

UNIVERZITET U BEOGRADU
RUDARSKO – GEOLOŠKI FAKULTET

Zoran M. Štirbanović

**MODELIRANJE TEHNOLOŠKIH
PROCESA U RUDARSTVU U USLOVIMA
NEDOVOLJNOSTI PODATAKA
PRIMENOM TEORIJE
GRUBIH SKUPOVA**

Doktorska disertacija

Beograd, 2015

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MINING AND GEOLOGY

Zoran M. Štirbanović

**MODELING TECHNOLOGICAL
PROCESSES IN MINING IN CONDITION
OF INSUFFICIENT DATA
BY APPLICATION OF
ROUGH SET THEORY**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015

Mentor: Dr Igor Miljanović, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet

Članovi komisije:

1. Dr Igor Miljanović, vanredni profesor
naučna oblast: Računarstvo i sistemsko inženjerstvo
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet
2. Dr Zoran Gligorić, redovni profesor
naučna oblast: Eksploatacija čvrstih mineralnih sirovina i mehanika stena
Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet
3. Dr Zoran Marković, redovni profesor
naučna oblast: Mineralne i reciklažne tehnologije
Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru

Datum odbrane: _____

MODELIRANJE TEHNOLOŠKIH PROCESA U RUDARSTVU U USLOVIMA NEDOVOLJNOSTI PODATAKA PRIMENOM TEORIJE GRUBIH SKUPOVA

Rezime

Rudarstvo, a u okviru njega i priprema mineralnih sirovina, se odlikuje složenošću tehnoloških procesa što je posledica velikog broja uticajnih parametara. Samim tim je potrebno biti veoma obazriv prilikom donošenja odluka u oblasti rudarstva. U cilju što efikasnijeg funkcionisanja procesa, moguće je primeniti različite metode koje služe za pojednostavljenje procesa odlučivanja. Jedna od takvih metoda jeste i teorija grubih skupova. Ona predstavlja relativno novu matematičku teoriju koja je pogodna za razumevanje nepreciznih i nepotpunih podataka kao i za otkrivanje međusobnih odnosa između tih podataka.

Teorija grubih skupova je pronašla primenu u različitim granama industrije, međutim pregledom literature došlo se do zaključka da primenjivost ove teorije u rudarstvu nije dovoljno ispitana. To je bila polazna osnova doktorske disertacije, ispitivanje mogućnosti njene primene u oblasti rudarstva.

U okviru eksperimentalnog dela disertacije izvršeno je testiranje mogućnosti primene teorije grubih skupova za rešavanje tri problema: izbor lokacije za flotacijsko jalovište, izbor flotacijskog kolektora i izbor flotacione mašine. Određeni su parametri koji imaju najviše uticaja prilikom ova tri izbora, odnosno određeni su kriterijumi za izbor. Izabranim kriterijumima su dodeljene odgovarajuće vrednosti, a nakon toga je izvršeno vrednovanje predloženih subjekata. Na taj način je izvršena primena teorije grubih skupova za rešavanje datih problema. Na kraju, nakon analize primenom teorije grubih skupova, izvršena je provera dobijenih rezultata metodama višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Na osnovu dobijenih rezultata se došlo do zaključka da je u sva tri problema uspešno primenjena teorija grubih skupova. Poklapanje rezultata dobijenih metodom grubih skupova sa rezultatima dobijenim ostalim metoda višekriterijumskog odlučivanja se kreće od 100% poklapanja u slučaju izbora lokacije za flotacijsko jalovište, do 40% u slučaju izbora flotacijskog kolektora i flotacione mašine. Visoki koeficijenti korelacija demonstriraju visoku osetljivost metode grubih skupova u uslovima višekriterijumskog odlučivanja i determinišu njenu upotrebljivost u uslovima nedovoljnosti podataka.

Ključne reči: rudarstvo, priprema mineralnih sirovina, teorija grubih skupova, višekriterijumsko odlučivanje, flotacijsko jalovište, flotacijski kolektor, flotaciona mašina.

Naučna oblast: RUDARSKO INŽENJERSTVO

Uža naučna oblast: SISTEMSKO INŽENJERSTVO

UDK: 005.7:510.644

519.245:519.8/.816/.87

622:622.7/.765:681.3(043.3)

MODELING TECHNOLOGICAL PROCESSES IN MINING IN CONDITION OF INSUFFICIENT DATA BY APPLICATION OF ROUGH SET THEORY

Abstract

Mining, and mineral processing within it, is characterized by the complexity of the technological process due to the large number of influential parameters. Therefore it is necessary to be very cautious when making decisions in the field of mining. In order to provide a more efficient functioning of the processes, it is possible to apply methods that are used to streamline the decision-making process. One such method is the rough set theory. It is a relatively new mathematical theory that is suitable for understanding imprecise and incomplete data as well as to detect relationships between these data.

The rough set theory has found application in various areas of industry, however, by reviewing literature it was concluded that the applicability of this theory in mining has not been sufficiently investigated. This was the starting point of a doctoral dissertation, examining the possibilities of its application in mining.

In the experimental part of the dissertation was done testing the possibilities for application of rough set theory to solve three problems: choosing location for the flotation tailings landfill, choosing flotation collector and choosing flotation machine. The parameters that have the most influence during these three choices were determined, and they represented criteria for selection. The selected criteria were assigned with appropriate value, and subsequently the evaluation of the proposed subjects was carried out. In this way, rough set theory was applied for solving the given problems. Finally, results obtained by rough set theory, were verified by multi-criteria decision-making methods: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE and TOPSIS.

Based on results it was concluded that rough set theory was successfully applied in all three problems. The superposition of the results obtained by the rough set theory with the results from other multi-criteria decision-making methods varies from 100% in the case of the choosing location for the flotation tailings landfill, to 40% in the case of choosing flotation collectors and flotation machines. High correlation coefficients demonstrate the high sensitivity of the rough set theory in terms of multi-criteria decision-making and define its usefulness in terms of insufficiency of data.

Key words: mining, mineral processing, rough set theory, multi-criteria decision-making, flotation tailings landfill, flotation collector, flotation machine.

Scientific area: MINING ENGINEERING

Narrow scientific area: SYSTEM ENGINEERING

UDC: 005.7:510.644

519.245:519.8/.816/.87

622:622.7/.765:681.3(043.3)

SADRŽAJ

1. UVOD.....	1
1.1. Predmet istraživanja	1
1.2. Naučni ciljevi istraživanja.....	2
1.3. Osnovne polazne postavke u istraživanjima	3
1.4. Program istraživanja.....	3
1.5. Metodologija istraživanja.....	4
1.6. Ostvareni rezultati	4
2. METODOLOGIJA.....	7
2.1. Teorija grubih skupova.....	7
2.1.1. Primer	12
2.1.2. Tabele i algoritmi odlučivanja.....	13
2.1.3. Zavisnost atributa	15
2.1.4. Redukcija atributa	16
2.1.5. Matrice nerazlikovanja i funkcije.....	21
2.2. Metoda VIKOR.....	27
2.3. Metoda AHP.....	30
2.4. Metoda ELECTRE	32
2.5. Metoda PROMETHEE.....	35
2.6. Metoda TOPSIS	37
3. PRIMENA TEORIJE GRUBIH SKUPOVA.....	41
3.1. Primena teorije grubih skupova u ekonomiji	41
3.2. Primena teorije grubih skupova u medicini.....	42
3.3. Primena teorije grubih skupova u zaštiti životne sredine.....	44
3.4. Primena teorije grubih skupova u građevinarstvu	45
3.5. Primena teorije grubih skupova u geologiji	46
3.6. Primena teorije grubih skupova u rudarstvu.....	47
4. EKSPERIMENTALNI DEO.....	50
4.1. Problem izbora lokacije za flotacijsko jalovište.....	52
4.1.1. Kriterijumi.....	53
4.1.2. Rangiranje potencijalnih lokacija metodom grubih skupova	57

4.1.3. Komparativni višekriterijumski modeli.....	58
4.1.4. Analiza i diskusija rezultata vrednovanja lokacija za flotacijsko jalovište	64
4.2. Problem izbora flotacijskog kolektora	67
4.2.1. Kriterijumi.....	67
4.2.2. Rangiranje flotacijskih kolektora metodom grubih skupova.....	70
4.2.3. Komparativni višekriterijumski modeli.....	71
4.2.4. Analiza i diskusija rezultata vrednovanja flotacijskih kolektora.....	82
4.3. Problem izbora flotacione mašine	86
4.3.1. Kriterijumi.....	86
4.3.2. Rangiranje flotacionih mašina metodom grubih skupova	89
4.3.3. Komparativni višekriterijumski modeli.....	90
4.3.4. Analiza i diskusija rezultata vrednovanja flotacionih mašina	98
5. ZAKLJUČAK.....	102
LITERATURA	106
BIOGRAFIJA AUTORA.....	115
Izjava o autorstvu.....	116
Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada.....	117
Izjava o korišćenju.....	118

Pregled skraćenica

AHP	- AHP model/metoda - analitički hijerarhijski proces (engl. <i>Analytical Hierarchy Process</i>)
VIKOR	- VIKOR model/metoda Višekriterijumskog KOMPromisnog Rangiranja
ELECTRE	- ELECTRE model/metoda - eliminacije i izbornog predstavljanja stvarnosti (fran. <i>ELimination Et Choix Traduisant la REalité</i>)
KAX	- Kalijum amil ksantat
KEX	- Kalijum etil ksantat
NaIPX	- Natrijum izopropil ksantat
PROMETHEE	- PROMETHEE model/metoda - organizovanog rangiranja preferencija za unapređenje evaluacije (eng. <i>Preference Ranking Organization Method for Enrichment Evaluation</i>)
TOPSIS	- Tehnika za utvrđivanje sklonosti i prema sličnosti sa idealnom rešenju (eng. <i>Technique for Order Performance by Similarity to Ideal Solution</i>)

1. UVOD

1.1. Predmet istraživanja

Tehnološki tokovi u rudarstvu predstavljaju skupove međusobno uslovljenih i povezanih parcijalnih procesa. U inženjerstvu se opisi tehnoloških procesa, odnosno proizvodnih procesa rudničkih sistema matematički formalizuju odgovarajućim matematičkim modelima. Matematičko modelovanje omogućava potpunije sagledavanje i analizu dinamike tehnoloških tokova, posledica i mogućih rizika nastalih pod uticajima oscilacija početnih uslova, usled promena u radnoj sredini, nepouzdanosti ulaznih resursa, pod uticajima promena u spoljnjem okruženju i slično.

U praktičnom smislu, adekvatan matematički model pruža pouzdan i u principu jeftin, virtuelni eksperimentalni ambijent, u kome je moguće neograničen broj puta izvoditi eksperimentalno testiranje, ponavljati i "proigravati" pretpostavljene situacije u tehnološkom procesu. U odnosu na "in situ" ili pilot eksperimentalna testiranja, prednost ovakvog pristupa je neometanje neposredne proizvodnje i nepostojanje rizika havarije ili neke druge moguće štete u proizvodnji koja bi eventualno mogla nastati u toku izvođenja test eksperimenata.

Kako se neki tehnološki tokovi u rudarstvu odvijaju relativno brzo, tipično za ovo je obogaćivanje mineralnih sirovina, relevantni podaci o tehnološkom toku moraju biti na raspolaganju u kratkom vremenu. Da bi se ovaj uslov uspešno praktično premostio, zahteva se da matematički model sa što manjim brojem ulaznih parametara uspešno

oslika proces. Zahtev je na prvi pogled protivrečan, ali iz ove "protivrečnosti" proizilazi imperativ izbora adekvatnog matematičko-modelskog pristupa.

U rudničkim uslovima kada (najčešće) nema dovoljnog prethodnog poznavanja ili dodatnih informacija o empirijskim podacima, kao što je raspodela verovatnoće u statistici ili stepen pripadnosti u teoriji rasplnutih (fazi) skupova, matematičko-modelski pristupi kao što su empirijski modeli, modeli verovatnoće, kinetički, fazi modeli, ne zadovoljavaju. U ovakvim uslovima matematički odgovor se nazire u *teoriji grubih skupova* (engl. *rough sets*), koja omogućava karakterizaciju tehnoloških atributa i pruža mogućnosti za analizu i proučavanje njihovih kvantitativnih i kvalitativnih svojstava. Ona je posebno pogodna u slučajevima kada je brojnost empirijskih i eksperimentalnih podataka mali, dakle pogodna je za proučavanje tehnoloških tokova koje karakteriše nedovoljnost i nepotpunost informacija.

Primena teorije grubih skupova je u povoju, ima primera njenog korišćenja u tehničkim naukama, naročito u kontroli procesa i sistemskom inženjerstvu, u ekonomiji, medicini i dr., međutim malo je radova koji se odnose na konkretne primene u rudarstvu, što je iniciralo predlog teme doktorske disertacije.

Istraživanja u okviru ove doktorske disertacije su usmerena na teorijska sagledavanja i praktičnu primenljivost teorije grubih skupova u modeliranju rudničkih tehnoloških procesa u uslovima nedovoljnosti podataka, sa fokusom na razvoj modela za pripremu mineralnih sirovina.

1.2. Naučni ciljevi istraživanja

Rudarstvo a u sklopu njega i priprema mineralnih sirovina, ima odlike koje su pogodne za analize i istraživanja pomoću teorije grubih skupova. To je pre svega stohastički karakter rudničke proizvodnje koju često karakteriše i mali broj i nekonzistentnost podataka. U ovakvim okolnostima, donošenje odluka i upravljanje proizvodnjom je skopčano sa nesigurnostima i rizicima.

U tom smislu ova doktorska disertacija identifikuje više ciljeve istraživanja integrisanih u temi zadatka: (1) sagledavanje problema, (2) postavljanje matematičko-modelskog pristupa baziranog na teoriji grubih skupova za definisanje racionalnih odgovora na

uočene dileme i pitanja, i (3) provera valjanosti predloženog pristupa u rešavanju konkretnih praktičnih problema. Delovi istraživanja obuhvataju analizu mogućih primena i vrednovanje primenljivosti teorije grubih skupova u rešavanju određenih problema u obogaćivanju mineralnih sirovina.

1.3. Osnovne polazne postavke u istraživanjima

Priprema mineralnih sirovina predstavlja niz međusobno tesno povezanih tehnoloških procesa u kome efikasnost celokupnog procesa zavisi od efikasnosti svakog od procesa pojedinačno, odnosno može se reći da je ceo lanac jak koliko i najslabija karika u njemu. To znači da prilikom vođenja procesa treba voditi računa o veoma velikom broju uticajnih faktora, što u nekim slučajevima može predstavljati problem pogotovo ako neki od parametara iskače iz zadatih vrednosti i nije ga moguće kontrolisati na pravi način.

Uočljivo je da su problemi donošenja strateških ili operativnih upravljačkih odluka u pripremi mineralnih sirovina ne samo složeni, već i vrlo specifični sa aspekta neizvesnosti, neodređenosti i gotovo uvek prisutne malobrojnosti i pouzdanosti podataka. Na osnovu analize literaturnih izvora, može se konstatovati da problem nije otvoren do kraja i istražen primereno njegovom značaju.

Ova i ranije izložena saznanja, inicirala su ideju i uticala na koncipiranje doktorske disertacije, sa osnovnim polaznim postavkama u istraživanjima: (1) otvaranje problema; (2) nedovoljna sagledanost i istraženost fokusiranog problema i (3) nepostojanje gotovog i pouzdanog „recepta” za njegovo rešavanje.

1.4. Program istraživanja

Istraživanja u okviru doktorske disertacije su realizovana na dva nivoa, teorijskom i praktičnom. Na prvom nivou sagledani su i otvoreni problemi, sagledani mogući odgovori u okviru teorije grubih skupova, i ponuđeni odgovori. Na drugom nivou, verifikovana su u praktičnom smislu saznanja i rezultati teorijskih istraživanja na nekima od procesa pripreme mineralnih sirovina.

U tom smislu program istraživanja obuhvata sledeće aktivnosti:

- Otvaranje i sagledavanje dimenzija problema;
- Sagledavanje svetskih iskustava i saznanja;
- Matematičke i filozofske osnove teorije grubih skupova;
- Razvoj modela zasnovanog na teoriji grubih skupova;
- Test-eksperimentalna istraživanja;
- Analiza ostvarenih rezultata i ocena primenljivosti teorije grubih skupova;
- Predlog daljih istraživačkih aktivnosti.

1.5. Metodologija istraživanja

Metodologija istraživanja je prilagođena temi, programu i ciljevima istraživanja u okviru disertacije. U prvom redu se zasniva na proučavanju svetskih iskustava kroz analizu literaturnih i drugih izvora informacija, kao i njihovu analizu u cilju donošenja odgovarajućih zaključaka bitnih za ocenu primenljivosti teorije grubih skupova.

Nakon toga, u eksperimentalnom delu rada je prikazana mogućnost primene teorije grubih skupova u pripremi mineralnih sirovina. Sam eksperimentalni deo je sastavljen iz tri dela u kojima su prikazani konkretni primeri. U prvom delu je prikazan primer primene teorije grubih skupova prilikom izbora lokacije za flotacijsko jalovište. Drugi deo se bavi mogućnošću primene grubih skupova pri izboru kolektora u flotaciji. U trećem delu je prikazana mogućnost da se teorija grubih skupova primeni prilikom izbora flotacionih mašina. Svi ovi primeri imaju za cilj da pokažu da je moguće uspešno rešavanje problema iz oblasti pripreme mineralnih sirovina pomoću teorije grubih skupova.

U okviru istraživanja korišćen je softver Visual PROMETHEE, kao i Microsoft Excel sa razvijenim modulima za rad sa metodom grubih skupova i metodama koje se koriste u višekriterijumskom odlučivanju: VIKOR, AHP, ELECTRE i TOPSIS.

1.6. Ostvareni rezultati

Cilj doktorske disertacije je bio primenljivost teorije grubih skupova za rešavanje problema iz oblasti rudarstva, odnosno pripreme mineralnih sirovina. U radu su

obrađena tri problema: izbor lokacije za flotacijsko jalovište, izbor flotacijskog kolektora i izbor flotacione mašine.

Urađena su test eksperimentalna istraživanja metodom grubih skupova a nakon toga su izvršene dodatne analize metodama višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS, u cilju provere dobijenih rezultata.

Rezultati test eksperimentalnih istraživanja su dokazali da je primenom teorije grubih skupova moguće uspešno rešavanje ovih problema. U sva tri slučaja je izvršen izbor i dobijeni rezultati su upoređeni sa rezultatima dodatnih analiza.

Prilikom izbora lokacije za flotacijsko jalovište, izbor je vršen između tri predložene lokacije: prva lokacija u dolini potoka Valja Mastaka i Veliki i Mali Prerast, druga u dolini Velikog Peka a treća u dolini Šaške reke. Metodom grubih skupova za najpovoljniju je izabrana lokacija u dolini potoka Valja Mastaka i Veliki i Mali Prerast, što su potvrdili i rezultati dodatnih analiza ostalim metodama višekriterijumskog odlučivanja.

U slučaju izbora flotacijskog kolektora, predloženo je bilo osam kolektora između kojih je vršen izbor. Kao najpovoljniji je izabran kolektor KEX₂ što su potvrdile i analize metodama VIKOR i ELECTRE, dok je u ostalim analizama ovaj kolektor bio na drugom mestu, odnosno prva alternativa.

Izbor flotacione mašine metodom grubih skupova je vršen između predloženih šest flotacionih mašina. Mašine su ocenjene na osnovu vrednosti atributa uslova i dobijeno je da je mašina M₂ najpovoljnija. Isti postupak je ponovljen i prilikom vrednovanja ostalim metodama višekriterijumskog odlučivanja. Metode AHP i PROMETHEE su potvrdile rezultat dobijen metodom grubih skupova, odnosno da je mašina M₂ najpovoljnija, dok se kod metoda: VIKOR, ELECTRE i TOPSIS ova mašina našla na drugom mestu.

2. METODOLOGIJA

Problem nesavršenog znanja je dugo bio predmet proučavanja filozofa, logičara i matematičara. Nedavno je to postalo ključno pitanje i za informatičare, posebno u oblasti veštačke inteligencije. Postoje mnogi pristupi problemu, kako da se nesavršeno znanje razume i kako da se njime rukuje (manipuliše). Bez sumnje najuspešnija u tome je teorija rasplnutih (fuzzy) skupova. Teorija grubih skupova je noviji matematički pristup nesavršenom znanju [1].

Teorija grubih skupova je relativno nova matematička teorija predstavljena od strane poljskog naučnika Zdzisława Pawlaka početkom 80-tih godina dvadesetog veka.

Ova teorija je pronašla mnogo interesantnih primena i od suštinskog je značaja za veštačku inteligenciju i za kognitivne nauke, posebno u oblastima mašinskog učenja, sticanja znanja, analiza odluka, otkrivanja znanja iz baza podataka, ekspertskih sistema, induktivnog rezonovanja i prepoznavanja obrazaca [1-5].

Metoda grubih skupova predstavlja osnovu test-eksperimentalnih istraživanja. Cilj ovih ispitivanja je bio da se prikaze mogućnost njene primene prilikom rešavanja različitih problema iz oblasti rudarstva. Metode višekriterijumskom odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS su korišćene za kontrolu dobijenih rezultata

U nastavku poglavlja je dat detaljniji prikaz svih korišćenih metoda sa posebnim osvrtom na metodu grubih skupova radi njenog boljeg razumevanja.

2.1. Teorija grubih skupova

Teorija grubih skupova predstavlja još jedan pristup neodređenosti. Kao i u slučaju teorije rasplnutih (fuzzy) skupova ona ne predstavlja alternativu klasičnoj teoriji skupova već je delimično ugrađena u nju. Teorija grubih skupova se može posmatrati kao specifična implementacija Fregeove ideje o neodređenosti, odnosno nepreciznost je u ovom slučaju izražena graničnom oblašću skupa a ne delimičnom pripadnošću kao u teoriji rasplnutih (fuzzy) skupova [1].

Koncept grubih skupova se može generalno definisati preko topoloških operacija, unutrašnjost i spoljašnjost, koje se još nazivaju i aproksimacije.

Pretpostavimo da imamo skup objekata U koji se još naziva i Univerzum i relaciju „nerazlikovanja“ $R \subseteq U \times U$, koja predstavlja naš nedostatak znanja o elementima U . Radi jednostavnosti pretpostavimo da R relacija ekvivalencije. Neka je X podskup skupa U . Želimo da okarakterišemo skup X u odnosu na R . U tom cilju će nam biti potrebni osnovni koncepti teorije grubih skupova:

- *Donja aproksimacija* skupa X u odnosu na R je skup svih objekata, koji se sa sigurnošću mogu klasifikovati kao X u odnosu na R .
- *Gornja aproksimacija* skupa X u odnosu na R je skup objekata koji se verovatno mogu klasifikovati kao X u odnosu na R .
- *Granična oblast* skupa X u odnosu na R je skup svih objekata koji se mogu klasifikovati ni kao X ni kao negacija od X u odnosu na R .

Na osnovu ovoga se može dati definicija grubih skupova:

- Skup X je *oštar* (precizan u odnosu na R) ukoliko je njegova granična oblast prazan skup.
- Skup X je *grub* (neprecizan u odnosu na R) ukoliko njegova granična oblast nije prazan skup.

Ovo je upravo ideja neodređenosti koju je predložio Frege.

Aproksimacije i granična oblast se mogu definisati detaljnije, za šta su potrebne dodatne oznake.

Klasa ekvivalencije R koja je određena elementom x se može označiti sa $R(x)$. Relacija „nerazlikovanja“ u određenom smislu opisuje naš nedostatak znanja o Univerzumu.

Klase ekvivalencije relacije „nerazlikovanja“, koje se zovu granule dobijene pomoću R , predstavljaju osnovne delove znanja koji se mogu opaziti (percipirati) zahvaljujući R .

Stoga imajući u vidu relaciju „nerazlikovanja“, generalno, posmatramo pojedinačne objekte ali smo prinuđeni da razmišljamo samo o dostupnim granulama znanja.

Formalne definicije donje i gornje aproksimacije i granične oblasti su sledeće:

- R -donja aproksimacija od X

$$R_*(x) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) : R(x) \subseteq X\}.$$

- R -gornja aproksimacija od X

$$R^*(x) = \bigcup_{x \in U} \{R(x) : R(x) \cap X \neq \emptyset\}.$$

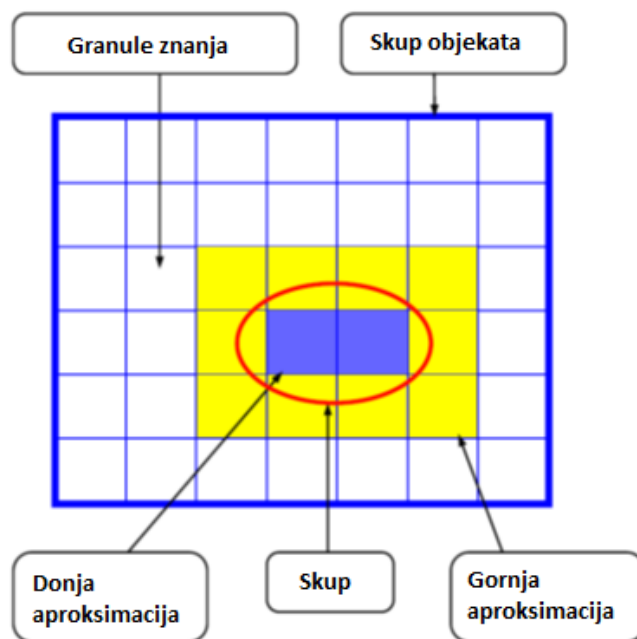
- R -granična oblast od X

$$RN_R(X) = R^*(x) - R_*(x).$$

Kao što se može videti iz definicija aproksimacije se izražavaju preko granula znanja.

- Donja aproksimacija skupa je skup svih granula koje se u potpunosti nalaze u skupu.
- Gornja aproksimacija skupa je unija svih granula koje imaju „ne prazan“ presek sa skupom.
- Granična oblast skupa je razlika između gornje i donje aproksimacije.

Ove definicije se može jasno videti na slici 1.



Slika 1. Grafički prikaz donje i gornje aproksimacije i granične oblasti grubog skupa [1].

Zanimljivo je uporediti definicije klasičnih skupova, rasplnutih (fuzzy) skupova i grubih skupova. Klasični skup je primitivni pojam i definiše se intuitivno ili aksiomatski. Rasplnuti (fuzzy) skupovi se definišu korišćenjem funkcije fuzzy pripadnosti, koja uključuje napredne matematičke strukture brojeve i funkcije. Grubi skupovi definisani su aproksimacijama, stoga ova definicija takođe zahteva napredne matematičke koncepte.

Aproksimacije imaju sledeća svojstva:

- 1) $R_*(X) \subseteq X \subseteq R^*(X)$
- 2) $R_*(\emptyset) = R^*(\emptyset) = \emptyset$; $R_*(U) = R^*(U) = U$
- 3) $R^*(X \cup Y) = R^*(X) \cup R^*(Y)$
- 4) $R_*(X \cap Y) = R_*(X) \cap R_*(Y)$
- 5) $R_*(X \cup Y) \supseteq R_*(X) \cup R_*(Y)$
- 6) $R^*(X \cap Y) \subseteq R^*(X) \cap R^*(Y)$
- 7) $X \subseteq Y \rightarrow R_*(X) \subseteq R_*(Y) \ \& \ R^*(X) \subseteq R^*(Y)$
- 8) $R_*(-X) = -R^*(X)$
- 9) $R^*(-X) = -R_*(X)$

$$10) R_*R_*(X) = R_*R^*(X) = R_*(X)$$

$$11) R^*R^*(X) = R_*R^*(X) = R^*(X)$$

Može se videti da aproksimacije u stvari predstavljaju unutrašnjost i spoljašnjost u topologiji generisane pomoću podataka. Prema tome teorija rasplnutih (fuzzy) skupova i teorija grubih skupova zahtevaju potpuno različite matematičke postavke.

Grubi skupovi se takođe mogu definisati angažovanjem funkcije grube pripadnosti, umesto aproksimacijama [4].

$$\mu_X^R : U \rightarrow \langle 0,1 \rangle$$

gde je:

$$\mu_X^R(x) = \frac{|X \cap R(x)|}{|R(x)|}$$

I $|X|$ označava kardinalnost od X .

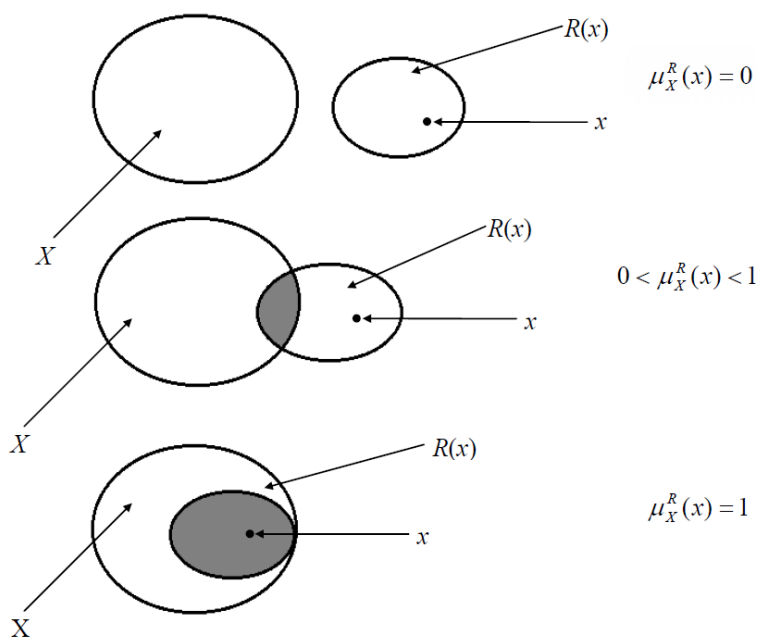
Funkcija grube pripadnosti izražava uslovnu verovatnoću da x pripada X s obzirom da se R može interpretirati kao stepen da x pripada X u pogledu informacija o x izraženih pomoću R .

Funkcija grube pripadnosti se može iskoristiti za definisanje aproksimacija i granične oblasti skupa, na sledeći način:

$$R_*(x) = \{x \in U; \mu_X^R(x) = 1\}$$

$$R^*(x) = \{x \in U; \mu_X^R(x) > 0\}$$

$$RN_R(X) = \{x \in U; 0 < \mu_X^R(x) < 1\}$$



Slika 2. Grafički prikaz donje i gornje aproksimacije i granične oblasti preko funkcije grube pripadnosti [1].

Može se videti da funkcija pripadnosti ima sledeće svojstva [4]:

- 1) $\mu_X^R(x) = 1$ akko $x \in R_*(X)$
- 2) $\mu_X^R(x) = 0$ akko $x \in U - R^*(X)$
- 3) $0 < \mu_X^R(x) < 1$ akko $x \in RN_R(X)$
- 4) $\mu_{U-X}^R(x) = 1 - \mu_X^R(x)$ za svako $x \in U$
- 5) $\mu_{X \cup Y}^R(x) \geq \max(\mu_X^R(x), \mu_Y^R(x))$ za svako $x \in U$
- 6) $\mu_{X \cap Y}^R(x) \leq \min(\mu_X^R(x), \mu_Y^R(x))$ za svako $x \in U$

Iz ovih svojstava sledi da se gruba pripadnost razlikuje od rasplinite (fuzzy) pripadnosti. Svojstva 5 i 6 pokazuju da se pripadnost za uniju i presek skupova, generalno ne može izračunati iz pripadnosti njihovih članova, kao što je slučaj kod rasplinitih (fuzzy) skupova. Prema tome gruba pripadnost je formalno generalizacija rasplinite (fuzzy) pripadnosti. Osim toga, funkcija grube pripadnosti, za razliku od funkcije rasplinite (fuzzy) pripadnosti, ima osobine verovatnoće.

Sada možemo dati dve definicije grubih skupova.

Definicija 1: Skup X je grub u odnosu na R ako $R_*(X) \neq R^*(X)$.

Definicija 2: Skup X je grub u odnosu na R ako za neko x , $0 < \mu_X^R(x) < 1$.

Može se videti da se ove dve definicije ne podudaraju (nisu ekvivalentne)[4].

Takođe treba napomenuti da teorija grubih skupova jasno razlikuje dva veoma važna koncepta, neodređenost i neizvesnost, koji se često mešaju u literaturi o veštačkoj inteligenciji.

Neodređenost je osobina skupova i može se opisati aproksimacijama, dok je neizvesnost osobina elemenata skupa i može se izraziti preko funkcije grube pripadnosti.

2.1.1. Primer

Radi pojednostavljenja predloženi pristup se prvo može objasniti intuitivno, pomoću jednostavnog primera.

Podaci se često prikazuju u obliku tabele, čije kolone predstavljaju atribute, redovi predmete interesovanja a vrednosti u tabeli su vrednosti atributa. Na primer, u tabeli koja sadrži informacije o pacijentima koji boluju od određenih bolesti predmeti interesovanja su pacijenti, atributi mogu biti npr. krvni pritisak, telesna temperatura, itd., dok vrednosti za predmet interesovanja *Smith* i atribut *krvni pritisak* može biti *normalan*. Ove tabele su poznate kao sistemi informacija, tabele atribut-vrednost ili informacione tabele.

U Tabeli 1 je prikazan primer jedne informacione tabele.

Tabela 1. Primer informacione tabele.

Pacijent	Glavobolja	Bol u mišićima	Temperatura	Grip
P1	Ne	Da	Visoka	Da
P2	Da	Ne	Visoka	Da
P3	Da	Da	Veoma visoka	Da
P4	Ne	Da	Normalna	Ne
P5	Da	Ne	Visoka	Ne
P6	Ne	Da	Veoma visoka	Da

U Tabeli 1 su prikazani podaci o šest pacijenata. Kolone predstavljaju attribute (simptome) a redovi predmete interesovanja (pacijente), dok su vrednosti u tabeli vrednosti atributa. Prema tome svaki red u tabeli se može posmatrati kao informacija o određenom pacijentu. Na primer, pacijent $P2$ je okarakterisan u tabeli pomoću sledećeg skupa atribut-vrednost: (*Glavobolja, Da*), (*Bol u mišićima, Ne*), (*Temperatura, Visoka*), (*Grip, Da*), koji daje informaciju o pacijentu.

Pacijenti $P2$, $P3$ i $P5$ se ne razlikuju u odnosu na atribut *Glavobolja*, pacijenti $P3$ i $P6$ u odnosu na attribute *Bol u mišićima* i *Grip*, i pacijenti $P2$ i $P5$ u odnosu na attribute *Glavobolja*, *Bol u mišićima* i *Temperatura*. Prema tome, atribut *Glavobolja* proizvodi dva osnovna skupa $\{P1, P3, P5\}$ i $\{P2, P4, P6\}$, dok atributi *Bol u mišićima* i *Glavobolja* proizvode sledeće osnovne skupove: $\{P1, P4, P6\}$, $\{P2, P5\}$ i $\{P3\}$. Slično tome se mogu definisati elementarni skupovi koje proizvodi bilo koji podskup atributa.

Pacijent $P2$ ima grip dok pacijent $P5$ nema i oni se ne razlikuju u odnosu na attribute *Glavobolja*, *Bol u mišićima* i *Temperatura*, stoga se grip ne može okarakterisati pomoću ovih atributa. Samim tim, pacijenti $P2$ i $P5$ predstavljaju granične slučajeve koji se ne mogu pravilno klasifikovati s obzirom na raspoloživo znanje. Pacijenti $P1$, $P3$ i $P6$ pokazuju simptome koji nam omogućavaju da ih klasifikujemo da sa sigurnošću imaju grip, za pacijente $P2$ i $P5$ se ne može isključiti da imaju grip i za pacijenta $P4$ se sa sigurnošću može reći da nema grip, prema prikazanim simptomima. Prema tome, donja aproksimacija skupa pacijenata koji imaju grip je skup $\{P1, P3, P6\}$, a gornja aproksimacija ovog skupa je $\{P1, P2, P4, P5, P6\}$, dok su granični slučajevi pacijenti $P2$ i $P5$. Što se tiče skupa pacijenata koji nemaju grip, za pacijenta $P4$ se može reći da nema grip, za pacijente $P2$ i $P5$ se sa sigurnošću ne zna da li imaju ili nemaju grip, pa je tako donja aproksimacija ovog skupa skup $\{P4\}$, gornja aproksimacija skup $\{P2, P4, P5\}$, i granična oblast je skup $\{P2, P5\}$, kao i u prethodnom slučaju.

2.1.2. Tabele i algoritmi odlučivanja

Ponekad u informacionim tabelama razlikujemo dve klase atributa, attribute uslova i attribute odluke. Na primer, u tabeli 1 se atributi *Glavobolja*, *Bol u mišićima* i *Temperatura* mogu smatrati atributima uslova, dok je atribut *Grip* atribut odluke. Svaki red u tabeli odlučivanja određuje pravilo odlučivanja, koje precizira odluke (akcije) koje

treba preuzeti kada su uslovi koje ističu atributi uslova zadovoljeni. Na primer, uslovi (*Glavobolja, Ne*), (*Bol u mišićima, Da*), (*Temperatura, Visoka*) u tabeli 1, određuju jedinstveno odluku (*Grip, Da*). Predmeti se u tabeli odlučivanja koriste kao oznake (engl. labels) pravila odlučivanja.

Pravila odlučivanja 2 i 5 tabeli 1, imaju iste uslove ali različite odluke. Takva pravila se nazivaju nedosledna (nekonzistentna, nedeterministička, konfliktna), u suprotnom se nazivaju dosledna (konzistentna, deterministička, nekonfliktna). Ponekad se konzistentna pravila odlučivanja nazivaju sigurna pravila, a nekonzistentna pravila se nazivaju moguća pravila. Tabele odlučivanja u kojima ima nekonzistentnih pravila odlučivanja se nazivaju nekonzistentnim (nedeterminističkim, konfliktim), u suprotnom se nazivaju konzistentnim (determinističkim, nekonfliktim).

Broj konzistentnih (doslednih) pravila u odnosu na sva pravila u tabeli odlučivanja se može koristiti kao faktor konzistentnosti tabele odlučivanja i označava se sa $\gamma(C,D)$, gde su C i D atributi uslova i odluke respektivno. Dakle ako je $\gamma(C,D)=1$ tabela odlučivanja je konzistentna, a ako je $\gamma(C,D)\neq 1$ tabela je nekonzistentna. Na primer, za tabelu 1 imamo $\gamma(C,D)=4/6=0,667$, što znači da je tabela 1 nekonzistentna. Pravila odlučivanja se često predstavljaju pomoću implikacija koje se nazivaju „ako-onda“ pravila. Na primer, pravilo 1 u tabeli 1 se može predstaviti kao implikacija:

ako (Glavobolja, Ne) i (Bol u mišićima, Da) i (Temperatura, Visoka) onda (Grip, Da)

Skup pravila odlučivanja se naziva *algoritam odlučivanja*. Svaka tabela odlučivanja se može povezati sa algoritmom odlučivanja koji se sastoji od pravila odlučivanja sadržanih u tabeli.

Mora se napraviti razlika između tabele odlučivanja i algoritma odlučivanja. Tabela odlučivanja je zbir podataka, a algoritam odlučivanja je zbir implikacija, npr. logičkih izraza. Kako bismo se bavili podacima koristimo različite matematičke metode, npr. statistika, ali da bismo analizirali implikacije moramo koristiti logičke alate. Prema tome, ova dva pojma nisu ekvivalentna ali zbog jednostavnosti se često pravila odlučivanja predstavljaju u obliku implikacija bez ulaženja u njihovu logičku prirodu, kao što se praktikuje u veštačkoj inteligenciji.

2.1.3. Zavisnost atributa

Još jedno važno pitanje u analizi podataka je otkrivanje zavisnosti između atributa. Intuitivno, skup atributa D u potpunosti zavisi od skupa atributa C ($C \Rightarrow D$) ako su sve vrednosti atributa iz D jedinstveno određene vrednostima atributa iz C . Drugim rečima, D u potpunosti zavisi od C ukoliko postoji funkcionalna zavisnost između vrednosti D i C . Na primer, u tabeli 1 ne postoje potpune zavisnosti. Kada bi u tabeli 1 vrednost atributa *Temperatura* za pacijenta $P5$ bila „Normalna“ umesto „Visoka“ postojala bi potpuna zavisnost $\{Temperatura\} \Rightarrow \{Grip\}$ zato što bi za svaku vrednost atributa *Temperatura* odgovarala jedinstvena vrednost atributa *Grip*.

Potreban je takođe opštiji koncept zavisnosti atributa koji se naziva delimična zavisnost atributa.

Na primer, u tabeli 1 atribut *Temperatura* određuje jedinstveno samo neke vrednosti atributa *Grip*. Tako $(Temperatura, Veoma visoka)$ podrazumeva $(Grip, Da)$, slično $(Temperatura, Normalna)$ podrazumeva $(Grip, Ne)$ ali $(Temperatura, Visoka)$ ne podrazumeva uvek $(Grip, Da)$. Prema tome delimična (parcijalna) zavisnost znači da su samo neke vrednosti D određene vrednostima C .

Formalno zavisnost se može definisati na sledeći način. Neka su D i C podskupovi od A . Možemo reći da D zavisi od C u stepenu k ($0 \leq k \leq 1$), $C \Rightarrow_k D$, ako je $k = \gamma(C, D)$.

Ako je $k=1$ možemo reći da D potpuno zavisi od C , a ako je $k < 1$ možemo reći da D delimično zavisi od C (u stepenu k).

Koeficijent k izražava odnos svih elemenata univerzuma, koji se mogu pravilno klasifikovati na blokove particije (engl. partition) U/D pomoću atributa C .

Prema tome koncept zavisnosti atributa je strogo povezan sa konzistentnošću tabele odlučivanja.

Na primer, za zavisnost $\{Glavobolja, Bol u mišićima, Temperatura\} \Rightarrow \{Grip\}$, imamo $k=4/6=2/3$ zbog toga što se četiri od šest pacijenata mogu jedinstveno klasifikovati da li imaju grip ili ne koristeći attribute *Glavobolja*, *Bol u mišićima* i *Temperatura*.

Kada bi nas zanimalo koliko se tačno pacijenata može dijagnostikovati koristeći samo atribut *Temperatura*, odnosno stepen zavisnosti $\{Temperatura\} \Rightarrow \{Grip\}$, dobićemo

$k=3/6=1/2$, zato što u ovom slučaju samo tri pacijenta (P3, P4 i P6) od šest se mogu jedinstveno klasifikovati prema tome da li imaju grip. Za razliku od prethodnog slučaja pacijent P4 se sada ne može klasifikovati da li ima grip ili ne. Otuda jedan atribut, *Temperatura*, nudi lošiju klasifikaciju od celog skupa atributa *Glavobolja*, *Bol u mišićima* i *Temperatura*. Zanimljivo je primetiti da se ni atributi *Glavobolja* i *Bol u mišićima* ne mogu iskoristiti da bi se prepoznao grip zato što za zavisnosti $\{Glavobolja\} \Rightarrow \{Grip\}$ i $\{Bol u mišićima\} \Rightarrow \{Grip\}$ imamo $k = 0$.

Može se videti da ako D u potpunosti zavisi od C onda je $I(C) \subseteq I(D)$. To znači da je particija generisana (stvorena) pomoću C finija od particije generisane (stvorene) pomoću D . Treba imati u vidu da koncept zavisnosti korespondira sa relacionim bazama podataka.

Ako D zavisi u stepenu k , $0 \leq k \leq 1$, od C onda je:

$$\chi(C, D) = \frac{|POS_C(D)|}{|U|}$$

gde je:

$$POS_C(D) = \bigcup_{X \in U/I(D)} C_*(X).$$

Izraz $POS_C(D)$, koji se naziva pozitivna oblast particije U/D u odnosu na C , je skup svih elemenata univerzuma U koji se mogu jedinstveno klasifikovati na blokove podele U/D pomoću C .

Možemo zaključiti da D potpuno (delimično) zavisi od C , ako se svi (neki) elementi univerzuma U mogu jedinstveno klasifikovati na blokove particije (podele) U/D pomoću C .

2.1.4. Redukcija atributa

Često se postavlja pitanje, mogu li se odstraniti neki od podataka iz tabele podataka a da se sačuvaju njena osnovna svojstva, odnosno da li tabela sadrži neke suvišne podatke.

Na primer, može se videti da ako iz tabele 1 izostavimo ili atribut *Glavobolja* ili *Bol u mišićima* dobijamo skup podataka koji je ekvivalentan originalnom, u odnosu na aproksimacije i zavisnosti, tj. dobijamo istu tačnost aproksimacije i stepen zavisnosti kao u originalnoj tabeli, međutim koristeći manji skup atributa.

Da bismo izrazili ovu ideju tačnije potrebni su nam neki pomoćni pojmovi. Neka B bude podskup od A i neka a pripada B .

- Možemo reći da je a nepotrebno u B ako je $I(B) = I(B - \{a\})$; u suprotnom je a neophodno u B .
- Skup B je nezavisan ako su svi njegovi atributi neophodni.
- Skup B' iz B je redukcija od B , ako je B' nezavisan i $I(B') = I(B)$.

Prema tome redukcija je skup atributa koji čuva particiju (podelu). To znači da je redukcija minimalni podskup atributa koji omogućava istu klasifikaciju elemenata svemira kao i ceo skup atributa. Drugim rečima, atributi koji ne pripadaju redukciji su nepotrebni u pogledu klasifikacije elemenata svemira.

Redukcije imaju nekoliko značajnih osobina. Predstavićemo sve od njih.

Prvo je potrebno definisati pojam jezgra atributa.

Neka B bude podskup od A . Jezgro od B je skup svih neophodnih atributa od B .

Važna osobina koja povezuje pojmove jezgra i redukcije je:

$$Core(B) = \bigcap Red(B),$$

gde je $Red(B)$ skup svih redukcija od B .

Zato što jezgro predstavlja presek svih redukcija, ono je uključeno u svaku redukciju, tj. svaki element jezgra pripada nekoj redukciji. Tako, u izvesnom smislu, jezgro predstavlja najvažniji podskup atributa, jer se nijedan od njegovih elemenata ne može ukloniti bez uticaja na klasifikacionu moć atributa.

Da bi dalje pojednostavili informacionu tabelu možemo eliminisati neke vrednosti atributa iz nje, tako da smo i dalje u stanju da razlikujemo objekte kao u originalnoj tabeli. U tom smislu možemo primeniti sličan postupak kao kad eliminišemo suvišne attribute, koji se definiše na sledeći način.

- Reći ćemo da je vrednost atributa $a \in B$ nepotrebna za x ako je $[x]_{I(B)} = [x]_{I(B - \{a\})}$, u suprotnom je vrednost atributa a neophodna za x .

- Ako je za svaki atribut $a \in B$ vrednost a neophodna za x , onda će se B nazvati *ortogonalna* za x .
- Podskup $B' \subseteq B$ je vrednost redukcije B za x , akko je B' ortogonalna za x i $[x]_{I(B)} = [x]_{I(B')}$.

Skup svih neophodnih vrednosti atributa u B za x se nazivaju *vrednost jezgra* od B za x i označavaju se sa $CORE^x(B)$.

Takođe u ovom slučaju imamo:

$$CORE^x(B) = \bigcap Red^x(B),$$

gde je $Red^x(B)$ familija svih redukcija od B za x .

Pretpostavimo da je data zavisnost $C \Rightarrow D$. Može se desiti da skup D ne zavisi od celog skupa C već od njegovog podskupa te stoga možemo biti zainteresovani da nađemo taj podskup. Kako bismo rešili ovaj problem potreban nam je pojam *relativna redukcija* koja se može definisati i objasniti na sledeći način.

Neka su $C, D \subseteq A$. Očigledno, ako je $C' \subseteq C$ D -redukcija od C , onda je C' minimalni podskup od C takav da

$$\chi(C, D) = \chi(C', D).$$

- Reći ćemo da je atribut $a \in C$ D -nepotreban u C , ako $POS_C(D) = POS_{(C-\{a\})}(D)$, u suprotnom je atribut a D -neophodan u C .
- Ako su svi atributi $a \in C$ C -neophodni u C , onda se C može nazvati *D -nezavisnim*.
- Podskup $C' \subseteq C$ je D -redukcija od C , akko je C' D -nezavistan i $POS_C(D) = POS_{C'}(D)$.

Skup svih D -neophodnih atributa u C se naziva *D -jezgro* od C , i obeležava se sa $CORE_D(C)$. U ovom slučaju takođe imamo svojstvo:

$$CORE_D(C) = \bigcap Red_D(C),$$

gde je $Red_D(C)$ familija svih D -redukcija od C .

Ako je $D=C$ dolazimo do prethodnih definicija.

Na primer u tabeli 1 imamo dve relativne redukcije u odnosu na *Grip*, $\{Glavobolja, Temperatura\}$ i $\{Bol u mišićima, Temperatura\}$ iz skupa uslovnih atributa $\{Glavobolja, Bol u mišićima, Temperatura\}$. To znači da se iz tabele može eliminisati ili atribut *Glavobolja* ili *Bol u mišićima* i samim tim umesto tabele 1 možemo koristiti tabelu 2 ili tabelu 3.

Tabela 2. Primer redukovane Tabele 1 (bez atributa *Bol u mišićima*).

Pacijent	Glavobolja	Temperatura	Grip
P1	Ne	Visoka	Da
P2	Da	Visoka	Da
P3	Da	Veoma visoka	Da
P4	Ne	Normalna	Ne
P5	Da	Visoka	Ne
P6	Ne	Veoma visoka	Da

Tabela 3. Primer redukovane Tabele 1 (bez atributa *Glavobolja*).

Pacijent	Bol u mišićima	Temperatura	Grip
P1	Da	Visoka	Da
P2	Ne	Visoka	Da
P3	Da	Veoma visoka	Da
P4	Da	Normalna	Ne
P5	Ne	Visoka	Ne
P6	Da	Veoma visoka	Da

Za tabelu 1 relativno jezgro od odluke *Grip* u odnosu na skup $\{Glavobolja, Bol u mišićima, Temperatura\}$ je *Temperatura*. Ovo potvrđuje naša prethodna razmatranja pokazujući da je *Temperatura* jedini simptom koji omogućava barem delimično dijagnostikovanje *Gripa* kod pacijenata.

Takođe će nam biti potrebni koncepti *redukcija vrednosti* i *jezgro vrednosti*. Pretpostavimo da je data zavisnost $C \Rightarrow D$ gde je C relativna D -redukcija od C . Za dalje ispitivanje zavisnosti moramo da znamo tačno kako vrednosti atributa iz D zavise od vrednosti atributa iz C . U tom smislu potreban nam je postupak za eliminisanje vrednosti atributa iz C koje ne utiču na vrednosti atributa iz D .

- Kažemo da je vrednost atributa $a \in C$, D -nepotrebna za $x \in U$, ako

$$[x]_{I(C)} \subseteq [x]_{I(D)} \text{ implicira } [x]_{I(C-\{a\})} \subseteq [x]_{I(D)};$$

u suprotnom je vrednost a D -neophodna za x .

- Ako za svaki atribut $a \in C$ vrednost a D -neophodna za x , onda se C može nazvati D -nezavisan (ortogonalan) za x .
- Podskup $C' \subseteq C$ je D -redukcija od x (redukcija vrednosti), akko je C' D -nezavisan za x i

$$[x]_{I(C)} \subseteq [x]_{I(D)} \text{ implicira } [x]_{I(C')} \subseteq [x]_{I(D)}.$$

Skup svih D -neophodnih za x vrednosti atributa u C se naziva D -jezgro od C za x (jezgro vrednosti), i označava se sa $CORE_D^x(C)$.

Takođe imamo sledeće svojstvo:

$$CORE_D^x(C) = \cap Red_D^x(C),$$

gde je $Red_D^x(C)$ familija svih D -redukcija od C za x .

Koristeći koncept redukcije vrednosti, tabela 2 i tabela 3 se mogu pojednostaviti na sledeći način.

Tabela 4. Primer Tabele 2 sa redukovanim vrednostima atributa Glavobolja.

Pacijent	Glavobolja	Temperatura	Grip
P1	Ne	Visoka	Da
P2	Da	Visoka	Da
P3	–	Veoma visoka	Da
P4	–	Normalna	Ne
P5	Da	Visoka	Ne
P6	–	Veoma visoka	Da

Tabela 5. Primer Tabele 3 sa redukovanim vrednostima atributa Bol u mišićima.

Pacijent	Bol u mišićima	Temperatura	Grip
P1	Da	Visoka	Da
P2	Ne	Visoka	Da
P3	–	Veoma visoka	Da
P4	–	Normalna	Ne
P5	Ne	Visoka	Ne
P6	–	Veoma visoka	Da

Dobijeni rezultati se takođe mogu predstaviti u obliku algoritma odlučivanja.

Za tabelu 4 imamo:

ako (*Glavobolja, Ne*) i (*Temperatura, Visoka*) onda (*Grip, Da*)

ako (*Glavobolja, Da*) i (*Temperatura, Visoka*) onda (*Grip, Da*)

ako (*Temperatura, Veoma visoka*) onda (*Grip, Da*)

ako (*Temperatura, Normalna*) onda (*Grip, Ne*)

ako (*Glavobolja, Da*) i (*Temperatura, Visoka*) onda (*Grip, Ne*)

ako (*Temperatura, Veoma visoka*) onda (*Grip, Da*)

i za tabelu 5 imamo:

ako (*Bol u mišićima, Da*) i (*Temperatura, Visoka*) onda (*Grip, Da*)

ako (*Bol u mišićima, Ne*) i (*Temperatura, Visoka*) onda (*Grip, Da*)

ako (*Temperatura, Veoma visoka*) onda (*Grip, Da*)

ako (*Temperatura, Normalna*) onda (*Grip, Ne*)

ako (*Bol u mišićima, Ne*) i (*Temperatura, Visoka*) onda (*Grip, Ne*)

ako (*Temperatura, Veoma visoka*) onda (*Grip, Da*)

Sledeće značajno svojstvo povezuje redukciju i zavisnost:

a) $B' \Rightarrow B - B'$, gde je B' redukcija od B .

Pored toga imamo:

b) Ako $B \Rightarrow C$, onda $B \Rightarrow C'$, za svako $C' \subseteq C$,

posebno,

c) Ako $B \Rightarrow C$, onda $B \Rightarrow \{a\}$, za svako $a \in C$.

Štaviše, imamo:

d) Ako je B' redukcija od B , onda ne važi ni $\{a\} \Rightarrow \{b\}$ ni $\{b\} \Rightarrow \{a\}$, za svako $a, b \in B'$, tj. svi atributi u redukciji su parovno (engl. pairwise) nezavisni.

2.1.5. Matrice nerazlikovanja i funkcije

Kako bismo lakše izračunali redukciju i jezgra koristićemo matricu razlikovanja [5] koja se definiše na sledeći način.

Pod matricom razlikovanja od $B \subseteq A$, $M(B)$, podrazumevamo matricu $n \times n$ definisanu kao:

$$(c_{ij}) = \{a \in B: a(x_i) \neq a(x_j)\} \text{ za } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Prema tome c_{ij} je skup svih atributa koji razaznaju (razlikuju) objekte x_i i x_j .

Matrica razlikovanja $M(B)$ dodeljuje svakom paru objekata x i y podskup atributa $\delta(x,y) \subseteq B$, sa sledećim svojstvima:

- $\delta(x, x) = \emptyset$,
- $\delta(x, y) = \delta(y, x)$,
- $\delta(x, z) \subseteq \delta(x, y) \cup \delta(y, z)$.

Ove osobine su slične osobinama polu distance, te se stoga funkcija δ može smatrati *kvalitativnom polu matricom* a $\delta(x, y)$ *kvalitativnom polu distancom*. Prema tome, matrica razlikovanja se može posmatrati kao *kvalitativna matrica* ili *matrica polu distance*.

Treba takođe napomenuti da za svako $x, y, z \in U$ imamo:

- $|\delta(x, x)| = 0$,
- $|\delta(x, y)| = |\delta(y, x)|$,
- $|\delta(x, z)| \leq |\delta(x, y)| + |\delta(y, z)|$.

Lako se može videti da je jezgro skup svih pojedinačnih unosa matrice razlikovanja $M(B)$.

$$CORE(B) = \{a \in B: c_{ij} = \{a\}, \text{ za neko } i, j\}.$$

Jasno je da je $B' \subseteq B$ redukcija od B , ako je B' minimalni (s obzirom na inkluziju) podskup od B takav da je:

$$B' \cap c \neq \emptyset \text{ za svaki ne prazan unos } c (c \neq \emptyset) \text{ u } M(B).$$

Drugim rečima redukcija je minimalni podskup atributa koji razlikuje sve objekte pomoću celog skupa atributa.

Svaka matrica razlikovanja $M(B)$ određuje jedinstvenu *funkciju razlikovanja* (Bool-ovu funkciju) $f(B)$.

Neka svakom atributu $a \in B$ bude dodeljena binarna Bool-ova promenljiva i neka $\Sigma \delta(x, y)$ označava Bool-ovu sumu svih Bool-ovih promenljivih dodeljenih skupu atributa $\delta(x, y)$. Onda se funkcija razlikovanja može definisati pomoću formule:

$$f(B) = \prod_{x,y \in U^2} \{ \Sigma \delta(x, y) : (x, y) \in U^2 \text{ i } \delta(x, y) \neq \emptyset \}.$$

Sledeće svojstvo utvrđuje odnos između disjunktivnog normalnog oblika funkcije $f(B)$ i skupa svih redukcija od B .

Svi konstituenti u minimalnom disjunktivnom normalnom obliku funkcije $f(B)$ su redukcije od B .

Kako bi se izračunala vrednost jezgra i vrednost redukcije za x takođe možemo koristiti matricu razlikovanja (u istom obliku koji je već definisan) i funkciju razlikovanja (koja se mora malo modifikovati).

$$f^x(B) = \prod_{y \in U} \{ \Sigma \delta(x, y) : y \in U \text{ i } \delta(x, y) \neq \emptyset \}.$$

Relativna redukcija i jezgro se takođe mogu izračunati pomoću matrice razlikovanja, koja zahteva malu modifikaciju.

$$c_{ij} = \{ a \in C : a(x_i) \neq a(x_j) \text{ i } w(x_i, x_j) \},$$

gde je $w(x_i, x_j) \equiv x_i \in POS_C(D) \text{ i } x_j \notin POS_C(D)$ ili

$$x_i \notin POS_C(D) \text{ i } x_j \in POS_C(D)$$

ili

$$x_i, x_j \in POS_C(D) \text{ i } (x_i, x_j) \notin I(D)$$

za $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Ako se particija definisana pomoću D može definisati pomoću C onda se uslov $w(x_i, x_j)$ iz prethodne definicije može redukovati na $(x_i, x_j) \notin I(D)$.

Prema tome, vrednost unosa c_{ij} predstavlja skup svih atributa koji raspoznaju objekte x_i i x_j koji ne pripadaju istoj klasi ekvivalencije relacije $I(D)$.

U narednim definicijama su potrebne male izmene.

D -jezgro je skup svih pojedinačnih elemenata unosa matrice razlikovanja $M(D)$.

$$CORE_D(C) = \{a \in C : c_{ij} = (a), \text{ za neko } i, j\}.$$

Skup $C' \subseteq C$ je D -redukcija od C , ako je C' minimalni (s obzirom na inkluziju) podskup od C takav da je:

$$C' \cap c \neq \emptyset \text{ za svaki ne prazan unos } c (c \neq \emptyset) \text{ u } M_D(C).$$

Prema tome, D -redukcija je minimalni podskup atributa koji razlikuje sve klase ekvivalencije relacije $I(D)$.

Svaka matrica razlikovanja $M_D(C)$ definiše jedinstveno *funkciju razlikovanja* (Bool-ovu funkciju) $f_D(C)$. Imamo takođe sledeće svojstvo:

Svi konstituenti u disjunktivnom normalnom obliku funkcije $f_D(C)$ su D -redukcije od C .

Za izračunavanje vrednosti redukcija i vrednosti jezgra za relativne redukcije kao početnu tačku koristimo matricu razlikovanja $M_D(C)$ i funkcija razlikovanja će onda imati sledeći oblik:

$$f_D^x(C) = \prod_{y \in U} \{\sum \delta(x, y) : y \in U \text{ i } \delta(x, y) \neq \emptyset\}.$$

Ova razmatranja možemo ilustrativno prikazati računanjem relativne redukcije na skupu atributa $\{Glavobolja, Bol \text{ u mišićima}, Temperatura\}$ u odnosu na *Grip*.

Odgovarajuća matrica razlikovanja je prikazana u tabeli 6.

Tabela 6. Primer matrice razlikovanja

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4	T	G, BM, T				
5	G, BM		BM, T			
6				T	G, BM, T	

Oznake G , BM i T , u tabeli 6, označavaju *Glavobolju*, *Bol u Mišićima* i *Temperaturu*, respektivno.

Funkcija razlikovanja za ovu tabelu je:

$$T(G+BM)(G+BM+T)(BM+T),$$

gde + označava Bool-ovu sumu a Bool-ovo množenje je izostavljeno u formuli.

Nakon pojednostavljenja funkcije razlikovanja koristeći zakone Bool-ove algebre dobijamo sledeći izraz:

$$TG+TBM,$$

koji nam govori da postoje dve redukcije TG i TBM u tabeli a T je jezgro.

2.1.6. Značaj atributa i aproksimativne redukcije

Kao što se može zaključiti iz razmatranja koja se tiču redukcije atributa, oni ne mogu biti jednako važni. Neki od njih se mogu eliminisati iz informacione tabele bez gubljenja informacije sadržane u njoj. Ideja redukcije atributa može se generalizovati uvođenjem koncepta *značaj atributa*, koji nam omogućava evaluaciju (procenu) atributa ne samo po skali sa dve vrednosti, nepotreban–neophodan, već dodeljivanjem atributu realnog broja iz zatvorenog intervala $[0,1]$ čime se izražava važnost atributa u informacionoj tabeli.

Značaj atributa se može proceniti merenjem efekta uklanjanja atributa iz informacione tabele na klasifikaciju definisanu u tabeli. Počnimo naše razmatranje sa tabelama odlučivanja.

Neka C i D budu skupovi atributa uslova i atributa odluke respektivno i neka a bude atribut uslova, tj. $a \in C$. Kao što je prikazano ranije broj $\chi(C, D)$ izražava stepen konzistentnosti tabele odlučivanja, ili stepen zavisnosti između atributa C i D , odnosno tačnost aproksimacije particije U/D pomoću C . postavlja se pitanje kako se koeficijent $\chi(C, D)$ menja uklanjanjem atributa a , tj. odnosno koja je razlika između $\chi(C, D)$ i $\chi(C - \{a\}, D)$. Možemo normalizovati razliku i definisati značaj atributa a kao:

$$\sigma_{(C,D)}(a) = \frac{(\chi(C,D) - \chi(C - \{a\}, D))}{\chi(C,D)} = 1 - \frac{\chi(C - \{a\}, D)}{\chi(C,D)},$$

i označava se sa jednostavno sa $\sigma(a)$ kada su C i D poznati (razumljivi).

Očigledno je $0 \leq \sigma(a) \leq 1$. Što je atribut a važniji to je broj $\sigma(a)$ veći. Na primer za attribute uslova u tabeli 1 imamo sledeće rezultate:

$$\begin{aligned}\sigma(\text{Glavobolja}) &= 0, \\ \sigma(\text{Bol u mišićima}) &= 0, \\ \sigma(\text{Temperatura}) &= 0,75.\end{aligned}$$

Zbog toga što je značaj atributa *Glavobolja* ili *Bol u mišićima* nula, njihovo uklanjanje iz atributa uslova ne utiče na skup konzistentnih pravila odlučivanja. Stoga je atribut *Temperatura* najznačajniji u tabeli. To znači da bi se uklanjanjem atributa *Temperatura*, 75% (tri od četiri) konzistentnih pravila odlučivanja izgubilo iz tabele, pa se može reći da nedostatak ovog atributa suštinski utiče na „moć odlučivanja“ tabele odlučivanja.

Za redukovane attribute uslova, npr. $\{\text{Glavobolja}, \text{Temperatura}\}$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\sigma(\text{Glavobolja}) &= 0,25 \\ \sigma(\text{Temperatura}) &= 1.\end{aligned}$$

U ovom slučaju uklanjanjem atributa *Glavobolja*, tj. korišćenjem samo atributa *Temperatura*, 25% (jedan od četiri) konzistentnih pravila odlučivanja će se izgubiti, a izostavljanjem atributa *Temperatura*, tj. korišćenjem samo atributa *Glavobolja*, 100% (sva) konzistentna pravila odlučivanja će biti izgubljena. To znači da bi u tom slučaju donošenje odluka bilo u potpunosti nemoguće, dok bi korišćenjem samo atributa *Temperatura* neke odluke mogle biti donesene.

Tako se koeficijent $\sigma(a)$ može shvatiti kao greška koja se javlja kada je atribut a izostavljen. Koeficijent značaja se može proširiti na skup atributa na sledeći način:

$$\sigma_{(C,D)}(B) = \frac{(\chi(C,D) - \chi(C-B,D))}{\chi(C,D)} = 1 - \frac{\chi(C-B,D)}{\chi(C,D)}.$$

Označava se sa $\sigma(B)$, kada su C i D poznati (razumljivi), a B predstavlja podskup od C .

Ako je B redukcija od C , onda je $\sigma(B) = 1$, tj. uklanjanje bilo koje redukcije iz skupa pravila odlučivanja omogućuje donošenje sigurnih odluka.

Svaki podskup B od C se može nazvati *aproksimativnom redukcijom* (redukcionom aproksimacijom) od C , a broj

$$\varepsilon_{(C,D)}(B) = \frac{(\gamma(C,D) - \gamma(B,D))}{\gamma(C,D)} = 1 - \frac{\gamma(B,D)}{\gamma(C,D)},$$

koji se označava sa $\varepsilon(B)$, se naziva *greška aproksimativne redukcije (redukcione aproksimacije)*. On izražava tačno kako skup atributa B aproksimira skup atributa uslova C . Očigledno je $\varepsilon(B) = 1 - \sigma(B)$ i $\varepsilon(B) = 1 - \varepsilon(C - B)$. Za svaki podskup B od C imamo $\varepsilon(B) < \varepsilon(C)$. ako je B redukcija od C , onda je $\varepsilon(B) = 0$.

Na primer, bilo koji od atributa *Glavobolja* i *Temperatura* se može smatrati aproksimativnom redukcijom od $\{Glavobolja, Temperatura\}$, i:

$$\begin{aligned}\varepsilon(Glavobolja) &= 1, \\ \varepsilon(Temperatura) &= 0,25.\end{aligned}$$

Ali za ceo skup atributa uslova $\{Glavobolja, Bol u mišićima, Temperatura\}$ imamo sledeću aproksimativnu redukciju

$$\varepsilon(Glavobolja, Bol u mišićima) = 0,75.$$

Koncept aproksimativne redukcije je generalizacija već razmatranog koncepta redukcije. Minimalni podskup B skupa atributa uslova C , takav da je $\gamma(C,D) = \gamma(B,D)$, ili $\varepsilon_{(C,D)}(B) = 0$ je redukcija u pravom smislu. Aproksimativna redukcija može biti korisna u slučajevima kada je manji broj atributa uslova poželjniji od veće tačnosti klasifikacije.

2.2. Metoda VIKOR

Metoda VIKOR je razvijena za višekriterijumsku optimizaciju kompleksnih sistema. VIKOR određuje kompromisnu rang listu, kompromisno rešenje i intervale stabilnosti težinskih faktora za stabilnost preferencija kompromisnog rešenja dobijenog početnim (zadatim) težinskim faktorima. Metoda VIKOR se fokusira na rangiranje i izbor alternative, iz skupa alternativa pri prisustvu konfliktnih kriterijuma. Uvodi se višekriterijumski indeks rangiranja, zasnovan na određenoj meri „bliskosti idealnom“ rešenju [6-8].

Ukoliko se pretpostavi da se svaka alternativa vrednuje prema svakoj kriterijumskoj funkciji, kompromisno rangiranje se može izvršiti poređenjem bliskosti prema idealnoj

alternativi. Višekriterijumska mera kompromisnog rangiranja razvijena je iz L_p -metrike, koja je primenjena kao funkcija agregacije u metodi kompromisnog programiranja. Različite i -alternative označavaju se sa a_1, a_2, \dots, a_i . Za alternativu a_i , rejting j -aspekta označava se sa f_{ij} , tj. f_{ij} je vrednost j -kriterijumske funkcije za alternativu a_i ; m je broj kriterijuma.

Razvoj metode VIKOR počinje od L_p -metrike:

$$L_{p,i} = \left\{ \sum_{j=1}^m \left[w_j \left(f_j^* - f_{ij} \right) / \left(f_j^* - f_i^- \right) \right]^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty; i = 1, 2, \dots, n.$$

U metodi VIKOR $L_{1,i}$ i $L_{\infty,i}$ koriste se da bi se formulisala mera rangiranja. Rešenje dobijeno sa *miniSi* je sa maksimalnim grupnim obeležjem „pravilo većine“ (pesimističko rešenje), a rešenje dobijeno *miniRi* je sa minimumom individualnog gubitka prilike (očekivano rešenje). Kompromisno rešenje F^c je moguće rešenje koje je „najbliže“ idealnom F^c , a kompromisno označava dogovor postignut međusobnim usklađivanjem.

Metoda kompromisnog rangiranja VIKOR se izvršava prema sledećim koracima:

1. Određivanje najboljih f_j^* i najgorih f_j^- vrednosti za sve funkcije kriterijuma, $j=1, 2, \dots, m$. Ako j -ta funkcija predstavlja dobiti tada:

$$f_j^* = \max_i f_{ij}$$

$$f_j^- = \min_i f_{ij}$$

2. Računanje vrednosti S_i i R_i , $i = 1, 2, \dots, n$, prema relacijama:

$$S_i = \sum_{j=1}^m w_j \left(f_j^* - f_{ij} \right) / \left(f_j^* - f_i^- \right)$$

$$R_i = \max_j \left[w_j \left(f_j^* - f_{ij} \right) / \left(f_j^* - f_i^- \right) \right]$$

gde je:

w_j težinski faktor kriterijuma, koji predstavlja relativnu značajnost kriterijuma.

3. Računanje vrednosti Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, prema relaciji:

$$Q_i = \frac{v(S_i - S^*)}{(S^- - S^*)} + (1-v) \frac{(R_i - R^*)}{(R^- - R^*)}$$

Gde je:

$$S^* = \min_i S_i; S^- = \max_i S_i$$

$$R^* = \min_i R_i; R^- = \max_i R_i$$

v je uvedeno kao težinski faktor strategije maksimizovanja grupnog obeležja, a $1-v$ je težinski faktor individualnog gubitka prilike.

4. Rangiranje alternativa, sortiranjem vrednosti S , R i Q po opadajućem redosledu. Rezultat su tri rang liste.

5. Predlog kompromisnog rešenja alternative a' koja je rangirana kao najbolja prema vrednosti mere Q (minimalna vrednost) ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

U_1 : „Prihvatljiva prednost“:

$$Q(a'') - Q(a') \geq DQ.$$

gde je a'' alternativa sa drugim položajem prema rang listi Q ; $DQ=1/(n-1)$; n je broj alternativa.

U_2 : „Prihvatljiva stabilnost odlučivanja“:

Alternativa a' takođe mora biti najbolje rangirana prema S i/ili R . Kompromisno rešenje je stabilno u procesu odlučivanja, koje može biti „glasanje prema pravilu većine“ (kada je potrebno da je $v > 0,5$), ili preko „konsenzusa“ $v \approx 0,5$, ili sa „veto“ ($v < 0,5$). Ovde, v je težinski faktor strategije odlučivanja „većina kriterijuma“ (ili „maksimizacija grupnog obeležja“).

Ako jedan od prethodnih uslova nije zadovoljen, tada se predlaže skup kompromisnih rešenja koji se sastoji od:

- alternative a' i a'' ako nije ispunjen uslov U_2 , ili
- alternative a' , a'' , ..., $a(N)$ ako nije ispunjen uslov U_1 ; $a(N)$ je određeno relacijom $Q(a(N)) - Q(a') < DQ$ za maksimum N (pozicija ovih alternativa u „bliskosti“).

Najbolja alternativa, rangirana prema Q , je ona sa minimalnom vrednošću Q . Glavni rezultat rangiranja je kompromisna rang lista alternativa i kompromisno rešenje sa „stopom prednosti“. Poredak po metodi VIKOR može biti izveden sa različitim vrednostima težinskih faktora kriterijuma analizirajući tako uticaj težinskih faktora kriterijuma na kompromisno rešenje. Metoda VIKOR određuje intervale stabilnosti za težinske faktore kriterijuma. Kompromisno rešenje postignuto sa početnim težinskim faktorima kriterijuma ($w_j, j= 1, 2, \dots, m$), biće zamenjeno ako se vrednosti težinskih faktora ne nalaze unutar stabilnog intervala. Analiza težina stabilnog intervala za jedan kriterijum, izvodi se zajedno po svim kriterijumima funkcije, s istim početnim vrednostima težinskih faktora [6,9].

VIKOR je koristan alat u višekriterijumskom odlučivanju, pogotovo u situaciji u kojoj donosilac odluke nije u stanju ili ne zna izraziti svoje preferencije za težinske faktore pojedinih kriterijuma na početku sastavljanja matrice performansi. Dobijeno kompromisno rešenje može biti prihvaćeno od strane donosilaca odluke, jer pruža maksimalnu „grupnu korisnost“ i minimalno individualno „žaljenje“. Kompromisno rešenje može biti osnov za pregovore koji uključuju preferencije donosilaca odluka za težinske faktore kriterijuma [6].

2.3. Metoda AHP

AHP metodu analize hijerarhijskog procesa (AHP, engl. *Analytic Hierarchy Process*) razvio je Thomas Saaty [10]. AHP predstavlja jedan od najpoznatijih i najčešće korišćenih metoda višekriterijumske analize. Zasnovan je na tri principa: sastavljanje hijerarhije, postavljanje prioriteta i provera konzistentnosti [6].

Sastavljanje hijerarhije – problem odlučivanja, postavljen oko cilja vrednovanja, struktuiru se i slaže u hijerarhiju prema svojim sastavnim delovima: ciljevi, kriterijumi, podkriterijumi i alternative. Cilj se nalazi na vrhu hijerarhije, dok su kriterijumi, podkriterijumi i alternative na nižim nivoima. Hijerarhija ne mora da bude kompletna; npr. element na nekom nivou ne mora da bude kriterijum za sve elemente u podnivou.

Postavljanje prioriteta – relativni prioritet, značajnost data svakom elementu hijerarhije, određuje se parcijalnoparnim poređenjem značajnosti svakog elementa na nižem nivou

u smislu kriterijuma (ili elemenata) sa kojim postoji uzročna veza. Donosilac odluke koristi mehanizam parcijalnoparnog poređenja Satijevom skalom sa vrednostima od 1 do 9 (tabela 2.3), za popunjavanje matrice parcijalno-parnog poređenja A .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & P_c(a_1, a_2) & \dots & P_c(a_1, a_n) \\ P_c(a_2, a_1) & 1 & \dots & P_c(a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_c(a_n, a_1) & P_c(a_n, a_2) & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Relativan prioritet, ili težinski faktor, dodeljuje se odgovarajućim vektorom sopstvenih vrednosti W koji odgovara najvećoj sopstvenoj vrednosti λ_{max} .

$$A \cdot W = \lambda_{max} \cdot W$$

U slučaju da su parcijalnoparnopoređenja u potpunosti konzistentna, matrica A ima rang 1 i $\lambda_{max} = n$. U slučaju potpuno konzistentne matrice A , težinski faktori poređanih elemenata mogu se dobiti normalizovanjem bilo kojeg reda kolone matrice A .

Prethodno opisana procedura ponavlja se za sve podsisteme hijerarhije. Da bi se sintetizovali vektori prioriteta, isti se množe sa težinskim faktorima elemenata u višem nivou hijerarhije. Rezultat vrednovanja je ukupni relativni prioritet dodeljen najnižim elementima u hijerarhiji, tj. alternativama. Ukupni relativni prioriteti alternativa ukazuju na uticaj alternative prema cilju vrednovanja. Prioriteti alternativa predstavljaju sintezu lokalnih prioriteta (prioriteta elemenata na svakom podnivou) i reflektuju proces vrednovanja jednog ili više donosilaca odluke.

Provera konzistentnosti – AHP spada u popularne metode, zbog toga što ima sposobnost da identifikuje i analizira nekonzistentnosti donosilaca odluke u procesu rasuđivanja i vrednovanja elemenata hijerarhije. U svakoj matrici parcijalnoparnog poređenja A za slučaj potpune konzistentnosti važi sledeća jednačina:

$$P_c(a_i, a_j) = P_c(a_i, a_k)P_c(a_k, a_j), \forall i, j, k.$$

Kada su matrice parcijalnoparnog poređenja u potpunosti konzistentne, prioritet (težinski faktor) vektora je predstavljen vektorom sopstvenih vrednosti W koji odgovara najvećoj sopstvenoj vrednosti λ_{max} . Kod potpuno konzistentne matrice A najveća sopstvena vrednost matrice A (λ_{max}) jednaka je broju elemenata koji se porede n . U

slučaju da je nekonzistentnost matrice parcijalno-parnog poređenja ograničena, λ_{max} se blago razlikuje od n . Razlika $\lambda_{max} - n$ se deli sa $n - 1$ i koristi se kao mera nekonzistentnosti, ili „indeks konzistentnosti“ CI (engl. consistency index) dat jednačinom:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}.$$

Konačni stepen konzistentnosti CR (engl. consistency ratio), na osnovu koga se može zaključiti da li je vrednovanje konzistentno, računa se kao odnos indeksa konzistentnosti CI i slučajnog indeksa RI (engl. random index):

$$CR = \frac{CI}{RI}.$$

Slučajni indeks RI zavisi od reda matrice, a preuzima se iz table [10] u kojoj prvi red predstavlja red matrice poređenja, a drugi slučajne indekse. Prema Saaty [10] nekonzistentost ne bi trebala biti veća od 10% ($CR \leq 0,10$).

2.4. Metoda ELECTRE

Metoda ELECTRE (ELimination and (Et) Choice Translating REality) je razvijena za parcijalno uređenje skupa rešenja na osnovu preferencije donosioca odluke [8,11]. Relacija za preferentno uređenje u ovoj metodi ne mora biti tranzitivna. Kada se formulišu veze relacijom uređenja R , onda se na osnovu toga konstruiše graf G u kome čvorovi predstavljaju moguća rešenja (ili neinferiorna rešenja, ako je prethodno određen njihov skup). Grana grafa se usmerava od čvora x_1 prema x_2 ako je $x_1 R x_2$. Za tako konstruisan graf nađe se jezgro grafa koje predstavlja varijante preferirane datom strukturom preferencije.

Metoda ELECTRE je pogodna za diskretne probleme i u slučaju raznorodnih kriterijumskih funkcija (atributa ili stanovišta mišljenja). Neka ima m rešenja i n mera dobrote na osnovu kojih treba izabrati najbolje rešenje. U tom slučaju treba konstruisati n grafa sa po m čvorova. Na osnovu delimičnog uređenja eliminišu se neki čvorovi. Rezultantni graf se određuje prema uslovima „saglasnosti“ i „nesaglasnosti“ [8,11].

Ista škola, (METRA iz Pariza) razvila je metodu ELECTRE II, koja se takođe bazira na uređenju relacijom preferencije. Ovde se ukratko daje matematička formulacija ove

metode. Označimo sa I skup indeksa (i) kriterijumskih funkcija (f_i). Za svaki par rešenja (x_1, x_2) definiše se

$$I^0(x_1, x_2) = \{i \in I : f_i(x_1) \theta f_i(x_2)\}$$

gde je θ uvedeno umesto simbola $+$, $=$, $-$, a 0 umesto $>$, $=$, $<$, respektivno. Donosilac odluke treba da zadaje i težine kriterijuma. Težine označimo sa w_1, \dots, w_n . Za date težine određuje se

$$W^0(x_1, x_2) = \sum_{i \in I^0} w_i$$

gde W^0 označava W^+ , $W^=$ i W^- (za par (x_1, x_2) računaju se tri vrednosti W^0). Označimo sa W sumu, $W = W^+ + W^= + W^-$.

Indeks saglasnosti je

$$C(x_1, x_2) = (W^+ + W^=) / W$$

Uslov saglasnosti za par (x_1, x_2) je ispunjen ako je

$$C(x_1, x_2) \geq q \text{ i } W^+ / W^- > 1$$

gde je parametar q minimalni nivo za funkciju saglasnosti, kada se može usvojiti da je alternativa x_1 superiorna (dominira) nad alternativom x_2 [8,11].

Za određivanje indeksa nesaglasnosti treba da se zadaje intervalna skala koja će omogućiti upoređivanje razlika između raznorodnih vrednosti. Najveća vrednost na skali S (može biti 20) stavlja se u vezu sa najvećim vrednostima kriterijumskih funkcija, tako se dobijaju funkcije $s_i(x)$ koje predstavljaju surogat kriterijumske funkcije. Indeks nesaglasnosti je

$$d(x_1, x_2) = (1/S) \{ \max_{i \in I} |s_i(x_1) - s_i(x_2)| \}$$

Uslov nesaglasnosti za par (x_1, x_2) je ispunjen ako je

$$d(x_1, x_2) \leq r$$

gde parametar r predstavlja nivo nesaglasnosti koji se može prihvatiti ako se alternativa x_2 eliminiše u odnosu na x_1 .

Alternativa x_1 je superiorna nad x_2 (x_1 je preferirana) ako su ispunjeni uslovi saglasnosti i nesaglasnosti. U rezultatni graf ulaze samo grane za čije čvorove su ispunjena ova dva uslova. Čvorovi u rezultatnom grafu predstavljaju preferirani skup rešenja (za zadato q i r).

Variranjem parametra q i r dobijaju se različiti rezultatni grafovi, na i različiti skupovi preferiranih rešenja. Povećavanjem vrednosti q i smanjivanjem r sužava se skup preferiranih rešenja. U praktičnim zadacima korisno je ispitati intervale $0,5 \leq q \leq 1$ i $0 \leq r \leq 0,5$.

Metoda ELECTRE je primenljiva u zadacima sa nesamerljivim ili rasplnutim (fuzzy) kriterijumskim funkcijama (ocenjivanje mera dobrote), gde ostale normativne metode nailaze na više teškoća.

Kao rezultat daljeg razvoja metode ELECTRE dobijene su metode III i IV [13]. Uveden je koncept „pseudo-kriterijuma“ preko „preferentnih pragova“. Relacija $a_j B_i a_k$ označava da je alternativa a_j „striktno preferirana“ u odnosu na a_k , a $a_j b_i a_k$ označava slabu preferenciju prema i -tom kriterijumu. Na skali vrednosti $f_i(a_k)$ šematski su prikazane ove preferentne relacije, ($f_{ik} = f_i(a_k)$)

$a_j B_i a_k$	$a_j b_i a_k$	$a_j I_i a_k$	$a_k b_i a_j$	$a_k B_i a_j$
$f_{ij} - P_i$	$f_{ij} - p_i$	f_{ij}	$f_{ij} + p_i$	$f_{ij} + P_i$

P_i i p_i su „preferentni pragovi“; I_i označava indiferentnost. Relacija $a_j B_i a_k$ važi ako je $f_i(a_j) > f_i(a_k) + P_i$, a $a_j b_i a_k$ ako je $f_i(a_j) > f_i(a_k) + p_i$.

Relacija višekriterijumske striktno preferencije $a_j B a_k$ važi samo ako:

- t striktno preferencija $a_k B_i a_j$ ne važi za sve kriterijume, $i = 1, \dots, n$,
- ako je $a_j B_i a_k$ za I kriterijuma mora biti $I \leq n/2$

Prvi uslov je dovoljan za višekriterijumsku slabu preferenciju $a_j b a_k$. Važenje relacije $a_j V a_k$ ili $a_j b a_k$ ispituje se analizom vrednosti $f_i(a_j)$, $f_i(a_k)$, R_i , p_i , $i = 1, \dots, n$.

Za rangiranje pomoću preferentnih relacija V i b autori su predložili iterativni postupak. U svakoj sledećoj iteraciji iz skupa alternativa izbacuje se prva (ili zadnja) sa

rang liste. Ovakvim postupkom smanjuje se uticaj boljih (ili lošijih) alternativa na pozicije ostalih.

2.5. Metoda PROMETHEE

Metoda PROMETHEE je razvijena za višekriterijumsku analizu skupa elemenata i primenjivana je za rangiranje alternativa. Ovu metodu razvio je J. P. Barns et al. Postoje četiri varijante metoda PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHods for Enrichment Evaluation). PROMETHEE I daje parcijalni, II potpuni a III intervalni poredak alternativa, dok tip IV predstavlja proširenje PROMETHEE III za neprekidne skupove. Ovde se prikazuje metoda PROMETHEE II [8,12].

Metoda PROMETHEE uvodi funkciju preferencije $P(a, b)$ za alternative a i b koje su vrednovane kriterijumskim funkcijama (označimo jednu od njih sa f). Alternativa a je bolja od b prema kriterijumu f ako je $f(a) > f(b)$. Funkcija preferencije se definiše na sledeći način:

$$P(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } f(a) \leq f(b) \\ P(f(a) - f(b)), & \text{ako je } f(a) > f(b) \end{cases}$$

Radi kraćeg pisanja uvodi se oznaka d , $d = f(a) - f(b)$.

Autori metode PROMETHEE [2] predlažu šest tipova funkcije preferencije

I „Jednostavan“ kriterijum

$$P(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } d \leq 0 \\ 1, & \text{ako je } d > 0 \end{cases}$$

II Kvazi-kriterijum

$$P(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } d \leq q \\ 1, & \text{ako je } d > q \end{cases}$$

III Kriterijum sa linearnom preferencijom

$$P(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } d \leq 0 \\ d / p, & \text{ako je } 0 < d \leq p \\ 1 & \text{ako je } d > p \end{cases}$$

IV Nivojski kriterijum

$$P(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } d \leq q \\ 1/2, & \text{ako je } q < d \leq p \\ 1 & \text{ako je } d > p \end{cases}$$

V Kriterijum sa linearnom preferencijom i oblašću indiferentnosti

$$P(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } d \leq q \\ (d - q)/(p - q), & \text{ako je } q < d \leq p \\ 1 & \text{ako je } d > p \end{cases}$$

VI Gausov kriterijum

$$P(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } d \leq 0 \\ 1 - \exp(-d^2 / 2\sigma^2), & \text{ako je } d > 0 \end{cases}$$

Vrednosti parametara q , r i σ treba odrediti ili zadati za svaku kriterijumsku funkciju prema usvojenom tipu preferencije. Funkcija preferencije $R(a, b)$ se odnosi na jednokriterijumsko upoređivanje alternativa a i b .

Višekriterijumski indeks preferencije alternative a nad b definisan je izrazom

$$\prod(a, b) = \sum_{i=1}^n w_i P_i(a, b)$$

gde je n - broj kriterijuma; w_i - težina i -tog kriterijuma.

Ovde je uveden uslov da je suma težina w jednaka jedinici, koji se lako postiže normalizacijom originalnih težina.

Za višekriterijumsku analizu metoda PROMETHEE uvodi tokove preferencije

$$\phi_j^+(a_j) = \sum_{m=1}^J \prod(a_j, a_m) \quad (\text{pozitivni tok})$$

$$\phi_j^-(a_j) = \sum_{m=1}^J \prod(a_m, a_j) \quad (\text{negativni tok})$$

Kao meru za višekriterijumsko rangiranje metoda PROMETHEE II uvodi neto tok:

$$\phi_j(a_j) = \phi_j^+(a_j) - \phi_j^-(a_j); \quad j = 1, \dots, J$$

gde je J - broj alternativa.

Alternativa a_j je višekriterijumski bolja od a_k ako je $f_j > \phi_k$.

Metoda PROMETHEE je poseban slučaj opšte metode utiliteta, jer se predlažu konkretne (šest) forme funkcije (funkcije preferencije) preko kojih se definiše i utilitet.

2.6. Metoda TOPSIS

Metoda TOPSIS (engl. Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution), zasnovana je na konceptu da izabrana alternativa treba da ima najkraće rastojanje od idealnog rešenja, i najduže od anti-idealnog rešenja [6].

Kriterijumi se mogu predstaviti u višedimenzionalnom koordinatnom sistemu, gde svakom kriterijumu odgovara jedna koordinatna osa. Pretpostavlja se da svakom kriterijumu monotono raste ili opada upotrebljivost, tako da je lako naći "idealno" rešenje koje je sastavljeno od svih najboljih kriterijumskih vrednosti koje su dostignute, i "anti-idealno" rešenje koje je sastavljeno od najlošijih vrednosti. Prvi uslov je da izabrana alternativa ima najmanje Euklidsko rastojanje od idealnog rešenja u geometrijskom smislu, a drugi da istovremeno ima najveće rastojanje od "anti-idealnog" rešenja.

Ponekad izabrana alternativa, koja ima minimalno Euklidsko rastojanje od "idealnog" rešenja, ima kraće rastojanje od "anti-idealnog" rešenja nego ostale alternative. Pre primene metode TOPSIS višekriterijumski problem je potrebno predstaviti određivanjem:

- matrice performansi X kod koje su alternative A_i postavljene u redove, a kriterijumi C_j u kolone (element x_{ij} predstavlja rejting (performansu) alternative A_i u odnosu na kriterijum C_j);
- tipa kriterijuma – „min“ ili „max“ (da li je cilj da se koriste maksimalne ili minimalne vrednosti kriterijuma);
- težinskih faktora kriterijuma w_1, w_2, \dots, w_m

TOPSIS se sastoji iz 6 koraka:

1. *Normalizovanje matrice performansi*

U matrici performansi brojne vrednosti x_{ij} u opštem slučaju imaju različitu metriku. Svaki red matrice odgovara jednoj alternativni, a svaka kolona jednom kriterijumu; element x_{ij} predstavlja rejting (performansu) alternative A_i u odnosu na kriterijum C_j . Za m kriterijuma (C_1, C_2, \dots, C_m) i n alternativa (A_1, A_2, \dots, A_n) matrica X ima prikazani oblik a vrednosti (w_1, w_2, \dots, w_m) upisane iznad matrice predstavljaju težinske faktore kriterijuma definisane od strane donosilaca odluka, ili određene na drugi način; suma težinskih faktora je 1. Zato se prvo vrši vektorska normalizacija elemenata prema relaciji r_{ij} da bi se dobila matrica R u kojoj su svi elementi bezdimenzione veličine.

$$X = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_m \\ & w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ A_1 & \left[\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{matrix} \right. \end{matrix}$$

$$r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_{ij}^2}}$$

$$R = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_m \\ & w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ A_1 & \left[\begin{matrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{matrix} \right. \end{matrix}$$

2. *Množenje normalizovane matrice performansi težinskim faktorima*

Pomoću sledeće relacije određuje se težinska normalizovana matrica performansi $V = (v_{ij})$, gde je svako v_{ij} proizvod normalizovane performanse alternative i odgovarajućeg težinskog faktora kriterijuma.

$$V = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_m \\ A_1 & \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1m} \end{bmatrix} \\ A_2 & \begin{bmatrix} v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2m} \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ A_n & \begin{bmatrix} v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_m \\ A_1 & \begin{bmatrix} w_1 r_{11} & w_2 r_{12} & \dots & w_m r_{1m} \end{bmatrix} \\ A_2 & \begin{bmatrix} w_1 r_{21} & w_2 r_{22} & \dots & w_m r_{2m} \end{bmatrix} \\ \vdots & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\ A_n & \begin{bmatrix} w_1 r_{n1} & w_2 r_{n2} & \dots & w_m r_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

3. Određivanje idealnih rešenja

Idealno rešenje A^+ i negativno idealno rešenje A^- određuju se pomoću relacija:

$$A^+ = \{(\max v_{ij} | j \in G), (\min v_{ij} | j \in G'), i = 1, \dots, n\} = \{v_1^+, v_2^+, \dots, v_m^+\}$$

$$A^- = \{(\min v_{ij} | j \in G), (\max v_{ij} | j \in G'), i = 1, \dots, n\} = \{v_1^-, v_2^-, \dots, v_m^-\}$$

Gde je:

$$G = \{j = 1, 2, \dots, m \mid j \text{ pripada kriterijumima tipa „max“}\}$$

$$G' = \{j = 1, 2, \dots, m \mid j \text{ pripada kriterijumima tipa „min“}\}$$

Najbolje su alternative koje imaju najveće v_{ij} u odnosu na kriterijume tipa „max“, i najmanje v_{ij} u odnosu na kriterijume tipa „min“. A^+ ukazuje na najbolju alternativu – idealno rešenje, a po istoj logici A^- ukazuje na idealno negativno rešenje.

4. Određivanje rastojanja alternativa od idealnih rešenja

U četvrtom koraku se pomoću sledećih relacija izračunavaju n -dimenziona Euklidska rastojanja svih alternativa od idealnog i idealnog negativnog rešenja.

$$D_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^m (v_{ij} - v_j^+)^2}, i = 1, \dots, n.$$

$$D_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^m (v_{ij} - v_j^-)^2}, i = 1, \dots, n.$$

5. Određivanje relativne blizine alternativa idealnom rešenju

Za svaku alternativu određuje se relativna blizina (engl. Relative Closeness - RC_i^+):

$$RC_i^+ = \frac{D_i^-}{D_i^+ + D_i^-}, i = 1, \dots, n.$$

gde je $0 \leq RC_i^+ \leq 1$.

Alternativa A_i je bliža idealnom rešenju ako je RC_i^+ bliže vrednosti 1, ili takođe, ako je D_i^* bliže vrednosti 0.

6. Rangiranje alternativa

Alternative se rangiraju po opadajućim vrednostima RC_i^+ .

3. PRIMENA TEORIJE GRUBIH SKUPOVA

Teorija grubih skupova nudi efektivne metode koje se mogu primeniti u najrazličitijim granama industrije, ali i života, počev od veštačke inteligencije, preko medicine, ekonomije, prirodnih nauka, pa sve do tehničkih nauka kao što su građevinarstvo, elektrotehnika, rudarstvo, itd. [13,14]. Ona dozvoljava karakterizaciju skupa objekata u pogledu vrednosti atributa, pronalaženje potpunih ili delimičnih zavisnosti između atributa, redukciju suvišnih atributa, određivanje značaja atributa i pronalaženje pravila odlučivanja. Primena teorije grubih skupova omogućava rešavanje složenih problema, te je stoga bila veoma interesantna istraživačima u poslednjih nekoliko godina i uspešno se primenjuje u mnogobrojnim zahtevnim oblastima kao soft computing metoda.

3.1. Primena teorije grubih skupova u ekonomiji

Spektar primene grubih skupova u ekonomiji je veoma širok što se može videti i iz mnogobrojnih radova koji se bave ovom problematikom.

Yeh et al. [15] su u svojim istraživanjima iskoristili teoriju grubih skupova kako bi predvideli kreditni rejting kompanija u Tajvanu. Oni su na osnovu tržišnih podataka razvili hibridni model za ocenu kreditnog rejtinga kompanija.

Cheng et al. [16] su primenili teoriju grubih skupova za predviđanje cene akcija. Oni predlažu hibridni model za prognozu, koji koristi multi-tehničke indikatore kako bi predvideo trendove cena akcija.

Shyng et al. su u svojim radovima [17,18] primenom teorije grubih skupova analizirali lične investicione portfolije.

Shen i Loh [19] su koristeći grube skupove izgradili sistem za trgovanje na finansijskom tržištu na osnovu analiza i predviđanja pomeranja na berzi.

Wanga et al. [20] su predložili novi pristup za bodovanje kreditne sposobnosti zasnovan na teoriji grubih skupova.

Liu et al. [21] su pomoću teorije grubih skupova predvideli stopu rasta prihoda u elektronskoj industriji.

U radovima [22,23] su se različite grupe autora bavile istom temom, tj. primenom teorije grubih skupova za predviđanje poslovnih neuspeha, odnosno za predviđanje neuspeha korporacija.

Slično tome, Tay i Shan [24] su se bavili ekonomskim i finansijskim predviđanjima pomoću grubih skupova, sa posebnim osvrtom na predviđanje poslovnih neuspeha, marketing iz baza podataka i finansijska ulaganja.

Yao i Herbert [25] su ispitivali primenu modela zasnovanih na teoriji grubih skupova za analizu i predviđanje finansijskih podataka.

3.2. Primena teorije grubih skupova u medicini

Slično kao u slučaju ekonomije, teorija grubih skupova je našla široku primenu i u oblasti medicine, i to za analizu podataka o pacijentima, bolestima, za pravljenje modela za rano dijagnostikovanje određenih bolesti, kao i u mnoge druge svrhe.

Pattaraintakorn i Cercione [26] su pokazali neke od mogućih primena teorije grubih skupova u oblasti medicine.

Isti autori su svom radu [27] formirali inteligentni hibridni sistem zasnovan na teoriji grubih skupova koji se bavi analizom preživljavanja gerijatrijskih pacijenata, sa posebnim osvrtom na dijabetes kao faktorom rizika.

Tsumoto je u svom radu [28] predstavio indukcionu metodu zasnovanu na teoriji grubih skupova pomoću koje se iz baza podataka može izvući medicinsko znanje potrebno za dijagnostiku.

Son et al. [29] su pomoću teorije grubih skupova napravili model za rano dijagnostikovanje kongestivnog prestanka rada srca.

Chen [30] je napravio hibridni model na bazi grubih skupova koji služi kao klasifikaciona procedura za identifikovanje prikladnosti hemodijalize za bubrežne bolesnike u poslednjoj (završnoj) fazi bolesti.

Grupa autora, Stokić, Brtka i Srdić, [31] je istraživala mogućnost primene teorije grubih skupova za utvrđivanje međusobne povezanosti između sagitalnog abdominalnog prečnika, antropometrijskih parametara i kardiovaskularnih faktora rizika, iz medicinskih podataka organizovanih u obliku tabele.

Zhang [32] je iskoristio teoriju grubih skupova kako bi identifikovao i klasifikovao gene odgovorne za nastanak raka.

Dai i Xu [33] su pomoću teorije fuzzy grubih skupova su izvršili selekciju atributa u cilju lakše klasifikaciju tumora.

Hassanien [34] je kombinujući prednosti fuzzy i grubih skupova napravio hibridnu šemu koja na osnovu analize slika vrši detekciju raka dojke.

Zhang et al. [35] su primenili višekriterijumsko linearno programiranje zasnovano na teoriji grubih skupova kako bi na osnovu pretraživanja podataka (data mining) poboljšali preciznost medicinske dijagnostike i prognoza.

Chou et al. [36] su pomoću samoorganizovane mape i teorije grubih skupova napravili model za otkrivanje kardiovaskularnih pacijenta čija se dijagnoza promenila, odnosno koji više ne reaguju na prepisanu terapiju.

Ji et al. [37] i Phophalia et al. [38] su pomoću teorije grubih skupova analizirali slike sa magnetne rezonance mozga.

Komorovski i Ohrn [39] su koristeći teoriju grubih skupova napravili model za otkrivanje pacijenata kojima je potreban pregled na skeneru u cilju otkrivanja bolesti srca.

Wang et al. [40] su na osnovu teorije grubih skupova određivali stepen maligniteta moždanog glioma.

3.3. Primena teorije grubih skupova u zaštiti životne sredine

Zaštita životne sredine kao naučna disciplina je veoma pogodna za primenu teorije grubih skupova imajući u vidu da se prilikom donošenja odluka mora voditi računa o jako velikom broju uticajnih faktora, kao i o samom njihovom značaju. Međutim, i pored te činjenice, kao i pored velikog broja primera primene ove teorije u raznim oblastima, njena primena u oblasti zaštite životne sredine je tek u povoju.

Maciag et al. su u svojim istraživanjima [41, 42] primenjivali teoriju grubih skupova kako bi proučili navike potrošača prilikom izbora sredstava za čišćenje i to u pogledu njihovog uticaja na zdravlje ljudi i životnu sredinu.

Yanga et al. [43] su pomoću teorije grubih skupova ispitivali koja je tehnologije najpovoljnija za tretman otpada koji nastaje prilikom bušenja usled eksploatacije nafte i gasa u morima i okeanima.

Deng i Karney [44] su u svom radu prikazali algoritam za procenu potrošnje vode u urbanim naseljima u Pekingu, koji je zasnovan na teoriji grubih skupova.

Feng je u predložio novi klasifikacioni model za postrojenje za tretman vode koji se zasniva na Višestrukom Grubom Klasifikacionom Sistemu (engl. Multiple Rough Classifier Systems) [45].

Warren [46] je u svojim istraživanjima iskoristio teoriju grubih skupova kako bi iz nekoliko potencijalnih scenarija u upravljanju otpadom „izdvojio“ relevantno znanje.

Cai et al. [47] su napravili fuzzy model zasnovan na teoriji grubih skupova kako bi utvrdili uticaj koji naftni tankeri imaju na životnu sredinu.

Chen et al. [48] su pomoću teorije grubih skupova napravili fuzzy-neuronski kontroler za postrojenje za tretman industrijskih otpadnih voda.

Niu et al. [49] su koristeći teoriju grubih skupova napravili model koji analizira pogodnost određene oblasti za izgradnju farme vetrogeneratora.

Chevre et al. [50] su pomoću teorije grubih skupova identifikovali zagađene vodene površine na osnovu skupa biomarkera.

Karami et al. [51] su koristeći teoriju grubih skupova analizirali kvalitet vode u Latian jezeru u Iranu i to na osnovu parametara kao što su: taloženje, temperatura vode i oticanje.

Boggia et al. [52] su vršili procenu potencijala održivog razvoja ruralnih područja primenjujući teoriju grubih skupova.

Bai i Sarkis [53] su koristeći teoriju grubih skupova izvršili analitičku procenu razvoja „zelenih“ dobavljača (Green supplier development).

Yan et al [54] su pomoću teorije grubih skupova izvršili mapiranje glečera kao jednog od bioindikatora globalnog zagrevanja.

3.4. Primena teorije grubih skupova u građevinarstvu

Građevinarstvo je veoma pogodno za primenu grubih skupova ali i pored te činjenice broj publikovanih radova koji se bave ovom problematikom je mali. Najznačajniji doprinos primene grubih skupova u oblasti građevinarstva dao je prof. dr Goran Ćirović sa svojim saradnicima kroz knjigu *Grubi skupovi – Primena u građevinarstvu*, kao i kroz niz objavljenih radova u časopisima i na naučno-stručnim skupovima.

Ćirović i Plamenac su u svojoj knjizi [55] dali prikaz primene teorije grubih skupova pri rešavanju različitih problema iz oblasti građevinarstva kao što su: izbor optimalnog rasporeda oplata u polumontažnom sistemu građenja, izbor optimalne lokacije za izgradnju fabrike betona, izbor optimalne građevinske mehanizacije za betonske radove, izbor optimalne strategije upravljanja i izbor pogodne organizacione strukture.

Ćirović je u svom radu [56] prikazao na koji način se može upravljati neizvesnošću u građevinarstvu pomoću teorije grubih skupova.

Ćirović i Kuburić [57] su izvršili vrednovanje mostova na osnovu različitih kriterijuma primenom teorije grubih skupova.

Arabani i Lashteh Nashaei [58] su koristeći teoriju grubih skupova napravili model koji se može primeniti za pojednostavljenje izbora lokacije za branu.

Wen [59] je na osnovu teorije grubih skupova i veštačkih neuronskih mreža napravio model koji se koristi za procenu rizika građevinskih projekata.

Tam et al. [60] su pomoću teorije grubih skupova izvršili odabir najvažnijih mera bezbednosti u građevinarstvu u cilju sprečavanja akcidenata na gradilištima.

Kim et al. [61] su na osnovu teorije grubih skupova napravili algoritam za određivanje kategorije pukotina u građevinama od ojačanog betona.

3.5. Primena teorije grubih skupova u geologiji

Što se primene teorije grubih skupova u geologiji tiče naučnici su se uglavnom bavili analizom faktora koji dovode do pojave klizišta, kao i njihovom prevencijom, ali i nekim drugim problemima iz oblasti geologije i geomorfologije.

Liu et al. [62] su se upravo bavili analizom faktora koji utiču na pojavu klizišta u Kini i to kombinujući daljinsku detekciju i geografske informacione sisteme sa teorijom grubih skupova i statističkom analizom.

Gorsevski i Jankowski [63] su iskoristili teoriju grubih skupova za upravljanje kompleksnim geografskim karakteristikama koje utiču na osetljivost klizišta i za izdvajanje pravila koja opisuju odnose između faktora koji uzrokuju klizišta i njihove pojave.

Aldridge [64] je na osnovu teorije grubih skupova napravio geografski model koji identifikuje u kojoj meri su lokacije u opasnosti od klizišta.

Peng et al. [65] su pomoću teorije grubih skupova napravili hibridni model za procenu osetljivosti klizišta u oblasti Zigui–Badong u Kini tako što su višestruke izvore podataka iskoristili za pravljenje mape terena osetljivih na klizanje.

Sikder i Munakata [66] su pokazali kako se teorija grubih skupova može upotrebiti za karakterizaciju faktora koji prethode zemljotresu, na taj način što su identifikovali značajne faktore koji najavljuju zemljotres i rangirali attribute koristeći informacione teorijske mere.

Yuan et al. [67] su pomoću teorije grubih skupova izvršili kvantitativnu analizu karakterističnih informacija u metalogenetskoj prognozi. Oni su iz mnoštva podataka napravili tabelu odlučivanja, zatim izvršili redukciju suvišnih atributa, odredili jezgro atributa i pravila odlučivanja, i na kraju napravili model za metalogenetsku prognozu.

Yuan et al. [68] su u svojim istraživanjima pomoću matematičkih alata i računara analizirali vezu između mineralizacije i metalogenetske verovatnoće, otkrili skrivena pravila i relacije, izabrali geološku anomaliju i na kraju ustanovili model mineralizacije zasnovan na teoriji grubih skupova.

3.6. Primena teorije grubih skupova u rudarstvu

Rudarstvo a u sklopu njega i priprema mineralnih sirovina, ima odlike koje su pogodne za istraživanje pomoću teorije grubih skupova. To je pre svega stohastički karakter proizvodnje koju često karakterišu nedovoljnost i nekonzistentnost podataka, pa je samim tim donošenje odluka i upravljanje proizvodnjom povezano sa nesigurnostima i rizicima. I pored ove činjenice mogućnost primene teorije grubih skupova u rudarstvu je nedovoljno istražena. Postoji svega nekoliko objavljenih radova koji se bave primenom grubih skupova za rešavanje različitih problema u rudarstvu i pripremi mineralnih sirovina.

Jiang et al. [69] su pomoću teorije grubih skupova i veštačkih neuronskih mreža napravili model za optimizaciju parametara miniranja u podzemnim rudnicima u kojima se koriste metode otkopavanja dubokim bušotinama. Za bolje predviđanje i optimizaciju parametara miniranja u podzemnoj eksploataciji sa dubokim bušotinama, prvo je određeno 16 grupa parametara miniranja dubinskih bušotina, koje su zatim detaljno

analizirane kombinujući teoriju grubih skupova i veštačke neuronske mreže. Softver zasnovan na teoriji grubih skupova je korišćen za redukciju podataka, a zatim su ti podaci zajedno sa polaznim podacima iskorišćeni kao ulaz u softver zasnovan na veštačkim neuronskim mrežama koji je izvršio prognoze. Rezultati istraživanja pokazuju da ovaj model može da predvidi tačnu potrošnju eksploziva u zavisnosti od trenutne situacije. Model za optimizaciju parametara miniranja koji koristi prednosti teorije grubih skupova i neuronskih mreža predstavlja novi prilaz u optimizaciji parametara miniranja i može se koristiti i za druge metode miniranja.

Fruoso Barroso et al. [70] su u svom radu bavili alatima za predstavljanje znanja (engl. Knowledge Representation Tools) u bazama podataka i njihovom primenom u ekspertskim sistemima procesa pripreme mineralnih sirovina (usitnjavanju i obogaćivanju) u realnom vremenu. Korišćenje sistema baza podataka (Infobright IEE) za skladištenje kvantitativnih podataka dobijenih od senzora koji mere raspodelu mase, veličine čestica, stepen aeracije, gustinu pulpe, pH i temperaturu, omogućava kontrolu i analizu procesa u realnom vremenu. Kvalitativni metapodaci mogu biti generisani korišćenjem matematičkih modela procesa (simulacijama izlaza, redukcionim jednačinama, transformacijama) i analizom „prirodnog jezika“ procesnih podataka (reagensi i rudna mineralogija). Alati Wordnet i Natural Language Toolkit su korišćeni za generisanje metapodataka, obradu kvalitativnih tekstualnih informacija prisutnih u procesnim bazama podataka i za generisanje podataka za naknadni zaključak o postupku provere pravila. Prednosti programskog jezika Python su iskorišćene da se implementira okvir generisanja pravila na osnovu fuzzy i grubih skupova, online analitički procesni sistem za izveštavanje o procesnim parametrima proizvodnje.

Ghaffari et al. su svojim radovima [71, 72] pomoću različitih metoda, među kojima je i metoda grubih skupova, izvršili analizu rada hidrociklona. Pratili su četiri promenjive: promena pritiska, sadržaj čvrste faze, granulometrijski sastav i sadržaj peska i preliva, i na osnovu dobijenih podataka izračunali stepen efikasnosti klasifikacije koji je služio za ocenu rada hidrociklona. Kombinacijom samo-organizujuće mape (engl. Self Organizing Map), Neuro-fuzzy sistema zaključivanja (engl. Neuro-Fuzzy Inference System) i Teorije grubih skupova izvršeno je predviđanje performansi hidrociklona i ekstrahovana su pravila koja služe za kontrolu razdvajanja.

Ding et al. [73, 74] i Chai et al. [75] su se u radovima bavili mogućnošću primene teorije grubih skupova u postrojenju za pripremu mineralnih sirovina koje se bavi preradom hematita. Kako je proces pripreme mineralnih sirovina obično praćen neizvesnošću usled nepredviđenih varijacija u radu postrojenja iskorišćen je povratni signal iz operacionih podataka procesa za regulisanje izlaznih veličina i samim tim za kompenzovanje neizvesnosti u radu postrojenja. Teorija grubih skupova je iskorišćena kako bi se odredile promenljive koje bi se kompenzovale na osnovu značaja atributa, ali i za ekstrakciju pravila kompenzacije iz procesnih podataka. Na osnovu simulacije i industrijskih eksperimenata dokazana je efikasnost predloženog modela.

4. EKSPERIMENTALNI DEO

Tehnološki procesi u rudarstvu, kao npr. proces prerade otkopane rude u cilju dobijanja gotovog proizvoda za tržište ili proizvoda što pogodnijeg za dalju preradu, se odlikuju velikim brojem tesno povezanih podprocesa (usitnjavanje, klasiranje, flotacija, odvodnjavanje, zgušnjavanje, filtriranje, deponovanje jalovine) tako da uspešnost celokupnog procesa pripreme zavisi od uspešnosti svakog od podprocesa, a sa druge strane od funkcionalnosti celokupnog sistema. Takođe, performanse svakog od podprocesa zavise od velikog broja faktora uslovljenih karakteristikama rude, odnosno sirovine koja se prerađuje, ali isto tako i svojstvima reagenasa čija je uloga da obezbede što povoljnije uslove za odvijanje procesa, kao i tehničkim karakteristikama opreme, zajedno sa ljudskim faktorom koji je zadužen za pravilno vođenje procesa. Sa tim u vezi može se zaključiti da tehnološki procesi u rudarstvu predstavljaju složen „mehanizam“ za čije je dobro funkcionisanje potreban besprekoran rad svakog od njegovih činilaca.

U okviru eksperimentalnog dela doktorske disertacije obrađena su tri problema koja na najbolji način pokazuju kompleksnost ovih i sličnih procesa: izbor lokacije za flotacijsko jalovište, izbor flotacijskog kolektora i izbor flotacione mašine. Sva tri problema se odnose na izbore sa kojima se susreće u praksi i koji imaju uticaja na odvijanje samog procesa, kao i na njegovu ekonomsku isplativost, a isto tako mogu imati širi, globalni uticaj. U radu je prikazana mogućnost rešavanja datih problema primenom metode grubih skupova, a nakon toga, u cilju provere dobijenih rezultata, su

za rešavanje istih problema primenjene višekriterijumske metode odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Prvi problem se odnosi na izbor najpovoljnije lokacije za deponovanje flotacijske jalovine. Flotacijska jalovina predstavlja ostatak nakon flotacijske prerade mineralne sirovine i mora se deponovati na području posebno određenom za tu namenu, odnosno na flotacijskom jalovištu. Jalovišta se projektuju za dug vremenski period (nekoliko decenija) pa samim tim izbor najpogodnije lokacije za flotacijsko jalovište ima jako veliki značaj jer bi u slučaju pogrešnog izbora posledice mogle biti veoma ozbiljne, kako u ekonomskom pogledu tako i u pogledu uticaja na životnu sredinu. Lokacija flotacijskog jalovišta mora da zadovolji veliki broj kriterijuma, odnosno da deponovanje jalovine na tom mestu bude tehnički moguće, ekonomski isplativo i ekološki prihvatljivo.

Drugi problem predstavlja izbor kolektora za flotaciju rude bakra. Flotacijska koncentracija kao proces separacije, odnosno razdvajanja jednih minerala od drugih se zasniva na razlikama u hidrofobnosti njihovih površina. Da bi se te razlike povećale, odnosno da bi proces razdvajana bio uspešniji primenjuju se hemijska jedinjenja pod nazivom kolektori. I pored toga što izbor kolektora ima velikog uticaja na samo odvijanje procesa flotacije posledice u slučaju pogrešnog nisu istog ranga kao u slučaju izbora lokacije za flotacijsko jalovište što naravno ne umanjuje značaj problema i ozbiljnost pristupa u njegovom rešavanju. Izbor odgovarajućeg kolektora može biti veoma kompleksan zbog velikog broja faktora koji imaju uticaja. Neki od faktora se odnose na efikasnost kolektora, dok su drugi ekonomskog karaktera, a uvek se postavlja i pitanje uticaja na životnu sredinu, odnosno okruženje.

Treći problem se odnosi na izbor flotacione mašine. Flotacione mašine predstavljaju uređaje u kojima se odvijaju svi elementarni procesi flotacijske koncentracije pa je samim tim njihov značaj veoma veliki, kao i njihov adekvatan izbor. Flotacione mašine, pored mlinova i hidrociklona, predstavljaju kapitalnu opremu u pogonima za flotacijsku koncentracije, pa je potrebno pažljivo izvršiti njihov izbor jer bi svaka greška za posledicu imala velike ekonomske gubitke. Prilikom izbora treba voditi računa kako o efikasnosti same mašine, odnosno o pravilnom odvijanju svih delova procesa flotacije,

tako i o velikom broju ekonomskih faktora koji u velikoj meri opterećuju postupak izbora.

I pored toga što posledice izbora u sva tri slučaja mogu biti različite težine, sam značaj ovih problema u efikasnosti funkcionisanja savremenih tehnoloških sistema je podjednak, pa se samim tim sa podjednakom ozbiljnošću mora pristupiti njihovom rešavanju.

4.1. Problem izbora lokacije za flotacijsko jalovište

Flotacijska koncentracija predstavlja fizičko hemijski proces razdvajanja minerala na osnovu razlika u hidrofobnosti njihovih površina. U procesu flotacijske koncentracije kao produkti se dobijaju koncentrat i jalovina. Maseno učešće koncentrata koje se u praksi kreće od približno 10 % do 20 % je nekoliko puta manje od masenog učešća jalovine. To praktično znači da se flotacijskom preradom određene mineralne sirovine dobijaju velike količine jalovine koju je potrebno deponovati na unapred određenoj lokaciji.

Izbor lokacije za formiranje flotacijskog jalovišta je veoma kompleksan iz razloga što flotacijska jalovina može da predstavlja potencijalnu opasnost za životnu sredinu, kako zbog toga što u sebi sadrži flotacijske reagense i minerale teških metala koji usled dejstva atmosferskih padavina mogu dospeti u vodotokove, tako i zbog činjenice da je ovaj materijal usitnjen pa usled dejstva vetrova može zagađivati vazduh i okolno zemljište [76-79]. Pored ovih opasnosti po životnu sredinu postoje i rizici probijanja brana jalovišta i izlivanja zagađujućeg materijala u vodotokove. Takvi akcidenti su se dešavali više puta u prošlosti. Jedna od najvećih ekoloških katastrofa u Srbiji bilo je probijanje kolektora ispod starog flotacijskog jalovišta u Boru, kada je velika količina jalovine dospela u Borsku reku a zatim i u Veliki Timok i Dunav [80]. Kao posledica toga, Borska reka je i danas zagađena u toj meri da u njoj nema živih organizama, kao i zemljište u njenom slivu koje se više ne može koristiti za poljoprivrednu proizvodnju. Takođe, ekološke katastrofe globalnih razmera bile su pucanje brane jalovišta rudnika zlata u mestu Baja Mare u Rumuniji i izlivanje oko 120 tona materijala zagađenih cijanidom i teškim metalima u reke Tisu i Dunav [81], kao i pucanje brane u mestu Aznalcollar u Španiji [82,83]. Sve ovo jasno ukazuje na potencijalne opasnosti koje sa

sobom nose flotacijska jalovišta, tako da je pravilan izbor lokacije za jalovište veoma bitan.

Prilikom izbora lokacije za flotacijsko jalovište potrebno je voditi računa o velikom broju faktora koji utiču na izbor optimalne lokacije, pri čemu njihove vrednosti, kao i sam njihov broj nisu precizno definisani. U cilju izbora optimalne lokacije potrebno je sve podatke grupisati i analizirati istovremeno. Upravo iz tog razloga odlučeno je da se ispita mogućnosti primene teorije grubih skupova pri izboru lokacije za flotacijsko jalovište.

4.1.1. Kriterijumi

Postupak izbora lokacije flotacijskog jalovišta je veoma delikatan zbog velikog broja uticajnih faktora o kojima treba voditi računa, a takođe i zbog potencijalne opasnosti po životnu sredinu ovog otpadnog materijala. Jedan deo faktora se odnosi na kriterijume koje je potrebno zadovoljiti imajući u vidu zakonsku regulativu kojom je uređena ova oblast, dok drugi deo određuju sami projektanti uvažavajući uslove date u projektnom zadatku. Postoje različiti primeri izbora kriterijuma prilikom odabira lokacije za flotacijsko jalovište [84-87].

Imajući u vidu ove primere ali i iskustva projektanta određeni su najbitniji kriterijumi za izbor lokacije jalovišta. Prikaz kriterijuma je dat u Tabeli 7.

Tabela 7. Kriterijumi za izbor lokacije za flotacijsko jalovište.

Kriterijum	Opis kriterijuma
1. Morfologija terena potencijalne lokacije	Od konfiguracije terena zavise veličina jalovišta, način transporta, kao i tip jalovišta (ravničarsko ili dolinsko). Ne preporučuje se izgradnja jalovišta na terenima čiji nagib prelazi 15-20%.
2. Geološke karakteristike potencijane lokacije	2.1. Geološka građa Jalovište se ne bi trebalo locirati na ležištu mineralne sirovine koja mogla postati interesantna za eksploataciju. Poželjno je da teren grade čvrste vodonepropustne stene.

Kriterijum	Opis kriterijuma
	<p>2.2. Inženjersko-geološke karakteristike Prilikom odabira lokacije za jalovišta treba voditi računa da li je teren sklon pojavi klizišta i odrona, kao i o njegovoj seizmičkoj stabilnosti.</p> <p>2.3. Hidrogeološke i hidrološke karakteristike Potrebno je proučiti i analizirati tokove površinskih i podzemnih voda i slivno područje za potencijalnu lokaciju jalovišta. Nije pogodno locirati jalovište u slivu neke velike reke, kao ni na mestu koje obiluje velikom količinom padavina tokom godine.</p>
<p>3. Potencijalni kapacitet prostora za formiranje jalovišta</p>	<p>Proračun veka trajanja jalovišta se vrši na osnovu raspoloživog kapaciteta prostora na kome se planira izgradnja jalovišta i kapaciteta postrojenja za pripremu. Nije poželjno formirati jalovište na prostoru čiji je kapacitet manji od 15 godina.</p>
<p>4. Udaljenost lokacije od postrojenja i transportni uslovi</p>	<p>Potrebno je da udaljenost jalovišta od postrojenja za pripremu bude što manja kako bi i troškovi transporta bili manji.</p> <p>Način transporta jalovine zavisi od konfiguracije terena. Najpovoljniji način transporta jalovine jeste gravitacijskim putem.</p>
<p>5. Pogodnost lokacije sa ekološkog aspekta i uticaja na urbanu sredinu</p>	<p>Poželjno je jalovište locirati što dalje od naseljenih mesta, infrastrukturnih objekata (autoputa, avionske piste, vodovoda, gasovoda, naftovoda, dalekovoda, itd), vodotokova, jezera, mora, van pravca duvanja vetrova, na bezvodnim i vodonepropustljivim terenima.</p>
<p>6. Infrastrukturna opremljenost lokacije</p>	<p>Pod infrastrukturnom opremljenošću lokacije podrazumeva se postojanje prilaznih puteva i mogućnost snabdevanja električnom energijom.</p>

Kriterijum	Opis kriterijuma
	Ukoliko ne postoji odgovarajuća infrastruktura potrebno je sagledati mogućnost za njenu izgradnju.
7. Investiciona ulaganja	Potrebno je da predložena lokacija predstavlja najpovoljnije rešenje u smislu investicionih ulaganja, troškova izgradnje i eksploatacionih troškova.

Iz Tabele 7 se može videti da ima sedam kriterijuma koji utiču na izbor lokacije za flotacijsko jalovište. Međutim nemaju svi kriterijumi isti značaj. Naime, uticaj nekih od kriterijuma na izbor lokacije je veći u odnosu na ostale kriterijume. Tako na primer kriterijumi *investiciona ulaganja* predstavlja ključni kriterijum koji ima najveći uticaj prilikom izbora lokacije za jalovište. Kriterijumi kao što su *kapacitet prostora za formiranje jalovišta* i *pogodnost lokacije sa ekološkog aspekta i uticaj na urbanu sredinu* takođe imaju velikog uticaja na izbor lokacije, dok ostali kriterijumi imaju manji značaj prilikom izbora lokacije za flotacijsko jalovište. Sa tim u vezi svakom od kriterijuma je dodeljena odgovarajuća vrednost, odnosno težinski koeficijent (Tabela 8).

Tabela 8. Težinski koeficijenti kriterijuma prilikom izbora lokacije za flotacijsko jalovište.

Kriterijum	Težinski koeficijent
1. Morfologija terena potencijalne lokacije	0,1
2. Geološke karakteristike potencijane lokacije	0,1
3. Potencijalni kapacitet prostora za formiranje jalovišta	0,15
4. Udaljenost lokacije od postrojenja i transportni uslovi	0,1
5. Pogodnost lokacije sa ekološkog aspekta i uticaja na urbanu sredinu	0,15

6. Infraskruturna opremljenost lokacije	0,1
7. Investiciona ulaganja	0,3

Kako bi se izvršilo vrednovanje potencijalnih lokacija za flotacijsko jalovište svakom od kriterijuma iz tabele 7, koji ujedno predstavljaju attribute uslova, su dodeljene odgovarajuće vrednosti. Vrednosti atributa su izražene lingvistički i numerički.

U Tabeli 9 su predstavljene vrednosti atributa uslova.

Tabela 9. Vrednosti atributa uslova pri izboru lokacije za flotacijsko jalovište.

Atribut uslova	Vrednost atributa uslova
1. Morfologija terena potencijalne lokacije	1 - veoma nepogodan
	2 - nepogodan
	3 - pogodan
	4 - veoma pogodan
2. Geološke karakteristike potencijalne lokacije	1 - veoma nepogodne
	2 - nepogodne
	3 - pogodne
	4 - veoma pogodne
3. Potencijalni kapacitet prostora za formiranje jalovišta	1 - < 15 godina
	2 - 15 – 25 godina
	3 - 25 – 35 godina
	4 - > 35 godina
4. Udaljenost lokacije od postrojenja i transportni uslovi	1 - veoma nepogodan
	2 - nepogodan
	3 - pogodan
	4 - veoma pogodan
5. Pogodnost lokacije sa ekološkog aspekta i uticaja na urbanu sredinu	1 - veoma nepogodna
	2 - nepogodna
	3 - pogodna

	4 - veoma pogodna
6. Infraskruturna opremljenost lokacije	1 - veoma loše opremljena
	2 - loše opremljena
	3 - dobro opremljena
	4 - veoma dobro opremljena
7. Investiciona ulaganja	1 - > 20.000.000 eura
	2 - 10.000.000 – 20.000.000 eura
	3 - 1.000.000 – 10.000.000 eura
	4 - < 1.000.000 eura

4.1.2. Rangiranje potencijalnih lokacija metodom grubih skupova

Nakon određivanja kriterijuma za izbor, odnosno atributa uslova i definisanja njihovih vrednosti, urađeno je rangiranje potencijalnih lokacija za flotacijsko jalovište primenom metode grubih skupova, a nakon toga je izvršena provera dobijenih rezultata primenom višekriterijumskih metoda odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Kao primer za testiranje mogućnosti primene teorije grubih skupova za izbor lokacije flotacijskog jalovišta uzeta je Studija flotacijskog jalovišta na lokaciji doline Velikog Peka [88], rađena u Institutu za rudarstvo i metalurgiju u Boru (Institut za bakar Bor) 1991. godine.

U studiji su analizirane tri potencijalne lokacije u cilju rešavanja problema odlaganja flotacijske jalovine u Rudniku Bakra Majdanpek. Prva lokacija se nalazi u dolini potoka Valja Mastaka i Veliki i Mali Prerast, druga u dolini Velikog Peka a treća u dolini Šaške reke.

Analogno sa tim izvršeno je vrednovanje istih lokacija, pri čemu su za ocenu korišćeni prethodno prikazani kriterijumi (Tabela 7) i odabrana je najpovoljnija lokacija. Lokacijama su rangirane od 1 (jedan) do 3 (tri), pri čemu 1 (jedan) predstavlja najpovoljniju lokaciju a 3 (tri) najmanje povoljnu lokaciju.

Rezultati vrednovanja lokacija su prikazani u Tabeli 10.

Tabela 10. Rezultati analize i ocene pogodnosti lokacija za flotacijsko jalovište.

Lokacija	Atributi uslova							Atribut odluke
	1	2	3	4	5	6	7	
Valja Mastaka – Prerast	4	4	2	3	3	3	2	1
Veliki Pek	3	2	2	3	2	3	1	2
Šaška reka	4	4	2	3	1	3	1	3

Kao što se može videti iz Tabele 10, analizom tri predložene lokacije je dobijeno da je najpovoljnija lokacija u dolini potoka Valja Mastaka i Veliki i Mali Prerast. Zatim sledi lokacija u dolini Velikog Peka, dok je lokacija u dolini Šaške reke najnepovoljnija. Treba napomenuti da je ista lokacija predložena kao najpovoljnija i od strane autora navedene studije.

4.1.3. Komparativni višekriterijumski modeli

Za proveru dobijenih rezultata korišćene su metode višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Radi pojednostavljenja prikaza rezultata kriterijumima iz Tabele / su dodeljene oznake od K_1 do K_7 , respektivno.

a) Metoda VIKOR

Tabela 11. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	Atribut						
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
V. Mastaka - Prerast	4	4	2	3	3	3	2
Veliki Pek	3	2	2	3	2	3	1
Šaška reka	4	4	2	3	1	3	1
Min / Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
Preferencija	0,1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,3

Tabela 12. Maksimumi i minimumi po kriterijumima.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
MAX	4	4	2	3	3	3	2
MIN	3	2	2	3	1	3	1
MAX-MIN	1	2	0	0	2	0	1

Tabela 13. Međuvrednosti $(f_{imax} - f_{ij}) / (f_{imax} - f_{imin}) * W_i$.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
V. Mastaka - Prerast	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Veliki Pek	0,1000	0,1000	0,0000	0,0000	0,0750	0,0000	0,3000
Šaška reka	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1500	0,0000	0,3000

Tabela 14. Vrednosti S_j i R_j .

	S_j	R_j
V. Mastaka - Prerast	0,0000	0,0000
Veliki Pek	0,5750	0,3000
Šaška reka	0,4500	0,3000

Tabela 15. Međurezultati.

	$(S_j - \min S_j) / (\max S_j - \min S_j)$	$(R_j - \min R_j) / (\max R_j - \min R_j)$	$V_1 = 0,5$
V. Mastaka - Prerast	0,0000	0,0000	
Veliki Pek	1,0000	1,0000	
Šaška reka	0,7826	1,0000	

Tabela 16. Rang alternativa.

	Q_i	Rang
V. Mastaka - Prerast	0,0000	1
Veliki Pek	1,0000	3
Šaška reka	0,8913	2

b) Metoda AHP

Tabela 17. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
V. Mastaka-Prerast	4	4	2	3	3	3	2
Veliki Pek	3	2	2	3	2	3	1
Šaška reka	4	4	2	3	1	3	1
Preferencija	0,1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,3
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max

Tabela 18. Normalizovana (konačna) matrica.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	Rešenje	Rang
V. Mastaka-Prerast	0,3636	0,4000	0,3333	0,3333	0,5000	0,3333	0,5000	0,3948	1
Veliki Pek	0,2727	0,2000	0,3333	0,3333	0,3333	0,3333	0,2500	0,2937	3
Šaška reka	0,3636	0,4000	0,3333	0,3333	0,1667	0,3333	0,2500	0,3115	2

c) Metoda ELECTRE

Tabela 19. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
V. Mastaka-Prerast	4	4	2	3	3	3	2
Veliki Pek	3	2	2	3	2	3	1
Šaška reka	4	4	2	3	1	3	1
Preferencija	0,1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,3

Tabela 20. Normalizovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
V. Mastaka-Prerast	0,624695048	0,666666667	0,577350269	0,577350269	0,801783726	0,577350269	0,816496581
Veliki Pek	0,468521286	0,333333333	0,577350269	0,577350269	0,534522484	0,577350269	0,40824829
Šaška reka	0,624695048	0,666666667	0,577350269	0,577350269	0,267261242	0,577350269	0,40824829
UKUPNO	1,717911381	1,666666667	1,732050808	1,732050808	1,603567451	1,732050808	1,632993162

Tabela 21. Težinska normalizovana matrica odlučivanja.

	K ₁ * W _i	K ₂ * W _i	K ₃ * W _i	K ₄ * W _i	K ₅ * W _i	K ₆ * W _i	K ₇ * W _i	SUMA
V. Mastaka-Prerast	0,062469505	0,066666667	0,08660254	0,057735027	0,120267559	0,057735027	0,244948974	0,2449
Veliki Pek	0,046852129	0,033333333	0,08660254	0,057735027	0,080178373	0,057735027	0,122474487	0,1225
Šaška reka	0,062469505	0,066666667	0,08660254	0,057735027	0,040089186	0,057735027	0,122474487	0,1225
UKUPNO	0,171791138	0,166666667	0,259807621	0,173205081	0,240535118	0,173205081	0,489897949	0,4899

Tabela 22. Skupovi saglasnosti i nesaglasnosti.

	SD	NSD	NSD max	$\frac{NSD_{max}}{\sum K_i \cdot W_i}$
S12	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7		0,0000	0,0000
S13	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7		0,0000	0,0000
S21		1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0,1225	1,0000
S23	3, 4, 5, 6, 7	1,2	0,0469	0,3825
S31		1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	0,1225	1,0000
S32	1,2	3, 4, 5, 6, 7	0,1225	1,0000

Tabela 23. Matrica saglasnosti.

	V. Mastaka- Prerast	Veliki Pek	Šaška reka	PIS
V. Mastaka- Prerast		1,0000	1,0000	3,0000
Veliki Pek		0,0000	0,8000	0,5000
Šaška reka		0,0000	0,2000	

Tabela 24. Matrica nesaglasnosti.

	V. Mastaka- Prerast	Veliki Pek	Šaška reka	PINS
V. Mastaka- Prerast		0,0000	0,0000	3,3825
Veliki Pek	1,0000		0,3825	0,56375
Šaška reka	1,0000	1,0000		

Tabela 25. Matrica saglasne dominacije PIS = 0,5 (prosečan indeks saglasnosti).

	V. Mastaka- Prerast	Veliki Pek	Šaška reka
V. Mastaka- Prerast		1	1
Veliki Pek	0		1
Šaška reka	0	0	

Tabela 26. Matrica nesaglasne dominacije PINS=0,56375 (prosečan indeks nesaglasnosti).

	V. Mastaka- Prerast	Veliki Pek	Šaška reka
V. Mastaka- Prerast		1	1
Veliki Pek	0		1
Šaška reka	0	0	

Tabela 27. Matrica agregatne dominacije.

	V. Mastaka- Prerast	Veliki Pek	Šaška reka	Rang
V. Mastaka- Prerast		1	1	1
Veliki Pek	0		1	2
Šaška reka	0	0		3

d) Metoda PROMETHEE

Tabela 28. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
Tip	1	1	1	1	1	1	1
Težina	0,1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,3
V. Mastaka- Prerast	4	4	2	3	3	3	2
Veliki Pek	3	2	2	3	2	3	1
Šaška reka	4	4	2	3	1	3	1

Tabela 29. Osnovna statistika.

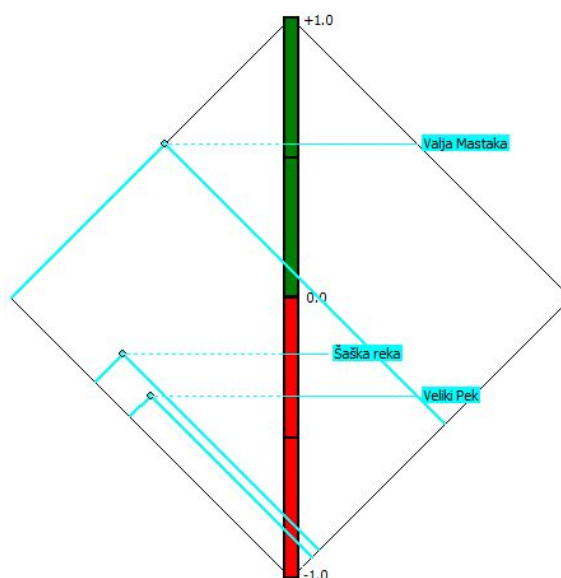
	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Minimum	3,00	2,00	2,00	3,00	1,00	3,00	1,00
Maksimum	4,00	4,00	2,00	3,00	3,00	3,00	2,00
Prosek	3,67	3,33	2,00	3,00	2,00	3,00	1,33
Standardno odstupanje	0,47	0,94	0,00	0,00	0,82	0,00	0,47

Tabela 30. Preferencijalni parametri.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Min/Max	max	max	max	max	max	max	max
Težina	0,10	0,10	0,15	0,10	0,15	0,10	0,30
Preferentna Fun.	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena
Granice	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan

Tabela 31. Rang rešenja.

Akcije	Phi+	Rang	Phi-	Rang	Phi	Rang
V. Mastaka-Prerast	0,5500	1	0,0000	1	0,5500	1
Šaška reka	0,1000	2	0,3000	2	-0,2000	2
Veliki Pek	0,0750	3	0,4250	3	-0,3500	3



Slika 3. Promethee dijamant rešenja.

e) Metoda TOPSIS

Tabela 32. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Važnost (težina)	0,1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,3
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
V. Mastaka- Prerast	4	4	2	3	3	3	2
Veliki Pek	3	2	2	3	2	3	1
Šaška reka	4	4	2	3	1	3	1

Tabela 33. Koren sume kvadrata.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Valja Mastaka- Prerast	16	16	4	9	9	9	4
Veliki Pek	9	4	4	9	4	9	1
Šaška reka	16	16	4	9	1	9	1
Suma kvadrata	41	36	12	27	14	27	6
$\sqrt{SK^2}$	6,403124237	6	3,464101615	5,196152423	3,741657387	5,196152423	2,449489743

Tabela 34. Izračunavanje r_{ij} .

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
V. Mastaka-Prerast	2,49878019	2,666666667	1,154700538	1,732050808	2,405351177	1,732050808	1,632993162
Veliki Pek	1,405563857	0,666666667	1,154700538	1,732050808	1,069044968	1,732050808	0,40824829
Šaška reka	2,49878019	2,666666667	1,154700538	1,732050808	0,267261242	1,732050808	0,40824829

Tabela 35. Množenje sa W_{ij} .

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
V. Mastaka-Prerast	0,249878019	0,266666667	0,173205081	0,173205081	0,360802677	0,173205081	0,489897949
Veliki Pek	0,140556386	0,066666667	0,173205081	0,173205081	0,160356745	0,173205081	0,122474487
Šaška reka	0,249878019	0,266666667	0,173205081	0,173205081	0,040089186	0,173205081	0,122474487

Tabela 36. Idealno i idealno negativno rešenje.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
A*	0,249878019	0,266666667	0,173205081	0,173205081	0,360802677	0,173205081	0,489897949
A'	0,140556386	0,066666667	0,173205081	0,173205081	0,040089186	0,173205081	0,122474487

Tabela 37. Odstupanje od idealnog rešenja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	Ukupno IR	$\sqrt{IR^2}$
V. Mastaka- Prerast	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Veliki Pek	0,01195122	0,04	0	0	0,040178571	0	0,135	0,227129791	0,476581358
Šaška reka	0	0	0	0	0,102857143	0	0,135	0,237857143	0,487706

Tabela 38. Odstupanje od negativnog idealnog rešenja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	Ukupno NIR	$\sqrt{NIR^2}$
V. Mastaka- Prerast	0,01195122	0,04	0	0	0,102857143	0	0,135	0,289808362	0,53833852
Veliki Pek	0	0	0	0	0,014464286	0	0	0,014464286	0,120267559
Šaška reka	0,01195122	0,04	0	0	0	0	0	0,05195122	0,227928102

Tabela 39. Konačno rešenje.

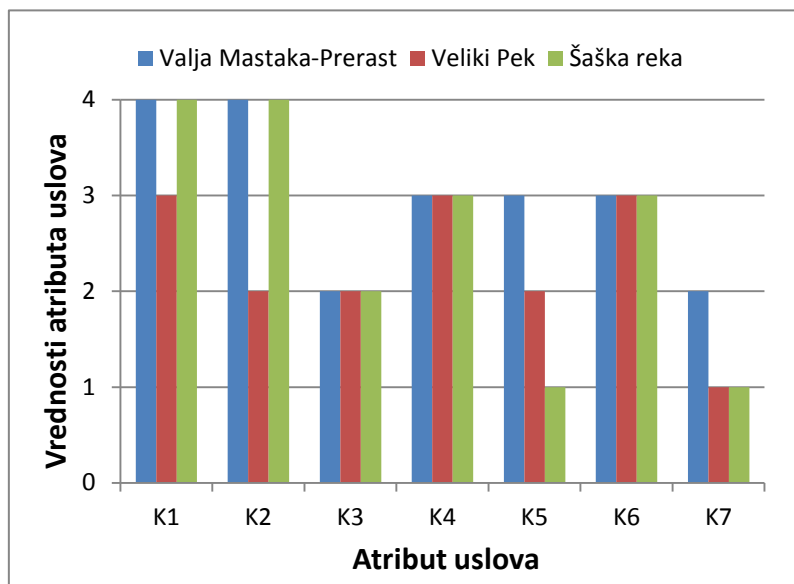
	Odnos rešenja	Rang
V. Mastaka- Prerast	1	1
Veliki Pek	0,201504192	3
Šaška reka	0,3184981	2

4.1.4. Analiza i diskusija rezultata vrednovanja lokacija za flotacijsko jalovište

Kao što se iz Tabele 10 može videti metoda grubih skupova je pokazala da je lokacija u dolini Valja Mastaka i Velikog i Malog Prerasta najpovoljnija za izgradnju flotacijskog jalovišta. Na drugom mestu, odnosno malo manje povoljna varijanta je izgradnja jalovišta u dolini Velikog Peka, dok se kao najnepovoljnija pokazala lokacija u dolini Šaške reke.

Vrednovanje ove tri lokacije je izvršeno na osnovu sedam kriterijuma prikazanih u Tabeli /, pri čemu je svaki od kriterijuma, odnosno atributa uslova dobio odgovarajuću vrednost za svaku od predloženih lokacija. U obzir su uzeti i težinski koeficijenti kriterijuma.

Na Slici 4 su prikazane vrednosti kriterijuma, odnosno atributa uslova prilikom vrednovanja lokacija metodom grubih skupova.

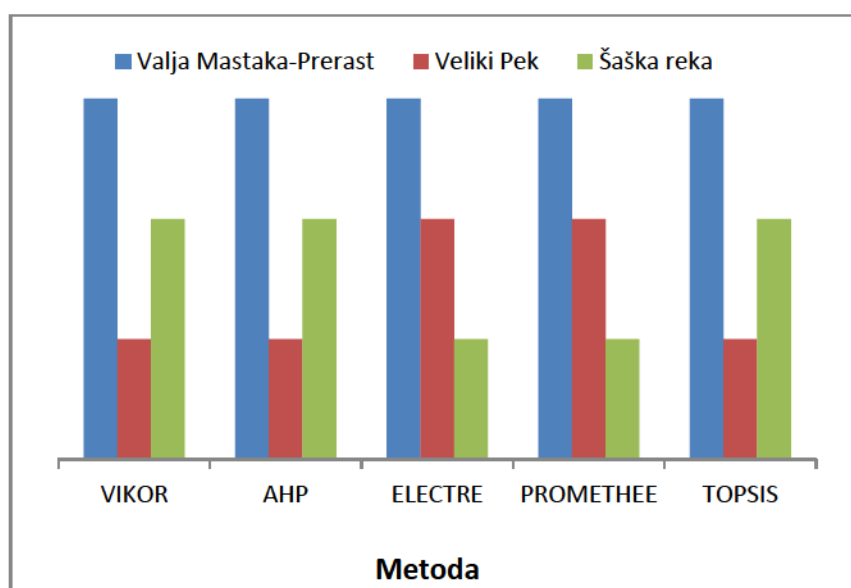


Slika 4. Vrednosti atributa uslova za predložene lokacije

Analizirajući Tabelu 10 i Sliku 4 može se videti da je lokacija Valja Mastak-Prerast imala najpovoljnije vrednosti svih atributa uslova u poređenju sa preostale dve lokacije. Što se tiče atributa K₁, *Morfologija terena potencijalne lokacije*, lokacije Valja

Mastaka-Prerast i Šaška reka su ocenjene kao *veoma pogodne* (ocena 4), dok je lokacija Velika reka dobila ocenu 3, *pogodna*. I u slučaju atributa K_2 , *Geološke karakteristike potencijalne lokacije*, lokacije Valja Mastaka-Prerast i Šaška reka su dobile istu a ujedno i najvišu ocenu 4, *veoma pogodne*, dok je opet lokacija Veliki Pek imala nižu ocenu 2, *nepogodne*. *Potencijalni kapacitet prostora za formiranje jalovišta* (K_3) je kod sve tri lokacije ocenjen istom ocenom 2 (*15 – 25 godina*). Kod atributa K_4 , *Udaljenost lokacije od postrojenja i transportni uslovi*, su takođe sve lokacije ocenjene istom ocenom 3, *pogodne*, dok je sa stanovišta *Pogodnosti lokacije sa ekološkog aspekta i uticaja na urbanu sredinu* (K_5) lokacija Valja Mastaka-Prerast dobila ocenu 3, *pogodna*, lokacija Veliki Pek ocenu 2, *nepogodna*, a lokacija Šaška reka ocenu 1, *veoma nepogodna*. *Infrastrukturna opremljenost lokacija* (K_6) je ocenjena istom ocenom kod svih lokacija, *dobro opremljena* (ocena 3). U slučaju atributa K_7 , *Investiciona ulaganja* lokacija Valja Mastaka-Prerast je najbolje ocenjena i to ocenom 2, *10.000.000 – 20.000.000 eura*, dok su lokacije Veliki Pek i Šaška reka dobile najnižu ocenu 1, *> 20.000.000 eura*.

Dodatne analize predloženih lokacija su vršene metodama višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS. Rezultati dodatnih analiza lokacija za flotacijsko jalovište višekriterijumskim metodama su prikazani na Slici 5.



Slika 5. Rezultati dodatnih analiza lokacija za flotacijsko jalovište metodama višekriterijumskog odlučivanja

Sa Slike 5 se može videti da je najpovoljnija lokacija u svih pet dodatnih analiza lokacija Valja Mastaka-Prerast, što je bio slučaj i kod analize metodom grubih skupova, kao i u prvobitnoj studiji, čime je potvrđeno se metoda grubih skupova može uspešno primeniti za rešavanje ovog problema.

Što se tiče druge dve lokacije tu je došlo do izvesnog neslaganja između metoda. Naime u analizi rađenoj pomoću grubih skupova na drugom mestu je bila lokacija Veliki Pek a na trećem Šaška reka. Takav ishod se ponovio i u slučaju metoda ELECTRE i PROMETHEE, dok su rezultati analiza metodama VIKOR, AHP i TOPSIS pokazali da je lokacija Šaška reka povoljnija od lokacije Veliki Pek. Takođe treba napomenuti da je razlika u ocenama koje su dobile ove dve lokacija u svih pet analiza mala i da do neslaganja dolazi zato što sve metode imaju različite načine ocenjivanja u odnosu na date kriterijume i njihove vrednosti.

U tabeli 40 prikazani su koeficijenti korelacije primenjenih metoda

Tabela 40. Koeficijenti korelacija metoda pri izboru lokacije flotacijskog jalovišta.

	Grubi skupovi	VIKOR	AHP	ELECTRE	PROMETHEE	TOPSIS
Grubi skupovi	1					
VIKOR	0,5	1				
AHP	1	0,5	1			
ELECTRE	0,5	1	0,5	1		
PROMETHEE	0,5	1	0,5	1	1	
TOPSIS	0,5	1	0,5	1	1	1

Iz tabele 40 može se videti da metoda grubih skupova za posmatrani primer lokacije flotacijskih jalovišta po rezultatima najviše odgovara metodi AHP, mada nesaglasnost nije ostvarena ni kod drugih komparativnih metoda. Primer je, zbog broja alternativa u određenoj meri nereprezentativan sa posmatranog aspekta.

4.2. Problem izbora flotacijskog kolektora

Kolektori su velika grupa organskih hemijskih jedinjenja koja se razlikuju po hemijskom sastavu i funkciji. Osnovna namena kolektora je da selektivno formiraju hidrofobni sloj na datoj mineralnoj površini u flotacijskoj pulpi i time obezbede uslove za vezivanje hidrofobnih čestica vazдушnih mehurića i njihovo iskorišćenje u peni [89].

Iako određeni minerali imaju prirodnu flotabilnost [90], postupak flotacije je gotovo nemoguć bez upotrebe kolektora.

Izbor odgovarajućeg kolektora je od suštinske važnosti za efikasnost procesa flotacije [91]. Pojedini minerali imaju slične osobine u pogledu flotabilnosti, pa je potrebno izabrati odgovarajući kolektor koji ima selektivno dejstvo i koji omogućava njihovo efikasno razdvajanje [92]. Iskorišćenje korisnih komponenti kao i brzina flotacije su takođe prepoznati kao bitni parametri prilikom izbora kolektora [93-95]. S obzirom da su kolektori organska jedinjenja njihov uticaj kako na zdravlje ljudi tako i na životnu sredinu može biti veoma veliki [96-98], pa je potrebno imati u vidu i taj aspekt prilikom izbora odgovarajućeg kolektora. Cena i potrošnja kolektora uvek imaju uticaja prilikom odabira jer je ekonomska isplativost jako bitna.

Kao što se može videti postoji veliki broj faktora koji imaju uticaja i o kojima treba voditi računa prilikom izbora optimalnog kolektora koji će se koristiti u flotaciji neke određene mineralne sirovine.

4.2.1. Kriterijumi

Postupak izbora flotacijskih reagenasa, posebno kolektora je veoma složen, upravo iz razloga velikog broja bitnih kriterijuma o kojima treba voditi računa. Ovaj postupak je obično praćen obimnim istraživanjima, međutim i pored toga odluka o najpovoljnijem kolektoru može da bude teška.

Kriterijumi koji se će biti korišćeni prilikom izbora kolektora pomoću teorije grubih skupova su izabrani na osnovu njihovog značaja za sam proces flotacije, a imajući u vidu iskustva istraživača. Izabrani kriterijumi su prikazani u Tabeli 41.

Tabela 41. Kriterijumi za izbor flotacijskog kolektora.

Kriterijum	Opis kriterijuma
1. Nabavna cena	Cena kolektora predstavlja faktor najveće značajnosti. Konačni kriterijum flotacijskog procesa je njegova ekonomska isplativost, usled čega je cena kolektora veoma važan kriterijum prilikom njegovog izbora.
2. Mogućnost i pouzdanost redovnog snabdevanja	Mogućnost redovnost snabdevanja flotacijskog postrojenja određenim kolektorom je izuzetno značajna kao kriterijum prilikom izbora kolektora, kako sa aspekta kontinuiteta, tako i sa aspekta vođenja procesa, odnosno regulisanja procesnih parametara.
3. Iskorišćenje korisne komponente	Poželjno je da kolektor obezbeđuje što veće iskorišćenje korisne komponente.
4. Selektivnost	Selektivnost kolektora mora da bude takva da se u procesu flotacije izvrši što efikasnije razdvajanje korisnih mineralnih vrsta od nekorisnih i štetnih, odnosno da sadržaj korisne komponente u koncentratu bude što veći.
5. Brzina flotiranja	Jedan od značajnih kriterijuma prilikom izbora kolektora je brzina flotiranja korisne komponente koju kolektor obezbeđuje. Povećanjem brzine flotiranja povećava se i kapacitet, što ima direktan pozitivan uticaj na ekonomske pokazatelje procesa.
6. Potrošnja kolektora	Poželjno je da potrošnja kolektora bude što manja, pre svega iz ekonomskih razloga, ali i zbog minimiziranja uticaja na radno okruženje i životnu sredinu.
7. Toksičnost i potencijalni ekološki rizici	Jedinjenja koja se koriste u industrijskoj praksi kao kolektori najčešće su toksična, i predstavljaju rizik po zdravlje i bezbednost radnika, kao i po životnu sredinu u okolini flotacijskog postrojenja i flotacijskog jalovišta. Pored toga, jedinjenja mogu zahtevati i poseban postupak transporta i rukovanja. Usled ovih razloga, poželjno je da uticaj kolektora na okruženje bude što manji.

Iz Tabele 41 se može videti da postoji sedam kriterijuma koji utiču na odabir najpovoljnijeg kolektora: *nabavna cena, mogućnost i pouzdanost redovnog snabdevanja, iskorišćenje korisne komponente, selektivnost, brzina flotiranja, potrošnja kolektora i toksičnost i potencijalni ekološki rizici*. Uticaj svakog od kriterijuma prilikom odabira je različit i predstavljen je težinskim koeficijentima. Težinski koeficijenti kriterijuma prilikom izbora flotacijskog kolektora su prikazani u Tabeli 42.

Tabela 42. Težinski koeficijenti kriterijuma prilikom izbora flotacijskog kolektora.

Kriterijum	Težinski koeficijent
1. Nabavna cena	0,3
2. Mogućnost i pouzdanost redovnog snabdevanja	0,05
3. Iskorišćenje korisne komponente	0,15
4. Selektivnost	0,1
5. Brzina flotiranja	0,1
6. Potrošnja kolektora	0,2
7. Toksičnost i potencijalni ekološki rizici	0,1

Iz Tabele 42 se može videti da je kriterijum sa najvećim uticajem, odnosno najvećim težinskim koeficijentom 0,3 *cena*, zatim sledi *potrošnja* sa koeficijentom 0,2, pa *iskorišćenje korisne komponente* sa koeficijentom 0,15. *Selektivnost, brzina flotacije i uticaj na okruženje* imaju istu vrednost težinskog koeficijenta 0,1, dok je kriterijum sa najmanjom težinom *mogućnost i pouzdanost redovnog snabdevanja* sa koeficijentom 0,05.

Da bi se izvršilo vrednovanje flotacijskih kolektora primenom teorije grubih skupova potrebno je kriterijumima iz Tabele 41, koji istovremeno predstavljaju i attribute uslova, dodeliti odgovarajuće vrednosti. Vrednosti atributa su izražene lingvistički i numerički.

U Tabeli 43 su predstavljene vrednosti atributa uslova.

Tabela 43. Vrednosti atributa uslova pri izboru flotacijskog kolektora.

Atribut uslova	Vrednost atributa uslova
1. Nabavna cena	1 - > 1500 \$/t
	2 - 1000 – 1500 \$/t
	3 - < 1000 \$/t
2. Mogućnost i pouzdanost redovnog snabdevanja	1 - nezadovoljavajuća
	2 - zadovoljavajuća
3. Iskorišćenje korisne komponente	1 - malo 0 – 50 %
	2 - srednje 51 – 80 %
	3 - visoko 81 – 100 %
4. Selektivnost	1 - loša
	2 - dobra
	3 – veoma dobra
5. Brzina flotiranja	1 - nezadovoljavajuća
	2 - zadovoljavajuća
6. Potrošnja kolektora	1 - velika
	2 - srednja
	3 - mala
7. Toksičnost i potencijalni ekološki rizici	1 - ima veliki uticaj
	2 - ima mali uticaj
	3 - nema uticaja

4.2.2. Rangiranje flotacijskih kolektora metodom grubih skupova

Nakon određivanja kriterijuma za izbor, odnosno atributa uslova i definisanja njihovih vrednosti, urađeno je vrednovanje flotacijskih kolektora primenom metode grubih skupova, a nakon toga je izvršena provera dobijenih rezultata primenom višekriterijumskih metoda odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Kao primer za testiranje mogućnosti primene teorije grubih skupova za izbor flotacijskog kolektora je izabrano osam kolektora koji se mogu primeniti za flotiranje rude bakra i to po tri KEX (kalijum etil ksantat) i KAX (kalijum amil ksantat) i dva NaIPX (natrijum izopropil ksantat).

Vrednovanje flotacijskih kolektora je izvršeno tako što su za ocenu korišćeni kriterijumi iz Tabele 41, kojima je dodeljena odgovarajuća vrednost (Tabela 43) za svaki od predloženih kolektora. Kolektori su rangirani od 1 (jedan) do 8 (osam), pri čemu 1 (jedan) predstavlja najpovoljniji kolektor a 8 (osam) najnepovoljniji kolektor.

Rezultati vrednovanja lokacija su prikazani u Tabeli 44.

Tabela 44. Analiza i ocena flotacijskih kolektora.

Kolektor	Atribut uslova							Atribut odluke
	1	2	3	4	5	6	7	
KEX ₁	2	2	3	3	2	2	2	4
KEX ₂	3	2	3	3	2	2	3	1
KEX ₃	2	2	3	3	2	3	3	3
KAX ₁	3	2	2	3	2	3	3	2
KAX ₂	1	2	2	2	2	3	3	8
KAX ₃	2	2	3	3	2	1	3	6
NaIPX ₁	2	2	3	3	2	3	3	4
NaIPX ₂	2	2	2	2	1	2	3	6

Rezultati analize i ocene flotacijskih kolektora metodom grubih skupova prikazani u Tabeli 44 pokazuju da je najpovoljniji kolektor KEX₂. Na drugom mestu se nalazi kolektor KAX₁, treći je KEX₃, dok četvrto mesto dele KEX₁ i NaIPX₁. Kolektori KAX₃ i NaIPX₂ su na šestom mestu a kao najnepovoljniji se pokazao KAX₂.

4.2.3. Komparativni višekriterijumski modeli

Nakon izvršene analize i ocene flotacijskih kolektora metodom grubih skupova urađena je provera dobijenih rezultata korišćenjem sledećih metode višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Pre dodatnih analiza, kriterijumima iz Tabele 41 su dodeljene oznake od K₁ do K₇, respektivno.

a) Metoda VIKOR

Tabela 45. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
KEX ₁	2	2	3	3	2	2	2
KEX ₂	3	2	3	3	2	2	3
KEX ₃	2	2	3	3	2	3	3
KAX ₁	3	2	2	3	2	3	3
KAX ₂	1	2	2	2	2	3	3
KAX ₃	2	2	3	3	2	1	3
NaIPX ₁	2	2	3	3	2	3	3
NaIPX ₂	2	2	2	2	1	2	3
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
Preferencija	0,3	0,05	0,15	0,1	0,1	0,2	0,1

Tabela 46. Maksimumi i minimumi po kriterijumima.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
MAX	3	2	3	3	2	3	3
MIN	1	2	2	2	1	1	2
MAX-MIN	2	0	1	1	1	2	1

*Tabela 47. Međuvrednosti $(f_{imax} - f_{ij}) / (f_{imax} - f_{imin}) * W_i$.*

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
KEX ₁	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1000	0,1000
KEX ₂	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1000	0,0000
KEX ₃	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KAX ₁	0,0000	0,0000	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KAX ₂	0,3000	0,0000	0,1500	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000
KAX ₃	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2000	0,0000
NaIPX ₁	0,1500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
NaIPX ₂	0,1500	0,0000	0,1500	0,1000	0,1000	0,1000	0,0000

Tabela 48. Vrednosti S_j i R_j .

	S_j	R_j
KEX ₁	0,3500	0,1500
KEX ₂	0,1000	0,1000
KEX ₃	0,1500	0,1500
KAX ₁	0,1500	0,1500
KAX ₂	0,5500	0,3000
KAX ₃	0,3500	0,2000
NaIPX ₁	0,1500	0,1500
NaIPX ₂	0,6000	0,1500

Tabela 49. Međurezultati.

Međurezultati	$(S_j - \min S_j) / (\max S_j - \min S_j)$	$(R_j - \min R_j) / (\max R_j - \min R_j)$	$V_1 = 0,5$
KEX ₁	0,5000	0,2500	
KEX ₂	0,0000	0,0000	
KEX ₃	0,1000	0,2500	
KAX ₁	0,1000	0,2500	
KAX ₂	0,9000	1,0000	
KAX ₃	0,5000	0,5000	
NaIPX ₁	0,1000	0,2500	
NaIPX ₂	1,0000	0,2500	

Tabela 50. Rang alternativa.

	Q_j	Rang
KEX ₁	0,3750	5
KEX ₂	0,0000	1
KEX ₃	0,1750	2
KAX ₁	0,1750	2
KAX ₂	0,9500	8
KAX ₃	0,5000	7
NaIPX ₁	0,1750	2
NaIPX ₂	0,6250	6

b) Metoda AHP

Tabela 51. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
KEX ₁	2	2	3	3	2	2	2
KEX ₂	3	2	3	3	2	2	3
KEX ₃	2	2	3	3	2	3	3
KAX ₁	3	2	2	3	2	3	3
KAX ₂	1	2	2	2	2	3	3
KAX ₃	2	2	3	3	2	1	3
NaIPX ₁	2	2	3	3	2	3	3
NaIPX ₂	2	2	2	2	1	2	3
Važnost (težina)	0,3	0,05	0,15	0,1	0,1	0,2	0,1
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max

Tabela 52. Normalizovana (konačna) matrica.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	Rešenje	Rang
KEX ₁	0,1176	0,1250	0,1429	0,1364	0,1333	0,1053	0,0870	0,12106	7
KEX ₂	0,1765	0,1250	0,1429	0,1364	0,1333	0,1053	0,1304	0,13567	2
KEX ₃	0,1176	0,1250	0,1429	0,1364	0,1333	0,1579	0,1304	0,13479	3
KAX ₁	0,1765	0,1250	0,0952	0,1364	0,1333	0,1579	0,1304	0,13639	1
KAX ₂	0,0588	0,1250	0,0952	0,0909	0,1333	0,1579	0,1304	0,11309	5
KAX ₃	0,1176	0,1250	0,1429	0,1364	0,1333	0,0526	0,1304	0,11975	8
NaIPX ₁	0,1176	0,1250	0,1429	0,1364	0,1333	0,1579	0,1304	0,13479	3
NaIPX ₂	0,1176	0,1250	0,0952	0,0909	0,0667	0,1053	0,1304	0,10445	6

c) Metoda ELECTRE

Tabela 53. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
KEX ₁	2	2	3	3	2	2	2
KEX ₂	3	2	3	3	2	2	3
KEX ₃	2	2	3	3	2	3	3
KAX ₁	3	2	2	3	2	3	3
KAX ₂	1	2	2	2	2	3	3
KAX ₃	2	2	3	3	2	1	3
NaIPX ₁	2	2	3	3	2	3	3
NaIPX ₂	2	2	2	2	1	2	3
Preferencija	0,3	0,05	0,15	0,1	0,1	0,2	0,1

Tabela 54. Normalizovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
KEX ₁	0,320256308	0,40824829	0,452267017	0,428571429	0,40824829	0,333333333	0,285714286
KEX ₂	0,480384461	0,40824829	0,452267017	0,428571429	0,40824829	0,333333333	0,428571429
KEX ₃	0,320256308	0,40824829	0,452267017	0,428571429	0,40824829	0,5	0,428571429
KAX ₁	0,480384461	0,40824829	0,301511345	0,428571429	0,40824829	0,5	0,428571429
KAX ₂	0,160128154	0,40824829	0,301511345	0,285714286	0,40824829	0,5	0,428571429
KAX ₃	0,320256308	0,40824829	0,452267017	0,428571429	0,40824829	0,166666667	0,428571429
NaIPX ₁	0,320256308	0,40824829	0,452267017	0,428571429	0,40824829	0,5	0,428571429
NaIPX ₂	0,320256308	0,40824829	0,301511345	0,285714286	0,204124145	0,333333333	0,428571429
UKUPNO	2,722178615	3,265986324	3,165869118	3,142857143	3,061862178	3,166666667	3,285714286

Tabela 55. Težinska normalizovana matrica odlučivanja.

	K ₁ * W _i	K ₂ * W _i	K ₃ * W _i	K ₄ * W _i	K ₅ * W _i	K ₆ * W _i	K ₇ * W _i	SUMA
KEX ₁	0,064051262	0,081649658	0,045226702	0,042857143	0,040824829	0,016666667	0,014285714	0,0816
KEX ₂	0,096076892	0,081649658	0,045226702	0,042857143	0,040824829	0,016666667	0,021428571	0,0961
KEX ₃	0,064051262	0,081649658	0,045226702	0,042857143	0,040824829	0,025	0,021428571	0,0816
KAX ₁	0,096076892	0,081649658	0,030151134	0,042857143	0,040824829	0,025	0,021428571	0,0961
KAX ₂	0,032025631	0,081649658	0,030151134	0,028571429	0,040824829	0,025	0,021428571	0,0816
KAX ₃	0,064051262	0,081649658	0,045226702	0,042857143	0,040824829	0,008333333	0,021428571	0,0816
NaIPX ₁	0,064051262	0,081649658	0,045226702	0,042857143	0,040824829	0,025	0,021428571	0,0816
NaIPX ₂	0,064051262	0,081649658	0,030151134	0,028571429	0,020412415	0,016666667	0,021428571	0,0816
UKUPNO	0,544435723	0,653197265	0,316586912	0,314285714	0,306186218	0,158333333	0,164285714	0,6532

Tabela 56. Skupovi saglasnosti i nesaglasnosti.

	SD	NSD	NSD max	$\frac{NSD_{max}}{\sum K_i \cdot W_i}$
S12	2 3 4 5 6	1 7	0,0641	0,7845
S13	1 2 3 4 5	6 7	0,0167	0,2041
S14	2 3 4 5	1 6 7	0,0641	0,7845
S15	1 2 3 4 5	6 7	0,0167	0,2041
S16	1 2 3 4 5 6	7	0,0143	0,1750
S17	1 2 3 4 5	6 7	0,0167	0,2041
S18	1 2 3 4 5 6	7	0,0143	0,1750
S21	1 7	2 3 4 5 6	0,0816	0,8498
S23	1 2 3 4 5 7	6	0,0167	0,1735
S24	1 2 3 4 5 7	6	0,0167	0,1735
S25	1 2 3 4 5 7	6	0,0167	0,1735
S26	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000
S27	1 2 3 4 5 7	6	0,0167	0,1735
S28	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000

	SD	NSD	NSD max	$\frac{NSD_{max}}{\sum K_i \cdot W_i}$
S31	6 7	1 2 3 4 5	0,0816	1,0000
S32	6	1 2 3 4 5 7	0,0816	1,0000
S34	2 3 4 5 6 7	1	0,0641	0,7845
S35	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000
S36	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000
S37	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000
S38	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000
S41	1 6 7	2 3 4 5	0,0816	0,8498
S42	6	1 2 3 4 5 7	0,0961	1,0000
S43	1	2 3 4 5 6 7	0,0816	0,8498
S45	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000
S46	1 2 4 5 6 7	3	0,0816	0,8498
S47	1 2 4 5 6 7	3	0,0816	0,8498
S48	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000
S51	6 7	1 2 3 4 5	0,0816	1,0000
S52	6	1 2 3 4 5 7	0,0816	1,0000
S53		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S54		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S56	2 5 6 7	1 3 4	0,0320	0,3922
S57	2 5 6 7	1 3 4	0,0320	0,3922
S58	2 3 4 7	1 5 6	0,0408	0,5000
S61	7	1 2 3 4 5 6	0,0816	1,0000
S62		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S63		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S64	3	1 2 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S65	1 3 4	2 5 6 7	0,0816	1,0000
S67	1 2 3 4 5 7	6	0,0083	0,1021
S68	1 2 3 4 5 7	6	0,0083	0,1021
S71	6 7	1 2 3 4 5	0,0816	1,0000
S72	6	1 2 3 4 5 7	0,0816	1,0000
S73		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S74	3	1 2 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S75	1 3 4	2 5 6 7	0,0816	1,0000
S76	6	1 2 3 4 5 7	0,0816	1,0000
S78	1 2 3 4 5 6 7		0,0000	0,0000
S81	7	1 2 3 4 5 6	0,0816	1,0000
S82		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S83		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S84		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000
S85	1 5 6	2 3 4 7	0,0816	1,0000

	SD	NSD	NSD max	$\frac{NSD_{max}}{\sum K_i \cdot W_i}$
S86	6	1 2 3 4 5 7	0,0816	1,0000
S87		1 2 3 4 5 6 7	0,0816	1,0000

Tabela 57. Matrica saglasnosti.

	KEX ₁	KEX ₂	KEX ₃	KAX ₁	KAX ₃	NaIPX ₁	NaIPX ₂	PIS
KEX ₁		1,0500	1,1500	0,8500	1,1500	1,3500	1,1500	1,3500
KEX ₂	0,4000		1,2500	1,2500	1,2500	1,4500	1,2500	1,4500
KEX ₃	0,3000	0,2000		1,1500	1,4500	1,4500	1,4500	1,4500
KAX ₁	0,6000	0,2000	0,3000		1,4500	1,3000	1,3000	1,4500
KAX ₂	0,3000	0,2000	0,0000	0,0000		0,9000	0,9000	0,8500
KAX ₃	0,1000	0,0000	0,0000	0,1500	0,5500		1,2500	1,2500
NaIPX ₁	0,3000	0,2000	0,0000	0,1500	0,5500	0,2000		1,4500
NaIPX ₂	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000	0,6000	0,2000	0,0000	

Tabela 58. Matrica nesaglasnosti.

	KEX ₁	KEX ₂	KEX ₃	KAX ₁	KAX ₃	NaIPX ₁	NaIPX ₂	PIS
KEX ₁		0,7845	0,2041	0,7845	0,2041	0,1750	0,2041	0,1750
KEX ₂	0,8498		0,1735	0,1735	0,1735	0,0000	0,1735	0,0000
KEX ₃	1,0000	1,0000		0,7845	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
KAX ₁	0,8498	1,0000	0,8498		0,0000	0,8498	0,8498	0,0000
KAX ₂	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		0,3922	0,3922	0,5000
KAX ₃	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		0,1021	0,1021
NaIPX ₁	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000		0,0000
NaIPX ₂	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	

Tabela 59. Matrica saglasne dominacije PIS = 0,5000 (prosečan indeks saglasnosti).

	KEX ₁	KEX ₂	KEX ₃	KAX ₁	KAX ₃	NaIPX ₁	NaIPX ₂	KEX ₁
KEX ₁		1	1	1	1	1	1	1
KEX ₂	0		1	1	1	1	1	1
KEX ₃	0	0		1	1	1	1	1
KAX ₁	0	0	0		1	1	1	1
KAX ₂	0	0	0	0		1	1	1
KAX ₃	0	0	0	0	0		1	1
NaIPX ₁	0	0	0	0	0	0		1
NaIPX ₂	0	0	0	0	0	0	0	

Tabela 60. Matrica nesaglasne dominacije PINS=0,6343 (prosečan indeks nesaglasnosti)

	KEX ₁	KEX ₂	KEX ₃	KAX ₁	KAX ₃	NaIPX ₁	NaIPX ₂	KEX ₁
KEX ₁		0	1	0	1	1	1	1
KEX ₂	0		1	1	1	1	1	1
KEX ₃	0	0		0	1	1	1	1
KAX ₁	0	0	0		1	0	0	1
KAX ₂	0	0	0	0		1	1	1
KAX ₃	0	0	0	0	0		1	1
NaIPX ₁	0	0	0	0	0	0		1
NaIPX ₂	0	0	0	0	0	0	0	

Tabela 61. Matrica agregatne dominacije

	KEX ₁	KEX ₂	KEX ₃	KAX ₁	KAX ₃	NaIPX ₁	NaIPX ₂	KEX ₁	Rang
KEX ₁	0	0	1	0	1	1	1	1	2
KEX ₂	0	0	1	1	1	1	1	1	1
KEX ₃	0	0	0	0	1	1	1	1	3
KAX ₁	0	0	0	0	1	0	0	1	5
KAX ₂	0	0	0	0	0	1	1	1	4
KAX ₃	0	0	0	0	0	0	1	1	5
NaIPX ₁	0	0	0	0	0	0	0	1	7
NaIPX ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	8

d) Metoda PROMETHEE

Tabela 62. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
Tip	1	1	1	1	1	1	
Težina	0,3	0,05	0,15	0,1	0,1	0,2	0,1
KEX ₁	2	2	3	3	2	2	2
KEX ₂	3	2	3	3	2	2	3
KEX ₃	2	2	3	3	2	3	3
KAX ₁	3	2	2	3	2	3	3
KAX ₂	1	2	2	2	2	3	3
KAX ₃	2	2	3	3	2	1	3
NaIPX ₁	2	2	3	3	2	3	3
NaIPX ₂	2	2	2	2	1	2	3

Tabela 63. Osnovna statistika.

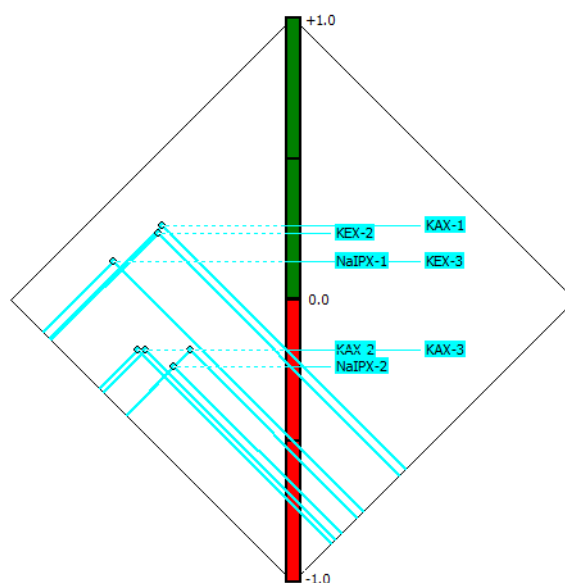
	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Minimum	1,00	2,00	2,00	2,00	1,00	1,00	2,00
Maksimum	3,00	2,00	3,00	3,00	2,00	3,00	3,00
Prosek	2,13	2,00	2,63	2,75	1,88	2,38	2,88
Standardno odstupanje	0,60	0,00	0,48	0,43	0,33	0,70	0,33

Tabela 64. Preferencijalni parametri.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Min/Max	max	max	max	min	max	max	max
Težina	0,30	0,05	0,15	0,10	0,10	0,20	0,10
Preferentna Fun.	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena
Granice	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan

Tabela 65. Rang rešenja.

Akcije	Phi+	Rang	Phi-	Rang	Phi	Rang
KEX ₁	0,1500	7	0,3286	6	-0,1786	5
KEX ₂	0,3786	2	0,1429	4	0,2357	2
KEX ₃	0,2500	3	0,1143	1	0,1357	3
KAX₁	0,4000	1	0,1357	3	0,2643	1
KAX ₂	0,2286	5	0,4071	7	-0,1786	6
KAX ₃	0,1357	8	0,3143	5	-0,1786	7
NaIPX ₁	0,2500	3	0,1143	1	0,1357	4
NaIPX ₂	0,1714	6	0,4071	7	-0,2357	8



Slika 6. Promethee dijamant rešenja.

e) Metoda TOPSIS

Tabela 66. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
Važnost (težina)	0,3	0,05	0,15	0,1	0,1	0,2	0,1
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
KEX ₁	2	2	3	3	2	2	2
KEX ₂	3	2	3	3	2	2	3
KEX ₃	2	2	3	3	2	3	3
KAX ₁	3	2	2	3	2	3	3
KAX ₂	1	2	2	2	2	3	3
KAX ₃	2	2	3	3	2	1	3
NaIPX ₁	2	2	3	3	2	3	3
NaIPX ₂	2	2	2	2	1	2	3

Tabela 67. Koren sume kvadrata.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
KEX ₁	4	4	9	9	4	4	4
KEX ₂	9	4	9	9	4	4	9
KEX ₃	4	4	9	9	4	9	9
KAX ₁	9	4	4	9	4	9	9
KAX ₂	1	4	4	4	4	9	9
KAX ₃	4	4	9	9	4	1	9
NaIPX ₁	4	4	9	9	4	9	9
NaIPX ₂	4	4	4	4	1	4	9
Suma kvadrata	39	32	57	62	29	49	67
$\sqrt{SK^2}$	6,244997998	5,656854249	7,549834435	7,874007874	5,385164807	7	8,185352772

Tabela 68. Izračunavanje r_{ij}.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇
KEX ₁	0,640512615	0,707106781	1,192079121	1,143001143	0,742781353	0,571428571	0,488677777
KEX ₂	1,441153384	0,707106781	1,192079121	1,143001143	0,742781353	0,571428571	1,099524999
KEX ₃	0,640512615	0,707106781	1,192079121	1,143001143	0,742781353	1,285714286	1,099524999
KAX ₁	1,441153384	0,707106781	0,529812943	1,143001143	0,742781353	1,285714286	1,099524999
KAX ₂	0,160128154	0,707106781	0,529812943	0,508000508	0,742781353	1,285714286	1,099524999
KAX ₃	0,640512615	0,707106781	1,192079121	1,143001143	0,742781353	0,142857143	1,099524999
NaIPX ₁	0,640512615	0,707106781	1,192079121	1,143001143	0,742781353	1,285714286	1,099524999
NaIPX ₂	0,640512615	0,707106781	0,529812943	0,508000508	0,185695338	0,571428571	1,099524999

Tabela 69. Množenje sa W_{ij} .

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
KEX ₁	0,192153785	0,353553391	0,178811868	0,114300114	0,074278135	0,114285714	0,0488678
KEX ₂	0,432346015	0,353553391	0,178811868	0,114300114	0,074278135	0,114285714	0,1099525
KEX ₃	0,192153785	0,353553391	0,178811868	0,114300114	0,074278135	0,257142857	0,1099525
KAX ₁	0,432346015	0,353553391	0,079471941	0,114300114	0,074278135	0,257142857	0,1099525
KAX ₂	0,048038446	0,353553391	0,079471941	0,050800051	0,074278135	0,257142857	0,1099525
KAX ₃	0,192153785	0,353553391	0,178811868	0,114300114	0,074278135	0,028571429	0,1099525
NaIPX ₁	0,192153785	0,353553391	0,178811868	0,114300114	0,074278135	0,257142857	0,1099525
NaIPX ₂	0,192153785	0,353553391	0,079471941	0,050800051	0,018569534	0,114285714	0,1099525

Tabela 70. Idealno i idealno negativno rešenje.

A*	0,432346015	0,353553391	0,178811868	0,114300114	0,074278135	0,257142857	0,1099525
A'	0,048038446	0,353553391	0,079471941	0,050800051	0,018569534	0,028571429	0,048867778

Tabela 71. Odstupanje od idealnog rešenja.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	Ukupno IR	$\sqrt{IR^2}$
KEX ₁	0,057692308	0	0	0	0	0,020408163	0,003731343	0,081831814	0,286062605
KEX ₂	0	0	0	0	0	0,020408163	0	0,020408163	0,142857143
KEX ₃	0,057692308	0	0	0	0	0	0	0,057692308	0,240192231
KAX ₁	0	0	0,009868421	0	0	0	0	0,009868421	0,099339927
KAX ₂	0,147692308	0	0,009868421	0,004032258	0	0	0	0,161592987	0,401986302
KAX ₃	0,057692308	0	0	0	0	0,052244898	0	0,109937206	0,331567799
NaIPX ₁	0,057692308	0	0	0	0	0	0	0,057692308	0,240192231
NaIPX ₂	0,057692308	0	0,009868421	0,004032258	0,003103448	0,020408163	0	0,095104598	0,308390334

Tabela 72. Odstupanje od negativnog idealnog rešenja.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	Ukupno NIR	$\sqrt{NIR^2}$
KEX ₁	0,020769231	0	0,009868421	0,004032258	0,003103448	0,007346939	0	0,045120297	0,212415388
KEX ₂	0,147692308	0	0,009868421	0,004032258	0,003103448	0,007346939	0,003731343	0,175774717	0,419254955
KEX ₃	0,020769231	0	0,009868421	0,004032258	0,003103448	0,052244898	0,003731343	0,093749599	0,306185564
KAX ₁	0,147692308	0	0	0,004032258	0,003103448	0,052244898	0,003731343	0,210804255	0,459134245
KAX ₂	0	0	0	0	0,003103448	0,052244898	0,003731343	0,05907969	0,243063139
KAX ₃	0,020769231	0	0,009868421	0,004032258	0,003103448	0	0,003731343	0,041504701	0,203727027
NaIPX ₁	0,020769231	0	0,009868421	0,004032258	0,003103448	0,052244898	0,003731343	0,093749599	0,306185564
NaIPX ₂	0,020769231	0	0	0	0	0,007346939	0,003731343	0,031847513	0,178458715

Tabela 73. Konačno rešenje.

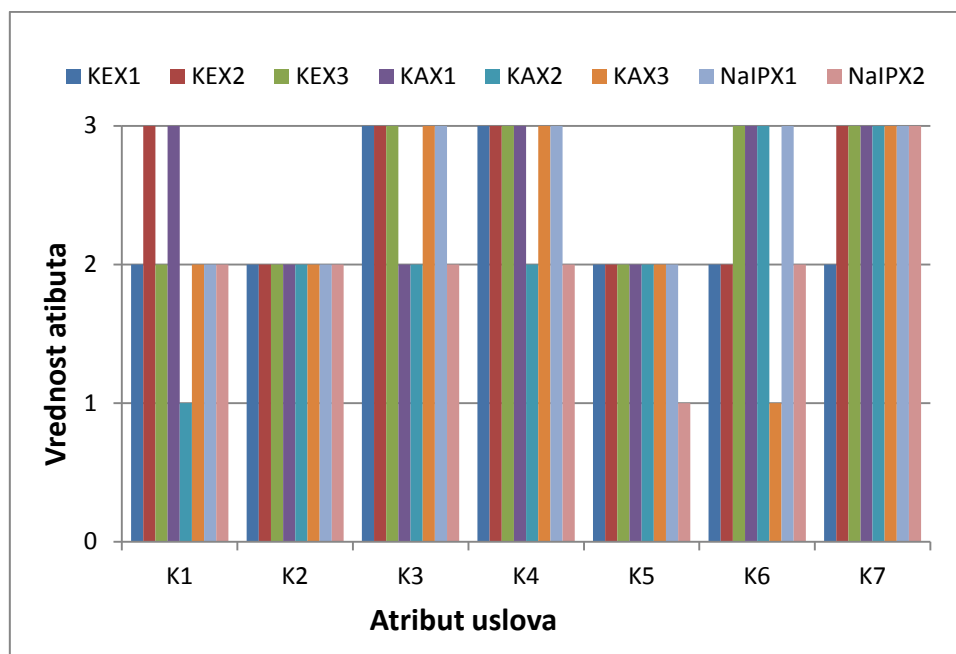
	Odnos rešenja	Rang
KEX ₁	0,426127915	5
KEX ₂	0,745856488	2
KEX ₃	0,560391668	3
KAX ₁	0,822122612	1
KAX ₂	0,376813192	7
KAX ₃	0,380588447	6
NaIPX ₁	0,560391668	3
NaIPX ₂	0,366558618	8

4.2.4. Analiza i diskusija rezultata vrednovanja flotacijskih kolektora

Rezultati analize i ocene predloženih flotacijskih kolektora metodom grubih skupova, prikazani u Tabeli 43, pokazuju je da je kolektor KEX₂ najpovoljniji za primenu u datom slučaju flotacije rude bakra. Na drugom mestu, se nalazi kolektor KAX₁, a na trećem KEX₃. Četvrto i peto mesto dele kolektori KEX₁ i NaIPX₁, a šesto i sedmo KAX₃ i NaIPX₂. Na poslednjem osmom mestu se nalazi kolektor KAX₂, koji se pokazao kao najnepovoljniji.

Vrednovanje kolektora je izvršeno na osnovu sedam kriterijuma prikazanih u Tabeli 41, pri čemu je svaki od kriterijuma, odnosno atributa uslova dobio odgovarajuću vrednost za svaki od predloženih kolektora. U obzir su uzeti i težinski koeficijenti kriterijuma.

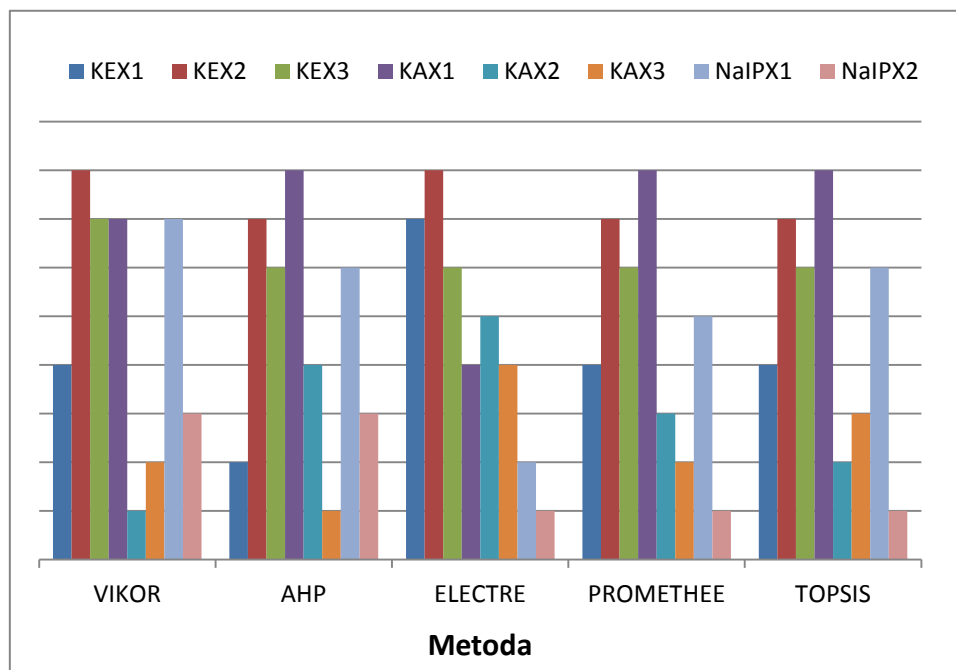
Na Slici 7 su prikazane vrednosti kriterijuma, odnosno atributa uslova prilikom vrednovanja flotacijskih kolektora metodom grubih skupova.



Slika 7. Vrednosti atributa uslova za predložene flotacijske kolektore.

Kao što je već rečeno kolektor KEX_2 je u vrednovanju metodom grubih skupova izabran za najpovoljniji. U Tabeli 44 i na Slici 7 možemo videti da je upravo ovaj kolektor dobio najviše vrednosti skoro svih atributa uslova u poređenju sa ostalim kolektorima, izuzev atributa K_6 , *Potrošnja kolektora*. Posmatrajući pojedinačno attribute može se videti da su što se tiče atributa K_1 , *Nabavna cena*, kolektori KEX_2 i KAX_1 ocenjeni najvišom ocenom 3, dok je kolektor KAX_2 dobio najnižu ocenu 1. U slučaju atributa K_2 , *Mogućnost i pouzdanost redovnog snabdevanja*, svi kolektori imaju istu ocenu, pa se može reći da ovaj atribut nema značaja u ovom primeru ali to ne znači da će njegov značaj biti zanemarljiv prilikom nekog drugog vrednovanja. Kod atributa K_3 , *Iskorišćenje korisne komponente*, KEX_1 , KEX_2 , KEX_3 , KAX_3 i $NaIPX_1$ imaju ocenu 3, *visoko 81-100%*, dok ostali imaju ocenu 2, *srednje 51-80%*. *Selektivnost* (K_4) je kod kolektora KEX_1 , KEX_2 , KEX_3 , KAX_1 , KAX_3 i $NaIPX_1$ ocenjena kao *veoma dobra* (ocena 3), a kod KAX_2 i $NaIPX_2$ kao *dobra* (ocena 2). Atribut *Brzina flotiranja* je samo u slučaju kolektora $NaIPX_2$ ocenjen kao *nezadovoljavajuća* (ocena 1), dok je kod ostalih kolektora *zadovoljavajuća* (ocena 2). *Potrošnja kolektora* (K_6) je kod kolektora KAX_3 ocenjena kao *velika* (ocena 1), kod kolektora KEX_1 , KEX_2 i $NaIPX_2$ kao *srednja* (ocena 2), a kod ostalih kao *mala* (ocena 3). Kolektor KEX_1 ima mali *Toksičnost i potencijalni ekološki rizici* (ocena 2), dok su ostali kolektori bez uticaja (ocena 3).

Dodatne analize predloženih flotacijskih kolektora su vršene metodama višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS. Rezultati dodatnih analiza flotacijskih kolektora višekriterijumskim metodama odlučivanja su prikazani na Slici 8.



Slika 8. Rezultati dodatnih analiza flotacijskih kolektora metodama višekriterijumskog odlučivanja.

Kao što se sa Slike 8 može videti dodatne analize metodama višekriterijumskog odlučivanja su pokazale da su najpovoljniji kolektori KEX_2 i KAX_1 . Kolektor KEX_2 se dva puta našao na prvom mestu (VIKOR i ELECTRE) i tri puta na drugom mestu, a kolektor KAX_1 je u tri analize prvi (AHP, PROMETHEE i TOPSIS), jednom drugi i jednom peti. Što se ostalih kolektora tiče izdvaja se kolektor KEX_3 koji je u jednoj analizi drugi i četiri puta treći.

U tabeli 74 prikazani su koeficijenti korelacije primenjenih metoda.

Tabela 74. Koeficijenti korelacija metoda pri izboru flotacijskog kolektora.

	Grubi skupovi	VIKOR	AHP	ELECTRE	PROMETHEE	TOPSIS
Grubi skupovi	1					
VIKOR	0,932953005	1				
AHP	0,696456913	0,817537564	1			
ELECTRE	0,446090647	0,258101425	0,140458801	1		
PROMETHEE	0,856719472	0,85451608	0,873570697	0,476496394	1	
TOPSIS	0,893683649	0,902201648	0,817663818	0,379537612	0,966751572	1

Iz tabele 74 može se videti da metoda grubih skupova za posmatrani primer izbora flotacijskog kolektora po rezultatima najviše odgovara metodi VIKOR, dok su visoke korelacije ostvarene i sa metodama PROMETHEE i TOPSIS, mada nesaglasnost nije ostvarena ni kod drugih komparativnih metoda.

4.3. Problem izbora flotacione mašine

Flotacione mašine su uređaji u kojima se odvijaju svi elementarni procesi flotacijske koncentracije u trofaznom disperznom sistemu, počev od kolizije (sudara) vazdušnih mehurića sa mineralnim česticama, preko njihovog pripajanja za hidrofobne čestice i formiranja agregata „mineralna čestica – vazdušni mehurić“, levitacije ili isplivavanja agregata „mineralna čestica – vazdušni mehurić“ na površinu pulpe i formiranja mineralizovane pene, do njenog skidanja u poseban proizvod (koncentrat). S obzirom da su zadaci flotacione mašine vrlo složeni ona mora da ispuni sledeće zahteve: ravnomernu disperziju vazdušnih mehurića, održavanje svih čestica u suspendovanom stanju kako bi se postigli najbolji uslovi za koliziju vazdušnih mehurića i mineralnih čestica, održavanje mirne granične površine između pulpe i sloja pene, održavanje konstantnog nivoa pulpe i omogućavanje odvijanja procesa u kontinualnom režimu [99,100].

Upravo se iz ovih razloga može reći da je izbor odgovarajuće flotacione mašine veoma bitan, ali isto tako i jako kompleksan proces, zbog velikog broja faktora koji imaju uticaja. Ovi faktori se mogu odnositi na karakteristike rude koja se prerađuje [101, 103], zatim na tehničko – tehnološke karakteristike mašine [100–104] i naravno, na ekonomske pokazatelje koji su uvek jako bitni prilikom svakog izbora.

4.3.1. Kriterijumi

Kada je reč o izboru flotacionih mašina ključno pitanje koje se postavlja pred projektante jeste pravilan izbor kriterijuma. Kao što je već rečeno, flotacione mašine imaju veoma bitnu ulogu u odvijanju procesa flotacije, te iz tog razloga treba voditi računa o izboru najuticajnijih kriterijuma. S obzirom da nema dovoljno literature koja se bavi ovom problematikom izbor kriterijuma se uglavnom izbor svodi na iskustvo samog projektanta.

U Tabeli 75 su prikazani izabrani kriterijumi koji će biti korišćeni prilikom izbora flotacionih mašina pomoću teorije grubih skupova.

Tabela 75. Kriterijumi za izbor flotacionih mašina.

Kriterijum	Opis kriterijuma
1. Investiciona ulaganja	Investiciona ulaganja kao kriterijum pri izboru flotacijskih mašina obuhvataju broj mašina neophodan da se pokrije kapacitet kao i cenu po jedinici. Ulaganja zavise od kapaciteta ali i zapremine pojedinačne mašine. Poželjno je da investiciona ulaganja budu što niža.
2. Uslovi plaćanja	Kriterijum koji se odnosi na isplatu flotacijskih mašina obuhvata dinamiku plaćanja: da li je predviđeno avansno plaćanje, da li je moguće vršiti otplatu kroz rate, kakvi su uslovi kredita, i sl.
3. Vreme isporuke	Poželjno je što kraće vreme isporuke, kako bi se što ranije postigla operativnost postrojenja.
4. Troškovi ugradnje i adaptivnost mašine	Ovaj kriterijum obuhvata ukupne troškove ugradnje (pod uslovom da troškovi ugradnje nisu dati kroz osnovnu cenu mašina) i adaptivnost mašine, odnosno pogodnost mašina za ugradnju u postojeće postrojenje.
5. Garantni rok	Kriterijum koji govori o garantnom roku i uslovima održavanja je ekonomskog karaktera. Poželjan je što duži garantni rok.
6. Uslovi održavanje	Kriterijum koji govori o uslovima održavanja odnose se na raspoloživost i druge okolnosti nabavke rezervnih delova, kao i na njihovu tržišnu cenu.
7. Obučenosť sopstvenih kadrova za rukovanje mašinom	Kriterijum se odnosi na potrebu za obukom sopstvenih kadrova za rad sa mašinama. U slučaju da je određeni tip mašina već korišćen u postrojenju, nema potrebe za dodatnom obukom.
8. Specifični eksploatacioni troškovi	Pod specifičnim eksploatacionim troškovima se podrazumevaju troškovi održavanja, kao i operativni troškovi.

Kao što se iz Tabele 75 može videti izabrano je osam kriterijuma na osnovu kojih će se izvršiti izbor najpovoljnije flotacione mašine. Većina kriterijuma se odnosi na

ekonomske parametre kao što su: *investiciona ulaganja, uslovi plaćanja, troškovi ugradnje i specifični eksploatacioni troškovi*, dok su ostali: *vreme isporuke, adaptivnost mašine, garantni rok, uslovi održavanja i obučenost sopstvenih kadrova za rukovanje mašinom*, tehničkog karaktera.

U Tabeli 76 su predstavljeni težinski koeficijenti koje imaju kriterijumi prilikom izbora flotacione mašine

Tabela 76. Težinski koeficijenti kriterijuma prilikom izbora flotacione mašine.

Kriterijum	Težinski koeficijent
1. Investiciona ulaganja	0,2
2. Uslovi plaćanja	0,2
3. Vreme isporuke	0,1
4. Troškovi ugradnje i adaptivnost mašine	0,1
5. Garantni rok	0,1
6. Uslovi održavanja	0,05
7. Obučenost sopstvenih kadrova za rukovanje mašinom	0,05
8. Specifični eksploatacioni troškovi	0,2

Kao što se iz Tabele 76 može videti najveću težinu imaju ekonomski kriterijumi: *investiciona ulaganja, uslovi plaćanja i specifični eksploatacioni troškovi*, dok su *uslovi održavanja i obučenost sopstvenih kadrova za rukovanje mašinom* sa najmanjom težinom.

Kako bi se izvršilo vrednovanje flotacionih mašina svakom od kriterijuma iz Tabele 75, koji ujedno predstavljaju attribute uslova, su dodeljene odgovarajuće vrednosti. Vrednosti atributa su izražene lingvistički i numerički.

U Tabeli 77 su prikazane vrednosti atributa uslova pri izboru flotacione mašine teorijom grubih skupova.

Tabela 77. Vrednosti atributa uslova pri izboru flotacione mašine.

Atribut uslova	Vrednost atributa uslova
1. Investiciona ulaganja	1 - > 3.000.000 €
	2 - 2.000.000 – 3.000.000 €
	3 - 1.000.000 – 2.000.000 €
	4 - < 1.000.000 €
2. Uslovi plaćanja	1 - nepovoljni
	2 - povoljni
	3 - veoma povoljni
3. Vreme isporuke	1 - > 6 meseci
	2 - 3 – 6 meseci
	3 - 1 – 3 meseca
	4 - < 1 meseca
4. Troškovi ugradnje i adaptivnost mašine	1 - visoki troškovi
	2 - srednji troškovi
	3 - niski troškovi
5. Garantni rok	1 - < 2 godine
	2 - 2 – 5 godina
	3 - > 5 godina
6. Uslovi održavanja	1 - nepovoljni
	2 - povoljni
7. Obučenosť sopstvenih kadrova za rukovanje mašinom	1 - postoji potreba za obukom
	2 - nema potrebe za obukom
8. Specifični eksploatacioni troškovi	1 - visoki specifični troškovi
	2 - srednji specifični troškovi
	3 - niski specifični troškovi

4.3.2. Rangiranje flotacionih mašina metodom grubih skupova

Nakon određivanja kriterijuma za izbor, odnosno atributa uslova i definisanja njihovih vrednosti, urađeno je vrednovanje flotacionih mašina primenom metode grubih skupova, a nakon toga je izvršena provera dobijenih rezultata primenom višekriterijumskih metoda odlučivanja : VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Kao primer za testiranje mogućnosti primene teorije grubih skupova za izbor flotacione mašine izabran je slučaj izbora mašine za osnovno flotiranje rude bakra. Izbor je vršen između šest mašina ($M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$) različitih proizvođača. Mašine su vrednovane na osnovu kriterijuma, odnosno atributa uslova iz Tabele 75 pri čemu je svakoj od njih dodeljena ocena, odnosno odgovarajuća vrednost atributa uslova iz Tabele 77. Mašine su rangirane od 1 (jedan) do 6 (šest), pri čemu 1 (jedan) predstavlja najpovoljniju mašinu a 6 (šest) najmanje povoljnu mašinu.

U Tabeli 78 su predstavljeni rezultati ocene i analize flotacionih mašina metodom grubih skupova.

Tabela 78. Ocena i analiza flotacionih mašina

Mašina	Atribut uslova								Atribut odluke
	1	2	3	4	5	6	7	8	
M_1	2	3	3	3	3	2	1	2	2
M_2	3	2	4	3	3	2	1	2	1
M_3	3	2	3	2	2	2	2	3	2
M_4	1	1	3	2	2	2	1	2	6
M_5	2	2	3	2	2	2	2	2	4
M_6	2	2	2	2	3	2	2	2	4

Kao što se može videti iz Tabele 78, analizom i ocenom svih šest predloženih mašina je dobijeno da je mašina M_2 najpovoljnija. Na drugom mestu se nalaze mašine M_1 i M_3 , dok četvrto mesto dele mašine M_5 i M_6 . Kao najnepovoljnija je izabrana mašina M_4 .

4.3.3. Komparativni višekriterijumski modeli

Za proveru dobijenih rezultata vrednovanja flotacionih mašina teorijom grubih skupova (Tabela 78) korišćene su sledeće metode višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Kriterijumima iz Tabele 75 dodeljene su oznake od K_1 do K_8 , respektivno.

a) Metoda VIKOR

Tabela 79. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
M ₁	2	3	3	3	3	2	1	2
M ₂	3	2	4	3	3	2	1	2
M ₃	3	2	3	2	2	2	2	3
M ₄	1	1	3	2	2	2	1	2
M ₅	2	2	3	2	2	2	2	2
M ₆	2	2	2	2	3	2	2	2
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
Preferencija	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,2

Tabela 80. Maksimumi i minimumi po kriterijumima.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
MAX	3	3	4	3	3	2	2	3
MIN	1	1	2	2	2	2	1	2
MAX-MIN	2	2	2	1	1	0	1	1

Tabela 81. Međuvrednosti $(f_{imax} - f_{ij}) / (f_{imax} - f_{imin}) * W_i$.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
M ₁	0,1000	0,0000	0,0500	0,0000	0,0000	0,0000	0,0500	0,2000
M ₂	0,0000	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0500	0,2000
M ₃	0,0000	0,1000	0,0500	0,1000	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000
M ₄	0,2000	0,2000	0,0500	0,1000	0,1000	0,0000	0,0500	0,2000
M ₅	0,1000	0,1000	0,0500	0,1000	0,1000	0,0000	0,0000	0,2000
M ₆	0,1000	0,1000	0,1000	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2000

Tabela 82. Vrednosti S_j i R_j .

	S_j	R_j
M ₁	0,4000	0,2000
M ₂	0,3500	0,2000
M ₃	0,3500	0,1000
M ₄	0,9000	0,2000
M ₅	0,6500	0,2000
M ₆	0,6000	0,2000

Tabela 83. Međurezultati.

Međurezultati	$(S_j - \min S_j) / (\max S_j - \min S_j)$	$(R_j - \min R_j) / (\max R_j - \min R_j)$	$V_1 = 0,5$
M ₁	0,0909	1,0000	
M ₂	0,0000	1,0000	
M ₃	0,0000	0,0000	
M ₄	1,0000	1,0000	
M ₅	0,5455	1,0000	
M ₆	0,4545	1,0000	

Tabela 84. Rang alternativa.

	Q _j	Rang
M ₁	0,5455	3
M ₂	0,5000	2
M ₃	0,0000	1
M ₄	1,0000	6
M ₅	0,7727	5
M ₆	0,7273	4

b) Metoda AHP

Tabela 85. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
M ₁	2	3	3	3	3	2	1	2
M ₂	3	2	4	3	3	2	1	2
M ₃	3	2	3	2	2	2	2	3
M ₄	1	1	3	2	2	2	1	2
M ₅	2	2	3	2	2	2	2	2
M ₆	2	2	2	2	3	2	2	2
Važnost (težina)	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,2
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max

Tabela 86. Normalizovana (konačna) matrica.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈	Rešenje	Rang
M ₁	0,1538	0,2500	0,1667	0,2143	0,2000	0,1667	0,1111	0,1538	0,17705	3
M ₂	0,2308	0,1667	0,2222	0,2143	0,2000	0,1667	0,1111	0,1538	0,18320	1
M ₃	0,2308	0,1667	0,1667	0,1429	0,1333	0,1667	0,2222	0,2308	0,18249	2
M ₄	0,0769	0,0833	0,1667	0,1429	0,1333	0,1667	0,1111	0,1538	0,12934	6
M ₅	0,1538	0,1667	0,1667	0,1429	0,1333	0,1667	0,2222	0,1538	0,16326	5
M ₆	0,1538	0,1667	0,1111	0,1429	0,2000	0,1667	0,2222	0,1538	0,16465	4

c) Metoda ELECTRE

Tabela 87. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
M ₁	2	3	3	3	3	2	1	2
M ₂	3	2	4	3	3	2	1	2
M ₃	3	2	3	2	2	2	2	3
M ₄	1	1	3	2	2	2	1	2
M ₅	2	2	3	2	2	2	2	2
M ₆	2	2	2	2	3	2	2	2
Preferencija	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,2

Tabela 88. Težinska normalizovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
M ₁	0,359210604	0,588348405	0,400891863	0,514495755	0,480384461	0,40824829	0,25819889	0,371390676
M ₂	0,538815906	0,39223227	0,534522484	0,514495755	0,480384461	0,40824829	0,25819889	0,371390676
M ₃	0,538815906	0,39223227	0,400891863	0,34299717	0,320256308	0,40824829	0,516397779	0,557086015
M ₄	0,179605302	0,196116135	0,400891863	0,34299717	0,320256308	0,40824829	0,25819889	0,371390676
M ₅	0,359210604	0,39223227	0,400891863	0,34299717	0,320256308	0,40824829	0,516397779	0,371390676
M ₆	0,359210604	0,39223227	0,267261242	0,34299717	0,480384461	0,40824829	0,516397779	0,371390676
	2,334868926	2,353393622	2,405351177	2,400980192	2,401922307	2,449489743	2,323790008	2,414039396

Tabela 89. Težinska normalizovana matrica odlučivanja.

	K ₁ * W _i	K ₂ * W _i	K ₃ * W _i	K ₄ * W _i	K ₅ * W _i	K ₆ * W _i	K ₇ * W _i	K ₈ * W _i	SUMA
M ₁	0,071842121	0,117669681	0,040089186	0,051449576	0,048038446	0,020412415	0,012909944	0,074278135	0,1177
M ₂	0,107763181	0,078446454	0,053452248	0,051449576	0,048038446	0,020412415	0,012909944	0,074278135	0,1078
M ₃	0,107763181	0,078446454	0,040089186	0,034299717	0,032025631	0,020412415	0,025819889	0,111417203	0,1114
M ₄	0,03592106	0,039223227	0,040089186	0,034299717	0,032025631	0,020412415	0,012909944	0,074278135	0,0743
M ₅	0,071842121	0,078446454	0,040089186	0,034299717	0,032025631	0,020412415	0,025819889	0,074278135	0,0784
M ₆	0,071842121	0,078446454	0,026726124	0,034299717	0,048038446	0,020412415	0,025819889	0,074278135	0,0784
	0,466973785	0,470678724	0,240535118	0,240098019	0,240192231	0,122474487	0,1161895	0,482807879	0,4828

Tabela 90. Skupovi saglasnosti i nesaglasnosti.

	SD	NSD	NSD max	$\frac{NSD_{max}}{\sum K_i \cdot W_i}$
S12	2 4 5 6 7 8	1 3	0,0718	0,6105
S13	2 3 4 5 6	1 7 8	0,0743	0,6312
S14	1 2 3 4 5 6 7 8		0,0000	0,0000
S15	1 2 3 4 5 6 8	7	0,0129	0,1097
S16	1 2 3 4 5 6 8	7	0,0129	0,1097
S21	1 3	2 4 5 6 7 8	0,0784	0,6667
S23	1 2 3 4 5 6	7 8	0,0743	0,6893
S24	1 2 3 4 5 6 7 8		0,0000	0,0000
S25	1 2 3 4 5 6 8	7	0,0129	0,1198

	SD	NSD	NSD max	$\frac{NSD_{max}}{\sum K_i \cdot W_i}$
S26	1 2 3 4 5 6 8	7	0,0129	0,1198
S31	1 7 8	2 3 4 5 6	0,0784	0,7041
S32	7 8	1 2 3 4 5 6	0,1078	0,9672
S34	1 2 3 4 5 6 7 8		0,0000	0,0000
S35	1 2 3 4 5 6 7 8		0,0000	0,0000
S36	1 2 3 4 6 7 8	5	0,0320	0,2874
S41		1 2 3 4 5 6 7 8	0,0743	1,0000
S42		1 2 3 4 5 6 7 8	0,0743	1,0000
S43		1 2 3 4 5 6 7 8	0,0743	1,0000
S45	3 4 5 6 8	1 2 7	0,0392	0,5281
S46	3 4 6 8	1 2 5 7	0,0392	0,5281
S51	7	1 2 3 4 5 6 8	0,0784	1,0000
S52	7	1 2 3 4 5 6 8	0,0784	1,0000
S53		1 2 3 4 5 6 7 8	0,0784	1,0000
S54	1 2 7	3 4 5 6 8	0,0743	0,9469
S56	1 2 3 4 6 7 8	5	0,0320	0,4082
S61	7	1 2 3 4 5 6 8	0,0784	1,0000
S62	7	1 2 3 4 5 6 8	0,0784	1,0000
S63	5	1 2 3 4 6 7 8	0,0784	1,0000
S64	1 2 5 7	3 4 6 8	0,0743	0,9469
S65	5	1 2 3 4 6 7 8	0,0784	1,0000

Tabela 91. Matrica saglasnosti.

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆
M ₁		0,7000	0,5500	1,0000	0,9500	0,9500
M ₂	0,3000		0,7500	1,0000	0,9500	0,9500
M ₃	0,4500	0,2500		1,0000	1,0000	1,0000
M ₄	0,0000	0,0000	0,0000		0,5500	0,4500
M ₅	0,0500	0,0500	0,0000	0,4500		0,9000
M ₆	0,0500	0,0500	0,1000	0,5500	0,1000	

Tabela 92. Matrica nesaglasnosti.

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆
M ₁		0,6105	0,6312	0,0000	0,1097	0,1097
M ₂	0,6667		0,6893	0,0000	0,1198	0,1198
M ₃	0,7041	0,9672		0,0000	0,0000	0,2874
M ₄	1,0000	1,0000	1,0000		0,5281	0,5281
M ₅	1,0000	1,0000	1,0000	0,9469		0,4082
M ₆	1,0000	1,0000	1,0000	0,9469	1,0000	

Tabela 93. Matrica saglasne dominacije $PIS = 0,5033$ (prosečan indeks saglasnosti).

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆
M ₁		1	1	1	1	1
M ₂	0		1	1	1	1
M ₃	0	0		1	1	1
M ₄	0	0	0		1	0
M ₅	0	0	0	0		1
M ₆	0	0	0	1	0	

Tabela 94. Matrica nesaglasne dominacije $PINS=0,61245$ (prosečan indeks nesaglasnosti).

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆
M ₁		1	0	1	1	1
M ₂	0		0	1	1	1
M ₃	0	0		1	1	1
M ₄	0	0	0		1	1
M ₅	0	0	0	0		1
M ₆	0	0	0	0	0	

Tabela 95. Matrica agregatne dominacije.

	M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	M ₆	Rang
M ₁	0	1	0	1	1	1	1
M ₂	0	0	0	1	1	1	2
M ₃	0	0	0	1	1	1	2
M ₄	0	0	0	0	1	0	4
M ₅	0	0	0	0	0	1	4
M ₆	0	0	0	0	0	0	6

d) Metoda PROMETHEE

Tabela 96. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
Tip	1	1	1	1	1	1	1	1
Težina	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,2
M ₁	2	3	3	3	3	2	1	2
M ₂	3	2	4	3	3	2	1	2
M ₃	3	2	3	2	2	2	2	3
M ₄	1	1	3	2	2	2	1	2
M ₅	2	2	3	2	2	2	2	2
M ₆	2	2	2	2	3	2	2	2

Tabela 97. Osnovna statistika.

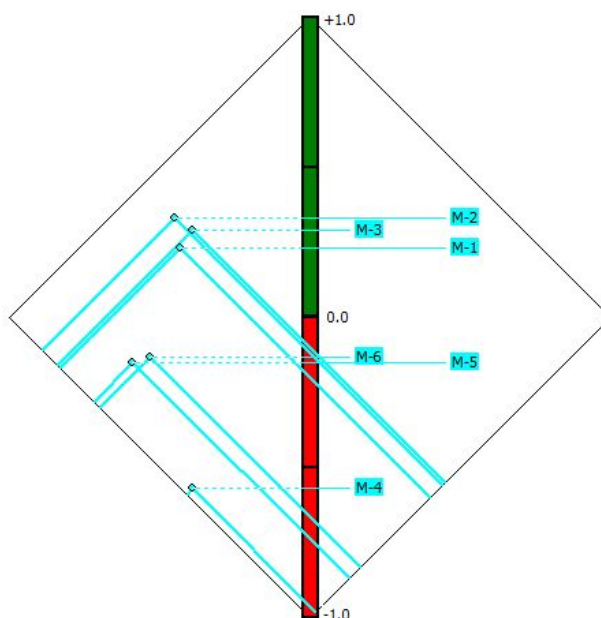
	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
Minimum	1,00	1,00	2,00	2,00	2,00	2,00	1,00	2,00
Maksimum	3,00	3,00	4,00	3,00	3,00	2,00	2,00	3,00
Prosek	2,17	2,00	3,00	2,33	2,50	2,00	1,50	2,17
Standardno odstupanje	0,69	0,58	0,58	0,47	0,50	0,00	0,50	0,37

Tabela 98. Preferencijalni parametri.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
Min/Max	max	max	max	max	max	max	max	max
Težina	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,2
Preferentna Fun.	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena	Uobičajena
Granice	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan	apsolutan

Tabela 99. Rang rešenja.

Akcije	Phi+	Rang	Phi-	Rang	Phi	Rang
M₂	0,4400	2	0,1100	1	0,3300	1
M ₃	0,4500	1	0,1600	2	0,2900	2
M ₁	0,4000	3	0,1700	3	0,2300	2
M ₆	0,1700	4	0,3000	5	-0,1300	4
M ₅	0,1300	5	0,2800	4	-0,1500	5
M ₄	0,0200	6	0,5900	6	-0,5700	6



Slika 9. Promethee dijamant rešenja.

e) Metoda TOPSIS

Tabela 100. Kvantifikovana matrica odlučivanja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
Važnost (težina)	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,2
Min/Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max	Max
M ₁	2	3	3	3	3	2	1	2
M ₂	3	2	4	3	3	2	1	2
M ₃	3	2	3	2	2	2	2	3
M ₄	1	1	3	2	2	2	1	2
M ₅	2	2	3	2	2	2	2	2
M ₆	2	2	2	2	3	2	2	2

Tabela 101. Koren sume kvadrata.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
M ₁	4	9	9	9	9	4	1	4
M ₂	9	4	16	9	9	4	1	4
M ₃	9	4	9	4	4	4	4	9
M ₄	1	1	9	4	4	4	1	4
M ₅	4	4	9	4	4	4	4	4
M ₆	4	4	4	4	9	4	4	4
	31	26	56	34	39	24	15	29
	5,567764363	5,099019514	7,483314774	5,830951895	6,244997998	4,898979486	3,872983346	5,385164807

Tabela 102. Izračunavanje r_{ij} .

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
M ₁	0,718421208	1,765045216	1,202675589	1,543487266	1,441153384	0,816496581	0,25819889	0,742781353
M ₂	1,616447718	0,784464541	2,138089935	1,543487266	1,441153384	0,816496581	0,25819889	0,742781353
M ₃	1,616447718	0,784464541	1,202675589	0,685994341	0,640512615	0,816496581	1,032795559	1,671258044
M ₄	0,179605302	0,196116135	1,202675589	0,685994341	0,640512615	0,816496581	0,25819889	0,742781353
M ₅	0,718421208	0,784464541	1,202675589	0,685994341	0,640512615	0,816496581	1,032795559	0,742781353
M ₆	0,718421208	0,784464541	0,534522484	0,685994341	1,441153384	0,816496581	1,032795559	0,742781353

Tabela 103. Množenje sa W_{ij} .

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
M ₁	0,143684242	0,353009043	0,120267559	0,154348727	0,144115338	0,040824829	0,012909944	0,148556271
M ₂	0,323289544	0,156892908	0,213808994	0,154348727	0,144115338	0,040824829	0,012909944	0,148556271
M ₃	0,323289544	0,156892908	0,120267559	0,068599434	0,064051262	0,040824829	0,051639778	0,334251609
M ₄	0,03592106	0,039223227	0,120267559	0,068599434	0,064051262	0,040824829	0,012909944	0,148556271
M ₅	0,143684242	0,156892908	0,120267559	0,068599434	0,064051262	0,040824829	0,051639778	0,148556271
M ₆	0,143684242	0,156892908	0,053452248	0,068599434	0,144115338	0,040824829	0,051639778	0,148556271

Tabela 104. Idealno i idealno negativno rešenje.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈
A*	0,323289544	0,353009043	0,213808994	0,154348727	0,144115338	0,040824829	0,051639778	0,334251609
A'	0,03592106	0,039223227	0,053452248	0,068599434	0,064051262	0,040824829	0,012909944	0,148556271

Tabela 105. Odstupanje od idealnog rešenja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈	Ukupno IR	$\sqrt{IR^2}$
M ₁	0,032258065	0	0,00875	0	0	0	0,0015	0,034482759	0,076990823	0,277472
M ₂	0	0,038461538	0	0	0	0	0,0015	0,034482759	0,074444297	0,272845
M ₃	0	0,038461538	0,00875	0,007352941	0,006410256	0	0	0	0,060974736	0,246931
M ₄	0,082580645	0,098461538	0,00875	0,007352941	0,006410256	0	0,0015	0,034482759	0,23953814	0,489426
M ₅	0,032258065	0,038461538	0,00875	0,007352941	0,006410256	0	0	0,034482759	0,127715559	0,357373
M ₆	0,032258065	0,038461538	0,025714286	0,007352941	0	0	0	0,034482759	0,138269588	0,371846

Tabela 106. Odstupanje od negativnog idealnog rešenja.

	K ₁	K ₂	K ₃	K ₄	K ₅	K ₆	K ₇	K ₈	Ukupno IR	$\sqrt{IR^2}$
M ₁	0,011612903	0,098461538	0,004464286	0,007352941	0,006410256	0	0	0	0,128301925	0,358193
M ₂	0,082580645	0,013846154	0,025714286	0,007352941	0,006410256	0	0	0	0,135904282	0,368652
M ₃	0,082580645	0,013846154	0,004464286	0	0	0	0,0015	0,034482759	0,136873843	0,369965
M ₄	0	0	0,004464286	0	0	0	0	0	0,004464286	0,066815
M ₅	0,011612903	0,013846154	0,004464286	0	0	0	0,0015	0	0,031423343	0,177266
M ₆	0,011612903	0,013846154	0	0	0,006410256	0	0,0015	0	0,033369313	0,182673

Tabela 107. Konačno rešenje.

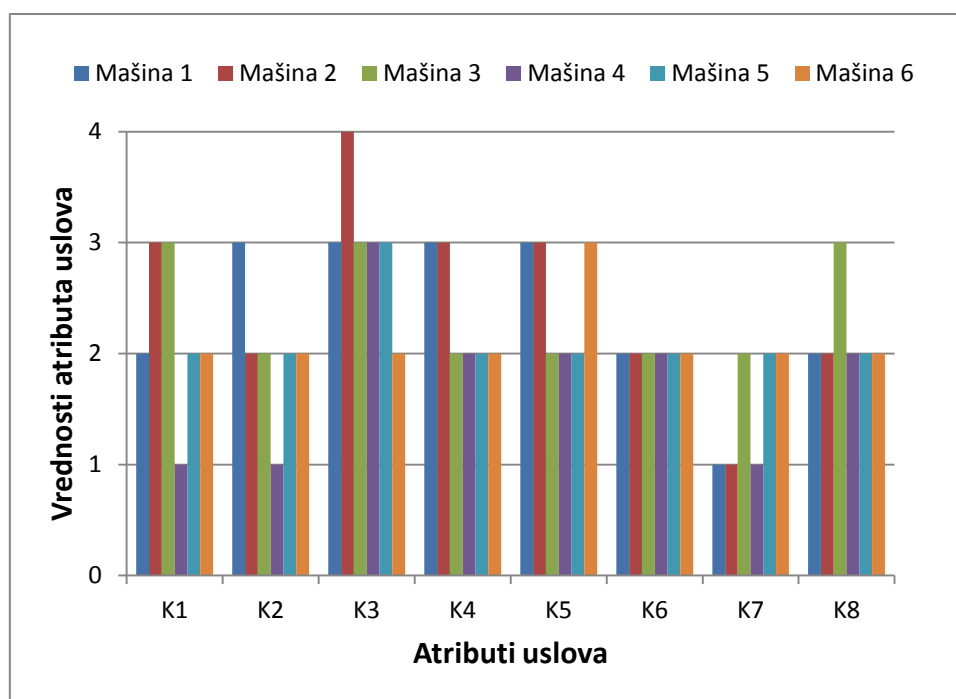
	Odnos rešenja	Rang
M ₁	0,563492882	3
M ₂	0,574674696	2
M ₃	0,599720346	1
M ₄	0,120119216	6
M ₅	0,331562341	4
M ₆	0,329425562	5

4.3.4. Analiza i diskusija rezultata vrednovanja flotacionih mašina

Vrednovanje predloženih flotacionih mašina teorijom grubih skupova je pokazalo da je najpovoljnija mašina M₂. Mašine M₁ i M₃ se nalaze na drugom i trećem mestu, dok mašine M₅ i M₆ dele četvrto i peto mesto. Na poslednjem šestom mestu se nalazi mašina M₄.

Vrednovanje mašina je izvršeno na osnovu osam kriterijuma prikazanih u Tabeli 75, pri čemu je svaki od kriterijuma, odnosno atributa uslova dobio odgovarajuću vrednost za svaku od predloženih mašina. U obzir su uzeti i težinski koeficijenti kriterijuma.

Na Slici 10 su prikazane vrednosti kriterijuma, odnosno atributa uslova prilikom vrednovanja flotacionih mašina metodom grubih skupova.

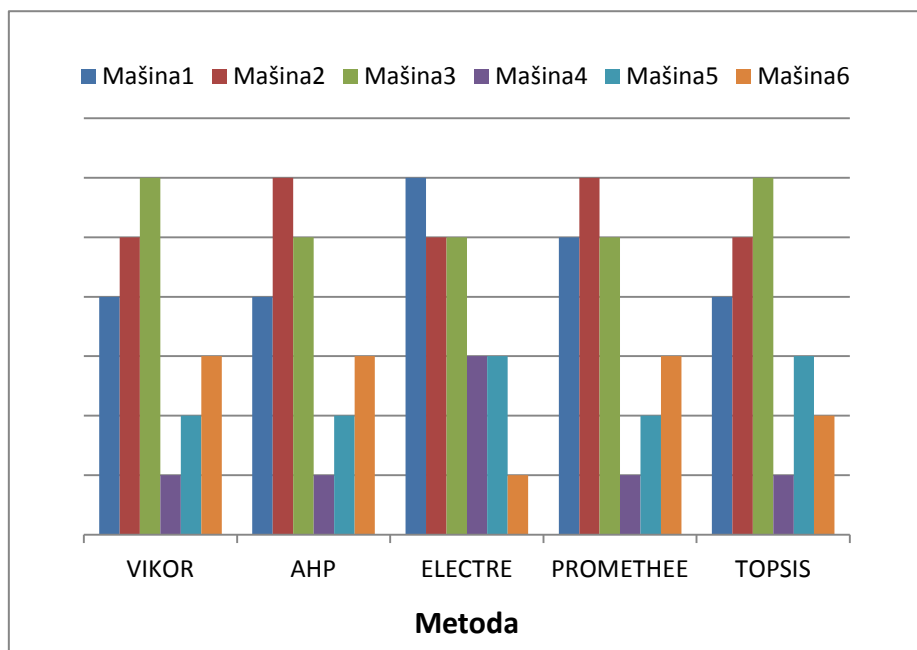


Slika 10. Vrednosti atributa uslova za predložene flotacione mašine.

Kao što se sa Slike 10 i iz Tabele 78 može videti, u slučaju atributa uslova *Investiciona ulaganja* (K_1) mašine M_2 i M_3 imaju najviše ocene 3, dok mašina M_4 ima najnižu ocenu 1. *Uslovi plaćanja* (K_2) su najbolje ocenjeni kod mašine M_1 (ocena 3) a ponovo najlošije kod mašine M_4 (ocena 1). Najpovoljnije *Vreme isporuke* (K_3) ima mašina M_2 (< 1 mesec) koja je ocenjena ocenom 4, zatim slede mašine M_1 , M_3 , M_4 i M_5 koje su dobile ocenu 3 i M_6 koja je ocenjena ocenom 2. *Troškovi ugradnje i adaptivnost mašine* (K_4) su najpovoljniji kod mašina M_1 i M_2 koje su dobile ocenu 3, dok su ostale mašine ocenjene ocenom 2. Najveći *Garantni rok* (K_5) imaju mašine M_1 , M_2 i M_6 > 5 godina i one su dobile ocenu 3, dok ostale mašine imaju ocenu 2 (2 – 5 godina). Atribut K_6 , *Uslovi održavanja*, je ocenjen istom ocenom kod svih mašina, dok je atribut K_7 , *Obučenosť sopstvenih kadrova za rukovanje mašinom*, povoljniji kod mašina M_3 , M_5 i M_6 (ocena 2) nego kod mašina M_1 , M_2 i M_4 (ocena 1). *Specifični eksploatacioni*

troškovi (K_8) su najbolje ocenjeni kod mašine M_3 i to ocenom 3, dok su ostale mašine dobile ocenu 2.

Dodatne analize predloženih flotacionih mašina su vršene metodama višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS. Rezultati dodatnih analiza flotacijskih kolektora višekriterijumskim metodama odlučivanja su prikazani na Slici 11.



Slika 11. Rezultati dodatnih analiza flotacionih mašina metodama višekriterijumskog odlučivanja.

Sa Slike 11 se može videti da je u slučaju metode VIKOR najpovoljnija mašina M_3 , dok se na drugom mestu nalazi mašina M_2 a na trećem M_1 . Metodom AHP je dobijeno da je mašina M_2 najpovoljnija, dok je M_3 na drugom mestu a mašina M_1 ponovo na trećem. Kod vrednovanja metodom ELECTRE mašina M_1 se našla na prvom mestu, a mašine M_2 i M_3 dele drugo i treće mesto. U slučaju metode PROMETHEE mašina M_2 je ponovo izabrana za najpovoljniju, dok mašine M_1 i M_3 dele drugo i treće mesto. Mašina M_3 je najbolje rangirana kod metode TOPSIS, zatim slede mašine M_2 i M_1 , na drugom, odnosno trećem mestu. Što se tiče najnepovoljnije, odnosno najlošije rangirane mašine, to je mašina M_4 kod metoda: VIKOR, AHP, PROMETHEE i TOPSIS, dok je kod metode ELECTRE najmanju ocenu dobila mašina M_6 .

U tabeli 108 prikazani su koeficijenti korelacije primenjenih metoda.

Tabela 108. Koeficijenti korelacija metoda pri izboru flotacijskih mašina.

	Grubi skupovi	VIKOR	AHP	ELECTRE	PROMETHEE	TOPSIS
Grubi skupovi	1					
VIKOR	0,903082886	1				
AHP	0,961346298	0,942857143	1			
ELECTRE	0,702970297	0,611765826	0,611765826	1		
PROMETHEE	0,961346298	0,942857143	1	0,611765826	1	
TOPSIS	0,903082886	0,942857143	0,885714286	0,72829265	0,885714286	1

Iz tabele 108 može se videti da metoda grubih skupova za posmatrani primer izbora flotacijske mašine po rezultatima najviše odgovara metodama AHP I PROMETHEE, dok su visoke korelacije ostvarene i sa metodom VIKOR i TOPSIS, mada nesaglasnost nije ostvarena ni kod metode ELECTRE.

5. ZAKLJUČAK

Priprema mineralnih sirovina predstavlja niz međusobno povezanih tehnoloških procesa u kome efikasnost celokupnog procesa zavisi od efikasnosti svakog od procesa pojedinačno. To znači da prilikom vođenja procesa treba voditi računa o veoma velikom broju uticajnih faktora, počev od karakteristika sirovine koja se prerađuje, preko reagenasa, uređaja i opreme, odnosno njihovog pravilnog funkcionisanja, pa sve do ljudskog faktora koji je često i presudan. Sa tim u vezi, se može reći da donošenje odluka vezanih za odvijanje procesa nije nimalo jednostavno. U cilju što efikasnijeg funkcionisanja procesa, u poslednje vreme se primenjuju razne metode koje služe za pojednostavljenje procesa odlučivanja. Jedna od takvih metoda jeste i teorija grubih skupova, koja predstavlja relativno novu matematičku teoriju koja je pogodna za razumevanje nepreciznih i nepotpunih podataka kao i za otkrivanje međusobnih odnosa između tih podataka

Teorija grubih skupova nudi efektivne metode koje se mogu primeniti u najrazličitijim granama industrije, ali i života, počev od veštačke inteligencije, preko medicine, ekonomije, prirodnih nauka, pa sve do tehničkih nauka kao što su građevinarstvo, elektrotehnika, itd. Ona dozvoljava karakterizaciju skupa objekata u pogledu vrednosti atributa, pronalaženje potpunih ili delimičnih zavisnosti između atributa, redukciju suvišnih atributa, određivanje značaja atributa i pronalaženje pravila odlučivanja. Primena teorije grubih skupova omogućava rešavanje složenih problema, te je stoga bila

veoma interesantna istraživačima u poslednjih nekoliko godina i uspešno se primenjuje u mnogobrojnim zahtevnim oblastima kao soft computing metoda.

Pregledom literature koja se bavi primenom teorije grubih skupova u različitim oblastima života i industrije uočeno je da nema puno primera vezanih za njenu primenu u oblasti rudarstva, odnosno pripreme mineralnih sirovina. Samim tim, nametnulo se pitanje da li se stručnjaci iz ove oblasti nisu bavili ovom problematikom ili jednostavno ova metoda nije pogodna za primenu u rudarstvu. To je bila jedna od polaznih osnova za izradu ove doktorske disertacije, utvrditi mogućnost primene teorije grubih skupova u različitim problemima koji opterećuju funkcionisanje procesa pripreme mineralnih sirovina.

Prvi korak je bio pronalaženje adekvatnih problema iz oblasti pripreme mineralnih sirovina koji bi poslužili za testiranje mogućnosti primene teorije grubih skupova za njihovo rešavanje. Odlučeno je da to budu tri problema vezana za izbore iz tri oblasti koje svaka na svoj način ima veliku ulogu u funkcionisanju procesa flotacije: izbor lokacije za flotacijsko jalovište, izbor flotacijskog kolektora i izbor flotacione mašine. Flotacijska jalovišta predstavljaju kapitalne rudarske objekte koji imaju velikog uticaja na ekonomsku isplativost procesa flotacije, ali isto tako i u velikoj meri utiču na životnu sredinu, što su pokazali brojni primeri iz prošlosti, te se može reći da je izbor lokacije za flotacijsko jalovište od izuzetne važnosti. Flotacijski kolektori predstavljaju hemijska jedinjenja čija je uloga da povećaju razliku u pogledu hidrofobnosti između različitih mineralnih vrsta i na taj način poboljšaju proces njihovog razdvajanja, odnosno da proces flotacije učine efikasnijim. Flotacione mašine su uređaji u kojima se odvijaju svi elementarni procesi flotacije, što ih čini veoma značajnim u pogledu uspešnosti odvijanja procesa. Kao što se može videti svi ovi problemi imaju veliki značaj kako za samo odvijanje procesa flotacije, tako i za njegovu ekonomsku isplativost.

Sledeći korak jeste bio određivanje parametara koji imaju najviše uticaja prilikom ova tri izbora, odnosno određivanje kriterijuma za izbor. Izabranim kriterijumima koji predstavljaju atribute uslova, su dodeljene odgovarajuće vrednosti, a nakon toga je izvršeno vrednovanje predloženih subjekata. Na taj način je izvršena primena teorije grubih skupova za rešavanje datih problema.

Na kraju, nakon analize primenom teorije grubih skupova, izvršena je provera dobijenih rezultata metodama višekriterijumskog odlučivanja: VIKOR, AHP, ELECTRE, PROMETHEE i TOPSIS.

Na osnovu dobijenih rezultata se može zaključiti da je u sva tri obrađena problema: izbor lokacije za flotacijsko jalovište, izbor flotacijskog kolektora i izbor flotacione mašine, uspešno primenjena teorija grubih skupova. Poklapanje rezultata dobijenih metodom grubih skupova sa rezultatima dobijenim ostalim metoda višekriterijumskog odlučivanja je različito od slučaja do slučaja i kreće se od 100% poklapanja u slučaju izbora lokacije za flotacijsko jalovište, do 40% u slučaju izbora flotacijskog kolektora i flotacione mašine. Visoki koeficijenti korelacija (1 kod izbora lokacije flotacijskog jalovišta, 0,94 sa metodom VIKOR kod izbora flotacijskog kolektora i 0,96 sa metodama AHP i PROMETHEE kod izbora flotacijske mašine) demonstriraju visoku osetljivost metode grubih skupova u uslovima višekriterijumskog odlučivanja i determinišu njenu upotrebljivost u uslovima nedovoljnosti podataka.

Treba napomenuti da se rešenja koja su predložena metodom grubih skupova uvek prva alternativa, odnosno ukoliko nisu na prvom mestu nalaze se na drugom mestu, u svim dodatnim analizama. Na taj način je dokazano da je moguće uspešno primeniti metodu grubih skupova prilikom rešavanja problema iz rudarstva, odnosno pripreme mineralnih sirovina. Međutim potrebno je naglasiti da je prilikom izbora treba voditi računa o sledećim stvarima:

- Izbor kriterijuma na osnovu kojih će biti izvršen izbor, odnosno ocenjivanje je veoma bitan. Mali broj kriterijuma kao rezultat može imati pogrešan izbor, dok sa druge strane nije dobro ni opterećivati proces izbora prevelikim brojem kriterijuma. Potrebno je odabrati samo najbitnije kriterijume koji će zadovoljiti sve zahteve koji se postavljaju, bilo da se oni odnose na zakonsku regulativu, projektni zadatak, tehničke i tehnološke karakteristike, ekonomsku isplativost, itd.
- Dodeljivanje vrednosti kriterijumima, odnosno atributima uslova je takođe veoma bitno jer ako nekom od atributa dodelimo neadekvatne vrednosti to može rezultirati pogrešnim ocenjivanjem, a samim tim i pogrešnim izborom. Najbolje

je svakom od atributa dodeliti vrednosti koje će ga što bolje i preciznije definisati.

- Značaj kriterijuma, odnosno atributa uslova nije isti pa je potrebno odrediti težinske koeficijente koji pokazuju koliku ulogu ima svaki od atributa prilikom izbora.

I na kraju treba napomenuti da bi dalja istraživanja u primeni metode grubih skupova u oblasti rudarstva trebalo da se kreću u pravcu kreiranja softverskog paketa koji bi služio kao podrška, kako prilikom ovakvih ili sličnih izbora, tako i prilikom traženja zavisnosti između atributa.

LITERATURA

1. Z. Pawlak, Rough sets, <http://bcpw.bg.pw.edu.pl/Content/2026/RoughSetsRep29.pdf>
2. T. Munakata, Z. Pawlak, Rough control application of rough set theory to control, Fourth European Congress on Intelligent Techniques and Soft Computing, Aachen, Germany, September 2 – 5, 1996, Proceedings, Volume 1, pp. 209–218.
3. Z. Suraj, An Introduction to Rough Set Theory and Its Applications, ICENCO'2004, December 27–30, 2004, Cairo, Egypt.
4. Z. Pawlak, A. Skowron: Rough membership function, in: R. E Yeager, M. Fedrizzi and J. Kacprzyk (eds.), *Advances in the Dempster-Schafer of Evidence*, Wiley, New York, 1994, 251–271.
5. A. Skowron, C. Rauszer: The discernibility matrices and functions in information systems in: R. Słowiński (ed.), *Intelligent Decision Support. Handbook of Applications and Advances of the Rough Set Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992, 311–362.
6. B. Agarski, Razvoj sistema za inteligentnu višekriterijumsku procenu opterećenja životne sredine kod ocenjivanja životnog ciklusa proizvoda i procesa, Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2014.
7. Hudej M., Multivarijabilni modeli upravljanja u rudarstvu, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, 2012, 133 p.
8. S. Opricović, Višekriterijumska optimizacija sistema u građevinarstvu, Građevinski fakultet, Beograd, 1998.
9. S. Opricović, G. H. Tzeng, Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS, *European Journal of Operational Research*. 156(2), 2004, pp. 445–455.

10. T. L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGrawHill, New York, 1980.
11. B. Roy, B. Bertier, *La metode ELECTRE II*, Sixieme Conference Internationale de recherche operationnelle, Dublin, 1972.
12. J. P. Brans, Ph. Vincke, B. Mareschal, *How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method*, *European Journal of Operational Research*, 24 (2), 1986, pp. 228-238.
13. S. Rissino, G. Lambert-Torres, *Rough Set Theory – Fundamental Concepts, Principals, Data Extraction, and Applications*, In: J. Ponce, A. Karahoca (Eds.), *Data Mining and Knowledge Discovery in Real Life Applications*, I-Tech, Vienna, 2009, pp. 35–58.
14. C. Wu, Y. Yue, M. Li, O. Adjei, *The rough set theory and applications*, *Engineering Computations*, Vol. 21 No. 5, 2004, pp. 488–511.
15. C.-C. Yeh, F. Lin, C.-Y. Hsu, *A hybrid KMV model, random forests and rough set theory approach for credit rating*, *Knowledge-Based Systems* 33, 2012, pp. 166–172.
16. C.-H. Cheng, T.-L. Chen, L.-Y. Wei, *A hybrid model based on rough sets theory and genetic algorithms for stock price forecasting*, *Information Sciences* 180, 2010, pp. 1610–1629.
17. J.-Y. Shyng, H.-M. Shieh, G.-H. Tzeng, *An integration method combining Rough Set Theory with formal concept analysis for personal investment portfolios*, *Knowledge-Based Systems* 23, 2010, pp. 586–597.
18. J.-Y. Shyng, H.-M. Shieh, G.-H. Tzeng, S.-H. Hsieh, *Using FSBT technique with Rough Set Theory for personal investment portfolio analysis*, *European Journal of Operational Research* 201, 2010, pp. 601–607.
19. L. Shen, H. T. Loh, *Applying rough sets to market timing decisions*, *Decision Support Systems* 37, 2004, pp. 583–597.
20. J. Wang, A.-R. Hedar, S. Wang, J. Mac, *Rough set and scatter search metaheuristic based feature selection for credit scoring*, *Expert Systems with Applications* 39, 2012, pp. 6123–6128.
21. J.-W. Liu, C.-H. Cheng, Y.-H. Chen, T.-L. Chen, *OWA rough set model for forecasting the revenues growth rate of the electronic industry*, *Expert Systems with Applications* 37, 2010, pp. 610–617.
22. B. S. Ahna, S. S. Chob, C. Y. Kim, *The integrated methodology of rough set theory and artificial neural network for business failure prediction*, *Expert Systems with Applications* 18, 2000, pp. 65–74.
23. M. J. Beynon, M. J. Peel, *Variable precision rough set theory and data discretisation: an application to corporate failure prediction*, *Omega* 29, 2001, 561–576.

24. F. Tay, L. Shen, Economic and financial prediction using rough sets model, *European Journal of Operational Research* 141, 2002, pp. 641–659.
25. J. T. Yao, J. Herbert, Financial time-series analysis with rough sets, *Applied Soft Computing* 9, 2009, pp. 1000–1007.
26. P. Pattaraintakorn, N. Cercone, Integrating rough set theory and medical applications, *Applied Mathematics Letters* 21, 2008, pp. 400–403.
27. P. Pattaraintakorn, N. Cercone, A foundation of rough sets theoretical and computational hybrid intelligent system for survival analysis, *Computers and Mathematics with Applications* 56, 2008, pp. 1699–1708.
28. S. Tsumoto, Automated extraction of medical expert system rules from clinical databases based on rough set theory, *Information Sciences* 112, 1998, pp. 67–84.
29. C.-S. Son, Y.-N. Kim, H.-S. Kim, H.-S. Park, M.-S. Kim, Decision-making model for early diagnosis of congestive heart failure using rough set and decision tree approaches, *Journal of Biomedical Informatics* 45, 2012, pp. 999–1008.
30. Y. S. Chen, Modeling hybrid rough set-based classification procedures to identify hemodialysis adequacy for end-stage renal disease patients, *Computers in Biology and Medicine* 43, 2013, pp. 1590–1605.
31. E. Stokić, V. Brtko, B. Srdić, The synthesis of the rough set model for the better applicability of sagittal abdominal diameter in identifying high risk patients, *Computers in Biology and Medicine* 40, 2010, pp. 786–790.
32. Y. Zhang, Rough Set Soft Computing Cancer Classification and Network: One Stone, Two Birds, *Cancer Informatics* 9, 2010, pp. 139–145.
33. J. Dai, Q. Xu, Attribute selection based on information gain ratio in fuzzy rough set theory with application to tumor classification, *Applied Soft Computing* 13, 2013, pp. 211–221.
34. A. El. Hassanien, Fuzzy rough sets hybrid scheme for breast cancer detection, *Image and Vision Computing* 25, 2007, pp. 172–183.
35. Z. Zhang, Y. Shi, G. Gao, A rough set-based multiple criteria linear programming approach for the medical diagnosis and prognosis, *Expert Systems with Applications* 36, 2009, pp. 8932–8937.
36. H. C. Chou, C. H. Cheng, J. R. Chang, Extracting drug utilization knowledge using self-organizing map and rough set theory, *Expert Systems with Applications* 33, 2007, pp. 499–508.
37. Z. Ji, Q. Suna, Y. Xiab, Q. Chena, D. Xiaa, D. Feng, Generalized rough fuzzy c-means algorithm for brain MR image segmentation, *Computer methods and programs in biomedicine* 108, 2012, pp. 644–655.

38. A. Phophalia, A. Rajwade, S. Mitra, Rough set based image denoising for brain MR images, *Signal Processing* 103, 2014, pp. 24–35.
39. J. Komorowski, A. Øhrn, Modelling prognostic power of cardiac tests using rough sets, *Artificial Intelligence in Medicine* 15, 1999, pp. 167–191.
40. X. Wang, J. Yang, R. Jensen, X. Liu, Rough set feature selection and rule induction for prediction of malignancy degree in brain glioma, *Computer methods and programs in biomedicine* 83, 2006, pp. 147-156.
41. T. Maciag, D. Hepting, Analysis of User Classifiers for Personalization of Environmental Decision Support System Interfaces, *Proceedings of Artificial Neural Networks in Engineering ANNIE 2005*, St. Louis, Missouri, November 7–9, 2005.
42. T. Maciag, D. Hepting, D. Slezak, Personalizing User Interfaces for Environmental Decision Support Systems, *Proceedings of International workshop on Rough Sets and Soft Computing in Intelligent Agent and Web Technologies*, Compiègne, France, September 19, 2005, pp. 49–55.
43. M. Yanga, F. I. Khana, R. Sadiqb, P. Amyotte, A rough set-based game theoretical approach for environmental decision-making: A case of offshore oil and gas operations, *Process Safety and Environmental Protection* 9 (1), 2013, pp. 172–182.
44. L. Deng, B. Karney, Application of enhanced rough set approach to the evaluation of urban water resources utilization: A case study of Beijing, *Proceedings of International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering (CiSE)*, Wuhan, China, December 10–12, 2010.
45. L. Feng, Water Treatment Plant Decision Making Using Rough Multiple Classifier Systems, *Procedia Environmental Sciences* 11, 2011, pp. 1419–1423.
46. R. H. Warren, Domain knowledge acquisition from solid waste management models using rough sets, A Master Thesis, Regina, Saskatchewan, Canada, November, 2000.
47. W. Cai, W. Liao, C. Zhou, L. Xi, H. Dun, A Fuzzy Model Based on Rough Set Theory for Application to Environmental Impact Evaluation of an Oil Tanker, *Proceedings of the Nineteenth International Offshore and Polar Engineering Conference*, Osaka, Japan, June 21-26, 2009, pp. 659–664.
48. W. C. Chen, N.-B. Chang, J.-C. Chen, Rough set-based hybrid fuzzy-neural controller design for industrial wastewater treatment, *Water Research* 37, 2003, pp. 95–107.
49. D. Niu, F. Fang, K. Zhou, J. Liu, Feasibility Evaluation for Wind Power Generation Based on Rough Set Theory, *Procedia Engineering* 15, 2011, pp. 5046–5050.

50. N. Chevre , F. Gagne, P. Gagnon, C. Blaise, Application of rough sets analysis to identify polluted aquatic sites based on a battery of biomarkers: a comparison with classical methods, *Chemosphere* 51, 2003, pp. 13–23.
51. J. Karami, A. Alimohammadi, T. Seifouri, Water quality analysis using a variable consistency dominance-based rough set approach, *Computers, Environment and Urban Systems* 43, 2014, pp. 25–33.
52. A. Boggia, L. Rocchi, L. Paolotti, F. Musotti, S. Greco, Assessing Rural Sustainable Development potentialities using a Dominance-based Rough Set Approach, *Journal of Environmental Management* 144, 2014, pp. 160-167.
53. C. Bai, J. Sarkis, Green supplier development: analytical evaluation using rough set theory, *Journal of Cleaner Production* 1, 2010, pp. 1200–1210.
54. L. Yan, J. Wang, X. Hao, Z. Tang, Glacier mapping based on rough set theory in the Manas River watershed, *Advances in Space Research* 53, 2014, pp. 1071–1080.
55. G. Ćirović, D. Plamenac, Grubi skupovi – Primena u građevinarstvu, Društvo operativnih istraživača, Beograd, 2005.
56. G. Ćirović, Managing uncertainty in the construction industry through the rough set theory, *Yugoslav Journal of Operations Research* Vol. 11, No. 2, 2001, pp. 235–249.
57. G. Ćirović, M. Kuburić, Vrednovanje mostova primenom teorije grubih skupova, Zbornik radova Građevinskog fakulteta, Subotica, 17, 2008, pp. 51–60.
58. M. Arabani, M. A. Lashteh Nashaei, Application of Rough Set Theory as a New Approach to Simplify Dams Location, *Scientia Iranica*, Vol. 13, No. 2, pp. 152–158.
59. G. Wen, Construction project risk evaluation based on Rough Sets and Artificial Neural Networks, *Proceedings of 6th International Conference on Natural Computation (ICNC 2010)*, Volume 3, Yantai, Shandong, 10–12 August 2010, pp. 1624–1628.
60. C. M. Tam, T. K. L. Tong, K. K. Chan, Rough set theory for distilling construction safety measures, *Construction Management and Economics*, Vo. 24, No. 11, 2006, pp. 1199–1206.
61. Y. M. Kim, C. K. Kim, J. C. Lee, Rough set algorithm for crack category determination of reinforced concrete structures, *Advances in Engineering Software* 40, 2009, pp. 202–211.
62. J. P. Liu, Z. P.Zeng, H. Q.Liu, H. B.Wang, A rough set approach to analyze factors affecting landslide incidence, *Computers & Geosciences* 37, 2011, pp. 1311–1317.
63. P. V. Gorsevski, P. Jankowski, Discerning landslide susceptibility using rough sets, *Computers, Environment and Urban Systems* 32,2008, pp. 53–65.
64. C. H. Aldridge, Discerning Landslide Hazard Using a Rough Set Based Geographic Knowledge Discovery Methodology, *Proceedings of the 11th Annual Colloquium of the*

- Spatial Information Research Centre, University of Otago, Dunedin, New Zealand, December 13-15th, 1999, pp. 251–266.
65. L. Peng, R. Niu, B. Huang, X. Wu, Y. Zhao, R. Ye, Landslide susceptibility mapping based on rough set theory and support vector machines: A case of the Three Gorges area, China, *Geomorphology* 204, 2014, pp. 287–301.
66. I. U. Sikder, T. Munakata, Application of rough set and decision tree for characterization of premonitory factors of low seismic activity, *Expert Systems with Applications* 36, 2009, pp. 102–110.
67. Y.-b. Yuan, Y.-q. Zhu, Y. Zhou, N. R. Saeltun, W. Cui, J. Huang, Rough set for quantitative analysis of characteristic information in metallogenic prediction, *Kybernetes* 38 (10), 2009, pp. 1801–1811.
68. Y.-b. Yuan, X. Liang, J. Huang, F. Zhang, Geological Anomaly Mining in Mineralization Based on Rough Set, *Proceedings of the 6th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (Volume 1)*, Tianjin, China, 14-16 August, 2009, pp. 581–585.
69. F. Jiang, K. Zhou, H. Deng, X. Li, Y. Zhong, An Optimized Model for Blasting Parameters in Underground Mines' Deep-Hole Caving Based on Rough Set and Artificial Neural Network, *Proceedings of Second International Symposium on Computational Intelligence and Design ISCID 09, Volume 1*, Changsha, China, 12-14 December 2009, pp. 459–462.
70. A. R. Frutuoso Barroso, G. Baiden, J. Johnson, Knowledge Representation and Expert Systems for Mineral Processing using Infobright, *IEEE International Conference on Granular Computing 2010*, San Jose, California, USA, 14–16 August 2010, pp. 49–54.
71. H. O. Ghaffari, M. Ejtemaei, M. Irannajad, Knowledge Discovery of Hydrocyclone's Circuit Based on SONFIS & SORST, *Proceedings of the 11th International Mineral Processing Symposium*, Belek-Antalya, Turkey 21-23 October 2008, pp. 171–177.
72. H. O. Ghaffari, M. Ejtemaei, M. Irannajad, Application of Rough Set Theory to Analysis of Hydrocyclone Operation, *Proceedings of the International Conference on Smart Materials and Adaptive Structures: Mathematical Modeling and Computation*, <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0804/0804.0528.pdf>
73. J. Ding, T. Chai, H. Wang, X. Chen, Knowledge-Based Global Operation of Mineral Processing Under Uncertainty, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, Vol. 8, No. 4, November 2012, pp. 849–859.
74. J. Ding, Q. Chen, T. Chai, H. Wang, C.-Y. Su, Data Mining Based Feedback Regulation in Operation of Hematite Ore Mineral Processing Plant, *Proceedings of American Control Conference 2009*, St. Louis, MO, USA June 10-12, 2009, pp. 907–912.

75. T. Chai, J. Ding, H. Wang, Multi-objective Hybrid Intelligent Optimization of Operational Indices for Industrial Processes and Application, http://eprints.ma.man.ac.uk/1604/01/covered/MIMS_ep2011_30.pdf
76. B. Golomeov, M. Golomeova, B. Krstev, A. Krstev, Some hazardous appearances in flotation tailings dumps in domestic mines, *Perspectives of Innovations, Economics & Business*, Vol. 7, No. 1, 2011, pp. 80-83.
77. M. Benvenuti, I. Mascaro, F. Corsini, P. Lattanzi, P. Parrini, G. Tanelli, Mine waste dumps and heavy metal pollution in abandoned mining district of Boccheggiano (Southern Tuscany, Italy), *Environmental Geology* 30 (3/4), 1997, pp. 238-243.
78. K. Komnitsas, A. Kontopoulos, I. Lazar, M. Cambridge, Risk assessment and proposed remedial actions in coastal tailings disposal sites in Romania, *Minerals Engineering*, Vol. 11, No. 12, 1998, pp. 1179–1190.
79. D. Panias, Consequences of environmental issues on sustainability of metal industries in Europe: The case study of Bor, *Metalurgija - Journal of Metallurgy*, Vol. 12, No. 4, 2006, pp. 239-250.
80. Municipality of Bor, Local Environmental Action Plan, Bor, Serbia, 2003.
81. F. Wehland, C. Panaiotu, E. Appel a, V. Hoffmann, D. Jordanova, N. Jordanova, I. Denut, The dam breakage of Baia Mare—a pilot study of magnetic screening, *Physics and Chemistry of the Earth*, Vol.27, 2002, pp. 1371–1376.
82. N. Eriksson, P. Adamek, The tailings pond failure at the Aznalcóllar mine, Spain, *Environmental Issues and Management of Waste in Energy and Mineral Production*, Book, Netherlands, 2000, pp. 109-116.
83. E. E. Alonso, A. Gens, Aznalcollar dam failure. Part 1: Field observations and material properties, *Geotechnique*, Vol. 56, No. 3, 2006, pp. 165–183.
84. J. A. Caldwell, A. MacG Robertson, Selection of tailings impoundment sites, *Die sivilie ingenieur in Suid Afrika*, 1983, pp. 537-552.
85. A. MacG Robertson, A. S. Moss, Site selection and optimization studies for mill sites and tailings impoundments, *Asian mining*, Institution of Mining and Metalurgy, London, 1981, www.robertsongeoconsultants.com.
86. A. MacG Robertson, S. C. Shaw, A multiple accounts analysis for tailings site selection, *Sudbury 99 Conf. Proceedings Mining and the Environment II*, Vol. 3, 1999, pp. 883-891.
87. R. Ačić, N. Magdalinović, M. Trumić, Lj. Šutulović, *Odvodnjavanje i jalovišta*, Nauka Beograd, 2001.
88. R. Ačić, *Studija flotacijskog jalovišta na lokaciji doline Velikog Peka*, Institut za bakar Bor, 1991.

89. S. M. Bulatovic, Handbook of Flotation Reagents: Chemistry, Theory and Practice, Volume 1: Flotation of Sulfide Ores, Elsevier, 2007.
90. G. W. Heyes, W. J. Trahar, The natural flotability of chalcopyrite, International Journal of Mineral Processing, 4, 1977, pp. 317—344.
91. S. K. Kawatra, Flotation Fundamentals,
http://www.chem.mtu.edu/chem_eng/faculty/kawatra/Flotation_Fundamentals.pdf
92. V. A. Ignatkina, Selection of Selective Collectors for Flotation of Minerals with Similar Flotation Properties, Russian Journal of NonFerrous Metals, 2011, Vol. 52, No. 1, pp. 1–7.
93. P. K. Ackerman, G. H. Harris, R. R. Klimpel, F. F. Aplan, Evaluation of Flotation Collectors for Copper Sulfides and Pyrite, I. Common Sulfhydryl Collectors, International Journal of Mineral Processing, 21, 1987, pp. 105-127.
94. P. K. Ackerman, G. H. Harris, R. R. Klimpel, F. F. Aplan, Evaluation of Flotation Collectors for Copper Sulfides and Pyrite, II. Non-Sulfhydryl Collectors, International Journal of Mineral Processing, 21, 1987, pp. 129-140.
95. P. K. Ackerman, G. H. Harris, R. R. Klimpel, F. F. Aplan, Evaluation of Flotation Collectors for Copper Sulfides and Pyrite, III. Effect of Xanthate Chain Length and Branching, International Journal of Mineral Processing, 21, 1987, pp. 141-156.
96. S. Chen, W. Gong, G. Mei, Q. Zhou, C. Bai, N. Xu, Primary biodegradation of sulfide mineral flotation collectors, Minerals Engineering 24, 2011, pp. 953–955.
97. E. Chockalingam, S. Subramanian, K. A. Natarajan, Studies on biodegradation of organic flotation collectors using *Bacillus polymyxa*, Hydrometallurgy 71, 2003, pp. 249 – 256.
98. N. Deo, K. A. Natarajan, Biological removal of some flotation collector reagents from aqueous solutions and mineral surfaces, Minerals Engineering, Vol. 11, No. 8, 1998, pp. 717–738
99. J. Yianatos, Francisco Díaz, Hydrodynamic Characterization of Industrial Flotation Machines Using Radioisotopes, Radioisotopes - Applications in Physical Sciences, Edited by Nirmal Singh, (ISBN 978-953-307-510-5), InTech, October, 2011.
100. M. G. Nelson, D. Lelinski, Hydrodynamic design of self-aerating flotation machines, Minerals Engineering, Vol. 13, No. 10-11, 2000, pp. 991–998.
101. S. A. Kondratev, A. A. Lavrinenko, Design of the flotation machines and efficiency of their use, Journal of Mining Science, Vol. 44, No. 3, 2008, pp. 289–297.
102. G. J. Jameson, New directions in flotation machine design, Minerals Engineering, Vol. 23, 2010, pp. 835–841.

103. E. C. Cilek, The effect of hydrodynamic conditions on true flotation and entrainment in flotation of a complex sulphide ore, *International Journal of Mineral Processing*, Vol. 90, 2009, pp. 35–44.
104. E. C. Cilek , B. Z. Yilmazer, Effects of hydrodynamic parameters on entrainment and flotation performance, *Minerals Engineering*, Vol. 16, 2003, pp. 745–756.

BIOGRAFIJA AUTORA

Mr Zoran M. Štirbanović je rođen 18.08.1979. godine u Boru. Osnovnu i srednju, Mašinsko elektrotehničku školu, smer Elektrotehničar računara, završio je u Boru sa odličnim uspehom.

Tehnički fakultet u Boru, smer za Pripremu mineralnih sirovina upisao je 1998. godine. Diplomirao je 2005. godine sa prosečnom ocenom 8,54 i sa diplomskim radom pod nazivom "Ispitivanje mogućnosti flotacije bakra iz peska hidrociklona industrijske prerade topioničke šljake Rudnika Bakra Bor" pod mentorstvom prof.dr Rodoljuba Stanojlovića.

Magistarske studije na smeru za Mineralne i reciklažne tehnologije upisao je 2005. godine. Magistrirao je 2009. godine sa temom "Modeliranje procesa mlevenja i flotiranja topioničke šljake u funkciji stepena oslobođenosti" pod mentorstvom prof. dr Zorana S. Markovića.

Na Tehničkom fakultetu u Boru je izabran u zvanje saradnik u nastavi 2007. godine, a 2009. godine, nakon završene magistrature, i u zvanje asistent.

Bio je angažovan na izvođenju vežbi iz sledećih predmeta: Ispitivanje sirovina, Flotacija, Mašine i uređaji u flotaciji, Projektovanje deponija, Održivo korišćenje prirodnih resursa, Industrija i zaštita životne sredine, Reagensi u PMS-u, Alternativni izvori energije, Specifične metode flotacije, Teorijski principi flotacijske koncentracije i Stručna praksa.

Autor je više radova u međunarodnim i domaćim časopisima, kao i na međunarodnim i domaćim naučno-stručnim skupovima. Uređivao je Zbornike radova na domaćim naučno-stručnim skupovima. Učestvovao je u realizaciji dva tehnička rešenja. Kao saradnik je bio angažovan u izradi nekoliko projekata.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани: **Зоран М. Штирбановић**

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Моделирање технолошких процеса у рударству у условима недовољности података применом теорије грубих скупова

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 05.04.2015.



Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

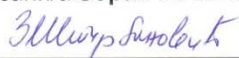
Име и презиме аутора: **Зоран М. Штирбановић**

Студијски програм: **Рударско инжењерство**

Наслов рада: **Моделирање технолошких процеса у рударству у условима
недовољности података применом теорије грубих скупова**

Ментор: **Проф. др Игор Миљановић**

Потписани/а **Зоран М. Штирбановић**



Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 05.04.2015.



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Моделирање технолошких процеса у рударству у условима недовољности података применом теорије грубих скупова

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 05.04.2015.



1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.