

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Ana Z. Zeković

**Konvejeva notacija u teoriji
čvorova i njena primena u
metodima za određivanje
rastojanja čvorova**

Doktorska disertacija

Beograd, 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Ana Z. Zeković

**Conway notation and its
appliance in knot distance
determination methods, in knot
theory**

Doctoral dissertation

Belgrade, 2015

Mentor:

dr Dušan Tošić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Slavik Jablan, profesor Visoke škole strukovnih studija za informacione i komunikacione tehnologije u Beogradu

dr Zoran Rakić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Vladimir Filipović, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Vladimir Grujić, docent, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane:

Мамі

Naslov doktorske disertacije: Konvejeva notacija u teoriji čvorova i njena primena u metodima za određivanje rastojanja čvorova

Rezime: Glavni sadržaj ovog rada je konstrukcija novih metoda za određivanje različitih tipova rastojanja čvorova - rastojanja čvorova nastalih promenama preseka (Gordijeva rastojanja) i rastojanja čvorova nastalih zaravnjivanjem (s -rastojanja).

U radu su predstavljeni različiti načini prikazivanja čvorova, a posebno model ogledalskih krivih. Prikazana je primena ovog modela, kodiranje čvorova u njemu, uveden metod za određivanje čvorova predstavljenih ovim modelom i izvedeni svi čvorovi koji mogu biti smešteni u mreže dimenzija $p \times q$ ($p \leq 4$, $q \leq 4$). Detaljnije su opisane i različite notacije čvorova, a poseban akcenat je postavljen na Konvejevu notaciju i njena topološka svojstva. Konvejeva notacija ima glavnu ulogu u dobijanju novih rezultata u ovom radu.

U postojećim tablicama Gordijevih rastojanja čvorova izostavljen je veliki broj neracionalnih čvorova jer su se dosadašnji algoritmi bazirali na algebri verižnih razlomaka koji su usko vezani za prezentaciju racionalnih čvorova. Predmet ovog rada je implementacija metoda čija je osnova određivanje novih distanci jednakih 1. Ovi metodi zasnivaju se na neminimalnim prezentacijama racionalnih i neracionalnih čvorova, generisanju algoritama baziranih na geometrijskim svojstvima Konvejeve notacije i pretrazi težinskog grafa. Rezultati su organizovani u tablicama Gordijevih rastojanja čvorova do 9 preseka i priloženi uz rad. Predložen je i metod za proširivanje rezultata na familije čvorova koji pruža mogućnost za kasnije proširivanje tablica (na čvorove sa većim brojem preseka) predloženim algoritmima.

Na osnovu uočene relacije između Gordijevih brojeva čvorova i s -brojeva odvezivosti predstavljeni su novi metodi za određivanje s -brojeva odvezivosti i rezultati, organizovani u listama čvorova do 11 preseka. Primenom ovih metoda i svojstava Konvejeve notacije generisani su i algoritmi za određivanje s -rastojanja čvorova. Novi rezultati su organizovani u tablicama čvorova sa najviše 9 preseka i, zajedno sa prethodnim, priloženi uz rad.

Promene preseka na čvorovima, kao i zaravnjivanje preseka čvorova, mogu poslužiti za modelovanje akcija topoizomeraza i rekombinaza nad DNK lancima. U radu je izložen način za izučavanje promena uzrokovanih ovim enzimima.

Kako se svi metodi i rezultati, koji predstavljaju doprinos ovog rada, zasnivaju na svojstvima Konvejeve notacije, predložen je i metod izvođenja novih čvorova u Konvejevoj notaciji proširivanjem C-linkova. Zbog nedostatka adekvatnog obrasca u formiranju dosadašnjih tablica čvorova u DT-notaciji, u njima ne postoji uređenje zasnovano na topološkim svojstvima čvorova. U ovom radu predložen je metod za klasifikaciju čvorova zasnovan na Konvejevoj notaciji i generisane su tablice svih čvorova sa 13 preseka i alternirajućih čvorova sa 14 preseka koje su priložene uz rad.

Predmet ovog rada je, između ostalog, i razmatranje Bernhrad-Jablanove hipoteze za određivanje broja odvezivosti preko minimalnih dijagrama čvorova. Određivanje broja odvezivosti ima veliku ulogu u proračunima različitih rastojanja čvorova. U radu je predložen i novi metod za minimizaciju čvorova,

jednog od glavnih problema teorije čvorova. Pomenuti metod se zasniva na primeni lokalnih i globalnih minimizacija.

U radu su definisani i novi pojmovi kao što su *maksimalni broj odvezivosti* i *mešoviti brojevi odvezivosti*. Prilikom njihovog određivanja, razmatrani su čvorovi koji nakon jedne promene preseka ne menjaju svoj minimalni broj preseka. Uočene su tri klase ovakvih čvorova koje su nazvane po autorima - Kaufmanovi čvorovi, Zeković čvorovi i Tanijamini čvorovi. Najinteresantnija pojava vezana za Zeković čvorove je da su svi do sada izvedeni Perkovi čvorovi (za $n \leq 13$ preseka) upravo Zeković čvorovi. Definisanje ove klase čvorova pruža mogućnost definisanja specifičnih svojstava veoma čuvenih, ali do sada slabo izučavanih Perkovih čvorova.

Ključne reči: Konvejeva notacija, rastojanje čvorova, broj odvezivosti, minimizacija čvorova, Perkov par čvorova

Naučna oblast: Računarstvo

Uža naučna oblast: Teorija čvorova

UDK broj: 515.162:[004.577.213.3](043.3)

Doctoral dissertation title: Conway notation and its appliance in knot distance determination methods, in knot theory

Abstract: A main focus of the paper is construction of new methods for defining diverse knot distance types - the distance of knots made by crossing changes (Gordian distance) and the distance among knots made by crossing smoothing (smoothing distance).

Different ways of knots presentation are introduced, with objective to a mirror curve model. It is presented a purpose of the model, coding of knots, by using the model preferences, as well as introduction of a method to determinate a knots presented by the model and derived all the knots that could be placed to a nets dimensions $p \times q$ ($p \leq 4, q \leq 4$). Diverse knot notations are described into details, with a focus to Conway's notation and its topological characteristics.

As it is known, a present algorithms are based on an algebra of chain fractions, that are in close relation with a presentation of rational knots, which results in an absence of a huge number of non-rational knots, in an existing Gordian's distance tables. The subject of the paper is an implementation of methods with bases on determination of new distances equal 1. The methods are based on a non-minimal presentation of rational and non-rational knots, generation of algorithms established on geometrical characteristics of Conway's notation and a weighted graph search. The results are organized into Gordian's distance knots tables up to 9 crossings, and have been enclosed with the paper. In order to append the table with knots having a bigger number of crossings, it has been suggested a method for extension of results for knot families.

Using facts of relation among Gordian's numbers and smoothing numbers, a new method for smoothing number determination is presented, and results in a form of lists for knots not having more then 11 crossings. In conjunction with Conway's notation concept and the method, algorithms for a smoothing distance are generated. New results are organized in knot tables, up to 9 crossings, combined with previous results, and enclosed with the paper.

A changes and smoothing to a knot crossing could be applied for modeling topoisomerase and recombinase actions of DNA chains. It is presented the method for studying changes introduced by the enzymes.

A main contribution to the paper is the concept of Conways notation, used for all relevant results and methods, which led to introduction of a method for derivation a new knots in Conways notation by extending C-links. In a lack of an adequat pattern for an existing knot tables in DT-notation, there is usage of a structure based on topological knot concepts. It is proposed a method for knot classification based on Conways notation, tables of all knots with 13 crossings and alternated knots with 14 crossings has been generated and enclosed.

The subject of the paper takes into consideration Bernhard-Jablan's hypothesis for a determination of unknotting number using minimal knot diagrams. The determination is crucial in computation of diverse knot distances. The paper covers one of main problems in knot theory and contains a new method of knot minimization. The method is based on relevance of local and global minimization.

There are defined new terms such as a maximum and a mixed unknotting number. The knots that do not change a minimum crossing number, after only one crossing change are taken into consideration for the analyzes. Three classes of the knots are recognized, and called by authors . Kauffman's knots, Zekovic knots and Taniyama's knots. The most interesting conclusion correlated with Zekovic knots is that all derived Perko's knots (for $n \leq 13$ crossings) are actually Zekovic knots. Defining this class of knots provides opportunity to emphasize new definitions of specifis featured for well-known Perko's knots.

Keywords: Conway notation, knot distance, unknotting number, knot minimization, Perko pair knots

Scientific field: Computer science

Scientific discipline: Knot theory

UDC number: 515.162:[004.577.213.3](043.3)

Predgovor

Čvorovi su prisutni u različitim područjima svih ljudskih praktičnih aktivnosti, nauke i umetnosti od preistorijskog doba do danas. U ovom radu se razmatraju aktuelni načini kodiranja čvorova i predlažu novi metodi za određivanje različitih tipova rastojanja među čvorovima. Određivanje rastojanja dva čvora može imati veliku ulogu u predviđanju promena koje nastaju u genetskom materijalu. Takvo predviđanje čini određivanje rastojanja posebno važnim i motivisalo me je za rad i istraživanje u ovoj oblasti. U tome mi je izuzetno pomogao dr Slavik Jablan, čija ogromna energija i entuzijazam predstavljaju pravi podsticaj za rad, kome ovom prilikom želim posebno da zahvalim. Pored dragocenog vremena koje mi je posvetio, neizmerno sam mu zahvalna na snažnoj motivaciji koju mi je pružio, na ključnoj pomoći u prekretnicama, na nesebičnom deljenju misli i sjajnih ideja zasnovanih na najnovijim naučnim rezultatima. Veoma sam mu zahvalna na velikoj podršci, kako u izradi ove disertacije, tako i u svakodnevnom životu. Najiskrenije se nadam prilici za nove zajedničke uspehe.

Veliku zahvalnost dugujem i dr Dušanu Tošiću na svemu što me je naučio tokom mnogo godina studija. Posebno sam mu zahvalna na poverenju koje mi je ukazao, na razumevanju i podršci, na vrednim savetima i brojnim sugestijama zahvaljujući kojima je ova teza poprimila postojeći oblik.

Zahvalna sam dr Marku Stošiću i dr Ljiljani Radović na detaljnom čitanju preliminarnih verzija rada i korisnim predlozima. Zahvaljujem se članovima komisije dr Zoranu Rakiću, dr Vladimiru Grujiću i dr Vladimiru Filipoviću.

Neizmernu zahvalnost dugujem svojoj porodici, na vaspitanju, podsticanju i usmeravanju koje mi pružaju tokom svih ovih godina i time omogućavaju da ostvarim svoje akademske, ali i druge ciljeve. Naročito se zahvaljujem Aleksandru na bezgraničnoj ljubavi, podršci i razumevanju koji su mi rad na ovoj disertaciji učinili neuporedivo lakšim.

Sadržaj

1	Uvod	10
1.1	Senke čvorova	12
1.2	Prepoznavanje čvorova	16
1.3	Broj odvezivosti	19
1.4	Rastojanja čvorova	23
1.4.1	Tablice rastojanja čvorova	27
1.5	Program LinKnot	28
1.6	Notacije čvorova	30
1.6.1	Klasična notacija	30
1.6.2	Numerička kodiranja	31
1.6.3	Konvejeva notacija	37
2	Različiti načini prikazivanja čvorova	44
2.1	Pletenice (braids)	44
2.2	Ogledalske krive	49
2.2.1	Kodiranje ogledalske krive i izvođenje čvorova	50
2.2.2	Primene ogledalskih krivih – CNC	57
2.2.3	Kaufmanov zagrada polinom	61
2.2.4	Ekvivalentne prezentacije čvorova	64
3	Gordijeva rastojanja čvorova	65
3.1	Tablice rastojanja čvorova I. Darsi	65
3.2	Tablice H. Mun	68
3.3	Izbor metoda za prepoznavanje čvorova	69
3.3.1	Polinomske invarijante čvorova	69
3.4	Metodi korišćeni u ovom radu	73
3.4.1	Određivanje parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1	76
3.4.2	Donje granice Gordijevih rastojanja	84
3.4.3	Gornje granice Gordijevih rastojanja čvorova	85
3.4.4	Tablice Gordijevih rastojanja čvorova	86
3.5	Hirurgija na čvorovima	88
3.6	Topoizomeraze	89
4	Rastojanja čvorova nastala zaravnjivanjem (s-rastojanja)	94
4.1	Transformacija dijagrama linka pomoću $H(n)$ -pokreta	95
4.2	$H(2)$ -pokret i operacija lepljenja traka	96
4.3	Metodi korišćeni u ovom radu	101
4.3.1	Određivanje čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1	102
4.3.2	Određivanje parova čvorova sa s -rastojanjem 1	108
4.3.3	Tablice s -rastojanja čvorova	112
4.4	Rekombinaze	113
4.5	Odvezivanje pomoću operacije $L_0 \leftrightarrow L_\infty$	115

5 Izvođenje čvorova u Konvejevoj notaciji	117
5.1 Metod izvođenja proširivanjem C -linkova	123
5.1.1 C -linkovi	123
5.1.2 Operator $GENKL$	128
5.1.3 Operator D	129
5.1.4 Izvođenje alternirajućih čvorova	130
5.1.5 Operator $CROSS^-$	136
5.1.6 Izvođenje nealternirajućih čvorova	137
5.1.7 Tablice čvorova u Konvejevoj notaciji	138
5.2 Klasifikacija čvorova	138
5.2.1 Flip klase ekvivalencije	139
5.3 Metod minimizacije čvorova i linkova	145
6 Pojedinačne promene preseka koje čuvaju minimalni broj preseka	147
6.1 Kaufmanovi, Zeković i Tanijamini čvorovi	147
6.2 Perkovi čvorovi	153
7 Minimalni i maksimalni brojevi odvezivosti	157
7.1 Maksimalni broj odvezivosti	158
7.2 Tablice	159
8 Zaključak	169
8.1 Naučni doprinos rada	171
Literatura	173
Biografija autora	182

1 Uvod

Ne bismo pogrešili kada bismo tvrdili da naš život počinje čvorom. Kada se rodimo, pupčana vrpca se preseca i vezuje u čvor! Od njega se ubrzo rastajemo, ali se nedugo zatim srećemo sa novim čvorovima. Od prvih patika i dečijeg vezivanja pertli, preko pletenica u kosi, sve do kravata, srećemo se sa raznim načinima preplitanja niti i vezivanja čvorova koje svakodnevno koristimo.

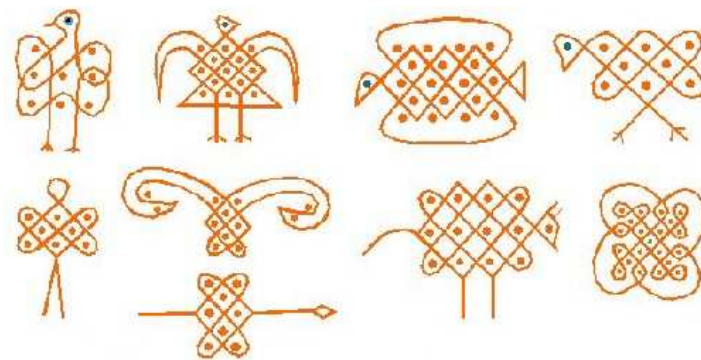
U moreplovstvu, čvorovi imaju veoma veliku ulogu i svaki mornar prepoznaje i ume da barata sa nekoliko desetina čvorova. Ti raznovrsni čvorovi se mogu klasifikovati po svojoj nameni, ali većinom služe za osiguravanje, učvršćivanje i fiksiranje, te se slobodno može tvrditi da od umeća vezivanja i rasplitanja užadi zavisi opstanak broda i ljudi na njemu. Pored ovih čvorova, čvorovi u moreplovstvu su se ranije koristili i za merenje brzine kretanja broda.

U hirurgiji, rane su se vekovima zašivale korišćenjem čvorića na krajevima šavova i značajan je bio način na koji se to radi – najbolji čvorovi su omogućavali brže zaceljivanje rana. U svom eseju o ortopedskim čvorovima grčki ortoped Heraklas (I vek) opisao je i objasnio, dajući detaljna uputstva, šesnaest načina vezivanja ortopedskih udloga. Ovaj rad, obnovljen i preveden na latinski, predstavlja najstarije svedočanstvo o primeni čvorova u nauci [3].

Čvorovi su prisutni u različitim područjima svih ljudskih praktičnih aktivnosti, nauke i umetnosti od preistorijskog doba do danas. Njihovi primeri mogu se pronaći u svim drevnim civilizacijama, počev od prikaza zmijske koja grize svoj rep u Mesopotamiji, mozaika iz Anatolije, kineskih tradicionalnih dekorativnih čvorova, do antičke Grčke. Drevne Inke su koristile čvorove kao pismo – vezivanjem čvorova u različitom rasporedu na konopcu ili štapu, formirali su tekstove. Jedna od najlepših legendi Grčke mitologije vezana je baš za čvorove i u njoj se govori o nerešivom problemu, gde jedini izlaz simbolizuje grubo presecanje čvora (Gordijev čvor). U staroj Grčkoj, čvorovi se takođe mogu sresti i u mozaicima, juvelirstvu, medicini, i sl. Pretpostavlja se da kelt-ska umetnost čvorova, korišćena u religiozne i dekorativne svrhe, započinje još u desetom ili jedanaestom veku sa pojavom istočnjačkih mozaika, posebno perzijskim popločavanjem. Crteži u pesku plemena Čokve (Tchokwe) (slika 1), vezani za prepričavanje poslovice, igre i zagonetke deo su njihove duge tradicije i imaju važnu ulogu u prenošenju znanja sa generacije na generaciju [53]. Kao osnovu ovi crteži koriste senke čvorova. Slične crteže možemo sresti u kulturi Tamila, na pragovima kuća stanovnika Južne Indije.

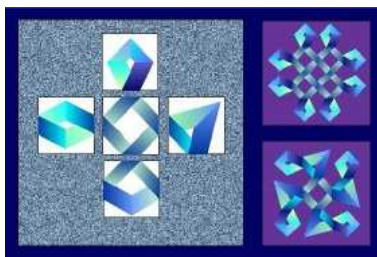
Leonardo i Direr (Dürer), možda najveći renesansni slikari i matematičari, bili su veoma zainteresovani za sofisticiranu konstrukciju i dizajn čvorova koji je blisko povezan sa ogledalskim krivama [34]. Oni su bili upoznati sa činjenicom da ogledaska kriva, smeštena u pravougaonu mrežu $RG[p, q]$, dimenzija $p \times q$, gde su dužine stranica p i q uzajamno prosti brojevi, predstavlja jednodimenzionu zatvorenu krivu koja ravnomerno ispunjava pravougaonik i u svojim delima su koristili tu osobinu. Takođe je i Mikelandelo (Michelangelo) na svojim crtežima koristio konstrukcije zasnovane na čvorovima. Verovatno najpoznatiji primer je Mikelandelov trg u Firenci.

U modernoj umetnosti primeri čvorova i minimalnih površi konstruisanih



Slika 1: Crteži u pesku plemena Čokve

nad njima se javljaju u radovima N. Gaboa (N. Gabo) i drugih vajara konstruktivista, a često su korišćeni i u arhitekturi. Čvorovi u dizajnu su primer modularnih struktura [6], imajući u vidu da se senke svih čvorova i linkova mogu konstruisati od samo pet osnovnih elemenata (modula). Na slici 2 su prikazani osnovni elementi (moduli) koje je predložio S. Jablan u radu [104] i nazvao ih *KnotTiles*. Sličan skup elemenata za konstrukciju mozaika čvorova koristili su S. Lomonako (S. Lomonaco) i L. Kaufman (L. Kauffman) i istraživali njihovu vezu sa kvantnim računarima [89]. Više o čvorovima u umetnosti može se pročitati u radu [105] čiji su autori S. Jablan, Lj. Radović, R. Sazdanović i A. Zeković.



Slika 2: KnotTiles

Mnoštvo interesantnih podataka vezanih za istoriju teorije čvorova moguće je naći u knjizi [7].

U nauci, čvorovi su prisutni u biologiji, fizici, hemiji, a poseban osvrt ćemo dati u radu na njihovu pojavu u lancima DNK.

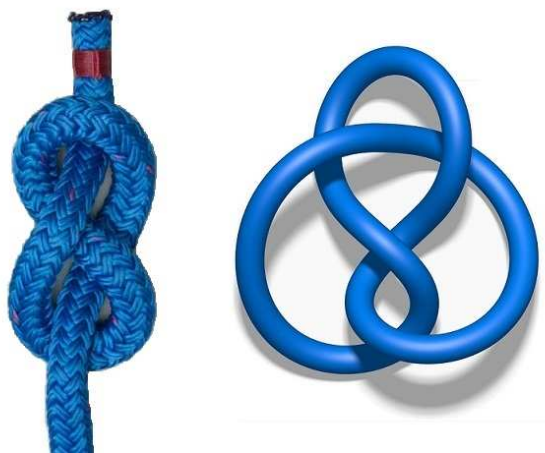
1.1 Senke čvorova

Sledeća definicija predstavlja strogi matematički opis konačnog čvora:

Definicija 1 Čvor predstavlja glatko utapanje (eng. *embedding*) kruga S^1 u Euklidski trodimenzioni prostor R^3 (ili trodimenzionu sferu S^3), dok je c -komponentni link glatko utapanje c disjunktnih krugova S^1 u R^3 (ili S^3), gde slike krugova S_i^1 predstavljaju njegove komponente ($i=2,3,\dots,c$).

Neformalno, svaki čvor možemo zamisliti kao proizvoljno upetljani kanap. Osnovna razlika između "matematičkog" čvora i čvorova koje koristimo u svakodnevnoj praksi je ta što su u matematičkom čvoru krajevi spojeni. Na slici 3 je prikazan čuveni mornarski čvor "osmica" (eng. *figure-eight*) i njegov prikaz u teoriji čvorova. Takođe, u matematičkom čvoru debljina njegovih niti je apstrahovana i možemo smatrati da one nemaju debljinu, kao i da su potpuno elastične (bilo koja nit se može proizvoljno produžiti, skratiti ili deformisati). Čvor predstavlja zatvorenu krivu u prostoru bez samopreseka. Slično, linkove – višekomponentne čvorove, možemo posmatrati kao skup jednog ili više čvorova koji međusobno mogu biti prepleteni [57]. Jasno je da čvorovi predstavljaju specijalni slučaj linkova – jednokomponentne linkove ($c=1$). Čvor koji nema nijedan presek smatra se *trivijalnim čvorom* i zvaćemo ga *nečvor* ili *krug*.

Bez obzira na to što čvorovi predstavljaju krive u prostoru bez samopreseka, u teoriji čvorova korišćemo izraz "presek". Naime, svaka projekcija nekog čvora (linka) na ravan predstavlja 4-valentni graf čija temena ćemo (snabdevena dodatnom informacijom o prostornom odnosu projektovanih niti "iznad-ispod") nazvati *presecima*.



Slika 3: Pleteni čvor "osmica" i čvor "osmica" u teoriji čvorova

Jedan od glavnih zadataka teorije čvorova je klasifikacija čvorova i linkova.

Definicija 2 Dva čvora K_1 i K_2 su ambijentalno izotopna ukoliko postoji neprekidna funkcija $H : R^3 \times [0, 1] \rightarrow R^3$ takva da:

- 1) $h_0 = H((x, y, z), 0)$ je identitet $R^3 \rightarrow R^3$,
- 2) za sve $t \in [0, 1]$, $h_t = H((x, y, z), t)$ je homeomorfizam $R^3 \rightarrow R^3$,
- 3) ako je $h_1 = H((x, y, z), 1)$, onda $h_1(K_1) = K_2$.

Dakle, dva čvora K_1 i K_2 su ambijentalno izotopna (ekvivalentna) ako postoji neprekidno kretanje (ili deformacija) prostora S^3 koje transformiše K_1 u K_2 . U fizičkom smislu, transformacijom jednog čvora u drugi možemo smatrati proizvoljno premotavanje jednog čvora u drugi bez sečenja ili ponovnog spajanja njegovih niti i bez sažimanja nekog dela čvora u tačku.

Pošto su svaka dva kruga međusobno homeomorfna, homeomorfizam samih čvorova nije dovoljan za njihovu klasifikaciju. Imajući u vidu da svaki čvor predstavlja glatko utapanje kruga S^1 u Euklidski trodimenzioni prostor R^3 , zapravo ćemo raditi sa homeomorfizmom komplementa čvorova smeštenih u R^3 . Pošto je ambijentalna izotopija relacija ekvivalencije, svaki čvor (link) predstavljaće klasu ekvivalencije u odnosu na ovu relaciju, pri čemu svaki pojedinačni čvor (link) može poslužiti kao predstavnik cele klase ekvivalencije.

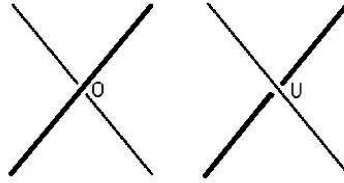
Umesto da radimo sa čvorovima u prostoru, neke od problema sa kojima se suočavamo je dovoljno razmatrati na dvodimenzionom modelu, te rad sa čvorovima u tom slučaju možemo svesti na rad sa njihovim dvodimenzionim projekcijama (dijagramima).

Definicija 3 Senka čvora je projekcija čvora $K \subset S^3$ na 2-dimenzionu ravan, takva da ne postoje tri tačke čvora K koje odgovaraju jednoj tački ravni, odnosi "iznad-ispod" nisu definisani, niti se ukrštaju poprečno.

U cilju očuvanja kompletne informacije o nekom neorijentisanom čvoru u prostoru, pri njegovom projektovanju na ravan potrebno je uvesti binarnu relaciju odnosa niti "iznad-ispod", dok u slučaju orijentisanih čvorova uvodimo i znake preseka. Na projekciji čvora, u svakom preseku nit koja se nalazi u prostoru iznad druge niti biće označena neprekidnom, a druga nit prekinutom linijom. *Orijentacijom* čvora smatramo izbor smera kojim se obilazi čvor. Za svaki neorijentisani čvor K postoje dve različite orijentacije i dva orijentisana čvora K' i K'' . Prilikom obilaska čvora, ukoliko nit po kojoj se krećemo (na slici 4 predstavljena debljom linijom), u samom preseku prolazi "iznad" druge niti (gde se operacija "iznad" posmatra u odnosu na ravan projekcije), tada taj presek nazivamo *O*-presek (od engleske reči *overcrossing*), a u protivnom *U*-presek (od engleske reči *undercrossing*). Ovi tipovi preseka se mogu odrediti i na projekcijama neorijentisanih čvorova.

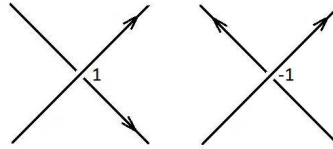
Promenom odnosa "iznad-ispod" u svim presecima nekog čvora (linka) ili promenom orijentacije, dobijamo njegovu "levu" i "desnu" formu, tj. sliku u ogledalu. Za čvor K , njegovu sliku u ogledalu ćemo označavati sa $!K$. *Ambihiralni čvorovi* su čvorovi koji su ambijentalno izotopni sa svojom slikom u ogledalu; u protivnom, čvor je *hiralan*.

Na projekcijama orijentisanih čvorova presecima se može dodeliti i znak. Svaki presek nekog čvora može u tom slučaju biti pozitivan ili negativan, u



Slika 4: O -presek i U -presek

zavisnosti od orijentacije tog čvora. Znak preseka, tj. oznaka -1 ili 1 , dodeljuje se kao na slici 5.



Slika 5: *Pozitivan i negativan presek*

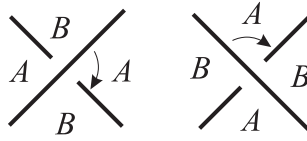
Pozitivne i negativne preseke možemo razmatrati i na neorijentisanim projekcijama. Označimo u nekom preseku nit koja se nalazi iznad i nacrtana je punom linijom sa O , a nit koja se nalazi ispod i nacrtana je prekinutom linijom sa U . Posmatrajmo desno orijentisanu rotaciju za 90° koja jedan kraj niti O prevodi u susedni kraj niti U . Regione koji se nalaze između takvih krajeva označimo sa A . Preostala dva regiona označimo sa B . Presek u kome se javljaju dva horizontalna regiona A je pozitivni presek i označavamo ga sa $+1$, a presek u kome se javljaju dva horizontalna regiona B je negativni presek i označavamo ga sa -1 (slika 6) [114].

Ako ovakav postupak ponovimo u svim presecima nekog neorijentisanog dijagrama D , svakom preseku možemo pridružiti duž koja spaja A -regione i sadrži tačku preseka ili osenčiti u svakom preseku A -regione. Kao rezultat dobijamo *Kaufmanovo A-stanje* (ili s_+ -stanje). Na isti način, ukoliko to učinimo sa B -regionima, dobijamo *Kaufmanovo B-stanje* (ili s_- -stanje) dijagrama D . Kaufmanova stanja igraće veliku ulogu pri izračunavanju Kaufmanovog zagrada polinoma (eng. *Kauffman bracket polynomial*), proučavanju adekvatnosti dijagrama, itd.

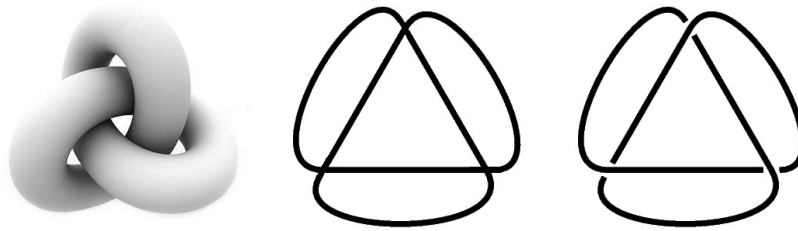
Definicija 4 Projekcija (dijagram) čvora je senka čvora sa dodatnom informacijom o odnosima "iznad-ispod".

Definicija 5 Orijetisana projekcija (dijagram) čvora je projekcija čvora sa dodatnom informacijom o orijentaciji krive.

Sa matematičkog stanovišta, dijagram koji predstavlja čvor ili link je 4-valentni planarni graf na sferi ili u ravni kome je svakom temenu grafa priključena



Slika 6: Pozitivan i negativan presek



Slika 7: Čvor trolisnik: (a) u prostoru; (b) njegova senka; (c) njegova projekcija (dijagram)

informacija o prostornom odnosu "iznad-ispod".

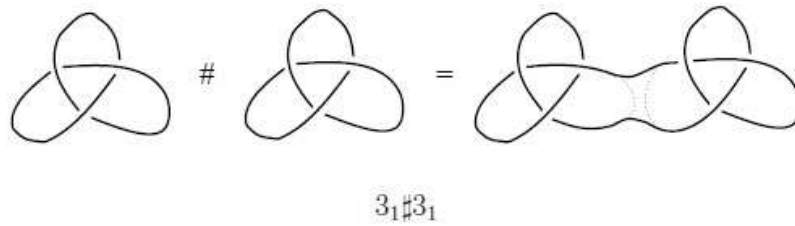
Neka su date tačke P_1, P_2, \dots, P_c takve da svaka pripada različitoj orijentisanoj komponenti dijagrama L' linka L i neka se one kreću po odgovarajućim komponentama prateći njihovu orijentaciju. Ukoliko svaka tačka P_i ($i = 1, 2, \dots, c$) pri svom kretanju naizmenično nailazi na 0-preseke i U -preseke, takav dijagram L' zovemo *alternirajućim*; u protivnom, dijagram nazivamo *nealternirajućim* [87].

Definicija 6 Čvor (link) sa bar jednim alternirajućim dijagramom zove se *alternirajući čvor (link)*; u protivnom, govorimo o *nealternirajućem čvoru (linku)*.

Definicija 7 Ako svakom preseku čvora K promenimo znak (tj. odnos "iznad-ispod"), tada novonastali čvor zovemo *slikom u ogledalu (eng. mirror-image) čvora K i obeležavamo je sa $!K$* .

Spajanje (direktni proizvod) dva čvora se dobija tako što svakom čvoru odstranimo deo nekog luka, a zatim spojimo četiri slobodna kraja novim lukovima (videti sliku 8 preuzetu iz [97]). Proizvod je nezavistan od mesta spajanja čvorova. Čvor je *složen (ili kompozitni)* ukoliko se može prikazati kao spoj netrivialnih čvorova, a *prost* u suprotnom. Proizvod čvorova K_1 i K_2 se obeležava sa $K_1 \# K_2$

Na slici 8 je prikazan spoj dva ista čvora – trolisnika 3_1 , gde je oznaka 3_1 preuzeta iz *klasične notacije* čvorova. U klasičnoj notaciji simbol n_i^j predstavlja i -ti čvor ili link sa n preseka i j komponenta iz standardnih tablica čvorova i linkova. Kod čvorova je gornji indeks $j = 1$ i izostavlja se iz zapisa. Za

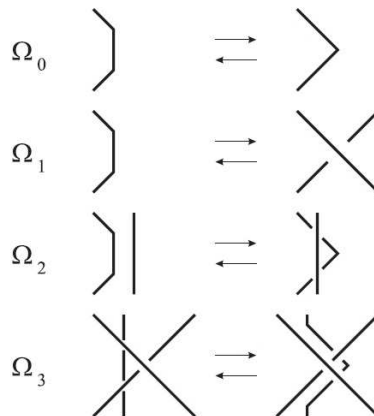


Slika 8: Složeni (kompozitni) čvor $3_1\#3_1$

čvorove, ova notacija je poznata kao Aleksander-Brigsova notacija (J.W. Alexander, G.B. Briggs) [1] i navedena je, kao i *Konvejeva* (J.H. Conway) notacija, u Dodatku A knjige [35]. Aleksander-Brigsova i Konvejeva notacija će biti opisane u poglavlju 1.6 ovog rada.

1.2 Prepoznavanje čvorova

Veliki problem u teoriji čvorova predstavlja njihovo prepoznavanje, tj. određivanje da li su dva čvora K_1 i K_2 ambijentalno izotopna. Problem transformacija čvora u S^3 može se svesti na transformaciju dijagrama u ravni, korišćenjem Rajdemajsterovih (K. Reidemeister) poteza. Rajdemajsterovi potezi Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 i Ω_3 su prikazani na slici 9. Radi izbegavanja divljih čvorova, imajući u vidu da teorija glatkih čvorova i teorija poligonalnih čvorova daju istu klasifikaciju ([31], [46]), Rajdemajsterovi potezi su predstavljeni poligonalnim linijama.

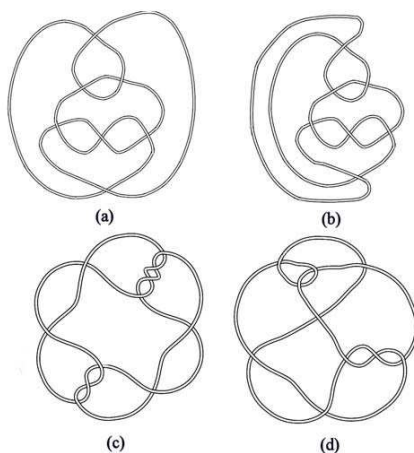


Slika 9: Rajdemajsterovi potezi Ω_0 , Ω_1 , Ω_2 i Ω_3

Rajdemajster je dokazao [19] da su navedeni potezi i njihovi inverzi do-

voljni da se svaka ambijentalna izotopija čvorova prikaže pomoću dijagrama u konačnom broju koraka. Ukoliko pogledamo poteze sa slike, možemo primetiti da potez Ω_1 predstavlja odmotavanje petlje, Ω_2 izvlačenje niti koja prolazi iznad (ili ispod) druge, dok Ω_3 predstavlja pomeranje niti sa jedne strane preseka na drugu. Primetimo da potezi Ω_1 i Ω_2 smanjuju broj preseka dijagrama, prvi za jedan, a drugi za dva.

Dijagram sa minimalnim brojem preseka zvaćemo *minimalnim dijagramom*. Na prvi pogled izgleda da bismo proizvoljni dijagram čvora K mogli redukovati na minimalni dijagram samo uzastopnom primenom poteza Ω_1 i Ω_2 . Međutim, problem nije tako jednostavan. U nekim slučajevima je u procesu redukovanja čvora do njegovog minimalnog dijagrama u nekom trenutku potrebno povećati broj preseka (koristeći inverzne poteze Ω_1 i Ω_2), što znači da broj preseka u nizu dijagrama koji prikazuju proces redukcije ne predstavlja uvek strogo opadajući niz. L. Geric (L. Goeritz) [5] je bio prvi koji je prepoznao čvorove sa takvom osobinom. Na slici 10 su prikazani primeri nečvorova koji u procesu redukovanja na minimalni dijagram, krug, zahtevaju povećanje broja preseka [48]. Ovde možemo uočiti dva problema: da se redukovanje nekog neminimalnog dijagrama do minimalnog dijagrama ne zasniva uvek na uzastopnom smanjivanju broja preseka i da redosled primene Rajdemajsterovih poteza u procesu minimizacije nije unapred određen, tj. jednoznačan.



Slika 10: (a),(b) "Nevaljali nečvor"; (c) Gericov nečvor; (d) "Monstruozni nečvor"

Postoji algoritam koji su predložili V. Haken (W. Haken) i Dž. Hemion (G. Hemion) [4, 36], koji garantuje minimizaciju dijagrama i prepoznavanje nečvora, ali je previše kompleksan za implementaciju. Čak i njegov specijalni slučaj, prepoznavanje nečvora (Haken) je u klasi NP i gornja granica broja Rajdemajsterovih poteza neophodnih za redukovanje dijagrama sa n preseka koji predstavlja nečvor do njegovog minimalnog dijagrama, kruga, iznosi 2^{cn} ,

gde je $c = 10^{11}$.

Minimizacijom ćemo smatrati postupak redukovanja dijagrama čvora do njegovog minimalnog dijagrama.

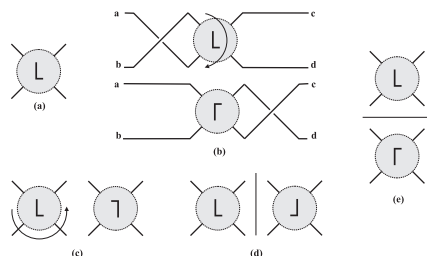
Jedan od najvažnijih pojmova u teoriji čvorova, koji je uveo Konvej [33], je pojam *spleta* (eng. *tangle*).

Definicija 8 *1-dimenziona mnogostrukost smeštena u 3-dimenzioni disk se naziva splet (ili 2-splet) ako se sastoji od dva luka i proizvoljnog broja krugova.*

Isti termin "splet" će označavati i projekciju prostornog spleta u 2-dimenzioni disk.

Intuitivno, *splet* (ili preciznije, 2-splet) u okviru dijagrama nekog čvora (linka) je oblast u projekcionoj ravni R^2 (ili na sferi S^3) okružena krugom takvim da projekcija čvora (linka) seče ovaj krug u četiri tačke. Iz presečnih tačaka izlaze četiri luka u smerovima kompasa: severistok (SI), severozapad (SZ), jugoistok (JI) i jugozapad (JZ) (slika 11).

Spletovi dopuštaju različite transformacije. Jedna od njih je *flip* (eng. *flype*), potez koji je uveo P.G. Tejt (P.G. Tait). Flipovi su veoma poznati iz njegove Flip Hipoteze (1876/77) (ili Tejtove treće hipoteze), koju su dokazali 1990., više od sto godina posle njenog formulisanja, S. Menasko (S. Menasco) i M. Tistltvejt (M. Thistlethwaite) [8, 9]. Tejtova Flip Teorema tvrdi da se svi minimalni dijagrami nekog alternirajućeg čvora (linka) mogu dobiti pomoću flipova iz bilo kog njegovog minimalnog dijagrama, tj. da su svi minimalni dijagrami proizvoljnog alternirajućeg čvora (linka) flip-ekvivalentni. Algoritamski način prikazivanja flipa pomoću niza Rajdemajsterovih pozeza je još uvek nepoznat.



Slika 11: (a) Splet, (b) flip; (c) mutacija; (d) vertikalna mutacija; (e) horizontalna mutacija.

Čvorovi mutanti nastaju kada se na neki od spletova koji pripadaju nekom čvoru primeni odgovarajuća operacija refleksije ili rotacije. Mutacije su nezahvalna pojava, jer dva čvora mutanta imaju veliki broj istih invarijanata, između ostalog sve standardne polinomske invarijante, pa ih je veoma teško razlikovati.

Standardni metod za prepoznavanje čvorova je polinomsko prepoznavanje. Polinomi koji se najčešće koriste su Konvejev, Džonsov (Jones), HOMFLYPT, Kaufmanov polinom sa dve promenljive i obojeni Džonsov polinom. Svi navedeni polinomi imaju isto svojstvo: dva čvora K_1 i K_2 su različita ukoliko im

odgovaraju različiti polinomi. Međutim, ukoliko su za neke čvorove polinomi jednaki, to ne znači da su ti čvorovi međusobno ekvivalentni (ambijentalno izotopni). Čvorove mutante nijedan pomenuti polinom ne može da razlikuje. Detaljniji komentar i kritički osvrt na polinomsko prepoznavanje čvorova biće naknadno izložen u radu (u poglavlju 3.3).

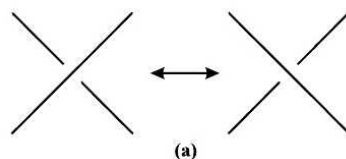
Najbolji program za prepoznavanje čvorova je trenutno *KnotFind*, modul programa *Knotscape* koji je napisao M. Tistltvejt [70]. On je, umesto korišćenja samo osnovnih Rajdemajsterovih poteza, definisao 13 izvedenih poteza i koristeći heuristike napisao program koji uspešno prepoznaje čvorove do 49 preseka. Ovakav program za linkove još uvek ne postoji.

U svom radu [98] Č. Musik (C. Musick) je 2011. predstavio algoritam za prepoznavanje nečvora (baziran na 3-dimenzionoj prezentaciji čvorova), koji u polinomskom vremenu detektuje nečvor. Algoritam je prikazan u njegovoj doktorskoj disertaciji i testiran na zahtevnim dijagramima nečvorova do 45 preseka koje su konstruisali M. Očiai (M. Ochiai) i Haken.

1.3 Broj odvezivosti

O težini izračunavanja broja odvezivosti možda najbolje svedoči i sam naziv te invarijante – *Gordijev* broj. U grčkoj mitologiji postoji legenda koja se vezuje za Aleksandra Velikog i simbolizuje nerešivi problem predstavljen Gordijevim čvorom koji je nemoguće odvezati, a razrešava ga Aleksandar Veliki tako što Gordijev čvor preseca mačem. Pre samog upoznavanja sa procesom odvezivanja, potrebno je naglasiti da ovaj postupak ne treba poistovećivati sa redukovanjem dijagrama čvora do nečvora. U procesu redukovanja dijagrama formira se niz ekvivalentnih čvorova, predstavljenih različitim dijagramima. Prilikom izračunavanja broja odvezivosti transformacije koje se koriste su promene preseka dijagrama i svaka promena preseka daje neki novi čvor.

Za izračunavanje broja odvezivosti korišćemo operaciju *promene preseka*. U tom procesu neophodno je koristiti "hirurgiju", tj. preseći jednu od niti preseka, a zatim je ponovo spojiti kao na slici 12, menjajući presek iz O u U ili obrnuto. Promene preseka su odvezujuće operacije, tj. svaki čvor možemo svesti na nečvor konačnim brojem promena preseka. Lako se dokazuje da se svaki dijagram sa n preseka svodi na nečvor pomoću najviše $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ promena preseka, gde oznaka $\lfloor \cdot \rfloor$ predstavlja ceo deo broja.



Slika 12: Promena preseka

Topoizomeraze su enzimi koji učestvuju u promenama lanaca DNK. Topoizomeraza I raskida jednu nit dvostrukog lanca DNK, dopuštajući da druga nit

prođe kroz novonastali prolaz, a zatim ponovo povezuje početnu nit. Topoizomeraza II omogućava sličan proces, ali raskidanjem obe niti u lancu. Na ovaj način topoizomeraze vrše promene preseka u lancima DNK istovetne sa upravo definisanim promenama preseka u čvorovima, te se teorija čvorova može iskoristiti za izučavanje akcija topoizomeraza. Topoizomeraze su odgovorne za sprečavanje formiranja supernamotaja (eng. *supercoiling*) lanaca DNK, za kondenzaciju hromozoma, prekidanje lanaca prilikom genetske rekombinacije, za razmršavanje isprepletenih lanaca nastalih u procesu mitoze i razne druge procese. "Ne bi bilo iznenađenje kada bi ovi enzimi učestovali u skoro svim biološkim procesima koji uključuju DNK" napisao je u svom radu [55] Dž.K. Vang (J.C. Wang) koji je otkrio topoizomeraze.

Definicija 9

1. Broj odvezivosti $u(D)$ dijagrama čvora D predstavlja minimalni broj promena preseka na dijagramu neophodnih da se dobije dijagram nečvora;
2. $u_m(K)$ čvora K u R^3 je najmanji $u(D_m)$ uzet preko svih dijagrama sa minimalnim brojem preseka D_m koji predstavljaju čvor K ;
3. Broj odvezivosti $u(D)$ čvora K u R^3 je najmanji $u(D)$ uzet preko svih dijagrama D koji predstavljaju čvor K .

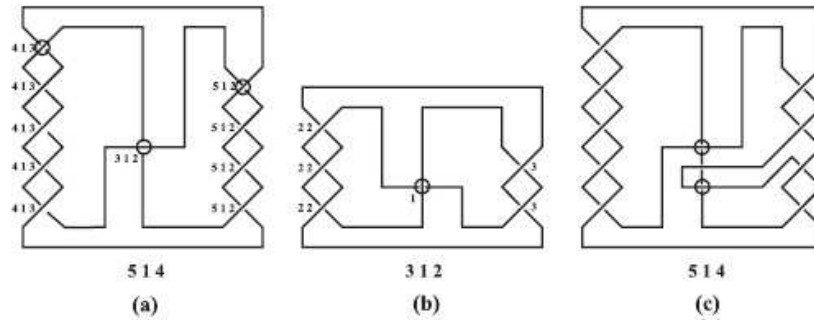
Dijagrame sa minimalnim brojem preseka ćemo u daljem tekstu zvati *minimalnim dijagramima*. Kako svaki čvor K ima beskonačan broj dijagrama i konačan broj minimalnih dijagrama, postavlja se pitanje: da li je broj odvezivosti izračunljiv iz minimalnih dijagrama čvora K ? Postoje dva različita pristupa za dobijanje broja odvezivosti čvora K :

1. prema klasičnoj definiciji, nakon svake promene preseka dozvoljeno je izvršiti ambijentalnu izotopiju, pa nastaviti proces odvezivanja na novodobijenoj projekciji;
2. standardna definicija zahteva da se promene preseka vrše simultano na fiksiranim projekcijama.

Ove dve definicije su ekvivalentne (videti [57]).

Rukovodeći se standardnom definicijom, ako za polazne uzimamo samo minimalne projekcije i sve promene preseka vršimo istovremeno na fiksiranoj projekciji, nećemo uvek dobiti tačan broj odvezivosti. Ovo je ilustrovano poznatim primerom minimalnog dijagrama čvora 10_8 koji su uočili J. Nakaniši (Y. Nakanishi) [42] i S.A. Blejler (S.A. Bleiler) [43]. Čvor 10_8 ima samo jedan minimalni dijagram koji je prikazan na slici 13a.

Prema standardnoj definiciji, ako polazimo od minimalne fiksirane projekcije čvora $5_1 4$ (slika 13a), potrebno je izvršiti najmanje tri istovremene promene preseka da bismo dobili nečvor. Na slici 13a krugovima su obeleženi preseki u kojima je potrebno izvršiti promene da bi se dobio nečvor. Pored svakog preseka zapisan je čvor koji se dobija kada se promeni taj presek. Zahvaljujući



Slika 13: (a) minimalna fiksirana projekcija čvora $10_8 = 5\ 1\ 4$ koja zahteva najmanje tri istovremene promene preseka da bi se čvor odvezao; (b) minimalna projekcija čvora $3\ 1\ 2$ sa brojem odvezivosti 1; (c) neminimalna fiksirana projekcija čvora $5\ 1\ 4$ iz koje se dobija tačan broj odvezivosti $u(5\ 1\ 4) = 2$

fiksiranju projekcija, redosled promena preseka u ovom slučaju ne menja ishod. Vratimo se na početnu minimalnu projekciju čvora $5\ 1\ 4$ prikazanu na slici 13a. Ukoliko promenimo središnji presek (obeženi centralnim krugom) i izvršimo minimizaciju, dobijamo čvor $3\ 1\ 2$ (slika 13b). Za odvezivanje čvora $3\ 1\ 2$ je potrebna samo još jedna promena preseka (obeženog krugom) da bi se dobio nečvor. Dakle, ovim postupkom do nečvora smo stigli menjajući samo dva preseka na minimalnim dijagramima i vršeci minimizaciju nakon svakog koraka. Šta bi se dogodilo ako ne pođemo od minimalne projekcije? Na slici 13c prikazan je neminimalni dijagram čvora $5\ 1\ 4$ kome su potrebne samo dve promene preseka (obeženih krugovima na slici) da bismo iz fiksirane projekcije dobili nečvor. Dakle, polazeći od neminimalne fiksirane projekcije, uspešimo da dobijemo nečvor koristeći samo dve promene preseka, tj. dobili smo tačan broj odvezivosti. Iz ovoga sledi zaključak: iz fiksiranih minimalnih dijagrama ne može se uvek dobiti tačan broj odvezivosti.

Poštujući klasičnu definiciju, tačan broj odvezivosti $u(10_8) = 2$ smo mogli dobiti iz minimalne projekcije prikazane na 13a nizom promena preseka, pri čemu nakon svake promene preseka, vršimo minimizaciju. Odatle sledi inspiracija za hipotezu koju navodimo nakon sledeće definicije:

Definicija 10 Za dati presek v u dijagramu D , koji predstavlja čvor (ili link) K , neka D_v označava dijagram čvora dobijen iz D promenom preseka v .

- a) Broj odvezivosti $u(D)$ dijagrama D je minimalni broj promena preseka na dijagramu D neophodan da se dobije nečvor;
- b) broj odvezivosti čvora K , označen sa $u(K)$ se može definisati kao $u(K) = \min_D u(D)$, gde je minimum uzet preko svih dijagrama čvora K .

c) *BJ*-broj odvezivosti $u_{BJ}(D)$ dijagrama D je definisan rekurzivno na sledeći način:

1. $u_{BJ}(D) = 0$ ako i samo ako D predstavlja nečvor.
2. $u_{BJ}(D) = 1 + \min_{D_v} u_{BJ}(D_v)$ gde je minimum uzet preko svih minimalnih dijagrama čvora prikazanih preko D_v za koje je vrednost $u_{BJ}(D_v)$ već izračunata.

d) $u_m(K) = \min_D u(D)$ gde je minimum uzet preko svih minimalnih dijagrama D koji predstavljaju K .

e) *BJ*-broj odvezivosti $u_{BJ}(K)$ čvora K je $u_{BJ}(K) = \min_D u_{BJ}(D)$ gde je minimum uzet preko svih minimalnih dijagrama D koji predstavljaju K . [87].

Hipoteza 1 *Bernhard-Jablanova hipoteza (1994; 1995):* Za svaki čvor (ili link) K važi $u(K) = u_{BJ}(K)$.

Ovo znači da uzimamo sve minimalne dijagrame čvora (ili linka) K , vršimo pojedinačne promene svih preseka i onda minimizujemo sve dijagrame dobijene promenom preseka. Isti algoritam primenjujemo na prvu, drugu, ... k -tu generaciju dobijenih čvorova. *BJ*-broj odvezivosti je minimalni broj koraka k u ovom rekurzivnom procesu odvezivanja.

Dakle, hipoteza upućuje na sledeći rekurzivni algoritam za određivanje broja odvezivosti u_{BJ} , koji primenjujemo na sve minimalne dijagrame čvora (ili linka) K :

ALGORITAM 1

1. polazimo od minimalne projekcije D čvora (ili linka) K ;
2. vršimo promenu preseka v na njoj;
3. minimizujemo dobijeni dijagram D_v i dobijamo čvor K_- ;
4. ponavljamo korake 2. i 3. za sve preseke v polaznog minimalnog dijagrama D čvora K ;
5. ponavljamo korake 1.-4. za sve novodobijene čvorove K_- , sve dok ne odvežemo prvi.

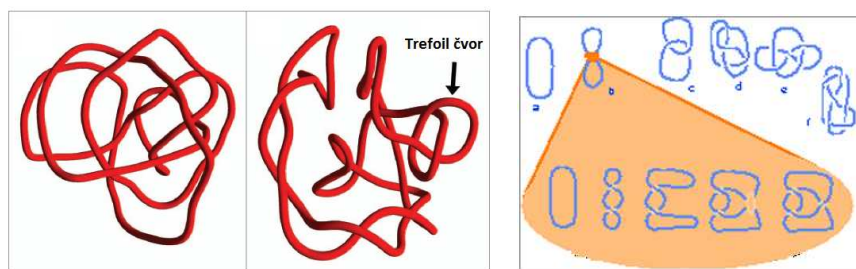
Broj odvezivosti u_{BJ} predstavlja minimalni broj koraka u ovom rekurzivnom procesu koji vodi do dobijanja nečvora. Mnogi brojevi odvezivosti dobijeni na ovaj način su potvrđeni računanjem signature čvora K (ili njegove Rasmusenove signature), gde za obe signature važi $|\frac{\sigma(K)}{2}| \leq u(K)$. Ukoliko je za neki čvor K $|\frac{\sigma(K)}{2}| = u_{BJ}(K)$, sledi $u(K) = u_{BJ}(K)$.

Posledica Tejtove flip-teoreme [56] (Teorema 3) jeste da sve minimalne projekcije D_m alternirajućeg čvora K imaju isti broj odvezivosti $u_{BJ}(D_m)$, te je prilikom izračunavanja broja odvezivosti $u_{BJ}(K)$ dovoljno posmatrati samo jednu minimalnu projekciju. Međutim, to ne važi i za nealternirajuće čvorove i linkove. A. Stoimenov je 2001. uočio nealternirajući čvor 14_{36750} koji ima dve minimalne projekcije sa različitim brojevima odvezivosti u_{BJ} (1 i 2), te odatle sledi da je kod nealternirajućih čvorova neophodno posmatrati sve njihove minimalne dijagrame. U slučaju nealternirajućih čvorova, algoritam za izračunavanje $u_{BJ}(K)$ se može učiniti efikasnijim ako umesto svih dijagrama čvora K koristimo predstavnike flip-klasa ekvivalencije njegovih minimalnih dijagrama (o čemu će više biti reči u petom poglavlju).

1.4 Rastojanja čvorova

Definicija 11 (Gordijevo) rastojanje (distanca ili udaljenost) dva čvora K_1 i K_2 predstavlja minimalan broj promena preseka potreban za konvertovanje čvora K_1 u K_2 . Rastojanje čvorova K_1 i K_2 obeležava se sa $d(K_1, K_2)$.

Kao što smo pomenuli, jedna od primena izračunavanja rastojanja čvorova je proučavanje transformacija koje se vrše u lancima DNK. Pošto su topoizomeraze enzimi koji učestvuju u promenama preseka u lancima DNK, udaljenost dva čvora predstavlja minimalni broj dejstava topoizomeraze na DNK u cilju prelaska jednog lanca (čvora) u drugi.



Slika 14: (a) izdvojeni trolisnik u DNA; (b) učvorena DNK i akcije virusa

Rastojanja čvorova imaju svojstvo metrike:

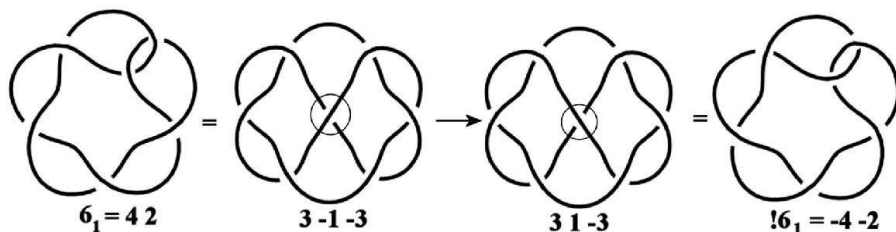
1. $d(K_1, K_2) = 0$ akko $K_1 = K_2$;
2. $d(K_1, K_2) = d(K_2, K_1)$;
3. $d(K_1, K_2) \leq d(K_1, K) + d(K, K_2)$, gde je K proizvoljni čvor [47].

Posebno, važi nejednakost $d(K_1, K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$, gde je $u(K)$ broj odvezivosti čvora K (videti Definiciju 2). Ova osobina je od velikog značaja za određivanje rastojanja dva čvora i može se koristiti kao gornja granica rastojanja.

Specijalan slučaj predstavlja rastojanje nekog čvora od nečvora i tada je ono jednako broju odvezivosti, tj. $u(K) = d(K, 0_1)$, gde je 0_1 oznaka za nečvor. Primitimo da za izračunavanje broja odvezivosti $u(K)$ minimum mora biti uzet preko svih dijagrama D čvora K . U izvesnim slučajevima, kada u procesu konvertovanja K_1 do K_2 prolazimo kroz nečvor (pa je $d(K_1, K_2) = u(K_1) + u(K_2)$), prema Bernhard-Jablanovoj hipotezi postoji šansa da $u(K_1)$ i $u(K_2)$ izračunamo rekursivnim procesom iz minimalnih dijagrama. Nažalost, rastojanja čvorova najčešće se realizuju na neminimalnim dijagramima i ne vode preko nečvora, tj. ne zahtevaju kompletno odvezivanje čvora K_1 i dobijanje čvora K_2 iz nečvora pomoću niza promena preseka. Naime, za rastojanja čvorova važi nejednakost trougla $d(K_1, K_2) \leq d(K_1, 0_1) + d(0_1, K_2) = u(K_1) + u(K_2)$, ali je gotovo uvek zadovoljena stroga nejednakost $d(K_1, K_2) < u(K_1) + u(K_2)$.

Udaljenost čvora $6_1 = 42$ od njegove slike u ogledalu $!6_1 = -4 -2$ je 1, ali se ne može realizovati na minimalnim dijagramima. Na slici 15 je prikazan čvor 6_1 , njegov neminimalni dijagram na kome je potrebno izvršiti jednu promenu preseka (obeleženu krugom), dijagram dobijen nakon te promene preseka koji predstavlja čvor $!6_1$ i na kraju minimalna projekcija čvora $!6_1$. Na slici se lako može videti da se nijedan od 6 preseka minimalnog dijagrama ne može promeniti i na taj način početni čvor konvertovati do njegove slike u ogledalu, te se promenama preseka na minimalnom dijagramu svakako ne ostvaruje odgovarajuće rastojanje 1 čvora 6_1 od njegove slike u ogledalu $!6_1$.

Naravno, konverziju čvora 6_1 u $!6_1$ moguće je izvršiti na neekonomičan način, odvezivanjem čvora 6_1 , svodenjem na nečvor (krug) i njegovom konverzijom u čvor $!6_1$. U tom slučaju, posredstvom nečvora, pošto je $u(6_1) = u(!6_1) = 1$, za konverziju čvora 6_1 u $!6_1$ posredstvom nečvora bile bi potrebne dve promene preseka.



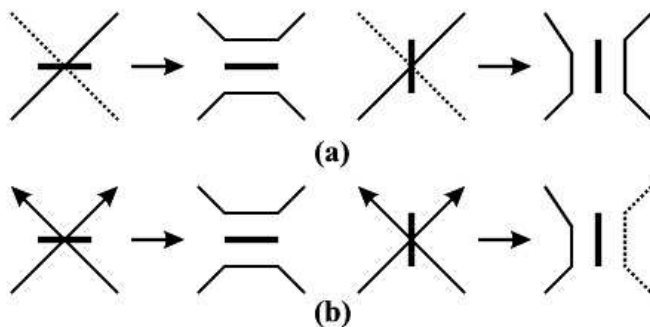
Slika 15: Čvor 6_1 i njegova slika u ogledalu $!6_1$ na rastojanju 1

Tablice rastojanja čvorova (eng. *strand passage metric tables*) sadrže izračunate vrednosti rastojanja između čvorova sa određenim brojem preseka. Neke od vrednosti rastojanja čvorova su još uvek nepoznate, ali se može na neki način proceniti gornja ili donja granica rastojanja. Te granice se takođe unose u tablice. U daljem radu daćemo pregled trenutnih rezultata navedenih u tablicama, izvršiti kritički osvrt na način njihovog određivanja, predložiti nove ideje i algoritme za računanje rastojanja čvorova i navesti dopunjene tablice.

Rastojanja zasnovana na promenama preseka ćemo dalje nazivati *Gordijevim*

rastojanjima, da bismo ih razlikovali od *s*-rastojanja dobijenih zaravnjivanjem koja ćemo upravo uvesti. Za Gordijeva rastojanja se koristi i naziv *obična rastojanja* ili samo *rastojanja*.

Svaki presek može biti razrešen (eliminisan) njegovim *zaravnjivanjem* (eng. *smoothing*). Zaravnjivanje preseka možemo poistovetiti sa postavljanjem dvostranog ogledala u tački preseka. Na slici 16 prikazano je razrešavanje različitih preseka zaravnjivanjem i ishodi ovakvih zaravnjivanja. *Orijentisano* zaravnjivanje čuva broj komponenata čvora ili linka. Ukoliko se ogledalo postavlja u preseku dve komponente nekog linka, bez obzira da li se postavlja vertikalno ili horizontalno, broj komponenata se smanjuje za jedan, tj. komponente koje sadrže presek se spajaju u jednu (slika 16a). Ako se ogledalo postavlja u samopreseku jedne krive (komponente), radi očuvanja broja komponenata, neophodno je voditi računa o orijentaciji krive i položaju ogledala. Na slici 16b se može videti da, u zavisnosti od položaja uvedenog ogledala u tački saopreseka jedne komponente, može se očuvati broj komponenata ili se ta komponenta može podeliti na dve. Ovakvo *neorijentisano* zaravnjivanje može očuvati broj komponenata ili ga uvećati za jedan.

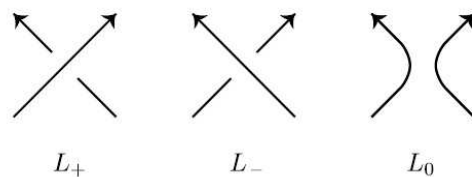


Slika 16: Zaravnjivanje u preseku (a) dve različite krive; (b) samopreseku jedne krive [87].

Oznakama L_+ , L_- i L_0 ćemo obeležavati tri linka koji su identični svuda sem u jednom preseku, gde su preseci redom prikazani na slici 17. Trojku (L_+, L_-, L_0) nazivamo *skein trojkom* (eng. *skein triple*). *Skein* je izraz koji je ranije korišćen kao mera za dužinu kanapa.

Skein relacije su relacije među stanjima preseka. Vidimo da *skein* relacije, koje služe za izračunavanje polinomskih invarijanata čvorova (Konvejevog, Aleksanderovog, Džonsovog, HOMFLYPT ili Kaufmanovog polinoma), koriste zaravnjivanje preseka.

Definicija 12 Broj odvezivosti, koji se dobija zaravnjivanjem preseka (eng. *smoothing number*) dijagrama D čvora K , predstavlja minimalan broj potrebnih zaravnjivanja preseka čvora K da bi se dobio dijagram nečvora. Broj odvezivosti dobijen zaravnjivanjem preseka čvora K predstavlja minimum brojeva odvezivosti



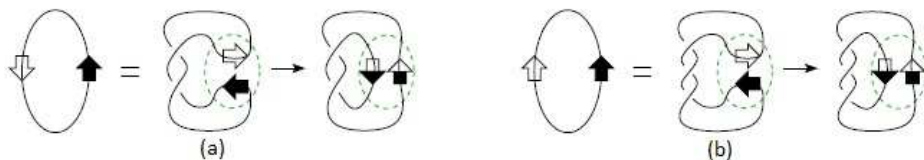
Slika 17: Skein trojka

dobijenih zaravnjivanjem preseka svih njegovih dijagrama. Ovaj broj odvezivosti nazivamo s -brojem odvezivosti čvora K .

Definicija 13 Rastojanje dva čvora K_1 i K_2 nastalo zaravnjivanjem (eng. smoothing distance), predstavlja minimalan broj zaravnjivanja preseka potrebnih za konvertovanje čvora K_1 u K_2 . Takvo rastojanje čvorova K_1 i K_2 nazivamo s -rastojanjem.

Specijalno, s -rastojanje između čvora K_1 i nečvora 0_1 predstavlja s -broj odvezivosti čvora K_1 .

Rekombinaze su proteini koji presecaju DNK lanac na dva mesta i uzrokuju promene kao što su brisanje/umetanje, inverzija, translokacija i kasetna razmena. Na slici 18 su prikazane akcije rekombinaza koje prouzrokuju inverziju i brisanje nad lancem [94]. Dž. Hoste (J. Hoste), J. Nakaniši i K. Taniyama (K. Taniyama) su uveli $H(n)$ -pokret [54], koji ćemo kasnije analizirati i uočiti paralelu između dejstva rekombinaza i specijalnog slučaja $H(n)$ -pokreta, konkretno $H(2)$ -pokreta. Dalje, biće pokazana ekvivalentnost zaravnjivanja preseka sa $H(2)$ -pokretom. Na taj način rastojanja čvorova, dobijena zaravnjivanjem preseka, mogu biti korišćena za proučavanje dejstva rekombinaza na lance DNK.



Slika 18: Čvorovi i linkovi dobijeni dejstvom rekombinaza (a) inverzijom; (b) brisanjem

Pored izračunavanja Gordijevih rastojanja čvorova, ovde će biti izvršen osvrt na dosadašnje rezultate u tablicama s -rastojanja čvorova, predloženi novi načini njihovog izračunavanja i izloženi novi rezultati dobijeni tim metodima.

1.4.1 Tablice rastojanja čvorova

Primenom različitih metoda za određivanje rastojanja proizvoljnih čvorova, kao rezultate možemo očekivati parove čvorova za koje imamo potvrđena konkretna rastojanja na kojima se nalaze, dok za neke parove kao rezultat dobijamo samo procenjeni interval u kome se rastojanje nalazi. Takve rezultate možemo organizovati i prikazati u listama ili tablicama rastojanja.

U ovom radu, tablice Gordijevih i s -rastojanja biće prikazane u skladu sa sledećim formatom i opštim pravilima.

U 0-toj vrsti i 0-toj koloni matrice $A[i, j]$ predstavljeni su čvorovi u *Aleksander-Brigsovoj* notaciji (za čvorove do 10 preseka [35]) i *KnotScape* notaciji (za čvorove sa više od 10 preseka). Presek i -te vrste i j -te kolone ($A[i, j]$) predstavlja rastojanje čvorova $A[i, 0]$ i $A[0, j]$ (ili interval u kome se ono nalazi). Detaljnije o notaciji čvorova pogledati u trećem poglavlju. Pošto biološke nauke prave razliku između čvora K i njegove slike u ogledalu $!K$, prilikom određivanja rastojanja razmatraćemo oba čvora, tj. njegovu "levu" i "desnu" modifikaciju.

Rezultati o parovima čvorova koji se nalaze na Gordijevom rastojanju 1 ili s -rastojanju 1 predstavljeni su listama parova čvorova. U listama parova čvorova koji se nalaze na Gordijevom rastojanju 1 ili s -rastojanju 1, nisu uključeni parovi čvorova koji zadovoljavaju sledeća opšta pravila.

Za Gordijeva rastojanja 1 čvorova:

1. ako je $\{A, K\}$ par čvorova na rastojanju d , pri čemu je A amfihiralan čvor, onda su čvorovi $\{A, !K\}$ takođe na rastojanju d i par $\{A, !K\}$ izostavljamo;
2. ako se u nekom paru čvorova javljaju čvor K i direktni proizvod $K\#K_1$, pri čemu broj odvezivosti čvora K_1 iznosi $u(K_1) = 1$, onda su takvi čvorovi uvek na rastojanju 1 i takve parove izostavljamo;

Za izostavljanje izvesnih parova čvorova iz lista parova čvorova, koji se nalaze na s -rastojanju 1, važe analogna pravila.

Za navedene parove čvorova rastojanja 1 smatramo trivijalnim i zbog toga su izostavljeni iz lista. U tablicama Gordijevih i s -rastojanja čvorova navedena su i trivijalna rastojanja u cilju kompletne popunjenosti tablica.

Jedna od invarijanata koja će biti često korišćena u ovom radu je *signatura čvora ili linka*, koja se definiše pomoću Sajfertove (H. Seifert) matrice čvora (videti [58]).

Definicija 14 *Ako je M dijagonalizovana Sajfertova matrica linka L , razlika između broja pozitivnih i negativnih dijagonalnih elemenata se naziva signatura linka L i označava sa $\sigma(L)$.*

Neke od bitnih osobina signature su:

1. $\sigma(L_1\#L_2) = \sigma(L_1) + \sigma(L_2)$ za svaka dva linka L_1, L_2 ;

2. $\sigma(L) = -\sigma(!L)$, gde je $!L$ is slika u ogledalu linka L ;
3. $|\sigma(D_+) - \sigma(D_-)| \in \{0, 2\}$, gde su D_+ i D_- dijagrami linka L koji se razlikuju u samo jednom preseku.

Većina polinoma (Džonsov, HOMFLYPT, Kauffmanov polinom, Kaufmanov polinom sa dve promenljive, itd.) je pretežno u stanju da razlikuje "levu" i "desnu" formu nekog hiralnog čvora K , označenu redom sa K i $!K$. Međutim, postoje tzv. nedetektabilni hiralni čvorovi (videti [87], str. 356), tj. hiralni čvorovi za koje je $P(K) = P(!K)$ za neki od polinoma P . Štaviše, postoje hiralni čvorovi čiju hiralnost ne detektuje nijedan polinom. Među čvorovima sa $n \leq 9$ preseka jedini takav čvor je 9_{42} , dok je za detektovanje "leve" i "desne" forme svih ostalih čvorova sa $n \leq 9$ preseka dovoljan Džonsov polinom. Ovo znači da ni za jedan od parova u kojima učestvuje čvor 9_{42} i neki drugi hiralni čvor K , tj. za parove oblika $\{K, 9_{42}\}$, na osnovu svih polinomalnih invarijanata izuzev Hovanovljevog polinoma, nismo u stanju da konstatujemo da li se radi o rastojanju $\{K, 9_{42}\}$ ili $\{K, !9_{42}\}$. Međutim, rešenje ovog problema nudi signatura, koja je jednaka 2 za čvor 9_{42} i -2 za čvor $!9_{42}$.

Amfihiralni čvorovi do $n = 9$ preseka su: $4_1, 6_3, 8_3, 8_9, 8_{12}, 8_{17}, 8_{18}, 3_1\#!3_1$ i $4_1\#4_1$.

1.5 Program LinKnot

Računarski alat *Knot2000* (*K2K*), čiji su autori M. Očiai i N. Imafudži (N. Imafuji) (Graduate School of human culture, Nara Womens University, Nara, Japan) je razvijen kao podrška istraživanju u teoriji čvorova. Nastao kao programski paket koji radi pod programom *Mathematica*, sastoji se od 19 funkcija i javno je dostupan.

S. Jablan i R. Sazdanović (Matematički institut, Beograd, Srbija) od 2003. godine razvijaju program *LinKnot* koji proširuje *Knot2000*, prvenstveno kao program koji pruža podršku radu sa čvorovima i linkovima u Konvejevoj notaciji. Umesto grafičkog unosa ulaznih podataka i Dovkerovih (C.H. Dowker) kodova, ovo je prvi i jedini program koji kao ulaz koristi simboličku i ljudima razumljiviju Konvejevu notaciju iz koje se mogu generisati Dovkerovi kodovi i P -podaci (P -data) koji predstavljaju ulaz za *Knot2000* funkcije. Na taj način, sve funkcije iz paketa *Knot2000* ostaju dostupne i u *LinKnot* paketu. *LinKnot* omogućava i rad sa linkovima, a ne samo sa čvorovima i ne postoji ograničenje broja preseka kod čvorova i linkova. Različite notacije čvorova i linkova će detaljnije biti opisane u narednom poglavlju.

Neke od najvažnijih funkcija programa *LinKnot* su crtanje čvorova i linkova, računanje polinomskih invarijanata, rad sa pletenicama (eng. *braids*) i redukovanje čvorova i linkova. Ovo je prvi program koji koristi Bernhard-Jablanovu hipotezu (videti formulaciju Hipoteze 1) za računanje BJ -broja odvezivosti čvorova i linkova. Program obezbeđuje kompletnu bazu alternirajućih i nealternirajućih čvorova i linkova do 12 preseka datih u Konvejevoj notaciji i svih bazičnih poliedara do 20 preseka. Implementirane su funkcije koje za sve alternirajuće čvorove i linkove računaju minimalne Dovkerove kodove, nalaze

neizomorfne projekcije, pružaju mogućnost za rad sa grafovima čvorova i linkova i izračunavaju neke od najbitnijih invarijanata kao što su *broj povezivosti* (eng. *linking number*), *broj sečenja* (eng. *cutting number*), *broj razdvoživosti* (eng. *splitting number*), *signaturu* (videti Definicije 15, 16, 17, 18), itd.

Definicija 15 Broj razdvoživosti (eng. *splitting number*) $s(L)$ linka L je minimalni broj potrebnih promena preseka nad svim projekcijama linka L neophodnih da bi se dobio razdvojeni link, tj. link sa odvojenim komponentama, gde komponente ne moraju da budu nečvorovi [87].

Definicija 16 Neka su c_1 i c_2 dve komponente linka L . Broj povezivosti (eng. *linking number*) ovih komponentata je apsolutna vrednost zbira znakova njihovih preseka podeljena sa 2. Broj povezivosti linka L je zbir brojeva povezivosti svih njegovih komponentata [87].

Definicija 17 Džonsov polinom $V(L; t) \in Z[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ [52] za orijentisani link L je invarijanta klase izotopije linka L i definiše se na sledeći način:

$$V(U; t) = 1; \quad (1)$$

$$t^{-1}V(L_+; t) - tV(L_-; t) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0; t). \quad (2)$$

gde je U trivijalni čvor, a (L_+, L_-, L_0) skein trojka [102].

Determinanta čvora K definiše se na sledeći način:

$$\det(K) = |V(K; -1)|. \quad (3)$$

Definicija 18 Signatura $\sigma(K)$ čvora K može biti izračunata korišćenjem sledeće aksiome:

$$\sigma(U) = 0; \quad (4)$$

$$\sigma(L_-) - 2 \leq \sigma(L_+) \leq \sigma(L_-) \quad (5)$$

$$(-1)^{\sigma(K)/2} = \text{sign } V(K; -1). \quad (6)$$

gde je U trivijalni čvor, (L_+, L_-, L_0) skein trojka, a $\text{sign } V(K; -1) = \frac{V(K; -1)}{|V(K; -1)|}$ [102].

Glavna odlika programa *LinKnot* je otvaranje vrata *eksperimentalnoj matematici* kao istraživačkom sredstvu za formulisanje (ili negiranje) hipoteza. Ovaj program pruža podršku radu sa beskonačnim familijama i klasama čvorova i linkova, omogućava izračunavanje različitih invarijanata familija i testiranje određenih svojstava. Do svih novih rezultata, dobijenih korišćenjem metoda koje ćemo izložiti u narednim poglavljima u ovom radu smo došli korišćenjem funkcija ovog programskog paketa.

LinKnot je takođe javno dostupan kao programski paket i *webMathematica* aplikacija za dinamičko interaktivno izračunavanje na adresi

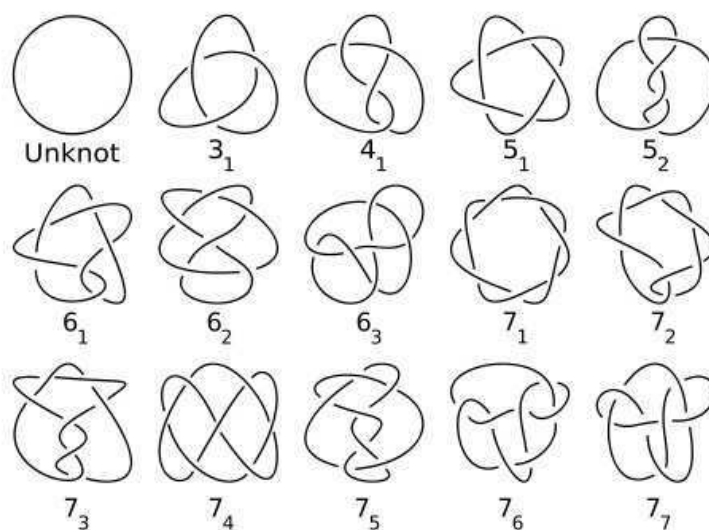
<http://math.ict.edu.rs>

1.6 Notacije čvorova

1.6.1 Klasična notacija

Aleksander i Brigs su 1927. uveli notaciju čvorova koja je poznata kao *klasična* notacija. Tablice čvorova koje koriste klasičnu notaciju, praćene dijagramima čvorova, moguće je naći na kraju gotovo svake od knjiga iz oblasti teorije čvorova. D. Rolfsen 1976. objavljuje knjigu [35] koja u Dodatku A sadrži tablice čvorova i pored klasične notacije, upotrebljava i Konvejevu notaciju koja je uvedena u radu [33]. Pored čvorova sa $n \leq 10$ preseka, Rolfsenove tablice sadrže i linkove sa $n \leq 9$ preseka, gde n_i^j predstavlja i -ti čvor ili link sa n preseka i j komponentata. Za čvorove se indeks j izostavlja. Osnovne prednosti Rolfsenovih tablica u odnosu na ostale su što njegove tablice sadrže i linkove do $n = 9$ preseka i što koriste i Konvejevu notaciju.

Klasična notacija klasifikuje čvorove po broju preseka. Da bi se čvorovi imenovali, neophodno je prvo napraviti bazu (tablice) čvorova. U svojim tablicama Rolfsen navodi čvorove do $n = 10$ preseka, pa se ove tablice mogu prihvatiti kao standard. Na slici 19 su predstavljeni svi čvorovi do $n = 7$ preseka u Aleksander-Brigsovoj notaciji. Sa ove slike možemo uočiti da su svi čvorovi sa $n \leq 7$ preseka alternirajući. Prvi nealternirajući čvorovi javljaju se za $n = 8$, počev od čvora 8_{19} . Najmanji nealternirajući link je 6_3^3 . Pored navedenih čvorova, postoji 21 čvor sa $n = 8$ preseka, 49 čvorova sa $n = 9$ preseka i 165 čvorova sa $n = 10$ preseka. K. Perko je pronašao duplikat u ovim tablicama – čvorove 10_{161} i 10_{162} , pa ova dva čvora nose naziv "Perkov par".



Slika 19: Čvorovi sa $n \leq 7$ preseka

Prve tablice čvorova do $n \leq 11$ preseka izveli su P.G. Tejt, T.P. Kirkman i K.N.Litl (C.N. Little) krajem XIX veka. Nakon bezuspešnih pokušaja J.B. Listinga [7] da konstruiše invarijantu čvorova zasnovanu na dijagramima i njihovim regionima, prva polinomska invarijanta, Aleksanderov polinom, korišćena je u knjizi K. Rajdemajstera *Knotentheorie* za razlikovanje čvorova. Na kraju ove knjige nalaze se tablice čvorova do $n = 9$ preseka. U knjigama koje sadrže tablice čvorova, oni su najčešće praćeni i polinomialnim invarijantama koje ih razlikuju. Tako, u Rolfsenovoj knjizi uz čvorove i linkove i njihove dijagrame su navedeni (koncizni) Aleksanderovi polinomi, u knjizi L. Kauffmana [20] navedeni su L -polinomi, itd. Tabelačija čvorova sa $n > 11$ postala je moguća tek nakon pojave računara. Izvođenje čvorova sa $n \leq 16$ preseka ostvareno je primenom računarskog programa *KnotScape* [70]. Njihovo izvođenje opisano je u radu *The First 1,701,936 Knots* [10], čiji su autori Dž. Hoste, M.Tistltvejt i Dž. Viks (J. Weeks).

Za čvorove do $n = 16$ preseka koristi se *KnotScape* notacija. Ova notacija nosi naziv po pomenutom programu koji je poslužio za izvođenje ovih čvorova i koji sadrži bazu čvorova i linkova do $n = 16$ preseka. $K13a1$ u *KnotScape* notaciji označava prvi alternirajući (a) čvor (K) sa $n = 13$ preseka. $L15n2$ označava drugi nealternirajući (n) link (L) sa $n = 15$ preseka u skladu sa tablicama linkova koje je izveo M. Tistltvejt.

Za upotrebu klasične notacije neophodno je prisustvo baze čvorova. Na osnovu same oznake nije moguće rekreirati (nacrtati) čvor, tj. znati o kom se čvoru radi. Za čvor dat u ovoj notaciji, neophodno je identifikovati ga u bazi na osnovu oznake. Kako je u bazi, tj. tablicama, takođe prisutna i slika samog čvora, tek nakon pretrage tablica možemo znati kako čvor zaista izgleda. U Rolfsenovim tablicama svi alternirajući čvorovi prikazani su dijagramima koji odgovaraju njihovim Konvejevim simbolima. Međutim, to nije slučaj sa nealternirajućim čvorovima ili svim alternirajućim i nealternirajućim linkovima. Na primer, dijagrami nealternirajućih algebarskih čvorova 8_{19} , 8_{20} i 8_{21} su svi izvedeni iz dijagrama alternirajućeg nealgebarskog čvora 8_{17} (o klasifikaciji čvorova na racionalne, Montezinosove, algebarske, nealgebarske, itd. videti podpoglavlje 1.6.4). Zapravo, svi dijagrami čvorova do $n = 9$ preseka i kod Rolfsena i kod svih ostalih autora, koji ih navode, kopirani su iz Rajdemajsterove knjige [19]. Tražajući za nekim obrascem koji eventualno postoji u formiranju tablica čvorova, možemo jedino uočiti da su na početku svih tablica navedeni racionalni čvorovi. Nakon racionalnih čvorova, nemoguće je uočiti bilo kakav obrazac u formiranju tablica koji ukazuje na klasifikaciju čvorova.

Iako klasična notacija ne pruža nikakvu algebarsku informaciju o samom čvoru ili linku, osim broja preseka i broja komponentata, to je notacija koja se najčešće koristi.

1.6.2 Numerička kodiranja

U ovom delu biće dat pregled najpopularnijih načina za numeričko kodiranje čvorova i linkova. Biće napravljen osvrt na ograničenja koja pružaju ovakvi načini notacije pri izučavanju transformacija čvorova i linkova.

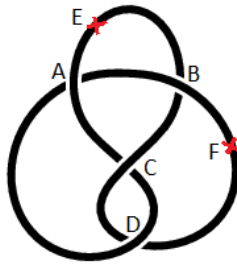
K.F. Gaus (C.F. Gauss) je bio prvi koji je posmatrao čvorove kao matematičke objekte i predložio način njihovog numeričkog kodiranja.

Prikažaćemo primer generisanja Gausovog koda na čvoru 4_1 (čvoru osmici, prikazanom na slici 20). Posmatrajući dijagram čvora kao zatvorenu krivu, prvi korak je uvođenje orijentacije krive koju obilazimo i dodeljivanje nekog naziva (npr. slova ili broja) svakom preseku. Zatim je potrebno izabrati proizvoljnu tačku krive različitu od preseka i započeti obilazak iz nje (na primer, polazeći iz tačke E na slici 20). Prilikom obilaska krive u određenom smeru, potrebno je zapisati redosled preseka na koje nailazimo, dok se svaki presek ne obiđe dva puta, tj. dok se ne vratimo u polaznu tačku. Tada se algoritam završava. Pošto kroz svaki presek prolazimo dva puta, prvi put prolazimo preko gornje, a drugi put preko donje niti ili obratno. Sekvenca (reč) koja odgovara obilasku krive, ukoliko se polazi iz tačke E , jeste $\{A, C, D, A, B, D, C, B\}$ i ova reč predstavlja Gausov kôd senke čvora 4_1 . Da bismo dobili Gausov kôd čvora 4_1 ovaj reči moramo pridružiti dodatnu informaciju o presecima kroz koje prolazimo (O ili U) i znake preseka. Primitimo da Gausov kôd nije jednoznačno određen i zavisi od izbora orijentacije i polazne tačke. Uzimanjem tačke F za početnu i koristeći istu orijentaciju, dobijamo Gausov kôd senke čvora 4_1 koji glasi $\{B, A, D, C, A, B, C, D\}$. Oznake " $\{$ " i " $\}$ " u notaciji Gausovih kodova (a kasnije i Dovkerovih) preuzete su iz *Mathematica* notacije za obeležavanje listi. Dakle, vitičaste zagrade se u ovom slučaju koriste za obeležavanje listi, a ne skupova.

Slično kao u slučaju Dovkerovih kodova, jednoznačnost prikazivanja čvorova Gausovim kodom možemo postići ako svaki čvor prikažemo njegovim *minimalnim Gausovim kodom*, gde kao minimalni kôd biramo reč koja je prva u leksikografskom poretku među svim rečima koje predstavljaju Gausove kodove nekog čvora.

Umesto slovnih oznaka, u programu *LinKnot* korišćene su numeričke oznake preseka, a Gausov kôd je snabdeven dodatnim informacijama o odnosima "iznad"- "ispod" i znacima preseka. U takvom sistemu označavanja, jedan od mogućih Gausovih kodova čvora 4_1 biće $O1+U2+O3-U4-O2+U1+O4-U3-$, a njegov minimalni Gausov kôd će biti $O1+U2-O3-U1+O4+U3-O2-U4+$. Ovakvi Gausovi kodovi mogu biti korišćeni i za numeričko kodiranje virtualnih čvorova [18].

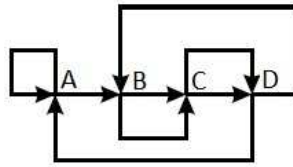
Gausov kôd krive sa n preseka je dužine $2n$ i predstavlja permutaciju oznaka njegovih preseka, gde se svaka oznaka pojavljuje dva puta. Međutim, nije svaka (proizvoljna) permutacija ostvariva, tj. ne možemo iz svake ovakve permutacije konstruisati senku ili dijagram čvora. Permutacije iz kojih je moguće dobiti dijagrame čvorova nazivamo *ostvarivim* (realizabilnim), a ostale *neostvarivim* (nerealizabilnim). Na primer, kod $\{A, B, A, B\}$ je neostvariv. Problemom ostvarivosti Gausovih kodova bavili su mnogi matematičari, počev od M. Dena (M. Dehn, 1936). Ovaj problem ima poseban značaj u teoriji virtualnih čvorova čiji je začetnik L. Kaufman. Pored planarnosti grafa koji odgovara nekom kodu, kao kriterijum ostvarivosti koda možemo koristiti i *kriterijum parnosti*: između svake dve pojave istog preseka (slova) u Gausovom kodu nalazi se uvek paran



Slika 20: Čvor osmica

broj slova, tj. ciklično rastojanje svakog slova od samog sebe u Gausovom kodu je uvek parno. Svakako, ukoliko polazimo od ostvarivog Gausovog koda, iz njega se jednostavnim algoritmom može rekreirati (nacrtati) dijagram (senka) čvora – lukove dijagrama između dva preseka će definisati uređeni parovi određeni sa svaka dva susedna simbola u Gausovom kodu, gde prvi i poslednji član koda takođe smatramo susednim (slika 21).

Gausov kôd nazivamo *redukovanim* ukoliko nema petlji. Na slici 21 možemo videti senku čvora trolisnika čiji je Gausov kod $\{\{A,B,C,D,B,C,D,A\}\}$. On ima petlju u okolini preseka sa oznakom 1. Petlja se prepoznaje u Gausovom kodu na osnovu uzastopne pojave istog preseka (slova), gde se prva i $2n$ -ta pozicija takođe smatraju uzastopnim. Odstranjivanje petlji se može izvršiti brisanjem svih pojava preseka koji određuju petlje.

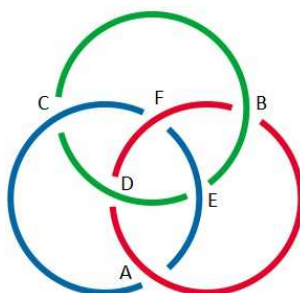


Slika 21: Senka trolisnika koja odgovara neredukovanom Gausovom kodu $\{\{A,B,C,D,B,C,D,A\}\}$

Kod Gausovog koda za linkove neophodno je za svaku komponentu izabrati početnu tačku i orijentaciju komponente. Posmatrajući Boromejske prstenove 6_2^3 na slici 22, ako za početne tačke komponentata i njihove orijentacije uzmemo A i \overrightarrow{AB} , A i \overrightarrow{AE} i B i \overrightarrow{BE} dobijamo Gausov kôd

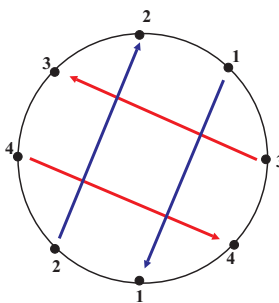
$$\{\{A, B, F, D\}, \{A, E, F, C\}, \{B, E, D, C\}\}.$$

Gausovi kodovi omogućavaju još jednu grafičku interpretaciju: *tetivne dijagrame* (eng. *chord diagrams*). Preseci čvora prikazani su pomoću n tačaka na orijentisanom krugu, pri čemu se svaki presek javlja dva puta i predstavljen je parom tačaka označenih istim brojem i spojenih orijentisanim tetivama,



Slika 22: Boromejski prstenovi 6_2^3

pri čemu je svaka tetiva orijentisana od O ka U . Znaci preseka su prikazani dodatnim oznakama pridruženim svakoj tetivi ili različitom bojom tetiva (npr. plavom za $+1$ preseke, a crvenom za -1) (slika 23).



Slika 23: Tetivni dijagram čvora 4_1 datog Gausovim kodom $O1 + U2 + O3 - U4 - O2 + U1 + O4 - U3-$

Gausov kôd za čvorove se može svesti na *Dovkerov kôd* sledećim algoritmom [87]:

ALGORITAM 2

1. svaki simbol (slovo ili broj) se pojavljuje dva puta u Gausovom kodu – izdvojiti njegove pozicije u uređeni par;
2. svaki par sadrži parni i neparni broj – postaviti neparni broj za prvi u uređenom paru;
3. sortirati uređene parove u rastućem poretku;
4. izdvojiti samo druge elemente uređenih parova u listu.

Lista dobijena na kraju predstavlja Dovkerov kôd senke čvora. Posmatrajmo Gausov kôd senke čvora osmice sa slike 20 $\{\{A, C, D, A, B, D, C, B\}\}$.

Pozicije simbola A su $\{1, 4\}$, simbola C su $\{2, 7\}$, simbola D su $\{3, 6\}$, a simbola B $\{5, 8\}$. Odgovarajući uređeni parovi tako da neparan broj zauzima prvo mesto su $\{1, 4\}$, $\{7, 2\}$, $\{3, 6\}$, $\{5, 8\}$. Njihova sortirana lista je $\{1, 4\}$, $\{3, 6\}$, $\{5, 8\}$, $\{7, 2\}$. Niz njenih poslednjih članova, koji predstavlja Dovkerov kôd, je $\{4, 6, 8, 2\}$. U Dovkerovom kodu kao prvi član obično navodimo i broj preseka, pa je Dokerov kôd izveden iz Gausovog koda za senku čvora 4_1 sa slike 20 ima oblik $Dow = \{\{4\}, \{4, 6, 8, 2\}\}$, gde broj 4 označava broj preseka čvora. Dovoljnu dodatnu informaciju o čvoru predstavljaju oznake tipa preseka O ili U . Pri tome koristimo sledeće pravilo: u svim presecima koji prate alterniranje dodeljujemo broj $+1$ (pozitivan znak), tj. u Dovkerovom kodu alternirajućeg čvora svi brojevi će biti pozitivni; presecima koji ne prate alterniranje (tj. koji su invertovani u odnosu na alternirajući čvor tako da je O -presek zamenjen U presekom i obratno) dodeljujemo broj -1 , tj. negativan znak. Ovaj način dodeljivanja znakova presecima prati odnose O i U i ne treba ga mešati sa znacima preseka čvorova prikazanim na slici 5. Pošto je ovakav način kodiranja čvorova korišćen u programu *KnotScape*, čiji je jedan od autora M. Tistltvejt, ovakvi Dovkerovi kodovi često se nazivaju i DT-kodovi (Dovker-Tistltvejtovi kodovi), a sama notacija se naziva DT-notacija.

Druga mogućnost je da svakom preseku u Dovkerovom kodu pridružimo znak preseka u skladu sa dogovorom prikazanim na slici 5 i tada dobijamo Dovkerov kôd sa znacima preseka. Uočimo da će u tom slučaju negativni znaci moći da se pojave i u Dovkerovom kodu nekog alternirajućeg čvora. Na primer, čvor 4_1 ima dva pozitivna i dva negativna preseka, pa će njegov Dovkerov kôd sa znacima preseka biti $\{\{4\}, \{6, -8, 2, -4\}\}$.

Dokerov kôd za linkove se izvodi na sličan način, polazeći od njihovih Gausovih kodova. Ukoliko u prvom koraku algoritma za kreiranje Dokerovog koda dobijemo neki uređeni par sa elementima iste parnosti, tada je potrebno ciklično zarotirati za jedno mesto komponentu linka u Gausovom kodu čiji je element određen drugim elementom uređenog para, pa krenuti ispočetka sa algoritmom za generisanje Dokerovog koda. Gausov kod za Boromejske prstenove sa slike 22 je $\{\{A, B, F, D\}, \{A, E, F, C\}, \{B, E, D, C\}\}$. Pozicije simbola A su $\{1, 5\}$, pa drugu komponentu moramo zarotirati, tj. započeti algoritam iznova za kôd $\{\{A, B, F, D\}, \{E, F, C, A\}, \{B, E, D, C\}\}$. Sada su pozicije simbola $\{\{1, 8\}, \{2, 9\}, \{3, 6\}, \{4, 11\}, \{5, 10\}, \{7, 12\}\}$ i parnost se ne ponavlja. Dalje, uređivanjem parova i sortiranjem liste dobijamo $\{\{1, 8\}, \{3, 6\}, \{5, 10\}, \{7, 12\}, \{9, 2\}, \{11, 4\}\}$, pa je $Dow = \{\{2, 2, 2\}, \{8, 6, 10, 12, 2, 4\}\}$, gde brojevi u prvoj listi predstavljaju niz dužina komponenta, a elementi druge liste niz poslednjih članova sortirane liste.

LinKnot funkcija `fDowCodes` izračunava sve ostvarive Dokerove kodove čvorova i linkova realizovanih u ravni R^2 .

Umesto oznaka O i U korišćenih u Gausovim kodovima možemo koristiti i znake $+$ i $-$. U tom slučaju dobijamo *označene Gausove kodove*. Označen Gausov kôd za alternirajući čvor sa slike 20 jeste $\{\{A, -C, D, -A, B, -D, C, -B\}\}$. Primetimo da znaci simbola u označenom Gausovom kodu alternirajućeg čvora takođe alterniraju, tj. naizmenično prelaze iz pozitivnih u negativne. Sa ciljem pojednostavljanja ovakvog zapisa, kao i u slučaju DT-kodova,

može se uvesti pravilo da se simbolima ne dodeljuju znaci ukoliko je čvor alternirajući, a u slučaju nealternirajućeg čvora ili linka suprotan znak stiču samo oni preseki u kojim se znak razlikuje od znaka koji bi imali u alternirajućem dijagramu tog čvora.

Najzad, svakom preseku u Gausovom kodu možemo dodeliti i znak preseka. Ovakve Gausove kodove nazivaćemo *Gausovim kodovima sa znacima preseka*. Najkompletniju informaciju daje kompletan Gausov kôd (npr. $O1 + U2 + O3 - U4 - O2 + U1 + O4 - U3-$) koji pruža informaciju o tipu svih preseka (O ili U) i znacima preseka.

Gausov kôd deluje na prvi pogled veoma pogodnim za praćenje promena preseka i zaravnjivanja preseka čvorova. Posmatrajmo označeni Gausov kôd čvora sa slike 20. Ako se vrši promena preseka C , tada je u Gausovom kodu početne krive neophodno samo promeniti znak ispred svakog pojavljivanja simbola C da bi se dobio novi kôd: $\{\{A, C, D, -A, B, -D, -C, -B\}\}$.

Ako je u nekom preseku čvora sa slike izvršeno orijentisano zaravnjivanje (zaravnjivanje koje čuva broj komponenata), kako će to uticati na njegov Gausov kôd? Zamislimo vertikalno ogledalo postavljeno u preseku D koje simulira zaravnjivanje. Tada presek A prestaje da postoji, levi luk sa krajevima C i D se spaja sa lukom DA , a desni luk CD se spaja sa lukom DB .

Teorema 1 *Za dati Gausov kôd G dijagrama čvora, Gausov kôd G' dijagrama nad kojim je izvršeno zaravnjivanje u preseku p ($p \in 1, \dots, n$) se dobija obrtanjem niza simbola između dva pojavljivanja simbola p , a p se briše [136].*

Na taj način, prilikom obilaska krive iz početne tačke E , dobijamo kôd $\{\{A, C, B, A, C, B\}\}$. Ukoliko je potrebno zadržati informacije o preseku u kome je izvršeno zaravnjivanje, tada ga možemo i zadržati u zapisu sekvence, ali ga na neki način označiti nepostojećim (npr. nadvući ga): $\{\{A, C, \overline{D}, B, A, \overline{D}, C, B\}\}$. Niz Gausovih kodova, koji se dobija primenom zaravnjivanja preseka, nazivamo *nizom zaravnjivanja*. Primena zaravnjivanja preseka na dijagramu prikazanom Gausovim kodom čuva ostvarivost koda. U ovom radu, posmatraćemo samo klasične čvorove za koje zaravnjivanje preseka predstavlja odvezujuću operaciju.

Svaka notacija ima svoje prednosti i nedostatke. Velika prednost ovakve notacije je jednostavan algoritam za zaravnjivanje preseka koji garantuje očuvanje broja komponenata. Minimalni Gausovi i Dovkerovi kodovi jedinstveno definišu čvor i predstavljaju jednostavan ulaz za računarske programe. Prilikom računanja rastojanja čvorova, potrebno je pronaći najkraći put od jednog čvora do drugog, tj. izračunati minimalni broj operacija nad presecima (promena preseka ili zaravnjivanja) potrebnih da se jedan čvor konvertuje u drugi. Najkraći put u ovom slučaju predstavlja minimalni niz čvorova kojim se ostvaruje konvertovanje jednog čvora u drugi. Ova procedura zahteva da se operacije na presecima vrše u svakom od njih, zato što, na žalost, ovakvi kodovi ne pružaju informacije o klasama čvorova, niti o ekvivalentnosti nekih poteza, pa nijedan presek nema prioritet niti se može pretpostaviti da li najkraći put vodi preko njegove promene. Na taj način vršimo mnoštvo suvišnih poteza i neophodno je ispitati i testirati ogroman broj Gausovih kodova dobijenih prome-

nama

pojedinačnih preseka.

Čak i sa sažetijim DT-kodovima ne postizemo veliki napredak. DT-notacija i sva slična kodiranja čvorova (PD-notacija korišćena u programu *KnotAtlas*, pd-notacija korišćena u programu *Knot 2000 (K2K)*, itd.) su zasnovane na numeričkom kodiranju i za sve promene preseka u dijagramu sa n preseka dobijamo 2^n novih kodova dijagrama dobijenih promenama. Takođe, nijedan od ovakvih načina kodiranja ne pruža mogućnost za generalizaciju rezultata dobijenih za neki par čvorova, gde jedan predstavlja originalni čvor, a drugi je dobijen iz njega samo jednom promenom preseka, tj. para čvorova čije je rastojanje 1.

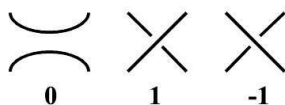
Zbog svega navedenog, u ovom radu za kodiranje čvorova korišćemo simboličku Konvejevu notaciju koja pruža informacije o algebarskim i geometrijskim-topološkim osobinama samog čvora (linka) i omogućava proširenje pojedinačnih rezultata na familije čvorova ili linkova.

1.6.3 Konvejeva notacija

Konvejeva notacija [33], [35], [87] je veoma zahvalna, jer već na prvi pogled zapis čvora u toj notaciji pruža informacije o topologiji čvora i klasi kojoj pripada, tako da iz nje direktno dobijamo informacije o nekim svojstvima čvora ili linka, kao što su prepoznavanje *svetova* (eng. *worlds*) koji su opisani u radu [37]. Konvejeva notacija nam omogućava jednostavan rad sa podfamilijama i familijama čvorova i često iz nje lako dolazimo do informacija o simetriji čvora. Ona nam takođe pruža jednostavan dokaz ekvivalentnosti dva racionalna čvora ili linka, koji se može izvesti na osnovu direktne veze uspostavljene između racionalnih čvorova i linkova u Konvejevoj notaciji sa verižnim razlomcima. Konvejeva notacija je uvedena 1967. u [33] i od tada se veoma efikasno koristi. Program *LinKnot* pruža kompletnu podršku radu sa čvorovima i linkovima u Konvejevoj notaciji.

Prevođenje klasične notacija čvorova i linkova u Konvejevu notaciju omogućava *LinKnot* [87] funkcija `fClassicToCon`. Konvejevi simboli za čvorove do $n = 10$ preseka i linkove sa $n \leq 9$ preseka dati su u Dodatku A knjige [35].

Osnovni gradivni element Konvejeve notacije predstavlja *splet* (eng. *tangle*). Tri osnovna spleta su prikazana na slici 24.

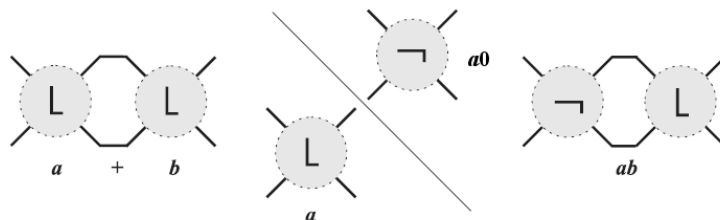


Slika 24: Elementarni spletovi

Svaki složeni splet može biti dobijen primenom sledećih operacija nad spletoivima: *sabiranjem* (eng. *sum*), *proizvodom* (eng. *product*) i *razgranavanjem* (eng. *ramification*).

Kao što smo rekli, *splet* (ili preciznije, 2-splet), u okviru dijagrama nekog čvora (linka), je oblast u projekcionoj ravni R^2 (ili na sferi S^3) okružena krugom takvim da projekcija čvora (linka) seče ovaj krug tačno u četiri tačke. Iz presečnih tačaka izlaze četiri luka u smerovima kompasa: severoistok (SI), severozapad (SZ), jugoistok (JI) i jugozapad (JZ) (slika 11).

Sabiranje spletova a i b se obeležava sa $a + b$ i predstavlja spajanje SI niti spleta a sa SZ niti spleta b i JI niti spleta a sa JZ niti spleta b , kao što je prikazano na levom delu slike 25. Spletovi n i $-n$, gde je $n = 1 + 1 + \dots + 1$, a $-n = (-1) + (-1) + \dots + (-1)$, pri čemu se elementarni spletovi 1 i -1 javljaju n puta, nazivaju se *celobrojnim spletovim* (eng. *integer tangles*) ili *tvistovima*. Posebno, za $n = 2$ ili $n = -2$ celobrojni spletovi, u geometrijskom smislu, predstavljaju *bigone* (dvouglove). Za celobrojne spletove a i b splet $a + b$ odgovara i algebarskom pojmu zbira brojeva: splet $a + b$ je zbir vrednosti a i b (npr. sabiranjem spletova 5 i 3 dobijamo splet 8).

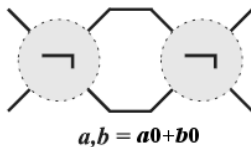


Slika 25: Sabiranje spletova, slika u ogledalu i proizvod spletova

Slika u ogledalu spleta a se obeležava sa $a0$ i dobija se kao odraz spleta a , gde ogledalo predstavlja ravan SZ-JI. Slika u ogledalu prikazana je na središnjem delu slike 25.

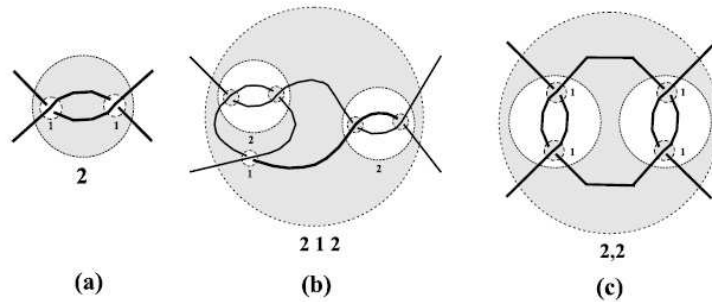
Proizvod spletova a i b obeležava se sa ab (ili sa $a b$) i definiše se korišćenjem već definisanog sabiranja i slike u ogledalu kao $ab = a0 + b$. Proizvod spletova prikazan je na desnom delu slike 25.

Razgranavanje (ili operacija *zarez*) spletova a i b definiše se sa $a, b = a0 + b0$ i prikazana je na slici 26. U tablicama se operacija ramifikacije favorizuje u odnosu na operaciju sabiranja, ali se primenjuje samo na dva ili više operanada u zagradi.



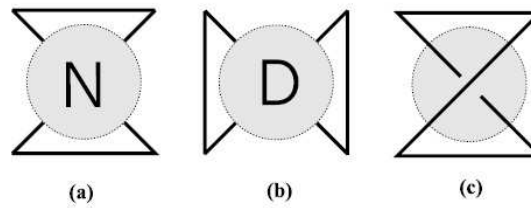
Slika 26: Proizvod spletova

Na slici 27 su prikazani primeri generisanja spletova 2, 2 1 2 i 2, 2.



Slika 27: Spletovi (a) $2 = 1+1$, (b) $2\ 1\ 2 = (1+1)\ 1\ (1+1)$, (c) $2,2=(1+1),(1+1)$.

Splet se može zatvoriti bez uvođenja novih preseka na dva načina (slika 28a,b). Spajanjem (u parovima) niti (SI,SZ) i niti (JI,JZ) dobijamo *brojilačko zatvorenje* (eng. *numerator closure*), dok spajanjem niti (SI,JI) i (SZ,JZ) dobijamo *imenilačko zatvorenje* (eng. *denominator closure*). *Bazični poliedar 1^** koji se dobija kao zatvaranje spleta 1 prikazan je na slici 28c.



Slika 28: (a) Brojilačko zatvorenje; (b) imenilačko zatvorenje; (c) bazični poliedar 1^*

Definicija 19 Racionalni splet je konačan proizvod elementarnih spletova. Racionalni čvor ili link je brojilačko zatvorenje racionalnog spleta [87]. Racionalni splet koji ne počinje sa 1 ili -1 se naziva R-splet.

Definicija 20 Racionalni čvor ili link u Konvejevoj notaciji se zapisuje kao niz prirodnih brojeva $n_1\ n_2\ \dots\ n_k$ koji ne počinje i ne završava se jedinicom. Obrtanje niza definiše isti čvor [87].

Racionalni čvorovi (linkovi) su poznati i pod nazivom kao *4-plats* ili *čvorovi (linkovi) sa dva mosta* (eng. *2-bridge knots (links)*). *Most* (eng. *bridge*) u nekom dijagramu čvora ili linka je svaki luk maksimalne dužine koji sadrži samo O preseke. *Broj mostova* linka L , koji se označava sa $b(L)$ je najmanji broj

mostova uzet preko svih dijagrama linka L [57]. Čvor (link) L je racionalan ako i samo ako je $b(L) = 2$.

LinKnot funkcija `RationalKL` za dato n (koje predstavlja broj preseka) računa Konvejeve simbole i broj svih racionalnih čvorova i linkova sa n preseka.

Svatom racionalnom spletu $n_1 n_2 \dots n_k$ možemo dodeliti verižni razlomak

$$r = \frac{p}{q} = n_k + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_1}}}} \quad (7)$$

gde $r = \frac{p}{q}$ ($NZD(p, q) = 1$) predstavlja *nagib* (eng. *slope*) tog racionalnog spleta. Zatvorenje $n_1 n_2 \dots n_k$ se u tom slučaju obeležava sa $L(\frac{p}{q})$ i ukoliko je p neparno u pitanju je čvor, a u suprotnom se radi o linku.

J.H. Conway je 1969.[33] formulisao teoremu koja uspostavlja veoma važnu vezu između racionalnih čvorova (linkova) i verižnih razlomaka:

Teorema 2 *Dva racionalna spleta su ekvivalentna ako i samo ako njihovi verižni razlomci daju isti racionalni broj ([33]). Neorijentisani racionalni čvorovi i linkovi $L(\frac{p}{q})$ i $L(\frac{p'}{q'})$ su ambijentalno izotopni ako i samo ako:*

1. $p = p'$ i
2. važi jedno od sledeća dva: $q = q' \pmod{p}$ ili $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ ([2])

Dokaz teoreme 2 moguće je naći u radovima [44], [46], [65], [84].

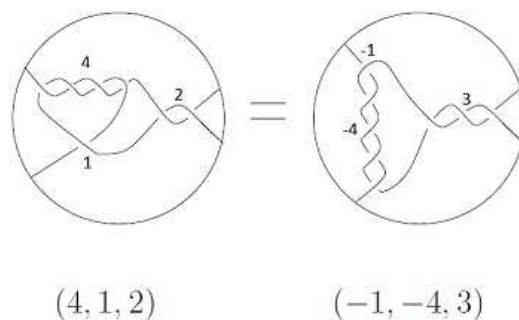
Ova veza između racionalnih čvorova i racionalnih brojeva koji se dobijaju iz odgovarajućih verižnih razlomaka je poslužila kao osnov za izračunavanje svih rastojanja racionalnih čvorova (linkova) dobijenih u [69], [66], [97].

Na slici preuzetoj iz [97] možemo videti primer dva spleta, koji su ekvivalentni na osnovu sledeće jednakosti:

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{14}{5} = 3 + \frac{1}{-4 + \frac{1}{-1}}.$$

Na taj način, rad sa racionalnim čvorovima i njihovo prepoznavanje može se spustiti sa nivoa topologije na algebru verižnih razlomaka. I. Darsi (I. Darcy) i D.V. Sammers (D.W. Sumners) su 1998. [69] objavili tabele rastojanja racionalnih čvorova i njihovih direktnih proizvoda, zaključno sa čvorom 8_8 . U tom radu čitalac može pronaći veoma značajan opis veze između topologije čvorova i DNK.

Svi racionalni čvorovi i linkovi koji su prikazani u Konvejevoj notaciji i čiji zapis sadrži samo pozitivne brojeve (tj. pozitivne celobrojne spletove) su alternirajući. Šta se događa ukoliko u Konvejeve simbole racionalnih čvorova i linkova (tj. čvorova i linkova formiranih konačnom primenom operacije proizvoda na celobrojne spletove) uključimo i celobrojne spletove koji su negativni? Tada dobijamo nealternirajuće racionalne dijagrame koje jednostavno možemo konvertovati u alternirajuće (minimalne) racionalne dijagrame zahvaljujući algebri verižnih razlomaka. *LinKnot* funkcija `RatReduce`, koristeći kao ulaz racionalni



Slika 29: Ekvivalentni spletovi

dijagram dat u Konvejevoj notaciji, koji sadrži i pozitivne i negativne celobrojne spletove, redukuje ovakav dijagram do minimalnog alternirajućeg.

Drugi algoritam, čija se primena znatno ubrzava zahvaljujući verižnim razlomcima, odnosi se na izračunavanje BJ -broja odvezivosti za racionalne čvorove i linkove. Bernhard-Jablanovu Hipotezu primenjujemo na minimalne dijagrame racionalnih čvorova i linkova. Pošto su svi racionalni čvorovi i linkovi alternirajući, za izračunavanje BJ -broja odvezivosti $u_{BJ}(K)$ nekog racionalnog čvora ili linka dovoljno je koristiti samo jedan njegov minimalni dijagram. U svakom minimalnom dijagramu koji je dat Konvejevim simbolom $n_1 n_2 \dots n_j$, gde su svi brojevi n_i ($i \in \{1, 2, \dots, j\}$) pozitivni, svaka promena preseka se svodi na zamenu pozitivnog celobrojnog spleta n_i spletom $n_i - 2$. Nakon ove zamene dobijeni izraz redukujemo pomoću *LinKnot* funkcija **RatReduce**. U skladu sa formulacijom Bernhard-Jablanove hipoteze, isti algoritam primenjujemo na prvu, drugu, \dots k -tu generaciju dobijenih čvorova. BJ -broj odvezivosti je minimalni broj koraka k u ovom rekursivnom procesu odvezivanja. Pri tome, ceo postupak se svodi na promene preseka zamenama $n_i \rightarrow n_i - 2$ i racionalne redukcije, sve dok kao rezultat ne dobijemo neki dijagram čiji je nagib $r = \frac{p}{q}$ jednak 1 ili -1 i koji predstavlja dijagram nečvora. Zahvaljujući tome, za izračunavanje BJ -broja odvezivosti racionalnih čvorova i linkova, koristimo veoma brzu *LinKnot* funkciju **UnR**.

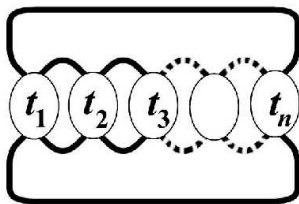
Definicija 21 *Splet je algebarski ako se može dobiti primenom operacija zbira i proizvoda nad elementarnim spletoivima. Čvor ili link je algebarski ako predstavlja brojilačko zatvorenje algebarskog spleta [87].*

Definicija 22 *4-valentni, 4-ivično povezani i najmanje temenski bipovezan planaran graf naziva se bazičnim poliedrom [87].*

Eliminaciju ivica jednog bigona (tretiranog kao graf), tj. identifikaciju njegovih temena nazivamo *kolapsom bigona*. Bazični poliedar [33], [35], [87] čvora (linka) se može dobiti rekursivnim kolabiranjem svih njegovih bigona, dok se

svi ne iscrpe. Bazični poliedar 1^* je već prikazan na slici 28c. Drugi primer bazičnog poliedra (odnosno alternirajućeg linka koji mu odgovara) su Boromejski prstenovi, link 6_2^3 prikazan na slici 22, kome odgovara bazični poliedar 6^* .

Montezinosovi spletovi i njima odgovarajući *Montezinosovi linkovi* dobijaju se primenom ramifikacije na n alternirajućih racionalnih spletova t_i , od kojih barem tri spleta t_k , $k \in 1, 2, \dots, n$ nisu elementarna. Obeležavaju se sa t_1, t_2, \dots, t_n , ($n \geq 3$, $i \in \{1, \dots, n\}$) i prikazani su na slici 30. *Pereca* (eng. *pretzel*) čvor ili link se dobija ukoliko su svi spletovi t_i , ($n \geq 3$, $i \in \{1, \dots, n\}$) celobrojni.



Slika 30: Montezinosov link t_1, t_2, \dots, t_n

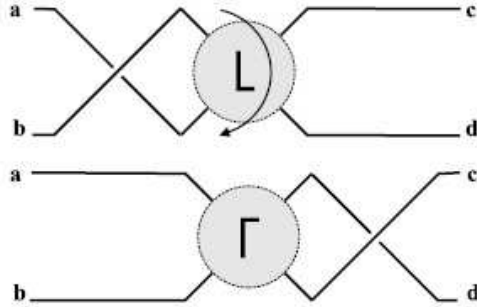
Poliedarski (nealgebarski) čvor ili link se može dobiti iz bazičnog poliedra zamenom njegovih temena spletoivima. Konvejeva notacija za bazični poliedar je ni^{*m} (što je isto što i $ni^{*m}1.1 \dots 1$, pri čemu se elementarni splet 1 koji se nalazi u svakom temenu bazičnog poliedra ni^* javlja n puta). $*m$ je skraćena oznaka za nizove od m zvezdica korišćene u originalnoj Konvejevoj simbolici, a i je redni broj bazičnog poliedra u listi bazičnih poliedara sa n preseka. Čvor koji je dobijen iz bazičnog poliedra ni^{*m} zamenom njegovih temena (tj. elementarnih spletova 1 u simbolu $ni^{*m}1.1 \dots 1$) spletoivima a_1, \dots, a_k ($k \leq n$) zapisuje se kao $ni^{*m}a_1.a_2 \dots a_k$. Zapis se može skratiti izostavljanjem jedinica i korišćenjem dodatnih skraćenih simbola koji zamenjuju nizove tačaka (npr. simbola $:$ koji zamenjuje \dots , simbola $::$ koji zamenjuje \dots).

Pored Reimeisterovih poteza koji su definisani u ravni, možemo posmatrati i *flip potez* (eng. *fltype*) prikazan na slici 31 koji je uveo P.G. Tejt. Ukoliko je oznakom L obeležen splet, flip potez predstavlja rotaciju spleta prikazanu na slici 31, takvu da krajevi a, b, c i d niti ostaju fiksirani. Presek, koji se nalazio sa leve strane spleta na slici, nakon takve rotacije (flip poteza) prelazi na njegovu desnu stranu.

Ovakav potez omogućava transformaciju čvora ili linka koja se ne ostvaruje u ravni, već u prostoru, a Tejt je formulisao hipotezu (teoremu) o ekvivalentnosti takvih dijagrama.

Teorema 3 (*Tejtova flip teorema*) *Pretpostavimo da su L' i L'' dva redukovana alternirajuća dijagrama linka L na sferi S^3 . Tada L' možemo konvertovati u L'' primenom konačnog broja flip poteza [87].*

Uočimo da flip potez možemo primeniti i na neki nealternirajući splet L i prateći presek dokazati da svaki flip potez predstavlja ambijentalnu izotopiju



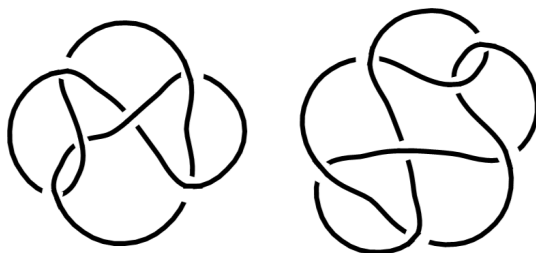
Slika 31: Flip potez

proizvoljnog čvora ili linka.

Uočimo da u operaciji prozvođa spleteva zamena mesta spleteva nije dozvoljena, tj. spletevi ne komutiraju. Isto važi i, u opštem slučaju i za ramifikaciju. Međutim, u ovoj operaciji elementarni splet 1 ili -1 može da komutira sa bilo kojim drugim spletom. Ova osobina omogućava da neki celobrojni splet "putuje" duž nekog drugog celobrojnog spleta koji je ortogonalan u odnosu na njega, tj. da komutira sa bilo kojom jedinicom iz niza preseka $1, 1, \dots, 1$ (zahvaljujući flip potezima). Ako je t proizvoljni splet, spletevi iste dužine $(t, 1, 1, \dots, 1)$, $(1, t, 1, \dots, 1)$, $(1, 1, t, \dots, 1)$, ... koji se sastoje od preseka 1 i spleta t biće međusobno ekvivalentni. Svaki od njih dobijen je iz susednog jednim flip potezom. Uočimo da samo prvi splet $(t, 1, 1, \dots, 1)$ i poslednji splet $(1, 1, 1, \dots, t)$ sadrže u sebi nizove maksimalne dužine koji se sastoje samo od preseka 1, dok je u svim drugim navedenim spletevima niz jedinica podeljen na dva podniza.

U skladu sa Tejtovom flip teoremom za svaki alternirajući čvor možemo generisati sve njegove minimalne (alternirajuće) dijagrame koristeći flip poteze. Izračunavanje svih minimalnih dijagrama nekog alternirajućeg čvora ili linka omogućava *LinKnot* funkcija `fDiffProjectionsAltKL`. Na primer, čvor $7_6 = 2\ 1\ 1\ 2$ poseduje dva minimalna dijagrama (slika 32). Konvejev simbol prvog dijagrama je $2\ 1\ 1\ 2 = (((2, 1, 1), 1), 1, 1)$, dok drugi dijagram poseduje nestandardni Konvejev simbol $((((1, 2, 1), 1), 1), 1)$. Uočimo da se u prvom dijagramu splet 2 nalazi na početku niza $(2, 1, 1)$, pa su svi celobrojni spletevi u ovom dijagramu maksimalnih dužina, te je broj spleteva minimalan, dok je u dijagramu splet 2 na drugoj poziciji u nizu $(1, 2, 1)$, pa deli ovaj niz na dva spleta. *Kanonskim Konvejevim simbolom* nazivamo Konvejev simbol nekog alternirajućeg čvora ili linka koji sadrži celobrojne spleteve maksimalnih dužina, pa je broj spleteva minimalan. Drugim rečima, u kanonskom Konvejevom simbolu u svakom spletu koji se sastoji od spleta t i niza preseka 1, splet t će se nalaziti na prvoj poziciji. Ovaj princip nazvaćemo *mini-max principom* primenjenim na spleteve: kanonski Konvejev simbol sadržaćće minimalni broj celobrojnih spleteva,

pri čemu će svaki od njih biti maksimalne dužine. U petom poglavlju biće više reči o kanonskim Konvejevim simbolima i odnosu između Konvejevih simbola i minimalnih Dovkerovih (ili minimalnih Gausovih) kodova čvorova ili linkova, kod kojih mini-max princip za spletove ne mora biti zadovoljen.



Slika 32: Minimalni dijagrami čvora $7_6 = 2 1 1 2$

2 Različiti načini prikazivanja čvorova

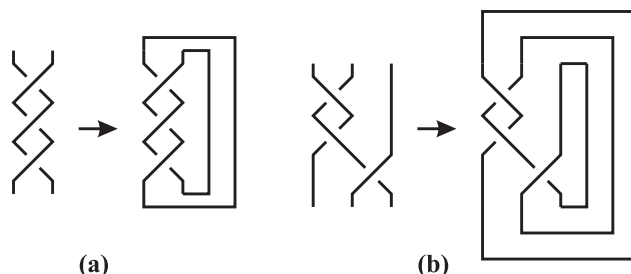
2.1 Pletenice (braids)

Izuzev notacija čvorova i linkova, koje koriste kodove i Konvejeve notacije, čvorove i linkove moguće je predstaviti pomoću pletenica (eng. *braids*) i odgovarajuće notacije koja koristi *pletenične reči*. Pletenične reči su konačni nizovi slova na osnovu kojih možemo rekonstruisati (nacrtati) datu pletenicu ili obavljati izvesne algebarske operacije definisane nad ovim skupom reči, kojima odgovaraju ambijentalne izotopije (zatvorenih) pletenica. Ovakva notacija čvorova je u tom smislu najsljednija Konvejevoj notaciji, jer predstavlja simboličku notaciju koja omogućava algebarske operacije sa pleteničnim rečima. Štaviše, pletenična notacija je ekvivalentna sa Konvejevom notacijom, pa čak i opštija od nje (u simboličkom pogledu) pošto omogućava kompletnu simboličku notaciju svih čvorova i linkova, za razliku od Konvejeve notacije koja je kompletno simbolička (algebarska) samo na nivou algebarskih čvorova i linkova, dok u slučaju poliedarskih čvorova i linkova, zahteva i korišćenje baze podataka: liste bazičnih poliedara.

Gaus je prvi uočio da pletenice mogu biti korišćene za opisivanje čvorova. Aleksander je 1923. god. otkrio fundamentalnu vezu između čvorova i linkova i zatvorenih pletenica: svaki čvor ili link može se prikazati pomoću zatvorenih pletenica.

Definicija 23 *Pletenica sa n niti (ili kratko: n -pletenica) se sastoji od n disjunktnih lukova postavljenih vertikalno u prostoru R^3 , pri čemu polazne tačke niti pripadaju istoj horizontalnoj liniji (slika 33). Svaka početna tačka nekog luka mora ležati tačno iznad krajnje tačke nekog luka.*

Zatvaranje pletenice dobijamo spajanjem početnih tačaka niti sa krajnjim tačkama, pomoću lukova koji ne daju dodatne preseke (slika 33b).



Slika 33: (a) Pletenica koja zatvaranjem daje trolisnik 3_1 ; (b) pletenica koja zatvaranjem daje Hopfov link 2_1^2

Na sličan način kao kod čvorova i linkova *izotopne* (tj. *ekvivalentne*) pletenice se dobijaju njihovim deformacijama bez izmena početnih i krajnjih tačaka i bez kidanja i ponovnog povezivanja niti. Dve pletenice su *izotopne* ako i samo ako postoji glatka deformacija sa fiksiranim tačkama koja prevodi jednu pletenicu u drugu. Možemo govoriti o klasama ekvivalencije pletenica u odnosu na relaciju izotopije pletenica.

Veza teorije čvorova i pletenica počiva na Aleksandrovoj teoremi:

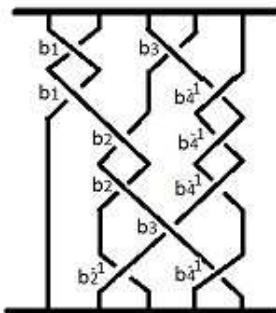
Teorema 4 *Svaki čvor ili link može biti prikazan kao zatvorena pletenica [128]*

Proizvod dve pletenice se dobija tako što ih nadovezujemo, spajajući gornji deo druge pletenice sa donjim delom prve. Pletenica sa jedim presekom se naziva *elementarnom pletenicom*. Lako se primećuje da se svaka pletenica može prikazati kao niz proizvoda elementarnih pletenica. Crteži koji predstavljaju pletenice mogu se algebarski interpretirati i na osnovu njih se može generisati pletenična reč. Pokažimo na primeru sa slike 34 način generisanja pletenične reči. Navedena pletenica ima ukupno pet niti, koje "padaju" odozgo na dole. Tih pet niti generišu četiri "reda" preseka koje možemo numerisati sa leva na desno rednim brojevima (1. red preseka, 2. drugi red, itd.). Ukoliko u preseku i -tog reda nit koja dolazi sa leve strane prolazi ispod niti koja dolazi sa desne strane, tada taj presek obeležavamo sa b_i , a u suprotnom sa b_i^{-1} . Pletenična reč, tj. algebarski kôd pletenice sa slike 34 generisan na ovaj način je $b_1 b_3 b_1 b_4^{-1} b_2 b_4^{-1} b_2 b_4^{-1} b_3 b_2^{-1} b_4^{-1}$.

Izotopija pletenica izražena jezikom pleteničnih reči opisuje se sledećim relacijama:

1. *komutativnost za udaljene pletenice*

$$b_i b_j = b_j b_i \quad \text{za} \quad |i - j| \geq 2, \quad i, j = 1, \dots, n - 1; \quad (8)$$



Slika 34: Pletenica $b_1 b_3 b_1 b_4^{-1} b_2 b_4^{-1} b_2 b_4^{-1} b_3 b_2^{-1} b_4^{-1}$

2. *Artinova relacija* (ili *pletenična relacija*)

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 2. \quad (9)$$

Ove relacije omogućavaju kompletnu zamenu geometrijskih manipulacija vezanih za izotopiju pletenica algebarskim operacijama. Prema tome, dve pletenice su izotopne ako i samo ako se reč koja predstavlja jednu od njih može transformisati u reč koja predstavlja drugu pomoću konačnog niza zamena koje zadovoljavaju relacije (8) i (9). U cilju pojednostavljenja notacije, korišćićemo A, B, C, \dots umesto b_1, b_2, b_3, \dots i a, b, c, \dots umesto $b_1^{-1}, b_2^{-1}, b_3^{-1}, \dots$; a^p će biti pojednostavljena oznaka za $a \dots a$, gde se slovo a javlja p puta.

Kako svaki čvor ili link može biti prikazan kao zatvorena pletenica, da bismo koristili pletenice u teoriji čvorova, neophodno je govoriti o ekvivalentnosti zatvorenih pletenica. Dva čvora su ekvivalentna ukoliko se mogu transformisati jedan u drugi primenom Reidemajsterovih poteza. Ekvivalent Reidemajsterovih poteza nad pletenicama su *potezi Markova*. U radu objavljenom 1935. god. A.A. Markov je formulisao teoremu, *Teoremu Markova*, koja opisuje poteze Markova i dokazuje njihovu ekvivalentnost sa Reidemajsterovim potezima. Dve pletenice nazivamo *Markov-ekvivalentnim* ako njihova zatvaranja daju isti čvor ili link.

Sa potezima Markova imamo isti problem kao sa Reidemajsterovim potezima: iako su dovoljni za transformisanje bilo koje zatvorene pletenice u bilo koji njen ekvivalent, ne postoji algoritam za nalaženje odgovarajućeg niza Markovljevih poteza koji omogućavaju ovakvu transformaciju. Svaki čvor ili link L poseduje beskonačno mnogo različitih zatvorenih pleteničnih reprezentacija. Pletenična reprezentacija koja odgovara nekom čvoru ili linku L može se dobiti primenom Voželovog (P. Vogel) algoritma [131], koji je implementiran u *LinKnot* funkciju `GetBraidRep`. Obratni put od pletenične reči do odgovarajućeg čvora omogućava *LinKnot* funkcija `KnotFromBraid` čiji je ulaz neka pletenična reč.

U vreme uvođenja pletenica u teoriju čvorova nivo algebre vezane za pletenice bio je mnogo viši od nivoa na kome se nalazila teorija čvorova, pa je njihovo

uvođenje u prvom momentu izgledalo kao izvanredna mogućnost za rešavanje većine problema u teoriji čvorova njihovim svodenjem na teoriju pletenica (i teoriju reči). Početno oduševljenje bilo je uskoro zamenjeno delimičnim razočarenjem, jer su se u teoriji pleteničnih reči matematičari, koji su se bavili teorijom čvorova, sreli sa sličnim ili istim nerešivim problemima (poput nepostojanja algoritma za određivanje niza Markovljevih poteza). Bez obzira na to, mnogi problemi u teoriji čvorova rešavaju se upravo korišćenjem pletenica. Najjednostavnije 2-pletence oblika A^n ($n \geq 2$) definišu familiju čvorova i linkova nastalih zatvaranjem celobrojnih spletova n , tj. familiju $2_1^2, 3_1, 4_1^1, 5_1, \dots$. Zbog svoje jednostavnosti, 3-pletence igraju posebnu ulogu u teoriji čvorova. Izvanredan primer za to su bazični poliedri $6^*, 8^*, 10^*, \dots$ koji se mogu prikazati pleteničnim rečima oblika $(Ab)^n$. Iz ovih reči, zamenom slova A ili b stepenima tih slova, dobijamo sve pletenične reprezentacije antiprizmatičnih čvorova ili linkova sa celobrojnim spletoivima. Sličan postupak može biti primenjen za prikazivanje svih bazičnih poliedara (i familija bazičnih poliedara), kao i poliedarskih čvorova i linkova sa celobrojnim spletoivima izvedenih iz njih.

Iz svega ovoga jasno je da pletence omogućavaju kompletnu simboličku notaciju čvorova i linkova i rad sa njom, na donekle sličan način kao što to omogućava Konvejeva notacija. Međutim, svaka od ovih notacija ima svoje prednosti i nedostatke. Na primer, pletenična notacija omogućava rad sa bazičnim poliedrima i poliedarskim čvorovima i linkovima sa celobrojnim spletoivima, ali bar za sada ne omogućava potpuno efikasnu upotrebu R -spletoiva ili C -linkova (koji će biti uvedeni u petom poglavlju), korišćenih u Konvejevoj notaciji.

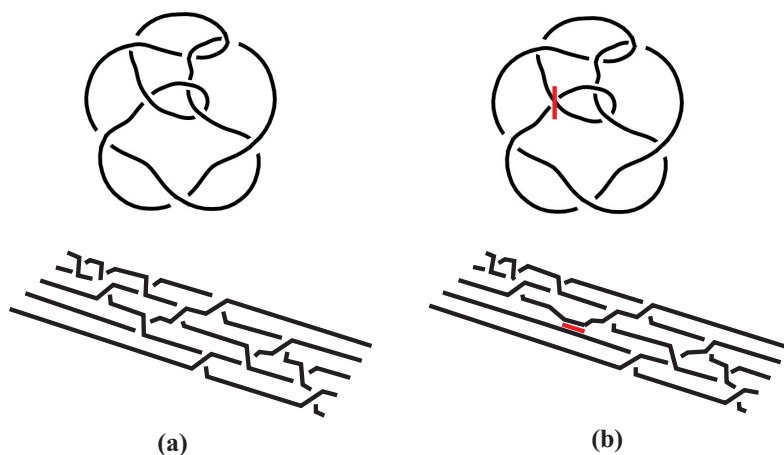
U cilju uvođenja jednoznačne notacije, T. Gittings (T. Gittings) je definisao, opisao i generisao *minimalne pletence* za čvorove sa $n \leq 10$ preseka i orijentisane linkove sa $n \leq 9$ preseka. Kao kriterijume minimalnosti pleteničnih reči, svrstane po redosledu njihovog značaja, koristio je četiri kriterijuma ([133], Definicija 1). Ne ulazeći u detaljnu analizu ovih kriterijuma, može se zaključiti da minimalne pletenične reči obezbeđuju jednoznačnost pletenične notacije za sve čvorove i linkove.

Pošto je jedan od ciljeva ove disertacije proučavanje dejstva odvezujućih operacija: promena preseka i zaravnjivanja, razmotrimo kako će se ove operacije realizovati na nivou pleteničnih reči. Prva od njih, promena preseka se vrši veoma jednostavno: u pleteničnoj reči presek zamenjujemo njegovim inverzom, tj. proizvoljno slovo W zamenjujemo sa w . Ova operacija je relativno dobro proučena u radu T. Gittingsa [133], gde je, pored ostalog, uveden i broj odvezivosti pleteničnih reči $u(w)$, gde je w pletenična reč i definiše se kao minimalni broj promena u fiksiranoj pleteničnoj reči w potrebnih da se dobije nečvor. Pošto je minimalna pletenična reč jednoznačna za svaki čvor ili link L , ova invarijanta je takođe jednoznačno definisana na skupu minimalnih pleteničnih reči za svaki čvor ili link L . Međutim, treba imati u vidu da, posmatrana kao dijagram čvora ili linka L , minimalna pletenična reč može predstavljati i neminimalni dijagram čvora ili linka L . Na primer, minimalna pletenična reč koja odgovara alternirajućem čvoru $5_2 = 32$ sa $n = 5$ preseka je dužine 6 i glasi $aaabAb$. To je razlog zašto Nakaniši-Bleilerov primer, čvor $10_8 = 514$, nije došao do izražaja kao izuzetak pri izračunavanju njegovog broja odvezivosti primenom minimal-

nih pleteničnih reči. Naime njegova odgovarajuća minimalna pletenična reč ima dužinu 11 i glasi $aaaaaBaBCbC$. Međutim, primeri slični Nakaniši-Bleilerovom došli su do izražaja kod nekih drugih čvorova i linkova datih pomoću svojih minimalnih pleteničnih reči. Ukoliko bismo hteli da posmatramo pletenični broj odvezivosti kao invarijantu čvora ili linka L , morali bismo da je računamo preko svih pleteničnih reči koje predstavljaju link L i u tom slučaju ova invarijanta bi se podudarala sa brojem odvezivosti $u(L)$ linka L , ali bi takođe bila neizračunljiva konačnim postupkom, pošto za svaki link L postoji beskonačan broj pleteničnih reči koje ga predstavljaju. Kao i u slučaju BJ-broja odvezivosti $u_{BJ}(L)$, i ovde bismo mogli da formulišemo analogon Bernhard-Jablanove hipoteze tako što ćemo raditi sa svim pleteničnim rečima minimalne dužine koje predstavljaju neki link L i dozvoliti, posle svake promene preseka, minimizaciju dobijenih pleteničnih reči – njihovo svodenje na ekvivalentne pletenične reči minimalne dužine, tj. realizovati BJ-algoritam na nivou svih pleteničnih reči minimalne dužine koje predstavljaju link L .

Druga odvezujuća operacija koju direktno možemo primeniti na pletenične reči je zaravnjivanje. Međutim, pri tome treba imati u vidu da pre zatvaranja pletenične reči nismo u stanju da uvedemo orijentaciju linka koji se dobija zatvaranjem i na osnovu nje prepoznamo o kom se zaravnjivanju radi u datom preseku: da li se radi o zaravnjivanju koje čuva ili ne čuva broj komponenata linka L . Ukoliko se ogledalo (marker) poklapa sa vertikalnom osom pletenice, tj. postavljeno je duž pletenice, tada takvo zaravnjivanje zovemo "vertikalnim". Ono se izvodi takođe veoma jednostavno: presek u kome vršimo zaravnjivanje zamenjujemo proizvodom nekog slova i njegovog inverza, tj. izrazom wW ili Ww , gde je w proizvoljno slovo. Ovakva zamena predstavlja zamenu posmatranog preseka celobrojnim spletom $(1, -1)$ postavljenim duž vertikalne ose pletenice, koji se redukuje Rajdemajsterovim potezom II i predstavlja ekvivalent vertikalnog zaravnjivanja.

Najzad, možemo pokušati da, u okviru neke pletenice, izvršimo "horizontalno" zaravnjivanje, tj. zaravnjivanje preseka pomoću dvostranog ogledala (markera) ortogonalnog u odnosu na vertikalnu osu pletenice. Neka je dat čvor $9_{37} = 3, 21, 21$ (slika 35a) kome odgovara minimalna pletenična reč $aaBacBADcBcD$ (slika 35a). Posle zaravnjivanja prikazanog na slici 35b dobijenom rezultatu, direktnom proizvodu Hopfovog linka i čvora $6_1 = 42$, odgovara pletenična reč $aaBaCcBADcBcD$ (slika 35b) koja je dobijena iz početne pletenične reči $aaBacBADcBcD$ zamenom prvog slova c izrazom Cc , tj. vertikalnim zaravnjivanjem u prvom preseku c . Međutim, pleteničnu reč, koja odgovara čvoru dobijenom drugim (horizontalnim) zaravnjivanjem, nismo u stanju da zamenama dobijemo iz početne pletenične reči $aaBacBADcBcD$. Jedino što možemo da kažemo je da ovom zaravnjivanju odgovara neminimalna pletenična reč $AbCCdC BacDEdCdfedCbCDCBEFe$, ali nismo u stanju da uspostavimo nikakvu direktnu vezu između nje i navedene početne minimalne pletenične reči koja odgovara čvoru 9_{37} .



Slika 35: (a) Čvor 9_{37} i njegova odgovarajuća minimalna otvorena pletenica $aaBacBADcBcD$ (b) zaravnjivanje čvora 9_{37} i otvorena pletenica $aaBaCcBADcBcD$ dobijena vertikalnim zaravnjivanjem u preseku c

2.2 Ogledalske krive

Ogledalske krive vode poreklo iz korparstva, pletenja i tkanja, a zatim su prenošene na druge medije, najčešće u vidu crteža ili reljefa (prepleta). Javljaju se u umetnosti različitih kultura, u Tamijskoj kulturi kao crteži na pragovima kuća, u okviru keltskih čvorova, crteža u pesku plemena Čokve [85], kao i u radovima Leonarda i Direra. P. Gerdeš (P. Gerdes) [71] je uočio vezu između ogledalskih krivih i algoritamskih matematičkih struktura: mozaika čvorova, Lunda matrica, krivih bez samopreseka (eng. *self-avoiding curves*) i ćelijskih automata [59, 60].

Ogledalske krive takođe imaju svoju ulogu i u nauci, posebno primenjenoj fizici i biologiji. U časopisu *Science*, Uroš Tkalec i njegovi saradnici su predložili novi način konstrukcije čvorova uređivanjem čestica u hiralnim nematičkim koloidima, nematičkoj fazi hiralnih tečnih kristala, laserskim sečenjem njihovih tzv. "Saturnovih prstena" i njihovim ponovnim prespaivanjem [86].

Dobijene formacije se mogu uporediti sa kDNK mitohondrije, koja se sastoji od povezanih mikrokrugova. Algoritam njihovog uvezivanja još uvek nije poznat, ali sigurno nije nasumičan. Pokazalo se da ovi mikrokrugovi imaju važnu ulogu u promenama genetskog materijala [79]. Možda se eksperimentalno kontrolisanje povezivanja čestica, čije je temelje postavio Tkalec sa saradnicima, može primeniti kao katalizator nekih modifikacija u DNK? U ovom radu poseban osvrt će biti napravljen na rezultate akcije topoizomeraza nad lancima DNK. Promene koje prouzrokuju topoizomeraze biće predstavljene matematičkim modelima, operacijom promene preseka i zaravnjivanjem preseka, nakon čega ćemo analizirati mogućnost konvertovanja jednog čvora (lanca DNK) u drugi, pri-

menom određenog broja ovih operacija. Broj operacija koje je neophodno primeniti u ovom procesu nazivamo "rastojanjem čvorova". U skladu sa principom ekonomije, različita rastojanja čvorova nam govore o verovatnoći prelaska čvora iz jednog stanja u drugo. Posedujući takvu informaciju, kao i alat koji predstavlja katalizatore prepovezivanja lanaca na proizvoljnim mestima, možemo očekivati da će u budućnosti biti moguće predvideti formiranje kritičnog genetskog materijala, sprečiti njegov nastanak i ubrzati proces poželjnih promena na DNK.

U ovom poglavlju daćemo predlog još jednog načina predstavljanja čvorova i linkova, model *ogledalskih krivih* (eng. *mirror curves*), koji je usko povezan sa formacijama koje su generisane u navedenom radu U. Tkaleca, kao i osvrt na najnovije rezultate u ovoj oblasti.

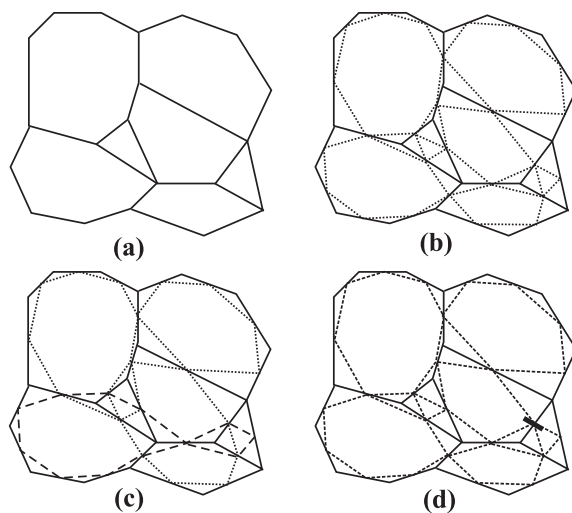
Na početku ćemo dati opštu definiciju ogledalske krive na proizvoljnoj površi u prostoru R^2 , a zatim se zadržati na ogledalskim krivama smeštenim u neku vrstu koordinatnog sistema, pravougaone mreže sa celobrojnim stranicama, koje omogućavaju kodiranje ogledalskih krivih i njihovu primenu u računarstvu.

Ogledalske krive se mogu konstruisati u okviru bilo kog dela ravanske teselacije (popločavanja ravni) T na proizvoljnoj površi primenom sledećih koraka. Prvi korak predstavlja spajanje središta susednih ivica. Kao rezultat ovog spajanja dobija se 4-valentni graf koji nazivamo *središnje-ivičnim grafom* (eng. *mid-edge graph*). Znajući da svaki 4-valentni graf predstavlja senku nekog čvora ili linka, u dobijenom grafu potrebno je iscrtati njegove komponente. Prilikom dolaska u neko teme ovog grafa, tj. nailaska na središte ivice, put nastavljamo naspramnom ivicom grafa, tj. ne skrećemo ni levo ni desno, već nastavljamo pravo. U narednim koracima se vrši postavljanje dvostranih ogledala u tačkama preseka komponenta, ili tačkama njihovih samopreseka. Realizacija je u skladu sa pravilima o neorijentisanom zaravnjivanju preseka, što znači da u bilo kojoj tački preseka možemo postaviti vertikalno ili horizontalno dvostrano ogledalo (marker).

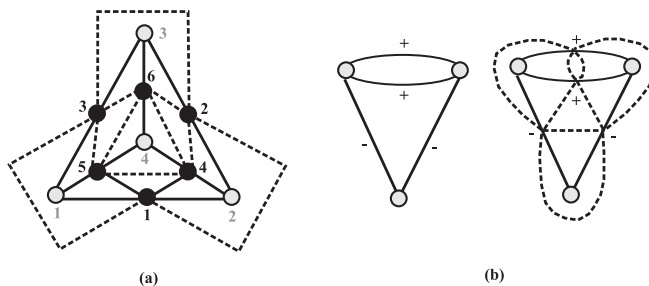
Postoji značajna veza između grafova čvorova, linkova i njihovih središnje-ivičnih grafova: iz označenog grafa G , čvora ili linka L (grafa čijim su ivicama pridružene oznake preseka $+$ ili $-$), možemo rekonstruisati L konstruišući njegov središnje-ivični graf G_M , pri čemu postoji obostrano jednoznačna korespondencija između bigona u grafu G i bigona u središnje-ivičnom grafu G_M (slika 37).

2.2.1 Kodiranje ogledalske krive i izvođenje čvorova

U istoriji umetnosti i matematike, prvo je razmatran najjednostavniji način konstrukcije ogledalskih krivih, povezan sa njihovim fizičkim modelom, a onda su vršena uopštenja. Početak je vodio od pravougaonih mreža $RG[p, q]$ sa ivicama celobrojnih dužina p i q , čije su spoljašnje ivice sa unutrašnje strane obložene ogledalima. Ogledalske krive najčešće konstruišemo u okviru neke pravougaone mreže sa dvostranim ogledalima. Neka je data pravougaona mreža $RG[p, q]$ sa ivicama celobrojnih dužina p i q ($p \geq 1, q \geq 1$). Sam naziv "ogledalske krive" sledi iz njihovog fizičkog modela izvedenog iz ovakve mreže čije su spoljne ivice ogledala. U unutrašnjosti mreže neke ivice mogu biti zamen-



Slika 36: Konstrukcija jednokomponentne ogledalske krive: (a) deo teselacije T ; (b) povezivanje središta susednih ivica; (c) iscrtavanje komponenata; (d) ubacivanje unutrašnjeg ogledala koje vrši spajanje dveju komponenata u jednu

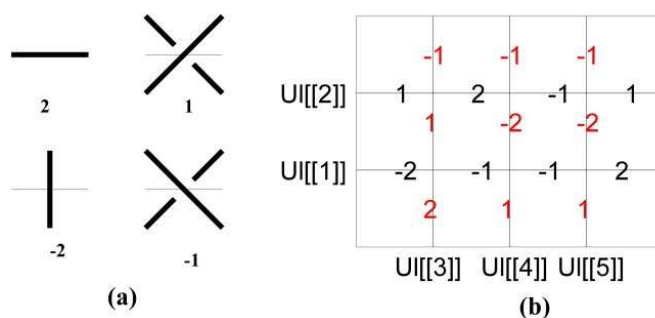


Slika 37: (a) Središnje-ivični graf dobijen iz grafa tetraedra; (b) označena mreža $RG[3, 4]$

jene dvostranim ogledalima koja se poklapaju sa ivicama mreže ili su postavljena ortogonalno u njihovim središtima.

Ako se zrak svetlosti emituje iz središnje tačke bilo koje ivice mreže pod uglom od 45° , on će se odbijati redom o ogledala na koja nailazi i na kraju će se vratiti u početnu tačku. Putanja tog zraka će biti jedna komponenta odgledalske krive. Ako nakon iscrtavanja jedne komponente zrak nije obišao sve središnje tačke ivica, bira se nova polazna tačka i iz nje emituje sledeći svetlosni zrak tako da se kreće novom putanjom. Ovaj proces se ponavlja dok se ne obiđe kompletna pravougana mreža. Ogledalska kriva koja odgovara pravougaonoj mreži

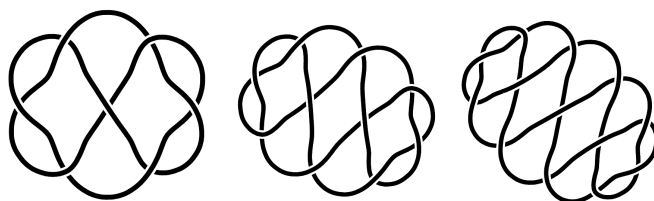
prikazanoj na slici 38b predstavljena je na slici 40. Dobijenu ogledalsku krivu, koja predstavlja 4-valentni graf, možemo (uvođenjem odnosa "iznad"- "ispod" u njenim presečnim tačkama) transformisati u projekciju čvora ili linka. U tom slučaju, pored dvostranih ogledala koja predstavljaju zaravnjivanja u središnjim tačkama mreže $RG[p, q]$, u ostalim presecima koristimo i znake preseka $+1$ ili -1 . Prema tome, svaka ivica nosiće oznaku $2, -2, 1$ ili -1 , gde 2 označava dvostrano ogledalo koje se podudara sa ivicom, -2 dvostrano ogledalo ortogonalno na ivicu u njenom središtu, $+1$ (ili samo 1) pozitivni presek $+1$, a -1 negativni presek, kao što je prikazano na slici 38a [135]. Primer označene pravougaone mreže dimenzija 3×4 prikazan je na slici 38b.



Slika 38: (a) Označavanje ivica; (b) označena mreža $RG[3, 4]$

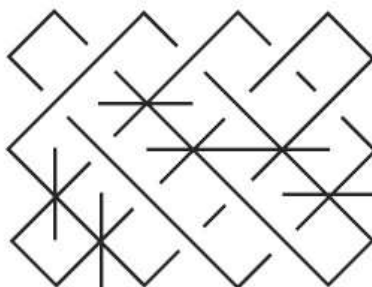
U najjednostavnijem slučaju, bez upotrebe unutrašnjih ogledala, u pravougaonoj mreži se kao rezultat dobija senka nekog čvora ili linka čiji je broj komponenta $NZD(p, q)$, što znači da se čvorovi dobijaju kada su p i q uzajamno prosti brojevi. S obzirom da su ovakve ogledalske krive zasnovane na refleksijama, moguće je uspostaviti vezu između njih i tzv. bilijarskih čvorova (eng. *billiard knots*) ili Lisažovih (J.A. Lisajous) čvorova u ravni ili u prostoru. Za proizvoljno p ($p \geq 3$) i $q = 2$ dobija se niz racionalnih čvorova i linkova koja počinje čvorom $7_4 = 313$ i nastavlja se racionalnim čvorovima i linkovima $31213, 3121213, \dots$ [87]. Naredni korak predstavlja uvođenje unutrašnjih ogledala. U datoj $RG[p, q]$, bez unutrašnjih ogledala, maksimalni alternirajući čvor ili link koji je prekriva označićemo sa $L_{(p,q)}$. U tom slučaju svi čvorovi i linkovi bez cikla koji se mogu dobiti iz mreže $RG[p, q]$ nakon uvođenja unutrašnjih ogledala su čvorovi koji se dobijaju iz $L_{(p,q)}$ pomoću promena preseka i neorijentisanih zaravnjivanja. Čvorovi (linkovi) bez cikla – komponentata bez preseka, su čvorovi (linkovi) koji nemaju izolovanih ogledala, tj. smešteni su u $RG(p, q)$ bez "rupa".

Ogledalske krive se mogu kodirati u *Mathematica* okruženju listom lista (tj. matricom) koja se sastoji od oznaka unutrašnjih ivica koje odgovaraju vrstama i kolonama mreže $RG[p, q]$. U tom slučaju, pravougaonoj mreži sa slike 38b odgovara kôd



Slika 39: Čvorovi i linkovi dobijeni iz $RG[a, 2]$ za $a = 3, 4, 5$

$$Ul = \{\{-2, -1, -1, 2\}, \{1, 2, -1, 1\}, \{2, 1, -1\}, \{1, -2, -1\}, \{1, -2, -1\}\}.$$



Slika 40: Ogledalska kriva Ul

Uvođenjem oznake 0 za prikaz virtualnih preseka, predloženo kodiranje ogledalskih krivih se direktno proširuje na teoriju virtualnih čvorova i linkova [18] dobijenih iz ogledalskih krivih.

U daljem tekstu korist ćemo opštiji termin "link" kada god istovremeno govorimo o čvorovima i linkovima.

Ogledalska kriva predstavlja dijagram nekog linka. Link koji predstavlja mrežu $RG[p, q]$ je pomenuti maksimalni alternirajući link $L_{(p,q)}$ čiji je dijagram određen ogledalskom krivom u ovakvoj mreži koja je označena tako da ne sadrži unutrašnja ogledala i sve oznake preseka u njoj su istog znaka. Pošto sadrži samo oznake ivica 1 ili -1 , on predstavlja alternirajući link. Na primer, mreži $RG[2, 2]$ odgovara link $L_{(2,2)} = 4_1^2 = \{\{1, 1\}, \{1, 1\}\}$.

Problem određivanja svih linkova koji se mogu smestiti u praovugaonu mrežu $RG[p, q]$ razmatran je u radu *Mirror-curves and knot mosaics* čiji su autori S. Jablan, Lj. Radović, R. Sazdanović i A. Zeković [106]. Rešavanje ovog problema se može svesti na rad sa operacijama promene i neorijentisanog zaravnjivanja preseka koje su opisane u poglavljima 1.3 i 1.4. Naime, važi ekvivalencija između sledeća dva pristupa koji opisuju načine izvođenja čvorova:

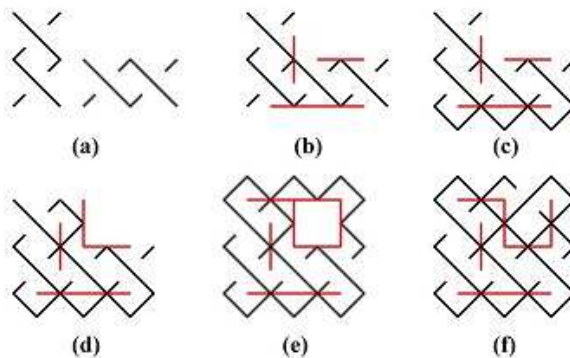
- Odrediti sve linkove koji mogu biti predstavljeni ogledalskim krivama u mreži $RG[p, q]$;
- Odrediti sve linkove koji se dobijaju promenama ili zaravnjivanjem preseka linka $L_{(p,q)}$ koji predstavlja mrežu $RG[p, q]$.

Trivijalno, nečvoru odgovara mreža $RG[1, 1]$. Za svaki dati link L je potrebno naći mrežu najmanjih dimenzija u koju se L može smestiti. Ukoliko on kasnije bude generisan i u nekoj većoj mreži, tada ga ne treba ponovo navoditi.

Polazeći od mreže $RG[2, 2]$ i njoj odgovarajućeg linka 4_1^2 (slika 41a) primenom operacije promena preseka na Gordijevom rastojanju 1 od linka 4_1^2 možemo dobiti samo Hopfov link 2_1^2 prikazan na slici 41b. Na s -rastojanju jednakom 1 nalazi se takođe samo jedan čvor – trolisnik 3_1 prikazan na slici 41c. Daljim primenama operacija promena preseka i zaravnjivanja ne mogu se dobiti novi čvorovi u ovoj mreži.



Slika 41: (a) Link 4_1^2 ; (b) neminimalni dijagram Hopfovog linka 2_1^2 ; (c) čvor 3_1



Slika 42: Konstrukcija ogledalske krive čvora $4_1 = 2 \cdot 2$

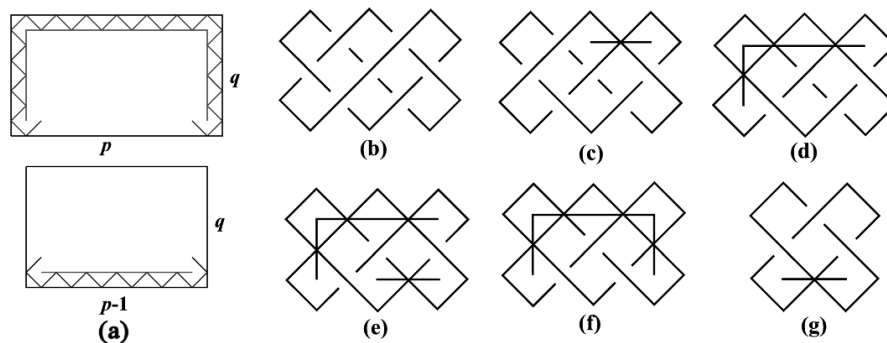
Mreži $RG[p, 1]$ odgovara zatvorenje celobrojnog spleta p koje je nečvor. Primenom operacija promena ili neorijentisanih zaravnjivanja preseka iz njega se ne mogu dobiti netrivijski linkovi. Međutim, klasa mreža $RG[p, 2]$ će nam obezbediti osnovu za izvođenje racionalnih čvorova i linkova:

Teorema 5 *Svaki racionalni čvor ili link može biti izveden kao ogledalska kriva u pravougaonoj mreži $RG[p, 2]$, $p \geq 2$ [106].*

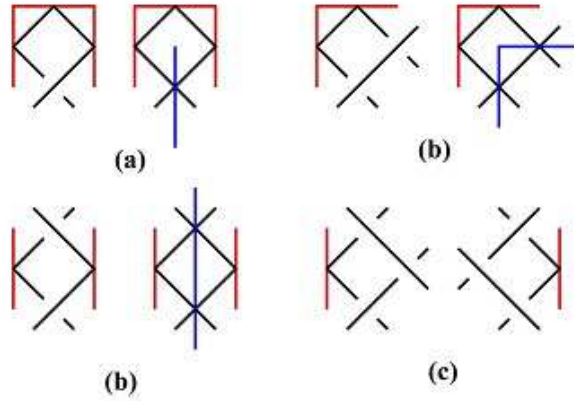
Iz mreže $RG[3, 2]$ i njoj odgovarajućeg alternirajućeg čvora $7_4=313$ se može izvesti čvor $5_2 = 32$ koji se nalazi na Gordijevom rastojanju 1 od njega kao i čvorovi i linkovi $4_1 = 22$, $6_2 = 312$, 6_1^2 i $3_1\#3_1$ na s -rastojanju 1. Pored njih, primenom operacija promene i neorijentisanog zaravnjivanja preseka fiksnog dijagrama čvora 7_4 , mogu se izvesti i čvorovi i linkovi $2_1^2\#2_1^2$, 5_1 , $5_1^2 = 212$, $3_1\#2_1^2$ i $6_1 = 42$.

Dosadašnje izvođenje linkova ograničeno je na mreže maksimalnih dimenzija $p \times q$ ($p \leq 4$ i $q \leq 4$). Na ovaj način izvedeno je više od 1000 prostih čvorova i linkova do $n = 12$ preseka funkcijama implementiranim u programu *LinKnot*. U dobijenoj listi nedostaju čvorovi i linkovi 9_{24} , 9_{34} , 9_{37} , 9_{40} , 9_{20}^2 , 9_{23}^2 , 9_{34}^2 i 9_{42}^2 koji zahtevaju upotrebu većih mreža. Funkcija `fDTMirror` implementirana za potrebe ovog istraživanja vrši prepoznavanje čvora ili linka koji je dat kodom ogledalske krive [106].

Obrnut postupak – konstruisanje ogledalske krive za dati čvor se zasniva na spletovima iz Konvejeve notacije i može se opisati primerom konstrukcije ogledalske krive čvora $4_1 = 22$ (slika 42). Spletovi se na početku postavljaju u svoje pozicije (horizontalno ili vertikalno) u odgovarajućem redosledu u pravougaonu mrežu. Nakon toga, vrši se povezivanje njihovih slobodnih krajeva u skladu sa pravilima Konvejeve notacije. Ukoliko se javi prazna polja u mreži, ona se popunjavaju petljama. Neki linkovi, dobijeni kao ogledalske krive, mogu biti smešteni u neminimalnim pravougaonim mrežama. Ovaj problem se može rešiti redukovanjem mreža primenom "poteza preko svega" (eng. *all-over move*) pomoću kog se od linka smeštenog u mreži $RG[p, q]$ dobija isti link smešten u mreži $RG[p-1, q]$ (slika 43). Ovaj potez, kao i implemetacija Rajdemajsterovih poteza (slika 44) opisani su u [106]. Minimalni dijagrami ogledalskih krivih odgovaraju kodovima sa minimalnim brojem oznaka ± 1 .



Slika 43: (a) "Potez preko svega"; (b-g) redukcija neminimalnog dijagrama $3 - 13$ smeštenog u mreži $RG[3, 2]$ na čvor 3_1 smešten u svojoj minimalnoj mreži $RG[2, 2]$



Slika 44: Implementacija Reidemeisterovih poteza

U cilju definisanja algebarske operacije proizvoda ogledalskih krivih izvedenih iz iste mreže $RG[p, q]$, možemo izvršiti zamenu oznaka 2, -2 , 1, i -1 u njihovim kodovima elementima neke polugrupe reda 4. Neka je S polugrupa reda 4 sa elementima $A = \{a, aba\}$, $B = \{b, bab\}$, $C = \{ab\}$, i $D = \{ba\}$, data Kelijevom tablicom

	A	B	C	D
A	A	C	C	A
B	D	B	B	D
C	A	C	C	A
D	D	B	B	D

Proizvod ogledalskih krivih $M_1 \times M_2$, za $M_1 = \{-2, -2, 1, 1\}, \{1, 2\}, \{-1, 1\}, \{-1, -2\}$ i $M_2 = \{-2, -2, 1, 1\}, \{-1, -2\}, \{1, -1\}, \{2, -1\}$ će nakon zamena $2 \rightarrow a, -2 \rightarrow b, 1 \rightarrow ab, -1 \rightarrow ba$ biti

$$M_1 \times M_2 = \{-2, -2, 1, 1\}, \{2, 1\}, \{-2, 2\}, \{-1, -1\}. \quad (10)$$

Lako se pokazuje da se proizvoljna kriva izvedena iz mreže $RG[p, q]$ može predstaviti proizvodom dve ogledalske krive smeštene u mrežu istih dimenzija čiji kodovi sadrže samo oznake 2 i -2 . Ogledalske krive koje sadrže samo ove oznake predstavljaju nečvorove i nelinkove.

Metod ogledalskih krivih pruža mogućnost da se svaki čvor ili link (nezavisno od broja preseka) može kodirati korišćenjem samo oznaka 1, -1 , 2 i -2 , ili korišćenjem oznaka 2, -2 i operacije proizvoda. Ukoliko postoje različite prezentacije nekog linka u nekoj mreži, za predstavnika te ogledaske krive (tj. čvora ili linka), koristićemo *binarni kod* te ogledalske krive. Binarni kod $\{p, q, m, n\}$ ogledalske krive M , smeštene u mrežu dimenzija $p \times q$,

dobija se sledećim postupkom koji je opisan na primeru krive M date kodom $Ul = \{\{1, -2\}, \{2, -1\}\}$:

- Dekomponovati M na proizvod dve ogledalske krive

$$M = M_1 \times M_2 = \{\{2, -2\}, \{2, -2\}\} \times \{\{-2, -2\}, \{2, 2\}\}.$$

M_1 i M_2 će uvek sadržati samo oznake 2 i -2 , pa je moguće izvršiti zamene $2 \rightarrow 0$ i $-2 \rightarrow 1$. Tada će ogledalskim krivama M_1 i M_2 odgovarati sledeći binarni nizovi i njima odgovarajuće dekadne vrednosti

$$M_1 \equiv 0101 = (5)_{DEC} = m, \quad M_2 \equiv 1100 = (12)_{DEC} = n.$$

- Binarni kod krive $M = Ul$ tada je

$$Ul_{BIN} = \{2, 2, 5, 12\}.$$

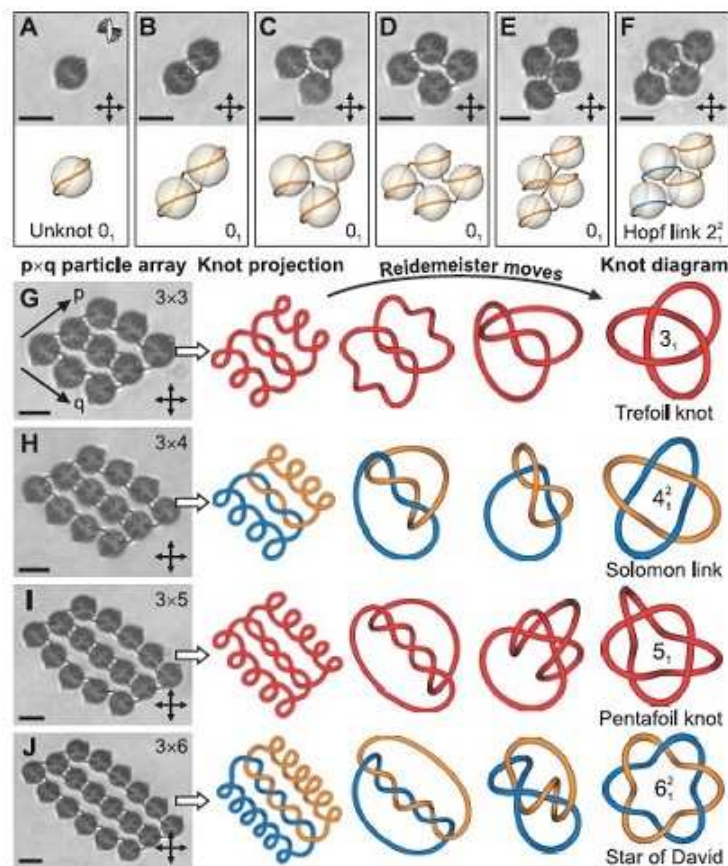
Ogledalske krive i njihovi binarni kodovi [106] predstavljaju efikasan način kodiranja čvorova jer omogućavaju da se čvor ili link sa proizvoljnim brojem preseka uvek predstavlja listom od samo 4 elementa.

2.2.2 Primene ogledalskih krivih – CNC

U. Tkalec, M. Ravnik, S. Čopar, S. Žumer i I. Mušević 2011. godine objavljuju rad *Reconfigurable Knots and Links in Chiral Nematic Colloids* [86] u časopisu *Science*. Tema ovog rada je konstrukcija čvorova i linkova u hiralnim nematičkim tečnim kristalima (eng. skraćeno: *CNC*). Daćemo osvrt na ideje predložene u ovom radu i uporediti šemu konstrukcije čvorova i linkova koju navedeni autori primenjuju u svojim istraživanjima sa modelom ogledalskih krivih.

Generisanje i manipulacija nad čvorovima i linkovima vrši se primenom visokofokusiranog svetlosnog zraka i laserskih pinceta. Osnovna gradivna jedinica čvora ili linka je defektni prsten (tzv. Saturnov prsten) koji je topološki ekvivalentan nečvoru i javlja se spontano oko svake mikrosfere u hiralnom nematičkom koloidu. Ovo je prikazano na slici 45A koja je preuzeta iz pomenutog rada. Konstrukcija netrivialnih čvorova i linkova vrši se sečenjem i spajanjem Saturnovih prstenova u čvorove i linkove proizvoljne kompleksnosti primenom laserskih pinceta. Laserskim pincetama je moguće približavati osnovne koloidne čestice čiji se Saturnovi prstenovi u nekim slučajevima mogu sami spojiti, a nekada spajanje zahteva optičku asistenciju. Na slikama 45B-E prikazane su formacije dužih petlji sastavljenih od dve ili više čestica, pri čemu svaka od njih i dalje predstavlja nečvor. Najprostija netrivialna topološka konfiguracija, koja je dobijena sekvencom lokalnih optički indukovanih pokreta, je Hopfov link 2_1^2 prikazan na slici 45F.

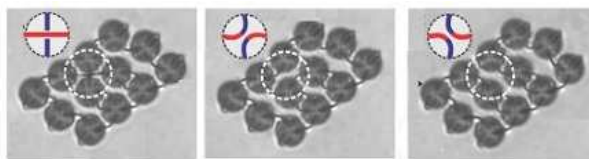
Laserska tehnika upletanja čvorova pokazuje svoju punu moć kada se primenjuje na matrice čestica većih dimenzija. Na slikama G, H, I i J prikazane su



Slika 45: Vezivanje čvorova i linkova u hiralnim nematičkim koloidima

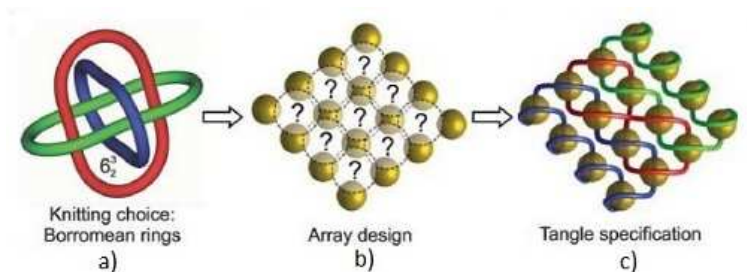
konfiguracije nematičkih platenica formiranih u mrežama 3×3 , 3×4 , 3×5 i 3×6 . Primenom Redmejsterovih poteza i Kaufmanovog zagrada polinoma, prepoznati su dobijeni čvorovi i linkovi čija je relaksacija ilustrovana na slici primenom programa *KnotPlot* [81]. Pored generisanja celobrojnih spletova, laserske pincete autorima omogućavaju i preciznu manipulaciju nitima na proizvoljnom mestu. Ukoliko svaku od osnovnih čestica posmatramo kao splet sa četiri slobodne niti, ovim pristupom je omogućeno raskidanje proizvoljnog prstena jedne čestice i spajanje sa slobodnim krajem nekog od svojih najbližih suseda, što nije ništa drugo nego Konvejeva teorija elementarnih spletova primenjena na CNC. Na slici 46 su prikazane moguće optičke operacije prepovezivanja niti na proizvoljno odabranoj lokaciji. Posmatrajući konfiguraciju kao dijagram čvora, ove operacije se mogu posmatrati kao uvođenje dodatnog preseka, horizontalno ili vertikalno zaravnjivanja preseka.

Posedujući eksperimentalnu kontrolu nad ovakvim formacijama u CNC,



Slika 46: Ponovno uvezivanje čvorova i linkova primenom laserskih pinceta

Tkalec i saradnici su u mogućnosti da generišu ogroman broj različitih čvorova i linkova korišćenjem laserskog alata za mikromanipulaciju. U radu [86] slika 47 ilustruje primer generisanja konfiguracije hiralnog nematičkog koloida koji odgovara Boromejskim prstenovima 6_2^3 (slika 47a). Prvi korak u tom procesu je specifikovanje dimenzije matrice čestica, u ovom slučaju 4×4 (slika 47b). Nakon toga, izabrana je konfiguracija, a zatim polinomskim invarijantama identifikovan čvor (link) koji se dobija (slika 47c). Tkalec i saradnici su za prepoznavanje čvorova koristili Kaufmanov zagrada polinom. Oni su prepoznali da su jedinične čestice nematičkog koloida sa svojim prstenovima u direktnoj korespondenciji sa osnovnim elementima dijagrama čvorova koji se primenjuju u proceduri računanja Kaufmanovog zagrada polinoma. Slično zapažanje je navedeno i u radu *Mirror-curves and knot mosaics* [106]. Uvođenjem smene $A \rightarrow t^{-\frac{1}{4}}$ u Kaufmanov polinom, dobijamo Džonsov polinom koji je jedinstven za čvorove do $n = 9$ preseka, pa je on dovoljan za prepoznavanje čvorova generisanih u njihovom radu.



Slika 47: Konstrukcija Boromejskih prstenova u hiralnom nematičkom koloidu

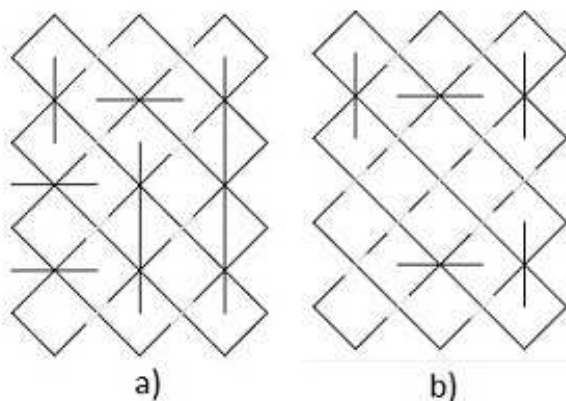
Pristup generisanju čvorova na ovaj način je primena modela ogledalskih krivih i važi naredna implikacija

Link L može biti generisan u hiralnom nematičnom koloidu na matrici čestica dimenzija $p \times q \Rightarrow$

Link L može biti predstavljen ogledalskom krivom u mreži $RG[p - 1, q]$.

Biranje pozicije laserske operacije, koju je potrebno izvršiti nad prstenovima čestica koloida, prikazane su na slici 47b oznakom "?". Ukoliko se same čestice

(sfere) zamene oznakama "(presek) 1", a praznine (oznake "?") zamene sa oznakom "(presek) 1", "(ogledalo) 2" ili "(ogledalo) -2", tada dobijamo ogledalsku krivu. Fiksiranjem izbora oznake za sferu, skup linkova koji se dobija na ovaj način predstavlja podskup ogledalskih krivih na mreži $RG[3,4]$. Zbog toga su rezultati, skupovi čvorova i linkova dobijeni matricom sfera hiralnog nematičkog koloida, uporedivi sa rezultatima generisanim modelom ogledalskih krivih. Tkalec i saradnici su u svom radu prezentovali čvorove i linkove koje su kreirali koristeći matricu čestica 4×4 ([86], Table S1). Greškom su u toj tabeli izostavljena dva linka 6_2^2 i 9_{49}^2 prikazana ogledalskim krivama na slici 48 [135].



Slika 48: Ogledalske krive linka (a) $6_2^2 = 33$; (b) $9_{49}^2 = 4, 3, -2$

Ako analiziramo konstrukciju prikazanu na slici 47b i uporedimo je sa konstrukcijom ogledalskih krivih, uočićemo jednu suštinsku razliku: u slučaju ogledalskih krivih u središtu svake od ivica mreže, tj. u svakom preseku, možemo slobodno izabrati bilo koje od stanja preseka: 1, -1, 2 ili -2. Za razliku od toga, u slučaju CNC, izbor možemo vršiti samo u presecima koji se nalaze između sfernih čestica i koji su označeni sa "?", dok svi preseci koji se nalaze u tačkama iznad sfera ostaju fiksiranog znaka i ne pružaju mogućnost promena stanja. Prema tome, CNC konstrukcija predstavlja suženje prethodne konstrukcije, tj. konstrukciju ogledalskih krivih uz izvesne dodatne, unapred zadate uslove za izvesne preseke. Zbog toga ovakvu konstrukciju možemo nazvati "konstrukcijom sa ograničenjima".

Najvažnije otvoreno pitanje je: da li je u okviru CNC pristupom pomoću "konstrukcije sa ograničenjima" moguće dobiti sve čvorove i linkove (u okviru oblasti CNC proizvoljno velikih dimenzija). Za teoriju ogledalskih krivih, T. Kirija je svojim dokazom Lomonako-Kaufmanove hipoteze potvrdio da se svi čvorovi i linkovi mogu realizovati kao ogledalske krive, ali ovo još nije dokazano u slučaju CNC.

Za prepoznavanje linkova generisanih u nematičkim koloidima, u istraživanju predstavljenom u [86], korišćen je Džonsov polinom budući da on efikasno prepoznaje čvorove sa $n \leq 9$ preseka koji su ovog puta bili fokus istraživanja autora.

Za polinomske invarijante ne važi uvek pravilo da su dva čvora jednaka ukoliko su im polinomi jednaki. Ovo svojstvo se češće javlja za čvorove sa većim brojem preseka i , na žalost, ne važi samo za Džonsov polinom, već i mnoge druge polinomske invarijante. U poglavlju 3.3.1 biće napravljen kritički osvrt na polinomske način prepoznavanja čvorova.

Za prepoznavanje čvorova u nematičkim koloidima sa proizvoljnim brojem preseka se umesto Džonsovog polinoma može koristiti funkcija `fDTMirror` [106] koja generiše Dovker-Tistletvejtov kôd čvora koji odgovara datoj ogledalskoj krivi.

2.2.3 Kaufmanov zagrada polinom

U radu [106] prikazali smo i efikasan algoritam za računanje *Kaufmanovog zagrada polinoma* [20, 84] nekog linka L direktno iz ogledalske krive koja odgovara tom linku. Kaufmanovo stanje linka L predstavlja izbor načina neorijentisanog zaravnjivanja svakog preseka datog linka. Svaki presek se može zaravniti na dva načina, vertikalnim ili horizontalnim ogledalom. Analogno tome, neka je Kaufmanovo stanje mreže $RG[2, 2]$ ogledalska kriva koja sadrži samo oznake 2 i -2 . Za svaki alternirajući link L , Kaufmanov zagrada polinom je dat kao suma preko svih mogućih zaravnjivanja, tj. Kaufmanovih stanja

$$\sum_S a^{A(S)} a^{-B(S)} (-a^2 - a^{-2})^{|S|-1}$$

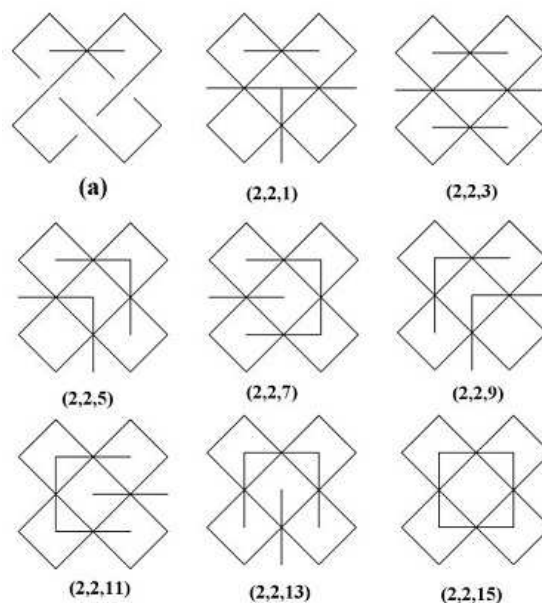
Ovom formulom se za izračunavanje Kaufmanovog polinoma alternirajućeg linka izbegava primena rekurzivne definicije Kaufmanovog polinoma koja koristi skein relacije. Na isti način on može biti izračunat kao suma preko svih mogućih stanja ogledalske krive koja odgovara datom linku, gde za svako stanje $|S|$ označava broj komponentata (regiona) odgovarajuće ogledalske krive koja sadrži samo oznake 2 i -2 , tj. njen svaki presek je zaravnjen. Na primer, čvor 3_1 dat kao ogledalska kriva kodom $\{\{1, 1\}, \{1, -2\}\}$ ima 8 stanja: $\{\{2, 2\}, \{2, -2\}\}$, $\{\{2, 2\}, \{-2, -2\}\}$, $\{\{2, -2\}, \{2, -2\}\}$, $\{\{2, -2\}, \{-2, -2\}\}$, $\{\{-2, 2\}, \{2, -2\}\}$, $\{\{-2, 2\}, \{-2, -2\}\}$, $\{\{-2, -2\}, \{2, -2\}\}$, $\{\{-2, -2\}, \{-2, -2\}\}$ (slika 49). Ako je broj preseka linka L jednak c , broj preseka u linku L promenjenih iz 1 u 2 u Kaufmanovom stanju M_i iznosi a_i , a broj regiona (komponentata) je s_i , tada se Kaufmanov zagrada polinom može odrediti formulom [106]

$$\sum_{i=0}^{2^c-1} a^{a_i} a^{-c+a_i} (-a^2 - a^{-2})^{s_i-1} \quad (11)$$

Primenom ove formule, lako se određuje vrednost Kaufmanovog zagrada polinoma alternirajućeg čvora 3_1 :

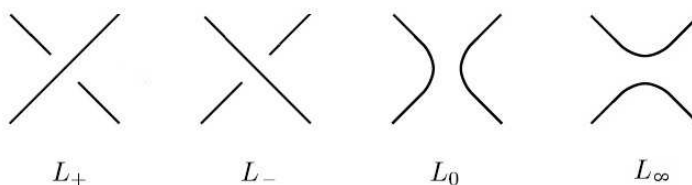
$$\langle M \rangle = -a^{-5} - a^{-3} + a^7.$$

Za izračunavanje ovog polinoma nealternirajućih linkova neophodno je primeniti skein relacije, tj. neorijentisano zaravnjivanje preseka. Koristeći notaciju



Slika 49: Izračunavanje Kaufmanovog zagrada polinoma za čvor 3_1

za definisanje skein trojke, možemo na sličan način uvesti i skein četvorku. Oznakama L_+ , L_- , L_0 i L_∞ ćemo obeležavati četiri linka koji su identični svuda sem u jednom preseku, gde su preseči redom prikazani na slici 50. Četvorku $(L_+, L_-, L_0, L_\infty)$ nazivamo *skein četvorkom* (eng. *skein quadruple*). Uvođenje orijentacije radi razlikovanja L_+ od L_- i L_0 od L_∞ u ovom slučaju nije neophodno.



Slika 50: Skein četvorka

Opšta rekurzivna formula, koja koristi skein relacije i primenjuje se za izračunavanje Kaufmanovog zagrada polinoma [20, 84], kako alternirajućeg tako i nealternirajućeg čvora ili linka L , ima sledeći oblik

- $\langle \bigcirc \rangle = 1$;
- $\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-a^2 - a^{-2})\langle L \rangle$;

- $\langle L_- \rangle = a \langle L_\infty \rangle + a^{-1} \langle L_0 \rangle$.

gde je \bigcirc standardna oznaka nečvora, tj. kruga. Drugo pravilo ukazuje na to da dodavanje nečvora disjunktog sa ostatkom linka L odgovara množenju navedenog koeficijenta sa vrednošću Kaufmanovog zagrada polinoma ostatka linka L .

Izračunavanje polinoma u zagradama nealternirajućeg čvora datog ogledalskom krivom možemo započeti primenom ove rekurzivne formule. Rekurzivni postupak se ogleda u neorijentisanom zaravnjivanju negativnih preseka ogledalske krive, po jednog u svakoj iteraciji. Opisaćemo ovaj postupak na primeru izračunavanja polinoma nealternirajućeg linka $6_3^3 = 2, 2, -2$ kome odgovara ogledalska kriva $M = \{\{1, 1, -1\}, \{1, 1, -1\}\}, \{-2, 2, -2\}, \{-2, 2, -2\}\}$ data u mreži $RG[3, 3]$. Početak postupka je opisan na slici 51. Rekurzivne korake je potrebno primenjivati dok sve ogledalske krive, koje učestvuju u formuli, ne postanu alternirajuće.

Slika 51: Izračunavanje Kaufmanovog zagrada polinoma Boromejskih prstenova predstavljenih ogledalskom krivom $M = \{\{1, 1, -1\}, \{1, 1, -1\}\}, \{-2, 2, -2\}, \{-2, 2, -2\}\}$

Nakon primene rekurzivnog postupka dobijen je sledeći izraz:

$$\langle M \rangle = a^2 \langle M_0 \rangle + \langle M_1 \rangle + \langle M_2 \rangle + a^{-2} \langle M_3 \rangle \quad (12)$$

gde su M_1, M_2, M_3 i M_4 alternirajuće ogledalske krive date kodovima

$$M_1 = \{\{1, 1, -2\}, \{1, 1, -2\}, \{-2, 2, -2\}, \{-2, 2, -2\}\}$$

$$M_2 = \{\{1, 1, -2\}, \{1, 1, 2\}, \{-2, 2, -2\}, \{-2, 2, -2\}\}$$

$$M_3 = \{\{1, 1, 2\}, \{1, 1, -2\}, \{-2, 2, -2\}, \{-2, 2, -2\}\}$$

$$M_4 = \{\{1, 1, 2\}, \{1, 1, 2\}, \{-2, 2, -2\}, \{-2, 2, -2\}\}.$$

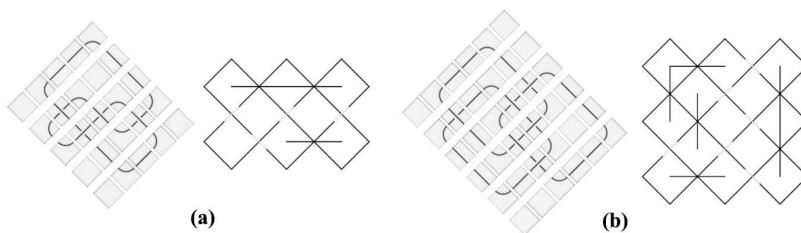
Primenom formule 11 za određivanje Kaufmanovog zagrada polinoma alternirajućih ogledalskih krivih M_0, M_1, M_2 i M_3 izraz (12) dobija vrednost

$$\langle M \rangle = a^{-10} + a^{-2} + 2a^6.$$

U [106] predstavljen je i efikasan algoritam za izračunavanje L -polinoma [20].

2.2.4 Ekvivalentne prezentacije čvorova

Postoje još dva načina prezentacije čvorova koji su ekvivalentni predstavljanju čvorova pomoću ogledalskih krivih: mozaici čvorova [89] i mrežni dijagrami (eng. *grid diagrams*) [90, 91, 92]. Svaki mozaik lako možemo transformisati u ogledalsku krivu i obratno. U radu [93], na str. 15 prikazani su ilustrativni primeri transformacije mozaika čvorova u ogledalske krive: dovoljno je sliku mozaika zarotirati za 45° stepeni, ukloniti prazne delove i dodati dvostrana ogledala kao na slici 52. T. Kuriya (T. Kuriya) je u [93] dokazao Lomonako-Kaufmanovu hipotezu [89] da se svaki čvor ili link može prikazati kao mozaik i pokazao da su teorija mozaika čvorova i teorija konačnih čvorova ekvivalentne. Odatle sledi da je teorija ogledalskih krivih ekvivalentna teoriji konačnih čvorova. Sa druge strane, u skladu sa Propozicijom 8.4 [93], postoji obostrano-jednoznačna korespondencija između mozaika čvorova i mrežnih dijagrama. Ekvivalentnost ove tri teorije i dokaz Kaufman-Lomonakove hipoteze [93] potvrđuju da svaka od njih, pa samim tim i teorija ogledalskih krivih, omogućava prikazivanje bilo kog linka kao ogledalske krive u mreži $RG[p, q]$ dovoljno velikih dimenzija. Iz ovoga sledi da će za dobijanje čvorova i linkova 9_{24} , 9_{34} , 9_{37} , 9_{40} , 9_{20}^2 , 9_{23}^2 , 9_{34}^2 i 9_{42}^2 , koji nedostaju u dosadašnjem izvođenju, biti dovoljno korišćenje većih mreža.



Slika 52: (a) Čvor 4_1 ; (b) Boromejski prstenovi iz rada [89] transformisani u ogledalske krive

U teoriji mozaika čvorova je (do na rotacije za 90°) dovoljno 5 osnovnih modula za generisanje projekcija svih čvorova i linkova. Kodiranje ovih modula i njihovih položaja znatno je komplikovanije u odnosu na kodiranje ogledalskih krivih pomoću samo 4 oznake: 1, -1 , 2 i -2 . Sem toga, u okviru mozaika, između modula javljaju se i prazni delovi koji odgovaraju praznom modulu. Zbog toga, u odnosu na mozaike, ogledalske krive imaju sledeće prednosti:

1. Konciznija prezentacija;
2. Jednostavnije kodiranje.

Ogledalske krive predstavljaju zahvalan model za prezentaciju formacija koje se mogu javiti u raznim naukama (primenjenoj fizici, hemiji, biologiji, kvantnom računarstvu, ...). U ovom modelu su implementirane funkcije prepoznavanja i identifikacije čvorova koji odgovaraju ogledalskim krivama.

3 Gordijeva rastojanja čvorova

Gordijevo rastojanje čvorova K_1 i K_2 predstavlja minimalni broj promena preseka čvora K_1 da bi se on konvertovao u čvor K_2 . Na jedno od najkompliciranijih pitanja u teoriji čvorova, određivanje broja odvezivosti čvora, nailazimo i pri određivanju rastojanja čvorova. Dž. Has (J. Hass), Dž.K. Lagarias (J.C. Lagarias) i N. Pipenger (N. Pippenger) su dokazali da je problem odvezivosti u klasi NP [21, 22]. D. Knut i Haken su opisali algoritam za prepoznavanje trivijalnog čvora. Problem prepoznavanja trivijalnog čvora još uvek nije rešen za Džonsov polinom (Definicija 17) (tj. pitanje da li postoji netrivialan čvor čiji je Džonsov polinom trivijalan), ali su P.B. Kronhajmer (P.B. Kronheimer) i T.S. Mrowka (T.S. Mrowka) [23] dokazali da Hovanovljev polinom (M. Khovanov) detektuje nečvor. U ovom poglavlju govorićemo o načinu određivanja broja odvezivosti korišćenjem Bernhard-Jablanove hipoteze, prikazati metode za određivanje novih čvorova sa brojem odvezivosti jednakim 1, razmatrati dosadašnje rezultate u tablicama Gordijevih rastojanja, predložiti metode za njihovo proširivanje, priložiti novodobijene rezultate i prezentovati proširene tablice Gordijevih rastojanja.

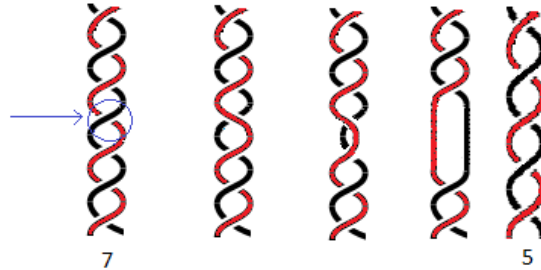
3.1 Tablice rastojanja čvorova I. Darsi

Prve tablice Gordijevih rastojanja čvorova su objavili I. Darsi i D.V. Samnens 1998. [67, 69]. One su sadržale samo racionalne čvorove i proizvode racionalnih čvorova zaključno sa čvorom 8_8 . Nakon toga, I. Darsi u svojoj doktorskoj disertaciji [66] proširuje tablice prostih racionalnih čvorova i njihovih direktnih proizvoda, obuhvatajući racionalne čvorove do $n = 14$ preseka i neke neracionalne čvorove do $n = 8$ preseka [73]. Rastojanja su određivana pomoću računarskih programa čiji su se algoritmi zasnivali na algebri racionalnih spletova i prikazivanju racionalnih spletova verižnim razlomcima.

U daljem radu biće nam potreban i pojam *neredukovanog celobrojnog spleta*. Splet oblika $t = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$, u kome se javlja m ($m \geq 0$) preseka $+1$ i n ($n \geq 0$) preseka -1 , naziva se neredukovani celobrojni splet. Pošto preseki u ovakvom spletu mogu da komutiraju (primenom flip poteza), nakon pregrupisanja preseka i redukcije primenom Rajdemajsterovog poteza II, ovakav splet se svodi na celobrojni splet $m - n$.

Posmatrajmo splet 7 prikazan na slici 53. Promenom jednog znaka preseka, ukupan broj preseka u tom spletu se smanjuje za 2 (splet 7 prelazi u splet 5). Kako presek u neredukovanom celobrojnom spletu može da komutira sa ostalim presecima u istom spletu, svaka promena preseka u celobrojnom spletu k ($k \geq 0$) daje splet $k - 2$, dok svaka promena preseka u spletu $-k$ ($k \geq 0$) daje splet $-k + 2$.

Imajući ove osobine u vidu, pogledajmo na koji način se problem određivanja broja odvezivosti racionalnog čvora sa topologije čvorova može svesti na rešavanje problema u algebri verižnih razlomaka.



Slika 53: Promena preseka u celobrojnom spletu

PRIMER 1 *Odrediti broj odvezivosti racionalnog čvora 3 1 2 datog u Konvejevoj notaciji.*

Prema Bernhard-Jablanovoj hipotezi, algoritam za izračunavanje BJ -broja odvezivosti čvora K se svodi na traženje minimalnog broja uzastopnih promena preseka koji će čvor K konvertovati u trivijalni čvor (nečvor). Trivijalnom čvoru odgovara verižni razlomak $\frac{p}{q} = \pm 1$. Verižni razlomak čvora 3 1 2 je

$$\frac{p}{q} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \neq 1.$$

Tri moguće promene preseka (redom u celobrojnim spletovima 3, 1 i 2), uzimajući u obzir prethodno pomenuto svojstvo promena preseka u celobrojnim spletovima, svode ovaj čvor na sledeća tri i njima odgovarajuće verižne razlomke:

$$1\ 1\ 2 \equiv \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \neq 1$$

$$3\ -1\ 2 \equiv \frac{p}{q} = 3 + \frac{1}{-1+\frac{1}{2}} = 1$$

$$3\ 1\ 0 \equiv \frac{p}{q} = 3 + \frac{1}{1} \neq 1.$$

Primetimo da čvoru 3 - 1 2 odgovara verižni razlomak koji je jednak 1, što znači da on predstavlja nečvor. Čvor 3 1 2 smo sveli na nečvor u prvom rekursivnom koraku algoritma, pa odatle sledi da je njegov broj odvezivosti (Gordijev broj) jednak 1.

Ovim smo ilustrovali način svođenja nekih problema teorije čvorova na algebru verižnih razlomaka. Polazeći od Teoreme 2, probleme prepoznavanja čvorova, kao i određivanje nekih rastojanja, možemo rešavati korišćenjem veoma brzih funkcija dostupnih u programu *Mathematica* – funkcija `ContinuedFraction[]` i `FromContinuedFraction[]`.

Opšti oblik racionalnih čvorova, čiji je Gordijev broj jednak 1, opisuju sledeća teorema [24]:

Teorema 6 *Svaki racionalni čvor sa Gordijevim brojem jednakim 1 može se izraziti jednim od sledećih Konvejevih simbola*

$$c_0 c_1 \dots c_{r-1} c_r 1 1 (c_r - 1) c_{r-1} \dots c_1$$

$$c_0 c_1 \dots c_{r-1} (c_r - 1) 1 1 c_r c_{r-1} \dots c_1,$$

gde je $c_i \geq 0$ za $i = 0, \dots, r$ i $c_r \geq 2$.

J. Nakaniši [25] i A. Stojmenov (A. Stoimenow) [26] su dokazali da Bernhard-Jablanova hipoteza važi za sledeću klasu racionalnih čvorova i linkova:

Teorema 7 *Ako neki racionalni čvor ili link ima Gordijev broj jednak 1, tada se on realizuje na minimalnim dijagramima.*

Drugim rečima, svaki minimalni dijagram racionalnog čvora sa Gordijevim brojem jednakim 1 sadrži presek čija promena daje nečvor. Pomenuta klasa racionalnih čvorova (linkova) je jedina klasa čvorova (linkova) na kojoj je potvrđeno važenje Bernhard-Jablanove hipoteze.

PRIMER 2 *Izračunati rastojanje racionalnih čvorova $!9_9 = (-4 - 2 - 3)$ i $9_{13} = 3 2 1 3$.*

Ako u minimalnom dijagramu čvora $!9_9 = (-4 - 2 - 3)$ izvršimo promene preseka u celobrojnim spletovima -4 , -2 i -3 , kao rezultat redom dobijamo dijagrame $(-2 - 2 - 3)$, $(-40 - 3)$ i $(-4 - 2 - 1)$ koji se svode na racionalne čvorove $!7_5$, $!7_1$ i $!7_3$. Na isti način, promene preseka u celobrojnim spletovima 3 , 2 , 1 i 3 , od kojih se sastoji čvor 9_{13} , daju redom dijagrame $(1 2 1 3)$, $(3 0 1 3)$, $(3 2 - 1 3)$ i $(3 2 1 1)$ koji se svode na racionalne čvorove 7_4 , 7_3 , $!5_1$ i $!7_5$. Prema tome, zaključujemo da je rastojanje čvorova 9_9 i 9_{13} , koje se može dobiti preko njihovih minimalnih dijagrama, veće od 1. Međutim, čvor $9_{13} = (3 2 1 3)$ se može prikazati neminimalnim dijagramom $(-3 - 2 - 2 1 2)$. Nakon jedne promene preseka 1 u -1 , dobija se neminimalni dijagram $(-3 - 2 - 2 - 1 2)$ koji se svodi na minimalni dijagram $(-4 - 2 - 3)$ čvora $!9_9$. Prema tome, zaključujemo da rastojanje racionalnih čvorova $!9_9$ i 9_{13} iznosi 1 i ostvaruje se isključivo preko neminimalnih dijagrama.

Zahvaljujući *Teoremi o cikličnoj hirurgiji* (eng. *Cyclic Surgery Theorem*) [27] I. Darsi [28, 29] i T. Tanaka su uspeli da potpuno klasifikuju racionalne čvorove sa Gordijevim rastojanjem jednakim 1. Uzimajući kao osnovu vezu racionalnih čvorova sa verižnim razlomcima, I. Darsi i njeni saradnici su napisali programe za računanje Gordijevih rastojanja 1 racionalnih čvorova [69, 82, 81]. U okviru programa *Knotplot* ([81]), koji je razvio R. Šarejn (R. Scharein) i detaljno opisao u okviru svoje doktorske disertacije, implementirana su izračunavanja rastojanja racionalnih čvorova i prateća vizuelizacija. Program *Knotplot* predstavlja, u grafičkom smislu, najkvalitetniji program za vizuelizaciju i manipulaciju čvorovima u 3D, koji omogućava i rad sa spletovima i ogledalskim krivama.

Kako su nedostajali metodi za rad sa neracionalnim čvorovima, rastojanja između čvorova, koja su se realizovala posredstvom neracionalnih čvorova, bila

su procenjena sa malom preciznošću. Putem od čvora A do čvora B smatramo niz čvorova koji počinje čvorom A i završava se čvorom B i gde je svaki čvor u nizu nastao jednom promenom preseka u prethodnom čvoru u nizu. Ukoliko postoji put od neracionalnog čvora A do neracionalnog čvora B , koji se sastoji samo od racionalnih čvorova, tada se dužina tog puta može uzeti kao gornja granica rastojanja čvorova A i B . Ovim je ostavljena mogućnost da neki drugi put, koji vodi i preko neracionalnih čvorova, može biti i kraći i dati bolju procenu gornje granice rastojanja. Pošto nisu postojali metodi za ispitivanje takvih rastojanja, u tablicama Gordijevih rastojanja, rezultati koji su se odnosili na neracionalne čvorove i dalje nisu bili dovoljno precizni.

Videli smo da se većina rastojanja čvorova realizuje preko neminimalnih dijagrama. Problem konstrukcije neminimalnih dijagrama racionalnih čvorova na rastojanju 1 rešava se primenom Teoreme o cikličnoj hirurgiji i verižnih razlomaka, ali nije rešen za čvorove koji nisu racionalni. Zbog toga je bilo neophodno razvijanje novih metoda za rad sa neracionalnim čvorovima i njihovim rastojanjima.

3.2 Tablice H. Mun

U tablicama I. Darsi, čak i rastojanja između nekih čvorova sa malim brojem preseka ostala su neodređena. Rad na proširenju ovih tablica je nastavila njena učenica H. Mun (H. Moon) i proširene rezultate prikazala u svojoj doktorskoj disertaciji [97]. Ovim tablicama H. Mun je obuhvatila čvorove do $n = 9$ preseka.

Inspirisana akcijama topoizomeraza i njihovom vezom sa promenama preseka čvorova, H. Mun se posvetila izučavanju metoda za poboljšavanje dotadašnjih rezultata. A. Stoimenov je u [78] odredio vezu između čvorova sa *označenim brojem odvezivosti* jednakim 1 i Džonsovog polinoma. Kako je broj odvezivosti specijalni slučaj rastojanja čvorova, Mun istražuje vezu između Džonsovog polinoma i Gordijevih rastojanja. Pri tome koristi svojstva Džonsovog polinoma za testiranje donjih granica rastojanja, konkretno za proveru da li se donja granica može sa 1 povećati na 2. Zajedno sa Džonsovim polinomom, signatura je korišćena za povećavanje donje granice *označenih rastojanja* (videti Definicije 24, 25 preuzete iz [72]).

Definicija 24

1. $L_+ \rightarrow L_-$ se naziva $+-$ promenom preseka.
2. $L_- \rightarrow L_+$ se naziva $-+$ promenom preseka.

pri čemu su L_+ i L_- elementi skein trojke (slika 17).

Definicija 25

1. $d_+(K_1, K_2)$ je minimalni broj $+-$ promena preseka potrebnih za konvertovanje K_1 u K_2 , gde su dozvoljene i $-+$ promene, ali se ne broje. Ne postoji ograničenje za broj $+-$ promena.

2. $d_-(K_1, K_2)$ je minimalni broj $-+$ promena preseka potrebnih za konvertovanje K_1 u K_2 , gde su dozvoljene i $+-$ promene, ali se ne broje. Ne postoji ograničenje za broj $-+$ promena.
3. $d_{++}(K_1, K_2)$ je minimalni broj $+-$ promena preseka potrebnih za konvertovanje K_1 u K_2 , gde su dozvoljene samo $+-$ promene.
4. $d_{--}(K_1, K_2)$ je minimalni broj $-+$ promena preseka potrebnih za konvertovanje K_1 u K_2 , gde su dozvoljene samo $-+$ promene.

Napomenimo da nijedno od označenih rastojanja nema svojstva metrike, ali svako od njih zadovoljava svojstvo nejednakosti trougla. Takođe, važi

$$d(K_1, K_2) \geq \max[d_+(K_1, K_2), d_-(K_1, K_2)].$$

Stoga se označena rastojanja mogu koristiti za poboljšavanje donjih granica rastojanja. d_+ je već izračunavala I. Darsi za proste i složene racionalne čvorove u [66].

Podsetimo da povećavanjem donju granicu približavamo gornjoj, a krajnji cilj nam je da se one poklope i tako odredimo tačno rastojanje dva čvora.

Među 50 000 parova čvorova, čija je donja granica rastojanja bila 1, Mun je detektovala 6 457 parova (za proizvoljan broj preseka n) kojima je donju granicu rastojanja uspela da poveća na 2 zahvaljujući Džonsovom polinomu. Na osnovu signatura nije uspela da napravi nikakva nova poboljšanja donjih granica koja nisu već dobijena korišćenjem Džonsovog polinoma [97]. Među novim rezultatima koje je dobila je i povećanje broja odvezivosti čvora 8_{18} , sa 1 na 2. Taj rezultat je u međuvremenu potvrđen drugom metodom i prikazan u [78]. Mun je modifikovala program svoje mentorke I. Darsi, integrisala ga sa programom *Lin-Knot* [87] i implementirala metode koji se zasnivaju na označenim rastojanjima, Džonsovom polinomu i signaturi.

Nove tabele Gordijevih rastojanja prikazane su u [97] u Dodatku C.

3.3 Izbor metoda za prepoznavanje čvorova

3.3.1 Polinomske invarijante čvorova

U radovima I. Darsi [66] i H. Mun [97] za prepoznavanje čvorova korišćen je Džonsov polinom. Na kraju [97] H. Mun navodi programe koje je napisala za računanje Džonsovog, polinoma modifikujući program za računanje HOM-FLYPT polinoma, koji su napisali B. Eving (B. Ewing) i K. Milet (K. Millet). Na samom početku našeg rada potrebno je opredeliti se za način prepoznavanja čvorova čija rastojanja su računata. Pri izboru metoda prepoznavanja rukovodili smo se sledećim kriterijumima, svrstanim po redosledu njihove važnosti:

1. pouzdanost prepoznavanja;
2. brzina izračunavanja;
3. mogućnost primene istih algoritama za rad sa čvorovima sa većim brojem preseka bez modifikovanja programa.

Za prepoznavanje čvorova stajali su nam na raspolaganju program *KnotFind*, deo programa *KnotScape* i različiti programi za računanje polinomskih invarijanata (Aleksanderovog, Konvejevog, Džonsovog, HOMFLYPT polinoma, Kaufmanovog polinoma sa dve promenljive, itd.) kojima raspolaže program *LinKnot*. Pošto smo odlučili da radimo sa čvorovima sa $n \leq 9$ preseka, trebalo se opredeliti za način prepoznavanja čvorova koji maksimalno zadovoljava pomenute kriterijume.

Program *KnotFind* optimalno zadovoljava gotovo sve kriterijume. Pošto nije zasnovan na polinomskim invarijantama, već na izračunavanju minimalnog Dovkerovog koda za čvorove do maksimalno $n = 49$ preseka, ovaj program omogućava potpuno jednoznačno prepoznavanje čvorova. Postoji obostrano jednoznačna korespondencija između čvorova i njihovih minimalnih Dovkerovih kodova (DT kodova u smislu programa *KnotScape*). Međutim, za naš osnovni cilj: izračunavanje rastojanja čvorova, program *KnotFind* ne zadovoljava jedan od glavnih zahteva: ne razlikuje "levu" od "desne" forme istog čvora, čije je razlikovanje u biologiji neophodno. Sa druge strane, polinomske invarijante ne omogućavaju jednoznačno prepoznavanje čvorova sa većim brojem preseka. Za čvorove sa $n \leq 9$ preseka Džonsov polinom obezbeđuje kompletno prepoznavanje čvorova, izuzev što nije u stanju da razlikuje čvor 9_{42} od njegove slike u ogledalu, čvora $!9_{42}$. Razlikovanje ova dva čvora obezbeđuje se računanjem njihovih signatura. "Levu" i "desnu" formu ovog čvora takođe možemo razlikovati primenom Hovanovljevog polinom.

Zbog toga smo se opredelili na kombinaciju metoda za prepoznavanje i razlikovanje dobijenih čvorova:

1. u prvom koraku koristimo program *KnotFind* koji obezbeđuje kompletno prepoznavanje dobijenih čvorova, ali ne razlikuje njihovu "levu" i "desnu" formu;
2. u drugom koraku, nakon identifikovanja dobijenog čvora, razlikujemo njegovu "levu" i "desnu" formu koristeći polinomske invarijante;
3. u slučaju čvorova, čiju "levu" i "desnu" formu ne razlikuje ni jedan od pomenutih polinoma, koristimo dodatne kriterijume (npr. signaturu) za razlikovanje čvora i njegove slike u ogledalu.

Za identifikovanje "leve" i "desne" forme čvorova sa $n \leq 9$ preseka koristili smo Džonsov polinom. Opredeljujući se za Džonsov polinom, imali smo u vidu brzinu njegovog izračunavanja, koja je mnogo veća od brzine izračunavanja nekih selektivnijih, ali mnogo složenijih polinoma (na primer, HOMFLYPT polinoma ili Kaufmanovog polinoma). Za nastavak izračunavanja Gordijevih rastojanja čvorova i njihovo izračunavanje za čvorove sa $n \geq 9$ preseka umesto Džonsovog polinoma bilo bi korisno koristiti neki od selektivnijih polinoma (HOMFLYPT ili Kaufmanov polinom) koji omogućava pouzdanije razlikovanje "leve" i "desne" forme čvorova. Naime, koristeći program *KnotFind* rešili smo prvi i najteži problem: identifikovanje čvorova. Nakon toga nam preostaje samo razlikovanje njihove "leve" i "desne" forme.

Činjenica da su pri svim dosadašnjim izračunavanjima rastojanja čvorova za prepoznavanje čvorova korišćene isključivo polinomske invarijante, kao i problemi i dileme sa kojima smo se susreli pri izboru optimalnih metoda rada, povod su da damo osvrt na polinomske invarijante čvorova, koje svakako predstavljaju najčešće korišćen način za prepoznavanje čvorova.

Na samom početku razvoja teorije čvorova, u nedostatku invarijanata, prepoznavanje čvorova vršeno je ručno. Ipak, prve tablice čvorova, čiji su autori P.G. Tejt, T.P. Kirkman i K.N. Litl, u kojima gotovo da nema grešaka, nastale su krajem XIX veka. Zatim se više od pedeset godina ništa bitno nije događalo u oblasti tabelacije čvorova, sve do uvođenja kompjutera i nešto kasnije, superkompjutera koji su bili korišćeni za dalje proračune. M. Tistltvejt sa svojim saradnicima je napravio prvi program za enumeraciju čvorova i sastavljanje njihovih tablica – program *KnotScape* [70].

Prvi polinom u teoriji čvorova je uveo Dž.V. Aleksander, a koristio ga je K. Reidmajster u svojoj knjizi *Knotentheorie* 1932. za razlikovanje čvorova do $n = 9$ preseka. Prekretnicu u razvoju polinomskih invarijanata predstavlja pojava Džonsovog polinoma, prvog polinoma preko kojeg se mogla razlikovati "leva" i "desna" forma čvorova. Nakon toga dobijene su mnoge nove polinomske invarijante, gde je svaka bila vezana za neki napredak u različitim poljima matematike – HOMFLYPT polinom, Kaufmanov polinom sa dve promenljive, obojeni Džonsov polinom, Hovanovljev polinom koji predstavlja homološku kategorifikaciju Džonsovog polinoma, itd.

Jedna od prvih stvari koja se uči u teoriji čvorova jeste računanje polinomskih invarijanata, posebno onih koje koriste skein relacije. Međutim, da li je možda prevelik značaj dat ovim invarijantama? Ono što znamo je da, ako dobijemo dva različita polinoma za dva čvora (ili linka), tada znamo da su oni različiti, ali ako dobijemo jednake polinome, ne možemo konstatovati da li su ti čvorovi isti ili različiti. Jedna od mogućnosti da se selektivnost poboljša je istovremena upotreba nekoliko različitih polinoma koji su međusobno nezavisni. Naime, dve vrste polinoma, npr. Aleksanderov i Konvejev polinom su međusobno ekvivalentni (zavisni), pošto se Aleksanderov polinom dobija iz Konvejevog zamenom promenljive, Džonsov polinom se dobija iz HOMFLYPT polinoma njegovim svodenjem na polinom sa jednom promenljivom, dok su neki polinomi međusobno nezavisni.

Već pri prvom susretu sa polinomima upoznajemo se sa činjenicom da Aleksanderov polinom ne može da razlikuje trolisnik od njegove slike u ogledalu, tj. "levu" i "desnu" formu bilo kog čvora. Džonsov polinom ima tu mogućnost, a potencijalno i mogućnost za detektovanje trivijalnog čvora. Međutim, kao što je slučaj sa svim ostalim polinomima, ni pomoću Džonsovog polinoma nije moguće razlikovati čvorove mutante. I za sve ostale polinome pronađeni su mnogi primeri čvorova i linkova (različiti od mutanata) koje oni ne mogu da razlikuju, ali nije postojala nikakva mera pouzdanosti za konkretne polinomske invarijante. Zbog toga S. Jablan i Lj. Radović u [99] izvode statističke proračune o pouzdanosti najvažnijih polinomskih invarijanata koje se koriste. Njihov članak predstavlja osnovnu inspiraciju za ovo poglavlje o polinomima i razmišljanje da li se rezultati u tablicama rastojanja čvorova mogu dalje poboljšati korišćenjem

nekim svojstava polinomskih invarijanata, ili je potrebno krenuti u nekom drugom pravcu. Rezultati rada [99] će biti ukratko predstavljeni u ovom poglavlju.

Za proračune u navedenom radu su korišćeni svi čvorovi i linkovi sa $n \leq 12$ preseka - ukupno 8677 čvorova i linkova od kojih je 4684 alternirajućih (1851 čvorova i 2833 linkova) i 3993 nealternirajućih (1126 čvorova i 2867 linkova) i prikazane su tabele koje pokazuju procenat čvorova (linkova) koji imaju isti polinom kao i neki drugi čvor (link). Rezultati su razvrstani po alternirajućim i nealternirajućim čvorovima i linkovima, a zatim je posmatrano i njihovo ukupno ponašanje. Ovde izdajamo tabelu u kojoj su navedeni nazivi polinoma, broj čvorova koji daju isti polinom za dva ili više različitih čvorova, njihov procenat u odnosu na sve čvorove, iste rezultate za linkove i na kraju ukupan broj čvorova i linkova koje ne možemo razlikovati pomoću svakog od posmatranih polinoma. Statistika razlikovanja čvorova i linkova korišćenjem polinomskih invarijanata data je u sledećoj tabeli preuzetoj iz rada [99].

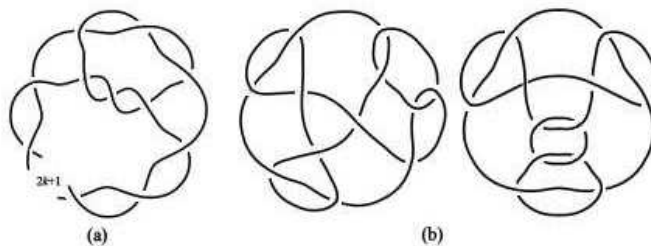
	Čvorovi		Linkovi		Ukupno	
Aleksander	1832	62%	4169	73%	6001	69%
Džons	1213	41%	1565	27%	2778	32%
Hovanov	1117	38%	921	16%	2038	23%
HOMFLYPT	600	20%	707	12%	1307	15%
Kaufman	239	8%	570	10%	809	9%

Iz tabele vidimo da pomoću Aleksanderovog polinoma nije moguće razlikovati čak 62% čvorova, tj. da svaki od njih pripada paru ili grupi čvorova koji daju isti polinom. Za linkove je taj broj još veći. Postoje familije čvorova i linkova za koje svi čvorovi, koji pripadaju tim familijama, imaju isti Aleksanderov polinom. Na primer, za sve čvorove familije nealternirajućeg pereca čvora $(2k + 1), 3, -3$ (slika 54a), Aleksanderov polinom je $2 - 5x + 2x^2$. Pomoću Aleksanderovog polinoma ne uspevamo da razlikujemo linkove po broju komponentata (na slici 54b je prikazan primer 2-komponentnog i 4-komponentnog linka koji imaju isti Aleksanderov polinom), dok za linkove do $n = 12$ preseka ipak uspevamo da razlikujemo linkove sa parnim brojem komponentata od onih sa neparnim. Upotrebom drugih polinoma moguće je kompletno razlikovanje linkova po broju komponentata, a samim tim i razlikovanje čvorova od linkova.

Pomoću Kaufmanovog polinoma je moguće razlikovati najviše čvorova i linkova (među kojima se nalaze i čvorovi mutanti, koje nijedan polinom ne razlikuje), ali ni on za 570 čvorova ne omogućava kompletno (jednoznačno) prepoznavanje.

Za svaki polinom (sem Kaufmanovog polinoma) postoje parovi (ili čak i grupe) čvorova ili linkova koji imaju iste polinome od kojih su neki alternirajući, a drugi nealternirajući. Dakle, nijedan polinom, sem Kaufmanovog ne prepoznaje da li je čvor ili link alternirajući ili nealternirajući. Za Kaufmanov polinom smo sigurni da, ako dobijemo dva čvora sa istim polinomom, tada oni imaju isti broj preseka.

Već među čvorovima sa $n = 10$ preseka javljaju se čvorovi koji su kompletno nedetektabilni u pogledu hiralnosti, tj. hiralni čvorovi čiju "levu" i



Slika 54: (a) Familija čvorova $(2k+1), 3, -3$; (b) 2-komponentni link $(2, 1, 2, 1)1(2, 2, +)$ i 4-komponentni link $(2, 2, 2)(2, 1, 2, 1)$

”desnu” formu ni jedan od pomenutih polinoma nije u stanju da razlikuje. Njihova signatura je jednaka 0, pa ne omogućava razlikovanje. Pošto je program *KnotFind* korišćen za prepoznavanje čvorova, u nastavku izračunavanja rastojanja čvorova sa $n \geq 10$ preseka glavni problem biće razlikovanje ”leve” i ”desne” forme. Primeri takvih nedetektabilnih čvorova sa $10 \leq n \leq 12$ preseka su alternirajući čvorovi 10_{71} , $K12a126$, $K12a132$, $K12a214$, $K12a222$ i $K12a697$. Njihovu ”levu” i ”desnu” formu možemo razlikovati izračunavanjem n -obojenog Džonsovog polinoma ($n \geq 3$).

U radu [99] testirana je mogućnost detektovanja prostih čvorova. Za sve polinome (sem za Hovanovljevog) važi $P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2)$. Međutim, svi pomenuti polinomi, izuzev Kaufmanovog, faktorizabilni su i za neke proste čvorove, pa ne mogu biti korišćeni kao pokazatelj da li je neki čvor prost ili složen (tj. prikaziv kao direktni proizvod neka dva prosta čvora). U članku su navedeni primeri prostih čvorova i linkova čiji se Džonsov, obojeni Džonsov ili HOMFLYPT polinom mogu faktorizovati. Tatov polinom (W.T. Tutte), poznat iz teorije grafova i primenjen na senke čvorova, može se koristiti za detekciju prostih čvorova.

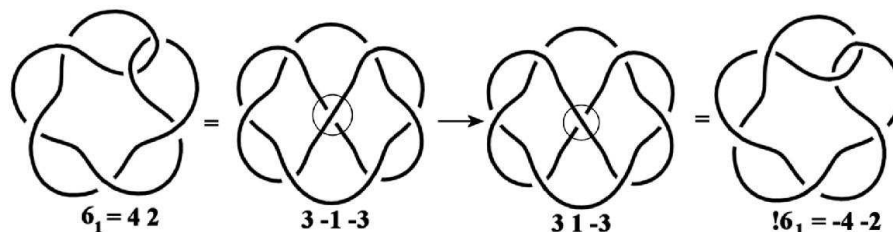
3.4 Metodi korišćeni u ovom radu

U tablicama H. Mun nisu izračunata rastojanja za veliki broj neracionalnih čvorova. Rezultati nedostaju za sve čvorove $9_{31} - 9_{49}$. U tablicama I. Darsi izostavljeni su čvorovi $10_{46} - 10_{165}$, a za mnoge racionalne čvorove rezultati su dati samo u vidu donjih i gornjih granica rastojanja sa veoma velikim rasponom.

Osnovni cilj metoda koji predlažemo je nalaženje novih parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1, a zatim određivanje Gordijevih rastojanja većih od 1 za parove čvorova K_1 i K_2 za koje je samo poznato da je $d(K_1, K_2) > 1$. Naime, ako je K čvor koji se nalazi na rastojanju 1 od čvorova K_1 i K_2 , onda na osnovu relacije trougla $d(K_1, K) + d(K, K_2) \leq d(K_1, K_2)$ direktno konstatujemo da je $d(K_1, K_2) \leq 2$. Koristeći polinomske obstrukcije za izvesne parove čvorova, možemo naći donju granicu rastojanja. Ako za takav par čvorova K_1 i K_2 uspemo da pokažemo da je $d(K_1, K_2) > 1$, dokazali smo da je $d(K_1, K_2) = 2$. Velika poboljšanja izvršena su čak i za čvorove za koje je u [97] konstatovano

samo da se njihova rastojanja nalaze u intervalu $1 - 8$, kao što su, na primer, čvor 9_{22} i njegova rastojanja do čvorova $!6_2$, 6_3 , 7_7 , 9_{19} , i 9_{44} za koja smo uspeli da pokažemo da su jednaka 1.

Bernhard-Jablanova hipoteza [87] tvrdi da postoji mogućnost da se za svaki čvor K njegov broj odvezivosti čvora (koji zapravo predstavlja rastojanje čvora K od nečvora) dobije rekurzivnim algoritmom iz minimalnih dijagrama. Na žalost, rastojanja među čvorovima ostvaruju se uglavnom preko neminimalnih dijagrama, pa ne postoji mogućnost da se za izračunavanje rastojanja čvorova formuliše, dokaže i primeni neka slična hipoteza. Podsetimo se čvora 6_1 i njegove slike u ogledalu (slika 55) za koji važi $d(6_1, !6_1) = 1$, ali se ovo rastojanje 1 ne može ostvariti na minimalnim dijagramima, već se ostvaruje na neminimalnim dijagramima $3-1-3$ i $3\ 1-3$. Istu osobinu ilustruje i Primer 2. Prema tome, izračunavanje novih rastojanja zasnivaćemo na radu sa neminimalnim dijagramima racionalnih i neracionalnih čvorova prikazanih u Konvejevoj notaciji. Ukoliko koristimo minimalne dijagrame, za slučaj alternirajućih čvorova, budući da su svi minimalni dijagrami flip ekvivalentni (kao posledica teoreme 3), koristićemo samo jedan minimalni dijagram kao polazni, dok ćemo za nealternirajuće koristiti sve minimalne nealternirajuće dijagrame, tj. reprezentante svih klasa ekvivalencije dijagrama u odnosu na flip poteze.



Slika 55: Čvor 6_1 i njegova slika u ogledalu $!6_1$ čije je rastojanje 1

Za generisanje neminimalnih dijagrama racionalnih čvorova koristićemo metode bazirane na verižnim razlomcima koje su razvili i koristili I. Darsi i njeni saradnici.

Za generisanje neminimalnih dijagrama neracionalnih čvorova koristili smo sledeća dva metoda.

METOD 1 *Svaki celobrojni splet (uključujući i spletove dužine 1) alternirajućeg čvora zamenjujemo negativnim celobrojnim spletom jednake ili veće dužine i iste parnosti.*

Na ovaj način, polazeći od proizvoljnih alternirajućih dijagrama, dobijamo minimalne ili neminimalne nealternirajuće dijagrame čvorova.

METOD 2 *Ceo pozitivni racionalni splet zamenjujemo njegovim ekvivalentnim nealternirajućim spletom, tj. spletom sa mešovitim znacima.*

Pozitivnim (negativnim) racionalnim spletom nazivamo racionalni splet koji u svom Konvejevom simbolu sadrži samo pozitivne (negativne) brojeve. Ovakav splet nazivaćemo i *alternirajućim racionalnim spletom*. U suprotnom, govorimo o *racionalnom spletu sa mešovitim znacima* ili *nealternirajućem racionalnom spletu*. Svaki racionalni splet sa mešovitim znacima dozvoljava lokalnu redukciju i ima svoj redukovan ekvivalent – pozitivan (negativan) splet koji uvek sadrži manji broj preseka nego početni splet. Pri tome je bitno ne poistovećivati ga sa minimalnim dijagramom nekog racionalnog čvora koji se dobija redukovanjem nekog njegovog neminimalnog dijagrama primenom verižnih razlomaka. Svaki racionalni čvor je brojilačko zatvorenje nekog racionalnog spleta, dok su prethodno pomenuti spletovi otvoreni, pa na njih ne možemo primeniti iste algoritme za redukciju koje primenjujemo na dijagrame racionalnih čvorova.

Za redukciju spletova mešovitog znaka primenjuje se sledeći algoritam koji koristi *Mathematica* funkcije `ContinuedFraction` i `FromContinuedFraction`:

ALGORITAM 3

1. *invertovati Konvejev zapis racionalnog spleta;*
2. *predstaviti ga verižnim razlomkom;*
3. *odrediti racionalni splet koji odgovara verižnom razlomku.*

Navedeni algoritam omogućava generisanje baze racionalnih spletova sa n preseka sa mešovitim znacima i njima ekvivalentnih pozitivnih (negativnih) spletova. Zamene ekvivalentnim spletovima se mogu vršiti u svim čvorovima izuzev racionalnim i izvedena baza omogućava dvosmerni proces [87]:

1. *redukciju čvora ili linka* zamenom spletova sa mešovitim znacima njihovim redukovanim ekvivalentom;
2. *proširenje čvora ili linka*, zamenom redukovanih spletova njihovim ekvivalentima sa mešovitim znacima.

Za generisanje neminimalnih dijagrama čvorova od posebnog interesa je drugi deo ovog postupka. Na primer, dijagram $(-5\ 1\ -1\ -1)$, $(-4\ 1\ -1\ -1)$, $(3\ -1\ 2\ -1)$ sa $n = 23$ preseka predstavlja neminimalni dijagram Montesinosovog čvora $3, 2\ 1, 2$ sa $n = 8$ preseka pošto racionalni spletovi sa mešovitim znacima $(-5\ 1\ -1\ -1)$, $(-4\ 1\ -1\ -1)$ i $(3\ -1\ 2\ -1)$ predstavljaju, redom, ekvivalente pozitivnih spletova $3, 2\ 1$ i 2 . Zamenivši redom u neminimalnom dijagramu Montesinosovog čvora sa $n = 14$ preseka racionalne spletove sa mešovitim znacima $(-2\ -1\ 2)$, $(-3\ 1\ 1)$ i $(-2\ 2)$ ekvivalentnim pozitivnim spletovima $3\ 1, 2\ 2$ i $2\ 1$, ovaj neminimalni dijagram se redukuje na minimalni dijagram istog čvora $3\ 1, 2\ 2, 2\ 1$ sa $n = 11$ preseka.

Zamene se ne moraju vršiti samo na spletovima sa $n > 1$ preseka. Navedeni algoritam i pomenuti metodi, za dato n , omogućavaju generisanje svih racionalnih spletova sa n preseka sa mešovitim znacima, ekvivalentnih spletu 1. Splet 1 se javlja u svim temenima bazičnih poliedara, pa su od velike važnosti neminimalni ekvivalenti ovog spleta. Spletu 1 ekvivalentni su jedan splet sa $n = 4$

preseka: $(-2\ 1\ -1)$, dva spleta sa $n = 6$ preseka: $(-3\ 1\ -1\ -1)$, $(-2\ -1\ 1\ -2)$, četiri spleta sa $n = 6$ preseka: $(-4\ 1\ -1\ -2)$, $(-3\ -1\ 1\ -3)$, $(-2\ -2\ 1\ -1\ -1)$, $(-2\ -1\ -1\ 1\ -2\ -1)$, itd. Ne postoje spletovi sa neparnim brojem preseka ekvivalentni spletu 1.

Algoritmi za generisanje neminimalnih dijagrama čvorova su implementirani u *Mathematici* korišćenjem funkcija programskog paketa *LinKnot*.

3.4.1 Određivanje parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1

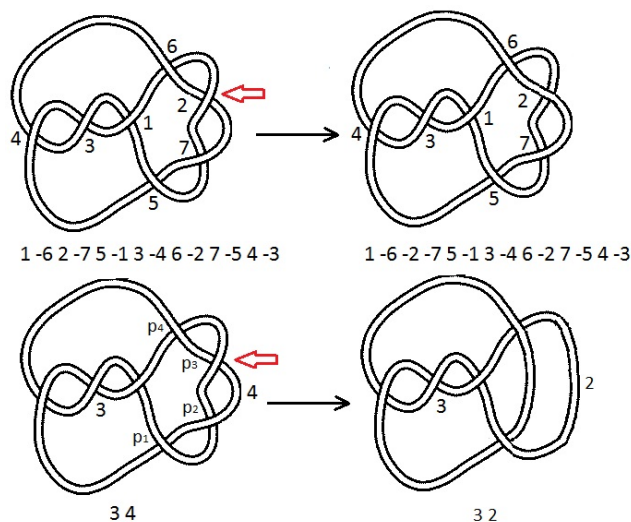
Parove čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1, koje se realizuje na njihovim minimalnim dijagramima, nalazimo direktno, vršeći promene preseka u minimalnim dijagramima. U cilju nalaženja parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1 koje se realizuje na neminimalnim dijagramima, polazna ideja je da nakon generisanja različitih neminimalnih dijagrama nekog čvora K_1 , odredimo sve čvorove koji se dobijaju iz ovih neminimalnih dijagrama čvora K_1 jednom promenom preseka. Ako u nekom neminimalnom dijagramu čvora K_1 izvršimo jednu promenu preseka i to činimo redom u svim presecima, a zatim dobijene dijagrame minimizujemo, kao rezultat dobijamo različite čvorove K_2 i za svaki od njih važi $d(K_1, K_2) = 1$.

Nameće se pitanje: kako na optimalan način izvršiti sve promene preseka? Ako izvršimo promenu u svakom pojedinačnom preseku, kao što bismo to morali da činimo ako koristimo bilo koji od numeričkih kodova čvorova (Gausov kôd, Dovkerov kôd, itd.) za dijagram sa n preseka ukupan broj mogućnosti bio bi 2^n . Ovde dolaze do izražaja prednosti Konvejeve notacije koja proglašava neke od promena preseka suvišnim, izjednačavajući preseke u sledećem smislu:

Definicija 26 *Dva preseka p_i i p_j dijagrama čvora K_1 datog u Konvejevoj notaciji su ekvivalentna kao kandidati za promenu preseka ukoliko postoji celobrojni splet u zapisu čvora K_1 koji sadrži oba preseka p_i i p_j .*

Gausov kôd čvora sa 7 preseka na levoj strani slike 56 je $\{\{1, -6, 2, -7, 5, -1, 3, -4, 6, -2, 7, -5, 4, -3\}\}$. Na osnovu ovakvog zapisa računarskim programom nije moguće odrediti da li će se nekim promenama preseka kao rezultat dobiti identičan čvor. Stoga se nameće ideja da vršimo promenu svakog od 7 preseka, a zatim razmatramo novodobijene čvorove. Ukoliko se promeni presek 2 (označen strelicom na slici), dobija se čvor prikazan u gornjem desnom uglu slike. Gausov kôd čvora sa promenjenim presekom se jednostavno dobija tako što se u početnom Gausovom kodu promene predznaci ispred simbola koji označava presek u kome se dogodila promena, pa dobijamo Gausov kôd $\{\{1, -6, -2, -7, 5, -1, 3, -4, 6, 2, 7, -5, 4, -3\}\}$. Novodobijeni Gausov kôd poseduje isti broj preseka kao i polazni kôd. Sa slike se vidi da su preseki 2 i 7 suvišni i da se ovaj Gausov kôd može pojednostaviti primenom drugog Rajdemajsterovog poteza.

Sa druge strane, ukoliko se isti dijagram posmatra u Konvejevoj notaciji (donji levi ugao slike 56), situacija se računski pojednostavljuje. Konvejev zapis čvora 7_3 je 34. Prethodna definicija nam govori da je promena preseka p_3



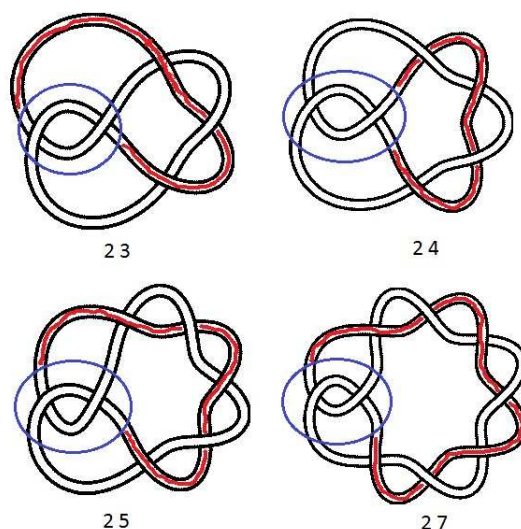
Slika 56: Promena znaka preseka u čvoru 7_3 zapisanog u Gausovoj i Konvejevoj notaciji

ekvivalentna promeni bilo kog od preseka p_1 , p_2 ili p_4 , a promena preseka u celobrojnom pozitivnom spletu k daje celobrojni splet $k - 2$ (tj. u spletu 2 na ovom primeru). Dakle, novodobijeni čvor je 3_2 , i ima $3 + 2 = 5$ preseka. Na osnovu toga, umesto 7 pojedinačnih promena preseka u Gausovom kodu, broj promena preseka je smanjen na 2 (samo jedna promena preseka u spletu 3 i samo jedna u spletu 4).

Dakle, Konvejeva notacija nam omogućava da promene preseka vršimo u celobrojnim spletovima, a ne u pojedinačnim presecima. Na taj način dimenzija problema se smanjuje sa n na n_c , pri čemu je n broj preseka u dijagramu, a n_c broj celobrojnih spletova u Konvejevom zapisu tog dijagrama.

Osnovu svih naših proračuna, korišćenih za konstrukciju tablica rastojanja čvorova, čine upravo parovi čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1. Kao i H. Mun, koristićemo svojstvo da se svaka dva čvora $K_1 = N(T_+)$ i $K_2 = N(T_-)$, gde su T_+ i T_- spletovi koji se razlikuju u jednom preseku, a $N(T)$ predstavlja brojilačko zatvorenje spleta T , nalaze na rastojanju 1 [97]. Polazeći od parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1, zahvaljujući svojstvima Konvejeve notacije da određene promene u delu čvora ostaju lokalizovane i ne utiču na ponašanje ostatka čvora, dobijene pojedinačne rezultate možemo proširiti sa parova čvorova na familije čvorova.

Na slici 57 u gornjem levom uglu prikazan je čvor 5_2 čiji je Konvejev simbol 2_3 . Pošto se čvorovi zapisani u Konvejevoj notaciji sastoje od spletova, sve promene nad njima se mogu posmatrati nad njihovom algebrom. Promene ćemo vršiti u desnom spletu 3 i posmatrati kako se one odražavaju na ostatak čvora, u ovom slučaju na splet 2 (zaokružen plavim krugom na slici). Ukoliko broj



Slika 57: Čvor 23 i posledice povećavanja preseka u spletu 3

preseka spleta 3 povećamo sa 3 na 5, dobijamo čvor 25 prikazan u donjem levom uglu slike. Promena je lokalizovana u smislu da dodatni preseći ostaju u spletu 5 i nijedan se, u smislu Konvejeve notacije, ne može "prošetati" do ostatka čvora, tj. preneti u splet 2. Splet 2 (ili bilo koji drugi deo čvora koji bi se u opštem slučaju našao na njegovom mestu) ostaje neizmenjen. Takođe, krajevi niti spleta 2 ostaju povezani na isti način kao na početku – nit SZ se spaja sa niti JI, a nit SI sa niti JZ. Na identičan način se čvor ponaša ukoliko se splet 3 uveća do spleta 7 (videti čvor 27 na slici 57). Obratimo pažnju da, ukoliko splet 3 povećamo samo za jedan presek, krajevi niti spleta 2 ne ostaju povezani na isti način (videti čvor 24 na slici 57) – SI nit se povezuje sa JI niti, dok se SZ spaja sa JZ niti. Ovo može prouzrokovati promenu broja komponenata čvora ili linka. Prema tome, kao rezultat dodavanja dva preseka bilo kom celobrojnom spletu, broj komponenata ostaje očuvan, promene ostaju lokalizovane i kao rezultat daju familije čvorova ili linkova. Isti postupak možemo koristiti i za smanjenje dužina celobrojnih spletova. Promene nisu lokalizovane samo u dva specijalna (granična) slučaja – zameni spleta 2 spletom 0 i zameni spleta 1 spletom -1 ili obratno.

Čvor ili link čiji su svi celobrojni spletovi dužine 2 ili 1, tj. čvor ili link dat Konvejevom notacijom, koji sadrži u svom zapisu samo celobrojne spletove 1, -1 , 2, ili -2 , naziva se *osnovni link* (eng. *source link*). Ukoliko pored ovih spletova sadrži i spletove 3 ili -3 , ovakav čvor ili link nazivamo *generišućim čvorom ili linkom* [87].

Formalna definicija familija čvorova i linkova datih u Konvejevoj notaciji glasi:

Definicija 27 Za čvor ili link L , dat u neredukovanoj Konvejevoj notaciji simbolom $C(L)$,¹ označimo sa S skup brojeva u Konvejevoj notaciji, pri čemu su iz ovog skupa isključeni redni brojevi bazičnih poliedara i nule (koje označavaju položaje spletova u temenima bazičnih poliedrara). Za $C(L)$ i proizvoljan (neprazan) podskup \tilde{S} skupa S familija $F_{\tilde{S}}(L)$ čvorova ili linkova izvedenih iz L se dobija zamenom svakog $a \in \tilde{S}$, $a \neq 1$, sa $\text{sgn}(a)(|a| + k_a)$ za $k_a \in \mathbb{N}$, gde je $\text{sgn}(a)$ znak broja a [87].

To znači da svi čvorovi ili linkovi, koji se dobijaju iz nekog osnovnog čvora S ili linka zamenom pojedinačnih celobrojnih spletova dužine 2 spletoanima veće dužine, predstavljaju *familiju* izvedenu iz S .

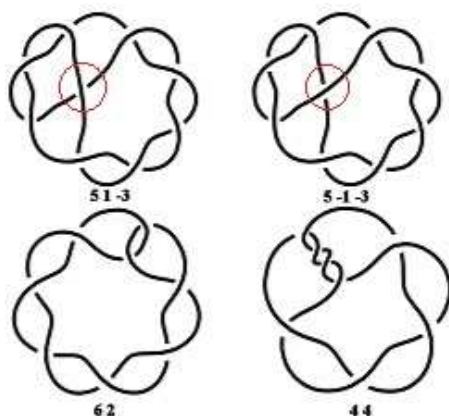
Čvorovi ili linkovi izvedeni iz generišućeg linka G dodavanjem nekog istoiznačnog parnog broja svakom celobrojnom spletu dužine 2 ili 3 čini *podfamiliju* izvedenu iz G .

Ovo znači da podfamiliju dobijamo ako su svi k_a u definiciji familije parni. Svi čvorovi (linkovi), koji pripadaju istoj podfamiliji, imaju isti broj komponenta.

Iz proizvoljnog para čvorova sa rastojanjem jednakim 1 koji su zadati u nekoj numeričkoj notaciji (Gausovim kodiranjem, Dovkerovom notacijom, P-data, ...) ne možemo rezultate proširiti na čvorove sa sličnim osobinama jer nam numerička kodiranja ne pružaju nikakve informacije o samoj topologiji čvora i celobrojnim spletoanima koji učestvuju u njima. Zahvaljujući Konvejevim simbolima, mnoga svojstva čvorova možemo generalizovati i proširiti na (pod)familije čvorova ili linkova. Na slici 55 prikazan je čvor 6_1 i njegova slika u ogledalu $!6_1$, čije je Gordijevo rastojanje jednako 1 i ostvaruje se na njihovim neminimalnim dijagramima $(3-1-3)$ i $(3\ 1-3)$. Na slici je označen središnji presek u kome je potrebno izvršiti promenu (tj. prevesti splet -1 u 1) da bi se čvor 6_1 konvertovao u $!6_1$. Kao i u prethodno opisanom primeru, svojstva koja važe za čvorove 6_1 i $!6_1$, možemo proširiti na njihove familije koje su date svojim neminimalnim dijagramima $(2p+1) - 1 - (2q+1)$ i $(2p+1) 1 - (2q+1)$. Za dato p i q , čvorovi iz ove dve familije će se ponašati na isti način kao i čvorovi 6_1 i $!6_1$, tj. u čvoru $(2p+1) - 1 - (2q+1)$ će biti potrebno promeniti središnji splet -1 u 1 da bi se dobio čvor $(2p+1) 1 - (2q+1)$, pa će rastojanje dobijenih dijagrama takođe biti jednako 1. Na kraju, pošto radimo sa neminimalnim dijagramima familija, potrebno je ove dijagrame minimizovati. Na taj način, polazeći od čvorova 6_1 i $!6_1$, u okviru navedenih familija dobijamo redom parove čvorova $(8_1, 8_3) = (6\ 2, 4\ 4)$, $(10_1, 10_3) = (8\ 2, 6\ 4)$, $(12a803, 12a1166) = (10\ 2, 8\ 4)$,... sa Gordijevim rastojanjem jednakim 1. Na slici 58 prikazani su čvorovi $(8_1, 8_3) = (6\ 2, 4\ 4)$, koji su članovi podfamilija $(2p+1) - 1 - (2q+1)$ i $(2p+1) 1 - (2q+1)$ za $p = 2, q = 1$, i njihovi neminimalni dijagrami. Crvenim je obeležen presek nad kojim se vrši promena.

Za minimizaciju dijagrama čvorova korišćen je program *KnotFind*, a u cilju prepoznavanja "leve" i "desne" forme čvorova korišćen je Džonsov polinom (i signatura u slučaju čvora 9_{42}).

¹Konvejeva notacija se naziva neredukovanom ako u simbolima bazičnih poliedara elementarni spletovi 1 u pojedinačnim temenima nisu izostavljeni.



Slika 58: Čvorovi 8_1 i 8_3 i njihovi neminimalni dijagrami na kojima se realizuje Gordijevo rastojanje 1

KnotFind vrši minimizaciju čvorova koristeći heuristike, a za modeliranje ambijentalnih izotopija koristi, pored osnovnih Reidemajsterovih poteza, ukupno 13 izvedenih poteza na dijagramima čvorova. Za čvor dat ulazom, Dovkerovim kodom u *Knotscape* formatu, program *KnotFind* računa njegov minimalni dijagram i prikazuje ga minimalnim Dovkerovim kodom. Ako su K_1 i K_2 dva proizvoljna čvora, a $fKnotFind(K)$ izlaz iz *KnotFind* programa za dati čvor K , tada važi:

$$K_1 \text{ i } K_2 \text{ su ambijentalno izotopni} \Leftrightarrow fKnotFind(K_1) = fKnotFind(K_2) \quad (13)$$

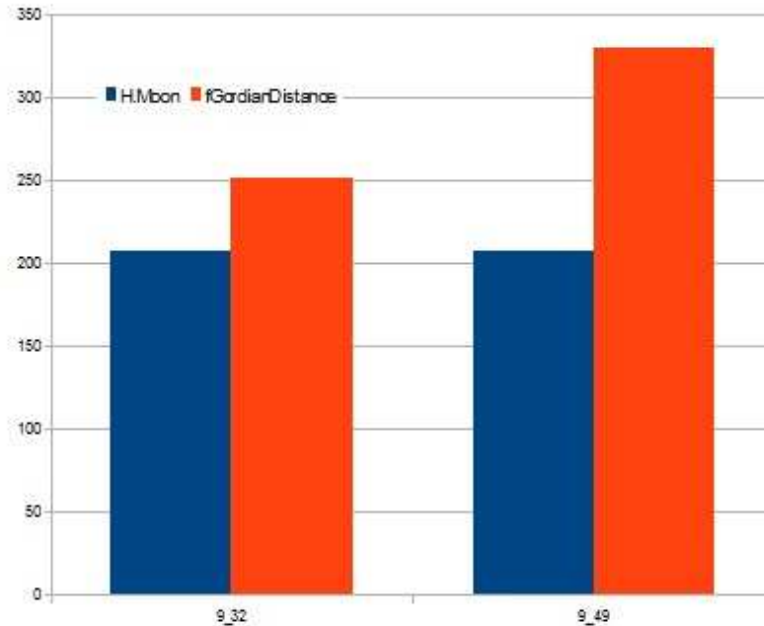
Za sve polinomske invarijante P važi samo implikacija:

$$K_1 \text{ i } K_2 \text{ su ambijentalno izotopni} \Rightarrow P(K_1) = P(K_2) \quad (14)$$

Za dva čvora kojima odgovara isti polinom ne može se tvrditi da su međusobno jednaki (ambijentalno izotopni), pa polinomsko prepoznavanje čvorova ne daje kompletne i jednoznačne rezultate.

Originalni program *KnotFind* kao ulaz i izlaz koristi zapise u tekstualnim fajlovima. Takva implementacija znatno usporava proračune, pa je u cilju ubrzanja program *KnotFind* prilagođen direktnoj komunikaciji sa programom *Mathematica*. Za integraciju sa *Mathematica*-funkcijama korišćen je simbolički interfejs visokog nivoa – *MathLink* i kreirana *Mathematica*-funkcija $fKnotFind$ koja kao ulaz, pored Dovkerovih kodova, prihvata i Konvejevu notaciju. Na taj način, ulaz je generisan u programu *Mathematica* i prosleđen *MathLink* programu *KnotFind* koji se poziva iz *Mathematica* okruženja. Na kraju, rezultat funkcije se vraća u program *Mathematica*.

Navedeni metodi korišćeni su u ovom radu za određivanje parova čvorova čije je Gordijevo rastojanje 1.



Slika 59: Broj parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem jednakim 1

Korišćenjem predloženih metoda dobijeno je 330 parova čvorova čije je Gordijevo rastojanje jednako 1. Proračuni su obuhvatili sve čvorove sa $n \leq 9$ preseka, dok su se dosadašnji proračuni zasnivali uglavnom na radu sa racionalnim čvorovima te su rezultati koji uključuju čvorove $9_{32} - 9_{49}$ bili izostavljeni iz tablica rastojanja.

Od 330 dobijenih parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem jednakim 1, 123 su novi parovi, tj. u postojećim tablicama Gordijevih rastojanja do sada za njih nije bila utvrđena vrednost rastojanja 1. Ukoliko se uporede vrednosti iz tablica rastojanja čvorova samo do čvora 9_{32} , tada se predloženim metodima dobijaju 44 nova para čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1. Na grafiku sa slike 59 prikazani su i upoređeni brojevi parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1 dobijeni metodima izloženim u ovom poglavlju i dosadašnjim tablicama Gordijevih rastojanja.

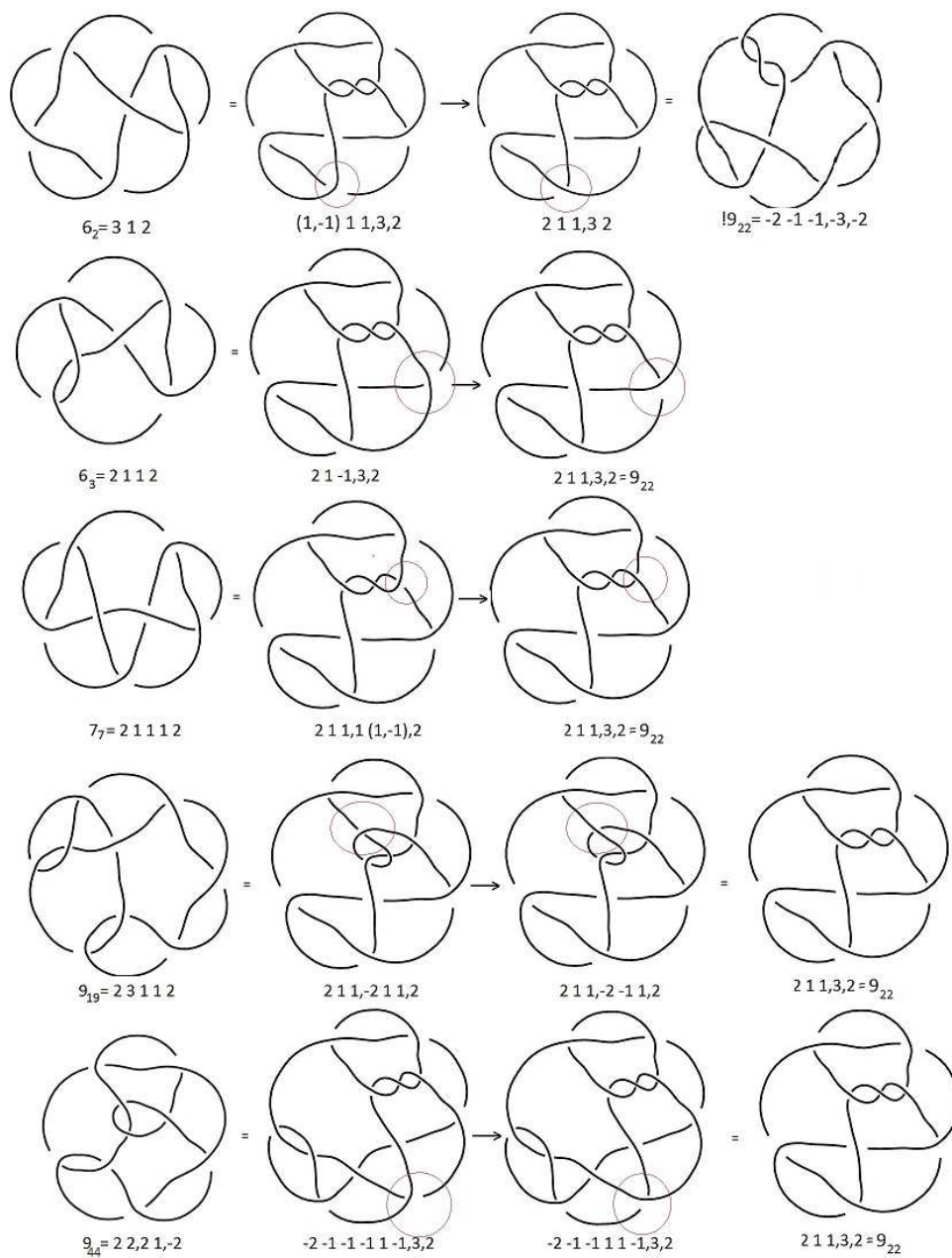
Kao referentne rezultate posmatračemo tablice date u doktorskoj disertaciji H. Mun [97] koje predstavljaju proširenje tablica D.V. Samnersa i I. Darsi [67, 69]. Rezultati H. Moon prikazani su na delu grafika označenog natpisom "H. Moon". U delu grafika označenom narandžastom bojom i natpisom "fGor-

dianDistance” prikazani su rezultati dobijeni metodima predloženim u ovom poglavlju. Na levoj strani grafika prikazani su rezultati iz tablica Gordijevih rastojanja koji sadrže čvorove sa $n \leq 9$ preseka, zaključno sa čvorom 9_{32} . Na desnom delu grafika prikazani su rezultati iz naših tablica Gordijevih rastojanja za sve čvorove do $n \leq 9$ preseka, tj. zaključno sa čvorom 9_{40} .

Poboljšanja u tablicama Gordijevih rastojanja su ostvorena čak i za neke parove čvorova za čije rastojanje nije postojala nikakva procena, tj. interval u kome se ono očekivalo bio je $[1, n - 1]$, gde je n broj preseka većeg čvora u datom paru. Posebno je interesantan čvor 9_{22} . U dosadašnjim tablicama rastojanja, za njega nije izračunato konkretno rastojanje ni do jednog čvora, iako se njegovo rastojanje 1 do nekih čvorova ostvaruje već na njegovom minimalnom dijagramu. To važi za parove čvorova $\{9_{22}, !6_2\}$, $\{9_{22}, 6_3\}$ i $\{9_{22}, 7_7\}$, dok se za čvorove $\{9_{22}, 9_{19}\}$ rastojanje 1 ostvaruje na njihovim neminimalnim dijagramima. U postojećim tablicama, rastojanja između ovih čvorova se očekuju u intervalu $[1, 8]$. Predloženim metodama određeni su dijagrami čvorova na kojima se ostvaruje Gordijevo rastojanje 1 za ove parove. Time je dokazano da važi $d(9_{22}, !6_2) = 1$, $d(9_{22}, 6_3) = 1$, $d(9_{22}, 7_7) = 1$ i $d(9_{22}, 9_{19}) = 1$. Takođe, pokazano je i da važi $d(9_{22}, 9_{44}) = 1$. Na slici 60 prikazani su dijagrami na kojima se ostvaruju ova Gordijeva rastojanja 1.

Lista parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1 se može preuzeti iz dokumenata sa sajta Matematičkog instituta (za parove čvorova kojima do sada nije potvrđeno rastojanje 1 navedeni su i dijagrami na kojima se to rastojanje ostvaruje):

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/GordianKnotDistances1Zekovic.nb>.
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/GordianKnotDistances1Zekovic.pdf>.



Slika 60: Dijagrami čvorova 6_2 , 6_3 , 7_7 , 9_{19} i 9_{44} na kojima se ostvaruju njihova Gordijeva rastojanja 1 do čvora 9_{22}

3.4.2 Donje granice Gordijevih rastojanja

Osnovu za izračunavanje Gordijevih rastojanja većih od 1 čine Gordijeva rastojanja jednaka 1 koja smo odredili predloženim metodima.

Još 1985. godine u [47] H. Murakami je definisao donju granicu Gordijevih rastojanja čvorova i dokazao sledeću teoremu koja procenjuje rastojanje čvorova na osnovu vrednosti njihovih signatura.

Teorema 8 *Za dva čvora K_1 i K_2 važi*

$$d(K_1, K_2) \geq \frac{1}{2} |\sigma(K_1) - \sigma(K_2)|. \quad (15)$$

J. Mijazava (Y. Miyazawa) je u svom radu [101] predložio način određivanja donje granice Gordijevih rastojanja nekih čvorova koristeći tri polinomske invarijante: HOMFLYPT polinom, Džonsov polinom i Q-polinom. Na osnovu polinomialnih opstrukcija, Mijazava je isključio vrednosti 1 za neke od rastojanja.

HOMFLYPT polinom [49] predstavlja generalizaciju Džonsovog polinoma na dve promenljive. Njegov naziv je nastao od početnih slova prezimena njegovih pronalazača (J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millet, P.J. Freyd, W.B.R. Lickorish, D.N. Yetter, J. Przytycki i P. Traczyk).

Definicija 28 HOMFLYPT polinom $P(L; v, z) \in Z[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ za orijentisani link L je invarijanta klase izotopije linka L i definiše se na sledeći način:

$$P(U; v, z) = 1; \quad (16)$$

$$v^{-1}P(L_+; v, z) - vP(L_-; v, z) = zP(L_0; v, z). \quad (17)$$

gde je U trivijalni čvor, a (L_+, L_-, L_0) skein trojka [101].

Mijazava je u [101] dokazao sledeću teoremu koja daje donju granicu Gordijevog rastojanja dva čvora, a može se oceniti na osnovu vrednosti HOMFLYPT polinoma u tački $(x, y) = (i, i)$, gde je i imaginarna jedinica $i = \sqrt{-1}$.

Teorema 9 *Za dva čvora K_1 i K_2 sa Gordijevim rastojanjem $d(K_1, K_2) = n$ važi*

$$P(K_1; i, i)/P(K_2; i, i) \in \{(-2)^k; 0 \leq |k| \leq n\} \quad (18)$$

gde je $i = \sqrt{-1}$.

Džonsov polinom $V[L; t] \in Z[t^{\pm 1/2}]$ je specijalni slučaj HOMFLYPT polinoma, za $u = t$, $v = t^{1/2} - t^{-1/2}$ (videti Definiciju 17). U istom radu [101] dokazana je sledeća teorema koja pruža nova ograničenja za vrednosti Gordijevih rastojanja u zavisnosti od vrednosti Džonsovih polinoma tih čvorova u tački $e^{i\pi/3}$.

Teorema 10 *Za dva čvora K_1 i K_2 sa Gordijevim rastojanjem $d(K_1, K_2) = n$ važi*

$$V(K_1; e^{i\pi/3})/V(K_2; e^{i\pi/3}) \in \{\pm(i\sqrt{3})^k; 0 \leq |k| \leq n\}. \quad (19)$$

Q-polinom je uveden u [50].

Definicija 29 Q-polinom $Q(L; z) \in Z[z^{\pm 1}]$ za neorijentisani link L je invarijanta klase izotopije linka L i definiše se na sledeći način:

$$Q(U; z) = 1; \quad (20)$$

$$Q(L_+; z) + Q(L_-; z) = z(Q(L_0; z) + Q(L_\infty; z)), \quad (21)$$

gde je U trivijalni čvor, a $(L_+, L_-, L_0, L_\infty)$ skein četvorka [102].

Veza između Gordijevog rastojanja dva čvora i vrednosti njegovih Q-polinoma data je sledećom teoremom [101].

Teorema 11 Za dva čvora K_1 i K_2 sa Gordijevim rastojanjem $d(K_1, K_2) = n$ važi

$$Q(K_1; -1)/Q(K_2; -1) \in \{(-3)^k; 0 \leq k \leq n\}. \quad (22)$$

Mijazava u [101] takođe definiše i dodatne uslove Teoreme 8 pod kojima važi stroga nejednakost:

$$d(K_1, K_2) > \frac{1}{2} |\sigma(K_1) - \sigma(K_2)|. \quad (23)$$

Ograničenja data formulama (15), (18), (19), (22) i (23) biće korišćena pri proceni vrednosti Gordijevog rastojanja dva čvora. Za svaki par čvorova biće razmatrano koji su od uslova definisanih gornjim teoremama zadovoljeni i na taj način će biti određena donja granica njihovog rastojanja. Naravno, ukoliko na osnovu ovih ograničenja bude dobijeno nekoliko različitih vrednosti donjih granica, uzimaće se najveća od njih. U narednom odeljku predložićemo metode za određivanje gornjih granica rastojanja čvorova. Ukoliko neki par čvorova ima jednaku gornju i donju granicu rastojanja, ta vrednost se upisuje u tablice kao konačna vrednost rastojanja. U suprotnom, u tablice se, umesto celobrojne vrednosti koja predstavlja rastojanje, upisuje interval u kome se rastojanje nalazi.

3.4.3 Gornje granice Gordijevih rastojanja čvorova

Gordijevo rastojanje čvorova ima svojstvo metrike:

1. $d(K_1, K_2) = 0$ akko $K_1 = K_2$;
2. $d(K_1, K_2) = d(K_2, K_1)$;
3. $d(K_1, K_2) \leq d(K_1, K) + d(K, K_2)$, gde je K proizvoljni čvor [47].

Specijalno, nejednakost trougla za slučaj $K = 0_1$ ima sledeći oblik:

$$d(K_1, K_2) \leq u(K_1) + u(K_2) \quad (24)$$

gde je $u(K)$ broj odvezivosti čvora K .

U opštem slučaju, ukoliko za proizvoljan par čvorova K, K' postoje parovi čvorova $\{K_i, K_{i+1}\}$ za koje važi $d(K_i, K_{i+1}) = 1$ ($i = 1, \dots, n$), gde je $K = K_1, K' = K_n$, tada važi:

$$1 \leq d(K, K') \leq n - 1 \quad (25)$$

Gordijeva rastojanja jednaka 1, koja su određena metodima prikazanim u prethodnom odeljku i nejednakost 25, predstavljaju osnovu za generisanje težinskog grafa čija temena predstavljaju čvorove. Ivice težinskog grafa nose informaciju o Gordijevom rastojanju između dva čvora (koja se nalaze u temenima koje povezuje ta ivica), ukoliko je ono poznato. Najkraći poznati put između dva temena grafa predstavlja gornju granicu Gordijevog rastojanja za čvorove koji se nalaze u temenima grafa.

Zbir brojeva odvezivosti dva čvora (nejednakost 24) i najkraći put koji povezuje ova dva čvora, dobijen obilaskom težinskog grafa, čine gornje granice koje ćemo koristiti pri proceni vrednosti Gordijevog rastojanja ta dva čvora.

3.4.4 Tablice Gordijevih rastojanja čvorova

Mijazava u [101] koristi sledeće posledice teorema koje je dokazao i koje definišu uslove za određivanje konkretnih rastojanja među nekim čvorovima u zavisnosti od vrednosti njihovih brojeva odvezivosti i determinanata tih čvorova.

Posledica 1 *Neka su K_1 i K_2 čvorovi za koje važi $u(K_1) = m$ i $u(K_2) = l$. Neka važi $k = m + l - 1$ i $\varepsilon k = -(\sigma(K_1) - \sigma(K_2))/2, \varepsilon = \pm 1$. Ako važi $V(K_1; e^{i\pi/3})/V(K_2; e^{i\pi/3}) = -(i\sqrt{3}^{\pm 1})^{\varepsilon k}$, tada je*

$$d(K_1, K_2) = m + l. \quad (26)$$

Posledica 2 *Neka za čvor K_1 važi $u(K_1) = 1, \sigma(K_1) = 0$ i $\det(K_1) \equiv -1 \pmod{3}$ i neka za čvor K_2 važi $u(K_2) = 1, \sigma(K_2) = \pm 2$ i $\det(K_2) \equiv 0 \pmod{3}$. Tada je*

$$d(K_1, K_2) = 2. \quad (27)$$

Korišćenjem ograničenja definisanih u odeljcima 3.4.2 i 3.4.3 i posledica teorema dokazanih u [101], izračunata su neka nova Gordijeva rastojanja čvorova do $n = 9$ preseka. Za neke parove čvorova još uvek nije određeno rastojanje, već samo intervali u kome se ono očekuje. U odeljku 3.4.1 opisan je način na koji se rezultat dobijen za rastojanje određenog para čvorova može proširiti na familiju čvorova. Naveden je primer para čvorova $\{6_1, !6_1\}$ sa rastojanjem $d(6_1, !6_1) = 1$ i njihove odgovarajuće familije. Ova osobina važi i za proizvoljna rastojanja čvorova, a ne samo za rastojanja 1, pa je uključena u algoritam za proračun rastojanja.

Kompletni rezultati su organizovani u tablicama Gordijevih rastojanja čvorova, među kojima još uvek postoje neodređene vrednosti (intervali kojima rastojanja

Tabela 1: Gordijeva rastojanja čvorova

	0 ₁	3 ₁	4 ₁	5 ₁	5 ₂	6 ₁	6 ₂	6 ₃	7 ₁	7 ₂	7 ₃	7 ₄
3 ₁	1	0	2	1	1	2	1	1	2	2	2	1
!3 ₁	1	2	2	3	2	2	2	1	4	2	3	2-3
4 ₁	1	2	0	2-3	2	1	1	2	3-4	2	2-3	2-3
5 ₁	2	1	2-3	0	1	2-3	2	2	1	2	1	2
!5 ₁	2	3	2-3	4	3	2-3	3	2	5	3	4	3-4
5 ₂	1	1	2	1	0	2	2	2	2	1	1	1
!5 ₂	1	2	2	3	2	2	2	2	4	2	3	2-3
6 ₁	1	2	1	2-3	2	0	1	2	3-4	2	2-3	2-3
!6 ₁	1	2	1	2-3	2	1	2	2	3-4	2	2-3	2-3
6 ₂	1	1	1	2	2	1	0	2	2-3	2	2-3	2
!6 ₂	1	2	1	3	2	2	2	2	4	2	3	2-3
6 ₃	1	1	2	2	2	2	2	0	3	2	2-3	2
3 ₁ #3 ₁	2	1	2-3	2	2	2-3	2	2	2-3	2-3	2-3	2
3 ₁ #!3 ₁	2	1	2-3	2	2	1-3	2	2	3	2-3	2-3	2
7 ₁	3	2	3-4	1	2	3-4	2-3	3	0	2	1	2
!7 ₁	3	4	3-4	5	4	3-4	4	3	6	4	5	4-5
7 ₂	1	2	2	2	1	2	2	2	2	0	1	2
!7 ₂	1	2	2	3	2	2	2	2	4	2	3	2-3
7 ₃	2	2	2-3	1	1	2-3	2-3	2-3	1	1	0	1
!7 ₃	2	3	2-3	4	3	2-3	3	2-3	5	3	4	3-4
7 ₄	2	1	2-3	2	1	2-3	2	2	2	2	1	0
!7 ₄	2	2-3	2-3	3-4	2-3	2-3	2-3	2	4-5	2-3	3-4	2-4
7 ₅	2	1	2-3	1	1	2-3	2	2	1	1	2	2
!7 ₅	2	3	2-3	4	3	2-3	3	2	5	3	4	3-4
7 ₆	1	1	1	2	1	2	2	2	2-3	1	2	2
!7 ₆	1	2	1	3	2	2	2	2	4	2	3	2-3
7 ₇	1	1	1	2	2	2	2	2	3	2	2-3	2
!7 ₇	1	2	1	2-3	2	2	2	2	3-4	2	2-3	1-3
4 ₁ #3 ₁	2	1	1	1-2	1-2	2	2	2	2-3	2-3	1-3	1-2
4 ₁ #!3 ₁	2	2-3	1	3-4	2-3	2	2	2	4-5	2-3	3-4	2-4
8 ₁	1	2	2	2-3	2	1	2	2	3-4	2	2-3	2-3
!8 ₁	1	2	2	2-3	2	2	2	2	3-4	2	2-3	2-3
8 ₂	2	1	2	1	2	2	1	2	2	2-3	2	2
!8 ₂	2	3	2	4	3	2-3	3	2	5	3	4	3-4
8 ₃	2	2-3	2	2-4	2-3	1	2	2-3	3-5	2-3	2-4	2-4
8 ₄	2	2-3	1	3-4	2-3	1	2	2-3	4-5	2-3	3-4	2-4
!8 ₄	2	2	1	2-3	2-3	2	1	2-3	2-4	2-3	2-4	2-3
8 ₅	2	1-2	2	2	1-3	2	1	2-3	1-3	1-3	1-3	2-3
!8 ₅	2	3	2	4	3	2-3	3	2-3	5	3	4	3-4
8 ₆	2	1	2	2	2	1	1	2	2-3	2-3	2-3	2
!8 ₆	2	2-3	2	3-4	2-3	2	2-3	2	4-5	2-3	3-4	2-4
8 ₇	1	1	2	1	2	2	2	1	2	2	2	2
!8 ₇	1	2	2	3	2	2	2	1	4	2	3	2-3
8 ₈	2	1	2-3	2	1	2	2	1	3	2	2	2
!8 ₈	2	1	2-3	2	2	2-3	2	1	3	2-3	2-3	2
8 ₉	1	2	2	2-3	2	2	1	2	3-4	2	2-3	2-3

pripadaju). U tabeli 1 prikazan je početni deo tih tablica. Rastojanja koja su nova u odnosu na tablice H. Mun obeležena su crvenom bojom. Za parove čvorova $\{5_1, 8_5\}$ i $\{6_1, 8_8\}$ utvrđeno je rastojanje 2. Ono se ostvaruje posredstvom čvorova 8_{21} i 9_{44} ($d(5_1, 8_{21}) = d(8_{21}, 8_5) = 1$ i $d(6_1, 9_{44}) = d(9_{44}, 8_8) = 1$).

Prilikom poređenja sa aktuelnim tablicama ovog tipa (tablicama H. Mun), neophodno je uzeti u obzir da je u odnosu na njih invertovana orijentacija sledećih čvorova:

$7_3, 7_4, 7_7, 8_4, 8_5, 8_7, 8_8, 8_{10}, 8_{19}, 9_3, 9_5, 9_{10}, 9_{11}, 9_{13}, 9_{14}, 9_{15}, 9_{17}, 9_{19}, 9_{21}, 9_{22}, 9_{26}, 9_{29}, 9_{30}$.

Kompletne tablice Gordijevih rastojanja mogu se preuzeti iz sledećih dokumenata sa sajta Matematičkog instituta:

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/GordianKnotDistancesZekovic.nb>.
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/GordianKnotDistancesZekovic.pdf>.

3.5 Hirurgija na čvorovima

Fundamentalna teorema koja povezuje teoriju površi u \mathbb{R}^3 i teoriju čvorova je Sajfertova teorema. Ova teorema koju su prvi objavili F. Frankl i L. Pontjagin (L. Pontryagin) 1930. god., a dokazao Sajfert 1934. god. glasi:

Teorema 12 *Za svaki orijentisani link L postoji orijentisana, povezana površ S u \mathbb{R}^3 čija je granica L (tj. površ S koja razapinje L [138]).*

Površ S naziva se *Sajfertova površ linka L* . Vizuelizaciju konstrukcije Sajfertove površi, koja odgovara datom linku L , omogućava program *Seifert View* J.J. van Wijka (J.J. van Wijk) [139].



Slika 61: Sajfertova površ

Homotopije, kao topološke transformacije koje čuvaju invarijante, ne dozvoljavaju sečenja i lepljenja. Međutim, upravo ova dva postupka predstavljaju osnov *hirurgija*: operacija na površima koje menjaju njihove topološke osobine, ali omogućavaju prelaz sa jedne klase ili vrste topoloških površi na

druge. Tipičan primer za to je konstrukcija površi roda $g \geq 1$ kao što je "sfera sa ručkama".

Analizirana hirurgija u ovom radu je lepljenje traka korišćeno kao odvezujuća operacija ekvivalentna sa zaravnjivanjem. Umesto zaravnjivanja nekog preseka, isti efekat se može postići i lepljenjem traka na ivicu Sajfertove površi, pri čemu se različite transformacije nekog čvora ili linka u neki drugi čvor ili link mogu ostvariti lepljenjem uvrnutih traka ili većeg broja traka sa krajevima zalepljenim na različitim delovima Sajfertove površi. Slika 62a ilustruje ekvivalentnost lepljenja traka i (orijentisanog ili neorijentisanog) zaravnjivanja, a slika 62b ilustruje uvrtnje trake zalepljene na ivicu Sajfertove površi ukoliko se krajevi trake kreću po čvoru ili linku. Konstatovali smo da su lepljenje traka i zaravnjivanje ekvivalentne operacije u odnosu na rezultat koji daju, ali između njih postoji izvesna razlika u informacijama koje nose. U slučaju lepljenja traka svi preseči početnog dijagrama ostaju neizmenjeni, pa je na taj način očuvana kompletna informacija o njima. Pri zaravnjivanju, presek u kome se zaravnjivanje vrši biva zamenjen dvostranim ogledalom (markerom), pa informacija o tome da li je to bio pozitivan presek $+1$ ili negativan presek -1 ne ostaje očuvana. To znači da je čvor dobijen zaravnjivanjem nekog preseka c mogao da nastane iz dva različita čvora: jednog u kome je presek c bio pozitivan, a drugog u kome je on bio negativan. Ovo ilustruje slika 62c: na gornjem delu slike prikazane su obe operacije, lepljenje trake i zaravnjivanje primenjene na čvor $(1, 1, 1) = 3_1$, a u donjem delu slike iste operacije primenjene na nečvor $(1, 1, -1) = 0_1$, tj. čvor 3_1 u kome je desni pozitivni presek zamenjen negativnim. Dok na dijagramima sa lepljenjem trake uočavamo ovu razliku, na dijagramima koji prikazuju zaravnjivanje vidimo samo da smo u oba slučaja dobili isti rezultat, nečvor, ali ne znamo da li je on dobijen zaravnjivanjem iz čvora 3_1 ili iz neminimalnog dijagrama nečvora $(1, 1, -1) = 0_1$.

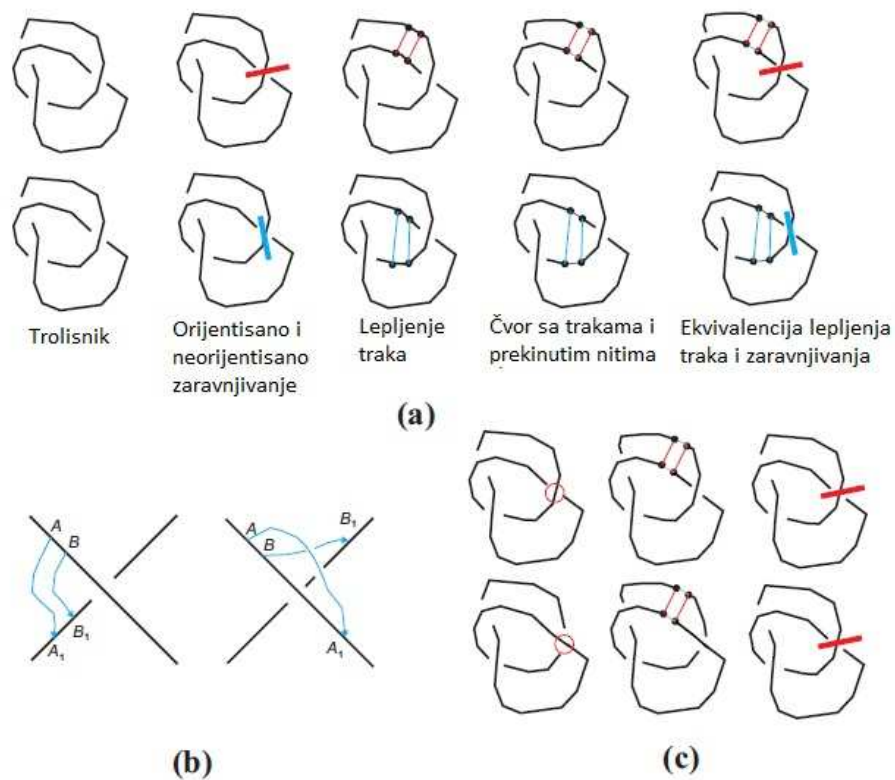
Hirurgija molekula i hirurgija DNA igra veoma značajnu ulogu u hemiji i biologiji. Šezdesetih godina prošlog veka hemičari su se zaistresovali za sintezu molekula u obliku čvorova i linkova, pa H. Friš (H. Frish) i E. Vaserman (E. Wasserman) 1961. sintetišu prvi par molekularnih prstenova u obliku Hopfovog linka 2_1^2 , a 1989-te K. Ditrih-Bušeker (C. Dietrich-Bushecker) i J.-P. Sovaž (J.-P. Sauvage) sintetišu prvi molekularni čvor, trolisnik 3_1 koji se sastojao od 124 atoma [140].

Sa razvojem nanotehnologije biolozi i hemičari su danas u stanju da "pletu" molekule DNA u formi poliedara. Slika 63 prikazuje DNA-kocku realizovanu u laboratoriji N. Simana (N. Seeman) [141].

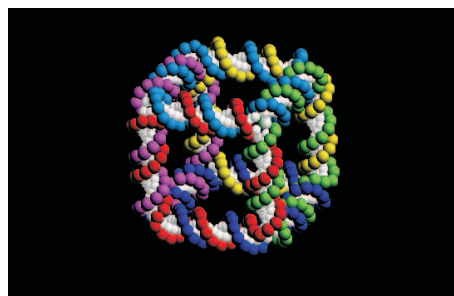
Poliedarski čvorovi i linkovi [142] predstavljaju široko i još uvek nedovoljno proučeno područje teorije čvorova, čiji teorijski rezultati mogu da posluže kao povod za praktičnu realizaciju poliedarskih čvorova i linkova u hemiji i biologiji (slika 64).

3.6 Topoizomeraze

DNK čvorovi i linkovi se u biologiji nazivaju katenani (eng. *catenanes*) i javljaju se u toku replikacije (kopiranja DNK) i rekombinacije (rearanžiranja

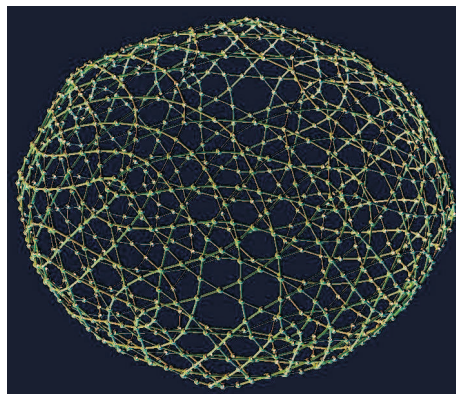


Slika 62: (a) Ekvivalentnost zaravnjivanja i lepljenja traka; (b) uvrtnje trake pri kretanju njenih krajeva po linku (c) lepljenje traka i zaravnjivanje u čvoru 3_1 i nečvoru $(1, 1, -1) = 0_1$



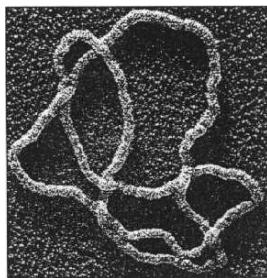
Slika 63: DNA-kocka

DNK). Čvorovi i linkovi DNK se takođe javljaju kao rezultati enzimskih akcija, kao što su dejstva topoizomeraza, rekombinaza i transposaza [76, 45]. Nakon



Slika 64: Poliedarski link izveden iterativnim postupkom

prvih snimaka DNA koja formira čvorove (slika 65) iz 1985. god., K. Ernst i D.V. Samners su prvi koristili spletove za modelovanje protenskih-DNK kompleksa [132]. Pod mentorstvom D.V. Samnersa i u svom daljem samostalnom radu I. Darsi nastavlja u istom pravcu, izučavajući primene teorije čvorova u molekularnoj biologiji rešavanjem topoloških jednačina spletova, stavljajući akcenat na racionalne čvorove. Od svog nastanka do danas, teorija čvorova u DNA postaje značajna oblast primena teorije čvorova, čiji su neki od najznačajnijih protagonista A. Stasiak, D. Bak (D. Buck), M. Vaskez (M. Vazquez), autor programa *Tangle Solve* [143], K. Valensija (K. Valencia), N. Janoska koja se bavi DNA računarstvom, i dr. Detaljan pregled gotovo svih značajnih dostignuća u ovoj oblasti dat je u radu D. Bak [96].

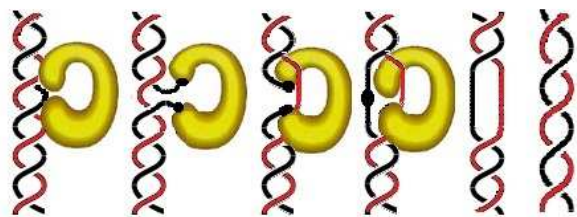


Slika 65: DNK čvor snimljen elektronskim mikroskopom

Modelovanje akcija nekih proteina na lancima DNK diskutovano je u radu [94]. Ukratko ćemo predstaviti način modelovanja akcija topoizomeraza.

Izomeraze su enzimi koji katalizuju određeno strukturno preuređivanje izomera. Topoizomeraze su izomeraze koje menjaju topologiju DNK molekula. *Topoizomeraza I* je protein koji raskida jednu nit dvostrukog lanca DNK, dopuštajući da druga nit prođe kroz novonastali prolaz, a zatim ponovo povezuje

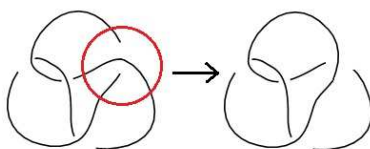
početnu nit. *Topoizomeraza II* je protein koji omogućava sličan proces, ali raskidanjem obe niti u lancu. DNK teži da se nalazi u nekom od kompaktnih oblika, u supernamotaju, učvorena ili spojena u obliku lanca sastavljenog od karika (katenacija). U toku procesa replikacije i transkripcije DNK mora biti slobodna kako bi se moglo pristupiti informacijama, pa je DNK u tim slučajevima potrebno odmotati. Topoizomeraze su zaslužne za navedena odmotavanja i zamotavanja DNK. Vezivanjem za jednu ili obe niti DNK, topoizomeraza privremeno raskida tu nit (ili obe) generišući prolaz, propušta drugi deo lanca kroz njega i ponovo povezuje iste krajeve koje je rastavila.



Slika 66: Akcija topoizmeraze na supernamotaju DNK

Na slici 66 je prikazan način delovanja topoizomeraze nad supernamotajem DNK, kao i način na koji se vrši promena preseka. Topoizomeraza je označena žutim oblikom prikazanim na slici. Ona se vezuje za crnu nit i nakon toga izvršava promenu preseka u kome je crna nit prelazila preko crvene. Nakon akcije topoizomeraze, crna nit će se u tom preseku nalaziti ispod crvene, a potom će uslediti relaksacija. Supernamotaj možemo jednostavno vizuelizovati telefonskim kablom koji je spiralnog oblika. Ukoliko fiksiramo jedan kraj takvog kabla, a drugi kraj počnemo da uvrćemo, primetićemo da kabl postaje napet i otprilike na sredini, počinje da se uvrće sam oko sebe, tj. da pravi namotaj oko namotaja, preciznije – supernamotaj. Na slici 66 se vidi da se promenom jednog preseka supernamotaja, njegov ukupan broj preseka smanjuje za dva i supernamotaj postaje relaksiraniji. Pošto osnova za koju se vezuje topoizomeraza može biti jednostruki ili dvostruki lanac, na slikama ćemo ih predstavljati jednom linijom, ali uz napomenu da ona označava oba tipa DNK lanaca.

Na slici 67 prikazano je vezivanje topoizomeraze na DNK sa 4 preseka. Crvenim krugom je označena lokacija na kojoj topoizomeraza vrši promenu preseka, nakon čega se DNK odmotava, tj. prelazi u nečvor.



Slika 67: Model akcije topoizomeraze koja menja presek DNK

Primer koji je naveden je čvor koji se odvezuje promenom samo jednog preseka i to bilo kog. Da bi se odvezali, nekim čvorovima je dovoljna jedna promena, ali tačno određenog preseka. Postoje naznake da topoizomeraze mogu da naprave razliku između preseka, tj. da ocene koji presek bi najbolje bilo promeniti da bi se što pre stiglo do nečvora [80].

Naravno, neće biti moguće svaki učvoreni lanac DNK odvezati samo jednom promenom preseka, pa nam tada broj odvezivosti čvora može poslužiti za izučavanje akcija topoizomeraza [69]. Ukoliko je broj odvezivosti nekog čvora K jednak $u = u(K)$, to znači da taj enzim mora da deluje najmanje u puta da bi se taj lanac DNK odvezao. Slično, ukoliko je rastojanje između dva čvora K_1 i K_2 jednako $d = d(K_1, K_2)$, to znači da topoizomeraza mora delovati najmanje d puta na lanac DNK koji predstavlja prvi čvor, da bi se on transformisao u lanac DNK koji odgovara drugom čvoru.

Topoizomeraze su katalizatori DNK replikacije i transkripcije [75, 83], a imajući u vidu da se ćelije raka replikuju mnogo brže nego zdrave ćelije, topoizomeraze predstavljaju jednu od glavnih meta lekova protiv raka [64]. Veliki broj antibakterijskih lekova takođe ima za cilj ometanje funkcije topoizomeraza.

U većini slučajeva, veličina DNK, koja je vezana u okviru proteinskog DNK kompleksa, je mala [94] pa se takvi delovi DNK mogu modelovati čvorovima sa malim brojem preseka. Zbog toga se tabele rastojanja čvorova do $n = 9$ preseka, koje su date u ovom radu, mogu iskoristiti za određivanje verovatnoće prelaska DNK čvora iz jednog stanja u drugo, tj. predviđanje formiranja nekog novog DNK čvora nastalog ovim prelaskom. Imajući u vidu da su postavljene osnove kontrolisanog povezivanja i raskidanja čestica [86], tabele rastojanja se mogu iskoristiti za predviđanje promena nad konfiguracijom nekog čvora DNK, izbegavanje neželjenih promena nad lancima, kao i katalizaciju promena ka poželjnim stanjima.

Potencijalna tema istraživanja može biti sužavanje klase posmatranih čvorova, tj. izdvajanje konkretnih početnih i krajnjih stanja lanaca DNK i procena mogućnosti prelaska iz jednog navedenog stanja u drugo primenom rezultata iz tablica rastojanja. Rastojanja čvorova u tablicama su izračunata za sve parove čvorova do $n = 9$ preseka. Algoritam koji je korišćen se može, bez dodatnih modifikacija, primeniti i za određivanje rastojanja čvorova sa većim brojem preseka. Jedino ograničenje predstavljaju fizički resursi računara. Sužavanjem klase čvorova koju posmatramo dobijamo manje precizne rezultate (zato što ne uzimamo u razmatranje svih mogućih putanja u grafu rastojanja čvorova), ali ih dobijamo brže. U zavisnosti od tipa zadatka (ukoliko nam je dovoljna samo gornja granica rastojanja), ovakav način određivanja rastojanja može biti prihvatljiv.

4 Rastojanja čvorova nastala zaravnjivanjem (*s*-rastojanja)

Promena preseka je odvezujuća operacija. Čvor takođe možemo odvezati i operacijom zaravnjivanja preseka. Operacija zaravnjivanja je komplikovanija za implementaciju u računarskim programima od operacije promene preseka, pa je zbog toga do sada ređe korišćena i u manjem broju istraživanja su razmatrane ove promene. Zaravnjivanje ima veoma važnu ulogu u teoriji čvorova budući da sve skein relacije, koje se primenjuju prilikom izračunavanja najvažnijih polinomskih invarijanata čvorova (Konvejev, Aleksanderov, Džonsov, HOMFLYPT ili Kaufmanov polinom), koriste zaravnjivanje preseka.



Slika 68: Ilustracija zaravnjivanja preseka

Podsetimo se da rastojanje čvorova nastalo zaravnjivanjem preseka, tj. *s*-rastojanje čvorova K_1 i K_2 , predstavlja minimalan broj zaravnjivanja preseka čvora K_1 potrebnih da bi se on konvertovao u čvor K_2 , gde je minimum uzet po svim dijagramima čvora K_1 . Specijalno, *s*-rastojanje čvora K_1 do nečvora 0_1 je *s*-broj odvezivosti čvora K_1 . Broj odvezivosti nastao zaravnjivanjem, tj. *s*-broj odvezivosti nekog čvora K_1 , predstavlja minimalan broj potrebnih zaravnjivanja preseka čvora K_1 da bi se on odvezao, takođe uzet po svim dijagramima čvora K_1 . Kao i u slučaju Gordijevih rastojanja, *s*-rastojanja će se najčešće realizovati na neminimalnim dijagramima, što predstavlja glavnu otežavajuću okolnost prilikom njihovog izračunavanja.

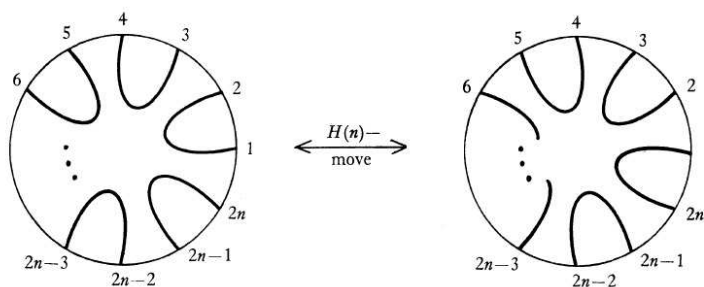
T. Abe i T. Kanenobu su u [103], [102] prikazali tablice čvorova do $n = 9$ preseka koji imaju *s*-broj odvezivosti jednak 1. U ovom poglavlju biće dat pregled metoda koje su koristili, a zatim će biti predložen novi algoritam za određivanje *s*-broja odvezivosti. Korišćenjem ovog algoritma smo otkrili neke čvorove sa *s*-brojem odvezivosti jednakim 1 koji nedostaju u postojećim tablicama. Na kraju će biti prikazane proširene tablice čvorova do $n = 11$ preseka sa *s*-brojem odvezivosti jednakim 1.

Abe i Kanenobu su izračunavali *s*-rastojanja čvorova i objavili tablice za čvorove do $n = 7$ preseka. U ovom poglavlju biće dat pregled njihovih metoda, predloženi novi metodi za izračunavanje *s*-rastojanja čvorova i upoređeni rezultati. Na samom kraju, biće izložene proširene tablice *s*-rastojanja za čvorove do

$n = 9$ preseka.

4.1 Transformacija dijagrama linka pomoću $H(n)$ -pokreta

Dž. Hoste je dokazao da se svaki link može odvezati upotrebom $H(3)$ -pokreta. Generalizaciju ove operacije na dijagramima linka prikazali su u svom zajedničkom radu Dž. Hoste, J. Nakaniši i K. Tanijama [54]. Oni uvode $H(n)$ -pokret na način prikazan na slici 69. $H(n)$ je lokalna promena dijagrama koja se vrši na trivijalnom spletu koji se rotira na način prikazan na slici 69, dok ostatak dijagrama ostaje nepromenjen.



Slika 69: $H(n)$ pokret

$H(n)$ -pokret se definiše na neorijentisanim dijagramima linkova. U istom radu autori uvode analogni $SH(n)$ -pokret koji predstavlja $H(n)$ -pokret na orijentisanim dijagramima linkova. Sve teoreme u njihovom radu dokazane su za oba slučaja, na neorijentisanim i orijentisanim dijagramima.

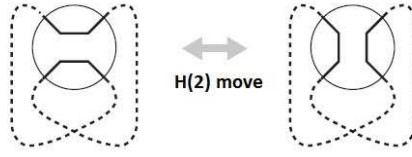
Teorema 13 *Za dato $n \in \mathbf{N}$ svaki čvor se može konvertovati u trivijalni čvor (nečvor) primenom konačnog broja $H(n)$ -pokreta, tj. $H(n)$ -pokret predstavlja odvezujuću operaciju [54].*

U istom radu uveden je broj odvezivosti $u_n(K)$ čvora K .

Definicija 30 *Za dati čvor $K \in \mathbf{S}^3$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $u_n(K)$ predstavlja minimalni broj potrebnih $H(n)$ -pokreta koji transformišu čvor K u trivijalni čvor, gde je minimum uzet po svim dijagramima čvora K .*

Posebno, kao specijalni slučaj autori ističu $H(2)$ pokret prikazan na slici 70 i zabranjuju promenu broja komponenta prilikom izvođenja te operacije. U narednoj lemi, citiranoj iz njihovog rada, Hoste i njegovi saradnici dokazuju da je $H(2)$ odvezujuća operacija. U radu uvode i njoj odgovarajući broj odvezivosti $u_2(K)$ čvora K kao minimalni broj $H(2)$ -pokreta neophodnih da bi se čvor K odvezao, gde je minimum uzet po svim dijagramima čvora K .

Lema 1 *Svaki čvor se može transformisati u trivijalni čvor konačnom primenom $H(2)$ -pokreta.*



Slika 70: $H(2)$ -pokret

Definicija 31 $H(2)$ -Gordijevo rastojanje dva čvora K_1 i K_2 predstavlja minimalan broj $H(2)$ -pokreta potrebnih za konvertovanje čvora K_1 u K_2 , gde je minimum uzet po svim dijagramima čvorova K_1 i K_2 i obeležava se sa $d_2(K_1, K_2)$.

Specijalno, $H(2)$ -Gordijevo rastojanje čvora K do nečvora jeste $H(2)$ -broj odvezivosti tog čvora, tj. $d_2(K, 0_1) = u_2(K)$.

Hoste i njegovi saradnici su definisali i invarijantu $h(K)$ čvora K kao minimalno n za koje važi $u_n(K) = 1$. U svom radu oni određuju zavisnost ove veličine u odnosu na Gordijev broj $u(K)$ čvora i minimalni broj preseka čvora K , a takođe određuju i odnose između različitih brojeva odvezivosti. Navešćemo relacije koje su interesantne za dalji tok naših istraživanja.

Teorema 14 Za čvor K važi sledeće:

1. $u_2(K) \leq 2u(K)$
2. $u_2(K) \leq cr(K) - 2$
3. $u_3(K) \leq u(K)$
4. $h(K) \leq cr(K) - 1$
5. $h(K) \leq 2u(K) + 1$

gde je $u(K)$ standardni broj odvezivosti (tj. Gordijev broj), a $cr(K)$ minimalni broj preseka čvora K .

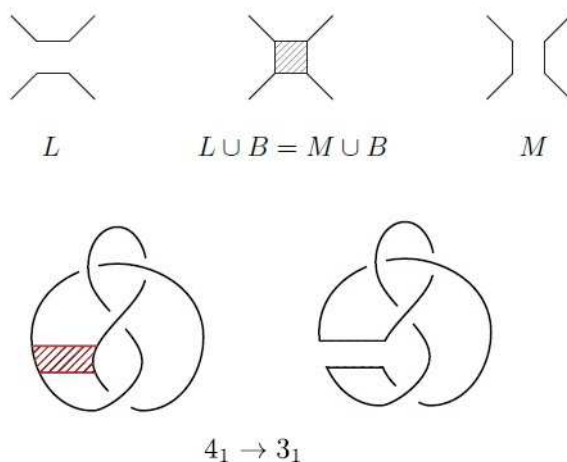
Navedena teorema predstavlja autorov izbor relacija navedenih u različitim teoremama u [54], gde su one i dokazane.

4.2 $H(2)$ -pokret i operacija lepljenja traka

Hoste, Nakaniši i Tanijama su uveli $H(n)$ -pokret – transformaciju dijagrama linka. Posebno razlikuju $H(2)$ -pokret, operaciju koja zahteva očuvanje broja komponentata. Dokazali su da je $H(2)$ odvezujuća operacija i definisali $H(2)$ -broj odvezivosti $u_2(K)$ čvora K kao minimalni broj $H(2)$ -pokreta neophodnih da bi se odvezao čvor K , gde je minimum uzet preko svih dijagrama čvora K .

V.B.R. Likoriš (W.B.R. Lickorish) [51] i K. Nakadžima (K. Nakajima) [68] su izračunali $H(2)$ -brojeve odvezivosti čvorova do $n = 7$ preseka. U radu [95] Kanenobu i Mijazava uvode nove kriterijume za određivanje ovog broja odvezivosti i proširuju tablice obuhvatajući čvorove do $n = 9$ preseka.

Abe i Kanenobu generalizuju prethodni koncept posmatrajući operaciju *lepljenja traka* (eng. *band surgery*) na neorijentisanim dijagramima koja se može opisati kao u [103] na sledeći način. Neka je L link, a $b : I \times I \rightarrow \mathbf{S}^3$ utapanje takvo da $L \cap b(I \times I) = b(I \times \partial I)$, gde je I jedinični interval $[0, 1]$. Ukoliko je link $M = (L(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I)$, tada kažemo da je M dobijen iz linka L operacijom lepljenja trake B , gde je $B = b(I \times I)$ (videti sliku 71).



Slika 71: Operacija lepljenja traka

U radu [102] Kanenebu izučava $H(2)$ -rastojanje čvorova, operaciju koja zahteva očuvanje broja komponenta i navodi nekoliko kriterijuma za određivanje ovog rastojanja.

Prvi od njih je kriterijum koji se zasniva na invarijantama čvorova (koristi signaturu, Arf invarijantu i Džonsov polinom) i opisan je teoremom 3.3 datoj u [102].

Na osnovu navedene teoreme i nejednakosti $d_2(K_1, K_2) \leq u_2(K_1) + u_2(K_2)$ lako se mogu izračunati sledeća rastojanja:

$$u_2(8_{18}) = 3, u_2(8_{21}) = 3, u_2(3_1 \# 9_{40}) = 3 \text{ i } d_2(3_1 \# 3_1, 5_1) = 3. \quad (28)$$

Drugi kriterijum se odnosi na čvorove K_1 i K_2 za koje važi $V(K_1; \omega) = \pm i\sqrt{3}, V(K_2; \omega) = \pm i\sqrt{3}$. U [102] su dati uslovi koji moraju biti zadovoljeni da bi dva čvora imala $H(2)$ -rastojanje jednako 2 i dokazano je da se sledeći parovi čvorova $\{K_1, K_2\}$, koji zadovoljavaju navedeno svojstvo i imaju determinantu deljivu sa 3, nalaze na rastojanju 2:

Tabela 2: $H(2)$ -Gordijeva rastojanja čvorova do 5 preseka

	3_1	4_1	5_1	5_2
3_1	0	1 Fig.6	2 IV',V'	2 II'
$3_1!$	2 III'		2 IV',V'	1 Fig.6
4_1		0	2-3 III'	1 Fig.6
5_1			0	2 V'
$5_1!$			1-2 O'	2 V'
$5_2!$				2 III'

$$\{3_1, 6_1\}, \{!3_1, 6_1\}, \{3_1, 7_1\}, \{6_1, 3_1\#4_1\}, \{!6_1, 3_1\#4_1\}, \{7_7, !7_7\}. \quad (29)$$

Dokaz se razlikuje za slučajeve $|\sigma(K_1) - \sigma(K_2)| = 2$ i $\sigma(K_1) = \sigma(K_2)$.

U istom radu navoden je i treći kriterijum. On se zasniva na vrednostima Q -polinoma. Ako je $\rho(K) = Q(K; (\sqrt{5} - 1)/2)$, tada važi sledeća teorema [95].

Teorema 15 *Ukoliko za čvorove K_1 i K_2 važi $d_2(K_1, K_2) = n$, tada:*

$$\rho(K_1)/\rho(K_2) \in \{\pm\sqrt{5}^k, \sqrt{5}^{\pm n} | k = 0, \pm 1, \dots, \pm(n-1)\}. \quad (30)$$

Iz navedene teoreme direktno sledi da, ukoliko je $\rho(K) = \pm\sqrt{5}^n$, tada važi $u_2 \geq n$.

Osvrnimo se i na odnos $H(2)$ -Gordijevog rastojanja i običnog Gordijevog rastojanja. Ako su K_1 i K_2 čvorovi takvi da $d = d(K_1, K_2)$, tada je d broj preseka koje je potrebno promeniti da bi se čvor K_1 konvertovao u K_2 . Svaki od tih d preseka može biti pozitivan ili negativan. Neka je d^+ broj preseka koji su pozitivni, a d^- broj negativnih. Tada važi teorema 10.1 iz [102]:

Teorema 16

$$d_2(K_1, K_2) \leq d(K_1, K_2) + 1. \quad (31)$$

Ukoliko su d^+ i d^- parni, tada

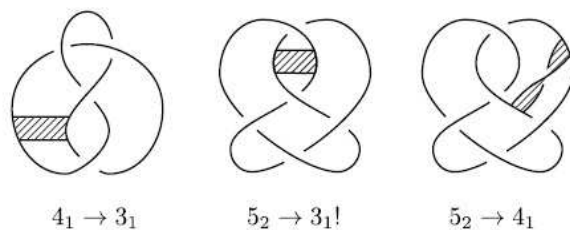
$$d_2(K_1, K_2) \leq d(K_1, K_2). \quad (32)$$

Primenom navedenih kriterijuma, Kanenobu i njegovi saradnici su izveli tablice $H(2)$ -Gordijevih rastojanja za čvorove do $n = 7$ preseka i prikazali ih u svom radu. U Tabelama 2 i 3 prikazan je deo tih tablica, za čvorove do $n = 6$ preseka. U svakoj koloni, pored samog rastojanja čvorova, navode se i metodi koji su u tom radu primenjeni za određivanje rastojanja. Oznake 1-2, 2-3, 1-3 znače: 1 ili 2, 2 ili 3, 1 ili 2 ili 3, redom. Lista metoda je navedena u [102] u devetom poglavlju. Za sliku u ogledalu čvora K u navedenom radu korišćena je oznaka $K!$.

Tabela 3: $H(2)$ -Gordijeva rastojanja čvorova do 6 preseka

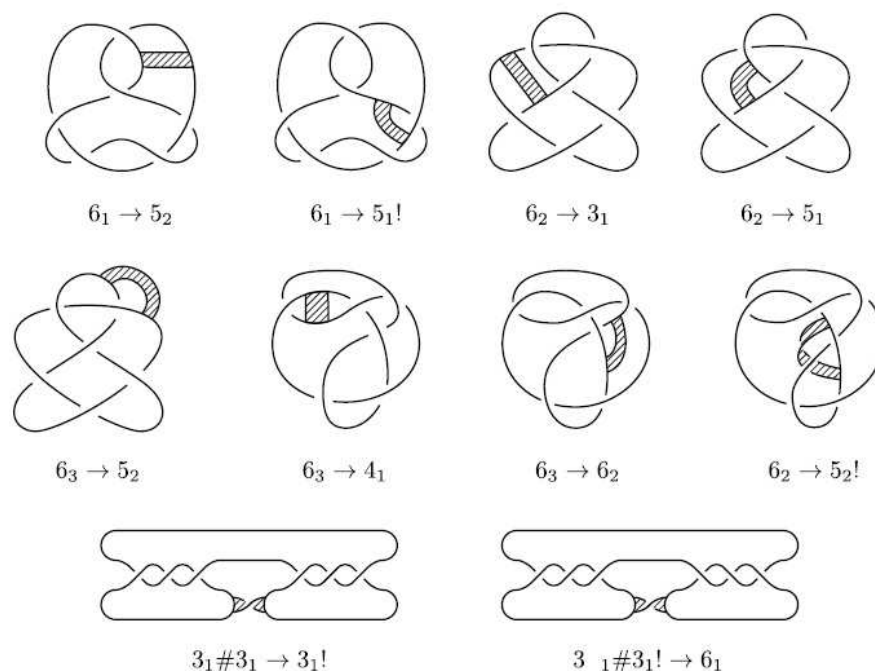
	6_1	6_2	6_3	$3_1\#3_1$	$3_1\#3_1!$
3_1	2 VII'	1 Fig.7	2 IV(4_1)	1 Note 1	1 Note 1
$3_1!$	2 VII'	2 III'		1 Fig.7	
4_1	2 V(5_2)	2 V(3_1)	1 Fig.7	2 I(3_1), V(3_1)	2 I(3_1), II(3_1), V(3_1)
5_1	1-2 O'	1 Fig.7	2 V(6_2)	3 VI'	2 I($6_1!$)
$5_1!$	1 Fig.7	1-2 O'		3 VI'	
5_2	1 Fig.7	2 II'	1 Fig.7	2 I($3_1!$)	2 I($3_1!$)
$5_2!$	2 IV'	1 Fig.7		2 I(3_1)	
6_1	0	1-2 O'	2 II(5_2)	2-3 III'	1 Fig. 7
$6_1!$	1-2 O'	2 IV'		2-3 III'	
6_2		0	1 Fig.7	2 I(3_1)	2 I(3_1)
$6_2!$		2 III'		2 I($3_1!$)	
6_3			0	2 I(7_7)	3 VI(3_1)
$3_1\#3_1$				0	2 III(3_1)
$3_1!\#3_1!$				1-2 O(3_1)	

Za sve parove čvorova za koje je primenom navedenih kriterijuma izračunato rastojanje jednako 1 dati su dijagrami koji ta rastojanja prikazuju. *Lepljenjem (uvrnutih) traka* Kanenobu i njegovi saradnici ukazuju na lokaciju $H(2)$ -pokreta koji prevodi jedan čvor u drugi. Lepljenje traka za parove čvorova iz Tabela 2 i 3, koji imaju $H(2)$ -rastojanje jednako 1, prikazali su na slikama 72 i 73.



Slika 72: Lepljenje traka na čvorovima do 5 preseka

U tablicama objavljenim u navedenom radu postoje i dalje neodređena rastojanja. Za par čvorova $\{5_1, !5_1\}$ nije utvrđeno da li je $H(2)$ -Gordijeva rastojanje jednako 1 ili 2. Metodima koje ćemo predložiti u ovom poglavlju pokazaćemo da je ono jednako 1. Iz tablica koje su rezultat naših istraživanja biće izostavljeni neki parovi čvorova kao što su npr. $\{3_1, 3_1\#3_1\}$ i $\{3_1, 3_1\#!3_1\}$ na osnovu pravila



Slika 73: Lepljenje traka na čvorovima do 6 preseka

datih u poglavlju 1.4.1 i imajući u vidu da je $u_2(3_1) = 1$ i $u_2(!3_1) = 1$.

Kanenobuove tablice su rezultat istraživanja $H(2)$ -pokreta koji zahteva očuvanje broja komponentata.

Nasuprot tome, u radu [103] Abe i Kanenobu ispituju operaciju lepljenja traka, dozvoljavaju promenu broja komponentata linka nakon primene ove operacije i uvode sledeće pojmove rastojanja i broja odvezivosti.

Definicija 32 *Neka su L_1 i L_2 neorijentisani čvorovi. b -Gordijevo rastojanje (od eng. band-Gordian distance) linkova L_1 i L_2 označava se sa $d_b(L_1, L_2)$ i definiše kao minimalan broj operacija lepljenja traka potrebnih za konvertovanje linka L_1 u L_2 . Specijalno, b -broj odvezivosti čvora K , $u_b(K)$, definiše se kao b -Gordijevo rastojanje čvora K do trivijalnog čvora, tj. $u_b(K) = d_b(K, 0_1)$.*

Abe i Kanenobu su definisali kriterijume za određivanje b -broja odvezivosti i njihovom primenom izračunali b -brojeve odvezivosti čvorova do $n = 9$ preseka. Njihove tablice su prikazali u radu u [103]. $H(2)$ -pokret se može realizovati kao operacija lepljenja trake. Pri primeni operacije lepljenja traka može se zahtevati očuvanje broja komponentata ili dozvoliti promena broja komponentata. U slučaju određivanja $H(2)$ -broja odvezivosti čvora, zahteva se da nakon svake operacije lepljenja traka broj komponentata ostaje očuvan, tj. da niz odvezivanja u tom slučaju sadrži samo čvorove. Sa druge strane, u nizu linkova koji nastaje

pri određivanju b -broja odvezivosti mogu se naći linkovi koji imaju različit broj komponentata. Očigledno je da takav niz može biti kraći od niza koji nastaje određivanjem $H(2)$ -broja odvezivosti, pa važi:

$$u_b(K) \leq u_2(K). \quad (33)$$

Nejednakost može biti i stroga, što se može uočiti na primeru čvora 8_{18} za koji važi $u_b(8_{18}) = 2$ i $u_2(8_{18}) = 3$. Pored ovog čvora, postoji beskonačno mnogo čvorova K za koje važi $u_b(K) = 2$ i $u_2(K) = 3$ ([103], Teorema 7.1). Štaviše, važi naredna teorema data u [103] koja opisuje relaciju između $H(2)$ -Gordijevih rastojanja i b -Gordijevih rastojanja. Primenom ove teoreme moguće je uporediti rezultate koji se nalaze u ovim dvema vrstama tablica.

Teorema 17 *Za proizvoljne čvorove K_1 i K_2 važi*

$$d_b(K_1, K_2) = d_2(K_1, K_2) - 1 \quad (34)$$

ili

$$d_b(K_1, K_2) = d_2(K_1, K_2). \quad (35)$$

Ukoliko je $d_b(K_1, K_2)$ neparno, tada $d_b(K_1, K_2) = d_2(K_1, K_2)$. Slično, ukoliko je $d_2(K_1, K_2)$ parno ili jednako 1, tada $d_b(K_1, K_2) = d_2(K_1, K_2)$.

Specijalno, ukoliko je K_2 iz gornje teoreme nečvor, tada važi naredna posledica.

Posledica 3 *Za proizvoljni čvor K važi*

$$u_b(K) = u_2(K) - 1 \quad (36)$$

ili

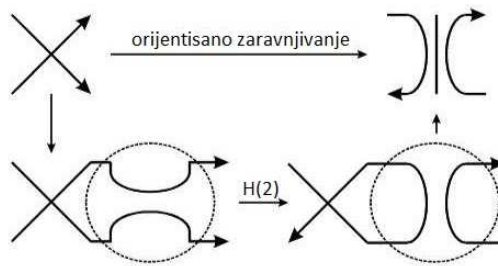
$$u_b(K) = u_2(K). \quad (37)$$

Ukoliko je $u_b(K)$ neparno, tada $u_b(K) = u_2(K)$. Slično, ukoliko je $u_2(K)$ parno ili jednako 1, tada $u_b(K) = u_2(K)$.

4.3 Metodi korišćeni u ovom radu

Koristeći jednostavne topološke argumente pokazuje se da je $H(2)$ -pokret ekvivalentan orijentisanom zaravnjivanju nekog preseka c . Naime, ukoliko u preseku c (proizvoljnog znaka) primenimo $H(2)$ -pokret (slika 74) praćen prvim Reidmeisterovim potezom (odmotavanje petlje), rezultat toga će biti orijentisano zaravnjivanje preseka c (postavljanje vertikalnog ogledala u tački preseka). Na isti način može se pokazati i ekvivalencija neorijentisane operacije lepljenja traka i neorijentisanog zaravnjivanja.

Kako je u našem istraživanju pažnja usmerena na operaciju zaravnjivanja preseka, korisno je upravo definisane operacije, brojeve odvezivosti i rastojanja opisati jezikom zaravnjivanja.



Slika 74: Ekvivalencija $H(2)$ -pokreta i zaravnjivanja preseka

$H(2)$ -broj odvezivosti $u_2(K)$ čvora K je, zapravo, broj odvezivosti orijentisanim zaravnjivanjem $u_2(L)$, dok $u_b(K)$ možemo poistovetiti sa brojem odvezivosti neorijentisanim zaravnjivanjem $u_b(L)$, gde je L link. U prvom slučaju, u procesu odvezivanja, broj komponenta linka ostaje nepromenjen, dok se u drugom, on može menjati u svakom koraku. U svakom koraku, broj preseka se smanjuje za jedan, tako da su oba broja odvezivosti konačna. Pored broja odvezivosti, Abe i Kanenobu su uveli $H(2)$ -Gordijevo rastojanje i b -Gordijevo rastojanje. Za dva čvora K_1 i K_2 oba navedena rastojanja nastala zaravnjivanjem predstavljaju minimalan broj zaravnjivanja preseka koji prevode K_1 u K_2 , gde je minimum uzet preko svih dijagrama čvorova K_1 i K_2 , uz napomenu da je u prvom slučaju u procesu transformacije čvora neophodno u svakom koraku birati ono zaravnjivanje koje ne menja broj komponentata, tj. orijentisano zaravnjivanje, dok se u drugom broj komponentata može povećavati ili smanjivati nakon zaravnjivanja.

U ovoj radu izučavaćemo rastojanja i brojeve odvezivosti zaravnjivanjem koje čuva broj komponentata. Određivanje s -rastojanja čvora K_1 do čvora K_2 predstavlja pronalaženje najkraćeg niza čvorova koji vodi od K_1 do K_2 gde je svaki naredni čvor u nizu dobijen orijentisanim zaravnjivanjem nekog preseka prethodnog čvora. Neophodno je da svi članovi ovog niza budu čvorovi, tj. linkovi sa jednom komponentom. Prilikom određivanja s -broja odvezivosti čvora K_1 , potrebno je odrediti ovakav niz koji vodi do nečvora.

Napomenimo da se metodi koje ćemo predložiti mogu primeniti i na izračunavanje rastojanja neorijentisanim zaravnjivanjem (b -Gordijevo rastojanje), ali je u ovom istraživanju ono isključeno zato što trenutno ne postoji adekvatan računarski program koji vrši minimizaciju linkova. Za minimizaciju čvorova koristili smo funkciju `fKnotFind` koja se primenjuje samo na čvorove.

4.3.1 Određivanje čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1

Veliki naponi su do sada uloženi za kreiranje tablica brojeva odvezivosti zaravnjivanjem $u_2(L)$ i $u_b(K)$ za čvorove do $n = 9$ preseka. J. Bao (Y. Bao) je u [100] objavio kriterijume za određivanje racionalnih čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1. U radu [95] Kanenobu i Mijazava definisali su metode za određivanje u_2 broja odvezivosti koji se zasnivaju na vrednostima velikog broja

različitih invarijanata čvorova. Oni su objavili tablice u_2 -brojeva odvezivosti čvorova do $n = 9$ preseka, koje proširuju Abe i Kanenobu u [103].

Podsetimo se da ako za čvor K važi $u_2(K) = 1$, tada je i $u_b(K) = 1$ na osnovu jednakosti 37. Prilikom izračunavanja broja odvezivosti $u(K)$ najčešće se primenjuje jednostavan metod za određivanje njegove donje granice koji koristi signaturu čvora, tj. sledeću nejednakost

$$u(K) \geq \frac{1}{2}|\sigma(K)| \quad (38)$$

Međutim, ne postoji sličan jednostavan opšti metod za izračunavanje kojim se može utvrditi donja granica s -broja odvezivosti nekog čvora. Zbog toga, utvrđivanje da li neki čvor ima s -broj odvezivosti veći od 1 zahteva pojedinačnu proveru za svaki čvor.

Metodi izračunavanja $H(2)$ -rastojanja, koje su primenjivali Kanenobu i njegovi saradnici, kao osnovu koriste veliki broj različitih invarijanata čvorova. Za izračunavanje rastojanja korišćene su grupe homologija na ciklično razgranatim pokrivanjima prostora, Džonsov polinom, Arf invarijanta, signatura i Q -polinom.

Sledeći algoritam opisuje metod određivanja $H(2)$ -broja odvezivosti koji su koristili Kanenobu i Mijazava.

ALGORITAM 4

I_n Ako je n najmanji broj generatora prostora $H_1(\Sigma(K); Z)$, tada je $u_2(K) \geq n$.

II Ako je $\sigma(K) = 0$ i $Arf(K) = 1$, tada je $u_2(K) > 1$.

II' Dodatno, ukoliko je $u(K) = 1$, tada je $u_2(K) = 2$.

III Ako je $\sigma(K) = \pm 4$ i $Arf(K) = 0$, tada je $u_2(K) > 1$.

III' Dodatno, ukoliko je $u(K) = 2$, tada je $u_2(K) = 2$

IV Pretpostavimo da je $\sigma(K) \equiv 2\varepsilon \pmod{8}$, $Arf(K) = 0$ i $det(K) \equiv 0 \pmod{3}$.
Ukoliko ne važi kongruencija $V'(K; -1) \equiv 8\varepsilon \pmod{24}$ ili važi $V(K; e^{i\pi/3}) \neq \varepsilon i\sqrt{3}$, tada je $u_2(K) > 1$.

IV' Dodatno, ukoliko važi $u(K) = 1$, tada je $u_2(K) = 2$.

V_n Ako je $\rho(K) = -\sqrt{5}^{n-1}$, tada je $u_2(K) = n$

V'_n Dodatno, ukoliko je $u(K) = n - 1$, tada je $u_2(K) = n$,

gde je $\Sigma(K)$ dvostruki pokrivač prostora S^3 razgranatog duž čvora K , $\varepsilon = \pm 1$, $\rho(K) = Q(K; (\sqrt{5} - 1)/2)$, a Arf invarijanta je definisana u [32].

$H(2)$ -brojevi odvezivosti, dobijeni primenom navedenog algoritma, objavljeni su u tablicama u radu [95]. Tablice sadrže čvorove do $n = 9$ preseka, ali neki rezultati nedostaju. Za sledećih osam čvorova: $8_{18}, 9_{21}, 9_{23}, 9_{26}, 9_{28}, 9_{31}, 9_{32}$ i 9_{45} se predloženim algoritmom nije mogao utvrditi broj odvezivosti.

$u_2(8_{18}) = 3$ je dokazano u [102].

Bao definiše neophodne kriterijume ([34], Proposition 1.1) za racionalne čvorove sa $H(2)$ -brojem odvezivosti jednakim 1 i dokazuje da za bilo koji čvor $K \in \{9_{21}, 9_{23}, 9_{26}, 9_{31}\}$ važi $u_2(K) = 1$.

Abe i Kanenobu, primenom kriterijuma navedenih u poglavlju 4.2, dokazuju da za proizvoljni čvor $K \in \{9_{28}, 9_{32}, 9_{45}\}$ važi $u_2(K) = 1$ i proširuju tablice. Kao referentne rezultate posmatračemo njihove rezultate date u [103], budući da objedinjuju sva prethodna istraživanja.

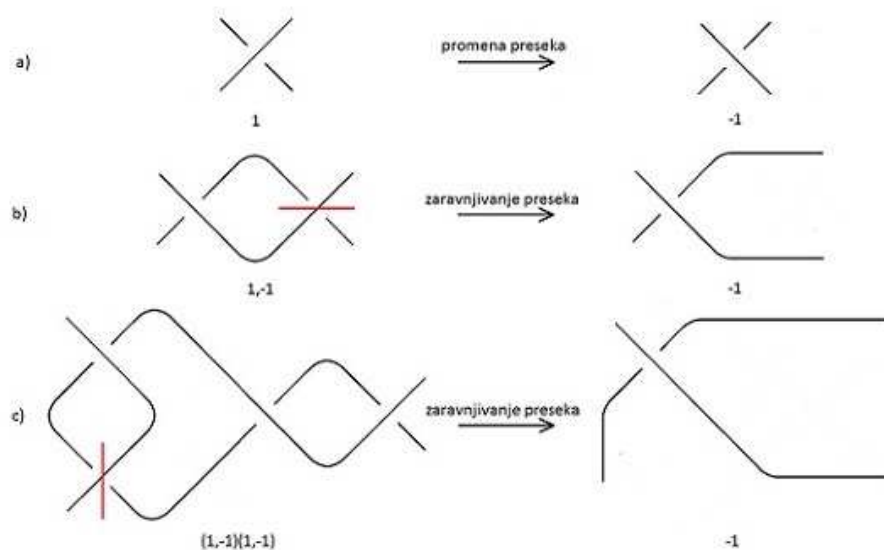
U ovom radu razmatračemo najprostiji slučaj, čvorove sa s -brojem odvezivosti jednakim 1. Umesto upotrebom komplikovanih matematičkih invarijanata opisanih u navedenim radovima, u našem radu svi čvorovi sa s -brojem odvezivosti jednakim 1 dobijeni su sledećim algoritmom koji je predložen u radu [137].

ALGORITAM 5

1. Uzeti dijagram čvora K_0 čiji je broj odvezivosti jednak 1, datog u Konvejevoj notaciji;
2. pronaći presek u K_0 koji je potrebno promeniti iz $+1$ u -1 da bi se dobio nečvor;
3. zameniti ovaj presek spletom $(1, -1)$ i $(1, -1)(1, -1)$. Ovom zamenu dobijaju se dijagram čvora K_1 i dijagram linka L_1 . Izabрати zamenu koja daje čvor;
4. minimizovati dijagram K_1 i prepoznati dobijeni čvor K .

Tvrdimo da čvor K dobijen navedenim algoritmom ima s -broj odvezivosti jednak 1 realizovan na neminimalnom dijagramu K_1 .

Dokaz: Dokažimo da se nakon primene ovog algoritma na čvor K_0 , za koji važi $u(K_0) = 1$, kao rezultat dobija čvor K takav da je $u_2(K) = 1$. Na slici 75 je ilustrovan dokaz. Neka je K_0 čvor iz koraka 1 Algoritma 5. Presek dijagrama čvora K_0 koji je potrebno promeniti iz $+1$ u -1 je prikazan na slici 75a. U koraku 3 Algoritma vrši se zamena spleta 1 spletom $(1, -1)$ (prikazanim na slici 75b), ili spletom $(1, -1)(1, -1)$ (prikazanim na slici 75c) u zavisnosti od toga koja od ove dve zamene daje kao rezultat čvor. Navedeni spletovi u stvari predstavljaju dva različita zaravnjivanja ("vertikalno" i "horizontalno") na koja se svode primenom Rajdemajsterovog poteza II. Neka je odabrana zamena preseka spletom $(1, -1)$. Ukoliko se izvrši zaravnjivanje preseka kao na slici 75b, splet će se konvertovati u -1 . Pošto su na slici prikazane samo lokalne promene, a ostatak dijagrama čvora je isti za svih šest slučajeva, odatle sledi da su sva tri dijagrama sa desne strane slike jednaka i predstavljaju dijagram nečvora. Dakle, samo jednim zaravnjivanjem preseka dijagrama čvora dobijenog u koraku 3 Algoritma i prikazanog na slici 75b, dobijen je nečvor pa i za čvor K dobijen u

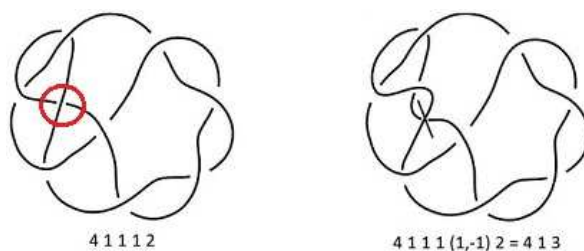


Slika 75: Generisanje čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1

koraku 4 važi $u_2(K) = 1$. Na slici 75c je prikazan presek koji je potrebno zaravniti u slučaju zamene spletom $(1, -1)(1, -1)$ da bi se čvor odvezao u jednom koraku.

PRIMER 3 *Racionalni čvor $8_4 = 413$ ima s -broj odvezivosti 1.*

Za racionalni čvor $K_0 = 9_{14} = 41112$ važi $u(K_0) = 1$. Promenom trećeg preseka 1 u -1 dobijamo nečvor $411-12$. Zamena $-1 \rightarrow (1, -1)$ daje čvor $K_1 = 411(1, -1)2$ čiji je minimalni dijagram $K = 413$. Čvor K ima s -broj odvezivosti $u_2(K) = 1$ koji se realizuje na neminimalnom dijagramu $K_1 = 411(1, -1)2$ (videti sliku 76).



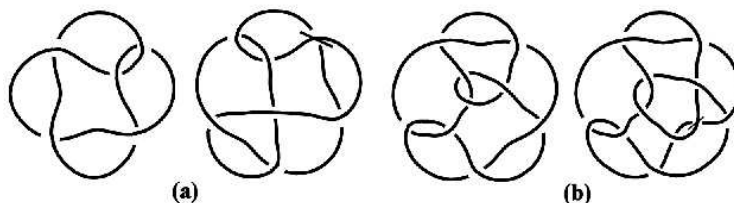
Slika 76: Čvor $9_{14} = 41112$ sa brojem odvezivosti jednakim 1 i čvor $8_4 = 413$ sa s -brojem odvezivosti jednakim 1

Otvoreno pitanje: Da li se može dokazati da je predloženi Algoritam iscrpljujući, tj. da li se na ovaj način mogu dobiti svi čvorovi koji imaju s -broj

odvezivosti jednak 1?

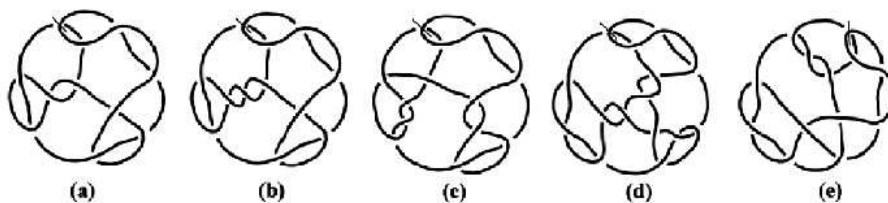
Zbog ekvivalentnosti $H(2)$ -pokreta i orijentisanog zaravnjivanja (koje se primenjuje u Algoritmu 5), za upoređivanje rezultata se mogu upotrebiti tablice $H(2)$ -broja odvezivosti za čvorove do $n = 9$ preseka koje su Abe i Kanenobu objavili u [103]. Upoređujući rezultate dobijene za čvorove do $n = 9$ preseka, izgleda da navedeni algoritam jeste iscrpljujući i da se njegovom primenom mogu dobiti svi čvorovi za koje važi $u_2(K) = 1$.

Rezultati koje smo dobili primenom Algoritma 5 se skoro poklapaju sa rezultatima navedenim u tablicama u [103], uz sledeće napomene. U tablicama Abea i Kanenobua su izostavljeni čvorovi 5_2 , 9_{23} i 9_{25} . Tačan rezultat $u_2(5_2) = 1$ je dat u [102], dokaz za $u_2(9_{23}) = 1$ je prikazan u [103] (Figure 15), a za čvor 9_{25} su Kanenobu i Mijazava potvrdili broj odvezivosti 1 u [95]. Na slici 77 su prikazani dijagrami čvorova 5_2 i 9_{25} na kojima se ostvaruje s -broj odvezivosti 1 (dobijeni u trećem koraku Algoritma 5). U tablicama [103] čvor 9_{24} se greškom nalazi u dve liste, u onoj sa $u_2 = u_b = 1$ i $u_2 = u_b = 2$. Tvrdimo da za ovaj čvor važi $u_2(9_{24}) \neq 1$.



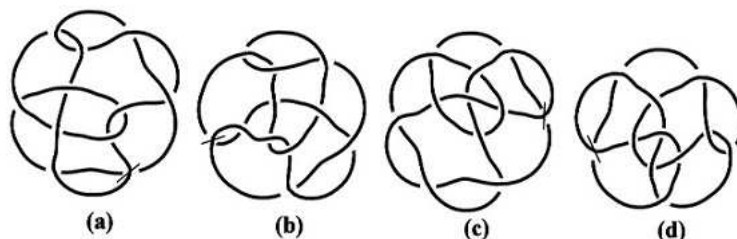
Slika 77: a) Čvor $5_2 = 3_2$ i njegov neminimalni dijagram $2(1, -1)12$ sa s -brojem odvezivosti 1; b) čvor $9_{25} = 2_2, 2_1, 2$ i njegov neminimalni dijagram $6*210.(1, -1)0.2 : 20$ sa s -brojem odvezivosti 1

Primenom Algoritma 5 dobijeno je i 5 složenih čvorova koji nedostaju u dosadašnjim tablicama. Složeni čvor $!3_1\#4_1$ ostvaruje s -broj odvezivosti 1 na neminimalnom dijagramu $22((1, -1)(1, -1))12$, $3_1\#5_2$ na $23((1, -1)(1, -1))12$, $4_1\#5_2$ na $211, 32, ((1, -1)(1, -1), -1, 1)$, $4_1\#!5_2$ na $311((1, -1)(1, -1))22$ i $3_1\#!6_2$ na $3((1, -1)(1, -1))1113$ (slika 78).



Slika 78: Neminimalni dijagrami čvorova a) $!3_1\#4_1$; b) $3_1\#5_2$; c) $4_1\#!5_2$; d) $4_1\#5_2$; e) $3_1\#!6_2$ na kojima se ostvaruje s -broj odvezivosti 1

Bao je dokazao da racionalni čvorovi 9_{21} , 9_{23} , 9_{26} i 9_{31} imaju $H(2)$ -broj odvezivosti 1, a u radu [103] su prikazani dijagrami tih čvorova na kojima se $H(2)$ -operacijom taj broj i ostvaruje. Na slici 79 su prikazani neminimalni dijagrami čvorova 9_{21} , 9_{23} , 9_{26} i 9_{31} (dobijeni trećim korakom Algoritma 5) na kojima se ostvaruje s -broj odvezivosti 1.



Slika 79: Neminimalni dijagrami čvorova a) 9_{21} ; b) 9_{23} ; c) 9_{26} ; d) 9_{31} na kojima se ostvaruje s -broj odvezivosti 1

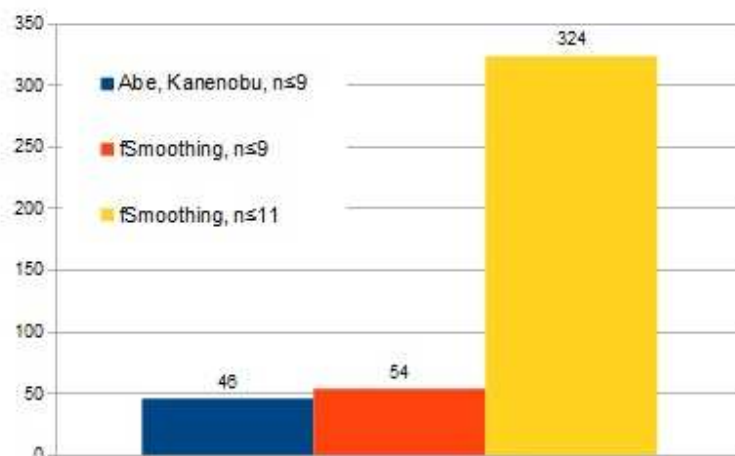
Algoritam 5 je primenjen i na čvorove sa $11 \geq n \geq 10$ preseka, pa su njegovom primenom određeni čvorovi do $n = 11$ preseka sa s -brojem odvezivosti 1. Nova, proširena lista čvorova do $n = 11$ preseka sa s -brojem odvezivosti 1 mogu se preuzeti iz sledećih dokumenata sa sajta Matematičkog instituta (u listama su navedeni i dijagrami na kojima se to rastojanje ostvaruje):

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/SmoothingNumber1Zekovic.nb>.
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/SmoothingNumber1Zekovic.pdf>.

Na grafiku prikazanom na slici 80 prikazani su i upoređeni brojevi čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1 dobijenih algoritmom 5, sa rezultatima navedenim u dosadašnjim tablicama koje su kreirali Bao, Kanenobu, Mijazava i Abe. Kao referentne rezultate koristili smo najnovije tablice date u radu [103] Abea i Kanenobua koje sadrže sumirane rezultate prethodnih radova [100, 95, 102]. Rezultati Abea i Kanenobua prikazani su plavim stubom i označeni natpisom "Abe, Kanenobu, $n \leq 9$ ", dok su rezultati dobijeni algoritmima implementiranim za potrebe našeg rada obojeni narandžastom i žutom bojom. Abe i Kanenobu su izračunali da 46 čvorova sa $n \leq 9$ preseka ima s -broj odvezivosti jednak 1. Korišćenjem *Mathematica* funkcije `fSmoothing`, u kojoj je implementiran Algoritam 5 u okviru naših istraživanja, određena su 54 čvora sa s -brojem odvezivosti 1 za čvorove do $n = 9$ preseka i ti rezultati su označeni natpisom "fSmoothing, $n \leq 9$ ". Ista funkcija primenjena je i na čvorove do $n = 11$ preseka. Kao rezultat dobijena su 324 čvora sa s -brojem odvezivosti jednakim 1 i oni su prikazani na delu grafika označenog natpisom "fSmoothing, $n \leq 11$ ".

Funkcija `fSmoothing` se može primeniti i za izračunavanje s -broja odvezivosti čvorova sa $n > 11$ preseka, bez dodatne modifikacije.

U našim tablicama čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1, čvorovi su dati u Aleksander-Brigsovoj notaciji (za $n \leq 10$ preseka) ili *Knotscape* notaciji



Slika 80: Brojevi čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1

(za čvorove sa $n = 11$ preseka). Navedeni su u Konvejevoj notaciji i Konvejevom notacijom neminimalnog dijagrama na kome se realizuje s -broj odvezivosti jednak 1.

4.3.2 Određivanje parova čvorova sa s -rastojanjem 1

Kao i u slučaju Gordijevih rastojanja, s -rastojanja čvorova će najčešće biti realizovana na neminimalnim dijagramima. Za generisanje neminimalnih dijagrama čvorova korišćeni su metodi opisani u poglavlju 3.4 (Metod 1, Metod 2, Algoritam 3).

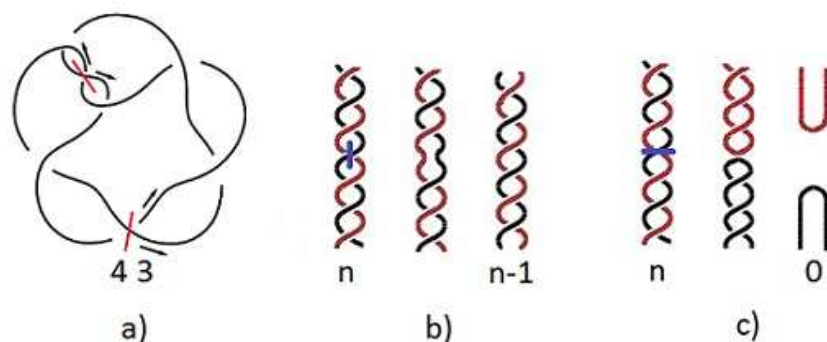
Parove čvorova sa s -rastojanjem 1, koje se realizuje na njihovim minimalnim dijagramima, nalazimo direktno vršeći zaravnjivanje preseka na minimalnim dijagramima. U cilju pronalaženja parova čvorova sa s -rastojanjem 1 koje se realizuje na neminimalnim dijagramima korišćemo sličnu ideju kao i prilikom određivanja parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem 1. Nakon generisanja različitih neminimalnih dijagrama nekog čvora K_1 , polazna ideja je da odredimo sve čvorove koji se dobijaju iz ovih neminimalnih dijagrama čvora K_1 jednim orijentisanim zaravnjivanjem preseka. Ako na nekom neminimalnom dijagramu čvora K_1 izvršimo jedno orijentisano zaravnjivanje i to činimo redom u svim presecima, a zatim dobijene dijagrame minimizujemo, kao rezultat dobijamo različite čvorove K_2 i za svaki od njih važi $d_2(K_1, K_2) = 1$.

Kao i kod Gordijevih rastojanja, i ovde se nameće pitanje: kako na optimalan način izvršiti sva orijentisana zaravnjivanja preseka? Ponovo dolaze do izražaja prednosti Konvejeve notacije koja proglašava neka zaravnjivanja suvišnim, izjednačavajući preseke u sledećem smislu:

Definicija 33 Dva preseka p_i i p_j dijagrama čvora K_1 , datog u Konvejevoj notaciji, ekvivalentna su kao kandidati za orijentisano zaravnjivanje preseka ukoliko postoji celobrojni splet u zapisu čvora K_1 koji sadrži oba preseka p_i i p_j .

Kod primene operacija zaravnjivanja preseka, u cilju očuvanja broja komponenata, neophodno je voditi računa o orijentaciji dijagrama, tj. primenjivati orijentisano zaravnjivanje. Na slici 81a prikazan je orijentisani dijagram čvora 7_3 čiji je Konvejev simbol $4\ 3$. Operaciju zaravnjivanja možemo izvršiti u svakom od 7 preseka ovog čvora. Međutim, na osnovu prethodne definicije znamo da su neke od tih operacija suvišne, tj. kao rezultat generišu iste čvorove.

Konvejeva notacija nam omogućava da orijentisano zaravnjivanje vršimo na nivou celobrojnih spletova, a ne u pojedinačnim presecima, pa je zbog toga dovoljno razmatrati samo po jedno zaravnjivanje u spletu 4 i spletu 3.



Slika 81: a) Orijetisana zaravnjivanja čvora $4\ 3$; b) vertikalno zaravnjivanje celobrojnog spleta dužine n ; c) horizontalno zaravnjivanje celobrojnog spleta dužine n

U cilju očuvanja broja komponenata dijagrama, orijentisano zaravnjivanje u spletu 3 se realizuje postavljanjem dvostranog ogledala na način prikazan na slici 81a – ogledalo se pruža duž spleta i takvo ogledalo nazivamo *vertikalnim*. Orijetisanim zaravnjivanjem ovakvog spleta ukupan broj preseka u tom spletu se uvek smanjuje za 1 (videti sliku 81b na kojoj je prikazan opšti slučaj), pa orijentisano zaravnjivanje spleta 3 čvora $4\ 3$ daje čvor 42.

Orijentisano zaravnjivanje spleta 4 čvora $4\ 3$ se realizuje postavljanjem dvostranog ogledala upravnog na splet i takvo ogledalo nazivamo *horizontalnim*. U ovom slučaju razrešavanje spleta je nezavisno od broja preseka početnog spleta i ovakvo zaravnjivanje taj splet uvek konvertuje u splet 0 kao na slici 81c. Čvor $4\ 3$ se nakon orijetisanog zaravnjivanja spleta 4 konvertuje u čvor 3, tj. trolisnik $3_1 = 3$.

Dakle, orijentisano zaravnjivanje celobrojnog spleta dužine n kao rezultat daje splet $n - 1$ ili 0 u zavisnosti od orijentacije početnog spleta. Kako Konvejeva notacija dozvoljava da orijentisano zaravnjivanje vršimo nad celobrojnim spletoivima, a ne pojedinačnim presecima, i ovde je, kao i u metodima za određivanja

Gordijevog rastojanja, dimenzija problema smanjena sa n , gde je n broj preseka u dijagramu, na n_c , gde je n_c broj celobrojnih spletova u Konvejevom zapisu tog dijagrama. Posebno, kada se vrši zaravnjivanje kao na slici 81c, broj spletova u narednom koraku se smanjuje na $n_c - 1$. Zaravnjivanje tog tipa realizuje se u $\lceil \frac{n_c}{2} \rceil$ spletova racionalnog čvora.

Korišćenje neminimalnih dijagrama čvorova, a zatim zaravnjivanje jednog njihovog preseka čiji se izbor vrši na upravo opisan način, predstavlja prvi metod za dobijanje parova čvorova koji se nalaze na s -rastojanju jednakom 1.

Drugi metod za generisanje parova čvorova sa s -rastojanjem jednakim 1, koji je primenjen u ovom radu, zasniva se na istoj ideji koju smo koristili za generisanje čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1. Doprinos ovog rada jeste veliki broj novih parova čvorova sa Gordijevim rastojanjem jednakim 1 koji su dobijeni primenom metoda opisanih u trećem poglavlju. Skup tih parova ćemo upotrebiti kao bazu za generisanje parova čvorova sa s -rastojanjem jednakim 1 primenom narednog algoritma.

ALGORITAM 6

1. Uzeti dijagrame čvorova K'_0 i K''_0 koji se nalaze na Gordijevom rastojanju jednakom 1, date u Konvejevoj notaciji;
2. pronaći presek u dijagramu čvora K'_0 koji je potrebno promeniti iz +1 u -1 da bi se dobio dijagram čvora K''_0 ;
3. zameniti ovaj presek spletom $(1, -1)$ ili $(1, -1)(1, -1)$. Ovom zamenom dobijaju se dijagram čvora K'_1 ili dijagram linka L'_1 . Između ove dve, izabрати zamenu koja daje čvor;
4. minimizovati dijagrame K'_1 i K''_0 i prepoznati dobijene čvorove K' i K'' .

Tvrdimo da za čvorove K' i K'' važi $d_2(K', K'') = 1$ i da se to s -rastojanje realizuje na dijagramima K'_1 i K''_0 . Dokaz je identičan kao i za tvrdene o rezultatu Algoritma 5.

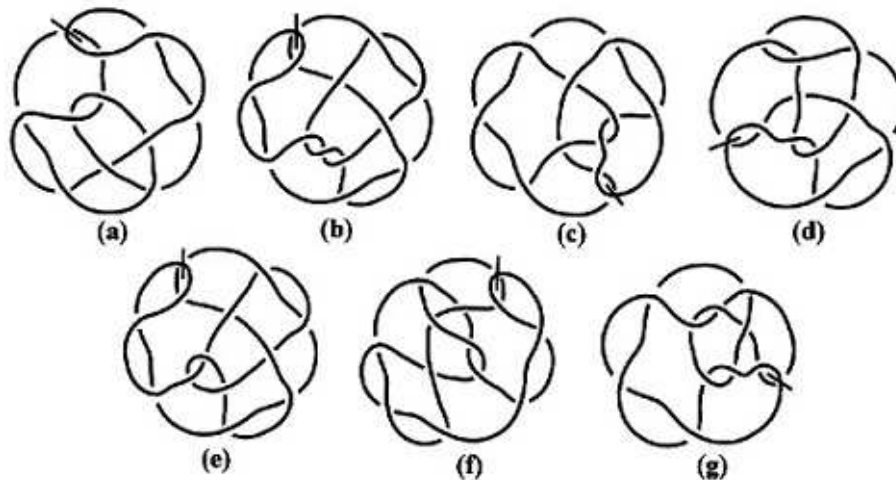
U okviru naših istraživanja implementirana je *Mathematica* funkcija `fSmoothingDistance1` koja primenom dva navedena metoda određuje parove čvorova K_1 i K_2 za koje važi $d_2(K_1, K_2) = 1$, a zatim, zahvaljujući svojstvima Konvejeve notacije, rezultate za pojedinačne parove čvorova proširuje na njihove familije. Navedenom funkcijom određeni su parovi čvorova do $n = 9$ preseka sa s -rastojanjem jednakim 1 i prikazani u tablicama datim kao prilog ovog rada i navedenim u sledećem poglavlju.

Funkcija `fSmoothingDistance1` se može primeniti i za određivanje parova čvorova sa $n > 9$ preseka koji se nalaze na s -rastojanju jednakom 1, bez dodatne modifikacije.

Kao referentne rezultate koristili smo Kanenobuove tablice parova čvorova sa $H(2)$ -rastojanjem jednakim 1 koje sadrže čvorove do $n = 7$ preseka date u ([102], Tables 3-6). U njima je dato 49 parova čvorova sa rastojanjem jednakim 1 od kojih su 4 trivijalna – $\{3_1, 3_1\#3_1\}$, $\{3_1, 3_1\#!3_1\}$, $\{4_1, 3_1\#4_1\}$, $\{3_1\#!3_1, 3_1\#4_1\}$.

Primenom metoda prikazanih u ovom poglavlju, koji se zasnivaju na neminimalnim dijagramima i Konvejevoj notaciji, za ovih 49 parova je potvrđeno rastojanje jednako 1. Pored njih, za još osam parova čvorova sa $n \leq 7$ preseka, za koje nije bilo utvrđeno da li je njihovo rastojanje jednako 1 ili 2, ovim metodama je izračunato da ono iznosi 1.

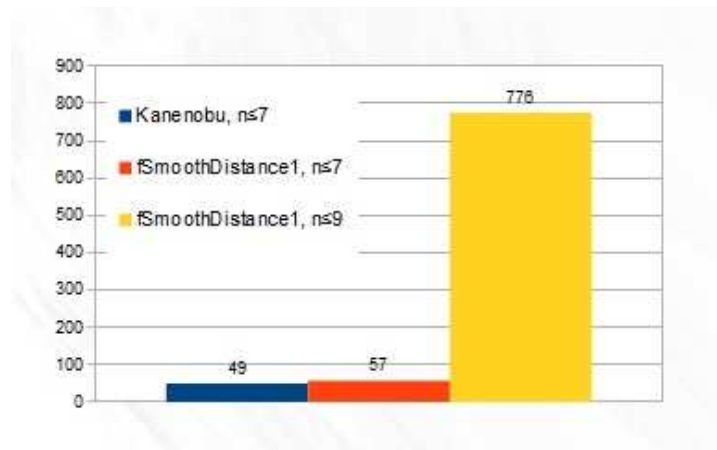
Kanenobu ne navodi opšti metod za određivanje da li se dva čvora nalaze na s -rastojanju 1, već za dva čvora koja se nalaze na s -rastojanju jednakom 1, on to rastojanje dokazuje lepljenjem (uvrnutih) traka na dijagrame tih čvorova (slike Figs. 6-8 u [102]). U njegovom radu nije opisan metod kojim se vrši izbor položaja ovakvih traka, pa nije precizirano na koji način se ovakav metod može primeniti na određivanje parova čvorova sa s -rastojanjem 1, koji imaju više od $n = 7$ preseka. Na pomenutim slikama, koje ilustruju dokaz da se dva čvora K_1 i K_2 nalaze na s -rastojanju jednakom 1, čvor sa većim brojem preseka je uvek prikazan svojim minimalnim dijagramom, pa pretpostavljamo da Kanenobu, prilikom određivanja rastojanja dva čvora u svojim istraživanjima, nije polazio od neminimalnih dijagrama čvorova. U prilog ovoj tvrdnji stoji i činjenica da u njegovim tablicama nedostaju parovi čvorova čija se rastojanja 1 realizuju upravo na neminimalnim dijagramima čvorova. Osam takvih parova je određeno primenom funkcije `fSmoothingDistance1`: $\{5_1, !5_1\}$, $\{5_1, 7_2\}$, $\{5_2, !7_1\}$, $\{6_2, 7_2\}$, $\{6_3, 7_1\}$, $\{7_1, !7_5\}$, $\{7_1, 7_7\}$, $\{7_4, 3_1 \# !3_1\}$. Neminimalni dijagrami prostih čvorova iz ovog skupa, na kojima se realizuje s -rastojanje 1, prikazani su na slici 82.



Slika 82: Parovi čvorova sa potvrđenim s -rastojanjem 1 a) $\{5_1, !5_1\}$; b) $\{5_1, 7_2\}$; c) $\{5_2, !7_1\}$; d) $\{6_2, 7_2\}$; e) $\{6_3, 7_1\}$; f) $\{7_1, !7_5\}$; g) $\{7_1, 7_7\}$

Na grafiku prikazanom na slici 83 prikazani su i upoređeni brojevi parova čvorova koji se nalaze na s -rastojanju jednakom 1 dobijeni metodima predloženim u ovom radu sa dosadašnjim rezultatima. Kao referentne rezultate koristili smo

tablice date u Kanenobuovom radu [102]. Oni su prikazani plavim stubom na grafiku i označeni natpisom "Kanenobu, $n \leq 7$ ", dok su stubovi koji prikazuju rezultate dobijene algoritmima implementiranim za potrebe naših istraživanja obojeni narandžastom i žutom bojom. Kanenobu je dokazao da se 49 parova čvorova sa $n \leq 7$ preseka nalazi na s -rastojanju jednakom 1. Korišćenjem *Mathematica* funkcije `fSmoothingDistance1` u kojoj su implementirani metodi zasnovani na neminimalnim dijagramima i Konvejevoj notaciji, dokazano je da se 57 parova čvorova sa $n \leq 7$ preseka nalaze na s -rastojanju jednakom 1. Ti rezultati su označeni natpisom "fSmoothingDistance1, $n \leq 7$ ". Ista funkcija primenjena je i za određivanje parova čvorova sa $n \leq 9$ preseka koji se nalaze na s -rastojanju jednakom 1 i kao rezultat je dobijeno 776 parova čvorova sa ovom osobinom. Taj rezultat je prikazan na delu grafika označenog natpisom "fSmoothingDistance1, $n \leq 9$ ".



Slika 83: Broj parova čvorova koji se nalaze na s -rastojanju 1

4.3.3 Tablice s -rastojanja čvorova

s -rastojanje ima svojstvo metrike:

1. $d_2(K_1, K_2) = 0$ akko $K_1 = K_2$;
2. $d_2(K_1, K_2) = d_2(K_2, K_1)$;
3. $d_2(K_1, K_2) \leq d_2(K_1, K) + d_2(K, K_2)$, gde je K proizvoljni čvor.

Specijalno, važi

$$d_2(K_1, K_2) \leq u_2(K_1) + u_2(K_2). \quad (39)$$

U opštem slučaju, ukoliko za proizvoljan par čvorova K, K' postoje parovi čvorova $\{K_i, K_{i+1}\}$ za koje važi $d_2(K_i, K_{i+1}) = 1$ ($i = 1, \dots, n$), gde je $K = K_1, K' = K_n$, tada važi:

$$1 \leq d_2(K, K') \leq n - 1 \quad (40)$$

Nejednakost 40, čvorovi sa s -brojem odvezivosti jednakim 1 (određeni primenom metoda opisanih u poglavlju 4.3.1) i ostali parovi čvorova koji se nalaze na s -rastojanju jednakom 1 (određeni primenom metoda opisanih u poglavlju 4.3.2), predstavljaju osnovu za generisanje težinskog grafa dobijenog na isti način kao i graf koji je opisan u poglavlju 3.4.3.

Nejednakost 39 i najkraći put koji povezuje čvorove K_1 i K_2 , dobijen obilaskom navedenog težinskog grafa, predstavljaju gornje granice koje ćemo koristiti pri proceni vrednosti $d_2(K_1, K_2)$.

Donje granice su određivane primenom kriterijuma I-VII datih u ([102], strana 825) koji su rezimirani u poglavlju 4.2 i implementirani u *Mathematica* programu koji se sastoji od niza obstrukcija koje dokazuju da se neki čvorovi ne mogu nalaziti na s -rastojanju 1 (pa im je donja granica rastojanja jednaka 2) i da za neke čvorove K_1 i K_2 važi $d_2(K_1, K_2) = 3$.

Ukoliko se gornja i donja granica s -rastojanja poklapaju, ta vrednost je tačna vrednost rastojanja. Na ovaj način, pored 776 parova čvorova sa s -rastojanjem 1 dobijenih metodima navedenim u prethodnom poglavlju, određeno je 2997 parova sa rastojanjem 2 i 270 parova sa rastojanjem 3. Navedeni rezultati dati su u tablicama s -rastojanja koje se nalaze u prilogu. Ukoliko se gornja i donja granica za neki par čvorova ne poklapaju, tada se u tablicu unosi interval koji one određuju. Za potrebe računarskih programa tablice su sačuvane u obliku lista koje koristi *Mathematica*.

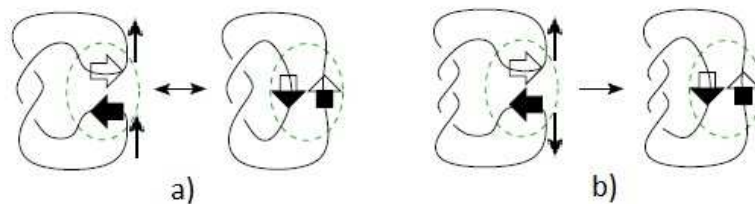
Kompletne proširene tablice s -rastojanja čvorova do $n = 9$ preseka, dobijenih metodima opisanim u ovom radu, mogu se preuzeti sa:

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/SmoothingKnotDistancesZekovic.nb>
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/SmoothingKnotDistancesZekovic.pdf>.

4.4 Rekombinaze

Pored topoizomeraza, rekombinaze čine drugu klasu proteina koje mogu da učvore DNK ili da ga spoje u lanac koji se sastoji od karika (proces katenacije). Rekombinaze su proteini koji raskidaju DNK na dva mesta, a zatim je ponovo zatvaraju tako što spajaju svaki kraj jednog prekida sa krajem drugog prekida. Preciznije, rekombinaze se vezuju za dva različita segmenta DNK, prekidaju oba, a nakon toga spajaju početak prvog segmenta sa krajem drugog i obrnuto. Na taj način vrše razmenu genetskog materijala, čiji rezultat može biti brisanje, umetanje i inverzija segmenta DNK. Na slici 84, koja je preuzeta iz [94], prikazane su moguće akcije rekombinaza na cirkularnoj DNK. Mesto vezivanja rekombinaze prikazano je isprekidanim krugom. Postoje dva načina delovanja rekombinaze u zavisnosti od orijentacije mesta za koje se vezala.

Na slici 84 su debljim strelicama označeni segmenti za koje se rekombinaza vezala i prikazan je način na koji se ovi segmenti spajaju – početak jednog spaja se sa krajem drugog i obratno. Tanjim strelicama je označena orijentacija



Slika 84: (a) Direktno i (b) indirektno ponovljena mesta vezivanja rekombinaza

pružanja sekvenci na čvoru. DNK sekvence za koje se rekombinaza vezala mogu biti direktno ponovljene (npr., – CTTGA – – – CTTGA –) na cirkularnoj DNK kao što je slučaj na slici 84a, ili obrnuto ponovljene (npr., – CTTGA – – – AGTTC –) kao na slici 84b, pri čemu treba obratiti pažnju na orijentaciju krive u odnosu na segmente.

Transformacija prikazana na slici 84 predstavlja zamenu vertikalnog zaravnjivanja horizontalnim, tj. H_2 -potez $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ koji ćemo razmatrati u narednom podpoglavlju.

Kada se radi o direktnom ponavljanju, tada rekombinaza deli cirkularnu DNK na dve komponente. Ova akcija odgovara *brisanju* – sekvenca DNK se odvojila od originalne cirkularne DNK. Ovaj proces je prikazan na slici 84a, ako se ona posmatra sa leva na desno. Ukoliko sliku posmatramo sa desna na levo, uočavamo da rekombinaza, ukoliko se veže za dva molekula DNK, može spojiti te dve komponente DNK i kao rezultat dovesti do *umetanja* jednog segmenta DNK u drugi. Na ovaj način se virusna DNK može ubaciti u DNK domaćina.

Kada je rekombinaza vezana za dve obrnuto ponovljene sekvence, kao na slici 84b, tada se njenim delovanjem menja sekvenca DNK. Jedan od dva segmenta ograničenih prekidima, koje je napravila topoizomeraza, nakon ponovnog spajanja se obrće u odnosu na označenu orijentaciju čvora. Ovaj proces se naziva *inverzija* DNK i on za posledicu može imati promenu ekspresije gena.

Farmaceutska industrija je u poslednje vreme veoma zainteresovana za genetski modifikovane organizme i testiranja da li neka mutacija u određenom genu vodi do bolesti [96]. Rekombinaze predstavljaju alat za preciznu manipulaciju na DNK pa su one jedna od glavnih tema takvih istraživanja. Pošto nije moguće predvideti ponašanje DNK primenom samo bioloških nauka, matematički modeli mogu biti od velike koristi za predviđanje topologije DNK.

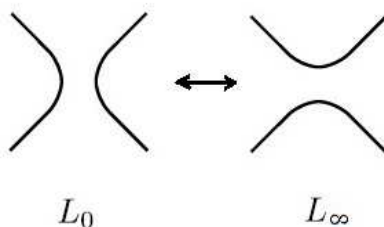
Model akcije rekombinaze, prikazan na slici 84, ekvivalentan je $H(2)$ -pokretu koji ne čuva broj komponentata čvora ili linka [54]. Za svaki neorijentisani $H(2)$ pokret postoji neorijentisano zaravnjivanje preseka koje daje ekvivalentan čvor kao rezultat. Zbog toga, za izučavanje svih akcija topoizomeraza može se koristiti neorijentisano zaravnjivanje. Za izučavanje inverzije, dovoljno je koristiti orijentisano zaravnjivanje.

Tabela sa čvorovima, koji imaju s -broj odvezivosti jednak 1, priložena u ovom radu, daje sve DNK čvorove koji se mogu odvezati jednom akcijom topoizomeraze. Slično kao i u slučaju topoizomeraza, tabele s -rastojanja čvorova,

priložene u ovom radu, mogu poslužiti za ocenu koliko puta topoizomeraza treba da izvrši akciju nad jednim čvorom DNK da bi ga prevela u drugi, u cilju predviđanja formiranja kritičnog genetskog materijala, sprečavanja njegovog nastanka i ubrzavanja poželjnih promena na DNK.

4.5 Odvezivanje pomoću operacije $L_0 \leftrightarrow L_\infty$

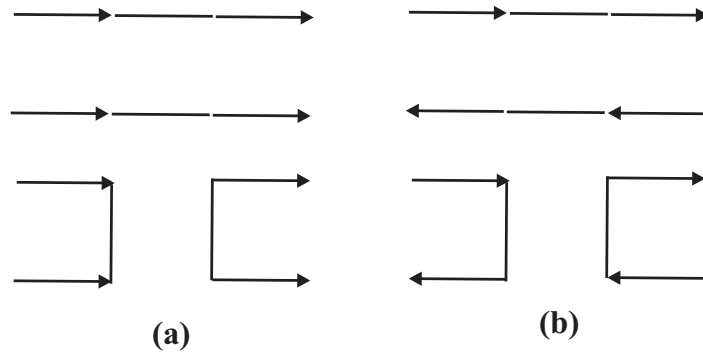
Na slici 84 prikazana je operacija koju vrše rekombinaze na DNK. Za razliku od svih do sada razmatranih odvezujućih operacija: promene preseka ili zaravnjivanja, koje su primenjivane na preseke, ova operacija se primenjuje na regione. Navedena operacija predstavlja zamenu jednog zaravnjivanja drugim (slika 85).



Slika 85: $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ pokret

U odnosu na dvostrana ogledala (markere), koje, prilikom zaravnjivanja uvodimo u nekom preseku c , to znači da jedan marker rotiramo za 90° , dok svi ostali preseki ostaju neizmenjeni. Pošto prilikom svih zaravnjivanja markere brišemo sa dijagrama, to znači da na dijagramu ostaju samo "uspomene" na markere, tj. "preseki" L_∞ ili L_0 , koje samo uslovno možemo nazvati presecima, pošto se na dijagramima, dobijenim nakon zaravnjivanja i brisanja markera, nikakva informacija o bivšem (zaravnjenom) preseku ne čuva. U principu, ovakvu operaciju možemo izvršiti na bilo kom delu datog linka L koji predstavlja neku oblast ravni određenom senkom linka L . U tom slučaju biramo podoblast ove oblasti koja predstavlja splet L_0 ili L_∞ , tj. disk koji sadrži dve paralelne niti sa četiri slobodna kraja koji izlaze iz diska. Pomenuti disk zvaćemo *aktivnim regionom* i označavaćemo ga isprekidanom linijom kao na slici 84. Problem $H(2)$ odvezivanja rešavamo tako što u aktivni region uvodimo novi presek c , a zatim posmatramo šta se dešava kada u tom preseku izvršimo oba zaravnjivanja. Nakon tih zaravnjivanja dobijamo čvorove ili linkove L_1 i L_2 , koji su tada povezani $H(2)$ -pokretom u preseku c .

Ukoliko radimo sa orijentisanim linkovima, naredna stvar koja nas interesuje je orijentacija niti koje pripadaju aktivnom regionu, koja može biti *paralelna* ili *antiparalelna*. Transformacija koju vršimo biće kompatibilna sa orijentacijom linka L samo u slučaju antiparalelne orijentacije niti u aktivnom regionu (slika 86). Da bismo izbegli probleme na koje nailazimo podelom regiona na osnovu orijentacije pripadnih niti, radićemo isključivo sa neorijentisanim linkovima.



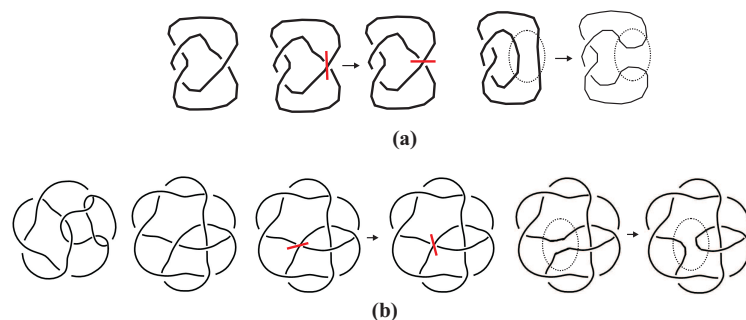
Slika 86: (a) Paralelna i (b) antiparalelna orijentacija niti

U radu [54], nakon uvođenja $H(2)$ -pokreta koji ne čuvaju broj komponenta, dokazano je da za svaki neorijentisani $H(2)$ -pokret postoji neorijentisano zaravnjivanje preseka koje daje ekvivalentan čvor kao rezultat i da operacija $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ predstavlja odvezujuću operaciju, tj. da za svaki neorijentisani link L postoji konačan broj $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ poteza koji ga transformišu u nečvor. Slike 84a i 84b, posmatrane sa desna na levo, predstavljaju odvezivanje Hopfovog linka 2_1^2 i čvora trolisnika, redom.

Odvezivanje Hopfovog linka prikazano je na slici 87. Vršni se uvođenjem preseka umesto aktivnog regiona koji kao rezultat daje čvor 3_1 . Pomoću neorijentisanih zaravnjivanja dobijamo Hopfov link 2_1^2 i nečvor. Prema tome, Hopfov link ima $H(2)$ broj odvezivosti jednak 1 i realizuje se uz pomoć minimalnog dijagrama čvora 3_1 koji ovde služi kao posrednik. Istu takvu ulogu posrednika mogao je da odigra nečvor $(1, 1, -1)$ i neorijentisana zaravnjivanja u njegovom preseku -1 .

Nešto složeniji primer predstavlja odvezivanje čvora $7_6 = 2212$ pomoću jednog $H(2)$ -poteza, pri čemu kao posrednik služi nealternirajući link $9_{57}^2 = (3, -2)(2, 2)$ dat svojim minimalnim dijagramom $6^* - 3.20.1.1.1.1$. Zaravnjivanja u prvom preseku 1 daju čvor 7_6 i nelink. Ovo odvezivanje prikazano je na slici 87b. Nakon što u ovom linku nađemo presek u kome kao rezultate zaravnjivanja dobijamo čvor 7_6 i nelink, splet koji sadrži samo ovaj presek pretvaramo u aktivni region i time dobijamo traženi rezultat.

Pošto operacija $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ predstavlja odvezujuću operaciju, javlja se standardni problem izračunavanja odgovarajućeg $H(2)$ -broja odvezivosti neorijentisanog linka L , koji će predstavljati minimum brojeva odvezivosti uzet po svim dijagramima linka L . Više o načinu određivanja ovog broja odvezivosti biće razmatrano u sedmom poglavlju.



Slika 87: (a) Odvezivanje Hopfovog linka 2_1^2 ; (b) odvezivanje čvora 7_6

5 Izvođenje čvorova u Konvejevoj notaciji

Džon Konvej je u svom radu *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties* [33] objavljenom 1969. god. uveo Konvejevu notaciju čvorova i linkova i izveo u ovoj notaciji tablice čvorova do $n = 11$ preseka i linkova do $n = 10$ preseka.

Jedina knjiga koja sadrži tablice čvorova i linkova i pored klasične notacije koristi i Konvejevu notaciju je knjiga D. Rolfsena *Knots and Links* (1976) [35]. U ovoj knjizi date su tablice svih čvorova do $n = 10$ preseka i linkova do $n = 9$ preseka.

Najznačajniji rad koji proširuje Konvejeve rezultate i daje izvođenje čvorova i linkova u Konvejevoj notaciji: algebarskih čvorova i linkova do $n = 13$ preseka, svih čvorova i linkova do $n = 10$ preseka i poliedarskih alternirajućih čvorova i linkova do $n = 11$ preseka je rad A. Kaudrona (*A. Caudron*) *Classification des noeuds et des enlacements* [37] objavljen 1982. godine. Fundamentalni značaj ovog rada, teksta od preko 360 strana, koji je objavio Univerzitet u Orseju, nije samo proširenje tablica čvorova i linkova, već uvođenje i tumačenje novog originalnog pristupa njihovom izvođenju i klasifikacija na "sve-tove" (racionalni, stelarni, arborescentni, poliedarski...), zasnovana na teoriji grafova, koja omogućava izgradnju "periodnog sistema" čvorova i linkova. Naime, ako analiziramo sve prethodne tablice čvorova (pri čemu se tablice linkova uopšte ne javljaju) veoma je teško uočiti ikakav klasifikacioni princip, izuzev činjenice da alternirajući čvorovi prethode nealternirajućim, da se na početku tablica nalaze racionalni čvorovi (uz izvesne izuzetke, npr. u slučaju čvorova 8_5 , 8_{10} itd.) i da se bazični poliedri nalaze na kraju delova tablica koji sadrže alternirajuće čvorove (sa izuzetkom čvora $9_{40} = 9^*$ koji prethodi poliedarskom čvoru $9_{41} = 20 : 20 : 20$). Odgovor na fundamentalno pitanje popularno na Internetu: "Postoji li periodni sistem za čvorove?" [38] nudi upravo ovaj Kaudronov rad.

Svi čvorovi i linkovi dati u Konvejevoj notaciji u Konvejevom i Kaudronovom radu izvedeni su ručno i upoređivani sa tada jedinim postojećim tablicama koje

potiču sa kraja XIX veka i koje su izveli Tejt, Kirkman i Litl. I pored toga, u Konvejevim tablicama čvorova javljaju se greške: čuveni Perkov par čvorova 10_{161} i 10_{162} ponovljen i u prvom izdanju Rolfsenove knjige, koji zapravo predstavlja dva razna minimalna dijagrama jednog istog nealternirajućeg čvora. Ovu grešku uočio je K. Perko [39].

Mada je u uvodu svog rada Konvej napomenuo da je njegova notacija izuzetno povoljna za računarsku uporebu, prvenstveno zahvaljujući svojoj konciznosti, ona ostaje gotovo neprihvaćena u teoriji čvorova sve do današnjeg dana. Primarni razlog za to je verovatno notacija poliedarskih čvorova i linkova koja se zasniva na bazi podataka o bazičnim poliedrima i veoma je neprikladna za upotrebu (u poređenju, sa npr. DT notacijom koja je samo-dovoljna).

Konvejeva notacija proširena je u programu *LinKnot* na sve čvorove i linkove do $n = 12$ preseka i na različite klase čvorova i linkova (racionalne, Montesinos), bez ograničenja za broj preseka. Pored toga, zahvaljujući bazi podataka za bazične poliedre koja sadrži 83178 bazičnih poliedrara do $n = 20$ preseka, omogućen je rad sa svim poliedarskim čvorovima i linkovima koji se mogu dobiti iz ovih bazičnih poliedara bez ograničenja za broj preseka.

Izvođenje čvorova sa $n \leq 16$ preseka u Dovkerovoj notaciji (ili Dovker-Tistltvejtovoj, tj. DT notaciji) izvedeno je korišćenjem računarskog programa *KnotScape* [70] i opisano u radu [10]. Generisanje alternirajućih čvorova sa $n \leq 16$ preseka u programu *KnotScape* izvršeno je primenom narednog algoritma.

ALGORITAM 7

1. Neka je P_n skup svih permutacija brojeva $\{1, 2, \dots, n\}$. Generisati skup P_n ;
2. Neka je $dowk : \{n_{n_1}, n_{n_2}, \dots, n_{n_n}\} \rightarrow \{\{n\}, \{n_{n_1}, n_{n_2}, \dots, n_{n_n}\}\}$ preslikavanje iz P_n u D_n gde je D_n skup DT kodova. Generisati skup D_n preslikavanjem svake permutacije $p \in P_n$;
3. Iz skupa D_n izbaciti sve DT kodove koji su nerealizabilni;
4. Minimizovati svaki DT kôd;
5. Izbaciti ponovljene DT kodove.

Rezultat navedenog algoritma je skup D_n koji se sastoji od svih alternirajućih čvorova sa n preseka. Zbog velikog broja nerealizabilnih DT kodova ovakav metod generisanja čvorova se može smatrati prilično neefikasnim. Ukoliko se ovaj metod koristi za generisanje čvorova sa 13 preseka, za svaki "ispravan" čvor potrebno je u proseku generisati više od 620000 potencijalnih DT kodova. Prednost ovog algoritma je u tome što minimalni DT kodovi jedinstveno određuju neki čvor, pa pošto je algoritam iscrpljujući, on garantuje da će njegovom primenom biti generisana baza čvorova u kojoj nijedan čvor neće nedostajati, niti će biti ponovljenih alternirajućih čvorova.

Znatno teži problem predstavlja generisanje nealternirajućih čvorova koji se dobijanju iz alternirajućih promenom preseka. U tom slučaju gruba (neoptimizovana) varijanta algoritma za izvođenje nealternirajućih čvorova glasi:

ALGORITAM 8

1. Neka je D minimalni DT kôd nekog alternirajućeg čvora sa n preseka. U ovom kodu vršimo promenu znaka u svakom pojedinačnom preseku. Kao rezultat dobijamo 2^n novih dijagrama ²;
2. Računamo različite invarijante svakog od dobijenih dijagrama i testiramo da li se čvor koji odgovara tom dijagramu već nalazi u listi L svih čvorova sa n ili manje preseka koji su prethodno dobijeni;
3. Ako se ovaj čvor ne nalazi u pomenutoj listi L , smeštamo ga u listu L i nastavljam ovakav rekursivni postupak sa svim alternirajućim čvorovima sa n preseka.

Veliku olakšicu pri izvođenju nealternirajućih čvorova u programu *KnotScape* omogućio je heuristički program *KnotFind* koji na osnovu 12 različitih poteza, birajući u svakom koraku optimalnu strategiju, minimizuje dati DT kôd nealternirajućeg dijagrama. Primenom ovog progama izbegnuta je kompletna rekurzija, pošto nakon minimizacije direktno izdvajamo minimalne dijagrame nealternirajućih čvorova sa n preseka i upoređujemo ih isključivo sa već izvedenim nealternirajućim čvorovima sa n preseka.

S obzirom da se radi o heurističkom programu, u cilju eliminacije duplikata, potrebna je dvostruka provera dobijenih rezultata. Ona se vrši izračunavanjem različitih invarijanata nealternirajućih čvorova, posebno hiperboličkih invarijanata. Određivanje hiperboličkih invarijanata omogućava program *Snappea* J. Viksa (J. Weeks) koji je uključen u distribuciju programa *KnotScape*. Pored toga, minimizaciju svakog nealternirajućeg čvora sa $15 \leq n \leq 16$ preseka *KnotScape* proverava u listi duplikata koja je deo programa. Detaljan opis izvođenja 1 701 936 čvorova koji je ostvaren pomoću programa *KnotScape*, dat je u radu *The first 1,701,936 knots* čiji su autori Dž. Hoste, M. Tistltvejt i Dž. Viks [10]. Pošto je od ovog izvođenja ostvarenog pomoću tadašnjeg najbržeg računara "Krej" (Cray), prošlo više od 30 godina, o današnjem stanju stvari najbolje govore reči M. Tistltvejta: "When generating knots now, I'm content to get a raw list with appreciable redundancy, and then use hyperbolic geometry to eliminate (nearly all) duplicates." ("Ako se prilikom izvođenja čvorova može dobiti sirova lista čvorova sa dosta duplikata, iz koje je primenom hiperboličke geometrije moguće izbaciti skoro sve duplikate, tada sam zadovoljan.") [12]. Kompletan osvrt na izvođenje čvorova i linkova dat je u radu *The enumeration and classification of knots and links* [11]. Interesantno je da su nakon 30 godina rezultati izvođenja čvorova poboljšani samo u odnosu na alternirajuće čvorove koje su S. Rankin, O. Flint i Dž. Šerman (J. Schermann) izveli do $n = 22$ preseka [15, 16].

U ovom poglavlju prikazaćemo nove metode izvođenja čvorova u Konvejevoj notaciji, čiji je cilj proširenje tablica čvorova prikazanih u Konvejevoj notaciji na sve čvorove sa $n = 13$ preseka i alternirajuće čvorove sa $n = 14$ preseka. Za

²Ukoliko nismo zainteresovani za razlikovanje čvorova i njihovih slika u ogledalu, dovoljno je izvršiti $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ promena preseka.

proveru dobijenih rezultata korišćeno je prevođenje Konvejevih simbola izvedenih čvorova u minimalne DT kodove i upoređivanje ovih rezultata sa postojećim *KnotScape* tablicama.

Drugi cilj u ovom poglavlju je konstrukcija *konciznih tablica čvorova i linkova* datih u Konvejevoj notaciji. Naime, korišćenjem *C*-linkova, koje ćemo uvesti u ovom poglavlju, bićemo u mogućnosti da kompletne liste čvorova i linkova, datih u Konvejevoj notaciji, zamenimo konciznim listama koje su u proseku bar tri puta kraće od kompletnih lista. Na primer, kompletna lista čvorova i linkova sa $n = 9$ preseka sadrži 96 alternirajućih i 36 nealternirajućih čvorova i linkova, tj. ukupno 132. Ako koristimo *C*-linkove, koncizne tablice će sadržati samo 24 alternirajuća i 11 nealternirajućih, dakle ukupno 35 *C*-linkova. U ovom poglavlju ograničićemo se samo na koncizne tablice alternirajućih čvorova sa $3 \leq n \leq 14$ preseka.

U tablicama čvorova datih DT kodovima kao reprezent svakog čvora u tablicama nalazi se njegov minimalni DT kôd. To znači da su za svaki čvor do $n \leq 16$ preseka izračunati minimalni (u leksikografskom smislu) DT kodovi svih njegovih minimalnih dijagrama i onda određen minimalni (prvi u leksikografskom poretku) među ovim kodovima. U slučaju alternirajućih čvorova, svi minimalni dijagrami nekog čvora mogu se dobiti pomoću flipova (flypes) iz bilo kog minimalnog dijagrama, tj., u skladu sa Tejtovom Flip-Teoremom, pripadaju istoj flip-klasi ekvivalencije, dok minimalni dijagrami nealternirajućeg čvora mogu pripadati različitim flip-klasama ekvivalencije. Na primer, alternirajući čvor 9_7 (slika 88) je u tablicama dat minimalnim DT kodom $\{\{9\}, \{4, 12, 16, 18, 14, 2, 10, 8, 6\}\}$.

U postojećim tablicama čvorova u Konvejevoj notaciji čvorovi su označeni kanonskim Konvejevim simbolima. Konvejev simbol minimalnog dijagrama nazivamo *kanonskim* ako sadrži minimalni broj celobrojnih spletova, pri čemu je svaki takav celobrojni splet maksimalne dužine (mini-max princip). Pri tome, izbor vršimo među svim flip-ekvivalentnim Konvejevim simbolima tog dijagrama. Neka je dat proizvod pq dva celobrojna spleta p i q ($p \geq 2, q \geq 2$). U tom slučaju, zahvaljujući flipovanju, splet pq može se prikazati u obliku: $(p, 1, 1, \dots, 1), (1, p, 1, \dots, 1), \dots, (1, 1, 1, \dots, p)$, pri čemu se u svakom nizu 1 javlja q puta. Između svih ovih prikaza određujemo se za prvi od njih. Isti takav postupak primenjujemo na proizvod bilo kog racionalnog spleta t i celobrojnog spleta q . Kanonski simbol nekog alternirajućeg dijagrama dobijamo tako što navedeni postupak primenjujemo rekursivno na sve spletove koji sadrže operaciju proizvoda.

U slučaju alternirajućih algebarskih čvorova, izbor kanonskog Konvejevog simbola je jednoznačan. U slučaju poliedarskih alternirajućih čvorova, određujemo se za "standardne" Konvejeve simbole, gde pod pojmom "standardni" podrazumevamo simbole korišćene u Konvejevom radu [33] i Rolfsenovoj knjizi [35]. Za sve nealgebarske (poliedarske) čvorove sa većim brojem preseka "standardnim" ćemo smatrati Konvejeve simbole dobijene na osnovu analogije sa "standardnim" Konvejevim simbolima čvorova sa manjim brojem preseka navedenim u pomenutom radu i knjizi.

U slučaju nealternirajućih čvorova, svakoj flip-klasi ekvivalencije odgovara

jedan kanonski Konvejev simbol. U tom slučaju, birajući Konvejev simbol nekog nealternirajućeg čvora, određujemo se za jedan kanonski simbol na osnovu sledećih kriterijuma:

1. Ako neki nealternirajući čvor poseduje nekoliko kanonskih simbola među kojima se javljaju algebarski i nealgebarski simboli, određujemo se za neki od algebarskih simbola. U protivnom, biramo nealgebarski (poliedarski) simbol koji ne sadrži izolovane negativne preseke (pojedinačne preseke -1 u okviru bazičnog poliedra);
2. Među algebarskim simbolima određujemo se za "standardne" simbole (npr., u slučaju Konvejevih simbola $(3, 3, -2)$, $(3, -2 - 1, 2)$, $(-2 - 1, 3, 2)$ i $(3, 3, 2-)$, koji predstavljaju isti nealternirajući čvor 8_{19} , određujemo se za poslednji simbol kojim je ovaj čvor označen u Konvejevom radu [33] i Rolfsenovoj knjizi [35]). Za nealternirajuće čvorove sa većim brojem preseka "standardnim" ćemo i dalje smatrati Konvejeve simbole dobijene na osnovu analogije sa "standardnim" Konvejevim simbolima čvorova sa manjim brojem preseka navedenim u pomenutom radu i knjizi;
3. U slučaju poliedarskih nealternirajućih čvorova (tj. nealternirajućih čvorova koji nemaju ni jednu minimalnu algebarsku reprezentaciju), koristimo sličnu analogiju sa "standardnim" Konvejevim simbolima poliedarskih čvorova sa manjim brojem preseka.

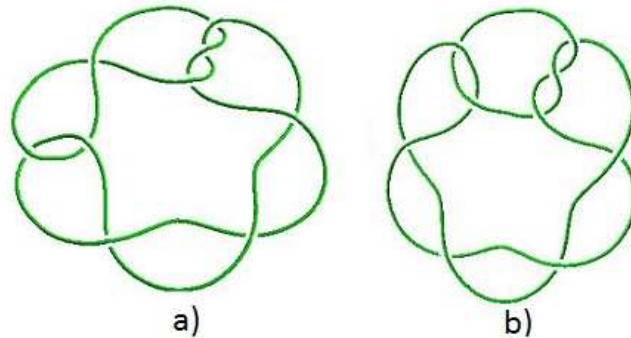
I pored uvedenih kriterijuma, moramo priznati da ne postoje jedinstveni kriterijumi koji bi obezbedili jednoznačnost Konvejeve notacije.

Kod minimalnih DT kodova navedeni princip kanoničnosti ne mora biti zadovoljen, pa zbog toga minimalni DT kôd nekog čvora u opštem slučaju ne odgovara kanonskom Konvejevom simbolu tog čvora, pošto je biran isključivo na osnovu leksikografskog poretka. Na slici 88a prikazan je dijagram čvora 9_7 koji odgovara njegovom minimalnom DT kodu. Čvor 9_7 je alternirajući, pa odatle sledi da su svi njegovi minimalni dijagrami flip ekvivalentni, tj. svaki drugi minimalni dijagram možemo dobiti iz dijagrama sa slike 88a koristeći flip poteze. Takav je i dijagram na slici 88b koji odgovara kanonskom Konvejevom simbolu 342 čvora 9_7 .

Algoritam za konverziju minimalnog DT koda u kanonsku Konvejevu notaciju još uvek ne postoji i zbog toga nije moguće iskoristiti postojeće tablice čvorova u DT notaciji (koje obuhvataju čvorove sa $n \leq 16$ preseka) za proširivanje tablica čvorova u Konvejevoj notaciji (koje za sada obuhvataju samo čvorove sa $n \leq 12$ preseka). U ovom poglavlju predložićemo metode izvođenja čvorova u Konvejevoj notaciji koji su nezavisni od postojećih tablica čvorova u DT notaciji, dok će se prepoznavanje izvedenih čvorova vršiti pomoću minimalnih DT kodova.

Glavne prednosti Konvejeve notacije u odnosu na druge notacije su:

- Konvejeva notacija je jedina simbolička notacija dok su ostale (Gausova notacija, DT-kodovi, PD-notacija, itd.) samo različiti načini kodiranja;



Slika 88: (a) Dijagram koji odgovara minimalnom DT kodu $\{\{9\}, \{4, 12, 16, 18, 14, 2, 10, 8, 6\}\}$ čvora 9_7 ; (b) dijagram koji odgovara kanonskom Konvejevom simbolu $3\ 4\ 2$ čvora 9_7

- Primenom Konevejeve notacije moguće je napraviti podelu čvorova i linkova na osnovu njihovih topoloških/algebarskih/graf-teorijskih osobina u dobro definisane klase čvorova i linkova kao što su racionalni, Montezinosovi, algebarski, poledarski, itd.;
- Neke transformacije čvorova i linkova (kao što su promena preseka, zaravnjivanje preseka, flipovanje, itd.), mogu se primeniti na (celobrojne) spletove, a ne samo na pojedinačne preseke.

Svi metodi koji predstavljaju doprinos ovog istraživanja i izloženi su u prethodnim poglavljima, zasnivaju se na svojstvima Konvejeve notacije. Osvrnuvši se na bogatstvo topoloških svojstava čvora na koje ukazuje Konvejeva notacija, smatramo da je ona nepravedno zapostavljena u dosadašnjim istraživanja u teoriji čvorova. Primena većine metoda u teoriji čvorova zavisi od baze čvorova na koju se oslanja i zbog toga verujemo da bi važan podsticaj daljoj upotrebi Konvejeve notacije i metoda koji se na njoj zasnivaju, predstavljalo proširivanje postojeće baze čvorova u Konvejevoj notaciji. Ovo poglavlje se može smatrati svojevrsnim vidom zahvalnosti Džonu Konveju na notaciji koju je uveo u radu [33] zahvaljujući kojoj smo dobili veliki broj novih rezultata.

U ovom poglavlju biće predloženi metodi za izvođenje novih čvorova u Konvejevoj notaciji i generisane tablice svih čvorova sa $n = 13$ preseka (ukupno 9988 čvorova) i svih alternirajućih čvorova sa $n = 14$ preseka (ukupno 19536 čvorova). Zbog nedostatka adekvatnog obrasca u formiranju dosadašnjih tablica čvorova, u ovom poglavlju biće predložen metod za klasifikaciju čvorova u tablicama. Navedeni metod primenjen je za kreiranje naših tablica čvorova u Konvejevoj notaciji do $n = 14$ preseka koje će biti priložene uz ovaj rad.

Postupci generisanja novih čvorova u Konvejevoj notaciji biće opisani na primeru čvorova sa $n = 13$ preseka.

5.1 Metod izvođenja proširivanjem C -linkova

U ovom poglavlju predlažemo metod za izvođenje čvorova koji koristi bazu C -linkova (videti definiciju 34) i ukupno tri operatora: $GENKL$, $CROSS^-$ i D . Proces izvođenja se sastoji od dve faze, a obe faze se sastoje iz dva dela: "generisanja" i "prepoznavanja". Prva faza se sastoji iz generisanja alternirajućih čvorova primenom operatora $GENKL$ nad bazom C -linkova, a zatim njihovog prepoznavanja primenom operatora D , dok se u narednoj fazi operator $CROSS^-$ primenjuje nad generisanim alternirajućim čvorovima i na taj način se dobijaju preostali (nealternirajući) čvorovi sa datim brojem preseka, koji se zatim prepoznaju ponovo primenom operatora D .

Definicija 34 *Dijagram C koji se dobija nakon što se u dijagramu čvora ili linka svi pozitivni R -spletovi zamene spletom 2, a negativni R -spletovi zamene spletom -2, naziva se Kaudronov link dijagram, tj. C -link dijagram.*

Neophodno je uočiti razliku između C -linkova koji su uvedeni u ovom istraživanju i osnovnih linkova (eng. *source links*). Osnovni linkovi su specijalni slučaj C -linkova kod kojih se umesto R -spletova zamenjuju celobrojni spletovi. Dakle C -link je čvor ili link čiji su svi celobrojni spletovi dužine 2 ili 1, tj. čvor ili link dat Konvejevim simbolom koji sadrži u svom zapisu samo celobrojne spleteve 1, -1, 2, ili -2. Na primer, svi racionalni čvorovi i linkovi biće predstavljeni C -linkom 2, svi alternirajući Montezinosovi čvorovi i linkovi sa tri racionalna spleta C -linkom 2,2,2, svi nealternirajući Montezinosovi čvorovi i linkovi sa tri racionalna spleta (do na sliku u ogledalu) pomoću C -linka, 2,2,-2, itd.

C -link određuje strukturu krajnjeg čvora ili linka. *Krajnji čvor ili link se dobija iz C -linka zamenom splotova 2 polaznog C -linka proizvoljnim pozitivnim R -spletovima i zamenom splotova -2 polaznog C -linka proizvoljnim negativnim R -spletovima. Ovakav proces naziva se proširenje linka C .*

Tako se, na primer, iz C -linka 2, 2, 2 mogu izvesti čvorovi (7, 3, 3), (3 1 1 1, 3 1, 3) i (4 2 1, 2 2, 2) sa $n = 13$ preseka, dok su čvorovi sa $n = 13$ preseka (2, 2 2) 1 (2, 2 2) i (2 2 1, 2) 1 (3, 2) izvedeni iz C -linka (2, 2) 1 (2, 2).

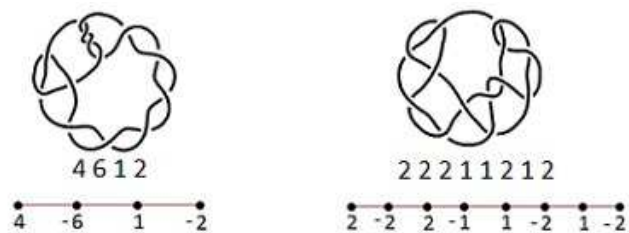
Nameće se pitanje: na koji način generisati bazu C -linkova?

5.1.1 C -linkovi

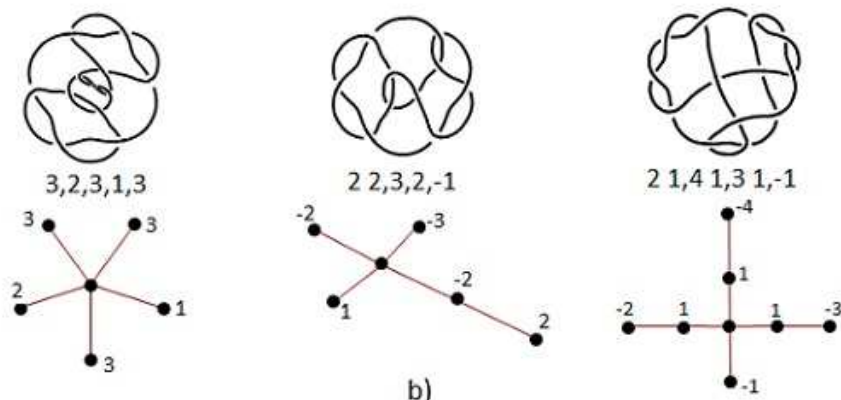
Na osnovu definicije C -linka, sledi da je za generisanje svih racionalnih čvorova dovoljan samo C -link 2. Sa druge strane, za izvođenje Montezinosovih čvorova sa $n = 13$ preseka, nije dovoljan jedan C -link, već se oni mogu izvoditi iz C -linkova (2, 2, 2), (2, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 2, 2), itd. Arborescentni čvorovi (čvorovi koji se dobijaju proizvodom splotova nastalih razgranavanjem) mogu se izvoditi iz C -linkova (2, 2) (2, 2) i (2, 2, 2) (2, 2, 2), ali i mnogih drugih, pa se nameće pitanje koji od njih su neophodni i postoji li garancija da je odgovarajući skup C -linkova dovoljan za generisanje svih čvorova sa datim brojem preseka.

Za generisanje baze C -linkova oslonićemo se na pristup koji je opisao Kaudron u radu [37]. U tom radu Kaudron uvodi grafovske prezentacije klasa

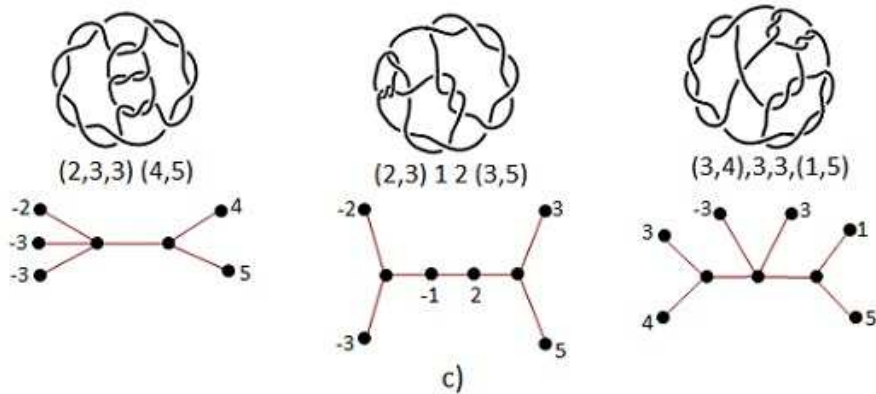
čvorova koji su nam predstavljali osnovnu inspiraciju za uvođenje pojma C -linka. Za opisivanje algebarskih čvorova Kaudron je koristio drveće. Grafovske prezentacije nealgebarskih (poliedarskih) čvorova neće biti predmet razmatranja ovog rada, budući da već posedujemo odgovarajuću bazu osnovnih linkova za poliedre (a C -linkovi se jednostavnim algoritmom mogu dobiti iz postojećih osnovnih linkova), ali smatramo da se predloženi metodi mogu, uz neznatnu modifikaciju, primeniti i za generisanje C -linkova za poliedarske čvorove na osnovu njihovih grafovskih prezentacija.



a)



b)



c)

Slika 89: Grafovski prikaz (a) racionalnih; (b) Montesinosovih; (c) arborescentnih čvorova

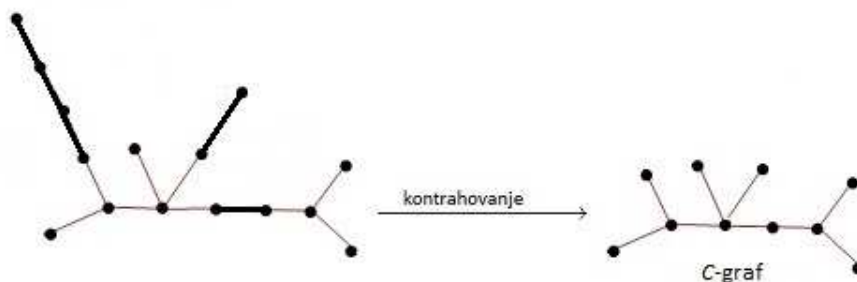
S obzirom na oblast kojom se prevenstveno bavimo, umesto termina *čvor grafa* u ovom poglavlju korišćićemo termin *teme grafa* radi lakšeg praćenja izlaganja.

Racionalne čvorove Kaudron opisuje prostim grafovima, 1-drvetom (drvo u kojem svaki roditelj može imati samo jednog potomka). Montezinosove čvorove ("stelarne", tj. zvezdaste) opisuje "zvezdastim" grafovima, drvetima sa centralnim temenom koje se identifikuje sa operacijom ramifikacije (zarez). Za arborescentne (razgranate) čvorove koristi razgranatu strukturu koja čini kompoziciju prethodne dve. Na slici 89 je dat primer grafovskih prezentacija nekih racionalnih, Motenzinosovih i arborescentnih čvorova.

Kaudronove grafovske prezentacije su nam poslužile kao inspiracija za generisanje baze C -linkova na sledeći način. Neka je K_C klasa čvorova koji se mogu dobiti proširivanjem datog C -linka C . Ako C posmatramo kao predstavnika klase K_C , tada treba da definišemo takve grafove G koji mogu biti predstavnici klase grafova K_G , tj. poslužiti nam za generisanje drugih grafova.

Ako C -link posmatramo kao predstavnika klase čvorova koji se mogu dobiti njegovim proširivanjem, treba da definišemo takve grafove koji mogu biti predstavnici klase i poslužiti nam za generisanje drugih grafova.

Definicija 35 *Stepen temena t grafa $G = (V, E)$ je jednak broju ivica koje mu pripadaju. Racionalnom spletnom granom zovemo povezan podgraf G' grafa G koji se sastoji od onih ivica grafa G čija oba temena imaju stepen manji ili jednak 2 i njihovih temena.*



Slika 90: Sažimanje grafa do C -grafa

Definicija 36 *Graf G zovemo C -grafom ako ne sadrži ivicu čija oba temena imaju stepen manji ili jednak 2.*

Drugim rečima, C -graf je graf koji ne sadrži racionalnu spletnu granu.

Definicija 37 *Sažimanjem grafa do C -grafa nazivamo proceduru uklanjanja svih njegovih racionalnih spletnih grana (videti sliku 90).*

Neka je dat čvor K i neka njemu odgovara Kaudronov grafovski prikaz G . Sažimanje čvora K do njegovog C -linka je zamena svih njegovih pozitivnih R -spletova spletom 2 i negativnih R -spletova spletom -2 . Kontrahovanje grafa G

do C -grafa G_0 odgovara sažimanju čvora K do njemu odgovarajućeg C -linka K_0 , tj. čvoru K_0 odgovaraće Kaudronov C -graf G_0 . Proces kontrahovanja grafa nazivamo još i kolabiranjem grafa. Kako se po Kaudronu svaki čvor K može prikazati grafom, a C -link čvora K može prikazati C -grafom, za generisanje baze C -linkova iskoristićemo C -grafove (tj. kolabirane grafove) drveta.

Ovaj proces započinje generisanjem svih neizomorfni drveta sa datim brojem temena, koja se zatim kontrahuju. Za ovu priliku implementirana je *Mathematica* funkcija `TreeContraction` koja vrši kontrahovanje drveta i generisanje skupa neizomorfni C -grafova. Pokazuje se da je za generisanje algebarskih čvorova do $n = 13$ preseka dovoljno koristiti polazna drveta do $n = 9$ temena.

Veličina C -linka je broj spletova od kojih se C -link sastoji (npr. veličina C -linka $(2, 2)1(-2, 2)$ je 5). Primenom funkcije `TreeContraction` dobijamo po jedan C -graf koji će biti primenjen za generisanje C -linkova veličine 1 i 3, dva C -grafa za generisanje C -linkova veličine 4, četiri za generisanje C -linkova veličine 5, osam za generisanje C -linkova veličine 6, itd. Na slici 91 su prikazani C -grafovi neophodni za generisanje C -linkova veličine manje ili jednake 6.

Ideju generisanja C -linkova, korišćenjem osnovnog grafa, preuzeli smo od Kaudrona, a opisana je sledećim primerima. Slova A, B, C, D, E, F u opštem slučaju mogu uzimati vrednosti iz skupa $\{2, -2, 1, -1\}$.

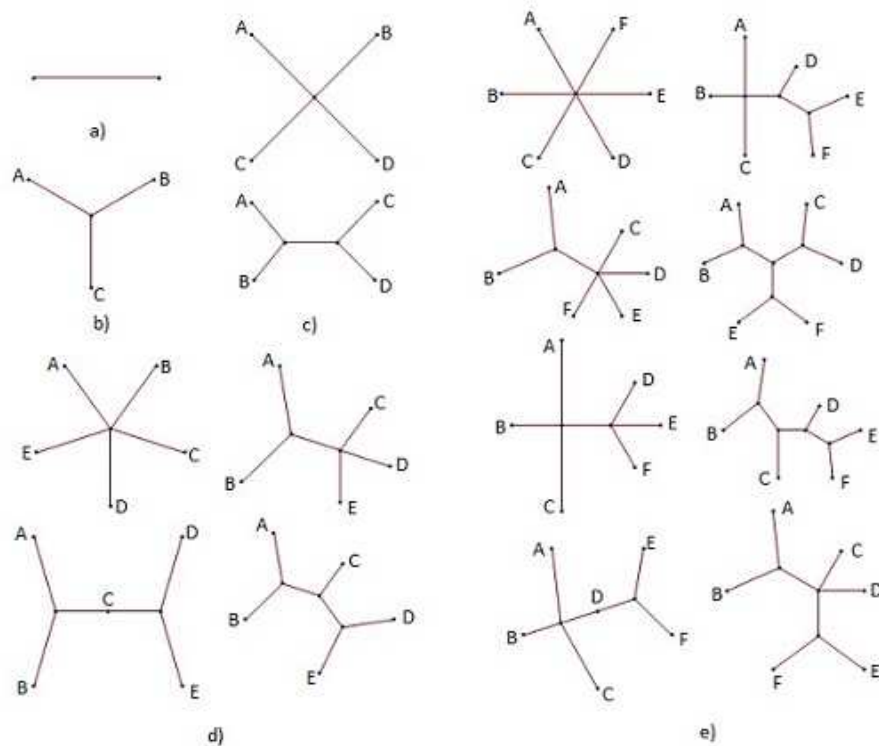
Najprostiji C -graf, graf sa slike 91a, generiše C -link A ($A \in \{1, -1, 2, -2\}$). U ovom slučaju, jedini C -link koji se može izvesti je 2 i on se koristi za izvođenje svih racionalnih čvorova i linkova. Graf sa slike 91b generiše C -linkove (A, B, C) ($A, B, C \in \{1, -1, 2, -2\}$). Ovaj C -link se koristi za izvođenje svih Montezinosovih čvorova i linkova sa 3 R -spleta. Grafovi sa slike 91c generišu sve C -linkove veličine 4 oblika (A, B, C, D) i $(A, B)(C, D)$.

Na osnovu kontrahovanih grafova sa slike d) možemo generisati C -link za Montezinosove čvorove sa 5 R -spletova (A, B, C, D, E) i C -linkove za arborescentne čvorove:

1. $(A, B)(C, D, E)$,
2. $(A, B)C(D, E)$,
3. $(A, B), C, (D, E)$.

C -linkovi veličine 6 generisani na ovaj način su:

1. (A, B, C, D, E, F) ,
2. $(A, B, C), D, (E, F)$,
3. $(A, B)(C, D, E, F)$,
4. $(A, B), (C, D), (E, F)$,
5. $(A, B, C)(D, E, F)$,
6. $((A, B), C)(D, (E, F))$,
7. $(A, B, C)D(E, F)$



Slika 91: C -grafovi za C -linkove veličine (a) 1; (b) 3; (c) 4; (d) 5; (e) 6

8. $(A, B), C, D, (E, F)$

i dobijeni su na osnovu kolabiranih grafova prikazanih na slici 91e.

Bazu C -linkova čini skup C -linkova generisanih ovim metodom, nakon zamene slova vrednostima iz skupa $\{2, -2, 1, -1\}$. Bazu C -linkova za generisanje čvorova sa n preseka zovemo *iscrpljujućom* ako se u njoj nalaze svi C -linkovi generisani na gore navedeni način, polazeći od drveta sa n temena i njima odgovarajućih kolabiranih grafova, gde su slova iz prethodnih primera zamenjena svim vrednostima iz skupa $\{2, -2, 1, -1\}$. Iscrpljujuća baza se u praksi ne koristi jer će većina C -linkova generisati iste rezultate, tj. krajnje čvorove. Zbog toga, u skladu sa trenutnim zadatkom, iz iscrpljujuće baze se koriste samo odabrani C -linkovi.

5.1.2 Operator *GENKL*

Operator *GENKL* se koristi u prvoj fazi procesa izvođenja čvorova i to u njenom prvom delu koji predstavlja proces generisanja alternirajućih čvorova i primenjuje se na C -linku. Zadatak operatora *GENKL* jeste da izvrši zamene

spletova 2 i -2 u C -linku R -spletovima i na taj način generiše sve moguće čvorove sa datim brojem preseka n . Kako je zbir dužina svih spletova Konvejevog zapisa nekog čvora jednak broju preseka čvora, za generisanje svih čvorova sa n preseka iz nekog C -linka neophodno je koristiti (uređene) particije broja n .

Na primer, za $n = 9$, C -link $(2, 2, 2)$ možemo proširiti na sledeći način. Prvo je potrebno generisati sve particije broja $n = 9$ u tri dela, od kojih je svaki veći ili jednak 2: $(5, 2, 2)$, $(4, 3, 2)$ i $(3, 3, 3)$. U sledećem koraku generišu se uređene particije koje ne počinju jedinicom (imajući u vidu da predstavljaju R -spleteve koji, po definiciji, ne smeju počinjati jedinicom) i uklanjaju se duplikati. Kao rezultat dobijamo Montezinosove alternirajuće čvorove i linkove koji sadrže tri R -spleta i imaju $n = 9$ preseka: $(5, 2, 2)$, $(4, 1, 2, 2)$, $(3, 2, 2, 2)$, $(3, 1, 1, 2, 2)$, $(2, 3, 2, 2)$, $(2, 2, 1, 2, 2)$, $(2, 1, 2, 2, 2)$, $(2, 1, 1, 1, 2, 2)$, $(4, 3, 2)$, $(4, 2, 1, 2)$, $(3, 1, 3, 2)$, $(3, 1, 2, 1, 2)$, $(2, 2, 3, 2)$, $(2, 2, 2, 1, 2)$, $(2, 1, 1, 3, 2)$, $(2, 1, 1, 2, 1, 2)$, $(3, 3, 3)$, $(3, 3, 2, 1)$, $(3, 2, 1, 2, 1)$ i $(2, 1, 2, 1, 2, 1)$.

Za implementaciju operatora *GENKL* u opštem slučaju C -linkova, koristili smo *LinKnot* funkciju `fGenKL`. Za generisanje različitih particija broja n ova funkcija koristi funkcije *Mathematica* programskog paketa *Partitions and Sums of Integer Powers* koji je napisao J. Rangel-Mondragón [92]. Funkcija `fGenKL` je modifikovana za ove potrebe tako da iz dobijenih rezultata selektuje samo čvorove koristeći funkciju `fComponentNo`. Takođe, izvršavanje ove funkcije je ubrzano tako što za izvesna izvođenja koristi funkcije namenjene izvođenju posebnih klasa alternirajućih čvorova i linkova, npr. funkciju `RationalKL[n]`, koja izvodi sve racionalne čvorove i linkove sa n preseka, funkciju `fStellar[n]`, koja izvodi Montezinosove čvorove i linkove sa n preseka, itd. Da bi se obezbedilo korišćenje potrebnih posebnih funkcija, funkcija `fGenKL` u prvom koraku vrši sintaktičku analizu ulaznog stringa koji predstavlja polazni C -link i, ukoliko on pruža mogućnosti za to, vrši izbor posebne funkcije. Isti postupak iz koga je samo izostavljena početna eliminacija linkova, moguće je primeniti i na izvođenje svih alternirajućih čvorova i linkova sa n preseka iz datog C -linka.

5.1.3 Operator D

Operator D se koristi u drugom delu obe faze procesa izvođenja čvorova: u delu prepoznavanja. Ovak operator prepoznaje čvorove i vrši njihovu identifikaciju u postojećim tablicama čvorova do $n = 16$ preseka u kojima su čvorovi dati svojim minimalnim DT kodovima [10]. Takođe, ovaj operator može koristiti i *LinKnot* funkcije za prepoznavanje čvorova i linkova u Konvejevoj notaciji `fFindCon` ili `fFindConway` i dodeliti svakom izvedenom čvoru ili linku jednoznačno definisan Konvejev simbol iz *LinKnot* baze podataka Konvejevih simbola čvorova i linkova do $n = 12$ preseka i odgovarajući minimalni DT kôd. Primenom operatora D na skup C -linkova prepoznavamo čvorove koji se ponavljaju, izbacujemo duplikate iz skupa izvedenih čvorova i uparujemo svaki izvedeni čvor dat u Konvejevoj notaciji sa njegovim minimalnim DT kodom.

Kao osnova za implementaciju operatora D korišćena je funkcija `fKnotFind`. U slučaju linkova, za ovaj deo postupka potrebno je koristiti funkcije za prepoznavanje bazirane na polinomialnim invarijantama i minimalne DT kodove iz

samo delimično objavljenih tablica linkova koje je izveo M. Tistltvejt.

5.1.4 Izvođenje alternirajućih čvorova

Izvođenje alternirajućih čvorova je prva faza generisanja čvorova metodom koji predlažemo. Ako skup alternirajućih čvorova označimo sa \mathbf{A} , proces njihovog izvođenja predloženim metodom se opisuje formulom

$$\mathbf{A} = D(\text{GENKL}(\mathbf{B})).$$

Baza C -linkova \mathbf{B} se može generisati na način predložen u poglavlju 5.3.1. Prilikom primene Kaudronovog grafovskog pristupa označavanja čvorova, susreli smo se sa dva problema:

1. Višeznačnost notacije drveta;
2. Odsustvo Konvejeve operacije sabiranja $+$ u okviru Kaudronovih grafova.

Ukoliko je drvo koje prikazuje čvor pomoću Kaudronovog grafa višeznačno, tada se višeznačnost prenosi i na C -grafove koje smo generisali u ovom radu. Posmatrajmo poslednji C -graf na slici 91. Ovaj graf se može zapisati kao C -link $(A, B), C, D, (E, F)$, ali i kao C -link $(A, B) (C, D) (E, F)$. Pri tome, možemo pokazati da su navedena dva C -linka ekvivalentna i da pomoću operatora GENKL generišu isti skup čvorova i linkova za svako fiksirano n . Bez obzira na to, u slučajevima kada se neki C -graf može zapisati na više načina (kao u navedenom primeru), u bazu C -linkova ćemo uvrstiti sve moguće zapise tog C -grafa u obliku C -linkova. Uklanjanje duplikata među čvorovima dobijenim pomoću operatora GENKL za dato n predstavlja manji problem nego eventualni manjak C -linkova.

Kada se dva ili više spletova javljaju kao članovi operacije ramifikacije, tada operacija ramifikacije ima prioritet u odnosu na operaciju sabiranja na osnovu jednakosti $(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1 0 + t_2 0 + \dots + t_n 0$ i na taj način se izbegava upotreba operacije sabiranja koja nedostaje u grafovskom prikazu čvorova. Operator $+$ se javlja i u spletovima oblika $a+$ koje je Konvej definisao na način prikazan na slici 92.



Slika 92: Splet $a+$

Kada su spletovi t_1, t_2, \dots, t_n racionalni, primenom flip pokreta lako se pokazuje da je pozicija spleta 1 u (t_1, t_2, \dots, t_n) nevažna i da se sve jedinice mogu dovesti na kraj spleta, kao u narednom primeru:

$$(1, 3, 1, 2) = (3, 1, 1, 2) = (3, 2, 1, 1).$$

Ako se u operaciji ramifikacije na kraju Montezinosovog spleta

$$t_1, t_2, \dots, t_n, 1, \dots, 1$$

javlja niz jedinica dužine c , tada se na osnovu definicije operacije sabiranja ovaj niz može zameniti celobrojnim spletom c , pa je

$$t_1, t_2, \dots, t_n, 1, \dots, 1 = t_1, t_2, \dots, t_n + c.$$

Važi i obrnuto, pa ćemo C -linkove oblika

$$t_1, t_2, \dots, t_n + c$$

pisati kao

$$t_1, t_2, \dots, t_n, 1, \dots, 1,$$

pri čemu je niz jedinica koje se nalaze na kraju ovog spleta dužine c . Tako ćemo izbeći upotrebu operacije $+$ u okviru Montezinosovih spletova. Na primer, C -link $(2, 2 + 1)(2, 2, 2 + 2)$ pišaćemo kao $(2, 2, 1)(2, 2, 2, 1, 1)$ i sl.

Za izvođenje alternirajućih čvorova dovoljno je da baza C -linkova sadrži samo C -linkove sa spletovima 1 i 2. Pokazuje se da je za izvođenje algebarskih alternirajućih čvorova sa $n = 13$ preseka dovoljna baza C -linkova prikazana tabelom 4. U tabeli su za $8 \leq n \leq 13$ date liste C -linkova koji su dovoljni za generisanje algebarskih alternirajućih čvorova sa datim brojem preseka. Svi čvorovi $3 \leq n \leq 7$ preseka su racionalni, pa se izvode iz samo jednog C -linka 2. Zbog toga C -linkovi potrebni za njihovo generisanje nisu navedeni u tabeli. Za generisanje svih algebarskih alternirajućih čvorova sa $n = 8$ preseka dovoljno je koristiti C -linkove navedene u koloni označenoj brojem 8. Za generisanje čvorova sa brojem preseka $n \geq 8$, neophodno je upotrebiti C -linkove navedene u svim kolonama označenim brojevima manjim ili jednakim n . Dakle, za generisanje svih algebarskih čvorova sa $n = 13$ preseka, neophodno je vršiti proširivanje C -linkova navedenih u kolonama 8, 9, 10, 11, 12 i 13.

Primenom metoda proširivanja C -linkova, 27 C -linkova navedenih u tabeli, dovoljno je za generisanje svih algebarskih alternirajućih čvorova sa $n = 13$ preseka kojih ima ukupno 1452.

Dejstvom operatora $GENKL$ na celu navedenu bazu spletova, dobija se skup čvorova u kome se neki čvorovi ponavljaju. U cilju uklanjanja duplikata čvorova iz dobijenog skupa i generisanja konačnog skupa alternirajućih čvorova sa $n = 13$ preseka u Konvejevoj notaciji, na njega je potrebno primeniti operator D .

Operator $GENKL$ se može primeniti na C -link bilo kod tipa, tj. na C -link koji definiše bilo koju klasu čvorova (racionalne, Montezinosove, preostale algebarske, poliedarske). Efikasnije izvođenje čvorova se može izvršiti podelom ulaznog skupa C -linkova na podskupove koje omogućavaju izvođenje po klasama čvorova. Ukoliko se izvrši podela po klasama čvorova, pruža se mogućnost za

Tabela 4: C -linkovi potrebni za izvođenje algebarskih alternirajućih čvorova do $n = 13$ preseka

8	9	10	11	12	13
2	2,2,2,1	2,2,2,1,1	2,2,2,2	2,2,2,2,1	2,2,2,2,1,1
2,2,2		(2, 2) (2, 2)	2,2,2,1,1,1	2,2,2,1,1,1,1	2,2,2,1,1,1,1,1
			(2,2) (2,2,1)	(2,2,1) (2,2,1)	(2,2) (2,2,1,1,1)
			(2,2) 1 (2,2)	(2,2) (2,2,1,1)	(2,2,2) (2,2)
				(2,2) 1 (2,2,1)	(2,2,1) (2,2,1,1)
				(2,2),2,(2,2)	(2,2) 1 (2,2,1,1)
					(2,2,1) 1 (2,2,1)
					(2,2) 2 (2,2)
					(2,2),2,(2,2,1)
					(2,2) 2,2,2
					(2,2) 1,(2,2),2
					(2,2),(2,2),2,1

optimalni izbor baze C -linkova za svaku konkretnu klasu, tj. baze koja sadrži manji broj C -linkova i daje manje ponovljenih čvorova. Pored toga, podela ulaznih C -linkova se pretežno može obaviti na sintaksnom nivou.

Zbog toga je izvođenje čvorova najbolje započeti izvođenjem racionalnih čvorova.

Za izvođenje racionalnih čvorova i linkova korišćene su već postojeće funkcije programskog paketa *LinKnot* iz sekcija *Rational KLS* i *Derivation of KLS*.

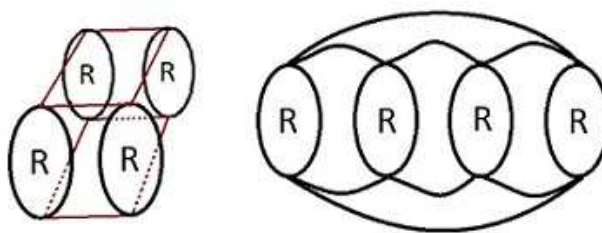
Za dato n , *LinKnot* funkcija `RationalKL` izračunava broj racionalnih čvorova sa n preseka i njihove Konvejeve simbole. Napomenimo da se svaki racionalni čvor ili link u Konvejevoj notaciji zapisuje kao niz prirodnih brojeva $n_1 n_2 \dots n_k$ koji ne počinje i ne završava se jedinicom, pri čemu obrtanje (revertovanje) niza definiše isti čvor ili link. Pošto brojevi n_1, n_2, \dots, n_k označavaju dužine celobrojnih spletova, važi jednakost $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Funkcija `RationalKL` koristi ovu zavisnost, pa racionalne čvorove dužine n generiše koristeći uređene particije broja n , na isti način kao funkcija `fGenKL`. Za prepoznavanje racionalnih čvorova dovoljno je koristiti verižne razlomke, što je znatno efikasniji način prepoznavanja od izračunavanja minimalnih DT kodova. Navedeni način prepoznavanja je implementiran u funkciji `RationalKL`.

Prema tome, primenom funkcije `RationalKL` implementirani su operatori D i $GENKL$ u odnosu na racionalne čvorove. Primena funkcije `fGenKL` na C -link 2 nije potrebna, pošto funkcija `fGenKL` samostalno generiše racionalne čvorove sa $n = 13$ preseka i pri tome ne daje ponovljene čvorove.

Za $n = 13$ preseka funkcija `RationalKL` daje 528 čvorova i linkova, od kojih

su 352 čvorovi. Svaki od ovih čvorova je na osnovu svog minimalnog Dovkerovog koda prepoznat u tablicama čvorova u DT notaciji.

Naredni korak u u izvođenju čvorova sa $n = 13$ preseka u Konvejevoj notaciji je izvođenje Montezinosovih čvorova. Podsetimo se da se Montezinosovi spletovi i njima odgovarajući Montezinosovi linkovi dobijaju primenom razgranavanja na n alternirajućih racionalnih spletova t_i , od kojih barem tri spleta t_k , $k \in 1, 2, \dots, n$ nisu elementarna, tj. različita su od 1. Montezinosovi čvorovi i linkovi obeležavaju se Konvejevim kodom t_1, t_2, \dots, t_n , ($n \geq 3$, $i \in \{1, \dots, n\}$), na isti način kao i njihovi odgovarajući Montezinosovi spletovi. *Pereca* čvor ili link se dobijaju ukoliko su svi spletovi t_i , ($n \geq 3$, $i \in \{1, \dots, n\}$) celobrojni. Montezinosov link, dobijen razgranavanjem četiri R -spleta prikazan je na slici 93.



Slika 93: Montezinosov link sa četiri R -spleta i njegova senka

Pomenuli smo da se u Kaudronovom radu [37] Montezinosovi linkovi nazivaju *zvezdastim* (od eng. *stellar*) linkovima, jer im odgovaraju Kaudronovi grafovi zvezdaste strukture, tj. drvo sa centralnim temenom koje označava operaciju razgranavanja.

Racionalne spletove u okviru Montezinosovih čvorova ili linkova zvaćemo "stubovima". To su delovi Konvejevog koda koji se u zapisu Montezinosovog čvora ili linka nalaze na prvom mestu, na poslednjem mestu ili između zarezova. Montezinosovi čvorovi sa $n = 13$ preseka mogu imati najviše 6 stubova, pa zbog toga uvek imaju sledeći oblik t_1, t_2, \dots, t_i , $i \in \{3, 4, 5, 6\}$, gde su t_i R -spletovi od kojih su bar tri netrivialna, tj. nisu jedinice. Za generisanje ovakvih čvorova opet će biti korišćene uređene particije broja 13. Pri tome, neophodno je imati u vidu da su Konvejevi kodovi Montezinosovih čvorova i linkova invarijantni u odnosu na ciklične permutacije niza R -spletova t_1, t_2, \dots, t_i ili inverziju (obrtnanje) tog niza. To znači da će, na primer, Konvejevi kodovi $(4, 2, 3, 2)$, $(2, 3, 2, 4)$, $(2, 4, 2, 3)$, $(3, 2, 4, 2)$ i $(4, 2, 3, 2)$ označavati isti Montezinosov link. Uočimo da zamena mesta različitih susednih R -spletova u Konvejevom kodu nekog Montezinosovog linka predstavlja mutaciju, pa će, na primer, linkovi $(3, 2, 3, 2)$ i $(3, 3, 2, 2)$ predstavljati različite Montezinosove linkove koji se dobijaju jedan iz drugog mutacijom, što znači da ni jedna polinomska invarijanta neće biti u stanju da ih razlikuje. Naravno, razlikovaće se njihovi minimalni DT kodovi. Zbog toga, permutacije stubova (tj. činilaca operacije razgranavanja), koje predstavljaju ekvivalentne čvorove ili linkove, neće biti

generisane, pa *LinKnot* funkcije `fStellar` i `fStellarPlus` daju isključivo različite Mintezinosove linkove. Primenom ovih funkcija već na samom početku (u fazi generisanja), izbegnuto je izvođenje velikog broja ponovljenih čvorova koje se javlja u slučaju primene funkcije `fGenKL` na Montezinosove *C*-linkove $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 2)$, \dots , $(2, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 1)$, itd.

Prema tome, primenom funkcija `fStellar` i `fStellarPlus`, implementirani su operatori *D* i *GENKL* u odnosu na Montezinosove čvorove. Primena funkcije `fGenKL` na *C*-linkove $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 2)$, itd. nije potrebna, pošto navedene dve funkcije samostalno generišu odgovarajuće Montezinosove čvorove sa $n = 13$ preseka i pri tome ne daju ponovljene čvorove.

Za $n = 13$ funkcija `fStellar` daje 1218 čvorova i linkova, među kojima su 493 čvora. Funkcija `fStellarPlus` daje 743 čvora i linka, među kojima je 285 čvora. Svaki od ovih čvorova je, na osnovu svog minimalnog Dovkerovog koda, prepoznat u tablicama čvorova u DT notaciji.

Naredni korak predstavlja izvođenje preostalih algebarskih alternirajućih čvorova sa $n = 13$ preseka. Za njihovo izvođenje korišćeni su *C*-linkovi iz tabele 4, izuzimajući *C*-linkove čijim se proširivanjem dobijaju racionalni i Montezinosovi čvorovi, pošto je njihovo izvođenje već izvršeno. Proširivanjem preostalih 17 *C*-linkova dobijena su 1452 različita algebarska alternirajuća čvora. Među izvedenim čvorovima duplikati su eliminisani primenom operatora *D* (korišćenjem funkcije `fKnotFind`) i prepoznati u tablicama čvorova u DT notaciji.

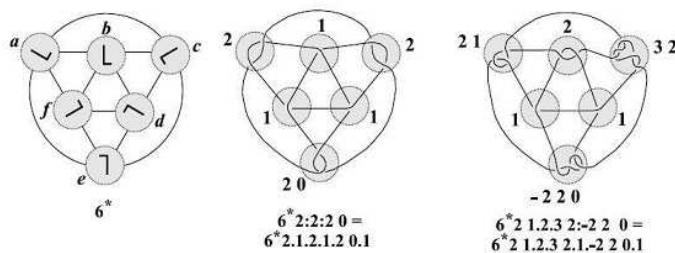
Dodatnu proveru, da su svi čvorovi koji su izvedeni u prethodnim koracima upravo alternirajući algebarski čvorovi sa $n = 13$ preseka, omogućava *LinKnot* funkcija `fBasicPoly` koja za čvor ili link dat svojim DT kodom identifikuje njegov odgovarajući bazični poliedar. Svaki alternirajući čvor pripada tačno jednoj flip klasi, pa mu jednoznačno odgovara i bazični poliedar iz koga je izveden. Primenjujući funkciju `fBasicPoly` na tablice DT kodova alternirajućih čvorova, možemo direktno konstatovati da li je neki alternirajući čvor dat svojim DT kodom algebarski ili poliedarski i identifikovati njegov odgovarajući bazični poliedar. Ovakva dodatna provera i identifikacija bazičnog poliedra, koji odgovara nekom čvoru ili linku na osnovu njegovog DT koda, moguća je samo za alternirajuće čvorove i linkove. Neki nealternirajući čvor ili link može posedovati više različitih minimalnih dijagrama (posmatranih do na flip ekvivalenciju), pri čemu neki od njih mogu biti algebarski, a drugi nealgebarski. Tada različitim minimalnim dijagramima (posmatranim do na flip ekvivalenciju) mogu odgovarati različiti bazični poliedri.

Sledeća klasa čvorova koje ćemo generisati jesu poliedarski, tj. nealgebarski alternirajući čvorovi sa $n = 13$ preseka.

Podsetimo se da se poliedarski (nealgebarski) čvor ili link dobija iz nekog bazičnog poliedra zamenom njegovih temena spletoivima. Originalna Konvejeva oznaka za bazične poliedre sa n temena je izraz oblika ni^*m (što je skraćena oznaka za $ni^*m1.1 \dots 1$, pri čemu se elementarni splet 1, koji se nalazi u svakom temenu bazičnog poliedra ni^* , javlja n puta). U *LinKnot* notaciji bazičnih poliedara n je i dalje broj preseka, a $i = m$ je redni broj bazičnog poliedra u listi bazičnih poliedara sa n preseka. Dakle, originalnom Konvejevom simbolu bazičnog poliedra 10^* odgovara *LinKnot* simbol 101^* , originalnom Konvejevom

simbolu bazičnog poliedra 10^{**} odgovara *LinKnot* simbol 102^* , itd. Prvu listu bazičnih poliedara do $n = 12$ preseka izveo je Kirkman, koji je izostavio bazični poliedar $12^{*****} = 12E$ (ili u *LinKnot* oznaci 125^*). U svom radu Konvej [33] preuzima Kirkmanovu listu bazičnih poliedara 6^* , 8^* , 9^* , 10^* , 10^{**} , 10^{***} , 11^* i za isti bazični poliedar 6^* uvodi dve različite oznake: 6^* i $6^{**} = .1$, koje rezultiraju i dvoznačnim sistemom oznaka poliedarskih čvorova i linkova izvedenih iz bazičnog poliedra 6^* . Kaudron koriguje Kirkmanovu (možda svesnu) omašku³ i izvodi kompletnu listu bazičnih poliedara sa $n \leq 12$ preseka, koja sadrži jedan bazični poliedar 6^* sa $n = 6$ preseka, bazične poliedre 8^* , 9^* , 10^* , 10^{**} , 10^{***} , 11^* , 11^{**} i 11^{***} sa $8 \leq n \leq 11$ preseka i 12 bazičnih poliedara sa $n = 12$ preseka, označenih u njegovom radu sa 12A-12L. Za $13 \leq n \leq 20$ preseka, jedinu referentnu listu (bazu podataka) bazičnih poliedrara sadrži program *LinKnot*.

U originalnoj Konvejevoj simbolici, čvor koji je dobijen iz bazičnog poliedra ni^{*m} zamenom njegovih temena (tj. elementarnih spletova 1 u simbolu $ni^{*m}1.1\dots1$) spletovim a_1, \dots, a_k ($k \leq n$), zapisuje se kao $ni^{*m}a_1.a_2\dots a_k$. Zapis se može skratiti izostavljanjem jedinica i korišćenjem dodatnih skraćenih simbola koji zamenjuju nizove tačaka (na primer, simbola $:$ koji zamenjuje \dots , simbola $.$ koji zamenjuje \dots). Na primer, koncizna oznaka $6^*2 : 2 : 20$ označava čvor $6^*2.1.2.1.2.0.1$, a $6^*2.1.2.3.2 : -2.2.0$ označava čvor $6^*2.1.2.3.2.1. - 2.2.0.1$ (slika 94). U okviru programa *LinKnot* jedina razlika je što su bazični poliedri ni^{*m} označavaju kao ni^* , pri čemu je $i = m$.



Slika 94: Bazični poliedar 6^* i čvorovi $6^*2.1.2.1.2.0.1$ i $6^*2.1.2.3.2.1. - 2.2.0.1$

Konvej je u radu [33] uveo dve oznake za isti bazični poliedar: 6^* i $6^{**} = .1$ i koristio obe za označavanje čvorova i linkova izvedenih iz bazičnog poliedra 6^* . Kao rezultat, dobijene su dve vrste oznaka ovakvih čvorova i linkova. Na primer, čvor 8_{16} , izveden iz bazičnog poliedra $.1$, označen je sa $.2.2.0$, a čvor 9_{39} , izveden iz bazičnog poliedra 6^* sa $2 : 2 : 20$, pri čemu je kod čvorova i linkova izvedenih iz bazičnog poliedra 6^* simbol bazičnog poliedra izostavljen. U knjizi [87] na strani 249. data je komparacija čvorova i linkova zapisanih u obe notacije. Zbog uniformnosti notacije, korišćićemo samo prvu oznaku 6^* .

Dakle, poliedarski čvor ili link se dobija tako što vršimo zamenu temena dijagrama u osnovnom bazičnom poliedru (6^* , 8^* , 9^* , 10^* , 10^{**} , 10^{***} , ...) alge-

³Bazični poliedar $12E$ je jedini bazični poliedar sa $n = 12$ preseka koji je 2-temeno povezan, pa ne predstavlja poliedar u geometrijskom smislu.

barskim spletovima. Proces izvođenja alternirajućih poliedarskih čvorova je identičan sa metodom proširivanja C -linkova. Za svaki bazični poliedar se generišu svi njegovi osnovni linkovi (koji predstavljaju specijalan slučaj C -linkova) čijim se proširivanjem izvode krajnji čvorovi. Proširivanje osnovnih linkova i dalje se zasniva na korišćenju particija broja n , gde je n broj preseka čvora. Za izvođenje osnovnih linkova iz bazičnih poliedara korišćena je funkcija `fForSourceLinks`, koju je napisala Radmila Sazdanović, a za izvođenje čvorova funkcija `fGenKL`.

Izvođenjem ovih klasa čvorova generisano je svih 4878 alternirajućih čvorova sa $n = 13$ preseka datih u Konvejevoj notaciji, koji su prepoznati u tablicama čvorova u DT notaciji. Alternirajući čvorovi izvedeni u Konvejevoj notaciji će biti iskorišćeni za izvođenje nealternirajućih primenom operatora $CROSS^-$.

5.1.5 Operator $CROSS^-$

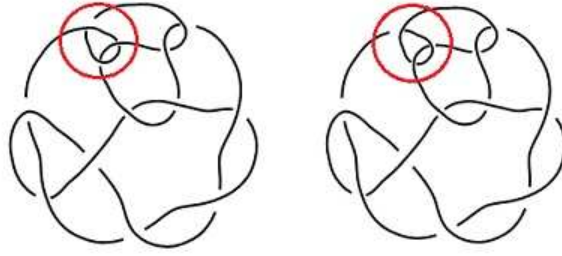
Operator $CROSS^-$ se primenjuje u prvom delu druge faze metoda izvođenja čvorova proširivanjem C -linkova i koristi se za izvođenje nealternirajućih čvorova. Primenom funkcija navedenih u prethodnim poglavljima izveden je skup svih alternirajućih čvorova sa $n = 13$ preseka. Označimo taj skup sa \mathbf{A} . Operator $CROSS^-$ se primenjuje nad proizvoljnim čvorom $K \in \mathbf{A}$. Njegov zadatak je da, na osnovu datog minimalnog dijagrama ulaznog alternirajućeg čvora, generiše minimalne dijagrame nealternirajućih čvorova sa istim brojem preseka zamenom znaka jednog ili više racionalnih spletova.

Pozitivnim racionalnim spletom nazivamo racionalni splet koji u svom Konvejevom simbolu sadrži samo pozitivne brojeve, a *negativnim racionalnim spletom* onaj koji sadrži samo negativne. Pozitivne i negativne racionalne spletove zajedničkim imenom nazivamo *spletovima konstantnog znaka*, a sve ostale racionalne spletove nazivamo *spletovima mešovitog znaka*. Spletove konstantnog znaka nazivamo i alternirajućim (ili lokalno-redukovanim) racionalnim spletovima. Ovaj drugi naziv sledi iz činjenice da će svaki racionalni splet mešovitog znaka moći da se lokalnom redukcijom svede na racionalni splet konstantnog znaka sa manjim brojem preseka, dok su spletovi konstantnog znaka ireducibilni. Zamena znaka racionalnog spleta R čvora K predstavlja promenu znakova svih brojeva u njegovom Konvejevom simbolu i označava se sa $c^-(R)$. Pod "promenom znaka" smatramo prelazak svakog pozitivnog broja, u oznaci spleta, u negativni i obrnuto. Na primer, promena znaka racionalnog spleta $R = 21$ u čvoru $K = (21, 2)(213, 2)$ prevodi ovaj čvor u $K_1 = (-2 -1, 2)(213, 2)$ (slika 95).

Kako je domen operatora $CROSS^-$ skup alternirajućih čvorova u kojima su svi racionalni spletovi alternirajući i imaju pozitivan znak, zamena znaka će u ovom slučaju podrazumevati zamenu pozitivnog racionalnog spleta negativnim racionalnim spletom.

Ako čvor K sadrži n racionalnih spletova i c_i predstavlja znak i -tog racionalnog spleta u Konvejevom zapisu čvora K , tada varijacijom njegovih znakova

označavamo niz $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, $c_i \in \{+, -\}$, $i = 1, \dots, n$. Dve varijacije znakova



Slika 95: Operacija $c^-(21)$ prevodi čvor $K = (21, 2)(213, 2)$ u $K_1 = (-2 - 1, 2)(213, 2)$

$\{c'_1, c'_2, \dots, c'_n\}$ i $\{c''_1, c''_2, \dots, c''_n\}$ nazivamo simetričnim ukoliko za svako $i, i = 1, \dots, n$ važi jedna od sledećih jednakosti:

$$\begin{aligned} c'_i = +, c''_i = - \\ c'_i = -, c''_i = +. \end{aligned}$$

Dodeljivanjem varijacije znakova c nekom čvoru K označavamo sledeći proces: u datom čvoru K svakom racionalnom spletu (i -tom po redu u Konvejevom zapisu) dodeljujemo onaj znak koji se nalazi na i -tom mestu u varijaciji c . Na primer, primena varijacije $\{+, +, -, -\}$ na čvor $K = (-2 - 1, 2)(213, 2)$ daje čvor $K' = (21, 2)(-2 - 1 - 3, -2)$.

Narednim algoritmom opisana je primena operatora $CROSS^-$ na minimalnom dijagramu alternirajućeg čvora K , koja kao rezultat generiše skup minimalnih dijagrama nealternirajućih čvorova K_N .

ALGORITAM 9

1. Neka je n broj racionalnih spletova u Konvejevom zapisu alternirajućeg čvora K datog svojim minimalnim kanonskim dijagramom. Generisati skup svih varijacija znakova dužine n izuzimajući simetrične.
2. Za svaku varijaciju c , neka K' predstavlja dijagram čvora koji se dobija dodeljivanjem te varijacije čvoru K . Ukoliko minimalni dijagram čvora K' ima isti broj preseka kao minimalni dijagram čvora K , dodati K' u K_N .

Izvođenje skupa nealternirajućih čvorova u Konvejevoj notaciji podrazumeva primenu navedenog algoritma na svakom čvoru K iz skupa A .

5.1.6 Izvođenje nealternirajućih čvorova

Izvođenje nealternirajućih čvorova je druga faza generisanja čvorova metodom koji predlažemo. Ako je skup alternirajućih čvorova izvedenih u prvoj fazi označen sa A , a skup nealternirajućih označen sa N , proces izvođenja nealternirajućih čvorova predloženim metodom opisuje se sledećom formulom

$$\mathbf{N} = D(\text{CROSS}^-(\mathbf{A})).$$

Primenom operatora CROSS^- na svaki čvor iz skupa A , biće generisani neki ponovljeni nealternirajući čvorovi. Izračunavanjem minimalnih DT kodova dobijenih nealternirajućih čvorova možemo ih prepoznati, a zatim odstraniti duplikate čvorova iz skupa izvedenih čvorova, kao što je to urađeno za alternirajuće čvorove. Takav metod izvođenja nealternirajućih čvorova u Konvejevoj notaciji se ne bi razlikovao od načina klasifikacije u dosadašnjim tablicama čvorova gde svakom čvoru odgovara tačno jedan minimalni dijagram, tj. minimalni DT kôd. Međutim, smatramo da kod nealternirajućih čvorova nije uvek dovoljno posmatrati samo po jednog predstavnika, tj. koristiti kao predstavnika samo jedan minimalni dijagram. Ovo stanovište će detaljnije biti razmotreno u narednom poglavlju.

U fazi izvođenja nealternirajućih čvorova se modifikovanim operatorom D vrši prepoznavanje čvorova, ali se duplikati ne izbacuju iz skupa izvedenih čvorova, već se oni grupišu u skladu sa čvorovima koje predstavljaju. Na taj način, za svaki nealternirajući čvor dobijamo kompletnu listu minimalnih dijagrama (do na flip ekvivalentnost) koji ga predstavljaju.

Nealternirajući čvorovi se takođe mogu izvoditi i direktno iz C -linkova ukoliko posedujemo odgovarajuću bazu C -linkova.

5.1.7 Tablice čvorova u Konvejevoj notaciji

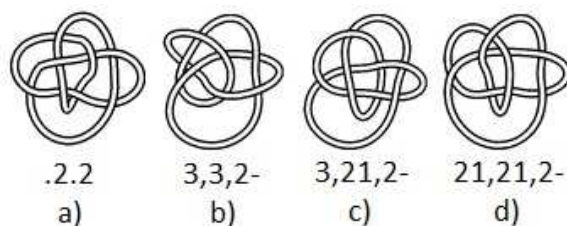
Primenom metoda proširivanja C -linkova izvedeni su svi alternirajući i nealternirajući čvorovi sa $n = 13$ preseka (njih 9988), kao i alternirajući čvorovi sa $n = 14$ preseka (njih 19536). Rezultati su organizovani u tablicama na način prikazan u narednom poglavlju.

Predloženi metodi se mogu primeniti za izvođenje nealternirajućih čvorova sa $n = 14$ preseka, kao i čvorova sa $n > 14$ preseka.

5.2 Klasifikacija čvorova

U dosadašnjim tablicama čvorova nije uspostavljen strogi redosled navođenja čvorova u Konvejevoj notaciji. Jedini šablon koji se može prepoznati jeste da su u tablicama prvo navođeni racionalni čvorovi, zatim algebarski, poliedarski i na kraju nealternirajući, mada ni ovaj princip organizacije tablica nije uvek dosledno poštovan. U Rolfsenovim tablicama [35] su crteži dijagrama čvorova preuzeti iz Rajdemajsterove knjige [19]. Zbog toga izvesne slike čvorova ne odgovaraju Konvejevim simbolima koji se navode uz njih.

Posebno interesantan primer su dijagrami čvorova 8_{17} , 8_{19} , 8_{20} i 8_{21} dati u Rolfsenovim tablicama (slika 96). Prvih 18 čvorova sa $n = 8$ preseka navedenih u ovim tablicama su alternirajući, dok su poslednja 4 nealternirajuća. Izbor dijagrama za slike čvorova 8_{19} , 8_{20} i 8_{21} oslikava lepu ideju da se nealternirajući čvorovi predstavljaju dijagramima koji nasleđuju neke osobine alternirajućih dijagrama iz kojih su dobijeni, u ovom slučaju - senku. Dijagrami čvorova 8_{19} , 8_{20} i 8_{21} , prikazani na slikama 96c i 96d, imaju istu senku kao dijagram alternirajućeg



Slika 96: Nealternirajući Montesinosovi čvorovi (a) 8_{17} ; (b) 8_{19} ; (c) 8_{20} ; (d) 8_{21} prikazani u Rolfsenovim tablicama poliedarskim dijagramima dobijenim pomoću promena preseka u dijagramu poliedarskog alternirajućeg čvora $8_{17} = .2.2$

čvora 8_{17} prikazanog na slici 96a. Međutim, Konvejevi simboli pridruženi ovim nealternirajućim čvorovima ne odgovaraju dijagramu koji je prikazan slikom, iako je to slučaj sa svim prethodnim (alternirajućim) čvorovima u Rolfsenovim tablicama. Takođe, Konvejevi simboli čvorova $8_{19} = 3, 3, 2-$, $8_{20} = 3, 21, 2-$ i $8_{21} = 21, 21, 2-$, navedeni u Rolfsenovim tablicama, imaju po $n + 1 = 9$ preseka iako su u pitanju čvorovi čiji minimalni dijagrami imaju $n = 8$ preseka. Razlog za to je Konvejeva težnja da izbegne nejednoznačnost njegove notacije u pogledu nealternirajućih čvorova: Montesinos čvor $8_{19} = 3, 3, 2-$ prikazan Konvejevim simbolom sa $n = 9$ preseka moguće je označiti Konvejevim simbolima sa minimalnim brojem preseka (koji iznosi 8) na tri moguća načina: kao $(3, 2, -2)$, $(3, -2 - 1, 2)$ i $(-2 - 1, 3, 2)$. Ovakav način označavanja algebarskih nealternirajućih čvorova sa n preseka pomoću neminimalnih Konvejevih simbola sa $n + 1$ preseka dosledno je korišćen u Konvejevom radu [33] i Rolfsenovoj knjizi [35]. U ovim radovima algebarski nealternirajući čvor 10_{148} je označen neminimalnim Konvejevim simbolom $(3, 2)(3, 2-)$ sa $n + 1 = 10$ preseka, umesto nejednoznačnim Konvejevim simbolima $(3, 2)(3, -2) = (-2 - 1, 2)$ sa $n = 10$ preseka.

Kako ovde razmatramo izvođenje čvorova u Konvejevoj notaciji i kreiranje novih tablica, nameće se pitanje o njihovom redosledu navođenja i klasifikaciji u tablicama. Što se tiče alternirajućih čvorova, poštovali smo dosadašnju praksu. Prvo su navođeni racionalni, zatim Montesinosovi, arborescentni (algebarski), i na kraju poliedarski čvorovi (sortirani po redosledu bazičnih poliedara iz kojih su izvedeni). Kako do sada nije ustanovljena dobra praksa za organizaciju nealternirajućih čvorova u tablicama, u ovom poglavlju predložićemo nov metod za njihovu klasifikaciju i uređenje.

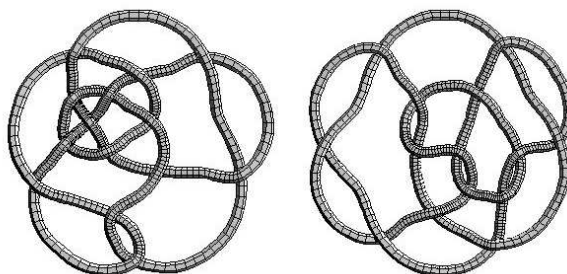
5.2.1 Flip klase ekvivalencije

Tejtova Flip teorema tvrdi da se svi minimalni dijagrami nekog alternirajućeg čvora mogu dobiti pomoću flipova iz bilo kog njegovog minimalnog dijagrama, tj. da su svi minimalni dijagrami proizvoljnog alternirajućeg čvora flip ekvivalentni. Na primer, racionalni čvor dat standardnim kanonskim Konvejevim dijagramom 2511312 ima 48 minimalnih dijagrama koji su flip ek-

vivalentni. Od ovih 48 dijagrama za predstavnika u tablicama biraćemo onaj dijagram kome odgovara kanonski Konvejev simbol.

Međutim, kod nealternirajućih čvorova je situacija drugačija. Svi minimalni dijagrami nekog nealternirajućeg čvora ne moraju biti flip ekvivalentni.

Pošto flip potezi čuvaju brojeve odvezivosti, svi minimalni dijagrami alternirajućeg čvora imaju iste brojeve odvezivosti u_{BJ} . Međutim, to nije slučaj i sa svim minimalnim projekcijama nealternirajućih čvorova. Različiti minimalni dijagrami nealternirajućeg čvora mogu imati različite u_{BJ} brojeve odvezivosti, kao što je slučaj sa čvorom 14_{36750} koji je uočio A. Stoimenov. Dva različita minimalna dijagrama tog čvora imaju, redom, brojeve odvezivosti 1 i 2 (slika 97). Međutim, ipak nije potrebno računati ovu invarijantu za svaki minimalni dijagram posebno jer će ona biti ista za pripadnike iste flip klase ekvivalencije. Zbog toga, potrebno ju je izračunati samo za predstavnike flip klasa ekvivalencije.

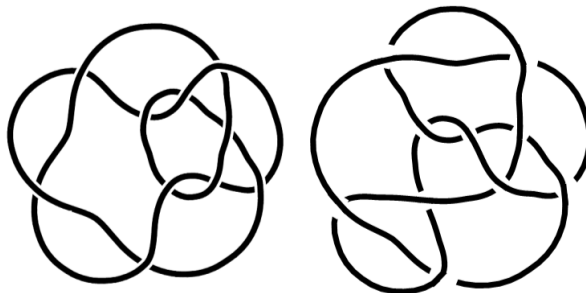


Slika 97: Dijagrami čvora 14_{36750} sa brojevima odvezivosti 1 i 2

Flipovi čuvaju sve dijagramske invarijante. To znači da će te invarijante imati jednu vrednost za jednu klasu dijagrama (flip klasu), a na drugoj klasi mogu uzimati neku drugu vrednost.

Poznati Perkov par – par čvorova 10_{161} i 10_{162} (prikazan na slici 98), zapravo predstavlja isti čvor koji je prvo Konvej, a onda Rolfsen [35] greškom naveo u svojim tablicama dva puta, predstavljajući isti čvor različitim dijagramima koji pripadaju različitim flip klasama ekvivalencije. Ova dva dijagrama imaju različitu invarijantu koja predstavlja zbir njihovih znakova preseka – broj *uvrnutosti* (eng. *writhe*). Za pomenuti par čvorova, kao i sve ostale čvorove sa ovom osobinom, adekvatniji naziv je "Perkov čvor", a ne "Perkov par", s obzirom na to da se radi o jednom čvoru, u ovom slučaju čvoru 10_{161} , a ne o paru različitih čvorova. I naredna invarijanta, broj cikla u Kauffmanovim stanjima (eng. *Kauffman states*) $s+$ i $s-$ (koji se računa kod proučavanja adekvatnosti čvorova, pri čemu su svi alternirajući čvorovi adekvatni), konstantna je za sve minimalne dijagrame alternirajućih čvorova (jer pripadaju istoj flip klasi), ali je različita za neke različite flip klase minimalnih dijagrama nealternirajućih čvorova. Flipovi čuvaju adekvatnost (semi-adekvatnost, neadekvatnost), kao i druge dijagramske invarijante. Pošto ne postoji nikakav dodatni razlog da neka

dijagramska invarijanta uzima iste vrednosti na različitim flip klasama ekvivalencije, reprezentanti ovih flip klasa biće nam neophodni za izračunavanje svih invarijanata nealternirajućih čvorova koje se računaju preko svih minimalnih dijagrama.



Slika 98: Perkov par čvorova $10_{161} = 3 : -20 : -20 = 10_{162} = 21 : -20 : -20$, prvi sa brojem uvrnutosti $w = 8$, a drugi sa brojem uvrnutosti $w = 10$.

Pošto različiti dijagrami nealternirajućeg čvora, do na flip ekvivalenciju, mogu imati različite dijagramske invarijante, smatramo da nije dovoljno da se u tablicama kao predstavnik nealternirajućeg čvora navodi samo jedna projekcija tog čvora i da je značajno navesti predstavnike svih njegovih flip klasa ekvivalencije.

Napomenimo da se DT kôd projekcije čvora određuje tako što prvo numerišemo (imenujemo) temena te projekcije, a zatim, prilikom obilaska projekcije, zapisujemo temena na koja nailazimo. Grupisanje temena u uređene parove daje DT kôd. Različit redosled imenovanja temena će davati različite DT kodove za istu projekciju. Prvi takav DT kôd (u smislu leksikografskog poretka) nazivamo *minimalnim DT kodom projekcije*.

Minimalni DT kôd čvora je najmanji minimalni DT kôd projekcije uzet preko svih njegovih projekcija.

Za svaki čvor postoji tačno jedan njegov minimalni DT kôd i na tome počivaju sve tablice čvorova datih u DT notaciji. Na osnovu tog koda, svaki nealternirajući čvor sa $n \leq 16$ preseka možemo prepoznati u tablicama čvorova do $n = 16$ preseka koje su uključene u distribuciju programa *KnotScape* [70] i u kojima su svi čvorovi dati svojim minimalnim DT kodovima. Predstavljanjem nealternirajućeg čvora njegovim minimalnim DT kodom, napravljen je izbor jedne flip klase ekvivalencije minimalnih dijagrama tog čvora koja ne mora odgovarati ni jednom kanonskom Konvejevom kodu tog čvora i koja je, isključivo po principu leksikografskog poretka, izabrana da bude predstavnik tog čvora u tablicama.

Dve projekcije čvora, koje pripadaju istoj flip klasi ekvivalencije, imaće isti minimalni DT kôd projekcije (do na apsolutnu vrednost), a različit ukoliko pripadaju različitim klasama ekvivalencije. *LinKnot* funkcija `MinDowProjAltKL` izračunava minimalni DT kôd projekcije čvora ili linka datog Konvejevim sim-

bolom, DT kodom ili pomoću P-data. Navedena funkcija je primenjena za grupisanje dijagrama (nealternirajućih) čvorova u flip klase ekvivalencije.

U našim tablicama svaki nealternirajući čvor je prikazan pomoću dve liste.

U prvoj listi se nalaze svi predstavnici flip klasa ekvivalencije tog čvora, gde su za predstavnike uzeti čvorovi sa kanonskim Konvejevim simbolom. Za prvog člana prve liste, koji će biti korišćen kao "standardni" Konvejev simbol posmatranog nealternirajućeg čvora, uzet je "najkarakterističniji" i "najjednostavniji" reprezentant u smislu Konvejevog zapisa. Kao kriterijumi za davanje prioriteta nekom Konvejevom kanonskom zapisu u odnosu na ostale zapise istog tipa, korišćena je prvenstveno hijerarhija uspostavljena u Kaudronovom radu [37]:

Montezinosovi < arborescentni < poliedarski čvorovi.

Ovakva hijerarhija je poštovana i na podnivoima, pa poliedarski čvorovi, koji sadrže samo racionalne spletove, prethode poliedarskim čvorovima koji sadrže, pored racionalnih, i Montezinosove spletove, itd. Drugi kriterijum primenjen na poliedarske nealternirajuće čvorove je (ukoliko je ono moguće) izbegavanje zapisa poliedarskih čvorova koji u sebi sadrže elementarne spletove -1 u pojedinačnim temenima bazičnih poliedara. Birajući između dva zapisa nekog čvora koji odgovaraju tom čvoru i njegovoj slici u ogledalu, s obzirom da u tablicama Konvejevih kodova nismo vodili računa o orijentaciji čvorova ("levoj" i "desnoj"), biran je zapis sa manjim brojem minusa (negativnih celobrojnih spletova), itd. I pored pokušaja da bar donekle obezbedimo jednoznačnost i standardizaciju Konvejeve notacije za nealternirajuće čvorove, gde je svaki čvor predstavljen jednim Konvejevim kodom, možemo reći da je ovakva standardizacija teško izvodljiva jer zahteva preveliki broj dodatnih kriterijuma.

U drugoj listi se nalaze dva elementa: prvi je kanonski Konvejev kôd flip klase ekvivalencije kojoj pripada minimalni DT kôd, a drugi je upravo taj minimalni DT kôd.

Na ovaj način, tri nealternirajuća čvora, data na slici 96, predstavljena su narednim listama.

$$\begin{aligned}
 8_{19} : & \{ \{ (3, 3, -2), (-2 - 1, 3, 2), (6^* - 2.2. - 1 : -1), (6^* - 2. - 20 :: -1), \\
 & (8^* - 1 : -1 : -1 : -1) \}, \{ (-2 - 1, 3, 2), \{ \{ 8 \}, \{ 4, 8, -12, 2, -14, -16, \\
 & -6, -10 \} \} \} \\
 8_{20} : & \{ \{ (3, -3, 2), (21, -2 - 1, 2), (21, 3, -2), (6^* - 2. - 2. - 1), (6^* 2. - 20), \\
 & (8^* - 1. - 1. - 1. - 1. - 1) \}, \{ (21, -2 - 1, 2), \{ \{ 8 \}, \{ 4, 8, -12, 2, -14, -6, \\
 & -16, -10 \} \} \} \\
 8_{21} : & \{ \{ (21, 21, -2), (21, -3, 2), (6^* 2. - 2), (6^* - 2. - 20. - 1) \}, \\
 & \{ (21, 21, -2), \{ \{ 8 \}, \{ 4, 8, -12, 2, 14, -6, 16, 10 \} \} \}
 \end{aligned}$$

Iz navedenog primera se vidi da čvorovi sa istim brojem preseka mogu imati različit broj flip klasa ekvivalencije. Čvor 8_{19} ima 5 flip klasa ekvivalencije, 8_{20} ih ima 6, a 8_{21} ih ima 4. Neki nealternirajući čvorovi mogu imati samo jednu flip klasu ekvivalencije, kao što je slučaj sa svim alternirajućim čvorovima.

Među svim flip klasama ekvivalencije, tačno jedna odgovara minimalnom DT kodu. Konvejev kod ove klase ekvivalencije unosimo u drugu listu koja odgovara posmatranom nealternirajućem čvoru. Pored njega, u drugoj listi navodi se i minimalni DT kôd čvora. Na primer, druga lista čvora 8_{19} je $\{(-2-1, 3, 2), \{\{8\}, \{4, 8, -12, 2, -14, -16, -6, -10\}\}\}$. Iz nje vidimo da dijagram $-2-1, 3, 2$, koji predstavlja jednu flip klasu ekvivalencije čvora 8_{19} , odgovara minimalnom DT kodu čvora 8_{19} : $\{\{8\}, \{4, 8, -12, 2, -14, -16, -6, -10\}\}$. Prema tome, minimalni DT kôd čvora 8_{19} je minimalni DT kôd njegove projekcije $(-2-1, 3, 2)$.

Naša istraživanja su usmerena ka računarskim obradama podataka u teoriji čvorova, pa će zbog toga iz tablica biti izostavljene slike samih čvorova jer su neupotrebljive za računarsku analizu. Kako je do sada postojala praksa objavljivanja slika čvorova uz njihove tablice, ukoliko se ukaže potreba za slikama (dijagramima čvorova), predlažemo da proširivanje tablica dijagramima čvorova bude izvedeno na sledeći način (u zavisnosti od namene tablica):

1. Nacrtati dijagram čvora na osnovu prvog Konvejevog koda prve liste nealternirajućeg čvora ukoliko se vrši vizuelna obrada podataka, budući da je ovo najreprezentativniji i najjednostavniji dijagram posmatranog čvora;
2. Nacrtati dijagram čvora na osnovu Konvejevog koda iz druge liste nealternirajućeg čvora i dijagram koji odgovara minimalnom DT kodu čvora, ukoliko se koristi *KnotScape* notacija, tj. minimalni DT kodovi.

Crtanje čvorova i linkova, na osnovu njihovih Konvejevih kodova u programu *LinKnot*, omogućava funkcija `ShowKnotfromPdataNew`. Ova funkcija bilo koji Konvejev kôd nekog čvora ili linka (uključujući kodove koji nisu kanonski) prevodi u P-data, a zatim prikazuje odgovarajući 3D dijagram.

Pored originalnog programa *KnotScape*, crtanje čvorova datih njihovim (minimalnim) DT kodovima, omogućava i program *LinKnot*, u kojem se koristi kombinacija funkcija `fSignsKL` i `fPDataFromDowker`. Kombinacija ovih funkcija `pd=fSignsKL[fPDataFromDowker[DT]]` prevodi minimalne DT kodove iz *KnotScape* formata u P-data, na osnovu kojih možemo nacrtati 3D dijagram koji odgovara datom DT kodu koristeći funkciju `ShowKnotfromPdataNew`.

Kako su svi dijagrami alternirajućeg čvora flip ekvivalentni, alternirajući čvorovi su u našim tablicama predstavljeni samo jednom listom sa dva elementa: kanonskim Konvejevim kodom i minimalnim DT kodom. Pošto kanonski Konvejev kôd u opštem slučaju ne odgovara minimalnom DT kodu čvora, za crtanje dijagrama čvora, koji će poslužiti kao slika u tablicama, bolje je koristiti kanonski Konvejev kôd. On bolje oslikava topološka (strukturna) svojstva samog čvora i omogućava (bar delimično) njihovo vizuelno identifikovanje koje je, u slučaju čvorova prikazanih nekanonskim kodovima, znatno teže. Vizuelna identifikacija odnosi se na prepoznavanje da li se radi o racionalnom, Montezinosovom, arborescentnom ili poliedarskom čvoru.

Crtanje dijagrama čvorova i linkova u formi podesnoj za štampu (u EPS-formatu) omogućavaju dodatne *LinKnot* funkcije ili komunikacija između programa *LinKnot* i programa *KnotPlot* [81] koji omogućava eksportovanje slika

čvorova i linkova u EPS formatu. Većina crteža dijagrama čvorova i linkova u ovom radu dobijena je korišćenjem dodatnih *LinKnot* funkcija.

Značajna prednost navođenja druge liste kod nealternirajućih čvorova, snabdevenih pomenutim skupom podataka, je mogućnost uspostavljanja relacije nasleđivanja senke alternirajućeg čvora iz koga je posmatrani nealternirajući čvor nastao odgovarajućim izborom znakova preseka. Za proizvoljni nealternirajući čvor na ovaj način možemo jednostavno odrediti alternirajući čvor koji ima istu takvu senku. Ideja je donekle slična Rolfsenovom (tj. Rajdemajsterovom) prikazu dijagrama nealternirajućih čvorova 8_{19} , 8_{20} i 8_{21} , koji su prikazani na slici 96. Međutim, u Rolfsenovim tablicama Konvejevi kodovi ovih Montezinosovih čvorova, $(3, 3, 2-)$, $(3, 21, 2-)$ i $(21, 21, 2-)$ ne odgovaraju dijagramima koji su prikazani na navedenoj slici pa, na osnovu ovih dijagrama, nije moguće konstatovati da se radi o Montezinosovim, a ne o poliedarskim čvorovima. Druge liste nealternirajućih čvorova 8_{20} i 8_{21} imaju sledeći oblik:

$$\{(21, -2-1, 2), \{\{8\}, \{4, 8, -12, 2, -14, -6, -16, -10\}\},$$

$$\{(21, 21, -2), \{\{8\}, \{4, 8, -12, 2, 14, -6, 16, 10\}\}\}.$$

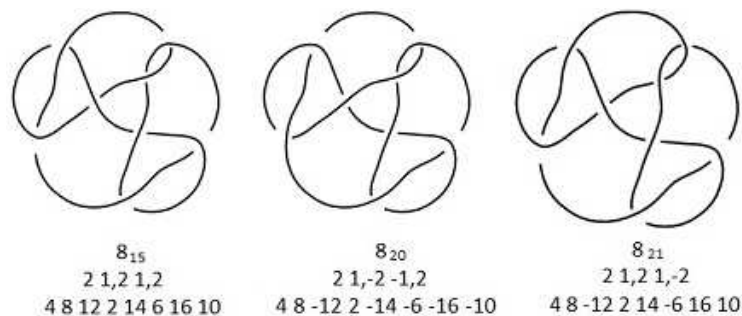
Na osnovu njih se jednostavno zaključuje da oba nealternirajuća čvora nasleđuju senku alternirajućeg čvora $21, 21, 2$. Minimalni DT kôd ovog alternirajućeg čvora se dobija trivijalno, uklanjanjem znakova "–" iz minimalnih DT kodova ovih nealternirajućih čvorova. U ovom slučaju, za oba čvora dobijamo (očekivano) isti minimalni DT kôd alternirajućeg čvora $\{\{8\}, \{4, 8, 12, 2, 14, 6, 16, 10\}\}$.

Međutim, alternirajući čvor, čiju su senku nasledili, nije poliedarski čvor $8_{17} = .2.2$ za koji se Rolfsen opredelio u svojim tablicama. Primenom ovde opisanog metoda koji nealternirajuće čvorove svrstava u flip klase ekvivalencije, alternirajući čvor čiju senku nasleđuju čvorovi 8_{20} i 8_{21} je čvor $8_{15} = 21, 21, 2$. U skladu sa ovakvim pristupom, projekcije čvorova, koje su predložene da u tablicama čvorova predstavljaju čvorove 8_{15} , 8_{20} i 8_{21} , prikazane su na slici 99.

U skladu sa metodom flip klasa ekvivalencije, ako minimalnim dijagramima nekog alternirajućeg i nekog nealternirajućeg čvora odgovara ista senka, tada se dijagram nealternirajućeg čvora nalazi u istoj flip klasi ekvivalencije kojoj pripada i dijagram na kome se realizuje minimalni DT kôd tog nealternirajućeg čvora.

Neke od prednosti organizovanja tablica čvorova na osnovu flip klasa ekvivalencije su sledeće:

1. Obezbeđena je podrška radu sa dijagramskim invarijantama čvorova.
2. Relacijom nasleđivanja senki minimizovan je ukupan broj senki u tablicama čvorova.
3. Uspostavljena je direktna korespodencija između nealternirajućih i alternirajućih čvorova na nivou minimalnih dijagrama.



Slika 99: Čvorovi 8_{15} , 8_{20} i 8_{21} prikazani u tablicama zasnovanim na metodu flip klasa ekvivalencije, dati svojim Konvejevim simbolom i minimalnim DT kodom čvora

Navedeni novi metod formatiranja tablica čvorova primenjen je za prikaz novih čvorova u Konvejevoj notaciji izvedenih u okviru naših istraživanja – alternirajućih i nealternirajućih čvorova sa $n = 13$ preseka i alternirajućih čvorova sa $n = 14$ preseka.

Imajući u vidu prednosti koje pruža svrstavanje čvorova u flip klase ekvivalencije, predstavnike flip klasa smo odredili i za sve ranije izvedene čvorove u Konvejevoj notaciji sa $n < 13$ preseka i rezultate organizovali u novim tablicama.

Novе tablice čvorova u Konvejevoj notaciji mogu se preuzeti sa sledećih adresa:

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ConwayList12Zekovic.nb>
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ConwayList12Zekovic.pdf>
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ConwayList13Zekovic.nb>
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ConwayList13Zekovic.pdf>
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ConwayList14Zekovic.nb>
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ConwayList14Zekovic.pdf>

5.3 Metod minimizacije čvorova i linkova

Minimizacija čvorova i linkova je jedan od najaktuelnijih problema u teoriji čvorova. U uvodnom poglavlju 1.2 predstavljeni su najpoznatiji metodi i programi za minimizaciju i prepoznavanje čvorova i linkova. Složenost algoritama, koji se primenjuju u njima, raste sa brojem preseka čvora ili linka. Trenutno najbolji program za prepoznavanje čvorova je *KnotFind*. Ovakav program za linkove još uvek nije napravljen. U ovom poglavlju predložićemo algoritam za minimizaciju u kome je dimenzija problema smanjena sa n , gde je n broj preseka, na n_r , gde n_r označava broj R-spletova u Konvejevom zapisu dijagrama. Algoritam se može primeniti i na čvorove i na linkove.

Svaki dijagram čvora ili linka može se pomoću flipova transformisati u kanonski Konvejev dijagram D . U ovom dijagramu možemo razlikovati neminimalne (nelaternirajuće) R -spletove koji mogu biti redukovani na minimalne (R -spletove konstantnog znaka). Takve redukcije zvaćemo *lokalnim radukcijama*. Za realizaciju lokalne redukcije može se primeniti Algoritam 3.

U svakoj lokalnoj redukciji možemo posmatrati razliku d_R između broja preseka c_R neredukovanog R -spleta R i broja preseka $c_{R'}$ redukovano spleta R' : $d_R = c_R - c_{R'} \geq 0$ i zvati tu razliku *lokalnim defektom R -spleta*. Ovo možemo uraditi sa svim R -spletovima dijagrama D . Zbir lokalnih defekata uzet preko svih R -spletova dijagrama D ćemo zvati *lokalnim defektom dijagrama D* . Označimo sa D' lokalno minimizovani dijagram D . Nakon toga možemo dobiti iz D' njegov odgovarajući C -link C' . Na dijagrame D' i C' možemo primeniti *globalnu minimizaciju*, tj. redukovati ih na minimalne dijagrame D'_m i C'_m . Označimo broj preseka dijagrama D' sa $c(D')$, broj preseka C -linka C' sa $c(C')$, broj preseka dijagrama D'_m sa $c(D'_m)$, a broj preseka minimalnog dijagrama C'_m sa $c(C'_m)$, izračunajmo razlike $d' = c(D') - c(D'_m) \geq 0$ i $d'_C = c(C') - c(C'_m) \geq 0$ i nazovimo ih, redom, *globalnim defektom* i *globalnim C -defektom*.

Hipoteza 2 *Za svaki lokalno minimizovani dijagram D' važi $d' = d'_C$.*

Koristeći ovu hipotezu u suprotnom smeru, u cilju proširenja C -linkova, tvrdimo da globalni defekt ostaje očuvan pri proširenju C -linkova.

PRIMER 4 C -link $C = (2, -2)(2, -2)$ sa $n = 8$ preseka se minimizacijom svodi na Boromejske prstenove, link $6_2^3 = 6^*$ sa $n = 6$ preseka, pa je $d'_C = 2$. Ako proširimo C do dijagrama $D' = (3\ 2\ 1, -4\ -3)(2\ 1\ 4, -2\ -1)$ sa R -spletovima konstantnog znaka, on ima $n = 23$ preseka i minimizacijom se svodi na $D'_m = \{\{21\}, \{4, 14, 26, 28, 30, 20, 2, 42, 40, 10, 34, 36, 12, 8, 6, 18, 38, 22, 24, 32, 16\}\}$ sa $n = 21$ preseka, tako da je $d' = 2 = d'_C$. U opštem slučaju, ako je Hipoteza 2 tačna, tada za proizvoljne pozitivne R -spletove t_1, t_2, t_3, t_4 i $D' = (t_1, -t_2)(t_3, -t_4)$, globalni defekt iznosi $d' = d'_C = 2$.

Ovo znači da pri minimizaciji svakog dijagrama nekog čvora ili linka primenjujemo sledeći algoritam:

ALGORITAM 10

1. Transformišemo pomoću flipova dijagram D u njegovu kanonsku formu;
2. Vršimo sve lokalne redukcije R -spletova i dobijamo dijagram D' ;
3. Za lokalno redukovani dijagram D' nalazimo njegov odgovarajući C -link C' ;
4. Minimizujemo C' i dobijamo C'_m ;
5. Na D' primenjujemo isti minimizacioni postupak kakav je korišćen u koraku 4).

Svakako, glavni problem ostaje korak 4., ali je mnogo lakše uočiti optimalnu minimizacionu strategiju radeći sa malim C -linkovima C' i C'_m , nego sa znatno većim dijagramom D' . Na ovaj način, problem minimizacije se svodi sa većeg čvora i dimenzije n , koja predstavlja njegov broj preseka, na dimenziju njegovog C -linka, tj. broj R -spletova polaznog (većeg) čvora - n_r .

U izvesnim slučajevima, minimizaciju možemo vršiti i u čvorovima i linkovima datim u opštem obliku.

PRIMER 5 *Neka je data familija $D' = 6*2 : -a : -b0.c$ ($a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$) neminimalnih osnovnih dijagrama sa $c(D') = a + b + c + 4$ preseka, koji se minimizacijom svode na $D_m = 6*(a - 1).(b - 1).(c + 1) : -20$ sa $c(D_m) = a + b + c + 3$ preseka, pa je globalni defekt $d' = 1$. Od dijagrama D' dobijamo neminimalni C -link $C' = 6*2 : -2 : -20.2$, a od D_m minimalni C -link $C_m = 6*2.2.2 : -20$, pa je $d' = 1 = d'_C$.*

6 Pojedinačne promene preseka koje čuvaju minimalni broj preseka

U ovom poglavlju razmatrani su čvorovi koji, nakon jedne promene preseka, ne menjaju svoj minimalni broj preseka. Uočene su tri klase ovakvih čvorova koje su nazvane po autorima.

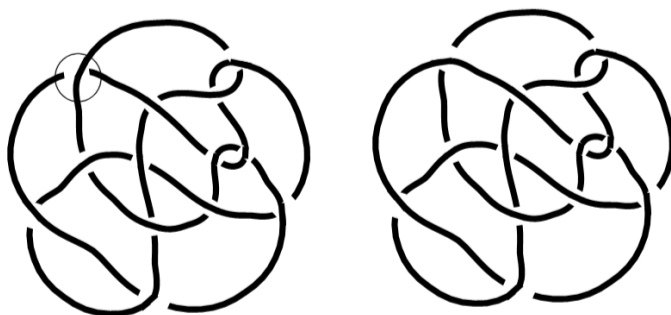
Definicija 38 *Neka je dat minimalni dijagram D čvora K sa n preseka i njegov presek c . c se naziva presekom koji čuva minimalni broj preseka ako promena preseka c daje minimalni dijagram D' čvora K' sa istim (minimalnim) brojem preseka n . Par čvorova (K, K') se naziva parom koji čuva broj preseka.*

6.1 Kaufmanovi, Zeković i Tanijamini čvorovi

L. Kaufman je prvi predvideo da promena preseka u nekom minimalnom dijagramu D alternirajućeg čvora K ne mora uvek dati kao rezultat smanjenje broja preseka, tj. predvideo je postojanje parova čvorova koji čuvaju broj preseka kod kojih je prvi čvor K alternirajući. Ovo svojstvo ćemo zvati *Kaufmanovim svojstvom*. Svaki par takvih čvorova (K, K') ćemo zvati *Kaufmanovim parom*, a alternirajući čvor K ćemo zvati *Kaufmanov čvor*.

Kaufmanovi parovi se po prvi put javljaju među čvorovima sa $n = 13$ preseka. Na primer, dijagrami (D, D') dati Konvejevim simbolima $D = 10** .20 ::: 20.20$ i $D' = 102** -1.20 ::: 20.20$, sa DT kodovima $\{\{13\}, \{6, 16, 22, 20, 24, 18, 26, 4, 8, 12, 2, 14, 10\}\}$ i $\{\{13\}, \{6, 16, 22, 20, 24, 18, 26, 4, 8, 12, 2, -14, 10\}\}$ (čiji je presek $c = 14$ zaokružen na slici 100 crnim krugom) i njima odgovarajući čvorovi $K = 13a4586$ i $K' = 13n1214$, predstavljaju primer Kaufmanovog para.

Nealternirajući čvor K nazivamo *skoro-alternirajućim* ako poseduje dijagram D koji pomoću jedne promene preseka postaje dijagram nekog alternirajućeg čvora.

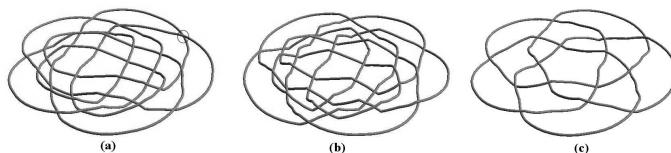


Slika 100: Dijagrami $D = \{\{13\}, \{6, 16, 22, 20, 24, 18, 26, 4, 8, 12, 2, 14, 10\}\}$ i $D' = \{\{13\}, \{6, 16, 22, 20, 24, 18, 26, 4, 8, 12, 2, -14, 10\}\}$ i Kaufmanov par $(13a4586, 13n1214)$

Uočimo da je drugi član svakog Kaufmanovog para, čvor K' , uvek skoro-alternirajući čvor sa istim brojem preseka kao njemu odgovarajući alternirajući čvor. Za $n \leq 12$ preseka svi skoro-alternirajući čvorovi imaju manji broj preseka od njima odgovarajućih alternirajućih čvorova.

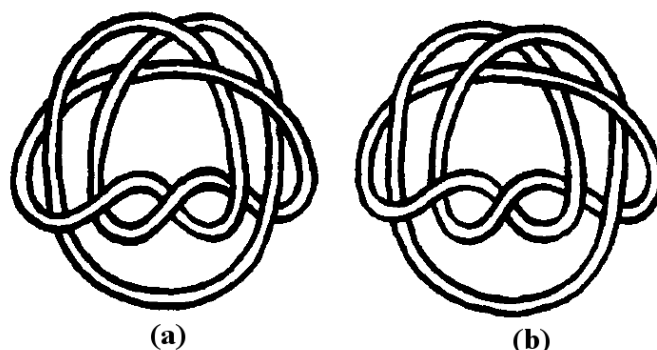
Definicija 39 *Neka je dat minimalni dijagram D nekog alternirajućeg čvora K sa n preseka i neka svi preseci dijagrama D zadovoljavaju Kaufmanovo svojstvo. Tada se čvor K naziva Super-Kaufmanovim čvorom.*

Primeri Super-Kaufmanovih čvorova prikazani su na slici 101b,c. Prvi čvor je alternirajuća verzija satelitskog čvora (2-kabliranog čvora) $8_{18} = 8^*$, a drugi je torusni čvor $T(5, 4)$ transformisan u alternirajući čvor, tj. pleteni čvor (eng. *weaving knot*) $W(5, 4)$ (bazični poliedar 1599*).



Slika 101: (a) Satelitski čvor (2-kabl) čvora $8_{18} = 8^*$; (b) njegova alternirajuća verzija; (c) pleteni čvor $W(5, 4) = 1599^*$

Autor ovog rada je prvi uočio par nealternirajućih čvorova koji čuvaju broj preseka nakon jedne promene preseka. To je par čvorova $(10_{161}, 10_{139})$ prikazanih svojim minimalnim dijagramima u Rolfsenovoј knjizi (Appendix A, [35]). Uočimo da je prvi čvor u tom paru, $K = 10_{161} = 3 : -20 : -20$ poliedarski, a da je drugi, $K' = 10_{139} = 4, 3, 3-$ algebarski, ali su njihovi minimalni dijagrami oba poliedarski. Prema tome, takve parove nealternirajućih čvorova zvaćemo *Zeković parovima*. Pomenuti Zeković par je prikazan na slici 102.



Slika 102: Poliedarski minimalni dijagrami čvorova (a) 10_{161} ; (b) 10_{139} iz Rolfsenove knjige. Drugi dijagram je reflektovan u horizontalnom ogledalu u odnosu na originalni crtež

K. Tanijama je predložio prvi dijagram nealternirajućeg čvora, satelitskog čvora $8_{18} = 8^*$ sa svojstvom očuvanja broja preseka zadovoljenim u svakom preseku. Svaki nealternirajući čvor takvog tipa zvaćemo *Tanijamin čvor*. Pomenuti Tanijamin čvor je prikazan na slici 101a.

Kaufmanovi, Zeković i Tanijama čvorovi uvedeni su u [123].

Presek se naziva *izolovanim* ako predstavlja presek nekog bazičnog poliedra.

Teorema 18 *Parovi čvorova koji čuvaju broj preseka mogu biti izvedeni samo iz poliedarskih minimalnih dijagrama promenama preseka u izolovanim presecima 1 ili -1 [123].*

U cilju kompletnog (iscrpljujućeg) izvođenja svih dijagrama koji čuvaju broj preseka, možemo koristiti Algoritam 11 zasnovan na Teoremi 18.

ALGORITAM 11

1. Iz tablica čvorova sa n preseka, datih u Konvejevoj notaciji, izabrati sve minimalne poliedarske dijagrame D čvora K ;
2. U svakom od njih izvršiti sve moguće kombinacije pojedinačnih promena preseka u svim izolovanim presecima koji sadrže elementarne spletove 1 ili -1 ;
3. Minimizovati sve dijagrame dobijene u delu 2) i izabrati među njima sve dijagrame sa brojem preseka n .

U slučaju alternirajućih čvorova, u potrazi za Kaufmanovim parovima, zahvaljujući Tejtovoj Flip teoremi, za svaki čvor je dovoljno koristiti samo jedan minimalni dijagram D . Međutim, kod nealternirajućih čvorova, u potrazi za

Tabela 5: Kaufmanovi čvorovi koji pomoću dveju različitih promena preseka daju dva različita skoro-alternirajuća čvora

13a3804	13a3764	13a3507	13a3647	13a3448
13n710	13n711	13n9954	13n4000	13n4000
13n3351	13n4006	13n710	13n711	13n4031

Zeković čvorovima, moramo koristiti sve različite predstavnike flip klasa ekvivalencije koji predstavljaju minimalne dijagrame datog nealternirajućeg čvora K .

Kao što smo već pomenuli, Kaufmanovi čvorovi se javljaju po prvi put među čvorovima sa $n = 13$ preseka. Za $n = 13$ dobili smo 159 parova Kaufmanovih čvorova. Interesantno je uočiti da ni jedan od njih nije dobijen iz čvorova sa bazičnim poliedrima 6^* i 8^* : prvi bazični poledar koji daje Kaufmanove čvorove je 9^* . Dobijenih 159 parova potiču od 154 alternirajuća čvora i daju kao rezultat 80 skoro-alternirajućih čvorova. Za $n = 14$ dobili smo 1043 Kaufmanovih parova čvorova koji su izvedeni iz 984 alternirajuća čvora i daju kao rezultat 529 skoro-alternirajućih čvorova. Kompletni rezultati za Kaufmanove čvorove sa $n = 13$ preseka, zajedno sa crtežima odgovarajućih minimalnih dijagrama se mogu preuzeti sa sledećih adresa:

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/KauffmanKnots13.nb>.
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/KauffmanKnots13.pdf>.

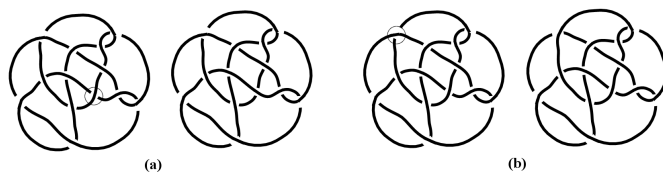
Slična lista Kaufmanovih čvorova sa $n = 14$ preseka, ali bez njihovih crteža, može se preuzeti sa adresa:

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/KauffmanKnots14.nb>.
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/KauffmanKnots14.pdf>.

Interesantni primeri iz ovih lista su čvorovi koji pomoću dveju različitih promena preseka u svom minimalnom dijagramu daju po dva različita skoro-alternirajuća čvora. Oni su navedeni u tabeli 5. Prvi od njih, čvor 13a3804, koji nakon jedne promene preseka daje skoro-alternirajući čvor 13n710, a nakon druge daje skoro-alternirajući čvor 13n3351, prikazan je na slici 103.

Naredno pitanje je: da li možemo izvesti sve Kaufmanove parove čvorova sa datim brojem preseka n bez korišćenja kompletnih tablica alternirajućih čvorova sa n preseka datih u Konvejevoj notaciji.

Hipoteza 3 *Neka je dat skoro alternirajući dijagram D nekog čvora koji pripada nekom Kaufmanovom paru ili Zeković paru i neka D' predstavlja njegov odgovarajući C -link. Bilo koje proširenje dijagrama D' čuva minimalnost i daje novi minimalni Kaufmanov (ili Zeković) dijagram.*



Slika 103: Kaufmanovi parovi čvorova (a) (13a3804, 13n710); (b) (13a3804, 13n3351)

Izvođenjem svih poliedarskih C -linkova iz liste bazičnih poliedara i njihovim proširivanjem pomoću funkcije $fGenKL$, u skladu sa Hipotezom 3, možemo izvesti sve Kaufmanove parove čvorova bez korišćenja kompletnih lista alternirajućih čvorova sa n preseka datih u Konvejevoj notaciji.

PRIMER 6 Neka je dat Kaufmanov par čvorova (13a4586, 13n1214) minimalnim dijagramima prikazanim na slici 100. Primenjujući $LinKnot$ funkciju $fGenKL$ na polazni C -link $13n1214 = 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 20.20$, u skladu sa Hipotezom 3, za $n = 15$ dobijamo 16 skoro alternirajućih minimalnih dijagrama: $10^{**} - 1.2110 \text{ ::: } 20.20, 10^{**} - 1.220 \text{ ::: } 20.20, 10^{**} - 1.310 \text{ ::: } 20.20, 10^{**} - 1.40 \text{ ::: } 20.20, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 210.210, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 30.30, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 2110.20, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 220.20, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 310.20, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 40.20, 10^{**} - 1.210 \text{ ::: } 20.210, 10^{**} - 1.30 \text{ ::: } 20.30, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 20.2110, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 20.220, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 20.310, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 20.40, 10^{**} - 1.210 \text{ ::: } 210.20, 10^{**} - 1.30 \text{ ::: } 30.20, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 210.30, 10^{**} - 1.20 \text{ ::: } 30.210, 10^{**} - 1.210 \text{ ::: } 20.30, 10^{**} - 1.210 \text{ ::: } 30.20, 10^{**} - 1.30 \text{ ::: } 20.210, i 10^{**} - 1.30 \text{ ::: } 210.20$, tako da kao konačni rezultat dobijamo 16 Kaufmanovih parova čvorova sa $n = 15$ preseka: (15a52868, 15n78717), (15a84825, 15n62453), (15a84845, 15n66710), (15a14093, 15n2659), (15a37451, 15n38245), (15a79039, 15n64907), (15a79038, 15n75492), (15a45437, 15n80156), (15a83243, 15n46719), (15a52722, 15n16863), (15a78977, 15n31094), (15a78976, 15n31085), (15a38764, 15n34121), (15a83237, 15n66710), (15a52001, 15n44984), i (15a29067, 15n53618).

Izvođenje Zeković parova čvorova se vrši iz minimalnih poliedarskih dijagrama nealternirajućih čvorova. Nakon toga je potrebno izvršiti promene preseka u njihovim izolovanim presecima, izabrati dijagrame koji čuvaju broj preseka i prepoznati njihove odgovarajuće čvorove.

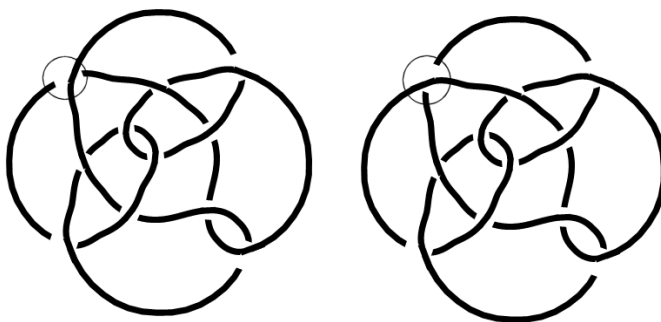
Zeković parovi su nealternirajući čvorovi sa istim brojem preseka i na međusobnom rastojanju 1 koje se ostvaruje na njihovim minimalnim dijagramima. Prvi Zeković parovi čvorova javljaju se za $n = 10$ preseka i to su čvorovi $(10_{161}, 10_{139})$ (slika 102) i $(10_{161}, 10_{145})$. Za $n = 11$ postoji 12 Zeković parova: $(K11n118, K11n84)$, $(K11n145, K11n96)$, $(K11n104, K11n135)$, $(K11n102, K11n116)$, $(K11n102, K11n135)$, $(K11n116, K11n49)$, $(K11n111, K11n116)$, $(K11n111, K11n143)$, $(K11n159, K11n95)$, $(K11n143, K11n49)$, $(K11n111, K11n135)$, i $(K11n145, K11n145)$.

Najinteresantnija pojava vezana za Zeković čvorove je da su svi do sada izvedeni Perkovi čvorovi (za $n \leq 13$ preseka) Zeković čvorovi.

Interesantan fenomen predstavlja Zeković par ($K11n145, K11n145$) koji se sastoji od minimalnih dijagrama $D = 9^*.2. -1 : -2. -1 : . -1 = \{\{11\}, \{6, 14, 10, -18, 2, 22, -20, 4, -12, -8, -16\}\}$ i $D' = 9^*.2. -1 : -2. -1 : -1. -1 = \{\{11\}, \{6, 14, 10, -18, 2, -22, -20, 4, -12, -8, -16\}\}$ koji se razlikuju samo u jednom preseku i predstavljaju čvor $K11n145$ i njegovu sliku u ogledalu (slika 104). Rastojanje 1 između čvora i njegove slike u ogledalu može se pojaviti i kod alternirajućih čvorova, ali se može ostvariti samo preko neminimalnih dijagrama (npr., kod čvora 6_1). Za $n = 12$ je dobijeno 399 Zeković parova dijagrama i 117 Zeković parova čvorova. Kompletni rezultati za Zeković čvorove sa $n = 12$ preseka, zajedno sa crtežima njihovih odgovarajućih minimalnih dijagrama mogu se preuzeti sa adrese:

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ZekovicKnots12.nb>.

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ZekovicKnots12.pdf>.



Slika 104: Zeković par čvorova koji se sastoji od čvora $K11n145$ i njegove slike u ogledalu

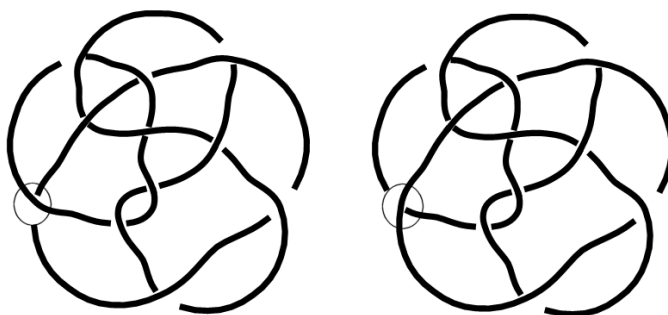
Izuzev Kaufmanovih i Zeković čvorova razmotrićemo takođe i Kaufmanove i Zeković linkove, pri čemu osnovne definicije, svi algoritmi za njihovo izvođenje i sva tvrđenja ostaju ista. Za prepoznavanje linkova umesto programa `fKnotFind`, bilo je neophodno korišćenje polinomskih invarijanata, pri čemu najpouzdanije rezultate daje Kaufmanov polinom sa dve promenljive.

Kaufmanovi osnovni linkovi su izvedeni iz poliedarskih osnovnih linkova, gde je za svaki takav link korišćen samo jedan njegov minimalni dijagram, u kome su zatim vršene promene preseka u izolovanim presecima u cilju izdvajanja dijagrama koji čuvaju broj preseka. Izvedena je lista Kaufmanovih linkova iz liste osnovnih linkova sa $n \leq 12$ preseka izvedenih iz bazičnih poliedara 6^*-1212^* .

Kao rezultat je dobijeno 45 parova minimalnih dijagrama koji daju 37 Kaufmanovih parova linkova (koji mogu biti prošireni na veći broj preseka korišćenjem Hipoteze 3). Najmanji (i jedini) Kaufmanov link sa $n = 11$ preseka je ($L11a506$,

$L11n260$) i dat je minimalnim dijagramima $D = 9*2 : .2 = \{\{3, 3, 5\}, \{8, 10, 14, 16, 18, 22, 4, 20, 2, 6, 12\}\}$ i $D' = 9*2. -1 : 2 = \{\{3, 3, 5\}, \{8, -10, 14, 16, 18, 22, 4, 20, 2, 6, 12\}\}$ (slika 105). Svi pomenuti Kaufmanovi linkovi sa $n \leq 12$ preseka su izvedeni iz 35 osnovnih linkova. Kao rezultat, dobili smo 27 skoro alternirajućih Kaufmanovih linkova. Njihova lista može se preuzeti sa adresa:

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/KauffmanLinks12.nb>.
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/KauffmanLinks12.pdf>.



Slika 105: Kaufmanov link ($L11a506, L11n260$)

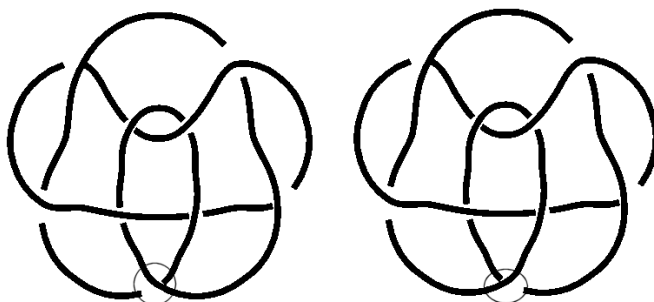
Prvi Zeković linkovi javljaju se za $n = 9$ preseka, na primer, par minimalnih Zeković dijagrama $D = 6*2 : -20 : -20 = \{\{4, 5\}, \{10, -12, 18, -14, 6, 16, -4, -8, 2\}\}$ i $D' = 6*2 : -20. -1. -20 = \{\{4, 5\}, \{10, -12, 18, -14, 6, -16, -4, -8, 2\}\}$ koji predstavlja Zeković par linkova $(9_{61}^2, 9_{53}^2)$ (slika 106). Zeković linkove smo izveli za $n \leq 11$ preseka i dobili 74 Zeković parova. Njihova lista može se preuzeti sa adresa:

<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ZekovicLinks11.nb>.
<http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/ZekovicLinks11.pdf>.

Parovi čvorova, koji čuvaju minimalni broj preseka nakon jedne promene preseka, posebno su interesantni za definisanje maksimalnih brojeva odvezivosti koje ćemo uvesti u sedmom poglavlju.

6.2 Perkovi čvorovi

Jednu od najjednostavnijih dijagramskih invarijanata čvorova predstavlja broj uvrnutosti $w(D)$ (eng. *writhe*) nekog dijagrama D – zbir znakova preseka ovog dijagrama. Ukoliko nismo zainteresovani za "levu" i "desnu" orijentaciju čvorova, umesto izraza $w(D)$ možemo posmatrati njegovu apsolutnu vrednost $|w(D)|$. Lako se pokazuje da broj uvrnutosti, uzet preko svih dijagrama nekog čvora, nije invarijanta tog čvora: Rajdemajsterov potez I menja broj uvrnu-



Slika 106: Zeković par linkova ($9_{61}^2, 9_{53}^2$)

tosti. Stoga njegovu vrednost možemo učiniti proizvoljnom dodajući dijagramu D petlje "leve" ili "desne" orijentacije (ili ih eliminišući). Prema tome, pri razmatranju broja uvrnutosti moramo se ograničiti na redukovane dijagrame – dijagrame bez petlji. Naredno pitanje vezano je za Rajdemajsterove transformacije koje čuvaju broj uvrnutosti: jasno je da Rajdemajsterovi potezi II i III ne menjaju broj uvrnutosti. Takođe, flip potezi čuvaju broj uvrnutosti, pa važi teorema (Druga Tejtova hipoteza) koja tvrdi da svaka dva minimalna dijagrama jednog alternirajućeg čvora imaju isti broj uvrnutosti. Ista osobina važi za nealternirajuće minimalne dijagrame nealternirajućeg čvora koji pripadaju istoj flip klasi ekvivalencije (takvi dijagrami će imati isti broj uvrnutosti). Međutim, pomenuli smo da ovo svojstvo ne mora da važi za minimalne dijagrame istog čvora koji pripadaju različitim flip klasama ekvivalencije: primer za to su minimalni dijagrami Perkovog čvora 10_{161} , prikazani na slici 98, koji imaju različite brojeve uvrnutosti.

Pošto je bitan deo ovog rada posvećen radu sa Konvejevom notacijom i izračunavanju svih klasa flip ekvivalencije minimalnih dijagrama (nealternirajućih) čvorova, u ovom poglavlju prikazaćemo neke od rezultata koji se dobijaju na osnovu prethodnog.

Značaj tačke 1. u listi navedenih prednosti pristupa kreiranju tablica Konvejevih čvorova zasnovanog na flip klasama ekvivalencije ilustrovaćemo na primeru pojma minimalnog broja uvrnutosti nekog čvora i Perkovih čvorova, razmatranih u radu [88] i novodobijenih Perkovih čvorova sa $n = 13$ preseka.

Priča o čuvenom Perkovom paru, nealternirajućim čvorovima 10_{161} i 10_{162} je zapravo priča o ponovljenim greškama koje mogu dovesti do interesantnih zapažanja i otkrića. Prvu senzaciju predstavljala je činjenica da se u fundamentalnom radu Dž. Konveja [33] i prvom izdanju Rolfsenove knjige objavljenom 1976. godine [35] potkrala greška: pojavila su se dva čvora $10_{161} = 3 : -20 : -20$ i $10_{162} = 21 : -20 : -20$ koji zapravo predstavljaju dva različita dijagrama istog čvora. Neobično je da se ova greška dogodila sa čvorovima koji imaju relativno mali broj preseka: svega 10. Ovu grešku uočava K. Perko [39], matematičar koji je studirao na Prinstonu (Princeton), između ostalih kod R.H. Foksa (R.H. Fox), Dž.V. Milnora (J.W. Milnor), H.F. Trotera (H.F. Trot-

ter) i dr. i koji je svoju karijeru nastavio kao advokat [40]. Da stvar bude interesantnija, ovo je prvi (i jedini među čvorovima do $n \leq 10$ preseka) primer čvora koji poseduje dva različita (flip-neekvivalentna) minimalna dijagrama sa različitim brojevima uvrnutosti: 8 i 10, respektivno (slika 98). Podsetimo se da u slučaju alternirajućih čvorova ovakva pojava nije moguća pošto, u skladu sa Tejtovom Flip Teoremom, svi minimalni dijagrami nekog alternirajućeg čvora pripadaju istoj flip klasi ekvivalencije, a flipovi čuvaju broj uvrnutosti. Nastavak propusta vezanih za Perkov par vezan je za pojavu drugog izdanja Rolfsenove knjige objavljenog 2003. godine [35] u kome je, umesto da čvor 10_{162} bude izostavljen, a naredni čvorovi sa $n = 10$ preseka prenumerisani i označeni sa 10_{162} - 10_{165} , ovaj čvor jeste izostavljen, ali prenumerisanje nije izvršeno. Kao rezultat, pojavila se nova omaška, prisutna i na sajtu *Wolfram MathWorld* [41]. Naime, čvorovi koji bi trebalo da predstavljaju Perkov par su čvorovi $10_{161} = 3 : -20 : -20$ i $10_{163} = -30 : -20 : -20$ iz (neprenumerisanih) Rolfsenovih tablica i oni ne predstavljaju Perkov par, tj. isti čvor. Kao i ranije, ovu omašku opet uočava K. Perko.

Svaki čvor koji poseduje dva ili više minimalnih dijagrama sa različitim brojevima uvrnutosti nazivamo Perkovim čvorom. Primeri ovakvih čvorova retko se javljaju u literaturi. U radu [88] nađeni su svi Perkovi čvorovi sa $n \leq 12$ preseka, kojih ima ukupno 29 i to:

- Perkov čvor 10_{161} sa $n = 10$ preseka;
- 3 čvora: $11n116$, $11n135$, $11n143$ sa $n = 11$ preseka;
- 25 čvorova: $12n349$, $12n382$, $12n394$, $12n398$, $12n417$, $12n430$, $12n436$, $12n519$, $12n535$, $12n552$, $12n579$, $12n594$, $12n617$, $12n624$, $12n629$, $12n638$, $12n640$, $12n644$, $12n647$, $12n650$, $12n655$, $12n739$, $12n764$, $12n850$, $12n851$ sa $n = 12$ preseka.

Uočimo da su svi ovi čvorovi nealgebarski.

Za generisanje svih Perkovih čvorova sa $n \leq 12$ preseka dovoljni su C -linkovi: $6^* - 2.2. - 2 : 20$, $6^*2 : -20 : -20$, $6^*2. - 2. - 20.20$, $8^* - 20.20. - 20$, $8^*2. - 2. - 20.20$, $9^*2. - 2. - 20$.

Perkovi čvorovi dozvoljavaju proširenje na familije sa istim svojstvom: familija čvorova izvedena iz Perkovog para $10_{161} = 3 : -20 : -20$ i $10_{162} = 21 : -20 : -20$ daje redom čvorove $12n850$, $14n26229$, $16n965076$, ... Čvorovi koji pripadaju ovoj familiji poseduju par minimalnih dijagrama $(2k+1) : -20 : -20$ i $(2k)1 : -20 : -20$ čiji se brojevi uvrnutosti zazlikuju za 2. Perkov par $(10_{161}, 10_{162})$ se dobija za $k = 1$ iz ove familije. Na isti način, familija čvorova koja se sastoji od čvorova $11n135$, $13n3546$, $15n114094$, ... poseduje isto svojstvo koje se realizuje na njihovim minimalnim dijagramima $2(2k) : -20 : -20$ i $2(2k-1)1 : -20 : -20$, $k = 1, 2, 3, \dots$ U skladu sa metodom zasnovanom na C -linkovima, očekujemo da se ista pojava realizuje na svim parovima dijagrama $t(k+1) : -20 : -20$ i $tk1 : -20 : -20$ koji predstavljaju isti čvor, pri čemu je t pozitivni racionalni splet, a k celobrojni pozitivni splet ($k \in \mathbb{N}$).

Pošto odgovarajućim izborom spleta t i parametra k za svako $n \geq 10$ možemo postići da dobijeni dijagrami predstavljaju neki čvor, tj. da broj komponenata dijagrama bude 1, očekujemo da za svako $n \geq 10$ postoji bar jedan Perkov čvor. Svi navedeni parovi dijagrama imaju brojeve uvrnutosti koji se razlikuju za 2.

U odnosu na Perkove čvorove nameću se sledeći otvoreni problemi:

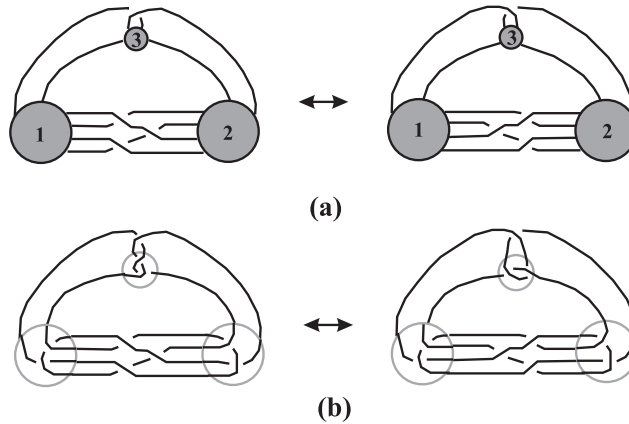
- Da li postoje algebarski Perkovi čvorovi?
- Koliko različitih vrednosti brojeva uvrnutosti mogu imati različiti minimalni dijagrami istog Perkovog čvora?
- Da li je moguće naći Perkov čvor sa n preseka za koji razlika brojeva uvrnutosti njegovih minimalnih dijagrama može biti proizvoljan paran broj $2k$ ($k \leq n$)⁴ ($k \geq 0$). Naći gornju granicu broja k .

U svojoj nedavno započetoj prepisci K. Perko je postavio sledeća pitanja: "Po čemu se navedenih 29 čvorova razlikuje od svih ostalih nealternirajućih čvorova sa $n \leq 12$ preseka? Da li je moguće, izračunavanjem nekih poznatih polinomskih invarijanata, razlikovati ove čvorove od ostalih?" Drugim rečima, da li neka polinomska invarijanta prepoznaje Perkove čvorove sa n preseka ($n \geq 10$) među svim nealternirajućim čvorovima sa n preseka.

Moguće je da je odgovor na ovo pitanje, bar delimično, pozitivan. U radu [109] M. Kidvel i A. Stoimenov su definisali stepen $deg_z(F)$ Kaufmanovog polinoma sa dve promenljive $F(a, z)$ čvora K kao maksimalni stepen promenljive z u okviru ovog polinoma izračunatog za čvor K . Za alternirajuće čvorove sa n preseka ovaj stepen je konstantan i iznosi $n - 1$ ($n \geq 3$). Međutim, za nealternirajuće čvorove sa n preseka ovaj stepen može uzimati različite vrednosti. Kidvel i Stoimenov su zapazili da je stepen Perkovog čvora 10_{161} jednak 6, dok za sve ostale nealternirajuće čvorove sa $n = 10$ preseka iznosi 8. Među 185 nealternirajućih čvorova sa $n = 11$ preseka postoje 2 čvora sa stepenom 7 i 8 čvorova sa stepenom 8, dakle ukupno 10 čvorova sa stepenom manjim od 9, dok preostalih 175 čvorova imaju stepen 9. Među nealternirajućim čvorovima sa $n = 12$ preseka postoje 24 čvora sa stepenom 8 i 47 čvorova sa stepenom 9, dakle ukupno 71 čvor sa stepenom manjim od 10, dok preostalih 817 čvorova ima stepen 10. Na osnovu ovih rezultata uočili smo sledeću osobinu Perkovih čvorova: ni jedan Perkov čvor sa $n \leq 12$ preseka ne poseduje maksimalni stepen koji mogu da dostignu nealternirajući čvorovi sa n preseka ($n \leq 12$).

Za $n = 13$ preseka nedavno je prepoznato 148 Perkovih čvorova. Svi oni, uključujući i Perkove čvorove sa $n \leq 12$ preseka, imaju dve bitne osobine:

1. ni jedan Perkov čvor sa n preseka ne dostiže maksimalni stepen $deg_z(F)$ Kaufmanovog polinoma sa dve promenljive $F(a, z)$ koji mogu da dostignu nealternirajući čvorovi sa n preseka;
2. svi Perkovi čvorovi su Zeković čvorovi.



Slika 107: (a) Perkov potez. Splet 1 ostaje fiksiran, a spletovi 2 i 3 se flipuju; (b) Perkov potez primenjen na minimalne dijagrame čvora 10_{161} čiji je $w = 8$ i $w = 10$ [13]

U radu [10] u listi poteza koje koristi program *KnotScape*, tj. njegov pot-program *KnotFind*, naveden je i Perkov potez. U okviru ovog poteza, koji predstavlja specifičnu mutaciju, splet 1 ostaje fiksiran, a spletovi 2 i 3 se flipuju (slika 107a). Perkov potez transformiše minimalni dijagram čvora 10_{161} , čiji je broj uvrnutosti $w = 8$, u minimalni dijagram istog čvora čiji je $w = 10$, i prikazan je na slici 107b [13].

7 Minimalni i maksimalni brojevi odvezivosti

U prethodnom izlaganju rekli smo da je u svakom preseku čvora K ili linka L moguće uvesti jednu od tri odvezujuće operacije: *promenu preseka* i dve vrste zaravnjivanja – *orijentisano zaravnjivanje* pod kojim podrazumevamo "zaravnjivanje koje čuva broj komponenata" i *neorijentisano zaravnjivanje* pod kojim podrazumevamo "zaravnjivanje koje ne mora da čuva broj komponenata".

Kao rezultat promena preseka ili orijentisanih zaravnjivanja dobijamo dve klasične invarijante čvorova: broj odvezivosti $u(K)$ i (orijentisani) s -broj odvezivosti $s(K)$. Ove dve invarijante su već razmatrane u trećem i četvrtom poglavlju. Kao rezultat neorijentisanog zaravnjivanja dobijamo (neorijentisani) b -broj odvezivosti $u_b(K)$. Sve tri operacije su definisane kao minimum broja pomenutih operacija potreban da bismo od čvora K dobili nečvor 0_1 , gde se minimum uzima preko svih dijagrama čvora K ili linka L . Pošto su tri pomenute operacije odvezujuće operacije, takođe možemo razmatrati i *mešovite brojeve odvezivosti*, gde je u svakom koraku procesa odvezivanja dozvoljena upotreba bilo koje op-

⁴Razlika brojeva uvrnutosti različitih dijagrama nekog čvora mora uvek biti paran broj $2k$.

eracija promene preseka ili (orijentisanog ili neorijentisanog) zaravnjivanja, tako da u svakom koraku možemo vršiti optimizaciju strategije izborom operacije odvezivanja.

Pošto su svi pomenuti brojevi odvezivosti definisani kao minimumi preko svih dijagrama čvora K , oni su invarijante neizračunljive konačnim postupkom. Da bismo ih učinili izračunljivim, možemo koristiti Bernhard-Jablanovu hipotezu (za broj odvezivosti $u(K)$) ili njene ekvivalente koje možemo formulisati za $s(K)$, $u_b(K)$, ili mešoviti broj odvezivosti. U svim tim slučajevima, struktura algoritma za izračunavanje BJ-brojeva odvezivosti $u_{BJ}(K)$, $s_{BJ}(K)$ i $u_{bBJ}(K)$ i mešovitog BJ-broja odvezivosti je ista:

1. Uzmimo sve minimalne dijagrame D_m čvora K ;
2. Izvršimo sve pojedinačne promene u presecima svih dijagrama D_m ;
3. Minimizujemo sve dobijene dijagrame;
4. Ponavljamo korake 2) i 3) sve dok ne dobijemo nečvor.

Broj odvezivosti $u_{BJ}(K)$ (i svi ostali navedeni brojevi odvezivosti) predstavljaju minimalni broj koraka u takvom rekurzivnom procesu odvezivanja. U svim slučajevima, BJ-odvezivanje se vrši samo preko minimalnih dijagrama. U slučaju alternirajućih čvorova, zahvaljujući Tejtovoj Flip Teoremi, dovoljan je jedan polazni minimalni dijagram, dok u slučaju nealternirajućih čvorova moramo raditi sa svim minimalnim dijagramima (tj. svim njihovim različitim klasama flip ekvivalencije).

7.1 Maksimalni broj odvezivosti

Umesto optimalnih (najkraćih, minimalnih) strategija odvezivanja, možemo razmatrati i najgore moguće (najduže, maksimalne) strategije odvezivanja. Na isti način kao kod izračunavanja BJ-brojeva odvezivosti, radićemo samo sa minimalnim dijagramima, ali ćemo sada tražiti maksimalne brojeve odvezivosti, tj. najduže puteve od datog čvora K do nečvora. Kao najjednostavniji primer, razmotrimo čvor $6_1 = 42$ dat u Konvejevoj notaciji. Jasno je da je ovo racionalni čvor sa brojem odvezivosti 1, tako da je $u(6_1) = u_{BJ}(6_1) = 1$. Ovaj broj odvezivosti se realizuje ako izaberemo optimalnu (minimalnu) strategiju odvezivanja: vršimo promenu preseka u celobrojnom spletu 2 i dobijamo nečvor $4(1, -1) = 0_1$. Ako izaberemo najgoru moguću strategiju na istom minimalnom dijagramu 42, izvršićemo promenu preseka u celobrojnom spletu 4 i dobiti $(1, 1, 1, -1)2 = 22 = 4_1$. U narednom koraku, strategija je iznuđena: kakvu god promenu preseka izvršimo na minimalnom dijagramu čvora 4_1 , dobijamo nečvor. Prema tome, maksimalni broj odvezivosti čvora $K = 6_1$ je $U(K) = 2$.

Na sličan način nečvor možemo dobiti iz čvora $5_2 = 32$ pomoću dva orijentisana zaravnjivanja, ali je maksimalni broj zaravnjivanja ovog čvora jednak 3. U prvom slučaju vršimo prvo zaravnjivanje u celobrojnom spletu 2 i svodimo dobijeni čvor na trolisnik 3_1 . Nakon toga, drugim zaravnjivanjem dobijamo nečvor.

U drugom slučaju, vršimo prvo orijentisano zaravnjivanje u celobrojnom spletu 3 i dobijamo čvor 4_1 , zatim narednim zaravnjivanjem dobijamo trolisnik 3_1 , i konačno, trećim zaravnjivanjem dobijamo nečvor. Prema tome, maksimalni broj zaravnjivanja čvora 5_2 je 3.

To znači da *maksimalne brojeve odvezivosti* dobijamo zamenjujući u prethodnom algoritmu reči "minimalni broj koraka u takvom rekurzivnom procesu odvezivanja" rečima "maksimalni broj koraka u takvom rekurzivnom procesu odvezivanja". Uočimo da ako definišemo maksimalne brojeve odvezivosti preko svih dijagrama, a ne samo preko minimalnih, dobijeni maksimalni brojevi odvezivosti mogu biti neograničeni, pa je to razlog da ih definišemo samo preko minimalnih dijagrama. Druga mogućnost za pojavu beskonačnih maksimalnih brojeva odvezivosti (koju je uočio K. Tanijama) je sledeća: pretpostavimo da se u rekurzivnom procesu odvezivanja "promena preseka/minimizacija" primenjenom na neki polazni čvor K_0 javio čvor K sa n preseka i sa minimalnim dijagramom D . Ako se D nakon jedne promene preseka može redukovati na minimalni dijagram D' čvora K' , takav da dijagram D' ima takođe n preseka, tada u narednom koraku možemo izvršiti sličan postupak. Sledeću promenu preseka možemo izvršiti u dijagramu D' tako da se on konvertuje ponovo u čvor čiji je minimalni dijagram D . Na taj način u svakom narednom koraku možemo prelaziti ("oscilovati") sa čvora K na K' i obratno. Pošto je izračunavanje maksimalnog broja odvezivosti potraga za najgorom strategijom odvezivanja, u ovom slučaju nikada nećemo stići do nečvora 0_1 , pa će maksimalni broj odvezivosti početnog čvora K_0 biti beskonačan. Stoga, u definiciji maksimalnog broja odvezivosti moramo dodati zahtev da se u nizu čvorova, koji se javljaju u ovom rekurzivnom procesu odvezivanja, nikada ne javlja petlja tipa $K \dots \rightarrow K' \rightarrow K$, tj. neki ponovljeni čvor K . Kaufmanovi, Zeković i Tanijamini čvorovi su čvorovi koji mogu da generišu ovakvu petlju. Na isti način dobijamo ostale vrste pomenutih maksimalnih brojeva odvezivosti kod kojih, u slučaju maksimalnih brojeva odvezivosti dobijenih zaravnjivanjima, nije potreban ovaj dodatni zahtev jer svako zaravnjivanje smanjuje broj preseka. Međutim, kod mešovityh brojeva odvezivosti ovaj dodatni zahtev je neophodan pošto su promene preseka uključene u ovakav rekurzivni proces odvezivanja i mogu dovesti do pojave takve beskonačne petlje.

Koristeći navedeni BJ-algoritam, možemo posmatrati ne samo ekstremne (maksimalne i minimalne) puteve od nekog čvora K do nečvora 0_1 , već sve moguće puteve. Ako dozvolimo ne samo pojedinačne, nego i višestruke promene preseka (uključujući i obe vrste zaravnjivanja: orijentisana i neorijentisana), možemo raditi sa parcijalnim poretkom čvorova (koji je definisao K. Tanijama u radovima [120, 121, 122]).

7.2 Tablice

U ovom potpoglavlju razmotrićemo i uporediti razne minimalne i maksimalne brojeve odvezivosti. Čvor se može odvezati primenom odvezujućih operacija promena preseka, orijentisanih zaravnjivanja, kao i neorijentisanih zaravnjivanja i svih njihovih mogućih kombinacija na dati čvor. Na taj način,

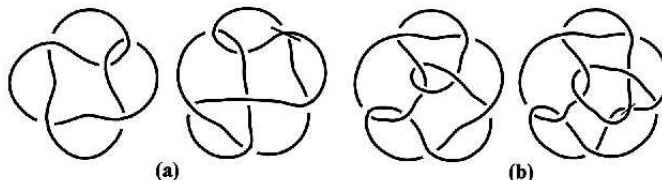
imaćemo pet minimalnih brojeva odvezivosti:

1. klasični broj odvezivosti u , koji se dobija pomoću promena preseka u nekom čvoru ili linku L
2. broj odvezivosti dobijen orijentisanim zaravnjivanjem (zaravnjivanjem koje čuva broj komponentata) s i koji se može računati samo za čvorove
3. broj odvezivosti dobijen neorijentisanim zaravnjivanjem (zaravnjivanjem koje ne mora da čuva broj komponentata) u_b i koji se može računati i za čvorove i za linkove
4. mešoviti broj odvezivosti \vec{u}_{cs} koji se dobija korišćenjem promena preseka i orijentisanih zaravnjivanja i koji se može računati samo za čvorove
5. mešoviti broj odvezivosti u_{cs} koji se dobija korišćenjem promena preseka i neorijentisanih zaravnjivanja, a koji se može računati i za čvorove i za linkove.

U dva poslednja slučaja, u svakom koraku procesa odvezivanja, možemo birati između odgovarajućih dveju odvezujućih operacija pokušavajući da nađemo najbolju odvezujuću strategiju. Svi pomenuti brojevi odvezivosti su konačni i računaju se preko svih dijagrama čvorova i linkova.

Pošto svaki čvor ili link ima beskonačno mnogo različitih dijagrama, ne postoji konačan algoritam za izračunavanje bilo kog od pomenutih brojeva odvezivosti. Za sve njih, izuzev za klasični broj odvezivosti u , možemo zaključiti da su za njihovo izračunavanje neophodni i neminimalni dijagrami, tj. da se ovi brojevi odvezivosti ne mogu dobiti samo korišćenjem minimalnih dijagrama. Podsetimo se, Bernhard-Jablanova hipoteza opisuje rekursivni postupak odvezivanja, kod kojeg se u svakom koraku vrši minimizacija dijagrama. Broj rekursivnih koraka nazivamo $u_{BJ}(L)$ broj odvezivosti, a Bernhard-Jablanova hipoteza tvrdi da je on jednak klasičnom broju odvezivosti $u(L)$. Za sve preostale brojeve odvezivosti je jednostavnio navesti primere čvorova i linkova koji daju korektne brojeve odvezivosti samo ako su izračunati preko neminimalnih dijagrama. Na primer, posmatrajmo broj odvezivosti $s(K)$ koji se dobija orijentisanim zaravnjivanjem. Ako primenimo orijentisano zaravnjivanje na minimalni dijagram čvora $5_2 = 3\ 2$, kao rezultat prvog koraka možemo dobiti čvorove $3_1 = 3$ i $4_1 = 2\ 2$. Naredno zaravnjivanje prvog čvora daje nečvor. Prema tome, broj odvezivosti dobijen na taj način biće 2. Međutim, neminimalni dijagram $2(1, -1)1\ 2$ čvora 5_2 (slika 108a) odvezuje se samo jednim orijentisanim zaravnjivanjem, pa je $s(5_2) = 1$. Znatno interesantniji je primer alternirajućeg čvora 9_{25} (slika 108b): svi njegovi minimalni dijagrami (koji su flip ekvivalentni) mogu se odvezati pomoću najmanje četiri orijentisana zaravnjivanja, ali njegov neminimalni dijagram $6*2\ 1\ 0.(1, -1)\ 0.2. : 2\ 0$ daje $s(9_{25}) = 1$. U četvrtom poglavlju predstavljen je metod za određivanje s -broja odvezivosti, tj. broja odvezivosti koji se dobija orijentisanim zaravnjivanjem. Taj metod se zasnivao na neminimalnim dijagramima čvorova. U tabeli brojeva odvezivosti biće upoređen broj

odvezivosti, dobijen na ovaj način, sa brojem odvezivosti orijentisanim zaravnjivanjem koji se određuje samo preko minimalnih dijagrama. U tabeli su prvi od njih dati u koloni sa oznakom $s[nm]$ (nm ="neminimalni dijagrami"), a drugi oznakom $s[m]$ (m ="minimalni dijagrami").



Slika 108: (a) Čvor $5_2 = 3 2$ i njegov minimalni dijagram $2 (1, -1) 1 2$ koji može biti odvezan pomoću jednog orijentisanog zaravnjivanja; (b) čvor $9_{25} = 2 2, 2 1, 2$ i njegov neminimalni dijagram $6^*2 1 0.(1, -1) 0.2. : 2 0$ koji može biti odvezan pomoću jednog orijentisanog zaravnjivanja

Za ovu priliku smo definisali sve pomenute vrste maksimalnih brojeva odvezivosti zasnovane na "najgorim" strategijama odvezivanja. Kao što smo već pomenuli, da bismo dobili konačne invarijante, maksimalni brojevi odvezivosti su definisani samo preko minimalnih dijagrama i uz izvesne dodatne uslove vezane za rekurzivni proces odvezivanja kojima izbegavamo pojavu petlji (ponovljenih čvorova):

1. maksimalni broj odvezivosti U koji se dobija pomoću promena preseka
2. maksimalni brojevi odvezivosti S dobijeni orijentisanim zaravnjivanjem
3. maksimalni brojevi odvezivosti U_b dobijeni neorijentisanim zaravnjivanjem čvorova
4. maksimalni mešoviti brojevi odvezivosti čvorova \vec{U}_{cs} dobijeni korišćenjem promena preseka i orijentisanih zaravnjivanja
5. maksimalni mešoviti brojevi odvezivosti čvorova U_{cs} dobijeni korišćenjem promena preseka i neorijentisanih zaravnjivanja.

Minimalni i maksimalni brojevi odvezivosti svih pomenutih vrsta su dati za čvorove u tabelama 6 i 7, a za linkove u tabelama 8 i 9. Svi proračuni su izvršeni za čvorove i linkove sa $n \leq 9$ preseka.

Razmotrimo i mogući način određivanja broja odvezivosti $u_{\infty}^0(L)$ koji se dobija primenom operacije $L_0 \leftrightarrow L_{\infty}$. I u ovom slučaju ograničićemo se na izračunavanje BJ-broja odvezivosti $u_{BJ\infty}^0(L)$, primenom BJ-algoritma na minimalne dijagrame. Takođe ćemo pokazati da nejednakost $u_{BJ\infty}^0(L) \geq u_{\infty}^0(L)$ može biti stroga.

Da bismo pristupili izračunavanju broja odvezivosti $u_{BJ\infty}^0(L)$, prvo moramo da identifikujemo minimalne dijagrame D_1 i D_2 takve da se jedan od njih transformiše u drugi nekim $L_0 \leftrightarrow L_{\infty}$ potezom. U tom cilju koristićemo rezultate

dobijene neorijentisanim zaravnjivanjem linkova. Neka je dat minimalni neorijentisani dijagram D linka L . Ako u njegovom preseku c izvršimo oba neorijentisana zaravnjivanja, kao rezultat dobijamo dijagrame D_0 i D_∞ koji su međusobno povezani $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ potezom. Nakon minimizacije ovih dijagrama, dobijamo linkove L' i L'' koji prelaze jedan u drugi jednim $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ potezom. Ovakav postupak vršimo u svim presecima linka L i kao rezultat dobijamo skup neuređenih parova linkova u kome su svaka dva linka, koja pripadaju istom neuređenom paru, povezana nekim $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ potezom. Ovakav algoritam sprovodimo na svim dijagramima linka L . Kao rezultat dobijamo skup neuređenih parova linkova koji se međusobno nalaze na d_∞^0 rastojanju 1. Od posebnog interesa će biti oni parovi linkova među kojima je jedan od njih, npr. L' trivijalan, tj. predstavlja nečvor. U tom slučaju broj odvezivosti drugog linka L'' iz tog para je $u_\infty^0(L'') = 1$.

Da bismo ovo ostvarili, nisu nam potrebni dodatni proračuni. Kako smo prvo odredili brojeve odvezivosti dobijene neorijentisanim zaravnjivanjem, te rezultate iskoristićemo za određivanje u_∞^0 brojeva odvezivosti. U listama neorijentisanih zaravnjivanja linkova svaki član liste sadrži polazni link L , čije je neorijentisano zaravnjivanje preseka izvršeno, i linkove L' i L'' , od kojih je jedan dobijen postavljanjem vertikalnog ogledala u presek, a drugi horizontalnog. Iz tih lista potrebno je samo izdvojiti sve neuređene parove (L', L'') . Nakon toga treba konstruisati graf čija će temena biti navedeni linkovi i u tom grafu za svako teme naći najkraći put koji ga spaja sa temenom koje predstavlja nečvor. Dužina ovog najkraćeg puta je BJ broj odvezivosti $u_{BJ\infty}^0(L)$. u_∞^0 -brojevi odvezivosti određeni na ovaj način, za čvorove i linkove sa $n \leq 8$ preseka, prikazani su u tabelama 6 i 8.

Za ove brojeve odvezivosti važiće nejednakost $u_{BJ\infty}^0(L) \geq u_\infty^0(L)$. Pokažimo da ona može biti stroga. U poglavlju 4.5 je prikazana ekvivalentnost $L_0 \leftrightarrow L_\infty$ i neorijentisanog $H(2)$ pokreta. Čvor $8_3 = 44$, dat svojim neminimalnim dijagramom $4\ 2(1, -1)\ 2$, ima orijentisani broj odvezivosti $s(8_3) = 1$, pa samim tim i broj odvezivosti $u_\infty^0(8_3) = 1$. Međutim, njegov BJ broj odvezivosti je $u_{BJ\infty}^0(8_3) = 2$. Zbog toga bi bilo značajno uspostaviti relaciju između broja odvezivosti $u_\infty^0(L)$ i nekih drugih invarijanata linka L koje predstavljaju donju granicu za ovaj broj odvezivosti i koje bi u izvesnim slučajevima mogle da potvrde da je $u_{BJ\infty}^0(L) = u_\infty^0(L)$. S obzirom da smo za sve čvorove i linkove sa $n \leq 8$ preseka dobili da je njihov broj odvezivosti u_∞^0 jednak 1, 2 ili 3, takve donje granice mogle bi da pokažu da izvesni čvorovi ili linkovi imaju broj odvezivosti $u_\infty^0 > 1$, tj. da on iznosi 2.

Ako želimo da nađemo maksimalni BJ broj odvezivosti $U_{BJ\infty}^0(L)$, to postizemo traženjem puta maksimalne dužine od posmatranog linka L do nečvora u grafu neuređenih parova linkova povezanih operacijom $L_0 \leftrightarrow L_\infty$. Međutim, ako to pokušamo da uradimo traženjem svih puteva od datog linka L do nečvora, a zatim biramo put maksimalne dužine, čekaće nas neprijatno iznenađenje. Na primer, postojaće put (za koji čak ne garantujemo da je najduži) između nečvora i linka 8_3^4 koji ima dužinu 54. Prema tome, jasno je da traženje svih puteva u pomenutom grafu prevazilazi moći naših računara. Razlog zašto će dužina neminimalnih puteva biti tako velika je što radimo u neorijentisanom grafu, pa

prema tome u svakom koraku dozvoljavamo i prelazak $L_0 \rightarrow L_\infty$, ali i prelazak $L_\infty \rightarrow L_0$. Jedan od njih može smanjiti broj preseka, ali ga drugi može povećati. Na taj način, umesto da se ciljno krećemo ka nečvoru stalno smanjujući broj preseka (kao što je to bio slučaj sa svim procesima odvezivanja čvorova ili linkova zaravnjivanjem), mi možemo da svakim potezom "uvezujemo" i "odvezujemo" dati link. Na žalost, uređenje parova čvorova i linkova L' i L'' , koji se dobijaju zaravnjivanjem istog preseka c nekog čvora ili linka L , tako što će prvi član uređenog para imati jedan presek manje ili više od drugog člana nije moguće jer postoje parovi (L', L'') u kojima L' i L'' imaju isti broj preseka, npr. par $(7_1^2, 7_7)$.

U tabelama 6 i 7 su dati:

- BJ-brojevi odvezivosti čvorova u_{BJ} (koji se poklapaju sa klasičnim brojem odvezivosti u) i njihovi maksimalni brojevi odvezivosti U ;
- brojevi odvezivosti dobijeni orijentisanim zaravnjivanjem izračunati preko svih dijagrama, označeni u tabeli sa $s[nm]$, minimalni brojevi odvezivosti dobijeni orijentisanim zaravnjivanjem iz minimalnih dijagrama označeni u tabeli sa $s[m]$, kao i njihovi maksimalni brojevi odvezivosti S ;
- minimalni u_b i maksimalni U_b brojevi odvezivosti dobijeni neorijentisanim zaravnjivanjem čvorova iz njihovih minimalnih dijagrama;
- minimalni \vec{u}_{cs} i maksimalni \vec{U}_{cs} mešoviti brojevi odvezivosti čvorova dobijeni korišćenjem promena preseka i orijentisanih zaravnjivanja, izračunati iz njihovih minimalnih dijagrama;
- minimalni u_{cs} i maksimalni U_{cs} mešoviti brojevi odvezivosti čvorova dobijeni korišćenjem promena preseka i neorijentisanih zaravnjivanja, izračunati iz njihovih minimalnih dijagrama;
- minimalni broj odvezivosti $u_\infty^0(L)$ čvorova dobijeni primenom operacije $L_0 \leftrightarrow L_\infty$, izračunati iz njihovih minimalnih dijagrama (samo u tabeli 6).

U tabelama 8 i 9 su dati:

- BJ-brojevi odvezivosti linkova u_{BJ} (koji se poklapaju sa klasičnim brojem odvezivosti u) i njihovi maksimalni brojevi odvezivosti U ;
- minimalni $s[m]$ i maksimalni S brojevi odvezivosti dobijeni orijentisanim zaravnjivanjem linkova, izračunati iz njihovih minimalnih dijagrama;
- minimalni u_b i maksimalni U_b brojevi odvezivosti dobijeni neorijentisanim zaravnjivanjem linkova, izračunati iz njihovih minimalnih dijagrama.
- minimalni broj odvezivosti $u_\infty^0(L)$ linkova dobijeni primenom operacije $L_0 \leftrightarrow L_\infty$, izračunati iz njihovih minimalnih dijagrama (samo u tabeli 8).

Tabela 6: Minimalni i maksimalni brojevi odvezivosti čvorova sa $n \leq 8$ preseka

K	u_{BJ}	U_{BJ}	$s[nm]$	$s[m]$	S	u_b	U_b	\vec{u}_{cs}	\vec{U}_{cs}	u_{cs}	U_{cs}	u_{∞}^0
3 ₁	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1
4 ₁	1	1	2	2	2	2	3	1	2	1	3	2
5 ₁	2	2	1	1	1	1	4	1	2	1	4	1
5 ₂	1	2	1	2	3	2	4	1	3	1	4	1
6 ₁	1	2	1	2	4	2	5	1	4	1	5	1
6 ₂	1	2	1	2	4	2	5	1	4	1	5	1
6 ₃	1	2	2	3	4	2	5	1	4	1	5	2
7 ₁	3	3	1	1	1	1	6	1	3	1	6	1
7 ₂	1	3	1	2	5	2	6	1	5	1	6	1
7 ₃	2	3	1	2	5	2	6	2	5	2	6	1
7 ₄	2	3	1	3	5	1	6	2	5	1	6	1
7 ₅	2	3	2	3	5	2	6	2	5	2	6	2
7 ₆	1	3	1	3	5	2	6	1	5	1	6	1
7 ₇	1	2	2	3	5	1	6	1	5	1	6	2
8 ₁	1	3	2	2	6	2	7	1	6	1	7	2
8 ₂	2	3	2	2	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₃	2	3	1	3	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₄	2	3	1	2	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₅	2	3	1	2	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₆	2	3	1	3	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₇	1	3	1	3	6	2	7	1	6	1	7	2
8 ₈	2	3	1	3	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₉	1	3	2	3	6	2	7	1	6	1	7	2
8 ₁₀	2	3	1	3	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₁₁	1	3	1	3	6	2	7	1	6	1	7	2
8 ₁₂	2	3	2	4	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₁₃	1	3	2	3	6	2	7	1	6	1	7	2
8 ₁₄	1	3	1	4	6	2	7	1	6	1	7	2
8 ₁₅	2	3	2	4	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₁₆	2	3	1	3	6	2	7	2	6	2	7	2
8 ₁₇	1	3	2	4	6	3	7	1	6	1	7	2
8 ₁₈	2	2	3	4	6	2	7	2	6	2	7	3
8 ₁₉	3	4	1	1	4	1	6	1	6	1	7	1
8 ₂₀	1	4	1	1	5	1	6	1	6	1	7	1
8 ₂₁	1	3	2	2	5	2	6	1	5	1	6	2

Tabela 7: Minimalni i maksimalni brojevi odvezivosti čvorova sa $n = 9$ preseka

K	u_{BJ}	U_{BJ}	$s[nm]$	$s[m]$	S	u_b	U_b	\vec{u}_{cs}	\vec{U}_{cs}	u_{cs}	U_{cs}
9 ₁	4	4	1	1	1	1	8	1	4	1	8
9 ₂	1	4	2	2	7	2	8	1	7	1	8
9 ₃	3	4	1	2	7	2	8	2	7	2	8
9 ₄	2	4	1	2	7	2	8	2	7	2	8
9 ₅	2	4	1	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₆	3	4	1	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₇	2	4	1	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₈	2	4	1	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₉	3	4	1	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₁₀	3	4	2	4	7	1	8	3	7	1	8
9 ₁₁	2	4	2	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₁₂	1	4	2	3	7	2	8	1	7	1	8
9 ₁₃	3	4	1	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₁₄	1	3	2	3	7	2	8	1	7	1	8
9 ₁₅	2	4	1	4	7	2	8	2	7	2	8
9 ₁₆	3	5	2	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₁₇	2	3	1	3	7	1	8	2	7	1	8
9 ₁₈	2	4	2	4	7	2	8	2	7	2	8
9 ₁₉	1	3	1	4	7	2	8	1	7	1	8
9 ₂₀	2	4	2	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₂₁	1	4	1	4	7	2	8	1	7	1	8
9 ₂₂	1	3	1	3	7	2	8	1	7	1	8
9 ₂₃	2	4	1	4	7	1	8	2	7	1	8
9 ₂₄	1	5	2	4	7	2	8	1	7	1	8
9 ₂₅	2	4	1	4	7	2	8	2	7	2	8
9 ₂₆	1	3	1	4	7	2	8	1	7	1	8
9 ₂₇	1	4	1	4	7	2	8	1	7	1	8
9 ₂₈	1	4	1	4	7	2	8	1	7	1	8
9 ₂₉	2	4	1	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₃₀	1	3	2	4	7	2	8	1	7	1	8
9 ₃₁	2	3	1	4	7	1	8	2	7	1	8
9 ₃₂	2	4	1	4	7	2	8	2	7	2	8
9 ₃₃	1	5	2	4	7	2	8	1	7	1	8
9 ₃₄	1	3	2	4	7	3	8	1	7	1	8
9 ₃₅	3	4	2	3	7	2	8	3	7	2	8
9 ₃₆	2	4	1	3	7	2	8	2	7	2	8
9 ₃₇	2	3	2	4	7	2	8	2	7	2	8
9 ₃₈	3	4	2	4	7	2	8	2	7	2	8
9 ₃₉	1	4	2	4	7	3	8	1	7	1	8
9 ₄₀	2	4	2	4	7	2	8	2	7	2	8
9 ₄₁	2	3	2	3	7	3	8	2	7	2	8
9 ₄₂	1	4	1	1	6	1	7	1	7	1	8
9 ₄₃	2	4	1	1	6	1	7	1	7	1	8
9 ₄₄	1	4	1	1	6	1	7	1	7	1	8
9 ₄₅	1	4	1	2	6	2	7	1	7	1	8
9 ₄₆	2	4	2	2	6	1	7	2	7	1	8
9 ₄₇	2	3	2	2	6	2	7	2	7	2	8
9 ₄₈	2	5	2	3	6	2	7	2	7	2	8
9 ₄₉	3	4	3	3	6	3	7	2	6	2	7

Tabela 8: Minimalni i maksimalni brojevi odvezivosti linkova sa $n \leq 8$ preseka

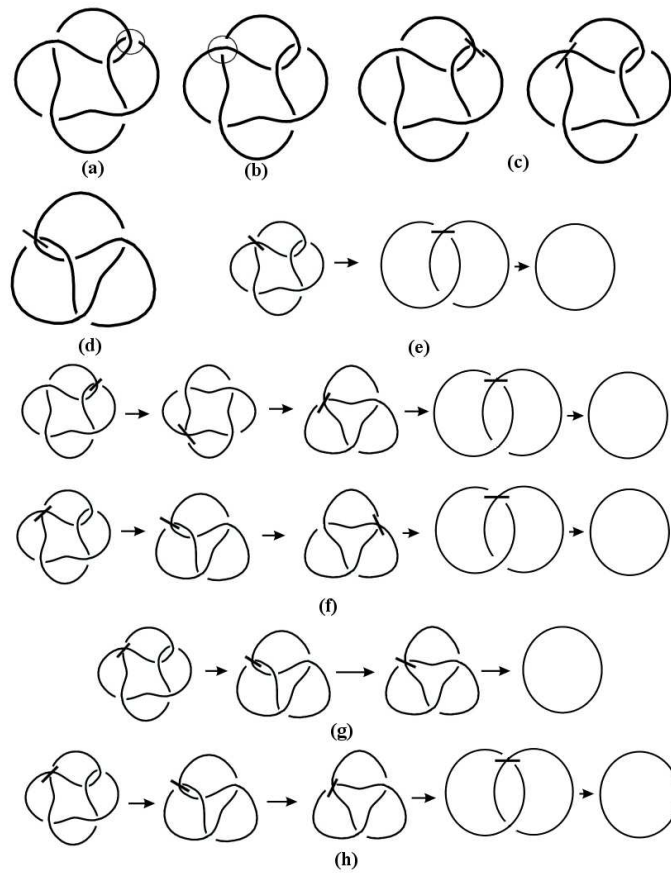
L	u_{BJ}	U	$s[m]$	S	u_b	U_b	u_∞^0	L	u_{BJ}	U	$s[m]$	S	u_b	U_b	u_∞^0
2_1^2	1	1	1	1	1	1	1	8_{11}^2	3	5	1	7	1	7	2
4_1^2	2	2	1	3	1	3	1	8_{12}^2	1	4	1	7	1	7	2
5_1^2	1	2	1	4	1	4	2	8_{13}^2	2	4	2	7	2	7	2
6_1^2	3	3	1	5	1	5	1	8_{14}^2	3	4	2	7	2	7	2
6_2^2	3	3	2	5	2	5	2	8_{15}^2	1	4	1	6	1	7	1
6_3^2	2	3	1	5	1	5	2	8_{16}^2	3	4	1	6	1	7	1
7_1^2	2	3	2	6	2	6	1	6_1^3	3	2	2	5	2	5	2
7_2^2	1	3	2	6	1	6	1	6_2^3	2	2	2	5	2	5	3
7_3^2	2	3	1	6	1	6	1	6_3^3	3	2	1	4	1	4	2
7_4^2	2	3	2	6	2	6	2	7_1^3	3	2	1	6	1	6	2
7_5^2	3	3	2	6	2	6	2	8_1^3	4	3	2	7	2	7	2
7_6^2	2	3	2	6	2	6	2	8_2^3	4	3	2	7	2	7	2
7_7^2	3	4	1	5	1	6	1	8_3^3	3	2	1	7	1	7	2
7_8^2	1	3	1	5	1	5	1	8_4^3	4	2	2	7	2	7	3
8_1^2	4	4	1	7	1	7	1	8_5^3	3	3	2	7	2	7	2
8_2^2	4	4	2	7	2	7	2	8_6^3	2	3	2	7	2	7	2
8_3^2	3	4	2	7	2	7	2	8_7^3	4	3	1	6	1	7	2
8_4^2	4	4	1	7	1	7	2	8_8^3	4	3	1	6	1	6	2
8_5^2	3	4	2	7	2	7	2	8_9^3	2	2	2	6	2	6	2
8_6^2	2	4	1	7	1	7	2	8_{10}^3	4	2	2	6	2	7	2
8_7^2	2	4	1	7	1	7	2	8_1^4	4	2	2	7	2	7	3
8_8^2	2	3	2	7	2	7	2	8_2^4	4	2	2	6	2	6	3
8_9^2	3	4	2	7	2	7	2	8_3^4	4	2	2	5	2	5	2
8_{10}^2	1	3	2	7	1	7	2								

Tabela 9: Minimalni i maksimalni brojevi odvezivosti linkova sa $n = 9$ preseka

L	u_{BJ}	U	$s[m]$	S	u_b	U_b	L	u_{BJ}	U	$s[m]$	S	u_b	U_b
9^2_1	3	4	2	8	2	8	9^2_{43}	4	6	1	7	1	8
9^2_2	2	4	2	8	2	8	9^2_{44}	2	4	1	7	1	7
9^2_3	3	4	2	8	2	8	9^2_{45}	3	5	1	7	1	8
9^2_4	2	4	1	8	1	8	9^2_{46}	2	4	1	7	1	8
9^2_5	1	4	2	8	1	8	9^2_{47}	1	5	1	7	1	8
9^2_6	2	4	2	8	2	8	9^2_{48}	3	5	1	7	1	8
9^2_7	2	4	2	8	2	8	9^2_{49}	4	6	1	7	1	8
9^2_8	2	4	2	8	2	8	9^2_{50}	2	5	1	7	1	8
9^2_9	2	4	1	8	1	8	9^2_{51}	4	5	1	7	1	8
9^2_{10}	2	4	1	8	1	8	9^2_{52}	2	5	1	7	1	7
9^2_{11}	2	4	2	8	2	8	9^2_{53}	4	5	1	7	1	9
9^2_{12}	1	4	1	8	1	8	9^2_{54}	1	5	1	7	1	8
9^2_{13}	3	4	2	8	2	8	9^2_{55}	2	4	2	7	2	7
9^2_{14}	4	5	2	8	2	8	9^2_{56}	2	4	2	7	2	8
9^2_{15}	3	4	2	8	2	8	9^2_{57}	2	5	1	7	1	8
9^2_{16}	3	4	1	8	1	8	9^2_{58}	2	5	2	7	2	8
9^2_{17}	3	4	2	8	2	8	9^2_{59}	4	5	2	7	2	8
9^2_{18}	2	4	2	8	2	8	9^2_{60}	3	4	2	7	2	8
9^2_{19}	3	4	2	8	2	8	9^2_{61}	4	6	1	7	1	9
9^2_{20}	4	4	2	8	2	8	9^3_1	3	3	2	8	2	8
9^2_{21}	2	4	2	8	2	8	9^3_2	3	3	2	8	2	8
9^2_{22}	4	5	2	8	2	8	9^3_3	4	3	2	8	2	8
9^2_{23}	2	4	2	8	2	8	9^3_4	4	3	2	8	2	8
9^2_{24}	3	4	2	8	2	8	9^3_5	4	4	1	8	1	8
9^2_{25}	2	5	1	8	1	8	9^3_6	4	4	1	8	1	8
9^2_{26}	3	5	1	8	1	8	9^3_7	3	2	1	8	1	8
9^2_{27}	3	4	1	8	1	8	9^3_8	3	3	1	8	1	8
9^2_{28}	3	4	1	8	1	8	9^3_9	3	3	1	8	1	8
9^2_{29}	4	4	2	8	2	8	9^3_{10}	2	3	2	8	2	8
9^2_{30}	3	5	2	8	2	8	9^3_{11}	4	4	2	8	2	8
9^2_{31}	3	4	2	8	2	8	9^3_{12}	2	2	2	8	2	8
9^2_{32}	2	5	2	8	2	8	9^3_{13}	3	3	1	7	1	8
9^2_{33}	2	4	2	8	2	8	9^3_{14}	3	3	1	7	1	8
9^2_{34}	1	4	3	8	1	8	9^3_{15}	4	3	2	7	2	8
9^2_{35}	2	4	3	8	2	8	9^3_{16}	4	3	2	7	2	7
9^2_{36}	3	4	3	8	2	8	9^3_{17}	4	3	2	6	2	7
9^2_{37}	2	4	2	8	2	8	9^3_{18}	2	4	1	7	1	8
9^2_{38}	2	5	2	8	2	8	9^3_{19}	3	3	1	7	1	8
9^2_{39}	2	4	3	8	2	8	9^3_{20}	3	3	2	7	2	8
9^2_{40}	4	4	2	8	2	8	9^3_{21}	1	1	2	7	1	8
9^2_{41}	2	4	2	8	2	8	9^4_1	4	2	1	8	1	8
9^2_{42}	2	4	2	8	2	8							

Dobijene rezultate ilustrovaćemo na primeru već pomenutog čvora $5_2 = 3_2$. Njegov broj odvezivosti u_{BJ} je 1 (slika 109a). Njegov maksimalni broj odvezivosti U_{BJ} je 2, jer nakon promene preseka u celobrojnom spletu 3 ovaj čvor se svodi na trolisnik $3_1 = 3$, koji se odvezuje pomoću proizvoljne promene preseka (slika 109b). Minimalni broj odvezivosti, dobijen orijentisanim zaravnjivanjem s ovog čvora uzet preko svih dijagrama, iznosi 1 i može biti izračunat samo iz neminimalnih dijagrama (slika 77a). Njegov minimalni broj odvezivosti dobijen orijentisanim zaravnjivanjem s izračunat iz minimalnog dijagrama je 2 jer kao rezultat prvog orijentisanog zaravnjivanja dobijamo čvorove $3_1 = 3$ i $4_1 = 2_2$ (slika 109c), a narednim proizvoljnim zaravnjivanjem prvi čvor se odvezuje. Njegov maksimalni broj odvezivosti dobijen orijentisanim zaravnjivanjem S je 3. U prvom koraku, kao i u prethodno navedenom slučaju, možemo dobiti čvorove $3_1 = 3$ i $4_1 = 2_2$. U drugom koraku možemo izvršiti zaravnjivanje u čvoru $4_1 = 2_2$, koji se, zatim, bilo kojim orijentisanim konvertuje u trolisnik 3_1 . Trolisnik se sigurno odvezuje u idućem koraku. Njegov minimalni broj odvezivosti, dobijen neorijentisanim zaravnjivanjem u_b , dobija se pomoću dva neorijentisana zaravnjivanja, prvog koje daje Hopfov link $2_1^2 = 2$, i drugog koje ga odvezuje (slika 109e). Njegov maksimalni broj odvezivosti dobijen neorijentisanim zaravnjivanjem U_b iznosi 4, jer postoje dve najgore strategije odvezivanja dužine 4, prva koja daje niz $(5_2 \rightarrow 4_1^2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1^2 \rightarrow 0_1)$, a druga $(5_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1^2 \rightarrow 0_1)$ (slika 109f). Pošto je broj odvezivosti čvora 5_2 jednak 1 i ostvaruje se na njegovom minimalnom dijagramu, oba mešovita broja odvezivosti \vec{u}_{cs} i u_{cs} iznose 1. Maksimalni mešoviti broj odvezivosti \vec{U}_{cs} , dobijen korišćenjem promena preseka i orijentisanog zaravnjivanja je 3, i dobija se iz niza $(5_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 3_1 \rightarrow 0_1)$ (slika 109g). Maksimalni mešoviti broj odvezivosti U_{cs} dobijen pomoću promena preseka i neorijentisanih zaravnjivanja je 4 i dobija se iz niza $(5_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1^2 \rightarrow 0_1)$ (slika 109h).

Iz ovih tabela možemo da skoro direktno izvedemo izvesne interesantne zaključke. Na primer, maksimalni broj odvezivosti dobijen neorijentisanim zaravnjivanjem U_b i maksimalni mešoviti broj odvezivosti U_{cs} , dobijen promenama preseka i neorijentisanim zaravnjivanjem, međusobno se podudaraju za sve alternirajuće čvorove, ali se mogu razlikovati za nealternirajuće. Drugi interesantan problem je uspostavljanje izvesnih veza između maksimalnih brojeva odvezivosti i nekih poznatih numeričkih invarijanata čvorova. U slučaju minimalnih brojeva odvezivosti ili minimalnih brojeva odvezivosti zaravnjivanjem takve relacije su već poznate. Relacije koje povezuju broj odvezivosti (Gordijev broj) sa signaturom ili Rasmusenovom signaturom smo koristili da bismo potvrdili izvesne brojeve odvezivosti ili predvideli njihovu donju granicu. U slučaju broja odvezivosti dobijenog zaravnjivanjem (s -broj odvezivosti), postoji serija zabrana (opstrukcija) koja se zasniva na relaciji između tog broja odvezivosti i izvesnih polinomskih invarijanata [102, 101].



Slika 109: (a) Promena preseka u čvoru 5_2 koja daje nečvor; (b) promena preseka u celobrojnom spletu 3 koja daje čvor 3_1 ; (c) orijentisana zaravnjivanja koja daju čvorove $3_1 = 3$ i $4_1 = 2_2$; (d) orijentisano zaravnjivanje u čvoru 4_1 koje daje trolisnik 3_1 ; (e) niz neorijentisanih zaravnjivanja ($5_2 \rightarrow 2_1^2 \rightarrow 0_1$); (f) nizovi ($5_2 \rightarrow 4_1^2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1^2 \rightarrow 0_1$) i ($5_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1^2 \rightarrow 0_1$); (g) niz ($5_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 3_1 \rightarrow 0_1$) (h) niz ($5_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 3_1 \rightarrow 2_1^2 \rightarrow 0_1$)

8 Zaključak

U ovom radu su prikazani računarski metodi za određivanje različitih tipova rastojanja čvorova - Gordijevih rastojanja čvorova i s -rastojanja čvorova. Osnovu ovih metoda čine neminimalne prezentacije čvorova, kodiranje čvorova u Konvejevoj notaciji i uspostavljanje veze između operacije promena preseka sa operacijom zaravnjivanja. Dosadašnji metodi, poznati u literaturi, koji su se koristili za određivanje rastojanja čvorova, primenjivali su algebru verižnih razlomaka i razne matematičke invarijante. Tokom naših istraživanja, pri-

menom metoda navedenih u ovom radu i upotrebom *Mathematica* softverskog paketa *LinKnot*, potvrđena je većina dosadašnjih rezultata, ukazano je na neophodne modifikacije već postojećih rezultata i prezentovani su novi rezultati u proširenim tablicama rastojanja čvorova. Opisan je metod za proširivanje rezultata na familije čvorova koji pruža mogućnost za buduće proširivanje tablica (na čvorove sa većim brojem preseka).

Predstavljen je model ogledalskih krivih za prikazivanje čvorova, kodiranje i prepoznavanje čvorova u njemu i izvedeni su svi čvorovi za mreže dimenzija $p \times q$ ($p \leq 4, q \leq 4$). U aktueloj literaturi prikazan je način konstrukcije čvorova laserskim pincetama u tečnim kristalima (CNC-konstrukcija, [86]), koji smo u ovom radu uporedili sa modelom ogledalskih krivih. CNC-konstrukcija predstavlja eksperimentalno kontrolisano povezivanje čestica u tečnim kristalima, koja se može uporediti sa formacijama kDNK mitohondrije.

Prilikom izučavanja operacije promene preseka, uočena je njena veza sa akcijama topoizomeraza na lancima DNK. Pokazano je da se rezultati, navedeni u ovom radu mogu, iskoristiti za izučavanje akcija ovih enzima na lancima DNK. U skladu sa principom ekonomije, različita rastojanja čvorova nam govore o verovatnoći prelaska čvora iz jednog stanja u drugo. Posедуjući takvu informaciju, kao i alat koji predstavlja katalizatore prepovezivanja DNK lanaca na proizvoljnim mestima, postavlja se pitanje da li će u budućnosti biti moguće predvideti formiranje kritičnog genetskog materijala, sprečiti njegov nastanak ili ubrzati proces poželjnih promena na DNK.

Pored promene preseka, u našim istraživanjima je izučavana operacija orijentisanog zaravnjivanja preseka i njoj odgovarajući s -brojevi odvezivosti i s -rastojanja čvorova. Predstavljani su metodi za određivanje ovih rastojanja među čvorovima korišćenjem simboličkih, graf-teorijskih i geometrijskih svojstava Konvejeve notacije. Dobijeni rezultati su predstavljani u tablicama rastojanja čvorova. Pored topoizomeraza, rekombinaze predstavljaju drugi tip enzima koje smo izučavali. Rekombinaze su proteini koji presecaju lanac DNK na dva mesta i uzrokuju promene kao što su brisanje/umetanje, inverzija, translokacija i kasetna razmena. U radu je opisan način modelovanja ovakvih promena zaravnjivanjem preseka čvora i izložen način za izučavanje akcija rekombinaza pomoću s -rastojanja.

Potencijalna tema istraživanja može biti sužavanje klase posmatranih čvorova, tj. izdvajanje konkretnih početnih i krajnjih stanja lanaca DNK i procena mogućnosti prelaska iz jednog navedenog stanja u drugo. Ovde opisani algoritmi mogu se, bez dodatnih modifikacija, primeniti i za određivanje Gordijevih i s -rastojanja čvorova sa većim brojem preseka nego oni koji su analizirani u našim istraživanjima. Jedino ograničenje predstavljaju fizički resursi računara. Sužavanjem klase čvorova koju posmatramo dobijamo manje precizne rezultate (zato što ne uzimamo u razmatranje sve moguće putanje u grafu rastojanja čvorova), ali ih dobijamo brže.

Tablice rastojanja su u ovom radu generisane samo za čvorove, ali ne i za linkove zbog nedostatka adekvatnog alata za prepoznavanje linkova. Za svrhu prepoznavanja čvorova korišćena je funkcija `fKnotFind` (modul programa *KnotScape* [70] modifikovan za potrebe ovog rada), pa je potencijalna tema

generisanje programa za prepoznavanje linkova. Na taj način bi bila omogućena primena metoda predstavljenih u radu i na linkove i time omogućeno proširivanje tablica novim rezultatima. Primenom takvog programa bi bilo moguće i izučavanje operacije neorijentisanog zaravnjivanja preseka navedenim metodama.

Kako se svi metodi, koji predstavljaju doprinos naših istraživanja, zasnivaju na svojstvima Konvejeve notacije, u drugom delu rada je predložen metod izvođenja novih čvorova u Konvejevoj notaciji proširivanjem C-linkova. Zbog nedostatka adekvatnog obrasca u formiranju dosadašnjih tablica čvorova, u njima ne postoji uređenje zasnovano na topološkim svojstvima čvorova, nego samo uređenje koje počiva na minimalnosti DT kodova. Opisan je metod za klasifikaciju čvorova u tablicama zasnovan na Konvejevoj notaciji. Generisane su tablice svih čvorova sa 13 preseka i alternirajućih čvorova sa 14 preseka. Prikazani metodi se mogu upotrebiti za izvođenje nealternirajućih čvorova sa 14 preseka, kao i čvorova sa $n \geq 14$ preseka.

U ovom radu predstavljen je i novi metod za minimizaciju čvorova (jednog od glavnih problema teorije čvorova) zasnovan na primeni lokalnih i globalnih minimizacija.

Prilikom istraživanja klasičnih brojeva odvezivosti, definisali smo i pojam *maksimalni broj odvezivosti* čvora, izračunali njegove vrednosti i uporedili sa raznim minimalnim i maksimalnim brojevima odvezivosti. U toku istraživanja maksimalnog broja odvezivosti zapaženi su čvorovi koji, nakon jedne promene preseka, ne menjaju svoj minimalni broj preseka. Uočene su tri klase ovakvih čvorova koje su nazvane po autorima: Kaufmanovi čvorovi, Zeković čvorovi i Tanijamini čvorovi. Najinteresantnija pojava vezana za Zeković čvorove je da su svi do sada izvedeni Perkovi čvorovi (za $n \leq 13$ preseka) istovremeno i Zeković čvorovi. Time je uspostavljen pokušaj prenošenja svojstava Perkovih čvorova na širu klasu čvorova.

8.1 Naučni doprinos rada

Najvažniji naučni doprinosi dobijenim istraživanjem prikazanim u ovom radu su:

- Kreiranje metoda za računanje Gordijevih rastojanja čvorova korišćenjem simboličkih i geometrijskih svojstava Konvejeve notacije;
- Kreiranje metoda za računanje s -rastojanja čvorova korišćenjem simboličkih i geometrijskih svojstava Konvejeve notacije;
- Proširivanje tablica čvorova sa s -brojem odvezivosti jednakim 1;
- Proširivanje tablica za distance oba tipa;
- Izlaganje metoda koji se mogu primeniti za dalje proširivanje tablica rastojanja;
- Proširivanje tablica čvorova prezentovanih Konvejevom notacijom i uvođenje metoda za klasifikaciju čvorova u tablicama;

- Predlog metoda za minimizaciju čorova;
- Definisane klase čvorova (Zeković čvorovi) koja sadrži poznate Perkove čvorove i time omogućava uspostavljanje pokušaja definisanja specifičnih svojstava Perkovih čvorova po kojima se razlikuju od ostalih čvorova;
- Definisane maksimalnog broja odvezivosti čvora i generisanje tablica maksimalnih brojeva odvezivosti.

Rešenja prikazana u ovom radu se uspešno mogu primeniti na rešavanje opisanih i sličnih problema. Naučno istraživanje opisano u ovom radu daje doprinos primeni Konvejeve notacije, problemu pronalaženja Perkovih čvorova, kao i oblasti koja se odnosi na promene nad presecima u svim vrstama čvorova (bez ograničenja na racionalne), njihovim posledicama i primenama. Deo dobijenih rezultata je već objavljen u međunarodnim časopisima i časopisima od nacionalnog značaja, dok su ostali delovi u pripremi za objavljivanje.

Literatura

- [1] Alexander, J.W. and Briggs, G.B. (1926-27) On types of knotted curves, *Annals of Mathematics* **28**, 562–586.
- [2] Schubert, H. (1956) Knoten mit zwei Brucken, *Math. Zeit.*, **65**, 133-170.
- [3] Hage, J.J. (2008) Heraklas on Knots: Sixteen Surgical Nooses and Knots from the First Century A.D., *World J. Surg.* **32**, 648-655.
- [4] Haken, W. (1961) Theorie der Normalflächen, *Acta Math.*, **105**, 245–375.
- [5] Goeritz, L. (1934) Bemerkungen zur knotentheorie, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **10**, 201–210.
- [6] Jablan, S.V. (2002) Symmetry, Ornament and Modularity, *Series on Knots and Everything* **30**, World Scientific, Singapore.
- [7] Turner J.C. and Van De Griend P. (Eds.), *History and Science of Knots*, *Series on Knots and Everything* 11, World Scientific, Singapore, 1995.
- [8] Menasco, W.W. and Thistlethwaite, M.B. (1991) The Tait flying conjecture, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **25**, 2, 403–412.
- [9] Menasco, W.W. and Thistlethwaite, M.B. (1993) The classification of alternating links, *Annals of Mathematics*, **138**, 1, 113–171.
- [10] Hoste, J., Thistlethwaite, M., and Weeks, J. (1998) The first 1,701,936 knots, *Math. Intelligencer*, **20**, 33–48.
- [11] Hoste, J. (2005) The enumeration and classification of knots and links, *Handbook of Knot Theory*, Amsterdam: Elsevier, pzacad.pitzer.edu/~jhoste/HosteWebPages/downloads/Enumeration.pdf
- [12] Thistlethwaite, M. (2014) Private communication, 15.06.2014
- [13] Thistlethwaite, M. (2014) Private communication, 06.09.2014
- [14] Thistlethwaite, M.: *Knotscape* 1.01, 1999
<http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html>
- [15] Rankin, S., Flint, O., and Schermann, J., Enumerating the prime alternating knot, part I, *J. Knot Theory Ramificat.* **13**, 1 (2004) 57-100.
- [16] Rankin, S., Flint, O., and Schermann, J., Enumerating the prime alternating knot, part II, *J. Knot Theory Ramificat.* **13** 1 (2004), 101-150.
- [17] Rangel-Mondragón, J. (2000) Partitions and Sums of Integer Powers
<http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/738/>

- [18] Kauffman, L.H. (1999) Virtual Knot Theory, *European J. Comb.*, **20**, 663–690.
- [19] Reidemeister, K., *Knotentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1932.
- [20] Kauffman, L.H., *On Knots*, Princeton University Press, Princeton, 1987.
- [21] Hass, J., Lagarias, J.C., Pippenger, N. (1999), The computational complexity of knot and link problems, *Journal of the ACM* **46**, 2, 185–211, arXiv:math/9807016.
- [22] Hass, J. and Lagarias J.C. (2001) The number of Reidemeister moves Needed for Unknotting, *J. Amer Math. Soc.*, **14**, 2, 399–428, arXiv:9807012v1 [math.GT].
- [23] Kronheimer, P.B. and Mrowka, T.S. (2010) Khovanov homology is an unknot-detector, arXiv:1005.4346 [math.GT].
- [24] Kanenobu, T. and Murakami, H. (1986) Two-bridge knots with unknotting number one, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **98**, 499–502.
- [25] Nakanishi, Y. (1996) Unknotting number and knot diagram, *Rev. Mat. Univ. Complut.*, Madrid, **9**, 2, 359–366.
- [26] Stoimenow, A. (2004) On unknotting numbers and knot trivadjacency, *Mathematica Scandinavica*, **94**, 2, 227–248.
- [27] Culler, M., Gordon, C., Luecke, J., Shalen, P. (1987). Dehn surgery on knots. *The Annals of Mathematics (Annals of Mathematics)*, **125**, 2, 237–300.
- [28] Darcy, I. Solving oriented tangle equations involving 4-plats, <http://homepage.math.uiowa.edu/idarcy/ART/darcyOrientedCOR.ps>
- [29] Darcy, I. Solving unoriented tangle equations involving 4-plats, <http://homepage.math.uiowa.edu/idarcy/ART/darcyUnOrientedCOR.pdf>
- [30] Darcy, I.K., Scharein, R.G., and Stasiak, A. (2008), 3D visualization software to analyze topological outcomes of topoisomerase reactions, *Nucleic Acids Research*, **36**, 11, 3515–3521
- [31] Crowell, R.H. and Fox, R.H., *Knot theory*, Blaisdell Publishing Company, New York, Toronto, London, 1965.
- [32] R. A. Robertello, An invariant of knot cobordism, *Commun. Pure Appl. Math.* **18** (1965) 543–555
- [33] Conway, J.H., An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties. *Computational Problems in Abstract Algebra* (John Leech, ed.) Pergamon Press, Oxford and New York, 1969.

- [34] Bain, G., *Celtic Art - The Methods of Construction*, Dover, New York, NY, USA, 1973.
- [35] Rolfsen, D., *Knots and Links*, Publish Perish Inc., Berkeley, 1976 (American Mathematical Society, AMS Chelsea Publishing, 2003).
- [36] Hemion, G. (1979) On the Classification of Homeomorphisms of 2 Manifolds and the Classification of 3-Manifolds, *Acta Math.*, **142**, 123–155.
- [37] Caudron, A., *Classification des noeuds et des enlacements*, Public. Math. d'Orsay 82. Univ. Paris Sud, Depth. Math., Orsay, 1982.
- [38] Is there a periodic table for knots?
<http://mathoverflow.net/questions/82569/is-there-a-periodic-table-for-knots>
- [39] Perko K.A., Jr. (1974) On the classification of knots, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **45**, 252–266.
- [40] Elwes, R. (2013) The revenge of the Perko pair
<http://richardelwes.co.uk/2013/08/14/the-revenge-of-the-perko-pair/>
- [41] Wolfram MathWorld- Perko Pair,
<http://mathworld.wolfram.com/PerkoPair.html>
- [42] Nakanishi, Y. (1983) Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.*, **11**, 257–258.
- [43] Bleiler, S.A. (1984) A note on unknotting number, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **96**, 469–471.
- [44] Montesinos, J.M. (1984) Revetements ramifies des noeuds, *Espaces fibres de Seifert et scindaments de Heegaard*, Publicaciones del Seminario Matematico Garcia del Galdeano, Serie II, Seccion 3.
- [45] N.R. Cozzarelli, M.A. Krasnow, S.P. Gerrard, and J.H. White, A topological treatment of recombination and topoisomerases, *Cold Spring Harb. Symp. Quant. Biol.* 49 (1984), 383–400.
- [46] Burde, G. and Zieschang, H., *Knots*, Walter de Greyter, Berlin, New York, 1985.
- [47] Murakami, H. (1985) Some metrics on classical knots, in *Knot Theory*, *Math. Ann.*, **20**, 1, 35–45.
- [48] Kauffman, L. and Lambropoulou, S., *Hard Unknots and Collapsing Tangles*,
<http://homepages.math.uic.edu/kauffman/IntellUnKnot.pdf>

- [49] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Millett, K., and Ocneanu, A. (1985). A New Polynomial Invariant of Knots and Links, *Bulletin of the American Mathematical Society* **12**, 2, 239-246
- [50] Brandt, R.D., Lickorish, W.B.R., and Millett, K.C. (1986) A polynomial invariant of unoriented knots and links, *Invent. Math.*, **84**, 563-573.
- [51] W. B. R. Lickorish, Unknotting by adding a twisted band, *Bull. London Math. Soc.* 18 (1986) 613615
- [52] Jones, V.F.R. (1987) Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. Math.*, **126**, 335-388.
- [53] Gerdes, P. (1990) On ethnomathematical research and symmetry, *Symmetry: Cult. Sci.* **1**, 154-170.
- [54] Hoste, J., Nakanishi, Y., and Taniyama, K. (1990) Unknotting Operations Involving Trivial Tangles, *Osaka J. Math.*, **27**, 555-566.
- [55] Wang, J.C. (1991) DNA Topoisomerases: Why so many?, *Journal of Biological Chemistry*, **266**, 6659–6662
- [56] Menasco, W.W. and Thistlethwaite, M.B. (1991) The Tait flyping conjecture, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **25**, 2, 403-412.
- [57] Adams, C.C.: *The Knot Book*, Freeman, New York, 1994.
- [58] Murasugi, K., *Knot Theory and its Applications*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1996.
- [59] Gerdes, P., *Lunda Geometry - Designs, Polyominoes, Patterns, Symmetries*, Universidade Pedagógica Moçambique, Maputo, 1996.
- [60] Gerdes, P. (1997) On mirror curves and Lunda designs, *Computers and Graphics* **21**, 3, 371-378.
- [61] Murasugi, K.: On a certain numerical invariant of link types, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **117** (1965) 387–422.
- [62] Traczyk, P.: A combinatorial formula for the signature of alternating diagrams, *Fundamenta Mathematicae*, **184** (2004) 311–316 (a new version of the unpublished manuscript, 1987).
- [63] Przytycki, J.: From Goeritz matrices to quasi-alternating links, [arXiv:0909.1118v1](https://arxiv.org/abs/0909.1118v1) [MathGT].
- [64] A. Y. Chen, L. F. Liu, DNA topoisomerases: Essential enzymes and lethal targets, *Annu. Rev. Pharmacol Toxicol.* 34 (1995) 191218.
- [65] Goldman, J.R. and Kauffman, L.H. (1997) Rational Tangles, *Advances in Applied Math.*, **18**, 300-332.

- [66] Darcy, I.K., Biological metrics on DNA knots and catenanes. PhD thesis, Department of Mathematics, Florida State University, 1997.
- [67] Darcy, I.K. and Sumners, D.W., A strand passage metric for topoisomerase action, In KNOTS 96 (Tokyo), 267-278. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1997.
- [68] Nakajima, K., Calculation of the $H(2)$ -unknotting numbers of knots to 10 crossings, (in Japanese) Master Thesis, Yamaguchi University, 1997.
- [69] Darcy, I.K. and Sumners, D.W. (1998) Applications of topology to DNA, in Knot Theory (Eds. V.F.R. Jones *et al*), Banach Center Publ. **42**, Polish Acad. Sci., Inst. Math., Warszawa.
- [70] Thistlethwaite, M. (1999) Knotscape 1.01,
<http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html>
- [71] Gerdes, P., Geometry from Africa: Mathematical and Educational Explorations, Mathematical Association of America, Washington, DC, 1999.
- [72] P. Traczyk (1999) A criterion for signed unknotting number. *Contemp. Math.*, **233**, 215-220.
- [73] Darcy, I.: Strand passage metric table,
<http://homepage.math.uiowa.edu/~idarcy/TAB/tabnov.pdf>
- [74] Jablan, S., Adequacy of Link Families, arXiv:0811.0081v1 [math.GT].
- [75] J. Wang, Cellular roles of DNA topoisomerases: a molecular perspective., *Nat Rev Mol Cell Biol.* 3(6) (2002) 430440.
- [76] S. Pathania, M. Jayaram, and R.M. Harshey, Path of DNA within the Mu transpososome.transposase interactions bridging two Mu ends and the enhancer trap five DNA supercoils, *Cell* 109 (2002), no. 4, 42536.
- [77] Kauffman, L.H. and Lambropoulou, S. (2003) On the classification of rational tangles, arXiv:0311499v2 [math.GT].
- [78] Stoimenow, A. (2004) Polynomial values, the linking form and unknotting numbers, *Math. Research Letters*, **11**, 755-768.
- [79] Shlomai, J., (2004) *Curr. Mol. Med.* **4**, 623.
- [80] J. K. Mann, R. W. Deibler, D. W. Sumners, E. L. Zechiedrich, Unknotting by type II topoisomerases, Abstracts of papers presented to the American Mathematical Society 25:994-92-187.
- [81] Scharein, R., KnotPlot, <http://www.knotplot.com/>
- [82] Kawasaki, T., Java distance program,
<http://www.ma.utexas.edu/users/kawasaki/darcy/mainFr.html>

- [83] A. D. Bates, A. Maxwell, DNA Topology, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- [84] Kauffman, L.H., Formal Knot Theory, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2006.
- [85] Gerdes, P., Sona Geometry from Angola: mathematics of an African tradition, Polimetrica, Milan, Italy, 2006.
- [86] Tkalec, U., Ravnik, M., Čopar, S., Žumer, S., Mušević, I., Reconfigurable Knots and Links in Chiral Nematic Colloids, *Science*, 1 July 2011, **333**, 6038, 62–65.
- [87] Jablan, S., Sazdanović, R. LinKnotKnot Theory by Computer, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, 2007. Dostupno online: <http://math.ict.edu.rs/> (pristupljeno 31. maja 2012); <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/linknot/index.html> (pristupljeno 31. maja 2012).
- [88] Jablan, S., Sazdanović, R. Diagrammatic Knot Properties and Invariants, in *Introductory Lectures on Knot Theory*, Eds. L.H. Kauffman, S. Lambropoulou, S. Jablan, J.H. Przytycki, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, 2012, 162–186.
- [89] Lomonaco, S.J., Kauffman, L.H. (2008) Quantum knots and mosaics, *Quantum Inf. Process.*, **7**, 85-115.
- [90] Bar-Natan, D.: Knot Atlas, http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Arc_Presentations
- [91] Cromwell, P. R.: Embedding knots and links in an open book I: Basic properties, *Topology Appl.* **64** (1995), 37–58.
- [92] Manolescu, C., Ozsváth, P. Szábo, Z. and Thurston, D.: On combinatorial link Floer homology, arXiv:math.GT/0610559v2 (2007).
- [93] Kuriya, T. (2008) On a LomonacoKauffman conjecture, arXiv:0811.0710v3 [math.GT]
- [94] Darcy, I.K. (2008) Modeling protein-DNA complexes with tangles, *Comput. Math. Appl.*, **55**, 5, 924–937.
- [95] Kanenobu, T., Miyazawa, Y., $H(2)$ -unknotting number of a knot, *Commun. Math. Res.* **25** (2009) 433460
- [96] Buck, D., (2009) DNA Topology, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, **66**, 1–33, <http://www.imperial.ac.uk/dbuck/AMSDNATopology.pdf>
- [97] Moon, H., Calculating Knot Distances and solving tangle equations involving Montesinos tangles, 2010, Ph.D. Dissertation, University of Iowa.

- [98] Musick, C., Recognizing trivial links in polynomial time, arXiv:1110.2871v3 [math.GT]
- [99] Jablan, S., Radović, Lj., Knot polynomials: myths and reality, arXiv:1107.1877v1 [math.GT]
- [100] Bao, Y.: $H(2)$ -unknotting operation related to 2-bridge links, arXiv:1104.4435v1 [math.GT].
- [101] Miyazawa, Y. (2011) Gordian Distances and Polynomial Invariants, *J. Knot Theory Ramifications*, **20**, 895–907.
- [102] Kanenobu, T. (2011) $H(2)$ -Gordian Distance of Knots, *J. Knot Theory Ramifications*, **20**, 6, 813–835.
- [103] Abe, T. and Kanenobu, T.: Unoriented Band Surgery on Knots and Links, 2011, arXiv:1112.2449v1 [math.GT].
- [104] Crowe, D.W. Introduction to Slavik Jablans Modular Games. <http://www.emis.de/journals/NNJ/Crowe.html> (pristupljeno 31. maja 2012).
- [105] Jablan, S., Radović, Lj., Sazdanović, R., and Zeković, A. (2012) Knots in Art, *Symmetry*, **4**, 2, 302–328.
- [106] Jablan, S., Radović, Lj., Sazdanović, R., and Zeković, A. (2012) Mirror-curves and knot mosaics, *Computers and Mathematics with Applications*, **64**, 4, 527–543.
- [107] Zeković, A. and Jablan, S., Smoothing Distances of Knots, *IEEE, 11th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics*, Subotica, September 26–28, 2013, 33–38.
- [108] Ana Zeković, Computation of Gordian Distances and H_2 -Gordian Distances of Knots, *Yugoslav Journal of Operations Research*, 2014 OnLine-First (00):44–44
- [109] Kidwell, M., Stoimenow, A. (2003) Examples Relating to the Crossing Number, Writhe, and Maximal Bridge Length of Knot Diagrams, *Michigan Math. J.* **51**, 3–12.
- [110] Lickorish, W.B.R. (1991) *An Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.
- [111] Lickorish, W.B.R., Thistlethwaite, M. (1988) Some links with non-trivial polynomials and their crossing-numbers. *Comment. Math. Helvetici* **63**, 527–539.
- [112] Cromwell, P. (2004) *Knots and Links*, Cambridge University Press, Cambridge.

- [113] Thistlethwaite, M. (1988) Kauffman polynomial and adequate links. *Invent. Math.* **93**, 2, 258–296.
- [114] Kauffman, L.H. (2006) *Formal Knot Theory*, Dower, Mineola, New York.
- [115] Kauffman, L.H. (1990) *Problems in Knot Theory* in van Mill, J. and G. Reed, G.M. (Editors) *Open Problems in Topology*, 487–522, Elsevier Science Publishers B.V., North Holland.
- [116] van Mill, J., G. Reed, G.M. (1991) *Open Problems in Topology*, *Topology Appl.* **42**, 301–307.
- [117] Dasbach, O.T., Hougardy, S. (1996) A conjecture of Kauffman on amphicheiral alternating knots, *J. Knot Theory Ramifications*, **5**, 629–635.
- [118] Kauffman, L.H., Jablan, S.V. (2013) A note on amphicheiral alternating knots, *J. Knot Theory Ramifications*, **22**, <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0218216512501362>, arXiv:1005.3612v4 [math.GT]
- [119] Abe, T. and Kanenobu, T.: *Unoriented Band Surgery on Knots and Links*, arXiv:1112.2449v1 [math.GT].
- [120] Taniyama, K.: A partial order of knots, *Tokyo J. Math.*, **12** (1989) 205–229.
- [121] Taniyama, K.: A partial order of links, *Tokyo J. Math.*, **12** (1989) 475–484.
- [122] Endo, T., Itoh, T., and Taniyama, K.: A Graph-Theoretic Approach to a Partial Order of Knots and Links, arXiv:0806.3595v1 [math.GT]
- [123] Jablan, S., Kauffman, L.H., Stošić, M., Zeković, A. (2014): Unknotting numbers and maximum unknotting numbers, To appear
- [124] Jablan, S.: Unknotting and Ascending Numbers of Knots and their Families, arXiv:1107.2110v1 [math.GT]
- [125] Rasmussen, J.: Khovanov homology and the slice genus, arXiv:0402131v1 [MathGT]
- [126] Bar-Natan, D.: On Khovanov’s categorification of the Jones polynomial, arXiv:math/0201043v3 [math.QA]
- [127] Przytycki, J.H. (2004) *Knots: from combinatorics of knot diagrams to combinatorial topology based on knots*, arXiv:math.GT/0512630v1.
- [128] Alexander, J.W. (1923) A lemma on systems of knotted curves, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **9**, 93–95.
- [129] Markov, A.A. (1935) Über de freie Äquivalenz geschlossener Zöpfe, *Recueil Mathématique Moscou*, **1**, 73–78.

- [130] Birman, J.S. (1976) Braids, Links and Mapping Class Groups, Ann. of Math. Studies 82, Princeton University Press, Princeton.
- [131] Vogel, P. (1990) Representation of links by braids: A new algorithm, *Comment. Math. Helvetici*, **65**, 104–113.
- [132] C. Ernst, D. W. Sumners, A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 108 (1990) 489-515.
- [133] Gittings, T. (2004) Minimum braids: a complete invariant of knots and links, arXiv:math/0401051v1.
- [134] Jablan, S. and Sazdanović, R. (2005) Braid family representatives, arXiv:math.GT/0504479v1.
- [135] Radović, Lj. and Jablan, S., Mirror-curve codes for Knots and Links, Publications de L'Institut Mathématique Nouvelle série, tome 94 (108) (2013), 181-186
- [136] Zeković, A. and Jablan, S., Smoothing Distances of Knots, IEEE, 11th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, September 26-28, 2013, 33–38.
- [137] Zeković, A., Computation of Gordian Distances and H2-Gordian Distances of Knots, Yugoslav Journal of Operations Research, 2014, OnLine-First (00):44-44
- [138] Seifert, H. (1934) Über das Geschlecht von Knoten, *Math. Ann.*, **110**, 571–592.
- [139] van Wijk, J.J. (2005) Seifert View, http://www.win.tue.nl/~vanwijk/seifertview/download_seifertview.htm
- [140] Flapan, E. (2000) When Topology Meets Chemistry: A Look at Molecular Chemistry, Cambridge University Press, Cambridge.
- [141] DNA Nanotechnology in Ned Seeman's Laboratory, <http://seemanlab4.chem.nyu.edu/nanotech.html>
- [142] Jablan, S., Radović, Lj., Sazdanović, R., Polyhedral knots and links, <http://math.ict.edu.rs:8080/webMathematica/poly/cont.htm>
- [143] Vazquez, M., TangleSolve, <http://bio.math.berkeley.edu/TangleSolve>

Biografija autora

Ana Zeković je rođena 11. marta 1982. godine u Beogradu. Završila je Matematičku gimnaziju u istom gradu, a zatim diplomirala 2007. godine na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, na Katedri za računarstvo i informatiku. Nakon toga je upisala master studije organizovane u saradnji Ekonomskog fakulteta Univerziteta u Beogradu i HEC Paris i odbranila master rad francuske škole školske 2008/2009 godine. Iste godine upisuje doktorske studije na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Ana Zeković je radila kao saradnik u nastavi u Višoj elektrotehničkoj školi u Beogradu školske 2003/2004, kao saradnik u nastavi na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu školske 2007/2008 i 2008/2009, a od školske 2010/2011 angažovana je kao honorarni profesor Matematičke gimnazije u Beogradu. Od januara 2011. do novembra 2014. bila je zaposlena na Matematičkom fakultetu u Beogradu kao istraživač pripravnik - saradnik na projektu Geometrija, obrazovanje i vizuelizacija sa primenama pod rukovodstvom dr Zorana Rakića. Od novembra 2014. radi kao asistent na Tehnološko-Metalurškom fakultetu u Beogradu, na Katedri za matematičke nauke.

Nakon upisa doktorskih studija na Matematičkom fakultetu u Beogradu, položila je sve ispite predviđene planom i programom doktorskih studija sa prosečnom ocenom 10,00.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а АНА З. ЗЕКОВИЋ

број индекса 2017/2009

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

КОМБИНЕВА ПОТАЦИЈА У ТЕОРИЈИ ЧВОРОВА И ЊЕНА ПРИМЕНА
У МЕТОДИМА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ РАСТОЈАЊА ЧВОРОВА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 16.01.2015.

Ана Зеквић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора АНА ЗЕКОВИЋ

Број индекса 207/2009

Студијски програм ИНФОРМАТИКА

Наслов рада КОМБЕЖЕНА КОДАЦИЈА У ВЕРЗИЈИ ЧВРОВА И ЊИНА ПРИМЕНА
У МЕТОДИМА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ РАСТОЈАЊА ЧВРОВА

Ментор ДР ЛУШАН ТОШИЋ

Потписани/а АНА З. ЗЕКОВИЋ

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 16.01.2015.

Ана Зеквић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

КОНВЕЈЕНА НОТАЦИЈА У ТЕОРИЈИ ЧВРОВА И НЕНА ПРИМЕНА
У МЕТОДИМА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ РАСТОЈАЊА ЧВРОВА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 16.01.2015.

Дан Замис

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.