UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Zorica D. Milovanović

O NEKIM TRANSMISIONIM PROBLEMIMA U DISJUNKTNIM OBLASTIMA

Doktorska disertacija

Beograd , 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Zorica D. Milovanović

ABOUT SOME TRANSMISSION PROBLEMS IN DISJOINT DOMAINS

Doctoral dissertation

Belgrade , 2015

Podaci o mentoru i članovima komisije

Mentor:

dr Boško Jovanović
redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Boško Jovanović
redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Gradimir Milovanović
akademik
Matematički institut SANU

dr Desanka Radunović
vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane:

Zahvalnost

Autor se ovom prilikom zahvaljuje svom mentoru Prof. Dr Bošku Jovanoviću na ukazanom poverenju, dugogodišnjoj saradnji, razumevanju, strpljenju i korisnim konsultacijama prilikom izrade ove disertacije, akademiku Gradimiru Milovanoviću, dr Desanki Radunović na korisnim savetima i podršci u toku doktorskih studija, Matematičkom fakultetu, Matematičkom institutu SANU i Univerzitetu "Union - Nikola Tesla" na ukazanom poverenju i razumevanju, i na samom kraju Marku i svim prijateljima na podršci i strpljenju tokom izrade ove doktorske disertacije.

Porodici

O NEKIM TRANSMISIONIM PROBLEMIMA U DISJUNKTNIM OBLASTIMA

Rezime

U primenama, naročito u inženjerstvu, često se sreću kompozitne ili slojevite strukture, pri čemu se osobine pojedinih slojeva mogu značajno razlikovati od osobina okolnog materijala. Slojevi mogu imati strukturnu, termičku, elektromagnetsku ili optičku ulogu itd. Matematičkim modelovanjem prenosa energije i mase u oblastima sa slojevima dobijaju se tzv. transmisioni problemi.

Na samom početku, u disertaciji se razmatra transmisioni spektralni problem u oblasti koja se sastoji od dva disjunktna intervala. Na svakom intervalu zadat je problem sopstvenih vrednosti, dok se interakcija između njihovih rešenja opisuje nelokalnim uslovima saglasnosti. Dokazana je egzistencija prebrojivog niza generalisanih rešenja, pri čemu uređeni parovi sopstvenih funkcija pripadaju odgovarajućim prostorima Soboljeva. Opisana je struktura spektra i asimptotsko ponašanje sopstvenih vrednosti. Konstruisana je diferencijska shema za njihovo rešavanje.

Pored transmisionog spektralnog problema, u disertaciji se razmatraju klase nestandardnih eliptičkih i paraboličkih transmisionih problema u disjunktnim oblastima. Kao modelni primer uzeta je oblast koja se sastoji iz dva nesusedna pravougaonika. U svakoj podoblasti zadat je granični problem eliptičkog tipa, odnosno početno-granični problem paraboličkog tipa. Interakcija između rešenja opisuje se pomoću nelokalnih uslova saglasnosti na granicama posmatranih podoblasti. Razmotreno je više primera fizičkih i inženjerskih zadataka koji se svode na transmisione probleme sličnog tipa. Za modelne probleme dokazana je egzistencija i jedinstvenost rešenja u odgovarajućim prostorima Soboljeva. Takođe su konstruisane diferencijske sheme za njihovo rešavanje i dokazana njihova konvergencija.

Ključne reči: transmisioni problem, razdvojene oblasti, nelokalni uslovi saglasnosti, prostori Soboljeva, slaba rešenja, apriorna ocena, konačne razlike, greška, konvergencija.

Naučna oblast: Matematika

Uža naučna oblast: Numerička matematika

UDK broj:[517.956.227+517.956.2+517.956.4]:[519.632/.633](043.3)

ABOUT SOME TRANSMISSION PROBLEMS IN DISJOINT DOMAINS

Abstract

In applications, especially in engineering, often are encountered composite or layered structures, where the properties of individual layers can vary considerably from the properties of the surrounding material. Layers can be structural, thermal, electromagnetic or optical, etc. Mathematical models of energy and mass transfer in domains with layers lead to so called transmission problems.

At the beginning, in this dissertation we consider a transmission spectral problem in the area, which consists of two disjoint intervals. At each interval was given a eigenvalue problem, while the interaction between their solutions is described by means of the nonlocal integral conjugation conditions. The existence of countable series of generalized solutions is proved, whereby ordered pairs of eigenfunctions belong to the corresponding Sobolev spaces. The structure of the spectrum and asymptotic behavior of eigenvalues is described. A difference scheme for solving them is constructed.

In addition to the spectral transmission problems, in this dissertation we consider a class of non-standard elliptic and parabolic transmission problems in disjoint domains. As a model example it is taken an area consisting of two non-adjacent rectangles. In each subarea was given a boundary problem of elliptic type, as well as initial-boundary problem of the parabolic type. The interaction between their solutions is described by means of the nonlocal integral conjugation conditions. It was considered more examples of physical and engineering tasks which are reduced to transmission problems of similar type. For the model problems the existence and uniqueness of its weak solution in appropriate Sobolev-like space is proved. They are also constructed a finite difference schemes for solving them and proved their convergence.

Key words: transmission problem, disjoint domains, nonlocal integral conjugation conditions, Sobolev spaces, weak solution, a priori estimate, finite differences, error, convergence.

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Numerical mathematics

UDK number:[517.956.227+517.956.2+517.956.4]:[519.632/.633](043.3)

Sadržaj

1 Modelni problemi **1**

1.1 Jednodimenzioni problem 1

1.2 Dvodimenzioni problem 4

1.3 Primeri 5

2 Matematički aparat **12**

2.1 Teorija operatora 12

2.1.1 Bilinearni funkcionali na realnim Hilbertovim prostorima . . . 14

2.1.2 Neograničeni linearni operatori 15

2.2 Elementi teorije interpolacije 16

2.3 Prostori neprekidnih i integrabilnih funkcija 17

2.4 Prostori Soboljeva 20

2.4.1 Anizotropni prostori Soboljeva 24

2.4.2 Lema Brambla-Hilberta 27

2.4.3 Multiplikatori u prostorima Soboljeva 28

2.5 Prostori Besova 29

2.6 Osobine interpolacije prostora Soboljeva 30

2.7 Pojam diferencijske sheme 31

2.7.1 Mreža i osnovni diferencijski operatori 32

2.7.2 Neke diferencijske formule 33

2.7.3 Diferencijski analogoni teorema potapanja 34

2.7.4 Princip maksimuma 34

3 Transmisioni spektralni problem **36**

3.1 Egzistencija sopstvenih vrednosti 36

3.2 Asimptotsko ponašanje sopstvenih vrednosti 40

3.3 Aproksimacija metodom konačnih razlika 43

3.4 Numerički eksperiment 46

4 Transmisioni problem za jednačine eliptičkog tipa **48**

4.1 Formulacija problema 48

4.2 Egzistencija i jedinstvenost slabog rešenja 49

4.3 Aproksimacija metodom konačnih razlika 55

4.4 Analiza greške diferencijske sheme 63

4.5 Ocena brzine konvergencije diferencijske sheme 69

4.6 Nekoercivan slučaj 82

5 Transmisioni problem za jednačine paraboličkog tipa **85**
5.1 Formulacija problema 85
5.2 Egzistencija i jedinstvenost slabog rešenja 86
5.3 Apriorna ocena 88
5.4 Aproksimacija metodom konačnih razlika 96
5.5 Analiza greške diferencijske sheme 100
5.6 Ocena brzine konvergencije diferencijske sheme 103
5.7 Numerički eksperiment 112
5.8 Faktorizovana shema 113

6 Zaključak **117**

Literatura **119**

Biografija **123**

Predgovor

U ovom radu razmatraju se transmisioni problemi čija su rešenja definisana u dve ili više razdvojenih i nepovezanih oblasti. Takva situacija nastaje, na primer, ako je rešenje u međuoblasti poznato, ili se može odrediti rešavanjem jednostavnijeg problema. Efekat delovanja međuoblasti može se modelovati pomoću nelokalnih uslova saglasnosti na granicama posmatranih podoblasti (videti [4],[5],[8], [13],[27],[35]).

Ovakvi problemi se često javljaju u poljima fizike i tehnike. Na primer, telo se može sastojati od više slojeva materijala, čije se osobine znatno razlikuju od osobina materijala koji ih okružuje. U zavisnosti od primene, slojevi imaju različite uloge: strukturnu, elektromagnetnu, optičku, termičku itd. Matematičkim modelovanjem prenosa energije i mase u takvim oblastima dobijamo transmisione probleme. Transmisioni problemi u disjunktnim oblastima predstavljaju se sistemima parcijalnih diferencijalnih jednačina sa dodatnim uslovima (početni i granični uslovi, uslovi saglasnosti).

Numeričke metode za rešavanje transmisionih problema eliptičkog tipa razmatrane su u radovima [14], [12],[26],[28],[39],[34]. Početno granični problemi paraboličkog tipa i odgovarajuće metode za njihovo rešavanje razmatrani su u [17],[18],[24],[25], [32] i [33], dok su problemi hiperboličkog tipa istraživani u radovima [22],[9].

Rad je podeljen na šest poglavlja.

Prvo poglavlje je uvodno. U njemu su predstavljeni modelni problemi u jednodimenzionom i dvodimenzionom slučaju kao i primeri transmisionih problema.

Drugo poglavlje sadrži osnovne pojmove i tvrđenja koji će biti korišćeni u radu.

U trećem poglavlju predstavljen je transmisioni spektralni problem u jednodimenzionom slučaju (videti [9]). Kao modelni primer uzeta je oblast koja se sastoji od dva nesusedna intervala. U svakoj podoblasti zadat je Šturm-Liuvilov problem sa graničnim uslovima Robinovog tipa (u spoljašnjim graničnim tačkama) i nelokalnim uslovima saglasnosti Robin-Dirichlet-ovog tipa (u unutrašnjim graničnim tačkama). Dokazana je egzistencija i jedinstvenost sopstvenih vrednosti i slabih sopstvenih funkcija. Opisana je struktura spektra i asimptotsko ponašanje sopstvenih vrednosti. Izvedena je numerička aproksimacija metodom konačnih razlika.

U četvrtom poglavlju je predstavljen transmisioni problem eliptičkog tipa u dvodimenzionom slučaju (videti [34]), dok je u petom poglavlju predstavljen transmisioni problem paraboličkog tipa, takođe u dvodimenzionom slučaju (videti [18]). Kao modelni primer uzeta je oblast koja se sastoji od dva nesusedna pravougaonika, odnosno dva simetrična jedinična kvadrata. U svakoj podoblasti zadat je granični problem eliptičkog tipa, odnosno početno-granični problem paraboličkog tipa sa Robinovim graničnim uslovima. Interakcija između rešenja iz različitih oblasti opisuje se nelokalnim uslovima saglasnosti Robin-Dirichlet-ovog tipa. Pretpostavljeno je da koeficijenti zadatih jednačina zadovoljavaju uslove regularnosti i eliptičnosti koji omogućavaju postojanje generalisanih rešenja u odgovarajućim prostorima Soboljeva. Dokazana je egzistencija i jedinstvenost rešenja korišćenjem metoda funkcionalne analize i teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina (prostori Soboljeva, teoreme potapanja, teoreme o tragu, lema Laksa-Milgrama itd). Izvedena je numerička aproksimacija metodom konačnih razlika kao i ocena brzine konvergencije. Prilikom konstrukcije metode konačnih razlika i ispitivanja njenih osobina korišćene su metode teorije diferencijskih shema (prostori funkcija diskretnog argumenta, metoda energetskih nejednakosti itd). Za izvođenje ocene brzine konvergencije korišćene su metode teorije diferencijskih shema, kao i metode teorije funkcionalnih prostora (prostori Soboljeva, teoreme potapanja, teoreme o tragu, prostori multiplikatora, integralne reprezentacije, lema Brambla-Hilberta itd).

Zaključak rada dat je u šestom poglavlju.

Matematički fakultet
Beograd, 2015.

Zorica Milovanović

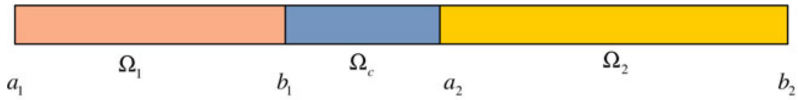
1 Modelni problemi

1.1 Jednodimenzioni problem

U intervalu $\Omega = (a, b)$ razmotrimo jednačinu paraboličkog tipa (videti [16]):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

Pretpostavimo da je interval Ω podeljen na tri podintervala $\Omega_1 = (a_1, b_1)$, $\Omega_c = (b_1, a_2)$ i $\Omega_2 = (a_2, b_2)$, pri čemu je $a = a_1 < b_1 < a_2 < b_2 = b$ (slika 1).



Slika 1

Neka je dalje

$$\rho = \begin{cases} \rho_1 \asymp 1, & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ \rho_c \approx 0, & \mathrm{x} \in \Omega_c, \\ \rho_2 \asymp 1, & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

Ako pustimo da $\rho_1,\ \rho_2 \to 1$ i $\rho_c \to 0$ i uvedemo oznake:

$$p(x) = \begin{cases} p_1(x), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ p_c(x), & \mathrm{x} \in \Omega_c, \\ p_2(x), & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases} \qquad q(x) = \begin{cases} q_1(x), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ q_c(x), & \mathrm{x} \in \Omega_c, \\ q_2(x), & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

$$f(x,t) = \begin{cases} f_1(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ f_c(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_c, \\ f_2(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases} \qquad u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_1, \\ u_c(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_c, \\ u_2(x,t), & \mathrm{x} \in \Omega_2. \end{cases}$$

jednačina (1.1) se svodi na sledeći sistem:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) + q_i(x)u_i(x) = f_i(x,t), \quad x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p_c(x)\frac{\partial u_c}{\partial x}\right) + q_c(x)u_c(x) = f_c(x,t), \quad x \in \Omega_c \tag{1.3}$$

Prirodno je zahtevati da rešenje u i fluks $p(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ budu neprekidni u tačkama b_1

i a_2:

$$u_1(b_1,t) = u_c(b_1,t), \quad u_c(a_2,t) = u_2(a_2,t), \tag{1.4}$$

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) = p_c(b_1)\frac{\partial u_c}{\partial x}(b_1,t),\ \ p_c(a_2)\frac{\partial u_c}{\partial x}(a_2,t) = p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t). \tag{1.5}$$

Jednačina (1.3) predstavlja običnu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda po promenljivoj x. Njeno opšte rešenje je

$$u_c(x,t) = C_1(t)v_1(x) + C_2(t)v_2(x) + w(x,t), \tag{1.6}$$

gde su v_1, v_2 i $w(x,t)$ poznate funkcije (v_1 i v_2 su linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine, dok je w partikularno rešenje jednačine (1.3)). Zamenom (1.6) u (1.4) dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} C_1(t)v_1(b_1) + C_2(t)v_2(b_1) &= u_1(b_1,t) - w(b_1,t) \\ C_1(t)v_1(a_2) + C_2(t)v_2(a_2) &= u_2(a_2,t) - w(a_2,t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

iz kojeg određujemo $C_1(t)$ i $C_2(t)$.

Dakle,

$$C_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} u_1(b_1,t) - w(b_1,t) & v_2(b_1) \\ u_2(a_2,t) - w(a_2,t) & v_2(a_2) \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad C_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} u_2(a_2,t) - w(a_2,t) & v_1(a_2) \\ u_1(b_1,t) - w(b_1,t) & v_1(b_1) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

gde je ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_1(b_1) & v_2(b_1) \\ v_1(a_2) & v_2(a_2) \end{vmatrix}.$$

Iskoristimo sada uslov neprekidnosti (1.5) i opšte rešenje jednačine (1.3):

$$\begin{aligned} p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) &= p_c(b_1)\frac{\partial}{\partial x}\Big[C_1(t)v_1(x) + C_2(t)v_2(x) + w(x,t)\Big]\Big|_{x=b_1} \\ &= p_c(b_1)\Big[C_1(t)v_1'(b_1) + C_2(t)v_2'(b_1) + \frac{\partial w}{\partial x}(b_1,t)\Big] \end{aligned}$$

$$p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t) = p_c(a_2)\Big[C_1(t)v_1'(a_2) + C_2(t)v_2'(a_2) + \frac{\partial w}{\partial x}(a_2,t)\Big]$$

Posle kratkog računa, koristeći rešenja sistema (1.7) dobijamo:

$$p_1(b_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,t) = -\alpha_1 u_1(b_1,t) + \beta_1 u_2(a_2,t) + \gamma_1(t), \tag{1.8}$$

$$-\, p_2(a_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,t) = -\alpha_2 u_2(a_2,t) + \beta_2 u_1(b_1,t) + \gamma_2(t), \tag{1.9}$$

gde je

$$\alpha_1 = \frac{p_c(b_1)}{\Delta}\big(v_1(a_2)v_2'(b_1) - v_2(a_2)v_1'(b_1)\big),\ \beta_1 = \frac{p_c(b_1)}{\Delta}\big(-v_2(b_1)v_1'(b_1) + v_1(b_1)v_2'(b_1)\big),$$

$$\alpha_2 = \frac{p_c(a_2)}{\Delta}\big(v_1(b_1)v_2'(a_2) - v_2(b_1)v_1'(a_2)\big),\ \beta_2 = \frac{p_c(a_2)}{\Delta}\big(v_1(a_2)v_2'(a_2) - v_2(a_2)v_1'(a_2)\big),$$

$$\gamma_1 = \frac{p_c(b_1)}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} v_2(b_1) & v_2'(b_1) \\ v_1(b_1) & v_1'(b_1)\end{vmatrix} w(a_2,t) + \begin{vmatrix} v_1(a_2) & v_1'(b_1) \\ v_2(a_2) & v_2'(b_1)\end{vmatrix} w(b_1,t) + \Delta\frac{\partial w}{\partial x}(b_1,t)\right),$$

$$\gamma_2 = \frac{p_c(a_2)}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} v_2(a_2) & v_2'(a_2)) \\ v_1(a_2) & v_1'(a_2)\end{vmatrix} w(b_1,t) + \begin{vmatrix} v_1(b_1) & v_1'(a_2) \\ v_2(b_1) & v_2'(a_2)\end{vmatrix} w(a_2,t) - \Delta\frac{\partial w}{\partial x}(a_2,t)\right).$$

Tako je problem sveden na određivanje funkcija u_1 i u_2 koje zadovoljavaju jednačine (1.2) i uslove saglasnosti (1.8) i (1.9). Da bi se izdvojilo jedinstveno rešenje potrebno je još zadati granične uslove u tačkama a_1 i b_2, na primer:

$$u_1(a_1,t) = \delta_1(t), \quad u_2(b_2,t) = \delta_2(t), \tag{1.10}$$

kao i početne uslove:

$$u_i(x,0) = u_{i0}(x), \quad x \in \Omega_i,\ i = 1,2. \tag{1.11}$$

Tako dobijamo početno-granični problem (1.2), (1.8)-(1.11).
Granični uslovi (1.10) mogu se zameniti graničnim uslovima Robinovog tipa:

$$-p_1(a_1)\frac{\partial u_1}{\partial x}(a_1,t) + \sigma_1 u_1(a_1,t) = 0, \quad p_2(b_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}(b_2,t) + \sigma_2 u_2(b_2,t) = 0.$$

Moguća je i mešovita kombinacija kada je u jednoj od tačaka (npr. a_1) zadat Dirichlet-ov, a u drugoj Robinov uslov.

1.2 Dvodimenzioni problem

Razmotrimo sledeći početno granični problem: Odrediti funkcije $u_1(x,y,t)$ i $u_2(x,y,t)$ koje zadovoljavaju sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina paraboličkog tipa:

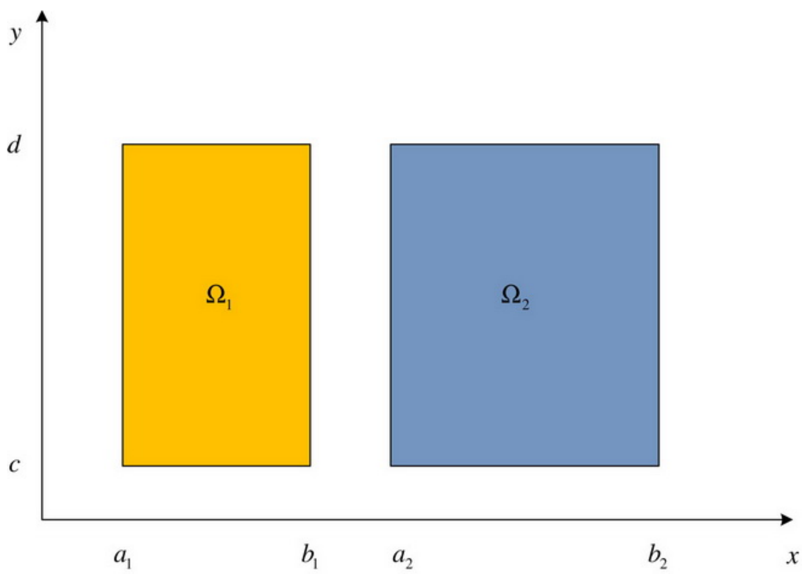
$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_1(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q_1(x,y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + r_1(x,y)u_1 = f_1(x,y,t), \quad (1.12)$$

$$(x,y) \in \Omega_1 = (a_1,b_1)\times(c,d), \quad t>0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p_2(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q_2(x,y)\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + r_2(x,y)u_2 = f_2(x,y,t), \quad (1.13)$$

$$(x,y) \in \Omega_2 = (a_2,b_2)\times(c,d), \quad t>0,$$

gde je $-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < +\infty$ (slika 2),



Slika 2

početne uslove:

$$u_1(x,y,0) = u_{10}(x,y), \quad (x,y)\in\Omega_1, \quad u_2(x,y,0) = u_{20}(x,y), \quad (x,y)\in\Omega_2, \quad (1.14)$$

standardne Dirihleove uslove na spoljašnjem delu granice:

$$\begin{aligned} &u_1(a_1,y,t) = 0, \quad y\in(c,d), \quad u_1(x,c,t) = u_1(x,d,t) = 0, \quad x\in(a_1,b_1),\\ &u_2(b_2,y,t) = 0, \quad y\in(c,d), \quad u_2(x,c,t) = u_2(x,d,t) = 0, \quad x\in(a_2,b_2), \end{aligned} \quad (1.15)$$

i nelokalne uslove saglasnosti Robin-Dirihleovog tipa:

$$p_1(b_1,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}(b_1,y,t) \ + \alpha_1(y)u_1(b_1,y,t) = \int_c^d \beta_1(y,y')u_2(a_2,y',t)\,dy', \tag{1.16}$$

$$-p_2(a_2,y)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2,y,t) \ + \alpha_2(y)u_2(a_2,y,t) = \int_c^d \beta_2(y,y')u_1(b_1,y',t)\,dy' \tag{1.17}$$

$$y \in (c,d), \ \ t > 0.$$

Uslovi saglasnosti (1.16)-(1.17) mogu se smatrati generalizacijom uslova (1.8) i (1.9).

Smatratraćemo da ulazni podaci zadovoljavaju standardne uslove regularnosti i eliptičnosti

$$p_i(x,y),\ q_i(x,y),\ r_i(x,y) \in L_\infty(\Omega_i), \quad i = 1,2, \tag{1.18}$$

$$0 < p_{i0} \le p_i(x,y), \ \ 0 < q_{i0} \le q_i(x,y) \ \ s.s \ \ u \ \ \Omega_i, \ \ i = 1,2 \tag{1.19}$$

$$\alpha_i \in L_\infty(c,d), \ \ \beta_i \in L_\infty((c,d)\times(c,d)). \tag{1.20}$$

Slično kao u jednodimenzionom slučaju, Dirichlet-ovi granični uslovi (1.15) mogu se zameniti Robinovim graničnim uslovima:

$$\begin{aligned}
-p_1(a_1,y)\frac{\partial u_1}{\partial x}(a_1,y,t) \ &+ \sigma_1(y)u_1(a_1,y,t) = 0,\\
-q_i(x,c)\frac{\partial u_i}{\partial y}(x,c,t) \ &+ \check{\sigma}_i(x)u_i(x,c,t) = 0,\\
q_i(x,d)\frac{\partial u_i}{\partial y}(x,d,t) \ &+ \hat{\sigma}_i(x)u_i(x,d,t) = 0,\\
p_2(b_2,y)\frac{\partial u_2}{\partial x}(b_2,y,t) \ &+ \sigma_2(y)u_2(b_2,y,t) = 0.
\end{aligned}$$

Takođe, pretpostavićemo da su zadovoljni sledeći uslovi regularnosti

$$\sigma_i \in L_\infty(c,d), \ \ \check{\sigma}_i \in L_\infty(a_i,b_i), \ \ \hat{\sigma}_i \in L_\infty(a_i,b_i), \ \ i = 1,2.$$

1.3 Primeri

U ovom odeljku razmotrićemo nekoliko primera prenosa energije koji se svode na evolucione probleme s nelokalnim uslovima saglasnosti.

Prvi primer se odnosi na prenos toplote zračenjem. Posmatrajmo jednostavan fizički sistem $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, gde su Ω_1 i Ω_2 dva crna tela u $\mathbb{R}^N$, $N \ge 2$, okružena prozirnim medijumom Ω_0. U tom slučaju dovoljno je posmatrati zračenje sa površine Ω_1 i Ω_2.

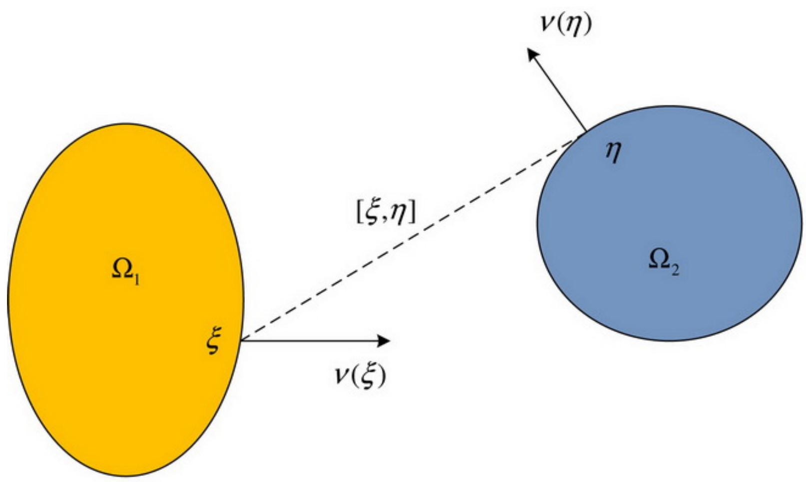
Za $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ označimo sa $[\xi, \eta]$ duž koja spaja tačke ξ i η, tj. $[\xi, \eta] = \{\alpha\xi + (1-\alpha)\eta | \alpha \in [0,1]\}$. Označimo takođe $\Gamma_{i,R} = \{\xi \in \partial\Omega_i | \exists \eta \in \Omega_{3-i} : [\xi, \eta] \cap \Omega_i = \emptyset\}$, i podelimo $\partial\Omega_i \setminus \Gamma_{i,R}$ na dva dela: $\Gamma_{i,D}$ i $\Gamma_{i,N}$. Sledi $\partial\Omega_i = \Gamma_{i,R} \cup \Gamma_{i,D} \cup \Gamma_{i,N}$, $i = 1, 2$. Nestacionarno toplotno zračenje u sistemu crnih tela Ω_1 i Ω_2 može se opisati sledećim jednačinama:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \sum_{j,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(A^i_{jk}(\xi, t, u_i)\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\right) = f_i(\xi, t), \quad \xi \in \Omega_i, \ t > 0 \tag{1.21}$$

$$u_i(\xi, 0) = u_{i,0}(\xi), \quad \xi \in \Omega_i \tag{1.22}$$

$$u_i(\xi, t) = \varphi_i(\xi, t), \quad \xi \in \Gamma_{i,D}, \ t > 0 \tag{1.23}$$

$$\begin{gathered}\sum_{j,k=1}^{N} A^i_{jk}(\xi, t, u_i)\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}\cos(\nu, \xi_j) + h_i(u_i(\xi, t)) = \\ \int_{\partial\Omega_{3-i}} h_{3-i}(u_{3-i}(\eta, t))w(\eta, \xi, t)\, d\sigma(\eta) + g_i(\xi, t), \quad \xi \in \Gamma_{i,R} \cup \Gamma_{i,N}, \ t > 0.\end{gathered} \tag{1.24}$$



Slika 3

Pri tome je $\nu(\xi)$ spoljašnja jedinična normala na $\partial\Omega$ u tački ξ, $d\sigma$ – Lebegova mera na $\partial\Omega$, $u_i(\xi, t)$ – temperatura tela Ω_i, $A^i_{jk}(\xi, t, u_i)$ – tenzor toplotne provodljivosti, $h_i(u_i(\xi, t))$ – površinska gustina zračenja, $\int_{\partial\Omega_{3-i}} h_{3-i}(u_{3-i}(\eta, t))w(\eta, \xi, t)\, d\sigma(\eta)$ – gustina apsorbovanog zračenja u tački ξ, i $i = 1, 2$. Ako tela miruju, funkcija w (tzv. koeficijent vidljivosti) ne zavisi od vremena t i ima oblik:

$$w(\eta, \xi) = \begin{cases} \frac{(\nu(\eta), \xi - \eta)(\nu(\xi), \eta - \xi)}{b_N |\eta - \xi|^{N+1}}, & [\xi, \eta] \cap \Omega = \emptyset, \\ 0, & [\xi, \eta] \cap \Omega \neq \emptyset, \end{cases} \tag{1.25}$$

gde je $b_N = \text{mes} S_{N-1}/(N-1)$, S_{N-1} – jedinična sfera u $\mathbb{R}^{N-1}$, (ξ, η) – standardni euklidski skalarni proizvod u $\mathbb{R}^N$, i $|\xi| = (\xi, \xi)^{1/2}$ – euklidska norma u $\mathbb{R}^N$. U slučaju zračenja Štefan-Bolcmanovog tipa gustina zračenja se izražava formulom oblika: $h_i(u_i) = \alpha_i |u_i|^3 u_i$.

Možemo primetiti da se modelni zadatak (1.12) – (1.17) svodi na linearizovani nestacionarni problem toplotnog zračenja tipa (1.21) – (1.25) ako se koeficijenti β_i izaberu u skladu sa (1.25):

$$\beta_i(y, y') = \frac{\alpha_{3-i}(y')(a_2 - b_1)^2}{2[(a_2 - b_1)^2 + (y - y')^2]^{3/2}}, \quad i = 1, 2. \tag{1.26}$$

Problemi tipa (1.21)-(1.25) razmatrani su u [3],[10],[27],[35].

Kao drugi primer razmotrimo analogan problem s pravougaonicima različite širine: $\Omega_1 = (a_1, b_1) \times (c_1, d_1)$, $\Omega_2 = (a_2, b_2) \times (c_2, d_2)$, $c_2 < c_1 < d_1 < d_2$. Tada se umesto (1.17) dobija uslov saglasnosti oblika:

$$-p_2(a_2, y)\frac{\partial u_2}{\partial x}(a_2, y, t) \; + \alpha_2(y) u_2(a_2, y, t) =$$

$$\begin{cases} \int_{c_1}^{d_1} \beta_2(y, y') u_1(b_1, y', t)\, dy' + \int_{a_1}^{b_1} \check{\beta}_2(y, x') u_1(x', c_1, t)\, dx', & y \in (c_2, c_1), \\ \int_{c_1}^{d_1} \beta_2(y, y') u_1(b_1, y', t)\, dy', & y \in (c_1, d_1), \\ \int_{c_1}^{d_1} \beta_2(y, y') u_1(b_1, y', t)\, dy' + \int_{a_1}^{b_1} \hat{\beta}_2(y, x') u_1(x', d_1, t)\, dx', & y \in (d_1, d_2), \end{cases} \tag{1.27}$$

gde je

$$\check{\beta}_2(y, x') = \frac{\check{\alpha}_1(x')(c_1 - y)(a_2 - x')}{2[(a_2 - x')^2 + (c_1 - y)^2]^{3/2}}, \quad \hat{\beta}_2(y, x') = \frac{\hat{\alpha}_1(x')(y - d_1)(a_2 - x')}{2[(a_2 - x')^2 + (y - d_1)^2]^{3/2}},$$

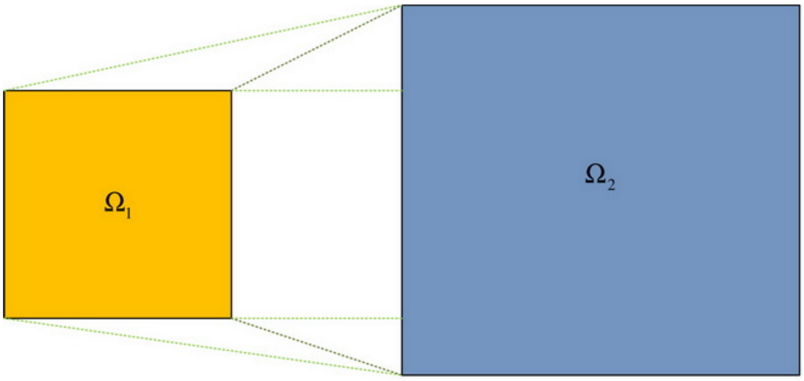
funkcija $\beta_2(y, y')$ je definisana formulom (1.26), dok su $\check{\alpha}_1(x)$ i $\hat{\alpha}_1(x)$ koeficijenti koji imaju analognu ulogu kao $\alpha_1(y)$. Osim toga, Dirihleov granični uslov $u_1(x, c_1, t) = 0$ zamenjuje se nelokalnim uslovom saglasnosti:

$$-q_1(x, c_1)\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, c_1, t) \; + \check{\alpha}_1(x) u_1(x, c_1, t) = \int_{c_2}^{c_1} \check{\beta}_1(x, y') u_2(a_2, y', t)\, dy',$$

gde je

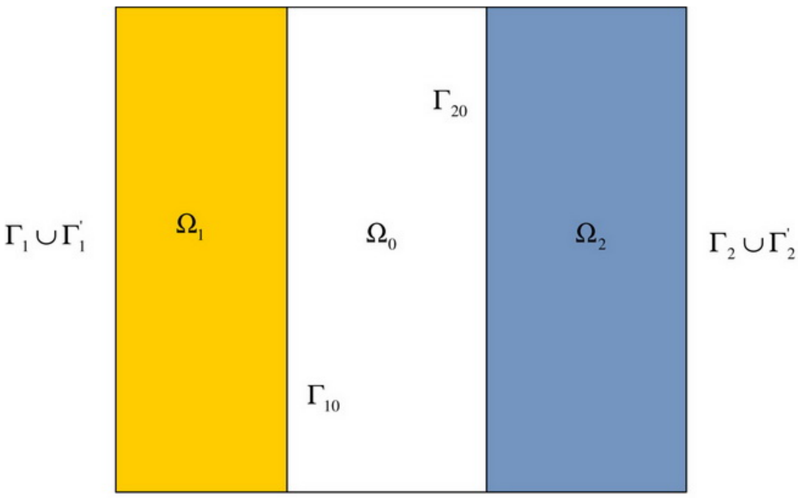
$$\check{\beta}_1(x, y') = \frac{\check{\alpha}_2(y')(c_1 - y')(a_2 - x)}{2[(a_2 - x)^2 + (c_1 - y')^2]^{3/2}}$$

i analogno za $y = d_1$.



Slika 4

U sledećem primeru razmatramo prenos toplote u zidu koji se sastoji iz dva paralelna sloja Ω_1 i Ω_2 između kojih se nalazi šupljina ispunjena vazduhom Ω_0, koja se ne provetrava niti zagreva. Kroz površi Γ_{10} i Γ_{20} toplota se prenosi konvekcijom iz slojeva zida u vazduh, čija je temperatura $T(t)$ uniformna u čitavoj šupljini. Zračenje između suprotnih površi šupljine se zanemaruje. “Spoljašnja” granica Ω_i, $i = 1, 2$, može biti podeljena na dva dela: $\partial\Omega_i \setminus \Gamma_{i0} = \Gamma_i \cup \Gamma_i^{'}$, pri čemu se na Γ_i odvija konvektivni prenos toplote u spoljašnju sredinu, dok je na $\Gamma_i^{'}$ temperatura zadata. Takođe je zadat početni raspored temperature u oba sloja zida.



Slika 5

Odgovarajući matematički model glasi: Odrediti funkcije $u_i(x, y, t)$, $(x, y) \in \Omega_i$ $(i = 1, 2)$, koje zadovoljavaju jednačine (1.12) i (1.13), početne uslove (1.14), Dirihleove i Robinove granične uslove (na Γ_i' odnosno Γ_i) i uslove saglasnosti

$$p_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = h_{10}(u_1 - T), \ \ (x, y) \in \Gamma_{10}, \ t > 0 \tag{1.28}$$

$$-p_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = h_{20}(u_2 - T), \ \ (x, y) \in \Gamma_{20}, \ t > 0. \tag{1.29}$$

Zanemarujući toplotni kapacitet vazduha i uzimajući u obzir da se unutrašnja šupljina ne provetrava niti zagreva, zaključujemo da ulazni i izlazni toplotni fluks moraju biti u ravnoteži [27]:

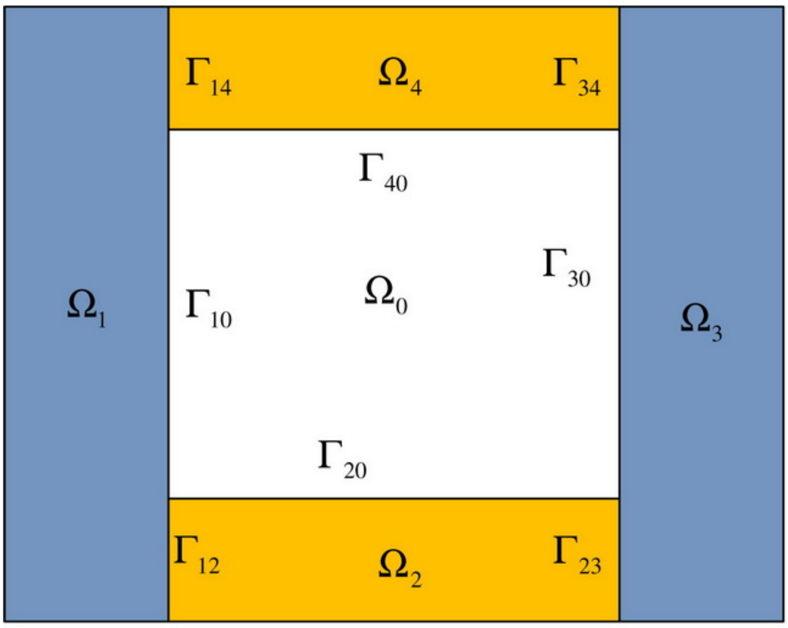
$$\int_{\Gamma_{10}} h_{10}(u_1 - T)\, d\sigma + \int_{\Gamma_{20}} h_{20}(u_2 - T)\, d\sigma = 0$$

odakle sledi:

$$T(t) = \frac{\int_{\Gamma_{10}} h_{10} u_1\, d\sigma + \int_{\Gamma_{20}} h_{20} u_2\, d\sigma}{\int_{\Gamma_{10}} h_{10}\, d\sigma + \int_{\Gamma_{20}} h_{20}\, d\sigma}.$$

Na taj način, eliminisanjem $T(t)$, uslovi (1.28) – (1.29) se svode na homogene nelokalne uslove koji uopštavaju (1.16) – (1.17).

Na sličan način, zadržavajući uslove prenosa toplote u zidu iz prethodnog primera, može se razmatrati prenos toplote u kompozitnoj strukturi prikazanoj na slici 6.



Slika 6

Kao rezultat se dobija početno-granični problem:

$$L_i u_i = f_i(x,y,t), \quad (x,y) \in \Omega_i,\ t > 0, \quad i = 1,2,3,4,$$

$$u_i(x,y,0) = u_{i0}(x,y), \quad (x,y) \in \Omega_i, \quad i = 1,2,3,4,$$

sa uslovima saglasnosti na unutrašnjim granicama $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$:

$$u_i\big|_{\Gamma_{ij}} = u_j\big|_{\Gamma_{ij}}, \quad p_i \frac{\partial u_j}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_{ij}} = p_j \frac{\partial u_i}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_{ij}}, \quad i,j = 1,2,3,4,$$

Dirihleovim uslovima na spoljašnjoj granici:

$$u_i\big|_{\Gamma_i} = 0, \quad \Gamma_i = \partial\Omega_i \setminus (\cup_j \Gamma_{ij}), \quad i = 1,2,3,4,$$

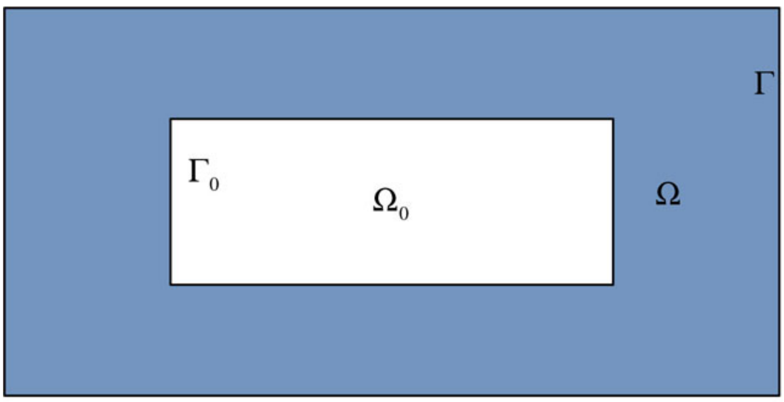
i nelokalnim uslovima saglasnosti na Γ_{i0}:

$$-\frac{\partial u_i}{\partial \nu} = h_{i0}(u_i - T(t)), \ \text{ na } \ \Gamma_{i0}, \ \ i = 1,2,3,4,$$

gde je:

$$T(t) = \frac{\sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_{j0}} h_{j0} u_j d\sigma}{\sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_{j0}} h_{j0} d\sigma}.$$

Na samom kraju, analogno prethodnim primerima, razmotrimo prenos toplote u zidu u kome postoji šupljina .



Slika 7

Strukturi, prikazanoj na slici 7, pridružujemo sledeći početno-granični problem:

$$Lu = f(x,y,t), \quad (x,y) \in \Omega,\ t > 0$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

sa Dirihleovim uslovima na spoljašnjoj granici:

$$u\big|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \partial\Omega$$

i nelokalnim uslovima saglasnosti na $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$:

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = h_0(u - T(t)), \;\text{ na }\; \Gamma_0$$

gde je:

$$T(t) = \frac{\int_{\Gamma_0} h_0 u d\sigma}{\int_{\Gamma_0} h_0 d\sigma}.$$

2 Matematički aparat

U ovom poglavlju dat je kratak pregled osnovnih pojmova i tvrđenja koji će biti korišćeni u radu (videti [1],[5],[7], [11], [15],[20],[30],[31],[37],[38],[40]).

2.1 Teorija operatora

Teorije graničnih problema za linearne parcijalne diferencijalne jednačine i diferencijskih metoda njihovog rešavanja bitno se oslanjaju na funkcionalnu analizu, specijalno na teoriju linearnih operatora u Hilbertovom prostoru.

Pretpostavimo da su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ normirani linearni prostori sa normama $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ i $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ i neka je U skup u $\mathcal{U}$. Neka je A preslikavanje koje svakom elementu $u \in U$ pridružuje jednoznačno određen element u $\mathcal{V}$. Označimo ovaj element sa Au i reći ćemo da ovakvo peslikavanje definiše operator A na skupu U. Skup U je domen operatora A i označavamo ga sa $D(A)$, a skup $R(A) = \{v \in \mathcal{V},\ v = Au,\ u \in D(A)\}$ nazivamo oblašću vrednosti operatora A.

Dve norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ na linearnom prostoru $\mathcal{U}$ su ekvivalentne ako postoje pozitivne konstante C_1 i C_2 tako da važi:

$$C_1\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C_2\|u\|_1, \quad \forall u \in \mathcal{U}$$

Za preslikavanje $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ kažemo da je injekcija, ako za svaki element $v \in R(A)$ postoji jedinstveno određen element $u \in D(A)$ tako da je $Au = v$. Preslikavanje $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je surjekcija ako je $R(A) = \mathcal{V}$. Ako je preslikavanje $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ injekcija, tada možemo definisati inverzni operator $A^{-1} : R(A) \to D(A)$ stavljajući $u = A^{-1}v$. Za operator A ćemo reći da je neprekidan ako kad kod $u_n \to u$ u U onda $Au_n \to Au$ u $\mathcal{V}$, za svaki niz $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, tako da $u_n \in D(A)$ i $u \in D(A)$.

Operator A je linearan ako je $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av,\ \forall u, v \in D(A),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ako postoji pozitivan realan broj K takav da je

$$\|Au\|_{\mathcal{V}} \leq K\|u\|_{\mathcal{U}} \quad \forall u \in D(A) \tag{2.1}$$

kažemo da je operator A ograničen. Skup svih ograničenih linearnih operatora $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ označavamo sa $\mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

Najmanju konstantu za koju važi uslov (2.1) nazivamo normom operatora A i obeležavamo sa $\|A\|$ tj.

$$\|A\| = \sup_{0 \neq u \in D(A)} \|Au\|_{\mathcal{V}} / \|u\|_{\mathcal{U}} \tag{2.2}$$

Neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ dva normirana linearna prostora i $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Definišemo jedinični operator $I : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, tako da je $Iu = u$, za svako $u \in \mathcal{U}$. Jedinični operator je linearan. Ako je osim toga ovaj operator neprekidan, onda ćemo takvo preslikavanje zvati potapanjem iz prostora $\mathcal{U}$ u prostor $\mathcal{V}$. Ako potapanje postoji, reći ćemo da je prostor $\mathcal{U}$ potopljen u prostor $\mathcal{V}$ i pisaćemo $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{V}$. Neprekidnost operatora potapanja iz prostora $\mathcal{U}$ u prostor $\mathcal{V}$ implicira postojanje pozitivne konstante K tako da važi:

$$\|u\|_{\mathcal{V}} \leq K \|u\|_{\mathcal{U}} \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

Pretpostavimo sada da je A ograničen linearan operator iz Hilbertovog prostora $\mathcal{U}$ u $\mathcal{U}$, sa skalarnim proizvodom $(\cdot, \cdot)$ i normom $\| \cdot \|$. Veličinu (Au, u) nazivamo njegovom energijom. Operator A ćemo zvati nenegativnim ako je $(Au, u) \geq 0$, pozitivnim ako je $(Au, u) > 0,\ u \neq 0$ i pozitivno definitnim ako je $(Au, u) \geq \delta \|u\|^2,\ \delta = const > 0$.

Ako su A i $A^\star$ linearni operatori koji preslikavaju $\mathcal{U}$ u $\mathcal{U}$ takvi da je $(Au, v) = (u, A^\star v)$, za svako $u, v \in \mathcal{U}$ kažemo da je operator $A^\star$ konjugovan k operatoru A. Ako je $A = A^\star$ kažemo da je operator A samokonjugovan. Ako je $A = A^\star > 0$ i A^{-1} postoji, tada je $A^{-1} = (A^{-1})^\star > 0$, pa možemo definisati tzv. "negativnu normu":

$$\|u\|_{A^{-1}} = (A^{-1}u, u)^{1/2}.$$

Može se pokazati da je $\|u\|_{A^{-1}} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(u,v)|}{\|v\|_A}$.

Teorema 2.1. *Da bi linearni operator imao inverzni operator $A^{-1} : R(A) \to D(A)$ potrebno je i dovoljno da je $Au = 0$ samo za $u = 0$.*

Teorema 2.2. *Neka je $A : D(A) \to R(A)$ linearan operator. Da bi inverzni operator A^{-1} postojao i bio ograničen potrebno je i dovoljno da postoji konstanta $\delta > 0$ takva da je za svako $u \in D(A)$: $\|Au\| \geq \delta \|u\|$. Pri tome je $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$.*

Teorema 2.3. *Neka je A linearan operator i $D(A) = \mathcal{U}$. Da bi operator A imao inverzni operator A^{-1} s oblašću definisanosti $D(A^{-1}) = \mathcal{U}$ potrebno je i dovoljno da* *postoji konstanta $\delta > 0$ takva da je za svako $u \in \mathcal{U}$: $\|Au\| \geq \delta\|u\|$ i $\|A^{\star}u\| \geq \delta\|A\|$. Pri tome je $\|A^{-1}\| \leq 1/\delta$.*

Posledica 2.4. *Ako je A pozitivno definitan linearan ograničen operator, s oblašću definisanosti $D(A) = \mathcal{U}$, tada postoji inverzni operator A^{-1}, s oblašću definisanosti $D(A^{-1}) = \mathcal{U}$.*

Neka je $\mathcal{U}$ normiran linearan prostor i pretpostavimo da je $\mathcal{V} = \mathbb{C}$ ili $\mathcal{V} = \mathbb{R}$. Tada operator $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ zovemo funkcionalom. Sa $\mathcal{U}'$ označimo skup svih ograničenih linearnih funkcionala definisanih na normiranom linearnom prostoru $\mathcal{U}$.
$\mathcal{U}'$ je linearan prostor u odnosu na sabiranje linearnih funkcionala i množenje linearnog funkcionala skalarom, ako se ove operacije definišu na uobičajen način:

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u), \quad f, g \in \mathcal{U}', \, u \in \mathcal{U}$$

$$(\lambda f)(u) = \lambda f(u), \quad f \in \mathcal{U}', \, u \in \mathcal{U}, \, \lambda \in \mathbb{R} \ \text{(ili } \mathbb{C}\text{)}.$$

Prostoru $\mathcal{U}'$ pridružujemo normu $\|\cdot\|_{\mathcal{U}'}$ na sledeći način:

$$\|f\|_{\mathcal{U}'} = \sup_{0 \neq u \in \mathcal{U}} \frac{|f(u)|}{\|u\|_{\mathcal{U}}}.$$

Normiran linearan prostor $\mathcal{U}'$ zovemo dualnim prostorom prostora $\mathcal{U}$.

2.1.1 Bilinearni funkcionali na realnim Hilbertovim prostorima

Neka je $\mathcal{U}$ realan Hilbertov prostor sa normom $\|\cdot\|$, i neka je $a(\cdot,\cdot)$ funkcional definisan na Dekartovom proizvodu $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ takav da je:
1) bilinearan, tj. $a(w, v)$ je linearan po w za v fiksirano i linearan po v za w fiksirano
2) ograničen, tj. postoji pozitivan realan broj c_1 takav da važi sledeća nejednakost

$$|a(w, v)| \leq c_1\|w\|\|v\|, \quad \forall w, v \in \mathcal{U}$$

3) $\mathcal{U}$-koercivan, tj. postoji pozitivan realan broj c_0 takav da važi:

$$a(v, v) \geq c_0\|v\|^2, \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Bilinearan funkcional se još naziva i bilinearna forma.

Varijaciona formulacija graničnih problema za diferencijalne jednačine često ima sledeću formu: za dati ograničen linearan funkcional f na realnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}$-koercivan ograničen bilinearan funkcional $a(\cdot,\cdot)$ na $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$, naći $u\in\mathcal{U}$ tako da važi $a(u,v)=f(v),\ \ \forall v\in\mathcal{U}$.

Teorema 2.5. *(Lax-Milgram): Neka je f realan ograničen linearan funkcional na realnom Hilbertovom prostoru $\mathcal{U}$ sa normom $\|\cdot\|$ i neka je $a(\cdot,\cdot)$ $\mathcal{U}$-koercivan ograničen bilinearan funkcional na $\mathcal{U}\times\mathcal{U}$. Tada postoji jedinstven element $u\in\mathcal{U}$ tako da važi:*

$$a(u,v)=f(v)\ \ \forall v\in\mathcal{U}.$$

Osim toga, važi $\|u\|\leq\frac{1}{c_0}\|f\|_{\mathcal{U}'}$.

2.1.2 Neograničeni linearni operatori

Neka je H realan separabilan Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $(\cdot,\cdot)$ i normom $\|\cdot\|$, A neograničen, samokonjugovan, pozitivno definitan linearan operator sa oblašću definisanosti $D(A)$ gustom u H.

Lako se proverava da izraz $(u,v)_A=(Au,v),\ \ u,v\in D(A)$ zadovoljava aksiome skalarnog proizvoda. Ako se domen $D(A)$ kompletira u odnosu na normu $\|u\|_A=(u,u)_A^{1/2}$ dobija se nov Hilbertov prostor $H_A\subset H$. Izraz $(u,v)_{A^{-1}}=(A^{-1}u,v)$ takođe zadovoljava aksiome skalarnog proizvoda. Ako se prostor H kompletira u odnosu na normu $\|u\|_{A^{-1}}$ dobijamo prostor $H_{A^{-1}}\supset H$, $H_{A^{-1}}=(H_A)'$. Skalarni proizvod (u,v) može neprekidno da se produži na $H_{A^{-1}}\times H_A$, a operator A može da se produži do preslikavanja $A:H_A\to H_{A^{-1}}$.
Prostori $V_1=H_A,H,(V_1)'=H_{A^{-1}}$ predstavljaju Geljfandovu trojku, odnosno $V_1\subseteq H\subseteq (V_1)'$. Pri tome su ova potapanja neprekidna.
Analogno možemo definisati prostore:

$$V_2=H_{A^2},\ \ (V_2)'=H_{A^{-2}},\ \ V_3=H_{A^3},\ \ (V_3)'=H_{A^{-3}}\dots$$

Pri tome je

$$\|u\|_{A^2}=\|Au\|,\ \ \|u\|_{A^{-2}}=\|A^{-1}u\|$$

$$\|u\|_{A^3}=\|Au\|_A,\ \ \|u\|_{A^{-3}}=\|A^{-1}u\|_{A^{-1}}\dots$$

i važe potapanja

$$\dots\subseteq V_3\subseteq V_2\subseteq V_1\subseteq H\subseteq (V_1)'\subseteq (V_2)'\subseteq (V_3)'\subseteq\dots$$

2.2 Elementi teorije interpolacije

Neka su A_1 i A_2 dva Banahova prostora, linearno i neprekidno potopljeni u topološki linearni prostor $\mathcal{A}$. Dva takva prostora nazivamo interpolacioni par $\{A_1, A_2\}$. Razmotrimo takođe prostor $A_1 \cap A_2$ sa normom:

$$\|a\|_{A_1 \cap A_2} = \max\{\|a\|_{A_1}, \|a\|_{A_2}\}$$

i prostor $A_1 + A_2 = \{a \in \mathcal{A} : a = a_1 + a_2,\ a_j \in A_j,\ j = 1, 2\}$ sa normom:

$$\|a\|_{A_1 + A_2} = \inf_{a = a_1 + a_2, a_j \in A_j} \{\|a_1\|_{A_1} + \|a_2\|_{A_2}\}.$$

Važi $A_1 \cap A_2 \subset A_j \subset A_1 + A_2,\ j = 1, 2$.
Uvedimo sada pojam kategorije.

Definicija 2.1. *Kategorija $\mathcal{C}$ se sastoji od:*
1) klase objekata $ob(\mathcal{C})$ (najčešće ih označavamo sa $A, B, C, \ldots$ a umesto $A \in ob(\mathcal{C})$ obično pišemo $A \in \mathcal{C}$)
2) svakom uređenom paru (A, B) objekata $A, B \in \mathcal{C}$, odgovara skup $hom(A, B)$ čije elemente zovemo morfizmima sa domenom A i kodomenom B. Za $f \in hom(A, B)$, pišemo $f : A \to B$ i reći ćemo da je f morfizam iz skupa A u skup B
3) za svaka tri objekta A, B, C sadržana u $\mathcal{C}$, binarnu operaciju $hom(A, B) \times hom(B, C) \to hom(A, C)$ zovemo kompozicijom morfizama; kompoziciju $f : A \to B$ i $g : B \to C$ označavamo sa $g \circ f$ tako da su zadovoljene sledeće aksiome:
① *ako je $(A, B) \neq (C, D)$ tada su $hom(A, B)$ i $hom(C, D)$ disjunktni*
② *ako $f : A \to B,\ g : B \to C$ i $h : C \to D$ onda $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*
③ *za svaki objekat A, postoji morfizam $1_A \in hom(A, A)$ tako da je $f \circ 1_A = f$ za $\forall f \in hom(A, B)$ i $1_A \circ g = g$ za $\forall g \in hom(B, A)$.*

Razmotrimo kategoriju $\mathcal{C}_1$, gde su objekti $A, B, C, \ldots$ Banahovi prostori, dok su morfizmi ograničeni linearni operatori $L \in \mathcal{L}(A, B)$. Neka je $\mathcal{C}_2$ kategorija, čiji su objekti interpolacioni parovi $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$ sa morfizmima L koji pripadaju skupu $\mathcal{L}(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\})$ ograničenih linearnih operatora iz $A_1 + A_2$ u $B_1 + B_2$, takvi da njihove restrikcije na A_j pripadaju skupu $\mathcal{L}(A_j, B_j)$ $j = 1, 2$.
Preslikavanje $\mathbb{F} : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ zovemo interpolacioni funktor ako za svaki interpolacioni par $\{A_1, A_2\}$ važi:

$$A_1 \cap A_2 \subset \mathbb{F}(\{A_1, A_2\}) \subset A_1 + A_2$$

dok je svaki morfizam $L \in \mathcal{L}(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\})$ restrikcija operatora L na $\mathbb{F}(\{A_1, A_2\})$.
Odgovarajući Banahov prostor $A = \mathbb{F}(\{A_1, A_2\})$ zovemo interpolacioni prostor.
Pretpostavimo da postoje realni brojevi $C \geq 1$ i $\theta \in (0, 1)$ tako da je nejednakost

$$\|L\|_{\mathbb{F}(\{A_1,A_2\}) \to \mathbb{F}(\{B_1,B_2\})} \leq C\|L\|^{1-\theta}_{A_1 \to B_1} \|L\|^{\theta}_{A_2 \to B_2}$$

zadovoljena za svako $L \in \mathcal{L}(\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\})$. Tada za interpolacioni funktor $\mathbb{F}$ kažemo da je tipa θ. Ako je $C = 1$ tada je $\mathbb{F}$ tačan interpolacioni funktor tipa θ.

Razmotrimo K-metod realne interpolacije. Neka je $\{A_1, A_2\}$ interpolacioni par. Definišimo funkciju:

$$K(t, a, A_1, A_2) = \inf_{a \in A_1 + A_2, a = a_1 + a_2, a_j \in A_j} \{\|a_1\|_{A_1} + t\|a_2\|_{A_2}\}.$$

Za fiksirano $t \in (0, \infty)$, $a \to K(t, a, A_1, A_2)$ je norma u prostoru $A_1 + A_2$ ekvivalentna normi $a \to \|a\|_{A_1+A_2}$. Za $0 < \theta < 1$ i $1 \leq q \leq \infty$ definišemo prostor $(A_1, A_2)_{\theta,q}$ kao skup svih elemenata $a \in A_1 + A_2$ za koji je norma $\|a\|_{(A_1,A_2)_{\theta,q}}$ konačna, gde je

$$\|a\|_{(A_1,A_2)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, a, A_1, A_2)]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|a\|_{(A_1,A_2)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t, a, A_1, A_2), \qquad q = \infty.$$

Normiran linearni prostor $(A_1, A_2)_{\theta,q}$ je interpolacioni prostor. Važe sledeće relacije:

$$(A_1, A_2)_{\theta,q} = (A_2, A_1)_{1-\theta,q},$$

$$(A, A)_{\theta,q} = A,$$

$$(A_1, A_2)_{\theta,1} \subset (A_1, A_2)_{\theta,q} \subset (A_1, A_2)_{\theta,\tilde{q}} \subset (A_1, A_2)_{\theta,\infty}, \;\; 1 \leq q \leq \tilde{q} \leq \infty,$$

$$(A_1, A_2)_{\theta,q} \subset (A_1, A_2)_{\tilde{\theta},\tilde{q}} \;\text{ ako }\; A_1 \subset A_2, \;\; 0 < \theta < \tilde{\theta} < 1, \;\; 1 \leq q \leq \tilde{q} \leq \infty,$$

$$\exists\; C_{\theta,q} > 0 \;\; \forall a \in A_1 \cap\; A_2, \;\; \|a\|_{(A_1,A_2)_{\theta,q}} \leq C_{\theta,q} \|a\|^{1-\theta}_{A_1} \|a\|^{\theta}_{A_2}.$$

2.3 Prostori neprekidnih i integrabilnih funkcija

Otvoren i povezan skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazivamo oblašću. Granicom oblasti Ω nazivamo skup $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$. Nosačem neprekidne funkcije u definisane na skupu Ω, u oznaci supp u, nazivaćemo zatvorenje skupa tačaka $\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$. Multiindeksom nazivamo n-torku $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Nenegativan ceo broj

$|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$ zovemo dužinom multiindeksa α.

Parcijalne izvode označavaćemo na sledeći način:

$$D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Koristićemo sledeće funkcionalne prostore:
$C^k(\Omega)-$ prostor funkcija neprekidnih u Ω zajedno sa svim parcijalnim izvodima reda $\leq k$.
$C^k(\bar{\Omega})-$ prostor funkcija neprekidnih u $\bar{\Omega}$ zajedno sa svim parcijalnim izvodima reda $\leq k$. U prostoru $C^k(\bar{\Omega})$ norma se uvodi na sledeći način:

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha u(x)|.$$

Specijalno, sa $C(\Omega) = C^0(\Omega)$ označavamo prostor neprekidnih funkcija, a sa $C^\infty(\Omega)$ prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija.
$C_0^\infty(\Omega)-$ skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija sa kompaktnim nosačem u Ω.
Za $k \in \mathbb{N}$ i $0 < \lambda \leq 1$, označimo sa $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ skup svih funkcija $u \in C^k(\overline{\Omega})$ za koje je polunorma

$$|u|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y, x,y \in \Omega} \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$$

konačna.
$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ je Banahov prostor sa normom:

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} + |u|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})}.$$

Kada u pripada prostoru $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}), 0 < \lambda < 1$, kažemo da je u neprekidna po *Hölderu* na $\overline{\Omega}$ sa eksponentom λ; ako je $\lambda = 1$ za funkciju u kažemo da je neprekidna po *Lipschitzu* na $\overline{\Omega}$.

Za svaki realan broj $p \geq 1$ i otvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ označimo sa $L_p(\Omega)$ skup svih Lebesgue-merljivih funkcija u definisanih na Ω tako da je $|u|^p$ integrabilna na Ω u odnosu na Lebesgueovu meru $dx = dx_1 \ldots dx_n$.

$L_p(\Omega)$ je Banahov prostor sa normom:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Za $p = 2$, $L_2(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} dx$$

$L_\infty(\Omega)$ označava skup svih Lebesgue-merljivih funkcija u definisanih na Ω tako da $|u|$ ima konačan esencijani supremum; esencijalni supremum $|u|$ je definisan kao infimum skupa svih pozitivnih realnih brojeva M takvih da je $|u| \leq M$ skoro svuda na Ω.
$L_\infty(\Omega)$ je Banahov prostor sa normom:

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess.\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

Hölderova nejednakost. Neka $u \in L_p(\Omega)$ i $v \in L_q(\Omega)$, gde je $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$. Tada $uv \in L_1(\Omega)$ i

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}.$$

Za $p = q = 2$, iz Hölderove nejednakosti dobijamo nejednakost Cauchy-Schwarz-a:

$$\big|(u, v)\big| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

ϵ-nejednakost. Neka su $a, b \geq 0$. Za proizvoljno $\epsilon > 0$ važi

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2.$$

Young-ova nejednakost. Neka su $a, b \geq 0$, $p, q > 0$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Nejednakost trougla. Neka su funkcije u i v iz prostora $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$. Tada je

$$\|u + v\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} + \|v\|_{L_p(\Omega)}$$

Kada $u \in L_1(\mathcal{O})$, za svaki skup $\mathcal{O} \subset \Omega$, takav da je $\bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$, kažemo da je u lokalno integrabilna funkcija na Ω. Skup svih lokalno integrabilnih funkcija definisanih na Ω označavamo sa $L_{1,loc}(\Omega)$. Analogno se definiše $L_{p,loc}(\Omega)$.

2.4 Prostori Soboljeva

U ovom delu uvodimo klasu prostora, koju zovemo prostori Soboljeva. Prostori Soboljeva igraju važnu ulogu u teoriji diferencijalnih jednačina. Pre nego što damo preciznu definiciju, uvedimo pojam slabog izvoda. Pretpostavimo da je u glatka funkcija, $u \in C^k(\Omega)$, Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ i neka je $v \in C_0^\infty(\Omega)$; onda je zadovoljena sledeća formula parcijalne integracije:

$$\int_\Omega D^\alpha u(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)dx, \quad |\alpha| \leq k, \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Pretpostavimo da je u lokalno integrabilna funkcija, definisana na Ω. Pretpostavimo takođe da postoji funkcija w_α, lokalno integrabilna na Ω tako da važi:

$$\int_\Omega w_\alpha(x)v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)dx, \ \ \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Tada kažemo da je w_α slabi izvod funkcije u reda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ i pišemo $w_\alpha = D^\alpha u$.

Za nenegativan ceo broj k i $1 \leq p \leq \infty$, definišemo prostor Soboljeva:

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : \ D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

sa normom

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

kada je $1 \leq p < \infty$ i

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L_\infty(\Omega)}$$

kada je $p = \infty$.
Odgovarajuća polunorma u prostorima Soboljeva se definiše na sledeći način:

$$|u|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

kada je $1 \leq p < \infty$ i

$$|u|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^p_{L_\infty(\Omega)}$$

kada je $p = \infty$.
Za $p = 2$ prostori Soboljeva $W_2^k(\Omega)$ su Hilbertovi prostori. Hilbertove prostore Soboljeva ćemo označavati sa $H^k(\Omega)$.

Definicija 2.2. *Pretpostavimo da je Ω ograničen otvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Granica $\partial\Omega$ oblasti Ω je neprekidna po Lipschitzu ako za svako $x \in \partial\Omega$, postoji otvoren skup $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{O}$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a_j > 0$ i lokalno ortogonalni koordinatni sistem sa koordinatama $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (\zeta', \zeta_n)$, tako da važi:*

$$\mathcal{O} = \{\zeta : -a_j < \zeta_j < a_j,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Takođe, postoji Lipschitz-neprekidna funkcija φ definisana na skupu

$$\mathcal{O}' = \{\zeta' \in \mathbb{R}^{n-1} : -a_j < \zeta_j < a_j,\ 1 \leq j \leq n-1\}$$

sa osobinom

$$|\varphi(\zeta')| \leq a_n/2,\ \zeta' \in \mathcal{O}'$$

$$\Omega \cap \mathcal{O} = \{\zeta : \zeta_n < \varphi(\zeta'), \zeta' \in \mathcal{O}'\},\ \ \partial\Omega \cap \mathcal{O} = \{\zeta : \zeta_n = \varphi(\zeta'), \zeta' \in \mathcal{O}'\}.$$

Ograničen otvoren skup sa granicom koja je neprekidna u Lipschitzovom smislu zovemo Lipschitzov domen.

U teoriji prostora Soboljeva fundamentalnu ulogu imaju teoreme potapanja.

Teorema 2.6. *(Teorema potapanja Soboljeva) Pretpostavimo da je Ω Lipschitzov domen u $\mathbb{R}^n$. Neka su $j \geq 0$ i $m \geq 1$ celi brojevi i neka je k ceo broj, $1 \leq k \leq n$. Označimo sa Ω^k presek oblasti Ω sa hiperravni dimenzije k; u stvari $\Omega^k = \Omega$ kada je $k = n$. Za $1 \leq p < \infty$ važe sledeća potapanja:*
1) ako je $mp < n$ i ili je $n - mp < k \leq n$ ili $p = 1$ i $n - m \leq k \leq n$, tada za $p \leq q \leq kp/(n - mp)$, $W_p^{j+m}(\Omega) \subseteq W_q^j(\Omega^k)$
2) ako je $mp = n$, tada za $1 \leq k \leq n$ i $p \leq q < \infty$, $W_p^{j+m}(\Omega) \subseteq W_q^j(\Omega^k)$
3) ako je $mp > n > (m-1)p$, tada $W_p^{j+m}(\Omega) \subseteq C^{j,\lambda}(\overline{\Omega})$, za $0 < \lambda \leq m - n/p$.
Potapanje važi za $n = (m-1)p$ i $0 < \lambda < 1$ i za $n = m - 1$, $p = 1$ i $0 < \lambda \leq 1$.

Za $0 < \sigma < 1$ definišimo polunormu:

$$|u|_{W_p^\sigma(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\sigma p}} dxdy \right)^{1/p},\ \ 1 \leq p < \infty$$

ili

$$|u|_{W^{\sigma}_{\infty}(\Omega)} = \operatorname{ess.}\sup_{x\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\sigma}}, \; p=\infty.$$

Prostor Soboljeva $W^s_p(\Omega)$ sa razlomljenim pozitivnim indeksom, $s = [s] + \sigma$, $0 < \sigma < 1$, definišemo kao skup funkcija $u \in W^{[s]}_p(\Omega)$ sa normom:

$$\|u\|_{W^s_p(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W^{[s]}_p(\Omega)} + |u|^p_{W^s_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \; 1 \le p < \infty$$

gde je

$$|u|_{W^s_p(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=[s]} \|D^\alpha u\|^p_{W^{s-[s]}_p(\Omega)} \right)^{1/p}$$

kada je $1 \le p < \infty$ i

$$\|u\|_{W^s_\infty(\Omega)} = \|u\|_{W^{[s]}_\infty(\Omega)} + |u|_{W^s_\infty(\Omega)}$$

kada je $p = \infty$.

Lema 2.7. *Sledeće norme su ekvivalentne:*

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + |u|^2_{H^1(\Omega)} \asymp \|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} + |u|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Zatvorenje skupa $C^\infty_0(\Omega)$ u normi prostora $W^s_p(\Omega)$ je potprostor od $W^s_p(\Omega)$ koji označavamo sa $\dot{W}^s_p(\Omega)$.

Definicija 2.3. *Za niz funkcija $\varphi_j \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ kažemo da konvergira ka funkciji $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:*
1. Postoji kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ takav da $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ za svako j.
2. Za svaki multiindeks α, niz $D^\alpha\varphi_j$ uniformno konvergira ka $D^\alpha\varphi$ na K kada $j \to \infty$.

Prostor $C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ sa ovako definisanom konvergencijom označavamo sa $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ako je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ sa $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}$ označavaćemo skup osnovnih funkcija čiji su nosači u Ω, a njegove elemente nazivamo osnovnim funkcijama.

Definicija 2.4. *Linearne neprekidne funkcionale na skupu $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nazivamo distribucijama ili generalisanimm funkcijama. Skup distribucija označavamo sa $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Vrednost distribucije $f \in \mathcal{D}'$ na osnovnoj funkciji $\varphi \in \mathcal{D}$ označavamo sa $\langle f, \varphi\rangle$. Pri tome $\langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C}$, i važe sledeći uslovi:*
linearnost: $\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle = \lambda\langle f,\varphi\rangle + \mu\langle f,\psi\rangle, \; \forall\lambda,\mu \in \mathbb{C}, \; \forall\varphi,\psi \in \mathcal{D}$,
i neprekidnost: ako $\varphi_k \to \varphi, \; k \to \infty$ u $\mathcal{D}$, tada $\langle f, \varphi_k\rangle \to \langle f,\varphi\rangle, \; k\to\infty$ u $\mathbb{C}$.

Prostor $W_p^{-s}(\Omega)$ je dualan prostor prostora $\dot{W}_{p'}^s(\Omega)$, $W_p^{-s}(\Omega) = \big(\dot{W}_{p'}^s(\Omega)\big)'$, $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, sa normom:

$$\|u\|_{W_p^{-s}(\Omega)} = \sup_{\varphi \in \dot{W}_{p'}^s(\Omega)} \frac{|\langle u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W_{p'}^s(\Omega)}}$$

Teorema 2.8. *(Friedrichsova nejednakost): Pretpostavimo da je Ω Lipschitzov domen u $\mathbb{R}^n$, sa konačnom širinom d, u smislu da oblast Ω leži izmedju dve paralelne hiperravni dimenzije $n-1$, koje su na rastojanju d. Tada postoji konstanta $c_\star$, koja zavisi od s, p, d tako da je:*

$$\|u\|_{W_p^s(\Omega)} \leq c_\star |u|_{W_p^s(\Omega)}$$

za svako $u \in \dot{W}_p^s(\Omega)$, $s > 0$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.9. *Neka $u \in W_p^s(\Omega)$, $s > 1/p$, $s \neq$ ceo broj$+ 1/p$, $s - [s]^- > 1/p$ i neka je granica oblasti Ω dovoljno glatka, tj. $\Gamma \in C^{[s]^- + 1}$, gde $[s]^-$ označava najveći ceo broj manji od s. Tada postoji trag funkcije u na granici Γ, koji pripada prostoru $W_p^{s-1/p}(\Gamma)$ i važi ocena:*

$$\|u\|_{W_p^{s-1/p}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{W_p^s(\Omega)}$$

Teorema 2.10. *Neka $u \in W_p^s(\Omega)$, $s > 0$ i neka je granica oblasti Ω neprekidna po Lipschitzu. Tada važe sledeća potapanja:*
a) ako je $sp < n$ tada

$$W_p^s(\Omega) \subseteq L_q(\Omega), \quad p \leq q \leq \frac{np}{n - sp}$$

b) ako je $sp = n$ tada

$$W_p^s(\Omega) \subseteq L_q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

c) ako je $sp > n$ tada

$$W_p^s(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega}).$$

Teorema 2.11. *Neka je $0 \leq t \leq s < \infty$, $1 < p \leq q < \infty$ i $s - n/p \geq t - n/q$. Tada*

$$W_p^s(\Omega) \subseteq W_q^t(\Omega).$$

2.4.1 Anizotropni prostori Soboljeva

Često se pojavljuju funkcije koje imaju različitu glatkost po pojedinim promenljivim. Prostori takvih funkcija nazivaju se anizotropnim.

Neka je $\mathbb{R}_+$ skup nenegativnih realnih brojeva. Elemente skupa $\mathbb{R}_+^n$ nazivaćemo multiindeksima. Za $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ označimo:
$[\alpha] = ([\alpha_1], ..., [\alpha_n])$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, $[\alpha]^- = ([\alpha_1]^-, \ldots, [\alpha_n]^-)$.
Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ sa granicom neprekidnom po Lipschitzu. Za $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ i $1 \leq p < \infty$ definišimo polunormu $|u|_{\alpha,p}$ na sledeći način:

$$|u|_{\alpha,p}^p = \|u\|_{L_p(\Omega)}^p, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

$$|u|_{\alpha,p}^p = \int_\Omega \int_{\Omega_i(x)} \frac{| \triangle_{h_i e_i} u(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i}} dh_i dx, \quad 0 < \alpha_i < 1, \ \alpha_k = 0, \ k \neq i$$

$$|u|_{\alpha,p}^p = \int_\Omega \int_{\Omega_{ij}(x)} \frac{| \triangle_{h_i e_i} \triangle_{h_j e_j} u(x)|^p}{|h_i|^{1+p\alpha_i} |h_j|^{1+p\alpha_j}} dh_i dh_j dx, \quad 0 < \alpha_i, \alpha_j < 1, \ \alpha_k = 0, \ k \neq i, j$$

$$\cdots\cdots$$

$$|u|_{\alpha,p}^p = \int_\Omega \int_{\Omega_{1\ldots n}(x)} \frac{| \triangle_{h_1 e_1} \cdots \triangle_{h_n e_n} u(x)|^p}{|h_1|^{1+p\alpha_1} \ldots |h_n|^{1+p\alpha_n}} dh_1 \ldots dh_n dx, \quad 0 < \alpha_1, \ldots \alpha_n < 1$$

$$|u|_{\alpha,p}^p = |\partial^{[\alpha]} u|_{\alpha-[\alpha],p}^p \quad \alpha_k \geq 1.$$

Kada je $p = \infty$, polunorma $|\cdot|_{\alpha,\infty}$ se definiše na sledeći način:

$$|u|_{\alpha,\infty} = \|u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

$$|u|_{\alpha,\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega, h_i \in \Omega_i(x)} \frac{| \triangle_{h_i e_i} u(x)|}{|h_i|^{\alpha_i}}, \quad 0 < \alpha_i < 1, \ \alpha_k = 0, \ k \neq i$$

itd.
Ovde je označeno:

$$\Omega_i(x) = \{h_i : x + h_i e_i \in \Omega\},$$

$$\Omega_{ij}(x) = \{(h_i, h_j) : x + c_i h_i e_i + c_j h_j e_j \in \Omega; \ c_i, c_j = 0, 1\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Omega_{1\ldots n}(x) = \{(h_1, \ldots, h_n) : x + \sum_{k=1}^n c_k h_k e_k \in \Omega; \ c_k = 0, 1; k = 1, \ldots, n\},$$

$$\triangle_h u(x) = u(x+h) - u(x), \quad \triangle_h^k u(x) = \triangle_h(\triangle_h^{k-1} u(x)),$$

dok e_i, kao i obično, označava jedinični vektor i-te koordinatne ose.

Konačan skup multiindeksa $A \subset \mathbb{R}_+$ zovemo regularnim ako $0 = (0, \dots, 0) \in A$, i za svako $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in A$ postoje realni brojevi $\beta_k \geq \alpha_k$, $k = 1, \dots, n$ tako da $\beta_k e_k \in A$.
Ako je A regularan skup multiindeksa, definišimo norme:

$$\|u\|_{W_p^A(\Omega)} = \left(\sum_{\alpha \in A} |u|^p_{\alpha,p}(\Omega) \right)^{1/p}, \ \ 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{W_\infty^A(\Omega)} = \max_{\alpha \in A} |u|_{\alpha,\infty}, \ \ p = \infty$$

Neka je $\mathcal{U}$ Banahov prostor sa normom $\| \cdot \|_{\mathcal{U}}$, i neka je $| \cdot |_{\mathcal{U}}$ polunorma na $\mathcal{U}$ tako da je zadovoljena nejednakost $|u|_{\mathcal{U}} \leq \|u\|_{\mathcal{U}}$, za $\forall u \in \mathcal{U}$. Pretpostavimo da je (c, d) neprazan otvoren interval realne ose i neka je $1 \leq p \leq \infty$. Razmatramo skup $L_p((c, d); \mathcal{U})$ svih funkcija $w : (c, d) \to \mathcal{U}$ tako da je

$$\int_c^d \|w(t)\|^p_{\mathcal{U}} \, \mathrm{d}t < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

i

$$\operatorname*{ess.\,sup}_{t \in (c,d)} \|w(t)\|_{\mathcal{U}} < \infty, \quad p = \infty.$$

$L_p((c, d); \mathcal{U})$ je Banahov prostor sa normom

$$\|w\|_{L_p((c,d);\mathcal{U})} = \left(\int_c^d \|w(t)\|^p_{\mathcal{U}} \, \mathrm{d}t \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

i

$$\|w\|_{L_\infty((c,d);\mathcal{U})} = \operatorname*{ess.\,sup}_{t \in (c,d)} \|w(t)\|_{\mathcal{U}}, \quad p = \infty.$$

Neka je $1 \leq p < \infty$, $r > 0$, i zapišimo r u obliku $r = m + \sigma$, $0 \leq \sigma < 1$, gde je $m = [r]$ celobrojni deo od r. Označimo sa $W_p^r((c, d), \mathcal{U})$ skup svih funkcija $w \in L_p((c, d); \mathcal{U})$ čiji je m-ti izvod $w^{(m)}$ na intervalu (c, d) element prostora $L_p((c, d); \mathcal{U})$ i

$$\mathcal{N}_{r,p}(w) = \left(\int_c^d \int_c^d \frac{\|w^{(m)}(\tau) - w^{(m)}(\tau')\|^p_{\mathcal{U}}}{|\tau - \tau'|^{1+p\sigma}} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\tau' \right)^{1/p} < \infty, \quad \sigma > 0.$$

Prostor $W_p^r((c, d), \mathcal{U})$ je Banahov prostor sa normom

$$\|w\|_{W_p^r((c,d),\mathcal{U})} = \left(\|w\|^p_{L_p((c,d),\mathcal{U})} + \|w^{(m)}\|^p_{L_p((c,d),\mathcal{U})} + \mathcal{N}^p_{r,p}(w) \right)^{1/p}$$

i odgovarajućom polunormom, koju definišemo kada je $r = m > 0$ ceo broj i kada $r > 0$ nije ceo broj, redom

$$|w|_{W_p^r((c,d),\mathcal{U})} = \|w^{(m)}\|_{L_p((c,d),\mathcal{U})}, \qquad |w|_{W_p^r((c,d),\mathcal{U})} = \mathcal{N}_{r,p}(w).$$

Neka je $Q = \Omega \times I$, gde je $\Omega \subset \mathbb{R}_n$ Lipschitzov domen i $I = (c,d) \subset \mathbb{R}$. Ako su s i r nenegativni realni brojevi, anizotropni prostor Soboljeva $W_p^{s,r}(Q)$ definišemo na sledeći način:

$$W_p^{s,r}(Q) = L_p(I; W_p^s(\Omega)) \cap W_p^r(I; L_p(\Omega))$$

sa normom:

$$\|u\|_{W_p^{s,r}(Q)} = \left(\int_c^d \|u(t)\|^p_{W_p^s(\Omega)} dt + \|u\|^p_{W_p^r(I;L_p(\Omega))} \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

sa odgovarajućom izmenom za $p = \infty$. U daljem radu koristićemo prostor $W_2^{s,s/2}(Q) = L_2(I; W_2^s(\Omega)) \cap W_2^{s/2}(I; L_2(\Omega))$

Teorema 2.12. *Pretpostavimo da $u \in W_2^{s,r}(Q)$, $s, r > 0$ i neka $\alpha \in \mathbb{N}^n$ i $k \in \mathbb{N}$ zadovoljavaju uslov $\frac{|\alpha|}{s} + \frac{k}{r} \le 1$.*
Tada $\partial_x^\alpha \partial_t^k u \in W_2^{\mu,\nu}(Q)$ gde je $\frac{\mu}{s} = \frac{\nu}{r} = 1 - \left(\frac{|\alpha|}{s} + \frac{k}{r}\right)$, dok su ∂_x, ∂_t parcijalni izvodi po $x = (x_1, \ldots . x_n)$ i t redom.

Teorema 2.13. *Pretpostavimo da $u \in W_2^{s,r}(Q)$, $s \ge 0, r > 1/2$. Tada za nenegativan ceo broj $k, k < r - 1/2$ postoji trag $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=t_0 \in \bar{I}} \in W_2^q(\Omega)$, gde je $q = \frac{s}{r}(r - k - 1/2)$.*

Razmotrimo na kraju ponderisani prostor Soboljeva. Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ i neka je $\rho(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ nenegativna funkcija. Za $s = 0, 1, 2 \ldots$ uvedimo prostor:

$$W_{p,\rho}^s = \{ f : \rho^{|\alpha|} D^\alpha f \in L_p(\Omega),\ 0 \le |\alpha| \le s \}$$

sa normom

$$\|f\|_{W_{p,\rho}^s(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le s} \|\rho^{|\alpha|} D^\alpha f\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

sa odgovarajućom izmenom za $p = \infty$.
Pri tome pretpostavljamo da je $\rho(x)$ beskonačno diferencijabilna funkcija na $\bar{\Omega}$, pozitivna na Ω i anulira se na granici $\Gamma = \partial\Omega \in C^\infty$, koja je istog reda kao rastojanje

tačke $x \in \Omega$ od granice Γ $d(x,\Gamma)$, tj. da važi :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\rho(x)}{d(x,\Gamma)} \neq 0, \ \ x_0 \in \Gamma.$$

2.4.2 Lema Brambla-Hilberta

Lema 2.14. *Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ sa Lipschitzovom granicom, s pozitivan realan broj i P_s skup polinoma (po n promenljivih) stepena $< s$. Tada postoji konstanta $C = C(\Omega, s, p)$ takva da je zadovoljena sledeća nejednakost:*

$$\inf_{P\in P_s} \|f - P\|_{W_p^s(\Omega)} \leq C|f|_{W_p^s(\Omega)}, \ \ \forall f \in W_p^s(\Omega).$$

Neka je $A \subset \mathbb{R}_+^n$ regularan skup nenegativnih realnih multiindeksa. Sa $\kappa(A)$ označimo konveksan omotač skupa A u $\mathbb{R}^n$. Neka je $\partial_0\kappa(A)$ deo granice skupa $\kappa(A)$ koji ne pripada koordinatnim ravnima i $A_\partial = A \cap \overline{\partial_0\kappa(A)}$. Neka je B podskup od A_∂, takav da je $B \cup \{0\}$ regularan skup multiindeksa i

$$\nu(B) = \{\beta \in \mathbb{N}_0^n : D^{[\alpha]^-} x^\beta \equiv 0, \ \forall \alpha \in B\}.$$

Sa $\mathcal{P}_B$ označimo skup polinoma oblika

$$P(x) = \sum_{\alpha\in\nu(B)} p_\alpha x^\alpha.$$

Lema 2.15. *Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$ sa Lipschitzovom granicom i neka skupovi multiindeksa A i B zadovoljavaju gornje uslove. Tada postoji konstanta $C = C(\Omega, A, B, p)$ takva da je zadovoljena sledeća nejednakost:*

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_B} \|f - P\|_{W_p^A(\Omega)} \leq C \sum_{\alpha\in B} |f|_{\alpha,p} \ \ \forall f \in W_p^A(\Omega).$$

Lema 2.16. *Neka su zadovoljeni uslovi Leme 2.14 i neka je $\eta(f)$ ograničen linearan funkcional na $W_p^A(\Omega)$ koji se anulira kada je $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \nu(B)$. Tada postoji konstanta $C = C(\Omega, A, B, p)$ takva da za svako $f \in W_p^A(\Omega)$ važi nejednakost:*

$$|\eta(f)| \leq C \sum_{\alpha\in B} |f|_{\alpha,p}.$$

Lema 2.17. *Neka A_k, B_k i Ω_k u $\mathbb{R}^{n_k}$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$ zadovoljavaju iste uslove kao A, B i Ω. Neka je $\eta(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ ograničen multilinearan funkcional na $W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times W_{p_2}^{A_2}(\Omega_2) \times \cdots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$, koji se anulira ako je neki od njegovih*

argumenata oblika $f_k = x^\alpha$, $x \in \Omega_k$, $\alpha \in \nu(B_k)$.
Tada postoji konstanta $C = C(\Omega_1, A_1, B_1, p_1, \Omega_2, A_2, B_2, p_2, \dots, \Omega_m, A_m, B_m, p_m)$ *takva da za svako* $(f_1, f_2, \dots, f_m) \in W_{p_1}^{A_1}(\Omega_1) \times W_{p_2}^{A_2}(\Omega_2) \times \dots \times W_{p_m}^{A_m}(\Omega_m)$ *važi nejednakost*

$$|\eta(f_1, f_2, \dots, f_m)| \leq C \prod_{k=1}^{m} \sum_{\alpha \in B_k} |f_k|_{\alpha, p_k}.$$

2.4.3 Multiplikatori u prostorima Soboljeva

Neka su V i W dva funkcionalna prostora u oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Za funkciju $a(x)$, definisanu takođe na Ω kažemo da je multiplikator iz V u W ako za svako $f \in V$ proizvod $a(x)f(x)$ pripada prostoru W. Skup ovakvih multiplikatora označavamo sa $M(V \to W)$. Specijalno za $V = W$ stavljamo $M(V) \equiv M(V \to V)$.

Lema 2.18. *Ako* $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$ $t \geq s \geq 0$ *tada*

$$a \in M(W_p^{t-s}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n))$$

$$a \in M(W_p^{t-\sigma}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-\sigma}(\mathbb{R}^n)) \ \ 0 < \sigma < s$$

$$D^\alpha a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)) \ \ |\alpha| \leq s$$

$$D^\alpha a \in M(W_p^{t-s+|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)) \ \ |\alpha| \leq s$$

Lema 2.19. *Ako* $a_\alpha \in M(W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n))$ $s \geq k$, *za svaki multiindeks* α, *tada diferencijalni operator*

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

definiše neprekidno preslikavanje $W_p^s(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n)$.

Lema 2.20. *Neka diferencijalni operator* L *definiše neprekidno preslikavanje iz* $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ *u* $W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ *i neka je* $p(s-k) > n$, $p > 1$. *Tada* $a_\alpha \in M(W_p^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \to W_p^{s-k}(\mathbb{R}^n))$, *za svaki multiindeks* α.

Prethodni rezultati se mogu preneti i na prostore Soboljeva u oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Preciznije, ako je Ω Lipschitzova oblast u $\mathbb{R}^n$ i a pripada prostoru $M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega))$ tada postoji produženje $\overline{a}$ funkcije a na $\mathbb{R}^n$ koje pripada prostoru $M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$. Važi i obrnuto: suženje multiplikatora $a \in M(W_p^t(\mathbb{R}^n) \to W_p^s(\mathbb{R}^n))$ na

Ω pripada prostoru $M(W_p^t(\Omega) \to W_p^s(\Omega))$.

Lema 2.21. *Pretpostavimo da je Ω ograničena Lipschitzova oblast u $\mathbb{R}^n$, $s > 0, p > 1$. Ako $a \in W_q^t(\Omega)$ gde je:*
$q = p,\ t = s,$ kada je $sp > n$ ili
$q \geq n/s,\ t = s + \varepsilon \notin \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ kada je $sp < n$,
tada $a \in M(W_p^s(\Omega))$.

Lema 2.22. *Neka je Ω ograničena Lipschitzova oblast u $\mathbb{R}^n$, $s > 0, p > 1$. Ako $a \in L_q(\Omega)$ gde je:*
$q = p,$ kada je $sp > n$ ili
$q > p,$ kada je $sp = n$ i
$q \geq n/s,$ kada je $sp < n$,
tada $a \in M(W_p^s(\Omega) \to L_p(\Omega))$.

Lema 2.23. *Neka je Ω ograničena Lipschitzova oblast u $\mathbb{R}^n$ i*

$$a(x) = a_0(x) + \sum_{k=1}^{n} D_i a_i(x)$$

Ako $a_0 \in M(W_2^t(\Omega) \to L_2(\Omega))$ i $a_i \in M(W_2^t(\Omega) \to W_2^{1-s}(\Omega)) \cap M(W_2^{t-1}(\Omega) \to L_2(\Omega))$ $i = 1, 2, \ldots n$, gde je $0 < s \leq 1 \leq t < 2$ i $s \neq 1/2$, tada $a \in M(W_2^t(\Omega) \to W_2^{-s}(\Omega))$.

2.5 Prostori Besova

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $\delta > 0$. Definišimo podoblast:

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \delta\}$$

Pretpostavimo da je $s > 0$, $1 \leq p < \infty$ i $1 \leq q < \infty$. Neka je $s = m + \sigma$, $0 < \sigma \leq 1$ i m nenegativan ceo broj. Označimo sa $B_{p,q}^s(\Omega)$ skup svih $u \in L_p(\Omega)$ čiji izvodi $\partial^\alpha u$ reda $|\alpha| = m$ zadovoljavaju nejednakost:

$$\mathcal{N}_{\alpha,p,q}(u) = \left\{ \int_0^\infty \left[t^{-\sigma} \sup_{|h| \leq t} \| \triangle_h^2 \, \partial^\alpha u \|_{L_p(\Omega_{2|h|})} \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} < \infty$$

ako je $1 \leq q < \infty$ i

$$\mathcal{N}_{\alpha,p,\infty}(u) = \sup_{t>0}\left[t^{-\sigma}\sup_{|h|\leq t}\| \triangle_h^2\, \partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega_{2|h|})}\right] < \infty$$

ako je $q = \infty$.
Prostor $B^s_{p,q}(\Omega)$ zovemo prostorom Besova. Norma u Besovljevom prostoru $B^s_{p,q}(\Omega)$ definiše se na sledeći način:

$$\|u\|_{B^s_{p,q}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L_p} + \sum_{|\alpha=m|}\mathcal{N}^p_{\alpha,p,q}(u)\right)^{1/p}.$$

$B^s_{p,q}(\Omega)$ sa ovako uvedenom normom je Banahov prostor. Ako je Ω Lipschitzov domen onda postoji sledeća veza između prostora Soboljeva i prostora Besova:

$$W^s_p(\Omega) = B^s_{p,p}(\Omega),\ \ s > 0,\ \ s \text{ nije ceo broj}$$

$$W^s_p(\Omega) = B^s_{p,p}(\Omega),\ \ s > 0,\ \ s \text{ je ceo broj},\ \ p = 2$$

$$W^s_p(\Omega) \neq B^s_{p,p}(\Omega),\ \ s \text{ je ceo broj},\ p \neq 2.$$

Važe sledeća potapanja:

$$B^s_{p,p}(\Omega) \hookrightarrow W^s_p(\Omega) \hookrightarrow B^s_{p,2}(\Omega) \quad 1 < p \leq 2$$

$$B^s_{p,2}(\Omega) \hookrightarrow W^s_p(\Omega) \hookrightarrow B^s_{p,p}(\Omega) \quad 2 \leq p < \infty$$

Za $s < 0$ i $1 < p < \infty$ definišemo $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ kao dualan prostor prostoru Besova $B^{-s}_{p',q'}(\mathbb{R}^n)$, gde je $1/p + 1/p' = 1,\ \ 1/q + 1/q' = 1$.

2.6 Osobine interpolacije prostora Soboljeva

Za $0 \leq s_1, s_2 < \infty$, $s_1 \neq s_2$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$ važi:

$$(W^{s_1}_p(\mathbb{R}^n), W^{s_2}_p(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n), \quad s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$$

Za $q = p$ i $s \neq$ ceo broj, $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$ važi:

$$(W^{s_1}_p(\mathbb{R}^n), W^{s_2}_p(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = W^s_p(\mathbb{R}^n), \quad s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$$

Za $p = 2$ ova relacija je zadovoljena bez restrikcija:

$$(W_2^{s_1}(\mathbb{R}^n), W_2^{s_2}(\mathbb{R}^n))_{\theta,2} = W_2^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\mathbb{R}^n)$$

Prema tome, $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ je interpolacioni prostor. Analogni rezultati interpolacije važe za prostore Soboljeva na Lipschitzovom domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

2.7 Pojam diferencijske sheme

Neka se u oblasti Ω promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_n$ traži rešenje u parcijalne diferencijalne jednačine:

$$Lu(x) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega \tag{2.3}$$

koje na granici Γ oblasti Ω zadovoljava dodatne (granične, početne) uslove:

$$lu(x) = g(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Da bismo ga lakše rešili, zadatak (2.3)-(2.4) diskretizujemo. Pre svega, oblast $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ zamenjujemo skupom diskretnih tačaka (čvorova) $\overline{\Omega}_h$, koji nazivamo mrežom. Mrežu $\overline{\Omega}_h$ razbijamo na skup unutrašnjih čvorova Ω_h i skup graničnih čvorova $\Gamma_h = \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h$. Gustinu rasporeda čvorova karakterišemo parametrom h koji može biti i vektor: $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$. Ukoliko je norma vektora h, $|h|$, manja utoliko je mreža gušća. Zamenjujući izvode koji se javljaju u (2.3)-(2.4) količnicima razlika funkcije u čvorovima dobijamo diskretni zadatak:

$$L_h v_h(x) = f_h(x), \quad x \in \Omega_h \tag{2.5}$$

$$l_h v_h(x) = g_h(x), \quad x \in \Gamma_h \tag{2.6}$$

koji aproksimira (2.3)-(2.4).
Zadatak (2.5)-(2.6) predstavlja sistem algebarskih jednačina. Njegovo rešenje v_h zavisi od parametra h, odnosno od izbora mreže $\overline{\Omega}_h$. Familiju zadataka (2.5)-(2.6) koji zavise od h, nazivamo diferencijskom shemom zadatka (2.3)-(2.4).

U skupove funkcija definisanih na $\overline{\Omega}_h$, Ω_h i Γ_h uvedimo redom norme $\|\cdot\|_{1,h}$, $\|\cdot\|_{2,h}$ i $\|\cdot\|_{3,h}$. Sa u_h označimo projekciju rešenja $u = u(x)$ zadatka (2.3)-(2.4) na prostor funkcija definisanih na $\overline{\Omega}_h$. Označimo sa $z_h = v_h - u_h$ grešku sheme. Ako su operatori

L_h i l_h linearni tada z_h zadovoljava uslove:

$$L_h z_h(x) = \varphi_h(x), \quad x \in \Omega_h \tag{2.7}$$

$$l_h z_h(x) = \psi_h(x), \quad x \in \Gamma_h \tag{2.8}$$

gde su φ_h i ψ_h greške aproksimacije diferencijalne jednačine (2.3) i dodatnog uslova (2.4).

Za diferencijsku shemu (2.5)-(2.6) kažemo da aproksimira zadatak (2.3)-(2.4) ako $\|\varphi_h\|_{2,h} \to 0,\ \|\psi_h\|_{3,h} \to 0$ kada $|h| \to 0$. Ako je $\|\varphi_h\|_{2,h},\ \|\psi_h\|_{3,h} = \mathcal{O}(|h|^k)$ kažemo da shema ima k-ti red aproksimacije. Kažemo da diferencijska shema konvergira, odnosno konvergira brzinom $\mathcal{O}(|h|^k)$ ako $\|v_h - u_h\|_{1,h} \to 0$ kada $|h| \to 0$, odnosno ako je $\|v_h - u_h\|_{1,h} = \mathcal{O}(|h|^k)$. Za shemu (2.5)-(2.6) kažemo da je stabilna ako za dovoljno malo $|h| \leq h_0$ njeno rešenje v_h neprekidno zavisi od ulaznih podataka f_h, g_h, pri čemu je ta zavisnost ravnomerna po h. Ako su operatori L_h i l_h linearni tada stabilnost znači da postoje konstante M_1 i M_2 koje ne zavise od $h,\ f_h$ i g_h, takve da je za $|h| \leq h_0$:

$$\|v_h\|_{1,h} \leq M_1 \|f_h\|_{2,h} + M_2 \|g_h\|_{3,h}. \tag{2.9}$$

Ako je shema stabilna i aproksimira polazni zadatak tada ona konvergira.
Primenjujući ocenu (2.9) na zadatak (2.7)-(2.8) dobijamo:

$$\|v_h - u_h\|_{1,h} = \|z_h\|_{1,h} \leq M_1 \|\varphi_h\|_{2,h} + M_2 \|\psi_h\|_{3,h},\ \ |h| \to 0.$$

Nejednakosti tipa (2.9) nazivaju se apriornim ocenama za shemu (2.5)-(2.6). Dobijanje ovakvih ocena jedan je od važnih zadataka teorije diferencijskih shema.
Ako je diferencijska shema (2.5)-(2.6) stabilna i za $|h| \leq h_0$ jednoznačno rešiva pri proizvoljnim ulaznim podacima f_h i g_h kažemo da je ona korektna.

2.7.1 Mreža i osnovni diferencijski operatori

Neka je $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ i $h_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Sa $\mathbb{R}_h^n$ označimo skup tačaka $\mathbb{R}_h^n = \{(i_1 h_1, i_2 h_2, \ldots, i_n h_n) |\ i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ koji ćemo nazivati mrežom. Kod eliptičkih problema najčešće ćemo koristiti mreže sa istim korakom u svim pravcima $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = h$. Kod paraboličkih i hiperboličkih problema obično se u pravcu prostornih promenljivih $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ koristi jedan korak $h_1 = h_2 = \cdots = h_{n-1} = h$, a u pravcu vremenske promenljive $x_n = t$ drugi $h_n = \tau$.
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena, konveksna, jednostruko povezana oblast i Γ njena

granica. Sa Ω_h označimo skup tačaka $x \in \mathbb{R}_h^n$, koje pripadaju Ω zajedno sa svojom okolinom $\mathcal{O}(x) = \{(x_1 + i_1h_1, x_2 + i_2h_2, \ldots, x_n + i_nh_n) | i_1, i_2, \ldots, i_n = 0, \pm 1\}$, sa Γ_h skup tačaka iz $\mathbb{R}_h^n$ koje pripadaju $\overline{\Omega}$ ali ne pripadaju Ω, i sa $\overline{\Omega}_h$ skup $\Omega_h \cup \Gamma_h$. Ω_h nazivamo skupom unutrašnjih tačaka, a Γ_h skupom graničnih tačaka. Mrežu Ω_h nazivamo povezanom ako proizvoljna dva njena čvora možemo spojiti izlomljenom linijom čiji su odsečci paralelni koordinatnim osama, a vrhovi pripadaju Ω_h.
Neka je v funkcija definisana na mreži $\overline{\Omega}_h$. Označimo $v_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = v(i_1h_1, i_2h_2, \ldots, i_nh_n)$. Operatore količnika razlika definišemo na sledeći način:

$$
\begin{gathered}
(v_{x_k})_{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n} = (v_{i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_n} - v_{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_n})/h_k = (v_{\overline{x}_k})_{i_1,\ldots,i_{k+1},\ldots,i_n} \\
v_{\dot{x}_k} = (v_{x_k} + v_{\overline{x}_k})/2
\end{gathered}
\tag{2.10}
$$

v_{x_k} nazivamo razlikom unapred, $v_{\overline{x}_k}$ razlikom unazad, $v_{\dot{x}_k}$ centralnom razlikom.

2.7.2 Neke diferencijske formule

Posmatrajmo jednodimenzioni slučaj. Sa $\overline{\omega}_h$ označimo mrežu na odsečku $[0, l]$, $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih | i = 0, 1, \ldots, N, Nh = l\}$. Uvedimo sledeće oznake:

$$
(u, v) = h \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i, \quad (u, v] = h \sum_{i=1}^{N} u_i v_i, \quad [u, v) = h \sum_{i=0}^{N-1} u_i v_i \tag{2.11}
$$

$$
\|u\| = (u, u)^{1/2}, \quad \|u]| = (u, u]^{1/2}, \quad |[u\| = [u, u)^{1/2}
$$

Formuli diferenciranja proizvoda $(uv)' = u'v + v'u$ odgovaraju sledeće formule s količnicima razlika:

$$
\begin{aligned}
(uv)_{x,i} &= u_{x,i}v_i + u_{i+1}v_{x,i} = u_{x,i}v_{i+1} + u_i v_{x,i} \\
(uv)_{\overline{x},i} &= u_{\overline{x},i}v_i + u_{i-1}v_{\overline{x},i} = u_{\overline{x},i}v_{i-1} + u_i v_{\overline{x},i}
\end{aligned}
$$

Formuli parcijalne integracije:

$$
\int_0^l uv'dx = uv|_0^l - \int_0^l u'vdx
$$

odgovara formula:

$$
(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\overline{x}}, v] \tag{2.12}
$$

2.7.3 Diferencijski analogoni teorema potapanja

Lema 2.24. *Za svaku funkciju v definisanu na mreži $\overline{\omega}_h$ i jednaku nuli za $x = 0$ i $x = l$ važi nejednakost:*

$$\|v\|_{C,h} = \max_{0\le i\le N} |v_i| \le \sqrt{l}\|v_{\overline{x}}]|/2 \tag{2.13}$$

Ako je v jednako nuli samo na jednom kraju intervala umesto (2.13) važi slabija nejednakost $\|v\|_{C,h} \le \sqrt{l}\|v_{\overline{x}}]|$. Za proizvoljnu funkciju v definisanu na $\overline{\omega}_h$ važi:

$$\|v\|^2_{C,h} \le 2(l\|v_x]|^2 + v_0^2), \quad \|v\|^2_{C,h} \le 2(l\|v_{\overline{x}}]|^2 + v_N^2) \tag{2.14}$$

Lema 2.25. *Za proizvoljnu funkciju v definisanu na mreži $\overline{\omega}_h$ i jednaku nuli za $x = 0$ i $x = l$ važe nejednakosti:*

$$h\|v_{\overline{x}}]| \le 2\|v\| \le l\|v_{\overline{x}}]|$$

2.7.4 Princip maksimuma

Razmotrimo u oblasti Ω_h sledeći zadatak:

$$L[v] \equiv a(x)v(x) - \sum_{\xi\in\mathcal{O}'(x)} b(x,\xi)v(\xi) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega_h$$
$$v(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_h \tag{2.15}$$

gde je $\mathcal{O}'(x) = \mathcal{O}(x) \setminus \{x\}$, a koeficijenti $a(x)$ i $b(x,\xi)$ zadovoljavaju uslove:

$$a(x) > 0,\ b(x,\xi) \ge 0 \ \text{ pri čemu je } \ b(x,\xi) > 0, \text{ako je } \ \xi_i = x_i, i \ne j \tag{2.16}$$
$$\xi_j = x_j \pm h_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$
$$d(x) = a(x) - \sum_{\xi\in\mathcal{O}'(x)} b(x,\xi) \ge 0$$

Teorema 2.26. *(Princip maksimuma) Neka je funkcija $v = v(x)$ definisana na mreži Ω_h i različita od konstante. Ako je $L[v] \ge 0$ ($L[v] \le 0$) tada $v(x)$ ne može dostizati najveću pozitivnu (najmanju negativnu) vrednost u unutrašnjoj tački mreže Ω_h.*

Teorema 2.27. *Neka je funkcija $v = v(x)$ definisana na mreži Ω_h i nenegativna na Γ_h i neka je ispunjen uslov $L[v] \ge 0$ na Ω_h. Tada je $v(x)$ nenegativna za svako $x \in \overline{\Omega}_h$. Važi i obrnuto: ako je $v(x) \le 0$ na Γ_h i $L[v] \le 0$ na Ω_h, tada je $v(x) \le 0$*

za svako $x \in \overline{\Omega}_h$.

Posledica 2.28. *Zadatak (2.15) ima jedinstveno rešenje.*

Teorema 2.29. *(Teorema poređenja) Neka je* $v(x)$ *rešenje zadatka (2.15), a* $\overline{v}(x)$ *rešenje zadatka koji se dobija iz (2.15) zamenom* $f(x)$ *sa* $\overline{f}(x)$ *i* $g(x)$ *sa* $\overline{g}(x)$. *Ako je* $|f(x)| \leq \overline{f}(x)$ *i* $|g(x)| \leq \overline{g}(x)$ *tada je* $|v(x)| \leq \overline{v}(x),\ x \in \overline{\Omega}_h$.

Posledica 2.30. *Za rešenje zadatka:*
$L[v] = 0,\ x \in \Omega_h;\ \ v(x) = g(x),\ \ x \in \Gamma_h$ *važi ocena:*

$$\max_{\overline{\Omega}_h} |v(x)| = \max_{\Gamma_h} |v(x)| = \max_{\Gamma_h} |g(x)|.$$

3 Transmisioni spektralni problem

Razmotrimo sledeći problem sopstvenih vrednosti na dva disjunktna intervala [9]:

$$-\left(p_1(x)u_1'\right)' + q_1(x)u_1(x) = \lambda u_1(x), \quad x \in \Omega_1 = (a_1, b_1), \tag{3.1}$$

$$-\left(p_2(x)u_2'\right)' + q_2(x)u_2(x) = \lambda u_2(x), \quad x \in \Omega_2 = (a_2, b_2), \tag{3.2}$$

gde je $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$, sa Robinovim graničnim uslovima u krajnjim spoljašnjim tačkama a_1 i b_2:

$$-p_1(a_1)\, u_1'(a_1) + \sigma_1 u_1(a_1) = 0, \tag{3.3}$$

$$p_2(b_2)\, u_2'(b_2) + \sigma_2 u_2(b_2) = 0 \tag{3.4}$$

i nelokalnim Robin-Dirichlet-ovim uslovima saglasnosti u krajnjim unutrašnjim tačkama b_1 i a_2:

$$p_1(b_1)\, u_1'(b_1) + \alpha_1 u_1(b_1) = \beta_1 u_2(a_2), \tag{3.5}$$

$$-p_2(a_2)\, u_2'(a_2) + \alpha_2 u_2(a_2) = \beta_2 u_1(b_1). \tag{3.6}$$

Pretpostavimo da je $\beta_i \neq 0$, $i = 1, 2$, jer se u suprotnom problem (3.1)-(3.6) svodi na dva nezavisna Sturm-Liouville-ova problema.

3.1 Egzistencija sopstvenih vrednosti

Na samom početku definišimo prostor u kome ćemo rešavati ovaj problem. Neka je L_2 proizvod prostora $L_2 = L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$, snabdeven skalarnim proizvodom i odgovarajućom normom

$$(u, v)_{L_2} = |\beta_2|(u_1, v_1)_{L_2(\Omega_1)} + |\beta_1|(u_2, v_2)_{L_2(\Omega_2)}, \quad \|v\|_{L_2} = (v, v)_{L_2}^{1/2},$$

gde je $(u_i, v_i)_{L_2(\Omega_i)} = \int_{\Omega_i} u_i v_i \, dx, \;\; i = 1, 2.$

Takođe uvedimo prostor $H^1 = H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$, snabdeven skalarnim proizvodom i odgovarajućom normom

$$(u, v)_{H^1} = |\beta_2|(u_1, v_1)_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_1|(u_2, v_2)_{H^1(\Omega_2)}, \quad \|v\|_{H^1} = (v, v)_{H^1}^{1/2},$$

gde je

$$(u_i, v_i)_{H^1(\Omega_i)} = (u_i, v_i)_{L_2(\Omega_i)} + (u_i', v_i')_{L_2(\Omega_i)}, \;\; i = 1, 2.$$

Na osnovu osobina prostora Soboljeva sledi da su H^1 i L_2 Hilbertovi prostori, gde je H^1 kompaktno sadržan u L_2.

Na standardan način formulišimo slabu formu spektralnog problema (3.1)-(3.6): *odrediti* $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times H^1$ *tako da važi*

$$a(u,v) = \lambda\,(u,v)_{L_2}, \quad \forall\, v \in H^1, \tag{3.7}$$

gde je

$$\begin{aligned} a(u,v) = {} & |\beta_2| \int_{a_1}^{b_1} (p_1 u_1' v_1' + q_1 u_1 v_1)\, dx + |\beta_1| \int_{a_2}^{b_2} (p_2 u_2' v_2' + q_2 u_2 v_2)\, dx \\ & + |\beta_2| \sigma_1 u_1(a_1) v_1(a_1) + |\beta_1| \sigma_2 u_2(b_2) v_2(b_2) + |\beta_2| \alpha_1 u_1(b_1) v_1(b_1) \\ & + |\beta_1| \alpha_2 u_2(a_2) v_2(a_2) - \beta_1 |\beta_2|\, u_2(a_2) v_1(b_1) - |\beta_1| \beta_2 u_1(b_1) v_2(a_2). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Lema 3.1. *Ako su zadovoljeni uslovi* $\beta_1\beta_2 > 0$ *i* $p_i,\ q_i \in L_\infty(\Omega_i)$, $i = 1,2$, *bilinearna forma* a, *definisana sa (3.8), je simetrična i ograničena na* $H^1 \times H^1$. *Ako su pri tome zadovoljeni i uslovi* $p_i(x) \geq p_{i0} = const > 0$, $i = 1,2$, *ova forma zadovoljava Gårdingovu nejednakost na* H^1, *odnosno postoje pozitivne konstante* m *i* κ *tako da važi*

$$a(u,u) + \kappa\, \|u\|_{L_2}^2 \geq m\, \|u\|_{H^1}^2 \quad \forall\, u \in H^1.$$

Dokaz. Simetričnost bilinearne forme se dokazuje jednostavnom proverom. Dokažimo da je bilinearna forma ograničena. Iskoristimo prvo uslov regularnosti.

$$\begin{aligned} |a(u,v)| \leq {} & \sum_{i=1}^{2} |\beta_{3-i}| \left(\|p_i\|_{L_\infty(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} |u_i' v_i'| dx + \|q_i\|_{L_\infty(\Omega_i)} \int_{\Omega_i} |u_i v_i| dx \right) \\ & + 2|\beta_2|(|\sigma_1| + |\alpha_1|) \|u_1\|_{C(\bar\Omega_1)} \|v_1\|_{C(\bar\Omega_1)} + 2|\beta_1|(|\sigma_2| + |\alpha_2|) \|u_2\|_{C(\bar\Omega_2)} \|v_2\|_{C(\bar\Omega_2)} \\ & + |\beta_1||\beta_2| \Big(\|u_1\|_{C(\bar\Omega_1)} \|v_2\|_{C(\bar\Omega_2)} + \|u_2\|_{C(\bar\Omega_2)} \|v_1\|_{C(\bar\Omega_1)} \Big). \end{aligned}$$

Koristeći nejednakost Cauchy-Schwarz-a i potapanje $H^1(\Omega_i) \subseteq C(\bar\Omega_i)$, $i = 1,2$, dobijamo

$$\begin{aligned} |a(u,v)| \leq {} & \sum_{i=1}^{2} |\beta_{3-i}| \left(\|p_i\|_{L_\infty(\Omega_i)} \|u_i'\|_{L_2(\Omega_i)} \|v_i'\|_{L_2(\Omega_i)} + \|q_i\|_{L_\infty(\Omega_i))} \|u_i\|_{L_2(\Omega_i)} \|v_i\|_{L_2(\Omega_i)} \right) \\ & + 2C \max_i (|\sigma_i| + |\alpha_i|) \Big(|\beta_1| \|u_1\|_{H^1(\Omega_1)} \|v_1\|_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_2| \|u_2\|_{H^1(\Omega_2)} \|v_2\|_{H^1(\Omega_2)} \Big) \\ & + C|\beta_1||\beta_2| \Big(\|u_1\|_{H^1(\Omega_1)} \|v_2\|_{H^1(\Omega_2)} + \|u_2\|_{H^1(\Omega_2)} \|v_1\|_{H^1(\Omega_1)} \Big). \end{aligned}$$

Dalje, majoracijom desne strane sledi

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| \le & \sum_{i=1}^{2} |\beta_{3-i}|(\|p_i\|_{L_\infty(\Omega_i)} + \|q_i\|_{L_\infty(\Omega_i)})(\|u_i\|_{L_2(\Omega_i)} + \|u_i'\|_{L_2(\Omega_i)}) \\
& (\|v_i\|_{L_2(\Omega_i)} + \|v_i'\|_{L_2(\Omega_i)}) + 2C \max_i (|\sigma_i| + |\alpha_i|)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\
& + C\sqrt{|\beta_1||\beta_2|}\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \le 2C_1\big(|\beta_2|\|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}\|v_1\|_{H^1(\Omega_1)} \\
& + |\beta_1|\|u_2\|_{H^1(\Omega_2)}\|v_2\|_{H^1(\Omega_2)}\big) + C\left(2\max_i |\alpha_i| + \sqrt{|\beta_1||\beta_2|}\right)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\
\le & \, 2C_1\big(|\beta_2|\|u_1\|^2_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_1|\|u_2\|^2_{H^1(\Omega_2)}\big)^{1/2}\big(|\beta_2|\|v_1\|_{H^1(\Omega_1)} + |\beta_1|\|v_2\|_{H^1(\Omega_2)}\big)^{1/2} \\
& + C\left(2\max_i(|\sigma_i| + |\alpha_i|) + \sqrt{|\beta_1||\beta_2|}\right)\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \\
\le & \, C_2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Dokažimo Gårdingovu nejednakost. Važi sledeće

$$
\begin{aligned}
a(u,u) \ge & \min_i p_{i0}\, \|u'\|^2_{L_2} - \max_i \|q_i\|_{L_\infty(a_i,b_i)}\, \|u\|^2_{L_2} \\
& - \max_i \big(|\sigma_i\| + |\alpha_i| + |\beta_i|\big)\big[|\beta_2|u_1^2(a_1) + |\beta_2|u_1^2(b_1) + |\beta_1|u_2^2(a_2) + |\beta_1|u_2^2(b_2)\big].
\end{aligned}
$$

Ocenimo vrednost $u_i^2(a_i)$, $i = 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
u_i^2(a_i) = & \left\{ u_i(a_i) - \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} u_i(x)dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} u_i(x)dx \right\}^2 \\
= & \left\{ -\frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon}\int_{a_i}^{x} u_1'(y)dydx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} u_i(x)dx \right\}^2 \\
\le & \frac{2}{\varepsilon^2}\left|\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon}\int_{a_i}^{x} u_1'(y)dydx\right|^2 + \frac{2}{\varepsilon^2}\left|\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} u_i(x)dx\right|^2 \\
\le & \frac{2}{\varepsilon^2}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon}\int_{a_i}^{x} dydx \int_{a_i}^{a_i+\varepsilon}\int_{a_i}^{x} |u_1'(y)|^2\, dydx + \frac{2}{\varepsilon^2}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} dx \int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} |u_1(x)|^2\, dx \\
\le & \frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\varepsilon\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} |u_1'(x)|^2\, dx + \frac{2}{\varepsilon}\int_{a_i}^{a_i+\varepsilon} |u_1(x)|^2\, dx \\
\le & \, \varepsilon\int_{a_i}^{b_i} |u_1'(x)|^2\, dx + \frac{2}{\varepsilon}\int_{a_i}^{b_i} |u_1(x)|^2\, dx \\
\le & \, \varepsilon\|u_1'\|^2_{L_2(a_i,b_i)} + \frac{2}{\varepsilon}\|u_1\|^2_{L_2(a_i,b_i)}, \qquad\qquad 0 < \varepsilon \le b_i - a_i.
\end{aligned}
$$

Na sličan način dobijamo i:

$$u_i^2(b_i) \leq \varepsilon \|u_1'\|^2_{L_2(a_i,b_i)} + \frac{2}{\varepsilon}\|u_1\|^2_{L_2(a_i,b_i)}, \quad 0 < \varepsilon \leq b_i - a_i,\ i = 1,2.$$

Na osnovu prethodnih nejednakosti dobijamo:

$$\begin{aligned} a(u,u) \geq & c_1\|u'\|^2_{L_2} - c_2\,\|u\|^2_{L_2} - c_3\left[\varepsilon\|u'\|^2_{L_2} + \frac{2}{\varepsilon}\|u\|^2_{L_2}\right] \\ \geq & (c_1 - c_3\varepsilon)\|u'\|^2_{L_2} - \left(c_2 + c_3\frac{2}{\varepsilon}\right)\|u\|^2_{L_2}. \end{aligned}$$

Za dovoljno malo ε dobijamo

$$a(u,u) \geq m\|u\|^2_{H^1} - \left(c_2 + c_3\frac{2}{\varepsilon} + m\right)\|u\|^2_{L_2}$$

odnosno

$$a(u,u) + \kappa\|u\|^2_{L_2} \geq m\|u\|^2_{H^1}.$$

□

Lema 3.2. *Neka su zadovoljeni uslovi Leme 3.1. Ako su pri tome zadovoljeni i uslovi*

$$\sigma_i,\ \alpha_i,\ \beta_i > 0, \quad q_i(x) \geq 0, \quad i = 1,2; \quad \alpha_1\alpha_2 \geq \beta_1\beta_2$$

bilinearna forma a, definisana sa (3.8) je koercivna (koeficijent κ u Gårdingovoj nejednakosti je nula), tj. postoji konstanta $c_0 > 0$, tako da važi

$$a(u,u) \geq c_0\|u\|^2_{H^1}.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} a(u,u) \geq & \min_i p_{i0}\,|u'|^2_{H^1} + \beta_2\sigma_1 u_1^2(a_1) + \beta_1\sigma_2 u_2^2(b_2) + \beta_2\alpha_1 u_1^2(b_1) \\ & + \beta_1\alpha_2 u_2^2(a_2) - 2\beta_1\beta_2\, u_2(a_2)u_1(b_1) \\ \geq & \min_i p_{i0}\,|u'|^2_{H^1} + \beta_2\sigma_1 u_1^2(a_1) + \beta_1\sigma_2 u_2^2(b_2) \\ & + \beta_1\beta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}u_1^2(b_1) + \frac{\alpha_2}{\beta_2}u_2^2(a_2) - 2\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}}|u_2(a_2)||u_1(b_1)|\right) \\ = & \min_i p_{i0}\,|u'|^2_{H^1} + \beta_2\sigma_1 u_1^2(a_1) + \beta_1\sigma_2 u_2^2(b_2) + \beta_1\beta_2\left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}|u_1(b_1)| - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}|u_2(a_2)|\right)^2 \end{aligned}$$

Primenom Leme 2.7 dobijamo

$$a(u,u) \geq c_0\|u\|^2_{H^1} + \beta_1\beta_2\left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}|u_1(b_1)| - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}|u_2(a_2)|\right)^2 \geq c_0\|u\|^2_{H^1}$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorema 3.3. *Pod uslovima Leme 3.1 problem (3.1)-(3.6) ima prebrojiv niz realnih generalisanih sopstvenih vrednosti*

$$-\kappa < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots \to \infty.$$

Odgovarajući generalisani sopstveni vektori $u^n \equiv (u_1^n, u_2^n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ *se mogu odabrati tako da budu ortonormirani u* L_2*. Oni obrazuju Hilbertovu bazu za* H^1 *kao i za* L_2*.*

Sopstvene vrednosti λ_n zadovoljavaju princip minimuma Rayligh-jevih koeficijenata $R(u) = a(u,u)/\|u\|^2_{L_2}$:

$$\lambda_1 = \min_{u\in H^1} R(u) = R(u^1)$$

$$\lambda_n = \min_{u\in H^1,\ a(u,u^i)=0,\ i=1,\ldots,n-1} R(u) = R(u^n), \qquad n = 2, 3, \ldots$$

3.2 Asimptotsko ponašanje sopstvenih vrednosti

Važi sledeće tvrđenje:

Teorema 3.4. *Ako su zadovoljeni uslovi Leme 3.1 sopstvene vrednoosti* λ_n *graničnog problema (3.1)-(3.6) zadovoljavaju sledeću asimptotsku formulu*

$$\lambda_n \asymp n^2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Dokaz. Na osnovu teorije spektralnih problema sa klasičnim graničnim uslovima može se dokazati da je asimptotska distribucija sopstvenih vrednosti svih regularnih problema oblika (3.1)-(3.6) koji zadovoljavaju pretpostavke Leme 3.1 ista kao kod problema sa konstantnim koeficijentima:

$$-u_1'' = \lambda u_1\,, \qquad x \in (a_1, b_1), \tag{3.9}$$

$$-u_2'' = \lambda u_2\,, \qquad x \in (a_2, b_2), \tag{3.10}$$

$$-u_1'(a_1) + \sigma_1 u_1(a_1) = 0, \tag{3.11}$$

$$u_2'(b_2) + \sigma_2 u_2(b_2) = 0, \tag{3.12}$$

$$u_1'(b_1) + \alpha_1 u_1(b_1) = \beta_1 u_2(a_2), \tag{3.13}$$

$$-u_2'(a_2) + \alpha_2 u_2(a_2) = \beta_2 u_1(b_1). \tag{3.14}$$

Pretpostavimo, prvo, da je sopstvena vrednost λ negativna, $\lambda = -\mu^2$. Tada sopstveni vektor $u = (u_1, u_2)$ problema (3.9)-(3.14) možemo predstaviti u obliku:

$$u_1(x) = A_1 \sinh\big(\mu(x - a_1) + \gamma_1\big), \qquad x \in (a_1, b_1),$$

$$u_2(x) = A_2 \sinh\big(\mu(b_2 - x) + \gamma_2\big), \qquad x \in (a_2, b_2).$$

Jednačine (3.9) i (3.10) su zadovoljene za $\lambda = -\mu^2$. Iz (3.11) i (3.12) sledi:

$$\tanh \gamma_i = \frac{\mu}{\sigma_i}, \qquad i = 1, 2,$$

dok iz (3.13) i (3.14) dobijamo:

$$\begin{aligned}
&A_1 \big[\mu \cosh\big(\mu(b_1 - a_1) + \gamma_1\big) + \alpha_1 \sinh\big(\mu(b_1 - a_1) + \gamma_1\big)\big] \\
&\qquad - A_2 \beta_1 \sinh\big(\mu(b_2 - a_2) + \gamma_2\big) = 0, \\
&-A_1 \beta_2 \sinh\big(\mu(b_1 - a_1) + \gamma_1\big) \\
&\qquad + A_2 \big[\mu \cosh\big(\mu(b_2 - a_2) + \gamma_2\big) + \alpha_2 \sinh\big(\mu(b_2 - a_2) + \gamma_2\big)\big] = 0.
\end{aligned}$$

Da bi homogeni sistem po promenljivim A_1 i A_2 imao netrivijalno rešenje determinanta sistema mora biti jednaka nuli. Nakon kratkog računa dobijamo sledeću jednačinu za μ:

$$\mu = -\left[\alpha_1 \varphi_1(\mu) + \alpha_2 \varphi_2(\mu)\right] + \frac{\beta_1 \beta_2}{\mu} \varphi_1(\mu) \varphi_2(\mu), \tag{3.15}$$

gde je:

$$\varphi_i(\mu) = \frac{\tanh \mu(b_i - a_i) + \frac{\mu}{\sigma_i}}{1 + \frac{\mu}{\sigma_i} \tanh \mu(b_i - a_i)}, \qquad i = 1, 2.$$

Na osnovu osobina funkcije $\tanh \mu$ lako zaključujemo da jednačina (3.15) ima konačan broj korena, odakle sledi da može postojati najviše konačno mnogo negativnih sopstvenih vrednosti problema (3.9)-(3.14).

Proverimo sada da li nula može biti sopstvena vrednost problema (3.9)-(3.14).

U tom slučaju sopstveni vektor $u = (u_1, u_2)$ je oblika:

$$u_1(x) = A_1(x - a_1 + \gamma_1)\,, \qquad x \in (a_1, b_1),$$
$$u_2(x) = A_2(b_2 - x + \gamma_2)\,, \qquad x \in (a_2, b_2).$$

Stavljajući u u (3.9)-(3.14), posle kratkog računa dobijamo:

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_1\Big(b_1 - a_1 + \frac{1}{\sigma_1}\Big) + \alpha_2\Big(b_2 - a_2 + \frac{1}{\sigma_2}\Big) \\ +(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)\Big(b_1 - a_1 + \frac{1}{\sigma_1}\Big)\Big(b_2 - a_2 + \frac{1}{\sigma_2}\Big) = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Odavde sledi da je nula sopstvena vrednost problema (3.9)-(3.14) ako i samo ako ulazni podaci zadovoljavaju uslov (3.16).

Konačno, za pozitivne sopstvene vrednosti $\lambda > 0$ uzimamo $\lambda = \mu^2$ i tražimo odgovarajući sopstveni vektor u obliku:

$$u_1(x) = A_1 \sin\big(\mu(x - a_1) + \gamma_1\big)\,, \qquad x \in (a_1, b_1),$$
$$u_2(x) = A_2 \sin\big(\mu(b_2 - x) + \gamma_2\big)\,, \qquad x \in (a_2, b_2).$$

Analogno prethodnom slučaju, posle zamene u u (3.9)-(3.14) dobijamo odgovarajuću jednačinu za μ:

$$\mu = -\left[\alpha_1\,\psi_1(\mu) + \alpha_2\,\psi_2(\mu)\right] + \frac{\beta_1\,\beta_2}{\mu}\,\psi_1(\mu)\psi_2(\mu), \tag{3.17}$$

gde je:

$$\psi_i(\mu) = \frac{\tan\mu(b_i - a_i) + \frac{\mu}{\sigma_i}}{1 - \frac{\mu}{\sigma_i}\,\tan\mu(b_i - a_i)}\,, \qquad i = 1, 2.$$

Funkcija na desnoj strani jednačine (3.17) ima dve prebrojive familije vertikalnih asimptota $\mu = \tilde{\mu}_{in}$, $i = 1, 2$, $n = 1, 2, \ldots$ gde su $\tilde{\mu}_{in}$ koreni jednačine:

$$\tan\mu(b_i - a_i) = \frac{\sigma_i}{\mu}\,, \qquad i = 1, 2.$$

U okolini svake vertikalne asimptote postoji jedinstveno rešenje $\mu = \mu_{in}$ jednačine (3.17). Asimptotskim razvojem funkcija $\tan\mu(b_i - a_i)$ i $\psi_i(\mu)$ dobijamo:

$$\mu_{in} = \frac{n\pi}{b_i - a_i} + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

odakle sledi tvrđenje. $\square$

3.3 Aproksimacija metodom konačnih razlika

Pretpostavimo da su p_i, $q_i \in C([a_i, b_i])$. Neka je $\bar{\omega}_i$ uniformna mreža na intervalu $[a_i, b_i]$:

$$\bar{\omega}_i = \{x_{ij} = a_i + jh_i \,|\, j = 0, 1, \ldots, N_i,\; h_i = (b_i - a_i)/N_i\}, \quad \omega_i = \bar{\omega}_i \cap (a_i, b_i).$$

Operatori konačnih razlika se definišu na standardan način [37]

$$v_{i,x}(x) = \frac{v_i(x + h_i) - v_i(x)}{h_i} = v_{i,\bar{x}}(x - h_i).$$

Aproksimirajmo spektralni problem (3.1)-(3.6) sledećom diferencijskom shemom:

$$\begin{gathered}
-(\bar{p}_1\, v_{1,\bar{x}})_x + \bar{q}_1\, v_1 = \lambda^h\, v_1\,, \quad x \in \omega_1\,,\\
-(\bar{p}_2\, v_{2,\bar{x}})_x + \bar{q}_2\, v_2 = \lambda^h\, v_2\,, \quad x \in \omega_2\,,\\
\frac{2}{h_1}\Big[-\bar{p}_1(a_1)\, v_{1,x}(a_1) + \sigma_1\, v_1(a_1)\Big] + \bar{q}_1(a_1)\, v_1(a_1) = \lambda^h\, v_1(a_1),\\
\frac{2}{h_2}\Big[\bar{p}_2(b_2) v_{2,\bar{x}}(b_2) + \sigma_2 v_2(b_2)\Big] + \bar{q}_2(b_2) v_2(b_2) = \lambda^h v_2(b_2),\\
\frac{2}{h_1}\Big[\bar{p}_1(b_1)\, v_{1,\bar{x}}(b_1) + \alpha_1\, v_1(b_1) - \beta_1\, v_2(a_2)\Big] + \bar{q}_1(b_1)\, v_1(b_1) = \lambda^h\, v_1(b_1),\\
\frac{2}{h_2}\Big[-\bar{p}_2(a_2) v_{2,x}(a_2) + \alpha_2 v_2(a_2) - \beta_2 v_1(b_1)\Big] + \bar{q}_2(a_2) v_2(a_2) = \lambda^h v_2(a_2),
\end{gathered} \tag{3.18}$$

gde je $\bar{p}_i(x) = p_i(x - h_i/2)$ i $\bar{q}_i(x) = q_i(x)$.

Posmatrajmo jednostavniji slučaj. Neka je $p_i(x) \equiv 1$ i $q_i(x) \equiv 0$. Pretpostavimo da su odsečci $[a_1, b_1]$ i $[a_2, b_2]$ samerljivi i izaberimo prirodne projeve N_1 i N_2, kao i korak h tako da je

$$h = \frac{b_1 - a_1}{N_1} = \frac{b_2 - a_2}{N_2}\,.$$

Diferencijska shema (3.18) se svodi na :

$$
\begin{aligned}
-v_{1,\bar{x}x} &= \lambda^h\, v_1\,, \quad x\in\omega_1\\
-v_{2,\bar{x}x} &= \lambda^h\, v_2\,, \quad x\in\omega_2\,,\\
\frac{2}{h}\Big[-v_{1,x}(a_1)+\sigma_1\, v_1(a_1)\Big] &= \lambda^h\, v_1(a_1),\\
\frac{2}{h}\Big[v_{2,\bar{x}}(b_2)+\sigma_2 v_2(b_2)\Big] &= \lambda^h v_2(b_2),\\
\frac{2}{h}\Big[v_{1,\bar{x}}(b_1)+\alpha_1\, v_1(b_1)-\beta_1\, v_2(a_2)\Big] &= \lambda^h\, v_1(b_1),\\
\frac{2}{h}\Big[-v_{2,x}(a_2)+\alpha_2 v_2(a_2)-\beta_2 v_1(b_1)\Big] &= \lambda^h v_2(a_2).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori sheme (3.19) se mogu predstaviti analogno neprekidnom slučaju. Zaista, za $\lambda^h<0$ sopstveni vektor $v=(v_1,v_2)$ tražimo u sledećem obliku:

$$
\begin{aligned}
v_1(x) &= A_1\sinh\big(\mu(x-a_1)+\gamma_1\big)\,, \qquad x\in\omega_1,\\
v_2(x) &= A_2\sinh\big(\mu(b_2-x)+\gamma_2\big)\,, \qquad x\in\omega_2.
\end{aligned}
$$

Prve dve jednačine u (3.19) su zadovoljene ako je

$$
\lambda^h=-\frac{4}{h^2}\,\sinh^2\frac{\mu h}{2}\,. \tag{3.20}
$$

Iz sledeće dve jednačine (3.19) sledi:

$$
\tanh\gamma_i=\frac{\sinh\mu h}{\sigma_i h}, \qquad i=1,2.
$$

Iz poslednje dve jednačine sheme (3.19), analogno neprekidnom slučaju, dobijamo sledeću jednačinu za μ:

$$
I_h(\mu)=-\left[\alpha_1\,\varphi_{1h}(\mu)+\alpha_2\,\varphi_{2h}(\mu)\right]+\frac{\beta_1\,\beta_2}{I_h(\mu)}\,\varphi_{1h}(\mu)\varphi_{2h}(\mu), \tag{3.21}
$$

gde je:

$$
I_h(\mu)=\frac{\sinh\mu h}{h}\,, \qquad \varphi_{ih}(\mu)=\frac{\tanh\mu(b_i-a_i)+\frac{I_h(\mu)}{\sigma_i}}{1+\frac{I_h(\mu)}{\sigma_i}\,\tanh\mu(b_i-a_i)}\,, \qquad i=1,2.
$$

Proverimo da li nula može biti sopstvena vrednost diferencijske sheme (3.19).

Sopstveni vektor $v = (v_1, v_2)$ tražimo u obliku:

$$v_1(x) = A_1(x - a_1 + \gamma_1)\,, \qquad x \in \omega_1,$$

$$v_2(x) = A_2(b_2 - x + \gamma_2)\,, \qquad x \in \omega_2.$$

Zamenimo v u (3.19) i posle kraćeg računa dobijamo uslov (3.16).

Konačno, za pozitivne sopstvene vrednosti $\lambda^h > 0$ sopstveni vektor tražimo u obliku:

$$v_1(x) = A_1 \sin\big(\mu(x - a_1) + \gamma_1\big)\,, \qquad x \in \omega_1,$$

$$v_2(x) = A_2 \sin\big(\mu(b_2 - x) + \gamma_2\big)\,, \qquad x \in \omega_2.$$

Analogno prethodnim slučajevima, posle zamene v u (3.19) dobijamo:

$$\lambda^h = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\mu h}{2}\,, \tag{3.22}$$

gde je μ koren sledeće jednačine:

$$J_h(\mu) = -\left[\alpha_1\, \psi_{1h}(\mu) + \alpha_2\, \psi_{2h}(\mu)\right] + \frac{\beta_1\, \beta_2}{J_h(\mu)}\, \psi_{1h}(\mu)\psi_{2h}(\mu), \tag{3.23}$$

i

$$J_h(\mu) = \frac{\sin \mu h}{h}\,, \qquad \psi_{ih}(\mu) = \frac{\tan \mu(b_i - a_i) + \frac{J_h(\mu)}{\sigma_i}}{1 - \frac{J_h(\mu)}{\sigma_i}\, \tan \mu(b_i - a_i)}\,, \qquad i = 1, 2.$$

Neka je λ_n n-ta sopstvena vrednost problema (3.9)-(3.14) i λ_n^h n-ta sopstvena vrednost diferencijskog problema (3.19). Iz (3.15), (3.17), (3.20)-(3.23) pomoću asimptotskog razvoja zaključujemo da je za fiksirano n

$$|\lambda_n^h - \lambda_n| = O(h^2), \qquad h \to 0.$$

3.4 Numerički eksperiment

Distribucija sopstvenih vrednosti zavisi od ulaznih parametara, što je pokazano u sledećim numeričkim eksperimentima. Prve četiri sopstvene vrednosti u svakom eksperimentu su dobijene numerički, rešavanjem jednačina (3.15) i (3.17). Sve sopstvene vrednosti su pozitivne ili postoji samo jedna negativna sopstvena vrednost. Sopstvene vrednosti odgovarajuće diferencijske sheme su takođe izračunate i upoređene sa prethodno dobijenim vrednostima. Numerički red konvergencije je određen pomoću formule

$$R = \log_2 \left| \frac{\lambda - \lambda^h}{\lambda - \lambda^{h/2}} \right| .$$

U svim slučajevima su dobijene vrednosti približno jednake 2.

Eksperiment je urađen za sledeće ulazne vrednosti problema (3.9)-(3.14):

a) a_1=0, b_1=3/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=2, α_2=4, β_1=1, β_2=2;

b) a_1=0, b_1=1/2, a_2=3/4, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=2, α_2=4, β_1=1, β_2=2;

c) a_1=0, b_1=4/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, $\alpha_1=\sqrt{3}$, α_2=1, β_1=1, $\beta_2=\sqrt{2}$;

d) a_1=0, b_1=2/5, a_2=4/5, b_2=1, σ_1=1, σ_2=5, α_1=10, α_2=5, β_1=1, β_2=1;

e) a_1=0, b_1=3/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=1, α_2=2, β_1=2, β_2=4;

f) a_1=0, b_1=1/2, a_2=3/4, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=1, α_2=2, β_1=2, β_2=4;

g) a_1=0, b_1=4/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=2, α_1=1, α_2=1, $\beta_1=\sqrt{13}$, β_2=1;

h) a_1=0, b_1=4/8, a_2=5/8, b_2=1, σ_1=1, σ_2=1/2, α_1=1, α_2=1/4, β_1=11, β_2=1.

Dobijeni rezultati su prikazani u Tabeli 1.

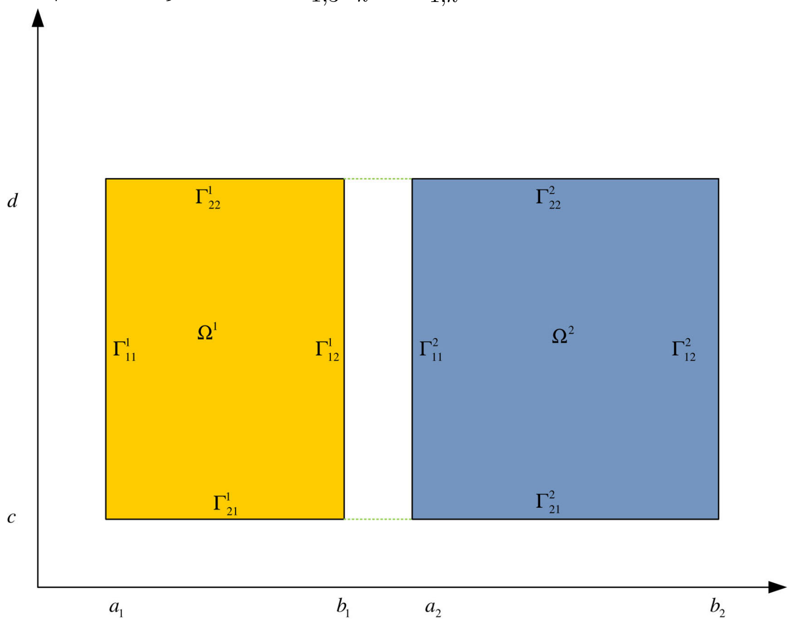
Tabela 1: Prve četiri sopstvene vrednosti problema (3.9)-(3.14) i (3.19)

Primer		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
a	λ_n	5.954928	13.417067	82.588610	100.669336
	$\lambda_n^h,\ \ h=0.0375$	5.958409	13.428963	82.020102	100.101870
	$\lambda_n^{h/2}$	5.955797	13.420033	82.446073	100.526934
	Red konvergencije	2.000829	2.002791	1.995784	1.994565
b	λ_n	4.555675	20.191656	50.629881	168.017194
	$\lambda_n^h,\ \ h=0.05$	4.559030	20.246621	50.315818	162.896546
	$\lambda_n^{h/2}$	4.556512	20.205292	50.551085	166.724103
	Red konvergencije	2.003013	2.011093	1.994860	1.985503
c	λ_n	3.104324	8.091749	49.062458	85.422242
	$\lambda_n^h,\ \ h=0.041667$	3.105280	8.097992	48.835303	84.721527
	$\lambda_n^{h/2}$	3.104563	8.093307	49.005558	85.246434
	Red konvergencije	2.000000	2.002544	1.997177	1.994827
d	λ_n	13.618646	42.439346	101.167731	294.156362
	$\lambda_n^h,\ \ h=0.04$	13.621885	42.607664	100.510131	285.780459
	$\lambda_n^{h/2}$	13.619454	42.480976	101.003403	292.046234
	Red konvergencije	2.003121	2.015494	2.000632	1.988914
e	λ_n	-1.924075	12.330178	70.183854	98.345322
	$\lambda_n^h,\ \ h=0.0375$	-1.922794	12.340203	69.608510	97.777327
	$\lambda_n^{h/2}$	-1.923754	12.332678	70.039662	98.202813
	Red konvergencije	1.996625	2.003602	1.996434	1.994825
f	λ_n	-1.682198	14.308157	47.641283	157.913670
	$\lambda_n^h,\ \ h=0.05$	-1.680374	14.322663	47.341644	152.786405
	$\lambda_n^{h/2}$	-1.681742	14.311776	47.566053	156.619148
	Red konvergencije	2.000000	2.002987	1.993845	1.985770
g	λ_n	-0.029665	8.697649	45.685857	85.642406
	$\lambda_n^h,\ \ h=0.041667$	-0.029655	8.704169	45.451210	84.938331
	$\lambda_n^{h/2}$	-0.029663	8.699276	45.627101	85.465800
	Red konvergencije	2.321928	2.002658	1.997684	1.995195
h	λ_n	-9.076577	7.673762	41.176814	77.239915
	$\lambda_n^h,\ \ h=0.04$	-9.051004	7.677784	40.901047	76.574761
	$\lambda_n^{h/2}$	-9.070151	7.674766	41.107792	77.073030
	Red konvergencije	1.992629	2.002154	1.998322	1.994834

4 Transmisioni problem za jednačine eliptičkog tipa

4.1 Formulacija problema

Na samom početku, definišimo oblasti Ω^1 i Ω^2 na sledeći način:
$\Omega^1 = (a_1, b_1) \times (c, d)$, $\Omega^2 = (a_2, b_2) \times (c, d)$, $-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < +\infty$ i $c < d$ (slika 8). Označimo sa $\Gamma^k = \partial\Omega^k = \cup_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k$ granice posmatranih oblasti, gde je $\Gamma_{11}^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \Gamma^1 \,|\, x_1 = a_1\}$, $\Gamma_{12}^1 = \{x \in \Gamma^1 \,|\, x_1 = b_1\}$, $\Gamma_{21}^k = \{x \in \Gamma^k \,|\, x_2 = c\}$, $\Gamma_{22}^k = \{x \in \Gamma^k \,|\, x_2 = d\}$, $\Gamma_{11}^2 = \{x = (x_1, x_2) \in \Gamma^2 \,|\, x_1 = a_2\}$, $\Gamma_{12}^2 = \{x \in \Gamma^2 \,|\, x_1 = b_2\}$ i $\Delta^k = \Gamma_{1,3-k}^k \times \Gamma_{1,k}^{3-k}$, $k = 1, 2$.



Slika 8

Kao modelni primer, razmatramo sledeći granični problem: Odrediti funkcije $u^1(x_1, x_2)$ i $u^2(x_1, x_2)$ koje zadovoljavaju sistem eliptičkih jednačina:

$$L^k u^k = f^k(x_1, x_2) \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega^k \tag{4.1}$$

$$l^k u^k = \begin{cases} r^k u^{3-k}, & x \in \Gamma_{1,3-k}^k, \\ 0, & x \in \Gamma^k \setminus \Gamma_{1,3-k}^k, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$L^k u^k := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right) + q^k u^k, \tag{4.3}$$

$$l^k u^k := \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j} \cos(\nu^k, x_i) + \alpha^k u^k, \tag{4.4}$$

$$\big(r^k u^{3-k}\big)(x) := \int_{\Gamma_{1,k}^{3-k}} \beta^k(x_2, x_2')\, u^{3-k}(x_2')\, \mathrm{d}\Gamma^{3-k}, \tag{4.5}$$

ν^k je jedinična spoljašnja normala na Γ^k ($k = 1, 2$).

Granični uslovi (4.2) na $\Gamma^k \setminus \Gamma_{1,3-k}^k$ predstavljaju standardne Robinove granične uslove dok na $\Gamma_{1,3-k}^k$ razmatramo nelokalne uslove saglasnosti Robin-Dirichlet-ovog tipa.

Pretpostavimo da su zadovoljeni standardni uslovi regularnosti i eliptičnosti:

$$p_{ij}^k = p_{ji}^k \in L^\infty(\Omega^k), \quad q^k \in L^\infty(\Omega^k), \quad \alpha^k \in L^\infty(\Gamma^k), \qquad \beta^k \in L^\infty(\Delta^k), \tag{4.6}$$

$$c_0^k \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} p_{ij}^k \xi_i \xi_j \le c_1^k \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}^k, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{4.7}$$

Sa C, c_i i c_i^k označavamo pozitivne konstante, koje ne zavise od rešenja graničnog problema i koraka mreže. Pri tome, C može uzeti različite vrednosti u različitim formulama.

4.2 Egzistencija i jedinstvenost slabog rešenja

Na samom početku definišimo prostor u kome ćemo rešavati ovaj problem. Neka je L_2 proizvod prostora

$$L_2 = L_2(\Omega^1) \times L_2(\Omega^2) = \{v = (v^1, v^2) | v^k \in L_2(\Omega^k)\},$$

snabdeven skalarnim proizvodom i odgovarajućom normom

$$(u, v)_{L_2} = (u^1, v^1)_{L_2(\Omega^1)} + (u^2, v^2)_{L_2(\Omega^2)}, \quad \|v\|_{L_2} = (v, v)_{L_2}^{1/2},$$

gde je

$$(u^k, v^k)_{L_2(\Omega^k)} = \iint_{\Omega^k} u^k v^k \, dxdy, \quad k = 1, 2.$$

Takođe uvedimo prostor

$$H^s = \{v = (v^1, v^2) |\ v^k \in H^s(\Omega^k)\}, \quad s = 1, 2, ...$$

snabdeven skalarnim proizvodom i odgovarajućom normom

$$(u,v)_{H^s} = (u^1,v^1)_{H^s(\Omega^1)} + (u^2,v^2)_{H^s(\Omega^2)}, \quad \|v\|_{H^s} = (v,v)_{H^s}^{1/2},$$

gde je $H^s(\Omega^k)$ standardni prostor Soboljeva.

Odredimo sada bilinearnu formu $a(u,v)$ asociranu s graničnim problemom (4.1)-(4.2), gde je $u = (u^1,u^2)$ i $v = (v^1,v^2)$. Označimo $Lu = (L^1u^1, L^2u^2)$. Pomnožimo jednačinu (4.1) funkcijom $v^k(x_1,x_2)$, integralimo po oblasti Ω^k i sumirajmo po k. Vidimo da leva strana dobijene jednakosti ima oblik:

$$\begin{aligned} a(u,v) = (Lu,v)_{L_2} = \sum_{k=1}^{2} \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big(\sum_{i,j=1}^{2} p_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j} \frac{\partial v^k}{\partial x_i} + q^k u^k v^k \Big) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \\ + \int_{\Gamma^k} \alpha^k u^k v^k \,\mathrm{d}\Gamma^k - \int_{\Gamma_{1,3-i}^k} \int_{\Gamma_{1,i}^{3-k}} \beta^k\, u^{3-k}\, v^k \,\mathrm{d}\Gamma^{3-k}\,\mathrm{d}\Gamma^k \Bigg). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Dakle, slaba forma graničnog problema glasi: Odrediti funkciju $u \in H^1$ tako da važi $a(u,v) = (f,v)_{L_2}, \ \forall v \in H^1$ gde je $f = (f^1,f^2)$.

Lema 4.1. *Ako su zadovoljeni uslovi (4.6) bilinearna forma a, definisana sa (4.8), je ograničena na $H^1 \times H^1$. Ako su pri tome zadovoljeni i uslovi (4.7), ova forma zadovoljava Gårdingovu nejednakost na H^1, odnosno postoje pozitivne konstante m i κ tako da važi*

$$a(u,u) + \kappa\|u\|_{L_2}^2 \ge m\|u\|_{H^1}^2, \quad \forall\, u \in H^1.$$

Ako su β^k dovoljno mali, $\alpha^k > 0$ i $q^k(x) \ge c_k > 0$ $(k = 1,2)$, bilinearna forma a je koercivna ($\kappa = 0$). Dovoljni uslovi su

$$|\beta^1(x,x') + \beta^2(x',x)| \le \frac{2\sqrt{\alpha^1(x)\,\alpha^2(x')}}{d-c}, \quad \forall\, x \in \Gamma_{12}^1, \ \forall\, x' \in \Gamma_{11}^2. \tag{4.9}$$

Dokaz. Pokažimo da je bilinearna forma a ograničena.

Iskoristimo uslov regularnosti:

$$\begin{aligned} \Big|a(u,v)\Big| \le \sum_{k=1}^{2} \Bigg(C_1 \Bigg(\sum_{i,j=1}^{2} \iint_{\Omega^k} \Big|\frac{\partial u^k}{\partial x_j} \frac{\partial v^k}{\partial x_i}\Big| dx_1 dx_2 + \iint_{\Omega^k} \Big|u^k v^k\Big| dx_1 dx_2 \\ + \int_{\Gamma^k} \Big|u^k v^k\Big| \mathrm{d}\Gamma^k + \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma_{1,3-i}^k} \int_{\Gamma_{1,i}^{3-k}} \Big|u^{3-k}\, v^k\Big| \,\mathrm{d}\Gamma^{3-k}\,\mathrm{d}\Gamma^k \Bigg)\Bigg) \end{aligned}$$

$$\text{gde je} \quad C_1 = \max\left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega^k} \Big|p_{ij}^k\Big|, \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega^k} \Big|q^k\Big|, \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Gamma^k} \Big|\alpha^k\Big|, \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Delta^k} \Big|\beta^k\Big| \right\}.$$

Primenjujući nejednakost Cauchy-Schwarz-a dobijamo:

$$\Big|a(u,v)\Big| \leq \sum_{k=1}^{2} \Bigg\{ C_1 \Bigg[\sum_{i,j=1}^{2} \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2} \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|\frac{\partial v^k}{\partial x_i}\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2}$$
$$+ \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|u^k\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2} \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|v^k\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2}$$
$$+ \Bigg(\int_{\Gamma^k} \Big|u^k\Big|^2 \mathrm{d}\Gamma^k \Bigg)^{1/2} \Bigg(\int_{\Gamma^k} \Big|v^k\Big|^2 \mathrm{d}\Gamma^k \Bigg)^{1/2}$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \Bigg(\int_{\Gamma^k_{1,3-i}} \int_{\Gamma^{3-k}_{1,i}} \Big|u^{3-k}\Big|^2 \mathrm{d}\Gamma^{3-k}\, \mathrm{d}\Gamma^k \Bigg)^{1/2} \Bigg(\int_{\Gamma^k_{1,3-i}} \int_{\Gamma^{3-k}_{1,i}} \Big|v^k\Big|^2 \mathrm{d}\Gamma^{3-k}\, \mathrm{d}\Gamma^k \Bigg)^{1/2} \Bigg] \Bigg\}$$

odnosno,

$$\Big|a(u,v)\Big| \leq \sum_{k=1}^{2} C_1 \Bigg\{ \Bigg[\Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2} + \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2}$$
$$+ \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|u^k\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2} \Bigg] \times \Bigg[\Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|\frac{\partial v^k}{\partial x_1}\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2} + \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|\frac{\partial v^k}{\partial x_2}\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2}$$
$$+ \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big|v^k\Big|^2 dx_1 dx_2 \Bigg)^{1/2} \Bigg] + \|u^k\|_{L_2(\partial\Omega^k)} \|v^k\|_{L_2(\partial\Omega^k)} + C_2 \|u^{3-k}\|_{L_2(\partial\Omega^{3-k})} \|v^k\|_{L_2(\partial\Omega^k)} \Bigg\}.$$

Majoracijom desne strane nejednakosti dobijamo:

$$\Big|a(u,v)\Big| \leq \sum_{k=1}^{2} \Bigg\{ 4C_1 \Bigg[\iint_{\Omega^k} \Bigg(\Big|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\Big|^2 + \Big|u^k\Big|^2 \Bigg) dx_1 dx_2 \Bigg]^{1/2}$$
$$\times \Bigg[\iint_{\Omega^k} \Bigg(\Big|\frac{\partial v^k}{\partial x_1}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial v^k}{\partial x_2}\Big|^2 + \Big|v^k\Big|^2 \Bigg) dx_1 dx_2 \Bigg]^{1/2}$$
$$+ \|u^k\|_{L_2(\partial\Omega^k)} \|v^k\|_{L_2(\partial\Omega^k)} + C_2 \|u^{3-k}\|_{L_2(\partial\Omega^{3-k})} \|v^k\|_{L_2(\partial\Omega^k)} \Bigg\}.$$

Na samom kraju, iskoristimo teoremu o tragu:

$$\Big|a(u,v)\Big| \leq \sum_{k=1}^{2} \Big(4C_1 \|u^k\|_{H^1(\Omega^k)} \|v^k\|_{H^1(\Omega^k)} + C_3 \|u^k\|_{H^1(\Omega^k)} \|v^k\|_{H^1(\Omega^k)}$$
$$+ C_3 C_2 \|u^{3-k}\|_{H^1(\Omega^{3-k})} \|v^k\|_{H^1(\Omega^k)} \Big) \leq C \big(\|u^1\|_{H^1(\Omega^1)} + \|u^2\|_{H^1(\Omega^2)} \big) \times \big(\|v^1\|_{H^1(\Omega^1)}$$
$$+ \|v^2\|_{H^1(\Omega^2} \big) \leq C \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Da bismo dokazali Gårdingovu nejednakost iskoristimo prvo uslov eliptičnosti:

$$\sum_{k=1}^{2}\iint_{\Omega^k}\sum_{i,j=1}^{2}p_{ij}^k\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\frac{\partial u^k}{\partial x_i}dx_1dx_2\geq\sum_{k=1}^{2}c_0^k\iint_{\Omega_k}\left(\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\right)^2\right)dx_1dx_2$$
$$=\sum_{k=1}^{2}c_0^k|u^k|^2_{H^1(\Omega^k)}\geq C|u|^2_{H^1}.$$

Dalje,

$$\sum_{k=1}^{2}\iint_{\Omega^k}q^k(u^k)^2dx_1dx_2\geq -c_q\sum_{k=1}^{2}\|u^k\|^2_{L_2(\Omega^k)},\ c_q>0.$$

Ocenimo sada članove $\int_{\Gamma^k}\alpha^k(u^k)^2\,\mathrm{d}\Gamma^k,\ k=1,2.$

$$(u^k(b_k,x_2))^2=\left\{u^k(b_k,x_2)-\frac{1}{\epsilon}\int_{b_k-\epsilon}^{b_k}u^k(x_1,x_2)\,dx_1+\frac{1}{\epsilon}\int_{b_k-\epsilon}^{b_k}u^k(x_1,x_2)\,dx_1\right\}^2$$
$$=\left\{\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{b_k-\epsilon}^{b_k}\int\limits_{x_1}^{b_k}\frac{\partial u^k}{\partial x_1'}(x_1',x_2)\,dx_1'dx_1+\frac{1}{\epsilon}\int_{b_k-\epsilon}^{b_k}u^k(x_1,x_2)\,dx_1\right\}^2$$
$$\leq\frac{2}{\epsilon^2}\left|\int\limits_{b_k-\epsilon}^{b_k}\int\limits_{x_1}^{b_k}\frac{\partial u^k}{\partial x_1'}(x_1',x_2)\,dx_1'dx_1\right|^2+\frac{2}{\epsilon^2}\left|\int_{b_k-\epsilon}^{b_k}u^k(x_1,x_2)\,dx_1\right|^2$$
$$\leq\frac{2}{\epsilon^2}\int\limits_{b_k-\epsilon}^{b_k}\int\limits_{x_1}^{b_k}dx_1'dx_1\int\limits_{b_k-\epsilon}^{b_k}\int\limits_{x_1}^{b_k}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x_1'}(x_1',x_2)\right|^2dx_1'dx_1+\frac{2}{\epsilon^2}\int_{b_k-\epsilon}^{b_k}\int_{b_k-\epsilon}^{b_k}|u^k(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_1$$
$$=\int\limits_{b_k-\epsilon}^{b_k}\int\limits_{x_1}^{b_k}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x_1'}(x_1',x_2)\right|^2dx_1'dx_1+\frac{2}{\epsilon}\int_{b_k-\epsilon}^{b_k}|u^k(x_1,x_2)|^2\,dx_1$$
$$\leq\epsilon\int\limits_{a_k}^{b_k}\left|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right|^2dx_1+\frac{2}{\epsilon}\int_{a_k}^{b_k}|u^k(x_1,x_2)|^2\,dx_1=\epsilon\left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(a_k,b_k)}+\frac{2}{\epsilon}\|u^k\|^2_{L_2(a_k,b_k)}$$

Integracijom po x_2 dobijamo:

$$\int_c^d\alpha^k(b_k,x_2)\,(u^k(b_k,x_2))^2\,dx_2\leq C\epsilon\left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega^k)}+C\frac{2}{\epsilon}\|u^k\|^2_{L_2(\Omega^k)}$$

odnosno,

$$\int_{\Gamma_{12}^k}\alpha^k(u^k)^2\,\mathrm{d}\Gamma^k\leq C\epsilon\left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(\Omega^k)}+C\frac{2}{\epsilon}\|u^k\|^2_{L_2(\Omega^k)}.$$

Na isti način se dobija:

$$\int_{\Gamma^k_{ij}} \alpha^k (u^k)^2 \,\mathrm{d}\Gamma^k \leq C\epsilon \left\| \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right\|^2_{L_2(\Omega^k)} + C\frac{2}{\epsilon}\|u^k\|^2_{L_2(\Omega^k)},\ i,j=1,2.$$

Ocenimo $I_\beta = \int_{\Gamma^k_{1,3-k}} \int_{\Gamma^{3-k}_{1,k}} \beta^k\, u^{3-k}\, u^k \,\mathrm{d}\Gamma^{3-k}\,\mathrm{d}\Gamma^k,\ \ k=1,2.$

$$\begin{aligned}
I_\beta \leq C_\beta &\Big(\int_{\Gamma^k_{1,3-k}} \int_{\Gamma^{3-k}_{1,k}} |u^{3-k}|^2 \mathrm{d}\Gamma^{3-k}\,\mathrm{d}\Gamma^k \Big)^{1/2} \Big(\int_{\Gamma^k_{1,3-k}} \int_{\Gamma^{3-k}_{1,k}} |u^k|^2 \mathrm{d}\Gamma^{3-k}\,\mathrm{d}\Gamma^k \Big)^{1/2} \\
&= C_\beta (d-c) \Big(\int_{\Gamma^{3-k}_{1,k}} |u^{3-k}|^2 \mathrm{d}\Gamma^{3-k} \Big)^{1/2} \Big(\int_{\Gamma^k_{1,3-k}} |u^k|^2 \mathrm{d}\Gamma^k \Big)^{1/2} \\
I_\beta &\leq C_\beta (d-c) \|u^{3-k}\|_{L_2(\partial\Omega^{3-k})} \|u^k\|_{L_2(\partial\Omega^k)}
\end{aligned}$$

Koristeći multiplikativnu nejednakost traga [6] dobijamo:

$$\begin{aligned}
I_\beta &\leq C' C_\beta (d-c) \|u^{3-k}\|^{1/2}_{L_2(\Omega^{3-k})} \|u^{3-k}\|^{1/2}_{H^1(\Omega^{3-k})} \|u^k\|^{1/2}_{L_2(\Omega^k)} \|u^k\|^{1/2}_{H^1(\Omega^k)} \\
&\leq \frac{C' C_\beta (d-c)}{2} \Big(\|u^{3-k}\|_{L_2(\Omega^{3-k})} \|u^{3-k}\|_{H^1(\Omega^{3-k})} + \|u^k\|_{L_2(\Omega^k)} \|u^k\|_{H^1(\Omega^k)} \Big) \\
&\leq \frac{C' C_\beta (d-c)}{4} \Big(\frac{1}{\epsilon} \|u^{3-k}\|^2_{L_2(\Omega^{3-k})} + \epsilon \|u^{3-k}\|^2_{H^1(\Omega^{3-k})} + \frac{1}{\epsilon} \|u^k\|^2_{L_2(\Omega^k)} + \epsilon \|u^k\|^2_{H^1(\Omega^k)} \Big) \\
&\leq \frac{C' C_\beta (d-c)}{4} \Big(\epsilon \|u\|^2_{H^1} + \frac{1}{\epsilon} \|u\|^2_{L_2} \Big).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_{\Gamma^k} \alpha^k (u^k)^2 \,\mathrm{d}\Gamma^k - \int_{\Gamma^k_{1,3-k}} \int_{\Gamma^{3-k}_{1,k}} \beta^k\, u^{3-k}\, u^k \,\mathrm{d}\Gamma^{3-k}\,\mathrm{d}\Gamma^k \Big| \\
&\leq \int_{\Gamma^k} |\alpha^k (u^k)^2| \,\mathrm{d}\Gamma^k + \int_{\Gamma^k_{1,3-k}} \int_{\Gamma^{3-k}_{1,k}} |\beta^k\, u^{3-k}\, u^k| \,\mathrm{d}\Gamma^{3-k}\,\mathrm{d}\Gamma^k \\
&\leq C\epsilon \Big(\left\| \frac{\partial u^k}{\partial x_1} \right\|^2_{L_2(\Omega^k)} + \left\| \frac{\partial u^k}{\partial x_2} \right\|^2_{L_2(\Omega^k)} \Big) + C\frac{2}{\epsilon} \|u^k\|^2_{L_2(\Omega^k)} \\
&+ \frac{C' C_\beta (d-c)}{4} \Big(\epsilon \|u\|^2_{H^1} + \frac{1}{\epsilon} \|u\|^2_{L_2} \Big) \leq C^\star \epsilon \|u\|^2_{H^1} + C^{\star\star} \frac{2}{\epsilon} \|u\|^2_{L_2}.
\end{aligned}$$

Iz dobijenih nejednakosti sledi:

$$a(u,u) \geq C|u|^2_{H^1} - C^\star \epsilon \|u\|^2_{H^1} - C^{\star\star}\frac{2}{\epsilon}\|u\|^2_{L_2} - c_q \|u\|^2_{L_2}.$$

Odatle, za $C - C^\star \epsilon > 0$ dobijamo traženu Gårdingovu nejednakost.

Sada treba pokazati da je bilinearna forma a, pod dodatnim uslovima $\alpha^k > 0$,

$q^k(x) \geq c_k > 0$ i (4.9), koercivna. Ocenimo sledeći izraz:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta} = & \int_c^d \alpha^1(b_1, x_2)\,(u^1(b_1, x_2))^2\,dx_2 + \int_c^d \alpha^2(a_2, x_2)\,(u^2(a_2, x_2))^2\,dx_2 \\ & - \int_c^d \int_c^d (\beta^1(x_2, x_2') + \beta^2(x_2, x_2'))u^1(b_1, x_2)u^2(a_2, x_2')dx_2dx_2'. \end{aligned}$$

Koristeći nejednakost (4.9), dobijamo:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta} \geq & \frac{1}{d-c}\int_c^d \int_c^d \left(\alpha^1(b_1, x_2)\,(u^1(b_1, x_2))^2 + \alpha^2(a_2, x_2)\,(u^2(a_2, x_2))^2\right) dx_2dx_2' \\ & - \frac{2\sqrt{\alpha^1\alpha^2}}{d-c}\int_c^d \int_c^d \left|u^1(b_1, x_2)u^2(a_2, x_2')\right| dx_2dx_2' \\ = & \frac{1}{d-c}\int_c^d \int_c^d \left(\sqrt{\alpha^1(b_1, x_2)}\,\left|u^1(b_1, x_2)\right| - \sqrt{\alpha^2(a_2, x_2)}\,\left|u^2(a_2, x_2)\right|\right)^2 dx_2dx_2' \geq 0. \end{aligned}$$

Odatle dalje dobijamo

$$\begin{aligned} a(u, u) \geq & C_0\|u\|^2_{H^1} + \int_c^d \alpha^1(a_1, x_2)\,(u^1(a_1, x_2))^2\,dx_2 + \int_c^d \alpha^2(b_2, x_2)\,(u^2(b_2, x_2))^2\,dx_2 \\ & + \frac{1}{d-c}\int_c^d \int_c^d \left(\sqrt{\alpha^1(b_1, x_2)}\,\left|u^1(b_1, x_2)\right| - \sqrt{\alpha^2(a_2, x_2)}\,\left|u^2(a_2, x_2)\right|\right)^2 dx_2dx_2' \\ & + \sum_{k=1}^{2}\left(\int_{a_k}^{b_k} \alpha^k(x_1, c)\,(u^k(x_1, c))^2\,dx_1 + \int_{a_k}^{b_k} \alpha^k(x_1, d)\,(u^k(x_1, d))^2\,dx_1\right) \end{aligned}$$

odakle sledi:

$$a(u, u) \geq C_0\|u\|^2_{H^1}.$$

$\square$

Teorema 4.2. *Neka su zadovoljeni uslovi (4.6),(4.7),(4.9) i* $\alpha^k > 0$, $q^k \geq c_k > 0$ *i neka* $f \in L_2$. *Tada granični problem (4.1)-(4.5) ima jedinstveno rešenje* $u \in H^1(\Omega)$, *koje neprekidno zavisi od* f *(videti Teoreme 17.9 i 17.10 u [40]).*

Dokaz. S obzirom da su ispunjeni uslovi Lax-Milgramove leme, zaključujemo da granični problem (4.1)-(4.5) ima jedinstveno rešenje $u \in H^1(\Omega)$ koje neprekidno zavisi od f.

$$a(u, u) = (f, u)_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}\|u\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2}\|u\|_{H^1}$$

Koristeći prethodnu lemu, odnosno koercivnost bilinearne forme, dobijamo:

$$C_0\|u\|^2_{H^1} \leq \|f\|_{L_2}\|u\|_{H^1}, \text{ tj. } \|u\|_{H^1} \leq \frac{1}{C_0}\|f\|_{L_2}. \qquad \square$$

4.3 Aproksimacija metodom konačnih razlika

Neka je $\overline{\omega}_{h_k}$ uniformna mreža na intervalu $[a_k, b_k]$, sa korakom $h_k = h_{k1} = (b_k - a_k)/n_k$, $k = 1, 2$. Označimo sa $\omega_{h_k} := \overline{\omega}_{h_k} \cap (a_k, b_k)$ podmrežu mreže $\overline{\omega}_{h_k}$. Analogno, definišemo mrežu $\overline{\omega}_{h_3}$ na intervalu $[c, d]$, sa korakom $h_3 = h_{k2} = (d-c)/n_3$ $(k = 1, 2)$ i odgovarajućom podmrežom $\omega_{h_3} = \overline{\omega}_{h_3} \cap (c, d)$. Pretpostavimo da je $h_1 \asymp h_2 \asymp h_3 \asymp h = \max\{h_1,\, h_2,\, h_3\}$. Takođe, definišemo sledeće mreže: $\overline{\omega}^k = \overline{\omega}_{h_k} \times \overline{\omega}_{h_3}$, $\gamma^k = \bar{\omega}^k \cap \Gamma^k$, $\bar{\gamma}^k_{ij} = \bar{\omega}^k \cap \Gamma^k_{ij}$, $\gamma^k_{1j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{1j} \,:\, c < x_2 < d\}$, $\gamma^{k-}_{1j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{1j} \,:\, c \le x_2 < d\}$, $\gamma^{k+}_{1j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{1j} \,:\, c < x_2 \le d\}$, $\gamma^{k\star}_{1j} = \bar{\gamma}^k_{1j} \setminus \gamma^k_{1j}$, $\gamma^k_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{2j} \,:\, a_k < x_1 < b_k\}$, $\gamma^{k-}_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{2j} \,:\, a_k \le x_1 < b_k\}$, $\gamma^{k+}_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{2j} \,:\, a_k < x_1 \le b_k\}$, $\gamma^{k\star}_{2j} = \bar{\gamma}^k_{2j} \setminus \gamma^k_{2j}$, $\gamma^k_\star = \gamma^k \setminus \left\{\cup_{i,j}\gamma^k_{ij}\right\}$, $i, j, k = 1, 2$.

Razmatraćemo vektorske funkcije oblika $v = (v^1, v^2)$ gde je v^k funkcija definisana na mreži $\overline{\omega}^k$, $k = 1, 2$.
Operatore konačnih razlika definišemo na uobičajen način [37]:

$$v^k_{x_i} = \frac{(v^k)^{+i} - v^k}{h_{ki}}, \quad v^k_{\bar{x}_i} = \frac{v^k - (v^k)^{-i}}{h_{ki}},$$

gde je $(v^k)^{\pm i}(x) = v^k(x \pm h_{ki} e_i)$, e_i predstavlja jedinični vektor ose x_i, $i, k = 1, 2$.

Definišimo diskretne skalarne proizvode i norme:

$$[v^k, w^k]_k = h_k h_3 \sum_{x\in\omega^k} v^k(x) w^k(x) + \frac{h_k h_3}{2} \sum_{x\in\gamma^k\setminus\gamma^k_\star} v^k(x) w^k(x) + \frac{h_k h_3}{4} \sum_{x\in\gamma^k_\star} v^k(x) w^k(x),$$

$$[v^k, w^k)_{k,i} = h_k h_3 \sum_{x\in\omega^k\cup\gamma^k_{i1}} v^k(x) w^k(x) + \frac{h_k h_3}{2} \sum_{x\in\gamma^{k-}_{3-i,1}\cup\gamma^{k-}_{3-i,2}} v^k(x) w^k(x),$$

$$(v^k, w^k]_{k,i} = h_k h_3 \sum_{x\in\omega^k\cup\gamma^k_{i2}} v^k(x) w^k(x) + \frac{h_k h_3}{2} \sum_{x\in\gamma^{k+}_{3-i,1}\cup\gamma^{k+}_{3-i,2}} v^k(x) w^k(x),$$

$$|[v^k]|^2_k = [v^k, v^k]_k, \qquad |[v^k\|^2_{k,i} = [v^k, v^k)_{k,i}, \qquad \|v^k]|^2_{k,i} = (v^k, v^k]_{k,i},$$

$$[v^k, w^k)_k = h_k h_3 \sum_{x\in\omega^k\cup\gamma^{k-}_{11}\cup\gamma^{k-}_{21}} v^k(x) w^k(x), \qquad |[v^k\|^2_k = [v^k, v^k)_k,$$

$$(v^k, w^k]_k = h_k h_3 \sum_{x\in\omega^k\cup\gamma^{k+}_{12}\cup\gamma^{k+}_{22}} v^k(x) w^k(x), \qquad \|v^k]|^2_k = (v^k, v^k]_k,$$

$$|[v^k]|^2_{H^1(\bar{\omega}^k)} = |[v^k]|^2_k + |[v^k_{x_1}\|^2_{k,1} + |[v^k_{x_2}\|^2_{k,2}, \qquad |[v^k]|_{C(\bar{\omega}^k)} = \max_{x\in\bar{\omega}^k} |v^k(x)|,$$

$$[v^k, w^k]_{\bar{\gamma}^k_{ij}} = h_{k,3-i} \sum_{x\in\gamma^k_{ij}} v^k(x) w^k(x) + \frac{h_{k,3-i}}{2} \sum_{x\in\gamma^{k\star}_{ij}} v^k(x) w^k(x), \quad |[v^k]|^2_{\bar{\gamma}^k_{ij}} = [v^k, v^k]_{\bar{\gamma}^k_{ij}},$$

$$(v^k, w^k)_{\gamma^k_{ij}} = h_{k,3-i} \sum_{x\in\gamma^k_{ij}} v^k(x) w^k(x), \quad \|v^k\|^2_{\gamma^k_{ij}} = (v^k, v^k)_{\gamma^k_{ij}},$$

$$[v^k, w^k)_{\gamma^{k-}_{ij}} = h_{k,3-i} \sum_{x\in\gamma^{k-}_{ij}} v^k(x) w^k(x), \qquad |[v^k\|^2_{\gamma^{k-}_{ij}} = [v^k, v^k)_{\gamma^{k-}_{ij}},$$

$$|v^k|^2_{H^{1/2}(\gamma^{k-}_{ij})} = h^2_{k,3-i} \sum_{x,\,x'\in\gamma^{k-}_{ij},\ x'\neq x} \left[\frac{v^k(x) - v^k(x')}{x_{3-i} - x'_{3-i}} \right]^2,$$

$$|[v^k\|^2_{H^{1/2}(\gamma^{k-}_{ij})} = |v^k|^2_{H^{1/2}(\gamma^{k-}_{ij})} + |[v^k\|^2_{\gamma^{k-}_{ij}},$$

$$|[v^k\|^2_{\tilde{H}^{1/2}(\gamma^{k-}_{ij})} = |v^k|^2_{H^{1/2}(\gamma^{k-}_{ij})} + h_{k,3-i} \sum_{x\in\gamma^{k-}_{ij}} \left(\frac{1}{x_{3-i} + \frac{h_{k,3-i}}{2}} + \frac{1}{l_{ki} - x_{3-i} - \frac{h_{k,3-i}}{2}} \right) |v^k(x)|^2,$$

gde je $l_{k1} = d - c$ i $l_{k2} = b_k - a_k$.

Za $v = (v^1, v^2)$ i $w = (w^1, w^2)$ označimo

$$[v, w] = [v^1, w^1]_1 + [v^2, w^2]_2, \quad |[v]|^2 = [v, v], \quad |[v]|^2_{H^1_h} = |[v^1]|^2_{H^1(\bar{\omega}^1)} + |[v^2]|^2_{H^1(\bar{\omega}^2)}.$$

Takođe, definišemo Steklovljeve operatore usrednjenja [15]:

$$T^+_{ki} f^k(x) = \int_0^1 f^k(x + h_{ki} x'_i e_i)\, \mathrm{d}x'_i = T^-_{ki} f^k(x + h_{ki} e_i) = T_{ki} f^k(x + 0.5 h_{ki} e_i),$$
$$T^{2\pm}_{ki} f^k(x) = 2 \int_0^1 (1 - x'_i) f^k(x \pm h_{ki} x'_i e_i)\, \mathrm{d}x'_i, \qquad k, i = 1, 2.$$

Ovi operatori komutiraju i transformišu izvode u konačne razlike, na primer:

$$T^+_{ki} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) = u^k_{x_i}, \quad T^-_{ki} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) = u^k_{\bar{x}_i}, \quad T^2_{ki} \left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_i^2} \right) = u^k_{\bar{x}_i x_i}.$$

U nastavku ćemo pretpostaviti da generalisano rešenje problema (4.1)-(4.5) pripada prostoru Soboljeva H^s, $2 < s \leq 3$, dok ulazni podaci zadovoljavaju sledeće uslove glatkosti:

$$\begin{gathered} p^k_{ij} \in H^{s-1}(\Omega^k), \quad \alpha^k \in H^{s-3/2}(\Gamma^k_{ij}), \quad \alpha^k \in C(\Gamma^k), \quad \beta^k \in H^{s-1}(\Delta^k), \\ f^k \in H^{s-2}(\Omega^k), \quad q^k \in H^{s-2}(\Omega^k) \quad k, i, j = 1, 2. \end{gathered} \tag{4.10}$$

Uvedimo oznake:

$$\tilde{f}^k = \begin{cases} T_{k1}^2 T_{k2}^2 f^k, & x \in \omega^k \\ T_{ki}^{2\pm} T_{k,3-i}^2 f^k, & x \in \gamma_{i1}^k \,/\, x \in \gamma_{i2}^k \\ T_{k1}^{2\pm} T_{k2}^{2\pm} f^k, & x \in \gamma_\star^k \end{cases}$$

$$\tilde{q}^k = \begin{cases} T_{k1}^2 T_{k2}^2 q^k, & x \in \omega^k \\ T_{ki}^{2\pm} T_{k,3-i}^2 q^k, & x \in \gamma_{i1}^k \,/\, x \in \gamma_{i2}^k \\ T_{k1}^{2\pm} T_{k2}^{2\pm} q^k, & x \in \gamma_\star^k \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}^k = T_{k,3-i}^2 \alpha^k\,, \qquad x \in \gamma_{i1}^k \cup \gamma_{i2}^k\,, \qquad i = 1,\, 2\,,$$

$$\tilde{\alpha}_i^k = T_{k,3-i}^{2\pm} \alpha^k\,, \qquad x \in \gamma_\star^k, \qquad i = 1,\, 2$$

i

$$\tilde{\beta}^k = \begin{cases} T_{k2}^2 \beta^k, & x \in \gamma_{1,3-k}^k, \\ T_{k2}^{2\pm} \beta^k, & x \in \gamma_{1,3-k}^{k\star}. \end{cases}$$

Bilinearnu formu :

$$a(u,v) = \sum_{k=1}^{2} \Bigg(\iint_{\Omega^k} \Big(\sum_{i,j=1}^{2} p_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j} \frac{\partial v^k}{\partial x_i} + q^k u^k v^k \Big) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 + \int_{\Gamma^k} \alpha^k u^k v^k \,\mathrm{d}\Gamma^k$$
$$- \int_{\Gamma_{1,3-i}^k} \int_{\Gamma_{1,i}^{3-k}} \beta^k\, u^{3-k}\, v^k \,\mathrm{d}\Gamma^{3-k} \,\mathrm{d}\Gamma^k \Bigg)$$

aproksimirajmo diskretnom bilinearnom formom

$$a_h(u,v) = [L_h u,\, v] = \sum_{k=1}^{2} \Bigg\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \Big[[p_{ii}^k u_{x_i}^k,\, v_{x_i}^k)_{k,i} + (p_{ii}^k u_{\bar{x}_i}^k,\, v_{\bar{x}_i}^k]_{k,i}$$
$$+ [p_{i,3-i}^k u_{x_{3-i}}^k,\, v_{x_i}^k)_k + (p_{i,3-i}^k u_{\bar{x}_{3-i}}^k,\, v_{\bar{x}_i}^k]_k \Big] + [\tilde{q}^k u^k, v^k]_k + \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{x \in \gamma_{ij}^k} h_{k,3-i} \tilde{\alpha}^k\, u^k v^k$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_\star^k} (h_{k2} \tilde{\alpha}_1^k + h_{k1} \tilde{\alpha}_2^k)\, u^k v^k - h_{k2}^2 \sum_{x \in \gamma_{1,3-k}^k} \sum_{x' \in \gamma_{1,k}^{3-k}} \tilde{\beta}^k(x,x') u^{3-k}(x') v^k(x)$$
$$- \frac{h_{k2}^2}{2} \sum_{x \in \gamma_{1,3-k}^{k\star}} \sum_{x' \in \gamma_{1,k}^{(3-k)\star}} \tilde{\beta}^k(x,x') u^{3-k}(x') v^k(x) \Bigg\}. \tag{4.11}$$

Kako je $(Lu,v)_{L_2} = a(u,v) \sim a_h(u,v) = [L_h u, v]$, vršeći parcijalnu sumaciju u formuli (4.11), zaključujemo da se granični problem (4.1)-(4.5) može aproksimirati na sledeći način:

$$L_h^k v = \tilde{f}^k, \qquad x \in \bar{\omega}^k, \qquad k = 1,2 \tag{4.12}$$

gde je $L_h^1 v$

$$L_h^1 v = \begin{cases} -\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{2} \Big[\big(p_{ij}^1 \, v_{x_j}^1 \big)_{\bar{x}_i} + \big(p_{ij}^1 \, v_{\bar{x}_j}^1 \big)_{x_i} \Big] + \tilde{q}^1 v^1, & x \in \omega^1 \\ \frac{2}{h_1} \Big[- \frac{p_{11}^1 + (p_{11}^1)^{+1}}{2} \, v_{x_1}^1 - p_{12}^1 \, \frac{v_{x_2}^1 + v_{\bar{x}_2}^1}{2} + \tilde{\alpha}^1 v^1 \Big] - \big(p_{12}^1 \, v_{\bar{x}_2}^1 \big)_{x_1} & \\ \quad - \big(p_{21}^1 \, v_{x_1}^1 \big)_{\bar{x}_2} - \frac{1}{2} \big(p_{22}^1 \, v_{x_2}^1 \big)_{\bar{x}_2} - \frac{1}{2} \big(p_{22}^1 \, v_{\bar{x}_2}^1 \big)_{x_2} + \tilde{q}^1 v^1, & x \in \gamma_{11}^1 \\ \frac{2}{h_1} \Big[- \frac{p_{11}^1 + (p_{11}^1)^{+1}}{2} \, v_{x_1}^1 - p_{12}^1 v_{x_2}^1 + \tilde{\alpha}_1^1 v^1 \Big] & \\ \quad + \frac{2}{h_3} \Big[- p_{21}^1 v_{x_1}^1 - \frac{p_{22}^1 + (p_{22}^1)^{+2}}{2} \, v_{x_2}^1 + \tilde{\alpha}_2^1 v^1 \Big] + \tilde{q}^1 v^1, & x = (a_1, c) \\ \frac{2}{h_1} \Big[- \frac{p_{11}^1 + (p_{11}^1)^{+1}}{2} \, v_{x_1}^1 - p_{12}^1 v_{\bar{x}_2}^1 + \tilde{\alpha}_1^1 v^1 \Big] - 2 \big(p_{12}^1 \, v_{\bar{x}_2}^1 \big)_{x_1} & \\ \quad + \frac{2}{h_3} \Big[p_{21}^1 v_{x_1} + \frac{p_{22}^1 + (p_{22}^1)^{-2}}{2} \, v_{\bar{x}_2}^1 + \tilde{\alpha}_2^1 v^1 \Big] - 2 \big(p_{21}^1 \, v_{x_1}^1 \big)_{\bar{x}_2} + \tilde{q}^1 v^1, & x = (a_1, d) \\ \frac{2}{h_1} \Big[\frac{p_{11}^1 + (p_{11}^1)^{-1}}{2} \, v_{\bar{x}_1}^1 + p_{12}^1 \, \frac{v_{x_2}^1 + v_{\bar{x}_2}^1}{2} + \tilde{\alpha}^1 v^1 & \\ \quad - [\tilde{\beta}^1(x,\cdot), v^2(\cdot)]_{\bar{\gamma}_{11}^2} \Big] - \big(p_{12}^1 \, v_{x_2}^1 \big)_{\bar{x}_1} & \\ \quad - \big(p_{21}^1 \, v_{\bar{x}_1}^1 \big)_{x_2} - \frac{1}{2} \big(p_{22}^1 \, v_{x_2}^1 \big)_{\bar{x}_2} - \frac{1}{2} \big(p_{22}^1 \, v_{\bar{x}_2}^1 \big)_{x_2} + \tilde{q}^1 v^1, & x \in \gamma_{12}^1 \\ \frac{2}{h_1} \Big[\frac{p_{11}^1 + (p_{11}^1)^{-1}}{2} \, v_{\bar{x}_1}^1 + p_{12}^1 v_{x_2}^1 + \tilde{\alpha}_1^1 v^1 - [\tilde{\beta}^1(x,\cdot), v^2(\cdot)]_{\bar{\gamma}_{11}^2} \Big] & \\ \quad + \frac{2}{h_3} \Big[- p_{21}^1 v_{\bar{x}_1} - \frac{p_{22}^1 + (p_{22}^1)^{+2}}{2} \, v_{x_2}^1 + \tilde{\alpha}_2^1 v^1 \Big] & \\ \quad -2 \big(p_{12}^1 \, v_{x_2}^1 \big)_{\bar{x}_1} - 2 \big(p_{21}^1 \, v_{\bar{x}_1}^1 \big)_{x_2} + \tilde{q}^1 v^1, & x = (b_1, c) \\ \frac{2}{h_1} \Big[\frac{p_{11}^1 + (p_{11}^1)^{-1}}{2} \, v_{\bar{x}_1}^1 + p_{12}^1 v_{\bar{x}_2}^1 + \tilde{\alpha}_1^1 v^1 - [\tilde{\beta}^1(x,\cdot), v^2(\cdot)]_{\bar{\gamma}_{11}^2} \Big] & \\ \quad + \frac{2}{h_3} \Big[p_{21}^1 v_{\bar{x}_1}^1 + \frac{p_{22}^1 + (p_{22}^1)^{-2}}{2} \, v_{\bar{x}_2}^1 + \tilde{\alpha}_2^1 v^1 \Big] + \tilde{q}^1 v^1, & x = (b_1, d) \\ \frac{2}{h_3} \Big[- \frac{p_{22}^1 + (p_{22}^1)^{+2}}{2} \, v_{x_2}^1 - p_{21}^1 \frac{v_{x_1}^1 + v_{\bar{x}_1}^1}{2} + \tilde{\alpha}^1 v^1 \Big] - \big(p_{21}^1 \, v_{\bar{x}_1}^1 \big)_{x_2} & \\ \quad - \big(p_{12}^1 \, v_{x_2}^1 \big)_{\bar{x}_1} - \frac{1}{2} \big(p_{11}^1 \, v_{x_1}^1 \big)_{\bar{x}_1} - \frac{1}{2} \big(p_{11}^1 \, v_{\bar{x}_1}^1 \big)_{x_1} + \tilde{q}^1 v^1, & x \in \gamma_{21}^1 \\ \frac{2}{h_3} \Big[\frac{p_{22}^1 + (p_{22}^1)^{-2}}{2} \, v_{\bar{x}_2}^1 + p_{21}^1 \frac{v_{x_1}^1 + v_{\bar{x}_1}^1}{2} + \tilde{\alpha}^1 v^1 \Big] - \big(p_{21}^1 \, v_{x_1}^1 \big)_{\bar{x}_2} & \\ \quad - \big(p_{12}^1 \, v_{\bar{x}_2}^1 \big)_{x_1} - \frac{1}{2} \big(p_{11}^1 \, v_{x_1}^1 \big)_{\bar{x}_1} - \frac{1}{2} \big(p_{11}^1 \, v_{\bar{x}_1}^1 \big)_{x_1} + \tilde{q}^1 v^1, & x \in \gamma_{22}^1 \end{cases}$$

$L_h^2 v$ se definiše analogno.

Shema određena jednačinom (4.12) može biti predstavljena kao operatorska diferencijska shema na sledeći način:

$$L_h v = \tilde{f} \tag{4.13}$$

gde je $v = (v^1, v^2)$, $\tilde{f} = (\tilde{f}^1, \tilde{f}^2)$ i $L_h v = (L_h^1 v, L_h^2 v)$.
Važi sledeći analogon Leme 4.1.

Lema 4.3. *Ako su zadovoljeni uslovi (4.10), bilinearna forma a_h, definisina sa (4.12) je ograničena na $H_h^1 \times H_h^1$. Ako su pri tome zadovoljeni uslovi (4.7), ova forma zadovoljava Gårdingovu nejednakost na H_h^1, odnosno postoje pozitivne konstante $\tilde{m}$ i $\tilde{\kappa}$ tako da važi*

$$a_h(v,v) + \tilde{\kappa}\|v\|_{L_2}^2 \geq \tilde{m}\|v\|_{H_h^1}^2, \quad \forall\, v \in H^1.$$

Lema 4.4. *Neka koeficijenti p_{ij}^k, $\alpha^k > 0$ i β^k zadovoljavaju uslove (4.10), $q^k \geq 0$ i neka su uslovi (4.9) zadovoljeni. Tada, za dovoljno mali korak mreže h, postoje pozitivne konstante c_2 i c_3 tako da važi sledeća nejednakost:*

$$c_2|[v]|_{H_h^1}^2 \leq a_h(v,v) = [L_h v, v] \leq c_3|[v]|_{H_h^1}^2.$$

Dokaz. Pokažimo da važi $a_h(v,v) = [L_h v, v] \leq c_3|[v]|_{H_h^1}^2$. Važi sledeća jednakost:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\Big[&[p_{ii}^k v_{x_i}^k,\, v_{x_i}^k)_{k,i} + (p_{ii}^k v_{\bar{x}_i}^k,\, v_{\bar{x}_i}^k]_{k,i} + [p_{i,3-i}^k v_{x_{3-i}}^k,\, v_{x_i}^k)_k + (p_{i,3-i}^k v_{\bar{x}_{3-i}}^k,\, v_{\bar{x}_i}^k]_k\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{2}\Big\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Big[[p_{ij}^k v_{x_j}^k,\, v_{x_i}^k)_k + (p_{ij}^k v_{\bar{x}_j}^k,\, v_{\bar{x}_i}^k]_k\Big] \\ &\quad + \frac{h_{k,3-i}}{4}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}[(p_{ii}^k)^{+i} - p_{ii}^k, v_{x_i}^k)_{\gamma_{3-i,k}^{k-}}\Big\}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Odatle dobijamo,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{2}\Big\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Big[[p_{ij}^k v_{x_j}^k,\, v_{x_i}^k)_k + (p_{ij}^k v_{\bar{x}_j}^k,\, v_{\bar{x}_i}^k]_k\Big] \\ &\quad + \frac{h_{k,3-i}}{4}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}[(p_{ii}^k)^{+i} - p_{ii}^k, v_{x_i}^k)_{\gamma_{3-i,k}^{k-}}\Big\} \\ &\leq C_1\sum_{k=1}^{2}\Big\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Big[[v_{x_j}^k,\, v_{x_i}^k)_k + (v_{\bar{x}_j}^k,\, v_{\bar{x}_i}^k]_k\Big] + \frac{h_{k_{3-i}}}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}[1,\, (v_{x_i}^k)^2)_{\gamma_{3-i,j}^{k-}}\Big\} \\ &\leq C_1\sum_{k=1}^{2}\big(|[v_{x_1}^k\|_{k,1}^2 + |[v_{x_2}^k\|_{k,2}^2\big).\end{aligned}$$

Dalje je,

$$[\tilde{q}^k v^k, v^k]_k \leq C_q[v^k, v^k]_k = C_q|[v^k]|_k^2.$$

Sada treba oceniti sabirke:

$$\Big|\sum_{k=1}^{2}\Big\{\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_{ij}^k} h_{k,3-i}\tilde{\alpha}^k\, v^k v^k + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_\star^k}(h_{k2}\tilde{\alpha}_1^k + h_{k1}\tilde{\alpha}_2^k)\, v^k v^k$$

$$-h_{k2}^2 \sum_{x\in\gamma_{1,3-k}^k}\ \sum_{x'\in\gamma_{1,k}^{3-k}} \beta^k(x,x')v^{3-k}(x')v^k(x)$$

$$-\frac{h_{k2}^2}{2}\sum_{x\in\gamma_{1,3-k}^{k\star}}\ \sum_{x'\in\gamma_{1,k}^{(3-k)\star}} \beta^k(x,x')v^{3-k}(x')v^k(x)\Big\}\Big|$$

$$\leq C_{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{2}\Big\{\sum_{i,j=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_{ij}^k} h_{k,3-i}(v^k)^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_\star^k}(h_{k2}+h_{k1})(v^k)^2$$

$$+h_{k2}^2\sum_{x\in\gamma_{1,3-k}^k}\ \sum_{x'\in\gamma_{1,k}^{3-k}}\big|v^{3-k}(x')v^k(x)\big| + \frac{h_{k2}^2}{2}\sum_{x\in\gamma_{1,3-k}^{k\star}}\ \sum_{x'\in\gamma_{1,k}^{(3-k)\star}}\big|v^{3-k}(x')v^k(x)\big|\Big\}.$$

Posmatrajmo granicu γ_{11}^k

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_{11}^k} h_{k2}(v^k)^2 = \sum_{k=1}^{2} h_{k2}\sum_{j=1}^{n_3-1}(v_{0j}^k)^2 = \sum_{k=1}^{2} h_{k2}\sum_{j=1}^{n_3-1}\Big(-h_{k1}\sum_{l=1}^{i}\frac{v_{lj}^k - v_{l-1,j}^k}{h_{k1}} + v_{ij}^k\Big)^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^{2}\Big\{h_{k2}\sum_{j=1}^{n_3-1}2\Big(h_{k1}\sum_{l=1}^{i} v_{\bar{x}_{1,lj}}^k\Big)^2 + h_{k2}\sum_{j=1}^{n_3-1}2(v_{ij}^k)^2\Big\}.$$

Primenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-a dobijamo:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_{11}^k} h_{k2}(v^k)^2 \leq \sum_{k=1}^{2}\Big\{h_{k2}\sum_{j=1}^{n_3-1}2h_{k1}ih_{k1}\sum_{l=1}^{i}(v_{\bar{x}_{1,lj}}^k)^2 + h_{k2}\sum_{j=1}^{n_3-1}2(v_{ij}^k)^2\Big\}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{2}\Big\{2h_{k2}h_{k1}(b_k-a_k)\sum_{j=1}^{n_3-1}\sum_{l=1}^{n_k}(v_{\bar{x}_{1,lj}}^k)^2 + h_{k2}\sum_{j=1}^{n_3-1}2(v_{ij}^k)^2\Big\}.$$

Pomnožimo poslednju nejednakost sa h_{k1} i prosumirajmo za $i = 1, ..., n_k$.

$$\sum_{k=1}^{2} h_{k1}h_{k2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_3-1}(v_{0j}^k)^2 \leq \sum_{k=1}^{2}\Big\{2h_{k2}h_{k1}(b_k-a_k)h_{k1}\sum_{l=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_3-1}\sum_{i=1}^{n_k}(v_{\bar{x}_{1,lj}}^k)^2$$

$$+h_{k1}h_{k2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_3-1}2(v_{ij}^k)^2\Big\}$$

Odatle dobijamo

$$\sum_{k=1}^{2} h_{k2}\sum_{j=1}^{n_3-1}(v_{0j}^k)^2 \leq \sum_{k=1}^{2}\Big\{2(b_k-a_k)h_{k1}h_{k2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_3-1}(v_{\bar{x}_{1,ij}}^k)^2 + \frac{2h_{k1}h_{k2}}{b_k-a_k}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_3-1}(v_{ij}^k)^2\Big\}$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \left\{ 2(b_k - a_k) h_{k1} h_{k2} \sum_{i=0}^{n_k-1} \sum_{j=1}^{n_3-1} (v^k_{x_{1,ij}})^2 + \frac{2h_{k1}h_{k2}}{b_k - a_k} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_3-1} (v^k_{ij})^2 \right\}.$$

Analogne nejednakosti važe za ostale delove granice i za temena posmatranih oblasti. Ocenimo preostali izraz:

$$\sum_{k=1}^{2} \left\{ h_{k2}^2 \sum_{x \in \gamma^k_{1,3-k}} \sum_{x' \in \gamma^{3-k}_{1,k}} v^{3-k}(x') v^k(x) + \frac{h_{k2}^2}{2} \sum_{x \in \gamma^{k\star}_{1,3-k}} \sum_{x' \in \gamma^{(3-k)\star}_{1,k}} v^{3-k}(x') v^k(x) \right\}$$

$$\le \sum_{k=1}^{2} \left\{ h_{k2} \Big(\sum_{x \in \gamma^k_{1,3-k}} \sum_{x' \in \gamma^{3-k}_{1,k}} (v^{3-k}(x'))^2 \Big)^{1/2} h_{k2} \Big(\sum_{x \in \gamma^k_{1,3-k}} \sum_{x' \in \gamma^{3-k}_{1,k}} (v^k(x))^2 \Big)^{1/2} \right.$$

$$\left. + \frac{h_{k2}}{2} \Big(\sum_{x \in \gamma^{k\star}_{1,3-k}} \sum_{x' \in \gamma^{(3-k)\star}_{1,k}} (v^{3-k}(x'))^2 \Big)^{1/2} h_{k2} \Big(\sum_{x \in \gamma^{k\star}_{1,3-k}} \sum_{x' \in \gamma^{(3-k)\star}_{1,k}} (v^k(x))^2 \Big)^{1/2} \right\}$$

$$\le \sum_{k=1}^{2} \left\{ \Big(\frac{h_{k2}}{2} \sum_{x' \in \gamma^{3-k}_{1,k}} (v^{3-k}(x'))^2 + \frac{h_{k2}}{2} \sum_{x \in \gamma^k_{1,3-k}} (v^k(x))^2 \Big) \right.$$

$$\left. + \frac{h_{k2}}{2} \sum_{x' \in \gamma^{(3-k)\star}_{1,k}} (v^{3-k}(x'))^2 + \frac{h_{k2}}{2} \sum_{x \in \gamma^{k\star}_{1,3-k}} (v^k(x))^2 \right\}.$$

Kao što vidimo, i on se ocenjuje preko diskretnih L_2 normi po delovima granica oblasti. Sumiranjem svih nejednakosti na kraju dobijamo:

$$a_h(v,v) = [L_h v, v] \le c_3 \big(|[v^k_{x_1}\|^2_{k,1} + |[v^k_{x_2}\|^2_{k,2} + |[v^k]|^2_k \big) = c_3 |[v]|^2_{H^1_h}.$$

Pokažimo da važi obrnuta nejednakost $c_2 |[v]|^2_{H^1_h} \le a_h(v,v) = [L_h v, v]$.

Koristeći jednakost (4.14) dobijamo sledeću ocenu:

$$[L_h v, v] \ge \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^{2} \big(|[v^k_{x_i}\|^2_k + \|v^k_{\bar{x}_i}]|^2_k \big) - C_0^\star h_{k_{3-i}} \sum_{i=1}^{2} |[v^k_{x_i}\|^2_{k,i} \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{x \in \gamma^k_{ij}} h_{k,3-i} \tilde{\alpha}^k v^k v^k + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma^k_\star} (h_{k2} \tilde{\alpha}^k_1 + h_{k1} \tilde{\alpha}^k_2)\, v^k v^k$$

$$- h_{k2}^2 \sum_{x \in \gamma^k_{1,3-k}} \sum_{x' \in \gamma^{3-k}_{1,k}} \beta^k(x,x') v^{3-k}(x') v^k(x)$$

$$\left. - \frac{h_{k2}^2}{2} \sum_{x \in \gamma^{k\star}_{1,3-k}} \sum_{x' \in \gamma^{(3-k)\star}_{1,k}} \beta^k(x,x') v^{3-k}(x') v^k(x) \right\}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{2}(C_0 - C_0^\star h_{k_{3-k}}) \sum_{i=1}^{2} |[v_{x_i}^k\|_{k,i}^2 + \sum_{i,j=1}^{2} \sum_{x\in\gamma_{ij}^k} h_{k,3-i}\tilde{\alpha}^k\,(v^k)^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_\star^k}(h_{k2}\tilde{\alpha}_1^k + h_{k1}\tilde{\alpha}_2^k)\,(v^k)^2 - h_{k2}^2 \sum_{x\in\gamma_{1,3-k}^k} \sum_{x'\in\gamma_{1,k}^{3-k}} \beta^k(x,x')v^{3-k}(x')v^k(x)$$

$$-\frac{h_{k2}^2}{2} \sum_{x\in\gamma_{1,3-k}^{k\star}} \sum_{x'\in\gamma_{1,k}^{(3-k)\star}} \beta^k(x,x')v^{3-k}(x')v^k(x)\Bigg\}.$$

Koristeći uslove (4.9) ocenimo sledeći izraz :

$$\sum_{k=1}^{2}\Bigg\{\sum_{x\in\gamma_{12}^1} h_3\tilde{\alpha}^1\,(v^1)^2 + \sum_{x\in\gamma_{11}^2} h_3\tilde{\alpha}^2\,(v^2)^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_{12}^{1\star}} h_3\tilde{\alpha}_1^1\,(v^1)^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_{11}^{2\star}} h_3\tilde{\alpha}_1^2\,(v^2)^2 - h_3^2 \sum_{x\in\gamma_{1,3-k}^k} \sum_{x'\in\gamma_{1,k}^{3-k}} \beta^k(x,x')v^{3-k}(x')v^k(x)$$

$$-\frac{h_3^2}{2} \sum_{x\in\gamma_{1,3-k}^{k\star}} \sum_{x'\in\gamma_{1,k}^{(3-k)\star}} \beta^k(x,x')v^{3-k}(x')v^k(x)\Bigg\}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n_3-1}\sum_{j=1}^{n_3-1} h_3\Big(\big(\sqrt{\tilde{\alpha}^1}v^1\big)_{n_1 j} - \big(\sqrt{\tilde{\alpha}^2}v^2\big)_{0j}\Big)^2$$

$$+\frac{1}{2}h_3\left(\left(\sqrt{\tilde{\alpha}_1^1}v^1\right)_{n_1 0} - \left(\sqrt{\tilde{\alpha}_1^2}v^2\right)_{00}\right)^2 \geq 0.$$

Dalje je,

$$[\tilde{q}^k v^k, v^k]_k \geq \tilde{C}_q[v^k, v^k]_k = \tilde{C}_q|[v^k]|_k^2.$$

Na osnovu dobijenih nejednakosti, sledi:

$$[L_h v, v] \geq \sum_{k=1}^{2}\frac{C_0}{2}\sum_{i=1}^{2}|[v_{x_i}^k\|_{k,i}^2 + \tilde{C}_q|[v^k]|_k^2 + \sum_{i,j=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_{ij}^k\setminus\{\gamma_{12}^1,\gamma_{11}^2\}} h_{k,3-i}\tilde{\alpha}^k\,(v^k)^2$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_\star^k\setminus\{\gamma_{12}^{1\star},\gamma_{11}^{2\star}\}}(h_{k2}\tilde{\alpha}_1^k + h_{k1}\tilde{\alpha}_2^k)\,(v^k)^2 + \sum_{j=1}^{n_3-1}\sum_{j=1}^{n_3-1} h_3\Big(\big(\sqrt{\tilde{\alpha}^1}v^1\big)_{n_1 j} - \big(\sqrt{\tilde{\alpha}^2}v^2\big)_{0j}\Big)^2$$

$$+\frac{1}{2}h_3\left(\left(\sqrt{\tilde{\alpha}_1^1}v^1\right)_{n_1 0} - \left(\sqrt{\tilde{\alpha}_1^2}v^2\right)_{00}\right)^2 \geq 0, \quad h_{k_{3-k}} \leq h_0 = \frac{C_0}{2C_0^\star}.$$

Dakle,

$$[L_h v, v] \geq c_2|[v]|_{H_h^1}^2, \quad c_2 = \max\left\{\frac{C_0}{2}, \tilde{C}_q\right\}.$$

□

4.4 Analiza greške diferencijske sheme

Neka je $u = (u^1, u^2)$ rešenje graničnog problema (4.1)-(4.5), i neka je $v = (v^1, v^2)$ rešenje diferencijske sheme (4.13). Greška $z = (z^1, z^2) = u - v$ zadovoljava sledeće uslove:

$$L_h^k z = \psi^k, \qquad x \in \bar{\omega}^k, \tag{4.15}$$

pri čemu je :

$$\psi^1 = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \eta^1_{ij,\bar{x}_i} + \mu^1, & x \in \omega^1, \\ \frac{2}{h_1}\eta^1_{11} + \frac{2}{h_1}\eta^1_{12} + \tilde{\eta}^1_{21,\bar{x}_2} + \tilde{\eta}^1_{22,\bar{x}_2} + \frac{2}{h_1}\zeta^1 + \tilde{\mu}^1, & x \in \gamma^1_{11}, \\ \frac{2}{h_1}\left(\tilde{\eta}^1_{11} + \tilde{\eta}^1_{12} + \zeta^1_1 + \zeta^1_2\right) + \frac{2}{h_3}\left(\tilde{\eta}^1_{21} + \tilde{\eta}^1_{22} + \zeta^1_2\right) + \tilde{\tilde{\mu}}^1, & x = (a_1, c), \\ -\frac{2}{h_1}(\eta^1_{11})^{-1} - \frac{2}{h_1}(\eta^1_{12})^{-1} + \tilde{\eta}^1_{21,\bar{x}_2} + \tilde{\eta}^1_{22,\bar{x}_2} + \frac{2}{h_1}\zeta^1 + \frac{2}{h_1}\chi^1 + \tilde{\mu}^1, & x \in \gamma^1_{12}, \\ \frac{2}{h_1}\left[-(\tilde{\eta}^1_{11})^{-1} - (\tilde{\eta}^1_{12})^{-1} + \zeta^1_1 + \chi^1\right] + \frac{2}{h_3}\left(\tilde{\eta}^1_{21} + \tilde{\eta}^1_{22} + \zeta^1_2\right) + \tilde{\tilde{\mu}}^1, & x = (b_1, c), \\ \frac{2}{h_3}\eta^1_{21} + \frac{2}{h_3}\eta^1_{22} + \tilde{\eta}^1_{11,\bar{x}_1} + \tilde{\eta}^1_{12,\bar{x}_1} + \frac{2}{h_3}\zeta^1 + \tilde{\mu}^1, & x \in \gamma^1_{21}, \\ \frac{2}{h_1}\left[\tilde{\eta}^1_{11} + \tilde{\eta}^1_{12} + \zeta^1_1\right] + \frac{2}{h_3}\left(-(\tilde{\eta}^1_{21})^{-1} - (\tilde{\eta}^1_{22})^{-1} + \zeta^1_2\right) + \tilde{\tilde{\mu}}^1, & x = (a_1, d), \\ \frac{2}{h_3}\left[-(\eta^1_{21})^{-1} - (\eta^1_{22})^{-1} + \zeta^1\right] + \tilde{\eta}^1_{11,\bar{x}_1} + \tilde{\eta}^1_{12,\bar{x}_1} + \tilde{\mu}^1, & x \in \gamma^1_{22}, \\ \frac{2}{h_1}\left[-(\tilde{\eta}^1_{11})^{-1} - (\tilde{\eta}^1_{12})^{-1} + \zeta^1_1 + \chi^1\right] & \\ +\frac{2}{h_3}\left[-(\tilde{\eta}^1_{21})^{-1} - (\tilde{\eta}^1_{22})^{-1} + \zeta^1_2\right] + \tilde{\tilde{\mu}}^1, & x = (b_1, d), \end{cases}$$

ψ^2 određujemo na isti način,

$$\eta^k_{ij} = T^+_{ki} T^2_{k,3-i}\left(p^k_{ij}\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\left[p^k_{ij} u_{x_j} + (p^k_{ij})^{+i}(u^k_{\bar{x}_j})^{+i}\right], \qquad x \in \omega^k,$$

$$\tilde{\eta}^k_{ii} = T^+_{ki} T^{2\pm}_{k,3-i}\left(p^k_{ii}\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) - \frac{p^k_{ii} + (p^k_{ii})^{+i}}{2} u^k_{x_i}, \qquad x \in \gamma^{k-}_{3-i,1} \ / \ x \in \gamma^{k-}_{3-i,2},$$

$$\tilde{\eta}^k_{i,3-i} = \begin{cases} T^+_{ki} T^{2+}_{k,3-i}\left(p^k_{i,3-i}\dfrac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) - p^k_{i,3-i}\, u^k_{x_{3-i}}, & x \in \gamma^{k-}_{3-i,1}, \\ T^+_{ki} T^{2-}_{k,3-i}\left(p^k_{i,3-i}\dfrac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) - (p^k_{i,3-i})^{+i}\,(u^k_{\bar{x}_{3-i}})^{+i}, & x \in \gamma^{k-}_{3-i,2}, \end{cases}$$

$$\zeta^k = (T^2_{ki}\alpha^k)u^k - T^2_{ki}(\alpha^k u^k), \qquad x \in \gamma^k_{3-i,1} \cup \gamma^k_{3-i,2},$$

$$\zeta^k_i = (T^{2\pm}_{ki}\alpha^k)u^k - T^{2\pm}_{ki}(\alpha^k u^k), \qquad x \in \gamma^k_\star,$$

$$\mu^k = (T_{ki}^2 T_{k,3-i}^2 q^k)u^k - T_{ki}^2 T_{k,3-i}^2 (q^k u^k), \qquad x \in \omega^k,$$

$$\tilde{\mu}^k = (T_{k,3-i}^{2\pm} T_{ki}^2 q^k)u^k - T_{k,3-i}^{2\pm} T_{ki}^2 (q^k u^k), \qquad x \in \gamma_{3-i,1}^{k-} \ / \ x \in \gamma_{3-i,2}^{k-},$$

$$\tilde{\tilde{\mu}}^k = (T_{k,3-i}^{2\pm} T_{ki}^{2\pm} q^k)u^k - T_{k,3-i}^{2\pm} T_{ki}^{2\pm} (q^k u^k), \qquad x \in \gamma_\star^k,$$

$$\begin{aligned}\chi^k = &\int_{\Gamma_{1k}^{3-k}} T_{k2}^2 \beta^k(x,x')u^{3-k}(x')\,\mathrm{d}\Gamma_{1k}^{3-k} \\ &- h_3 \sum_{x' \in \bar{\gamma}_{1k}^{3-k}} T_{k2}^2 \beta^k(x,x')u^{3-k}(x') - \frac{h_3}{2} \sum_{x' \in \bar{\gamma}_{1k}^{3-k}} T_{k2}^2 \beta^k(x,x')u^{3-k}(x'), \quad x \in \gamma_{1,3-k}^k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi^k = &\int_{\Gamma_{1k}^{3-k}} T_{k2}^{2\pm} \beta^k(x,x')u^{3-k}(x')\,\mathrm{d}\Gamma_{1k}^{3-k} \\ &- h_3 \sum_{x' \in \bar{\gamma}_{1k}^{3-k}} T_{k2}^{2\pm} \beta^k(x,x')u^{3-k}(x') - \frac{h_3}{2} \sum_{x' \in \bar{\gamma}_{1k}^{3-k}} T_{k2}^{2\pm} \beta^k(x,x')u^{3-k}(x'), \quad x \in \gamma_{1,3-k}^{k\star}.\end{aligned}$$

U cilju izvođenja odgovarajuće apriorne ocene diferencijske sheme (4.16), potrebni su nam sledeći pomoćni rezultati:

Lema 4.5. [19] *Važi sledeća nejednakost:*

$$\left| [v^k,\, w_{x_{3-i}}^k)_{\gamma_{ij}^{k-}} \right| \le C|[v^k\|_{\ddot{H}^{1/2}(\gamma_{ij}^{k-})}\, |[w^k]|_{H^1(\bar{\omega}^k)}.$$

Lema 4.6. [19] *Neka je v^k funkcija mreže $\bar{\omega}^k$,tada*

$$|[v^k]|_{C(\bar{\omega}^k)} \le C\sqrt{\log\frac{1}{h}}\, |[v^k]|_{H^1(\bar{\omega}^k)}.$$

Dokaz. Predstavimo funkciju $v^k(x_1,x_2)$ u sledećem obliku:

$$v^k(x_1,x_2) = \sum_{l=0}^{n_3}{}' \sum_{p=0}^{n_k}{}' a_{pl}^k \cos\frac{p\pi x_1}{b_k - a_k}\, \cos\frac{l\pi x_2}{d-c} = \sum_{l=0}^{n_3}{}' C_l^k(x_1)\cos\frac{l\pi x_2}{d-c}$$

gde je

$$\sum_{l=0}^{n}{}' b_l = b_0/2 + \sum_{l=1}^{n-1} b_l + b_n/2.$$

Odatle neposredno sledi

$$|v^k(x_1,x_2)| \le \sum_{l=0}^{n_3}{}' |C_l^k(x_1)| \le \left(\sum_{l=0}^{n_3}{}' \sqrt{\lambda_l + 1}\,(C_l^k(x_1))^2\right)^{1/2} \left(\sum_{l=0}^{n_3}{}' \frac{1}{\sqrt{\lambda_l+1}}\right)^{1/2}$$

gde je $\lambda_l = \left(\frac{2}{h_3}\,\sin\frac{l\pi h_3}{2(d-c)}\right)^2$.

Dalje je $\sqrt{\lambda_l+1} \geq \sqrt{\lambda_l} = \frac{2}{h_3}\sin\frac{l\pi h_3}{2(d-c)} \geq \frac{2l}{d-c}$ $(l=0,1,\ldots,n_3)$, odakle sledi

$$\sum_{l=0}^{n_3}{}' \frac{1}{\sqrt{\lambda_l+1}} \leq \sum_{l=0}^{n_3} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l+1}} = 1 + \sum_{l=1}^{n_3} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l+1}} \leq 1 + \sum_{l=1}^{n_3} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \leq 1 + \sum_{l=1}^{n_3} \frac{d-c}{2l}$$

$$1 + \sum_{l=1}^{n_3} \frac{d-c}{2l} \asymp \log\frac{n_3}{d-c} = \log\frac{1}{h_3}.$$

Ostaje da ocenimo $S_l = \sum_{l=0}^{n_3}{}' \sqrt{\lambda_l+1}\,(C_l^k(x_1))^2$. Koristeći nejednakost (videti [4])

$$\max_{x_1}\left|C^k(x_1)\right|^2 \leq \varepsilon_l h_k \sum_{m=0}^{n_k-1}(C_{l,x_1}^k(a_k+mh_k))^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon_l} + \frac{1}{b_k-a_k}\right) h_k \sum_{m=0}^{n_k}{}'(C_l^k(a_k+mh_k))^2,$$

gde je $C^k(x_1)$ funkcija definisana na mreži za $x_1 \in \{a_k, a_k+h_k, \ldots, a_k+h_kn_k\}$, $\varepsilon > 0$, dobijamo

$$\sum_{l=0}^{n_3}{}' \sqrt{\lambda_l+1}\,(C_l^k(x_1))^2 \leq \sum_{l=0}^{n_3}{}' \sqrt{\lambda_l+1}\Bigg\{\varepsilon_l h_k \sum_{m=0}^{n_k-1}(C_{l,x_1}^k(a_k+mh_k))^2$$
$$+ \left(\frac{1}{\varepsilon_l} + \frac{1}{b_k-a_k}\right) h_k \sum_{m=0}^{n_k}{}'(C_l^k(a_k+mh_k))^2\Bigg\}.$$

Izaberimo ε_l iz uslova $\frac{1}{\varepsilon_l} + \frac{1}{b_k-a_k} = (\lambda_l+1)\varepsilon_l$. Dobija se kvadratna jednačina sa dva rešenja, od kojih biramo pozitivno: $\varepsilon_l = \frac{1+\sqrt{1+4(\lambda_l+1)(b_k-a_k)^2}}{2(\lambda_l+1)(b_k-a_k)}$. Tako dobijamo

$$S_l \leq \sum_{l=0}^{n_3}{}' \frac{1+\sqrt{1+4(\lambda_l+1)(b_k-a_k)^2}}{2\sqrt{\lambda_l+1}(b_k-a_k)}\Bigg\{h_k \sum_{m=0}^{n_k-1}(C_{l,x_1}^k(a_k+mh_k))^2 +$$
$$(\lambda_l+1)\, h_k \sum_{m=0}^{n_k}{}'(C_l^k(a_k+mh_k))^2\Bigg\}.$$

Primetimo da količnik $\frac{1+\sqrt{1+4(\lambda_l+1)(b_k-a_k)^2}}{2\sqrt{\lambda_l+1}(b_k-a_k)}$ opada sa rastom l (odnosno λ_l):

$$\frac{1+\sqrt{1+4(\lambda_l+1)(b_k-a_k)^2}}{2\sqrt{\lambda_l+1}(b_k-a_k)} \leq \frac{1+\sqrt{1+4(\lambda_0+1)(b_k-a_k)^2}}{2\sqrt{\lambda_0+1}(b_k-a_k)}$$
$$= \frac{1+\sqrt{1+4(b_k-a_k)^2}}{2(b_k-a_k)}.$$

Zato je dalje

$$\sum_{l=0}^{n_3}{}' \sqrt{\lambda_l+1}\,(C_l^k(x_1))^2 \le \frac{1+\sqrt{1+4(b_k-a_k)^2}}{2(b_k-a_k)} \sum_{l=0}^{n_3}{}' \Big\{ h_k \sum_{m=0}^{n_k-1} (C_{l,x_1}^k(a_k+mh_k))^2$$

$$+(\lambda_l+1)\,h_k \sum_{m=0}^{n_k}{}' (C_l^k(a_k+mh_k))^2 \Big\}$$

$$= \frac{1+\sqrt{1+4(b_k-a_k)^2}}{(b_k-a_k)(d-c)} \left(|[v_{x_1}^k\|_1^2 + |[v_{x_2}^k\|_2^2 + |[v^k]|^2 \right) = \frac{1+\sqrt{1+4(b_k-a_k)^2}}{(b_k-a_k)(d-c)} \, |[v^k]|^2_{H^1(\bar{\omega}^k)}.$$

Traženi rezultat sledi na osnovu dobijenih nejednakosti, stavljajući $h=\max\{h_k,h_3\}$, $k=1,2$. □

Lema 4.7. [17] *Neka je* $w^k \in W_2^r(\Gamma_{ij}^k)$, $0<r\le 0.5$. *Tada*

$$|T_{k,3-i}^+ w^k|_{W_2^{1/2}(\gamma_{ij}^{k-})} \le C(r) h^{r-1/2}\, |w^k|_{W_2^r(\Gamma_{ij}^k)}.$$

Dokaz. Bez gubljenja opštosti posmatrajmo slučaj kada je $i=j=1$. Dakle,

$$|T_{k,2}^+ w^k|^2_{W_2^{1/2}(\gamma_{11}^{k-})} = h_3^2 \sum_{i=1}^{n_3-1} \sum_{j=1,\, j\ne i}^{n_3-1} \frac{\left[T_{k,2}^+ w^k(a_k, ih_3) - T_{k,2}^+ w^k(a_k, jh_3)\right]^2}{(ih_3-jh_3)^2}$$

$$= 2h_3^2 \sum_{i=1}^{n_3-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\left[T_{k,2}^+ w^k(a_k, ih_3) - T_{k,2}^+ w^k(a_k, jh_3)\right]^2}{(ih_3-jh_3)^2}$$

$$= 2h_3^2 \sum_{i=1}^{n_3-1} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \frac{1}{h_3^2} \int_{ih_3}^{ih_3+h_3} \int_{jh_3}^{jh_3+h_3} \left[w^k(a_k,x_2) - w^k(a_k,x_2') \right] dx_2' dx_2 \right\}^2 (ih_3-jh_3)^{-2}$$

$$\le 2h_3^2 \sum_{i=1}^{n_3-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{h_3^4} \left\{ \int_{ih_3}^{ih_3+h_3} \int_{jh_3}^{jh_3+h_3} \frac{\left[w^k(a_k,x_2) - w^k(a_k,x_2') \right]^2}{(x_2-x_2')^{1+2r}} dx_2' dx_2 \right\}$$

$$\times \left\{ \int_{ih_3}^{ih_3+h_3} \int_{jh_3}^{jh_3+h_3} \frac{(x_2-x_2')^{1+2r}}{(ih_3-jh_3)^2} dx_2' dx_2 \right\}.$$

Majoracijom desne strane dobijamo:

$$\left\{ \int_{ih_3}^{ih_3+h_3} \int_{jh_3}^{jh_3+h_3} \frac{(x_2-x_2')^{1+2r}}{(ih_3-jh_3)^2} dx_2' dx_2 \right\}$$

$$\le \left\{ \int_{ih_3}^{ih_3+h_3} \int_{jh_3}^{jh_3+h_3} \frac{(ih_3+h_3-jh_3)^{1+2r}}{(ih_3-jh_3)^2} dx_2' dx_2 \right\} = h_3^2 h_3^{2r-1} \frac{(i-j+1)^{1+2r}}{(i-j)^2}$$

$$\le 2^{1+2r} h_3^2 h_3^{2r-1}, \text{ jer je } \quad 1 \le \frac{i-j+1}{i-j} \le 2.$$

Dakle,

$$2h_3^2 \sum_{i=1}^{n_3-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{h_3^4} \left\{ \int_{ih_3}^{ih_3+h_3} \int_{jh_3}^{jh_3+h_3} \frac{\left[w^k(a_k,x_2) - w^k(a_k,x_2')\right]^2}{(x_2 - x_2')^{1+2r}}\, dx_2' dx_2 \right\}$$

$$\times \left\{ \int_{ih_3}^{ih_3+h_3} \int_{jh_3}^{jh_3+h_3} \frac{(x_2 - x_2')^{1+2r}}{(ih_3 - jh_3)^2}\, dx_2' dx_2 \right\}.$$

$$\le 2h_3^{-2} 2^{1+2r} h_3^2 h_3^{2r-1} \sum_{i=1}^{n_3-1} \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \int_{ih_3}^{ih_3+h_3} \int_{jh_3}^{jh_3+h_3} \frac{\left[w^k(a_k,x_2) - w^k(a_k,x_2')\right]^2}{(x_2 - x_2')^{1+2r}}\, dx_2' dx_2 \right\}$$

$$= 2^{1+2r} h_3^{2r-1} 2 \int_c^d \int_c^{x_2} \frac{\left[w^k(a_k,x_2) - w^k(a_k,x_2')\right]^2}{(x_2 - x_2')^{1+2r}}\, dx_2' dx_2 = 2^{1+2r} h_3^{2r-1}\, |w^k|^2_{W_2^r(\Gamma_{11}^k)}.$$

$\square$

Preuredimo sabirke greške ψ^k na sledeći način:

$$\tilde{\eta}_{ij}^k = \eta_{ij}^k + \bar{\eta}_{ij}^k, \qquad \tilde{\mu}^k = \mu^k + \mu^{\star k}, \qquad \tilde{\tilde{\mu}}^k = \mu^k + \mu^{\star\star k}$$

gde je

$$\bar{\eta}_{ii}^k = \pm \frac{h_{ki}}{3}\, T_{ki}^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) \right), \qquad x \in \gamma_{3-i,1}^k \;/\; x \in \gamma_{3-i,2}^k$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{i,3-i}^k = \pm \frac{h_{ki}}{3}\, T_{ki}^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left(p_{i,3-i}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \right) \right) \mp \frac{h_{ki}}{2}\, T_{ki}^+ \left(p_{i,3-i}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial x_{3-i}^2} \right) \\ + \frac{h_{ki}}{2}\, T_{ki}^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(p_{i,3-i}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \right) \right), \qquad x \in \gamma_{3-i,1}^k \;/\; x \in \gamma_{3-i,2}^k, \end{aligned}$$

$$\mu^{\star k} = \pm \frac{h_{ki}}{3} \left(T_{k,3-i}^{2\pm} T_{ki}^2 q^k \right) \left(T_{ki}^2 \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \right), \qquad x \in \gamma_{3-i,1}^k \;/\; x \in \gamma_{3-i,2}^k$$

$$\mu^{\star\star k} = \pm \frac{h_{ki}}{3} \left(T_{ki}^{2\pm} T_{k,3-i}^{2\pm} q^k \right) \left(T_{k,3-i}^{2\pm} \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) \pm \frac{h_{ki}}{3} \left(T_{k,3-i}^{2\pm} T_{ki}^{2\pm} q^k \right) \left(T_{ki}^{2\pm} \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \right), \qquad x \in \gamma_\star^k.$$

Na osnovu Lema 4.5-4.7 dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 4.8. *Diferencijska shema (4.16) je stabilna u smislu apriorne ocene*

$$\begin{aligned} |[z]|_{H_h^1} \le C \sum_{k=1}^{2} \Bigg\{ \sum_{i,j=1}^{2} \Big(|[\eta_{ij}^k]|_{k,i} + \|\zeta^k\|_{\gamma_{ij}^k} + h\, \|\mu^{\star k}\|_{\gamma_{ij}^k} \Big) + |[\mu^k]|_k + |[\chi^k]|_{\bar{\gamma}_{1,3-k}^k} \\ + h \sum_{i,j,l=1}^{2} |[\bar{\eta}_{ij}^k]|_{\ddot{H}^{1/2}(\gamma_{3-i,l}^{k-})} + h \sqrt{\log \frac{1}{h}} \sum_{x \in \gamma_\star^k} \Big(\sum_{i=1}^{2} |\zeta_i^k| + h\, |\mu^{\star\star k}| \Big) \Bigg\}. \qquad (4.16) \end{aligned}$$

Dokaz. Pomnožimo jednačinu (4.16) skalarno sa z.

$$[L_h^k z, z]_k = [\psi^k, z]_k$$

Neka je $k = 1$.

$$[\psi^1, z^1]_1 = -h_1 h_3 \sum_{i=1}^{2} \sum_{x \in \omega^1 \cup \gamma_{11}^1 \cup \gamma_{21}^1} \Big(\eta_{i1}^1 + \eta_{i2}^1\Big) z_{x_i}^1$$

$$-\frac{h_1 h_3}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{x \in \gamma_{3-i,1}^{1-} \cup \gamma_{3-i,2}^{1-}} \Big(\eta_{i1}^1 + \eta_{i2}^1\Big) z_{x_i}^1 - \frac{h_1 h_3}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{x \in \gamma_{3-i,1}^{1-} \cup \gamma_{3-i,2}^{1-}} \Big(\bar{\eta}_{i1}^1 + \bar{\eta}_{i2}^1\Big) z_{x_i}^1$$

$$+h_1 h_3 \sum_{x \in \omega^1} \mu^1 z^1 + \frac{h_1 h_3}{2} \sum_{x \in \gamma^1 \setminus \gamma_\star^1} \mu^1 z^1 + \frac{h_1 h_3}{4} \sum_{x \in \gamma_\star^1} \mu^1 z^1$$

$$+\frac{h_1 h_3}{2} \sum_{x \in \gamma^1 \setminus \gamma_\star^1} \mu^{\star 1} z^1 + \frac{h_1 h_3}{4} \sum_{x \in \gamma_\star^1} \mu^{\star\star 1} z^1 + h_3 \sum_{x \in \gamma_{11}^1 \cup \gamma_{12}^1} \zeta^1 z^1 + h_1 \sum_{x \in \gamma_{21}^1 \cup \gamma_{22}^1} \zeta^1 z^1 + \frac{h_3}{2} \sum_{x \in \gamma_\star^1} \zeta_1^1 z^1$$

$$+\frac{h_1}{2} \sum_{x \in \gamma_\star^1} \zeta_2^1 z^1 + [\chi^1, z^1]_{\bar{\gamma}_{12}^1}$$

Važe sledeće ocene:

$$-h_1 h_3 \sum_{i=1}^{2} \sum_{x \in \omega^1 \cup \gamma_{11}^1 \cup \gamma_{21}^1} \Big(\eta_{i1}^1 + \eta_{i2}^1\Big) z_{x_i}^1 - \frac{h_1 h_3}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{x \in \gamma_{3-i,1}^{1-} \cup \gamma_{3-i,2}^{1-}} \Big(\eta_{i1}^1 + \eta_{i2}^1\Big) z_{x_i}^1$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{2} |[\eta_{ij}^1\|_{1,i} |[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)},$$

$$h_1 h_3 \sum_{x \in \omega^1} \mu^1 z^1 + \frac{h_1 h_3}{2} \sum_{x \in \gamma^1 \setminus \gamma_\star^1} \mu^1 z^1 + \frac{h_1 h_3}{4} \sum_{x \in \gamma_\star^1} \mu^1 z^1 \leq |[\mu^1]|_k |[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)}$$

i

$$[\chi^1, z^1]_{\bar{\gamma}_{12}^1} = h_3 \sum_{\gamma_{12}^1} \chi^1 z^1 + \frac{h_3}{2} \sum_{\gamma_{12}^{1\star}} \chi^1 z^1 \leq \Big(h_3 \sum_{\gamma_{12}^1} (\chi^1)^2\Big)^{1/2} \Big(h_3 \sum_{\gamma_{12}^1} (z^1)^2\Big)^{1/2}$$

$$+\Big(\frac{h_3}{2} \sum_{\gamma_{12}^{1\star}} (\chi^1)^2\Big)^{1/2} \Big(\frac{h_3}{2} \sum_{\gamma_{12}^{1\star}} (z^1)^2\Big)^{1/2} \leq \Big\{\Big(h_3 \sum_{\gamma_{12}^1} (\chi^1)^2\Big)^{1/2} + \Big(\frac{h_3}{2} \sum_{\gamma_{12}^{1\star}} (\chi^1)^2\Big)^{1/2}\Big\}$$

$$\times \Big\{\Big(h_3 \sum_{\gamma_{12}^1} (z^1)^2\Big)^{1/2} + \Big(\frac{h_3}{2} \sum_{\gamma_{12}^{1\star}} (z^1)^2\Big)^{1/2}\Big\} \leq 4C_1 \Big\{h_3 \sum_{\gamma_{12}^1} (\chi^1)^2 + \frac{h_3}{2} \sum_{\gamma_{12}^{1\star}} (\chi^1)^2\Big\}^{1/2}$$

$$\times \Big\{h_3 \sum_{\gamma_{12}^1} (z^1)^2 + \frac{h_3}{2} \sum_{\gamma_{12}^{1\star}} (z^1)^2\Big\}^{1/2} \leq C |[\chi^1]|_{\bar{\gamma}_{12}^1} |[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)}.$$

Zatim, primenom leme 4.5 dobijamo :

$$-\frac{h_1h_3}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{x\in\gamma^{1-}_{3-i,1}\cup\gamma^{1-}_{3-i,2}}\left(\bar{\eta}^1_{i1}+\bar{\eta}^1_{i2}\right)z^1_{x_i}\le Ch_i[\bar{\eta}^1_{ij},z^1_{x_i})_{\gamma^{1-}_{3-i,l}}$$
$$\le Ch_i|[\bar{\eta}^1_{ij}\|_{\ddot{H}^{1/2}(\gamma^{1-}_{3-i,l})}|[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)}.$$

Dalje, primenjujući lemu 4.6 dobijamo sledeće ocene:

$$\frac{h_1h_3}{2}\sum_{x\in\gamma^1\setminus\gamma^1_\star}\mu^{\star1}z^1+\frac{h_1h_3}{4}\sum_{x\in\gamma^1_\star}\mu^{\star\star1}z^1\le 2C\max\{h_1,h_3\}\|\mu^{\star1}\|_{\gamma^k_{ij}}|[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)}$$
$$+Ch_1h_3\max\left\{\sqrt{\log\frac{1}{h_1}},\sqrt{\log\frac{1}{h_3}}\right\}\sum_{x\in\gamma^1_\star}|\mu^{\star\star1}|\,|[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)}$$

i

$$h_3\sum_{x\in\gamma^1_{11}\cup\gamma^1_{12}}\zeta^1z^1+h_1\sum_{x\in\gamma^1_{21}\cup\gamma^1_{22}}\zeta^1z^1+\frac{h_3}{2}\sum_{x\in\gamma^1_\star}\zeta^1_1z^1+\frac{h_1}{2}\sum_{x\in\gamma^1_\star}\zeta^1_2z^1\le 4C_1\|\zeta^1\|_{\gamma^1_{ij}}|[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)}$$
$$+C\frac{h_3}{2}\sqrt{\log\frac{1}{h_3}}\sum_{x\in\gamma^1_\star}|\zeta^1_1|\,|[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)}+C\frac{h_1}{2}\sqrt{\log\frac{1}{h_1}}\sum_{x\in\gamma^1_\star}|\zeta^1_2|\,|[z^1]|_{H^1(\bar{\omega}^1)}.$$

Analogno se dobija za $k=2$. □

4.5 Ocena brzine konvergencije diferencijske sheme

Teorema 4.9. *Neka su pretpostavke Leme 4.4 zadovoljene. Tada rešenje diferencijske sheme (4.13) konvergira rešenju graničnog problema (4.1)-(4.5) i važe sledeće ocene brzine konvergencije*

$$|[u-v]|_{H^1_h}\le Ch^{s-1}\sqrt{\log\frac{1}{h}}\Big(1+\max_{i,j,k}\|p^k_{ij}\|_{H^{s-1}(\Omega^k)}+\max_k\|q^k\|_{H^{s-2}(\Omega^k)}$$
$$+\max_{i,j,k}\|\alpha^k\|_{H^{s-3/2}(\Gamma^k_{ij})}+\max_k\|\beta^k\|_{H^{s-1}(\Delta^k)}\Big)\|u\|_{H^s},\qquad 2.5<s<3 \tag{4.17}$$

i

$$|[u-v]|_{H^1_h}\le Ch^2\left(\log\frac{1}{h}\right)^{3/2}\Big(1+\max_{i,j,k}\|p^k_{ij}\|_{H^2(\Omega^k)}+\max_k\|q^k\|_{H^1(\Omega^k)}$$
$$+\max_{i,j,k}\|\alpha^k\|_{H^{3/2}(\Gamma^k_{ij})}+\max_k\|\beta^k\|_{H^2(\Delta^k)}\Big)\|u\|_{H^3},\qquad s=3. \tag{4.18}$$

Dokaz. Predstavimo η_{ij}^k u obliku:

$$
\begin{aligned}
\eta_{ij}^k &= \eta_{ij1}^k + \eta_{ij2}^k + \eta_{ij3}^k + \eta_{ij4}^k, \quad x \in \omega^k \\
\eta_{ij1}^k &= T_{ki}^+ T_{k,3-i}^2 \left(p_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j} \right) - T_{ki}^+ T_{k,3-i}^2 (p_{ij}^k) T_{ki}^+ T_{k,3-i}^2 \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_j} \right) \\
\eta_{ij2}^k &= \left[T_{ki}^+ T_{k,3-i}^2 (p_{ij}^k) - \frac{1}{2} (p_{ij}^k + (p_{ij}^k)^{+i}) \right] T_{ki}^+ T_{k,3-i}^2 \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_j} \right) \\
\eta_{ij3}^k &= \frac{1}{2} (p_{ij}^k + (p_{ij}^k)^{+i}) \left[T_{ki}^+ T_{k,3-i}^2 \left(\frac{\partial u^k}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} (u_{x_j}^k + (u_{\bar{x}_j}^k)^{+i}) \right] \\
\eta_{ij4}^k &= -\frac{1}{4} (p_{ij}^k - (p_{ij}^k)^{+i}) (u_{x_j}^k - (u_{\bar{x}_j}^k)^{+i}).
\end{aligned}
$$

Uvedimo elementarne pravougaonike $e_0^k = e_0^k(x) = \{y : |y_j - x_j| < h_{kj},\ j = 1, 2\}$ i $e_i^k = e_i^k(x) = \{y : x_i < y_i < x_i + h_{ki},\ |y_{3-i} - x_{3-i}| < h_{k,3-i}\},\ i = 1, 2,\ k = 1, 2$. Linearnom transformacijom $y = x + h_{ki} x^\star$, uspostavlja se obostrano jednoznačno preslikavanje između pravougaonika e_0^k, e_i^k i standardnih pravougaonika $E_0 = \{x^\star : |x_j^\star| < 1,\ j = 1, 2\}$ i $E_i = \{x^\star : 0 < x_i^\star < 1,\ |x_{3-i}^\star| < 1\}$.
Označimo takođe, $p_{ij}^{k\star}(x^\star) = p_{ij}^k(x + h_{ki} x^\star)$, $u^{k\star}(x^\star) = u^k(x + h_{ki} x^\star)$.

Predstavljajući Steklovljeve operatore usrednjenja u razvijenom obliku, dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\eta_{ij1}^k = & \frac{1}{h_{ki}} \frac{1}{h_{k,3-i}} \int\limits_{x_i}^{x_i + h_{ki}} \int\limits_{x_{3-i} - h_{k,3-i}}^{x_{3-i} + h_{k,3-i}} \left(1 - \frac{|x_{3-i} - x'_{3-i}|}{h_{k,3-i}} \right) p_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j}(x') \, \mathrm{d}x'_{3-i} \, \mathrm{d}x'_i \\
& - \frac{1}{h_{ki}} \frac{1}{h_{k,3-i}} \int\limits_{x_i}^{x_i + h_{ki}} \int\limits_{x_{3-i} - h_{k,3-i}}^{x_{3-i} + h_{k,3-i}} \left(1 - \frac{|x_{3-i} - x'_{3-i}|}{h_{k,3-i}} \right) p_{ij}^k(x') \, \mathrm{d}x'_{3-i} \, \mathrm{d}x'_i \\
& \cdot \frac{1}{h_{ki}} \frac{1}{h_{k,3-i}} \int\limits_{x_i}^{x_i + h_{ki}} \int\limits_{x_{3-i} - h_{k,3-i}}^{x_{3-i} + h_{k,3-i}} \left(1 - \frac{|x_{3-i} - x'_{3-i}|}{h_{k,3-i}} \right) \frac{\partial u^k}{\partial x_j}(x') \, \mathrm{d}x'_{3-i} \, \mathrm{d}x'_i \\
& = \frac{1}{h_{k,3-i}} \Bigg\{ \iint\limits_{E_i} (1 - |x_{3-i}^\star|) p_{ij}^{k\star} \frac{\partial u^{k\star}}{\partial x_j^\star} \, \mathrm{d}x^\star - \iint\limits_{E_i} (1 - |x_{3-i}^\star|) p_{ij}^{k\star} \, \mathrm{d}x^\star \\
& \qquad \cdot \iint\limits_{E_i} (1 - |x_{3-i}^\star|) \frac{\partial u^{k\star}}{\partial x_j^\star} \, \mathrm{d}x^\star \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Odatle sledi

$$
\left| \eta_{ij1}^k \right| \leq \frac{C}{h_{k,3-i}} \left(\iint\limits_{E_i} \left(p_{ij}^{k\star} \right)^2 \mathrm{d}x^\star \right)^{1/2} \left(\iint\limits_{E_i} \left(\frac{\partial u^{k\star}}{\partial x_j^\star} \right)^2 \mathrm{d}x^\star \right)^{1/2}.
$$

Daljom majoracijom dobijamo:

$$\begin{aligned}\left|\eta_{ij1}^k\right| &\le \frac{C}{h_{k,3-i}}\left(\iint\limits_{E_i}(p_{ij}^{k\star})^{2\frac{q}{2}}\,\mathrm{d}x^\star\right)^{\frac{1}{2}\frac{2}{q}}\left(\iint\limits_{E_i}\left(\frac{\partial u^{k\star}}{\partial x_j^\star}\right)^{2\frac{q}{q-2}}\mathrm{d}x^\star\right)^{\frac{1}{2}\frac{q-2}{q}}\\ &\le \frac{C}{h_{k,3-i}}\|p_{ij}^{k\star}\|_{W_q^\lambda(E_i)}\|u^{k\star}\|_{W^\mu_{\frac{2q}{q-2}}(E_i)},\quad \lambda\ge 0,\ \mu\ge 1,\ q>2.\end{aligned}$$

Možemo zaključiti da je $\eta_{ij1}^k(x)$ ograničen bilinearni funkcional $(p_{ij}^{k\star},u^{k\star})\in W_q^\lambda(E_i)\times W^\mu_{\frac{2q}{q-2}}(E_i)$, gde je $\lambda\ge 0$, $\mu\ge 1$ i $q>2$. Dalje, $\eta_{ij1}^k(x)=0$ kada je $p_{ij}^{k\star}$ konstanta ili kada je $u^{k\star}$ polinom prvog stepena. Koristeći bilinearnu verziju Leme Brambla-Hilberta [5],[15], dobijamo:

$$\left|\eta_{ij1}^k\right| \le \frac{C}{h_{k,3-i}}|p_{ij}^{k\star}|_{W_q^\lambda(E_i)}|u^{k\star}|_{W^\mu_{\frac{2q}{q-2}}(E_i)},\quad 0\le\lambda\le 1,\quad 1\le\mu\le 2.$$

Vraćanjem na stare koordinate, označavajući $h=\max\{h_{k1},h_{k2}\}$ dobijamo:

$$\left|\eta_{ij1}^k\right| \le Ch^{\lambda+\mu-2}|p_{ij}^k|_{W_q^\lambda(e_i^k)}|u^k|_{W^\mu_{\frac{2q}{q-2}}(e_i^k)},\quad 0\le\lambda\le 1,\quad 1\le\mu\le 2.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže, koristeći Hölderovu nejednakost, dobijamo sledeću nejednakost:

$$h_k h_3\sum_{x\in\omega^k\cup\gamma_{i1}^k}(\eta_{ij1}^k)^2 \le Ch^{2\lambda+2\mu-2}\|p_{ij}^k\|^2_{W_q^\lambda(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W^\mu_{\frac{2q}{q-2}}(\Omega^k)},\quad 0\le\lambda\le 1,\quad 1\le\mu\le 2.$$

Važe sledeća potapanja:

$$W_2^{\lambda+\mu-1}\subseteq W_q^\lambda \quad \text{za}\quad \mu>2-2/q \quad \text{i}\quad W_2^{\lambda+\mu}\subseteq W^\mu_{\frac{2q}{q-2}} \quad \text{za}\quad \lambda>2/q.$$

Stavljajući $\lambda+\mu=s$, dobijamo

$$h_k h_3\sum_{x\in\omega^k\cup\gamma_{i1}^k}(\eta_{ij1}^k)^2 \le Ch^{2s-2}\|p_{ij}^k\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W_2^s(\Omega^k)},\quad 2<s\le 3.$$

Koristeći reprezentaciju

$$\eta_{ij2}^k = \bigg(\frac{1}{h_{ki}}\frac{1}{h_{k,3-i}}\int\limits_{x_i}^{x_i+h_{ki}}\int\limits_{x_{3-i}-h_{k,3-i}}^{x_{3-i}+h_{k,3-i}}\bigg(1-\frac{|x_{3-i}-x'_{3-i}|}{h_{k,3-i}}\bigg)p_{ij}^k(x')\,\mathrm{d}x'_{3-i}\,\mathrm{d}x'_i - \frac{1}{2}(p_{ij}^k$$
$$+(p_{ij}^k)^{+i})\bigg)\cdot\frac{1}{h_{ki}}\frac{1}{h_{k,3-i}}\int\limits_{x_i}^{x_i+h_{ki}}\int\limits_{x_{3-i}-h_{k,3-i}}^{x_{3-i}+h_{k,3-i}}\bigg(1-\frac{|x_{3-i}-x'_{3-i}|}{h_{k,3-i}}\bigg)\frac{\partial u^k}{\partial x_j}(x')\,\mathrm{d}x'_{3-i}\,\mathrm{d}x'_i$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
\left|\eta_{ij2}^k\right| &\le \frac{C}{h_{k,3-i}}\bigg\{\iint\limits_{E_i}|1-|x_{3-i}^\star||\left|p_{ij}^{k\star}\right|\mathrm{d}x^\star + \max\left|p_{ij}^{k\star}\right|\bigg\}\cdot\iint\limits_{E_i}|1-|x_{3-i}^\star||\left|\frac{\partial u^{k\star}}{\partial x_j^\star}\right|\mathrm{d}x^\star\\
&\le \frac{C}{h_{k,3-i}}\bigg\{\iint\limits_{E_i}\left|p_{ij}^{k\star}\right|\mathrm{d}x^\star + \max\left|p_{ij}^{k\star}\right|\bigg\}\cdot\iint\limits_{E_i}\left|\frac{\partial u^{k\star}}{\partial x_j^\star}\right|\mathrm{d}x^\star\\
&\le \frac{C}{h_{k,3-i}}\bigg\{\iint\limits_{E_i}\left|p_{ij}^{k\star}\right|\mathrm{d}x^\star + \max\left|p_{ij}^{k\star}\right|\bigg\}\cdot|u^{k\star}|_{W_\infty^1(E_i)}\\
&\le \frac{C}{h_{k,3-i}}\left\|p_{ij}^{k\star}\right\|_{C(\bar{E}_i)}\cdot|u^{k\star}|_{W_\infty^1(E_i)} \le \frac{C}{h_{k,3-i}}\left\|p_{ij}^{k\star}\right\|_{W_2^{s-1}(E_i)}\cdot|u^{k\star}|_{W_\infty^1(E_i)}.
\end{aligned}$$

Dakle, za $s > 2$, $\eta_{ij2}^k(x)$ je ograničen bilinearni funkcional $(p_{ij}^k, u^k) \in W_2^{s-1}(e_i)\times W_\infty^1(e_i)$, koji se anulira kada je $p_{ij}^{k\star}$ polinom prvog stepena ili kada je $u^{k\star}$ konstanta. Koristeći Lemu Brambla-Hilberta, posle vraćanja na stare promenljive, dobijamo:

$$\left|\eta_{ij2}^k\right| \le Ch^{s-2}\|p_{ij}^k\|_{W_2^{s-1}(e_i^k)}|u^k|_{W_\infty^1(e_i^k)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže, koristeći Hölderovu nejednakost, kao i potapanje $W_2^s \subseteq W_\infty^1$, za $s > 2$, dobijamo sledeću nejednakost:

$$h_k h_3 \sum_{x\in\omega^k\cup\gamma_{i1}^k}(\eta_{ij2}^k)^2 \le Ch^{2s-2}\|p_{ij}^k\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W_2^s(\Omega^k)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Izraz η_{ij3}^k možemo direktno oceniti na sledeći način:

$$\left|\eta_{ij3}^k\right| \le \max_{E_i}\left|p_{ij}^{k\star}\right|\frac{1}{h_{k,3-i}}\bigg(\iint\limits_{E_i}\left|\frac{\partial u^{k\star}}{\partial x_j^\star}\right|\mathrm{d}x^\star + \max_{E_i}\left|u^{k\star}\right|\bigg).$$

Odatle dobijamo

$$\left|\eta_{ij3}^k\right| \le \frac{C}{h_{k,3-i}}\left\|p_{ij}^{k\star}\right\|_{C(\bar{E}_i)}\left\|u^{k\star}\right\|_{W_2^s(E_i)}, \quad s > 1.$$

Za $s > 1$, $\eta_{ij3}^k(x)$ je ograničen bilinearni funkcional $(p_{ij}^{k\star}, u^{k\star}) \in C(\bar{E}_i) \times W_2^s(E_i)$, koji se anulira kada je $u^{k\star}$ polinom drugog stepena. Na isti način, kao u prethodnim slučajevima, koristeći potapanje $W_2^{s-1} \subseteq C$, za $s > 2$, posle vraćanja na stare koordinate i sumiranja po čvorovima mreže, dobijamo nejednakost:

$$h_k h_3 \sum_{x \in \omega^k \cup \gamma_{i1}^k} (\eta_{ij3}^k)^2 \leq C h^{2s-2} \|p_{ij}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}^2 \|u^k\|_{W_2^2(\Omega^k)}^2, \quad 2 < s \leq 3.$$

Izraz η_{ij4}^k ocenjujemo na sledeći način :

$$\left|\eta_{ij4}^k\right| \leq \max_{E_i} \left|p_{ij}^{k\star}\right| \frac{C}{h} \max_{E_i} \left|u^{k\star}\right| \leq \frac{C}{h} \left\|p_{ij}^{k\star}\right\|_{W_q^\lambda(E_i)} \left\|u^{k\star}\right\|_{W^\mu_{\frac{2q}{q-2}}(E_i)},$$
$$q > 2,\ \lambda > 2/q,\ \mu > 1 - 2/q.$$

Ocena se dalje izvodi analogno kao za η_{ij1}^k.
Dakle, članovi η_{ij}^k u čvorovima mreže $\omega^k \cup \gamma_{i1}^k$, zadovoljavaju sledeću nejednakost:

$$h_k h_3 \sum_{x \in \omega^k \cup \gamma_{i1}^k} (\eta_{ij}^k)^2 \leq C h^{2s-2} \|p_{ij}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}^2 \|u^k\|_{W_2^2(\Omega^k)}^2, \quad 2 < s \leq 3.$$

Ocenimo sada članove u graničnim čvorovima mreže $\left(\gamma_{3-i,1}^k / \gamma_{3-i,2}^k\right)$.
Pođimo od izraza

$$\eta_{ii}^k = \tilde{\eta}_{ii}^k - \bar{\eta}_{ii}^k = T_{ki}^+ T_{k,3-i}^{2\pm}\left(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) - \frac{p_{ii}^k + (p_{ii}^k)^{+i}}{2} u_{x_i}^k \mp \frac{h_{ki}}{3} T_{ki}^+\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right)\right)$$

i predstavimo ga u obliku

$$\eta_{ii}^k = \eta_{ii1}^k + \eta_{ii2}^k + \eta_{ii3}^k, \qquad x \in \gamma_{3-i,1}^k / x \in \gamma_{3-i,2}^k$$

gde je

$$\begin{aligned}
\eta_{ii1}^k &= T_{ki}^+\left(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) - T_{ki}^+(p_{ii}^k) T_{ki}^+\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) \\
\eta_{ii2}^k &= T_{ki}^+(p_{ii}^k) T_{ki}^+\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) - \frac{p_{ii}^k + (p_{ii}^k)^{+i}}{2} T_{ki}^+\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) \\
\eta_{ii3}^k &= T_{ki}^+ T_{k,3-i}^{2\pm}\left(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) - T_{ki}^+\left(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) \mp \frac{h_{ki}}{3} T_{ki}^+\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right)\right).
\end{aligned}$$

Članovi η_{ii1}^k i η_{ii2}^k se ocenjuju na sličan način kao η_{ij1}^k i η_{ij2}^k u unutrašnjim čvorovima mreže ω^k. Za $s > 2.5$, η_{ij3}^k je ograničen linearan funkcional od $w = p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \in W_2^{s-1}$, koji se anulira kada je $w = 1, x_1$. Koristeći Lemu Brambla-Hilberta i osobine multiplikatora u prostorima Soboljeva [31], dobijamo sledeći rezultat:

$$h_k h_3 \sum_{x\in\gamma^{k-}_{3-i,1}\cup\gamma^{k-}_{3-i,2}} (\eta^k_{ii,3})^2 \le Ch^{2s-2}\left\|p^k_{ii}\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}$$
$$\le Ch^{2s-2}\|p^k_{ii}\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W_2^s(\Omega^k)},\quad 2.5<s\le 3.$$

Član

$$\eta^k_{i,3-i} = \tilde{\eta}^k_{i,3-i} - \bar{\eta}^k_{i,3-i}$$
$$= T^+_{ki}T^{2+}_{k,3-i}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) - p^k_{i,3-i}u^k_{x_{3-i}} \mp \frac{h_{ki}}{3}T^+_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right)\right)$$
$$\pm\frac{h_{ki}}{2}T^+_{ki}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial^2 u^k}{\partial^2 x_{3-i}}\right) - \frac{h_{ki}}{2}T^+_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right)\right)$$

predstavimo u obliku

$$\eta^k_{i,3-i} = \eta^k_{i,3-i,1} + \eta^k_{i,3-i,2} + \eta^k_{i,3-i,3} + \eta^k_{i,3-i,4},\qquad x\in\gamma^{k-}_{3-i,1}$$

gde je

$$\eta^k_{i,3-i,1} = T^+_{ki}T^{2+}_{k,3-i}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) - T^+_{ki}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) \mp \frac{h_{ki}}{3}T^+_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right)\right),$$
$$\eta^k_{i,3-i,2} = T^+_{ki}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) - \frac{h_{ki}}{2}T^+_{ki}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right)\right),$$
$$\eta^k_{i,3-i,3} = p^k_{i,3-i}\left[-T^+_{k,3-i}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) + \frac{h_{ki}}{2}T^+_{ki}\left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial^2 x_{3-i}}\right)\right],$$
$$\eta^k_{i,3-i,4} = \frac{h_{ki}}{2}\left[T^+_{ki}\left(p^k_{i,3-i}\frac{\partial^2 u^k}{\partial^2 x_{3-i}}\right) - p^k_{i,3-i}T^+_{ki}\left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial^2 x_{3-i}}\right)\right].$$

Članovi $\eta^k_{i,3-i,1}$ i $\eta^k_{i,3-i,2}$ se ocenjuju na isti način kao η^k_{ij4}. Za $s>2.5$, $\eta^k_{i,3-i,3}$ je ograničen linearan funkcional od $u\in W_2^{s-1}$, koji se anulira kada je $u=1,x_1,x_1^2$. Koristeći Lemu Brambla-Hilberta i potapanje u prostorima Soboljeva, dobijamo sledeći rezultat:

$$h_k h_3\sum_{x\in\gamma^{k-}_{3-i,1}}(\eta^k_{i,3-i,3})^2 \le Ch^{2s-2}\|p^k_{ii}\|^2_{C(\bar{\Omega}^k)}\|u^k\|^2_{W_2^s(\Omega^k)}$$
$$\le Ch^{2s-2}\|p^k_{ii}\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W_2^s(\Omega^k)},\quad 2.5<s\le 3.$$

$\eta^k_{i,3-i,4}$ ocenićemo direktno. Neka je $i=1$ i $x=(x_1,c)\in\gamma^{k-}_{21}$.

$$\eta^k_{1,2,4}(x_1,c)=\frac{h_1}{2}\left(\frac{1}{h_1}\int\limits_{x_1}^{x_1+h_1}p^k_{12}\frac{\partial^2u^k}{\partial x_2^2}(x_1',c)\,\mathrm{d}x_1'-p^k_{12}(x_1,c)\frac{1}{h_1}\int\limits_{x_1}^{x_1+h_1}\frac{\partial^2u^k}{\partial x_2^2}(x_1',c)\,\mathrm{d}x'\right)$$
$$=\frac{h_1}{2}\frac{1}{h_1}\int\limits_{x_1}^{x_1+h_1}(p^k_{12}(x_1',c)-p^k_{12}(x_1,c))\frac{\partial^2u^k}{\partial x_2^2}(x_1',c)\,\mathrm{d}x_1'$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{x_1}^{x_1+h_1}\int\limits_{x_1}^{x_1'}\frac{\partial p^k_{12}}{\partial x_1}(x_1'',c)\frac{\partial^2u^k}{\partial x_2^2}(x_1',c)\,\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}x_1''\le Ch_1\left\|\frac{\partial p^k_{12}}{\partial x_1}\right\|_{L_2(\Gamma^k_{21})}\left\|\frac{\partial^2u^k}{\partial x_2^2}\right\|_{L_2(\Gamma^k_{21})}.$$

Analognu integralnu reprezentaciju dobijamo za $x\in\gamma^{k-}_{22}$, kao i za $i=2$. Dakle,

$$h_kh_3\sum_{x\in\gamma^{k-}_{3-i,1}\cup\gamma^{k-}_{3-i,2}}(\eta^k_{i,3-i,4})^2\le Ch^2\|p^k_{ii}\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W_2^s(\Omega^k)},\quad s>2.5.$$

Konačno, iz prethodnih nejednakosti dobijamo

$$|[\eta^k_{ij}\|_{k,i}\le Ch^{s-1}\|p^k_{ij}\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)},\quad 2.5<s\le 3. \tag{4.19}$$

Ocenimo sada član μ^k u unutrašnjim čvorovima mreže:

$$\mu^k=(T^2_{ki}T^2_{k,3-i}q^k)u^k-T^2_{ki}T^2_{k,3-i}(q^ku^k)=\mu^k_1+\mu^k_2,\quad x\in\omega^k$$

gde je,

$$\mu^k_1=(T^2_{ki}T^2_{k,3-i}q^k)u^k-\left(T^2_{ki}T^2_{k,3-i}q^k\right)\left(T^2_{ki}T^2_{k,3-i}u^k\right)$$
$$\mu^k_2=\left(T^2_{ki}T^2_{k,3-i}q^k\right)\left(T^2_{ki}T^2_{k,3-i}u^k\right)-T^2_{ki}T^2_{k,3-i}(q^ku^k).$$

Predstavljajući Stekljovljeve operatore u razvijenom obliku, dobijamo

$$\mu^k_1=\left(T^2_{ki}T^2_{k,3-i}q^k\right)\left(u^k(x_1,x_2)-\frac{1}{h_{ki}}\int\limits_{x_i-h_{ki}}^{x_i+h_{ki}}\left(1-\frac{|x_i-x_i'|}{h_{ki}}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\frac{1}{h_{k,3-i}}\int\limits_{x_{3-i}-h_{k,3-i}}^{x_{3-i}+h_{k,3-i}}\left(1-\frac{|x_{3-i}-x_{3-i}'|}{h_{k,3-i}}\right)u^k(x_1',x_2')\,\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}x_2'\right)$$
$$=\left(T^2_{ki}T^2_{k,3-i}q^k\right)\left(\frac{1}{h_{ki}}\frac{1}{h_{k,3-i}}\int\limits_{x_i-h_{ki}}^{x_i+h_{ki}}\int\limits_{x_{3-i}-h_{k,3-i}}^{x_{3-i}+h_{k,3-i}}\left(1-\frac{|x_i-x_i'|}{h_{ki}}\right)\left(1-\frac{|x_{3-i}-x_{3-i}'|}{h_{k,3-i}}\right)\right.$$
$$\left.\cdot\big(u^k(x_1,x_2)-u^k(x_1',x_2')\big)\,\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}x_2'\right).$$

Sledi,

$$\left|\mu_1^k(x)\right| \le C\left|T_{ki}^2 T_{k,3-i}^2 q^k\right|\left|\frac{1}{h_{ki}}\frac{1}{h_{k,3-i}}\int\limits_{x_i-h_{ki}}^{x_i+h_{ki}}\int\limits_{x_{3-i}-h_{k,3-i}}^{x_{3-i}+h_{k,3-i}}\left[\int\limits_{x_1}^{x_1'}\frac{\partial u^k}{\partial x_1''}(x_1'',x_2)\,\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}x_2'\,\mathrm{d}x_1''\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{x_2}^{x_2'}\frac{\partial u^k}{\partial x_2''}(x_1',x_2'')\,\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}x_2'\,\mathrm{d}x_2''\right]\right| \le C\|q^k\|_{L_q(e_0^k)}|u^k|_{W^{s-1}_{\frac{2q}{q-2}}(e_0^k)}.$$

Neka je $2 < q < 2/(3-s)$. Za $2 < s \le 3$, μ_1^k je ograničen bilinearan funkcional od $(q^k, u^k) \in L_q(e_0^k) \times W^{s-1}_{\frac{2q}{q-2}}(e_0^k)$. Anulira se ako je u^k polinom prvog stepena. Koristeći Lemu Brambla-Hilberta, potapanja $W_2^{s-2} \subseteq L_q$ i $W_2^s \subseteq W^{s-1}_{\frac{2q}{q-2}}$ i sumiranjem po čvorovima mreže dobijamo sledeću ocenu:

$$h_k h_3 \sum_{x\in\omega^k}(\mu_1^k)^2 \le Ch^{2s-2}\|q^k\|^2_{W_2^{s-2}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W_2^s(\Omega^k)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Slično, $\mu_2^k(x)$ je ograničen bilinearan funkcional od $(q^k, u^k) \in W_2^{s-2}(e_0^k) \times W_\infty^1(e_0^k)$, koji se anulira kada su q^k ili u^k konstante. Kao u prethodnom slučaju koristeći potapanje $W_2^s \subseteq W_\infty^1$, dobijamo ocenu:

$$h_k h_3 \sum_{x\in\omega^k}(\mu_2^k)^2 \le Ch^{2s-2}\|q^k\|^2_{W_2^{s-2}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W_2^s(\Omega^k)}, \quad 2 < s \le 3.$$

Prelazimo sada na delove granice i ocenjujemo član μ^k.

$$\mu^k = \tilde{\mu}^k - \bar{\mu}^k = (T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2 q^k)u^k - T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2(q^k u^k) \mp \frac{h_{ki}}{3}(T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2 q^k)\left(T_{ki}^2\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right)$$

Predstavimo član μ^k u sledećem obliku:

$$\mu^k = \mu_{01}^k + \mu_{02}^k, \qquad x \in \gamma_{3-i,1}^{k-}/x \in \gamma_{3-i,2}^{k-}$$

gde je

$$\mu_{01}^k = (T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2 q^k)u^k - (T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2 q^k)(T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2 u^k)$$

i

$$\mu_{02}^k = (T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2 q^k)(T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2 u^k) - T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2(q^k u^k) \mp \frac{h_{ki}}{3}(T_{k,3-i}^{2\pm}T_{ki}^2 q^k)\left(T_{ki}^2\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right).$$

Za $2.5 < s \le 3$, ocena se izvodi analogno kao za μ_1^k i μ_2^k u unutrašnjim čvorovima mreže, jer je μ_{02}^k ograničen bilinearan funkcional koji se anulira kada je u^k konstanta.

Konačno, iz dobijenih ocena sledi

$$|[\mu^k]|_k \le Ch^{s-1}\|q^k\|_{W_2^{s-2}(\Omega^k)}\|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \quad 2.5 < s \le 3. \tag{4.20}$$

Sada je potrebno oceniti član $\|\mu^{\star k}\|_{\gamma_{ij}^k}$. Dovoljno je izvesti ocenu za $i = j = 1$. Za ostale delove granice, ocena se izvodi na isti način.
Stavljajući $x = (a_k, x_2) \in \gamma_{11}^k$, dobijamo:

$$\mu^{\star k}(a_k, x_2) = \frac{h_3}{3}\Big(T_{k1}^{2+}T_{k2}^2 q^k\Big)\Big(T_2^2 \frac{\partial u^k}{\partial x_1}\Big)$$
$$= \frac{h_3}{3}\left[\frac{2}{h_k}\int\limits_{a_k}^{a_k+h_k}\left(1 - \frac{x_1' - a_k}{h_k}\right)\frac{1}{h_3}\int\limits_{x_2-h_3}^{x_2+h_3}\left(1 - \frac{|x_2 - x_2'|}{h_3}\right) q^k(x_1', x_2')\,\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}x_2'\right]$$
$$\cdot\frac{1}{h_3}\int\limits_{x_2-h_3}^{x_2+h_3}\left(1 - \frac{|x_2 - x_2'|}{h_3}\right)\frac{\partial u^k}{\partial x_1}(x_1, x_2')\,\mathrm{d}x_2'.$$

Primenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-a i ocenjujući poslednji član njegovim maksimumom, dobijamo

$$|\mu^{\star k}(a_k, x_2)| \le C\,\|q^k\|_{L^2((a_k, a_k+h_k)\times(x_2-h_3, x_2+h_3))}\,\|u\|_{C^1(\bar\Omega^k)}.$$

Sumiranjem po čvorovima γ_{11}^k dobijamo

$$\|\mu^{\star k}\|_{\gamma_{11}^k} \le Ch^{1/2}\,\|q^k\|_{L^2((a_k, a_k+h_k)\times(c,d))}\,\|u^k\|_{C^1(\bar\Omega^k)}.$$

Koristeći poznatu nejednakost (za funkcije jedne promenljive) [20]

$$\|f\|_{L^2(0,h)} \le Ch^{1/2}\,\|f\|_{H^r(0,1)}, \qquad 0 < h < 1, \qquad r > 1/2$$

i teoremu potapanja

$$\|u^k\|_{C^1(\bar\Omega^k)} \le C\,\|u^k\|_{H^s(\Omega^k)}, \qquad s > 2$$

dobijamo

$$\|\mu^{\star k}\|_{\gamma_{11}^k} \le Ch\,\|q^k\|_{H^r(\Omega^k)}\,\|u^k\|_{H^s(\Omega^k)}, \qquad r > 1/2, \qquad s > 2.$$

Odatle, stavljajući $r = s - 2$, dobijamo:

$$\|\mu^{\star k}\|_{\gamma_{ij}^k} \le Ch\|q^k\|_{W_2^{s-2}(\Omega^k)}\|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \quad 2.5 < s \le 3. \tag{4.21}$$

Na sličan način ocenjujemo član $|\mu^{\star\star k}|$. Posmatrajmo donju levu graničnu tačku (a_k, c):

$$\mu^{\star\star k}(a_k, c) = \frac{h_k}{3}\Big(T_{k1}^{2+}T_{k2}^{2+}q^k\Big)\Big(T_{k2}^{2+}\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\Big) + \frac{h_k}{3}\Big(T_{k1}^{2+}T_{k2}^{2+}q\Big)\Big(T_{k1}^{2+}\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\Big).$$

Kao u prethodnom slučaju, dobijamo

$$|\mu^{\star\star k}(a_k, c)| \le C\,\|q^k\|_{L^2((a_k,a_k+h_k)\times(c,c+h_3))}\,\|u^k\|_{C^1(\bar\Omega^k)}.$$

Dalje je

$$\|q^k\|_{L^2((a_k,a_k+h_k)\times(c,c+h_3))} \le \|q^k\|_{L^2(\Omega^k)} \le \|q^k\|_{H^{s-2}(\Omega^k)}, \qquad s > 2$$

i

$$\|u^k\|_{C^1(\bar\Omega^k)} \le C\,\|u^k\|_{H^s(\Omega^k)}, \qquad s > 2.$$

Dakle,

$$|\mu^{\star\star k}| \le C\,\|q^k\|_{H^{s-2}(\Omega^k)}\,\|u\|_{H^s(\Omega^k)}, \qquad x \in \gamma_\star^k, \qquad s > 2. \tag{4.22}$$

Ocenimo sada član

$$\zeta^k = (T_{ki}^2\alpha^k)u^k - T_{ki}^2(\alpha^k u^k).$$

Predstavimo ga u obliku

$$\zeta^k = \zeta_{10}^k + \zeta_{20}^k, \qquad x \in \gamma_{3-i,1}^k \cup \gamma_{3-i,2}^k,$$

gde je

$$\zeta_{10}^k = (T_{ki}^2\alpha^k)u^k - (T_{ki}^2\alpha^k)(T_{ki}^2u^k)$$

i

$$\zeta_{20}^k = (T_{ki}^2\alpha^k)(T_{ki}^2u^k) - T_{ki}^2(\alpha^k u^k).$$

Za ocenu člana ζ_{10}^k, zadržaćemo se na slučaju kada je $i = 2$, odnosno posmatraćemo granicu γ_{11}^k. Koristeći reprezentaciju

$$\zeta_{10}^k(a_k, x_2) = (T_{k2}^2\alpha^k)\Bigg(u^k(a_k, x_2) - \frac{1}{h_{k2}}\int\limits_{x_2-h_{k2}}^{x_2+h_{k2}}\Big(1 - \frac{|x_2 - x_2'|}{h_{k2}}\Big)u^k(a_k, x_2')\,\mathrm{d}x_2'\Bigg)$$
$$= (T_{k2}^2\alpha^k)\frac{1}{h_{k2}}\int\limits_{x_2-h_{k2}}^{x_2+h_{k2}}\Big(1 - \frac{|x_2 - x_2'|}{h_{k2}}\Big)(u^k(a_k, x_2) - u^k(a_k, x_2'))\,\mathrm{d}x_2'$$

$$= (T_{k2}^2 \alpha^k) \frac{1}{h_{k2}} \int\limits_{x_2 - h_{k2}}^{x_2 + h_{k2}} \left(1 - \frac{|x_2 - x_2'|}{h_{k2}}\right) \int\limits_{x_2'}^{x_2} \frac{\partial u^k}{\partial x_2}(a_k, x_2'') \,\mathrm{d}x_2' \,\mathrm{d}x_2''$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
&\left|\zeta_{10}^k(a_k, x_2)\right| \leq C\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)} \int\limits_c^d \frac{\partial u^k}{\partial x_2}(a_k, x_2'') \,\mathrm{d}x_2' \,\mathrm{d}x_2'' \leq C\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)} \left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\right\|_{L_2(c,d)} \\
&\leq Ch^{1/2}\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)} \left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\right\|_{W_2^r(c,d)} \leq Ch^{1/2}\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)} \left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\right\|_{W_2^{r+1/2}(\Omega^k)} \\
&\leq Ch^{1/2}\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)} \|u^k\|_{W_2^{r+1+1/2}(\Omega^k)} \leq Ch^{1/2}\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)} \|u^k\|_{W_2^{2r+1}(\Omega^k)}, \quad r > 1/2.
\end{aligned}$$

Važi potapanje $W_2^{s-3/2} \subseteq C$, za $s > 2.5$, $s = 2r + 1$.

$$\|\zeta_{10}^k\|_{\gamma_{11}^k} \leq Ch^{s-1}\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{11}^k)} \|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \qquad 2.5 < s \leq 3.$$

ζ_{20}^k je ograničen bilinearan funkcional od $(\alpha^k, u^k) \in W_q^r(\Gamma_{3-i,j}^k) \times W_{\frac{2q}{q-2}}^p(\Gamma_{3-i,j}^k)$ koji se anulira kada su u^k ili α^k konstante. Koristeći bilinearnu verziju leme Brambla-Hilberta, sumiranjem po čvorovima mreže $\gamma_{3-i,j}^k$, dobijamo

$$\|\zeta_{20}^k\|_{\gamma_{3-i,j}^k} \leq Ch^{r+p}\|\alpha^k\|_{W_q^r(\Gamma_{3-i,j}^k)} \|u^k\|_{W_{\frac{2q}{q-2}}^p(\Gamma_{3-i,j}^k)}, \;\; 0 < r \leq 1, \;\; 0 < p \leq 1, \;\; q > 2.$$

Za $0 \leq r \leq 1$, $1 - \frac{1}{q} \leq p \leq 1$ važe potapanja
$W_2^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}(\Gamma_{3-i,j}^k) \subseteq W_q^r(\Gamma_{3-i,j}^k)$ i $W_2^{p+\frac{1}{q}}(\Gamma_{3-i,j}^k) \subseteq W_{\frac{2q}{q-2}}^p(\Gamma_{3-i,j}^k)$.
Sledi:

$$\|\zeta_{20}^k\|_{\gamma_{3-i,j}^k} \leq Ch^{r+p}\|\alpha^k\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}(\Gamma_{3-i,j}^k)} \|u^k\|_{W_2^{p+\frac{1}{q}}(\Gamma_{3-i,j}^k)}.$$

Koristeći teoremu o tragu [30] i teoremu potapanja, imamo

$$\begin{aligned}
&\|\zeta_{20}^k\|_{\gamma_{3-i,j}^k} \leq Ch^{r+p}\|\alpha^k\|_{W_2^{r+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}(\Gamma_{3-i,j}^k)} \|u^k\|_{W_2^{p+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}}(\Omega^k)} \\
&\leq Ch^{r+p}\|\alpha^k\|_{W_2^{r+p-\frac{1}{2}}(\Gamma_{3-i,j}^k)} \|u^k\|_{W_2^{p+r+1}(\Omega^k)}.
\end{aligned}$$

Stavljajući $r + p = s - 1$, dobijamo

$$\|\zeta_{20}^k\|_{\gamma_{3-i,j}^k} \leq Ch^{s-1}\|\alpha^k\|_{W_2^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma_{3-i,j}^k)} \|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \;\; 2 < s \leq 3.$$

Sumiranjem nejednakosti za ζ_{10}^k i ζ_{20}^k, dobijamo ocenu:

$$\|\zeta^k\|_{\gamma_{3-i,j}^k} \leq Ch^{s-1}\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,j}^k)} \|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \;\; 2.5 < s \leq 3. \tag{4.23}$$

Predstavimo član ζ_i^k u sledećem obliku:

$$\zeta_i^k = (T_{ki}^{2\pm}\alpha^k)u^k - T_{ki}^{2\pm}(\alpha^k u^k) = \zeta_{i1}^k + \zeta_{i2}^k, \qquad x \in \gamma_\star^k,$$

gde je,

$$\zeta_{i1}^k = (T_{ki}^{2\pm}\alpha^k)(u^k - (T_{ki}^{2\pm}u^k))$$

i

$$\zeta_{i2}^k = (T_{ki}^{2\pm}\alpha^k)(T_{ki}^{2\pm}u^k) - T_{ki}^{2\pm}(\alpha^k u^k).$$

Posmatrajmo donje levo teme.

$$\begin{aligned}
|\zeta_{i1}^k| &= \left|(T_{ki}^{2\pm}\alpha^k)\frac{2}{h_k}\int\limits_{a_k}^{a_k+h_k}\left(1-\frac{x_1'-a_k}{h_k}\right)\Big(u^k(a_k,c)-u^k(x_1',c)\Big)\,\mathrm{d}x_1'\right| \\
&= \left|(T_{ki}^{2\pm}\alpha^k)\frac{2}{h_k}\int\limits_{a_k}^{a_k+h_k}\left(1-\frac{x_1'-a_k}{h_k}\right)\int\limits_{a_k}^{x_1'}\frac{\partial u^k}{\partial x_1}(x_1'',c)\,\mathrm{d}x_1'\,\mathrm{d}x_1''\right| \\
&\le Ch^{1/2}\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)}\left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right\|_{L_2(a_k,a_k+h_k)} \le Ch\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)}\left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right\|_{W_2^r(a_k,b_k)} \\
&\le Ch\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{11}^k)}\left\|\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right\|_{W_2^{r+1/2}(\Omega^k)} \le Ch\|\alpha^k\|_{W_2^{2r-1/2}(\Gamma_{11}^k)}\|u^k\|_{W_2^{r+1/2+1}(\Omega^k)} \\
&\le Ch\|\alpha^k\|_{W_2^{2r-1/2}(\Gamma_{11}^k)}\|u^k\|_{W_2^{2r+1}(\Omega^k)}, \quad r > 1/2.
\end{aligned}$$

Analogno u ostalim temenima.
Stavljajući $2r+1=s$, dobijamo

$$|\zeta_{i1}^k| \le Ch\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^k)}\|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \quad s > 2, \qquad x \in \gamma_\star^k.$$

ζ_{i2}^k je ograničen bilinearan funkional od $(\alpha^k, u^k) \in W_q^r(\Gamma_{3-i,j}^k) \times W_{\frac{2q}{q-2}}^p(\Gamma_{3-i,j}^k)$ koji se anulira kada su u^k ili α^k konstante. Ocena se izvodi analogno kao za ζ_{20}^k.

$$|\zeta_{i2}^k| \le Ch\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^k)}\|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \quad s > 2, \qquad x \in \gamma_\star^k$$

odnosno,

$$|\zeta_i^k| \le Ch\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^k)}\|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \quad s > 2, \qquad x \in \gamma_\star^k. \tag{4.24}$$

Član χ^k možemo oceniti na sledeći način: označimo

$$I_1 = I_1(g) = \int_0^h g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{h}{2}\,[g(0) + g(h)].$$

Za $r > 0.5$ $I_1(g)$ je ograničen linearan funkcional od $g \in H^r(0,h)$ koji se anulira kada je $g(x)=1$ i $g(x)=x$. Primenom Leme Brambla-Hilberta dobijamo

$$|I_1| \le Ch^{r+1/2}\,|g|_{H^r(0,h)}, \qquad 0.5 < r \le 2,$$

odakle je

$$\left|\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - h\left[\frac{g(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} g(ih) + \frac{g(1)}{2}\right]\right| \le Ch^r\,|g|_{H^r(0,1)}, \qquad 0.5 < r \le 2.$$

Na osnovu ovih nejednakosti, koristeći osobine multiplikatora u prostorima Soboljeva, dobijamo

$$\begin{aligned} |\chi^k(x)| &\le Ch^r\,\left\|T_{k2}^2\beta^k(x,\cdot)\,u^{3-k}(\cdot)\right\|_{H^r(\Gamma_{1k}^{3-k})} \\ &\le Ch^r\,\left\|T_{k2}^2\beta^k(x,\cdot)\right\|_{H^r(\Gamma_{1k}^{3-k})}\,\left\|u^{3-k}(\cdot)\right\|_{H^r(\Gamma_{1k}^{3-k})}, \qquad 1 < r \le 2 \end{aligned}$$

kada $x \in \gamma_{1,3-k}^k$, a analogna nejednakost važi i za $x \in \gamma_{1,3-k}^{k\star}$. Posle sumiranja po čvorovima mreže $\bar{\gamma}_{1,3-k}^k$ dobijamo

$$|[\chi^k]|_{\bar{\gamma}_{1,3-k}^k} \le Ch^r\,\left\|\beta^k\right\|_{H^r(\Delta^k)}\,\left\|u^{3-k}\right\|_{H^r(\Gamma_{1k}^{3-k})}, \qquad 1 < r \le 2.$$

Konačno, primenom teoreme o tragu [30] i stavljajući $r = s-1$, imamo

$$|[\chi^k]|_{\bar{\gamma}_{1,3-k}^k} \le Ch^{s-1}\,\left\|\beta^k\right\|_{H^{s-1}(\Delta^k)}\,\left\|u^{3-k}\right\|_{H^s(\Omega^{3-k})}, \qquad 2 < s \le 3. \tag{4.25}$$

Ostalo je još da ocenimo član $\|\bar{\eta}_{ij}^k\|_{\ddot{H}^{1/2}(\gamma_{3-i,l}^{k-})}$. Primenom leme (4.7) dobijamo

$$\begin{aligned} |\bar{\eta}_{ii}^k|_{W_2^{1/2}(\gamma_{3-i,k}^{k-})} &\le Ch^{r+1/2}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\Big(p_{ii}^k\,\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)\right)\right|_{W_2^r(\Gamma_{3-i,k}^k)} \\ &\le Ch^{r+1/2}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\Big(p_{ii}^k\,\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)\right)\right\|_{W_2^{r+1/2}(\Omega^k)}, \qquad 0 < r \le 0.5. \end{aligned}$$

Koristeći nejednakost [36]

$$\|F\|_{L_2(0,\varepsilon)} \le C\begin{cases} \varepsilon^r\,\|F\|_{W_2^r(0,1)}, & 0 < r < 0.5, \\ \varepsilon^{1/2}\,\log\frac{1}{\varepsilon}\,\|F\|_{W_2^{1/2}(0,1)}, & r = 0.5, \\ \varepsilon^{1/2}\,\|F\|_{W_2^{1/2}(0,1)}, & r > 0.5, \end{cases}$$

gde je $0 < \varepsilon < 1$, dobijamo

$$h_{k,3-i} \sum_{x \in \gamma_{3-i,k}^{k-}} \left(\frac{1}{x_{3-i} + h_{k,3-i}/2} + \frac{1}{1 - x_{3-i} - h_{k,3-i}/2} \right) \left(\bar{\eta}_{ii}^k \right)^2$$
$$\leq C h^{2r+1} \log \frac{1}{h} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \Big(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \Big) \right) \right\|_{W_2^r(\Gamma_{3-i,k}^k)}^2$$
$$\leq C h^{2r+1} \log \frac{1}{h} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \Big(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \Big) \right) \right\|_{W_2^{r+1/2}(\Omega^k)}^2, \qquad 0 < r < 0.5$$

i

$$h \sum_{x \in \gamma_{3-i,k}^{k-}} \left(\frac{1}{x_{3-i} + h_{k,3-i}/2} + \frac{1}{1 - x_{3-i} - h_{k,3-i}/2} \right) \left(\bar{\eta}_{ii}^k \right)^2$$
$$\leq C h^2 \log^3 \frac{1}{h} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \Big(p_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \Big) \right) \right\|_{W_2^1(\Omega^k)}^2 .$$

Stavljajući $r + 2.5 = s$ i koristeći osobine multiplikatora u prostorima Soboljeva, dobijamo

$$\|\bar{\eta}_{ii}^k\|_{\ddot{W}_2^{1/2}(\gamma_{3-i,k}^{k-})} \leq C h^{s-2} \sqrt{\log \tfrac{1}{h}}\, \|p_{ii}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)} \, \|u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)}, \tag{4.26}$$

za $2.5 < s < 3$ i

$$\|\bar{\eta}_{ii}^k\|_{\ddot{W}_2^{1/2}(\gamma_{3-i,k}^{k-})} \leq C h \left(\log \tfrac{1}{h} \right)^{3/2} \, \|p_{ii}^k\|_{W_2^2(\Omega^k)} \, \|u\|_{W_2^3(\Omega^k)}. \tag{4.27}$$

Analogna ocena važi za $\bar{\eta}_{i,3-i}^k$ zamenjujući p_{ii}^k sa $p_{i,3-i}^k$.
Na osnovu (4.19)-(4.27) dobijamo traženu ocenu. □

4.6 Nekoercivan slučaj

Razmotrimo slučaj kada uslovi (4.9) nisu zadovoljeni. Pretpostavimo da je

$$\beta^1(x_2, x_2') = \beta^2(x_2', x_2). \tag{4.28}$$

Tada je operator L samokonjugovan. Na osnovu toga možemo zaključiti da je operator $L + \kappa I$ samokonjugovan i pozitivno definitan, pa su mu sve sopstvene vrednosti realne i pozitivne, a jedina tačka nagomilavanja im je $+\infty$. Odatle sledi da su sve sopstvene vrednosti operatora L takođe realne i veće od $-\kappa$ i da im je jedina tačka nagomilavanja $+\infty$. Prema tome može postojati samo konačno mnogo negativnih sopstevnih vrednosti operatora L. Označavajući sopstvene vrednosti operatora L sa

$\lambda_i, \;\; i = 1, 2, \ldots$ zaključujemo da postoji indeks l takav da je:

$$-\kappa < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_l < 0 < \lambda_{l+1} \leq \cdots .$$

Odgovarajući sopstveni vektori $u_i = (u_i^1, u_i^2)$ su ortogonalni u odnosu na skalarni proizvod $(\cdot, \cdot)_{L^2}$. Pretpostavimo da 0 nije sopstvena vrednost operatora L. Tada postoji inverzni operator L^{-1} i delujući njime na (4.1) dobijamo

$$u = L^{-1} f$$

odakle sledi

$$\|u\|_{L+\kappa I} = \|L^{-1} f\|_{L+\kappa I}.$$

Primenom Parsevalove jednakosti dalje dobijamo

$$\begin{aligned}\|u\|_{L+\kappa I} &= \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i + \kappa) \left(\frac{f_i}{\lambda_i} \right)^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i + \kappa}{\lambda_i} \right)^2 \frac{f_i^2}{\lambda_i + \kappa} \right\}^{1/2} \\ &\leq \max_i \left| \frac{\lambda_i + \kappa}{\lambda_i} \right| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i^2}{\lambda_i + \kappa} \right)^{1/2} = \max_i \left| \frac{\lambda_i + \kappa}{\lambda_i} \right| \|f\|_{(L+\kappa I)^{-1}},\end{aligned}$$

gde su sa f_i označeni Furijeovi koeficijenti elementa f: $f_i = (f, u_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

Pokažimo da je količnik $\left| \frac{\lambda_i + \kappa}{\lambda_i} \right|$ ograničen. Zaista, za $1 \leq i \leq l$ je

$$\left| \frac{\lambda_i + \kappa}{\lambda_i} \right| = \frac{\lambda_i + \kappa}{|\lambda_i|} = \frac{\kappa}{|\lambda_i|} - 1 \leq \frac{\kappa}{|\lambda_l|} - 1,$$

dok je za $i \geq l + 1$

$$\left| \frac{\lambda_i + \kappa}{\lambda_i} \right| = \frac{\lambda_i + \kappa}{\lambda_i} = \frac{\kappa}{\lambda_i} + 1 \leq \frac{\kappa}{\lambda_{l+1}} + 1.$$

Na taj način, iz prethodnih relacija dobijamo apriornu ocenu

$$\|u\|_{L+\kappa I} \leq c_4 \|f\|_{(L+\kappa I)^{-1}}, \tag{4.29}$$

gde je označeno

$$c_4 = \max \left\{ \frac{\kappa}{|\lambda_l|} - 1, \frac{\kappa}{\lambda_{l+1}} + 1 \right\}.$$

Primetimo da se konstanta c_4 ponaša kao $\frac{\text{const.}}{\min_i |\lambda_i|}$ i teži beskonačnosti kada se minimalna po modulu sopstvena vrednost približava nuli.

Analogni rezultati se dobijaju u diskretnom slučaju. Dakle

$$\|v\|_{L_h+\tilde{\kappa}I_h} \leq c_5\|\tilde{f}\|_{(L_h+\tilde{\kappa}I_h)^{-1}}, \tag{4.30}$$

gde je

$$c_5 = \max\left\{\frac{\tilde{\kappa}}{|\lambda_l^h|} - 1, \frac{\tilde{\kappa}}{\lambda_{l+1}^h} + 1\right\}.$$

Operatoru $L_h + \tilde{\kappa}I_h$ pridružujemo sledeću bilinearnu formu

$$\tilde{a}_h(v,w) = [(L_h + \tilde{\kappa}I_h)v, w] = a_h(v,w) + \tilde{\kappa}[v,w].$$

Na osnovu (4.12) i Leme 4.3 dobijamo sledeće

$$c_6|[v]|^2_{H_h^1} \leq |[v]|^2_{L_h+\tilde{\kappa}I_h} \leq c_7|[v]|^2_{H_h^1}, \tag{4.31}$$

gde je $c_6 = \tilde{m}$ i $c_7 = c_3 + \tilde{\kappa}$.

Primenjujući (4.30) na (4.15) i koristeći (4.31) dobijamo

$$|[z]|_{H_h^1} \leq \frac{c_5}{\sqrt{c_6}}|[\psi]|_{(L_h+\tilde{\kappa}I_h)^{-1}} = \frac{c_5}{\sqrt{c_6}} \sup_{w\neq 0} \frac{[\psi, w]}{|[w]|_{L_h+\tilde{\kappa}I_h}}$$

odakle, na isti način kao u dokazu Teoreme 4.8, dobijamo apriornu ocenu oblika (4.16). Napomenimo, da konstanta C u ovoj apriornoj oceni sada zavisi od c_5.

Važi sledeće tvrđenje.

Teorema 4.10. *Neka su uslovi (4.10) i (4.28) zadovoljeni i neka 0 nije sopstvena vrednost problema (4.1) niti problema (4.13). Tada rešenje diferencijske sheme (4.12) konvergira ka rešenju graničnog problema (4.1)-(4.5) i važe ocene brzine konvergencije (4.17) i (4.18).*

5 Transmisioni problem za jednačine paraboličkog tipa

5.1 Formulacija problema

Posmatrajmo dva nesusedna pravougaonika iz četvrtog poglavlja: $(a_1, b_1) \times (c, d)$ i $(a_2, b_2) \times (c, d)$ pri čemu je $a_1 < b_1 < a_2 < b_2$ i $c < d$. Neka je $a > 0$. Neposredno se proverava da je sa $(x_1, x_2) \to (x_1', x_2')$ gde je

$$x_1' = \begin{cases} \frac{x_1 - b_1}{b_1 - a_1} - a, & -\infty < x_1 \leq b_1, \\ \frac{2a}{a_2 - b_1} x_1 - a \frac{a_2 + b_1}{a_2 - b_1}, & b_1 < x_1 < a_2, \\ \frac{x_1 - a_2}{b_2 - a_2} + a, & a_2 \leq x_1 < +\infty \end{cases} \quad \text{i} \quad x_2' = \frac{x_2 - c}{d - c}$$

zadato obostrano jednoznačno preslikavanje $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$. Pri tome se pravougaonik $(a_1, b_1) \times (c, d)$ preslikava na jedinični kvadrat $(-1-a, -a) \times (0, 1)$, dok se pravougaonik $(a_2, b_2) \times (c, d)$ preslikava na njemu simetričan jedinični kvadrat $(a, a+1) \times (0, 1)$. Zato ćemo se u daljem radu ograničiti na slučaj dva simetrično raspoređena kvadrata, što će nam pojednostaviti izvođenja.

Neka je $\Omega^1 = (-a-1, -a) \times (0, 1)$ i $\Omega^2 = (a, a+1) \times (0, 1)$, gde je $a > 0$. Označimo $\Gamma^k = \partial\Omega^k = \cup_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k$, gde je $\Gamma_{11}^1 = \{x = (x_1, x_2) \in \Gamma^1 \,|\, x_1 = -a-1\}$, $\Gamma_{12}^1 = \{x \in \Gamma^1 \,|\, x_1 = -a\}$, $\Gamma_{21}^1 = \{x \in \Gamma^1 \,|\, x_2 = 0\}$, $\Gamma_{22}^1 = \{x \in \Gamma^1 \,|\, x_2 = 1\}$, dok se delovi Γ_{ij}^2 granice Γ^2 definišu analogno. Dalje, označimo $Q^k = \Omega^k \times (0, T)$, $\Sigma^k = \Gamma^k \times (0, T)$, $\Sigma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k \times (0, T)$ i $\Delta^k = \Gamma_{1,3-k}^k \times \Gamma_{1,k}^{3-k}$ $(k, i, j = 1, 2)$.

Kao modelni primer, razmatramo sledeći početno-granični problem:

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + L^k u^k = f^k, \qquad (x, t) \in Q^k, \tag{5.1}$$

$$l^k u^k = \begin{cases} r^k u^{3-k}, & (x, t) \in \Sigma_{1,3-k}^k, \\ 0, & (x, t) \in \Sigma^k \setminus \Sigma_{1,3-k}^k, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$u^k(x, 0) = u_0^k(x), \qquad x \in \Omega^k, \tag{5.3}$$

gde je

$$L^k u^k := -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right), \tag{5.4}$$

$$l^k u^k := \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j} \cos(\nu^k, x_i) + \alpha^k u^k, \tag{5.5}$$

$$\big(r^k u^{3-k}\big)(x,t) := \int_{\Gamma_{1,k}^{3-k}} \beta^k(x,x')\, u^{3-k}(x',t)\, \mathrm{d}\Gamma^{3-k}, \tag{5.6}$$

ν^k je jedinična normala na Γ^k i $k = 1,2$.

Granični uslovi (5.2) na $\Sigma^k \setminus \Sigma_{1,3-k}^k$ predstavljaju standardne Robinove granične uslove, dok na $\Sigma_{1,3-k}^k$ razmatramo nelokalne uslove saglasnosti Robin-Dirichlet-ovog tipa. Takvi uslovi konjugacije modeluju linearizovani problem toplotnog zračenja [3].

Pretpostavimo da su zadovoljeni standardni uslovi regularnosti i eliptičnosti::

$$a_{ij}^k = a_{ji}^k \in L^\infty(\Omega^k), \qquad \alpha^k \in L^\infty(\Gamma^k), \qquad \beta^k \in L^\infty(\Delta^k), \tag{5.7}$$

$$c_0^k \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^k \xi_i \xi_j \le c_1^k \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2, \qquad \forall x \in \bar{\Omega}^k, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{5.8}$$

Sa C, c_i i c_i^k označavamo pozitivne konstante, koje ne zavise od rešenja početno-graničnog problema i koraka mreže. Pri tome, C može uzeti različite vrednosti u različitim formulama.

5.2 Egzistencija i jedinstvenost slabog rešenja

Za dokazivanje egzistencije i jedinstvenosti slabog rešenja koristimo prostore navedene u odeljku 4.2.

Sa $u = (u^1, u^2)$ i $v = (v^1, v^2)$ definišemo bilinearnu formu:

$$\begin{aligned} A(u,v) = \sum_{k=1}^{2} \Bigg(&\iint_{\Omega^k} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_j} \frac{\partial v^k}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + \int_{\Gamma^k} \alpha^k u^k v^k \,\mathrm{d}\Gamma^k \\ &- \int_{\Gamma_{1,3-i}^k} \int_{\Gamma_{1,i}^{3-k}} \beta^k\, u^{3-k}\, v^k \,\mathrm{d}\Gamma^{3-k}\,\mathrm{d}\Gamma^k \Bigg). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Važi sledeće tvrđenje:

Lema 5.1. *Ako su zadovoljeni uslovi (5.7) bilinearna forma A, definisana sa (5.9), je ograničena na $H^1 \times H^1$. Ako su pri tome zadovoljeni i uslovi (5.8), ova forma zadovoljava Gårdingovu nejednakost na H^1 , odnosno postoje pozitivne konstante c_0*

i c_1 tako da važi

$$A(u,u) + c_1 \|u\|_{L_2}^2 \geq c_0 \|u\|_{H^1}^2, \quad \forall\, u \in H^1.$$

Napomena 5.2. *Ako su koeficijenti α^k pozitivni i β^k dovoljno mali, onda je bilinearna forma A koercivna, $c_1 = 0$. Dovoljni uslovi su*

$$|\beta^1(x,x') + \beta^2(x',x)| \leq 2\sqrt{\alpha^1(x)\,\alpha^2(x')}, \quad \forall\, x \in \Gamma_{12}^1,\ \forall\, x' \in \Gamma_{11}^2,$$

ili, grublje, ali jednostavnije

$$\|\beta^1\|_{L^\infty(\Delta^1)} + \|\beta^2\|_{L^\infty(\Delta^2)} \leq 2\sqrt{c_2^1\, c_2^2},$$

gde su c_2^k pozitivne konstante tako da važi $\alpha^k(x) \geq c_2^k$, $k = 1, 2$.

Na standardan način (videti [30]) definišemo anizotropne prostore Soboljeva $H^{s,r}$ u oblasti $Q^1 \times Q^2$:

$$H^{s,r} = L_2((0,T), H^s) \cap H^r((0,T), L_2).$$

Neka je $(H^1)'$ dualan prostor prostora H^1. Prostori H^1, L_2 i $(H^1)'$ formiraju Geljfandovu trojku $H^1 \subset L_2 \subset (H^1)'$ (videti [40]), sa neprekidnim i gustim potapanjima. Takođe, uvedimo prostor

$$W(0,T) = \left\{ u \,\middle|\, u \in L_2((0,T), H^1),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2((0,T), (H^1)') \right\}$$

snabdeven skalarnim proizvodom

$$(u,v)_{W(0,T)} = \int_0^T \left[(u(\cdot,t),\, v(\cdot,t))_{H^1} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t),\, \frac{\partial v}{\partial t}(\cdot,t) \right)_{(H^1)'} \right] \mathrm{d}t.$$

Slaba forma početno-graničnog problema (5.1)-(5.6) je:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t),\, v \right)_{L_2} + A(u(\cdot,t),\, v) = (f(\cdot,t),\, v)_{L_2}, \qquad \forall v \in H^1. \tag{5.10}$$

Problem (5.10) se uklapa u opštu teoriju paraboličkih diferencijalnih operatora u Hilbertovom prostoru (videti [40]). Primenom teoreme 26.1 iz [40] na (5.10) dobijamo sledeće tvrđenje:

Teorema 5.3. *Neka su zadovoljeni uslovi (5.7) i (5.8) i neka je $u_0 = (u_0^1, u_0^2) \in L_2$, $f = (f^1, f^2) \in L_2((0,T), (H^1)')$. Tada za $0 < T < +\infty$ početno-granični problem*

(5.1)-(5.6) ima jedinstveno slabo rešenje $u \in W(0,T)$, koje neprekidno zavisi od f i u_0.

5.3 Apriorna ocena

Pošto norma $\|\cdot\|_{(H^1)'}$ nije efektivno izračunljiva ograničićemo se na slučaj kada je:

$$f^k(x_1,x_2,t) = f^{k0}(x_1,x_2,t) + \frac{\partial(\rho_k(x_1)f^{k1}(x_1,x_2,t))}{\partial x_1} + \frac{\partial(\theta_k(x_2)f^{k2}(x_1,x_2,t))}{\partial x_2}$$
$$+\int\limits_0^T \frac{f^{k3}(x_1,x_2,t,t') - f^{k3}(x_1,x_2,t',t)}{|t-t'|}\,\mathrm{d}t', \quad k=1,2 \tag{5.11}$$

pri čemu $f^{k0}, f^{k1}, f^{k2} \in L_2((0,T), L_2(\Omega^k)) = L_2(Q^k)$, $f^{k3} \in L_2((0,T)^2, L_2(\Omega^k)) = L_2(R^k)$, $R^k = \Omega^k \times (0,T)^2$ i

$$\rho_1 = C_1(x_1+a+1)(-a-x_1), \quad x_1 \in (-a-1,-a), \quad C_1 > 0$$

$$\rho_2 = C_2(x_1-a)(a+1-x_1), \quad x_1 \in (a,a+1), \quad C_2 > 0$$

$$\theta_k = C_3 x_2(1-x_2), \quad x_1 \in (0,1), \quad C_3 > 0, \quad k=1,2.$$

U nastavku, potrebno je da ocenimo polunorme razlomljenog reda u odnosu na promenljivu t. Pokažimo kako takve polunorme mogu biti predstavljene preko Furijeovih koeficijenata. Neka je $\varphi \in L_2(0,T)$ realna funkcija definisana na intervalu $(0,T)$. Njen sinusni i kosinusni Furijeov razvoj definišemo na sledeći način:

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j cos\frac{j\pi t}{T}, \quad \varphi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j sin\frac{j\pi t}{T}, \quad 0 < t < T,$$

pri čemu je

$$a_j = a_j[\varphi] = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi(t') cos\frac{j\pi t'}{T}\,\mathrm{d}t', \quad b_j = b_j[\varphi] = \frac{2}{T}\int_0^T \varphi(t') sin\frac{j\pi t'}{T}\,\mathrm{d}t'.$$

Poznato je da važi sledeća jednakost (videti [2], [29]):

$$\frac{2}{T}\int_0^T \varphi(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0[\varphi]a_0[\psi]}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j[\varphi]a_j[\psi] = \sum_{j=1}^{\infty} b_j[\varphi]b_j[\psi].$$

Za $0 < \alpha < 1$ definišemo polunormu

$$|\varphi|_{H^\alpha(0,T)} = \left(\int_0^T \int_0^T \frac{|\varphi(t) - \varphi(t')|^2}{|t - t'|^{1+2\alpha}} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t' \right)^{1/2}.$$

Lema 5.4. [25], [30] *Važe sledeće asimptotske jednakosti:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha} a_k^2[\varphi] \asymp |\varphi|_{H^\alpha(0,T)}, \quad \forall \varphi \in H^\alpha(0,T), \;\; 0 < \alpha < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha} b_k^2[\varphi] \asymp \|\varphi\|_{H^\alpha(0,T)}, \qquad \begin{cases} \forall \varphi \in H^\alpha(0,T), & 0 < \alpha < 1/2 \\ \forall \varphi \in H_0^\alpha(0,T), & 1/2 < \alpha < 1 \end{cases}$$

dok za $\alpha = 1/2$ imamo

$$C_3 |\varphi|_{H^{1/2}(0,T)} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} k b_k^2[\varphi] \right)^{1/2} \le C_4 \|\varphi\|_{H_{00}^{1/2}(0,T)}$$

pri čemu je

$$\|\varphi\|^2_{H_{00}^{1/2}(0,T)} \equiv |\varphi|^2_{H^{1/2}(0,T)} + \int_0^T \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{T-t} \right) \varphi(t)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Teorema 5.5. *Neka važe uslovi (5.7) i (5.8) i neka je $u_0^k \in L_2(\Omega^k), f^{k0}, f^{k1}, f^{k2} \in L_2(Q^k), f^{k3} \in L_2(R^k), k = 1, 2$. Tada početno-granični problem (5.1)-(5.6),(4.10) ima jedinstveno rešenje $u = (u^1, u^2) \in H^{1,1/2}$ i važi apriorna ocena:*

$$\|u\|^2_{H^{1,1/2}} \le C \sum_{k=1}^{2} \left(\|u_0^k\|^2_{L_2(\Omega^k)} + \|f^{k0}\|^2_{L_2(Q^k)} + \|f^{k1}\|^2_{L_2(Q^k)} + \|f^{k2}\|^2_{L_2(Q^k)} + \|f^{k3}\|^2_{L_2(R^k)} \right). \tag{5.12}$$

Dokaz. Pomnožimo jednačinu (5.1) funkcijom u^k, $k = 1, 2$, integralimo po oblasti Ω^k, koristeći parcijalnu integraciju i sumirajmo po k:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t), u(\cdot, t) \right)_{L_2} + A(u(\cdot, t), u(\cdot, t)) = (f_0(\cdot, t), u(\cdot, t))_{L_2} - \left(\rho f_1(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial x_1}(\cdot, t) \right)_{L_2}$$
$$- \left(\theta f_2(\cdot, t), \frac{\partial u}{\partial x_2}(\cdot, t) \right)_{L_2} + \int\limits_0^T \frac{(f_3(x_1, x_2, t, t') - f_3(x_1, x_2, t', t), u(\cdot, t))_{L_2}}{|t - t'|} \,\mathrm{d}t'$$

pri čemu je $f_0 = (f^{10}, f^{20})$, $\rho f_1 = (\rho_1 f^{11}, \rho_2 f^{21})$, $\theta f_2 = (\theta_1 f^{12}, \theta_2 f^{22})$ i $f_3 =$

(f^{13}, f^{23}). Pomnožimo poslednju jednakost sa $2e^{-2c_1t}$ i iskoristimo vezu

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot,t), u(\cdot,t)\right)_{L_2} = \left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2}\right)'$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2c_1t}\|u\|^2_{L_2}\right) + 2e^{-2c_1t}\|u\|^2_{L_2} + 2e^{-2c_1t}A(u(\cdot,t),u(\cdot,t)) \\
&= 2e^{-2c_1t}\Bigg((f_0(\cdot,t),u(\cdot,t))_{L_2} - \left(\rho f_1(\cdot,t), \frac{\partial u}{\partial x_1}(\cdot,t)\right)_{L_2} \\
&- \left(\theta f_2(\cdot,t), \frac{\partial u}{\partial x_2}(\cdot,t)\right)_{L_2} + \int\limits_0^T \frac{(f_3(x_1,x_2,t,t') - f_3(x_1,x_2,t',t), u(\cdot,t))_{L_2}}{|t-t'|}\,\mathrm{d}t'\Bigg).
\end{aligned}$$

Koristeći Gårdingovu nejednakost i nejednakost Cauchy-Schwartza dobijamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2c_1t}\|u\|^2_{L_2}\right) + 2c_0e^{-2c_1t}\|u\|^2_{H^1} \le e^{-2c_1t}\Bigg(& c_0\|u\|^2_{L_2} + \frac{1}{c_0}\|f_0(\cdot,t)\|^2_{L_2} + c_0\left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2} \\
&+\frac{1}{c_0}\|\rho f_1(\cdot,t)\|^2_{L_2} + c_0\left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|^2_{L_2} + \frac{1}{c_0}\|\theta f_2(\cdot,t)\|^2_{L_2} \\
&+2\int\limits_0^T \frac{(f_3(\cdot,t,t') - f_3(\cdot,t',t), e^{-2c_1t}u(\cdot,t))_{L^2}}{|t-t'|}\,\mathrm{d}t'\Bigg).
\end{aligned}$$

Integralimo dobijenu nejednakost od 0 do T:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2c_1t}\|u\|^2_{L_2}\right)\mathrm{d}t + \int_0^T 2c_0e^{-2c_1t}\|u\|^2_{H^1}\,\mathrm{d}t \le & \int_0^T e^{-2c_1t}c_0\|u\|^2_{H^1}\,\mathrm{d}t \\
&+\int_0^T \frac{1}{c_0}e^{-2c_1t}\left(\|f_0(\cdot,t)\|^2_{L_2} + \|\rho f_1(\cdot,t)\|^2_{L_2} + \|\theta f_2(\cdot,t)\|^2_{L_2}\right)\mathrm{d}t \\
&+2\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{(f_3(\cdot,t,t') - f_3(\cdot,t',t), e^{-2c_1t}u(\cdot,t))_{L^2}}{|t-t'|}\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Dalje je,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2c_1t}\|u\|^2_{L_2}\right)\mathrm{d}t + \int_0^T c_0e^{-2c_1t}\|u\|^2_{H^1}\,\mathrm{d}t \le & \int_0^T C\big(\|f_0(\cdot,t)\|^2_{L_2} \\
&+\|f_1(\cdot,t)\|^2_{L_2} + \|f_2(\cdot,t)\|^2_{L_2}\big)\,\mathrm{d}t \\
&+2\int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{(f_3(\cdot,t,t'), e^{-2c_1t}u(\cdot,t) - e^{-2c_1t'}u(\cdot,t'))_{L_2}}{|t-t'|}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'
\end{aligned}$$

odakle sledi

$$c_0 e^{-2c_1 T} \int_0^T \|u\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}t \leq \|u_0\|_{L_2}^2 + C \int_0^T \big(\|f_0(\cdot,t)\|_{L_2}^2 + \|f_1(\cdot,t)\|_{L_2}^2$$

$$+ \|f_2(\cdot,t)\|_{L_2}^2 \big) \,\mathrm{d}t + 2 \int_0^T \int_0^T \frac{(f_3(\cdot,t,t'), e^{-2c_1 t} u(\cdot,t) - e^{-2c_1 t'} u(\cdot,t'))_{L_2}}{|t-t'|} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t'.$$

Ocenimo sada poslednji član desne strane u prethodnoj nejednakosti.

$$2 \int_0^T \int_0^T \frac{(f_3(\cdot,t,t'), e^{-2c_1 t} u(\cdot,t) - e^{-2c_1 t'} u(\cdot,t'))_{L_2}}{|t-t'|} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t'$$

$$\leq \frac{c_0 \varepsilon}{4 e^{2c_1 T}} \int_0^T \int_0^T \frac{\|e^{-2c_1 t} u(\cdot,t) - e^{-2c_1 t'} u(\cdot,t')\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t'$$

$$+ \frac{4 e^{2c_1 T}}{c_0 \varepsilon} \int_0^T \int_0^T \|f_3(\cdot,t,t')\|_{L_2}^2 \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t'.$$

Majoracijom desne strane dobijamo:

$$\int_0^T \int_0^T \frac{\|e^{-2c_1 t} u(\cdot,t) - e^{-2c_1 t'} u(\cdot,t')\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t' \leq$$

$$2 \int_0^T \int_0^T \frac{\|e^{-2c_1 t}(u(\cdot,t) - u(\cdot,t'))\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t' + 2 \int_0^T \int_0^T \frac{\|(e^{-2c_1 t} - e^{-2c_1 t'}) u(\cdot,t')\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t'.$$

Prvi integral s desne strane nejednakosti se lako ocenjuje:

$$\int_0^T \int_0^T \frac{\|e^{-2c_1 t}(u(\cdot,t) - u(\cdot,t'))\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t' \leq \int_0^T \int_0^T \frac{\|(u(\cdot,t) - u(\cdot,t'))\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t'.$$

Na samom kraju, koristeći Lagrange-ovu teoremu o srednjoj vrednosti, dobijamo:

$$\int_0^T \int_0^T \frac{\|(e^{-2c_1 t} - e^{-2c_1 t'}) u(\cdot,t')\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t' \leq \int_0^T \int_0^T \frac{\|(t-t')(-2c_1) u(\cdot,t')\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t'$$

$$= \int_0^T \int_0^T 4c_1^2 \frac{|t-t'|^2 \|u(\cdot,t')\|_{L_2}^2}{|t-t'|^2} \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}t' \leq 4c_1^2 T \int_0^T \|u(\cdot,t')\|_{L_2}^2 \,\mathrm{d}t' \leq 4c_1^2 T \int_0^T \|u(\cdot,t')\|_{H^1}^2 \,\mathrm{d}t'.$$

Izaberimo $0 < \varepsilon \leq 1/(4c_1^2 T)$. Tada, iz prethodnih nejednakosti dobijamo sledeću ocenu:

$$\|u\|^2_{L_2((0,T),H^1)} \le C\bigg(\|u_0\|^2_{L_2} + \|f_0\|^2_{L_2((0,T),L_2)} + \|f_1\|^2_{L_2((0,T),L_2)}$$
$$+\|f_2\|^2_{L_2((0,T),L_2)} + \|f_3\|^2_{L_2((0,T)^2,L_2)}\bigg) + \varepsilon|u|^2_{H^{1/2}((0,T),L_2)} \tag{5.13}$$

gde je

$$C = \frac{2e^{2c_1T}}{c_0}\max\left\{1, C_1^2, C_2^2, C_3^2, \frac{4e^{2c_1T}}{c_0\varepsilon}\right\} \ge \frac{2e^{2c_1T}}{c_0}\max\left\{1, C_1^2, C_2^2, C_3^2, \frac{16c_1^2Te^{2c_1T}}{c_0}\right\}.$$

Da bi dokaz teoreme bio kompletan, potrebno je oceniti polunormu $|u|^2_{H^{1/2}((0,T),L_2)}$. Pomnožimo jednačinu (5.1), sa desnom stranom (5.11), funkcijom $\sin k\pi t/T$ i integralimo u odnosu na promenljivu t u granicama od 0 do T. Ograničimo se prvo na oblast Q^1. Analogno važi u Q^2. Koristeći relacije

$$\int_0^T \frac{\partial u^1}{\partial t}\sin\frac{k\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = -\int_0^T \frac{k\pi}{T}u^1\cos\frac{k\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = -\frac{k\pi}{T}\frac{T}{2}a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)],$$
$$-\int_0^T \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{11}^1\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)\sin\frac{k\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = -\frac{T}{2}b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{11}^1\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right],$$
$$-\int_0^T \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_{21}^1\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)\sin\frac{k\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = -\frac{T}{2}b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_{21}^1\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right],$$
$$-\int_0^T \frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_{22}^1\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)\sin\frac{k\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = -\frac{T}{2}b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a_{22}^1\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right],$$
$$-\int_0^T \frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{12}^1\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)\sin\frac{k\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = -\frac{T}{2}b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a_{12}^1\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]$$

i

$$\int_0^T \left(f^{10} + f^{11} + f^{12} + F^{13}\right)\sin\frac{k\pi t}{T}\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2}\bigg(b_k[f^{10}(x_1,x_2,\cdot)]$$
$$+b_k\left[\frac{\partial(\rho_1 f^{11})}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right] + b_k\left[\frac{\partial(\theta_1 f^{12})}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right] + b_k[F^{13}(x_1,x_2,\cdot)]\bigg)$$

gde je označeno

$$F^{13}(x_1,x_2,t) = \int_0^T \frac{f^{13}(x_1,x_2,t,t') - f^{13}(x_1,x_2,t',t)}{|t-t'|}\,\mathrm{d}t'$$

dobijamo

$$\frac{k\pi}{T}a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)] = -b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^1_{11}\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right] - b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a^1_{21}\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]$$
$$-b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a^1_{22}\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right] - b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^1_{12}\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right] - b_k[f^{10}(x_1,x_2,\cdot)]$$
$$-b_k\left[\frac{\partial(\rho_1 f^{11})}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right] - b_k\left[\frac{\partial(\theta_1 f^{12})}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right] - b_k[F^{13}(x_1,x_2,\cdot)].$$

Pomnožimo poslednju jednakost sa $a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]$, integralimo po oblasti Ω^1 i sumirajmo po k:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\frac{k\pi}{T}a_k^2[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\Bigg\{-b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^1_{11}\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]$$
$$a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)] - b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a^1_{21}\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]$$
$$-b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a^1_{22}\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]$$
$$-b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^1_{12}\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)] - b_k[f^{10}(x_1,x_2,\cdot)]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]$$
$$-b_k\left[\frac{\partial(\rho_1 f^{11})}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)] - b_k\left[\frac{\partial(\theta_1 f^{12})}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]$$
$$-b_k[F^{13}(x_1,x_2,\cdot)]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\Bigg\}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

Dalje,

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\Bigg\{-b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^1_{11}\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]$$
$$-b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a^1_{21}\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)] - b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(a^1_{22}\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]$$
$$a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)] - b_k\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(a^1_{12}\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\Bigg\}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\Bigg\{a^1_{11}(x_1,x_2)b_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right]$$
$$+a^1_{22}(x_1,x_2)b_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right]$$
$$+a^1_{12}(x_1,x_2)b_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right]$$

$$+a_{21}^1(x_1,x_2)b_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right]\Big\}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\Big\{\alpha^1(x_2)b_k[u^1(-a-1,x_2,\cdot)]a_k[u^1(-a-1,x_2,\cdot)]$$
$$+\alpha^1(x_2)b_k[u^1(-a,x_2,\cdot)]a_k[u^1(-a,x_2,\cdot)]\Big\}\,\mathrm{d}x_2$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-a-1}^{-a}\Big\{\alpha^1(x_1)b_k[u^1(x_1,0,\cdot)]a_k[u^1(x_1,0,\cdot)]$$
$$+\alpha^1(x_1)b_k[u^1(x_1,1,\cdot)]a_k[u^1(x_1,1,\cdot)]\Big\}\,\mathrm{d}x_1$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\int_0^1\beta^1(x_2,x_2')b_k[u^2(a,x_2',\cdot)]a_k[u^1(-a,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_2'$$
$$\le\frac{C}{T}\bigg[\int_0^T\iint_{\Omega^1}\bigg(\Big(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)\Big)^2+2\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1,x_2,t)\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(x_1,x_2,t)$$
$$+\Big(\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1,x_2,t)\Big)^2\bigg)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t+\int_0^T\int_0^1\bigg(\Big(u^1(-a-1,x_2,\cdot)\Big)^2+\Big(u^1(-a,x_2,\cdot)\Big)^2$$
$$+\Big(u^2(a,x_2,\cdot)\Big)^2\bigg)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-a-1}^{-a}\bigg(\Big(u^1(x_1,0,\cdot)\Big)^2+\Big(u^1(x_1,1,\cdot)\Big)^2\bigg)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t\bigg].$$

Analogno dokazu leme 4.1, koristeći poznatu ε-nejednakost, dobijamo sledeće ocene:

$$\int_0^T\int_0^1\bigg(\Big(u^1(-a-1,x_2,\cdot)\Big)^2+\Big(u^1(-a,x_2,\cdot)\Big)^2$$
$$+\Big(u^2(a,x_2,\cdot)\Big)^2\bigg)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t+\int_0^T\int_{-a-1}^{-a}\bigg(\Big(u^1(x_1,0,\cdot)\Big)^2+\Big(u^1(x_1,1,\cdot)\Big)^2\bigg)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}t$$
$$\le\varepsilon\Big\|\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\Big\|^2_{L_2(Q^1)}+\frac{2}{\varepsilon}\|u^1\|^2_{L_2(Q^1)}+\varepsilon\Big\|\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\Big\|^2_{L_2(Q^1)}+\varepsilon\Big\|\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\Big\|^2_{L_2(Q^2)}+\frac{2}{\varepsilon}\|u^2\|^2_{L_2(Q^2)}.$$

Dakle,

$$S_1\le\frac{C}{T}\bigg(\Big\|\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\Big\|^2_{L_2(Q^1)}+\Big\|\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\Big\|^2_{L_2(Q^1)}+\varepsilon\Big\|\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\Big\|^2_{L_2(Q^1)}+\frac{2}{\varepsilon}\|u^1\|^2_{L_2(Q^1)}$$
$$+\varepsilon\Big\|\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\Big\|^2_{L_2(Q^1)}+\varepsilon\Big\|\frac{\partial u^2}{\partial x_1}\Big\|^2_{L_2(Q^2)}+\frac{2}{\varepsilon}\|u^2\|^2_{L_2(Q^2)}\bigg).$$

Važe sledeće ocene:

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}b_k[f^{10}(x_1,x_2,\cdot)]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$
$$\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\big(b_k[f^{10}(x_1,x_2,\cdot)]^2+a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]^2\big)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2$$
$$\le\frac{1}{T}\|f^{10}\|^2_{L_2(Q^1)}+\frac{1}{T}\|u^1\|^2_{L_2(Q^1)},$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1} b_k\left[\frac{\partial(\rho_1 f^{11})}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= -\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\rho_1(x_1)b_k[f^{11}(x_1,x_2,\cdot)]\Big)a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\rho_1(x_1)b_k[f^{11}(x_1,x_2,\cdot)]a_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_1}(x_1,x_2,\cdot)\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&\le \frac{C}{T}\|f^{11}\|^2_{L_2(Q^1)}+\frac{1}{T}\left\|\frac{\partial u^1}{\partial x_1}\right\|^2_{L_2(Q^1)}
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1} b_k\left[\frac{\partial(\theta_1 f^{12})}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= -\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\theta_1(x_2)b_k[f^{12}(x_1,x_2,\cdot)]\Big)a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}\theta_1(x_2)b_k[f^{12}(x_1,x_2,\cdot)]a_k\left[\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(x_1,x_2,\cdot)\right]\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\\
&\le \frac{C}{T}\|f^{12}\|^2_{L_2(Q^1)}+\frac{1}{T}\left\|\frac{\partial u^1}{\partial x_2}\right\|^2_{L_2(Q^1)}.
\end{aligned}
$$

Koristeći Lemu 5.4 ocenimo sumu:

$$
\left|\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1} b_k[F^{13}(x_1,x_2,\cdot)]a_k[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\sup_g\frac{\left|\int_0^T\iint_{\Omega^1}F^{13}(x_1,x_2,t)g(x_1,x_2,t)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t\right|}{\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}kb_k^2[g(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2}\\
&\quad\times\left(\sum_{k=1}^{\infty}\iint_{\Omega^1}ka_k^2[u^1(x_1,x_2,\cdot)]\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{1/2}\\
&\le C\sup_g\frac{\left|\int_0^T\!\int_0^T\iint_{\Omega^1}f^{13}(x_1,x_2,t,t')\frac{g(x_1,x_2,t)-g(x_1,x_2,t')}{|t-t'|}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'\right|}{\left(\int_0^T\!\int_0^T\iint_{\Omega^1}\frac{|g(x_1,x_2,t)-g(x_1,x_2,t')|^2}{|t-t'|^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'\right)^{1/2}}\\
&\quad\times\left(\int_0^T\!\!\int_0^T\iint_{\Omega^1}\frac{|u^1(x_1,x_2,t)-u^1(x_1,x_2,t')|^2}{|t-t'|^2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t'\right)^{1/2}\\
&\le C\|f^{13}\|_{L_2(R^1)}|u^1|_{H^{1/2}((0,T),L_2(\Omega^1))}\le\frac{C}{\delta}\|f^{13}\|^2_{L_2(R^1)}+\delta|u^1|^2_{H^{1/2}((0,T),L_2(\Omega^1))}.
\end{aligned}
$$

Analogno se dobija za $u^2(x_1,x_2,t)$. Uzimajući dovoljno malo $\delta>0$, iz prethodnih nejednakosti, sledi:

$$
\begin{aligned}
|u|^2_{H^{1/2}((0,T),L_2)} \leq C\Big(& \|u\|^2_{L_2((0,T),H^1)} + \|f^0\|^2_{L_2((0,T),L_2)} + \|f^1\|^2_{L_2((0,T),L_2)} \\
& + \|f^2\|^2_{L_2((0,T),L_2)} + \|f^3\|^2_{L_2((0,T)^2,L_2)}\Big).
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Konačno, za dovoljno malo $\varepsilon > 0$ i na osnovu nejednakosti (5.13) i (5.14) dobijamo (5.12). □

5.4 Aproksimacija metodom konačnih razlika

Neka je $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \geq 1$, $h = 1/n$ i $\tau = T/m$. Razmatramo uniformnu mrežu $\bar{\omega}^k$ sa korakom h u $\bar{\Omega}^k$ i uniformnu mrežu $\bar{\omega}_\tau$ sa korakom τ na intervalu $[0, T]$. Takođe, označimo $\omega^k = \bar{\omega}^k \cap \Omega^k$, $\omega_\tau = \bar{\omega}_\tau \cap (0,T)$, $\omega_\tau^- = \bar{\omega}_\tau \cap [0,T)$, $\omega_\tau^+ = \bar{\omega}_\tau \cap (0,T]$, $\gamma^k = \omega^k \cap \Gamma^k$, $\bar{\gamma}^k_{ij} = \bar{\omega}^k \cap \Gamma^k_{ij}$, $\gamma^k_{1j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{1j} \,:\, 0 < x_2 < 1\}$, $\gamma^{k-}_{1j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{1j} \,:\, 0 \leq x_2 < 1\}$, $\gamma^{k+}_{1j} = \{x \in \bar{\gamma}^k_{1j} \,:\, 0 < x_2 \leq 1\}$, $\gamma^{k\star}_{1j} = \bar{\gamma}^k_{1j} \setminus \gamma^k_{1j}, \gamma^1_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^1_{2j} \,:\, -a-1 < x_1 < -a\}$, $\gamma^{1-}_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^1_{2j} \,:\, -a-1 \leq x_1 < -a\}$, $\gamma^{1+}_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^1_{2j} \,:\, -a-1 < x_1 \leq -a\}$,$\gamma^2_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^2_{2j} \,:\, a < x_1 < a+1\}$, $\gamma^{2-}_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^2_{2j} \,:\, a \leq x_1 < a+1\}$, $\gamma^{2+}_{2j} = \{x \in \bar{\gamma}^2_{2j} \,:\, a < x_1 \leq a+1\}$, $\gamma^{k\star}_{2j} = \bar{\gamma}^k_{2j} \setminus \gamma^k_{2j}$ $\gamma^k_\star = \gamma^k \setminus \left\{\cup_{i,j}\gamma^k_{ij}\right\}$, $\sigma^k_{ij} = \gamma^k_{ij} \times \omega^-_\tau$, $\bar{\sigma}^k_{ij} = \bar{\gamma}^k_{ij} \times \omega^-_\tau$ i $\bar{Q}^k_{h\tau} = \bar{\omega}^k \times \bar{\omega}_\tau$, $i, j, k = 1, 2$.

Operatori konačnih razlika se definišu na standardan način [37]:

$$
v^k_{x_i} = \frac{(v^k)^{+i} - v^k}{h}, \quad v^k_{\bar{x}_i} = \frac{v^k - (v^k)^{-i}}{h}, \quad v^k_t = \frac{\hat{v}^k - v^k}{\tau}, \quad v^k_{\bar{t}} = \frac{v^k - \check{v}^k}{\tau},
$$

pri čemu je $(v^k)^{\pm i}(x,t) = v^k(x \pm he_i, t)$, e_i je jedinični vektor ose x_i, $\hat{v}^k(x,t) = v^k(x, t+\tau)$ i $\check{v}^k(x,t) = v^k(x, t-\tau)$, $i, k = 1, 2$.

Pored diskretnih skalarnih proizvoda i normi uvedenih u odeljku 4.2, uvedimo sledeće diskretne skalarne proizvode i odgovarajuće norme:

$$
\|v^k\|^2_\tau = \tau \sum_{t \in \omega^+_\tau} |v^k(t)|^2, \qquad |[v^k\|^2_{k,i,h\tau} = \tau \sum_{t \in \omega^+_\tau} |[v^k(\cdot,t)\|^2_{k,i},
$$

$$
\|v^k\|^2_{\sigma^k_{ij}} = \tau \sum_{t \in \omega^+_\tau} h \sum_{x \in \gamma^k_{ij}} |v^k(x,t)|^2, \qquad |[v^k]|^2_{\bar{\sigma}^k_{ij}} = \tau \sum_{t \in \omega^+_\tau} |[v^k(\cdot,t)]|^2_{\bar{\gamma}^k_{ij}},
$$

$$
|[v^k\|^2_{L^2(\omega^+_\tau, \ddot{H}^{1/2}(\gamma^{k-}_{ij}))} = \tau \sum_{t \in \omega^+_\tau} |[v^k(\cdot,t)\|^2_{\ddot{H}^{1/2}(\gamma^{k-}_{ij})},
$$

$$
|v^k|^2_{H^{1/2}(\bar{\omega}_\tau, L^2(\bar{\omega}^k))} = \tau^2 \sum_{t,\, t' \in \bar{\omega}_\tau,\; t' \neq t} \frac{|[v^k(\cdot,t) - v^k(\cdot,t')]|^2_k}{(t-t')^2},
$$

$$|[v^k]|^2_{\ddot{H}^{1/2}(\bar{\omega}_\tau, L^2(\bar{\omega}^k))} = |v^k|^2_{H^{1/2}(\bar{\omega}_\tau, L^2(\bar{\omega}^k))} + \tau \sum_{t\in\bar{\omega}_\tau} \left(\frac{1}{t+\tau/2} + \frac{1}{T-t+\tau/2} \right) |[v^k(\cdot,t)]|^2_k,$$

$$|[v^k]|^2_{L^2(\omega_\tau^+,\, H^1(\bar{\omega}^k))} = \tau \sum_{t\in\omega_\tau^+} |[v^k(\cdot,t)]|^2_{H^1(\bar{\omega}^k)},$$

$$|[v^k]|^2_{H^{1,\,1/2}(Q^k_{h\tau})} = |[v^k]|^2_{L^2(\omega_\tau^+,\, H^1(\bar{\omega}^k))} + |v^k|^2_{H^{1/2}(\bar{\omega}_\tau, L^2(\bar{\omega}^k))}.$$

Za $v = (v^1, v^2)$ i $w = (w^1, w^2)$ označimo

$$[v, w] = [v^1, w^1]_1 + [v^2, w^2]_2, \qquad |[v]|^2 = [v, v],$$

$$|[v]|^2_{H^1_h} = |[v^1]|^2_{H^1(\bar{\omega}^1)} + |[v^2]|^2_{H^1(\bar{\omega}^2)},$$

$$|[v]|^2_{H^{1,\,1/2}_{h\tau}} = |[v^1]|^2_{H^{1,\,1/2}(Q^1_{h\tau})} + |[v^2]|^2_{H^{1,\,1/2}(Q^2_{h\tau})}.$$

Takođe, definišemo Steklovljeve operatore usrednjenja sa koracima h i τ [38]:

$$\begin{aligned}
T_i^+ f^k(x,t) &= \int_0^1 f^k(x + hx_i' e_i, t)\,\mathrm{d}x_i' = T_i^- f^k(x + he_i, t) = T_i f^k(x + 0.5he_i, t),\\
T_i^{2\pm} f^k(x,t) &= 2\int_0^1 (1 - x_i') f^k(x \pm hx_i' e_i, t)\,\mathrm{d}x_i', \qquad i = 1, 2,\\
T_t^+ f^k(x,t) &= \int_0^1 f^k(x, t + \tau t')\,\mathrm{d}t' = T_t^- f^k(x, t+\tau) = T_i f^k(x, t + 0.5\tau).
\end{aligned}$$

Aproksimiramo početno granični problem (5.1)-(5.6) sledećom eksplicitnom shemom konačnih razlika:

$$\begin{aligned}
v_t^k + L_h^k v &= \tilde{f}^k, \qquad x \in \bar{\omega}^k, \quad t \in \omega_\tau^-,\\
v^k(x,0) &= u_0^k(x), \qquad x \in \bar{\omega}^k, \qquad k = 1, 2
\end{aligned} \tag{5.15}$$

pri čemu je

$$
L_h^1 v = \begin{cases}
-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{2}\Big[\big(a_{ij}^1\, v_{x_j}^1\big)_{\bar{x}_i} + \big(a_{ij}^1\, v_{\bar{x}_j}^1\big)_{x_i}\Big], & x \in \omega^1 \\
\frac{2}{h}\Big[-\frac{a_{11}^1+(a_{11}^1)^{+1}}{2}\, v_{x_1}^1 - a_{12}^1\,\frac{v_{x_2}^1+v_{\bar{x}_2}^1}{2} + \tilde{\alpha}^1 v^1\Big] - \big(a_{12}^1\, v_{\bar{x}_2}^1\big)_{x_1} & \\
\qquad -\big(a_{21}^1\, v_{x_1}^1\big)_{\bar{x}_2} - \frac{1}{2}\,\big(a_{22}^1\, v_{x_2}^1\big)_{\bar{x}_2} - \frac{1}{2}\,\big(a_{22}^1\, v_{\bar{x}_2}^1\big)_{x_2}, & x \in \gamma_{11}^1 \\
\frac{2}{h}\Big[-\frac{a_{11}^1+(a_{11}^1)^{+1}}{2}\, v_{x_1}^1 - a_{12}^1 v_{x_2}^1 - a_{21}^1 v_{x_1}^1 - \frac{a_{22}^1+(a_{22}^1)^{+2}}{2}\, v_{x_2}^1 & \\
\qquad +(\tilde{\alpha}_1^1 + \tilde{\alpha}_2^1) v^1\Big], & x = (-a-1, 0) \\
\frac{2}{h}\Big[-\frac{a_{11}^1+(a_{11}^1)^{+1}}{2}\, v_{x_1}^1 - a_{12}^1 v_{\bar{x}_2}^1 + a_{21}^1 v_{x_1} + \frac{a_{22}^1+(a_{22}^1)^{-2}}{2}\, v_{\bar{x}_2}^1 & \\
\qquad +(\tilde{\alpha}_1^1 + \tilde{\alpha}_2^1) v^1\Big] - 2\,\big(a_{12}^1\, v_{\bar{x}_2}^1\big)_{x_1} - 2\,\big(a_{21}^1\, v_{x_1}^1\big)_{\bar{x}_2}, & x = (-a-1, 1) \\
\frac{2}{h}\Big[\frac{a_{11}^1+(a_{11}^1)^{-1}}{2}\, v_{\bar{x}_1}^1 + a_{12}^1\,\frac{v_{x_2}^1+v_{\bar{x}_2}^1}{2} + \tilde{\alpha}^1 v^1 & \\
\qquad -[\tilde{\beta}^1(x,\cdot), v^2(\cdot)]_{\bar{\gamma}_{11}^2}\Big] - \big(a_{12}^1\, v_{x_2}^1\big)_{\bar{x}_1} & \\
\qquad -\big(a_{21}^1\, v_{\bar{x}_1}^1\big)_{x_2} - \frac{1}{2}\,\big(a_{22}^1\, v_{x_2}^1\big)_{\bar{x}_2} - \frac{1}{2}\,\big(a_{22}^1\, v_{\bar{x}_2}^1\big)_{x_2}, & x \in \gamma_{12}^1 \\
\frac{2}{h}\Big[\frac{a_{11}^1+(a_{11}^1)^{-1}}{2}\, v_{\bar{x}_1}^1 + a_{12}^1 v_{x_2}^1 - a_{21}^1 v_{\bar{x}_1} - \frac{a_{22}^1+(a_{22}^1)^{+2}}{2}\, v_{x_2}^1 & \\
\qquad +(\tilde{\alpha}_1^1 + \tilde{\alpha}_2^1) v^1 - [\tilde{\beta}^1(x,\cdot), v^2(\cdot)]_{\bar{\gamma}_{11}^2}\Big] & \\
\qquad -2\,\big(a_{12}^1\, v_{x_2}^1\big)_{\bar{x}_1} - 2\,\big(a_{21}^1\, v_{\bar{x}_1}^1\big)_{x_2}, & x = (-a, 0) \\
\frac{2}{h}\Big[\frac{a_{11}^1+(a_{11}^1)^{-1}}{2}\, v_{\bar{x}_1}^1 + a_{12}^1 v_{\bar{x}_2}^1 + a_{21}^1 v_{\bar{x}_1}^1 + \frac{a_{22}^1+(a_{22}^1)^{-2}}{2}\, v_{\bar{x}_2}^1 & \\
\qquad +(\tilde{\alpha}_1^1 + \tilde{\alpha}_2^1) v^1 - [\tilde{\beta}^1(x,\cdot), v^2(\cdot)]_{\bar{\gamma}_{11}^2}\Big], & x = (-a, 1) \\
\text{i analogno za ostale čvorove mreže,} & x \in \gamma_{21}^1 \cup \gamma_{22}^1
\end{cases}
$$

$L_h^2 v$ se definiše analogno,

$$
\tilde{f}^k = \begin{cases}
T_1^2 T_2^2 T_t^+ f^k, & x \in \omega^k \\
T_i^{2\pm} T_{3-i}^2 T_t^+ f^k, & x \in \gamma_{i1}^k \,/\, x \in \gamma_{i2}^k \\
T_1^{2\pm} T_2^{2\pm} T_t^+ f^k, & x \in \gamma_\star^k
\end{cases}
$$

$$
\tilde{\alpha}^k = T_{3-i}^2 \alpha^k\,, \qquad x \in \gamma_{i1}^k \cup \gamma_{i2}^k\,, \qquad i = 1,\, 2\,,
$$

$$
\tilde{\alpha}_i^k = T_i^{2\pm} \alpha^k\,, \qquad x \in \gamma_\star^k, \qquad i = 1,\, 2
$$

i

$$
\tilde{\beta}^k = \begin{cases}
T_2^2 \beta^k, & x \in \gamma_{1,3-k}^k, \\
T_2^{2\pm} \beta^k, & x \in \gamma_{1,3-k}^{k\star}.
\end{cases}
$$

Diferencijska shema (5.15) može biti predstavljena kao eksplicitna operatorska diferencijska shema na sledeći način

$$v_t + L_h v = \tilde{f}, \qquad v\big|_{t=0} = u_0\,, \tag{5.16}$$

gde je $v = (v^1, v^2)$, $v_t = (v_t^1, v_t^2)$, $\tilde{f} = (\tilde{f}^1, \tilde{f}^2)$ i $L_h v = (L_h^1 v, L_h^2 v)$.

U nastavku ćemo pretpostaviti da generalisano rešenje problema (5.1)-(5.6) pripada prostoru Soboljeva $H^{s,s/2}$, $2 < s \leq 3$, dok ulazni podaci zadovoljavaju sledeće uslove glatkosti:

$$\begin{gathered}
a_{ij}^k \in H^{s-1}(\Omega^k), \quad \alpha^k \in H^{s-3/2}(\Gamma_{ij}^k), \quad \alpha^k \in C(\Gamma^k), \quad \beta^k \in H^{s-1}(\Delta^k), \\
f^k \in H^{s-2,\, s/2-1}(Q^k), \quad u_0^k \in H^{s-1}(\Omega^k), \quad k, i, j = 1, 2.
\end{gathered} \tag{5.17}$$

Razmotrimo bilinearnu formu $A_h(v, w)$ pridruženu diferencijskom operatoru $L_h v$:

$$\begin{aligned}
A_h(v, w) = [L_h v,\, w] = \sum_{k=1}^{2} \Bigg\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \Big[& [a_{ii}^k v_{x_i}^k,\, w_{x_i}^k)_{k,i} + (a_{ii}^k v_{\bar{x}_i}^k,\, w_{\bar{x}_i}^k]_{k,i} \\
& + [a_{i,3-i}^k v_{x_{3-i}}^k,\, w_{x_i}^k)_k + (a_{i,3-i}^k v_{\bar{x}_{3-i}}^k,\, w_{\bar{x}_i}^k]_k \Big] + h \sum_{x \in \gamma^k \setminus \gamma_\star^k} \tilde{\alpha}\, v^k w^k \\
+ \frac{h}{2} \sum_{x \in \gamma_\star^k} (\tilde{\alpha}_1^k + \tilde{\alpha}_2^k)\, v^k w^k & - h^2 \sideset{}{'}\sum_{x \in \bar{\gamma}_{1,3-k}^k} \; \sideset{}{'}\sum_{x' \in \bar{\gamma}_{1,k}^{3-k}} \tilde{\beta}^k(x, x') v^{3-k}(x') w^k(x) \Bigg\},
\end{aligned}$$

gde je

$$\sideset{}{'}\sum_{x \in \bar{\gamma}_{ij}^k} v(x) = \sum_{x \in \gamma_{ij}^k} v(x) + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_{ij}^{k\star}} v(x)\,.$$

Važi sledeće tvrđenje:

Lema 5.6. *Neka koeficijenti a_{ij}^k, α^k i β^k zadovoljavaju uslove (5.7), (5.8) i (5.17). Tada, za dovoljno mali korak mreže h, postoje pozitivne konstante c_2, c_3 i c_4 tako da je zadovoljena sledeća nejednakost*

$$c_3 \|[v]\|_{H_h^1}^2 - c_2 \|[v]\|^2 \leq A_h(v, v) = [L_h v, v] \leq c_4 \|[v]\|_{H_h^1}^2.$$

Dokaz je analogan dokazu Leme 4.3.

Definišimo operator L_{h0} na isti način kao L_h, zamenom α^k sa 1 i β^k sa 0. Dalje, neka je $L_{h1} = L_h - L_{h0}$. Operator L_{h0} je samokonjugovan ($[L_{h0} v, v] = [v, L_{h0} v]$) i pozitivno definitan, dok je operator L_{h1} podređen operatoru L_{h0}. Preciznije, sledeće tvrđenje je zadovoljeno:

Lema 5.7. *Neka koeficijenti a_{ij}^k, α^k i β^k zadovoljavaju uslove (5.7), (5.8) i (5.17). Tada, za dovoljno mali korak mreže h, postoje pozitivne konstante c_5, c_6 and c_7 tako da je zadovoljena sledeća nejednakost*

$$c_5|[v]|_{H_h^1}^2 \le |[v]|_{L_{h0}}^2 := [L_{h0}v, v] \le c_6|[v]|_{H_h^1}^2,$$

$$[L_{h1}v, w]^2 \le c_7|[v]|\,|[v]|_{L_{h0}}|[w]|\,|[w]|_{L_{h0}}.$$

Dokaz je analogan dokazu lema 5.1 i 5.6.

Diferencijska shema (5.15) je efikasno izračunljiva. Ako je korak po vremenskoj osi τ dovoljno mali, shema je takođe stabilna u smislu sledećeg tvrđenja.

Lema 5.8. *Neka su pretpostavke Leme 5.6 zadovoljene. Tada postoji pozitivna konstanta c_8 takva da za $\tau \le c_8h^2$ rešenje diferencijske sheme (5.15) zadovoljava sledeću apriornu ocenu*

$$\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}|[v(\cdot,t)]|_{L_{h0}}^2 + \tau^2\sum_{t,\,t'\in\bar\omega_\tau,\ t'\neq t}\frac{|[v(\cdot,t)-v(\cdot,t')]|^2}{(t-t')^2} \le C\left(|[u_0]|^2 + \tau\sum_{t\in\omega_\tau^-}|[\tilde f(\cdot,t)]|_{L_{h0}^{-1}}^2\right)$$

pri čemu je

$$|[\tilde f(\cdot,t)]|_{L_{h0}^{-1}} := [L_{h0}^{-1}\tilde f(\cdot,t),\ \tilde f(\cdot,t)]^{1/2} = \sup_w \frac{[\tilde f(\cdot,t), w]}{|[w]|_{L_{h0}}}.$$

Lema 5.9. *Neka važe pretpostavke Leme 5.8. Rešenje diferencijske sheme*

$$v_t + L_hv = \phi_t, \qquad v\big|_{t=0} = 0$$

zadovoljava apriornu ocenu

$$\tau\sum_{t\in\omega_\tau^+}|[v(\cdot,t)]|_{L_{h0}}^2 + \tau^2\sum_{t,\,t'\in\bar\omega_\tau,\ t'\neq t}\frac{|[v(\cdot,t)-v(\cdot,t')]|^2}{(t-t')^2} \le C\sum_{k=1}^{2}|[\phi^k]|_{\ddot H^{1/2}(\bar\omega_\tau,\,L^2(\bar\omega^k))}^2.$$

U oba slučaja konstanta C zavisi od T: $C \asymp C_1\,e^{C_2T}$.

Dokazi obe leme izvode se analogno dokazima Leme 6 i Leme 7 u radu [23].

5.5 Analiza greške diferencijske sheme

Neka je $u = (u^1, u^2)$ rešenje početno-graničnog problema (5.1)-(5.6), i neka je $v = (v^1, v^2)$ rešenje diferencijske sheme (5.15). Greška $z = (z^1, z^2) = u - v$ definisana na oblasti $\bar{Q}^1_{h\tau} \times \bar{Q}^2_{h\tau}$ zadovoljava sledeće uslove

$$
\begin{aligned}
&z^k_t + L^k_h z = \psi^k, \qquad x \in \bar{\omega}^k, \quad t \in \omega^-_\tau, \\
&z^k(x,0) = 0, \qquad x \in \bar{\omega}^k, \qquad k = 1,2
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

pri čemu je

$$
\psi^1 = \begin{cases}
\xi^1_t + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \eta^1_{ij,\,\bar{x}_i}\,, & x \in \omega^1, \\
\tilde{\xi}^1_t + \dfrac{2}{h}\,\eta^1_{11} + \dfrac{2}{h}\,\eta^1_{12} + \tilde{\eta}^1_{21,\,\bar{x}_2} + \tilde{\eta}^1_{22,\,\bar{x}_2} + \dfrac{2}{h}\,\zeta^1, & x \in \gamma^1_{11}, \\
\tilde{\tilde{\xi}}^1_t + \dfrac{2}{h}\left(\tilde{\eta}^1_{11} + \tilde{\eta}^1_{12} + \tilde{\eta}^1_{21} + \tilde{\eta}^1_{22} + \zeta^1_1 + \zeta^1_2\right), & x = (-a-1,0), \\
\tilde{\xi}^1_t - \dfrac{2}{h}\,(\eta^1_{11})^{-1} - \dfrac{2}{h}\,(\eta^1_{12})^{-1} + \tilde{\eta}^1_{21,\,\bar{x}_2} + \tilde{\eta}^1_{22,\,\bar{x}_2} + \dfrac{2}{h}\,\zeta^1 + \dfrac{2}{h}\,\chi^1, & x \in \gamma^1_{12}, \\
\tilde{\tilde{\xi}}^1_t + \dfrac{2}{h}\left[-(\tilde{\eta}^1_{11})^{-1} - (\tilde{\eta}^1_{12})^{-1} + \tilde{\eta}^1_{21} + \tilde{\eta}^1_{22} + \zeta^1_1 + \zeta^1_2 + \chi^1\right], & x = (-a,0), \\
\text{i analogno za ostale čvorove mreže,}
\end{cases}
$$

član ψ^2 se definiše analogno,

$$
\begin{aligned}
\xi^k &= u^k - T_1^2 T_2^2 u^k, & x &\in \omega^k, \\
\tilde{\xi}^k &= u^k - T_i^{2\pm} T_{3-i}^2 u^k, & x &\in \gamma^k_{i1} \ / \ x \in \gamma^k_{i2}, \\
\tilde{\tilde{\xi}}^k &= u^k - T_1^{2\pm} T_2^{2\pm} u^k, & x &\in \gamma^k_{\star},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta^k_{ij} &= T_i^+ T_{3-i}^2 T_t^+\left(a^k_{ij}\,\frac{\partial u^k}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\left[a^k_{ij} u_{x_j} + (a^k_{ij})^{+i} (u^k_{\bar{x}_j})^{+i}\right], \qquad x \in \omega^k, \\
\tilde{\eta}^k_{ii} &= T_i^+ T_{3-i}^{2\pm} T_t^+\left(a^k_{ii}\,\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right) - \frac{a^k_{ii} + (a^k_{ii})^{+i}}{2}\, u^k_{x_i}, \qquad x \in \gamma^{k-}_{3-i,1} \ / \ x \in \gamma^{k-}_{3-i,2}, \\
\tilde{\eta}^k_{i,3-i} &= \begin{cases}
T_i^+ T_{3-i}^{2+} T_t^+\left(a^k_{i,3-i}\,\dfrac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) - a^k_{i,3-i}\, u^k_{x_{3-i}}, & x \in \gamma^{k-}_{3-i,1}, \\
T_i^+ T_{3-i}^{2-} T_t^+\left(a^k_{i,3-i}\,\dfrac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right) - (a^k_{i,3-i})^{+i}\,(u^k_{\bar{x}_{3-i}})^{+i}, & x \in \gamma^{k-}_{3-i,2},
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\zeta^k = (T_i^2\alpha^k)u^k - T_i^2T_t^+(\alpha^k u^k), \qquad x \in \gamma^k_{3-i,1} \cup \gamma^k_{3-i,2},$$

$$\zeta_i^k = (T_i^{2\pm}\alpha^k)u^k - T_i^{2\pm}T_t^+(\alpha^k u^k), \qquad x \in \gamma^k_\star,$$

$$\begin{aligned}\chi^k = &\int_{\Gamma^{3-k}_{1k}} T_2^2\beta^k(x,x')T_t^+u^{3-k}(x',t)\,\mathrm{d}\Gamma^{3-k}_{1k}\\ &-h\sideset{}{'}\sum_{x'\in\bar\gamma^{3-k}_{1k}} T_2^2\beta^k(x,x')u^{3-k}(x',t), \qquad x \in \gamma^k_{1,3-k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi^k = &\int_{\Gamma^{3-k}_{1k}} T_2^{2\pm}\beta^k(x,x')T_t^+u^{3-k}(x',t)\,\mathrm{d}\Gamma^{3-k}_{1k}\\ &-h\sideset{}{'}\sum_{x'\in\bar\gamma^{3-k}_{1k}} T_2^{2\pm}\beta^k(x,x')u^{3-k}(x',t), \qquad x \in \gamma^{k\star}_{1,3-k}.\end{aligned}$$

Izvešćemo odgovarajuću apriornu ocenu diferencijske sheme (5.18), koju ćemo koristiti u analizi greške.

Preuredimo sabirke greške ψ na sledeći način:

$$\tilde\eta^k_{ij} = \eta^k_{ij} + \bar\eta^k_{ij}, \qquad \tilde\xi^k = \xi^k + \bar\xi^k, \qquad \tilde{\tilde\xi}^k = \xi^k + \bar{\bar\xi}^k,$$

gde je

$$\bar\eta^k_{ii} = \pm\frac{h}{3}\,T_i^+T_t^+\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(a^k_{ii}\,\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right)\right), \qquad x \in \gamma^k_{3-i,1}\ /\ x \in \gamma^k_{3-i,2}$$

$$\begin{aligned}\bar\eta^k_{i,3-i} = &\pm\frac{h}{3}\,T_i^+T_t^+\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(a^k_{i,3-i}\,\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right)\right) \mp \frac{h}{2}\,T_i^+T_t^-\left(a^k_{i,3-i}\,\frac{\partial^2 u^k}{\partial x^2_{3-i}}\right)\\ &+\frac{h}{2}\,T_i^+T_t^+\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^k_{i,3-i}\,\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}}\right)\right), \qquad x \in \gamma^k_{3-i,1}\ /\ x \in \gamma^k_{3-i,2},\end{aligned}$$

$$\bar\xi^k = \mp\frac{h}{3}\,T^2_{3-i}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\right), \qquad x \in \gamma^k_{i1}\ /\ x \in \gamma^k_{i2},$$

$$\bar{\bar\xi}^k = \mp\frac{h}{3}\,T_2^{2\pm}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_1}\right) \mp \frac{h}{3}\,T_1^{2\pm}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x_2}\right), \qquad x \in \gamma^k_\star.$$

Koristeći granične uslove (5.2) dobijamo

$$\bar\xi^k_t = \lambda^k_{i,\bar x_{3-i}} + \mu^k_i + \nu^k_i + \kappa^k, \qquad x \in \gamma^k_{i1}\ /\ x \in \gamma^k_{i2}, \quad i = 1,2,$$

gde je

$$\lambda^k_i = \pm\frac{h}{3}\,T^+_{3-i}T_t^+\left(\frac{a^k_{i,3-i}}{a^k_{ii}}\frac{\partial u^k}{\partial t}\right), \qquad x \in \gamma^k_{i1}\ /\ x \in \gamma^k_{i2},$$

$$\mu^k_i = \mp\frac{h}{3}\,T^2_{3-i}T_t^+\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(\frac{a^k_{i,3-i}}{a^k_{ii}}\right)\frac{\partial u^k}{\partial t}\right), \qquad x \in \gamma^k_{i1}\ /\ x \in \gamma^k_{i2},$$

$$\nu_i^k = -\frac{h}{3}\,T_{3-i}^2 T_t^+\left(\frac{\alpha^k}{a_{ii}^k}\frac{\partial u^k}{\partial t}\right), \qquad x \in \gamma_{i1}^k \cup \gamma_{i2}^k,$$

$$\kappa^k = \begin{cases} \dfrac{h}{3}\,T_2^2 T_t^+\left(\dfrac{1}{a_{11}^k}\displaystyle\int_{\Gamma_{1k}^{3-k}} \beta^k(x,x')\,\frac{\partial u^{3-k}}{\partial t}(x',t)\,\mathrm{d}\Gamma_{1k}^{3-k}\right), & x \in \gamma_{1,3-k}^k, \\ 0, \qquad x \in \gamma_{ij}^k, \quad (i,j) \neq (1,3-k). \end{cases}$$

Na sličan način, određujemo

$$\bar{\bar{\xi}}_t^1 = \begin{cases} \frac{2}{h}\left(\lambda_1^1 - \bar{\lambda}_1^1 + \lambda_2^1 - \bar{\lambda}_2^1\right) + \mu_1^1 + \nu_1^1 + \mu_2^1 + \nu_2^1, & x = (-a-1,\, 0), \\ \frac{2}{h}\left[\lambda_1^1 - \bar{\lambda}_1^1 - (\lambda_2^1)^{-1} + \bar{\lambda}_2^1\right] + \mu_1^1 + \nu_1^1 + \mu_2^1 + \nu_2^1 + \kappa^1, & x = (-a,\, 0), \end{cases}$$

gde su λ_1^1 i λ_2^1 isti kao ranije i

$$\bar{\lambda}_i^1 = \pm\frac{h}{3}\,T_t^+\left(\frac{a_{i,3-i}^1}{a_{ii}^1}\frac{\partial u^1}{\partial t}\right),$$

$$\mu_i^1 = \mp\frac{h}{3}\,T_{3-i}^{2\pm} T_t^+\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\left(\frac{a_{i,3-i}^1}{a_{ii}^1}\right)\frac{\partial u^1}{\partial t}\right),$$

$$\nu_i^1 = -\frac{h}{3}\,T_{3-i}^{2\pm} T_t^+\left(\frac{\alpha^1}{a_{ii}^1}\frac{\partial u^1}{\partial t}\right),$$

$$\kappa^1 = \frac{h}{3}\,T_2^{2+} T_t^+\left(\frac{1}{a_{11}^1}\int_{\Gamma_{11}^2} \beta^1(x,x')\,\frac{\partial u^2}{\partial t}(x',t)\,\mathrm{d}\Gamma_{11}^2\right),$$

analognu reprezentaciju dobijamo za ostale čvorove mreže $\gamma_\star^1$ i $\bar{\bar{\xi}}_t^2$.

Sledeće tvrđenje je jednostavna posledica lema 4.3, 4.4, 5.8 i 5.9.

Teorema 5.10. *Neka su pretpostavke Lema 5.8 i 5.9 zadovoljene. Tada rešenje diferencijske sheme (5.15) zadovoljava sledeću apriornu ocenu:*

$$\begin{aligned} |[z]|_{H_{h\tau}^{1,1/2}} \le C \sum_{k=1}^{2} \Bigg\{ & |[\xi^k]|_{\ddot{H}^{1/2}(\bar{\omega}_\tau, L_2(\bar{\omega}^k))} + \sum_{i,j=1}^{2}\Big(|[\eta_{ij}^k\|_{k,i,h\tau} + \|\zeta^k\|_{\sigma_{ij}^k}\Big) + |[\chi^k]|_{\bar{\sigma}_{1,3-k}^k} \\ & + h\sum_{i,j,l=1}^{2} |[\bar{\eta}_{ij}^k\|_{L_2(\omega_\tau^-,\, \ddot{H}^{1/2}(\gamma_{3-i,l}^{k-}))} + h\sum_{i,j=1}^{2} |[\lambda_i^k\|_{L_2(\omega_\tau^-,\, \ddot{H}^{1/2}(\gamma_{ij}^{k-}))} + h|[\kappa^k]|_{\bar{\sigma}_{1,3-k}^k} \\ & + h\sum_{i,j=1}^{2}\Big(|[\mu_i^k]|_{\bar{\sigma}_{ij}^k} + |[\nu_i^k]|_{\bar{\sigma}_{ij}^k}\Big) + h\sqrt{\log\frac{1}{h}}\sum_{i=1}^{2}\sum_{x\in\gamma_\star^k}\Big(\|\zeta_i^k(x,\cdot)\|_\tau + \|\bar{\lambda}_i^k(x,\cdot)\|_\tau\Big)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

5.6 Ocena brzine konvergencije diferencijske sheme

U skladu sa Teoremom 5.10, problem određivanja brzine konvergencije diferencijske sheme (5.15) se svodi na ocenu članova desne strane nejednakosti (5.19).

Teorema 5.11. *Neka su pretpostavke lema 5.7 i 5.8 zadovoljene i neka je $\tau \asymp h^2$ (tj. $c_9 h^2 \le \tau \le c_8 h^2$ za neke pozitivne konstante c_8 i c_9). Tada rešenje diferencijske sheme (4.15) konvergira rešenju početno-graničnog problema (5.1)-(5.6) i važe sledeće ocene brzine konvergencije*

$$|[u-v]|_{H^{1,1/2}_{h\tau}} \le Ch^{s-1}\sqrt{\log\frac{1}{h}}\Big(1+\max_{i,j,k}\|a^k_{ij}\|_{H^{s-1}(\Omega^k)}+\max_{i,j,k}\|\alpha^k\|_{H^{s-3/2}(\Gamma^k_{ij})}$$
$$+\max_k\|\beta^k\|_{H^{s-1}(\Delta^k)}\Big)\|u\|_{H^{s,s/2}}, \qquad 2.5<s<3$$

i

$$|[u-v]|_{H^{1,1/2}_{h\tau}} \le Ch^2\left(\log\frac{1}{h}\right)^{3/2}\Big(1+\max_{i,j,k}\|a^k_{ij}\|_{H^2(\Omega^k)}+\max_{i,j,k}\|\alpha^k\|_{H^{3/2}(\Gamma^k_{ij})}$$
$$+\max_k\|\beta^k\|_{H^2(\Delta^k)}\Big)\|u\|_{H^{3,3/2}}, \qquad s=3$$

.

Dokaz. Članovi η^k_{ij} u unutrašnjim čvorovima mreže $\bar\omega^k$ mogu biti ocenjeni na isti način kao u slučaju Dirihleovog početno-graničnog problema (videti [15]):

$$\tau\sum_{t\in\omega^-_\tau}h^2\sum_{x\in\omega^k\cup\gamma^k_{i1}}\left(\eta^k_{ij}\right)^2 \le Ch^{2s-2}\,\|a^k_{ij}\|^2_{H^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{H^{s,s/2}(Q^k)}, \quad 2<s\le 3.$$

U graničnim čvorovima η^k_{ii} mogu biti predstavljeni na sledeći način

$$\eta^k_{ii}=\eta^k_{ii,1}+\eta^k_{ii,2}+\eta^k_{ii,3}+\eta^k_{ii,4}, \qquad x\in\gamma^{k-}_{3-i,\,0.5\mp 0.5},$$

gde je

$$\eta^k_{ii,1}=T^+_iT^+_t\Big(a^k_{ii}\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)-\big(T^+_ia^k_{ii}\big)\Big(T^+_iT^+_t\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big),$$

$$\eta^k_{ii,2}=\left[\big(T^+_ia^k_{ii}\big)-\frac{a^k_{ii}+a^{k\,+i}_{ii}}{2}\right]\Big(T^+_iT^+_t\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big),$$

$$\eta^k_{ii,3}=\frac{a^k_{ii}+a^{k\,+i}_{ii}}{2}\left[\Big(T^+_iT^+_t\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)-\Big(T^+_i\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)\right],$$

$$\eta^k_{ii,4}=T^+_iT^{2\pm}_{3-i}T^+_t\Big(a^k_{ii}\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)-T^+_iT^+_t\Big(a^k_{ii}\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)\mp\frac{h}{3}\,T^+_iT^+_t\left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\Big(a^k_{ii}\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)\right).$$

Članovi $\eta^k_{ii,l}$ za $l=1,2,3$ zadovoljavaju iste uslove kao članovi u [15], pa se primenom leme Brambla-Hilberta dobija:

$$\tau \sum_{t\in\omega_\tau^-} h^2 \sum_{x\in\gamma_{3-i,0}^{k-}\cup\gamma_{3-i,1}^{k-}} (\eta_{ii,l}^k)^2 \le Ch^{2s-2}\, \|a_{ii}^k\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)} \|u^k\|^2_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \quad 2 < s \le 3. \quad (5.20)$$

Za $s > 2.5$ član $\eta_{ii,4}^k$ je ograničen linearan funkcional od $w = a_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \in W_2^{s-1,(s-1)/2}$ koji se anulira za $w = 1, x_1, x_2, t$. Primenom leme Brambla-Hilberta [5, 11] i osobina multiplikatora u prostorima Soboljeva [31] dobijamo sledeći rezultat

$$\begin{aligned}\tau \sum_{t\in\omega_\tau^-} h^2 \sum_{x\in\gamma_{3-i,0}^{k-}\cup\gamma_{3-i,1}^{k-}} (\eta_{ii,4}^k)^2 &\le Ch^{2s-2} \left\| a_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right\|^2_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(Q^k)} \\ &\le Ch^{2s-2}\, \|a_{ii}^k\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)} \|u^k\|^2_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \quad 2.5 < s \le 3.\end{aligned} \quad (5.21)$$

Slično, u graničnim čvorovima, član $\eta_{i,3-i}^k$ možemo predstaviti na sledeći način

$$\eta_{i,3-i}^k = \eta_{i,3-i,1}^k + \eta_{i,3-i,2}^k + \eta_{i,3-i,3}^k + \eta_{i,3-i,4}^k, \qquad x \in \gamma_{3-i,\,0.5\mp 0.5}^{k-},$$

gde je

$$\begin{aligned}\eta_{i,3-i,1}^k &= T_i^+ T_{3-i}^{2\pm} T_t^+ \Big(a_{i,3-i}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \Big) - T_i^+ T_t^+ \Big(a_{i,3-i}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \Big) \\ &\quad \mp \frac{h}{3} T_i^+ T_t^+ \Big(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \Big(a_{i,3-i}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \Big) \Big), \\ \eta_{i,3-i,2}^k &= T_i^+ T_t^+ \Big(a_{i,3-i}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \Big) - T_t^+ \Big(a_{i,3-i}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \Big) \\ &\quad - \frac{h}{2} T_i^+ T_t^+ \Big(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big(a_{i,3-i}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \Big) \Big), \\ \eta_{i,3-i,3}^k &= a_{i,3-i}^k \Big[T_t^+ \Big(\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \Big) - T_{3-i}^{\pm} \Big(\frac{\partial u^k}{\partial x_{3-i}} \Big) \pm \frac{h}{2} T_i^+ T_t^+ \Big(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_{3-i}^2} \Big) \Big], \\ \eta_{i,3-i,4}^k &= \pm \frac{h}{2} \Big[T_i^+ T_t^+ \Big(a_{i,3-i}^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial x_{3-i}^2} \Big) - a_{i,3-i}^k\, T_i^+ T_t^+ \Big(\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_{3-i}^2} \Big) \Big].\end{aligned}$$

Članovi $\eta_{i,3-i,1}^k$ i $\eta_{i,3-i,2}^k$ zadovoljavaju ocene analogne (5.21). Za $s > 2.5$ i $a_{i,3-i}^k \in C(\bar\Omega)$ član $\eta_{i,3-i,3}^k$ je ograničen linearan funkcional od $u^k \in W_2^{s,s/2}$ koji se anulira za $u^k = 1, x_1, x_2, t, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2$. Primenom Lema Brambla-Hilberta i teoreme potapanja u prostorima Soboljeva dobijamo sledeći rezultat

$$\begin{aligned}\tau \sum_{t\in\omega_\tau^-} h^2 \sum_{x\in\gamma_{3-i,0}^{k-}\cup\gamma_{3-i,1}^{k-}} (\eta_{i,3-i,3}^k)^2 &\le Ch^{2s-2}\, \|a_{i,3-i}^k\|^2_{C(\bar\Omega^k)} \|u^k\|^2_{W_2^{s,s/2}(Q^k)} \\ &\le Ch^{2s-2}\, \|a_{i,3-i}^k\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)} \|u^k\|^2_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \quad 2.5 < s \le 3.\end{aligned} \quad (5.22)$$

Član $\eta^k_{i,3-i,4}$ možemo oceniti direktno. Neka je $i=2$, $k=1$ i $x=(-a-1,x_2)\in\gamma^{1-}_{11}$. Tada

$$\eta^1_{2,1,4}(x,t)=\frac{h}{2}\,\frac{2}{h\tau}\int\limits_{x_2}^{x_2+h}\Big(1-\frac{x_2'}{h}\Big)\int\limits_{t}^{t+\tau}\int\limits_{x_2}^{x_2'}\frac{\partial a^1_{21}}{\partial x_2}(-a-1,x_2'')\frac{\partial^2 u^1}{\partial x_1^2}(-a-1,x_2',t')\,dx_2''dt'dx_2',$$

dok za ostale granične čvorove, i takođe za $i=1$, važi analogna integralna reprezentacija. Isto važi za $k=2$. Otuda

$$\begin{aligned}\tau\sum_{t\in\omega_\tau^-}h^2\sum_{x\in\gamma^{k-}_{3-i,k}}(\eta^k_{i,3-i,4})^2 &\le Ch^4\left\|\frac{\partial a^k_{i,3-i}}{\partial x_i}\right\|^2_{L_2(\Gamma^k_{ik})}\left\|\frac{\partial^2 u^k}{\partial x_1^2}\right\|^2_{L_2(\Sigma^k_{ik})}\\ &\le Ch^4\,\|a^k_{i,3-i}\|^2_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|^2_{W_2^{s,s/2}(Q^k)},\qquad s>2.5\,.\end{aligned}\tag{5.23}$$

Na osnovu nejednakosti (5.20)-(5.23) dobijamo

$$|[\eta^k_{ij}\|_{k,i,h\tau}\le Ch^{s-1}\,\|a^k_{ij}\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)},\quad 2.5<s\le 3.\tag{5.24}$$

Član ξ^k u unutrašnjim čvorovima mreže je ocenjen u [15]. U graničnim čvorovima, za član ξ^k važi analogna integralna reprezentacija kao kada $x\in\omega^k$. Otuda, važi sledeće

$$|[\xi^k]|_{\ddot W_2^{1/2}(\bar\omega_\tau,\,L_2(\bar\omega^k))}\le Ch^{s-1}\sqrt{\log\tfrac{1}{h}}\,\|a^k_{ij}\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)},\quad 2<s\le 3.\tag{5.25}$$

Članovi ζ^k na granici $\sigma^k_{3-i,k}$ mogu biti predstavljeni na sledeći način

$$\zeta^k=\big(T_i^2\alpha^k\big)\big(u^k-T_i^2T_t^+u^k\big)+\big[\big(T_i^2\alpha^k\big)\big(T_i^2T_t^+u\big)-T_i^2\big(\alpha^k\,T_t^+u^k\big)\big]=\zeta^k_{01}+\zeta^k_{02}.$$

Za $s>2.5$ i $\alpha^k\in C(\Gamma^k_{3-i,k})$ član ζ^k_{01} je ograničen linearan funkcional od $u^k\in W_2^{s-1,(s-1)/2}(\Sigma^k_{3-i,k})$ koji se anulira kada je $u^k=1$ i $u^k=x_{3-i}$. Primenom Leme Brambla-Hilberta i teoreme potapanja u prostorima Soboljeva dobijamo

$$\begin{aligned}\|\zeta^k_{01}\|_{\sigma^k_{3-i,k}}&\le Ch^{s-1}\|\alpha^k\|_{C(\Gamma^k_{3-i,k})}\|u^k\|_{W_2^{s-1,(s-1)/2}(\Sigma^k_{3-i,k})}\\ &\le Ch^{s-1}\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma^k_{3-i,k})}\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)},\qquad 2.5<s\le 3.\end{aligned}\tag{5.26}$$

Član ζ^k_{02} je ograničen bilinearan funkcional od $(\alpha^k,T_t^+u^k)\in W_q^r(\Gamma^k_{3-i,k})\times W^p_{\frac{2q}{q-2}}(\Gamma^k_{3-i,k})$, $q>2$, koji se anulira kada je $u^k=1$ ili $T_t^+u^k=1$.
Primenom bilinearne verzije Leme Brambla-Hilberta, teoreme potapanja u prostorima Soboljeva i Hölderove nejednakosti, posle sumiranja po čvorovima mreže

$\gamma_{3-i,k}^{k}$ dobijamo sledeći rezultat

$$\|\zeta_{02}^{k}\|_{\gamma_{3-i,k}^{k}} \le Ch^{r+p}\|\alpha^{k}\|_{W_q^r(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|T_t^{+}u^{k}\|_{W^p_{2q/(q-2)}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}$$
$$\le Ch^{r+p}\|\alpha^{k}\|_{W_2^{r+\frac12-\frac1q}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|T_t^{+}u^{k}\|_{W_2^{p+\frac1q}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}, \quad 0\le r\le 1, \quad 1-\tfrac1q<p\le 1.$$

Sumiranjem po čvorovima mreže ω_τ^- i primenom teoreme potapanja i teoreme o tragu dobijamo

$$\|\zeta_{02}^{k}\|_{\sigma_{3-i,k}^{k}} \le Ch^{r+p}\,\|\alpha^{k}\|_{W_2^{r+\frac12-\frac1q}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|u^{k}\|_{W_2^{p+\frac1q,\frac12(p+\frac1q)}(\Sigma_{3-i,k}^{k})}$$
$$\le Ch^{r+p}\,\|\alpha^{k}\|_{W_2^{r+\frac12-\frac1q}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|u^{k}\|_{W_2^{p+\frac12+\frac1q,\frac12(p+\frac12+\frac1q)}(Q^k)}$$
$$\le Ch^{r+p}\,\|\alpha^{k}\|_{W_2^{r+p-\frac12}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|u^{k}\|_{W_2^{r+p+1,\frac12(r+p+1)}(Q^k)}.$$

Konačno, stavljajući $r+p=s-1$, dobijamo

$$\|\zeta_{02}^{k}\|_{\sigma_{3-i,k}^{k}} \le Ch^{s-1}\|\alpha^{k}\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|u^{k}\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \qquad 2<s\le 3. \tag{5.27}$$

Na osnovu (5.26) i (5.27) sledi

$$\|\zeta^{k}\|_{\sigma_{3-i,k}^{k}} \le Ch^{s-1}\|\alpha^{k}\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|u^{k}\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \qquad 2.5<s\le 3. \tag{5.28}$$

Za $x\in\gamma_{3-i,k}^{k\star}$ dobijamo

$$\zeta_i^k = \left(T_i^{2\pm}\alpha^k\right)\left(u^k-T_t^{+}u^k\right)+\left[\left(T_i^{2\pm}\alpha^k\right)\left(T_t^{+}u^k\right)-T_i^{2\pm}\left(\alpha^k\,T_t^{+}u^k\right)\right]=\zeta_{i1}^k+\zeta_{i2}^k.$$

Za $r>0.5$ i $\alpha^k\in C(\Gamma_{3-i,k}^{k})$ član ζ_{i1}^k je ograničen linearan funkcional od $u^k\in W_2^r(0,T)$ koji se anulira kada je $u^k=1$. Primenom Leme Brambla-Hilberta, teoreme potapanja i sumiranjem po čvorovima mreže ω_τ^- dobijamo

$$\|\zeta_{i1}^k\|_\tau \le C\tau^r\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|u(x,\cdot)\|_{W_2^r(0,T)}$$

$$\le Ch^{2r}\|\alpha^k\|_{W_2^{2r-1/2}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|u^k\|_{W_2^{2r+1,r+1/2}(Q^k)}, \qquad 0.5<r\le 1,$$

i stavljajući $2r+1=s$,

$$\|\zeta_{i1}^k\|_\tau \le Ch^{s-1}\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^{k})}\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \qquad 2<s\le 3. \tag{5.29}$$

Za $i=1$, $k=1$ i $x=(-a-1,0)$ imamo

$$\zeta_{12}^{1}(-a-1,0,t)=\frac{2}{h}\int_0^h\Big(1-\frac{x_1'}{h}\Big)\alpha^1(x_1',0)\,\big[T_t^+u^1(-a-1,0,t)-T_t^+u^1(x_1',0,t)\big]\,dx_1'$$

$$=\frac{2}{h}\int_0^h\int_0^{x_1'}\Big(1-\frac{x_1'}{h}\Big)\alpha^1(x_1',0)\,\frac{\partial(T_t^+u^1)}{\partial x_1}(x_1'',0,t)\,dx_1''dx_1'.$$

Analogne reprezentacije važe za ostale čvorove $x\in\gamma_\star^1$ i takođe za $i=2$, kao i za $k=2$. Otuda,

$$\big|\zeta_{i2}^k\big|\le Ch\,\|\alpha^k\|_{C(\Gamma_{3-i,k}^k)}\Big\|\frac{\partial(T_t^+u^k)}{\partial x_i}\Big\|_{C(\bar\Omega^k)}\le Ch\,\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^k)}\|T_t^+u^k\|_{W_2^s(\Omega^k)},\quad s>2,$$

pri čemu, posle sumiranja po čvorovima mreže ω_τ^-, dobijamo

$$\|\zeta_{i2}^k\|_\tau\le Ch\,\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^k)}\,\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)},\qquad s>2. \tag{5.30}$$

Na osnovu (5.29) i (5.30), za $x\in\gamma_{3-i,k}^{k\star}$, dobijamo

$$\|\zeta_{i}^k\|_\tau\le Ch\,\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{3-i,k}^k)}\,\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)},\qquad s>2. \tag{5.31}$$

Ocenimo sada $|[\bar\eta_{ij}^k\|_{L_2(\omega_\tau^-,\ddot W_2^{1/2}(\gamma_{3-i,k}^{k-}))}$. Primenom leme 3.6 dobijamo

$$|\bar\eta_{ii}^k|_{W_2^{1/2}(\gamma_{3-i,k}^{k-})}\le Ch^{r+1/2}\left|T_t^+\Big(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\Big(a_{ii}^k\,\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)\Big)\right|_{W_2^r(\Gamma_{3-i,k}^k)}$$

$$\le Ch^{r+1/2}\left\|T_t^+\Big(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\Big(a_{ii}^k\,\frac{\partial u^k}{\partial x_i}\Big)\Big)\right\|_{W_2^{r+1/2}(\Omega^k)},\qquad 0<r\le 0.5.$$

Koristeći nejednakost [36]

$$\|F\|_{L_2(0,\varepsilon)}\le C\begin{cases}\varepsilon^r\,\|F\|_{W_2^r(0,1)}, & 0<r<0.5,\\ \varepsilon^{1/2}\,\log\frac{1}{\varepsilon}\,\|F\|_{W_2^{1/2}(0,1)}, & r=0.5,\\ \varepsilon^{1/2}\,\|F\|_{W_2^{1/2}(0,1)}, & r>0.5,\end{cases}$$

gde je $0 < \varepsilon < 1$, dobijamo

$$\begin{aligned} h \sum_{x \in \gamma_{3-i,k}^{k-}} & \left(\frac{1}{x_i + h/2} + \frac{1}{1 - x_i - h/2} \right) \left(\bar{\eta}_{ii}^k\right)^2 \\ & \leq C h^{2r+1} \log \frac{1}{h} \left\| T_t^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left(a_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) \right) \right\|_{W_2^r(\Gamma_{3-i,k}^{k-})}^2 \\ & \leq C h^{2r+1} \log \frac{1}{h} \left\| T_t^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left(a_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) \right) \right\|_{W_2^{r+1/2}(\Omega^k)}^2, \qquad 0 < r < 0.5 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} h \sum_{x \in \gamma_{3-i,k}^{k-}} & \left(\frac{1}{x_i + h/2} + \frac{1}{1 - x_i - h/2} \right) \left(\bar{\eta}_{ii}^k\right)^2 \\ & \leq C h^2 \log^3 \frac{1}{h} \left\| T_t^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_{3-i}} \left(a_{ii}^k \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) \right) \right\|_{W_2^1(\Omega^k)}^2. \end{aligned}$$

Na osnovu dobijenih nejednakosti, sumiranjem po čvorovima mreže ω_τ^-, stavljajući $r + 2.5 = s$ i korišćenjem osobina multiplikatora u prostorima Soboljeva, dobijamo

$$\|\bar{\eta}_{ii}^k\|_{L_2(\omega_\tau, \ddot{W}_2^{1/2}(\gamma_{3-i,k}^{k-}))} \leq C h^{s-2} \sqrt{\log \tfrac{1}{h}} \, \|a_{ii}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)} \, \|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \tag{5.32}$$

za $2.5 < s < 3$ i

$$\|\bar{\eta}_{ii}^k\|_{L_2(\omega_\tau, \ddot{W}_2^{1/2}(\gamma_{3-i,k}^{k-}))} \leq C h \left(\log \tfrac{1}{h} \right)^{3/2} \, \|a_{ii}^k\|_{W_2^2(\Omega^k)} \, \|u\|_{W_2^{3,3/2}(Q^k)}. \tag{5.33}$$

Analogne ocene se dobijaju za $\bar{\eta}_{i,3-i}^k$ zamenom a_{ii}^k sa $a_{i,3-i}^k$.

Član λ_i^k je slične strukture kao $\bar{\eta}_{ij}^k$. Primenjujući sličan postupak za $2.5 < s < 3$ dobijamo

$$\|\lambda_i^k\|_{L_2(\omega_\tau, \ddot{W}_2^{1/2}(\gamma_{ik}^{k-}))} \leq C h^{s-2} \sqrt{\log \tfrac{1}{h}} \left\| \frac{a_{i,3-i}^k}{a_{ii}^k} \right\|_{M(W_2^{s-2}(\Omega^k))} \|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)},$$

gde je $\|\cdot\|_{M(W_2^{s-2}(\Omega^k))}$ norma u prostoru multiplikatora u $W_2^{s-2}(\Omega^k)$ [31]. Dalje, za $2.5 < s < 3$ i $q > 2$, koristeći osobine multiplikatora u prostorima Soboljeva i pretpostavke (4.7), dobijamo

$$\begin{aligned} \left\| \frac{a_{i,3-i}^k}{a_{ii}^k} \right\|_{M(W_2^{s-2}(\Omega^k))} & \leq C \left\| \frac{a_{i,3-i}^k}{a_{ii}^k} \right\|_{W_q^1(\Omega^k)} \leq C \left(\|a_{i,3-i}^k\|_{W_q^1(\Omega^k)} + \|a_{ii}^k\|_{W_q^1(\Omega^k)} \right) \\ & \leq C \left(\|a_{i,3-i}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k))} + \|a_{ii}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k))} \right). \end{aligned}$$

Konačno,

$$
\begin{aligned}
\|\lambda_i^k\|_{L_2(\omega_\tau,\ddot{W}_2^{1/2}(\gamma_{ik}^{k-}))} &\le Ch^{s-2}\sqrt{\log\tfrac{1}{h}}\,\Big(\|a_{ii}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)} \\
&+\|a_{i,3-i}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\Big)\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \qquad 2.5<s<3
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

i analogno

$$
\begin{aligned}
\|\lambda_i^k\|_{L_2(\omega_\tau,\ddot{W}_2^{1/2}(\gamma_{ik}^{k-}))} &\le Ch\left(\log\tfrac{1}{h}\right)^{3/2}\Big(\|a_{ii}^k\|_{W_2^{2}(\Omega)} \\
&+\|a_{i,3-i}^k\|_{W_2^{2}(\Omega^k)}\Big)\|u^k\|_{W_2^{3,3/2}(Q^k)}, \qquad s=3.
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

Za $r>0.5$ i $a_{ii}^k,\ a_{i,3-i}^k \in C(\bar{\Omega}^k)$ član $\lambda_i^{k\star}$ je ograničen linearan funkcional od $u^k\in W_2^r(0,T)$ koji se anulira kada je $u^k=1$. Primenom Leme Brambla-Hilberta, kao u slučaju ζ_{i1}^k dobijamo

$$
\|\lambda_i^{k\star}\|_\tau \le Ch^{s-2}\|a_{i,3-i}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \qquad 2<s\le 3. \tag{5.36}
$$

Članove ν_i^k i μ_i^k možemo oceniti direktno:

$$
\begin{aligned}
|[\nu_i^k]|_{\bar{\sigma}_{ik}^k} &\le Ch\left\|\frac{\alpha^k}{a_{ii}^k}\frac{\partial u^k}{\partial t}\right\|_{L_2(\Sigma_{ik}^k)} \le Ch\left\|\frac{\alpha^k}{a_{ii}^k}\right\|_{C(\Gamma_{ik}^k)}\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)} \\
&\le Ch\left(\|\alpha^k\|_{W_2^{s-3/2}(\Gamma_{ik}^k)}+\|a_{ii}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\right)\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \qquad s>2.5
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

i

$$
|[\mu_i^k]|_{\bar{\sigma}_{ik}^k} \le Ch\left(\|a_{ii}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}+\|a_{i,3-i}^k\|_{W_2^{s-1}(\Omega^k)}\right)\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(Q^k)}, \qquad s>2.5 \tag{5.38}
$$

Član χ^k možemo predstaviti na sledeći način

$$
\chi^k=\chi_1^k+\chi_2^k,
$$

gde je

$$
\begin{aligned}
\chi_1^k &= \int_{\Gamma_{1k}^{3-k}} T_2^2\beta^k(x,x')T_t^+u^{3-k}(x',t)\,\mathrm{d}\Gamma_{1k}^{3-k} - h\sum_{x'\in\bar{\gamma}_{1k}^{3-k}}{}' T_2^2\beta^k(x,x')T_t^+u^{3-k}(x',t), \\
\chi_2^k &= h\sum_{x'\in\bar{\gamma}_{1k}^{3-k}}{}' T_2^2\beta^k(x,x')\left[T_t^+u^{3-k}(x',t)-u^{3-k}(x',t)\right],
\end{aligned}
$$

ako $x\in\gamma_{1,3-k}^k$, dok se za $x\in\gamma_{1,3-k}^{k\star}$ operator usrednjenja T_2^2 zamenjuje sa T_2^{2-} ili T_2^{2+}. Označimo

$$
I_1=I_1(g)=\int_0^h g(x)\,\mathrm{d}x-\frac{h}{2}\left[g(0)+g(h)\right].
$$

Za $r > 0.5$ $I_1(g)$ je ograničen linearan funkcional od $g \in H^r(0,h)$ koji se anulira kada je $g(x) = 1$ i $g(x) = x$. Primenom Leme Brambla-Hilberta dobijamo

$$|I_1| \le Ch^{r+1/2}\, |g|_{H^r(0,h)}, \qquad 0.5 < r \le 2,$$

pri čemu je

$$\left| \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - h\left[\frac{g(0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} g(ih) + \frac{g(1)}{2} \right] \right| \le Ch^r\, |g|_{H^r(0,1)}, \qquad 0.5 < r \le 2.$$

Na osnovu ovih nejednakosti, koristeći osobine multiplikatora u prostorima Soboljeva, dobijamo

$$\begin{aligned} |\chi_1^k(x,t)| &\le Ch^r \left\| T_2^2 \beta^k(x,\cdot)\, T_t^+ u^{3-k}(\cdot,t) \right\|_{H^r(\Gamma_{1k}^{3-k})} \\ &\le Ch^r \left\| T_2^2 \beta^k(x,\cdot) \right\|_{H^r(\Gamma_{1k}^{3-k})} \left\| T_t^+ u^{3-k}(\cdot,t) \right\|_{H^r(\Gamma_{1k}^{3-k})}, \qquad 1 < r \le 2 \end{aligned}$$

kada $x \in \gamma_{1,3-k}^k$, dok za $x \in \gamma_{1,3-k}^{k\star}$ dobijamo analogne nejednakosti. Posle sumiranja po čvorovima mreže $\bar{\sigma}_{1,3-k}^k$ dobijamo

$$|[\chi_1^k]|_{\bar{\sigma}_{1,3-k}^k} \le Ch^r \left\| \beta^k \right\|_{H^r(\Delta^k)} \left\| u^{3-k} \right\|_{H^{r,r/2}(\Sigma_{1k}^{3-k})}, \qquad 1 < r \le 2.$$

Konačno, primenom teoreme o tragu za anizotropne prostore Soboljeva [30] i stavljajući $r = s - 1$, dobijamo

$$|[\chi_1^k]|_{\bar{\sigma}_{1,3-k}^k} \le Ch^{s-1} \left\| \beta^k \right\|_{H^{s-1}(\Delta^k)} \left\| u^{3-k} \right\|_{H^{s,s/2}(Q^{3-k})}, \qquad 2 < s \le 3. \tag{5.39}$$

Označimo

$$I_2 = I_2(g) = T_t^+ g(t) - g(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} g(t')\,\mathrm{d}t' - g(t).$$

$I_2(g)$ je ograničen linearan funkcional od $g \in H^r(t, t+\tau)$, $r > 0.5$, koji se anulira kada je $g(t') = 1$. Primenom Leme Brambla-Hilberta dobijamo

$$|I_2| \le C\tau^{r-1/2}\, |g|_{H^r(t,t+\tau)}, \qquad 0.5 < r \le 1.$$

Na osnovu ovih nejednakosti možemo zaključiti da je zadovoljena sledeća nejednakost

$$|\chi_2^k(x,t)| \le C\tau^{r-1/2}\, \|\beta^k\|_{C(\bar{\Delta}^k)} \max_{x' \in \Gamma_{1k}^{3-k}} \|u^{3-k}(x',\cdot)\|_{H^r(t,t+\tau)},$$

pri čemu posle sumiranja po čvorovima mreže $\bar{\sigma}_{1,3-k}^k$, primenom teoreme potapanja i teoreme o tragu u prostorima Soboljeva, dobijamo

$$\begin{aligned}|[\chi_2^k]|_{\bar\sigma^k_{1,3-k}} &\le C\tau^r \, \|\beta^k\|_{C(\bar\Delta^k)} \max_{x'\in\Gamma^{3-k}_{1k}} \|u^{3-k}(x',\cdot)\|_{H^r(0,T)} \\ &\le C\tau^r \, \|\beta^k\|_{H^{2r}(\Delta^k)} \, \|u^{3-k}\|_{H^{2r+1,r+1/2}(Q^{3-k})}, \qquad 0.5 < r \le 1.\end{aligned}$$

Koristeći pretpostavku $\tau \asymp h^2$ i označavajući $2r+1=s$, dobijamo

$$|[\chi_2^k]|_{\bar\sigma^k_{1,3-k}} \le C h^{s-1} \left\|\beta^k\right\|_{H^{s-1}(\Delta^k)} \left\|u^{3-k}\right\|_{H^{s,s/2}(Q^{3-k})}, \qquad 2 < s \le 3. \tag{5.40}$$

Član κ^k možemo oceniti direktno:

$$|\kappa^k(x,t)| \le C \, \|\beta^k\|_{C(\bar\Delta^k)} \left(\int_t^{t+\tau} \int_{\Gamma^{3-k}_{1k}} \left(\frac{\partial u^{3-k}}{\partial t}(x',t') \right)^2 \mathrm{d}\Gamma^{3-k} \, \mathrm{d}t' \right)^{1/2}.$$

Posle sumiranja po čvorovima mreže $\bar\sigma^k_{1,3-k}$, dobijamo

$$\begin{aligned}|[\kappa^k]|_{\bar\sigma^k_{1,3-k}} &\le Ch \, \|\beta^k\|_{C(\bar\Delta^k)} \left\| \frac{\partial u^{3-k}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Sigma^{3-k}_{1k})} \\ &\le Ch \left\|\beta^k\right\|_{H^{s-1}(\Delta^k)} \left\|u^{3-k}\right\|_{H^{s,s/2}(Q^{3-k})}, \qquad s > 2.5.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Tvrđenje sledi na osnovu (5.20)-(5.41). □

5.7 Numerički eksperiment

Test primer je problem (5.1)-(5.6), sa $a=1$, $T=0.001$, $L^k u^k = -\Delta u^k$, $k=1,2$, $\beta^1 = \beta^2 = (x_2+1/4)(7/4-x_2)(x_2'+1/4)(7/4-x_2')$, dok su α^1, α^2, u_0^1, u_0^2, f^1 i f^2 definisani na takav način da je $u=(u^1,u^2)$,

$$\begin{aligned}u^1(x_1,x_2,t) &= (-x_1-1/4)(9/4+x_1)(x_2+1/4)(7/4-x_2)e^{-t},\\ u^2(x_1,x_2,t) &= 2\,(x_1-1/4)(9/4-x_1)(x_2+1/4)(7/4-x_2)e^{-t}\end{aligned}$$

tačno rešenje problema (5.1)-(5.6). Dakle,

$$\begin{gathered}\alpha^1(-2,x_2) = \tfrac{24}{7},\ \ \alpha^1(x_1,0) = \tfrac{24}{7},\ \ \alpha^1(x_1,1) = \tfrac{8}{15},\ \ \alpha^1(-1,x_2) = 2.045312,\\ \alpha^2(1,x_2) = 0.911328125,\ \ \alpha^2(x_1,0) = \tfrac{24}{7},\ \ \alpha^2(x_1,1) = \tfrac{8}{15},\ \ \alpha^2(2,x_2) = \tfrac{24}{7},\\ u_0^1(x_1,x_2) = (-x_1-1/4)(9/4+x_1)(x_2+1/4)(7/4-x_2),\\ u_0^2(x_1,x_2) = 2\,(x_1-1/4)(9/4-x_1)(x_2+1/4)(7/4-x_2),\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
f^1(x_1,x_2,t) &= 2(-x_1-1/4)(9/4+x_1)e^{-t}+2(x_2+1/4)(7/4-x_2)e^{-t}\\
&\quad -(-x_1-1/4)(9/4+x_1)(x_2+1/4)(7/4-x_2)e^{-t},\\
f^2(x_1,x_2,t) &= 4(x_1-1/4)(9/4-x_1)e^{-t}+4(x_2+1/4)(7/4-x_2)e^{-t}\\
&\quad -2(x_1-1/4)(9/4-x_1)(x_2+1/4)(7/4-x_2)e^{-t}.
\end{aligned}
$$

Problem (5.1)-(5.6) je aproksimiran diferencijskom shemom (5.21). Pošto su ulazni podaci glatke funkcije, Stekljovljevi operatori usrednjenja nisu korišćeni.

U Tabeli 2 prikazane su vrednosti greške i red konvergencije(CR), dobijen dvostrukim principom mreže,u dve tačke $A^1=(-1.5,0.5,0.001)\in\bar{Q}^1$ i $A^2=(1.5,0.5,0.001)$ $\in\bar{Q}^2$. Svi proračuni su urađeni u programskom paketu Matlab 7.9.0.529. Numerički eksperiment daje potvrdu teorijskih rezultata.

Tabela 2: Greška i red konvergencije (CR)

Mreža		A^1	A^2
h	τ	Greška (CR)	Greška (CR)
0.125,	0.00004	2.2258e-008	4.2773e-008
0.0625,	0.00001	4.3861e-009 (2.3433)	8.7712e-009 (2.2859)
0.03125,	0.0000025	1.0957e-009 (2.0011)	2.1915e-009 (2.0009)
0.015625,	0.000000625	2.7394e-010 (1.9999)	5.4787e-010 (2.0000)

5.8 Faktorizovana shema

Eksplicitna shema je ekonomična, s obzirom da se vrednosti rešenja v na vremenskom sloju $t=t_{j+1}$ neposredno izračunavaju kada su poznate vrednosti rešenja v na prethodnom vremenskom sloju $t=t_j$. Lako se vidi da je ukupan broj aritmetičkih operacija koje je pri tome potrebno izvršiti proporcionalan s brojem čvorova mreže $\bar{\omega}^1\cup\bar{\omega}^2$, tj. $O(n^2)$. Međutim, na osnovu leme 5.8 možemo zaključiti da je eksplitictna shema uslovno stabilna. Uslov $\tau\le c_8h^2$ predstavlja jako ograničenje: usled njega mreža mora biti znatno gušća po t nego po x.

Za razliku od eksplicitne sheme, implicitna shema je apsolutno stabilna i konvergira istom brzinom kao i eksplicitna shema. Međutim, ova shema nije ekonomična, jer se na svakom vremenskom sloju zahteva rešavanje dvodimenzionalnog eliptičkog diferencijskog problema.

Različite metode promenljivih pravaca [37] objedinjuju dobre osobine eksplicitne i implicitne sheme, tj. one su apsolutno stabilne (bez obzira na odnos koraka h i τ) i ekonomične (broj aritmetičkih operacija za prelazak na sledeći vremenski sloj istog je reda veličine kao u slučaju eksplicitne sheme). Posebnu grupu među njima čine faktorizovane sheme. Uzimajući u obzir specifičnosti problema (5.1)-(5.6) aproksimiraćemo ga sledećom dvokomponentnom faktorizovanom diferencijskom shemom:

$$(I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{11})(I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{12})v_t^1+L_h^1 v=\tilde{f}^1, \qquad v^1\big|_{t=0}=u_0^1\,, \tag{5.42}$$

$$(I^2+\sigma^2\tau\Lambda^{21})(I^2+\sigma^2\tau\Lambda^{22})v_t^2+L_h^2 v=\tilde{f}^2, \qquad v^2\big|_{t=0}=u_0^2\,, \tag{5.43}$$

gde je

$$\Lambda^{11}v^1=\begin{cases} -v^1_{x_1\bar{x}_1}, & x_1\in\omega^1\cup\gamma^1_{21}\cup\gamma^1_{22},\\ -\dfrac{2}{h}v^1_{x_1}, & x\in\bar{\gamma}^1_{11},\\ \dfrac{2}{h}v^1_{\bar{x}_1}, & x\in\bar{\gamma}^1_{12}, \end{cases} \qquad \Lambda^{12}v^1=\begin{cases} -v^1_{x_2\bar{x}_2}, & x_2\in\omega^1\cup\gamma^1_{11}\cup\gamma^1_{12},\\ -\dfrac{2}{h}v^1_{x_2}, & x\in\bar{\gamma}^1_{21},\\ \dfrac{2}{h}v^1_{\bar{x}_2}, & x\in\bar{\gamma}^1_{22}, \end{cases}$$

$$\Lambda^{21}v^2=\begin{cases} -v^2_{x_1\bar{x}_1}, & x_1\in\omega^2\cup\gamma^2_{21}\cup\gamma^2_{22},\\ -\dfrac{2}{h}v^2_{x_1}, & x\in\bar{\gamma}^2_{11},\\ \dfrac{2}{h}v^2_{\bar{x}_1}, & x\in\bar{\gamma}^2_{12}, \end{cases} \qquad \Lambda^{22}v^2=\begin{cases} -v^2_{x_2\bar{x}_2}, & x_2\in\omega^2\cup\gamma^2_{11}\cup\gamma^2_{12},\\ -\dfrac{2}{h}v^2_{x_2}, & x\in\bar{\gamma}^2_{21},\\ \dfrac{2}{h}v^2_{\bar{x}_2}, & x\in\bar{\gamma}^2_{22} \end{cases}$$

i I^k identički operator, $I^k v^k=v^k$. Ovde je $\sigma^k\in[0,1]$ slobodan težinski parametar. Za $\sigma^k=0$ shema (5.42)-(5.43) se svodi na eksplicitnu shemu.
Pišući u (5.42) razliku po vremenu u razvijenom obliku dobijamo

$$(I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{11})(I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{12})\hat{v}^1=g^1\equiv(I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{11})(I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{12})v^1+\tau\left(\tilde{f}^1-L_h^1 v\right)$$

Odatle vidimo da je za odredjivanje $\hat{v}^1$ potrebno invertovati operatore $I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{11}$ i $I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{12}$. Ako se čvorovi mreže $\bar{\omega}^1$ numeršu na pogodan način (redom po vrstama, odnosno kolonama) ovim operatorima će odgovarati trodijagonalne matrice. Tako se problem svodi na rešavanje dva sistema linearnih jednačina s trodijagonalnim matricama. Korišćenjem Thomasovog (odnosno Gaussovog) algoritma [37] za to će nam biti potrebno $O(n^2)$ aritmetiǩih operacija. Vrednosti $\hat{v}^2$ određuju se na analogan način. Na taj način, shema (5.42)-(5.43) je ekonomična.

Ako je σ^k dovoljno veliko

$$\sigma^k\geq 2\max_{i,j}\max_{x\in\bar{\Omega}^k}|a^k_{ij}(x)|, \quad i,j,k=1,2$$

Leme 5.8, 5.9 i 5.10 i dalje važe i to bez dodatnog uslova $\tau\leq c_8h^2$, tj. shema

(5.42)-(5.43) je stabilna bez obzira na odnos koraka po prostoru i vremenu.

Neka je $u=(u^1,u^2)$ rešenje početno-graničnog problema (5.1)-(5.6), i neka je $v=(v^1,v^2)$ rešenje diferencijske sheme (5.42)-(5.43). Greška $z=(z^1,z^2)=u-v$ definisana na oblasti $\bar{Q}^1_{h\tau}\times\bar{Q}^2_{h\tau}$ zadovoljava sledeće uslove

$$(I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{11})(I^1+\sigma^1\tau\Lambda^{12})z^1_t+L^1_h z=\tilde{\psi}^1 \tag{5.44}$$

$$(I^2+\sigma^2\tau\Lambda^{21})(I^2+\sigma^2\tau\Lambda^{22})z^2_t+L^2_h z=\tilde{\psi}^2 \tag{5.45}$$

pri čemu je

$$\tilde{\psi}^k=\begin{cases}\psi^k+\vartheta^k_{1,\bar{x}_1}+\vartheta^k_{2,\bar{x}_2}+\vartheta^k_{3,\bar{x}_1\bar{x}_2}, & x\in\omega^k,\\ \psi^k+\dfrac{2}{h}\vartheta^k_1+\vartheta^k_{2,\bar{x}_2}+\dfrac{2}{h}\vartheta^k_{3,\bar{x}_2}, & x\in\gamma^k_{11},\\ \psi^k-\dfrac{2}{h}(\vartheta^k_1)^{-1}+\vartheta^k_{2,\bar{x}_2}-\dfrac{2}{h}(\vartheta^k_{3,\bar{x}_2})^{-1}, & x\in\gamma^k_{12},\\ \psi^k+\dfrac{2}{h}\vartheta^k_1+\dfrac{2}{h}\vartheta^k_{2,\bar{x}_2}+\dfrac{4}{h^2}\vartheta^k_3, & x=\begin{cases}(-a-1,0), & k=1,\\ (a,0), & k=2,\end{cases}\\ \text{i analogno u ostalim čvorovima mreže } \bar{\omega}^k, & \end{cases}$$

$$\vartheta^k_1=\sigma^k\tau\,u^k_{x_1t},\quad \vartheta^k_2=\sigma^k\tau\,u^k_{x_2t},\quad \vartheta^k_3=-(\sigma^k)^2\tau^2\,u^k_{x_1x_2t}=-\sigma^k\tau\,\vartheta^k_{1,x_2}=-\sigma^k\tau\,\vartheta^k_{2,x_1}$$

i $k=1,\,2$.

Pod pretpostavkom da je $\tau\asymp h^2$, neposredno se pokazuje da faktorizovana diferencijska shema (5.44)-(5.45) zadovoljava apriornu ocenu analognu (5.19), preciznije

$$\begin{aligned}|[z]|_{H^{1,1/2}_{h\tau}}\le C\sum_{k=1}^{2}\Bigg\{&|[\xi^k]|_{\ddot{H}^{1/2}(\bar{\omega}_\tau,L_2(\bar{\omega}^k))}+\sum_{i,j=1}^{2}\Big(|[\eta^k_{ij}\|_{k,i,h\tau}+\|\zeta^k\|_{\sigma^k_{ij}}\Big)+|[\chi^k]|_{\bar{\sigma}^k_{1,3-k}}\\ &+h\sum_{i,j,l=1}^{2}|[\bar{\eta}^k_{ij}\|_{L_2(\omega^-_\tau,\,\ddot{H}^{1/2}(\gamma^{k-}_{3-i,l}))}+h\sum_{i,j=1}^{2}|[\lambda^k_i\|_{L_2(\omega^-_\tau,\,\ddot{H}^{1/2}(\gamma^{k-}_{ij}))}\\ &+h|[\kappa^k]|_{\bar{\sigma}^k_{1,3-k}}+h\sum_{i,j=1}^{2}\Big(|[\mu^k_i]|_{\bar{\sigma}^k_{ij}}+|[\nu^k_i]|_{\bar{\sigma}^k_{ij}}\Big)\\ &+h\sqrt{\log\frac{1}{h}}\sum_{i=1}^{2}\sum_{x\in\gamma^k_\star}\Big(\|\zeta^k_i(x,\cdot)\|_\tau+\|\bar{\lambda}^k_i(x,\cdot)\|_\tau\Big)+\sum_{i=1}^{2}|[\vartheta^k_i\|_{k,i,h\tau}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5.46}$$

Na taj način, da bi se dobila ocena brzine konvergencije faktorizovane sheme (5.42)-(5.43) dovoljno je oceniti $|[\vartheta^k_i\|_{k,i,h\tau}$ (pošto su ostali sabirci na desnoj strani nejednakosti (5.46) već ocenjeni).

Lako se vidi da je ϑ^k_i ograničen linearan funkcional od $u^k\in W^{s,s/2}_2(\Omega^k)$ za $s>2$.

Osim toga, $\vartheta_i^k = 0$ ako je $u^k = 1, x_1, x_2, t, x_1^2, x_1x_2, x_2^2$. Primenjujući lemu Brambla-Hilberta, slično kao u ranijim slučajevima, dobijamo

$$|[\vartheta_i^k\|_{k,i,h\tau} \leq C\,\|u^k\|_{W_2^{s,s/2}(\Omega^k)}, \qquad 2 < s \leq 3.$$

Na taj način, i za faktorizovanu diferencijsku shemu (5.42)-(5.43) važe ocene brzine konvergencije iz Teoreme 5.11.

6 Zaključak

U disertaciji su opisani transmisioni problemi u disjunktnim oblastima.

U prvom poglavlju disertacije predstavljeni su modelni problemi u jednodimenzionom i dvodimenzionom slučaju. Prikazano je nekoliko primera transmisionih problema.

U drugom poglavlju se uvodi neophodan matematički aparat za istraživanje ovih problema.

U trećem poglavlju razmatra se transmisioni spektralni problem u dva disjunktna intervala. U svakom intervalu zadat je problem sopstvenih vrednosti, pri čemu se interakcija između komponenata sopstvenih vektora opisuje nelokalnim uslovima saglasnosti Robin-Dirichlet-ovog tipa. Dokazana je egzistencija prebrojivog niza sopstvenih vrednosti i odgovarajućih sopstvenih vektora. Opisane su osobine spektra i asimptotsko ponašanje sopstvenih vrednosti. Izvedena je numerička aproksimacija metodom konačnih razlika.

U četrvrtom poglavlju razmatra se eliptički transmisioni problem u dve strogo disjunktne, nesusedne pravougaone oblasti. U svakoj podoblasti zadat je granični problem eliptičkog tipa, pri čemu se interakcija između njihovih rešenja opisuje nelokalnim uslovima saglasnosti Robin-Dirichlet-ovog tipa. Dokazana je egzistencija i jedinstvenost rešenja. Izvedena je numerička aproksimacija metodom konačnih razlika i ocena brzine konvergencije. Za ocenu brzine konvergencije oblika

$$\|u - v\|_{H^m(\Omega_h)} \leq Ch^{s-m}\|u\|_{H^s(\Omega)}, \qquad m < s \leq m + r$$

često se kaže da je "saglasna s glatkošću rešenja" ([15]). Ovde je u rešenje graničnog problema (definisano u oblasti Ω), v je rešenje odgovarajuće diferencijske sheme (definisano na mreži $\Omega_h \subset \Omega$), h je parametar diskretizacije (korak mreže), r je data konstanta (najveći mogući red konvergencije), $H^s(\Omega)$ je prostor Soboljeva i $H^m(\Omega_h)$ je prostor Soboljeva u diskretnom slučaju. Na taj način, ocena greške dobijena u teoremi 4.9 je saglasna s glatkošću rešenja do na (sporo rastući) logaritamski faktor koraka mreže. Razmotren je slučaj nekoercivnosti bilinearne forme i izvedena odgovarajuća apriorna ocena.

U petom poglavlju razmatra se parabolički transmisioni problem u dve strogo disjunktne, nesusedne kvadratne oblasti. U svakoj podoblasti zadat je početno-granični problem paraboličkog tipa, pri čemu se interakcija između njihovih rešenja opisuje nelokalnim uslovima saglasnosti Robin-Dirichlet-ovog tipa. Dokazana je egzistencija i jedinstvenost rešenja. Izvedena je numerička aproksimacija metodom konačnih razlika i ocena brzine konvergencije. Stabilnost diferencijske sheme (5.15) dokazana je pod pretpostavkom $\tau \leq c_8 h^2$. Ovo ograničenje je tipično za eksplicitnu diferencijsku shemu. Ocena brzine konvergencije u teoremi 5.11 izvedena je pod pretpostavkom $\tau \asymp h^2$, koja takođe povezuje korak po vremenu τ sa odgovarajućim korakom h u prostoru. Takođe je razmotrena faktorizovana shema.

Dalji rad će biti usmeren ka višedimenzionim problemima, koji će pored eliptičkih i paraboličkih transmisionih problema uključiti u razmatranje i hiperboličke transmisione probleme. Takođe razmatraće se i nelinearni nestacionarni problemi sa nelokalnim graničnim uslovima.

Literatura

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, Sobolev spaces, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] D. Adnađević, Z. Kadelburg, Matematička analiza II, Nauka, Beograd, 1998.

[3] A. A. Amosov, Global solvability of a nonlinear nonstationary problem with a nonlocal boundary condition of radiation heat transfer type, Differential Equations 41, No 1 (2005), pp. 96-109.

[4] V. B. Andreev, Stability of difference schemes for elliptic equations with respect to the Dirichlet boundary conditions, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 12 (1972), pp. 598–611 (in Russian).

[5] J. H. Bramble, S. R. Hilbert, Bounds for a class of linear functionals with application to the Hermite interpolation, Numer. Math. 16 (1971), pp. 362–369.

[6] S. C. Brenner, L. R. Scott, The mathematical theory of finite element methods, Springer Verlag, (1994).

[7] M. D. Chkhartishvili, G. K. Berikelashvili, On the convergence in W_2^1 of difference solution of elliptic equation with mixed boundary conditions, Bull. Acad. Sci. of Georgia, **148** (1993), No. 2, pp. 180–184 (in Russian).

[8] A. K. Datta, Biological and Bioenvironmental Heat and Mass Transfer, Marcel Dekker, New York 2002.

[9] A. M. Delić, B. S. Jovanović, Z. Milovanović, On the transmission eigenvalue problem in disjoint domains, Comput. Methods Appl. Math., vol. 11, No. 4 (2011), pp. 407–417.

[10] P.-E. Druet, Weak solutions to a time-dependent heat equation with nonlocal radiation condition and right hand side in L^p $(p \geq 1)$, WIAS Preprint 1253 (2008).

[11] T. Dupont, R. Scott, Polynomial approximation of functions in the Sobolev spaces, Math. Comput. 34 (1980), pp. 441–463.

[12] S. Gegovska-Zajkova, B. S. Jovanović, I. M. Jovanović, On the numerical solution of a transmission eigenvalue problem, Lect. Notes Comput. Sci. 5434 (2009), pp. 289–296.

[13] D. Givoli, Exact representation on artificial interfaces and applications in mechanics, Appl. Mech. Rev. 52 (1999), pp. 333–349.

[14] P. Grisvard, Elliptic Problems in Non-smooth Domains, Pitman, London, 1985.

[15] B. S. Jovanović, The finite difference method for boundary-value problems with weak solutions, Posebna izdanja Mat. Instituta, Vol. 16, Beograd, 1993.

[16] B. S. Jovanović, O jednoj klasi dvodimenzionih nelokalnih paraboličkih problema, Spomenica akademika Veselina Perića, ANURS, Odeljenje prirodno-matematičkih i i tehničkih nauka, Knj. 15, Banja Luka, 2011, pp. 295-315.

[17] B. S. Jovanović, Z. Milovanović, Finite difference approximation of a parabolic problem with variable coefficients, Publ. Inst. Math. 95(109)(2014), pp. 49–62.

[18] B. S. Jovanović, Z. Milovanović, Numerical approximation of 2D Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains, Applied Mathematics and Computation, 228 (2014), pp. 508–519.

[19] B. S. Jovanović, B. Z. Popović, Convergence of a finite difference scheme for the third boundary value problem for elliptic equation with variable coefficients, Comput. Methods Appl. Math. 1, No 4 (2001), pp. 356–366.

[20] B. S. Jovanović, E. Süli, Analysis of Finite Difference Schemes, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 46, Springer, (2013).

[21] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, On the convergence of finite difference schemes for the heat equation with concentrated capacity, Numer. Math. **89**, No 4 (2001), pp. 715–734.

[22] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, Numerical solution of a hyperbolic transmission problem, Comput. Method. Appl. Math. 8, No 4 (2008), pp. 374–385.

[23] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, Finite difference approximations for some interface problems with variable coefficients, Appl. Numer. Math. 59, No 2 (2009), pp. 349–372.

[24] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, Numerical solution of a two-dimensional parabolic transmission problem, Int. J. Numer. Anal. Model. 7, No 1 (2010), pp. 156–172.

[25] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, Numerical solution of a parabolic transmission problem, IMA J. Numer.Anal.31 (2011), pp. 233–253.

[26] B. S. Jovanović, M. N. Koleva, L. G. Vulkov, Convergence of a FEM and two-grid algorithms for elliptic problems on disjoint domains. J. Comput. Appl. Math. 236 (2011),pp 364–374.

[27] J. Kacur, R. Van Keer, J. West, On the numerical solution to a semi-linear transient heat transfer problem in composite media with nonlocal transmission conditions, 1508-1519, In: R. W. Lewis (ed.), Numer. methods in thermal problems, VIII, Pineridge Press, Swansea, 1993.

[28] M. Koleva, Finite element solution of boundary value problems with nonlocal jump conditions, J. Math. Model. Anal. 13, No 3 (2008), pp. 383–400.

[29] N. Lažetić, Matematika II/2, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[30] J. L. Lions, E. Magenes, Non homogeneous boundary value problems and applications, Springer–Verlag, Berlin and New York, 1972.

[31] V. G. Maz′ya, T. O. Shaposhnikova, Theory of multipliers in spaces of differentiable functions, Monographs and Studies in Mathematics 23, Pitman, Boston, Mass., 1985.

[32] Z. Milovanović, Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains, Numerical Analysis and Its Applications 2012, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8236, Springer, 2013, pp. 403–410.

[33] Z. Milovanović, Convergence of a Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2013,pp.433–434.

[34] Z. Milovanović, Elliptic Transmission Problem in Disjoint Domains, Mat.Vesnik 66, 2014, pp. 418-429.

[35] N. Qatanani, A. Barham, Q. Heeh, Existence and uniqueness of the solution of the coupled conduction-radiation energy transfer on diffusive-gray surfaces, Surveys in Math. and Appls. 2 (2007), pp. 43–58

[36] L. A. Oganesyan, L. A. Rukhovets, Variational-Difference Methods for Solution of Elliptic Equations, AS Arm., Erevan, 1979 (in Russian).

[37] A. A. Samarskii, Theory of difference schemes, Nauka, Moscow 1989 (Russian; English edition: Pure and Appl. Math., Vol. 240, Marcel Dekker, Inc., 2001).

[38] A. A. Samarskii, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, Difference Schemes for Differential Equations with Generalized Solutions, Vyshaya Shkola, Moscow 1987 (in Russian).

[39] L. G. Vulkov, Well posedness and a monotone iterative method for a nonlinear interface problem on disjoint intervals, Amer. Inst. Phys. Proc. Ser. 946 (2007), pp. 188–195.

[40] J. Wloka, Partial differential equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987.

Biografija autora

Lični podaci:

Ime i prezime: Zorica Milovanović
Datum rođenja: 20.06.1981.
Zvanje: Asistent, Fakultet za graditeljski menadžment, Univerzitet "Union- Nikola Tesla", Beograd
Adresa: Majdanska Čukarica 3/3, 11030 Beograd, Srbija
Elektronska adresa: zorica.milovanovic@gmail.com

Obrazovanje:

Zorica Milovanović se upisala na Matematički fakultet u Beogradu, smer Numerička matematika i optimizacija, 2000. godine. Diplomirala je 2006. godine i stekla zvanje Diplomirani matematičar. Na master studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, smer Numerička matematika i optimizacija, upisala se 2007. godine. Master rad na temu *Problemi sopstevnih vrednosti koji sadrže Dirakovu distribuciju* odbranila je 08. februara 2008. godine, pod mentorstvom prof. dr Boška Jovanovića, čime je stekla zvanje Diplomirani matematičar-master. Na doktorske studije na Matematičkom fakultetu u Beogradu, odsek Matematika, upisala se 2009. godine. Položila je sve ispite predviđene planom i programom doktorskih studija sa prosečnom ocenom 9.75.

Radno iskustvo:

Od 01. septembra 2006. godine do 30. juna 2008. godine radila je na Matematičkom fakultetu u Beogradu kao istraživač pripravnik na naučnom projektu pod nazivom "Primena evropskih postupaka za izračunavanje potrebne i određivanje dozvoljene specifične potrošnje energije za grejanje novih i postojećih stambenih zgrada", Ministarstva nauke i zaštite životne sredine. U februaru 2013. godine postala je spoljnji saradnik Matematičkog instituta SANU u Beogradu.

Iskustvo u nastavi:

Od 01. jula 2008. godine angažovana je na Fakultetu za graditeljski menadžment u Beogradu kao saradnik u nastavi, gde je 21. jula 2008. godine izabrana u zvanje asistenta. U svom dosadašnjem radu držala je vežbe na sledećim predmetima:
- Matematika 1 (računske vežbe na Fakultetu za graditeljski menadžment (odsek - opšte građevinarstvo))

- Matematika 2 (računske vežbe na Fakultetu za graditeljski menadžment (odsek - opšte građevinarstvo))
- Matematika 3 (računske vežbe na Fakultetu za graditeljski menadžment (odsek - opšte građevinarstvo))
- Matematika (računske vežbe na Fakultetu za graditeljski menadžment (odsek - arhitektura i urbanizam))
- Matematika (računske vežbe na Fakultetu za ekologiju i zaštitu životne sredine)
- Poslovna matematika (računske vežbe na Fakultetu za preduzetnički biznis))
- Poslovna statistika (računske vežbe na Fakultetu za preduzetnički biznis))
- Ekonomska matematika (računske vežbe na Fakultetu za menadžment nekretnina))
- Statistika (računske vežbe na Fakultetu za menadžment nekretnina)).

Spisak naučnih i stručnih radova

Radovi u časopisima i serijskim publikacijama

1. A.M. Delić, B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, On the transmission eigenvalue problem in disjoint domains, Comput. Methods Appl. Math., vol. 11, No. 4 (2011), pp. 407-417.
2. Z.D. Milovanović, Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains, Numerical Analysis and Its Applications 2012, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8236, Springer, 2013, pp. 403-410.
3. B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, Finite Difference Approximation of a Parabolic Problem with variable coefficients, Publ. Inst. Math., 95(109), 2014, pp. 49-62.
4. Z.D. Milovanović, Convergence of a Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 2013, pp. 433-434.
5. B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, Numerical approximation of 2D Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains, Applied Mathematics and Computation, 228(2014), pp. 508-519.
6. Z.D. Milovanović, Elliptic Transmission Problem in Disjoint Domains, Matematički vesnik 66, 4(2014), pp. 418-429.

Radovi u zbornicima konferencija

1. Z.D. Milovanovic, B.S. Jovanovic, About some spectral problems containing Dirac distribution, Proc. of XVIII Conference on Applied Mathematics (PRIM 2009) held in Subotica (Serbia) 2009, University of Novi Sad, Faculty of Sciences, DMI, Novi Sad 2010, pp. 31-38.

Saopštenja na međunarodnim konferencijama

1. XVIII Seminar primenjene matematike, sa izlaganjem: "About Some Spectral Problems Containing Dirac Distribution", Subotica, 2009.
2. Pannonian Mathematical Modeling International Conference (PAMM 2011), sa izlaganjem: "About Transmission Eigenvalue Problem in Disjoint Domains", Novi Sad, Serbia, April 29-30, 2011.
3. NAA'12: Fifth International Conference on Numerical Analysis and Applications, sa izlaganjem: "Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains", Lozenetz, Bulgaria, June 15-20, 2012.
4. GAMM 2013: 84th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics, sa izlaganjem: "Convergence of a Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains", Novi Sad, Serbia, March 18-22, 2013.
5. XIII Serbian Mathematical Congress, sa izlaganjem: "Numerical approximation of 2D elliptic transmission problem in disjoint domains", Vrnjačka Banja, Serbia, May 22-25, 2014.
6. Sixth Conference on Finite Difference Method: Theory and Applications, sa izlaganjem: "The transmission problem for elliptic second order equations in disjoint domains", Lozenetz, Bulgaria, June 18-23, 2014.

Učešće na projektima

1. "Primena evropskih postupaka za izračunavanje potrebne i određivanje dozvoljene specifične potrošnje energije za grejanje novih i postojećih stambenih zgrada", Ministarstvo nauke i zaštite životne sredine, 2006-2008.
2. "Energetska efikasnost pri koncepcijskom rešavanju iskorišćenja obnovljivih resursa u funkciji održivog razvoja", Ministarstvo nauke, 2008-2011.
3. "Aproksimacija integralnih i diferencijalnih operatora i primene", Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja, 2011-2014.
4. "Razvoj, projektovanje i implementacija savremenih strategija integrisanog upravljanja operativnim radom i održavanjem vozila i mehanizacije", Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja, 2011-2014.

Prilog 1.

Izjava o autorstvu

Potpisani-a Zorica D. Milovanović

broj upisa 2038/2009

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

O nekim transmisionim problemima u disjunktnim oblastima

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio/la autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 02.03.2015.

Zorica Milovanović

Prilog 2.

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora Zorica D. Milovanović

Broj upisa 2038/2009

Studijski program Matematika

Naslov rada O nekim transmisionim problemima u disjunktnim oblastima

Mentor dr Boško Jovanović, redovni profesor

Potpisana Zorica D. Milovanović

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao/la za objavljivanje na portalu **Digitalnog repozitorijuma Univerziteta u Beogradu.**

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 02.03.2015.

Zorica Milovanović

Prilog 3.

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

O nekim transmisionim problemima u disjunktnim oblastima

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim prilozima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo

2. Autorstvo - nekomercijalno

3. Autorstvo - nekomercijalno – bez prerade

4. Autorstvo - nekomercijalno – deliti pod istim uslovima

5. Autorstvo – bez prerade

6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci, kratak opis licenci dat je na poleđini lista).

Potpis doktoranda

U Beogradu, 02.03.2015.

Zorica Milovanović

1. Autorstvo – Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.

2. Autorstvo – nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.

4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.

5. Autorstvo – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

6. Autorstvo - deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.