti:

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{\varepsilon_{b1}L_{p1} + \varepsilon_{b2}L_{p2}}{L_p} = \varepsilon_b \quad (5.1)$$

pri čemu su  $\varepsilon_{b1}$  i  $\varepsilon_{b2}$  balkovske dielektrične propustljivosti materijala jame i barijere,  $L_{p1}$  i  $L_{p2}$  ukupne širine slojeva jame i barijere u okviru jedne periode, dok je  $L_p$  širina jedne periode -a ( $L_p = L_{p1} + L_{p2}$ ).

U  $z$ -pravcu situacija je znatno složenija. Pored balkovske polarizacije ovde se, usled postojanja minizonske strukture, javlja dodatna polarizacija. Izraz za  $z$ -komponentu tenzora dielektrične permitivnosti glasi:

$$\varepsilon_{\perp}(\omega) = \varepsilon_b + \frac{N e^2}{\varepsilon_0 \hbar L_p} \sum_{n,m} (\rho_{mm} - \rho_{nn}) \frac{|Z_{nm}|^2}{(\omega_{nm} - \omega) - i\gamma_{nm}} \quad (5.2)$$

U (5.2) indeksi  $n$  i  $m$  se odnose na  $n$ -tu i  $m$ -tu podzону, koje karakterišu anvelopne talasne funkcije  $\Psi_{n,m}(\vec{r})$  i energije dna podzone  $E_{n,m}$ . Širina linije koja odgovara prelazu  $n \rightarrow m$ , označena je sa  $\gamma_{nm}$  ( $\gamma_{nm} > 0$ ), dok je:

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} \quad (5.3)$$

U izrazu (5.2)  $\omega$  označava učestanost emitovane svetlosti, a dijagonalni matrični element je dat izrazom:

$$Z_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(z) z \psi_m dz \quad (5.4)$$

pri čemu su  $\psi_{n,m}(z)$   $z$ -komponente anvelopne talasne funkcije  $\Psi_{n,m}(\vec{r})$ . U (5.2) veličina  $N$  predstavlja usrednjenu koncentraciju donora u QCL-u i data je relacijom:

$$N = \frac{N_D L_D}{L_p} \quad (5.5)$$

U poslednjem izrazu,  $N_D$  je koncentracija donora, dok  $L_D$  predstavlja ukupnu širinu slojeva u okviru jedne periode koja je dopirana donorima. Sa druge strane, vodeći računa o globalnoj elektronskoj neutralnosti strukture, sledi da je:

$$N_s = N \cdot L_p \quad (5.6)$$

Veličina  $N_s$  predstavlja površinsku koncentraciju strukture i jeste zbir površinskih koncentracija svih podzona,  $N_{s,ii}$ , odnosno:

$$N_s = \sum_n N_{s,nn} \quad (5.7)$$

pri čemu je  $N_{s,mm} = N_s \rho_{mm}$ , jer  $\rho_{mm}$  predstavlja verovatnoću zauzetosti elektronima za  $n$ -tu podzону. Uzimajući ovo u obzir, konačni izraz za  $z$ -komponentu tenzora dielektrične permitivnosti glasi:

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_b + \frac{1}{L_p} \frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar} \sum_{n,m} (N_{s,mm} - N_{s,nn}) \frac{|Z_{mn}|^2}{(\omega_{nm} - \omega) - i\gamma_{nm}} \quad (5.8)$$

Ovaj izraz će biti korišćen u daljoj analizi. U (5.8) sumiranje se vrši po svim kombinacijama indeksa  $n$  i  $m$ , pri čemu je  $n, m = 1, 2, \dots, l_{max}$ , gde  $l_{max}$  predstavlja ukupan broj podzona.

Uočimo dva nivoa  $p$  i  $q$ , s tim da je  $E_p > E_q$ , tj.  $\omega_{pq} > 0$ . Odgovarajući sabirci u sumi jednačine (5.8) su:

$$S_{pq} = (N_{s,p} - N_{s,q}) \frac{|Z_{pq}|^2}{\omega_{qp} - \omega - i\gamma_{qp}} + (N_{s,q} - N_{s,p}) \frac{|Z_{qp}|^2}{\omega_{pq} - \omega - i\gamma_{pq}}, \quad (5.9)$$

s tim da je  $|Z_{pq}|^2 = |Z_{qp}|^2$ , a  $\gamma_{qp} = \gamma_{pq}$ . Kako je  $\omega_{qp} = -\omega_{pq} < 0$ , to u imeniocu prvog sabirka jednačine (4.9) figuriše veličina  $-(\omega_{pq} + \omega) - i\gamma_{qp}$ , a u imeniocu drugog sabirka  $\omega_{pq} - \omega - i\gamma_{pq}$ . Ako se posmatra opseg  $\omega$  u okolini rezonance, tada je drugi sabirak u (5.9) dominantan u odnosu na prvi sabirak, jer je  $\omega > 0$ , pa se prvi sabirak može zanemariti i često se u osnovnom izrazu suma ograničava uslovom  $n > m$ , što znači da se uzimaju u obzir samo rezonantni sabirci oblika drugog sabirka u (5.9), dok se nerezonantni sabirci zanemaruju.

Osnovna relacija (5.2), iz koje na jednostavan način sledi relacija (5.8), može se izvesti primenom teorije matrice gustine. Kompletan postupak izvođenja je dat u [47] i ovde neće biti izvođen.

U ovom poglavlju će biti izveden postupak kojim se može doći do relacije (5.8), uz ograničenje  $n > m$ .

Pođimo od makroskopskog Hamiltonijana oblika

$$\hat{H}(\vec{r}) = \vec{p} \frac{1}{2m_0} \vec{p} + U(\vec{r}) \quad (5.10)$$

Elektromagnetski talas koji interaguje sa QCL-om opisuje se magnetnim vektor potencijalom  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ . Ukupni Hamiltonijan pri ovoj interakciji biće:

$$\hat{H}(\vec{r}, t) = (\vec{p} + e\vec{A}) \frac{1}{m^*} (\vec{p} + e\vec{A}) + U(\vec{r}) \quad (5.11)$$

pri čemu je  $-e$  naelektrisanje elektrona,  $m^*(r)$  prostorno zavisna efektivna masa elektrona, dok je  $U(\vec{r})$  sporopromenljivi potencijal koji potiče od diskontinuiteta provodne zone i koncentracije elektrona. Hamiltonijan interakcije kao razlika Hamiltonijana datih sa (5.10) i (5.11) je:

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = \hat{H}(\vec{r}, t) - \hat{H}_0(\vec{r}) = e\hat{v}\vec{A} + \frac{e^2\vec{A}^2}{m} \quad (5.12)$$

s tim da je operator brzine  $\hat{v}$ :

$$\hat{v} = \frac{1}{m^*} \vec{p} + \frac{1}{2} \left( \vec{p} \frac{1}{m^*} \right) \quad (5.13)$$

Ako se analiziraju dovoljno slaba polja, kvadratni član u (5.12) se zanemaruje, tj.:

$$\hat{H}'(\vec{r}, t) = e\hat{v}\vec{A} \quad (5.14)$$

Kod QCL-a  $m^* = m^*(z)$  i  $U = U(z)$ , što će znatno pojednostaviti dalji postupak. Odgovarajući matrični element  $P_{if}$  koji odgovara prelazu iz stanja  $i$  u stanje  $f$  je:

$$P_{if} = \int \psi_i^* \hat{v} \psi_f dV \quad (5.15)$$

U slučaju harmonijske zavisnosti veličina  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  se može zapisati u obliku  $\vec{A}(\vec{r}, t) = 2\vec{A}_0 \cos(\vec{k}_\phi \vec{r} - \omega t)$ ,

pri čemu je  $\vec{k}_\phi$  talasni vektor fotona. Za svetlost frekvencije iz vidljivog i infracrvenog dela spektra talasni vektor fotona je po modulu znatno manji od modula talasnog vektora skoro svih elektrona u QCL-u, pa se može smatrati da je prostorna zavisnost  $\vec{A}(\vec{r})$  zanemarljiva, pa je  $\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \vec{A}(\vec{r} = 0, t)$ .

Anvelopne talasne funkcije u QCL-u su oblika:

$$\psi(\vec{r}) = \eta(z) \frac{e^{i(k_x x + k_y y)}}{\sqrt{L_x L_y}} \quad (5.16)$$

U (5.16)  $L_x$  i  $L_y$  su dužine QCL-a u  $x$  i  $y$  pravcu, dok je  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^2 dz = 1$ .

Kombinovanjem izraza (5.13), (5.15) i (5.16), dolazi se do izraza  $\vec{P}_{if}$ :

$$\vec{P}_{if} = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_i^* \eta_f}{m^*} dz [\vec{i}_x + \vec{i}_y] - i\hbar \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_i^*}{m^*} \frac{d\eta_f}{dz} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_i^* \left( \frac{1}{dz} \frac{1}{m^*} \right) \eta_f dz \right] \vec{i}_z \quad (5.17)$$

Kao što je pokazano u [46],  $x$  i  $y$  komponente matičnog elementa  $\vec{P}_{if}$ , za strukture na bazi AlGaAs legura, su za nekoliko redova veličine manje od  $z$  komponente  $\vec{P}_{if}$ , pa se kod AlGaAs QCL-a može pisati  $\vec{P}_{if} \approx P_{if} \cdot \vec{i}_z$ .

Brzina prelaza elektrona  $W_{if}$  iz stanja  $i$  u stanje  $f$  data je Fermijevim „zlatnim pravilom“:

$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{if}|^2 \delta(E_f - E_i \pm \hbar\omega) \quad (5.18)$$

gde znak „+“ odgovara procesu emisije svetlosti, dok znak „-“ odgovara procesu apsorpcije. Ovom izrazu se mora dodati i sledeća dopuna usled činjenice da  $W_{if}$  zavisi od populacije inicijalnog  $i$ -nivoa i finalnog  $f$ -nivoa, pa, ako je  $\vec{A}_0$  kolinearan sa  $\vec{i}_z$ , potpuni izraz za apsorpciju biće:



$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |\vec{A}(\vec{r} = 0, t)|^2 |P_{if,z}|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \cdot (f_{FD}(E_i) - f_{FD}(E_f)) \quad (5.19)$$

s tim da je  $f_{FD}(E)$  Fermi-Diracova funkcija raspodele.

Koeficijent apsorpcije  $\alpha_{if}$  je dat poznatim izrazom:

$$\alpha_{if} = \frac{W_{if} \cdot \hbar\omega}{V \cdot I_p} \quad (5.20)$$

u kome je  $V$  zapremina QCL-a:  $V = L_x L_y L_z$ , dok je  $I_p$  intenzitet svetlosti energije fotona  $\hbar\omega$ . Intenzitet svetlosti  $I_p$  se računa kao ukupna gustina elektromagnetske energije pomnožena sa brzinom svetlosti u QCL-u, koja iznosi  $v = c/\bar{n}$ .  $\bar{n}$  je srednji indeks prelamanja u QCL-u i računa se prema izrazu  $\bar{n} = (n_{b1}L_{p1} + n_{b2}L_{p2})/L_p$ . Gustina elektromagnetske energije je  $w_{EM} = \varepsilon |\vec{K}|^2$ , gde je  $\vec{K}$  električno polje, koje je u ovom slučaju  $\vec{K} = -\partial\vec{A}/\partial t$ , te je  $w_{EM} = \varepsilon\omega^2 |\vec{A}(\vec{r} \neq 0, t)|^2$ . Odavde je izraz za  $I_p(t)$  konačno dat sledećom relacijom:

$$I_p(t) = \varepsilon\omega^2 |\vec{A}(\vec{r} \neq 0, t)|^2 \frac{c}{\bar{n}} = \varepsilon_0 \bar{n} c \omega^2 |\vec{A}(\vec{r} \neq 0, t)|^2 \quad (5.21)$$

a usrednjena po vremenskom periodu  $T$  ( $\omega = 2\pi/T$ ), veličina  $I_p$  je:

$$I_p = \bar{I}_p(t) = 2\varepsilon_0 \bar{n} c \omega^2 A_0^2 \quad (5.22)$$

Ono što je ovde vrlo očigledno je sledeće: ako se razmatra proces apsorpcije, tada u (5.18) i (5.19)  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  figuriše kao  $A_0 e^{-i\omega t}$ , a ne kao  $A_0 e^{-i\omega t} + A_0 e^{i\omega t}$  što je slučaj u određivanju intenziteta svetlosti. Ovo je detaljno obrazloženo u radovima i knjigama posvećenim kvantnoj mehanici (na primer [95])

Imajući sve ovo u vidu, dolazi se do izraza za koeficijent apsorpcije ( $\vec{A}_0 \parallel \vec{i}_z$ ):

$$\alpha_{if}^{(i)} = \frac{2\pi e^2}{\bar{n}\epsilon_0\omega c L_x L_y L_z} \left[ f_{FD}(E_i) - f_{FD}(E_f) \right] |P_{if,z}|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega). \quad (5.23)$$

U izrazu (5.23), u brojiocu je uveden faktor 2 zbog postojanja dve moguće vrednosti spina elektrona.

U aproksimaciji transverzalnim efektivnim masama, energija  $i$ -te podzone  $E_i(k_{\parallel})$  i talasna funkcija  $i$ -te podzone  $\psi_i(k_{\parallel})$  date su izrazima:

$$E_i(k_{\parallel}) = E_i(k_{\parallel} = 0) + \frac{\hbar^2 k_{\parallel}^2}{2m_{\parallel i}} \quad (5.24)$$

$$\psi_i(k_{\parallel}) = \psi_i(k_{\parallel} = 0),$$

pa samim tim i matični element zavisi od  $k_{\parallel}$ .

Koeficijent apsorpcije između podzone  $i$  i podzone  $f$  je suma parcijalnih koeficijenata apsorpcije  $\alpha_{if}^{(i)}$  po svim vrednostima  $k_x$  i  $k_y$  (matični element je jednak nuli ako je  $k_{xi} \neq k_{xf}$ ,  $k_{yi} \neq k_{yf}$ , a različit od nule ako je  $k_{xi} = k_{xf} = k_x$ ,  $k_{yi} = k_{yf} = k_y$ ):

$$\alpha_{if}^{(i)} = \frac{2\pi e^2 |P_{if}|^2}{\bar{n}\epsilon_0\omega c L_x L_y L_z} \sum_{k_x, k_y} F_{if} \delta(E_f - E_i - \hbar\omega). \quad (5.25)$$

Na stvarni profil apsorpcije, pored različitih  $m_{\parallel i}$ , utiču i mehanizmi rasejanja i najčešće su to dominantni mehanizmi. Uobičajeno je, imajući ovo u vidu, da se delta funkcija u (5.25) zameni Lorencjanom oblika:

$$\delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \rightarrow L(\hbar\omega, \hbar\omega_0) = \frac{\frac{\Gamma}{2}\pi}{(\hbar\omega - \hbar\omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}, \quad (5.26)$$

pri čemu je  $\Gamma$  puna širina linije, dok je  $\hbar\omega_0 = E_f(0) - E_i(0)$ . Kako je u ovoj aproksimaciji i Lorencijan nezavisan od  $k_{\parallel}$ , to se izraz za koeficijent apsorpcije (5.25) može pisati napisat kao:

$$\alpha_{if}^{(i)} = \frac{2\pi e^2 |P_{if}|^2 L(\hbar\omega, \hbar\omega_0)}{\bar{n}\varepsilon_0 c L_z \omega} \left[ \frac{1}{L_x L_y} \sum_{k_x, k_y} f_{FD}(E_i) - \frac{1}{L_x L_y} \sum_{k_x, k_y} f_{FD}(E_f) \right] \quad (5.27)$$

Površinska koncentracija  $N_{s,i}$  u  $i$ -toj podzoni data je izrazom [96]:

$$N_{s,i} = \frac{2}{L_x L_y} \sum_{k_x, k_y} f_{FD}(E_i) \quad (5.28)$$

pa je

$$\alpha_{if}^{(i)} = \frac{\pi e^2 |P_{if}|^2 L(\hbar\omega, \hbar\omega_0)}{\bar{n}\varepsilon_0 c L_z \omega} [N_{s,i} - N_{s,f}] \quad (5.29)$$

Uvodeći notaciju kao u izrazu (5.2):  $\Gamma/2 = \hbar\gamma_{if}$  i vodeći računa da je [96]

$P_{if,z} = -i(E_f - E_i)d_{if} = -i\omega d_{if}$ ,  $d_{if} = \int \eta_i^* z \eta_f dz$ , izraz (5.29) postaje konačno:

$$\alpha_{if}^{(i)} = \frac{e^2 |d_{if}|^2 \omega}{\bar{n}\varepsilon_0 c L_z \hbar} \frac{\gamma_{if}}{(\omega_{fi} - \omega)^2 + \gamma_{if}^2} (N_i - N_f) \quad (5.30)$$

Kao što je već pokazano, intenzitet svetlosti je proporcionalan  $|E(x)|^2$ .

Ako je  $E(x) = E_0 e^{ikx}$ , pri čemu je  $k = k_R + ik_I$  (ako je  $k = k_R$ , tada je  $I(x)$  konstantno i ne javlja se apsorpcija), tada je:

$$I(x) = I(x=0) e^{-2k_I x} \quad (5.31)$$

S druge strane, znajući definiciju koeficijenta apsorpcije:

$$I(x) = I(x=0)e^{-\alpha x}, \quad (5.32)$$

dolazi se do zaključka da je  $\alpha = 2k_I$ . Znajući da je kompleksni talasni vektor dat kao  $k = \omega/v$ , s tim da je  $v = c/\varepsilon = c/\sqrt{\varepsilon_R + i\varepsilon_I}$ , može se odrediti veličina  $k_I$ . Kako je  $\varepsilon_R \gg \varepsilon_I$ , a pošto je  $\bar{n} \approx \sqrt{\varepsilon_R}$ , dolazi se do  $k_I = 2\omega\varepsilon_I/c\bar{n}$ , odnosno da je:

$$\alpha = \frac{\omega}{c\bar{n}} \text{Im}(\varepsilon) \quad (5.33)$$

Ako se vratimo na relaciju (5.30) i imajući u vidu (5.33), može se pisati:

$$\text{Im}(\varepsilon)_{if} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar L_z} \frac{\gamma_{if} |d_{fi}|^2}{(\omega_{fi} - \omega)^2 + \gamma_{fi}^2} (N_i - N_f), \quad (5.34)$$

s tim da  $\text{Im}(\varepsilon)_{if}$  predstavlja doprinos  $\text{Im}(\varepsilon)$  koji potiče od prelaza  $i \rightarrow f$ . Pa je, dalje:

$$\text{Re}(\varepsilon)_{if} = \frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar L_z} \frac{|d_{fi}|^2 (\omega_{fi} - \omega)}{(\omega_{fi} - \omega)^2 + \gamma_{fi}^2} (N_i - N_f) \quad (5.35)$$

što se, sumirano, može napisati kao:

$$\varepsilon_{if} = \frac{e^2 |d_{if}|^2}{\varepsilon_0 \hbar L_z} (N_i - N_f) \frac{1}{(\omega_{fi} - \omega) - i\gamma_{if}}, \quad (5.36)$$

što predstavlja doprinos dielektričnoj propustljivosti, a potiče od prelaza  $i \rightarrow f$ . Ukupni doprinos koji potiče od svih nivoa u QCL-u je  $\sum_{i,f} \varepsilon_{if}$ , što se u potpunosti poklapa sa polaznom relacijom (5.2), imajući u vidu da je  $N\rho_{mm} = N_m$ .

U ovom poglavlju, razmatranja vezana za određivanje dielektrične permitivnosti QCL-a su se, do sada, odnosila na slučaj kada je primenjeno samo električno polje. Ako se QCL unese i u magnetno polje indukcije  $\vec{B}$ , pri

čemu je vektor  $\vec{B}$  paralelan sa pravcem narastanja slojeva, analiza poprima dosta drugačiji tok i izgled.

Usled delovanja magnetnog polja, pored magnetnog vektor potencijala (koji potiče od elektromagnetnog talasa, tj. svetlosti) javlja se još jedan vektor potencijal. Taj vektor potencijal potiče od magnetnog polja indukcije  $\vec{B}$  i može se zapisati u pogodnom obliku:

$$\vec{A}_B = -By\vec{i}_z; \quad \vec{B} = B\vec{i}_z, \quad (5.37)$$

pri čemu je  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}_B$ , što je neophodan uslov. Naravno, relacija za matrični element (5.15) u prisustvu magnetnog polja i dalje važi, s tim da operator brzine sada ima oblik:

$$\hat{v} = \frac{1}{m^*}\vec{p} + \frac{1}{2}\left(\vec{p}\frac{1}{m^*}\right) + \frac{i\hbar}{m^*}\vec{\alpha}, \quad (5.38)$$

gde je  $\vec{\alpha} = \left\{-\frac{ieB}{\hbar}y, 0, 0\right\}$ . Do poslednje relacije se može doći znajući da je operator brzine u opštem slučaju dat relacijom:

$$\hat{v} = \frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}_0\vec{r} - \vec{r}\hat{H}_0\right), \quad (5.39)$$

pri čemu je neperturbovani Hamiltonijan u prisustvu magnetnog polja  $\vec{B}$ , koje je paralelno z-osi, oblika:

$$\hat{H}_0(\vec{r}, t) = \left(\vec{p} + e\vec{A}_B\right)\frac{1}{m^*}\left(\vec{p} + e\vec{A}_B\right) + U(\vec{r}) \quad (5.40)$$

Talasanje funkcije Hamiltonijana  $\hat{H}_0$  su date izrazom<sup>3</sup>:

$$\Psi_{i,j,k_x}(x, y, z) = \eta_{i,j}(z)\Phi_{j,k_x}(y - y_0)\frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{2L_x}}, \quad (5.41)$$

---

<sup>3</sup> Objasnjeno u Dodatku 1

pri čemu je  $\Phi_{j,k_x}(y-y_0)$  Hermite-ova funkcija argumenta  $y-y_0$  i indeksa  $j$  i  $k_x$  ( $y_0 = \frac{\hbar k_x}{eB}$ ). Funkcije  $\eta_{i,j}(z)$  i  $\Phi_{j,k_x}(y-y_0)$  su normalizovane na jedinicu, pa je i ukupna anvelopna funkcija  $\Phi_{i,j,k_x}(x,y,z)$  normalizovana na jedincu.

Kada se u izraz za matrični element (5.15) unesu izrazi (5.38) i (5.41), dolazi se do izraza:

$$\vec{P}_{i,f} = P_{i,f,x} \cdot \vec{i}_x + P_{i,f,y} \cdot \vec{i}_y + P_{i,f,z} \cdot \vec{i}_z \quad (5.42)$$

Komponente matričnog elementa  $P_{i,f,x}$  i  $P_{i,f,y}$  su proporcionalne izrazu  $\sqrt{eB} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_{i,j_i}^* \eta_{f,j_{i+1}}}{m^*(z)} dz$  i u slučaju QCL-a na bazi AlGaAs su nekoliko redova veličina manje od komponente  $P_{i,f,z}$ , zbog čega se može zapisati:

$$\vec{P}_{i,f} \approx -i\hbar \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_i^*}{m} \frac{d\eta_f}{dz} dz + \frac{1}{2} \int \eta_i^* \eta_2 \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{m} \right) dz \right] \delta_{j_i, j_f} \cdot \vec{i}_z \quad (5.43)$$

što se u potpunosti poklapa sa  $P_{i,f,z}$  u slučaju kada nije primenjeno magnetno polje. Pored toga,  $P_{i,f,z}$  je različito od nule onda i samo onda kada su Landauovi indeksi inicijalnog i finalnog stanja jednaki ( $j_i = j_f$ ).

Izraz (5.23) za koeficijent apsorpcije i u prisustvu magnetnog polja ostaje nepromenjen. Međutim, izraz za ukupni koeficijent apsorpcije između inicijalnog i finalnog stanja,  $\alpha_{if}$ , kada se primeni magnetno polje, ima oblik:

$$\alpha_{if} = \frac{2\pi e^2 |P_{if}|^2 L(\hbar\omega, \hbar\omega_0)}{\pi \epsilon_0 c L_z \omega} \left[ \frac{1}{L_x L_y} \sum_{k_x} f_{FD}(E_{i,j_i}) - \frac{1}{L_x L_y} \sum_{k_x} f_{FD}(E_{f,j_i}) \right] \quad (5.44)$$

Kako je površinska gustina naelektrisanja  $N_{i(f),j}$  na nivou  $(i(f),j)$  jednaka:

$$N_{i(f),j} = \frac{1}{L_x L_y} \sum f_{FD}(E_{i(f),j}) \quad (5.45)$$

to se izraz (4.44) u potpunosti poklapa sa (5.29), odnosno konačni izraz za koeficijent apsorpcije u prisustvu magnetnog polja se u potpunosti poklapa sa izrazom (5.30), što znači da se izraz za dielektričnu propustljivost svodi na (5.36), s tim što je sada <sup>4</sup>:

$$N_{i,j} = \frac{eB}{\hbar} f_{FD}(E_{i,j}), \quad (5.46)$$

površinska koncentracija nivoa  $(i,j)$ .

---

<sup>4</sup> Pogledati Dodatak 1

## **6. Numerički rezultati**

Kod anizotropnog dielektrika znak realnog dela indeksa prelamanja je određen znakom realnog dela normalne komponente permitivnosti, što je detaljno izvedeno i objašnjeno u poglavlju 3.3., pa je u poglavlju koje sledi razmatrana i analizirana mogućnost dizajniranja anizotropnog metamaterijala kod koga bi bilo moguće postići ostvarivanje negativnih vrednosti indeksa prelamanja. Kako poluprovodnički QCL možemo posmatrati kao anizotropni metamaterijal sa paralelnom dielektričnom permitivnošću koja je jednaka srednjoj dielektričnoj permitivnosti strukture, i normalnom dielektričnom permitivnošću koja je izrazito zavisna od relevantnih veličina koje određuju elektronsku strukturu lasera, cilj je omogućiti podešavanje znaka realnog dela indeksa prelamanja sa promenama ovih veličina, kao i opsege talasnih dužina sa određenim znakom indeksa prelamanja [97].



Proračuni su rađeni za strukture GaAs/AlGaAs QCL-ova, dizajniranih tako da emituju zračenje na srednjim infracrvenim i terahercnim frekvencijama, a sve to pod uticajem vrlo jakog spoljašnjeg magnetnog polja.

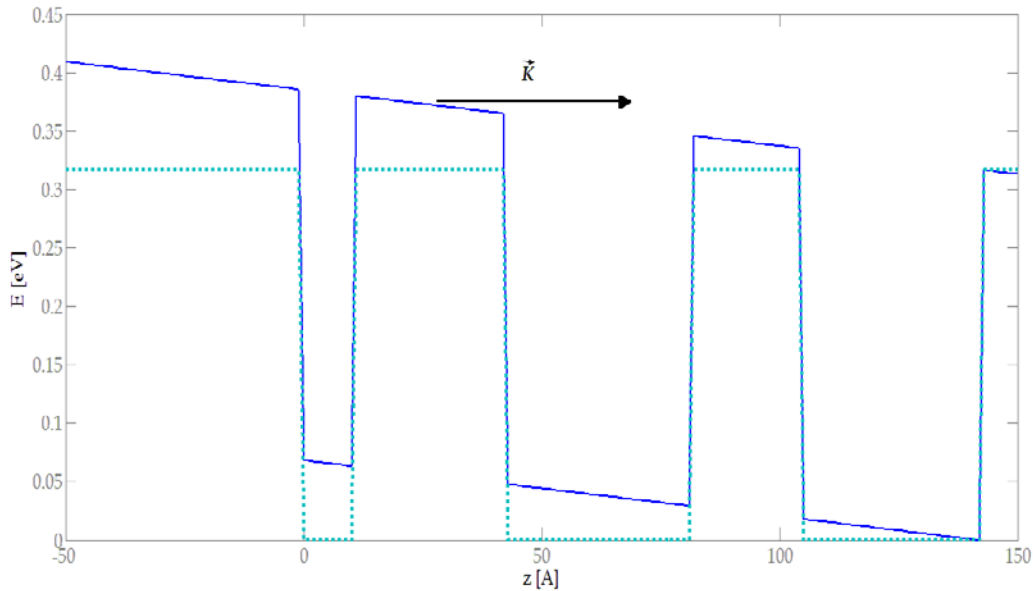
### 6.1. Proračuni za aktivnu oblast GaAs/AlGaAs kvantnog kaskadnog lasera, koji radi u srednjem infracrvenom delu spektra

Struktura koja je razmatrana je GaAs/Al<sub>0.38</sub>Ga<sub>0.62</sub>As QCL koji sadrži tri kvantne jame u aktivnoj oblasti po periodi i koji je optimizovan pomoću genetskog algoritma za emisiju na  $\lambda = 7,3 \mu\text{m}$  [98].

Kako bi se postigle željene vrednosti energijskih nivoa, vrednosti optičkih dipolnih matričnih elemenata prelaza i verovatnoće prelaza između energijskih stanja, bilo je neophodno izvršiti optimizaciju debljina slojeva od kojih je struktura sačinjena. Optimizacija je izvršena pomoću genetskog algoritma koji predstavlja optimizacioni postupak inspirisan biološkom evolucijom. Princip funkcionisanja ovakvog tipa algoritma se zasniva na rešavanju problema kroz proces selekcije tj. odabiranja najboljeg rešenja koje će opstati i veoma često se koristi kao alat za optimizaciju složenih funkcija koje zavise od velikog broja parametara. Parametri čija se vrednost varira tokom izvršavanja algoritma u potrazi za optimalnom strukturom su širine slojeva, odnosno širine jama i barijera aktivne oblasti, kao i visina barijera. Dobijene optimalne vrednosti (polazeći od leve jame) iznose: širine slojeva 11 Å, 32 Å, 39 Å, 23 Å, 38 Å i za visine barijera  $U_B = 0.317 \text{ eV}$ .

Kako bi razmatrana struktura, čije je dno provodne zone na [Slici 27](#) prikazano svetlo plavom tačkastom linijom, funkcionisala kao QCL, neophodno je provodnu zonu učiniti stepeničastom, ili kaskadnom ([Slika 27](#) – tamno plava, puna linija). To se dobija primenom električnog polja na

posmatranu poluprovodničku strukturu u pravcu normalnom na ravni slojeva od kojih je ona sačinjena.



**Slika 27** Profil aktivne oblasti razmatranog QCL-a pre primene električnog polja – svetlo plava linija, i kada se primeni električno polje jačine  $K=48$  kV/cm – tamno plava linija.

Na posmatranu strukturu je primenjeno električno polje u pravcu narastanje strukture, a to je u  $z$ -pravcu<sup>5</sup>, čija je vrednost fiksirana na  $K=48$  kV/cm.

Korišćenjem metode konačnih razlika („*finite difference*” metoda) i primenom metode pogađanja („*shooting*” metoda) izračunate su energije diskretnih stanja strukture i odgovarajuće normirane talasne funkcije. Efekti zonske neparaboličnosti su uključeni u proračun kroz energijski zavisnu efektivnu masu, a izračunati minimumi energijskih podzona su na:

$$E_1 = 0.083 \text{ eV}$$

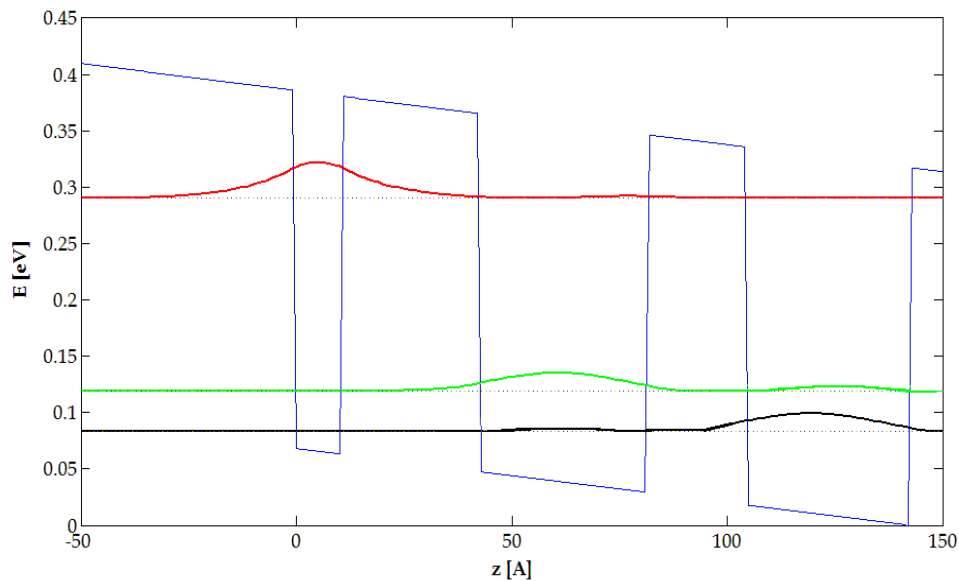
$$E_2 = 0.119 \text{ eV}$$

<sup>5</sup> U ranijim poglavljima, u izvođenjima, za pravac narastanja strukture je izabran pravac  $x$ . U numeričkim rezultatima, pravac narastanja sve tri strukture je pravac  $z$ .

$$E_3 = 0.290 \text{ eV}$$

a referentni nivo energije je prikazan na [Slici 27](#).

Metod konačnih razlika podrazumeva da je Schrodingerova jednačina napisana u takvoj formi da su izvodi zamenjeni (aproksimirani) konačnim razlikama. Na taj način se diferencijalna jednačina svodi na sistem algebarskih jednačina koje se rešavaju direktno. Time su u jednom koraku, i relativno brzo, izračunate energije diskretnih stanja i odgovarajuće normirane talasne funkcije bez uračunatih efekata zonske neparaboličnosti. Ono što treba znati je to da se efekti neparaboličnosti u realnim strukturama ne mogu zanemariti i da se ovako dobijene vrednosti mogu koristiti samo orijentaciono kao dobar početni rezultat za složenije (i numerički zahtevnije) metode. Korišćenjem metode



*Slika 28* Profil aktivne oblasti QCL-a, sa prikazanim vrednostima energija i odgovarajućim talasnim funkcijama.

konačnih razlika dobijene su vrednosti diskretnih energijskih stanja, u čijoj okolini su, dalje, tražene tačnije vrednosti rešenja kada se uzmu u obzir efekti neparaboličnosti. Finalne vrednosti energija diskretnih stanja su određene

primenom metode pogađanja. Metoda pogađanja je nešto vremenski zahtevnija, ali preciznija i funkcionije tako što se zadaju početni uslovi (vrednost talasne funkcije i prvog izvoda u tački sa leve strane strukture), a zatim se numerički vrši integraljenje Schrodingerove jednačine i ispituje vrednost rešenja u izabranoj tački na desnom kraju strukture. U toj tački se očekuje da kvadrat modula talasne funkcije približno opadne na nulu, što će se desiti ako je približno pogođena tačna energija diskretnog stanja. Ako to nije slučaj, talasna funkcija će divergirati.

Dobijene vrednosti minimuma energijskih podzona i odgovarajuće talasne funkcije posmatrane strukture, za korišćene parametre, prikazane su na [Slici 28](#).

Parametri materijala koji su korišćeni u proračunima su:

$$m^*(\text{GaAs}) = 0.0665 \cdot m_0$$

$$m^*(\text{AlAs}) = 0.15 \cdot m_0$$

$$\gamma_{nm} = 5 \text{ meV}$$

$$\varepsilon_b \approx 13$$

$$L = 500 \text{ \AA},$$

pri čemu je  $m_0$  je masa slobodnog elektrona, a  $L$  predstavlja dužinu jedne periode (periodu čine aktivna oblast i odgovarajuća kolektorsko/injektorska oblast).

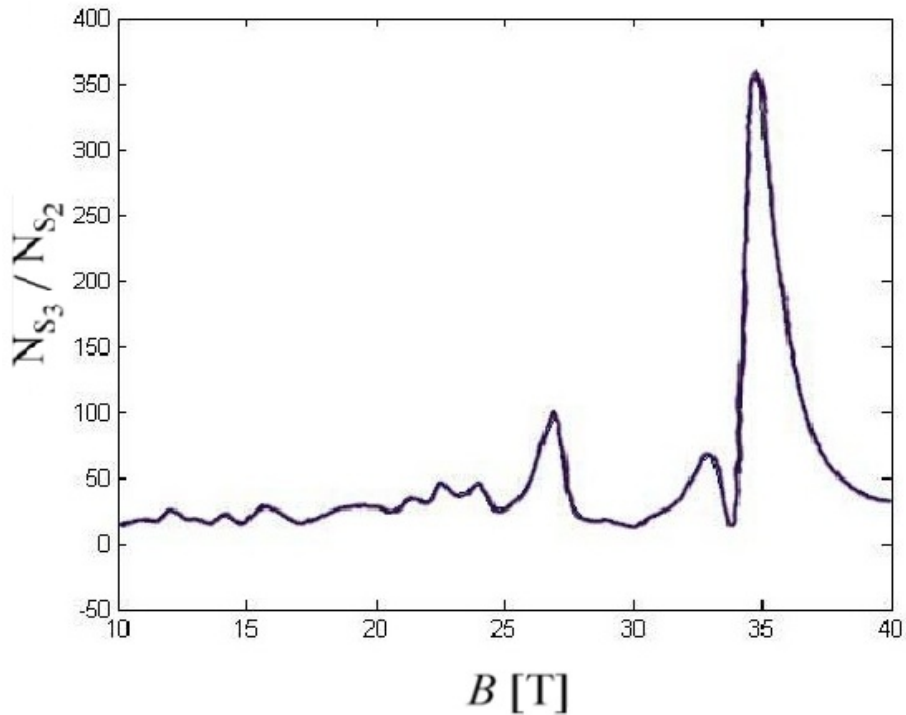
Kao što je detaljno objašnjeno u četvrtom poglavlju, kretanje elektrona u pravcu paralelnom ravnima slojeva, kada na strukturu nije primenjeno magnetno polje, je slobodno. Tada je neradijativno vreme života nosilaca u drugom pobuđenom stanju ultra-kratko i određeno je rasejanjem tipa

elektron-LO fonon na niže podzone aktivne oblasti. Međutim, kada se na aktivnu oblast QCL-a primeni spoljašnje magnetno polje normalno na epitaksijalne slojeve, to polje uvodi dodatnu kvantizaciju kretanja elektrona u ravni slojeva – prevodi dvodimenzionalne, kontinualne podzone u nizove strogo diskretnih stanja energija i dolazi do drastične promene, odnosno povećanja, trajanja života u gornjem laserskom stanju.

Oscilacije brzine relaksacije sa magnetnim poljem za prelaze sa najnižeg Landauovog nivoa treće podzone, na koju je injektovana većina nosilaca, na setove Landauovih nivoa dva energijski niže podzone su veoma izražene. Istaknuti pikovi se nalaze na onim vrednostima magnetnog polja koje zadovoljavaju uslove rezonancije za emisiju LO fonona. Sa druge strane, kada je raspored Landauovih nivoa takav da se ispod nivoa (3,0) ne nalazi nivo za  $\approx \hbar\omega_{LO}$  niže energije, ovaj tip rasejanja je inhibiran, a vreme života gornjeg laserskog stanja povećano. Kada je struja injekcije konstantna, promena vremena života nosilaca svih stanja u sistemu rezultuje u povećanju ili smanjenju populacije između stanja (3,0) i (2,0). Tako za one vrednosti magnetnog polja pri kojima konfiguracija relevantnih elektronskih stanja vodi do maksimalno povećanih brzina relaksacije sa nivoa (3,0), postoji ogroman pad u optičkom pojačanju, a u obrnutom slučaju, za određene vrednosti B javlja se pik pojačanja.

Vrednosti primenjenog magnetnog polja su varirane od 10 T do 40 T. Rasejanja od značaja za rad strukture u infracrvenoj oblasti, koja su uzimana u obzir u proračunima, su rasejanje na LO fononima i rasejanje na AC fononima. Zavisnost odnosa ukupnih površinskih gustina elektrona (usled rasejanja na LO i AC fononima) gornjeg i donjeg laserskog nivoa, dobijenih rešavanjem sistema (4.19), od primenjenog magnetnog polja, prikazana je na [Slici 29](#). Struja injekcije elektrona, kao i jačina električnog polja, držani su konstantnim.

Na [Slici 29](#) ističu se pikovi za magnetna polja  $B=34,5$  T i  $B=27$  T . Ti pikovi odgovaraju vrednostima magnetnog polja na kojima je postignut najveći stepen inverzne populacije. Za vrednost magnetnog polja  $B=34,5$  T, optičko pojačanje je skoro dva puta veće od pojačanja ostvarenog u slučaju kada na strukturu nije primenjeno magnetno polje.



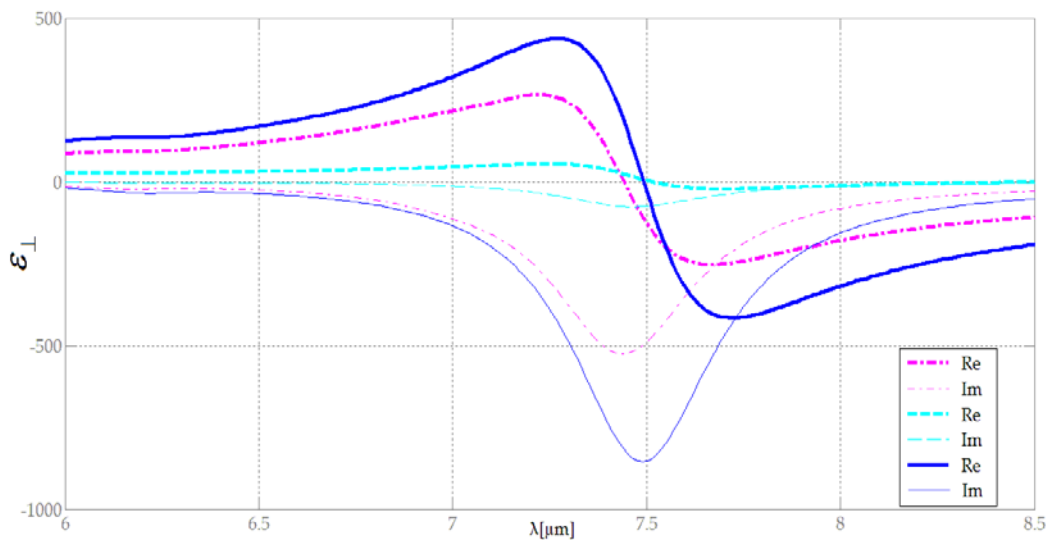
*Slika 29* Odnos površinskih gustina elektrona sumiranih po svim relevantnim Landau-ovim nivoima treće i druge podzone, respektivno, u funkciji magnetnog polja.

Do maksimalnog povećanja brzine relaksacije sa gornjeg laserskog nivoa, a time i do minimiziranja stepena inverzne populacije i do velikog pada u optičkom pojačanju, dolazi pri jačini magnetnog polja od  $B=30$  T.

Iz izraza za energije Landau-ovih nivoa (4.5 i 4.6), vidi se da rastojanja nivoa u strukturi koja odgovaraju laserskom prelazu, zavise od jačine primenjenog magnetnog polja. Cilj je bio da se promenom vrednosti magnetnog polja utiče na pomeranje položaja Landauovih nivoa, pa

posledično i na vreme života nosilaca na gornjem laserskom nivou čime se utiče na raspodelu nosilaca po nivoima, inverznu populaciju i direktno na dielektričnu permitivnost.

Na **Slici 30** su prikazani pomenuti specifični slučajevi - dva za magnetna polja koja maksimizuju inverznu populaciju u razmatranoj strukturi i jedan gde je pronađen minimum inverzne populacije. Svi parametri strukture su isti (koncentracija, temperatura), samo je menjano magnetno polje. Struja injekcije je održavana konstantnom za sve prikazane vrednosti magnetnog polja. Ukupna permitivnost je računata prema jednačini (5.8).

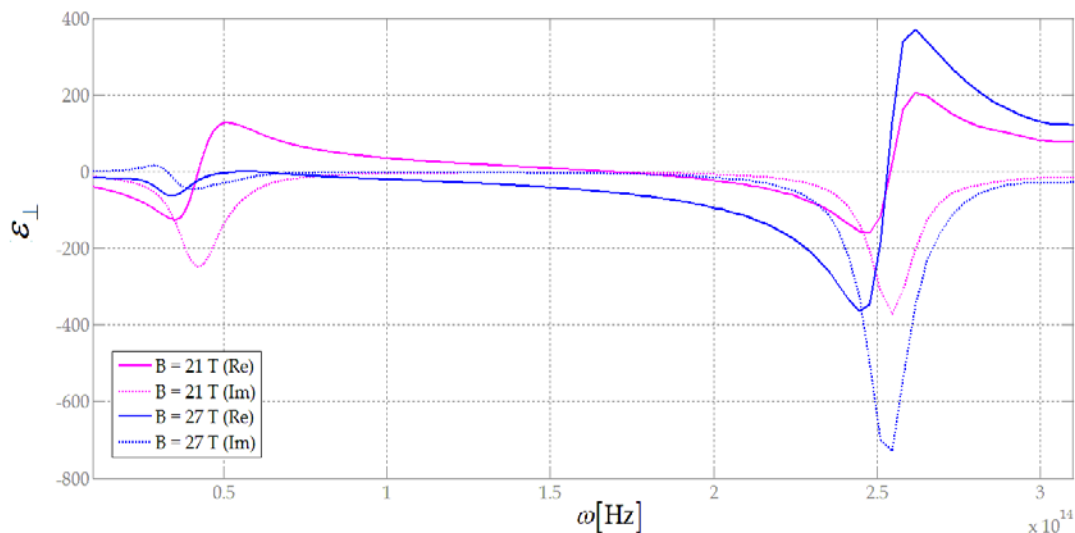


**Slika 30** Realni i imaginarni deo permitivnosti  $\epsilon_{\perp}$  za GaAs/Al<sub>0.38</sub>Ga<sub>0.62</sub>As QCL u funkciji talasne dužine, izračunati na vrednostima magnetnog polja koja maksimizuju stepen inverzne naseljenosti (27 T- magenta i 34,5 T-plava) i polja koje minimizira (30 T-cijan). Površinska koncentracija nosilaca iznosi  $N_s = 5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ , T=300 K.

Sa **Slike 30** se jasno vidi razlika u vrednostima dielektrične permitivnosti za posmatrana tri slučaja. Iako je u sva tri slučaja postignuta željena negativna permitivnost, za B=30 T minimum realnog dela normalne komponente permitivnosti se malo spustio ispod nule pri datoj koncentraciji, a opseg talasnih dužina na kojima je ta komponenta negativna je jako uzak. Za druge

dve posmatrane vrednosti magnetnog polja to nije slučaj, za magnetna polja koja maksimizuju inverznu populaciju, negativna permitivnost se postiže na veoma širokom opsegu talasnih dužina.

Na **Slici 31** su prikazani slučajevi za magnetna polja jačina  $B=27$  T (na kom se javlja maksimum pojačanja) i  $B=21$  T (koje se posebno ne ističe po efektima, odnosno ne odgovara ni maksimumu, ni minimumu (**Slika 29**)). Može se zaključiti da nije neophodno postići veoma velike vrednosti optičkog pojačanja kako bi se postigle negativne vrednosti realnog dela permitivnosti. Kao što je prikazano, ovo se može postići za regularne površinske koncentracije elektrona, ali pri specifičnim vrednostima magnetnog polja za koje je inverzna populacija povećana.

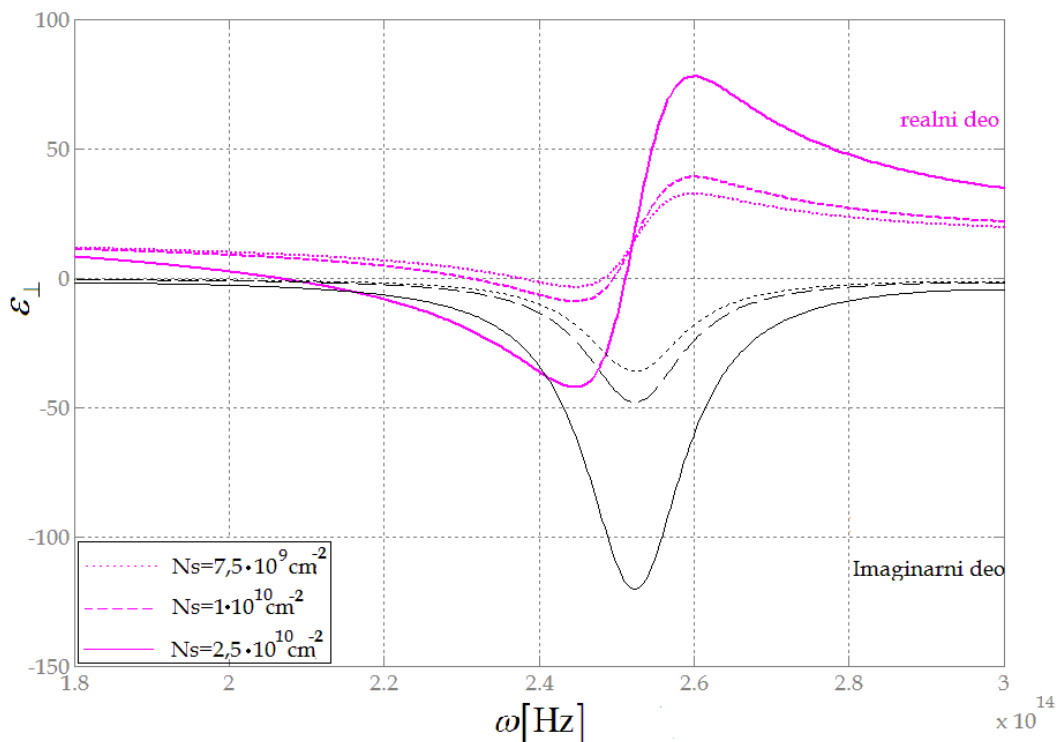


**Slika 31** Zavisnost  $\varepsilon_{\perp}$  od frekvencije za različite vrednosti magnetnog polja, za  $N_S=1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  i na temperaturi od  $T=300$  K. Pune linije odgovaraju realnim delovima posmatrane komponente permitivnosti, a tačkaste linije njenim imaginarnim delovima.

Ono što se, takođe, uočava je da se javlja još jedan, mada značajno manji, opseg frekvencija na kojima realni deo normalne komponente permitivnosti ima negativnu vrednost. Taj opseg odgovara prelazima sa donjeg laserskog stanja na osnovno stanje.



Efekti zonske neparaboličnosti utiču na promenu energijske razdvojenosti između nivoa relevantnih za radijativne prelaze sa magnetnim poljem, čime rezonantna talasna dužina postaje zavisna od magnetnog polja, što se vidi na **Slikama 30, 31 i 33**. Ovo omogućava male pomeraje frekvencije/talasne dužine na kojoj se postižu minimum realnog i imaginarnog dela permitivnosti promenama jačine primenjenog polja i ovo se može koristiti za fino podešavanje permitivnosti.



**Slika 32** Zavisnost realnog (magenta linije) i imaginarnog (crne linije) dela permitivnosti  $\epsilon_{\perp}$  od frekvencije, pri magnetnom polju  $B=30$  T, za različite površinske gustine nosilaca.

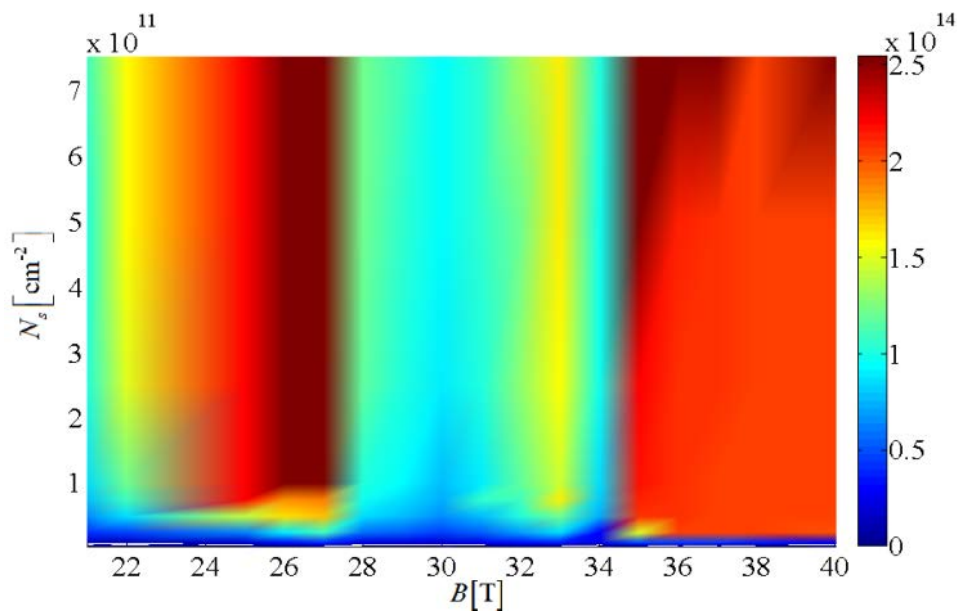
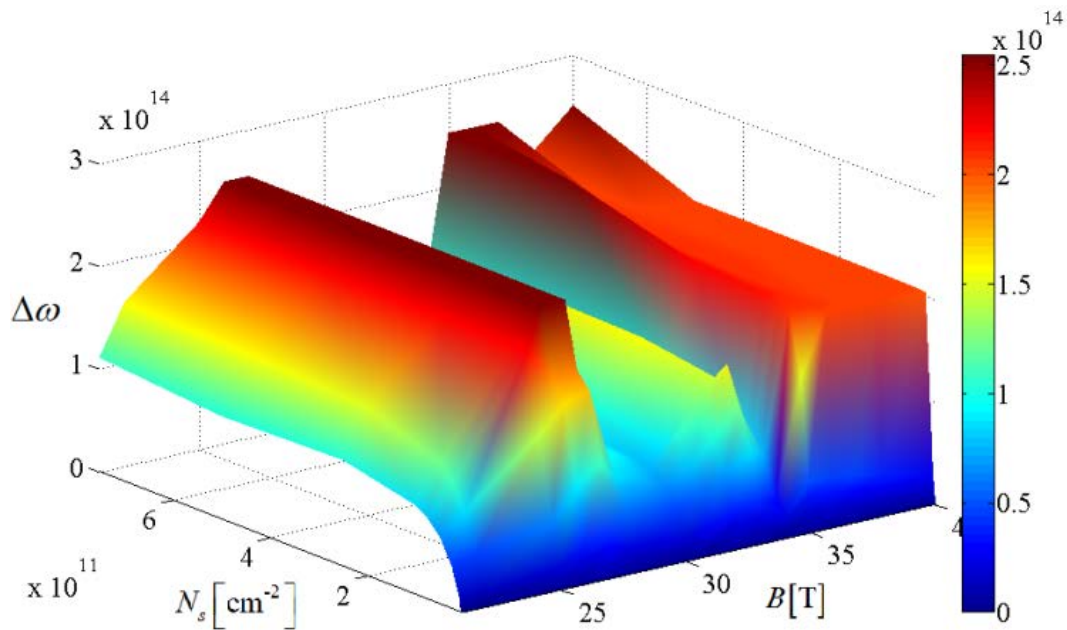
Kako bi se pronašao neki „minimalni“ stepen dopiranosti ispod koga se ne može ići kako bi dizajnirana struktura mogla ostvariti željenu karakteristiku - negativni indeks prelamanja, izračunato je i posmatrano šta se dešava sa realnim delom permitivnosti kada se menjaju vrednosti površinske gustine nosilaca za različite jačine magnetnog polja. Najpre je posmatrano polje koje minimizuje optičko pojačanje (i inverznu populaciju). Ukupna

permitivnost je izračunata prema jednačini (5.8), a na **Slici 32** je prikazana zavisnost realnog dela normalne komponente permitivnosti od frekvencije za magnetno polje  $B=30$  T pri različitim vrednostima površinske koncentracije. Ono što je zaključeno je da se smanjenjem nivoa dopiranja lako prelazi iz opsega u kojem postoji LH režim rada u opseg sa RH režimom rada. Jasno se vidi sa slike da se opseg frekvencija pri kojima materijal ima negativan indeks prelamanja povećava sa povećanjem koncentracije, što je sasvim u skladu sa teorijskim razmatranjima izloženim u petom poglavlju. Može se uočiti i to da se frekvencije pri kojima struktura ulazi u LH režim, posmatrajući od nižih ka višim frekvencijama, značajno menjaju za različite nivoe dopiranosti strukture. Sa povećanjem koncentracije njihova vrednost se smanjuje šireći opseg frekvencija na kojima je struktura u LH režimu ka nižim frekvencijama. Sa druge strane, vrednosti frekvencija pri kojima struktura izlazi iz LH režima i ponovo prelazi u RH režim rada, ne pokazuju značajne promene.

Na **Slici 33** je ilustrovano kako opseg frekvencija pri kojima se metamaterijal ponaša kao „levoruki“ zavisi od površinske gustine naelektrisanja i vrednosti primenjenog magnetnog polja. Ostavljajući sve parametre nepromenjenim i posmatrajući isključivo promenu koncentracije, dobijeno je da postoji „granična“ vrednost koncentracije  $N_{Smin}$ . Za sve koncentracije čija je vrednost manje od te „granične“ vrednosti, struktura se ponaša kao RH materijal na svim frekvencijama. Bez obzira na promene magnetnog polja, ukoliko je površinska koncentracija nosilaca ispod  $N_{Smin}$ , nije moguće ostvariti LH režim rada.

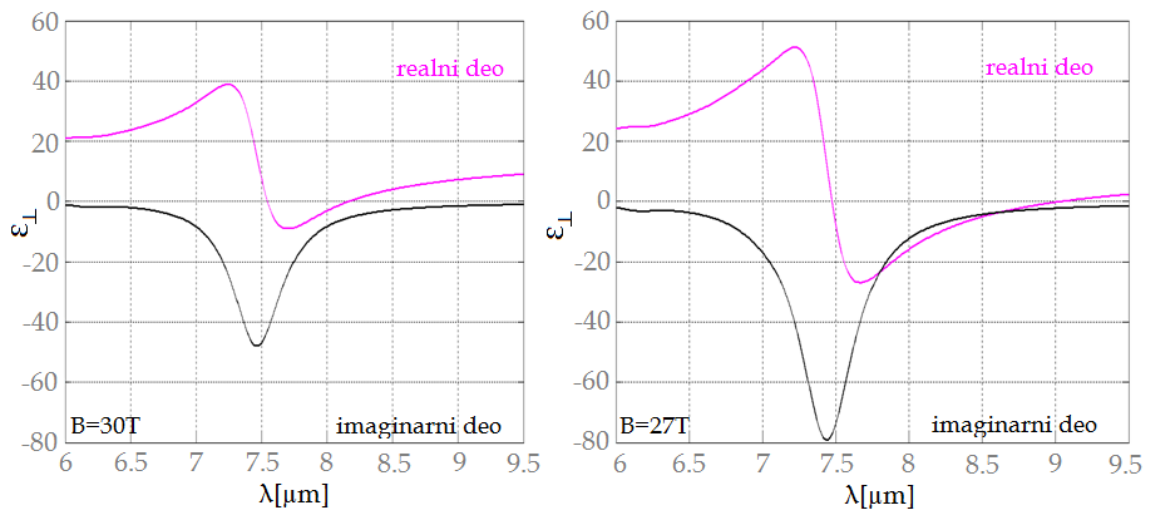
Ako je, pak, materijal dopiran tako da je površinska koncentracija nosilaca veća od  $N_{Smin}$ , postoji opseg frekvencija pri kojima se struktura ponaša kao materijal sa negativnim indeksom prelamanja za odgovarajuće vrednosti magnetnog polja. Povećanjem koncentracije povećava se i opseg frekvencija na kojima se ostvaruje LH režim.

Tamno plave oblasti odgovaraju situaciji kada se ne može postići negativno prelamanje. Čak i ako se struktura izloži veoma visokim vrednostima magnetnog polja, u ovim slučajevima je nemoguće ostvariti dovoljno veliku inverznu populaciju u QCL-u koja bi omogućila ostvarivanje LH režima.



**Slika 33 (gore)** Zavisnost opsega frekvencija  $\Delta\omega$  na kojima se metamaterijal ponaša kao LH u zavisnosti od površinske gustine elektrona za različite vrednosti magnetnog polja, predstavljena u 3D formi, na temperaturi  $T=300$  K; **(dole)** Ortografska projekcija zavisnosti opsega  $\Delta\omega$  od površinske gustine elektrona  $N_S$  i magnetnog polja  $B$ .

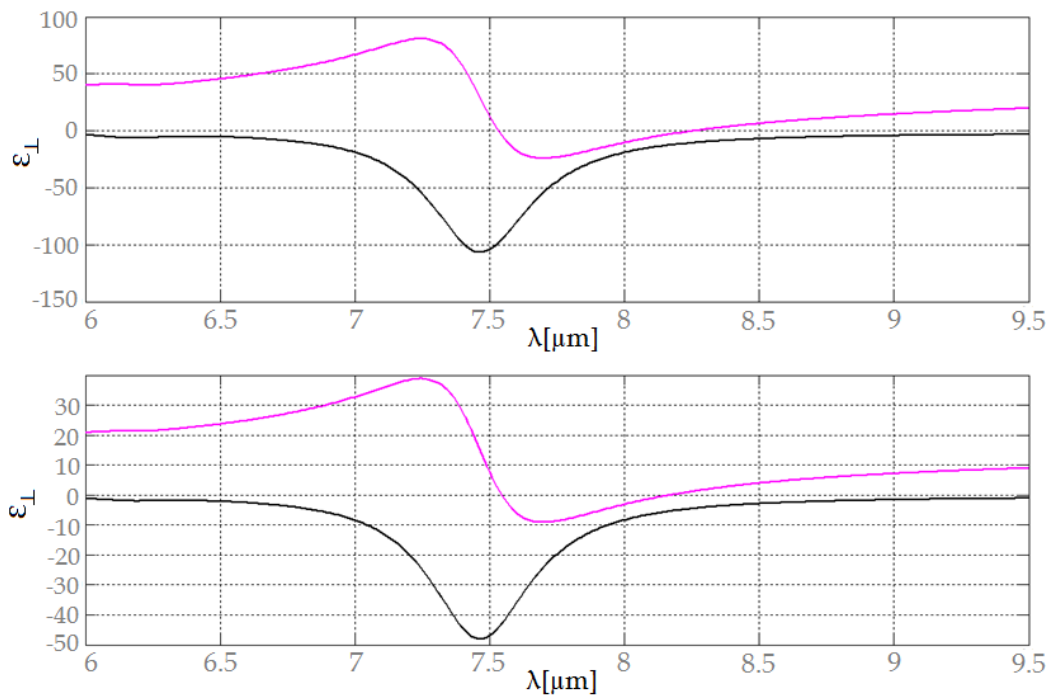
Sa slike se može videti da je neophodno podesiti (dopiranjem) da ukupna površinska gustina elektrona bude najmanje  $N_{S\min} \approx 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ , kako bi razmatrani metamaterijal mogao ući u željeni režim rada za neke vrednosti magnetnog polja. Koncentracija  $N_{S\min}$  je eksperimentalno sasvim realizibilna, kao i koncentracije koje su veće i znatno veće od nje. Povećavanje nivoa dopirnosti doprinosi širenju opsega vrednosti magnetnog polja pri kojima je moguće ostvariti negativno prelamanje, a takođe i opseg frekvencija pri kojima se materijal ponaša kao LH. Najširi opseg frekvencija  $\Delta\omega$  se dešava za magnetno polje koje povećava inverznu populaciju, a to je u slučaju ove strukture polje čija jačina iznosi  $B=27$  T. Ovaj opseg je prilično širok za sve površinske gustine elektrona iznad  $N_{S\min}$ . Sa druge strane, najuži opseg odgovara magnetnom polju pri kome konfiguracija relevantnih elektronskih stanja vodi maksimalnom povećanju brzine relaksacije sa stanja (3,0), a to je za  $B=30$  T.



**Slika 34** Realni (magenta linija) i imaginarni (crna linija) deo permitivnosti  $\epsilon_{\perp}$  za GaAs/Al<sub>0.38</sub>Ga<sub>0.62</sub>As QCL u funkciji talasne dužine, pri površinskoj koncentraciji nosilaca  $N_s = 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  (a) izračunati na vrednostima magnetnog polja 30 T, (b) izračunati na vrednostima magnetnog polja 27 T, pri temperaturama  $T=300 \text{ K}$ .

Poređenje opsega talasnih dužina pri istoj površinskoj koncentraciji i struji injekcije, na temperaturi od 300 K, pri kojima se ostvaruje negativno prelamanje za pomenuta dva slučaja (27 T i 30 T), prikazano je na **Slici 34**. Na slici se vidi kako je za izabranu koncentraciju opseg na kome se ostvaruje LH režim u slučaju kada je primenjeno magnetno polje  $B=27 \text{ T}$ , dva puta veći od opsega koji odgovara magnetnom polju  $B=30 \text{ T}$ .

Ono što je, takođe, posmatrano u radu jeste uticaj temperature na ostvarivanje LH režima. Promena normalne komponente dielektrične permitivnosti u zavisnosti od temperature prikazana je na **Slici 35**. Na slici je predstavljena zavisnost realnog dela permitivnosti od talasne dužine za slučaj kada je temperatura  $T=77 \text{ K}$  i slučaj kada je  $T=300 \text{ K}$ . Magnetno polje koje deluje na strukturu je  $B=30 \text{ T}$ , a površinska gustina nosilaca  $N_s = 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ .



**Slika 35** Realni (magenta linija) i imaginarni (crna linija) deo permitivnosti  $\varepsilon_{\perp}$  za GaAs/AlGaAs QCL sa slike , u funkciji talasne dužine, izračunati za  $B=30$  T, površinsku koncentraciju nosilaca  $N_s = 1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  pri različitim temperaturama:  $T=77$  K (**gore**) i  $T=300$  K (**dole**).

Pri izabranoj dopiranosti i jačini magnetnog polja od 30 T, i u slučaju kada je temperatura 300 K i u slučaju kada je 77 K, metamaterijal pokazuje određeni opseg talasnih dužina na kojima se može ostvariti negativna vrednost realnog dela normalne komponente permitivnosti, a time i negativna vrednost realnog dela indeksa prelamanja. Ono što se može primetiti je da su apsolutne vrednosti permitivnosti za slučaj niže temperature značajno veće, pa je tako za izabrano polje i koncentraciju, pri temperaturi od 77 K, minimalna vrednost realnog dela permitivnosti skoro duplo niža od slučaja na temperaturi od 300 K. Što se tiče opsega talasnih dužina pri kojima je realni deo normalne komponente manji od nule, razlike nisu tako velike. Za značajno nižu temperaturu širina opsega se povećala vrlo malo.

## 6.2. Proračuni za aktivnu oblast GaAs/AlGaAs kvantnog kaskadnog lasera, koji radi u terahercnom delu spektra

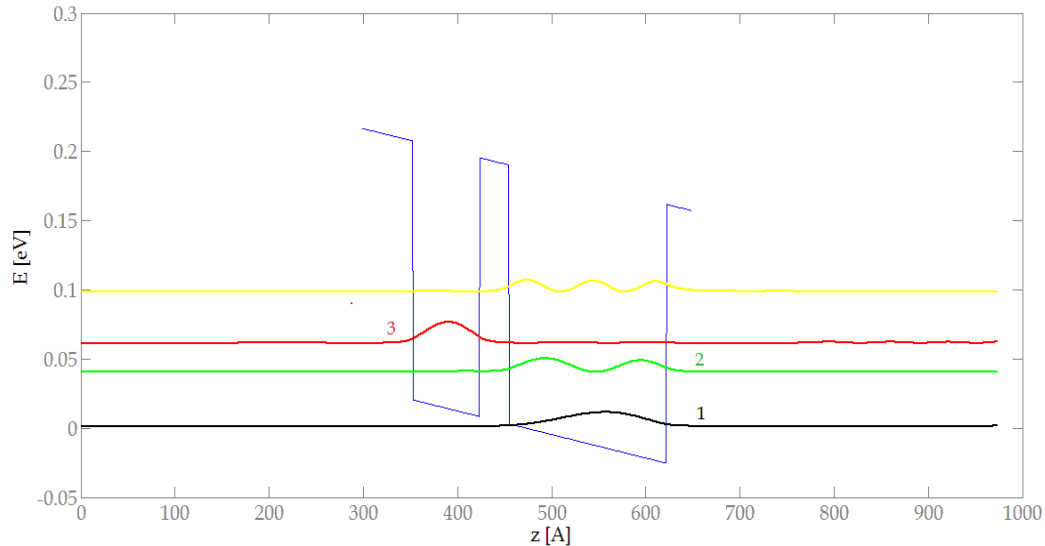
U ovom radu su razmatrane dve mogućnosti dizajna metamaterijala na bazi terahercnih QC lasera. Razlika u dizajnu aktivne oblasti je, zapravo, razlika u broju kvantnih jama koje se u toj oblasti nalaze. Prva analizirana struktura sadrži dve jame po periodi, dok se u drugoj strukturi nalaze tri jame u aktivnoj oblasti.

Da bi se odredila dielektrična permitivnost koja zavisi od stepena inverzne populacije, moraju se odrediti sve relevantne površinske gustine elektrona, što znači da se najpre mora odrediti raspodela elektrona po svim diskretnim stanjima u aktivnoj oblasti. Kao i kod QCL-a koji rade u srednjoj infracrvenoj oblasti, i kod terahercnih lasera se ovo postiže rešavanjem odgovarajućeg sistema brzinskih jednačina.

### 6.2.1. Struktura sa dve kvantne jame po periodi

Najprostiji terahercni dizajn sastoji se od samo dve kvantne jame. Takav dizajn je prikazan na [Slici 36](#) [14], i predstavlja prvu od dve analizirane strukture za terahercni deo spektra. Svaka perioda strukture ima četiri važna energijska stanja. Na [Slici 36](#) su brojevima od 1 do 3 obeležena relevantna energijska stanja, dok ćemo četvrto nazvati pomoćnim stanjem i ono je na slici iscrtano žutom bojom, ali nije obeleženo. Laserski prelaz se odigrava između nivoa obeleženih brojevima 3 ( $n=3$ ) i 2 ( $n=2$ ) i to su gornje i donje lasersko stanje, respektivno. Osnovno stanje je obeleženo sa 1 ( $n=1$ ). Aktivni region je okružen injektorskom i kolektorskom oblašću što omogućava injekciju nosilaca iz prethodnog, odnosno ekstrakciju nosilaca sa osnovnog nivoa u sledeći aktivni region. Dok je kod metamaterijala na bazi struktura koje emituju u srednjem infracrvenom delu spektra, injektorska/kolektorska oblast sačinjena od niza naizmenično postavljenih poluprovodnika koji na taj način

formiraju superrešetku konačne dužine, kod ove dve posmatrane terahercne strukture ovu oblast čini jedna injektorska barijera.

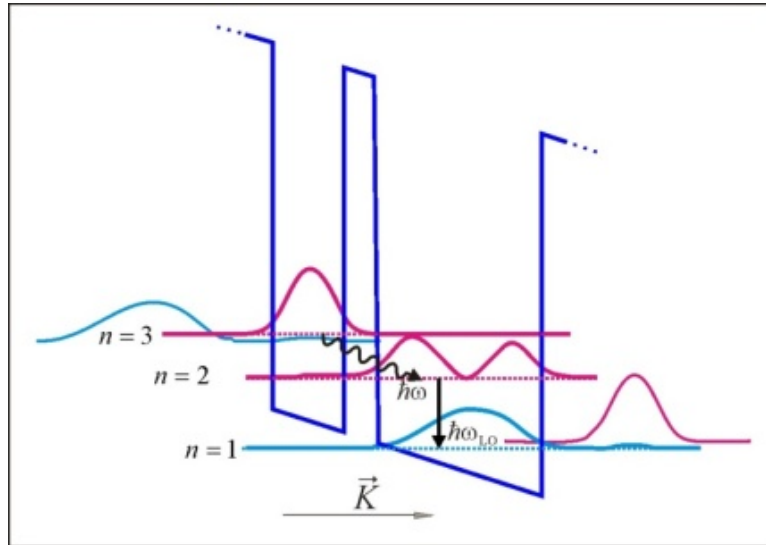


**Slika 36** Profil jedne periode terahercnog QCL-a koja se sastoji od dve kvantne jame i injektorske barijere sa prikazanim vrednostima energija i odgovarajućim kvadratima talasnih funkcija.

Gornji laserski nivo  $n=3$  je skoro u ravni sa osnovnim nivoom susedne tj. prethodne periode (**Slika 37**, **Slika 38**). Usled dijagonalnog prelaza  $3 \rightarrow 2$  (**Slika 37**), ovu strukturu karakteriše i mala vrednost matričnog elementa prelaza [98]. Relaksacija elektrona na osnovni nivo, proces koji obezbeđuje kratko vreme života nosilaca na donjem laserskom nivou, se odigrava u okviru iste jame (**Slika 37**).

Na **Slikama 36** i **37** je prikazana provodna zona jedne periode strukture. Dimenzije slojeva, odnosno širine barijera i jama, posmatrajući s leva na desno od prve barijere, su 56 Å, 71 Å, 31 Å, 167 Å. Vrednost spoljašnjeg električnog polja, primenjenog na strukturu u  $z$ -pravcu je 17 kV/cm. Struktura emituje na frekvenciji 4,6 THz (ugaona frekvencija  $\omega = 28,9$  THz).





*Slika 37* Profil jedne periode terahercnog QCL-a koji se sastoji od dve kvantne jame sa prikazom prelaza koji se odvijaju unutar nje.

Dodatni numerički parametri koji su korišćeni u proračunima su: visina barijere  $U_B=0.125$  eV, relevantni parametri za rasejanje na neravninama površina  $\Delta=1.5$  Å (srednja vrednost visine neravnine) i  $\Lambda=60$  Å (korelaciona dužina).

Izračunati minimumi relevantnih energijskih podzona ( $n=1,2,3$ ) i pomoćne podzone, koju ćemo označiti sa  $n=4$ , za centralnu periodu kada nije prisutno magnetno polje su

$$E_1 = 0,0014 \text{ eV}$$

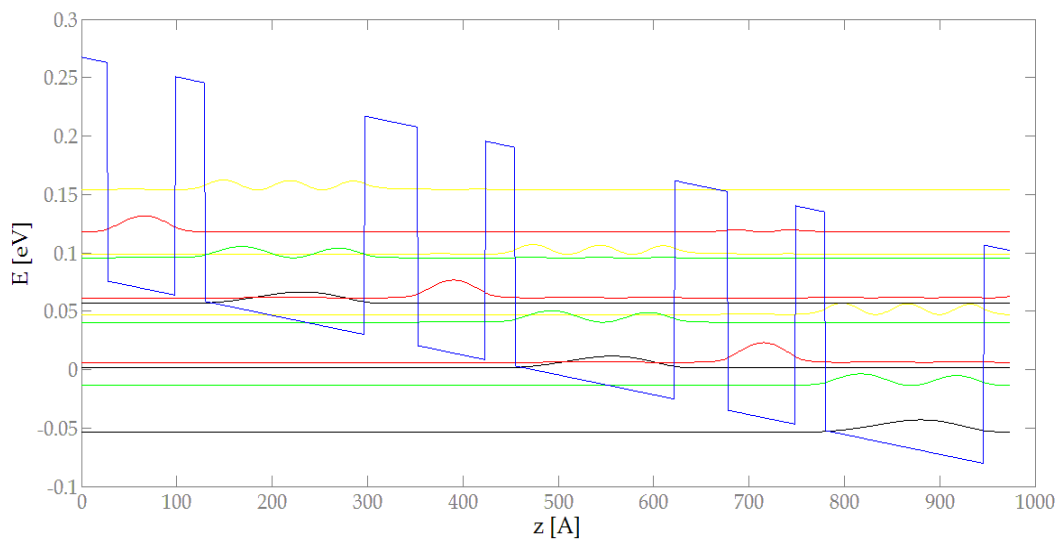
$$E_2 = 0,0405 \text{ eV}$$

$$E_3 = 0,0614 \text{ eV}$$

$$E_4 = 0,0985 \text{ eV}$$

gde je referentni nivo za energije dat na [Slici 36](#).

Dobijene vrednosti minimuma energijskih podzona i odgovarajuće talasne funkcije centralne i njoj susednih perioda, kao i profil aktivne oblasti terahercnog QCL-a sa dve kvantne jame po periodu, prikazane su na [Slici 38](#). Crna boja odgovara energijama (i talasnim funkcijama) osnovnog stanja ( $n=1$ ), zelena odgovara donjem ( $n=2$ ), a crvena gornjem laserskom stanju ( $n=3$ ). Pomoćno stanje je označeno žutom bojom.



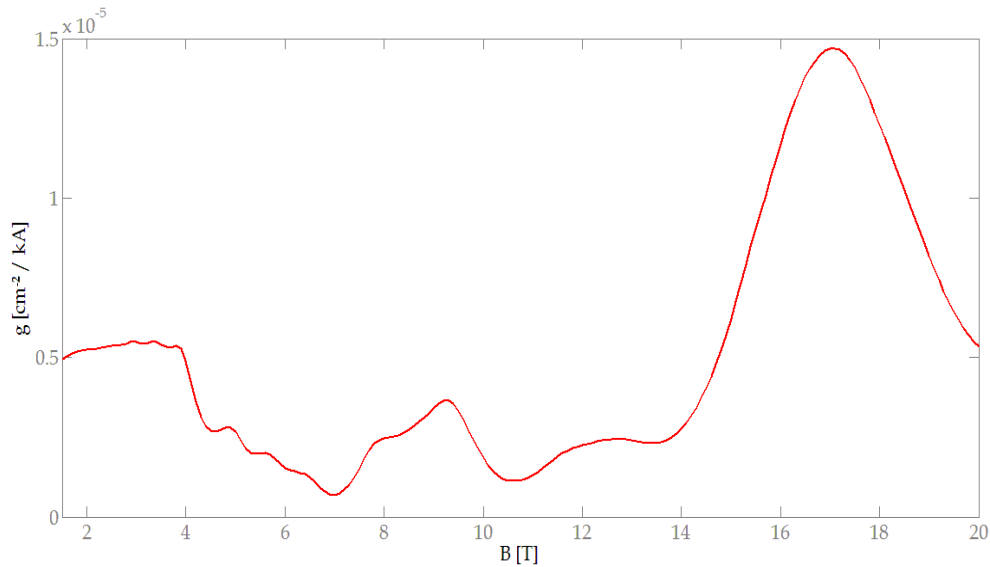
*Slika 38* Profil tri periode sa prikazanim vrednostima energija (levo) i odgovarajućim talasnim funkcijama (desno).

Radijativni prelazi između stanja  $n = 3$  i  $n = 2$  se ne odigravaju u okviru iste jame. Proračunata razlika energija između ovih stanja je  $\Delta E_{32} = 0,0209$  eV. Struktura je dizajnirana tako da je razlika između stanja  $n=2$  i  $n=1$   $\Delta E_{21} = 0,0391$  eV, što je približno energiji LO fonona, pa je glavni mehanizam rasejanja odgovoran za depopulaciju donjeg laserskog nivoa rasejanje elektrona na LO fononima i to je prelaz koji se odigrava u okviru iste jame. Ovi prelazi su ilustrovani na [Slici 37](#).

Kao što se vidi sa [Slike 38](#), u terahercnim strukturama, energijski nivoi, kako u jednoj periodu, tako i između susednih perioda su mnogo bliži nego što je to bio slučaj kod QCL-a u srednjem infracrvenom delu. Ovo za posledicu

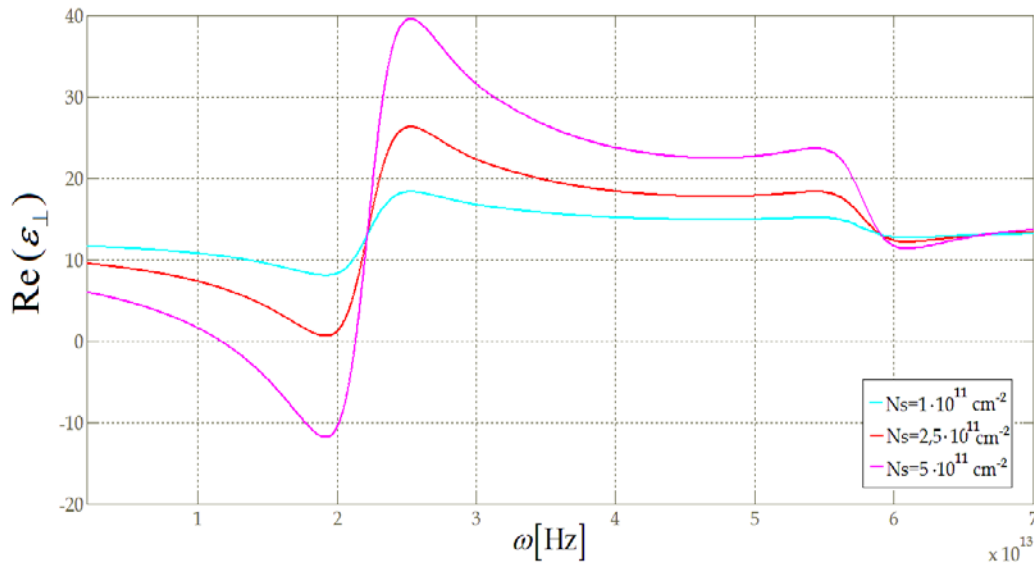
ima značajno prostorno preklapanje talasnih funkcija, te se ne mogu zanemariti uticaji rasejanja sa nivoa posmatrane periode na nivoe susednih perioda i obrnuto. Ono što prilično komplikuje rešavanje već složenog sistema brzinskih jednačina su upravo ove male udaljenosti između energijskih nivoa i preklapanja talasnih funkcija. Struja injekcije se više ne može uzimati konstantnom, kao što se podrazumevalo u strukturama dizajniranim za srednju infracrvenu oblast, već se u sistem uračunavaju i uticaji susednih perioda.

U radu su magnetna polja varirana od 1,5 T do 20 T sa korakom od 0,1 T. Na ovom opsegu magnetnih polja je računato optičko pojačanje koje uzima u obzir sve prelaze sa Landauovih nivoa gornjeg na relevantne Landauove nivoe donjeg laserskog stanja. Zavisnost optičkog pojačanja od jačine primenjenog magnetnog polja je prikazana na [Slici 39](#). Oscilacije brzine relaksacije u zavisnosti od magnetnog polja su veoma naglašene sa izraženim pikom na oko  $B=17,1$  T i još dva bitno manja pika na  $B=9,3$  T i  $B=2,9$  T. Kada je raspored Landauovih nivoa takav da ne postoji nivo koji se nalazi oko ili tačno za  $\approx \hbar\omega_{LO}$  ispod nivoa (3,0), relevantne brzine rasejanja su minimalne i pojačanje je značajno povećano. Nasuprot tom slučaju su situacije kada magnetno polje ima vrednosti u okolini  $B=7$  T i  $B=10,6$  T, gde se javljaju minimumi pojačanja.



**Slika 39** Zavisnost pojačanja u terahercnom QCL-u sa dve jame po periodi od primenjenog magnetnog polja za  $N_S=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , na temperaturi  $T=77 \text{ K}$ .

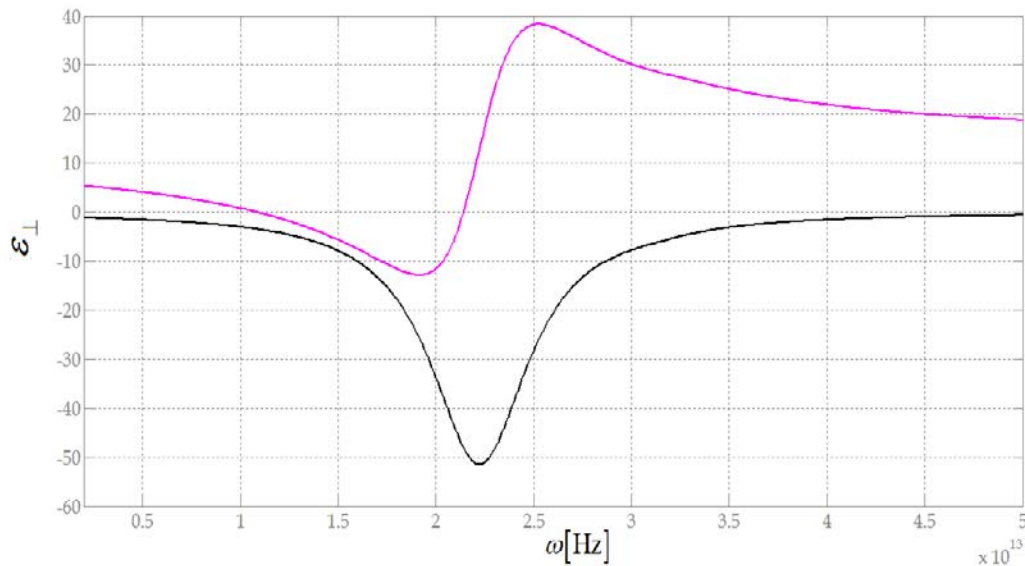
Kao i kod strukture koja emituje u infracrvenom delu spektra, i kod ove strukture je za početak analize izabrano magnetno polje koje maksimizuje optičko pojačanje u strukturi. U ovom slučaju je jačina magnetnog polja iznosila  $B=17,1 \text{ T}$ . Menjane su koncentracije i dobijeno je da je pri dovoljno velikoj površinskoj koncentraciji (koja se podešava dopiranjem) moguće postići negativne vrednosti realnog dela permitivnosti  $\varepsilon_{\perp}$ . Na [Slici 40](#) je prikazano kako menjanje površinske gustine nosilaca utiče na promenu permitivnosti pri istoj vrednosti primenjenog magnetnog polja. Kao i kod prethodno razmatranog QCL-a i ovde se može uočiti i proračunati minimalna površinska koncentracija koja je neophodna kako bi se struktura ponašala kao LH metamaterijal pri primeni magnetnog polja. Dobijeno je da za površinske koncentracije ispod  $N_{Smin}=2,5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  struktura ne može preći u LH režim rada, odnosno, bez obzira na primenjeno polje realni deo normalne komponente permitivnosti (a time i indeks prelamanja) će biti uvek pozitivan.



**Slika 40** Zavisnost realnog dela permitivnosti  $\varepsilon_{\perp}$  od frekvencije pri magnetnom polju  $B=17,1$  T, za različite površinske gustine nosilaca.

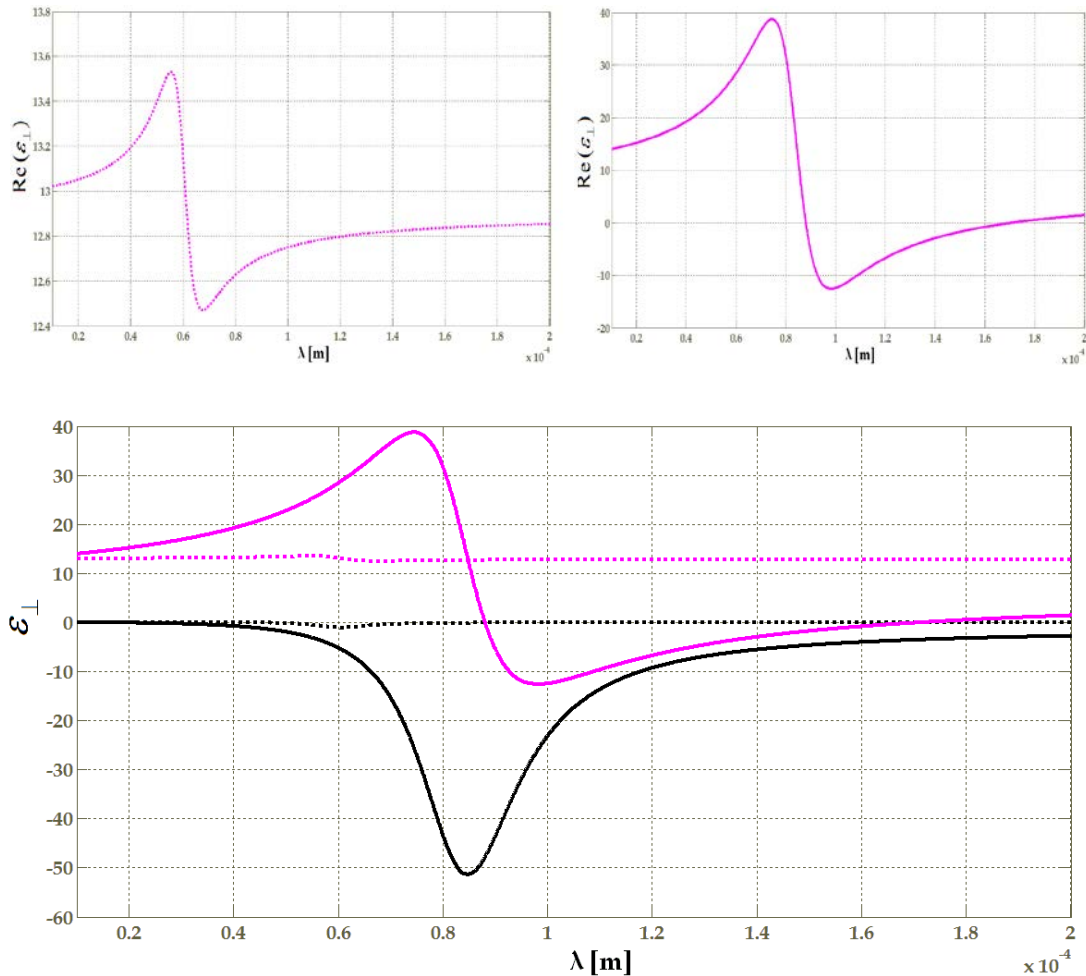
Zadovoljavajuća koncentracija pri kojoj se struktura za  $B=17,1$  T ponaša kao aktivni metamaterijal je  $N_S=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Opseg frekvencija na kojima ova struktura pokazuje osobinu negativnog indeksa prelamanja, okvirno se kreće od 11-22 THz i tada je minimum realnog dela posmatrane permitivnosti oko 12, što je prikazano na [Slici 40](#). Minimum imaginarnog dela se nalazi na oko 22 THz ([Slika 41](#)). Jasno je da ovi rezultati ne odgovaraju prelazu  $3 \rightarrow 2$ , odnosno da se javlja neki drugi prelaz, koji je, očigledno, zančajno dominantan.

Ono što se pokazalo u dizajnu ovakve terahercne strukture i što se dobilo rešavanjem brzinskih jednačina je to da je raspodela koncentracija po nivoima nešto drugačija od onoga što smo očekivali. Dok je kod infracrvenih lasera istaknuta inverzna populacija i razlika koncentracija između gornjeg laserskog stanja i ostalih stanja značajno velika i pozitivna, a nivoi gornjeg laserskog stanja ubedljivo najpopunjeniji, kod posmatrane terahercne strukture, čija jedna perioda ima dve spregnute kvantne jame, to nije slučaj.



**Slika 41** Zavisnost  $\epsilon_{\perp}$  od frekvencije u terahercnom QCL-u za  $B=17,1$  T,  $N_5=5 \cdot 10^{11}$  cm<sup>-2</sup> i  $T=77$  K. Magenta linija odgovara zavisnosti realnog dela permitivnosti, a crna zavisnosti imaginarnog dela od talasne dužine.

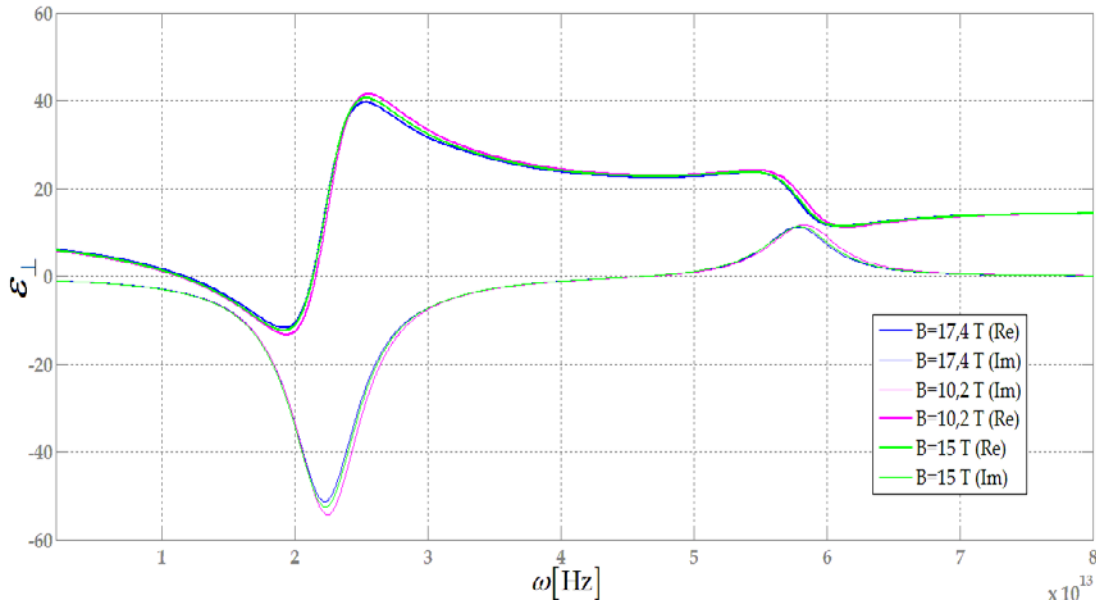
Iako je naseljenost nivoa (3,0) značajna i raspodela koncentracija između nivoa gornjeg laserskog stanja i donjeg laserskog stanja takva da željena inverzna populacija postoji, te da je moguće ostvariti optičko pojačanje, ono što se javlja kao zanimljivo jeste populisanost najnižeg nivoa osnovnog stanja. Zapravo, svi Landauovi nivoi osnovnog stanja su značajno populisani i koncentracije su veće od koncentracija na odgovarajućim Landauovim nivoima gornjeg i donjeg laserskog stanja. To je i logično, obzirom da je iskorišćen rezonantni mehanizam rasejanja na LO fononima (koji je ultrabrz proces i može trajati ispod 1ps) za brzu depopulaciju donjeg laserskog nivoa. Kako je to, za slučaj ove strukture, prelaz koji se odigrava u istoj jami, vreme života nosilaca na donjem laserskom nivou je ultrakratko, čime dolazi do brzog populisanja osnovnog stanja, što je važno, jer osnovno stanje, dalje, populiše narednu periodu.



*Slika 42* Zavisnost realnog dela  $\epsilon_{\perp}$  od talasne dužine zračenja u terahercnom QCL-u kada se posmatraju samo prelazi: (gore levo) sa Landauovih nivoa gornjeg na nivoe donjeg laserskog stanja, (gore desno) sa Landauovih nivoa osnovnog stanja jedne periode na nivoe donjeg laserskog stanja sledeće periode, za  $B=17,1$  T,  $N_S=5 \cdot 10^{11}$  cm<sup>-2</sup> i  $T=77$  K. Donja slika predstavlja uporedne zavisnosti realnog (roze linija) i imaginarnog (crna linija) dela  $\epsilon_{\perp}$  ova dva prelaza.

Ono što se dešava, kako zbog velikog prostornog preklapanja talasnih funkcija, tako i zbog energijske bliskosti među nivoima susednih perioda, jeste da postoji još jedna bitna komponente u postizanju negativne permitivnosti, a to je prelaz sa osnovnog nivoa jedne periode na donji laserski nivo sledeće. Razlika energija između ovih stanja je  $\approx 15$  meV, a razlika koncentracija oko dva reda veličine, te ovaj prelaz, iako dijagonalni, daje ubedljivo najveći doprinos ostvarivanju negativne vrednosti realnog dela normalne

komponente permitivnosti (Slika 42 gore desno), a time i ostvarivanju negativnog indeksa prelamanja. Uticaj ovog prelaza i laserskog prelaza na postizanje negativne vrednosti realnog dela permeabilnosti upoređeni su i prikazani na Slici 42.



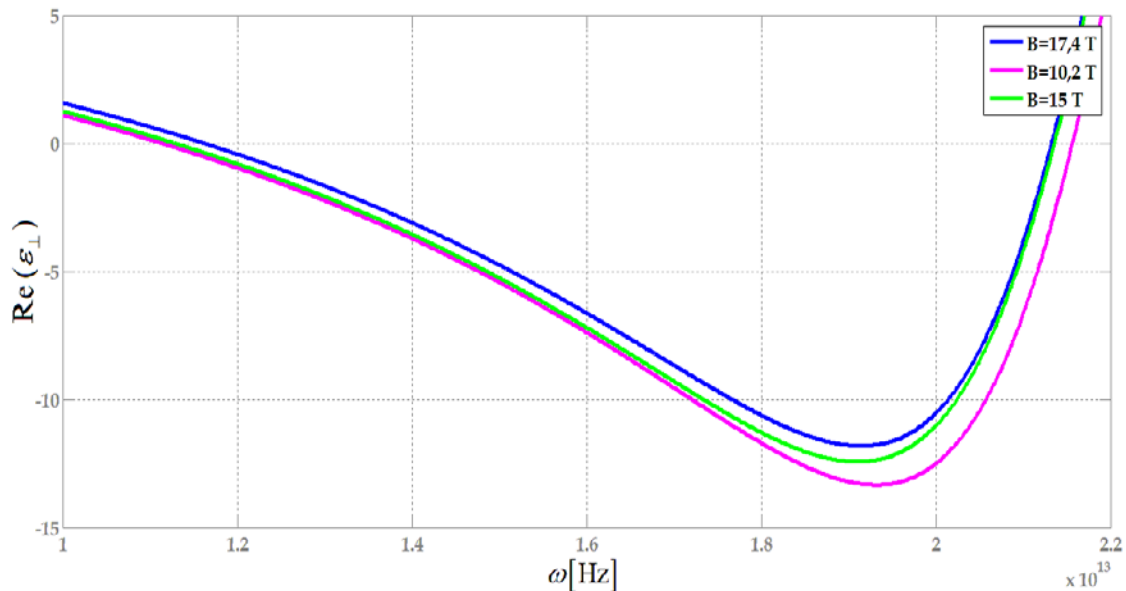
Slika 43 Zavisnost  $\varepsilon_{\perp}$  od frekvencije za različite vrednosti magnetnog polja, za  $N_s=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  i na temperaturi od  $T=77 \text{ K}$ .

Iako je vrednost matičnog elementa mala, pokazalo se da i prelaz sa gornjeg laserskog nivoa jedne periode na „pomoćni” nivo sledeće periode daje doprinos u pojačanju. Razlika energija između ovih stanja je  $\approx 15 \text{ meV}$ , a razlika koncentracija oko dva reda veličine, te je i ovo stanje bilo neophodno uzeti u obzir i pomenuti prelaz uključiti u proračun.

Pošto je za magnetno polje koje maksimizuje optičko pojačanje postignut željeni efekat, prešlo se na posmatranje uticaja promene magnetnog polja na isti efekat. Kako su strukture koje emituju u infracrvenom delu spektra bile jako osetljive na promenu intenziteta polja, te se opseg talasnih dužina/frekvencija značajno pomerao i menjao kako se menjalo  $B$ , to je pretpostavka bila da će i terahercna struktura pokazivati sličnu osetljivost.

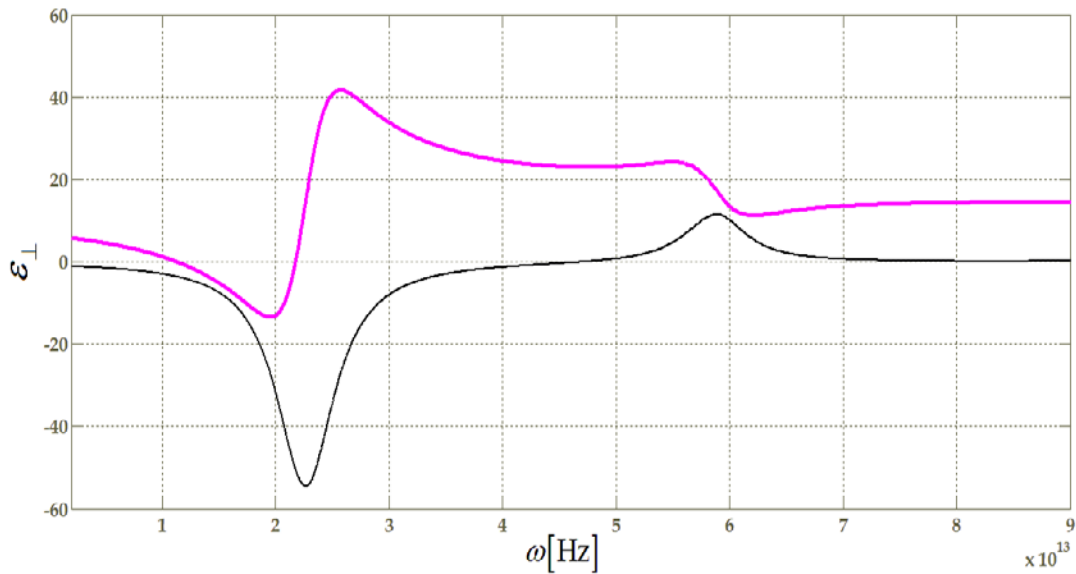


Međutim, kada se posmatra uticaj magnetnog polja na ovu strukturu, tačnije kako promene jačine magnetnog polja utiču na performanse, tu se situacija značajno razlikuje od strukture koja emituje u srednjem infracrvenom delu spektra.



*Slika 44* Zavisnost realnog dela  $\epsilon_{\perp}$  od frekvencije za različite vrednosti magnetnog polja, za  $N_s=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  i na temperaturi od  $T=77$  K.

Na *Slici 43* su prikazani specifični slučajevi – jedan za magnetno polje koje maksimizuje inverznu populaciju ( $B=17,1$  T) u razmatranoj strukturi i jedan gde je pronađen minimum inverzne populacije ( $B=10,6$  T), kao i za magnetno polje  $B=15$  T. Svi parametri strukture su isti (koncentracija  $N_s=5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ , temperatura  $T=77$  K), samo je menjana jačina magnetnog polja. Sa *Slike 43* se može videti kako zavisnost realnog (a i imaginarnog) dela permitivnosti ostaje skoro nepromenjena za različite vrednosti magnetnog polja. Struktura ulazi u aktivan režim i opseg frekvencija je desetak THz pri delovanju svakog od tri prikazana magnetna polja. Kada uveličamo taj opseg za koji se postiže negativna vrednost realnog dela permitivnosti, a to je otprilike od 11-21 THz, i kada posmatramo dobijene krive, vidimo da opsezi nisu identični, što je prikazano na *Slici 44*, ali su promene male.



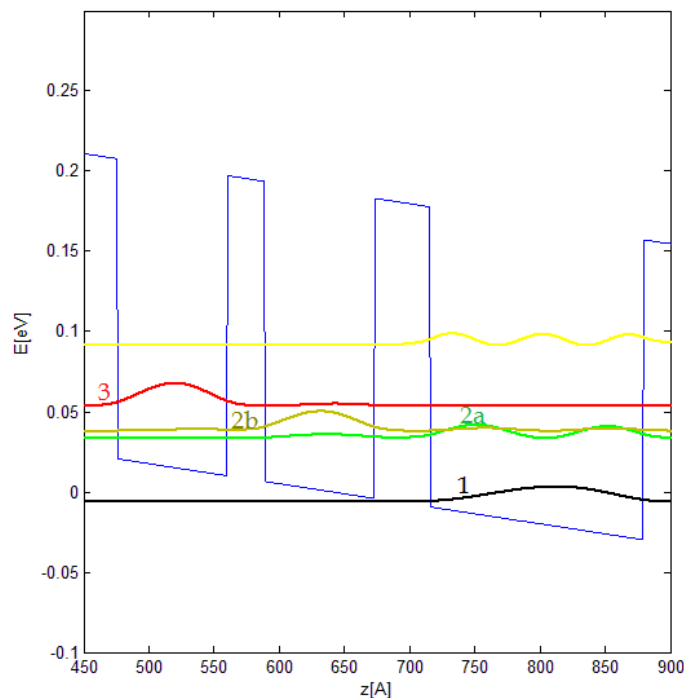
*Slika 45* Zavisnost  $\varepsilon_{\perp}$  (roze linija-realni, crna linija-imaginarni deo) od talasne dužine zračenja za  $B=1,5$  T,  $N_s=5 \cdot 10^{11}$  cm $^{-2}$  i  $T=77$  K.

Dalje smanjivanje vrednosti magnetnog polja nije značajno uticalo na promene. Proračuni su rađeni do 1,5 T i dobijeni su slični rezultati.

Kako je objašnjeno ranije u tekstu (poglavlje 4.4.), primena spoljašnjeg magnetnog polja normalno na ravni slojeva prevodi dvodimenzionalne, kontinualne podzone u nizove pojedinačnih, strogo diskretnih stanja energija koji su nazvani Landauovi nivoi. Promenama magnetnog polja se menja broj Landauovih nivoa i njihova konfiguracija. Kako magnetno polje teži nuli, tako se broj diskretnih stanja povećava, ona bivaju bliža jedna drugima i to počinje da liči na spektar podzona. U ovom radu najniža jačina magnetnog polja za koje su urađeni proračuni je za  $B=1,5$  T i zavisnost realnog i imaginarnog dela normalne komponente permitivnosti od frekvencije kada je primenjeno to polje je prikazana na [Slici 45](#).

### 6.2.2. Struktura sa tri kvantne jame po periodi

Druga razmatrana terahercna struktura se razlikuje od prve, pre svega, u tome što se sada razmatraju tri spregnute kvantne jame po periodi. Svaka perioda strukture ima pored tri energijska stanja (koja se javljaju u prethodno razmatranoj strukturi) i pomoćno stanje, tako da su ova četiri stanja prikazana na [Slici 46](#) i označena sa 1 (osnovno), 2a (donje lasersko pomoćno), 2b (donje lasersko) i 3 (gornje lasersko stanje). Bitna razlika u odnosu na prethodnu razmatranu terahercnu strukturu je u tome što je u ovoj strukturi u pitanju dijagonalni rezonantno-fononski dizajn terahercnih QCL-ova, koji ima najbolje temperaturne performanse objavljene do sada [99,100] i što sada postoje četiri relevantna energijska stanja.



*Slika 46* Profil jedne periode terahercnog QCL-a koji se sastoji od tri kvantne jame sa prikazanim vrednostima energija i odgovarajućim talasnim funkcijama.

U ovako dizajniranoj strukturi laserski prelaz se odigrava između nivoa 3 i 2b (gornje lasersko stanje i donje lasersko stanje), a glavni mehanizam

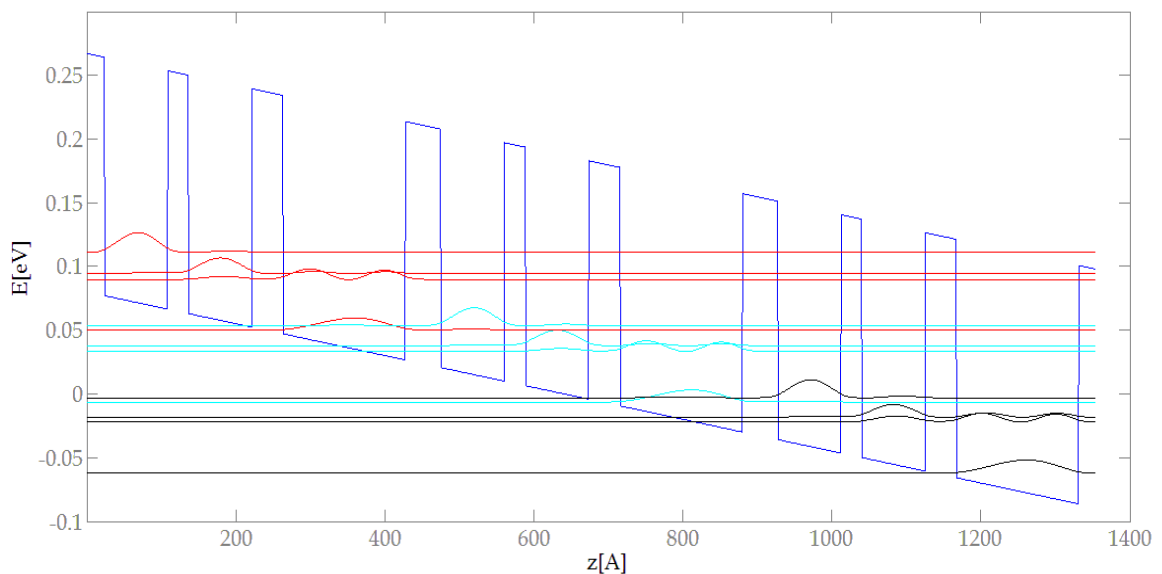
rasejanja odgovoran za depopulaciju donjeg pomoćnog laserskog nivoa  $2a$  je rasejanje elektrona na LO fononima.

Kao i kod većine terahercnih QCL-ova, injekciona barijera je dizajnirana tako da bude dovoljno velike debljine, jer su podzone veoma blizu jedna drugoj, u energijskom smislu. To se sa [Slike 47](#) jasno vidi u slučaju jakog preklapanja talasne funkcije sa talasnom funkcijom 1 prethodne periode.

Ovakav dizajn metamaterijala sa dijagonalnim prelazima obezbeđuje dugo vreme života nosilaca na gornjem laserskom nivou, a posebno pri visokim temperaturama kada termalno aktivirano rasejanje na LO fononima nastoji da ugrozi inverznu populaciju, time održavajući inverznu populaciju, a pritom ne ugrožavajući jačinu injekcione struje na nivo 3 [101]. Vreme života na gornjem laserskom nivou opada sa porastom temperature preko obrnuto eksponencijalne relacije  $\tau_{32} \propto \exp((\hbar\omega_{LO} - E_{32})/k_B T_e)$ , gde je  $T_e$  temperatura 2D elektronskog gasa na gornjem podnivou. Ako se uporede [Slike 38](#) i [47](#), gornje lasersko stanje je kod druge posmatrane terahercne strukture prostorno razdvojenije od injektorskog nivoa, a selektivnost rezonantnog tunelovanja  $2b \rightarrow 2a$  omogućava željenu depopulaciju donjeg laserskog nivoa  $2b$ . Tako se postiže dugo vreme života nosilaca  $\tau_{31}$ . Kratko vreme života na donjem laserskom nivou  $2b$  se može postići projektovanjem tanke kolektorske barijere (barijera između druge i treće jame, s leva na desno, kroz koju se odvija proces rezonantnog tunelovanja na [Slici 46](#)).

Dimenzije slojeva periode prikazane strukture, odnosno širine barijera i jama, posmatrajući s leva na desno od prve barijere, su 48 Å, 85 Å, 28 Å, 85 Å, 42 Å, 164 Å. Vrednost spoljašnjeg električnog polja primenjenog na strukturu u z-pravcu je 12,5 kV/cm. Struktura emituje na frekvenciji 3,9 THz (odnosno ugaonoj frekvenciji  $\omega = 24,5$  THz).

Dobijene vrednosti minimuma energijskih podzona kada nije prisutno magnetno polje i odgovarajuće talasne funkcije centralne i njoj susednih perioda, kao i profil aktivne oblasti terahercnog QCL-a sa tri kvantne jame po periodi, prikazane su na [Slici 47](#). Cijan boja odgovara energijama (i talasnim funkcijama) posmatrane centralne periode, crvena prethodne, a crna stanjima naredne periode.

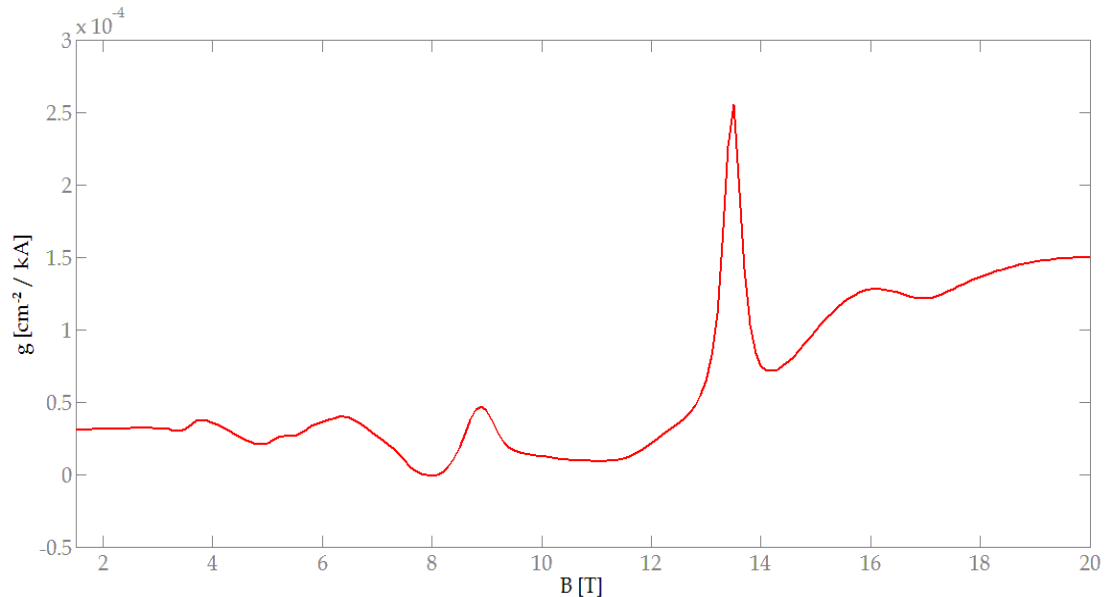


*Slika 47* Tri periode terahercnog QCL-a sa prikazanim vrednostima energija i odgovarajućim talasnim funkcijama.

Radijativni prelazi između stanja  $n=3$  i  $n=2b$  su dijagonalni, a proračunata razlika energija između ovih stanja je  $\Delta E_{32b} = 0,0152$  eV. Struktura je dizajnirana tako da je razlika između podnivoa  $n=2a$  i  $n=1$   $\Delta E_{2a1} = 0,0396$  eV, što je približno energiji LO fonona, pa je glavni mehanizam rasejanja odgovoran za depopulaciju donjeg laserskog nivoa ( $2a$ ) rasejanje elektrona na LO fononima i to je prelaz koji se odigrava u okviru iste jame.

U analizi terahercnog QCL-a sa tri kvantne jame po periodi, magnetna polja su varirana od 1,5 T do 30 T (sa korakom od 0,1 T). Kao i kod prethodno razmatrane terahercne strukture na [Slici 48](#) je prikazana zavisnost optičkog

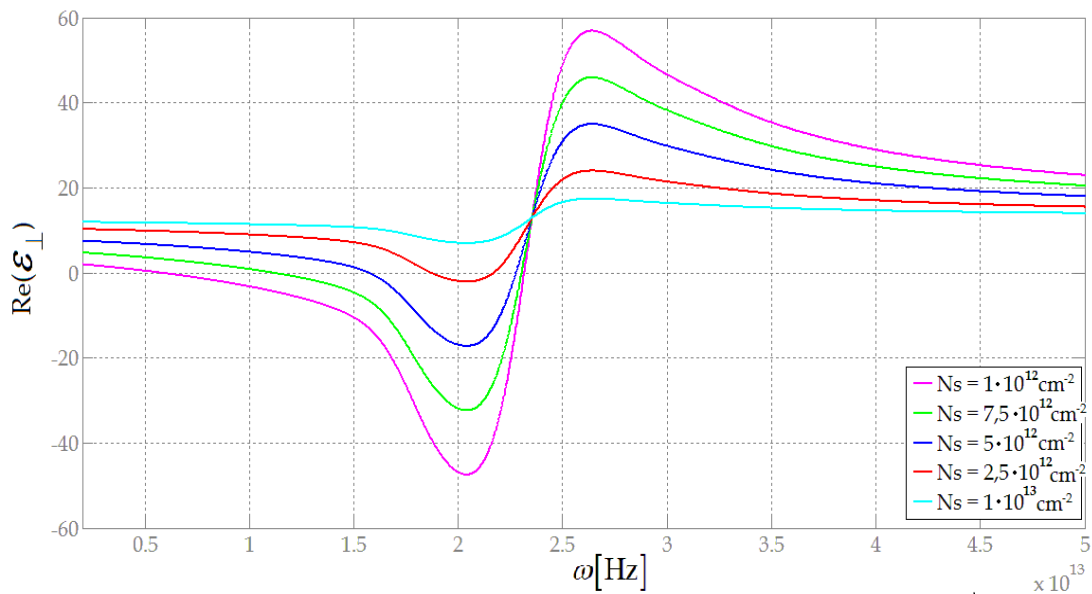
pojačanja od primenjenog magnetnog polja koje se menja u opsegu od 1,5 T do 20 T, jer za polja preko 20 T nema značajnih promena (Slika 51). I ovde su oscilacije brzine relaksacije u zavisnosti od magnetnog polja veoma naglašene, sa jednim veoma izraženim pikom pri vrednosti oko  $B=13,5$  T.



Slika 48 Zavisnost pojačanja, u terahercnom QCL-u sa tri jame po periodi od primenjenog magnetnog polja za  $N_s=1 \cdot 10^{13}$  cm<sup>-2</sup>, na temperaturi  $T=77$  K

Pored glavnog pika ( $B=13,5$  T) gde je pojačanje maximizovano, izdvajaju se i „maksimumi“ na 16,1 T i 8,9 T. Kada je ispunjen uslov rezonantne emisije LO fonona, dolazi do pada pojačanja (javljaju se minimumi pojačanja) i to se u ovoj strukturi dešava pri poljima  $B=8$  T,  $B=11,4$  T i  $B=14,2$  T.

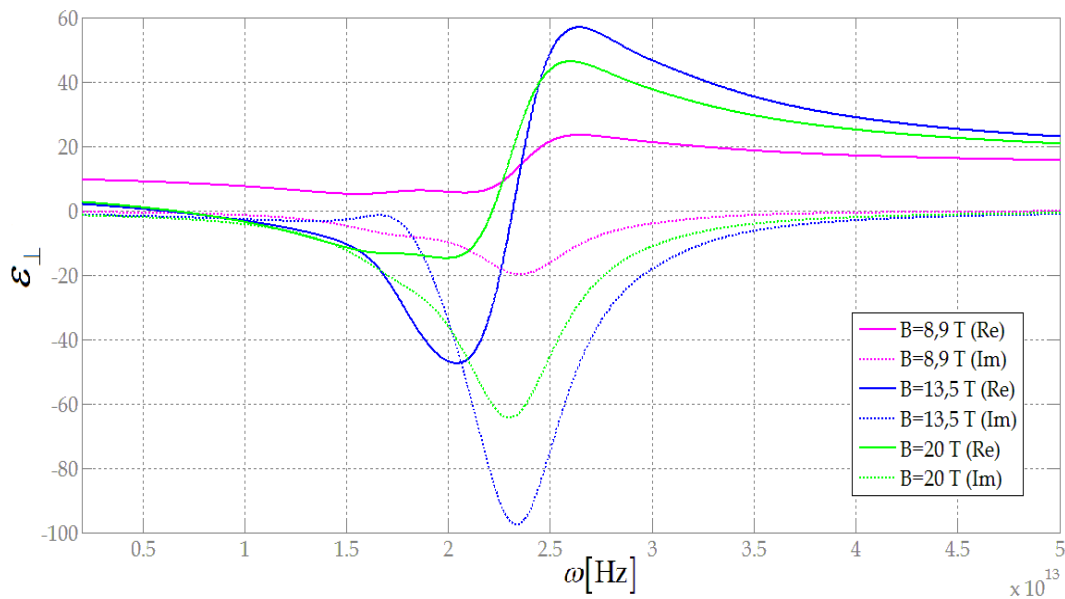
Posle određivanja profila pojačanja, za početak analize metamaterijala, razmatran je slučaj kada primenjeno magnetno polje pri kojem je pojačanje najveće i iznosi  $B=13,5$  T. Najpre je računato da li ova struktura može da uđe u LH režim rada, i ukoliko može, pri kojim vrednostima površinskih koncentracija se taj režim može ostvariti i koja je minimalna koncentracija neophodna za to.



**Slika 49** Zavisnost realnog dela permitivnosti  $\varepsilon_{\perp}$  od frekvencije pri magnetnom polju  $B=13,5$  T za različite površinske gustine nosilaca.

Na **Slici 49** prikazana je zavisnost realnog dela  $\varepsilon_{\perp}$  od frekvencije pri različitim površinskim koncentracijama kada je na strukturu primenjeno polje od  $B=13,5$  T. U poređenju sa prethodno razmatranom strukturom (poglavlje 6.2.1.), može se primetiti kako je vrednost minimalne površinske koncentracije potrebne da bi ova struktura ušla u LH režim rada, značajno veća. Taj minimum površinske koncentracije ispod koga metamaterijal ne može ostvariti negativnu vrednost realnog dela normalne komponente permitivnosti, bez obzira na jačinu primenjenog magnetnog polja usmerenog u pravcu normalnom na ravan slojeva, je za ovaj model oko  $N_{s\min} = 2,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ .

Polazeći od minimalne površinske koncentracije  $N_{s\min}$ , povećavajući površinsku koncentraciju, povećava se i opseg frekvencija pri kojima se metamaterijal ponaša kao LH, a minimum realnog dela permitivnosti je sve negativniji.



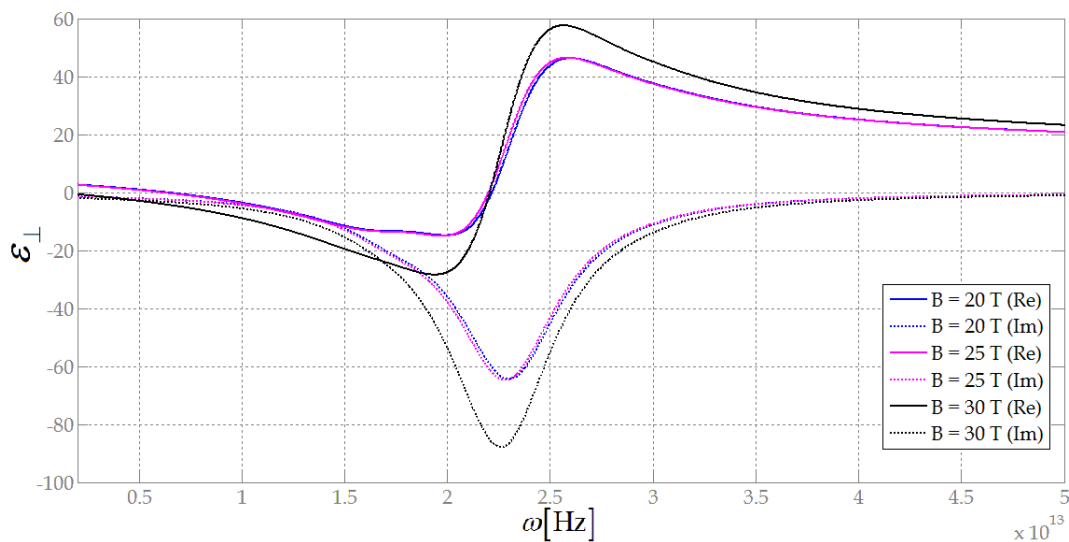
Slika 50 Zavisnost  $\varepsilon_{\perp}$  od  $\omega$  za različite vrednosti magnetnog polja, za  $N_s=1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$  i na temperaturi od  $T=77 \text{ K}$ .

Dok je struktura koje zrači u infracrvenom delu spektra bila jako osetljiva na promenu intenziteta magnetnog polja, za terahercnu strukturu sa dve kvantne jame po periodi se to nije moglo reći. Ona je bila skoro neosetljiva na promene - opseg talasnih dužina/frekvencija pri kojima je postizano negativno prelamanje se neznatno menjao sa promenama  $B$ . Pošto je za magnetno polje koje maksimizuje optičko pojačanje postignut željeni efekat, zanimljivo je bilo videti kakav je uticaj promene inteziteta magnetnog polja primenjenog na ovu strukturu, ako se ostali parametri drže nepromenjenim.

Na Slici 50 je prikazana zavisnost normalne komponente permitivnosti od frekvencije za različite vrednosti magnetnog polja, pri koncentraciji  $N_s = 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ . Izabrano je polje gde se javlja maksimum, polja gde se javljaju lokalni maksimumi optičkog pojačanja ( $B=13,5 \text{ T}$  i  $B=8,9 \text{ T}$ ) i polje  $B=20 \text{ T}$ . Sa Slike 50 se odmah primećuje sa da je struktura osetljiva na promene primenjenog polja. Variranjem vrednosti polja menjaju se opsezi frekvencija na kojima se struktura ponaša kao LH metamaterijal, a takođe se može



promeniti i režim rada, jer za neke vrednosti magnetnog polja struktura ulazi u aktivan ( $B=13,5$  T i  $B=20$  T), dok za neke druge vrednosti ostaje u pasivnom režimu ( $B=8,9$  T). Širi opseg frekvencija odgovara polju za koje se ostvaruje veće pojačanje, pri čemu se taj opseg širi sa strane viših frekvencija.

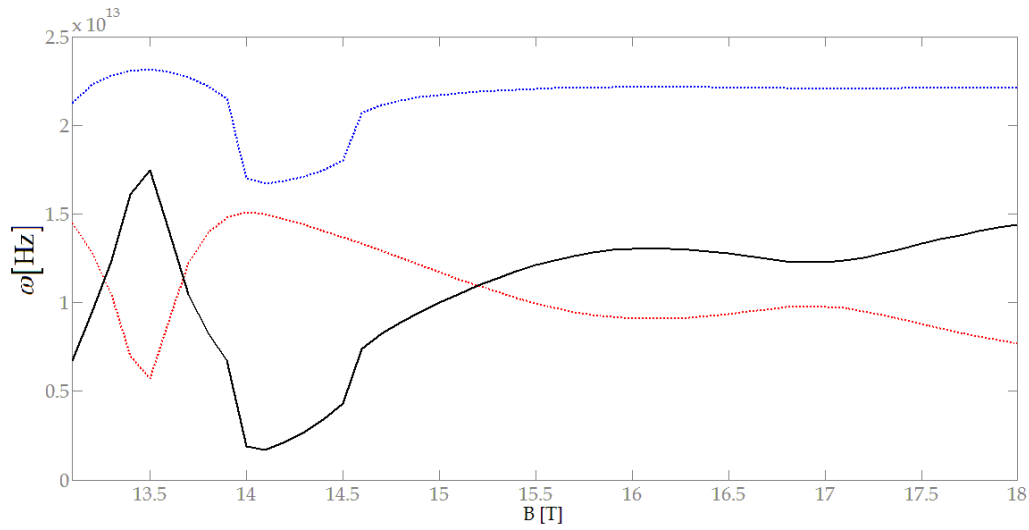


*Slika 51* Zavisnost  $\varepsilon_{\perp}$  od  $\omega$  za različite vrednosti magnetnog polja, za  $N_S=1 \cdot 10^{13}$  cm<sup>-2</sup> i na temperaturi od  $T=77$  K. Realni delovi si označeni punim, a imaginarni tačkastim linijama.

Na *Slici 51* je ista zavisnost, ali su promenjene vrednosti magnetnog polja. Posmatrana su polja od 20 T, 25 T i 30 T i upoređivan je njihov uticaj na metamaterijal. Kao što je pomenuto, sa porastom magnetnog polja preko 20 T nema većih promena. Profil permitivnosti je za 20 T i 25 T veoma sličan, a opseg frekvencija na kojima je realni deo posmatrane permitivnosti manji od nule, je skoro identičan, dok se za polje od 30 T taj opseg blago proširio ka nižim frekvencijama.

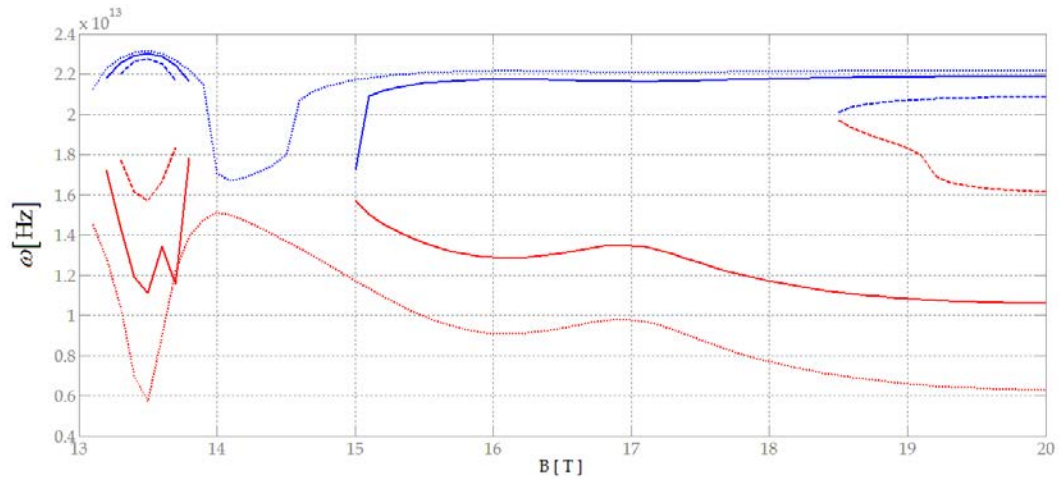
Variranjem koncentracija i vrednosti magnetnog polja može se zaključiti je da za svaku koncentraciju iznad minimalne potrebne za postizanje efekta negativnog prelamanja,  $N_{Smin}$ , postoji određeni opseg vrednosti jačine

magnetnog polja na kojima se taj efekat može ostvariti. Konkretno, za



Slika 52 Zavisnost  $\Delta\omega$  (crna puna linija),  $\omega_{\min}$  (crvena tačkasta linija) i  $\omega_{\max}$  (plava tačkasta linija) od magnetnog polja za površinsku koncentraciju  $N_s=1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ .

koncentraciju  $N_s=1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ , variranjem polja od 1,5 T do 30 T, dobijeno je da se LH režim postiže za sva polja iznad  $B=13,1 \text{ T}$ . Vrednosti polja koja

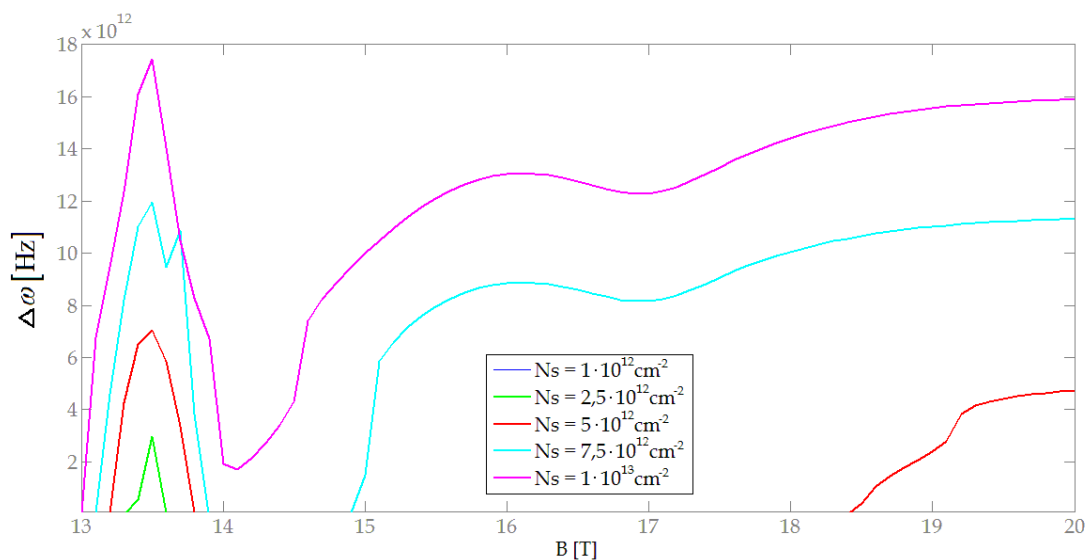


Slika 53 Zavisnost  $\omega_{\min}$  (crvene linije) i  $\omega_{\max}$  (plave linije) od magnetnog polja za različite površinske koncentracije:  $N_s=1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$  (tačkasta linija),  $N_s=7,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  (puna linija) i  $N_s=5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$  (isprekidana linija).

omogućavaju ostvarivanje željene osobine metamaterijala su u direktnoj vezi sa pojačanjem.

Na **Slici 52** je prikazano kako se menja opseg frekvencija,  $\Delta\omega$ , za koje je tražena permitivnost negativna sa promenama magnetnog polja. Prikazan je slučaj kada je  $N_s=1 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}$ . Pošto su polja ispod  $B=13,1 \text{ T}$  neinteresantna za analizu pri ovoj koncentraciji, a za polja iznad  $B=18 \text{ T}$  nema značajnih promena. Zbog toga je izabrano da se prikaže upravo opseg od  $13,1 - 18 \text{ T}$ . Pored zavisnosti opsega od jačine polja, prikazano je i kako se menjaju i nule permitivnosti, odnosno frekvencije pri kojima struktura ulazi u LH režim,  $\omega_{\min}$ , i frekvencije pri kojima izlazi iz tog režima i počinje ponovo da se ponaša kao običan materijal,  $\omega_{\max}$ .

Može se primetiti značajna promena opsega frekvencija na kojima struktura ispoljava LH osobine sa promenama magnetnog polja, a profil te zavisnosti odgovara profilu pojačanja (crna linija na **Slici 52**), što je bilo i očekivano.



**Slika 54** Zavisnost  $\Delta\omega$  od magnetnog polja za različite vrednosti površinskih koncentracija.

Ono što je, takođe, interesantno jeste promena  $\omega_{\min}$  i  $\omega_{\max}$ , odnosno kako se pomera granica između LH i RH režima sa promenama primenjenog polja. Sa slike se prilično dobro vidi koja polja utiču na koju nulu permitivnosti. Crvena kriva koja odgovara prvoj nuli odnosno početku LH režima ( $\omega_{\min}$ ) je značajno osetljiva na polje, dok je plava linija ( $\omega_{\max}$ ) prilično neosetljiva, izuzev opsega od 14-14,5 T gde se javlja značajno smanjenje  $\omega_{\max}$ , a time i smanjenje celog opsega frekvencija  $\Delta\omega$ .

Kako izgledaju promene  $\omega_{\min}$  i  $\omega_{\max}$  pri različitim koncentracijama, prikazano je na [Slici 53](#), a na [Slici 54](#) profili opsega frekvencija za različita polja, pri različitim koncentracijama. Posmatran je opseg od 13 T do 20 T.

## **7. Zaključak**

Osnovni doprinos ove teze ogleda se u određivanju kvalitativnih i kvantitativnih parametara koji bi se koristili za realizaciju nove vrste poluprovodničkih metamaterijala u cilju postizanja efekta negativnog prelamanja svetlosti. U radu je razmatrana mogućnost dizajniranja veštačkih nemagnetnih materijala formiranih od ultra tankih slojeva dva poluprovodnička materijala, čiji raspored odgovara strukturi QCL-a. Naizmenično postavljeni slojevi materijala imaju različite disperzione relacije, te nailazeći elektromagnetni talas vidi anizotropnu strukturu koja, ukoliko su određeni uslovi zadovoljeni, može prelomiti ovaj talas pod negativnim uglom. Ovakve strukture su anizotropne u dielektričnom pogledu. Dielektrična permitivnost metamaterijala na bazi QCL-a u pravcima normalnim na pravac narastanja slojeva je jednaka balkovskoj dielektričnoj permitivnosti, dok je dielektrična permitivnost u pravcu narastanja slojeva složena funkcija energijske konfiguracije, naseljenosti nivoa i širine odgovarajućih linija prelaza.

U radu su detaljno analizirani uslovi, uz odgovarajuća izvođenja, pod kojima se QCL ponaša kao metamaterijal sa negativnim indeksom prelamanja, kao i uslovi pod kojima ova struktura poseduje osobinu „levorukosti“. Detaljno su izloženi postupci određivanja elektronske strukture QCL-a u magnetnom polju usmerenom u pravcu normalnom na ravan slojeva koje vrši dodatnu diskretizaciju energije nosilaca u ravni slojeva (Landauovi nivoi), obrađujući posebnu pažnju na mehanizme rasejanja, kao i na formiranje sistema brzinskih jednačina. Veličine koje su dobijene iz ove analize (energijska struktura, naseljenost Landauovih nivoa) su bile neophodne za određivanje longitudinalne dielektrične permitivnosti koja izrazito zavisi od naseljenosti nivoa elektronima, a znak njenog realnog dela određuje znak indeksa prelamanja. Kada je u strukturi ostvarena dovoljno velika inverzna naseljenost (aktivna konfiguracija) tada je ukupna dielektrična permitivnost negativna. Raspored Landauovih nivoa direktno zavisi od vrednosti magnetnog polja čime se menjaju i brzine relaksacija nosilaca pri svim prelazima u strukturi, a samim tim i raspodela nosilaca po nivoima. Na taj način se može menjati vrednost i znak totalne dielektrične permitivnosti metamaterijala na bazi poluprovodničkog QCL-a i podešavati za datu primenu.

U delu posvećenom numeričkim rezultatima prezentovani su rezultati koji pokazuju da je moguće ostvarivanje dovoljno velikog stepena inverzne populacije koje bi omogućilo invertovanje znaka realnog dela normalne komponente permitivnosti, odnosno postizanje njegove negativne vrednosti, što vodi do realizacije metamaterijala sa negativnim indeksom prelamanja u određenom opsegu frekvencija/talasnih dužina za srednji infracrveni i za terahercni deo spektra. Kako veličine tih opsega mogu da variraju, posebno je bilo interesantno ispitati kako se njihove veličine menjaju sa temperaturom, nivoom dopiranja i jačinom magnetnog polja, kao i analizirati uslove pri

kojima ovi opsezi izostaju, pa se QCL se za sve talasne dužine ponaša kao metamaterijal sa pozitivnim indeksom prelamanja.

Za strukturu koja emituje zračenje u srednjem infracrvenom delu spektra, uočena su dva opsega na kojima se struktura ponaša kao LH materijal. Za određene jačine magnetnog polja koje maksimizuju optičko pojačanje, ta dva opsega frekvencija se stapaju u jedan veoma širok. Ipak, izlaganje strukture vrlo jakim magnetnom polju nije dovoljan uslov kako bi se ostvarila inverzna naseljenost u aktivnoj oblasti dovoljno velika za postizanje LH režima. Drugi uslov koji mora biti ispunjen je minimalna ukupna površinska gustina elektrona. U konkretnom slučaju, ta minimalna površinska koncentracija neophodna kako bi razmatrani metamaterijal bio LH za neke vrednosti magnetnog polja, iznosi  $10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Kako je povećavan nivo dopiranosti strukture, proširen je opseg vrednosti magnetnog polja na kojima se može postići negativno prelamanje, kao i odgovarajući raspon frekvencija.

Pored kvantnog kaskadnog lasera koji emituje zračenje u srednjem infracrvenom delu spektra, pri analizi mogućih dizajna metamaterijala posmatrane su dve terahercne strukture. Prva posmatrana struktura je dizajnirana tako da ima dve kvantne jame po periodi. Kao i kod prethodno razmatrane strukture i ovde je određena minimalna ukupna površinska koncentracija neophodna za ostavriavanje LH režima rada i ona iznosi  $2,5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Za površinske koncentracije ispod ove vrednosti, bez obzira na jačinu primenjenog magnetnog polja, nije bilo moguće ostvariti negativnu vrednost realnog dela normalne komponente permitivnosti. Povećanjem nivoa dopiranosti, povećan je opseg frekvencija na kojima se struktura ponaša kao aktivni metamaterijal. Međutim, kada je struktura u aktivnom režimu na opsegu frekvencija koji je određen nivoom dopiranosti strukture, bez obzira na jačinu magnetnog polja i njegove promene, profil zavisnosti permitivnosti

od frekvencije ostaje skoro nepromenjen. Najmanja vrednost polja za koju je rađen proračun, bila je 1,5T.

Druga razmatrana terahercna struktura sadrži tri spregnute kvantne jame po periodi. Minimalna površinska koncentracija neophodna kako bi se postigla dovoljno velika inverzna naseljenost između odgovarajućih nivoa za neke vrednosti magnetnog polja, iznosi  $2,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ . Kao što je bio slučaj kod strukture za srednji infracrveni deo spektra, i ova struktura pokazuje izraženu osetljivost na promene intenziteta magnetnog polja, koja se ogleda u menjanju opsega frekvencija (na kojima ona ponaša kao LH materijal ) sa promenama polja, kao i promeni režima rada metamaterijala.

Kako do sada nije bilo uspeha u pronalaženju strukture na bazi AlGaAs kod koje bi bili ispunjeni uslovi da se dobije negativna vrednost permitivnosti (usled velike permitivnosti samog materijala  $\sim 13$ ) bez primene magnetnog polja, cilj je bio dobiti takvu strukturu koja će sa magnetnim poljem postići željene efekte. Međutim, posmatrana THz struktura sa dve jame po periodi pri određenoj koncentraciji postiže LH režim rada za sve jačine primenjenog polja (koje su posmatrane) i pokazuje nedovoljnu osetljivost na njihove promene. Ovde se postavlja pitanje: koja je to minimalna jačina magnetnog polja ispod koje ova struktura ne može ostvariti aktivan režim i kakve efekte pokazuje kada nije primenjeno polje? Kako bi se dobio odgovor na ova pitanja, u budućem radu, bilo bi interesantno posmatrati istu strukturu i uraditi model bez primene magnetnog polja, ili, pak, odrediti tu minimalnu vrednost magnetnog polja.

Numerička izračunavanja su vršena na AlGaAs QCL-u sa relativno velikom balkovskom permitivnošću, što dalje znači da se vidljivi efekti javljaju pri jakim (ali eksperimentalno ostvarljivim) magnetnim poljima, pa je izuzetno zanimljivo da se predloži, za budući rad na ovoj problematici, struktura sa manjom balkovskom permitivnošću koja ne zahteva jaka magnetna polja.



## Literatura

- [1] V. Veselago, "The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ," *Sov. Phys. Uspekhi*, vol. 10, pp. 509-514, 1968.
  
- [2] J. Radovanović, S. Ramović, A. Dančić, V. Milanović, "Negative refraction in semiconductor metamaterials based on quantum cascade laser design for the mid-IR and THz spectral range," *Applied Physics A*, vol. 109, pp. 763-768, 2012.
  
- [3] P. Ginzburg, M. Orenstein, "Metal-free quantum-based metamaterial for surface plasmon polariton guiding with amplification," *J. Appl. Phys.*, vol. 104, pp. 063513 (1-5), 2008.
  
- [4] P. Ginzburg, M. Orenstein, "Nonmetallic left-handed material based

- on negative-positive anisotropy in low-dimensional quantum structures," *J. Appl. Phys.*, vol. 103, pp. 083105 (1-5), 2008.
- [5] J. Faist, F. Capasso, D. L. Sivco, A. L. Hutchinson, Z. Cho, "Quantum cascade laser," *Science*, vol. 264, pp. 553-556, 1994.
- [6] C. Gmachl, F. Capasso, D. L. Sivco, A. Y. Cho, "Recent progress in quantum cascade lasers and applications," *Reports on Progress in Physics*, vol. 64, pp. 1553-1601, 2001.
- [7] J. Radovanović, S. Ramović, V. Milanović, Z. Ikonić, D. Indjin, "Advanced dispersion engineering for metamaterial applications by using quantum cascade laser in strong magnetic field," in *International Quantum Cascade Lasers School & Workshop, IQCLSW 2010*, Florence, 2010.
- [8] C. Becker, C. Sirtori, O. Drachenko, V. Rylkov, D. Smirnov, J. Leotin, "GaAs quantum box cascade lasers," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 81, pp. 2941-2943, 2002.
- [9] S. Ramović, J. Radovanović, V. Milanović, "Mid-infrared semiconductor metamaterials utilizing intersubband transitions in quantum cascade laser structure," *Physica Scripta*, vol. T149, pp. 014049 (1-3), 2012.
- [10] G. Scalari, C. Walther, L. Sirigu, M. L. Sadowski, H. Beere, D. Ritchie, "Strong confinement in terahertz intersubband lasers by intense magnetic fields," *Physical Review B*, vol. 76, 115305 (1-7) 2007.

- [11] A. Wade, G. Fedorov, D. Smirnov, S. Kumar, B. S. Williams, Q. Hu and J. L. Reno, "Magnetic-field-assisted terahertz quantum cascade laser operating up to 225K," *Nature Photonics*, vol. 3, no. 41, 2009.
- [12] A. Leuliet, A. Vasanelli, A. Wade, G. Fedorov, D. Smirnov, G. Bastard, C. Sirtori, "Electron scattering spectroscopy by a high magnetic field in quantum cascade lasers," *Physics Review B*, vol. 73, pp. 085311 (1-9), 2006.
- [13] V. M. Shalaev, "Optical negative-index metamaterials," *Nature Photonics*, vol. 1, pp. 41-48, 2007.
- [14] J. B. Pendry, "Perfect cylindrical lenses," *Optics Express*, vol. 11, pp. 755-760, 2003.
- [15] C. M. Soukoulis, S. Linden, M. Wegner, "Negative Refractive Index at Optical Wavelengths," *Science*, vol. 315, pp. 47-49, 2007.
- [16] W. Cai, U. K. Chettiar, A. V. Kildishev, V. M. SHALAEV, "Optical cloaking with metamaterials," *Nature Photonics*, vol. 1, pp. 224-227, 2007.
- [17] S. Kumar, C. W. I. Chan, Q. Hu and J. Reno, "Two-well terahertz quantum-cascade laser with direct intrawell-phonon depopulation," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 95, pp. 141110 (1-3), 2009.
- [18] M. I. Amanti, G. Scalari, R. Terazzi, M. Fischer, M. Beck, J. Faist, A. Rudra, P. Gallo, E. Kapon, "Bound-to-continuum terahertz quantum cascade laser with a single-quantum-well phonon extraction/injection stage," *New Journal of Physics*, vol. 11, pp. 125022

(1-20), 2009.

- [19] <http://www.w12.pwr.wroc.pl/spatela/pdfy/530.pdf>.
- [20] J. W. S. Rayleigh, "On the remarkable phenomenon of crystalline reflexion described by Prof. Stokes," *Philosophical Magazine*, vol. 26, pp. 256-265, 1888.
- [21] Eli Yablonovitch, T. Gmitter, J.P.Harbison, R. Bhat, "Extreme selectivity in the lift-off of epitaxial GaAs films," *Bell Communication Research*, vol. 51, no. 26, pp. 2222-2224, December 1987.
- [22] E. Yablonovitch, "Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics," *Physical Review Letters*, vol. 58, pp. 2059-2062, 1987.
- [23] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, "Photonic band structure: the face-centered-cubic case," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 7, pp. 1792-1800, 1990.
- [24] E. Yablonovitch, "Photonic band-gap structures," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 10, pp. 283-294, 1993.
- [25] E. Yablonovitch, "Photonic Band Structure: The Face-Centered- Cubic Case Employing Nonspherical Atoms," *Physical Review Letters*, vol. 67, pp. 2295-2298, 1991.
- [26] H. Lamb, "On group-velocity," *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 1, pp. 473-479, 1904.

- [27] A. Schuster, *An Introduction to the Theory of Optics.*: Arnold, 1904.
- [28] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, I. Youngs, "Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures," *Physical Review Letters*, vol. 76, pp. 4773-4776, 1996.
- [29] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, W. J. Stewart, "Magnetism from Conductors and Enhanced Nonlinear Phenomena," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, pp. 2075-2084, 1999.
- [30] R. A. Shelby, D. R. Smith, S. Schultz, "Experimental Verification of a Negative Index of Refraction," *Science*, vol. 292, pp. 77-79, 2001.
- [31] R. M. Walser, "Metamaterials: An Introduction," in *Introduction to Complex Mediums for Optics and Electromagnetics.*: SPIE Press, 2003, pp. 295-316.
- [32] J. B. Pendry, A. Holden, D. J. Robbins, W. J. Stewart, "Low frequency plasmons in thin-wire structures," *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 10, pp. 4785-4809, 1998.
- [33] N. Fang, H. Lee, C. Sun, X. Zhang, "Sub-Diffraction-Limited Optical Imaging with a Silver Superlens," *Science*, vol. 308, pp. 534-537, 2005.
- [34] J. B. Pendry, D. Schuring, D. R. Smith, "Controlling electromagnetic fields," *Science*, vol. 312, pp. 1780-1782, 2006.
- [35] J. Brown, "Artificial dielectrics having refractive indices less than unity," *Proceedings of the IEE - Part IV: Institution Monographs*, vol. 100,

pp. 51-62, 1953.

- [36] W. Rotman, "Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel-plate media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation - IEEE Trans Antennas Propagat*, vol. 10, pp. 82-95, 1962.
- [37] J. B. Pendry. (2000) Negative Refraction Makes Light Run Backwards in Time.
- [38] Acher, "Recent advances in processing and applications of microwave ferrites," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 321, pp. 2035–2047, 2009.
- [39] P.K.Amiri, B. Rejaei, Behzad, Z. Yan Zhuang. M. Vroubel, J.N. Burghartz, "Ferromagnetic Thin Films for Loss Reduction in On-Chip Transmission Lines," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 43, pp. 2630-2632, 2007.
- [40] J. Huangfu, L. Ran, H. Chen, X. Zhang, K. Chen, T. M. Grzegorzcyk, J. A. Kong, "Experimental confirmation of negative refractive index of a metamaterial composed of  $\Omega$ -like metallic patterns," *Applied Physics Letters*, vol. 84, pp. 1537-1539, 2004.
- [41] C. Enkrich, M. Wegener, S. Linden, S. Burger, L. Zschiedrich, F. Schmidt, J. F. Zhou, Th. Koschny, C. M. Soukoulis, "Magnetic Metamaterials at Telecommunication and Visible Frequencies," *Physical Review Letters*, vol. 95, pp. 203901 (1-4), 2005.
- [42] V.M. Shalaev, W. Cai, U.K. Chettiar, H.-K. Yuan, A.K. Sarychev, V.P. Drachev, and A.V. Kildishev, "Negative index of refraction in optical

- metamaterials," *Optics Letters*, vol. 30, pp. 3356-3358, 2005.
- [43] S. O'Brien, J. B. Pendry, "Magnetic activity at infrared frequencies in structured metallic photonic crystals," *J. Phys.: Condens. Matter*, vol. 14, pp. 6383-6394, 2002.
- [44] G. Dolling, C. Enkrich, M. Wegener, "Low-loss negative-index metamaterial at telecommunication wavelengths," *Optics Letters*, vol. 31, pp. 1800-1802, 2006.
- [45] S. Ramović, J. Radovanović, V. Milanović, "Tunable Semiconductor Metamaterials Based On Quantum Cascade Laser Layout Assisted By Strong Magnetic Fields," *Journal of Applied Physics*, vol. 110, pp. 123704 (1-5), 2011.
- [46] V. Milanović, Z. Ikonić, D. Tjapkin, "The effective mass difference induced normal incidence absorption in semiconductor quantum wells," *Physics of Low-Dimensional Structures*, vol. 7, pp. 65-71, 1995.
- [47] V. A. Podolsky, E. E. Narimanov, "Strongly anisotropic waveguide as a non magnetic left-handed system," *Physical Review B*, vol. 71, pp. 201101 (1-4), 2005.
- [48] A. J. Hoffman, L. Alekseyev, S. S. Howard, K. J. Franz, D. Wasserman, V. A. Podolsky, E. E. Narimanov, D. L. Sivco, C. Gmachl, "Negative refraction in semiconductor metamaterials," *Nature Materials*, vol. 6, pp. 946-950, 2007.
- [49] P. Basu, *Theory of Optical Processes in Semiconductors: Bulk and*

*Microstructures.*: Clarendon Press-Oxford, 1997.

- [50] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics (Third Edition)*.: Academic Press, 2008.
- [51] [http://en.wikipedia.org/wiki/Shear\\_wave\\_splitting](http://en.wikipedia.org/wiki/Shear_wave_splitting).
- [52] E. Hecht, *Optics*.: Addison-Wesley, 2002.
- [53] S. Ramović, J. Radovanović, V. Milanović, "Metamaterials based on quantum cascade laser structures in strong magnetic field," in *Second International Conference on Physics of Optical Materials and Devices, ICOM2009, Book of Abstracts*, Herceg Novi, 2009, p. 57.
- [54] S. Ramović, J. Radovanović, A. Dančić, V. Milanović, "Poluprovodnički metamaterijali na bazi kvantnih kaskadnih lasera u jakom magnetnom polju," in *Peta Radionica Fotonike 2012, Zbornik apstrakata*, Kopaonik, 2012, p. 35.
- [55] L. Esaki, R. Tsu, "Superlattice and Negative Differential Conductivity," *IBM Journal of Research and Development*, vol. 14, pp. 61-65, 1970.
- [56] R. Kazarinov, R. Suris, "Possibility of the amplification of electromagnetic waves in a semiconductor with a superlattice," *Soviet physics: Semiconductors*, vol. 5, pp. 707-709, 1971.
- [57] F. Capasso, "Band-gap engineering: From physics and materials to new semiconductor-devices," *Science*, vol. 235, pp. 172-176, 1987.
- [58] F. Capasso, W.T. Tsang, G.F. Williams, "Staircase solid-state photomultipliers and avalanche photodiodes with enhanced



- ionization rates ratio," *IEEE Trans Electron Devices* , vol. 30, p. 381, 1983.
- [59] B. F. Levine, "Quantum-well infrared photodetectors," *Journal of Applied Physics*, vol. 74, pp. R1 - R81, 1993.
- [60] A. Y. Cho, J. Faist, A. L. Hutchinson, S. Luryi, C. Sirtori, D. L. Sivco F. Capasso, "Unipolar Semiconductor Laser," US5509025 A, 1994.
- [61] J. Faist, F. Capasso, C. Sirtori, D. L. Sivco, J. N. Baillargeon, A. L. Hutchinson, S. N. G. Chu, A. Y. Cho, "J. Faist, F. Capasso, C. Sirtori, D. L. Sivco, J. N. Baillargeon, A. L. HutchinsHigh Power Mid-Infrared ( $\lambda \sim 5\mu\text{m}$ ) Quantum Cascade Lasers Operating Above Room Temperature," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 68, pp. 3680-3682, 1996.
- [62] C. Sirtori, J. Faist, F. Capasso, D. L. Sivco, A. L. Hutchinson, A. Y. Cho, "Quantum Cascade Laser with Plasmon-Enhanced Waveguide Operating at  $\lambda \approx 8.4\mu\text{m}$  Wavelength," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 66, pp. 3242-3244, 1995.
- [63] C. Gmachl, A. Tredicucci, F. Capasso, A. L. Hutchinson, D. L. Sivco, J. N. Baillargeon, A. Y. Cho, "High Power  $\lambda \approx 8\mu\text{m}$  Quantum Cascade Lasers with Near Optimum Performance," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 72, pp. 3130-3132, 1998.
- [64] J. Faist, C. Sirtori, F. Capasso, D. L. Sivco, J. N. Baillargeon, A. L. Hutchinson, A. Y. Cho, "High Power Long-Wavelength ( $11.5\mu\text{m}$ ) Quantum Cascade Lasers Operating Above Room Temperature," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 10, pp. 1100-1102, 1998.

- [65] F. Capasso, C. Sirtori, J. Faist, A. L. Hutchinson, D. L. Sivco, A. Y. Cho, "F. Capasso, C. Sirtori, J. Faist, A. L. HutchinsHigh-power infrared (8-micrometer wavelength) superlattice lasers," *Science*, vol. 276, pp. 773-776, 1997.
- [66] J. Radovanović, Dragan Timotijević, Sabina Ramović, Vitomir Milanović, "Modeling of optical gain in quantum cascade laser subjected to strong magnetic field," in *The Proceedings of 5th European Conference on Circuits and Systems for Communications, ECCSC'10*, Beograd, 2010, pp. 302-305.
- [67] M. Rochat, J. Faist, M. Beck, U. Oesterle, M. Ilegems, "Far-infrared ( $\lambda \approx 88 \mu\text{m}$ ) electroluminescence in a quantum cascade structure," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 73, pp. 3724-3726, 1998.
- [68] R. Colombelli, F. Capasso, C. Gmachl, A. Tredicucci, A. M. Sergent, A. L. Hutchinson, D. L. Sivco, A. Y. Cho, "Intersubband electroluminescence from long-side-cleaved quantum-cascade lasers above threshold: Investigation of phonon bottleneck effects," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 77, pp. 3893-3895, 2000.
- [69] C. Sirtori, P. Kruck, S. Barbieri, P. Collot, J. Nagle, M. Beck, J. Faist, U. Oesterle, "GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As quantum cascade lasers," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 73, pp. 3486-3488, 1998.
- [70] <http://www.atoptics.com/>.
- [71] A. Mirčetić, "Dizajn elektronskih karakteristika kvantno kaskadnih lasera za rad u infracrvenoj oblasti spektra," *Doktorska disertacija*,

*Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2005.*

- [72] <http://visions.iop.org/v22.html>.
- [73] P. H. Siegel, "Terahertz technology," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 50, pp. 910-928, 2002.
- [74] M. Tonouchi, "Cutting-edge terahertz technology," *Nature photonics*, vol. 1, pp. 97-105, 2007.
- [75] B. Ferguson, X.-C. Zhang, "Materials for terahertz science and technology," *Nature Materials*, vol. 1, pp. 26-33, 2002.
- [76] R. Adams, K. Vijayraghavan, Q. Wang, J. Fan, F. Capasso, S. Khanna, A. Davies, E. Linfield and M. Belkin, "GaAs/Al<sub>0.15</sub>Ga<sub>0.85</sub>As terahertz quantum cascade lasers with double-phonon resonant depopulation operating up to 172 K," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 97, pp. 131111 (1-3), 2010.
- [77] S. Kumar, Q. Hu and J. Reno, "186K operation of terahertz quantum cascade laser based on a diagonal design," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 94, pp. 131105 (1-3), 2009.
- [78] Martin Brandstetter, Christoph Deutsch, Michael Krall, Hermann Detz, Donald C. MacFarland, Tobias Zederbauer, Aaron M. Andrews, Werner Schrenk, Gottfried Strasser, Karl Unterrainer, "High power terahertz quantum cascade lasers with symmetric wafer bonded active regions," *Applied Physics Letters*, vol. 103, pp. 171113 (1-5), 2013.

- [79] [http://www.tuwien.ac.at/en/news/news\\_detail/article/8468/](http://www.tuwien.ac.at/en/news/news_detail/article/8468/).
- [80] R. Köhler, A. Tredicucci, F. Beltram, H. Beere, E. Linfield, A. Davies and D. Ritchie, "Low-threshold quantum-cascade lasers at 3.5 THz," *Optics Letters*, vol. 28, pp. 810-812, 2003.
- [81] L. Ajili, G. Scalari, J. Faist, H. Beere, E. Linfield, D. Ritchie and G. Davies, "High power quantum cascade lasers operating at  $\sim 87\mu\text{m}$  and  $130\mu\text{m}$ ," *Applied Physics Letters*, vol. 85, pp. 3986-3988, 2004.
- [82] J. Faist, M. Beck, T. Aellen and E. Gini, "Quantum cascade lasers based on a bound-to-continuum transition," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 78, no. 2, pp. 147-149, 2001.
- [83] R. Kohler, A. Tredicucci, C. Mauro, F. Beltram, H. E. Beere, H. E. Linfield, A. G. Davies and D. A. Ritchie, "Terahertz quantum-cascade lasers based on an interlaced photon-phonon cascade," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 84, no. 8, pp. 1266-1268, 2004.
- [84] G. Scalari, N. Hoyler, M. Giovannini and J. Faist, "Terahertz bound-to-continuum quantum cascade lasers based on optical-phonon scattering extraction," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 86, pp. 181101-1-3, 2005.
- [85] J. Radovanović, A. Mirčetić, V. Milanović, Z. Ikonić, D. Indjin, P. Harrison and R. W. Kelsall, "Influence of the active region design on output characteristics of GaAs/AlGaAs quantum cascade lasers in a strong magnetic field," *Semicon. Sci. Technol.*, vol. 21, pp. 215-220, 2006.

- [86] U. Ekenberg, "Nonparabolicity effects in a quantum well: Sublevel shift, parallel mass, and Landau levels," *Phys. Rev.*, vol. 40, pp. 7714-7726, 1989.
- [87] S. Ramović, V. Milanović, J. Radovanović, "Egzaktno određivanje granicnih uslova za talasne funkcije u poluprovodničkim, kvantnim nanostrukturama," in *54. Konferencija ETRAN-a, Zbornik apstrakata*, Donji Milanovac, 2010, p. p. MO3.2.
- [88] V. Milanović, J. Radovanović, S. Ramović, "Influence of nonparabolicity on boundary conditions in semiconductor quantum wells," *Physics Letters A*, vol. 373, pp. 3071-3074, 2009.
- [89] J. Radovanović, V. Milanović, Z. Ikonić, D. Indjin, "Control of optical gain in the active region of quantum cascade laser by strong perpendicular magnetic field," *Mater. Sci. Forum*, vol. 494, pp. 31-36, 2005.
- [90] G. Sun, J. Khurgin, "Optically pumped four-level infrared laser based on intersubband transitions in multiple quantum wells: feasibility study," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 29, pp. 1104-1111, 1993.
- [91] H. B. Teng, J. P. Sun, G. I. Haddad, Michael A. Stroscio, SeGi Yu, K.W. Kim, "Phonon assisted intersubband transitions in step quantum well structures," *Journal of Applied Physics*, vol. 84, no. 4, pp. 2155-2164, 1998.
- [92] A. Daničić, J. Radovanović, D. Inđin, Z. Ikonić, "Modeling of electron relaxation processes and the optical gain in a magnetic field assisted

- THz quantum cascade laser," *Physica Scripta*, vol. T249, pp. 014017 (1-5), 2012.
- [93] T. Unama, M. Yoshita, T. Noda, H. Sakaki, H. Akiyama, "Intersubband absorption linewidth in GaAs quantum wells due to scattering by interface roughness, phonons, alloy disorder, and impurities," *Journal of Applied Physics*, vol. 93, pp. 1586-1597, 2003.
- [94] E. Runge, "Excitons in semiconductor nanostructures," *Solid State Physics*, vol. 57, pp. 149-305, 2002.
- [95] B. H. Bransden, C. J. Joachim, *Quantum Mechanics*, 2nd ed.: Prentice Hall, 2000.
- [96] Z. Ikonić, V. Milanović, *Poluprovodničke kvantne nanostrukture*. Beograd: Univerzitet u Beogradu, 1997.
- [97] S. Ramović, J. Radovanović, V. Milanović, "Mogućnost podešavanja karakteristika metamaterijala na bazi kvantnih kaskadnih lasera putem jakog magnetnog polja," in *Konferencija Fotonika 2010 – teorija i eksperiment u Srbiji, Zbornik apstrakata*, Beograd, 2010, p. 45.
- [98] A. Daničić, J. Radovanović, V. Milanović, D. Inđin and Z. Ikonić, "Optimization and magnetic-field tunability of quantum cascade laser for applications in trace gas detection and monitoring," *Journal of Physics D*, vol. 43, pp. 045101 (1-8), 2010.
- [99] C. Sirtori, F. Capasso, J. Faist, A. L. Hutchinson, D. L. Sivco and A. Y. Cho, "Resonant tunneling in quantum cascade lasers," *IEEE J.*

*Quantum Electron.*, vol. 34, pp. 1722-1729, 1998.

- [100] S. Kumar, "Recent Progress in Terahertz Quantum Cascade Lasers," *J. of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 17, pp. 38-47, 2011.
- [101] B. Williams, "Terahertz quantum-cascade lasers," *Nat. Photon.*, vol. 1, pp. 517-525, 2007.
- [102] B. Mitrović, V. Milanović, Z. Ikonić, "Semiconductor quantum wells with in-plane magnetic field: the selfconsistent treatment," *Semiconductor Science and Technology*, vol. 6, pp. 93-97, 1991.
- [103] U. Rössler, "Nonparabolicity and wrapping in the conduction band of GaAs," *Solid State Commun.*, vol. 49, pp. 943-947, 1984.
- [104] M. Braun, U. Rössler, "Magneto-optic transitions and non-parabolicity parameters in conduction band of semiconductors," *J. Phys. C: Solid State Phys.*, vol. 18, pp. 3365-3377, 1985.
- [105] U. Ekenberg, "Enhancement of nonparabolicity effects in a quantum well," *Physical Review B*, vol. 36, pp. 6152-6155, 1987.

## Dodatak 1

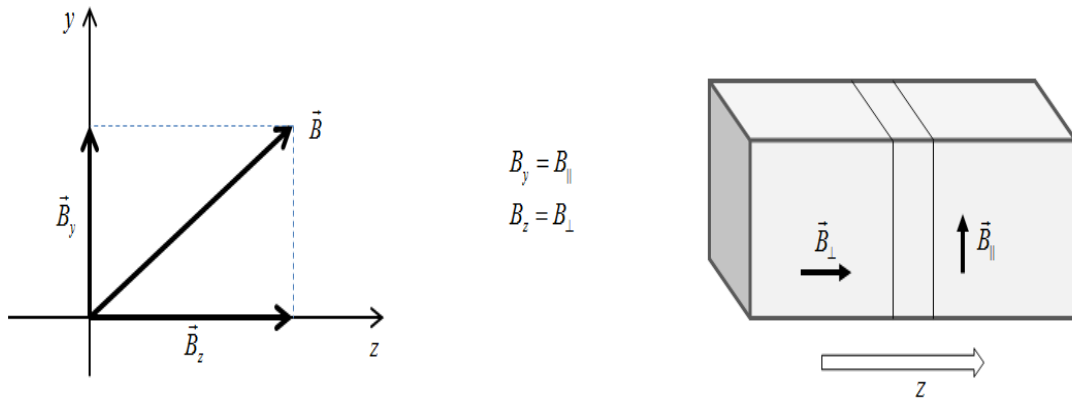
### **Kvantna jama u homogenom magnetnom polju - neparabolični model**

Kvantna jama je potencijalna jama čija je debljina uporediva sa de Broglie-ovom talasnom dužinom nosilaca naelektrisanja. Efekti kvantne jame se ogledaju u kvantnom konfiniranju elektrona u ravni i diskretizovanju njihovih energija.

U poluprovodničkim kvantnim jamama postoje dva tipa optičkih prelaza, unutarzonski i međuzonski, o čemu je već bilo reči ranije u tekstu. Ovi prelazi postaju naročito interesantni za analizu kada je na strukturu primenjeno magnetno polje. S tim u vezi, posmatra se slučaj kada je na kvantnu jamu primenjeno magnetno polje  $B$ . Kako primenjeno polje paralelno kvantnoj jami ima jako mali, skoro zanemarljiv, uticaj na apsorpciju i



energijski spektar [102], pravac magnetnog polja koji je od interesa je pravac rasta strukture (u ovom slučaju to je z-pravac), te se posmatra komponenta magnetnog polja koja je u usmerena u tom pravcu tj. pravcu normalnom na ravan slojeva.



Slika D1. 1 Prikazano je koso polje. Slučaj kosog polja je jako složen za analizu, dok normalno polje daje najizraženiji efekat

Posmatrano magnetno polje je homogeno, statičko, u pravcu normalnom na ravan kvantne jame (Slika D1.2):

$$\vec{B} = \vec{B}_z = B \cdot \vec{i}_z \quad (D1.1)$$

Poznato je da za anvelopnu, talasnu funkciju Schrodingerova jednačina ima oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2} \vec{\nabla} \frac{1}{m(\vec{r})} \vec{\nabla} \Psi + U(\vec{r}) \Psi = E \Psi \quad (D1.2)$$

Za slučaj kada nije primenjeno magnetno polje na strukturu, odnosno kada je  $B = 0$ , Schrodingerova jednačina se može napisati i ovako:

$$\frac{1}{2} \vec{p} \frac{1}{m(\vec{r})} \vec{p} \Psi + U(\vec{r}) \Psi = E \Psi \quad (D1.3)$$

Međutim, kada je primenjeno magnetno polje ( $B > 0$ ), tada se u prethodnu jednačinu umesto  $\vec{p}$  unosi  $\vec{p} - q\vec{A}$ , pri čemu  $q$  predstavlja naelektrisanje čestice, a vektor  $\vec{A}$  predstavlja magnetski vektor potencijal.

S obzirom na to da su naelektrisanja u posmatranoj strukturi elektroni, to je:

$$q = -e < 0$$

Pošto je kvantna jama sačinjena od dve vrste materijala (jedan materijal za samu jamu i drugi za barijere oko nje) koji se smenjuju u z-pravcu, može se jednostavno zaključiti da su potencijal i efektivna masa posmatranog materijala zavisni od z:

$$m = m(z),$$

$$U = U(z).$$

S obzirom da se iz relacije:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \tag{D1.4}$$

ne može jednoznačno odrediti vrednost magnetskog vektor potencijala, u ovom izvođenju nje će biti izabrano da je:

$$\vec{A} = -B \cdot y \cdot \vec{i}_x \tag{D1.5}$$

Ako ovakav oblik potencijala figuriše u Schrodingerovoj jednačini kada je primenjeno magnetno polje, onda ta jednačina ima sledeći oblik:

$$\frac{1}{2m} (\hat{p}_x - eBy)^2 \Psi + \frac{\hat{p}_y^2 \Psi}{2m} + \hat{p}_z \frac{1}{2m} \hat{p}_z \Psi + U(z)\Psi = E\Psi \tag{D1.6}$$

Ako se komponente talasne funkcije razdvoje i talasna funkcija  $\Psi$  se napiše u obliku  $X(x)Y(y)Z(z)$ , onda prethodna jednačina izgleda:

$$\frac{1}{2m} Y Z (\hat{p}_x - e B y)^2 X + X Z \frac{\hat{p}_y^2 Y}{2m} + X Y \hat{p}_z \frac{1}{2m} \hat{p}_z Z + U(z) X Y Z = E X Y Z \quad (\text{D1.7})$$

Pošto Hamiltonijan  $\hat{H}$  komutuje sa  $\hat{p}_x$  ( $\hat{H}\hat{p}_x = \hat{p}_x\hat{H}$ ), onda:

$$\hat{p}_x X = \lambda \Psi, \quad (\text{D1.8})$$

$$\hat{p}_x X = \hbar k_x X,$$

odnosno:

$$X = e^{ik_x x}, \quad k_x \in (-\infty, +\infty) \quad (\text{D1.9})$$

Sada se jednačina (D1.7) može napisati u obliku:

$$\frac{1}{2m} (\hbar k_x - e B y)^2 Y Z + Z \frac{\hat{p}_y^2 Y}{2m} + Y \hat{p}_z \frac{1}{2m} \hat{p}_z Z + U Y Z = E Y Z \quad (\text{D1.10})$$

Deljenjem ove jednačine sa  $YZ/m(z)$ , dobija se:

$$\frac{(\hbar k_x - e B y)^2}{2} + \frac{\hat{p}_y^2 Y}{2Y} + \frac{m}{Z} \hat{p}_z \frac{1}{2m} \hat{p}_z Z + mU - E m(z) = 0 \quad (\text{D1.11})$$

Dobijena jednačina se može razdvojiti na dva dela. Jedan deo zavisi samo od  $y$ -komponente (prva dva člana prethodne jednačine), a ostatak od  $z$ -komponente. Razdvajanjem jednačine na dve, dobija se sledeći sistem:

$$\frac{(\hbar k_x - e B y)^2}{2} + \frac{\hat{p}_y^2 Y}{2Y} = C = \text{const} \quad (\text{D1.12})$$

$$\frac{m}{Z} \hat{p}_z \frac{1}{2m} \hat{p}_z Z + mU(z) - E m = -C \quad (\text{D1.13})$$

Neka se prvo posmatra jednačina (D1.12) zavisna od  $y$ -komponente:

$$\frac{(\hbar k_x - e B y)^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2 Y}{d y^2} \frac{1}{Y} = C \quad (\text{D1.14})$$

Ovo se može preurediti:

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2 Y}{d y^2} + \frac{(\hbar k_x - e B y)^2}{2} Y = C Y \quad (\text{D1.15})$$

Uvodi se veličina  $\hbar k_x \equiv e B y_0$  u (D1.15), pa prethodna relacija dobija oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2 Y}{d y^2} + \frac{(e B)^2}{2} (y - y_0)^2 Y = C Y \quad (\text{D1.16})$$

a uvođenjem smene:

$$y - y_0 = y_1,$$

dobija se:

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2 Y}{d y_1^2} + (e B)^2 y_1^2 Y = C Y \quad (\text{D1.17})$$

Dobijeni oblik jednačine (D1.17) je, zapravo, analogan obliku Schrodingerove jednačine jednodimenzionog kvantnog harmonijskog oscilatora (D1.18). Poznato je iz kvantne mehanike da je u slučaju kada je jednodimenziona Schrodingerova jednačina oblika:

$$-(\hbar^2/2m)(d^2\Psi/dx^2) + (kx^2/2)\Psi = E\Psi, \quad (\text{D1.18})$$

i uz to da talasna funkcija teži nuli u beskonačnosti  $\psi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ , tada su energije kvantizovane, a odgovarajući ekvidistantni energijski nivoi su:

$$E_n = \hbar\omega(n+1/2) \quad (\text{D1.19})$$

pri čemu je  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Po analogiji je, onda, u posmatranom slučaju:

$$m=1, \quad k=(eB)^2, \quad E=C,$$

pa je:

$$\omega = eB,$$

$$C_j = (j + \frac{1}{2})eB\hbar, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{D1.20})$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{eB}{\hbar}} = \frac{1}{L}.$$

Konačan oblik talasne funkcije koja zavisi samo od  $y$ -koordinate je:

$$Y_j(y_j) = \Phi_j\left(\sqrt{\frac{eB}{\hbar}}y_1\right) = \Phi_j\left(\frac{y - k_x L^2}{L}\right) \quad (\text{D1.21})$$

S tim da je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j \cdot \Phi_{j'} dy = \delta_{j,j'} \quad (\text{D1.22})$$

Sa druge strane, posmatrajući sada deo talasne funkcije zavistan od  $z$ -komponente (D1.13), njenim deljenjem sa  $m$ , a, zatim, množenjem dobijenog sa  $Z$ , dobija se:

$$\hat{p}_z \frac{1}{2m} \hat{p}_z Z + \left[ U(z) - \frac{C}{m} \right] Z = EZ \quad (\text{D1.21})$$

što daljim izvođenjem i sređivanjem, konačno dobija oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{m} \frac{dZ}{dz} + \left[ U(z) + (j + \frac{1}{2}) \frac{eB\hbar}{m(z)} \right] Z = EZ, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{D1.22})$$

Izraz u zagradi je efektivni potencijal koji je osim zavisnosti od  $z$ -koordinate različit za različite vrednosti  $j$ :

$$U_{\text{eff}}(j, z) = U(z) + (j + \frac{1}{2}) \frac{eB\hbar}{m(z)}, \quad (\text{D1.23})$$

Time je i:

$$Z = Z_{i,j}(z)$$

Za dato  $j$ , postoji spektar diskretnih stanja  $E_{i,j}$ . Ako se pretpostavi da je efektivna masa konstantna duž cele strukture, odnosno da ne zavisi od  $z$ -koordinate,  $m \neq m(z)$ , tj. da je  $m = m^*$ , tada se totalna energija može opisati sumom:

$$E_{i,j} = E_i(B=0) + \frac{\hbar e B}{m^*} \left(j + \frac{1}{2}\right) \quad (D1.24)$$

Treba napomenuti da pošto se u slučaju kvantne jame na koju je primenjeno magnetno polje elektroni nalaze u tom polju, javlja se dodatna potencijalna energija:

$$\Delta U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (D1.25)$$

pri čemu je

$$\vec{\mu} = -\frac{e g}{2m_0} \vec{S} \quad (D1.26)$$

Bohr-ov magneton, a

$$\vec{S} = \pm \frac{\hbar}{2} \vec{i}_z, \quad \vec{B} = B \vec{i}_z \quad (D1.27)$$

pa je:

$$\Delta U = \pm \frac{g}{2} \mu_B B, \quad \mu_B = \frac{e \hbar}{2m_0} \quad (D1.28)$$

pri čemu je  $m_0$  masa slobodnog elektrona, dok je  $g$  Lande-ov faktor koji je za slobodan elektron vrlo približno jednak 2, dok za elektrone u kvantnoj jami se vrlo razlikuje od 2 i zavisi i od koncentracije i zonske strukture.

Kada je uključeno ovo polje, jednačina (D1.22) je malo modifikovana, odnosno:

$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{m} \frac{dZ}{dz} + \left[ U(z) + \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{e B \hbar}{m(z)} \pm \frac{g(z)}{2} \mu_B B \right] Z = EZ$	(D1.29)
---	---------

U slučaju jakih magnetnih polja, ovaj dodatni član (treći član u zagradi prethodne jednačine) je znatno manji od  $eB\hbar/m$  (drugi član zagrade), pa se obično zanemaruje.

### Određivanje koncentracije

$$n(z) = \sum_{i,j,s} \sum_{k_x} |\Psi|^2 f_{FD}(E_{i,j,s}, E_F) \quad (D1.30)$$

Kako je:

$$\Psi_{i,j,s,k_x}(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (D1.31)$$

i ako pretpostavimo da je  $Z(z)$  realna funkcija, tada je izraz za koncentraciju:

$$n(z) = \sum_{i,j,s} f_{FD}(E_{i,j,s}, E_F) Z^2(z) \cdot \sum_{k_x} \frac{1}{2L_x} Y^2(y, k_x) \quad (D1.32)$$

pri čemu je:

$$A^2 \int_{-L_x}^{L_x} e^{i(k_x - k'_x)x} dx = \delta_{k_x, k'_x} \Rightarrow A^2 = \frac{1}{2L_x} \quad (D1.33)$$

Dužina strukture duž  $x$ -ose je  $2L_x$  ( $L_x \rightarrow \infty$ ).

Druga suma ovog izraza (D1.32) se može preurediti:

$$\sum_{k_x} \frac{1}{2L_x} Y^2(y, k_x) = \frac{1}{2L_x} \sum_{k_x} Y^2(y, k_x) \rightarrow \frac{1}{(\sqrt{2L_x})^2} \frac{1}{\Delta k_x} \sum Y^2(y, k_x) \Delta k_x \quad (D1.34)$$

S obzirom da je  $\Delta k_x = \pi/L_x$ , onda se posmatrana suma može napisati i kao:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y^2(y, k_x) dk_x \quad (D1.35)$$

Kako je  $Y_j(y, k_x) = \Phi_j\left(\frac{y - k_x L^2}{L}\right)$ , sledi:

$$Y_j(y_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j^2\left(\frac{y - k_x L^2}{L}\right) dy = 1 \quad (\text{D1.36})$$

Uvođenje smene  $\xi = \frac{y - k_x L^2}{L}$  dovodi do oblika:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j^2(\xi) d\xi = \frac{1}{L} \quad (\text{D1.37})$$

Sa druge strane, uvođenjem iste smene u (D1.36), pri čemu je  $\frac{1}{L} d\xi = -dk_x$ ,

dobija se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j^2\left(\frac{y - k_x L^2}{L}\right) dk_x = -\frac{1}{L} \int_{+\infty}^{-\infty} \Phi_j^2(\xi) d\xi = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_j^2(\xi) d\xi = \frac{1}{L^2} \quad (\text{D1.38})$$

Vraćanjem u izraz (D1.32), sledi:

$$n(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j,s} f_{FD}(E_{i,j,s}, E_F) Z^2(z) \cdot \frac{eB}{\hbar} \quad (\text{D1.39})$$

Konačan izraz se može napisati na sledeći način:

$$n(z) = \frac{eB}{2\pi\hbar} \sum_{i,j,s} f_{FD}(E_{i,j,s}, E_F) Z_{i,j,s}^2(z) \quad (\text{D1.40})$$

Ako se zanemari uticaj člana  $\pm g(z)\mu_B B/2$  tada je:

$$n(z) = \frac{eB}{\pi\hbar} \sum_{i,j} f_{FD}(E_{i,j}, E_F) Z_{i,j}^2(z) \quad (\text{D1.41})$$

a ukupna površinska koncentracija elektrona:

$$N_S = \int_{-\infty}^{+\infty} n(z) dz = \frac{eB}{2\pi\hbar} \sum_{i,j,s} f_{FD}(E_{i,j,s}, E_F) \quad (\text{D1.42})$$

odnosno:



$$N_S = \frac{eB}{\pi\hbar} \sum_{i,j} f_{\text{FD}}(E_{i,j}, E_F) = \sum_{i,j} N_{i,j}, \quad (\text{D1.43})$$

$$N_{i,j} = \frac{eB}{\pi\hbar} f_{\text{FD}}(E_{i,j}, E_F)$$

ako se zanemari član  $\pm g(z)\mu_B B/2$ .

## **Dodatak 2**

### **Izvođenje drugog graničnog uslova za talasne funkcije na granici dva poluprovodnika na bazi III-V jedinjenja**

Polazeći od Rössler-ovog izraza [103] [104] za disperzionu relaciju u provodnoj zoni i vodeći računa da je struja verovatnoće konstantna duž heterostrukture, izvešćemo precizno granične uslove na spoju dva poluprovodnika na bazi III-V jedinjenja.

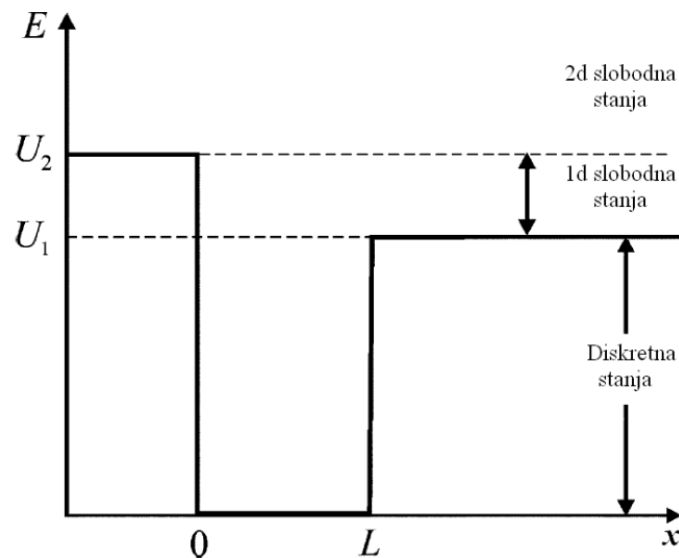
Disperziona relacija za elektrone u provodnoj zoni poluprovodnika na bazi III-V jedinjenja (za transverzalne talasne vektore  $k_y$  i  $k_z$  jednake nuli) koja uključuje neparaboličnost do četvrtog stepena talasnog vektora, data je relacijom [105] [86]:

$$E(k_x) = \alpha_0 k_x^4 + \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 \quad (\text{D2.1})$$

gde je  $m$  efektivna masa na dnu provodne zone, a  $\alpha_0$  odgovarajući parametar materijala ( $\alpha_0 < 0, m > 0$ ). U slučaju heterostrukture, sačinjene od nekoliko materijala, Schrodingerova jednačina za anvelopne talasne funkcije  $\psi(x)$  glasi [105]:

$$\hat{H}\psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} \alpha_0(x) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{m(x)} \frac{d\psi(x)}{dx} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (\text{D2.2})$$

U (D2.2)  $U(x)$  je potencijal koji potiče od diskontinuiteta provodne zone i koncentracije nosilaca unutar heterostrukture.



Slika D2.1 Asimetrična kvantna jama

Na **Slici D2.1** prikazana je asimetrična kvantna jama. Posmatrajući ovaj model analiziraćemo Schrodingerovu jednačinu (D2.2) pretpostavljajući da ukupni potencijal potiče jedino od diskontinuiteta provodne zone. Ova pretpostavka ne utiče na opštost analize. Ako je deo potencijala  $-e\varphi(x)$  koji potiče od koncentracije elektrona značajan, onda se, uzimajući u obzir da je  $\varphi(x)$  svuda kontinualno, ukupni potencijal u okolini spoja (npr.  $x = 0$ ) može predstaviti, sa dovoljnom tačnošću, kao na **Slici D2.1**, samo pomeren za

-  $e\varphi(0)$ . Izabrani profil kvantne jame poseduje sva tri tipa energijskog spektra: diskretni, jednostruko degenerisani kontinualni i dvostruko degenerisani kontinualni.

Cilj razmatranja je dobijanje graničnih uslova za talasne funkcije na granicama između dva sloja ( $x = 0, L$ ) heterostrukture. Prvi granični uslov je neprekidnost talasne funkcije  $\psi(x)$ . Problem se javlja pri analizi drugog graničnog uslova.

Za početak, ograničićemo naša razmatranja na opseg energija  $E > U_2$  koji odgovara dvostruko degenerisanim kontinualnim stanjima. Talasne funkcije dvostruko degenerisanog kontinualnog dela spektra izabrane su kao striktno kompleksne talasne funkcije što znači da su realni i imaginarni deo linearno nezavisne funkcije. Slučaj drugog izbora ovih funkcija, kao i slučajevi talasnih funkcija jednostruko degenerisanih kontinualnih stanja i diskretnih stanja biće analizirani u drugom delu ovog dodatka. Razmotrićemo za početak graničnu površinu u  $x=0$ . U [86] drugi granični uslov je izveden integraljenjem jednačine (D2.2) u opsegu  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , bez obzira na tip energijskog spektra:

$$\left[ \frac{d}{dx} \left( \alpha_0 \frac{d^2\psi}{dx^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d\psi}{dx} \right] \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \quad (\text{D2.3})$$

Sa ovako formulisanim graničnim uslovom, struja verovatnoće se ne održava duž strukture, a konstantnost struje verovatnoće je opšti zahtev i proizilazi iz stacionarnosti Schrodingerove jednačine. Do ispunjenja uslova održanja struje verovatnoće može se doći zamenom  $\alpha_0$  sa  $2\alpha_0$  u izrazu (D2.3). Takva zamena je i učinjena u radu [86] bez odgovarajućeg objašnjenja. Ono što unosi konfuziju je to što se obe forme graničnih uslova (uslov prikazan u jednačini (D2.3) i uslov dobijen zamenom  $\alpha_0$  sa  $2\alpha_0$  u istoj jednačini) smatraju ekvivalentnim. Time je otvorena dilema o tome koji je granični uslov, zapravo, ispravan. S obzirom da je održanje struje verovatnoće opšti zahtev koji obezbeđuje vremensku nezavisnost verovatnoće nalaženja čestice, izvešćemo drugi granični uslov u tački  $x=0$ , polazeći od prvog graničnog uslova:

$$\psi(-\varepsilon) = \psi(\varepsilon) = \psi(0) \quad (D2.4)$$

Izvođenju drugog graničnog uslova smo pristupili na dva načina: prvi pristup izvođenju je baziran na održanju struje verovatnoće, a drugi pristup je baziran na dvostrukom integraljenju Schrodingerove jednačine.

Iz jednačine (D2.2) jednostavno se izvodi sledeća relacija:

$$\int_{x_1}^{x_2} (\psi^* \hat{H} \psi - \psi \hat{H} \psi^*) dx = 0 \quad (D2.5)$$

pri čemu su  $x_1$  i  $x_2$  dve proizvoljno izabrane tačke ( $x_1 \neq x_2$ ). Izraz (D2.5) je u potpunosti ekvivalentan uslovu da su struje verovatnoće jednake u tačkama  $x_1$  i  $x_2$ . Uzimajući u razmatranje Hamiltonijan (D2.2), parcijalnom integracijom (D2.5) dolazimo do sledećeg izraza:

$$\psi^* (\alpha_0 \psi'')' \Big|_{x_1}^{x_2} - \psi^{*'} \alpha_0 \psi'' \Big|_{x_1}^{x_2} + \mu \psi' \psi^* \Big|_{x_1}^{x_2} - c. c. = 0 \quad (D2.6)$$

gde su  $\mu = -\hbar^2/2m$  i  $' \equiv d/dx$ . Ako je sada  $x_1 = -\varepsilon$  i  $x_2 = \varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), imajući u vidu prvi granični uslov (D2.4), jednačina (D2.6) prelazi u:

$$\begin{aligned} \psi^*(0)[(\alpha_0 \psi'')' + \mu \psi'] \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \psi(0)[(\alpha_0 \psi^{*''})' + \mu \psi^{*'}] \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \\ + [\psi' \alpha_0 \psi^{*''} - \psi^{*'} \alpha_0 \psi''] \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \end{aligned} \quad (D2.7)$$

Pošto su talasne funkcije striktno kompleksne, može se pokazati da one nemaju nule, tj.  $\psi(0) \neq 0$  za sve vrednosti koordinate  $x$ . Pošto je  $\psi(0) \neq 0$ , onda je jednačina (D2.7) zadovoljena ako i samo ako važe sledeće relacije:

$$[(\alpha_0 \psi'')' + \mu \psi'] \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \quad (D2.8)$$

$$[(\alpha_0 \psi^{*''})' + \mu \psi^{*'}] \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \quad (D2.9)$$

$$[\psi' \alpha_0 \psi^{*''} - \psi^{*'} \alpha_0 \psi''] \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \quad (D2.10)$$

Izrazi (D2.8)-(D2.10) predstavljaju drugi granični uslov koji obezbeđuje konzervaciju struje verovatnoće u blizini  $x=0$ .

U drugom pristupu, drugi granični uslov je dobijen integraljenjem Schrodingerove jednačine (D2.2) u granicama od  $-\varepsilon$  do  $\varepsilon$ , što dovodi do dobijanja jednačina (D2.8) i (D2.9). Iz jednačine (D2.3) je jasno da je funkcija  $f(x) = (\alpha_0\psi'')' + \mu\psi'$  kontinualna u tački  $x=0$ . Množenjem  $f(x)$  sa  $\psi^{*}$  i integraljenjem od  $-\varepsilon$  do  $\varepsilon$ , dolazimo do:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\alpha_0\psi'')'\psi^{*'} dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mu\psi'\psi^{*'} dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\psi^{*'} dx \quad (\text{D2.11})$$

Integral koji se nalazi sa desne strane jednačine (11) je zbog neprekidnosti funkcija  $f(x)$  i  $\psi^*(x)$  jednak nuli, dok se prvi integral na levoj strani jednačine (D2.11) može parcijalno integraliti tako da (D2.11) dobija oblik:

$$(\psi^{*'}\alpha_0\psi'') \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha_0|\psi''|^2 dx + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mu|\psi'|^2 dx = 0 \quad (\text{D2.12})$$

koji posle sabiranja i oduzimanja rezultuje uslovom (D2.10).

Ono što možemo zaključiti je da su prvi pristup i drugi pristup izvođenja drugog graničnog uslova u potpunosti ekvivalentni.

Jednačina (D2.7) se može napisati i u sledećem obliku:

$$\psi^*(0) \cdot Q - \psi(0) \cdot Q^* = 0 \quad (\text{D2.13})$$

gde je:

$$Q \equiv (\alpha_0\psi'')' + \frac{\psi'\alpha_0\psi^{*''}}{\psi^*(0)} + \mu\psi' \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \quad (\text{D2.14})$$

Granični uslov (D2.14) obezbeđuje konzervaciju struje verovatnoće u okolini  $x = 0$ . Ipak, ovakav oblik graničnog uslova nije sasvim pogodan sa praktične (operativne) tačke gledišta zbog prisustva  $\psi^*(0)$  u imeniocu. Ne gubeći u opštosti, daćemo pogodniji oblik jednačini (D2.14). U okolini tačke  $x = 0$ , vrednosti  $\alpha_0(x)$  i  $\mu(x)$  se naglo menjaju, kao i potencijal  $U(x)$  zbog diskontinuiteta afiniteta elektrona materijala sa leve i desne strane  $x = 0$ , što

ćemo označiti:  $\alpha_0 = \alpha_{0L}$ ,  $\mu = \mu_L$ ,  $U = U_L = U_2$  i  $\alpha_0 = \alpha_{0D}$ ,  $\mu = \mu_D$ ,  $U = U_D = 0$  za  $x < 0$  i  $x > 0$ , respektivno. U blizini  $x = 0$  talasna funkcija  $\psi(x)$  je:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_L x} + Be^{-ik_L x}, & x < 0, \\ Ce^{ik_D x} + De^{-ik_D x}, & x > 0, \end{cases} \quad (D2.15)$$

gde su A, B, C i D kompleksne konstante, dok su  $k_L$  i  $k_D$  realne i pozitivne veličine:

$$k_{L,D}^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_{L,D}} \frac{1 - \sqrt{1 + 4(\alpha_0)_{L,D}(E - U_{L,D})\left(\frac{2m_{L,D}}{\hbar^2}\right)^2}}{2(\alpha_0)_{L,D}} \quad (D2.16)$$

Lako se može pokazati da je:

$$\frac{\psi''_{L,D}}{\psi_{L,D}} = \frac{\psi^{*''}_{L,D}}{\psi^*_{L,D}} = -k_{L,D}^2 \quad (D2.17)$$

tako da uslov (D2.14) dobija pogodniju formu:

$$[(-2\alpha_0 k^2 + \mu)\psi'] \Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = 0 \quad (D2.18)$$

koja se poklapa sa graničnim uslovom datim u Ref. [77] bez ikakvog objašnjenja.

Uslov (D2.18) pretpostavlja da energija  $E$  pripada dvostruko degenerisanom, kontinualnom delu spektra ( $E > U_2$ ), pa se stoga može uzeti da su talasne funkcije oblika (D2.15), tj. talasne funkcije su striktno kompleksne. Izbor talasnih funkcija u ovom delu spektra može biti i drugačiji: npr. obe talasne funkcije su realne. Ako je jedna kompleksna talasna funkcija  $\psi(x)$ , tada se jednostavno može formirati realna talasna funkcija  $\psi_{REAL}(x) = \psi(x) + \psi^*(x)$ . Pošto uslov (D2.18) važi i za  $\psi^*$ , očigledno je:

$$(-2\alpha_0 k^2 + \mu)\psi'_{REAL}|_{x=\varepsilon} = (-2\alpha_0 k^2 + \mu)\psi'_{REAL}|_{x=-\varepsilon} \quad (D2.19)$$

što, dalje, znači da u uslovu (D2.18) treba samo zameniti  $\psi(x)$  sa  $\psi_{REAL}(x)$ .

Ako energija  $E$  pripada intervalu ( $U_2 > E > U_1$ ), što odgovara jednostrukom degenerisanom kontinualnom delu spektra, tada se u okolini

$x=0$  može izabrati jedno rešenje  $g(x)$  ( $g(x)$  nije talasna funkcija!) koje je za  $x>0$  oblika  $g(x) = e^{-ikx}$ , i naravno,  $g^*(x) = e^{ikx}$ . U oblasti barijere ( $x < 0$ )  $g(x)$  je oblika  $g(x) = B e^{i\kappa x} + C e^{-i\kappa x}$ , pri čemu je:

$$\kappa^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_L} \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_{0L}(U_2 - E)\left(\frac{2m_L}{\hbar^2}\right)^2}}{2\alpha_{0L}}, \quad \kappa > 0. \quad (\text{D2.20})$$

Struja verovatnoće za  $g(x)$  i  $g^*(x)$  mora biti konstantna za svako  $x$ , pa i za  $x=0$ , što se može formulirati malo izmenjenim uslovom (D2.18):

$$(2\alpha_{0L}\kappa^2 + \mu_L)g'(-\varepsilon) = (-2\alpha_{0R}k_D^2 + \mu_R)g'(\varepsilon) \quad (\text{D2.21})$$

pri čemu je  $k_D$  dato izrazom (D2.16). Iz uslova (D2.21) i uslova neprekidnosti veličine  $g(x)$ , dolazi se do eksplicitnog izraza za  $g(x)$ , naravno i za  $g^*(x)$ . Talasna funkcija  $\psi(x)$  je linearna kombinacija kompleksnih rešenja  $g(x)$  i  $g^*(x)$ :  $\psi(x) = \alpha g(x) + \beta g^*(x)$ . Pošto u barijeri talasna funkcija sadrži i član proporcionalan sa  $e^{-\kappa x}$ , odgovarajuća konstanta uz ovaj član mora biti jednaka nuli. Iz ovog uslova se određuje odnos  $\alpha/\beta = \omega$ . Konačno, talasna funkcija je oblika  $\psi(x) = \alpha[g(x) + \omega g^*(x)]$ , pa za nju važi drugi granični uslov u obliku:

$$(2\alpha_0\kappa^2 + \mu)\psi'|_{x=-\varepsilon} = (-2\alpha_0k^2 + \mu)\psi'|_{x=\varepsilon} \quad (\text{D2.22})$$

Ako energija  $E$  pripada diskretnom delu spektra ( $U_1 > E > 0$ ), tada je u tački  $x = 0$  granični uslov identičan uslovu (D.22), jer je u okolini  $x = 0$  situacija identična kao u slučaju jednostruko degenerisanog spektra. Granični uslov u  $x = L$  je sličan uslovu (D.22), samo sa određenim izmenama. U oblasti  $x > L$ , rešenje  $g(x)$  je linearna kombinacija funkcija  $e^{\kappa_1 z}$  i  $e^{-\kappa_1 z}$ , s tim da je:

$$\kappa_1^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_{D1}} \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\alpha_{0D1}(U_1 - E)\left(\frac{2m_{D1}}{\hbar^2}\right)^2}}{2\alpha_{0D1}}; \kappa_1 > 0 \quad (\text{D.23})$$

pri čemu se indeks „D1” odnosi na desnu stranu spoja  $x = L$ . Konačno, drugi granični uslov u  $x = L$  ima oblik:

$$(-2\alpha_0\kappa^2 + \mu)\psi'|_{x=L-\varepsilon} = (2\alpha_0\kappa_1^2 + \mu)\psi'|_{x=L+\varepsilon} \quad (\text{D.24})$$



Izvedeni drugi granični uslov za talasne prikazan u formi jednačina (D2.18), (D2.21) i (D2.22) važi za sve energije bez obzira na prirodu spektra. Ovako izveden uslov ispunjava opšti zahtev za očuvanjem struje verovatnoće, a može se dobiti i dvostrukom integracijom Schrodingerove jednačine.

## Radovi

Objavljeni radovi u vezi sa rezultatima izloženim u tezi:

1. **Ramović S.**, Radovanović J., Milanović V., Tunable semiconductor metamaterials based on quantum cascade laser, *-Journal of Applied Physics*, vol. 110, no. 12, pp. 123704(1-5), 2011.
2. Milanović V., Radovanović J., **Ramović S.**, Influence of nonparabolicity on boundary conditions in semiconductor quantum wells, *-Physics Letters A*, vol. 373, no. 34, pp. 3071-3074, 2009.
3. Radovanović J., **Ramović S.**, Dančić A., Milanović V., Negative refraction in semiconductor metamaterials based on quantum cascade laser design for the mid-IR and THz spectral range, *-Applied Physics A*, vol. 109, no. 4, pp. 763-768, 2012.
4. **Ramović S.**, Radovanović J., Milanović V., Mid-infrared semiconductor metamaterials utilizing intersubband transitions in quantum cascade laser structure, *-Physica Scripta*, vol. T149, pp. 014049-1-014049-3, 2012.

5. Radovanović J., Timotijević D., **Ramović S.**, Milanović V., Modeling of optical gain in quantum cascade laser subjected to strong magnetic field, -*The Proceedings of 5th European Conference on Circuits and Systems for Communications, ECCSC'10*, pp.302-305, 2010.
6. **Ramović S.**, Radovanović J., Milanović V., Metamaterials based on quantum cascade laser structures in strong magnetic field, *Second International Conference on Physics of Optical Materials and Devices, ICOM2009*, Book of Abstracts, Herceg Novi, p.57, 2009.
7. Radovanović J., **Ramović S.**, Milanović V., Ikonić Z., Indjin D., Advanced dispersion engineering for metamaterial applications by using quantum cascade laser in strong magnetic field, *International Quantum Cascade Lasers School & Workshop, IQCLSW 2010*, Florence, 2010.
8. **Ramović S.**, Milanović V., Radovanović J., Egzaktno određivanje granicnih uslova za talasne funkcije u poluprovodničkim, kvantnim nanostrukturama, *54. Konferencija ETRAN-a, Zbornik apstrakata*, p. MO3.2., 2010.
9. **Ramović**, Radovanović J., Milanović V., Mogucnost podešavanja karakteristika metamaterijala na bazi kvantnih kaskadnih lasera putem jakog magnetnog polja, *Konferencija Fotonika 2010 – teorija i eksperiment u Srbiji, Zbornik apstrakata*, st. 45, 2010.
10. **Ramović S.**, Radovanović J., Daničić A., Milanović V., Poluprovodnički metamaterijali na bazi kvantnih kaskadnih lasera u jakom magnetnom polju, *Peta Radionica Fotonike 2012, Zbornik apstrakata*, st.35, 2012.

## Biografija

Sabina Ramović je rođena 26. 05. 1985. godine u Beogradu, gde je završila osnovnu školu i gimnaziju. Elektrotehnički fakultet u Beogradu upisala je 2004. godine na kojem je i diplomirala 2008. godine sa prosečnom ocenom 9,20 (ocena diplomskog rada 10), na Odseku za Fizičku elektroniku, smer Nanoelektronika, optoelektronika i laserska tehnika. Iste godine je upisala diplomske akademske-master studije na Grupi za nanoelektroniku, optoelektroniku i lasersku tehniku, koja je završila odbranom master rada „Dizajn metamaterijala na bazi kvantnog kaskadnog lasera u vrlo jakom magnetnom polju” 2010. godine sa prosečnom ocenom 10. Doktorske studije na Elektrotehničkom fakultetu upisala je 2010. godine.

Od 01. 08. 2010. godine angažovana je na projektu Ministarstva za nauku Srbije „Nanostrukture i nanokomponente u fizičkoj elektronici”, br. 141006 (projekat pripada grupi osnovnih istraživanja - Fizika) i zaposlena je na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu kao istraživač – pripravnik, a od 01.

01. 2011. je angažovana na projektu Ministarstva za prosvetu i nauku „Fotonika mikro i nano strukturnih materijala“ br. III45010 (projekat pripada grupi integralnih i interdisciplinarnih istraživanja). U Institutu za nuklearne nauke „Vinča“ 04. 03. 2011. stiče zvanje istraživač – saradnik.

U toku svoje naučne karijere Sabina Ramović je do sada objavila jedan rad u vrhunskom međunarodnom časopisu sa SCI liste [M21], dva u vodećim međunarodnim časopisima [M22], jedan u međunarodnom časopisu [M23] i tri u zbornicima apstrakata i radova sa međunarodnih konferencija [M33], a objavila je i tri rada na domaćim konferencijama [M63].

## Izjava o autorstvu

Potpisana SABINA RAMOVIĆ

Broj upisa 5002/2010

### Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

„ REALIZACIJA NOVIH METAMATERIJALA NA BAZI KVANTNIH KASKADNIH  
LASERA U VRLO JAKOM MAGNETNOM POLJU ”

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršila autorska prava i koristila intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 03-03-2014

Sabina Ramović

## Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora SABINA RAMOVIĆ

Broj upisa 5002 / 2010

Studijski program NANOELEKTRONIKA I FOTONIKA

Naslov rada REALIZACIJA NOVIH METAMATERIJALA NA BAZI KVANTNIH KASKADNIH LASERA U VRLO JAKOM MAGNETNOM POLJU

Mentor PROFESOR EMERITUS, DR. VITOMIR MILANOVIĆ

Potpisani SABINA RAMOVIĆ

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao za objavljivanje na portalu **Digitalnog repozitorijuma Univerziteta u Beogradu**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stanicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 03.03.2014.

Sabina Ramović

## Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku "Svetozar Marković" da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

„REALIZACIJA NOVIH METAMATERIJALA NA BAZI KVANTNIH  
KASKADNIH LASERA U VRLO JAKOM MAGNETNOM POJLU“

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne Zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo
2. Autorstvo – nekomercijalno
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima
5. Autorstvo – bez prerade
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci, kratak opis licenci dat je na poledini lista).

Potpis doktoranda

U Beogradu, 03.03.2014.

Sabina Raućević



1. Autorstvo – Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.
2. Autorstvo – nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.
5. Autorstvo – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.