УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јелена М. Грујић

ГЕОМЕТРИЈСКА МОДИФИКАЦИЈА АЈНШТАЈНОВЕ ТЕОРИЈЕ ГРАВИТАЦИЈЕ

докторска дисертација

Београд, 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Jelena M. Grujić

GEOMETRICAL MODIFICATION OF THE EINSTEIN THEORY OF GRAVITY

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор

проф. др Зоран Ракић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије

проф. др Зоран Ракић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Бранко Драговић, научни саветник,
Институт за физику, Београд

проф. др Стана Никчевић, редовни професор,
Фармацеутски факултет, Универзитет у Београду

др Мирослава Антић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Владица Андрејић, доцент,
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Воја Радовановић, редовни професор,
Физички факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Захвалности

Овај рад је написан у оквиру научног пројекта бр. 174012 под називом ”Геометрија, образовање и визуелизација са применама”, који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Резултати овог рада су више пута представљени на семинару ”Геометрија, образовање и визуелизација са применама”. Резултати су такође саопштени на следећим конференцијама: 1) XVI NATIONAL CONFERENCE OF ASTRONOMERS OF SERBIA, Belgrade, 10-12 October 2011, 2) X International Workshop, LIE THEORY AND ITS APPLICATIONS IN PHYSICS, 17-23 June 2013, Varna, Bulgaria, 3) XVIII GEOMETRICAL SEMINAR, Vrnjacka Banja, Serbia, May 25-28, 2014, 4) XVII NATIONAL CONFERENCE OF ASTRONOMERS OF SERBIA, Belgrade, 23-27 September 2014 .

Овом приликом се посебно захваљујем својим менторима др Бранку Драговићу и др Зорану Ракићу на несебичној подршци, усмеравању и знању које су преносили током наших стручних дискусија. Захваљујем се мом сараднику Ивану Димитријевићу, као и др Алексеју Кошељеву (Alexey Koshelev) и др Сергеју Вернову (Sergey Vernov) на стручним дискусијама. Такође користим прилику да се захвалим и комплетној комисији за преглед и оцену докторске дисертације у саставу (у азбучном редоследу): др Владица Андрејић, др Мирослава Антић, др Бранко Драговић, др Стана Никчевић, др Воја Радовановић, др Зоран Ракић. Они су прочитали рад и својим стручним коментарима га унапредили.

Захваљујем се својој породици на неизмерној љубави и подршци.

Геометријска модификација Ајнштајнове теорије гравитације

Резиме: Без обзира на своју теоријску лепоту и многе феноменолошке успехе, општа теорија релативности није комплетна теорија и потребно ју је модификовати. Општа релативност даје космолошка решења која садрже сингуларитет у почетном тренутку. Са циљем да решимо овај проблем космичког сингуларитета бавимо се нелокалном модификацијом опште теорије релативности. Посебно, анализирамо два нелокална модела помоћу којих налазимо нека несингуларна решења са прескоком за космолошки скалирајући фактор.

Кључне речи: модификована гравитација, нелокална гравитација, варијациони принцип, једначине кретања, несингуларна космолошка решења са прескоком, космолошка решења степеног облика.

Научна област: Математика
Ужа научна област: Геометрија

УДК број: 514.82:[514.764.2:531.5](043.3)

Geometrical modification of the Einstein theory of gravity

Abstract: Despite its theoretical beauty and many phenomenological evidences, general relativity is not a complete theory and should be modified. Namely, under rather general conditions, general relativity yields cosmological solutions with zero size of the universe at its beginning, what means an infinite matter density. In order to solve this problem we consider nonlocal modification of general relativity. In particular, we analyze two nonlocal models and present their nonsingular bounce cosmological solutions for the cosmic scale factor.

Key words: modified gravity, nonlocal gravity, variational principle, equations of motion, nonsingular bounce cosmological solutions, power-law cosmological solutions.

Academic discipline: Mathematics
Academic sub-discipline: Geometry

UDK number: 514.82:[514.764.2:531.5](043.3)

Увод

Општа релативност је Ајнштајнова теорија гравитације базирана на једначини кретања за гравитационо (метричко) поље $g_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

где је $R_{\mu\nu}$ Ричијев тензор, R је скаларна кривина, $g_{\mu\nu}$ је метрички тензор, који је уједно и тензор гравитационог поља, G је гравитациона константа, $T_{\mu\nu}$ је тензор енергије-импулса, и брзина светлости је $c = 1$. Ова Ајнштајнова једначина се може извести из Ајнштајн-Хилбертовог дејства

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x + \int \mathcal{L}_m \sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x,$$

где је $\mathsf{g} = \det(g_{\mu\nu})$, а $\mathcal{L}_m$ је лагранжијан материје. Без обзира на своју теоријску лепоту и многе феноменолошке успехе, општа теорија релативности није комплетна теорија и потребно ју је модификовати.

Мотивација за модификацију Ајнштајнове теорије гравитације је обично повезана са неким проблемима у квантној гравитацији, теорији струна, астрофизици и космологији (видети [19, 52, 54]). Нас углавном занимају космолошки разлози за модификацију Ајнштајнове теорије гравитације. Ако је Ајнштајнова теорија гравитације применљива на целокупну васиону и ако васиона има Фридман-Робертсон-Вокерову (FRW) метрику, тада постоје два нова вида материје: тамна материја и тамна енергија. Према оваквом приступу постоје три вида материје у свемиру са следећим приближним процентним односом: тамна енергија (68%), тамна материја (27%) и видљива материја (5%) [1]. Тамна енергија има негативан притисак и тиме узрокује убрзано ширење васионе. Међутим, тамна страна васионе (95% тамне материје и енергије) је још увек хипотетичка пошто постојање тамне материје и тамне енергије није експериментално потврђено. Још један космолошки проблем опште релативности је повезан са сингуларитетом Великог праска. Наиме, под прилично општим условима, општа релативност даје космолошка решења при којима је васиона на свом почетку величине нула, што значи да је густина материје бесконачна. Општа релативност мора бити модификована на одговарајући начин у околини овог почетног сингуларитета.

Модификација Ајнштајнове теорије гравитације треба да представља теоријско уопштење опште теорије релативности и треба да буде верификована барем у Сунчевом систему. Модификована Ајнштајнова теорија гравитације треба да је теоријски савршенија теорија гравитације, да реши проблем космичког сингуларитета, да правилно опише динамику галаксија и убрзано ширење васионе са или без тамне материје и тамне енергије. У последњих петнаестак година интензивно се ради на разним модификацијама Ајнштајнове теорије гравитације. Ова проблематика је погодно поље примене псеудо-Риманове геометрије. Псеудо-Риманова геометрија дозвољава разна уопштавања Ајнштајнове теорије гравитације тако да њена могућа теоријска модификација није једнозначна.

У овом раду се бавимо нелокалном модификацијом Ајнштајнове теорије гравитације (видети [35]). Она обично садржи бесконачан број просторно-временских извода у облику степених редова по Даламберовом оператору $\Box = \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{g}}}\partial_\mu\sqrt{-\mathrm{g}}g^{\mu\nu}\partial_\nu$ или његовом инверзу $\Box^{-1}$, или комбинације оба. Углавном нас занима нелокалност изражена преко аналитичке функције $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\Box^n$. Међутим, постоје такође модели са $\Box^{-1}R$ (видети литературу [21, 20, 56, 51, 41, 57, 36, 37, 42, 43]). За нелокалну гравитацију са $\Box^{-1}$ видети још [5, 48]. За неке друге аспекте модела нелокалне гравитације погледати [11, 15, 49, 16, 30].

Мотивација за модификацију гравитације на нелокални начин долази углавном из теорије струна, специјално од лагранжијана за p-адичне скаларне струне (видети [34, 32, 4]). Наиме, струне су веома мали једнодимензиони објекти и њихов опис садржи просторно-временску нелокалност.

У Глави 1 уводимо основну нотацију и терминологију, затим дефинишемо псеудо-Риманову многострукост, Ричијеву и скаларну кривину и интеграцију на многострукостима. У Глави 2 описана је Ајнштајнова теорија гравитације, отворени проблеми у космологији, мотивација за модификацију Ајнштајнове теорије гравитације као и правци модификације Ајнштајнове теорије гравитације. Глава 3 садржи оригиналне резултате и у њој изучавамо модел нелокалне гравитације без материје који је дат дејством облика

$$S = \int_M \Big(\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} + C\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\Big)\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x.$$

Изводе се једначине кретања за ово дејство. Пошто су једначине кретања веома сложене, испитивање једначина кретања и проналажење њихових решења је веома тежак задатак. У Глави 4 се налазе оригинални резултати и у њој анализирамо два нелокална модела: модел са нелокалним чланом облика $R\mathcal{F}(\Box)R$ и модел са нелокалним чланом облика $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$. Затим дајемо нека њихова космолошка решења.

Садржај

Глава 1

Псеудо-Риманова геометрија

У овој глави уводимо основне објекте диференцијалне геометрије, као и нотацију коју ћемо користити кроз читав рад. Садржај ове главе и ознаке су углавном засноване по О'Нилу [53]. Око неких дефиниција је послужила књига До Карма [31].

Уопштено говорећи, многострукост је тополошки простор који локално личи на еуклидски простор. Глатка многострукост је многострукост за коју је ова сличност са еуклидским простором довољно јака да омогући увођење парцијалног извода, у ствари целог математичког апарата на многострукости.

1.1 Глатка многострукост

За реално-вредносну функцију $f : U \to \mathbb{R}$, где је U отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$ кажемо да је глатка (мислимо на пресликавања класе C^∞) ако има непрекидан парцијални извод било ког реда.

За $0 \leq i \leq n-1$, нека је $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функција која придружује свакој тачки $p = (p_0, \ldots, p_{n-1})$ њену $i-$ту координату p_i, односно $u^i((p_0, \ldots, p_{n-1})) = p_i$. Функције $u^0, \ldots, u^{n-1}$ се зову природне координатне функције од $\mathbb{R}^n$.

За функцију $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, где је U отворени подскуп од $\mathbb{R}^m$ кажемо да је глатка ако је свака реално-вредносна функција $u^i \circ \phi$ глатка ($0 \leq i \leq n-1$).

Координатни систем у тополошком простору S је хомеоморфизам $\xi : U \to \widetilde{U}$ са отвореног подскупа $U \subseteq S$ на отворен подскуп $\widetilde{U} = \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Кажемо да је ξ димензије n. Можемо записати $\xi(p) = (x^0(p), \ldots, x^{n-1}(p))$ за свако $p \in U$. Функције $x^0, \ldots, x^{n-1}$ се зову координатне функције од ξ. Тада

$$\xi = (x^0, \ldots, x^{n-1}) : U \to \mathbb{R}^n.$$

Приметимо да важи идентитет $u^i \circ \xi = x^i$.

За два n-димензиона координатна система $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ и $\eta : V \to \mathbb{R}^n$ у тополошком простору S кажемо да се глатко преклапају ако су пресликавања $\xi \circ \eta^{-1}$ и $\eta \circ \xi^{-1}$ глатка или је $U \cap V = \varnothing$. Јасно, у случају $U \cap V \neq \varnothing$ композиција $\eta \circ \xi^{-1}$ је дефинисана на отвореном скупу $\xi(U \cap V)$ и слика га на скуп $\eta(U \cap V)$, док је $\xi \circ \eta^{-1} : \eta(U \cap V) \to \xi(U \cap V)$ њена инверзна функција. Како су и домен и кодомен ових пресликавања отворени подскупови од $\mathbb{R}^n$ ово значи да су $\eta \circ \xi^{-1}$ и $\xi \circ \eta^{-1}$ глатка пресликавања у обичном еуклидском смислу (тј. глатка као пресликавања n-димензионих реалних простора).

Дефиниција 1.1. Атлас A димензије n на простору S је фамилија n - димензионих координатних система у S тако да важе аксиоме:
(A1) свака тачка из S садржана је у домену неког координатног система из атласа A, и
(A2) свака два координатна система из A се глатко преклапају.

За атлас C на S кажемо да је комплетан ако C садржи сваки координатни систем у S који се глатко преклапа са сваким координатним системом из C.

Лема 1.1. *Сваки атлас A на S садржан је у јединственом комплетном атласу.*

Дефиниција 1.2. Глатка многострукост M је Хаусдорфов простор са пребројивом базом који је снабдевен комплетним атласом.

Димензија $n = dimM$ глатке многострукости M (у даљем тексту краће само "многострукост") је димензија њеног атласа, при чему се често користи ознака M^n.

Кад кажемо да је ξ координатни систем многострукости M подразумеваћемо да је у питању координатни систем из комплетног атласа. Ако домен U од ξ садржи тачку $p \in M$, тада се ξ зове координатни систем у тачки p, а U координатна околина тачке p.

1.2 Глатка пресликавања

Нека је f реално-вредносна функција на многострукости M и $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ координатни систем многострукости M. Тада се композиција $f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \to \mathbb{R}$ зове координатна репрезентација пресликавања f у односу на ξ. За функцију $f : M \to \mathbb{R}$ кажемо да је глатка ако је за сваки координатни систем ξ

многострукости M координатна репрезентација $f \circ \xi^{-1}$ глатка функција у обичном еуклидском смислу.

Нека је $\mathcal{F}(M)$ скуп свих глатких реално-вредносних функција на M. Ако су f и g глатке функције на M онда су и њихов збир $f+g$ и производ fg глатке функције. Приметимо да је $\mathcal{F}(M)$ у односу на претходне две операције комутативан прстен.

Дефиниција 1.3. Нека су M^m и N^n многострукости. Кажемо да је пресликавање $\phi : M \to N$ глатко ако је за сваки координатни систем ξ у M и сваки координатни систем η у N, пресликавање $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ еуклидски глатко при чему је $\xi(U \cap \phi^{-1}(V))$ отворен скуп, где су U и V домени пресликавања ξ и η.

Пошто се свака два координатна система из атласа глатко преклапају довољно је проверити глаткоћу само за оне координатне системе који ће прекрити M и N.

Еуклидски глатко пресликавање ϕ из отвореног скупа $U \subseteq \mathbb{R}^m$ у $\mathbb{R}^n$ је глатко у смислу претходне дефиниције јер ϕ је само себи координатна репрезентација у односу на идентичке координатне системе на U и $\mathbb{R}^n$. Слично, дефиниција глатког пресликавања је еквивалентна дефиницији за случај $f : M \to \mathbb{R}$.

Идентичко пресликавање на многострукости је глатко. Композиција глатких пресликавања је глатка. Координатни системи ξ и координатне функције x^i су глатка пресликавања на домену од ξ.

За пресликавање $\phi : M \to N$ кажемо да је глатко у тачки $p \in M$ ако је рестрикција пресликавања ϕ на неку околину тачке p глатка. Може се показати да је ϕ глатко ако и само ако је ϕ глатко у свакој тачки многострукости M. Видимо да је глаткоћа локално својство, па важи следећа лема која се често користи.

Лема 1.2. *Нека су U_α отворен подскуп многострукости M и $\phi_\alpha : U_\alpha \to N$ глатко пресликавање за сваки индекс $\alpha \in A$. Ако важи $\phi_\alpha = \phi_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$ за свако $\alpha, \beta \in A$, тада постоји јединствено глатко пресликавање $\phi : \bigcup U_\alpha \to N$ такво да је $\phi \mid U_\alpha = \phi_\alpha$ за свако $\alpha \in A$.*

Лема 1.3. *Глатка пресликавања између многострукости су непрекидна.*

Дефиниција 1.4. Дифеоморфизам $\phi : M \to N$ је глатко инвертибилно пресликавање чији је инверз такође глатко пресликавање.

Идентичка пресликавања на многострукостима, композиције дифеоморфизама, као и инверзи дифеоморфизама су дифеоморфизми.

Ако постоји дифеоморфизам $\phi : M \to N$ кажемо да су многострукости M и N дифеоморфне преко ϕ. На пример, било који отворени интервал (a, b) у $\mathbb{R}$ је дифеоморфан са $(-1, 1)$ преко подесног линеарног пресликавања, а $(-1, 1)$ је дифеоморфан са $\mathbb{R}$ преко $\phi(t) = \frac{t}{1-t^2}$.

За теорију многострукости можемо рећи да проучава објекте који се чувају дифеоморфизмима. Са те тачке гледишта дифеоморфне многострукости су суштински исте.

Ако је ϕ бијективно пресликавање скупа Σ у многострукост M, тада постоји јединствен начин да од скупа Σ направимо многострукост (јединствена топологија и комплетан атлас на Σ) тако да је ϕ дифеоморфизам.

Пошто су глатка пресликавања непрекидна, дифеоморфизам је специјални хомеоморфизам. Међутим, глатки хомеоморфизам у општем случају није дифеоморфизам јер његов инверз не мора бити глатко пресликавање.

Сваки координатни систем ξ је дифеоморфизам из свог домена U на $\xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Важи и обрнуто, сваки дифеоморфизам ϕ из отвореног скупа $V \subseteq M$ на $\phi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ је координатни систем многострукости M.

Носач $\operatorname{supp} f$ од $f \in \mathcal{F}(M)$ је затворење скупа $\{p \in M : f(p) \neq 0\}$. Према томе $M \setminus \operatorname{supp} f$ је највећи отворен скуп на којем је f идентички једнака нули.

1.3 Тангентни вектори

Дефиниција 1.5. Тангентни вектор на многострукости M у тачки $p \in M$ је реално-вредносна функција $X : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ која задовољава
(1) линеарност: $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$, и
(2) Лајбницово правило: $X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$
за свако $a, b \in \mathbb{R}$ и свако $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Дефиниција 1.6. Скуп свих тангентних вектора на многострукости M у тачки $p \in M$ зовемо тангентни простор многострукости M у тачки p и обележавамо са T_pM.

На тангентном простору можемо да дефинишемо сабирање и множење на стандардан начин. Ако су $X, Y \in T_pM$ тада важи

$$\begin{aligned}(X + Y)(f) &= X(f) + Y(f),\\ (aX)(f) &= aX(f),\end{aligned}$$

за свако $f \in \mathcal{F}(M)$ и свако $a \in \mathbb{R}$. Није тешко видети да је T_pM векторски простор у односу на ове операције.

Да би дефинисали парцијални извод на многострукости, потребно је да пресликавање f пребацимо у еуклидски простор користећи неки координатни систем, а затим да гледамо уобичајен парцијални извод.

Дефиниција 1.7. Нека је $\xi = (x^0, \ldots, x^{n-1})$ координатни систем многострукости M у тачки p. За пресликавање $f \in \mathcal{F}(M)$ и свако $i = 0, \ldots, n-1$ дефинишемо

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)),$$

где су $u^0, \ldots, u^{n-1}$ природна координатна пресликавања од $\mathbb{R}^n$.

Може се показати праволинијским рачуном да је пресликавање

$$(\partial_i)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R},$$

које $f \in \mathcal{F}(M)$ слика у $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ један тангентни вектор многострукости M у тачки p.

Лема 1.4. *Нека је $X \in T_pM$. Тада важи*
(1) Ако су функције $f, g \in \mathcal{F}(M)$ једнаке на некој околини тачке p, онда је $X(f) = X(g)$.
(2) Ако је функција $h \in \mathcal{F}(M)$ константна на некој околини тачке p, тада је $X(h) = 0$.

На осову претходне леме видимо да су тангентни вектори локални објекти. Следи једна јако важна теорема

Теорема 1.1. *Нека је $\xi = (x^0, \ldots, x^{n-1})$ координатни систем многострукости M у тачки p. Тада пресликавања $(\partial_0)_p, \ldots, (\partial_{n-1})_p$ чине базу тангентног простора T_pM, и важи*

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} X(x^i)(\partial_i)_p,$$

за свако $X \in T_pM$.

Дакле, тангентни простор T_pM је векторски простор димензије $n = dimM$, чију једну базу чине пресликавања $(\partial_0)_p, \ldots, (\partial_{n-1})_p$.

1.4 Извод пресликавања

Основна идеја диференцијалног рачуна је апроксимирати глатке објекте линеарним објектима. У претходној секцији многострукост M смо апроксимирали у околини сваке њене тачке p тангентним простором T_pM. Сада апроксимирамо глатко пресликавање $\phi : M \to N$ у околини сваке тачке $p \in M$ линеарном трансформацијом тангентних простора.

Приметимо најпре да ако је $X \in T_pM$ тада је функција $X_\phi : \mathcal{F}(N) \to \mathbb{R}$ дефинисана са $X_\phi(g) = X(g \circ \phi)$ тангентни вектор многострукости N у тачки $\phi(p)$. Покажимо да важи Лајбницов услов. Нека су $f, g \in \mathcal{F}(N)$, тада важи:

$$\begin{aligned} X_\phi(fg) &= X((fg) \circ \phi) = X((f \circ \phi)(g \circ \phi)) = X(f \circ \phi)g(\phi(p)) + f(\phi(p))X(g \circ \phi) \\ &= X_\phi(f)g(\phi(p)) + f(\phi(p))X_\phi(g). \end{aligned}$$

Није тешко проверити да је X_ϕ линеарно пресликавање.

Дефиниција 1.8. Нека је $\phi : M \to N$ глатко пресликавање. За сваку тачку $p \in M$ дефинишемо пресликавање $d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ на следећи начин

$$d\phi_p(X) = X_\phi.$$

Пресликавање $d\phi_p$ се зове извод пресликавања ϕ у тачки p.

Како за пресликавање $d\phi_p$ важи

$$d\phi_p(X)(g) = X(g \circ \phi),$$

за свако $X \in T_pM$ и $g \in \mathcal{F}(N)$, није тешко проверити да је $d\phi_p$ линеарно пресликавање.

Лема 1.5. *Нека је $\phi : M^m \to N^n$ глатко пресликавање. Нека је $\xi = (x^0, \dots, x^{n-1})$ координатни систем многострукости M у тачки p и нека је $\eta = (y^0, \dots, y^{n-1})$ координатни систем многострукости N у тачки $\phi(p)$, тада важи:*

$$d\phi_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)_p = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j}(p)\Big(\frac{\partial}{\partial y^i}\Big)_{\phi(p)},$$

за свако $j = 0, \dots, m-1$.

Матрица пресликавања $d\phi_p$ у односу на координатне базе је

$$\Big(\frac{\partial(y^i \circ \phi)}{\partial x^j}(p)\Big)_{0\leq i\leq n-1,\, 0\leq j\leq m-1}.$$

Зовемо је Јакобијан матрица пресликавања ϕ у тачки p у односу на координатне системе ξ и η.

Лема 1.6. *Ако су $\phi : M \to N$ и $\psi : N \to P$ глатка пресликавања, тада за сваку тачку $p \in M$ важи*

$$d(\psi \circ \phi)_p = d\psi_{\phi(p)} \circ d\phi_p.$$

У теорији многострукости теорема о инверзној функцији гласи

Теорема 1.2. *Нека је $\phi : M \to N$ глатко пресликавање. Извод пресликавања $d\phi_p$ у тачки $p \in M$ је линеарни изоморфизам ако и само ако постоји околина V тачке $p \in M$ таква да је $\phi \mid V$ дифеоморфизам из V на околину $\phi(V)$ тачке $\phi(p) \in N$.*

Имајући у виду претходну теорему, глатко пресликавање $\phi : M \to N$ такво да је сваки $d\phi_p$ линеарни изоморфизам зове се локални дифеоморфизам.

1.5 Тангентно раслојење

За многострукост M, нека је $T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$. Из формалних разлога за свако $p \in M$ обележимо $0 \in T_pM$ са 0_p. Тада се сваки $X \in T(M)$ налази у јединственом T_pM, а пројекција $\pi : T(M) \to M$ слика X у p. Према томе $\pi^{-1}(p) = T_pM$.

Постоји природан начин да $T(M)$ постане многострукост, која се зове тангентно раслојење на многострукости M. Нека је ξ координатни систем на $U \subseteq M$. Ако је X тангентни вектор на M у тачки $p \in U$, тада је X јединствено одређен координатама од p и координатама од X у односу на $\partial_0, \dots, \partial_{n-1}$ у тачки p. Нека је $\dot{x}^i$ реално-вредносна функција на $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ дата са $\dot{x}^i(X) = X(x^i)$. Сада дефинишимо $\widetilde{\xi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$ са

$$\widetilde{\xi} = (x^0 \circ \pi, \dots, x^{n-1} \circ \pi, \dot{x}^0, \dots, \dot{x}^{n-1}).$$

Може се показати да је $T(M)$ многострукост чији су координатни системи све функције типа $\widetilde{\xi}$.

1.6 Векторска поља

Векторско поље X на M је једна секција пресликавања $\pi : T(M) \to M$, односно непрекидно пресликавање $X : M \to T(M)$, уобичајено записано са $p \mapsto X_p$, такво да је $\pi \circ X = id_M$.

Ако је X векторско поље на M и $f \in \mathcal{F}(M)$, онда Xf означава реално-вредносну функцију на M дату са

$$(Xf)(p) = X_p(f),$$

за свако $p \in M$.

Нека је $\chi(M)$ скуп свих глатких векторских поља на многострукости M. На $\chi(M)$ можемо природно дефинисати следеће операције:

$$(X+Y)_p = X_p + Y_p,$$
$$(fX)(p) = f(p)X_p,$$

за свако $f \in \mathcal{F}(M)$ и $p \in M$.

Приметимо да ако су X и Y глатка векторска поља, тада су векторска поља $X+Y$ и fX такође глатка. У односу на ове две операције $\chi(M)$ је модул над прстеном $\mathcal{F}(M)$.

Нека је $\xi = (x^0, \ldots, x^{n-1})$ координатни систем на $U \subseteq M$. Тада се за свако $0 \leq i \leq n-1$ векторско поље ∂_i на U које свакој тачки p придружује $(\partial_i)_p$ зове $i-$то координатно векторско поље од ξ. Ова векторска поља су глатка јер је $\partial_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Из Теореме 1.1 одмах следи да за свако векторско поље X важи

$$X = \sum X(x^i)\partial_i,$$

на U.

Извод на $\mathcal{F}(M)$ је функција $D : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ за коју важи:
(1) линеарност: $D(af+bg) = aD(f) + bD(g), \quad (a, b \in \mathbb{R})$ и
(2) Лајбницов услов: $D(fg) = D(f)g + fD(g)$.

На основу дефиниције тангентног вектора видимо да је за векторско поље $X \in \chi(M)$ функција $f \mapsto Xf$ један извод на $\mathcal{F}(M)$. Обрнуто, сваки извод D на $\mathcal{F}(M)$ потиче од неког векторског поља. Заправо, за сваку тачку $p \in M$ дефинишимо $X_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ са $X_p(f) = D(f)(p)$. Пошто важе својства за извод (1) и (2) можемо закључити да је X_p тангентни вектор на многострукости M у тачки p. Дакле, X је добро дефинисано векторско поље на M. Како је $Xf = D(f) \in \mathcal{F}(M)$ за свако $f \in \mathcal{F}(M)$, следи да је векторско поље X глатко и одређује извод D.

Кад год нам буде било згодно сматраћемо да су векторска поља изводи на $\mathcal{F}(M)$. Ова интерпретација нас доводи до веома важне операције на векторским пољима. За $X, Y \in \chi(M)$ дефинишемо $[X, Y] = XY - YX$. У питању је оператор на $\mathcal{F}(M)$ који пресликавању $f \in \mathcal{F}(M)$ додељује $X(Y(f)) - Y(X(f))$. Једноставном провером може се показати да је $[X, Y]$ извод на $\mathcal{F}(M)$, дакле у питању је глатко векторско поље на M. $[X, Y]$ се зове комутатор (или Лијева заграда) векторских поља X и Y.

У терминима оригиналне дефиниције векторског поља, $[X, Y]$ свакој тачки $p \in M$ придружује тангентни вектор $[X, Y]_p$ тако да важи

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf).$$

Лако се могу проверити својства комутатора из следеће леме.

Лема 1.7. *Комутатор на $\chi(M)$ има следећа својства:*
(1) $\mathbb{R}$-билинеарност: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$.
(2) антисиметричност: $[Y, X] = -[X, Y]$.
(3) Јакобијев идентитет: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Иако је комутатор на $\chi(M)$ $\mathbb{R}$-билинеаран, он није $\mathcal{F}(M)$-билинеаран јер је

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

У два специјална случаја комутатор је увек нула. За свако $X \in \chi(M)$ важи $[X, X] = 0$. То је последица антисиметричности из претходне леме. За свака два координатна векторска поља ∂_i и ∂_j у истом координатном систему, важи $[\partial_i, \partial_j] = 0$ што одговара изразу $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$ за глатка пресликавања f.

Дефиниција 1.9. Нека је $\phi : M \to N$ глатко пресликавање. Кажемо да су векторска поља X на M и Y на N ϕ-повезана ако важи

$$d\phi(X_p) = Y_{\phi(p)},$$

за свако $p \in M$.

Лема 1.8. *Векторска поља $X \in \chi(M)$ и $Y \in \chi(N)$ су ϕ-повезана ако и само ако важи $X(g \circ \phi) = Yg \circ \phi$ за свако $g \in \mathcal{F}(N)$.*

Лема 1.9. *Ако је $X_1 \in \chi(M)$ ϕ-повезано са $Y_1 \in \chi(N)$, а $X_2 \in \chi(M)$ ϕ-повезано са $Y_2 \in \chi(N)$, тада је $[X_1, X_2] \in \chi(M)$ ϕ-повезано са $[Y_1, Y_2] \in \chi(N)$.*

Нека је $\phi : M \to N$ дифеоморфизам. Тада, за свако $X \in \chi(M)$ постоји јединствено векторско поље $d\phi(X) \in \chi(N)$ које је ϕ-повезано са X. Немамо другог избора осим да дефинишемо $(d\phi X)_q = d\phi(X_p)$ за свако $q = \phi(p) \in N$. Како за свако $g \in \mathcal{F}(N)$ важи $(d\phi X)g = X(g \circ \phi) \circ \phi^{-1} \in \mathcal{F}(N)$, векторско поље $d\phi(X)$ је глатко.

1.7 1-форме

1-форме на глаткој многострукости M су објекти дуални векторским пољима. Дуални простор T_pM^* тангентног простора T_pM се зове котангентни простор многострукости M у тачки p. Елементи простора T_pM^* се понекад зову ковектори, они су линеарна пресликавања из T_pM у $\mathbb{R}$.

Дефиниција 1.10. 1-форма θ на многострукости M је функција која свакој тачки p придружује елемент θ_p котангентног простора T_pM^*.

Дакле, θ сваком тангентном вектору додељује реалан број и линеарно је на тангентним векторима у свакој тачки.

За 1-форму θ на многострукости M и векторско поље X на M, означимо са θX реално-вредносну функцију на M дефинисану са $(\theta X)(p) = \theta_p(X_p)$. 1-форма θ је глатка ако је θX глатко за свако $X \in \chi(M)$.

Нека је $\chi^*(M)$ скуп свих (глатких) 1-форми на M. Као и на $\chi(M)$, и на $\chi^*(M)$ можемо природно дефинисати следеће операције:

$$(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p, \quad (f\theta)_p = f(p)\theta_p,$$

за свако $f \in \mathcal{F}(M)$ и $p \in M$. У односу на ове две операције $\chi^*(M)$ је модул над $\mathcal{F}(M)$.

Дефиниција 1.11. Извод од $f \in \mathcal{F}(M)$ је 1-форма df таква да важи $(df)(X) = X(f)$ за сваки тангентни вектор X на M.

Јасно, df је 1-форма пошто је за сваку тачку p функција $(df)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ линеарна, и за $X \in \chi(M)$ функција $(df)(X) = Xf$ је глатка.

Нека је $x^0, \dots, x^{n-1}$ координатни систем на $U \subseteq M$. Посматрајмо координатне 1-форме $dx^0, \dots, dx^{n-1}$ на U. Оне у свакој тачки из U чине дуалну базу базе која се састоји од координатних векторских поља $\partial_0, \dots, \partial_{n-1}$ јер важи $dx^i(\partial_j) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_{ij}$. Следи да за сваку 1-форму θ важи

$$\theta = \sum \theta(\partial_i) dx^i,$$

на U. Ова формула одговара теореми (1.1) која се односи на векторска поља.

Специјално, за $f \in \mathcal{F}(M)$ важи $df(\partial_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, па следи

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i,$$

на U.

Лема 1.10. *Извод има следећа својства:*
(1) $d : \mathcal{F}(M) \to \chi^*(M)$ је $\mathbb{R}$-линеарно.
(2) Правило за производ: Ако су $f, g \in \mathcal{F}(M)$, тада важи $d(fg) = g\,df + f\,dg$.
(3) Ако је $f \in \mathcal{F}(M)$ и $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^1)$, тада важи $d(h(f)) = h'(f)df$.

1.8 Тензори

Следеће дефиниције обухватају два главна случаја која нам требају: модул $\chi(M)$ над прстеном $\mathcal{F}(M)$ и векторски простор T_pM над $\mathbb{R}$.

Нека су $V_0, \ldots, V_{s-1}$ модули над прстеном K. Тада, скуп $V_0 \times \ldots \times V_{s-1} = \{(v_0, \ldots, v_{s-1}) \mid v_i \in V_i,\ 0 \leq i \leq s-1\}$ јесте један модул над K (у односу на уобичајене операције сабирања и множења елементом скупа K), који се зове директан производ (или директан збир, уколико ознаку $\times$ заменимо са $\oplus$).

Нека је W такође модул над K. За функцију

$$A : V_0 \times \ldots \times V_{s-1} \to W$$

кажемо да је K-мултилинеарна ако је A по свакој променљивој K-линеарна. То значи да је за свако $0 \leq i \leq s-1$ и $v_j \in V_j$ $(j \neq i)$, функција

$$v \mapsto A(v_0, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_{s-1})$$

K-линеарна.

Нека је V модул над K. Са V^* означавамо скуп свих K-линеарних функција из V у K. У односу на уобичајене операције сабирања функција и множења елементима скупа K, V^* је један модул над K, који се зове дуални модул модула V.

Ако је $V_i = V$ за $0 \leq i \leq s-1$, ознака $V_0 \times \ldots \times V_{s-1}$ се краће пише V^s.

Дефиниција 1.12. За целе бројеве $r \geq 0$, $s \geq 0$, при чему r и s нису истовремено једнаки нули, K-мултилинеарна функција $A : (V^*)^r \times V^s \to K$ се зове тензор типа (r, s) над V. (Овде подразумевамо $A : V^s \to K$ ако је $r = 0$, и $A : (V^*)^r \to K$ ако је $s = 0$.)

Скуп $T^r_s(V)$ свих тензора типа (r,s) над V представља модул над K, поново у односу на уобичајене операције функционалног сабирања и множења елементом скупа K. Тензор типа $(0,0)$ над V је једноставно елемент скупа K.

1.9 Тензорска поља

Тензорско поље A на многострукости M је тензор над $\mathcal{F}(M)$-модулом $\chi(M)$. Дакле, ако је A типа (r,s) онда он представља $\mathcal{F}(M)$-мултилинеарну функцију

$$A : \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \to \mathcal{F}(M).$$

Дакле, за 1-форме $\theta^0, \dots, \theta^{r-1}$ и векторска поља $X_0, \dots, X_{s-1}$ добијамо реално-вредносну функцију

$$f = A(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, X_{s-1}) \in \mathcal{F}(M).$$

Овде, θ^i се зове i-та контраваријантна променљива, а X_j j-та коваријантна променљива од A.

Скуп $T^r_s(M)$ свих тензорских поља на M типа (r,s) је модул над $\mathcal{F}(M)$. Специјално ако је $r=s=0$, тензорско поље на M типа $(0,0)$ је управо функција $f \in \mathcal{F}(M)$, тј. $T^0_0(M) = \mathcal{F}(M)$.

Да бисмо показали да је дата функција $A : \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \to \mathcal{F}(M)$ тензор морамо да покажемо да је $\mathcal{F}(M)$-линеарна по свакој променљивој. Адитивност по свакој променљивој је често очигледна, тако да је главно питање када по свакој променљивој важи:

$$A(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, fX_i, \dots, X_{s-1}) = fA(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, X_i, \dots, X_{s-1}).$$

Размотримо следећа два примера.

Пример 1.1. Функција евалуације $E : \chi^*(M) \times \chi(M) \to \mathcal{F}(M)$ дата са $E(\theta, X) = \theta X$ је $\mathcal{F}(M)$-линеарна по свакој променљивој. Дакле, E је тензорско поље на M типа $(1,1)$.

Пример 1.2. Нека је ω фиксирана 1-форма таква да је $\omega \neq 0$. Дефинишимо $F : \chi(M) \times \chi(M) \to \mathcal{F}(M)$ са $F(X,Y) = X(\omega Y)$ за свако X, Y. F је $\mathcal{F}(M)$-линеарна по X, али је само адитивна по Y. Важи

$$F(X, fY) = X\omega(fY) = X(f\omega Y) = (Xf)\omega Y + fF(X,Y).$$

Дакле, F није тензорско поље.

Можемо сабирати једино тензоре истог типа. За разлику од сабирања, било која два тензора се могу помножити. За $A \in T^r_s(M)$ и $B \in T^{r'}_{s'}(M)$ дефинишемо

$$A \otimes B : \chi^*(M)^{r+r'} \times \chi(M)^{s+s'} \to \mathcal{F}(M)$$

са

$$\begin{aligned}&(A \otimes B)(\theta^0, \ldots, \theta^{r+r'-1}, X_0, \ldots, X_{s+s'-1})\\ &= A(\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}, X_0, \ldots, X_{s-1})B(\theta^r, \ldots, \theta^{r+r'-1}, X_s, \ldots, X_{s+s'-1}).\end{aligned}$$

Тада је $A \otimes B$ тензор типа $(r+r', s+s')$, који се зове тензорски производ тензора A и B.

Ако је $r' = s' = 0$, тада је B функција $f \in \mathcal{F}(M)$, па имамо

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Јасно ако је A такође типа $(0,0)$, тензорски производ постаје множење у $\mathcal{F}(M)$.

Очигледно тензорски производ је $\mathcal{F}(M)$-билинеаран, тј. важи

$$(fA + gA') \otimes B = fA \otimes B + gA' \otimes B,$$

при чему важи сличан идентитет за B. Непосредно из дефиниције следи да је тензорски производ асоцијативан. $A \otimes B \otimes C$ је добро дефинисан за тензоре било ког типа. Међутим, тензорски производ у општем случају није комутативан. На пример, на координатној околини

$$\begin{aligned}(dx^0 \otimes dx^1)(\partial_0, \partial_1) &= dx^0(\partial_0)dx^1(\partial_1) = 1,\\ (dx^1 \otimes dx^0)(\partial_0, \partial_1) &= dx^1(\partial_0)dx^0(\partial_1) = 0,\end{aligned}$$

па је $dx^0 \otimes dx^1 \neq dx^1 \otimes dx^0$. Са друге стране, за $f \in \mathcal{F}(M)$ важи

$$f(A \otimes B) = fA \otimes B = A \otimes fB.$$

1.10 Интерпретације

Ако је ω глатка 1-форма на многострукости M, тада је функција $X \mapsto \omega(X)$ $\mathcal{F}(M)$-линеарна из $\chi(M)$ у $\mathcal{F}(M)$, па представља $(0,1)$ тензорско поље. Може се показати да свако $(0,1)$ тензорско поље потиче од јединствене 1-форме, тако да можемо писати $T_1^0(M) = \chi^*(M)$.

Следеће две интерпретације се веома често користе.
(1) За (глатко) векторско поље X на M дефинишимо

$$X(\theta) = \theta(X),$$

за свако $\theta \in \chi^*(M)$. Ова функција $X : \chi^*(M) \to \mathcal{F}(M)$ је $\mathcal{F}(M)$-линеарна, те представља $(1,0)$ тензорско поље. Обрнуто, може се показати да свако $(1,0)$ тензорско поље на M потиче од јединственог векторског поља, па пишемо

$$T_0^1(M) = \chi(M).$$

(2) За $\mathcal{F}(M)$-мултилинеарну функцију $A : \chi(M)^s \to \chi(M)$, дефинишимо $\bar{A} : \chi^*(M) \times \chi(M)^s \to \mathcal{F}(M)$ са

$$\bar{A}(\theta, X_0, \ldots, X_{s-1}) = \theta(A(X_0, \ldots, X_{s-1})),$$

за свако θ и X_i. Очигледно $\bar{A}$ је $\mathcal{F}(M)$-мултилинеарна функција, па представља $(1,s)$ тензорско поље.

За тензоре типа $(0,s)$ кажемо да су коваријантни, док за тензоре типа $(r,0)$ при чему је $r \geq 1$ кажемо да су контраваријантни. На пример, реално-вредносне функције и 1-форме су коваријантни тензори, док су векторска поља контраваријантни тензори. Ако су $r,s \neq 0$ за тензоре типа (r,s) кажемо да су мешовити. Приметимо да из дефиниције тензорског производа следи да за коваријантни тензор A и контраваријантни тензор B важи $A \otimes B = B \otimes A$.

1.11 Тензори у тачки

Теорема 1.3. *Нека је $p \in M$ и $A \in T_s^r(M)$. Нека су $\bar{\theta}^0, \ldots, \bar{\theta}^{r-1}$ и $\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}$ 1-форме такве да важи $\bar{\theta}^i|_p = \theta^i|_p (0 \leq i \leq r-1)$ и нека су $\bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_{s-1}$ и $X_0, \ldots, X_{s-1}$ векторска поља таква да је $\bar{X}_j|_p = X_j|_p (0 \leq j \leq s-1)$. Тада важи*

$$A(\bar{\theta}^0, \ldots, \bar{\theta}^{r-1}, \bar{X}_0, \ldots, \bar{X}_{s-1})(p) = A(\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}, X_0, \ldots, X_{s-1})(p).$$

Ова теорема се може једноставно доказати помоћу следеће леме.

Лема 1.11. *Ако било која од 1-форми $\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}$ или било које векторско поље*

$X_0, \ldots, X_{s-1}$ *има вредност нула у тачки p, тада важи*

$$A(\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}, X_0, \ldots, X_{s-1})(p) = 0.$$

Непосредно из Теореме 1.3 следи да тензорско поље $A \in T_s^r(M)$ има вредност A_p у свакој тачки $p \in M$. Заправо, функција

$$A_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

је дефинисана на следећи начин. За $\alpha^0, \ldots, \alpha^{r-1} \in T_pM^*$ и $X_0, \ldots, X_{s-1} \in T_pM$ важи

$$A_p(\alpha^0, \ldots, \alpha^{r-1}, X_0, \ldots, X_{s-1}) = A(\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}, X_0, \ldots, X_{s-1})(p),$$

где су $\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}$ било које 1-форме на M такве да важи $\theta^i|_p = \alpha^i (0 \leq i \leq r-1)$, а $X_0, \ldots, X_{s-1}$ су било која векторска поља за која важи $X_i|_p = x_i (0 \leq j \leq s-1)$.

Лако се проверава да је функција A_p $\mathbb{R}$-мултилинеарна, па према Дефиницији 1.12 A_p представља (r,s) тензор над T_pM. Према томе $A \in T_s^r(M)$ можемо видети као поље које глатко придружује свакој тачки $p \in M$ тензор A_p. Као што је векторско поље глатка секција тангентног раслојења $T(M)$, тако је поље $p \mapsto A_p$ глатка секција (r,s) тензорског раслојења које се грубо говорећи добија када сваки T_pM у $T(M)$ заменимо са простором $T_p(M)_s^r$ (простором (r,s) тензора над T_pM).

1.12 Компоненте тензора

Координатне формуле $X = \sum X(x^i)\partial_i$ за векторско поље и $\theta = \sum \theta(\partial_i)dx^i$ за 1-форму могу се проширити на тензорска поља произвољног типа.

Дефиниција 1.13. Нека је $\xi = (x^0, \ldots, x^{n-1})$ координатни систем на $U \subseteq M$. За $A \in T_s^r(M)$ реално-вредносне функције

$$A^{i_0 \ldots i_{r-1}}_{j_0 \ldots j_{s-1}} = A(dx^{i_0}, \ldots, dx^{i_{r-1}}, \partial_{j_0}, \ldots, \partial_{j_{s-1}})$$

на U, где сви индекси иду од 0 до $n-1$ $(n = dimM)$, зову се компоненте од A у односу на ξ.

Очигледно за $(0,1)$ тензор, који је у ствари 1-форма, ове компоненте су управо компоненте из формуле $\theta = \sum \theta(\partial_i)dx^i$. Користећи интерпретацију векторског поља X као $(1,0)$ тензорског поља, на основу горње дефиниције i-та компонента од X у односу на ξ је $X(dx^i)$, која се тумачи као $dx^i(X) = X(x^i)$.

Када је $(1,s)$ тензорско поље дато у облику $A : \chi(M)^s \to \chi(M)$, његове компоненте су одређене помоћу једначине

$$A(\partial_{i_0}, \dots, \partial_{i_{s-1}}) = \sum_j A^j_{i_1 \dots i_s} \partial_j,$$

пошто за његову интерпретацију $\bar{A} \in T^1_s(M)$ важи

$$\bar{A}(dx^j, \partial_{i_0}, \dots, \partial_{i_{s-1}}) = dx^j(A(\partial_{i_0}, \dots, \partial_{i_{s-1}})) = \sum_k A^k_{i_1 \dots i_s} dx^j(\partial_k) = A^j_{i_0 \dots i_{s-1}}.$$

Евалуација тензорског поља на 1-формама и векторским пољима може се описати на следећи начин. На пример, нека је A $(1,2)$ тензор. Како је A $\mathcal{F}(M)$-мултилинеарано, за произвољну 1-форму $\theta = \sum \theta_k dx^k$ и произвољна векторска поља $X = \sum X^i \partial_i$ и $Y = \sum Y^j \partial_j$ важи

$$A(\theta, X, Y) = \sum_{i,j,k} A(dx^k, \partial_i, \partial_j) \theta_k X^i Y^j = \sum_{i,j,k} A^k_{ij} \theta_k X^i Y^j.$$

За фиксирани координатни систем, компоненте суме тензора једнаке су управо суми компонената. Компоненте тензорског производа су дате са

$$(A \otimes B)^{i_0 \dots i_{r+r'-1}}_{j_0 \dots j_{s+s'-1}} = A^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots j_{s-1}} \cdot B^{i_r \dots i_{r+r'-1}}_{j_s \dots j_{s+s'-1}},$$

где сви индекси иду од 0 до $n-1$ ($n = dimM$). На пример, нека је A тензор типа $(1,2)$ и B типа $(1,1)$, тада је $A \otimes B$ тензор типа $(2,3)$ са компонентама:

$$(A \otimes B)^{kq}_{ijp} = (A \otimes B)(dx^k, dx^q, \partial_i, \partial_j, \partial_p) = A(dx^k, \partial_i, \partial_j) \cdot B(dx^q, \partial_p) = A^k_{ij} B^q_p.$$

Нека је ξ координатни систем на $U \subseteq M$. Тада, баш као и векторско поље или 1-форма, било који тензор има јединствено представљање на U у терминима његових компонената у односу на ξ. Нека је, на пример, $r = 1$ и $s = 2$. Тада је $\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$ $(1,2)$ тензор на U за свако $0 \leq i,j,k \leq n-1$. Ако је A било који $(1,2)$ тензор, тада је

$$A = \sum A^k_{ij} \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$$

на U, где сваки индекс у суми иде од 0 до $n-1$. Пошто су обе стране $\mathcal{F}(U)$-мултилинеарне довољно је проверити да оне имају исту вредност на

$dx^m, \partial_p, \partial_q$ за свако $0 \leq m, p, q \leq n-1$. Ово одмах следи из

$$(\partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j)(dx^m, \partial_p, \partial_q) = dx^m(\partial_k) dx^i(\partial_p) dx^j(\partial_q) = \delta_k^m \delta_p^i \delta_q^j.$$

Овде користимо проширени Кронекеров делта симбол

$$\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако је } i = j, \\ 0 & \text{ако је } i \neq j. \end{cases}$$

Уопштено, важи следећа лема:

Лема 1.12. *Нека је $x^0, \dots, x^{n-1}$ координатни систем на $U \subseteq M$. Ако је A (r, s) тензорско поље, тада на U важи*

$$A = \sum A^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots j_{s-1}} \partial_{i_0} \otimes \dots \otimes \partial_{i_{r-1}} \otimes dx^{j_0} \otimes \dots \otimes dx^{j_{s-1}},$$

где сваки индекс у суми иде од 0 до $n-1$.

1.13 Контракција

Лема 1.13. *Постоји јединствена $\mathcal{F}(M)$-линеарна функција $C : T_1^1(M) \to \mathcal{F}(M)$, која се зове $(1,1)$ контракција, таква да важи $C(X \otimes \theta) = \theta X$ за свако $X \in \chi(M)$ и $\theta \in \chi^*(M)$.*

На координатној околини U $(1,1)$ тензорско поље A се може записати као $\sum A_j^i \partial_i \otimes dx^j$. Пошто $C(\partial_i \otimes dx^j)$ мора бити једнако $dx^j(\partial_i) = \delta_i^j$, немамо избора осим да дефинишемо

$$C(A) = \sum A_i^i = \sum A(dx^i, \partial_i).$$

За овако дефинисано C важиће захтевана својства из претходне леме на U. Није тешко показати да ова дефиниција не зависи од избора координатног система. На тај начин смо добили захтевану глобалну функцију.

Сада желимо да проширимо $(1,1)$ контракцију C на тензоре вишег типа. Претпоставимо да је $A \in T_s^r(M)$ и $0 \leq i \leq r-1$ и $0 \leq j \leq s-1$. Фиксирајмо 1-форме $\theta^0, \dots, \theta^{r-2}$ и векторска поља $X_0, \dots, X_{s-2}$. Тада је функција

$$(\theta, X) \mapsto A(\theta^0, \dots, \overset{\substack{i\text{-та променљива} \\ \downarrow}}{\theta}, \dots, \theta^{r-2}, X_0, \dots, \underset{\substack{\downarrow \\ j\text{-та променљива}}}{X}, \dots, X_{s-2})$$

$(1,1)$ тензор који можемо записати као

$$A(\theta^0, \ldots, \cdot, \ldots, \theta^{r-2}, X_0, \ldots, \cdot, \ldots, X_{s-2}).$$

Примењујући $(1,1)$ контракцију на овај тензор добијамо реално-вредносну функцију коју означавамо са

$$(C^i_j A)(\theta^0, \ldots, \theta^{r-2}, X_0, \ldots, X_{s-2}).$$

Очигледно $C^i_j A$ је $\mathcal{F}(M)$-мултилинеарна по сваком аргументу. Дакле, $C^i_j A$ је тензор типа $(r-1, s-1)$ који се зове контракција тензора A преко i, j.

На пример, ако је A $(2,3)$ тензорско поље тада је $C^1_3(A)$ $(1,2)$ тензорско поље дато са

$$(C^1_3 A)(\theta, X, Y) = C(A(\cdot, \theta, X, Y, \cdot)).$$

У односу на координатни систем компоненте од $C^1_3 A$ су

$$\begin{aligned}(C^1_3 A)^k_{ij} &= (C^1_3 A)(dx^k, \partial_i, \partial_j) = C(A(\cdot, dx^k, \partial_i, \partial_j, \cdot)) \\ &= \sum_m A(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m) = \sum_m A^{mk}_{ijm}.\end{aligned}$$

Овде смо користили координатну формулу за C.

Последица 1.1. *Нека је $0 \leq i \leq r-1$ и $0 \leq j \leq s-1$. У односу на координатни систем, ако $A \in T^r_s(M)$ има компоненте $A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$, тада $C^i_j A$ има компоненте*

$$\sum_m A^{i_0 \ldots \overset{\substack{i\text{-ти индекс}\\ \downarrow}}{m} \ldots i_{r-1}}_{j_0 \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-ти индекс}}}{m} \ldots j_{s-1}}.$$

1.14 Коваријантни тензори, извод тензора

Дефиниција 1.14. Нека је $\phi : M \to N$ глатко пресликавање. За $A \in T^0_s(N)$, при чему је $s \geq 1$, дефинишемо $\phi^* A$ са

$$(\phi^* A)(X_0, \ldots, X_{s-1}) = A(d\phi X_0, \ldots, d\phi X_{s-1}),$$

за свако $X_i \in T_p M, p \in M$.

У свакој тачки $p \in M$, $\phi^* A$ даје $\mathbb{R}$-мултилинеарну функцију из $T_p(M)^s$ у $\mathbb{R}$. Дакле, у питању је $(0,s)$ тензор над $T_p M$. Може се показати да је $\phi^* A$

глатко коваријантно тензорско поље на M. У специјалном случају $(0,0)$ тензора $f \in \mathcal{F}(N)$, $\phi^*(f)$ се дефинише са $\phi^*(f) = f \circ \phi \in \mathcal{F}(M)$. Приметимо да је $\phi^*(df) = d(\phi^* f)$.

Нека је A коваријантни или контраваријантни тензор типа барем 2. За тензор A кажемо да је симетричан ако се заменом било која два његова аргумента вредност тензора не мења. За A кажемо да је косо-симетричан (или алтернирајући) ако свака таква замена његових аргумената доводи до промене знака у вредности тензора. Функције, 1-форме и векторска поља сматрамо и симетричним и косо-симетричним тензорима. Диференцијална s-форма је косо-симетрично коваријантно тензорско поље типа $(0,s)$.

Нека су A и B редом k-форма и l-форма и $X_0, ..., X_{k+l-1} \in T_pM, p \in M$. Тада је спољашњи производ ових форми, у ознаци $A \wedge B$, једна $(k+l)$-форма за коју важи

$$(A \wedge B)(X_0, ..., X_{k+l-1}) = \sum (-1)^z A(X_{i_1}, ..., X_{i_k}) B(X_{j_1}, ..., X_{j_l}),$$

где је $z = 1$ ако је пермутација $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l)$ бројева $(0, ..., k+l-1)$ непарна, односно $z = 0$ ако је ова пермутација парна. Овде се још подразумева уређење $i_1 < ... < i_k, j_1 < ... < j_l$.

Дефиниција 1.15. Извод тензора D на глаткој многострукости M је скуп $\mathbb{R}$-линеарних функција

$$D = D^r_s : T^r_s(M) \to T^r_s(M) \quad (r, s \geq 0)$$

таквих да за било која два тензора A и B важи:

(1) $D(A \otimes B) = DA \otimes B + A \otimes DB$,

(2) $D(CA) = C(DA)$ за сваку контракцију C.

Дакле, D је $\mathbb{R}$-линеарна, чува тип тензора, задовољава Лајбницово правило за производ и комутира са свим контракцијама. За функцију $f \in \mathcal{F}(M)$ имамо $fA = f \otimes A$, па важи $D(fA) = (Df)A + fDA$.

У специјалном случају $t = s = 0$, D^0_0 је извод на $T^0_0(M) = \mathcal{F}(M)$. Према томе, постоји јединствено векторско поље $X \in \chi(M)$ такво да

$$Df = Xf \quad \text{за свако } f \in \mathcal{F}(M).$$

Теорема 1.4. *Нека је D извод тензора на M. За $A \in T^r_s(M)$ важи*

$$\begin{aligned} D(A(\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}, X_0, \ldots, X_{s-1})) = (DA)(\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}, X_0, \ldots, X_{s-1}) \\ + \sum_{i=0}^{r-1} A(\theta^0, \ldots, D\theta^i, \ldots, \theta^{r-1}, X_0, \ldots, X_{s-1}) \\ + \sum_{j=0}^{s-1} A(\theta^0, \ldots, \theta^{r-1}, X_0, \ldots, DX_j, \ldots, X_{s-1}). \end{aligned}$$

За $(1, s)$ тензор задат као $\mathcal{F}(M)$-мултилинеарна функција $A : \chi(M)^s \to \chi(M)$ важи

$$D(A(X_0, \ldots, X_{s-1})) = (DA)(X_0, \ldots, X_{s-1}) + \sum_{i=0}^{s-1} A(X_0, \ldots, DX_i, \ldots, X_{s-1}).$$

1.15 Интеграција на многострукостима

У овој секцији дефинишемо интеграл диференцијалне форме по многострукости и формулишемо Стоксову теорему. За неке детаље видети [14, 17].

Оријентабилност

Из курса Линеарне алгебре знамо да две базе $e_0, ..., e_{n-1}$ и $e'_0, ..., e'_{n-1}$ векторског простора V имају исту оријентацију ако важи

$$\det A > 0, \quad \text{где је} \quad e'_i = \sum A^j_i e_j \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

Оне имају супротну оријентацију ако је $\det A < 0$. Лако се проверава да је "имати исту оријентацију" једна релација еквиваленције на скупу свих база векторског простора V, и да постоје две класе еквиваленције база, које се зову оријентације од V. Оријентацију која садржи $e_0, ..., e_{n-1}$ означимо са $[e_0, ..., e_{n-1}]$.

Нека је

$$\lambda_\xi(p) = [\partial_0|_p, ..., \partial_{n-1}|_p],$$

где је ξ координатни систем на $U \subseteq M$.

Оријентација λ многострукости M придружује свакој тачки $p \in M$ оријентацију $\lambda(p)$ од T_pM и λ је глатка у смислу да за сваку $p \in M$ постоји координатни систем ξ у тачки p такав да је $\lambda = \lambda_\xi$ на некој околини од p.

Многострукост је оријентабилна ако постоји оријентација од M. Оријентисати многострукост M значи изабрати појединачну оријентацију. На пример, $\mathbb{R}^n$ је оријентабилан у смислу своје уобичајене оријентације λ_ξ, где је ξ природни координатни систем.

Кажемо да је база $v_0, ..., v_{n-1}$ за T_pM позитивно оријентисана ако важи $[v_0, ..., v_{n-1}] = \lambda(p)$. Слично, за координатни систем ξ на $U \subseteq M$ кажемо да је позитивно оријентисан ако важи $\lambda_\xi = \lambda$ на U.

Ако су ξ и η координатни системи у M који се преклапају, дефинишимо

$$J(\xi, \eta) = \det(\partial y^j / \partial x^i) \quad \text{на} \quad U_\xi \cap U_\eta.$$

Тада важи

$$\lambda_\xi(p) = \lambda_\eta(p) \Leftrightarrow J(\xi, \eta)(p) > 0.$$

Диференцијабилна партиција (разбијање) јединице

Нека је M глатка многострукост. За отворени покривач многострукости M, тј. фамилију отворених скупова $U_\alpha \subseteq M$ таквих да је $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ кажемо да је локално коначна ако свака тачка $p \in M$ има околину W такву да је $W \cap U_\alpha \neq \varnothing$ за само коначан број индекса.

Кажемо да је фамилија $\{f_\alpha\}$ диференцијабилних функција $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ диференцијабилна партиција (разбијање) јединице ако је:

1. За свако α, $f_\alpha \geq 0$ и носач од f_α је садржан у координатној околини U_α атласа $\{\xi_\alpha\}$ од M (где је $\xi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ координатни систем).

2. Фамилија $\{U_\alpha\}$ је локално коначна.

3. $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, за свако $p \in M$ (овај услов има смисла јер за свако p, $f_\alpha(p) \neq 0$ за само коначан број индекса).

Уобичајено се каже да је партиција јединице $\{f_\alpha\}$ потчињена покривачу $\{U_\alpha\}$.

Теорема 1.5. *За било који отворени покривач $\{U_\alpha\}$ многострукости M постоји диференцијабилна партиција јединице потчињена том покривачу.*

Интеграл диференцијалне форме

Нека је M оријентисана многострукост димензије n, нека је $\{\xi_\alpha\}$ један атлас те оријентације (где је $\xi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ координатни систем) и ω n-форма са компактним носачем.

Дефиниција 1.16. Интеграл форме ω по многострукости M је

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega,$$

где је $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \int_{\mathbb{R}^n} (\xi_\alpha^{-1})^* \rho_\alpha \omega$ и где $\{\rho_\alpha\}$ представља разбијање јединице потчињено покривачу $\{U_\alpha\}$.

Теорема 1.6. *Вредност интеграла $\int_M \omega$ не зависи од избора атласа задате оријентације ни од разбијања јединице.*

Многострукост са крајем

Означимо са $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_{n-1} \geq 0\}$.

Дефиниција 1.17. Скуп M се зове глатка многострукост са крајем ако постоји такав атлас $\{\xi_\alpha\}$, $\xi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, где је V_α отворен у H^n, тако да

$$\xi_\beta \circ \xi_\alpha^{-1} : V_{\alpha\beta} = \xi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to V_{\beta\alpha} = \xi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

буду r пута непрекидно диференцијабилна пресликавања отворених у H^n скупова $V_{\alpha\beta}, V_{\beta\alpha}$. Линеарне координате $(x^0, ..., x^{n-1})$ у $\mathbb{R}^n$ индукују локалне координате на U_α : $\;x_\alpha^k(p) = x^k(\xi_\alpha(p))$.

За тачку $p \in M$ кажемо да је унутрашња тачка ако је $x_\alpha^{n-1}(p) > 0$, односно гранична ако је $x_\alpha^{n-1}(p) = 0$.

Дефиниција 1.18. Скуп граничних тачака у ознаци ∂M се зове крај (руб или граница) многострукости.

Теорема 1.7. *(Стокс) Ако је ω $(n-1)$-форма са компактним носачем на оријентисаној многострукости M димензије n и ако је крај ∂M снабдевен индукованом оријентацијом, онда важи*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

1.16 Скаларни производ

Псеудо-Риманова геометрија укључује посебну врсту $(0,2)$ тензора на тангентним просторима. Нека је V коначно димензиони реални векторски простор. Симетрична билинеарна форма на V је $\mathbb{R}$-билинеарно пресликавање $B : V \times V \to \mathbb{R}$ за које важи $B(X,Y) = B(Y,X)$ за свако $X, Y \in V$.

Дефиниција 1.19. Симетрична билинеарна форма B на V је
(1) позитивно (негативно) дефинитна ако свако $X \neq 0$ повлачи $B(X,X) > 0$ $(B(X,X) < 0)$,
(2) позитивно (негативно) семидефинитна ако важи $B(X,X) \geq 0$ $(B(X,X) \leq 0)$ за свако $X \in V$,
(3) недегенерисана ако $B(X,Y) = 0$ за свако $Y \in V$ повлачи $X = 0$.

Очигледно је да ако је B позитивно (или негативно) дефинитна онда је она и позитивно (или негативно) семидефинитна и недегенерисана.

Нека је B симетрична билинеарна форма на V и $W \leq V$ потпростор. Рестрикција $B\mid_W = B\mid_{W\times W}$ је такође симетрична билинеарна форма. Ако је B позитивно или негативно дефинитна (семидефинитна) онда је таква и $B\mid_W$.

Дефиниција 1.20. Индекс симетричне билинеарне форме B на V је највећи цео број ν који је димензија потпростора $W \leq V$ на којем је $B\mid_W$ негативно дефинитна.

Према томе, $0 \leq \nu \leq dimV$, и $\nu = 0$ ако и само ако је B позитивно семидефинитна.

Функција $q : V \to \mathbb{R}$ дата са $q(X) = B(X,X)$ је придружена квадратна форма од B. Симетрична билинеарна форма B се поларизацијом може реконструисати из квадратне форме формулом $B(X,Y) = \frac{1}{2}(q(X+Y) - q(X) - q(Y))$.

Нека је $E_0, \ldots, E_{n-1}$ база за V. $n \times n$ матрица $(b_{ij}) = B(E_i, E_j)$ зове се матрица од B у бази $E_0, \ldots, E_{n-1}$. Пошто је B симетрична, ова матрица је такође симетрична.

Лема 1.14. *Симетрична билинеарна форма B на V је недегенерисана ако и само ако је њена матрица у односу на неку (а онда и у односу на сваку) базу инвертибилна.*

Дефиниција 1.21. Скаларни производ g на векторском простору V је недегенерисана симетрична билинеарна форма на V.

Од сада ћемо подразумевати да је V векторски простор снабдевен скаларним производом g. Нека је $E_0, \ldots, E_{n-1}$ једна база за V. Матрица од g у односу на ту базу има елементе $g_{ij} = g(E_i, E_j)$. Пошто је g симетрична и њена матрица је симетрична ($g_{ij} = g_{ji}$). Пошто је g билинеарно важи

$$g\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i E_i, \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j E_j\Big) = \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_i \beta_j g_{ij},$$

тако да матрица (g_{ij}) у потпуности одређује g. Како је g недегенерисана, на основу леме (1.14) матрица (g_{ij}) је инвертибилна.

Вектори $X, Y \in V$ су ортогонални, пишемо $X \perp Y$, ако важи $g(X,Y) = 0$. Подскупови $A \subseteq V$ и $B \subseteq V$ су ортогонални, пишемо $A \perp B$, ако је $X \perp Y$ за свако $X \in A$ и $Y \in B$. За $W \leq V$ дефинишемо ортогонал са

$$W^{\perp} = \{X \in V : X \perp W\}.$$

Ортогонал $W^{\perp}$ не можемо звати ортогонални комплемент од W јер $W + W^{\perp}$ у општем случају није једнако V. Међутим, важе следеће стандардне особине:

Лема 1.15. *За потпростор $W \leq V$ важи*
(1) $dimW + dimW^{\perp} = n = dimV$,
(2) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Приметимо да је недегенерисаност g на V еквивалентна са $V^{\perp} = 0$. Потпростор $W \leq V$ је недегенерисан ако је $g\ |_W$ недегенерисана. Међутим, када g није дефинитно увек ће постојати дегенерисани потпростори.

Како по Грасмановој формули важи

$$dim(W + W^{\perp}) + dim(W \cap W^{\perp}) = dimW + dimW^{\perp},$$

то је по претходној леми

$$dim(W + W^{\perp}) + dim(W \cap W^{\perp}) = dimV.$$

Дакле, $V = W + W^{\perp}$ ако и само ако је $W \cap W^{\perp} = 0$, односно ако и само ако је потпростор $W \leq V$ недегенерисан. Доказали смо следећу лему

Лема 1.16. *Потпростор $W \leq V$ је недегенерисан ако и само ако је V директан збир од W и $W^{\perp}$.*

Како је $(W^{\perp})^{\perp} = W$, важи W је недегенерисан ако и само ако је $W^{\perp}$ недегенерисан.

Пошто $q(X) = g(X,X)$ може бити негативно, норма вектора X је $||X|| = \sqrt{|g(X,X)|}$. Вектор X је јединичан ако је норме 1, тј. $g(X,X) = \pm 1$. За скуп међусобно ортогоналних јединичних вектора кажемо да је ортонормиран. Било којих $n = dimV$ ортонормираних вектора обавезно чини базу за V.

Лема 1.17. *Сваки векторски простор $V \neq 0$ са скаларним производом g има ортонормирану базу.*

Матрица скаларног производа g у односу на ортонормирану базу $E_0, \ldots, E_{n-1}$ за V је дијагонална матрица јер

$$g_{ij} = g(E_i, E_j) = \delta_{ij}\epsilon_j, \text{ где је } \epsilon_j = g(E_j, E_j) = \pm 1.$$

Ортонормирана база се може поставити тако да најпре иду негативни $\epsilon_i = -1$, за $0 \leq i \leq \nu' - 1$, а затим позитивни $\epsilon_i = 1$, за $\nu' \leq i \leq n-1$.

Лема 1.18. *Нека је $E_0, \ldots, E_{n-1}$ ортонормирана база за V, са $\epsilon_i = g(E_i, E_i)$. Тада сваки $X \in V$ има јединствено представљање $X = \sum \epsilon_i g(X, E_i)E_i$.*

Нека је $W \leq V$ недегенерисан потпростор од V. Ортогонална пројекција π простора V на W је линеарна трансформација која $W^\perp$ слика у 0, а сваки вектор из W фиксира. Ортонормирана база $E_0, \ldots, E_{k-1}$ за W се увек може проширити до базе за V. Према томе важи $\pi(X) = \sum_{j=0}^{k-1} \epsilon_j g(X, -E_j)E_j$.

Уобичајено је да за индекс ν скаларног производа g на V кажемо да је индекс од V и пишемо $\nu = ind\, V$.

Лема 1.19. *За било коју ортонормирану базу $E_0, \ldots, E_{n-1}$ за V број негативних знакова у сигнатури $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-1})$ једнак је индексу ν од V.*

Може се показати да за недегенерисани потпростор W од V важи $ind\, V = ind\, W + ind\, W^\perp$.

Нека су V и $\overline{V}$ снабдевени скаларним производима g и $\overline{g}$. За линеарну трансформацију $T : V \to \overline{V}$ кажемо да чува скаларне производе ако важи

$$\overline{g}(TX, TY) = g(X, Y) \text{ за свако } X, Y \in V.$$

У овом случају T је $1-1$.

Приметимо да T чува скаларне производе ако и само ако чува њихове придружене квадратне форме, тј.

$$\overline{q}(TX) = q(X) \text{ за свако } X \in V.$$

Линеарни изоморфизам $T : V \to W$ који чува скаларне производе зове се линеарна изометрија. Дакле, линеарна трансформација $T : V \to W$ је линеарна изометрија ако и само ако је $dim\, V = dim\, W$ и T чува скаларне производе (или еквивалентно њихове квадратне форме).

Лема 1.20. *Векторски простори V и W снабдевени скаларним производима имају исту димензију и индекс ако и само ако постоји линеарна изометрија са V на W.*

1.17 Псеудо-Риманова многострукост

Дефиниција 1.22. Метрички тензор g на глаткој многострукости M је симетрично недегенерисано $(0,2)$ тензорско поље на M са константним индексом.

Другим речима, $g \in T_2^0(M)$ глатко придружује свакој тачки $p \in M$ скаларни производ g_p на тангентном простору T_pM, при чему је индекс од g_p исти за свако $p \in M$.

Дефиниција 1.23. Псеудо-Риманова многострукост је глатка многострукост M снабдевена метричким тензором g.

Стриктно говорећи, псеудо-Риманова многострукост је уређен пар (M, g). Два различита метричка тензора на истој многострукости чине различите псеудо-Риманове многострукости. Ипак, често ћемо псеудо-Риманову многострукост означавати као и одговарајућу глатку многострукост M, N, ...

Заједничку вредност ν за индекс скаларног производа g_p на псеудо-Римановој многострукости M зовемо индекс од M. Индекс је цео број $0 \leq \nu \leq n = dimM$. Ако је $\nu = 0$ тада M зовемо Риманова многострукост и тада је свако g_p позитивно дефинитно. Ако је $\nu = 1$ и $n \geq 2$ тада M зовемо Лоренцова многострукост.

Користимо $\langle , \rangle$ као алтернативну ознаку за g. Дакле, $g(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle \in \mathbb{R}$ за тангентне векторе и $g(X,Y) = \langle X, Y \rangle \in \mathcal{F}(M)$ за векторска поља.

Нека је $x^0, \dots, x^{n-1}$ координатни систем на $U \subseteq M$. Компоненте метричког тензора g на U су $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad (0 \leq i, j \leq n-1)$. Тако за векторска поља $X = \sum X^i \partial_i$ и $Y = \sum Y^j \partial_j$ важи $g(X,Y) = \langle X, Y \rangle = \sum g_{ij} X^i Y^j$.

Пошто је g недегенерисана, у свакој тачки p из U матрица $(g_{ij}(p))$ је инвертибилна и њена инверзна матрица се означава са $(g^{ij}(p))$. Из стандардне формуле за инверз матрице видимо да су функције g^{ij} глатке на U.

Пошто је g симетрична важи $g_{ij} = g_{ji}$ и $g^{ij} = g^{ji}$ за $0 \leq i, j \leq n-1$. Метрички тензор g на U може се записати као $g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

Може се показати да за свако $p \in \mathbb{R}^n$ постоји канонски линеарни изоморфизам са $\mathbb{R}^n$ на $T_p(\mathbb{R}^n)$ који, у односу на природне координате, слика X у $X_p = \sum X^i \partial_i$. Према томе $\langle X_p, Y_p \rangle = X \cdot Y = \sum X^i Y^i$ представља метрички тензор на $\mathbb{R}^n$. Од сада у сваком геометријском контексту $\mathbb{R}^n$ ће означавати Риманову многострукост која се зове еуклидски n-простор.

За цео број ν такав да $0 \leq \nu \leq n$ са

$$\langle X_p, Y_p \rangle = -\sum_{i=0}^{\nu-1} X^i Y^i + \sum_{j=\nu}^{n-1} X^j Y^j$$

је дат метрички тензор индекса ν. Добијени псеудо-Еуклидски простор $\mathbb{R}^n_\nu$ се своди на $\mathbb{R}^n$ за $\nu = 0$. За $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n_1$ се зове n-простор Минковског. За $n = 4$ добијамо најједноставнији пример релативистичког простор-времена.

Нека је

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{за } 0 \leq i \leq \nu - 1, \\ +1 & \text{за } \nu \leq i \leq n - 1. \end{cases}$$

Тада метрички тензор на $\mathbb{R}^n_\nu$ можемо записати $g = \sum \epsilon_i du^i \otimes du^i$.

Геометријско значење индекса псеудо-Риманове многострукости проистиче из следеће трихотомије.

Дефиниција 1.24. За тангентни вектор X многострукости M кажемо да је
просторан ако је $\langle X, X \rangle > 0$ или $X = 0$,
изотропан ако је $\langle X, X \rangle = 0$ и $X \neq 0$,
временски ако је $\langle X, X \rangle < 0$.

Дефиниција 1.25. Нека су M и N псеудо-Риманове многострукости са метричким тензорима g_M и g_N. Изометрија из M у N је дифеоморфизам $\phi : M \to N$ који чува метричке тензоре: $\phi^*(g_N) = g_M$.

Експлицитно, $\langle d\phi(X), d\phi(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$ за свако $X, Y \in T_pM$ и $p \in M$. Како је ϕ дифеоморфизам, сваки извод $d\phi_p$ је линеарни изоморфизам, па услов за метрику значи да је сваки $d\phi_p$ линеарна изометрија.

Није тешко приметити да је идентичко пресликавање псеудо-Риманове многострукости изометрија. Композиција изометрија је такође изометрија. Инверзно пресликавање изометрије је изометрија.

1.18 Леви-Чивита повезаност

Дефиниција 1.26. Нека су $u^0, \ldots, u^{n-1}$ природне координате на $\mathbb{R}^n_\nu$ и нека су X и $Y = \sum Y^i \partial_i$ векторска поља на $\mathbb{R}^n_\nu$. Векторско поље

$$\nabla_X Y = \sum X(Y^i) \partial_i$$

се зове природни коваријантни извод од Y у односу на X.

Дефиниција 1.27. Повезаност ∇ на глаткој многострукости M је функција $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ таква да важи
$(D1)$ $\nabla_X Y$ је $\mathcal{F}(M)$-линеарна по X,
$(D2)$ $\nabla_X Y$ је $\mathbb{R}$-линеарна по Y,
$(D3)$ $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ за $f \in \mathcal{F}(M)$.

$\nabla_X Y$ се зове коваријантни извод од Y у односу на X за повезаност ∇.

Према аксиоми $(D1)$ видимо да је $\nabla_X Y$ тензор по X. Дакле, на основу теореме (1.3) за тангентни вектор $x \in T_pM$ имамо добро дефинисан тангентни вектор $\nabla_x Y \in T_pM$, $(\nabla_X Y)_p$ где је X било које векторско поље такво да је $X_p = x$. Са друге стране, $(D3)$ показује да $\nabla_X Y$ није тензор по Y.

Теорема 1.8. *Нека је M псеудо-Риманова многострукост. За $V \in \chi(M)$, нека је V^* 1-форма на M таква да*

$$V^*(X) = \langle V, X \rangle \ \text{ за свако } \ X \in \chi(M).$$

Тада је пресликавање $V \mapsto V^*$ један $\mathcal{F}(M)$-линеарни изоморфизам из $\chi(M)$ у $\chi^*(M)$.

Дакле, у псеудо-Римановој геометрији можемо лако трансформисати векторско поље у 1-форму и обрнуто. За одговарајући пар $V \leftrightarrow V^*$ кажемо да је метрички еквивалентан.

Теорема 1.9. *На псеудо-Римановој многострукости M постоји јединствена повезаност ∇ таква да важи*
$(D4)$ $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ *и*
$(D5)$ $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$,
за свако $X, Y, Z \in \chi(M)$. ∇ се зове Леви-Чивита повезаност на M. За њу важи Козилова формула:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = {} & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle. \end{aligned}$$

Дефиниција 1.28. Нека је $x^0, \ldots, x^{n-1}$ координатни систем на околини U за псеудо-Риманову многострукост M. Кристофелови симболи за овај координатни систем су реално-вредносне функције Γ^k_{ij} на Uтакве да важи

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma^k_{ij} \partial_k \quad (0 \le i, j \le n-1).$$

Како је $[\partial_i, \partial_j] = 0$, из $(D4)$ следи $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \nabla_{\partial_j}\partial_i$, односно имамо симетрију $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Теорема 1.10. *За координатни систем $x^0, \dots, x^{n-1}$ на U важи*

$$\nabla_{\partial_i}\Big(\sum X^j \partial_j\Big) = \sum_k \Big(\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma^k_{ij} X^j\Big)\partial_k,$$

где су Кристофелови симболи дати са

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n-1} g^{km}\Big(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\Big).$$

Помоћу прве формуле из претходне теореме и користећи $(D1)$ можемо срачунати свако $\nabla_X Y$ на координатним околинама, док друга формула координатно описује како метрички тензор одређује Леви-Чивита повезаност.

Лема 1.21. *Природна повезаност ∇ из Дефиниције 1.26 је Леви-Чивита повезаност на псеудо-Еуклидском простору $\mathbb{R}^n_\nu$ за свако $\nu = 0, 1, \dots, n$. У односу на природне координате на $\mathbb{R}^n_\nu$ важи*

(1) $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_j$, *где је* $\epsilon_j = \begin{cases} -1 & \text{за } 0 \le j \le \nu - 1, \\ +1 & \text{за } \nu \le j \le n - 1. \end{cases}$

(2) $\Gamma^k_{ij} = 0$, *за свако* $0 \le i, j, k \le n - 1$.

Векторско поље V је паралелно ако су његови коваријантни изводи $\nabla_X V$ једнаки нули за свако $X \in \chi(M)$. Према томе, поништавање Кристофелових симбола у претходној леми значи да су природна координатна векторска поља на $\mathbb{R}^n_\nu$ паралелна. Кристофелови симболи за неки координатни систем мере одступање његових координатних векторских поља да буду паралелна.

Дефиниција 1.29. Нека је X векторско поље на псеудо-Римановој многострукости M. (Леви-Чивита) коваријантни извод ∇_X је јединствен извод тензора на M такав да је $\nabla_X f = Xf$ за свако $f \in \mathcal{F}(M)$ и код кога је $\nabla_X Y$ Леви-Чивита коваријантни извод за свако $Y \in \chi(M)$.

Дефиниција 1.30. Коваријантни диференцијал (r, s) тензора A на M је $(r, s+1)$ тензор ∇A такав да

$$\nabla A(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, X_{s-1}, V) = \nabla_V A(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, X_{s-1}),$$

за све $V, X_0, \dots, X_{s-1} \in \chi(M)$ и $\theta^0, \dots, \theta^{r-1} \in \chi^*(M)$.

У специјалном случају $r = s = 0$ коваријантни диференцијал функције f је њен уобичајен извод $df \in \chi^*(M)$ јер

$$\nabla f(X) = \nabla_X f = Xf = df(X) \quad \text{за свако} \quad X \in \chi(M).$$

Баш као и за векторско поље, за тензорско поље A кажемо да је паралелно ако је његов коваријантни диференцијал једнак нули, тј. ако је $\nabla_X A = 0$ за свако $X \in \chi(M)$. Користећи правило за производ, тј. теорему (1.4) добијамо да је $(D5)$ еквивалентно са паралелношћу метричког тензора g.

За $A \in T^r_s(M)$ компоненте од ∇A у односу на координатни систем означимо са $A^{i_0 \ldots i_{r-1}}_{j_0 \ldots j_{s-1};k}$. У специјалном случају природних координата на $\mathbb{R}^n_\nu$, пошто су координатна векторска поља, а стога и диференцијали $du^0, \ldots, du^{n-1}$ паралелни важи $A^{i_0 \ldots i_{r-1}}_{j_0 \ldots j_{s-1};k} = (\partial/\partial u^k) A^{i_0 \ldots i_{r-1}}_{j_0 \ldots j_{s-1}}$.

За $(1, 2)$ тензорско поље A важи следећа формула

$$A^i_{jk;l} = \frac{\partial}{\partial x^l} A^i_{jk} + \sum_m A^m_{jk} \Gamma^i_{ml} - A^i_{mk} \Gamma^m_{jl} - A^i_{jm} \Gamma^m_{kl}.$$

1.19 Кривина

Лема 1.22. *Нека је M псеудо-Риманова многострукост са Леви-Чивита повезаношћу ∇. Функција $R : \chi(M)^3 \to \chi(M)$ дата са*

$$R_{XY} Z = [\nabla_X, \nabla_Y] Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

је $(1, 3)$ тензорско поље на M које се зове Риманов тензор кривине од M.

Операција Лијева заграда на векторским пољима није тензор, такође коваријантни извод није тензор, али њихова комбинација из претходне леме даје тензор R. Алтернативна ознака $R(X, Y)Z$ за $R_{XY} Z$ је погодна када уместо X и Y имамо компликованије изразе.

За $X, Y \in T_p M$ линеарни оператор $R_{XY} : T_p M \to T_p M$ који сваком Z придружује $R_{XY} Z$ се зове оператор кривине.

Теорема 1.11. *За $X, Y, Z, V, W \in T_p M$ важи:*
(1) $R_{XY} = -R_{YX}$,
(2) $\langle R_{XY} V, W \rangle = -\langle R_{XY} W, V \rangle$,
(3) $R_{XY} Z + R_{YZ} X + R_{ZX} Y = 0$,
(4) $\langle R_{XY} V, W \rangle = \langle R_{VW} X, Y \rangle$.

Једначина (3) се зове први Бјанкијев идентитет (приметимо да су ту вектори циклички пермутовани).

Симетрије тензора кривине R дају мање очигледну симетрију његовог коваријантног диференцијала ∇R, која се зове други Бјанкијев идентитет. На основу дефиниције ∇R је $(1,4)$ тензор који четворки векторских поља придружује (векторско поље) вредност $(\nabla_Z R)_{XY}V = (\nabla_Z R)(X,Y)V$.

Теорема 1.12. *За* $X, Y, Z \in T_pM$ *важи*

$$(\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) = 0.$$

У претходном идентитету сабирци су линеарни оператори на T_pM. Он се зове други Бјанкијев идентитет.

Лема 1.23. *На координатној околини координатног система* $x^0, \ldots, x^{n-1}$ *важи*

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R^i_{jkl} \partial_i,$$

где су компоненте од R *дате са*

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} + \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj}.$$

За крај секције уводимо секциону кривину.

Риманов тензор кривине R је прилично компликован. Сада ћемо разматрати једноставнију реално-вредносну функцију која у потпуности одређује R.

Дводимензиони потпростор Π тангентног простора T_pM се зове тангентна раван од M у тачки p. За тангентне векторе X, Y дефинишимо

$$Q(X,Y) = \langle X, X\rangle \langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2.$$

Према леми (1.14) тангентна раван Π је недегенерисана ако и само ако је $Q(X,Y) \neq 0$ за једну, а онда и сваку, базу X, Y за Π. Апсолутна вредност $|Q(X,Y)|$ је једнака квадрату површине паралелограма чије су странице X и Y. $Q(X,Y)$ је позитивно ако је $g \mid \Pi$ дефинитно, а негативно ако је $g \mid \Pi$ индефинитно.

Лема 1.24. *Нека је* Π *недегенерисана тангентна раван од* M *у тачки* p. *Број*

$$K(X,Y) = \frac{\langle R_{XY}X, Y\rangle}{Q(X,Y)}$$

не зависи од избора базе X, Y за раван Π и зове се секциона кривина $K(\Pi)$ од Π.

Према томе, секциона кривина K од M је реално-вредносна функција на скупу свих недегенерисаних тангентних равни од M.

Теорема 1.13. *Ако је $K = 0$ у тачки $p \in M$ онда је и $R = 0$ у тачки p.*

Експлицитно, ако је $K(\Pi) = 0$ за сваку недегенерисану раван од T_pM онда је $R_{XY}Z = 0$ за свако $X, Y, Z \in T_pM$.

За псеудо-Риманову многострукост M за коју је тензор кривине R једнак нули у свакој тачки кажемо да је равна. На основу претходне теореме, M је равна ако и само ако је секциона кривина K функција која је идентички једнака нули. На пример, сваки псеудо-Еуклидски простор $\mathbb{R}^n_\nu$ је раван.

Нека је $F : T_pM^4 \to \mathbb{R}$ мултилинеарна функција за коју важе симетрије из Теореме 1.11 за функцију $(V, W, X, Y) \mapsto \langle R_{VW}X, Y\rangle$. K одређује R у следећем смислу:
Ако важи

$$K(X, Y) = \frac{F(X, Y, X, Y)}{\langle X, X\rangle\langle Y, Y\rangle - \langle X, Y\rangle^2},$$

при чему X и Y разапињу недегенерисану раван онда је

$$\langle R_{XY}V, W\rangle = F(X, Y, V, W) \quad \text{за свако} \quad X, Y, V, W \in T_pM.$$

Псеудо-Риманова многострукост M има константну кривину ако је њена секциона кривина константна функција.

Важи следећа последица:

Последица 1.2. *Ако M има константну кривину C тада важи*

$$R_{XY}Z = C\Big(\langle Z, X\rangle Y - \langle Z, Y\rangle X\Big).$$

У Римановом случају, претходна формула има једноставно геометријско значење: Ако X и Y чине ортонормирану базу за раван Π тада је R_{XY} једнако нули на $\Pi^\perp$, а на Π представља композицију скаларног множења са C и ротације која шаље X у Y, а Y у $-X$.

1.20 Метричка контракција

Нека су $0 \leq a \leq r-1$ и $0 \leq b \leq s-1$ цели бројеви. За $A \in T^r_s(M)$ вредност од $\downarrow^a_b\, A \in T^{r-1}_{s+1}(M)$ на произвољним 1-формама и векторским пољима је дефинисана са

$$\begin{aligned}&(\downarrow^a_b A)(\theta^0, \dots, \theta^{r-2}, X_0, \dots, X_s)\\&= A(\theta^0, \dots, X^*_b, \dots, \theta^{r-2}, X_0, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_s),\end{aligned}$$

где је X^*_b 1-форма метрички еквивалентна са X_b. Дакле, на десној страни једнакости избацили смо b-то векторско поље, а убацили смо њему метрички еквивалентну 1-форму на a-то место између 1-форми.

На пример, нека је A $(2,2)$ тензорско поље. Тада је $B = \downarrow^1_2 A$ $(1,3)$ тензорско поље такво да је $B(\theta, X, Y, Z) = A(Y^*, \theta, X, Z)$ за све 1-форме θ и векторска поља X, Y, Z. У координатама, 1-форма дуална са ∂_i је $\sum g_{ij} dx^j$. Према томе важи

$$\begin{aligned}B^i_{jkl} &= B(dx^i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = A\Big(\sum_m g_{km} dx^m, dx^i, \partial_j, \partial_l\Big)\\&= \sum_m g_{km} A^{mi}_{jl}.\end{aligned}$$

Операција $\downarrow^a_b$: $T^r_s(M) \to T^{r-1}_{s+1}(M)$ се зове спуштање индекса. Она је $\mathcal{F}(M)$-линеарна и јесте један изоморфизам, пошто постоји инверзна операција $\uparrow^a_b$ која избацује a-ту 1-форму и убацује њој метрички еквивалентно векторско поље на b-то место између векторских поља. У координатама, векторско поље метрички еквивалентно са dx^i је $\sum g^{ij} \partial_j$. Ако је B $(1,3)$ тензор тада је

$$(\uparrow^1_2 B)^{ij}_{kl} = \sum_q g^{iq} B^j_{kql}.$$

Операција $\uparrow^a_b$ се зове подизање индекса.

Важан случај је кад имамо $(1,s)$ тензор A дат као $\mathcal{F}(M)$-мултилинеарна функција $A : \chi(M)^s \to \chi(M)$. Тада је

$$(\downarrow^1_1 A)(V, X_0, \dots, X_{s-1}) = \langle V, A(X_0, \dots, X_{s-1})\rangle.$$

Лева страна претходне једначине је по дефиницији једнака $A(V^*, X_0, \dots, X_{s-1})$ чија је интерпретација управо једнака $V^*(A(X_0, \dots, X_{s-1}) = \langle V, A(X_0, \dots, X_{s-1})\rangle$.

За тензоре добијене од датог тензора помоћу неке од две претходне операције кажемо да су метрички еквивалентни.

Када је тензор кривине $R : \chi(M)^3 \to \chi(M)$ записан као функција од три векторска поља, имамо $R(Z, X, Y) = R_{XY}Z$. Тада су компоненте $(0, 4)$ тензора $\downarrow_1^1 R$ дате са

$$R_{ijkl} = (\downarrow_1^1 R)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \langle \partial_i, R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j)\rangle = \sum g_{im} R^m_{jkl}.$$

За $0 \leq a < b \leq s-1$ и произвољно r, дефинишемо метричку контракцију $C_{ab} : T^r_s(M) \to T^r_{s-2}(M)$ са

$$(C_{ab}A)^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots j_{s-3}} = \sum_{p,q} g^{pq} A^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots \underset{\substack{\downarrow \\ a\text{-ти индекс}}}{p} \ \dots \ \underset{\substack{\downarrow \\ b\text{-ти индекс}}}{q} \dots j_{s-3}}.$$

На пример, ако је A $(1, 3)$ тензор тада је

$$(C_{12}A)^i_j = \sum_{p,q} g^{pq} A^i_{pqj}.$$

Слично, у контраваријантном случају, за $0 \leq a < b \leq r-1$ и произвољно s добијамо

$$C^{ab} : T^r_s(M) \to T^{r-2}_s(M),$$

у чијој координатној формули g_{ij} замењује g^{ij}. Уколико није важно истаћи индексе, све контракције ће бити означене са C.

Лема 1.25. *Коваријантни изводи ∇_X и коваријантни диференцијал ∇ комутирају са обе претходно уведене операције (спуштање и подизање индекса) и контракцијом.*

1.21 Ричијева и скаларна кривина

Ортонормирана база за тангентни простор T_pM се зове репер на M у тачки p. Ако је $n = dim\ M$ тада се скуп $E_0, \dots, E_{n-1}$ од n међусобно ортогоналних јединичних векторских поља зове поље репера, пошто придружује свакој тачки репер. На пример, на $\mathbb{R}^n$ природна координатна векторска поља чине поље репера.

У општем случају не постоји поље репера на целој многострукости M, док локално увек постоји. Било које векторско поље V се може изразити у односу на поље репера на следећи начин

$$V = \sum \epsilon_i \langle V, E_i \rangle E_i, \quad \text{где је} \quad \epsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle.$$

Према томе, $\langle V, W \rangle = \sum \epsilon_i \langle V, E_i \rangle \langle W, E_i \rangle$.

Разматрајмо метричку контракцију C_{ab} од $A \in T_s^0(M)$. У односу на поље репера важи

$$(C_{ab}A)(X_0, \ldots, X_{s-3}) = \sum \epsilon_m A(X_0, \ldots, \overset{a\text{-та променљива}}{\overset{\downarrow}{E_m}}, \ldots, \underset{b\text{-та променљива}}{\underset{\downarrow}{E_m}}, \ldots, X_{s-3}).$$

Слично, за $(1, s)$ тензорско поље $A : \chi(M)^s \to \chi(M)$ имамо

$$(C_b^1 A)(X_0, \ldots, X_{s-2}) = \sum_m \epsilon_m \langle E_m, A(X_0, \ldots, \underset{b\text{-та променљива}}{\underset{\downarrow}{E_m}}, \ldots, X_{s-2}) \rangle.$$

Сада ћемо да дефинишемо Ричијеву и скаларну кривину.

Дефиниција 1.31. Нека је R Риманов тензор кривине од M. Ричијев тензор кривине Ric од M је контракција $C_3^1(R) \in T_2^0(M)$, чије су компоненте у односу на координатни систем $R_{ij} = \sum R_{ijm}^m$.

Због симетрија од R једине ненула контракције од R су $\pm \mathrm{Ric}$.

Лема 1.26. *Ричијев тензор кривине* Ric *је симетричан. У односу на поље репера дат је са*

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_m \epsilon_m \langle R_{XE_m} Y, E_m \rangle,$$

где је $\epsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$.

За M кажемо да је Ричи равна ако је њен Ричијев тензор идентички једнак нули. Равна многострукост је свакако Ричи равна, док обрнуто не важи. Важи $\mathrm{Ric}(X, Y) = \mathrm{Tr}\{V \mapsto R_{XV}Y\}$.

Пошто секциона кривина одређује тензор кривине R она такође одређује Ric на прилично једноставан начин. Помоћу поларизације и скаларног множења, Ric се може реконструисати у свакој тачки p из његових вредности $\mathrm{Ric}(u, u)$ на јединичним векторима у тачки p. Ако је $e_0, \ldots, e_{n-1}$ репер у тачки p такав да је $u = e_0$, тада на основу претходне леме важи

$$\mathrm{Ric}(u,u) = \sum \epsilon_m \langle R_{ue_m}(u), e_m \rangle = \langle u,u \rangle \sum K(u, e_m).$$

Дефиниција 1.32. Скаларна кривина R од M је контракција $C(\mathrm{Ric}) \in \mathcal{F}(M)$ њеног Ричијевог тензора.

У координатама имамо

$$R = \sum g^{ij} R_{ij} = \sum g^{ij} R^k_{ijk}.$$

Контракција у односу на поље репера даје

$$R = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j) = 2 \sum_{i<j} K(E_i, E_j).$$

Напоменимо да неки аутори оператор кривине дефинишу са $-R_{XY}$, међутим та разлика у знаку суштински ништа не мења, али ипак треба бити пажљив.

Глава 2

Ајнштајнова теорија гравитације

Теоријску основу савремене космологије представља Ајнштајнова општа теорија релативности, коју је он формулисао 1915. године. То је релативистичка теорија гравитације која се своди на Њутнову теорију при нерелативистичким брзинама тела, слабим и споро промењивим гравитационим пољима. Општа теорија релативности настала је проширењем специјалне теорије релативности тако да је укључена гравитација и кретање у неинерцијалним системима референције. Она садржи два принципа: општи принцип релативности и принцип еквиваленције. Општи принцип релативности гласи: сви физички закони имају исту форму у било ком систему референције, тј. форма физичких закона је инваријантна у односу на опште координатне трансформације. Принцип еквиваленције је заснован на експерименталној чињеници да су инертна и гравитациона маса једнаке за сва тела. Он се формулише на следећи начин: увек се може изабрати такав систем референције да у њему гравитационо поље локално нестаје, тј. простор се локално може учинити еуклидским, односно простором Минковског. Ајнштајн је кретање у гравитационом пољу свео на кретање у простор-времену са псеудо-Римановом геометријом.

Најважнији део опште теорије релативности су Ајнштајнове једначине за гравитационо поље

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

где је $R_{\mu\nu}$ Ричијев тензор, R је скаларна кривина, $g_{\mu\nu}$ је метрички тензор, који је уједно и тензор гравитационог поља, G је гравитациона константа, c је брзина светлости. На левој страни једначине (2.1) налазе се величине које карактеришу геометријске особине псеудо-Римановог простора, а на десној страни је расподела материје дата тензором енергије-импулса $T_{\mu\nu}$ и густина енергије вакуума представљена космолошком константом Λ.

Важно место у овој теорији има тензор $G_{\mu\nu}$ који се дефинише на следећи начин
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$
Тензор $G_{\mu\nu}$ се зове Ајнштајнов тензор.

Варијацијом Ајнштајн-Хилбертовог дејства са космолошким чланом
$$S = \int \sqrt{-\mathsf{g}}\frac{R-2\Lambda}{16\pi G}d^4x + \int \sqrt{-\mathsf{g}}\mathcal{L}_m d^4x \tag{2.2}$$
у односу на метрику $g_{\mu\nu}$ добијамо Ајнштајнове једначине за гравитационо поље које се још зову и Ајнштајнове једначине кретања. Оне описују просторно-временску промену гравитационог поља. Кретање честице у гравитационом пољу се описује једначином за геодезијску линију. Извођење Ајнштајнових једначина кретања биће показано у Глави 3. Овде је $\mathsf{g} = \det(g_{\mu\nu})$, а $\mathcal{L}_m$ је лагранжијан материје.

На великим космичким растојањима васиона је хомогена и изотропна. Ова претпоставка значи да се еволуција васионе може представити као фамилија просторних хиперповрши параметризована временом, таква да су све хиперповрши хомогене и изотропне.

Напомена: Дејство групе G на многострукост је пресликавање из $G \times M$ у M, $(g,p) \mapsto g \cdot p$, које задовољава
$$g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p, \quad g_1, g_2 \in G,\ p \in M,$$
$$e \cdot p = p, \quad p \in M.$$

Кажемо да је дејство транзитивно ако за сваке две тачке $p, q \in M$ постоји $g \in G$ тако да важи $g \cdot p = q$.

Ако постоји глатко и транзитивно дејство Лијеве групе (изометријама) на псеудо-Риманову многострукост онда кажемо да је псеудо-Риманова многострукост хомогена.

Ако подгрупа $G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\}$ делује транзитивно на скуп јединичних вектора у T_pM кажемо да је псеудо-Риманова многострукост изотропна.

Хомогеност значи да су физичка својства иста у свакој тачки било које дате хиперповрши. Изотропност значи да су физичка својства идентична у свим правцима када се посматра из дате тачке на хиперповрши. Изотропност у свакој тачки аутоматски даје хомогеност. Међутим, хомогеност не повлачи обавезно изотропност. Можемо замислити, на пример, хомогену, а неизотропну васиону која се скупља у једном правцу, а шири у друга два правца.

Постоје само три типа хомогених и изотропних простора са једноставном топологијом (односно просто повезаних простора):
(1) раван простор,
(2) тродимензиона сфера константне позитивне кривине, и
(3) тродимензиони хиперболички простор константне негативне кривине.

Растојање у хомогеном и изотропном простор-времену се изражава метриком Фридмана-Робертсона-Вокера (FRW) (при $c = 1$)

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\Big], \tag{2.3}$$

где је $a(t)$ космички скалирајући фактор који зависи од времена t и описује еволуцију васионе. Константа k карактерише закривљеност простора. Она може да има вредности:
(1) $k = 0$ (такав простор се зове раван простор),
(2) $k = +1$ (затворен простор константне позитивне кривине) и
(3) $k = -1$ (отворен простор константне негативне кривине).

Лема 2.1. *Користећи елементе метричког тензора из* (2.3) *добијамо:*
(1) Једини Кристофелови симболи који се не поништавају су:

$$\begin{array}{lll}
\Gamma^1_{01} = \dfrac{\dot a}{a} & \Gamma^2_{02} = \dfrac{\dot a}{a} & \Gamma^3_{03} = \dfrac{\dot a}{a} \\
\Gamma^0_{11} = \dfrac{a\dot a}{1-kr^2} & \Gamma^1_{11} = \dfrac{kr}{1-kr^2} & \Gamma^2_{12} = \Gamma^3_{13} = \dfrac{1}{r} \\
\Gamma^0_{22} = r^2 a\dot a & \Gamma^1_{22} = r(kr^2-1) & \Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta \\
\Gamma^0_{33} = r^2 a\dot a\sin^2\theta & \Gamma^1_{33} = r(kr^2-1)\sin^2\theta & \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta,
\end{array}$$

где је $\dot a = \frac{da}{dt}$.

(2) Једине генеричке (до на симетрију) компоненте тензора кривине различите од нуле су:

$$\begin{array}{ll}
R_{0110} = \dfrac{a\ddot a}{1-kr^2} & R_{1221} = -\dfrac{r^2a^2(\dot a^2+k)}{1-kr^2} \\
R_{0220} = r^2 a\ddot a & R_{1331} = -\dfrac{r^2a^2\sin^2\theta(\dot a^2+k)}{1-kr^2} \\
R_{0330} = r^2 a\ddot a\sin^2\theta & R_{2332} = -r^4a^2\sin^2\theta(\dot a^2+k).
\end{array}$$

(3) Ричијев тензор је следећег облика:

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{3\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ug_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ug_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ug_{33} \end{pmatrix}, \quad \textit{где је} \quad u = \frac{a\ddot{a} + 2(\dot{a}^2 + k)}{a^2}.$$

(4) Скаларна кривина је

$$R = \frac{6(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)}{a^2}.$$

(5) Ајнштајнов тензор је

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{3(\dot{a}^2+k)}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -vg_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -vg_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -vg_{33} \end{pmatrix}, \qquad v = \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}.$$

У неким космолошким разматрањима Ајнштајнових једначина васиона се посматра испуњена материјом без космолошког члана. Моделирајмо сада материју у васиони помоћу идеалног флуида. Идеални флуид је флуид који је изотропан у систему који мирује. Тензор енергије-импулса за идеални флуид може се записати на следећи начин

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33}p \end{pmatrix},$$

где су ρ и p густина енергије и притисак (респективно) мерени у систему који мирује.

Са једним подигнутим индексом добијамо подеснији облик

$$T_\mu^\nu = diag(-\rho, p, p, p).$$

Приметимо да је траг дат са

$$T = T_\mu^\mu = -\rho + 3p. \tag{2.4}$$

Размотримо нулту компоненту једначине очувања, која је једначина очувања енергије:

$$0 = \nabla^\mu T^0_\mu = g^{\mu\mu}\nabla_\mu T^0_\mu = g^{\mu\mu}\Big(\partial_\mu T^0_\mu - \Gamma^0_{\mu\mu}T^0_0 + \Gamma^0_{\lambda\mu}T^\lambda_\mu\Big) = \partial_0\rho + 3\frac{\dot a}{a}(\rho + p). \quad (2.5)$$

Потребно је изабрати једначину стања, однос између ρ и p. У суштини сви идеални флуиди релевантни за космологију задовољавају једноставну једначину стања

$$p = w\rho,$$

где је w константа независна од времена. Једначина очувања енергије постаје

$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\,(1+w)\,\frac{\dot a}{a}\,.$$

Из претходне једначине добијамо да је ρ пропорционално са $a^{-3(1+w)}$, пишемо $\rho \propto a^{-3(1+w)}$.

Два најпопуларнија примера космолошких флуида су позната као прашина и радијација. Прашина је нерелативистичка материја, без међусобног судара, за коју важи $w = 0$. Примери укључују обичне звезде и галаксије, за које је притисак занемарљив у поређењу са густином енергије. Прашина је такође позната као "материја", а васионе чија се густина енергије базира на прашини познате су као васионе у којима доминира материја. Густина енергије материје је

$$\rho \propto a^{-3}.$$

Ово се једноставно тумачи као смањење густине честица док се васиона шири. За прашину густина енергије доминира енергијом мировања, која је пропорционална броју честица. "Радијација" се може користити за опис или актуелне електромагнетне радијације или масивних честица које се крећу релативним брзинама блиским брзини светлости тако да се оне не могу разликовати од фотона (барем што се тиче једначине стања). Тензор енергије-импулса $T_{\mu\nu}$ се може изразити помоћу јачине поља као

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\,(F^{\mu\lambda}\,F^\nu_\lambda - \frac{1}{4}\,g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}\,F_{\lambda\sigma}).$$

Траг претходне једначине је дат са

$$T^\mu_\mu = \frac{1}{4\pi}\,(F^{\mu\lambda}\,F_{\mu\lambda} - F^{\lambda\sigma}\,F_{\lambda\sigma}) = 0.$$

Када претходну једначину изједначимо са (2.4) добијамо једначину стања

$$p = \frac{1}{3}\rho.$$

За васиону у којој је већина густине енергије у облику радијације кажемо да је васиона у којој доминира радијација. Густина енергије у радијацији је

$$\rho \propto a^{-4}.$$

Према томе, густина енергије у радијацији опада мало брже од густине материје. То је због тога што се густина фотона смањује на исти начин као и густина нерелативистичких честица, али појединачни фотони такође губе енергију пропорционално a^{-1} при црвеном помаку. Такође, масивне али релативистичке честице ће изгубити енергију док буду успоравале у систему референције који се креће као и васиона (comoving frame). Верујемо да данас густина енергије у васиони доминира кроз материју, при чему је $\frac{\rho_{mat}}{\rho_{rad}} \sim 10^6$. Међутим, васиона је у прошлости била много мања и густина енергије у радијацији је доминирала у веома раним временима.

Постоји један други облик енергије-импулса који се понекад разматра, наиме сами вакуум. Увођење енергије вакуума је еквивалентно са увођењем космолошке константе. Ајнштајнове једначине са космолошком константом су

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu}.$$

Ове једначине имају исти облик као и једначине кретања без космолошке константе при чему је тензор енергије-импулса за вакуум једнак

$$T_{\mu\nu}^{(vac)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}\, g_{\mu\nu}.$$

Ово је облик савршеног флуида за $\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G}$.

Дакле, имамо $w = -1$. Густина енергије је независна од a. То је оно што бисмо очекивали за густину енергије вакуума. Пошто се густина енергије материје и радијације смањује док се васиона шири, ако је енергија вакуума различита од нуле, онда она тежи да превлада у дужем временском периоду (све док се васиона не почне скупљати). Ако се то деси, васиона постаје васиона у којој доминира вакуум.

Вратимо се сада Ајнштајновим једначинама. Оне се могу записати у следећем облику:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T).$$

За $\mu = \nu = 0$ добијамо 00-једначину

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p). \tag{2.6}$$

Слично, за $\mu = \nu = i$ добијамо једначину

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\Big(\frac{\dot{a}}{a}\Big)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p). \tag{2.7}$$

Помоћу једначине (2.6) можемо елиминисати друге изводе у једначини (2.7). На тај начин имамо следеће две једначине

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \tag{2.9}$$

Претходне две једначине се зову Фридманове једначине. Метрике облика (2.3) које задовољавају ове једначине дефинишу Фридман-Робертсон-Вокерове (FRW) васионе.

Једначине (2.8) и (2.9) служе за испитивање динамике свих савремених космолошких модела са хомогеном и изотропном расподелом материје на космичкој скали у оквиру Ајнштајнове теорије гравитације.

Сада ћемо представити неке корисне космолошке параметре.

Хаблов параметар $H = \frac{\dot{a}}{a}$ карактерише брзину ширења и могућег скупљања. Вредност Хабловог параметра у садашњости је Хаблова константа H_0. Вредност Хаблове константе била је увек предмет дискусија и приликом мерења добијане су разне вредности. Вредност добијена помоћу Планковог сателита износи око 67 $km/s/Mpc$. ("Mpc" означава мегапарсек, који је приближно $3,0857 \times 10^{22} m$.)

Такође постоји и параметар успоравања

$$q = -\frac{a\,\ddot{a}}{\dot{a}^2},$$

који мери брзину промене брзине ширења. Веома је користан и параметар густине

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\,\rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}},$$

где је критична густина дефинисана са

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}.$$

Ова величина се зове критична густина зато што се Фридманова једначина (2.9) може записати на следећи начин

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \tag{2.10}$$

Имамо следеће три могућности:

1) $\rho < \rho_{crit}$, тада је $\Omega < 1$ и $k = -1$ (отворен свемир),
2) $\rho = \rho_{crit}$, тада је $\Omega = 1$ и $k = 0$ (раван свемир),
3) $\rho > \rho_{crit}$, тада је $\Omega > 1$ и $k = +1$ (затворен свемир).

Дакле, параметар густине нам говори која од три Фридман-Робертсон-Вокерове геометрије описује нашу васиону. Његово опсервационо одређивање је област интензивног истраживања и обично се узима да је $\Omega = 1$.

Могуће је решити Фридманове једначине у различитим простим случајевима. Сада желимо да проанализирамо неке могућности.

Напомена: Треба имати у виду да у наставку следи само анализа различитих могућности које не одговарају реалном случају, јер је доказано да се васиона убрзано шири, а томе одговара негативан притисак.

Нека је за тренутак $\Lambda = 0$. Разматрајмо понашање васиона испуњених флуидима позитивне енергије ($\rho > 0$) и ненегативног притиска ($p \geq 0$). Тада, на основу (2.8) видимо да важи $\ddot{a} < 0$. На основу посматрања удаљених галаксија знамо да се васиона шири ($\dot{a} > 0$), то значи да васиона "успорава". То је оно што треба очекивати, пошто гравитационо привлачење материје у васиони делује против ширења. Чињеница да васиона може само успоравати значи да се морала ширити још брже у прошлости. Ако пратимо еволуцију уназад у времену, обавезно достижемо сингуларитет у $a = 0$. Приметимо да ако је $\ddot{a}$ било тачно нула, $a(t)$ би била права линија, а старост васионе би била H_0^{-1}. Пошто је $\ddot{a}$ у овом случају негативно, васиона мора бити нешто млађа од тога.

Овај сингуларитет у $a = 0$ је Велики прасак. Он представља стварање васионе из стања сингуларитета, а не експлозију материје у већ постојећем простор-времену. Можемо се надати да је савршена симетрија наших FRW васиона била одговорна за овај сингуларитет, али у ствари то није тачно. На основу теорема о сингуларитету било која васиона код које је $\rho > 0$ и $p \geq 0$

је започета из сингуларитета. Наравно густина енергије постаје произвољно велика кад $a \to 0$, и ми не очекујемо да класична општа релативност буде тачан опис природе у овом режиму. Надамо се да ће доследна теорија квантне гравитације бити у могућности да поправи ствари.

Будућност еволуције је различита за различите вредности од k. За отворене и равне случајеве, $k \leq 0$, из (2.9) добијамо

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + |k|. \tag{2.11}$$

Како је десна страна претходне једначине строго позитивна (због претпоставке $\rho > 0$) имамо да је $\dot{a} \neq 0$, тј. $\dot{a} > 0$. Према томе, отворене и равне васионе се шире заувек - оне су временски као и просторно отворене.

Колико брзо се ове васионе даље шире? Размотримо израз ρa^3 (који је константан у васионама у којима доминира материја). На основу једначине очувања енергије (2.5) добијамо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho a^3) &= a^3(\dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{a}}{a}) \\ &= -3pa^2\dot{a}.\end{aligned}$$

Како је десна страна или једнака нули или је негативна имамо

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) \leq 0.$$

Ово имплицира да ρa^2 тежи нули у стално-ширећој васиони када $a \to \infty$. Сада из једначине (2.11) следи

$$\dot{a}^2 \to |k|.$$

(Ово важи за $k \leq 0$.) Дакле, за $k = -1$ важи $\dot{a} \to 1$, док се за $k = 0$ васиона и даље шири, али све спорије и спорије.

У случају затворених васиона ($k = +1$), једначина (2.9) постаје

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - 1. \tag{2.12}$$

Аргумент да $\rho a^2 \to 0$ када $a \to \infty$ и даље важи, само што у том случају $\dot{a}^2$ постаје негативно, што је немогуће. Дакле, васиона се не шири стално, a достиже горњу границу a_{max}. Када a тежи ка a_{max}, једначина (2.8) имплицира

$$\ddot{a} \to -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a_{max} < 0.$$

Према томе $\ddot{a}$ је коначно и негативано у овој тачки, тако да a достиже a_{max} и почиње да опада, после чега ће (пошто је $\ddot{a} < 0$) неизбежно наставити да се скупља у нулу- велико сажимање (the Big Crunch) . Дакле, затворене васионе (опет, под претпоставкама да је ρ позитивно и p ненегативно) су затворене у времену као и простору.

Сада ћемо навести нека егзактна решења која одговарају само једном типу густине енергије. За васионе у којима је само прашина ($p = 0$), згодно је дефинисати еволуциони угао $\phi(t)$, боље него да користимо директно t као параметар. Тада имамо решења, за отворене васионе, ($k = -1$)

$$a = \frac{C}{2}(\operatorname{ch}\phi - 1), \quad t = \frac{C}{2}(\operatorname{sh}\phi - \phi),$$

за равне васионе, ($k = 0$)

$$a = \left(\frac{9C}{4}\right)^{1/3} t^{2/3},$$

и за затворене васионе, ($k = +1$)

$$a = \frac{C}{2}(1 - \cos\phi), \quad t = \frac{C}{2}(\phi - \sin\phi),$$

где је $C = \frac{8\pi G}{3}\rho a^3 =$ константа.

За васионе испуњене само радијацијом, $p = \frac{1}{3}\rho$, имамо поново отворене васионе,

$$a = \sqrt{C'}\left(\left(1 + \frac{t}{\sqrt{C'}}\right)^2 - 1\right)^{1/2} \quad (k = -1),$$

равне васионе,

$$a = (4C')^{1/4} t^{1/2} \quad (k = 0),$$

и затворене васионе,

$$a = \sqrt{C'}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{C'}}\right)^2\right)^{1/2} \quad (k = +1),$$

где је $C' = \frac{8\pi G}{3}\rho a^4 =$ константа.

За васионе које су празне, или је ρ или p негативно, што је у супротности са претпоставкама које смо раније користили да изведемо опште понашање за $a(t)$. У овом случају изгубљена је веза између отворених/затворених и заувек ширећих/осцилујућих васиона. За почетак нека је $\Lambda < 0$. У овом случају Ω је негативно, и на основу (2.10) видимо да се ово може десити само када је $k = -1$.

У овом случају решење је

$$a = \sqrt{\frac{-3}{\Lambda}}\sin\Big(\sqrt{\frac{-\Lambda}{3}}t\Big). \tag{2.13}$$

Такође постоји отворено ($k = -1$) решење за $\Lambda > 0$, дато са

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\,\mathrm{sh}\Big(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\Big). \tag{2.14}$$

За равну вакуум-доминирајућу васиону имамо да је $\Lambda > 0$, а решење је

$$a \propto \exp\Big(\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\Big), \tag{2.15}$$

док је код затворене васионе такође $\Lambda > 0$, и важи

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\,\mathrm{ch}\Big(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\Big). \tag{2.16}$$

У ствари сва три решења за $\Lambda > 0$ - (2.14)-(2.16) представљају исто простор-време, само у различитим координатама. Ово простор-време, које се зове де Ситеров простор, је заправо максимално симетрично као простор-време. Решење ($\Lambda < 0$) (2.13) је такође максимално симетрично, и познато је као анти-де Ситеров простор.

За претходну причу о Ајнштајновој општој теорији релативности послужиле су књиге [18, 50, 55, 12].

2.1 Потврде опште теорије релативности

Општа теорија релативности је проверена у следећа три класична експеримента:

1) Прецесија перихела Меркура,

2) Скретање светлосног зрака у близини Сунца,

3) Гравитациони црвени помак.

2.2 Отворени проблеми у космологији

Упркос својој теоријској лепоти и многим феноменолошким успесима, општа теорија релативности није комплетна теорија. У космологији прошлог века направљена су три велика експериментална открића, која за сада немају опште

прихваћено теоријско објашњење. Та открића су:
1) велике орбиталне брзине галаксија унутар јата галаксија (Fritz Zwicky , 1933),
2) велике орбиталне брзине звезда у спиралним галаксијама (Вера Рубин, крај 1960-тих),
3) убрзано ширење васионе (1998. година).

Постоје два приступа решавања претходних проблема:
1) тамна материја и тамна енергија и
2) модификација Ајнштајнове теорије гравитације.

2.3 Тамна материја и тамна енергија

Ако је Ајнштајнова теорија гравитације примењива на целокупну васиону и ако је васиона хомогена и изотропна, тада постоје два нова вида материје: тамна материја и тамна енергија. Према оваквом приступу постоје три вида материје у свемиру са следећим процентним односом: видљива (обична) материја (5%), тамна материја (27%) и тамна енергија (68%). То значи да 95% укупне материје, односно енергије, представља тамну страну васионе, чија природа је за сада непозната. Тамна материја је одговорна за орбиталне брзине у галаксијама, а тамна енергија је одговорна за убрзано ширење васионе.

Својства тамне материје и тамне енергије се битно разликују од својстава обичне материје. Тамна материја се кластеризује око галаксија. Она није равномерно распоређена у простору: унутар галаксија расте од центра према крајевима, а унутар јата галаксија опада од центра. Тамна материја има својство гравитационог привлачења, па према томе има и масу. Она не интерагује електромагнетно, па је невидљива. Њено постојање је претпостављено већ 1933. године, да би се њеним гравитационим привлачењем објаснила опсервација великих брзина кретања унутар јата галаксија.

Тамна енергија је потпуно нови вид материје, који има следеће хипотетичке особине: хомогено је распоређена по целом свемиру, делује одбојно и има негативан притисак, што је узрок убрзаног ширења свемира.

Тамна материја и тамна енергија још нису детектоване у лабораторијским експериментима. Природа тамне материје и тамне енергије, као и природа гравитације на огромним астрономским растојањима, је велика космичка мистерија и велики научни изазов.

2.4 Мотивација за модификацију Ајнштајнове теорије гравитације

Пошто постојање тамне материје и тамне енергије није експериментално потврђено, а и Ајнштајнова теорија гравитације није проверена на великим космичким растојањима, у последњих петнаестак година интензивно се ради на разним модификацијама Ајнштајнове теорије гравитације. Ова проблематика је погодно поље примене псеудо-Риманове геометрије.

Велики прасак представља космички сингуларитет опште релативности. Наиме, под прилично општим условима, општа релативност даје космолошка решења при којима је васиона на свом почетку величине нула, што значи да је густина материје бесконачна.

Приметимо да када физичка теорија садржи сингуларитет, онда она није важећа у околини сингуларитета и мора бити модификована на одговарајући начин.

2.5 Модификација Ајнштајнове теорије гравитације

Модификација Ајнштајнове теорије гравитације треба да представља теоријско уопштење опште теорије релативности и треба да буде верификована барем у Сунчевом систему. Модификована Ајнштајнова теорија гравитације треба да је теоријски савршенија теорија гравитације, да реши проблем космичког сингуларитета, да правилно опише динамику галаксија и убрзано ширење васионе са или без тамне материје и тамне енергије.

Псеудо-Риманова геометрија дозвољава разна уопштавања Ајнштајнове теорије гравитације тако да њена могућа теоријска модификација није једнозначна. Два најзначајнија правца модификације Ајнштајнове теорије гравитације су: $f(R)$ теорија и нелокална модификација.

У $f(R)$ теорији дејство је следећег облика:

$$S = \int \sqrt{-\mathtt{g}} \frac{f(R)}{16\pi G} d^4x + \int \sqrt{-\mathtt{g}} \mathcal{L}_m d^4x. \tag{2.17}$$

Дакле, у Ајнштајн-Хилбертовом дејству скаларна кривина R је замењена са функцијом $f(R)$. Ако узмемо $f(R) = R$ добијамо Ајнштајн-Хилбертово дејство, па се $f(R)$ теорија своди на општу теорију релативности. Варијацијом дејства

(2.17) добијамо следеће једначине:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box]f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}.$$

Овде је $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$ Даламберов оператор, ∇_μ означава коваријантни извод, $\kappa = 8\pi G$, и $'$ означава извод по R. Први модел $f(R)$ гравитације који је покушао да објасни данашње космичко убрзање био је облика $f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}$, где је $\mu \sim H_0^{-1}$. Овај модел је убрзо напуштен. Издвајају се корекције облика $f(R) = R + \alpha R^2$ које су већ биле присутне у првом инфлационом моделу ране васионе. За детаље видети [38], као и референце у оквиру тог рада.

У нелокалној модификацији се полази од новог израза за Ајнштајн-Хилбертово дејство који садржи нелокалност преко аналитичке функције Даламберовог оператора. Овде се издваја модел који је описан помоћу следећег нелокалног дејства (видети [45])

$$S = \int d^4x \sqrt{-\mathrm{g}} \left(\frac{M_P^2}{2} R + \frac{\lambda}{2} \big(R\mathcal{F}_1(\Box)R + R^\mu_\nu \mathcal{F}_2(\Box) R^\nu_\mu + C_{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{F}_4(\Box)C^{\mu\nu\alpha\beta} \big) - \Lambda \right),$$

где су $\mathcal{F}_i$ аналитичке функције Даламберовог оператора $\Box$, а $C^\mu_{\alpha\nu\beta}$ је Вејлов тензор. Дакле,

$$C^{\mu\alpha}_{\nu\beta} = R^{\mu\alpha}_{\nu\beta} - \frac{1}{2}(\delta^\mu_\nu R^\alpha_\beta - \delta^\mu_\beta R^\alpha_\nu + R^\mu_\nu \delta^\alpha_\beta - R^\mu_\beta \delta^\alpha_\nu) + \frac{R}{6}(\delta^\mu_\nu \delta^\alpha_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\alpha_\nu).$$

Такође се издваја следећи модел (видети [20]):

$$S = \int d^4x \sqrt{-\mathrm{g}} \frac{R}{16\pi G} \left(1 + f(\Box^{-1}R)\right).$$

Најчешће је изучаван случај $f(\Box^{-1}R) = f_0 e^{\alpha(\Box^{-1}R)}$, где су f_0 и α реални параметри (видети [37]).

Може се разматрати општије дејство ([51]):

$$S = \int d^4x \sqrt{-\mathrm{g}} F(R, \Box R, \Box^2 R, ..., \Box^m R, \Box^{-1}R, \Box^{-2}R, ..., \Box^{-n}R),$$

где су m и n позитивни цели бројеви.

Дејство које је такође интересантно (видети [30]) је

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\mathrm{g}} (R - \frac{1}{6} m^2 R \Box^{-2} R),$$

где је $m \sim 0,28 H_0$.

У раду [43] разматрана је следећа класа нелокалних модела

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\mathsf{g}} R \left(1 + f(\triangle^{-1} R)\right),$$

где је $\triangle$ оператор облика $\triangle = \nabla_\mu Q^{\mu\nu} \nabla_\nu$. Једноставан пример је Даламберов оператор $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$. Компликованији пример је $\triangle = \Box + \nabla_\mu (\alpha R^{\mu\nu} - \beta R g^{\mu\nu}) \nabla_\nu$.

Такође је разматрано уопштење претходног модела

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\mathsf{g}} R (1 + f(\triangle^{-m} R, ..., \triangle^{-1} R, \triangle R, ..., \triangle^n R)).$$

У следећој глави бавимо се нелокалном модификацијом Ајнштајнове теорије гравитације.

Глава 3

Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације

3.1 Нелокална модификација

У овом раду посматрамо нелокалну модификацију Ајнштајнове теорије гравитације без материје, где је нелокалност облика $\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)$. Једначине кретања су обично веома сложене. У наставку изводимо детаљно једначине кретања.

Под нелокалном модификацијом гравитације подразумевамо замену скаларне кривине R у Ајнштајн-Хилбертовом дејству са подесном функцијом $F(R,\Box)$, где је $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$ Даламберов оператор, а ∇_μ означава коваријантни извод. Овде, нелокалност значи да лагранжијан садржи бесконачан број просторно-временских извода, тј. садржи изводе све до бесконачног реда у облику Даламберовог оператора $\Box$ који је аргумент аналитичке функције.

Нека је M сада четворо-димензиона псеудо-Риманова многострукост са метриком $(g_{\mu\nu})$ сигнатуре $(1,3)$. Разматрамо класу модела нелокалне гравитације без материје која је дата следећим дејством

$$S = \int_M \Big(\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} + C\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\Big)\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x, \tag{3.1}$$

где је $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ су диференцијабилне функције скаларне кривине R, Λ је космолошка константа и C је константа. Одговарајуће Ајнштајнове једначине кретања су прилично сложене. У наставку ћемо приказати њихово извођење. Да бисмо добили једначине кретања за $g_{\mu\nu}$ морамо наћи варијацију дејства (3.1) у односу на метрику $g^{\mu\nu}$.

Прво докажимо следећу лему и теорему које су нам потребне за даљи рачун.

Лема 3.1. *За псеудо-Риманову многострукост M важе следећи идентитети:*

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \delta g^{\alpha\beta}, \tag{3.2}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta}, \tag{3.3}$$

$$\delta R^{\mu}_{\nu\gamma\eta} = \nabla_\gamma \delta\Gamma^{\mu}_{\eta\nu} - \nabla_\eta \delta\Gamma^{\mu}_{\gamma\nu}, \tag{3.4}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\gamma \delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\gamma}_{\gamma\mu}, \tag{3.5}$$

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}\Big(\frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\gamma}\Big) + \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma}\Big(\frac{\partial \delta g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \delta g_{\nu\gamma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta g_{\nu\mu}}{\partial x^\gamma}\Big). \tag{3.6}$$

Доказ. Важи $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = n$, где је n димензија простор-времена, односно псеудо-Риманове многострукости M. Одавде следи

$$g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{3.7}$$

Из последње једнакости директно следе идентитети (3.2) и (3.3).
Риманов тензор $R^{\mu}_{\nu\gamma\eta}$ је дат са

$$R^{\mu}_{\nu\gamma\eta} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\nu\eta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}_{\gamma\nu}}{\partial x^\eta} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\eta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu}, \tag{3.8}$$

где је $\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma}$ Кристофелов симбол

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\Big(\frac{\partial g_{\sigma\gamma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\nu\gamma}}{\partial x^\sigma}\Big). \tag{3.9}$$

Из једначине (3.8) следи

$$\delta R^{\mu}_{\nu\gamma\eta} = \frac{\partial \delta\Gamma^{\mu}_{\nu\eta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \delta\Gamma^{\mu}_{\gamma\nu}}{\partial x^\eta} + \delta\Gamma^{\mu}_{\gamma\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\sigma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\eta} - \delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\eta}\Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\eta}\delta\Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu}. \tag{3.10}$$

За $\nabla_\gamma \delta\Gamma^{\mu}_{\eta\nu}$ важи

$$\nabla_\gamma \delta\Gamma^{\mu}_{\eta\nu} = \frac{\partial \delta\Gamma^{\mu}_{\eta\nu}}{\partial x^\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\eta\gamma}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\gamma}\delta\Gamma^{\mu}_{\eta\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}\delta\Gamma^{\sigma}_{\eta\nu}.$$

Слично важи

$$\nabla_\eta \delta\Gamma^{\mu}_{\gamma\nu} = \frac{\partial \delta\Gamma^{\mu}_{\gamma\nu}}{\partial x^\eta} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\eta}\delta\Gamma^{\mu}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\eta}\delta\Gamma^{\mu}_{\gamma\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\eta}\delta\Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu}.$$

Сада из (3.10) и одузимањем последње две једначине добијамо идентитет (3.4).
Из $R_{\mu\nu} = R^{\eta}_{\mu\eta\nu}$ и користећи идентитет (3.4) следи (3.5).
Идентитет (3.6) следи из (3.9). □

Теорема 3.1. *Нека је M четворо-димензиона псеудо-Риманова многострукост са метриком $(g_{\mu\nu})$ сигнатуре $(1,3)$, тада важе следећи идентитети:*

$$\delta \mathsf{g} = \mathsf{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -\mathsf{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

$$\delta\sqrt{-\mathsf{g}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}, \tag{3.12}$$

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = -g^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\sigma\alpha} - g^{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\sigma\alpha}, \tag{3.14}$$

$$\Gamma^\mu_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}\ln\sqrt{-\mathsf{g}}, \tag{3.15}$$

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\partial_\mu\sqrt{-\mathsf{g}} g^{\mu\nu}\partial_\nu, \tag{3.16}$$

где је $\mathsf{g} = \det(g_{\mu\nu})$.

Доказ. Детерминанта g се може изразити на следећи начин:

$$\mathsf{g} = g_{\mu 0}G^{(\mu,0)} + g_{\mu 1}G^{(\mu,1)} + ... + g_{\mu n-1}G^{(\mu,n-1)},$$

где је $G^{(\mu,\nu)}$ одговарајући алгебарски кофактор, а n је димензија многострукости M. Ако заменимо елементе μ-тог реда са елементима ν-тог реда добијамо да је детерминанта g једнака нули, тј.

$$0 = g_{\nu 0}G^{(\mu,0)} + g_{\nu 1}G^{(\mu,1)} + ... + g_{\nu n-1}G^{(\mu,n-1)}.$$

Из овог израза следи

$$g_{\mu\nu}G^{(\alpha,\nu)} = \mathsf{g}\delta^\alpha_\mu, \tag{3.17}$$

или

$$g_{\mu\nu}\frac{G^{(\alpha,\nu)}}{\mathsf{g}} = \delta^\alpha_\mu,$$

где је δ^α_μ Кронекеров делта симбол.

Метрички тензор $g^{\alpha\nu}$ је дефинисан са

$$g^{\alpha\nu} = \frac{G^{(\alpha,\nu)}}{\mathsf{g}}\ . \tag{3.18}$$

На основу (3.17) (овде узимамо $\alpha = \mu$) добијамо

$$\delta\mathsf{g} = G^{(\mu,\nu)}\delta g_{\mu\nu}.$$

Из последње једначине и на основу (3.18) имамо

$$\delta \mathsf{g} = \mathsf{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}.$$

Важи (3.7), чиме смо комплетирали доказ за (3.11).
Имамо

$$\delta\sqrt{-\mathsf{g}} = -\frac{1}{2\sqrt{-\mathsf{g}}}\delta \mathsf{g}.$$

Коначно, користећи једначину (3.11) добијамо (3.12).

На основу дефиниције знамо да је

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \tag{3.19}$$

где је $R_{\mu\nu} = R^{\eta}_{\mu\eta\nu}$ Ричијев тензор. Из једначине (3.19) добијамо варијацију скаларне кривине

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.$$

Користећи једначину (3.5) из Леме 3.1 добијамо следеће

$$\begin{aligned}\delta R &= \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\nabla_\gamma \delta\Gamma^{\gamma}_{\nu\mu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\gamma}_{\gamma\mu}) \\ &= \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \nabla_\sigma(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Овде смо искористили $\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0$ (метричка компатибилност) и преозначили неке унутрашње индексе.

Сада је неопходно да израчунамо члан $g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}$. Добијамо

$$\nabla_\gamma \delta g_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\mu}\delta g_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\gamma\nu}\delta g_{\mu\sigma}.$$

Користећи последњу једначину, једначину (3.6) из Леме 3.1 и симетрију Кристофеловог симбола $\Gamma^{\mu}_{\nu\gamma} = \Gamma^{\mu}_{\gamma\nu}$ добијамо

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} = {} & \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}\Big(\frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\gamma}\Big) + \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma}\Big(\nabla_\nu \delta g_{\gamma\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\gamma\nu} \\ & - \nabla_\gamma \delta g_{\nu\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\delta g_{\gamma\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta g_{\lambda\gamma}\Big) \\ = {} & \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}\Big(\frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\gamma}\Big) + g^{\sigma\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\delta g_{\gamma\lambda} + \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma}\Big(\nabla_\nu \delta g_{\gamma\mu} \\ & + \nabla_\mu \delta g_{\gamma\nu} - \nabla_\gamma \delta g_{\nu\mu}\Big).\end{aligned}$$

Заменом (3.2) из Леме 3.1 у други сабирак последње једначине добијамо

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}\Big(\frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\gamma\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\gamma}}\Big) - \delta g^{\alpha\beta} g^{\sigma\gamma} g_{\gamma\alpha} g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\\ &+ \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\Big(\nabla_{\nu}\delta g_{\gamma\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\gamma\nu} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\nu\mu}\Big)\\ &= \delta g^{\sigma\beta} g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \delta g^{\alpha\beta}\delta^{\sigma}_{\alpha} g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\Big(\nabla_{\nu}\delta g_{\gamma\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\gamma\nu} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\nu\mu}\Big)\\ &= \delta g^{\sigma\beta} g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \delta g^{\sigma\beta} g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\Big(\nabla_{\nu}\delta g_{\gamma\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\gamma\nu} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\nu\mu}\Big).\end{aligned}$$

Сада из претходног следи

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}(\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\gamma} + \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\gamma} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\nu\mu}).$$

Слично,

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\nabla_{\mu}\delta g_{\sigma\gamma}.$$

Да бисмо изразили претходни резултат као функцију варијација $\delta g^{\mu\nu}$ поново користимо (3.2) и добијамо

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} &= \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\Big(\nabla_{\nu}(-g_{\mu\alpha}g_{\gamma\beta}\delta g^{\alpha\beta}) + \nabla_{\mu}(-g_{\nu\alpha}g_{\gamma\beta}\delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_{\gamma}(-g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\delta g^{\alpha\beta})\Big)\\ &= -\frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}(g_{\mu\alpha}g_{\gamma\beta}\nabla_{\nu}\delta g^{\alpha\beta} + g_{\nu\alpha}g_{\gamma\beta}\nabla_{\mu}\delta g^{\alpha\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\nabla_{\gamma}\delta g^{\alpha\beta})\\ &= -\frac{1}{2}(\delta^{\sigma}_{\beta}g_{\mu\alpha}\nabla_{\nu}\delta g^{\alpha\beta} + \delta^{\sigma}_{\beta}g_{\nu\alpha}\nabla_{\mu}\delta g^{\alpha\beta} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}g^{\gamma\sigma}\nabla_{\gamma}\delta g^{\alpha\beta})\\ &= -\frac{1}{2}(g_{\mu\gamma}\nabla_{\nu}\delta g^{\sigma\gamma} + g_{\nu\gamma}\nabla_{\mu}\delta g^{\sigma\gamma} - g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta}),\end{aligned}$$

где је $\nabla^{\sigma} = g^{\sigma\gamma}\nabla_{\gamma}$.
Слично,

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma} = -\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\delta g^{\alpha\beta}.$$

Коначно, добијамо

$$\begin{aligned}&g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma}\\ &= -\frac{1}{2}\Big(g^{\mu\nu}g_{\mu\gamma}\nabla_{\nu}\delta g^{\sigma\gamma} + g^{\mu\nu}g_{\nu\gamma}\nabla_{\mu}\delta g^{\sigma\gamma} - g^{\mu\nu}g_{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta} - g^{\mu\sigma}g_{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\delta g^{\alpha\beta}\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\Big(\delta^{\nu}_{\gamma}\nabla_{\nu}\delta g^{\sigma\gamma} + \delta^{\mu}_{\gamma}\nabla_{\mu}\delta g^{\sigma\gamma} - \delta^{\mu}_{\alpha}g_{\mu\beta}\nabla^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta} - g^{\mu\sigma}g_{\alpha\beta}\nabla_{\mu}\delta g^{\alpha\beta}\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\Big(\nabla_{\gamma}\delta g^{\sigma\gamma} + \nabla_{\gamma}\delta g^{\sigma\gamma} - g_{\alpha\beta}\nabla^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}\nabla^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta}\Big)\\ &= -\frac{1}{2}\Big(2\nabla_{\gamma}\delta g^{\sigma\gamma} - 2g_{\alpha\beta}\nabla^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta}\Big).\end{aligned}$$

Тада следи

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - g^{\mu\sigma}\delta\Gamma^{\gamma}_{\mu\gamma} = g_{\alpha\beta}\nabla^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta} - \nabla_{\gamma}\delta g^{\sigma\gamma}.$$

Замењујући ово у (3.20) добијамо варијацију скаларне кривине

$$\begin{aligned}\delta R &= \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g_{\alpha\beta}\nabla_{\sigma}\nabla^{\sigma}\delta g^{\alpha\beta} - \nabla_{\sigma}\nabla_{\gamma}\delta g^{\sigma\gamma}\\ &= \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Сада желимо да докажемо једначину (3.14).
Користећи идентитет $g^{\mu\alpha}g_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}_{\nu}$, добијамо

$$\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}g_{\nu\alpha} = -g^{\mu\alpha}\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}\ . \tag{3.21}$$

Користећи дефиницију Кристофелових симбола (3.9) није тешко показати да важи

$$\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\sigma}} = g_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} + g_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}. \tag{3.22}$$

Заменом претходног израза у (3.21) имамо

$$\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x^{\sigma}}g_{\nu\alpha} = -g^{\mu\alpha}(g_{\beta\alpha}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} + g_{\beta\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}).$$

Ако помножимо последњу једначину са $g^{\nu\gamma}$ и користећи $g^{\nu\gamma}g_{\nu\alpha} = \delta^{\gamma}_{\alpha}$ добијамо

$$\frac{\partial g^{\mu\gamma}}{\partial x^{\sigma}} = -g^{\mu\alpha}g_{\beta\alpha}g^{\nu\gamma}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} - g^{\mu\alpha}g_{\beta\nu}g^{\nu\gamma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma} = -g^{\nu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} - g^{\mu\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\sigma}.$$

Коначно, ако у последњој једначини заменимо ν са α и γ са ν добијамо једначину (3.14).

За доказ једначине (3.15) користимо једначину (3.17)

$$\mathsf{g} = g_{\mu\alpha}G^{(\mu,\alpha)}.$$

Из претходне једначине заједно са $\frac{\partial G^{(\mu,\alpha)}}{\partial g_{\mu\nu}} = 0$ и $\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial g_{\mu\nu}} = \delta^{\nu}_{\alpha}$ следи

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathsf{g}}{\partial g_{\mu\nu}} &= g_{\mu\alpha}\frac{\partial G^{(\mu,\alpha)}}{\partial g_{\mu\nu}} + G^{(\mu,\alpha)}\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial g_{\mu\nu}} = G^{(\mu,\nu)},\\ \frac{\partial \mathsf{g}}{\partial x^{\mu}} &= \frac{\partial \mathsf{g}}{\partial g_{\alpha\beta}}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} = G^{(\alpha,\beta)}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}.\end{aligned}$$

Користећи $g^{\alpha\beta} = \frac{G^{(\alpha,\beta)}}{\mathrm{g}}$ последња једначина постаје

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x^\mu} = \mathrm{g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}.$$

Замењујући $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}$ из (3.22) добијамо

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial x^\mu} = \mathrm{g}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \mathrm{g}\Gamma^\beta_{\beta\mu} = 2\mathrm{g}\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}.$$

Из овог следи једначина (3.15)

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln \sqrt{-\mathrm{g}}.$$

Са циљем да докажемо (3.16) пишемо

$$\begin{aligned}\Box\varphi &= \nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = \nabla_\mu (g^{\mu\rho}\nabla_\rho \varphi) = \nabla_\mu \Big(g^{\mu\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(g^{\mu\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \Big) + \Gamma^\mu_{\mu\nu} g^{\nu\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho},\end{aligned}$$

где је φ било која скаларна функција.

Користећи (3.15) добијамо

$$\begin{aligned}\Box\varphi &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \Big) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\ln \sqrt{-\mathrm{g}}) g^{\nu\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \Big) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\ln \sqrt{-\mathrm{g}}) g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Са друге стране, имамо

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{g}}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(\sqrt{-\mathrm{g}} g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{g}}} \Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-\mathrm{g}}) g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + \sqrt{-\mathrm{g}} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + \sqrt{-\mathrm{g}} g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\ln \sqrt{-\mathrm{g}}) g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\ln \sqrt{-\mathrm{g}}) g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big(g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} \Big). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Из (3.23) и (3.24) можемо закључити да важи $\Box\varphi = \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{g}}} \partial_\mu \sqrt{-\mathrm{g}} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi$ за било коју скаларну функцију φ. $\Box$

3.2 Извођење једначина кретања

За почетак уведимо следећа помоћна дејства

$$S_0 = \int_M (R - 2\Lambda)\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x,$$
$$S_1 = \int_M \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x.$$

Тада се варијација дејства (3.1) може изразити на следећи начин

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G}\delta S_0 + C\delta S_1. \tag{3.25}$$

Такође нека су варијације метричких коефицијената и њихових првих извода једнаке нули на граници многострукости M, тј. $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial M} = 0$, $\delta\partial_\lambda g_{\mu\nu}|_{\partial M} = 0$.

3.2.1 Варијација дејства S_0

Лема 3.2. *На многострукости M важи* $\displaystyle\int_M g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x = 0.$

Доказ. Најпре уводимо (видети [13])

$$W^\nu = -g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha} + g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}.$$

Важи

$$\frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-\mathsf{g}}W^\nu) = \frac{\partial W^\nu}{\partial x^\nu} + W^\nu\frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\frac{\partial\sqrt{-\mathsf{g}}}{\partial x^\nu}.$$

Користећи једначину (3.15) добијамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-\mathsf{g}}W^\nu) &= -\frac{\partial}{\partial x^\nu}(g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha}) + \frac{\partial}{\partial x^\nu}(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}) + (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha})\Gamma^\beta_{\nu\beta}\\ &= -\frac{\partial g^{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} + g^{\mu\nu}\delta\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha})\Gamma^\beta_{\nu\beta}.\end{aligned}$$

Сада на основу једначине (3.14) важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-\mathsf{g}}W^\nu) &= g^{\alpha\beta}\Gamma^\mu_{\nu\beta}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha} + g^{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\beta}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha} - g^{\beta\nu}\Gamma^\mu_{\nu\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} - g^{\mu\beta}\Gamma^\nu_{\nu\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\\ &\quad - g^{\mu\alpha}\delta\frac{\partial\Gamma^\nu_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + g^{\mu\nu}\delta\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - g^{\mu\alpha}\Gamma^\beta_{\nu\beta}\delta\Gamma^\nu_{\mu\alpha} + g^{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\nu\beta}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}\\ &= g^{\mu\nu}\Big(- \delta\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \delta\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta}\delta\Gamma^\beta_{\mu\alpha} - \Gamma^\beta_{\nu\mu}\delta\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\delta\Gamma^\beta_{\mu\nu}\Big)\\ &= g^{\mu\nu}\delta\Big(- \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\alpha}\Gamma^\beta_{\mu\nu}\Big) = g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Овде смо преозначили неке унутрашње индексе.

Коначно, имамо

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-\mathsf{g}}W^\nu),$$

$$\int_M g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}d^4x = \int_M \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-\mathsf{g}}W^\nu)d^4x.$$

Користећи теорему Гауса-Стокса добијамо

$$\int_M \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\sqrt{-\mathsf{g}}W^\nu)d^4x = \int_{\partial M} W^\nu d\sigma_\nu.$$

Пошто је $\delta g_{\mu\nu} = 0$ и $\delta(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}) = 0$ на граници ∂M, имамо $W^\nu|_{\partial M} = 0$. Тада важи $\int_{\partial M} W^\nu d\sigma_\nu = 0$, чиме смо комплетирали доказ. □

Лема 3.3. *Варијација од S_0 је*

$$\delta S_0 = \int_M G_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x + \Lambda\int_M g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x, \tag{3.26}$$

где је $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ Ајнштајнов тензор.

Доказ. Варијацију израза S_0 можемо наћи као што следи

$$\begin{aligned}
\delta S_0 &= \int_M \delta((R-2\Lambda)\sqrt{-\mathsf{g}})\, d^4x \\
&= \int_M \delta(R\sqrt{-\mathsf{g}})\, d^4x - 2\Lambda\int_M \delta\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x \\
&= \int_M (\sqrt{-\mathsf{g}}\delta R + R\delta\sqrt{-\mathsf{g}})\, d^4x + \Lambda\int_M g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \\
&= \int_M (\sqrt{-\mathsf{g}}\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}R\sqrt{-\mathsf{g}}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\, d^4x + \Lambda\int_M g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \\
&= \int_M R_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x + \int_M g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta R_{\mu\nu}\, d^4x \\
&- \frac{1}{2}\int_M Rg_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x + \Lambda\int_M g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \\
&= \int_M (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x + \Lambda\int_M g_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \\
&+ \int_M g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x = 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Овде смо користили једначину (3.12).

Коначно, користећи Лему (3.2) из последње једначине добијамо варијацију израза S_0. □

3.2.2 Рачунске припреме за варијацију дејства S_1

Лема 3.4. *За било коју скаларну функцију h важи*

$$\int_M h\delta R\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x = \int_M (hR_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Box h - \nabla_\mu\nabla_\nu h)\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x. \tag{3.28}$$

Доказ. Користећи једначину (3.13), за било коју скаларну функцију h важи

$$\begin{aligned}&\int_M h\delta R\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x\\ &= \int_M (hR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + hg_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu} - h\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Други и трећи члан у овој формули могу се трансформисати на следећи начин:

$$\int_M hg_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x = \int_M g_{\mu\nu}\Box h\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x,$$
$$\int_M h\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x = \int_M \nabla_\mu\nabla_\nu h\; \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x.$$

За доказ прве од ове две једначине користимо Стоксову теорему и добијамо

$$\begin{aligned}\int_M hg_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x &= \int_M hg_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x\\ &= -\int_M \nabla_\alpha(hg_{\mu\nu})\nabla^\alpha\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x\\ &= \int_M \nabla^\alpha\nabla_\alpha(hg_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x\\ &= \int_M g_{\mu\nu}\nabla^\alpha\nabla_\alpha h\; \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x\\ &= \int_M g_{\mu\nu}\Box h\; \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x.\end{aligned}$$

Овде смо користили $\nabla_\gamma g_{\mu\nu} = 0$ и $\nabla^\alpha\nabla_\alpha = \nabla_\alpha\nabla^\alpha = \Box$ за добијање последњег интеграла.

Да бисмо добили другу једначину најпре уводимо вектор

$$N^\mu = h\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu h\delta g^{\mu\nu}.$$

Из горњег израза имамо

$$\begin{aligned}\nabla_\mu N^\mu &= \nabla_\mu(h\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu h\delta g^{\mu\nu})\\ &= \nabla_\mu h\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + h\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu h\ \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu h\nabla_\mu\delta g^{\mu\nu}\\ &= h\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu h\ \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}$$

Када интегралимо $\nabla_\mu N^\mu$ добијамо

$$\int_M \nabla_\mu N^\mu\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x = \int_{\partial M} N^\mu n_\mu d\partial M = 0,$$

где је n_μ јединични нормални вектор. Како је $N^\mu|_{\partial M} = 0$ закључујемо да је последњи интеграл једнак нули, што комплетира доказ. □

Лема 3.5. *Нека су θ и ψ скаларне функције такве да важи $\delta\psi|_{\partial M} = 0$. Тада имамо*

$$\begin{aligned}\int_M \theta\delta\Box\psi\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x &= \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\theta\ \partial_\beta\psi g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\ \sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x\\ &- \int_M \partial_\mu\theta\ \partial_\nu\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x + \int_M \Box\theta\ \delta\psi\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x\\ &+ \frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\theta\Box\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Доказ. Како су θ и ψ скаларне функције такве да важи $\delta\psi|_{\partial M} = 0$ имамо

$$\begin{aligned}&\int_M \theta\delta\Box\psi\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x = \int_M \theta\partial_\alpha\delta(\sqrt{-\mathsf{g}}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\psi)\ d^4x\\ &+ \int_M \theta\delta\left(\frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\right)\partial_\alpha(\sqrt{-\mathsf{g}}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\psi)\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x\\ &= \int_M \partial_\alpha(\theta\delta(\sqrt{-\mathsf{g}}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\psi))\ d^4x - \int_M \partial_\alpha\theta\ \delta(\sqrt{-\mathsf{g}}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\psi)\ d^4x\\ &+ \frac{1}{2}\int_M \theta g_{\mu\nu}\Box\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x.\end{aligned}$$

Није тешко приметити да важи $\int_M \partial_\alpha(\theta\delta(\sqrt{-\mathsf{g}}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\psi))\ d^4x = 0$. Из овог резултата следи

$$\begin{aligned}
&\int_M \theta\delta\Box\psi\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&= -\int_M g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\theta\;\partial_\beta\psi\delta(\sqrt{-\mathrm{g}})\; d^4x - \int_M \partial_\alpha\theta\;\partial_\beta\psi\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&- \int_M g^{\alpha\beta}\sqrt{-\mathrm{g}}\partial_\alpha\theta\;\partial_\beta\delta\psi\; d^4x + \frac{1}{2}\int_M \theta g_{\mu\nu}\Box\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&= \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\theta\;\partial_\beta\psi g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\;\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x - \int_M \partial_\mu\theta\;\partial_\nu\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&- \int_M \partial_\beta(g^{\alpha\beta}\sqrt{-\mathrm{g}}\partial_\alpha\theta\;\delta\psi)\; d^4x + \int_M \partial_\beta(g^{\alpha\beta}\sqrt{-\mathrm{g}}\partial_\alpha\theta)\;\delta\psi\; d^4x \\
&+ \frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\theta\Box\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&= \frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\theta\;\partial_\beta\psi g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\;\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x - \int_M \partial_\mu\theta\;\partial_\nu\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&+ \int_M \Box\theta\;\delta\psi\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x + \frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\theta\Box\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x.
\end{aligned}$$

На крају закључујемо

$$\begin{aligned}
\int_M \theta\delta\Box\psi\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x = &\frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\theta\;\partial_\beta\psi g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\;\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&- \int_M \partial_\mu\theta\;\partial_\nu\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x + \int_M \Box\theta\;\delta\psi\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&+ \frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\theta\Box\psi\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x.
\end{aligned}$$

□

3.2.3 Варијација дејства S_1

Сада, након ових рачунских припрема можемо одредити варијацију дејства S_1.

Лема 3.6. *Варијација дејства S_1 је*

$$\begin{aligned}
\delta S_1 = &-\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x + \int_M (R_{\mu\nu}\Phi - K_{\mu\nu}\Phi)\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\int_M \Big(g_{\mu\nu}\left(\partial^\alpha\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\alpha\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R) + \Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)\right) \\
&- 2\partial_\mu\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\nu\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\Big)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x,
\end{aligned}$$

где је $K_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box$, $\Phi = \mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + \mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R)$, и $'$ означава извод по R.

Доказ. Варијација дејства S_1 се може изразити на следећи начин

$$\begin{aligned}\delta S_1 = &\int_M \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta(\sqrt{-\mathsf{g}})\ d^4x \\ &+ \int_M \delta(\mathcal{H}(R))\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x \\ &+ \int_M \mathcal{H}(R)\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R))\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x.\end{aligned}$$

За прва два интеграла из последње једначине важи

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_M \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta(\sqrt{-\mathsf{g}})\ d^4x \\ &= -\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x, \\ I_2 &= \int_M \delta(\mathcal{H}(R))\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x = \int_M \mathcal{H}'(R)\delta R\ \mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x.\end{aligned}$$

Замењујући $h = \mathcal{H}'(R)\ \mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)$ у једначину (3.28) добијамо

$$I_2 = \int_M \Big(R_{\mu\nu}\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) - K_{\mu\nu}\big(\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\big)\Big)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x.$$

Трећи интеграл се може представити као линеарна комбинација следећих интеграла

$$J_n = \int_M \mathcal{H}(R)\delta(\Box^n\mathcal{G}(R))\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x.$$

Пошто је интеграл J_0 истог облика као и интеграл I_2 важи

$$J_0 = \int_M \Big(R_{\mu\nu}\mathcal{G}'(R)\mathcal{H}(R) - K_{\mu\nu}\big(\mathcal{G}'(R)\mathcal{H}(R)\big)\Big)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x.$$

За $n > 0$, можемо одредити J_n користећи (3.30).
У првом кораку узимамо $\theta = \mathcal{H}(R)$ и $\psi = \Box^{n-1}\mathcal{G}(R)$ и добијамо

$$\begin{aligned}J_n = &\frac{1}{2}\int_M g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\mathcal{H}(R)\ \partial_\beta\Box^{n-1}\mathcal{G}(R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\ \sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x \\ &- \int_M \partial_\mu\mathcal{H}(R)\ \partial_\nu\Box^{n-1}\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x + \int_M \Box\mathcal{H}(R)\ \delta\Box^{n-1}\mathcal{G}(R)\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x \\ &+ \frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\Box^n\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\ d^4x.\end{aligned}$$

У другом кораку узимамо $\theta = \Box\mathcal{H}(R)$ и $\psi = \Box^{n-2}\mathcal{G}(R)$ и добијамо трећи интеграл у овој формули, итд. Користећи (3.30) n пута добијамо

$$
\begin{aligned}
J_n = &\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\int_M g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\beta\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x\\
&-\sum_{l=0}^{n-1}\int_M \partial_\mu\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\nu\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x\\
&+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\int_M g_{\mu\nu}\Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x\\
&+\int_M \Big(R_{\mu\nu}\mathcal{G}'(R)\Box^n\mathcal{H}(R)-K_{\mu\nu}\big(\mathcal{G}'(R)\Box^n\mathcal{H}(R)\big)\Big)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x.
\end{aligned}
$$

Користећи једначину (3.28) добијамо последњи интеграл у горњој формули. Коначно, узимајући све претходне рачуне у обзир добијамо

$$
\begin{aligned}
\delta S_1 &= I_1 + I_2 + \sum_{n=0}^{\infty} f_n J_n\\
&= -\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x\\
&+\int_M (R_{\mu\nu}\Phi - K_{\mu\nu}\Phi)\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x\\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sum_{l=0}^{n-1}\int_M g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\beta\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x\\
&-\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sum_{l=0}^{n-1}\int_M \partial_\mu\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\nu\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x\\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sum_{l=0}^{n-1}\int_M g_{\mu\nu}\Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-\mathsf{g}}\; d^4x. \qquad \Box
\end{aligned}
$$

3.2.4 Варијација дејства S и једначине кретања

Теорема 3.2. *Варијација дејства* (3.1) *је једнака нули ако и само ако важи*

$$
\begin{aligned}
&\frac{G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}}{16\pi G} + C\Big(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (R_{\mu\nu}\Phi - K_{\mu\nu}\Phi)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sum_{l=0}^{n-1}\big(g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\beta\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\\
&-2\partial_\mu\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\nu\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R) + g_{\mu\nu}\Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)\big)\Big) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

где су $K_{\mu\nu}$ и Φ изрази дати у Леми (3.6).

Доказ. Како је $\delta S = \frac{1}{16\pi G}\delta S_0 + C\delta S_1$, на основу лема (3.3) и (3.6) одмах следи теорема. $\square$

Једначине (3.31) се зову једначине кретања за гравитационо поље задано дејством (3.1).

Напомена: Ако узмемо $C = 0$ дејство (3.1) постаје Ајнштајн-Хилбертово дејство

$$S = \int_M \frac{R - 2\Lambda}{16\pi G}\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x,$$

а једначине кретања (3.31) се своде на Ајнштајнове једначине кретања

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}.$$

Теорема 3.3. *Претпоставимо да многострукост* M *има FRW метрику. Тада систем* (3.31) *има две линеарно независне једначине:*

$$\begin{aligned}&\frac{4\Lambda - R}{16\pi G} + C\Big(- 2\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (R\Phi + 3\Box\Phi) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} \big(\partial_\mu \Box^l \mathcal{H}(R)\partial^\mu \Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R) + 2\Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)\big)\Big) = 0,\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}&\frac{G_{00} + \Lambda g_{00}}{16\pi G} + C\Big(- \frac{1}{2}g_{00}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (R_{00}\Phi - K_{00}\Phi) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} \big(g_{00}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\beta\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R) \\ &- 2\partial_0\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_0\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R) + g_{00}\Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)\big)\Big) = 0.\end{aligned} \tag{3.33}$$

Доказ. У случају FRW метрике имамо

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2a^2\sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Као што смо већ видели у Глави 2 користећи елементе метричког тензора добијамо да је Ричијев тензор следећег облика:

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{3\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ug_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ug_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ug_{33} \end{pmatrix}, \qquad u = \frac{a\ddot{a} + 2(\dot{a}^2 + k)}{a^2}.$$

Скаларна кривина је

$$R = \frac{6(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)}{a^2}.$$

Ајнштајнов тензор је

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{3(\dot{a}^2+k)}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -vg_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -vg_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -vg_{33} \end{pmatrix}, \qquad v = \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}.$$

Како скаларна кривина R зависи само од времена t из претходног рачуна лако се види да су једначине (3.31) за $\mu \neq \nu$ тривијално задовољене. У наставку показујемо да су једначине (3.31) са индексима 11, 22 и 33 линеарно зависне.

Ако погледамо једначине кретања (3.31) видимо да је потребно израчунати $K_{\mu\nu}\Phi$, где је

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box, \\ \Phi &= \mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + \mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R). \end{aligned}$$

Пошто Φ зависи само од времена t имамо

$$K_{\mu\nu}\Phi = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi = \partial^2_{\mu\nu}\Phi - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\nabla_\lambda\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi.$$

За $\mu = \nu \neq 0$ добијамо

$$\begin{aligned} K_{\mu\mu}\Phi &= \partial^2_{\mu\mu}\Phi - \Gamma^\lambda_{\mu\mu}\nabla_\lambda\Phi - g_{\mu\mu}\Box\Phi = -\Gamma^0_{\mu\mu}\dot{\Phi} - g_{\mu\mu}\Box\Phi \\ &= -g_{\mu\mu}H\dot{\Phi} - g_{\mu\mu}\Box\Phi. \end{aligned}$$

Такође, за $\mu = \nu \neq 0$ имамо

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Box^l \mathcal{H}(R) \partial_\nu \Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R) &= 0, \\ G_{\mu\mu} &= -vg_{\mu\mu}, \\ R_{\mu\mu} &= ug_{\mu\mu}, \end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned} v &= \frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}, \\ u &= \frac{a\ddot{a} + 2(\dot{a}^2 + k)}{a^2}. \end{aligned}$$

Сада, узевши у обзир претходне рачуне, за $\mu = \nu \neq 0$ једначина (3.31) постаје

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{-v+\Lambda}{16\pi G}+C\Big(-\frac{1}{2}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)+(u\Phi+H\dot{\Phi}+\Box\Phi)\\&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sum_{l=0}^{n-1}\big(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box^l\mathcal{H}(R)\partial_\beta\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\\&+\Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)\big)\Big)\Big)g_{\mu\mu}=0.\end{aligned}$$

Из последње једначине видимо да су 11, 22 и 33 једначине линеарно зависне, на основу чега следи да су једначине кретање (3.31) еквивалентне са поменутим системом једначина (траг једначином (3.32) и 00 једначином (3.33)). □

3.3 Закључак

У овој глави смо разматрали модел нелокалне гравитације без материје који је дат дејством облика (видети [39])

$$S=\int_M\Big(\frac{R-2\Lambda}{16\pi G}+C\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\Big)\sqrt{-\mathsf{g}}\;d^4x.$$

Извели смо једначине кретања за ово дејство. У многим научним радовима налазе се једначине кретања које су специјални случај наших једначина.

Једначине кретања за ове случајеве нелокалних модела су веома сложене. Испитивање једначина кретања и проналажење њихових решења је веома тежак задатак. У следећој глави анализирамо два нелокална модела и дајемо њихова космолошка решења.

Глава 4

Космолошка решења у моделима нелокалне модификације

У претходној глави смо разматрали класу модела нелокалне гравитације без материје дату следећим дејством

$$S = \int_M \Big(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + C\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) \Big) \sqrt{-\mathrm{g}}\; d^4x, \tag{4.1}$$

где је $\mathcal{F}(\Box) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$, $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ су диференцијабилне функције скаларне кривине R, Λ је космолошка константа и C је константа.

Варијацијом дејства (4.1) у односу на метрику $g_{\mu\nu}$ добили смо једначине кретања

$$\begin{aligned}
&\frac{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}}{16\pi G} + C\Big(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (R_{\mu\nu}\Phi - K_{\mu\nu}\Phi) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} \big(g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \Box^l \mathcal{H}(R) \partial_\beta \Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R) \\
&- 2\partial_\mu \Box^l \mathcal{H}(R)\partial_\nu \Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R) + g_{\mu\nu}\Box^l \mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)\big)\Big) = 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где су

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box, \\
\Phi &= \mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + \mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.1 Модели и њихова космолошка решења

У наставку ћемо разматрати два релативно једноставна нелокална модела облика (4.1):

1) $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = R$,
2) $\mathcal{H}(R) = R^{-1}$ и $\mathcal{G}(R) = R$.

Користимо Фридман-Робертсон-Вокерову (FRW) метрику

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

и испитујемо све три могућности за параметар кривине $k = 0, \pm 1$.

Већ смо видели раније да је у случају FRW метрике скаларна кривина једнака $R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$. Пошто скаларна кривина R зависи само од времена t за Даламберов оператор важи $\Box R = -\ddot{R} - 3H\dot{R}$, где је $H = \frac{\dot{a}}{a}$ Хаблов параметар. Генерално важи следећа лема

Лема 4.1. *У случају FRW метрике важи*

$$\Box h = -\ddot{h} - 3H\dot{h},$$

где је $h = h(t)$ било која функција која зависи само од времена t, а H је Хаблов параметар.

Доказ. Важи

$$\Box h = \frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\partial_\mu \sqrt{-\mathsf{g}} g^{\mu\nu}\partial_\nu h.$$

Пошто је у питању FRW метрика, чија је матрица дијагонална, последња једначина се своди на $\Box h = \frac{1}{\sqrt{-\mathsf{g}}}\partial_\mu \sqrt{-\mathsf{g}} g^{\mu\mu}\partial_\mu h$. Одавде следи

$$\Box h = \frac{1}{2\mathsf{g}}\frac{\partial \mathsf{g}}{\partial x^\mu} g^{\mu\mu}\partial_\mu h + \partial_\mu (g^{\mu\mu}\partial_\mu h). \tag{4.4}$$

Како функција $h = h(t)$ зависи само од времена t једначина (4.4) постаје

$$\Box h = -\frac{1}{2\mathsf{g}}\frac{\partial \mathsf{g}}{\partial t}\dot{h} - \ddot{h}. \tag{4.5}$$

Детерминанта метрике је једнака $\mathsf{g} = \det(g_{\mu\nu}) = \frac{-r^4 a^6 sin^2\theta}{1-kr^2}$. Сада одавде непосредним рачуном добијамо

$$\frac{1}{2\mathsf{g}}\frac{\partial \mathsf{g}}{\partial t} = 3\frac{\dot{a}}{a} = 3H. \tag{4.6}$$

Коначно, замењујући (4.6) у (4.5) добијамо $\Box h = -\ddot{h} - 3H\dot{h}$. $\Box$

4.2 Нелокални модел са чланом $R\mathcal{F}(\Box)R$

Модел нелокалне гравитације са чланом $R\mathcal{F}(\Box)R$ дат је следећим дејством

$$S = \int_M \Big(\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} + CR\mathcal{F}(\Box)R \Big) \sqrt{-\mathtt{g}}\, d^4x. \tag{4.7}$$

Модел (4.7) је предложен у [10], а његов даљи развој се може наћи у [9, 44, 46, 6, 8, 7, 28, 24, 25, 45]. Овај модел је атрактиван зато што помоћу њега налазимо космолошка решења која не садрже сингуларитет у почетном тренутку $t = 0$.

Заменом $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = R$ у једначину (4.2) добијамо једначине кретања за дејство (4.7)

$$\begin{aligned} &C\Big(2R_{\mu\nu}\mathcal{F}(\Box)R - 2(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)(\mathcal{F}(\Box)R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\mathcal{F}(\Box)R \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\big(g_{\mu\nu}\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box^l R\partial_\beta\Box^{n-1-l}R + \Box^l R\Box^{n-l}R\right) \\ &- 2\partial_\mu\Box^l R\partial_\nu\Box^{n-1-l}R\big)\Big) = \frac{-1}{16\pi G}(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

У случају FRW метрике само две једначине су линеарно независне, видети крај Главе (3). Практично је узети траг и 00 компоненту једначине (4.8). Траг и 00 једначина гласе

$$\begin{aligned} &6\Box(\mathcal{F}(\Box)R) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\left(\partial_\mu\Box^l R\partial^\mu\Box^{n-1-l}R + 2\Box^l R\Box^{n-l}R\right) \\ &= \frac{1}{16\pi GC}R - \frac{\Lambda}{4\pi GC}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} &C\Big(2R_{00}\mathcal{F}(\Box)R - 2(\nabla_0\nabla_0 - g_{00}\Box)(\mathcal{F}(\Box)R) - \frac{1}{2}g_{00}R\mathcal{F}(\Box)R \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\big(g_{00}\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Box^l R\partial_\beta\Box^{n-1-l}R + \Box^l R\Box^{n-l}R\right) \\ &- 2\partial_0\Box^l R\partial_0\Box^{n-1-l}R\big)\Big) = \frac{-1}{16\pi G}(G_{00} + \Lambda g_{00}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.2.1 Линеарни анзац и несингуларна космолошка решења са прескоком

За космолошко решење кажемо да је решење са прескоком ако је скалирајући фактор $a(t)$ дефинисан и за негативне вредности времена t и $a(0)$ је различито од нуле.

Прилично је тешко пронаћи решења једначина (4.9) и (4.10). У случају FRW равне метрике ($k = 0$) и користећи линеарни анзац $\Box R = rR + s$ пронађена су два несингуларна космолошка решења са прескоком за скалирајући фактор: $a(t) = a_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)$, видети [10, 9], и $a(t) = a_0 e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t^2}$, видети [46].

Да бисмо добили нека нова решења ми такође користимо анзац облика (видети [24])

$$\Box R = rR + s, \tag{4.11}$$

где су r и s реални параметри који ће касније бити фиксирани. Следећа лема садржи прве две последице овог анзаца.

Лема 4.2. *Важи:*

$$\Box^n R = r^n(R + \frac{s}{r}),\ n \geq 1, \qquad \mathcal{F}(\Box)R = \mathcal{F}(r)R + \frac{s}{r}(\mathcal{F}(r) - f_0). \tag{4.12}$$

Сада можемо потражити решење такво да скалирајући фактор $a(t)$ буде у облику линеарне комбинације од $e^{\lambda t}$ и $e^{-\lambda t}$, тј.

$$a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}), \tag{4.13}$$

где је $a_0 > 0$, док су $\lambda, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

Лема 4.3. *Ако је скалирајући фактор облика* (4.13) *тада су изрази за Хаблов параметар* $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$, *скаларну кривину* $R(t) = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)$ *и* $\Box R$ *следећи:*

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{\lambda(\sigma e^{\lambda t} - \tau e^{-\lambda t})}{\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}}, \\ R(t) &= \frac{6\left(2a_0^2\lambda^2\left(\sigma^2 e^{4t\lambda} + \tau^2\right) + ke^{2t\lambda}\right)}{a_0^2\left(\sigma e^{2t\lambda} + \tau\right)^2}, \\ \Box R &= -\frac{12\lambda^2 e^{2t\lambda}\left(4a_0^2\lambda^2\sigma\tau - k\right)}{a_0^2\left(\sigma e^{2t\lambda} + \tau\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Теорема 4.1. *Скалирајући фактор облика* (4.13) *је решење једначина кретања* (4.8) *у следећа три случаја:*

Случај 1.

$$\mathcal{F}\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad f_0 = -\frac{1}{128\pi G C\Lambda}. \tag{4.15}$$

Случај 2.

$$3k = 4a_0^2\Lambda\sigma\tau. \tag{4.16}$$

Случај 3.

$$\mathcal{F}\left(2\lambda^2\right) = \frac{1}{192\pi G C\Lambda} + \frac{2}{3}f_0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad k = -4a_0^2\Lambda\sigma\tau. \tag{4.17}$$

У сва три случаја важи $\lambda = \pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$.

Доказ. Последњу једначину из (4.14) можемо записати на следећи начин, тј. за $\Box R$ важи:

$$\Box R = 2\lambda^2 R - 24\lambda^4, \qquad r = 2\lambda^2, \qquad s = -24\lambda^4. \tag{4.18}$$

Одавде видимо да скаларна кривина R задовољава линеарни анзац (4.11). Замењујући параметре r и s из (4.18) у (4.12) добијамо

$$\begin{aligned} \Box^n R &= (2\lambda^2)^n (R - 12\lambda^2),\ n \geq 1, \\ \mathcal{F}(\Box) R &= \mathcal{F}(2\lambda^2) R - 12\lambda^2(\mathcal{F}(2\lambda^2) - f_0). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Користећи ово из једначина (4.9) и (4.10) добијамо

$$\begin{aligned} &36\lambda^2\mathcal{F}(2\lambda^2)(R - 12\lambda^2) + \mathcal{F}'(2\lambda^2)\left(4\lambda^2(R - 12\lambda^2)^2 - \dot{R}^2\right) \\ &- 24\lambda^2 f_0(R - 12\lambda^2) = \frac{R - 4\Lambda}{16\pi G C}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned} &(2R_{00} + \frac{1}{2}R)\left(\mathcal{F}(2\lambda^2)R - 12\lambda^2(\mathcal{F}(2\lambda^2) - f_0)\right) - \frac{1}{2}\mathcal{F}'(2\lambda^2)\left(\dot{R}^2 + 2\lambda^2(R - 12\lambda^2)^2\right) \\ &- 6\lambda^2(\mathcal{F}(2\lambda^2) - f_0)(R - 12\lambda^2) + 6H\mathcal{F}(2\lambda^2)\dot{R} = -\frac{1}{16\pi G C}(G_{00} - \Lambda). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Замењујући $a(t)$ из (4.13) у једначине (4.20) и (4.21) добијамо респективно следеће две једначине у облику полинома по $e^{2\lambda t}$:

$$\begin{aligned} &\frac{a_0^4\tau^6}{4\pi G}\left(3\lambda^2 - \Lambda\right) + 3a_0^2\tau^4 Q_1 e^{2\lambda t} + 6a_0^2\sigma\tau^3 Q_2 e^{4\lambda t} - 2\sigma\tau Q_3 e^{6\lambda t} + 6a_0^2\sigma^3\tau Q_2 e^{8\lambda t} \\ &+ 3a_0^2\sigma^4 Q_1 e^{10\lambda t} + \frac{a_0^4\sigma^6}{4\pi G}\left(3\lambda^2 - \Lambda\right) e^{12\lambda t} = 0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\tau^6 a_0^4}{8\pi G}\left(3\lambda^2 - \Lambda\right) + 3\tau^4 a_0^2 R_1 e^{2\lambda t} + 3\tau^2 R_2 e^{4\lambda t} + 2\sigma\tau R_3 e^{6\lambda t} + 3\sigma^2 R_2 e^{8\lambda t} \\ &+ 3\sigma^4 a_0^2 R_1 e^{10\lambda t} + \frac{\sigma^6 a_0^4}{8\pi G}\left(3\lambda^2 - \Lambda\right) e^{12\lambda t} = 0, \end{aligned} \tag{4.23}$$

где је

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= 72C\lambda^2 K\mathcal{F}(2\lambda^2) + a_0^2(-192Cf_0\lambda^4 + \frac{\lambda^2}{\pi G} - \frac{\Lambda}{2\pi G})\sigma\tau \\
&\quad + 48Cf_0k\lambda^2 + \frac{k}{8\pi G}, \\
Q_2 &= 144C\lambda^2 K\mathcal{F}(2\lambda^2) + a_0^2(-384Cf_0\lambda^4 + \frac{7\lambda^2}{8\pi G} - \frac{5\Lambda}{8\pi G})\sigma\tau \\
&\quad + 96Cf_0k\lambda^2 + \frac{k}{4\pi G}, \\
Q_3 &= -648Ca_0^2\lambda^2\sigma\tau K\mathcal{F}(2\lambda^2) + 288C\lambda^2K^2\mathcal{F}'(2\lambda^2) \\
&\quad - a_0^2k(432Cf_0\lambda^2 + \frac{9}{8\pi G})\sigma\tau + a_0^4(1728Cf_0\lambda^4 - \frac{3\lambda^2}{\pi G} + \frac{5\Lambda}{2\pi G})\sigma^2\tau^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_1 &= Q_1 - \frac{3\lambda^2 - \Lambda}{4\pi G}\sigma\tau a_0^2, \\
R_2 &= -12C\left(k - 12a_0^2\lambda^2\sigma\tau\right)K\mathcal{F}(2\lambda^2) - 72C\lambda^2K^2\mathcal{F}'(2\lambda^2) \\
&\quad + \frac{a_0^2k}{2\pi G}\left(384\pi GCf_0\lambda^2 + 1\right)\sigma\tau - \frac{a_0^4}{8\pi G}\left(6144\pi GCf_0\lambda^4 + \lambda^2 + 5\Lambda\right)\sigma^2\tau^2, \\
R_3 &= -36C\left(k - 6a_0^2\lambda^2\sigma\tau\right)K\mathcal{F}(2\lambda^2) + 72C\lambda^2K^2\mathcal{F}'(2\lambda^2) \\
&\quad + \frac{9a_0^2k}{8\pi G}\left(384\pi GCf_0\lambda^2 + 1\right)\sigma\tau - \frac{a_0^4}{4\pi G}\left(6912\pi GCf_0\lambda^4 + 3\lambda^2 + 5\Lambda\right)\sigma^2\tau^2,
\end{aligned}
$$

и $K = 4a_0^2\lambda^2\sigma\tau - k$.

Једначине (4.22) и (4.23) су задовољене када је $\lambda = \pm\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}$, као и $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ и $R_1 = R_2 = R_3 = 0$. Приметимо да се овај приступ за одређивање услова под којима постоји решење разликује од приступа који се користи у [9] и [46].

Одговарајућа решења се могу раздвојити на следећа три случаја:

Случај 1.

$$\mathcal{F}\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad f_0 = -\frac{1}{128\pi GC\Lambda}.$$

Случај 2.

$$3k = 4a_0^2\Lambda\sigma\tau.$$

Случај 3.

$$\mathcal{F}\left(2\lambda^2\right) = \frac{1}{192\pi GC\Lambda} + \frac{2}{3}f_0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right) = 0, \quad k = -4a_0^2\Lambda\sigma\tau.$$

□

У првом случају из Теореме 4.1 имамо фамилију решења за произвољно σ, τ и a_0

$$a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}),$$

при чему функција $\mathcal{F}$ задовољава услове дате у (4.15) и $k = 0, \pm 1$. Према томе, та фамилија решења такође укључује решење $a(t) = a_0 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t\right)$, које је пронађено у [10] са додатком радијације [9] у дејству.

Други случај даје фамилију решења за произвољно $\sigma \neq 0$ и a_0

$$a(t) = a_0 \left(\sigma e^{\lambda t} + \frac{3k}{4a_0^2 \Lambda \sigma} e^{-\lambda t}\right)$$

која важе за произвољну аналитичку функцију $\mathcal{F}$.

Трећи случај даје другу фамилију решења

$$a(t) = a_0 \left(\sigma e^{\lambda t} - \frac{k}{4a_0^2 \Lambda \sigma} e^{-\lambda t}\right),$$

при чему функција $\mathcal{F}$ мора задовољити услове дате у (4.17).

Приметимо да се за $k = 0$ једначина (4.16) и трећа једначина у (4.17) поклапају, σ или τ морају бити једнаки нули, тако да имамо два решења

$$a_1(t) = a_0 e^{\lambda t}, \qquad a_2(t) = a_0 e^{-\lambda t},$$

где се σ апсорбује у a_0. Ово су де Ситерова решења, видети [6].

4.3 Нелокални модел са чланом $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$

Овај модел је недавно уведен [25]. Дат је следећим дејством

$$S = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + C R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R\right)\sqrt{-\mathrm{g}}\, d^4x. \tag{4.24}$$

Ово дејство се може записати у следећем облику

$$S = \int_M \left(\frac{R}{16\pi G} + R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R\right)\sqrt{-\mathrm{g}}\, d^4x, \tag{4.25}$$

где је $\mathcal{F}(\Box) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$. Када узмемо $f_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$, тада f_0 преузима улогу космолошке константе.

Нелокални члан $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$ је инваријантан у односу на трансформацију $R \to CR$. То значи да у случају FRW метрике утицај нелокалности зависи само од начина на који скаларна кривина R зависи од времена t, а не зависи од интензитета R.

Замењујући $\mathcal{H}(R) = R^{-1}$ и $\mathcal{G}(R) = R$, као и $\Lambda = 0$, $C = 1$ у једначину (4.2) добијамо једначине кретања за дејство (4.25)

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu}\Phi - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\Phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} \Big(g_{\mu\nu}\left(\partial_\alpha\Box^l(R^{-1})\partial^\alpha\Box^{n-1-l}R + \Box^l(R^{-1})\Box^{n-l}R\right) \\ &- 2\partial_\mu\Box^l(R^{-1})\partial_\nu\Box^{n-1-l}R\Big) = -\frac{G_{\mu\nu}}{16\pi G}, \quad \Phi = \mathcal{F}(\Box)R^{-1} - R^{-2}\mathcal{F}(\Box)R. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Приметимо да оператор $\Box$ не делује само на R већ и на R^{-1}.

Траг једначине (4.26) је

$$\begin{aligned} &R\Phi + 3\Box\Phi + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} \Big(\partial_\alpha\Box^l(R^{-1})\partial^\alpha\Box^{n-1-l}R + 2\Box^l(R^{-1})\Box^{n-l}R\Big) \\ &- 2R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R = \frac{R}{16\pi G}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

00-компонента једначине (4.26) је

$$\begin{aligned} &R_{00}\Phi - (\nabla_0\nabla_0 - g_{00}\Box)\Phi - \frac{1}{2}g_{00}R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} \Big(g_{00}\left(\partial_\alpha\Box^l(R^{-1})\partial^\alpha\Box^{n-1-l}R + \Box^l(R^{-1})\Box^{n-l}R\right) \\ &- 2\partial_0\Box^l(R^{-1})\partial_0\Box^{n-1-l}R\Big) = -\frac{G_{00}}{16\pi G}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Претходне две једначине (траг и 00 компонента) су еквивалентне са једначином (4.26) у случају FRW метрике. Оне су подесније за даље испитивање од једначине (4.26).

4.3.1 Космолошка решења са константном скаларном кривином

У наставку се бавимо космолошким решењима са константном скаларном кривином (видети [29, 26]).

Теорема 4.2. *Нека је $R = R_0 =$ константа. Тада решење једначина кретања (4.26) има облик*

1. *За* $R_0 > 0$, $a(t) = \sqrt{\frac{6k}{R_0} + \sigma e^{\sqrt{\frac{R_0}{3}}t} + \tau e^{-\sqrt{\frac{R_0}{3}}t}}$, *при чему важи* $9k^2 = R_0^2\sigma\tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

2. *За* $R_0 < 0$, $a(t) = \sqrt{\frac{6k}{R_0} + \sigma\cos\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t + \tau\sin\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t}$, *при чему важи* $36k^2 = R_0^2(\sigma^2 + \tau^2)$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$.

Доказ. Пошто је $R = R_0$ добијамо

$$6\Big(\frac{\ddot{a}}{a} + \big(\frac{\dot{a}}{a}\big)^2 + \frac{k}{a^2}\Big) = R_0. \tag{4.29}$$

Сменом промењиве $b(t) = a^2(t)$ добијамо линеарну диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима

$$3\ddot{b} - R_0 b = -6k. \tag{4.30}$$

У зависности од знака од R_0 добијамо следећа решења једначине (4.30) за $b(t)$

$$\begin{aligned} R_0 > 0, \quad b(t) &= \frac{6k}{R_0} + \sigma e^{\sqrt{\frac{R_0}{3}}t} + \tau e^{-\sqrt{\frac{R_0}{3}}t}, \\ R_0 < 0, \quad b(t) &= \frac{6k}{R_0} + \sigma\cos\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t + \tau\sin\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t, \end{aligned} \tag{4.31}$$

где су σ и τ неки константни коефицијенти.

Када заменимо $R = R_0 =$ константа у једначине (4.27) и (4.28) добијамо следећи систем

$$-2f_0 = \frac{R_0}{16\pi G}, \qquad \frac{1}{2}f_0 = -\frac{G_{00}}{16\pi G}.$$

Последњи систем једначина има решење ако и само ако важи

$$R_0 + 4R_{00} = 0. \tag{4.32}$$

Приметимо да R_{00} можемо изразити преко функције $b(t)$

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a} = \frac{3((\dot{b})^2 - 2b\ddot{b})}{4b^2}.$$

Једначина (4.32) даје следеће услове за параметре σ и τ:

$$\begin{aligned} R_0 > 0, &\qquad 9k^2 = R_0^2\sigma\tau, \\ R_0 < 0, &\qquad 36k^2 = R_0^2(\sigma^2 + \tau^2). \quad \square \end{aligned} \tag{4.33}$$

Решења дата у (4.31) заједно са условима (4.33) ограничавају могућности за параметар k.

Случај 1: $R_0 > 0$

Теорема 4.3. *Ако је* $R_0 > 0$ *тада*

1. *за* $k = 0$ *имамо решење експоненцијалног облика,*
2. *за* $k = +1$ *имамо решење* $a(t) = \sqrt{\frac{12}{R_0}} \operatorname{ch} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}} t + \varphi\right)$,
3. *за* $k = -1$ *имамо решење* $a(t) = \sqrt{\frac{12}{R_0}} \left|\operatorname{sh} \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}} t + \varphi\right)\right|$,

где је $\sigma + \tau = \frac{6}{R_0} \operatorname{ch} \varphi$ *и* $\sigma - \tau = \frac{6}{R_0} \operatorname{sh} \varphi$.

Доказ. Нека је $R_0 > 0$. Ако је $k = 0$ тада из $9k^2 = R_0^2 \sigma\tau$ следи да је барем један или σ или τ једнако нули. Према томе $a(t)$ може бити експоненцијалног облика или је $a(t) = 0$. Ако узмемо $k = +1$ можемо пронаћи φ такво да је $\sigma + \tau = \frac{6}{R_0} \operatorname{ch} \varphi$ и $\sigma - \tau = \frac{6}{R_0} \operatorname{sh} \varphi$. Штавише, добијамо

$$
\begin{aligned}
b(t) &= \frac{12}{R_0} \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{R_0}{3}} t + \varphi), \\
a(t) &= \sqrt{\frac{12}{R_0}} \operatorname{ch} \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{R_0}{3}} t + \varphi).
\end{aligned}
$$

На крају, за $k = -1$ можемо трансформисати $b(t)$ и $a(t)$ на следећи начин

$$
\begin{aligned}
b(t) &= \frac{12}{R_0} \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{R_0}{3}} t + \varphi), \\
a(t) &= \sqrt{\frac{12}{R_0}} |\operatorname{sh} \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{R_0}{3}} t + \varphi)|. \quad \square
\end{aligned}
$$

Случај 1.1: $R = 12\lambda^2$

Разматрајмо сада скалирајући фактор облика

$$
a(t) = a_0(\sigma_1 e^{\lambda t} + \tau_1 e^{-\lambda t}). \tag{4.34}
$$

У том случају изрази за Хаблов параметар и скаларну кривину гласе:

$$
\begin{aligned}
H(t) &= \frac{\lambda(e^{2\lambda t}\sigma_1 - \tau_1)}{e^{2\lambda t}\sigma_1 + \tau_1}, \\
R(t) &= \frac{6(e^{2\lambda t} k + 2\lambda^2 (e^{4\lambda t}\sigma_1^2 + \tau_1^2) a_0^2)}{(e^{2\lambda t}\sigma_1 + \tau_1)^2 a_0^2}.
\end{aligned}
$$

Видимо да они зависе од времена t.

Да би важило $R =$ константа морамо задовољити услов

$$k = 4\lambda^2 a_0^2 \sigma_1 \tau_1. \tag{4.35}$$

Из последњег услова добијамо $R = 12\lambda^2$.

Замењујући $R = 12\lambda^2$ у једначине кретања (4.27) и (4.28) добијамо

$$f_0 = -\frac{3\lambda^2}{8\pi G}, \quad f_i \in \mathbb{R}, \quad i \geq 1.$$

Специјално, ако узмемо $\sigma_1 = \tau_1 = \frac{1}{2}$ скалирајући фактор (4.34) постаје

$$a(t) = a_0 \operatorname{ch}(\lambda t).$$

У овом случају из услова (4.35) видимо да је једини нетривијални случај када је k једнако 1. Из овог следи $a_0 = \frac{1}{\lambda}$.

Ако узмемо $\sigma_1 = 0$ или $\tau_1 = 0$ скалирајући фактор (4.34) постаје

$$a(t) = a_0 e^{\lambda t}. \tag{4.36}$$

Из услова (4.35) видимо да у овом случају k мора бити једнако 0.
Сада, нека је $\sigma = a_0^2 \sigma_1^2$, $\tau = a_0^2 \tau_1^2$, $R_0 = 12\lambda^2$ и $k = 4\lambda^2 a_0^2 \sigma_1 \tau_1$.

Замењујући ово у прву једначину из (4.31) добијамо

$$b(t) = a_0^2(\sigma_1 e^{\lambda t} + \tau_1 e^{-\lambda t})^2, \quad a(t) = a_0(\sigma_1 e^{\lambda t} + \tau_1 e^{-\lambda t}),$$

и такође видимо да је задовољен први услов из (4.33).

Случај 2: $R_0 < 0$

Теорема 4.4. *Ако је $R_0 < 0$ тада за $k = -1$ имамо решење*

$$a(t) = \sqrt{\frac{-12}{R_0}} \left| \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}} t - \varphi \right) \right|,$$

где је $\sigma = \frac{-6}{R_0} \cos\varphi$ и $\tau = \frac{-6}{R_0} \sin\varphi$.

Доказ. За $k = -1$ можемо пронаћи φ такво да је $\sigma = \frac{-6}{R_0} \cos\varphi$ и $\tau = \frac{-6}{R_0} \sin\varphi$ и записати $b(t)$ и $a(t)$ на следећи начин

$$b(t) = \frac{-12}{R_0}\cos^2\frac{1}{2}(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi),$$
$$a(t) = \sqrt{\frac{-12}{R_0}}|\cos\frac{1}{2}(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi)|.$$

Када је $k = 0$ тада је $\sigma = \tau = 0$, а тиме и $b(t) = 0$.

У последњем случају $k = +1$, на исти начин као и за $k = -1$, можемо трансформисати $b(t)$

$$b(t) = \frac{12}{R_0}\sin^2\frac{1}{2}(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi).$$

Приметимо да $b(t)$ није позитивно, тако да за $k = +1$ не добијамо решења. □

Случај 3: $R_0 = 0$

Случај $R_0 = 0$ можемо разматрати као гранични случај $R_0 \to 0$ у оба случаја $R_0 < 0$ и $R_0 > 0$.

Теорема 4.5. *Када $R_0 \to 0$ добија се решење*

$$k = 0, \quad a(t) = \textit{константа} > 0.$$

Дакле, у овом случају имамо решење Минковског.

Доказ. За $R_0 < 0$ имамо услов $36k^2 = R_0^2(\sigma^2 + \tau^2)$ из (4.33). Из овог услова, $R_0 \to 0$ имплицира $k = 0$ и произвољне вредности за константе σ и τ. Исти закључак се добија када је $R_0 > 0$ са условом $9k^2 = R_0^2\sigma\tau$ из (4.33). У оба ова случаја постоји решење Минковског при чему је $b(t) =$ константа > 0, а онда је и $a(t) =$ константа > 0, видети (4.31). □

Приметимо да се простор Минковског може такође добити из случаја $R = 12\lambda^2$. Наиме, решење (4.36) задовољава $H = \lambda$. Када пустимо да $\lambda \to 0$ у (4.36) добијамо простор Минковског као решење за

$$f_0 = 0, \quad f_i \in \mathbb{R}, \quad i \geq 1.$$

4.3.2 Нека космолошка решења степеног облика

У наставку решавамо једначине кретања (4.27) и (4.28) за космолошки скалирајући фактор $a(t)$ и одговарајуће R (видети [27, 40]):

$$a(t) = a_0|t - t_0|^\alpha, \tag{4.37}$$

$$R(t) = 6\big(\alpha(2\alpha-1)(t-t_0)^{-2} + \frac{k}{a_0^2}(t-t_0)^{-2\alpha}\big). \tag{4.38}$$

Случај $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Теорема 4.6. *За* $k = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ *и* $\frac{3\alpha-1}{2} \in \mathbb{N}$ *скалирајући фактор облика* $a = a_0|t-t_0|^\alpha$ *је решење једначина кретања* (4.26) *ако важи*

$$\begin{aligned} &f_0 = 0,\ f_1 = -\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{32\pi G(3\alpha-2)},\\ &f_n = 0 \quad \textit{за} \quad 2 \le n \le \frac{3\alpha-1}{2},\\ &f_n \in \mathbb{R} \quad \textit{за} \quad n > \frac{3\alpha-1}{2}. \end{aligned}$$

Доказ. У овом случају, имамо следећу зависност од параметра α :

$$\begin{aligned} a &= a_0|t-t_0|^\alpha, & H &= \alpha(t-t_0)^{-1},\\ R &= r(t-t_0)^{-2}, & r &= 6\alpha(2\alpha-1),\\ R_{00} &= 3\alpha(1-\alpha)(t-t_0)^{-2}, & G_{00} &= 3\alpha^2(t-t_0)^{-2}. \end{aligned}$$

Сада изрази $\Box^n R$ и $\Box^n R^{-1}$ постају

$$\begin{aligned} \Box^n R &= B(n,1)(t-t_0)^{-2n-2}, \quad \Box^n R^{-1} = B(n,-1)(t-t_0)^{2-2n},\\ B(n,1) &= r(-2)^n n! \prod_{l=1}^{n}(1-3\alpha+2l),\ n \ge 1, \quad B(0,1) = r,\\ B(n,-1) &= (r)^{-1}2^n \prod_{l=1}^{n}(2-l)(-3-3\alpha+2l),\ n \ge 1, \quad B(0,-1) = r^{-1}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Приметимо да важи $B(1,-1) = -2(3\alpha+1)r^{-1}$ и $B(n,-1) = 0$ ако је $n \ge 2$. Такође, добијамо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Box)R &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, B(n,1)\,(t-t_0)^{-2n-2},\\ \mathcal{F}(\Box)R^{-1} &= f_0\, B(0,-1)\,(t-t_0)^2 + f_1\, B(1,-1). \end{aligned}$$

Замењујући ове једначине у траг и 00 компоненту једначине (4.26) добијамо

$$\begin{aligned} & r^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_n B(n,1)\left(-3r+6(1-n)(1-2n+3\alpha)\right)(t-t_0)^{-2n} \\ & + r\sum_{n=0}^{1} f_n\left(rB(n,-1)+3B(n+1,-1)\right)(t-t_0)^{-2n} \\ & + 2r\sum_{n=1}^{\infty} f_n\gamma_n(t-t_0)^{-2n} = \frac{r^2}{16\pi G}(t-t_0)^{-2}, \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} f_n r^{-1} B(n,1)\left(\frac{r}{2}-A_n\right)(t-t_0)^{-2n} + \sum_{n=0}^{1} f_n r B(n,-1)\,A_n\,(t-t_0)^{-2n} \\ & + \frac{r}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\delta_n(t-t_0)^{-2n} = \frac{-r^2}{32\pi G}\frac{\alpha}{2\alpha-1}(t-t_0)^{-2}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

где је

$$\gamma_n = \sum_{l=0}^{n-1} B(l,-1)(B(n-l,1)+2(1-l)(n-l)B(n-l-1,1)), \tag{4.42}$$

$$\delta_n = \sum_{l=0}^{n-1} B(l,-1)(-B(n-l,1)+4(1-l)(n-l)B(n-l-1,1)), \tag{4.43}$$

$$A_n = 6\alpha(1-n) - r\frac{\alpha-1}{2(2\alpha-1)} = \frac{r}{2}\,\frac{3-2n-\alpha}{2\alpha-1}. \tag{4.44}$$

Једначине (4.40) и (4.41) се могу разложити у систем парова једначина у односу на сваки коефицијент f_n. У случају $n > 1$, имамо следеће парове:

$$\begin{aligned} & f_n\big(B(n,1)\left(-3r+6(1-n)(1-2n+3\alpha)\right)+2r^2\gamma_n\big)=0, \\ & f_n\left(B(n,1)\left(\frac{r}{2}-A_n\right)+\frac{r^2}{2}\delta_n\right)=0. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Ако је $\frac{3\alpha-1}{2}$ природан број добијамо:

$$\begin{aligned} & B(n,1) = r4^n n!\frac{(\frac{3}{2}(\alpha-1))!}{(\frac{3}{2}(\alpha-1)-n)!}, \quad n < \frac{3\alpha-1}{2}, \\ & B(n,1) = 0, \quad n \geq \frac{3\alpha-1}{2}, \end{aligned}$$

$$\gamma_n = 2B(0,-1)B(n-1,1)(3n\alpha - 2n^2 - 3\alpha - 1), \quad n \leq \frac{3\alpha - 1}{2},$$
$$\delta_n = 2B(0,-1)B(n-1,1)(2n^2 + 3n + 3\alpha - 3\alpha n + 1), \quad n \leq \frac{3\alpha - 1}{2},$$
$$\gamma_n = \delta_n = 0, \quad n > \frac{3\alpha - 1}{2}.$$

Ако је $n > \frac{3\alpha-1}{2}$, онда је $B(n,1) = \gamma_n = \delta_n = 0$. Тада је систем тривијално задовољен за произвољне вредности коефицијената f_n. Са друге стране, за $2 \leq n \leq \frac{3\alpha-1}{2}$ систем има само тривијално решење $f_n = 0$. За $n = 0$ горе поменути пар једначина постаје

$$f_0\big(-2r + 6(1+3\alpha) + 3rB(1,-1)\big) = 0, \quad f_0 = 0 \tag{4.46}$$

и његово решење је $f_0 = 0$. Још нам је остао случај $n = 1$ који се своди на следећи систем

$$\begin{aligned} &f_1\big(-3r^{-1}B(1,1) + rB(1,-1) + 2\gamma_1\big) = \frac{r}{16\pi G}, \\ &f_1\Big(A_1(rB(1,-1) - r^{-1}B(1,1)) + \frac{1}{2}(B(1,1) + r\delta_1)\Big) = \frac{-r^2}{32\pi G}\,\frac{\alpha}{2\alpha - 1}, \end{aligned} \tag{4.47}$$

чије је решење $f_1 = -\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{32\pi G(3\alpha-2)}$. □

Приметимо да $f_1 \to \infty$ када $\alpha \to \frac{2}{3}$, према томе ово решење не може имитирати васиону у којој доминира тамна материја.

Случај $k = 0,\ \alpha \to 0$ (простор Минковског)

Теорема 4.7. *За $k = 0$ и када $\alpha \to 0$ једначине кретања* (4.26) *су задовољене ако важи*

$$f_0, f_1 \in \mathbb{R}, \quad f_i = 0,\ i \geq 2.$$

Доказ. Замењујући (4.39) и (4.42) у траг једначину (4.40) добијамо

$$\begin{aligned}
&f_0(-3r+6(1+3\alpha))\\
&+\sum_{n=1}^{\infty} f_n(-2)^n n!\prod_{l=1}^{n}(1-3\alpha+2l)\left(6(1-n)(1-2n+3\alpha)-3r\right)(t-t_0)^{-2n}\\
&+r\Big(f_0(1-6(3\alpha+1)r^{-1})+f_1(-6\alpha-2)(t-t_0)^{-2}\Big)\\
&+2f_1(-2r(3-3\alpha)+2r)(t-t_0)^{-2}\\
&+2r\sum_{n=2}^{\infty} f_n(-2)^n(n-1)!\prod_{l=1}^{n-1}(1-3\alpha+2l)\left(-3n\alpha+2n^2+1+3\alpha\right)(t-t_0)^{-2n}\\
&=\frac{r^2}{16\pi G}(t-t_0)^{-2},
\end{aligned} \tag{4.48}$$

где је $r=6\alpha(2\alpha-1)$.

Сада, када $\alpha\to 0$ из последње једначине добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(-1)^n(2n+1)!(1-n)(1-2n)(t-t_0)^{-2n}=0.$$

Из овог закључујемо

$$f_0,f_1\in\mathbb{R},\quad f_i=0,\ i\geq 2.$$

Замењујући $f_i=0,\ i\geq 2$ у једначину (4.41) добијамо следећу једначину:

$$\begin{aligned}
&f_0(3\alpha(3\alpha-4))-6f_1(1-\alpha)\frac{6\alpha(2\alpha-1)}{2}(1-\frac{1-\alpha}{2\alpha-1})(t-t_0)^{-2}\\
&+f_0\frac{6\alpha(2\alpha-1)}{2}\frac{3-\alpha}{2\alpha-1}+6f_1\alpha(-1-3\alpha)(1-\alpha)(t-t_0)^{-2}\\
&+f_1(6\alpha(2\alpha-1)(3-3\alpha)+12\alpha(2\alpha-1))(t-t_0)^{-2}\\
&=\frac{-(6\alpha(2\alpha-1))^2}{32\pi G}\frac{\alpha}{2\alpha-1}(t-t_0)^{-2}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Када $\alpha\to 0$ видимо да је последња једначина такође задовољена за било које $f_0,f_1\in\mathbb{R}$. □

Ово изгледа као решење Минковског, али пошто су сви $f_n=0, n\geq 2$ овај модел није нелокални модел гравитације (4.25). Одавде следи да горња космолошка решења степеног облика немају простор Минковског као своју позадину.

Напомена: За добијање простора Минковског ($k=0$, $a(t)=a_0=$ константа) за нелокални модел гравитације (4.25) можемо кренути од де Ситеровог решења

$a(t) = a_0 e^{\lambda t}$ и пустити да $\lambda \to 0$. Није тешко видети да су једначине кретања (4.27) и (4.28) задовољене за $a(t) = a_0 e^{\lambda t}$ при чему је $R = 12\lambda^2$ и $f_0 = -\frac{3}{8\pi G}\lambda^2$. Тада $a(t) \to a_0$, $\quad R \to 0$ и $f_0 \to 0$ када $\lambda \to 0$, и сви $f_i,\ i \geq 1$ су произвољне константе. То значи да модел нелокалне гравитације (4.25) у свом општем облику садржи де Ситерову васиону, која за своју позадину има простор Минковског.

Случај $k = 0,\ \alpha \to \frac{1}{2}$

Теорема 4.8. *За* $k = 0$ *и када* $\alpha \to \frac{1}{2}$ *једначине кретања* (4.26) *су задовољене ако важи*

$$f_0 \in \mathbb{R}, \quad f_i = 0,\ i \geq 1.$$

Доказ. Нека $\alpha \to \frac{1}{2}$. Слично као у претходном случају, из (4.48) добијамо једначину

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n (-2)^n n! \prod_{l=1}^{n} (-\frac{1}{2} + 2l)(1-n)(\frac{5}{2} - 2n)(t - t_0)^{-2n} = 0.$$

Одавде следи

$$f_0, f_1 \in \mathbb{R}, \quad f_i = 0,\ i \geq 2.$$

Користећи $f_i = 0,\ i \geq 2$, из једначине (4.49) добијамо

$$\frac{3}{2} f_1 (t - t_0)^{-2} = 0.$$

Одговарајуће решење је

$$f_0 \in \mathbb{R}, \quad f_i = 0,\ i \geq 1. \qquad \square$$

Случај $k \neq 0,\ \alpha = 1$

Нека је $k \neq 0$. Са циљем да поједноставимо израз (4.38) имамо три могућности: $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 1$. Прве две могућности не дају решења која задовољавају једначине кретања. У наставку анализирамо случај $\alpha = 1$.

Теорема 4.9. *За* $k \neq 0$ *скалирајући фактор облика* $a = a_0 |t - t_0|$ *је решење једначина кретања* (4.26) *ако важи*

$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{-s}{64\pi G}, \quad f_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2,$$

где је $s = 6(1+\frac{k}{a_0^2})$.

Доказ. За $\alpha = 1$ добијамо

$$
\begin{gathered}
a = a_0|t-t_0|, \quad H = (t-t_0)^{-1}, \quad R = s(t-t_0)^{-2},\ s = 6(1+\frac{k}{a_0^2}), \\
R_{00} = 0, \quad \Box R = 0, \quad \Box^n R^{-1} = D(n,-1)(t-t_0)^{2-2n}, \\
D(0,-1) = s^{-1}, \quad D(1,-1) = -8s^{-1}, \quad D(n,-1) = 0,\ n \geq 2,
\end{gathered}
$$

где је $a_0 = c = 1$. Како ми користимо природни систем јединица, брзина светлости је $c = 1$. За $k = -1$, важи $s = R = 0$ и космолошко решење $a = |t-t_0|$ имитира Милнеов простор, који не представља реалистичан космолошки модел, али је интересантан као чисто кинематички модел.

Користећи горње изразе, траг и 00 једначина се своде на

$$
\begin{aligned}
&3f_0 + \sum_{n=0}^{1} f_n s D(n,-1)(t-t_0)^{-2n} + 4f_1(t-t_0)^{-2} = \frac{s}{16\pi G}(t-t_0)^{-2}, \\
&-6f_0 s^{-1} + \frac{1}{2}f_0 + 6\sum_{n=0}^{1} f_n D(n,-1)(1-n)(t-t_0)^{-2n} + 2f_1(t-t_0)^{-2} \\
&= -\frac{s}{32\pi G}(t-t_0)^{-2}.
\end{aligned} \tag{4.50}
$$

Овај систем даје услове за f_0 и f_1 :

$$
\begin{aligned}
-2f_0 - 4f_1(t-t_0)^{-2} &= \frac{s}{16\pi G}(t-t_0)^{-2}, \\
\frac{1}{2}f_0 + 2f_1(t-t_0)^{-2} &= -\frac{s}{32\pi G}(t-t_0)^{-2}.
\end{aligned}
$$

Одговарајуће решење је

$$
f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{-s}{64\pi G}, \quad f_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2. \qquad \Box
$$

Пример: Као пример узмимо

$$
\mathcal{F}(\Box) = -\frac{\Lambda}{8\pi G} + Ce^{-\beta\Box} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} + C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n}{n!}\Box^n.
$$

Према томе, коефицијенти f_n су дати са

$$
f_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi G} + C, \quad f_n = C\frac{(-\beta)^n}{n!},\ n \geq 1.
$$

Да бисмо добили скалирајући фактор $a(t)$ степеног облика (4.37), морамо узети $f_0 = 0$ и $f_1 = -\frac{3}{32\pi G}(1+k)$. Дакле, имамо

$$C = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad \beta = \frac{3}{4\Lambda}(1+k), \tag{4.51}$$

$$\mathcal{F}(\Box) = \frac{\Lambda}{8\pi G}\left(e^{-\frac{3}{4\Lambda}(1+k)\Box} - 1\right), \tag{4.52}$$

где је $k = \pm 1, 0$. Приметимо да једначина (4.52) важи такође за $k = 0$. За $k = -1$, имамо $\mathcal{F}(\Box) = 0$ и $R = 0$, па постоји Милнеово решење $a = |t - t_0|$.

Напомена: Приметимо да сва решења степеног облика која смо представили $a(t) = a_0|t - t_0|^\alpha$ имају скаларну кривину једнаку $R(t) = 6\big(\alpha(2\alpha-1)(t-t_0)^{-2} + \frac{k}{a_0^2}(t-t_0)^{-2\alpha}\big)$ (4.38), која задовољава релацију $\Box R = qR^2$, где параметар q зависи од α. Ова релација $\Box R = qR^2$ је коришћена у [25] као квадратни анзац помоћу кога се решавају једначине кретања. За неке примере анзаца видети [22, 28].

Закључак

У овом раду смо извели једначине кретања за класу нелокалних модела која је дата следећим дејством

$$S = \int_M \Big(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + C\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\Big)\sqrt{-\mathsf{g}}\, d^4x.$$

Једначине кретања за ове случајеве нелокалних модела су веома сложене. Испитивање једначина кретања и проналажење њихових решења је веома тежак задатак.

Разматрали смо два модела нелокалне модификације опште теорије релативности: модел са нелокалним чланом облика $R\mathcal{F}(\Box)R$ и модел са нелокалним чланом облика $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$.

Први модел је модел нелокалне гравитације са космолошком константом Λ и без материје. Користећи анзац $\Box R = rR + s$ пронашли смо три типа несингуларних решења са прескоком за космолошки скалирајући фактор облика $a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t})$. Приметимо да сва добијена решења задовољавају услов $\ddot{a}(t) = \lambda^2 a(t) > 0$, што је у сагласности са убрзаним ширењем васионе. Решења постоје за све три вредности константе $k = 0, \pm 1$.

Презентовали смо космолошка решења са константном скаларном кривином за модел са нелокалним чланом облика $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$. У овом моделу нелокални члан $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$ је инваријантан у односу на трансформацију $R \to CR$, где је C константа различита од нуле. Као резултат ове инваријантности, решења нису осетљива на чланове који садрже $\Box$. Према томе у нашим решењима f_0 има улогу космолошке константе, тј. $f_0 = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$, а f_i, $i \geq 1$, су произвољне константе. Када је $R = R_0 < 0$ постоји нетривијално решење $a(t) = \sqrt{\frac{-12}{R_0}} \left|\cos \frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi\right)\right|$ за $k = -1$. У случају $R = R_0 > 0$ постоје решења за све три вредности константе $k = 0, \pm 1$. Случај $R = R_0 = 0$ је разматран као лимес $R_0 \to 0$ у оба случаја $R_0 < 0$ и $R_0 > 0$. На тај начин је добијено решење Минковског. Сва добијена решења су дефинисана за све вредности космичког времена t. Решења за која је $R_0 > 0$ и $k = 0, +1$ су несингуларна космолошка решења са прескоком. Решење $a(t) = \sqrt{\frac{-12}{R_0}}\left|\cos\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t-\varphi\right)\right|$, за које је $R_0 < 0$ и $k = -1$, је сингуларно циклично решење.

Такође, из модификоване гравитације са нелокалним чланом $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$ извели смо нека космолошка решења степеног облика $a(t) = a_0|t-t_0|^\alpha$. Ова решења немају за позадину простор Минковског. Међутим, у овом моделу нелокалне модификације гравитације, постоји де Ситерово решење са прескоком $a(t) = a_0 e^{\lambda t}$, које када $\lambda \to 0$ даје простор Минковског. Постоји такође несингуларно решење са прескоком $a(t) = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{ch}\,(\lambda t)$ за $k = +1$. Треба поменути и решење $a(t) = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{sh}\,(\lambda t)$, за $k = -1$. У сва ова три случаја скаларна кривина је $R = 12\lambda^2$ и не постоји ограничење за коефицијенте f_n у $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\Box^n$. Важно је напоменути да постоји решење $a(t) = |t-t_0|$ које одговара Милнеовој васиони за $k = -1$. Као илустрацију имали смо пример нелокалности дате са $\mathcal{F}(\Box) = \frac{\Lambda}{8\pi G}\left(e^{-\frac{3}{4\Lambda}(1+k)\Box} - 1\right)$. Сва решења степеног облика која смо представили $a(t) = a_0|t-t_0|^\alpha$ имају скаларну кривину једнаку $R(t) = 6\big(\alpha(2\alpha-1)(t-t_0)^{-2} + \frac{k}{a_0^2}(t-t_0)^{-2\alpha}\big)$, која задовољава релацију $\Box R = qR^2$, где параметар q зависи од α.

Коначно, наша нелокалност, која је облика $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$, је инваријантна у односу на трансформацију $R \to CR$, али има утицај на еволуцију васионе, пошто оператор $\Box = -\partial_t^2 - 3H(t)\partial_t$ који зависи од времена делује на скаларну кривину $R(t) = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right)$ која такође зависи од времена.

Оно што није рађено у вези са нелокалним моделом са чланом $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$, а планира се у даљем наставку истраживања је: одсуство духова и тахиона (видети [2, 3, 33]), стабилност решења, космолошке пертурбације ([23]), свођење на Ајнштајнов случај под одређеним условима. Очекује се да ће све то бити удовољено погодним избором коефицијената у аналитичкој функцији нелокалности.

Додатак A

Увод у варијациони рачун

У изучавању неког физичког система у теоријској физици обично се полази од лагранжијана $\mathcal{L}(x)$ и одговарајућег дејства $S = \int \mathcal{L}(x)dx$. У локалној теорији поља лагранжијан је нека одређена функција поља и његових првих извода по просторним координатама и времену. У нелокалној теорији лагранжијан садржи изводе до бесконачног реда. Скоро сва информација о физичком систему садржи се у његовом лагранжијану. У класичној теоријској физици дејство служи за добијање диференцијалних једначина кретања помоћу принципа минималног дејства у варијационом рачуну.

Један од основних задатака варијационог рачуна јесте разрада метода за налажење екстремних вредности функционала. Овај задатак је доста сличан задатку налажења екстрема функција реалних променљивих. За наставак приче коришћена је литература [47].

За почетак, нека је $S : A \subseteq N \to \mathbb{R}$ функционал, где је N нормирани векторски простор, тј. N је реални векторски простор снабдевен пресликавањем $\|\cdot\| : N \to \mathbb{R}$ које сваком $x \in N$ придружује ненегативан реалан број $\|x\|$, који се зове норма од x и задовољава услове

1. $\|x\| = 0$ ако и само ако је $x = 0$,

2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ за свако $x \in N$ и свако $\alpha \in \mathbb{R}$,

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ за свако $x, y \in N$.

За елемент $x \in A$ кажемо да је релативни минимум (у односу на норму у A) функционала S ако постоји $\delta > 0$ тако да важи $S(x) \leq S(y)$ за свако $y \in A$ за које је $\|y - x\| < \delta$. Сада нас занима који је неопходан услов да би $x \in A$ био релативни минимум. У наставку дефинишемо извод од S у x и показујемо да се тај извод поништава у x када је x релативни минимум. Проблем одређивања релативног минимума означаваћемо са

$$S(x) \to min \quad \text{на } A.$$

Дефиниција А.1. Нека је x_ε једнопараметарска фамилија елемената из $A \subseteq N$, при чему је $\|x_\varepsilon - x\| < \sigma$ за $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\delta)$, облика

$$x_\varepsilon = x + \varepsilon\eta,$$

где је $x \in A, \eta \in N$, и $\sigma, \varepsilon_0(\delta) > 0$. Тада је прва варијација од S у x у правцу η дефинисана са

$$\delta S(x,\eta) = \left.\frac{\mathrm{d}S(x+\varepsilon\eta)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \tag{1.1}$$

ако овај извод постоји.

Извод дефинисан са (1.1) можемо записати

$$\delta S(x,\eta) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S(x+\varepsilon\eta) - S(x)}{\varepsilon}.$$

Означимо $\delta x \equiv \varepsilon\eta$. δx се зове варијација од x.

Као непосредну последицу Дефиниције (А.1) добијамо следећи неопходан услов да $x \in A$ буде релативни минимум.

Теорема А.1. *Ако је $x \in A$ релативни минимум за функционал $S : A \to \mathbb{R}$, тада је*

$$\delta S(x,\eta) = 0$$

за свако $\eta \in N$ које задовољава претпоставке из Дефиниције А.1.

У наставку специјално разматрамо случај када је функционал задат вишеструким интегралом.

Нека је D затворен подскуп од $\mathbb{R}^m$. Тачку скупа D означимо са $t = (t^1, ..., t^m)$ и нека је $dt = dt^1...dt^m$. Границу од D означимо са ∂D.

Нека је $C^2(D)$ скуп свих непрекидних функција на D чији су други парцијални изводи непрекидни, и нека $C_n^2(D)$ означава скуп свих векторских функција

$$x(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$$

на D чије компоненте $x^k(t)$ припадају скупу $C^2(D)$. У овом случају је

$$A_n^2(D) = \{x(t) \in C_n^2(D) : x(t) = \phi(t), t \in \partial D, \phi \text{ је дата функција на } \partial D\}.$$

Имамо следећу геометријску интерпретацију. Ако $t^1, ..., t^m; x^1, ..., x^n$ означавају координате у $\mathbb{R}^{m+n}$, и ако је $x(t) \in A_n^2(D)$, тада једначине

$$x^k = x^k(t), \quad t \in D \quad (k = 1, ..., n)$$

представљају m-димензиону хиперповрш C_m у $\mathbb{R}^{m+n}$ чија је граница дефинисана са

$$x^k = \phi^k(t), \quad t \in \partial D \quad (k = 1, ..., n),$$

где је $\phi(t) = (\phi^1(t), ..., \phi^n(t))$ дата функција дефинисана на граници од D.

Сада ћемо дефинисати варијациони проблем који у наставку разматрамо. Нека је $L = L(t^1, ..., t^m; x^1, ..., x^n; y^1, ..., y^{mn})$ реално-вредносна функција дефинисана на $\mathbb{R}^{m+n+mn}$ која је два пута непрекидно диференцијабилна по сваком аргументу, и нека је $x(t) = (x^1(t), ..., x^n(t)) \in A_n^2(D)$. Прве и друге парцијалне изводе компонената од $x(t)$ означимо са

$$\dot{x}_\alpha^k = \frac{\partial x^k}{\partial t^\alpha}, \quad \ddot{x}_{\alpha\beta}^k = \frac{\partial^2 x^k}{\partial t^\beta \partial t^\alpha}.$$

Тада је на $A_n^2(D)$ дефинисан m-тоструки интеграл са

$$S(x(t)) = \int_D L(t^1, ..., t^m; x^1(t), ..., x^n(t); \dot{x}_1^1(t), ..., \dot{x}_1^n(t); ...; \dot{x}_m^1(t), ..., \dot{x}_m^n(t))dt, \quad (1.2)$$

где је $dt = dt^1 ... dt^m$. Краће, (1.2) можемо записати

$$S(x(t)) = \int_D L\Big(t, x(t), \frac{\partial x(t)}{\partial t}\Big)dt, \quad (1.3)$$

где $\partial x(t)/\partial t$ означава скуп свих првих парцијалних извода $\partial x^k(t)/\partial t^\alpha$, $k = 1, ..., n;\ \alpha = 1, ..., m$. Приметимо да је $A_n^2(D)$ подскуп од скупа $C_n^2(D)$ који је нормирани векторски простор са нормом датом са

$$\|x(t)\| = \max_D\{|x^1(t)|, ..., |x^n(t)|\} + \max_D\Big\{\Big|\frac{\partial x^k}{\partial t^\alpha}\Big|\Big\}.$$

Коначно, имамо следећи варијациони проблем

$$\int_D L\Big(t, x(t), \frac{\partial x(t)}{\partial t}\Big)dt \to min \quad \text{на} \quad A_n^2(D).$$

Нека је $x(t)$ локални минимум, тј. претпоставимо да за неко $\delta > 0$ важи

$S(x(t)) \leq S(y(t))$ за свако $y(t) \in A_n^2(D)$ за које важи $\|x(t) - y(t)\| < \delta$. Разматрајмо једнопараметарску фамилију $x(t,\varepsilon)$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\delta)$, функција облика

$$x(t,\varepsilon) = x(t) + \varepsilon\eta(t), \tag{1.4}$$

где је $\eta(t) \in C_n^2(D)$, $\eta(t) = 0$ за $t \in \partial D$, и $\|x(t,\varepsilon) - x(t)\| < \delta$. Тада за $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ имамо $x(t,\varepsilon) \in A_n^2(D)$. Једначина (1.4) је наравно краћи запис за n једначина

$$x^k(t,\varepsilon) = x^k(t) + \varepsilon\eta^k(t),$$

где је $\eta(t) = (\eta^1(t), ..., \eta^n(t))$ и $x(t,\varepsilon) = (x^1(t,\varepsilon), ..., x^n(t,\varepsilon))$.

У наставку рачунамо прву варијацију $\delta S(x(t),\eta(t))$.

Лема A.1. *Ако је $x(t) \in A_n^2(D)$ локални минимум функционала* (1.3), *тада важи*

$$\int_D \Big(\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^k}\Big)\eta^k(t)dt = 0 \tag{1.5}$$

за свако $\eta(t) \in C_n^2(D)$ које се поништава на ∂D.

Доказ. Приметимо да су изводи од L који се јављају у (1.5) краћи запис за компликованије изразе, на пример,

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} \equiv \frac{\partial L}{\partial x^k}\Big(t, x(t), \frac{\partial x(t)}{\partial t}\Big).$$

Овде, као и у наставку, $k = 1, ..., n$, док $\alpha = 1, ..., m$.

Користећи Дефиницију (A.1) и Теорему (A.1) добијамо

$$\delta S(x(t),\eta(t)) = \Big(\frac{d}{d\varepsilon}\int_D L\Big(t, x(t) + \varepsilon\eta(t), \frac{\partial x(t)}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \eta(t)}{\partial t}\Big)dt\Big)_{\varepsilon=0} = 0 \tag{1.6}$$

за свако $\eta(t)$ које задовољава услове из леме. Овде је $\partial x(t)/\partial t + \varepsilon(\partial\eta(t)/\partial t)$ краћи запис за mn израза $\frac{\partial x^k}{\partial t^\alpha} + \varepsilon\frac{\partial \eta^k}{\partial t^\alpha}$.

Због непрекидности функција L и $\partial L/\partial\varepsilon$, извод и интеграл могу да замене места, тако да десна страна у једначини (1.6) постаје

$$\int_D \Big(\frac{\partial L}{\partial x^k}\eta^k(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^k}\dot{\eta}_\alpha^k\Big)dt = 0. \tag{1.7}$$

Користећи идентитет

$$\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k_\alpha}\eta^k\Big) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k_\alpha}\dot{\eta}^k_\alpha + \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k_\alpha}\Big)\eta^k,$$

(1.7) можемо записати на следећи начин

$$\int_D \Big(\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k_\alpha}\Big)\eta^k(t)dt + \int_D \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k_\alpha}\eta^k\Big)dt = 0.$$

Пошто су функције $(\partial L/\partial \dot{x}^k_\alpha)\eta^k$ непрекидно диференцијабилне на D, можемо применити Стоксову теорему на други интеграл у последњој једначини. Пошто је $\eta^k(t) = 0$ на ∂D следи

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k_\alpha}\eta^k\Big)dt = 0.$$

Коначно на основу претходног закључујемо да важи

$$\int_D \Big(\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k_\alpha}\Big)\eta^k(t)dt = 0. \qquad \square$$

Лема А.2. *Ако је $f(t)$ реално-вредносна и непрекидна функција на D и ако је*

$$\int_D f(t)h(t)dt = 0$$

за сваку функцију $h(t) \in C^2(D)$ која се поништава на ∂D, тада важи

$$f(t) \equiv 0 \quad \text{за свако} \quad t \in D.$$

Помоћу Лема А.1 и А.2 може се показати да важи следећа теорема.

Теорема А.2. *Ако је $x(t) \in A^2_n(D)$ локални минимум функционала S дефинисаног са* (1.3)*, тада компоненте $x^k(t)$ од $x(t)$ морају да задовоље следећих n једначина*

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial t^\alpha}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k_\alpha} = 0 \quad (k = 1, ..., n) \tag{1.8}$$

на D.

Напомена: Једначине (1.8) су познате као Ојлер-Лагранжове једначине за варијациони проблем дефинисан помоћу вишеструког интеграла (1.3). Ове једначине представљају у ствари скуп од n нелинеарних парцијалних диференцијалних једначина другог реда. Ако их распишемо добијамо следеће

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^\alpha \partial \dot{x}^k_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^k_\alpha}\dot{x}^j_\alpha + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i_\beta \partial \dot{x}^k_\alpha}\ddot{x}^i_{\alpha\beta} = 0.$$

За крај разматрамо следећи случај:

Нека је $S : A \subseteq N \to \mathbb{R}$ функционал, где је $N = T^0_2(M)$, док је скуп A скуп свих метричких тензора на глаткој многострукости M.

Нека је $\xi = (x^0, \ldots, x^{n-1})$ координатни систем на $U \subseteq M$. Тада, према Леми 1.12, видимо да метрички тензор $B \in T^0_2(M)$ можемо представити на следећи начин

$$B = \sum_{i,\, j=0}^{n-1} B_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Дакле, тензор $B \in T^0_2(M)$ је одређен матрицом (B_{ij}) реално-вредносних функција на многострукости M.

Нека је сада M n-димензиона псеудо-Риманова многострукост са метричким тензором $(g_{\mu\nu})$. Коначно, скуп N је нормирани векторски простор са нормом датом са

$$\|B\| = \sqrt{\int_M \|(B_{ij})(p)\|^2 \sqrt{|\mathsf{g}|}\; d^n x},$$

где је

$$\|(B_{ij})(p)\| = \sup_{y \in S} \|(B_{ij})(p) y\|,$$

док је $\mathsf{g} = \det(g_{\mu\nu})$, и S је јединична сфера у $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција A.2. Нека је $S : A \to \mathcal{F}(M)$. Тада је $\delta S : A \to \mathcal{F}(M)$ пресликавање дефинисано са

$$(\delta S)(a)(p) := \delta(S(a)(p)).$$

Поново према Леми 1.12, ако је B (r, s) тензорско поље, тада на U важи

$$B = \sum B^{i_0 \ldots i_{r-1}}_{j_0 \ldots j_{s-1}} \partial_{i_0} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_{r-1}} \otimes dx^{j_0} \otimes \ldots \otimes dx^{j_{s-1}},$$

где сваки индекс у суми иде од 0 до $n-1$.

Дефиниција А.3. Нека је B (r,s) тензорско поље. Тада је

$$\delta B = \sum \delta(B^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots j_{s-1}}) \partial_{i_0} \otimes \dots \otimes \partial_{i_{r-1}} \otimes dx^{j_0} \otimes \dots \otimes dx^{j_{s-1}}.$$

Напомена: Претходна дефиниција не зависи од избора координатног система.

Теорема А.3. *Нека су S_1 и S_2 (r,s) тензорска поља, и нека је C константни функционал на A. Тада важе следећа својства:*

1. $\delta C = 0$,
2. $\delta(\alpha S_1 + \beta S_2)(a) = \alpha\, \delta S_1(a) + \beta\, \delta S_2(a), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Теорема А.4. *Нека су $S_1, S_2 : A \to \mathbb{R}$ функционали. Тада важи*

$$\delta(S_1 S_2)(a) = (\delta S_1(a)) S_2 + S_1(\delta S_2(a)).$$

Теорема А.5. *Нека је $S_1 : A \to \mathbb{R}$ функционал и нека је $S_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тада важи:*

$$\delta(S_2 \circ S_1)(a) = S_2'(S_1(a)) \delta S_1(a).$$

Теорема А.6. *Нека је S (r,s) тензорско поље. Тада важи:*

$$\delta(\partial_\mu S^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots j_{s-1}}(a)(x)) = \partial_\mu(\delta S^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots j_{s-1}}(a)(x)),$$

где су $S^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots j_{s-1}}$ компоненте од S у односу на ξ.

Теорема А.7. *Нека је $\mathcal{L} : A \to \mathcal{F}(M)$ и нека је $S : A \to \mathbb{R}$ функционал задат са*

$$S = \int_M \mathcal{L}(a)(x)\, d^n x.$$

Тада важи

$$\delta S = \int_M \delta \mathcal{L}(a)(x)\, d^n x.$$

Теорема А.8. *Варијација Кристофелових симбола представља тензор типа $(1,2)$.*

Литература

[1] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron.Astrophys.*, 571:A16, 2014.

[2] I. Ya. Aref'eva, L.V. Joukovskaya, and S. Yu. Vernov. Bouncing and accelerating solutions in nonlocal stringy models. *JHEP*, 0707:087, 2007.

[3] I. Ya. Aref'eva and A.S. Koshelev. Cosmological Signature of Tachyon Condensation. *JHEP*, 0809:068, 2008.

[4] Neil Barnaby, Tirthabir Biswas, and James M. Cline. p-adic Inflation. *JHEP*, 0704:056, 2007.

[5] A.O. Barvinsky. Dark energy and dark matter from nonlocal ghost-free gravity theory. *Phys.Lett.*, B710:12–16, 2012.

[6] T. Biswas, A. S. Koshelev, A. Mazumdar, and S. Yu. Vernov. Stable bounce and inflation in non-local higher derivative cosmology. *JCAP*, 2012.

[7] Tirthabir Biswas, Aindri Conroy, Alexey S. Koshelev, and Anupam Mazumdar. Generalized ghost-free quadratic curvature gravity. *Class.Quant.Grav.*, 31:015022, 2014.

[8] Tirthabir Biswas, Erik Gerwick, Tomi Koivisto, and Anupam Mazumdar. Towards singularity and ghost free theories of gravity. *Phys.Rev.Lett.*, 108:031101, 2012.

[9] Tirthabir Biswas, Tomi Koivisto, and Anupam Mazumdar. Towards a resolution of the cosmological singularity in non-local higher derivative theories of gravity. *JCAP*, 1011:008, 2010.

[10] Tirthabir Biswas, Anupam Mazumdar, and Warren Siegel. Bouncing universes in string-inspired gravity. *JCAP*, 0603:009, 2006.

[11] Fabio Briscese, Antonino Marcian, Leonardo Modesto, and Emmanuel N. Saridakis. Inflation in (Super-)renormalizable Gravity. *Phys.Rev.*, D87(8):083507, 2013.

[12] Branko Dragović. Tamna strana vasione. *Zbornik radova "Teme Moderne Fizike 3"*, pages 5–20, 2010.

[13] Milan Pantić. *Uvod u Ajnštajnovu teoriju gravitacije.* Novi Sad, 2005.

[14] Vladimir Dragović i Darko Milinković. *Analiza na mnogostrukostima.* Beograd, 2003.

[15] Gianluca Calcagni, Leonardo Modesto, and Piero Nicolini. Super-accelerating bouncing cosmology in asymptotically-free non-local gravity. *Eur.Phys.J.*, C74(8):2999, 2014.

[16] Gianluca Calcagni and Giuseppe Nardelli. Non-local gravity and the diffusion equation. *Phys.Rev.*, D82:123518, 2010.

[17] Sean Carroll. *Spacetime and geometry (An Introduction to General Relativity).* San Francisco, 2004.

[18] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity.* Santa Barbara, 1997.

[19] T. Clifton, P.G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis. Modified gravity and cosmology. *Phys.Rep.*, 513:1–189, 2012.

[20] C. Deffayet and R.P. Woodard. Reconstructing the Distortion Function for Nonlocal Cosmology. *JCAP*, 0908:023, 2009.

[21] Stanley Deser and R.P. Woodard. Nonlocal Cosmology. *Phys.Rev.Lett.*, 99:111301, 2007.

[22] I. Dimitrijevic. Some ansäze in nonlocal modified gravity. In *7th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: SUMMER SCHOOL AND CONFERENCE ON MODERN MATHEMATICAL PHYSICS*, pages 131–140, 2013.

[23] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, A.S. Koshelev, and Z. Rakic. Cosmology of modified gravity with R invariant nonlocality. U pripremi za JCAP.

[24] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. New Cosmological Solutions in Nonlocal Modified Gravity. *ROMANIAN JOURNAL OF PHYSICS*, 58(5-6):550–559, 2013.

[25] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. A new model of nonlocal modified gravity. *PUBLICATIONS DE L INSTITUT MATHEMATIQUE-BEOGRAD*, 94(108):187–196, 2013.

[26] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. Some cosmological solutions of a nonlocal modified gravity. *Filomat*, 2014. Primljeno za štampu.

[27] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. Some power-law cosmological solutions in nonlocal modified gravity. In *Lie Theory and Its Applications in Physics*, volume 111 of *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, pages 241–250, 2014.

[28] Ivan Dimitrijevic, Branko Dragovich, Jelena Grujic, and Zoran Rakic. On Modified Gravity. *Springer Proc.Math.Stat.*, 36:251–259, 2013.

[29] Ivan Dimitrijevic, Branko Dragovich, Jelena Grujic, and Zoran Rakic. Constant Curvature Cosmological Solutions in Nonlocal Gravity. In Bunoiu, OM and Avram, N and Popescu, A, editor, *TIM 2013 PHYSICS CONFERENCE*, volume 1634 of *AIP Conference Proceedings*, pages 18–23. W Univ Timisoara, Fac Phys, 2014. TIM 2013 Physics Conference, Timisoara, ROMANIA, NOV 21-24, 2013.

[30] Yves Dirian, Stefano Foffa, Nima Khosravi, Martin Kunz, and Michele Maggiore. Cosmological perturbations and structure formation in nonlocal infrared modifications of general relativity. *JCAP*, 1406:033, 2014.

[31] Manfredo P. do Carmo. *Riemannian geometry*. Boston, 1992.

[32] Branko Dragovich. p-adic and adelic cosmology: p-adic origin of dark energy and dark matter. *AIP Conf.Proc.*, 826:25–42, 2006.

[33] Branko Dragovich. Nonlocal Dynamics of p-Adic Strings. *Theor.Math.Phys.*, 164:1151–1155, 2010.

[34] Branko Dragovich. Towards p-Adic Matter in the Universe. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 36*, pages 13–24, 2013.

[35] Branko Dragovich. On nonlocal modified gravity and cosmology. In *Lie Theory and Its Applications in Physics*, volume 111 of *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, pages 251–262, 2014.

[36] Emilio Elizalde, Ekaterina O. Pozdeeva, and Sergey Yu. Vernov. Stability of de Sitter Solutions in Non-local Cosmological Models. *PoS*, QFTHEP2011:038, 2013.

[37] Emilio Elizalde, Ekaterina O. Pozdeeva, Sergey Yu. Vernov, and Ying-li Zhang. Cosmological Solutions of a Nonlocal Model with a Perfect Fluid. *JCAP*, 1307:034, 2013.

[38] V. Faraoni. Nine Years of f(R) Gravity and Cosmology. *Astrophysics and Space Science Proceedings*, 38:19, 2014.

[39] J. Grujic. Equations of motion in nonlocal modified gravity. In *7th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: SUMMER SCHOOL AND CONFERENCE ON MODERN MATHEMATICAL PHYSICS*, pages 181–196, 2013.

[40] J. Grujic. On a new model of nonlocal modified gravity. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 2015. Primljeno za štampu.

[41] S. Jhingan, S. Nojiri, S.D. Odintsov, M. Sami, I Thongkool, et al. Phantom and non-phantom dark energy: The Cosmological relevance of non-locally corrected gravity. *Phys.Lett.*, B663:424–428, 2008.

[42] Tomi Koivisto. Dynamics of Nonlocal Cosmology. *Phys.Rev.*, D77:123513, 2008.

[43] Tomi S. Koivisto. Newtonian limit of nonlocal cosmology. *Phys.Rev.*, D78:123505, 2008.

[44] Alexey S. Koshelev. Modified non-local gravity. *Rom.J.Phys.*, 57:894–900, 2012.

[45] Alexey S. Koshelev. Stable analytic bounce in non-local Einstein-Gauss-Bonnet cosmology. *Class.Quant.Grav.*, 30:155001, 2013.

[46] Alexey S. Koshelev and Sergey Yu. Vernov. On bouncing solutions in non-local gravity. *Phys.Part.Nucl.*, 43:666–668, 2012.

[47] John David Logan. *Invariant Variational Principles.* Academic press, 1977.

[48] Leonardo Modesto and Shinji Tsujikawa. Non-local massive gravity. *Phys.Lett.*, B727:48–56, 2013.

[49] J.W. Moffat. Ultraviolet Complete Quantum Gravity. *Eur.Phys.J.Plus*, 126:43, 2011.

[50] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology.* Cambridge, 2005.

[51] Shin'ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Modified non-local-F(R) gravity as the key for the inflation and dark energy. *Phys.Lett.*, B659:821–826, 2008.

[52] Shin'ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models. *Phys.Rept.*, 505:59–144, 2011.

[53] Barrett O'Neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.* Academic press, 1983.

[54] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. f(R) Theories of Gravity. *Rev.Mod.Phys.*, 82:451–497, 2010.

[55] Robert M. Wald. *Space, time and gravity.* Chicago, 1992.

[56] R.P. Woodard. Nonlocal Models of Cosmic Acceleration. *Found.Phys.*, 44:213–233, 2014.

[57] Ying-li Zhang and Misao Sasaki. Screening of cosmological constant in non-local cosmology. *Int.J.Mod.Phys.*, D21:1250006, 2012.

Биографија

Јелена Грујић рођена је 18. јануара 1984. године у Славонској Пожеги (Р Хрватска). Дипломирала је 2007. године на Математичком факултету, Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, са просечном оценом 9.78. Исте године уписала је докторске студије на Математичком факултету у Београду, смер Геометрија. Положила је све испите на докторским студијама са просечном оценом 10.00.

Од 2008. године запослена је као асистент на Учитељском факултету у Београду. Држала је вежбе из предмета Математика 1, Математика 2 и Елементарни математички појмови.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Јелена Грујић

број индекса 2030/06

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Геометријска модификација Ајнштајнове теорије гравитације

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 20.03.2015. године

Ј. Грујић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Јелена Грујић

Број индекса 2030/06

Студијски програм Математика

Наслов рада Геометријска модификација Ајнштајнове теорије гравитације

Ментор др Зоран Ракић

Потписани/а Јелена Грујић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 20.03.2015. године

Ј. Грујић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Геометријска модификација Ајнштајнове теорије гравитације

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 20.03.2015. године

Ј Трујић

1. **Ауторство** - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство - некомерцијално** – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство - некомерцијално** – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прераде.** Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство** - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.