UNIVERZITET U BEOGRADU

FILOZOFSKI FAKULTET

Miloš R. Adžić

GEDEL O AKSIOMATIZACIJI TEORIJE SKUPOVA

doktorska disertacija

Beograd, 2014

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF PHILOSOPHY

Miloš R. Adžić

GÖDEL ON AXIOMATIZATION OF SET THEORY

doctoral dissertation

Belgrade, 2014

Podaci o mentoru i članovima komisije

Mentor:

Prof. dr Kosta Došen

Univerzitet u Beogradu

Filozofski fakultet

Članovi komisije:

Prof. dr Živan Lazović

Univerzitet u Beogradu

Filozofski fakultet

Prof. dr Stevo Todorčević

Departman za matematiku, Univerzitet u Torontu

Univerzitet Deni Didro, Pariz VII

Redovni član SANU

Prof. dr Aleksandar Perović

Univerzitet u Beogradu

Saobraćajni fakultet

NASLOV DOKTORSKE DISERTACIJE:

Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova

REZIME:

Cilj ovog rada je da ispita detalje Gedelove (Kurt Gödel) platonističke pozicije u filozofiji matematike, argumente koji se iznose za i protiv nje, kao i posledice koje ova pozicija ima za formulisanje novih aksioma teorije skupova. Razmotrićemo neke konkretne predloge novih aksioma koje je Gedel ponudio, pre svega jake aksiome beskonačnosti ili aksiome velikih kardinala, kao i Gedelovu sugestiju da centralni princip na kojem bi trebalo da počivaju sve nove aksiome teorije skupova jeste princip refleksije. Osim toga, uporedićemo Gedelova gledišta o novim aksiomama sa nekim savremenim gledištima da bismo videli da li se i u kojoj meri ova poslednja mogu smatrati unapređenjima Gedelovog programa.

Prva glava ovog rada je uvodnog karaktera i ne donosi ništa novo. U njoj ćemo da uvedemo pojmove i rezultate na koje ćemo se često oslanjati u nastavku rada. Poslednji deo ovog uvoda sadrži nešto detaljniji pregled čitavog rada nego što smo mogli da pružimo u ovom rezimeu.

Glave 2 i 3 posvećene su detaljima Gedelovog platonističkog stanovišta, glavnim kritikama koje su mu upućivane i nekim mogućim odgovorima na njih. Posebno će nas zanimati Gedelov pojam intuicije koji je bio meta mnogih kritika. Pokazaćemo da se ovaj pojam ne treba da razume kao "mistična sposobnost neposrednog uvida" u strukturu apstraktnog matematičkog sveta, i da u Gedelovim radovima do 1959. godine ova sposobnost predstavlja ništa drugo nego čin razumevanja osnovnih matematičkih pojmova.

Sledeća glava, četvrta po redu, posvećena je analizi dve vrste opravdanja novih aksioma, onako kako ih je Gedel razumeo. Reč je o unutrašnjem i spoljašnjem opravdanju. Videćemo da nijednoj od ovih vrsta opravdanja Gedel ne daje preimućstvo, kako se to često smatra, i da između njih postoji *povratni* odnos koji ćemo da objasnimo u četvrtom odeljku ove glave.

U glavi 5 ispitaćemo jedan po našem mišljenju neuspešan argument u prilog matematičkom platonizmu koji delimično počiva na pogrešnom razumevanju Gedelovog stanovišta.

Šesta glava posvećena je Gedelovoj sugestiji da je princip refleksije centralan za teoriju skupova i da bi u izvesnom smislu svi kandidati za nove aksiome trebalo na njemu da počivaju. Ispitaćemo ovaj princip u različitim kontekstima i videti da ako se on razume u određenom smislu, onda je svaka njegova do danas poznata formulacija preslaba da učini ono što se od nje očekuje.

Poslednja, sedma glava ovog rada posvećena je nekim savremenim gledištima formulisanja novih aksioma teorije skupova i njihovoj filozofskoj pozadini.

Ključne reči:

Kurt Gedel, platonizam, teorija skupova, nove aksiome, refleksija

Naučna oblast: Filozofija

Uža naučna oblast: Filozofija matematike

DOCTORAL DISSERTATION TITLE:

Gödel on axiomatization of set theory

SUMMARY:

This aim of this work is to investigate Kurt Gödel's platonistic position in the philosophy of mathematics, arguments up in its favor or against it, as well as the consequences this position has for the formulation of new axioms of set theory. We shall examine some particular proposals for new axioms made by Gödel - most notably strong axioms of infinity or large cardinal axioms, together with Gödel's suggestion that the crucial principle upon which all new axioms of set theory should be founded is the principle of reflection. Apart from that, we shall compare Gödel's views concerning new axioms with some recent developments in order to appreciate whether the later can be seen as continuations of Gödel's program.

Chapter 1 presents an introduction and is not original. Here we introduce the notions and results which we shall need in the rest of the work. The last part of this introduction offers a somewhat more detailed summary of this work then we were able to offer here.

Chapters 2 and 3 focus on the details of Gödel's platonistic standpoint, main forms of criticisms that were marshaled against, it as well as some possible replies to these. We shall be concerned in particular with Gödel's concept of intuition, which proved to be in the center of most critical attacks. We shall attempt to show that this concept should not be understood as the "mystical faculty of direct insight" into the structure of the abstract mathematical world, and that in Gödel's works prior to 1959 this faculty amounts to nothing more then the act of understanding basic mathematical concepts.

Chapter 4 presents an analysis of two types of justification of new axioms as envisaged by Gödel, namely intrinsic and extrinsic justification. We shall see that Gödel does not ascribe primacy to either of these two types of justification, as it is often thought, and that there is a certain "back and forth" interaction between them which we shall explain in the fourth section of this chapter.

In Chapter 5 we shall critically examine what we find to be an unsuccessful argument for mathematical platonism, which partly rests on a misunderstanding of Gödel's standpoint.

The following chapter, Chapter 6, starts with Gödel's suggestion that reflection principle is of prime importance for set theory, and that in a certain sense all candidates for new axioms should be founded upon it. We shall examine this principle in various contexts and show that if the principle is understood in a certain sense, then each of its various formulations proposed until now is too weak to deliver what is expected of it.

The final chapter of this work, Chapter 7, provides an examination of some recent attempts at formulating new axioms for set theory, as well as their philosophical background.

KEYWORDS:

Kurt Gödel, platonism, set theory, new axioms, reflection

SCIENTIFIC FIELD: Philosophy

FIELD OF STUDY: Philosophy of mathematics

SADRŽAJ

GLAVA 1

UVOD

Cilj ovog rada je da ispita detalje Gedelove (Kurt Gödel) platonističke pozicije u filozofiji matematike, argumente koji se iznose za i protiv nje, kao i posledice koje ova pozicija ima za formulisanje novih aksioma teorije skupova. Razmotrićemo neke konkretne predloge novih aksioma koje je Gedel ponudio, pre svega *jake aksiome beskonačnosti* ili *aksiome velikih kardinala.* Razmotrićemo takođe Gedelovu sugestiju da centralni princip na kojem bi trebalo da počivaju sve nove aksiome teorije skupova jeste *princip refleksije.*

Pitanje formulisanja novih aksioma teorije skupova nameće prirodno problem opravdanja tih aksioma. Bićemo u prilici da ispitamo dve osnovne vrste opravdanja koja se, po Gedelovom mišljenju, mogu ponuditi za nove aksiome. Reč je o pojmovima *unutrašnjeg* i *spoljašnjeg* opravdanja. Videćemo da tokom svoje karijere Gedel nije uvek pridavao jednaku važnost ovim tipovima opravdanja, ali i da se oni uvek pojavljuju u paru pa da nije moguće zanemariti jedan od ovih tipova prilikom formulisanja novih aksioma. Na kraju, ispitaćemo neke od savremenih programa formulisanja novih aksioma, na prvom mestu Vudinov, ne bismo li utvrdili da li i u kojoj meri oni odgovaraju zahtevima koje je Gedel postavio svakom programu ove vrste.

1.1. Nepotpunost matematičkih teorija

U nastavku ovog odeljka pružićemo jedan mali uvod u elementarnu teoriju skupova kao i kratak istorijski pregled *hipoteze kontinuuma* (u nastavku CH) od njenog nastanka pa sve do dokaza njene *nezavisnosti* od aksioma teorije skupova. Započinjemo sa ovim problemom jer je upravo on bio osnovna motivacija Gedelovog rada u teoriji skupova. Da bismo razumeli zašto je nezavisnost CH značajna, moramo pre toga reći nešto o *nepotpunosti* formalnih matematičkih teorija koje sadrže aritmetiku. Nezavisnost CH se tiče ovog opštijeg fenomena nepotpunosti. Zbog ovoga ćemo umesto sa teorijom ZFC započeti sa slabijom *Peanovom aritmetikom* prvog (PA) i drugog reda (PA^2) koja će nam pokazati kako se konkretni primeri nepotpunosti jednog sistema mogu donekle sanirati prelaskom na jači sistem. Ovaj jači sistem će međutim i sam biti nepotpun što nas navodi na ideju beskonačnog niza sve snažnijih nepotpunih teorija od kojih svaka rešava neka od pitanja koja njena prethodnica nije mogla da reši. Sve ove teorije mogu se lepo opisati kao fragmenti ZFC teorije skupova, kojoj ćemo pokloniti posebnu pažnju. Ono po čemu se, na primer, teorija ZFC razlikuje od PA jeste da iako su obe ove teorije nepotpune, nepotpunost od ZFC je ozbiljnija jer postoje prirodna tvrđenja izražena na jeziku ove teorije takva da ona ne dokazuje ni njih ni njihovu negaciju. Jedan primer ovakvog tvrđenja je CH i taj će nas primer posebno zanimati.

Ovaj deo rada ne donosi ništa novo i čitalac koji je načelno upoznat sa Gedelovim teoremama o nepotpunosti, elementarnom teorijom skupova kao i sa rezultatima o konzistentnosti i nezavisnosti CH može ga bez bojazni preskočiti. Odlučili smo se da ovaj uvod uvrstimo u rad da bismo čitaocu koji sa ovim oblastima nije upoznat olakšali čitanje; da ne bi morao stalno da konsultuje odgovarajuću literaturu. Ovo naravno ne znači da ovaj uvod može u potpunosti tu literaturu da zameni. Dokaze nekih tvrđenja ćemo često samo da skiciramo, a ponekad i u potpunosti da preskočimo. Ovo će posebno da bude slučaj u odeljku [1.8], kada se budemo bavili nezavisnošću CH. Za detaljniji prikaz rezultata u odeljcima [1.2 – 1.7] ovog uvoda, čitaoca upućujemo na prve četiri glave Drejkove knjige [Drake, 1974]. Detaljan dokaz konzistentnosti CH sa aksiomama teorije ZF, čitalac može da nađe u petoj glavi te knjige. Detalje Koenovog dokaza konzistentnosti $\neg CH$ sa aksiomama teorije skupova, čitalac može da nađe u Kunenovoj knjizi [Kunen, 1980], a nešto sažetiji prikaz i u knjizi [Ciesielski, 1997]. Ovo je i literatura na koju smo se mi oslanjali prilikom pisanja ovog uvoda.

Na kraju uvoda ocrtaćemo osnovnu strukturu rada po poglavljima, stavljajući akcenat na važna pitanja, ideje, zagonetke, pre nego na apsolutnu preciznost i tehničke detalje.

⋆

Kurt Gedel je najveće ime dvadesetovekovne logike, kao i jedno od najvećih imena logike i matematike uopšte. To je nesumnjivo. Ono što međutim nije tako dobro poznato jeste da Gedel spada i među velike filozofe prošlog veka, pre svega u filozofiji matematike. Gedel je za života objavljivao malo, ali je svaki njegov objavljeni rad imao velike posledice u oblasti kojom se bavio (i ne samo u njoj). U tom pogledu, njegov rad „What is Cantor's Continuum Problem", objavljen 1947. godine u časopisu *American Mathematical Monthly*, zauzima centralno mesto kada je reč o filozofiji matematike. U tom radu Gedel zastupa *matematički platonizam*, gledište prema kojem matematički objekti postoje kao *apstraktni entiteti*[1] jednako kao što postoje uobičajeni, konkretni objekti fizičkog sveta. Nešto više detalja o Gedelovom platonizmu iznećemo u nastavku.[2] Na ovom mestu pak okrenućemo se jednom Gedelovom ranijem otkriću, *nepotpunosti matematičkih teorija*, koje će nam pomoći da bolje razumemo kako Gedelov platonizam, tako i posledice koje ova pozicija ima u pogledu aksiomatizacije teorije skupova. Izvorište fenomena nepotpunosti nalazi se u *formalnoj* ili *Peanovoj aritmetici*, teoriji kojoj ćemo pokloniti pažnju u nastavku, ne bismo li ispitali kakvo svetlo nepotpunost baca na probleme kojima ćemo se baviti.

[1]Povlačenje razlike apstraktno/konkretno je daleko od trivijalnog. Za naše svrhe, možemo reći da apstraktni objekti, za razliku od konkretnih, nisu deo prostorno-vremenskog sveta, kao i da su kauzalno inertni. Zainteresovanog čitaoca upućujemo na [Burgess and Rosen, 1997, pp. 13-25], za više detalja o ovoj podeli i njenim savremenim zastupnicima i protivnicima.

[2]Recimo na ovom mestu još i to da Gedelovo platonističko stanovište nije bilo nimalo „u modi" u vreme kada je živeo i radio. Nedostatak odgovarajućeg intelektualnog ambijenta je po Gedelovim rečima jedan od razloga, mada sigurno ne i jedini, što je za života objavio tako malo filozofskih radova.

Peanova aritmetika, PA , je teorija prvog reda sa jednakošću, izražena na jeziku $\mathscr{L}_{PA}$ čiji je skup nelogičkih simbola $\{s, +, \cdot, 0\}$. Nelogičke aksiome ove teorije su:

$(pa1)$: $\forall x(sx \neq 0)$

$(pa2)$: $\forall x, y(sx = sy \rightarrow x = y)$

$(pa3)$: $\forall x(x + 0 = x)$

$(pa4)$: $\forall x, y(x+sy = s(x+y))$

$(pa5)$: $\forall x(x \cdot 0 = 0)$

$(pa6)$: $\forall x, y(x \cdot sy = (x \cdot y) + y)$

$(pa7)$: $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx))) \rightarrow \forall x\varphi(x)$

Peanova aritmetika je, ako je konzistentna, nepotpuna teorija. Postoji rečenica σ jezika PA koja je istinita u standardnom modelu ove teorije $(\omega, s, +, \times, 0)$, a koja nije dokaziva. Ovo je posledica Gedelove *prve teoreme o nepotpunosti.* Gedelova *druga teorema o nepotpunosti* nam kaže da ako je PA konzistentna teorija, onda ona ne dokazuje svoju konzistentnost, $PA \nvdash Con(PA)$. Jedan od načina da saniramo posledice Gedelove druge teoreme jeste da se popnemo za jedan tip više, u *aritmetiku drugog reda* PA^2, u kojoj ćemo biti u mogućnosti da dokažemo $Con(PA)$.

Aritmetika drugog reda je teorija izražena na *višesortnom jeziku prvog reda* $\mathscr{L}_{PA^2}$, čiji je skup nelogičkih simbola $\{\in, s, +, \cdot, 0\}$. Unutar ovog jezika razlikujemo dve vrste promenljivih: *numeričke promenljive*, koje ćemo kao i u slučaju jezika $\mathscr{L}_{PA}$, označavati malim slovima $x, y, z, \ldots$, i *skupovne promenljive*, koje ćemo označavati velikim slovima $X, Y, Z, \ldots$. Skup aksioma teorije PA^2 čine sve aksiome Peanove aritmetike, s tom razlikom što mesto *sheme aksiome indukcije*, $(pa7)$, u slučaju teorije PA^2 imamo sledeću *aksiomu* indukcije:

(pa^27): $\forall X((0 \in X \wedge \forall x(x \in X \rightarrow sx \in X)) \rightarrow \forall x(x \in X))$

kao i sve instance sledeće *sheme aksiome komprehenzije*:

(pa^28): $\exists X \forall x \left(x \in X \leftrightarrow \varphi(x)\right)$

gde je $\varphi(x)$ proizvoljna formula jezika $\mathscr{L}_{PA^2}$ u kojoj se X ne javlja slobodno.

Teorija PA^2 je izuzetno jaka. Ne samo što dokazuje tvrđenja o skupovima prirodnih brojeva koja PA ne može da dokaže, ona takođe dokazuje tvrđenja o prirodnim brojevima koja PA ne dokazuje.[3] Konkretno, kao što smo već napomenuli, PA^2 dokazuje $Con(PA)$. Dokaz poslednje činjenice zasniva se na konstruisanju *istinosnog predikata* $T(x)$ za PA unutar PA^2. Na osnovu teoreme Tarskog, znamo da ne postoji formula $T(x)$ jezika $\mathscr{L}_{PA}$, takva da za svaku rečenicu σ jezika $\mathscr{L}_{PA}$ važi $T(\ulcorner\sigma\urcorner) \leftrightarrow \sigma$, gde je $\ulcorner\sigma\urcorner$ *Gedelov broj* rečenice σ. Međutim, takva formula postoji u jeziku $\mathscr{L}_{PA^2}$. Ovo nam omogućava da, unutar teorije PA^2 , indukcijom po dužini dokaza u PA , dokažemo da su sve teoreme od PA istinite. To nam, naravno, daje $Con(PA)$.

Potrebno je još reći sledeće. Konstrukciju istinosnog predikata unutar PA^2 započinjemo tako što definišemo formulu $t(n, X)$ koja kaže da je X skup prirodnih brojeva koji sadrži sve i samo Gedelove brojeve istinitih rečenica jezika $\mathscr{L}_{PA}$ čija je složenost $\leq n$. Definicija prati induktivnu definiciju formule jezika $\mathscr{L}_{PA}$. Na primer, ako su t_1, t_2 termi, onda

$$\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner \in X \leftrightarrow t_1 = t_2$$

Slično tome, ako je φ složenosti $< n$, onda

$$\ulcorner \forall x \varphi(x) \urcorner \in X \leftrightarrow \forall m \ulcorner \varphi(\bar{m}) \urcorner \in X$$

gde je $\bar{m}$ numeral za prirodan broj m. Skup X naziva se još i *istinosnim skupom*. Posle ovoga, možemo dokazati da se istinosni skupovi slažu po pitanju formula proizvoljnog stepena složenosti, tj.

$$PA^2 \vdash \forall x \forall X \forall Y ((t(x, X) \wedge t(x, Y)) \rightarrow X = Y)$$

kao i da postoje istinosni skupovi za takve formule φ,

$$PA^2 \vdash \forall x \exists X t(x, X)$$

[3] Drugim rečima, PA^2 nije *konzervativno proširenje* teorije PA u odnosu na formule jezika $\mathscr{L}_{PA}$.

Kada smo definisali formulu $t(x,X)$ i dokazali neka njena važna svojstva u PA^2, služeći se njome definišemo istinosni predikat $T(x)$ na sledeći način:

$$T(x) =_{def} \exists y \exists X (t(y,X) \wedge x \in X).$$

Sada možemo dokazati da, za svaku rečenicu σ jezika $\mathscr{L}_{PA}$, $PA^2 \vdash T(\ulcorner\sigma\urcorner) \leftrightarrow \sigma$ kao i sledeći *princip globalne refleksije*:

$$PA^2 \vdash Bew_{PA}(\ulcorner\sigma\urcorner) \rightarrow T(\ulcorner\sigma\urcorner),$$

gde je $Bew_{PA}(x)$ Gedelov *predikat dokazivosti* za Peanovu aritmetiku.

Uzmimo sada rečenicu $0 = 1$ mesto σ u pomenutom principu refleksije. Imamo da

$$PA^2 \vdash Bew_{PA}(\ulcorner 0 = 1\urcorner) \rightarrow T(\ulcorner 0 = 1\urcorner)$$

Međutim, kako PA^2 dokazuje i sve ekvivalencije oblika $T(\ulcorner\sigma\urcorner) \leftrightarrow \sigma$ za rečenice jezika $\mathscr{L}_{PA}$, sledi da

$$PA^2 \vdash T(\ulcorner 0 = 1\urcorner) \leftrightarrow 0 = 1$$

Zajedno sa prethodnim, ovo nam daje

$$PA^2 \vdash Bew_{PA}(\ulcorner 0 = 1\urcorner) \rightarrow 0 = 1$$

Ali, kako imamo da $PA^2 \vdash 0 \neq 1$ sledi da

$$PA^2 \vdash \neg Bew_{PA}(\ulcorner 0 = 1\urcorner),$$

tj.

$$PA^2 \vdash Con(PA)$$

Za više detalja u vezi sa ovom konstrukcijom, zainteresovanog čitaoca upućujemo na [Takeuti, 1987, pp. 185-187].

Međutim, umesto da problem reši, dokaz $Con(PA)$ unutar PA^2 ga samo odlaže za jedan korak. Da bismo videli zašto pogledajmo prvo kako se prelazak sa teorije PA na teoriju PA^2 može iterirati.

U opštem slučaju, jezik aritmetike n-tog reda, $\mathscr{L}_{PA^n}$, za $n \geq 2$ imaće promenljive svake sorte $X^i, Y^i, Z^i, \ldots$, za $2 \leq i \leq n$, pored numeričkih promenljivih. Aksiome teorije PA^n su sve aksiome teorije PA^2, s tom razlikom što je, u shemi aksiome komprehenzije

$$\exists X^i \forall X^{i-1}(X^{i-1} \in X^i \leftrightarrow \varphi(X^{i-1}))$$

formula φ proizvoljna formula jezika $\mathscr{L}_{PA^n}$ u kojoj se X^i ne javlja slobodno, za $2 \leq i \leq n$.

Pod uslovima sličnim onima u slučaju PA, imamo da $PA^2 \nvdash Con(PA^2)$. Tvrđenje $Con(PA^2)$ će biti dokazivo u PA^3, *aritmetici trećeg reda* koja opet, ako je konzistentna, neće dokazivati $Con(PA^3)$ itd. Uopšteno govoreći, pošavši od teorije prirodnih brojeva pratimo niz teorija od kojih svaka rešava problem nedokazivosti konzistentnosti teorija koje joj prethode, ali pitanje dokazivosti sopstvene konzistentnosti ostavlja svojim sledbenicama na rešavanje. Pošto je dokazao svoje teoreme o nepotpunosti, Gedel kaže:

> Postupak koji smo skicirali proizvodi, za svaki sistem koji zadovoljava gorenavedene pretpostavke, aritmetičku rečenicu koja je neodlučiva u tom sistemu. Ova rečenica, međutim, nije nipošto apsolutno neodlučiva; naprotiv, možemo uvek preći na „više" sisteme u kojima pomenuta rečenica postaje odlučiva. (Neke druge rečenice, naravno, ostaju neodlučive i posle toga.) [Gödel, 1931, p. 35]

1.2. Teorija skupova ZFC

Niz aritmetičkih teorija koji smo gore opisali prirodno se može predstaviti unutar teorije ZFC. To je jedna teorija prvog reda sa jednakošću, izražena na jeziku $\mathscr{L}_{ZFC}$ čiji je skup nelogičkih simbola $\{\in\}$. Aksiome teorije ZFC su sledeće:

$(zfc1)$: $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y)$

$(zfc2)$: $\forall x(\exists y y \in x \to \exists y(y \in x \land \neg\exists z(z \in y \land z \in x))$

$(zfc3)$: $\forall x \forall y \exists z(x \in z \land y \in z \land \forall u(u \in z \to (u = x \lor u = y))$

$(zfc4)$: $\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \land z \in u))$

(zfc5): $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall u (u \in z \rightarrow u \in x))$

(zfc6): $\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow \exists z (z \in x \wedge \forall u (u \in z \leftrightarrow (u \in y \vee u = y)))))$

(zfc7): $\forall x_1 ... \forall x_n \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge \varphi)$, gde je φ formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ u kojoj se samo promenljive $x_1, ..., x_n, u$ javljaju slobodno.

(zfc8): $\forall x \forall y \forall z (\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \rightarrow \forall v \exists u \forall y (y \in u \leftrightarrow \exists x (x \in v \wedge \varphi(x, y)))$, gde je φ formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ u kojoj se samo promenljive x i y javljaju slobodno.

(zfc9): $\forall x (\forall y (y \in x \rightarrow y \neq \emptyset) \wedge \forall y \forall z (y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z \rightarrow y \cap z = \emptyset) \rightarrow \exists u \forall y (y \in x \rightarrow \exists v \forall w (w = v \leftrightarrow w \in u \cap y)))$

Kao ni PA, ni ZFC nije konačno aksiomatska teorija, tj. nije moguće zameniti sheme (zfc7) i (zfc8) konačnim brojem njihovih instanci i dobiti teoriju iste snage. Aksioma (zfc1) zove se *aksioma ekstenzionalnosti* i kaže da su skupovi jednaki akko imaju iste elemente. Pošto relaciju *biti podskup*, $x \subseteq y$, možemo da definišemo pomoću $\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$, (zfc1) bismo mogli da zapišemo na sledeći način

$$\forall x \forall y ((x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \leftrightarrow x = y).$$

Aksioma (zfc2) se zove *aksioma regularnosti* (ili *aksioma zasnivanja*) i ona kaže da svaki neprazan skup ima minimalan element u odnosu na relaciju $\in$. Ako mesto $\exists y y \in x$ pišemo $x \neq \emptyset$ a mesto $\neg \exists z (z \in x \wedge z \in y)$ pišemo $x \cap y = \emptyset$, onda možemo aksiomu regularnosti da zapišemo kao

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge x \cap y = \emptyset)).$$

Sledeća aksioma, (zfc3), zove se *aksioma para* i ona nam omogućava da od svaka dva skupa x i y napravimo skup čiji će jedini elementi biti baš ovi skupovi. Taj se skup zove *neuređeni par* skupova x i y i označava se sa $\{x, y\}$. Ako mesto $x \in z \wedge y \in z \wedge \forall u (u \in z \rightarrow (u = x \vee u = y)$ u aksiomi (zfc3) gore pišemo $z = \{x, z\}$, onda aksioma para glasi $\forall x \forall y \exists z z = \{x, y\}$. Ako su x i y isti skupovi, onda mesto $\{x, x\}$ pišemo samo $\{x\}$.

Aksioma (zfc4) zove se *aksioma unije* i ona kaže da za svaki skup x možemo da napravimo skup čiji će elementi biti elementi elemenata skupa x. Taj se skup označava sa $\bigcup x$. Ako mesto $\forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge z \in u))$ pišemo $y = \bigcup x$, onda možemo aksiomu unije da zapišemo kao $\forall x \exists y y = \bigcup x$. Takođe, obično se mesto $\bigcup \{x, y\}$ piše $x \cup y$.

Sledeća je aksioma $(zfc5)$ i ona se zove *aksioma partitivnog skupa*. Ona nam omogućava da za svaki skup x napravimo skup svih njegovih podskupova, njegov *partitivni skup*, koji se označava sa $\mathscr{P}(x)$. Ako mesto $\forall z(z \in y \leftrightarrow \forall u(u \in z \rightarrow u \in x))$ pišemo $y = \mathscr{P}(x)$, onda aksioma partitivnog skupa može da se zapiše kao $\forall x \exists y y = \mathscr{P}(x)$.

Aksioma $(zfc6)$ se zove *aksioma beskonačnosti* i njome se tvrdi da postoji beskonačan skup. Da bi to bilo jasnije, možemo mesto $\exists z(z \in x \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow (u \in y \vee u = y)))$ da pišemo $y \cup \{y\} \in x$. Tada će aksioma beskonačnosti da glasi

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

Dakle, aksioma beskonačnosti kaže da postoji skup čiji je element prazan skup i koji za svaki element y koji sadrži takođe sadrži i skup $y \cup \{y\}$. Skup $y \cup \{y\}$ se ponekad naziva *sledbenikom* skupa y i označava se sa y^+. Skup x čije postojanje tvrdi ova aksioma naziva se još i *induktivnim skupom*, taj skup sadrži $\emptyset$ i zatvoren je za operaciju sledbenika.

Sledeća shema aksioma $(zfc7)$ zove se (*shema*) *aksioma separacije* ili *ograničene komprehenzije*. Ova nam aksioma omogućava da iz nekog unapred datog skupa y izdvojimo sve one elemente u koji zadovoljavaju neki dobro definisan uslov φ i od njih napravimo novi skup. Ako mesto $\forall u(u \in z \leftrightarrow u \in y \wedge \varphi)$ pišemo $z = \{u \in y \mid \varphi\}$, onda aksioma separacije glasi

$$\forall y \exists z z = \{u \in y \mid \varphi\}.$$

Na primer, ako za formulu φ u aksiomi separacije uzmemo $u \neq u$ (što je skraćenica za $\neg u = u$), onda, za proizvoljan skup y, možemo da napravimo skup $\{u \in y \mid u \neq u\}$. Na osnovu aksiome ekstenzionalnosti ovaj je skup jedinstven i mi ga označavamo sa $\emptyset$, to je prazan skup. Slično tome, za svaka dva skupa x i y možemo da napravimo skup $\{u \mid u \in x \wedge u \in y\}$ koji označavamo sa $x \cap y$.

Shema aksioma $(zfc8)$ se zove *aksioma zamene* i ona kaže da ako formula φ definiše jednu parcijalnu funkciju, onda i sve vrednosti te funkcije čine skup, drugim rečima za svaki skup v imamo da postoji skup $\{y \mid \exists x(x \in v \wedge \varphi(x, y))\}$, pod uslovom da je formula φ kao gore.

Poslednja aksioma, $(zfc9)$, zove se *aksioma izbora* i označava se sa AC. Ona kaže da ako nam je dat skup x čiji su elementi neprazni, disjunktni skupovi, onda postoji skup koji ima tačno jedan zajednički element sa svakim skupom iz skupa x.

1.3. Ordinali, kardinali i njihova aritmetika

Jedan veoma važan par pojmova teorije skupova na koji ćemo se oslanjati tokom čitavog rada čine pojmovi *ordinala* i *kardinala*. Pre nego što ove pojmove definišemo, sredstvima teorije ZFC (iako ne u potpunosti formalno), moraćemo da navedemo nekoliko preliminarnih definicija.

DEFINICIJA 1. *Linearno uređeni skup* (ili kraće, *linearno uređenje*) je jedan par $(A, \prec)$ koji čine skup A zajedno sa binarnom relacijom $\prec$ na A za koju važi:

(irefleksivnost): $\neg x \prec x$, za svako x iz A,

(tranzitivnost): $x \prec y$ i $y \prec z$ povlači $x \prec z$, za svako x, y i z iz A,

(linearnost): $x \prec y$ ili $x = y$ ili $y \prec x$, za svako x i y iz A.

Služeći se ovom striktnom relacijom $\prec$, možemo da definišemo binarnu relaciju $\preceq$ na skupu A na sledeći način: $a \preceq b$ akko $a \prec b$ ili $a = b$. Za ovu će relaciju da važe sledeća svojstva:

(refleksivnost): $x \preceq x$, za svako x iz A,

(antisimetričnost): $x \preceq y$ i $y \preceq x$ povlači $x = y$, za svako x i y iz A.

(tranzitivnost): $x \preceq y$ i $y \preceq z$ povlači $x \preceq z$, za svako x, y i z iz A,

(linearnost): $x \preceq y$ ili $y \preceq x$, za svako x i y iz A.

Za linearno uređenje $(A, \prec)$ kažemo da je *dobro uređenje*, ako svaki neprazan podskup skupa A ima najmanji element u odnosu na relaciju $\prec$, tj. ako je $X \subseteq A$ i $X \neq \emptyset$, onda postoji x iz X, takvo da za svako y iz X važi $\neg y \prec x$.

U opštem slučaju, ako je $R \subseteq A \times A$ relacija koja zadovoljava osobinu iz prethodnog pasusa, onda kažemo da je R *dobro zasnovana* relacija na A. Ako je R binarna relacija i x je skup, onda ćemo sa $ext_R(x)$ da označavamo skup $\{y \mid yRx\}$. Ovaj se skup zove još i *ekstenzija od x u odnosu na R*. Služeći se ovom notacijom, možemo da kažemo da je relacija R dobro zasnovana na skupu A na sledeći način: za svaki neprazan podskup $X \subseteq A$, postoji neko $x \in X$, takvo da je $X \cap ext_R(x) = \emptyset$. U nastavku ćemo da govorimo i o dobro zasnovanim relacijama R na klasama C koje ne moraju nužno da budu skupovi. U svakom takvom slučaju ćemo da podrazumevamo da dobro zasnovana relacija R na C ima sledeću osobinu: za svako x iz C, klasa $ext_R(x)$ je skup. Relacije na klasama koje imaju ovo svojstvo se obično nazivaju *skupovnim* relacijama.

Jedna ekvivalentna formulacija aksiome izbora kaže da se svaki skup može dobro urediti. Ako posmatramo uobičajena uređenja na skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$, onda je samo uređenje na skupu $\mathbb{N}$ dobro uređenje.

DEFINICIJA 2. Skup X je *tranzitivan* akko $\forall x \in X \forall y \in x (y \in X)$. Drugim rečima, za svako $x \in X$ važi da je $x \subseteq X$.

Na primer, skup $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ je tranzitivan, ali skup $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ nije. Ako je X skup, onda za svako $n < \omega$ možemo da definišemo skup $\bigcup^n X$ na sledeći način:

$$\bigcup^0 X = X,$$

$$\bigcup^{n+1} X = \bigcup (\bigcup^n X).$$

Tranzitivnim zatvorenjem skupa X, $TC(X)$, zvaćemo najmanji tranzitivan skup koji sadrži X, tj. $TC(X) = \bigcup \{\bigcup^n X \mid n < \omega\}$. Dakle, skup X je tranzitivan akko je $TC(X) = X$.

DEFINICIJA 3. *Ordinal* α je tranzitivan skup koji je dobro uređen relacijom $\in$, tj. $(\alpha, \in \restriction (\alpha \times \alpha))$ je dobro uređenje.

Ordinale ćemo najčešće da označavamo početnim slovima grčkog alfabeta: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Klasu svih ordinala ćemo označavati sa Ord. Može da se pokaže da klasa Ord zajedno sa relacijom $\in$ zadovoljava sve osobine linearnog uređenja, tj.

$$\forall \alpha \in Ord (\alpha \notin \alpha),$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in Ord((\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma) \rightarrow \alpha \in \gamma),$$

$$\forall \alpha, \beta \in Ord(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha).$$

Takođe će da važi da, ako je $X \subseteq Ord$ neprazan skup ordinala, onda postoji $\alpha \in X$ koji je minimalan u odnosu na relaciju $\in$. Drugim rečima, klasa Ord je dobro uređena relacijom $\in$. Može da se pokaže da ako je $(X, \prec)$ dobro uređenje, onda postoji jedinstveni ordinal koji je ovom uređenju izomorfan.

Često ćemo da, kada govorimo o ordinalima, pišemo $\alpha < \beta$ mesto $\alpha \in \beta$. Svaki ordinal α je skup ordinala koji su manji od njega $\alpha = \{\beta \in Ord \mid \beta < \alpha\}$. Evo nekoliko primera ordinala: najmanji ordinal je $\emptyset$, koji označavamo i sa 0, sledeći veći ordinal je $\{\emptyset\} = \{0\}$ koji označavamo sa 1, sledeći veći ordinal je $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$ koji označavamo sa 2 itd. Posle svih ovih, konačnih, ordinala dolazi prvi beskonačni ordinal $\{0, 1, 2, \ldots\}$ koji označavamo sa ω. Sledeći veći ordinal je $\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ koji označavamo sa $\omega + 1$ itd. Svi ovi ordinali su *prebrojivi*, gde za ordinal α kažemo da je prebrojiv akko je α prebrojiv kao skup, tj. postoji injekcija $f : \alpha \rightarrow \mathbb{N}$. Ima i većih prebrojivih ordinala od ovih, recimo $\omega + \omega = \{0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$ je jedan prebrojivi ordinal. Najmanji neprebrojiv ordinal je ω_1, i to je skup svih prebrojivih ordinala.

DEFINICIJA 4. Ordinal α je *ordinal sledbenik* ako skup $\{\beta \mid \beta < \alpha\}$ ima najveći element. Inače kažemo da je α *granični ordinal.*

Za proizvoljan ordinal α, neka je $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$. Ako $\beta \in S(\alpha)$, onda ili $\beta \in \alpha$ ili $\beta = \alpha$, pa je $S(\alpha)$ najmanji ordinal veći od α. Mesto $S(\alpha)$ obično se piše $\alpha + 1$, kao što smo to učinili gore. Dakle, ordinal je sledbenik ako je oblika $\alpha + 1$ za neki ordinal α. Svi konačni ordinali osim nule su ordinali sledbenici, a to su i ordinali $\omega + 1$ i $\omega + 17$, primera radi. Ordinali ω, $\omega + \omega$ itd. su granični ordinali.

Ako je X skup čiji su elementi ordinali, sa $\bigcup X$ ćemo da označavamo uniju skupa X. Za ovaj će skup da važi da $x \in \bigcup X$ akko postoji neko α iz X takvo da $x \in \alpha$. Jednostavno je da se pokaže da je skup $\bigcup X$ takođe ordinal. Ponekad ćemo da pišemo $sup(X)$ mesto $\bigcup X$ da bismo istakli činjenicu da je $\bigcup X$ *supremum* skupa X, tj. najmanji ordinal koji je $\geq \alpha$, za svako α iz X.

Kao što notacija gore sugeriše, na ordinalima mogu da se transfinitnom rekurzijom definišu aritmetičke operacije sabiranja, množenja i stepenovanja koje uopštavaju one koje imamo na prirodnim brojevima:

DEFINICIJA 5. *Sabiranje ordinala*:

$$\alpha + 0 = \alpha,$$
$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1,$$
$$\alpha + \gamma = \bigcup_{\delta<\gamma}(\alpha + \delta), \text{ gde je } \gamma \text{ granični ordinal.}$$

Množenje ordinala:

$$\alpha \otimes 0 = 0,$$
$$\alpha \otimes (\beta + 1) = (\alpha \otimes \beta) + \alpha,$$
$$\alpha \otimes \gamma = \bigcup_{\delta<\gamma}(\alpha \otimes \delta), \text{ gde je } \gamma \text{ granični ordinal.}$$

Stepenovanje ordinala:

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{(\beta+1)} = \alpha^\beta \otimes \alpha,$$
$$\alpha^\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^\delta, \text{ gde je } \gamma \text{ granični ordinal.}$$

Sabiranje, kao i množenje ordinala su asocijativne operacije. Međutim, ni sabiranje niti množenje ordinala nisu komutativne operacije. Na primer, $1+\omega = \omega \neq \omega+1$ i $2\otimes\omega = \omega \neq \omega \otimes 2$. Distributivnost sleva $\alpha \otimes (\beta + \gamma) = \alpha \otimes \beta + \alpha \otimes \gamma$ važi za ordinale, ali ne i distributivnost zdesna $(\beta + \gamma) \otimes \alpha \neq \beta \otimes \alpha + \gamma \otimes \alpha$. Recimo, $(1 + 1) \otimes \omega = 2 \otimes \omega = \omega \neq 1 \otimes \omega + 1 \otimes \omega = \omega + \omega = \omega \otimes 2$.

Ako su X i Y skupovi takvi da postoji injekcija $f : X \to Y$, onda to zapisujemo kao $X \preccurlyeq Y$. Ako između ovih skupova postoji bijekcija, onda ćemo to da označimo sa $X \sim Y$. Sledeće tvrđenje, takozvana *Kantor-Šreder-Bernštajnova teorema*, će nam biti neophodno u nastavku ovog rada:

TEOREMA 6. *Ako $X \preccurlyeq Y$ i $Y \preccurlyeq X$, onda $X \sim Y$.*

DOKAZ. Neka su $f : X \to Y$ i $g : Y \to X$ injekcije. Indukcijom ćemo da definišemo skupove X_n i Y_n. Neka je $X_0 = X$ i $Y_0 = Y$, a za $n \geq 1$ $X_n = g[Y_{n-1}]$ i $Y_n = f[X_{n-1}]$, gde je $g[Y_{n-1}] = \{x \in X \mid \exists y \in Y_{n-1} g(y) = x\}$. Imamo dakle da je $X_0 = X$, $X_1 = g[Y]$, $X_2 = g \circ f[X]$, $X_3 = g \circ f \circ g[Y]$ itd., kao i $Y_0 = Y$, $Y_1 = f[X]$, $Y_2 = f \circ g[Y]$, $Y_3 = f \circ g \circ f[X]$ itd. Možemo da primetimo da je $X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ kao i $Y = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$. Neka je $X^* = \bigcap_{n<\omega} X_n$ i $Y^* = \bigcap_{n<\omega} Y_n$. Definišimo funkciju $h : X \to Y$ na sledeći način:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ako } x \in X_n \setminus X_{n+1} \text{ i } n \text{ je paran,} \\ g^{-1}(x) & \text{ako } x \in X_n \setminus X_{n+1} \text{ i } n \text{ je neparan,} \\ f(x) & \text{ako } x \in X^*. \end{cases}$$

Pošto je f bijekcija između skupova $X_n \setminus X_{n+1}$ i $Y_{n+1} \setminus Y_{n+2}$, a g^{-1} bijekcija između skupova $X_{n+1} \setminus X_{n+2}$ i $Y_n \setminus Y_{n+1}$, nije teško da se vidi da je h bijekcija između skupova $X_n \setminus X_{n+2} = (X_n \setminus X_{n+1}) \cup (X_{n+1} \setminus X_{n+2})$ i $Y_n \setminus Y_{n+2} = (Y_n \setminus Y_{n+1}) \cup (Y_{n+1} \setminus Y_{n+2})$, za svaki paran broj n. Dakle, funkcija h je bijekcija između skupova $X \setminus X^*$ i $Y \setminus Y^*$. Takođe, funkcija f nam daje bijekciju između skupova X^* i Y^*, pa je funkcija h bijekcija između skupova X i Y. □

Sada možemo da damo definiciju kardinala:

DEFINICIJA 7. Ordinal κ je *kardinal* akko za svako $\alpha < \kappa$ važi $\alpha \nsim \kappa$, tj. $\neg \alpha \sim \kappa$.

Kardinale ćemo najčešće da označavamo slovima κ, λ, μ.... Ako je α ordinal, onda ćemo sa $|\alpha|$ da označavamo najmanji ordinal β za koji važi $\alpha \sim \beta$. Jasno je da je $|\alpha| \leq \alpha$ kao i da je $|\alpha|$ kardinal. U opštem slučaju, ako je X proizvoljan skup, onda ćemo sa $|X|$ da označavamo najmanji ordinal α takav da važi $\alpha \sim X$ i ovaj ćemo ordinal da zovemo *kardinalnošću* skupa X. Da je ovaj pojam dobro definisan možemo lako da vidimo. Na osnovu AC skup X se može dobro urediti. Neka je $<$ relacija dobrog uređenja na skupu X. Tada je $(X, <)$ izomorfan jedinstvenom ordinalu. Dakle, svaki skup X se može dovesti u bijekciju sa ordinalom. Najmanji takav ordinal, $|X|$, je očigledno kardinal. Jasno je da ako su X i Y proizvoljni skupovi, onda je $|X| = |Y|$ akko $X \sim Y$. Ako su X i Y skupovi, takvi da važi $X \subseteq Y$, onda je $|X| \leq |Y|$.

DEFINICIJA 8. Skup X je *konačan* akko $|X| < \omega$, a kažemo da je X *prebrojiv* akko $|X| \leq \omega$. Za skup kažemo da je *neprebrojiv* akko nije prebrojiv.

Sledeća Kantorova teorema je, iako veoma jednostavna, važna za razumevanje pojma kardinalnosti. Njen dokaz predstavlja možda najjednostavniju primenu takozvanog dijagonalnog argumenta:

TEOREMA 9. *Za svaki skup X važi da je* $|X| < |\mathscr{P}(X)|$.

DOKAZ. Treba da pokažemo da postoji injekcija $f : X \to \mathscr{P}(X)$, ali i da ne postoji bijekcija između ova dva skupa. Funkcija f za koju važi da je $f(x) = \{x\}$, za svako x iz X je očigledno injekcija. Pretpostavimo sada da postoji bijekcija $g : X \to \mathscr{P}(X)$. Neka je $A = \left\{x \in X \mid x \notin g(x)\right\}$. Pošto je funkcija g surjekcija, uzmimo y iz X takvo da važi $g(y) = A$. Međutim, tada imamo da $y \in A$ akko $y \notin A$, što je nemoguće. □

Pošto na osnovu prethodne teoreme za svaki kardinal α možemo da nađemo veći kardinal $|\mathscr{P}(\alpha)|$, u nastavku ćemo sa α^+ da označavamo najmanji takav. Drugim rečima, α^+ je najmanji kardinal veći od α. Kardinale koji su oblika κ^+ zovemo *kardinalima sledbenicima.*

Svi prirodni brojevi su kardinali, kao i prvi beskonačni ordinal ω. S druge strane, ordinali $\omega+1$, $\omega+\omega$ i $\omega+\omega+12$ nisu kardinali.

LEMA 10. *Svaki beskonačan kardinal je granični ordinal.*

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, neka je κ beskonačni kardinal takav da važi $\kappa = \alpha+1$. Definišimo funkciju $f : \alpha \to \kappa$ na sledeći način: $f(0) = \alpha$, $f(n+1) = n$, za svako $n < \omega$, i $f(\beta) = \beta$, za svako $\beta \in \alpha \setminus \omega$. Tada je funkcija f bijekcija između κ i α, što je nemoguće. □

Ako su α i β ordinali, sa ${}^{\alpha}\beta$ ćemo da označavamo skup svih funkcija iz α u β. I na kardinalima možemo da definišemo aritmetičke operacije, kao što smo to gore uradili sa ordinalima. Treba međutim voditi računa o tome da se ovde radi o različitim operacijama.

DEFINICIJA 11. Ako su κ i λ kardinali, onda:

$$\kappa+\lambda = |(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\})|,$$

$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|,$

$\kappa^\lambda = \left|{}^\lambda\kappa\right|.$

Za razliku od sabiranja i množenja ordinala, kardinalno sabiranje i množenje su komutativne operacije, što može lako da se vidi. Takođe, zakon distributivnosti množenja nad sabiranjem važi u slučaju kardinalne aritmetike. Iako smo sabiranje i stepenovanje ordinala i kardinala označili istim simbolima, ovde se radi o različitim operacija, kao što smo upravo napomenuli. U nastavku ćemo uvek da kažemo koju od ovih dvaju operacija primenjujemo, ako to ne bude jasno iz konteksta.

LEMA 12. *Za svaki beskonačni kardinal* κ *važi* $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno. Neka je κ najmanji beskonačni kardinal za koji važi $\kappa \cdot \kappa \neq \kappa$. Pošto je $\kappa = \kappa \cdot 1 \leq \kappa \cdot \kappa$, sledi da je $\kappa < \kappa \cdot \kappa$. Definišimo relaciju $\prec$ na $\kappa \times \kappa$ na sledeći način: za svako $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \kappa$, neka je

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) \prec (\gamma,\delta) \text{ akko } & max(\alpha,\beta) < max(\gamma,\delta)\\ & \text{ili } max(\alpha,\beta) = max(\gamma,\delta) \text{ i } \alpha < \gamma\\ & \text{ili } max(\alpha,\beta) = max(\gamma,\delta) \text{ i } \alpha = \gamma \text{ i } \beta < \delta.\end{aligned}$$

Dakle, parove uređujemo po maksimumima, a onda leksikografski. Ova je relacija dobro uređenje na skupu $\kappa \times \kappa$, što nije teško da se proveri. Linearnost je jasna na osnovu same definicije, a pošto nijedna od tri veličine iz definicije relacije $\prec$ ne može beskonačno da opada, ova relacija je i dobro uređenje na $\kappa \times \kappa$. Sledi da postoji izomorfizam $f : (\kappa \times \kappa, \prec) \to (\alpha, \in)$, gde je α ordinal. Na osnovu ovoga imamo da je $|\alpha| = |\kappa \times \kappa| = \kappa \cdot \kappa > \kappa$, kako smo napomenuli na početku. Imamo, dakle, da je $\kappa < \alpha$ pa postoje β i γ iz κ takvi da važi $f(\beta,\gamma) = \kappa$. Međutim, imamo da je

$$f\left[\left\{(\zeta,\eta) \in \kappa \times \kappa \mid (\zeta,\eta) \prec (\beta,\gamma)\right\}\right] = \kappa.$$

Ako je $\theta = max(\beta,\gamma) + 1$, onda je

$$\kappa = \left|\left\{(\zeta,\eta) \in \kappa \times \kappa \mid (\zeta,\eta) \prec (\beta,\gamma)\right\}\right| \leq |\theta \times \theta| = |\theta| \cdot |\theta|.$$

Ali imamo da je $\theta < \kappa$. Ordinal θ je ili konačan ili beskonačan. Ako je θ konačan, onda je $|\theta| \cdot |\theta|$ takođe konačan. S druge strane, ako je θ beskonačan, onda je $|\theta| \cdot |\theta| = |\theta|$ na osnovu minimalnosti od κ. U oba ova slučaja imamo $|\theta| \cdot |\theta| < \kappa$, što je nemoguće. □

Jedna važna posledica ovog tvrđenja je i potpuna karakterizacija sabiranja i množenja beskonačnih kardinala. Naime, ako su $\kappa, \lambda > 0$ kardinali od kojih je bar jedan beskonačan, onda je $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = max\{\kappa, \lambda\}$.

Još jedna važna posledica prethodne teoreme koja će nam poslužiti u nastavku jeste sledeća:

LEMA 13. *Ako je κ beskonačan kardinal i $X = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_\alpha$, gde je $|X_\alpha| \leq \kappa$, za svako $\alpha < \kappa$, onda važi $|X| \leq \kappa$.*

DOKAZ. Za svako $\alpha < \kappa$, neka je funkcija $f_\alpha : \kappa \to X_\alpha$ bijekcija. Takva funkcija postoji na osnovu AC. Neka je funkcija $g : \kappa \times \kappa \to X$ definisana na sledeći način: $g(\alpha, \beta) = f_\alpha(\beta)$. Ova je funkcija surjekcija pa tvrđenje sledi na osnovu prethodne teoreme. □

Gore smo pokazali da za svaki skup X imamo da važi $|X| < |\mathscr{P}(X)|$. Sada možemo nešto više da kažemo o kardinalnosti skupa $\mathscr{P}(X)$:

LEMA 14. *Za svaki skup X imamo da važi $|\mathscr{P}(X)| = 2^{|X|}$.*

DOKAZ. Za svako $A \subseteq X$ možemo da definišemo funkciju χ_A iz skupa ${}^A2$ na sledeći način: $\chi_A(x) = 1$ ako $x \in A$, inače $\chi_A(x) = 0$. Nije teško da se proveri da je funkcija χ bijekcija između skupova $\mathscr{P}(X)$ i ${}^X2$. □

Kantorova TEOREMA 8 nam dakle kaže da ne postoji najveći kardinal: pošavši od proizvoljnog kardinala κ, možemo da napravimo niz sve većih kardinala $\kappa < 2^\kappa < 2^{2^\kappa} < 2^{2^{2^\kappa}} < \dots$.

Za razliku od sabiranja i množenja, stepenovanje kardinala je složenije za izračunavanje. Ono međutim ima i neka prirodna svojstva kao što su sledeća:

LEMA 15. *Ako su κ, λ i μ kardinali, onda važi $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$ kao i $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.*

DOKAZ. Ne gubeći opštost možemo da posmatramo skupove A, B i C za koje važi: $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $|C| = \mu$ kao i $B \cap C = \emptyset$. Funkcija $F : A^{B\cup C} \to A^B \times A^C$ koja svakoj funkciji h iz $A^{B\cup C}$ dodeljuje uređeni par funkcija (f, g), gde je $f = h \restriction B$ i $g = h \restriction C$ (ovo su restrikcije funkcije h na skupove B i C, redom), je jedna bijekcija, pa prva jednakost odavde neposredno sledi. S druge strane, funkcija $F : A^{B\times C} \to (A^B)^C$ koja svakoj funkciji h iz $A^{B\times C}$ dodeljuje jednu funkciju f iz $(A^B)^C$ za koju važi $(f(c))(b) = h(b,c)$, gde je $b \in B$ i $c \in C$, takođe je jedna bijekcija, pa imamo da važi i druga jednakost. □

Operacija stepenovanja je takođe i monotona u oba argumenta: ako je $1 \leq \mu$ i $\kappa \leq \lambda$, onda važi $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$; takođe, ako je $\kappa \leq \lambda$, onda je $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$.

Imamo i sledeći važan rezultat koji se tiče stepenovanja kardinala:

LEMA 16. *Ako su κ i λ kardinali takvi da važi $2 \leq \kappa \leq \lambda$ i $\lambda \geq \omega$, onda $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.*

DOKAZ. Pošto važi $\kappa^\lambda \geq 2^\lambda$, treba samo da primetimo da je $\kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\cdot\lambda} = 2^\lambda$. □

Već smo napomenuli da, ako je X skup ordinala, onda je i $\bigcup X$ ordinal. Ovo važi i za kardinale:

LEMA 17. *Ako je X skup kardinala, onda je i $\bigcup X$ kardinal.*

DOKAZ. Pošto je $\bigcup X$ ordinala, pretpostavimo da je $\kappa = |\bigcup X| < \bigcup X$. Odavde sledi da postoji neko λ iz X takvo da je $\kappa < \lambda$. Međutim, pošto je $\lambda \subseteq \bigcup X$, sledi da je $\lambda = |\lambda| \leq |\bigcup X| = \kappa$, što je nemoguće. □

Sada možemo da definišemo transfinitni niz beskonačnih kardinala na sledeći način:

DEFINICIJA 18. *Alefi*:

$\aleph_0 = \omega$,

$\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$,

$\aleph_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \aleph_\delta$, gde je γ granični ordinal.

U zavisnosti od konteksta, nekada ćemo mesto $\aleph_\alpha$ da pišemo ω_α. Nije teško pokazati da ako važi $\alpha < \beta$, onda je i $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ kao i da važi $\alpha \le \aleph_\alpha$, za svaki ordinal α. Kardinale κ koji su oblika $\aleph_\gamma$, gde je γ granični ordinal, zovemo *graničnim kardinalima*. Dakle, kardinal κ je granični kardinal ako za svako $\lambda < \kappa$ važi da je $\lambda^+ < \kappa$.

TEOREMA 19. *Ako je κ beskonačni kardinal, onda postoji ordinal α takav da važi $\kappa = \aleph_\alpha$.*

DOKAZ. Ako je κ beskonačni kardinal, onda je $\kappa \le \aleph_\kappa < \aleph_{\kappa+1}$, gde je $\kappa + 1$ ordinalno sabiranje. Dakle, postoji ordinal α takav da važi $\kappa < \aleph_\alpha$. Neka je α najmanji takav ordinal. Imamo da je $\alpha > 0$ i α nije granični ordinal. Neka je $\alpha = \beta + 1$. Tada ćemo imati da važi $\aleph_\beta \le \kappa < \aleph_{\beta+1}$, pa je $\kappa = \aleph_\beta$. □

Slično definiciji alefa gore, možemo da definišemo sledeći transfinitni niz beskonačnih kardinala:

DEFINICIJA 20. *Beti*:

$\beth_0 = \aleph_0$,

$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$,

$\beth_\gamma = \bigcup_{\delta<\gamma} \beth_\delta$, gde je γ granični ordinal.

Nije teško videti da važi $\aleph_\alpha \le \beth_\alpha$, za svaki ordinal α. Nešto više o odnosu ovih kardinala ćemo da kažemo u nastavku. Kardinale koji su oblika $\beth_\gamma$, gde je γ granični ordinal, zovemo *jako graničnim kardinalima*. Kardinal κ je jako granični ako za svako $\lambda < \kappa$ važi da je $2^\lambda < \kappa$.

Da bismo nešto više mogli da kažemo o kardinalnoj aritmetici, moraćemo prvo da definišemo pojam *kofinalnosti*.

DEFINICIJA 21. Ako je α ordinal, onda za funkciju $f : A \to \alpha$ kažemo da je *kofinalna* u α akko za svako $\beta < \alpha$ postoji neko $x \in A$ takvo da je $f(x) \ge \beta$. *Kofinalnost* od α, koju označavamo sa $cf(\alpha)$, je najmanji ordinal $\gamma \le \alpha$ takav da postoji kofinalna funkcija $f : \gamma \to \alpha$. Ako je $cf(\alpha) = \alpha$ i α je granični ordinal, onda kažemo da je α *regularan*, inače kažemo da je α *singularan*.

Sada ćemo da damo nekoliko primera koji bi trebalo da ilustruju prethodnu definiciju. Prvo, možemo da primetimo da je $cf(\alpha)$ definisana za svaki ordinal α, jer je identička funkcija na α kofinalna u α. Ako je α ordinal sledbenik, tj. ako je oblika $\beta+1$, onda pojam kofinalnosti nije posebno zanimljiv jer imamo da za svako takvo α važi da je $cf(\alpha)=1$. To je zato što je za svaki takav ordinal funkcija $f:1\to\beta+1$ za koju važi $f(0)=\beta$ kofinalna u $\beta+1$.

Za svaki ordinal α postoji strogo rastuća, kofinalna funkcija $f: cf(\alpha)\to\alpha$, koja može da se definiše transfinitnom indukcijom po ordinalima $\beta<cf(\alpha)$ na sledeći način: ako je $g: cf(\alpha)\to\alpha$ kofinalna u α, onda

$$f(\beta)=max\left\{g(\beta),\bigcup_{\gamma<\beta}(f(\gamma)+1)\right\}$$

Pošto je $f(\gamma)<f(\gamma+1)\le f(\beta)$, za svako $\gamma<\beta<cf(\alpha)$, f je strogo rastuća funkcija. I kofinalnost ove funkcije u α je takođe jednostavno proveriti.

Služeći se ovom poslednjom činjenicom možemo da pokažemo da je $cf(cf(\alpha))=cf(\alpha)$, za svaki ordinal α: neka su $f: cf(cf(\alpha))\to cf(\alpha)$ i $g: cf(\alpha))\to\alpha$ dve strogo rastuće i kofinalne funkcije. Nije teško proveriti da je i njihova kompozicija $g\circ f: cf(cf(\alpha))\to\alpha$ takođe kofinalna u α, što će za posledicu da ima $cf(cf(\alpha))=cf(\alpha)$.

LEMA 22. *Svaki regularan ordinal je kardinal.*

DOKAZ. Uzmimo proizvoljan regularan ordinal α i neka je $\beta=|cf(\alpha)|$. Posmatrajmo bijekciju $f:\beta\to cf(\alpha)$ i kofinalnu funkciju $g: cf(\alpha)\to\alpha$. Funkcija $g\circ f:\beta\to\alpha$ je takođe kofinalna, pošto je $g\circ f[\beta]=g[f[\beta]]=g[cf(\alpha)]$. Na osnovu minimalnosti od $cf(\alpha)$ sledi da je $cf(\alpha)\le\beta=|cf(\alpha)|$. □

Evo nekoliko primera regularnih kardinala: $\aleph_0$ je regularan kardinal, pošto je unija konačno mnogo konačnih skupova uvek konačan skup. Takođe, i najmanji neprebrojivi kardinal $\aleph_1$ je regularan[4], kao i svi kardinali $\aleph_n$, za $n<\omega$. Jedna važna osobina

[4]Ovo tvrđenje ne može da se dokaže u ZF, pod pretpostavkom da je ova teorija konzistentna. Postoje modeli teorije $ZF+\neg AC$ u kojima je $\aleph_1$ singularan kardinal, kao i modeli u kojima su svi granični ordinali prebrojive kofinalnosti pa u njima ne postoje regularni neprebrojivi kardinali [Gitik, 1980].

regularnih kardinala κ jeste da oni ne mogu da se izraze kao suma manje od κ kardinala, od kojih je svaki manji od κ. Drugim rečima, κ je regularan kardinal akko za svaku familiju $\{\lambda_i \mid i \in I\}$ kardinala manjih od κ, gde je $|I| < \kappa$, važi da je $\sum_{i\in I} \lambda_i < \kappa$, gde je $\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})|$.

Ove prethodne napomene sugerišu sledeću, alternativnu karakterizaciju kofinalnosti od κ, u slučaju kada je κ beskonačni kardinal: $cf(\kappa)$ je najmanji kardinal λ takav da se κ može izraziti kao $\kappa = \sum_{i\in I} \kappa_i$, gde je $|I| = \lambda$, i $\kappa_i < \kappa$ za svako $i \in I$.

Sledeće tvrđenje nam daje (delimičnu) karakterizaciju regularnih kardinala:

LEMA 23. *Za svaki beskonačan kardinal κ, kardinal κ^+ regularan.*

DOKAZ. Ako je funkcija $f : \alpha \to \kappa^+$ kofinalna za $\alpha < \kappa^+$, onda je $\kappa^+ = \bigcup\{f(\beta) \mid \beta < \alpha\}$. Međutim, za svako $\beta < \alpha$ imamo da je $|f(\beta)| < \kappa^+$ kao i $|\alpha| < \kappa^+$, pa će κ^+ biti unija najviše $\kappa-$mnogo skupova kardinalnosti $\leq \kappa$. Ovo ne može da bude slučaj, jer na osnovu LEME 12 znamo da je kardinalnost svake takve unije $\leq \kappa$. □

Pošto su svi kardinali sledbenici regularni, možemo da postavimo pitanje šta je sa graničnim kardinalima? Prvi beskonačan granični kardinal, $\aleph_\omega$ je singularan, pošto je $cf(\aleph_\omega) = \omega$. Ovo je lako videti, pošto je funkcija $f : \omega \to \aleph_\omega$ za koju važi $f(n) = \aleph_n$, za svako $n < \omega$, kofinalna u $\aleph_\omega$ i ω je najmanji ordinal za koji takva funkcija postoji. Slično tome, kardinali $\aleph_{\omega+\omega}$, $\aleph_{\omega^\omega}$ i $\aleph_{\omega^\omega+\omega}$ su takođe singularni, kofinalnosti ω. Za svaki granični ordinal α važi da je $cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha)$.

1.4. Normalne funkcije, CLUB i stacionarni skupovi

U ovom odeljku ćemo se baviti posebnim funkcijama na ordinalima koje definišemo na sledeći način:

DEFINICIJA 24. Za funkciju $f : Ord \to Ord$ kažemo da je *normalna* akko je:

(monotona): $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$, za svako α i β iz Ord;

(neprekidna): $f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)$, za svaki granični ordinal α iz Ord.

Ovde, kao i u nastavku, kada u teoriji ZFC referiramo na klasne funkcije kao što je $f : Ord \to Ord$, gde je Ord klasa svih ordinala, podrazumeva se da u stvari referiramo na odgovarajuće formule jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ koje ih definišu. U nastavku ćemo takođe da govorimo o normalnim funkcijama čiji će domen da bude neki ordinal α.

LEMA 25. *Za svaku normalnu funkciju $f : Ord \to Ord$ i svaki ordinal α imamo da važi $\alpha \leq f(\alpha)$.*

DOKAZ. Ovo je posledica svojstva monotonosti gore. Pošto važi $f(0) \geq 0$, pretpostavimo da je $f(\alpha) \geq \alpha$. Tada će da važi $\alpha \leq f(\alpha) < f(\alpha+1)$, pa je $\alpha+1 \leq f(\alpha+1)$. Ako je α granični ordinal, pretpostavimo da je $\beta \leq f(\beta)$, za svako $\beta < \alpha$. Onda, pošto je $f(\beta) < f(\alpha)$, za svako $\beta < \alpha$, sledi da je $\beta \leq f(\beta) < f(\alpha)$, pa je $f(\alpha) \geq \bigcup_{\beta<\alpha} \beta = \alpha$. $\square$

Uslov monotonosti u definiciji normalne funkcije smo mogli da zamenimo sledećim uslovom:

LEMA 26. *Ako je $f : Ord \to Ord$ neprekidna funkcija, takva da za svaki ordinal α važi $f(\alpha) < f(\alpha+1)$, onda je f normalna funkcija.*

DOKAZ. Da neprekidna funkcija koja zadovoljava ovaj uslov takođe zadovoljava i uslov monotonosti $\forall \alpha, \beta(\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta))$, nije teško da se proveri. Fiksirajmo ordinal α i neka je $\beta > \alpha$ najmanji ordinal za koji važi $f(\beta) \leq f(\alpha)$. Ako je β oblika $\gamma+1$, onda je $\alpha \leq \gamma$. U slučaju da je $\alpha = \gamma$, imamo da važi $f(\alpha) < f(\alpha+1) = f(\beta)$, što protivreči našoj početnoj pretpostavci. Ako je $\alpha < \gamma$, imamo da je $f(\alpha) < f(\gamma)$, na osnovu minimalnosti od β. Međutim, na osnovu početne pretpostavke imamo da važi $f(\gamma) < f(\gamma+1) = f(\beta)$, pa sledi da je $f(\alpha) < f(\beta)$, što je nemoguće. Ako je β granični ordinal, onda postoji ordinal γ, takav da važi $\alpha < \gamma < \beta$ i, na osnovu minimalnosti od β, $f(\alpha) < f(\gamma) \leq \bigcup_{\delta<\beta} f(\beta)$, što je nemoguće. $\square$

Sada ćemo da navedemo nekoliko primera normalnih funkcija na ordinalima. Funkcija sabiranja ordinala koja drži levi sabirak fiksiranim je normalna funkcija, tj. za svaki ordinal α, funkcija $\beta \mapsto (\alpha+\beta)$ je normalna. Na osnovu definicije sabiranja ordinala znamo da je ova funkcija neprekidna. Treba samo da proverimo da važi $f(\beta) < f(\beta+1)$, na osnovu LEME 26. Međutim, pošto je sabiranje ordinala asocijativno, imamo da je

$\alpha+(\beta+1) = (\alpha+\beta)+1 > \alpha+\beta$. Na sličan način može da se proveri da su, za svaki ordinal α, funkcije $\beta \mapsto (\alpha \otimes \beta)$ i $\beta \mapsto \alpha^\beta$ normalne.

LEMA 27. *Ako je $f : Ord \to Ord$ normalna funkcija i α je granični ordinal, onda je i $f(\alpha)$ takođe granični ordinal.*

DOKAZ. Pokazaćemo da skup $\{\beta \mid \beta < f(\alpha)\}$ nema najveći element. Pretpostavimo da $\beta < f(\alpha) = \bigcup_{\gamma<\alpha} f(\gamma)$. Postoji dakle neki ordinal $\gamma < \alpha$ takav da važi $\beta < f(\gamma)$. Pošto je $\gamma < \alpha$, sledi da je $f(\gamma) < f(\alpha)$. Dakle, za proizvoljno $\beta < f(\alpha)$, postoji neko $\delta < f(\alpha)$ takvo da je $\beta < \delta$, pa sledi da je $f(\alpha)$ granični ordinal. □

Klasa normalnih funkcija je zatvorena za kompoziciju:

LEMA 28. *Ako su funkcije $f, g : Ord \to Ord$ normalne, onda je i njihova kompozicija, $g \circ f : Ord \to Ord$, takođe normalna funkcija.*

DOKAZ. Pošto su obe funkcije po pretpostavci monotone, sledi da za svaki par ordinala α i β važi $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow g(f(\alpha)) < g(f(\beta))$. Da bismo pokazali da je funkcija $g \circ f$ neprekidna, pretpostavimo da je α granični ordinal. Treba da pokažemo da je $g(f(\alpha)) = \bigcup_{\beta<\alpha} g(f(\beta))$. Na osnovu LEME 27 znamo da su i $f(\alpha)$ kao i $g(f(\alpha))$ granični ordinali. Imamo da je $g(f(\alpha)) = \bigcup_{\beta<f(\alpha)} g(\beta)$. Neka je $\beta < f(\alpha)$. Dakle, za neko $\gamma < \alpha$ važi $\beta < f(\gamma) < f(\alpha)$, pa na osnovu monotonosti od g sledi da je $g(\beta) < g(f(\gamma)) < g(f(\alpha))$. Pošto ovo važi za proizvoljno β, sledi da je $g(f(\alpha)) = \bigcup_{\beta<f(\alpha)} g(\beta) \leq \bigcup_{\beta<\alpha} g(f(\beta)) \leq g(f(\alpha))$. □

DEFINICIJA 29. Ako je $f : Ord \to Ord$ normalna funkcija, za ordinal α kažemo da je *fiksna tačka* funkcije f akko važi $f(\alpha) = \alpha$.

Svaka normalna funkcija $f : Ord \to Ord$ ima proizvoljno velike fiksne tačke:

TEOREMA 30. *Ako je $f : Ord \to Ord$ normalna funkcija, onda za svako β postoji neko $\alpha \geq \beta$ takvo da važi $f(\alpha) = \alpha$.*

DOKAZ. Ako nam je data normalna funkcija $f : Ord \to Ord$ i ordinal β, onda možemo da definišemo sledeći niz ordinala:

$\beta_0 = \beta.$

$\beta_{n+1} = f(\beta_n),$

$\alpha = \bigcup_{n<\omega} \beta_n.$

Ako je $f(\beta) = \beta$, onda je tvrđenje dokazano. pretpostavimo dakle da je $f(\beta) \neq \beta$. Na osnovu LEME 26 znamo da je $f(\beta) > \beta$. Nije teško da se proveri da važi $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n < \ldots$, na osnovu monotonosti funkcije f. Tada će α da bude granični ordinal, pa ćemo imati $f(\alpha) = \bigcup_{\gamma<\alpha} f(\gamma)$. Ako je $\gamma < f(\alpha)$, onda za neko $n < \omega$ važi $f(\gamma) < \beta_{n+1}$, pa sledi da je $f(\alpha) \leq \bigcup_{n<\omega} \beta_{n+1} = \alpha$. Imamo, dakle, da je $f(\alpha) = \alpha$, pa je α fiksna tačka funkcije f. □

Možemo da primetimo da nam dokaz prethodne teoreme za svaku normalnu funkciju f i ordinal β, daje najmanju fiksnu tačku α funkcije f za koju važi $\beta < \alpha$. Treba samo da mesto $\beta_0 = \beta$, stavimo $\beta_0 = \beta + 1$ u dokazu gore.

Osim klasnih normalnih funkcija $f : Ord \to Ord$, takođe će da nas zanimaju normalne funkcije $g : \alpha \to \alpha$, gde je α granični ordinal, a posebno one koje su oblika $h : \kappa \to \kappa$, gde je κ regularan kardinal neprebrojive kofinalnosti. Uz odgovarajuće izmene, svi rezultati koje smo dokazali u ovom odeljku će važiti i za ove vrste funkcija.

Prvo ćemo da uvedemo jedan pojam koji je blizak pojmu normalne funkcije.

DEFINICIJA 31. Za skup $C \subseteq \alpha$, gde je α granični ordinal, kažemo da je *neograničen u* α akko za svako $\beta < \alpha$, postoji neko γ iz C, takvo da važi $\beta < \gamma$. Skup $C \subseteq \alpha$ ćemo zvati *zatvorenim u* α akko za svaki granični ordinal β iz α važi, ako je $C \cap \beta$ neograničen u β, onda $\beta \in C$. Za skup koji je zatvoren i neograničen u ordinalu α, kažemo da je **CLUB** (to je skraćenica od *closed and unbounded*) u α.

Evo nekoliko primera koji bi trebalo da ilustruju prethodnu definiciju. Posmatrajmo ordinal ω_1 i neko $\alpha < \omega_1$; skup $\{\beta < \omega_1 \mid \alpha < \beta\}$ je **CLUB** u ω_1. Ovakve skupove zovemo *krajnjim segmentima* ordinala ω_1. Takođe, skup

$$\{\delta < \omega_1 \mid \delta \text{ JE GRANIČNI ORDINAL}\}$$

je **CLUB** u ω_1. Ovo nije teško da se vidi, pošto je supremum graničnih ordinala takođe granični ordinal, a ako je α prebrojiv ordinal, onda je i $\alpha + \omega$ prebrojiv granični ordinal. Skup $\{\alpha < \omega_1 \mid \omega^\alpha = \alpha\}$ je takođe **CLUB** u ω_1; ordinali koji su elementi ovog skupa zovu se još i $\epsilon-$*brojevima.* Pretpostavimo da su $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots$ elementi ovog skupa i da je $\alpha = \bigcup_{n<\omega} \alpha_n$. Tada će, međutim, da važi da je $\alpha = \bigcup_{n<\omega} \alpha_n = \bigcup_{n<\omega} \omega^{\alpha_n}$, pa je i α element ovog skupa. S druge strane, da bismo dokazali da je skup $\{\alpha < \omega_1 \mid \omega^\alpha = \alpha\}$ neograničen, uzmimo neko β iz ω_1. Slično onome što smo imali gore, definišimo niz ordinala β_n na sledeći način:

$$\beta_0 = \beta,$$
$$\beta_{n+1} = \omega^{\beta_n},$$
$$\gamma = \bigcup_{n<\omega} \beta_n.$$

Ili je β ordinal za koji važi $\omega^\beta = \beta$, ili nije. Ako jeste, onda je tvrđenje dokazano. Ako β nije ovog oblika, onda je niz $\beta = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ strogo rastući. Dakle, imaćemo da važi $\omega^\gamma = \bigcup_{n<\omega} \omega^{\beta_n} = \bigcup_{n<\omega} \beta_{n+1} = \gamma$, pa je skup $\{\alpha < \omega_1 \mid \omega^\alpha = \alpha\}$ neograničen u ω_1.

S druge strane, skup

$$\{\delta < \omega_1 \mid \delta \text{ JE ORDINAL SLEDBENIK }\}$$

nije **CLUB** u ω_1. Ovaj skup jeste neograničen u ω_1, ali nije zatvoren. Recimo, $\bigcup_{n<\omega}(n+1) = \omega$, ali ω je granični ordinal.

Sledeće tvrđenje uopštava neke od napomena iz prethodnih pasusa:

LEMA 32. *Ako je α granični ordinal neprebrojive kofinalnosti, onda važi sledeće:*

(1) $\{\delta < \alpha \mid \delta \text{ JE GRANIČNI ORDINAL }\}$ *je* **CLUB** *u α,*

(2) ako je $E \subseteq \alpha$ neograničen u α, onda je skup $E' = \{\beta \in E \mid \bigcup(\beta \cap E) = \beta\}$, skup svih graničnih tačaka skupa E , jedan **CLUB** *podskup od α. Takođe, skup $E \cup E'$ je takođe* **CLUB** *u α.*

DOKAZ. (1) Kao i u slučaju ω_1 gore, jednostavno je da se vidi da je skup

$$\{\delta < \alpha \mid \delta \text{ JE GRANIČNI ORDINAL }\}$$

zatvoren u α. Uzmimo neki ordinal δ iz α i definišimo sledeći $\omega-$niz ordinala: $\delta_0 = \delta$, a ako je δ_i definisan za za svako $i \leq n$ tako da je niz $\langle \delta_i \mid i \leq n \rangle$ strogo rastući, onda postoji ordinal δ_{n+1} takav da je $\delta_n < \delta_{n+1} < \alpha$. Ordinal $\xi = \bigcup_{n<\omega} \delta_n$ je jedan granični ordinal, kofinalnosti ω i element je ordinala α.

(2) Da je skup E' neograničen u α se dokazuje slično kao i u prethodnom slučaju: uzmimo neko $\delta < \alpha$, pošto je E neograničen u α uzmimo neko δ_0 iz E takvo da je $\delta < \delta_0$. Slično onome što smo imali u prethodnom slučaju, možemo da definišemo strogo rastući niz $\langle \delta_n \mid n < \omega \rangle$ ordinala iz E. Ordinal $\xi = \bigcup_{n<\omega} \delta_n$ je granična tačka skupa E, veći od δ, ima kofinalnost ω i manji je od α. Dakle, $\xi \in \alpha \cap E'$. Da je skup zatvoren takođe je jednostavno da se vidi. Neka je γ granični ordinal iz α i neka je $E' \cap \gamma$ neograničen u γ. Treba da pokažemo da $\gamma \in E'$. Međutim, imamo da je $E \cap \gamma$ neograničen u γ. To je zato što za svako $\beta < \gamma$ postoji granična tačka δ skupa E takva da važi $\beta + 1 < \delta < \gamma$. Iz ovoga, na osnovu definicije granične tačke, postoji $\xi \in \delta \cap E$ takvo da je $\beta < \xi$. Dakle, $\gamma = \bigcup(E \cap \gamma)$, pa $\gamma \in E'$. □

Naredna teorema dovodi u vezu normalne funkcije i **CLUB** skupove:

TEOREMA 33. *Ako je $\kappa > \omega$ regularan kardinal, onda je skup $C \subseteq \kappa$* **CLUB** *akko postoji normalna funkcija $f : \kappa \to \kappa$ takva da važi $C = Rng(f)$.*

DOKAZ. Dokazujemo tvrđenje sleva na desno. Pretpostavimo da je $C \subseteq \omega_1$ **CLUB**. Nije teško da se vidi, pošto je κ regularan a C je neograničen u κ, da je $|C| = \kappa$. Ako ovo imamo u vidu, možemo da definišemo funkciju $f : \kappa \to \kappa$ na sledeći način:

$$f(\alpha) = min(C \setminus \{f(\beta) \mid \beta < \alpha\}).$$

Ova je funkcija monotona, što nije teško da se vidi. Ostaje da pokažemo da je ona i neprekidna. Ako je $\gamma < \kappa$ granični ordinal, onda $f(\delta) \in C$, za svako δ iz γ. Iz ovoga sledi da $\bigcup_{\delta<\gamma} f(\delta) \in C$, pošto je skup C zatvoren. Međutim, imamo da je $f(\gamma) = \bigcup_{\delta<\gamma} f(\delta)$, na osnovu definicije funkcije f, pa sledi da je ova funkcija normalna i $Rng(f) = C$.

U suprotnom smeru, pretpostavimo da nam je data normalna funkcija $f : \kappa \to \kappa$, i posmatrajmo skup $C = Rnf(f)$. Pošto je funkcija f normalna, nije teško da se vidi da je skup C neograničen u κ. Da bismo pokazali da je skup C zatvoren, uzmimo neki granični ordinal α iz κ takav da je skup $C \cap \alpha$ neograničen u α. Ako je α supremum rastućeg niza ordinala $f(\zeta_\eta)$, sledi da je i niz ordinala ζ_η takođe rastući, a pošto je $\alpha < \kappa$, imamo da je supremum ovog niza, δ, ordinal manji od κ. Pošto je funkcija f normalna, imamo da je $\bigcup_{\eta<\alpha} f(\zeta_\eta) = f(\delta)$, pa je dakle $\alpha = f(\delta)$ i $\alpha \in C$. □

Funkcija f koju smo konstruisali u dokazu prvog dela ovog tvrđenja gore zove se još i *pobrajajuća funkcija* skupa C. Nije teško da se pokaže da je ova funkcija jedinstvena.

Na osnovu TEOREME 30 znamo da svaka normalna funkcija ima proizvoljno velike fiksne tačke. Sledeće tvrđenje nam daje malo više informacija o tome:

LEMA 34. *Neka je κ regularan, neprebrojiv kardinal i $f : \kappa \to \kappa$ normalna funkcija. Skup $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \alpha\}$ je* **CLUB** *u κ.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je κ regularan, neprebrojiv kardinal i $f : \kappa \to \kappa$ normalna funkcija. Da bismo videli da je skup $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \alpha\}$ zatvoren u κ, uzmimo neki granični ordinal β iz κ i posmatrajmo skup $\{\alpha \mid f(\alpha) = \alpha\}$ koji je neograničen u β. Tada ćemo imati da je $\bigcup_{\alpha<\beta} f(\alpha) = \bigcup_{\alpha<\beta} \alpha = \beta$. Da bismo pokazali da je ovaj skup neograničen, uzmimo neko $\gamma < \kappa$. Kao i gore, konstruišemo najmanju fiksnu tačku iznad γ pomoću $\omega-$niza δ_n: $\delta_0 = \gamma + 1$, $\delta_{n+1} = f(\delta_n)$. Ako je α supremum ovog niza, onda je $\alpha > \gamma$ i važi $f(\alpha) = \bigcup_{n<\omega} f(\delta_n) = \alpha$. □

Ako nam je data normalna funkcija $f : \kappa \to \kappa$ na regularnom kardinalu $\kappa > \omega$ i **CLUB** $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \alpha\}$, onda možemo da posmatramo pobrajajuću funkciju ovog skupa f' (v. dokaz TEOREME 33). Nije teško da se pokaže da će i funkcija f' biti normalna. Ova konstrukcija može da se iterira, pa možemo da definišemo funkcije f^α, za $\alpha < \kappa$, na sledeći način:

$f^0 = f$,

$f^{\alpha+1} = (f^\alpha)'$,

f^γ =funkcija koja pobrojava zajedničke fiksne tačke svih funkcija f^δ, za $\delta < \gamma$ i γ je granični ordinal.

Onda može da se pokaže da je svaka od funkcija f^α, za $\alpha < \kappa$, normalna.

Ako je κ regularan kardinal, veći od ω, onda možemo da posmatramo **CLUB** podskupove od κ kao „velike" podskupove ovog kardinala. Intuicija nam kaže da bi presek dva „velika" skupa trebalo da bude „veliki" skup:

LEMA 35. *Ako je $\kappa > \omega$ regularan kardinal, a C_1 i C_2* **CLUB** *podskupovi od κ, onda je i $C_1 \cap C_2$ takođe* **CLUB** *u κ.*

DOKAZ. Pretpostavimo antecedens LEME. Jednostavno je da se vidi da će skup $C_1 \cap C_2$ biti zatvoren, jer ako je α_η rastući niz koji pripada obema skupovima, onda i supremum ovog niza pripada obema skupovima, pošto je svaki od njih zatvoren. Da bismo pokazali da je skup $C_1 \cap C_2$ neograničen, uzmimo neko $\gamma < \kappa$. Treba da pokažemo da postoji α iz $C_1 \cap C_2$ takvo da je $\gamma < \alpha$. Pošto je skup C_1 neograničen, uzmimo najmanje α_0 iz C_1 takvo da je $\gamma < \alpha_0$. Slično tome, neka je β_0 najmanji ordinal iz C_2 takav da je $\gamma < \alpha_0 < \beta_0$ itd. Nije teško da se vidi da ćemo na osnovu zatvorenosti oba ova skupa imati $\alpha = \bigcup_{n<\omega} \alpha_n = \bigcup_{n<\omega} \beta_n$ te $\alpha \in C_1 \cap C_2$. □

Prethodna teorema može dodatno da se ojača. Ako je $\kappa > \omega$ regularan kardinal, $\lambda < \kappa$ i $\{C_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ familija **CLUB** podskupova od κ, onda je presek ove familije, $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$, takođe **CLUB** u κ. U nastavku ćemo da kažemo nekoliko reči o pojmovima *filtera* i *ideala* na kardinalu κ. Tvrđenje koje smo upravo spomenuli će nam biti neophodno da te pojmove opišemo.

DEFINICIJA 36. Ako je κ kardinal, onda je *ideal* $\mathscr{I}$ nad κ kolekcija podskupova od κ koja ima sledeća svojstva:

(1) $\emptyset \in \mathscr{I}$,
(2) ako $A \in \mathscr{I}$ i $B \subseteq A$, onda $B \in \mathscr{I}$,
(3) ako $A, B \in \mathscr{I}$, onda $A \cup B \in \mathscr{I}$.

Za ideal $\mathscr{I}$ kažemo da je *pravi* ako važi da $\kappa \notin \mathscr{I}$. Ideal je $\kappa-$*potpun* ako je zatvoren za unije manje od κ skupova koji pripadaju idealu. Drugim rečima, ako je $\alpha < \kappa$ i $A_\beta \in \mathscr{I}$, za svako $\beta < \alpha$, onda važi $\bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \in \mathscr{I}$. Dualan pojmu ideala jeste pojam *filtera.* Filter $\mathscr{F}$ nad kardinalom κ je kolekcija podskupova od κ koja ima sledeća svojstva:

(1) $\kappa \in \mathscr{F}$,

(2) ako $A \in \mathscr{F}$, i $A \subseteq B$, onda $B \in \mathscr{F}$,

(3) ako $A, B \in \mathscr{F}$, onda $A \cap B \in \mathscr{F}$.

Filter $\mathscr{F}$ je *pravi* ako važi da $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Filter $\mathscr{F}$ je $\kappa-$*potpun* ako je zatvoren za preseke manje od κ skupova koji pripadaju filteru, tj. ako je $\alpha < \kappa$ i $A_\beta \in \mathscr{F}$, za svako $\beta < \alpha$, onda važi $\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta \in \mathscr{F}$.

Evo nekoliko primera filtera. Ako je κ kardinal, onda je $\mathscr{F} = \{\kappa\}$ filter nad κ koji zovemo *trivijalnim* filterom. Ako je $\emptyset \neq A \subseteq \kappa$, onda je $\{B \subseteq \kappa \mid B \subseteq A\}$ filter nad κ koji zovemo *glavnim filterom generisanim sa A*, ili samo *glavnim filterom.* Ovaj je filter najmanji filter nad κ koji sadrži skup A. Filter je *neglavni* akko nije glavni filter. Dualno ovim definicijama možemo da definišemo i pojmove *trivijalnog* i *glavnog ideala.*

Filter $\mathscr{F}$ je *ultrafilter* akko za svako $A \subseteq \kappa$ važi $A \in \mathscr{F}$ ili $\kappa \setminus A \in \mathscr{F}$. Ultrafilter je *neglavni* akko ne sadrži singltone. Ako je $\mathscr{F}$ filter nad κ, onda njemu dualan ideal možemo da dobijemo komplementacijom:

$$\mathscr{I} = \left\{\kappa \setminus A \mid A \in \mathscr{F}\right\}.$$

Isto tako, pošavši od ideala možemo komplementacijom da dobijemo njemu dualan filter.

Dijagonalni presek niza skupova $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ je sledeći skup:

$$\triangle_{\alpha<\kappa} A_\alpha =_{def} \left\{\beta < \kappa \mid \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} A_\alpha\right\}.$$

Dijagonalna unija niza skupova $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ je sledeći skup:

$$\nabla_{\alpha<\kappa} A_\alpha =_{def} \left\{\beta < \kappa \mid \beta \in \bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha\right\}.$$

Filter je *normalan* akko je dijagonalni presek proizvoljnog niza κ elemenata iz filtera takođe u filteru. Ideal je *normalan* akko je dijagonalna unija proizvoljnog niza κ elemenata iz ideala takođe u idealu.

Kao motivaciju za prethodne definicije mogli bismo da elemente (pravog) filtera nad kardinalom κ posmatramo kao „velike" podskupove od κ, dok bi elementi (pravog) ideala nad κ bili „mali" podskupovi od κ. Jedan važan primer filtera nad regularnim kardinalom $\kappa > \omega$ je takozvani **CLUB** *filter nad* κ koji označavamo sa $\mathbf{CLUB}(\kappa)$. Elementi ovog filtera su svi podskupovi od κ koji sadrže **CLUB** podskup od κ, tj.

$$\mathbf{CLUB}(\kappa) = \left\{A \subseteq \kappa \mid \exists C\ C \subseteq A \text{ i } C \text{ je } \mathbf{CLUB} \text{ u } \kappa\right\}.$$

Da je $\mathbf{CLUB}(\kappa)$ zaista filter jednostavno je da se vidi, jer 1) $\kappa \in \mathbf{CLUB}(\kappa)$, pošto je κ zatvoren i neograničen u κ; 2) ako $A \in \mathbf{CLUB}(\kappa)$ i $A \subseteq B$, onda i $B \in \mathbf{CLUB}(\kappa)$, pošto ako A sadrži neki zatvoren i neograničen podskup od κ, onda ga i B sadrži; 3) ako $A, B \in \mathbf{CLUB}(\kappa)$ i $C_1 \subseteq A$ i $C_2 \subseteq B$ su zatvoreni i neograničeni podskupovi od κ, onda je i $C = C_1 \cap C_2 \subseteq A \cap B$ takođe, pa $A \cap B \in \mathbf{CLUB}(\kappa)$. Ovaj filter je i $\kappa-$potpun, jer je zatvoren za preseke $< \kappa$ svojih elemenata.

Na primer, ako je $A = \omega \cup \left\{\alpha < \omega_1 \mid \omega < \alpha \text{ i } \alpha \text{ je granični ordinal}\right\}$, onda $A \in \mathbf{CLUB}(\omega_1)$ ali A nije zatvoren i neograničen u ω_1, jer $\omega \subseteq A$ a $sup(\omega) = \omega \notin A$.

Kao još jednu ilustraciju prethodnih definicija, dokazaćemo i sledeće tvrđenje:

TEOREMA 37. *Ako je $\kappa > \omega$ regularan kardinal, i $\{C_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ familija* **CLUB** *podskupova od κ, onda je i $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ takođe* **CLUB** *u κ.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $\kappa > \omega$ regularan i da je $\{C_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ familija **CLUB** podskupova od κ. Neka je $C = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \left\{\beta < \kappa \mid \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\right\}$. Da bismo pokazali da je C zatvoren u κ, uzmimo neki granični ordinal $\gamma < \kappa$ i pretpostavimo da je $C \cap \gamma$ neograničen u γ. Pošto je ovo slučaj, sledi da postoji strogo rastući niz $\langle \gamma_\zeta \mid \zeta < cf(\gamma) \rangle$ elemenata skupa C, takav da važi $\bigcup_{\zeta<cf(\gamma)} \gamma_\zeta = \gamma$. Međutim, za svako $\alpha < cf(\gamma)$ imamo da važi $\gamma_\zeta \in \bigcap_{\beta<\gamma_\alpha} C_\beta$, za svako $\zeta > \alpha$. Dakle, pošto je ovaj skup zatvoren, imamo da važi $\gamma = \bigcup_{\alpha<\zeta} \gamma_\zeta \in \bigcap_{\beta<\gamma_\alpha} C_\beta$. Na osnovu ovoga imamo da je $\gamma \in \bigcap_{\alpha<cf(\gamma)} (\bigcap_{\beta<\gamma_\alpha} C_\beta) = \bigcap_{\delta<\gamma} C_\delta$, pa $\gamma \in C$.

Da bismo pokazali da je C neograničen u κ, uzmimo neko $\beta < \kappa$ i definišimo sledeći $\omega-$niz $\langle \beta_n \mid n < \omega \rangle$: $\beta_0 = \beta$, $\beta_{n+1} = min(\bigcap_{\gamma<\beta_n} C_\gamma)$. Neka je $\delta = \bigcup_{n<\omega} \beta_n$; tada za svako

n imamo da važi $\{\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, ...\} \subseteq \bigcap_{\gamma<\beta_n} C_\gamma$. Dakle, imaćemo i $\delta \in \bigcap_{\gamma<\beta_n} C_\gamma$, pošto je ovaj skup zatvoren. Na kraju, pošto važi $\delta \in \bigcap_{n<\omega}(\bigcap_{\gamma<\beta_n} C_\gamma) = \bigcap_{\zeta<\delta} C_\zeta$, sledi da $\delta \in C$. □

Na kraju, ostaje nam da kažemo nekoliko reči o važnom pojmu *stacionarnog* skupa. U nastavku podrazumevamo da je κ regularan, neprebrojiv kardinal.

DEFINICIJA 38. Ako je $\kappa > \omega$ regularan kardinal, za skup $S \subseteq \kappa$ kažemo da je *stacionaran u* κ akko za svaki **CLUB** C u κ važi $S \cap C \neq \emptyset$.

Na osnovu definicije sledi da je skup S stacionaran u κ akko skup $\kappa \setminus S$ ne sadrži **CLUB** podskup od κ. Na osnovu LEME 34 lako je da se vidi da je svaki **CLUB** u κ takođe i stacionaran u κ. S druge strane, nije svaki stacionaran skup u κ istovremeno i **CLUB** u κ. Na primer, skup $S = \kappa \setminus \{\omega\}$ je stacionaran u κ, ali nije **CLUB**, pošto nije zatvoren. Međutim, stacionarni podskupovi od κ su uvek neograničeni u κ. Da bismo ovo videli, prisetimo se da smo već napomenuli da su krajnji segmenti od ω_1 uvek **CLUB** podskupovi od ω_1. Ovo važi i za proizvoljan, neprebrojiv regularan kardinal κ. Dakle, ako uzmemo proizvoljno $\alpha < \kappa$, onda je skup $C = \{\beta < \kappa \mid \alpha < \beta\}$ **CLUB** u κ. Ako je S stacionaran u κ, onda je $S \cap C \neq \emptyset$, pa S sadrži ordinal veći od α. Za regularne kardinale $\kappa > \omega$, imamo da je kardinalnost njihovih stacionarnih podskupova, baš kao i kardinalnost njihovih **CLUB** podskupova, jednaka κ.

Ako je S stacionaran u κ i C **CLUB** u κ, onda je $S \cap C$ stacionaran u κ. Ovo je lako videti, jer ako je D **CLUB** u κ, onda je i $C \cap D$ takođe, pa je presek $(A \cap C) \cap D$ neprazan. Za razliku od **CLUB** skupova u κ, stacionarni skupovi u κ ne generišu filter. Na primer, ako posmatramo kardinal ω_2, onda su skupovi $S_0 = \{\alpha < \omega_2 \mid cf(\alpha) = \omega\}$ i $S_0 = \{\alpha < \omega_2 \mid cf(\alpha) = \omega_1\}$ stacionarni u ω_2, ali imamo da je $S_0 \cap S_1 = \emptyset$.

U nastavku ćemo da damo jednu alternativnu karakterizaciju pojma stacionarnog skupa služeći se pojmom *regresivne funkcije* na ordinalima, koji ćemo sada da definišemo:

DEFINICIJA 39. Neka je $\kappa > \omega$ regularan kardinal i $S \subseteq \kappa$. Za funkciju $f : S \to \kappa$ kažemo da je *regresivna* akko važi $f(\alpha) < \alpha$, za svako $\alpha \neq 0$ iz skupa S.

TEOREMA 40. *Neka je $\kappa > \omega$ regularan kardinal i $S \subseteq \kappa$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) S je stacionaran.

(2) Ako je funkcija $f : S \to \kappa$ regresivna, onda je f konstantna na stacionarnom skupu, tj. $f^{-1}[\{\alpha\}]$ je stacionaran u κ, za neko $\alpha < \kappa$.

(3) Ako je funkcija $f : S \to \kappa$ regresivna, onda je f konstantna na skupu kardinalnosti κ, tj. $\left|f^{-1}[\{\alpha\}]\right| = \kappa$, za neko $\alpha < \kappa$.

DOKAZ. Dokažimo prvo da 1) $\Rightarrow$ 2). Neka je skup $S \subseteq \kappa$ stacionaran a funkcija $f : S \to \kappa$ regresivna. Pretpostavimo dalje da za svako $\alpha < \kappa$ skup $f^{-1}[\{\alpha\}]$ nije stacionaran u κ. Za svako takvo α uzmimo neko C_α takvo da važi $f^{-1}[\{\alpha\}] \cap C_\alpha = \emptyset$. Neka je $C = \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Pošto znamo da je skup C neprazan, uzmimo neko β iz C tako da $\beta \in C_\alpha$, za svako $\alpha < \beta$. Pošto je funkcija f regresivna, imamo da je $f(\beta) = \alpha < \beta$ pa ćemo imati da $\beta \in f^{-1}[\{\alpha\}] \cap C_\alpha$, što je nemoguće.

Tvrđenje 2) $\Rightarrow$ 3) jednostavno sledi pošto su, kako smo već napomenuli, stacionarni podskupovi od κ (κ je regularan kardinal) kardinalnosti κ.

Dokazujemo da 3) $\Rightarrow$ 1). Pretpostavimo da skup S nije stacionaran. Treba da konstruišemo regresivnu funkciju $f : S \to \kappa$, takvu da nijedan od skupova $f^{-1}[\{\alpha\}]$, za $\alpha < \kappa$, nije neograničen. Pretpostavimo da je skup S neograničen u κ. Uzmimo neki **CLUB** C u κ takav da važi $C \cap S = \emptyset$. Definišimo funkciju $f : S \to \kappa$ na sledeći način: $f(\beta) = \bigcup C \cap \beta$, za svako β iz S. Pošto je skup C $CLUB$ i $C \cap S = \emptyset$, imamo da je $f(\beta) < \beta$, pa je funkcija f regresivna. Nije teško da se vidi da ćemo za ovu funkciju f imati da za svako $\alpha < \kappa$, važi da je skup $f^{-1}[\{\alpha\}]$ ograničen u κ, pa će svaki takav skup biti kardinalnosti manje od κ. $\square$

1.5. Kumulativna hijerarhija i $H(\kappa)$

Sledeći važan pojam koji će u nastavku rada da nas zanima jeste pojam *univerzuma skupova* ili *kumulativne hijerarhije* V. U teoriji ZFC ovaj pojam možemo da definišemo na sledeći način:

DEFINICIJA 41. *Kumulativna hijerarhija*:

$V_0 = \emptyset$,

$V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$, za svaki ordinal α,

$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$, za granični ordinal α.

Klasu V definišemo kao uniju svih nivoa kumulativne hijerarhije indeksiranih klasom svih ordinala Ord, tj. $V = \bigcup_{\alpha\in Ord} V_\alpha$.

Sledeće tvrđenje govori o nekim jednostavnim svojstvima nivoa kumulativne hijerarhije V_α:

TEOREMA 42. *Za svaki ordinal α važi da je V_α tranzitivan skup, kao i da je $V_\beta \subseteq V_\alpha$, za svako $\beta < \alpha$.*

DOKAZ. Oba ćemo tvrđenja da dokažemo transfinitnom indukcijom po ordinalu α. Dokažimo prvo da je V_α tranzitivan, za svaki ordinal α. Prazan skup je očigledno tranzitivan, pa pretpostavimo da je $\alpha > 0$ i da je skup V_α tranzitivan. Neka je $x \in y \in V_{\alpha+1}$. Tada važi da je $y \in \mathscr{P}(V_\alpha)$, tj. $y \subseteq V_\alpha$. Pošto $x \in y$ imamo da $x \in V_\alpha$. Međutim, pošto je po pretpostavci V_α tranzitivan, sledi da je $x \subseteq V_\alpha$ pa imamo da $x \in V_{\alpha+1}$. Pretpostavimo na kraju da je γ granični ordinal i da tvrđenje važi za sve ordinale $\alpha < \gamma$. Neka je $x \in y \in V_\gamma$. Pošto je γ granični ordinal, imamo da postoji neko $\alpha < \gamma$, takvo da $y \in V_\alpha$. Kako je skup V_α po pretpostavci tranzitivan, sledi da je $x \in V_\alpha$. Međutim to, na osnovu definicije od V_γ, znači da $x \in V_\gamma$

Drugo se tvrđenje takođe jednostavno dokazuje. Pretpostavimo da tvrđenje važi za $\alpha > 0$. Neka je $\beta < \alpha + 1$. Primetimo da za svako α važi da je $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$: ako $x \in V_\alpha$, na osnovu prethodnog tvrđenja sledi da je $x \subseteq V_\alpha$, pa je $x \in \mathscr{P}(V_\alpha) = V_{\alpha+1}$. Pošto je $\beta < \alpha+1$, sledi da je $\beta \leq \alpha$. Bilo da je $\beta < \alpha$ ili $\beta = \alpha$, tvrđenje sledi na osnovu induktivne hipoteze i prethodne napomene. Ako je γ granični ordinal i tvrđenje važi za svako $\alpha < \gamma$, onda tvrđenje sledi na osnovu definicije od V_γ. $\square$

Drugi deo prethodnog tvrđenja nam kaže zašto je ova hijerarhija kumulativna. Lako može da se pokaže da za nivoe kumulativne hijerarhije V_α važi i sledeća varijanta tranzitivnosti: $x \subseteq y \in V_\alpha \Rightarrow x \in V_\alpha$. Ovo se svojstvo ponekad zove *supertranzitivnost.* Drugim rečima, nivoi kumulativne hijerarhije nisu samo zatvoreni za elemente svojih elemenata, tj. tranzitivni, već i za podskupove svojih elemenata. Takođe nije teško pokazati, i ovde ključnu ulogu ima aksioma regularnosti, da svaki skup x pripada nekom od nivoa V_α. Ovo nam omogućava da skupovima pripišemo ordinale koji će da beleže istoriju njihove izgradnje unutar hijerarhije V.

DEFINICIJA 43. Za svaki skup x, *rang od* x, koji ćemo da označavamo sa $\rho(x)$, je najmanji ordinal α za koji važi da $x \in V_{\alpha+1}$.

Sledeća jednostavna tvrđenja mogu da nam posluže radi bolje ilustracije ovog pojma.

LEMA 44. *Za svaki ordinal* α *imamo da važi* $V_\alpha = \{x \mid \rho(x) < \alpha\}$.

DOKAZ. Ako $x \in V_\alpha$, onda $\alpha \neq 0$ pa imamo dve mogućnosti: (i) α je oblika $\beta + 1$, za neki ordinal β, (ii) α je granični ordinal. Ako važi (i), onda $x \in V_{\beta+1}$, pa je $\rho(x) \leq \beta < \alpha$ na osnovu definicije ranga. Ako važi (ii), onda $x \in V_\beta$, za neki ordinal $\beta < \alpha$, pa sledi da $x \in V_{\beta+1}$. Dakle, $\rho(y) \leq \beta < \alpha$.

U suprotnom smeru, ako je $\rho(x) < \alpha$, onda $x \in V_{\beta+1}$ za neki ordinal $\beta < \alpha$. Pošto je $\beta + 1 \leq \alpha$, na osnovu TEOREME 24 sledi da $x \in V_\alpha$. $\square$

LEMA 45. *Ako su* x *i* y *skupovi i* $y \in x$, *onda* $\rho(y) < \rho(x)$.

DOKAZ. Ako je $\rho(x) = \beta$, onda $x \in V_{\beta+1} = \mathscr{P}(V_\beta)$. Dakle, $x \subseteq V_\beta$ pa je $y \in V_\beta$ i na osnovu prethodnog tvrđenja važi $\rho(y) < \beta$. $\square$

LEMA 46. *Ako je* x *skup, onda* $\rho(x) = sup_{y\in x}(\rho(y) + 1)$.

DOKAZ. Neka je $\alpha = sup_{y\in x}(\rho(y) + 1)$. Na osnovu prethodnog tvrđenja važi $\rho(x) \geq \alpha$. S druge strane, ako $y \in x$, onda je $\rho(y) < \alpha$, pa $y \in V_\alpha$. Dakle, $x \subseteq V_\alpha$ i $x \in V_{\alpha+1}$, pa je $\rho(x) \leq \alpha$. $\square$

Pogledajmo sada kako izgledaju prvih nekoliko nivoa kumulativne hijerarhije:

$$V_0 = \emptyset,\ V_1 = \mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},\ V_2 = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$$

Indukcijom može lako da se proveri da je skup V_n konačan, za svako $n < \omega$. O kardinalnosti viših nivoa kumulativne hijerarhije govori sledeće tvrđenje:

TEOREMA 47. *Za svaki ordinal α važi da je $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$.*

DOKAZ. Tvrđenje dokazujemo transfinitnom indukcijom po ordinalu α. Baza indukcije je tvrđenje $\beth_0 = \aleph_0 = |V_\omega|$. Pošto $\omega \subseteq V_\omega$, treba da proverimo da je V_ω prebrojiv skup. Ovo će da sledi iz LEME 13, pošto je $V_\omega = \bigcup_{n<\omega} V_n$, gde je svaki V_n konačan skup, kako smo već napomenuli. Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za $\alpha > 0$. Imamo da je $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} = |\mathscr{P}(V_{\omega+\alpha})| = |V_{\omega+\alpha+1}|$. Za granični ordinal β imamo da je $V_{\omega+\beta} = \bigcup_{\alpha<\beta} V_{\omega+\alpha}$ pa je $\left|V_{\omega+\beta}\right| = \bigcup_{\alpha<\beta} \beth_\alpha = \beth_\beta$. □

Primetimo da na osnovu prethodne teoreme sledi da, za svaki ordinal $\alpha \geq \omega^2$, važi da je $|V_\alpha| = \beth_\alpha$.

Osim kumulativne hijerarhije V, u teoriji ZFC mogu da se definišu i neke druge koje su važne ako se bavimo pitanjima modela teorije skupova i njenih fragmenata. O modelima ćemo nešto više da kažemo u sledećem odeljku a u nastavku ćemo da navedemo još jedan primer tih, drugih, hijerarhija.

DEFINICIJA 48. Ako je κ kardinal, onda ćemo sa $H(\kappa)$ da označavamo skup svih skupova koji su *nasledne kardinalnosti manje od* κ, $H(\kappa) = \{x \mid |TC(x)| < \kappa\}$.

Skup $H(\aleph_0)$ zovemo još i *skupom nasledno konačnih* skupova, a skup $H(\aleph_0)$ *skupom nasledno prebrojivih* skupova. Na početku, pokažimo da je ovde zaista reč o skupovima a ne o klasama:

TEOREMA 49. *Ako je κ beskonačan kardinal, onda je $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$.*

DOKAZ. Neka je κ beskonačan kardinal i neka $x \in H(\kappa)$. Takođe, neka je $y = TC(x)$ i $A = \left\{\rho(z) \mid z \in y\right\}$. Treba da pokažemo da je skup A ordinal. Neka je α najmanji ordinal koji nije u skupu A. Tada će da važi da je $\alpha \subseteq A$. Ako je $\alpha \neq A$, neka je β najmanji ordinal iz A koji je veći od α. Neka je z skup iz y čiji je rang β. Pošto je skup $y = TC(x)$ tranzitivan, sledi da svaki element skupa z ima rang manji od α. Imamo, dakle, $\rho(z) = sup\left\{\rho(v)+1 \mid v \in z\right\} \leq \alpha$, što je nemoguće, pa imamo da je $\alpha = A$.

Pošto je $\left|y\right| < \kappa$, imamo da je $\alpha < \kappa$. S druge strane, pošto je $x \subseteq y \subseteq V_\alpha$, sledi da je $\rho(x) \leq \alpha < \kappa$. Dakle, $x \in V_\kappa$. □

Sada ćemo da navedemo još neke jednostavne osobina skupova $H(\kappa)$.

LEMA 50. *Za svaki beskonačan kardinal κ važi:*

(1) $H(\kappa)$ je tranzitivan skup;

(2) ako $x \in H(\kappa)$, onda $\bigcup x \in H(\kappa)$;

(3) ako $x, y \in H(\kappa)$, onda $\left\{x, y\right\} \in H(\kappa)$;

(4) ako $y \subseteq x \in H(\kappa)$, onda $y \in H(\kappa)$;

(5) $H(\kappa) \cap Ord = \kappa$;

(6) ako je κ regularan, onda $\forall x(x \in H(\kappa) \leftrightarrow (x \subseteq H(\kappa) \wedge |x| < \kappa))$.

DOKAZ. Za svaki beskonačan kardinal κ imamo da je skup $H(\kappa)$ tranzitivan. Ovo nije teško da se vidi pošto za svako $y \in x \in H(\kappa)$, imamo da važi $TC(y) \subseteq TC(x)$, pa dakle $y \in H(\kappa)$. Takođe, ako $x \in H(\kappa)$, onda $\bigcup x \in H(\kappa)$. To je zato što je, za svaki skup x, $TC(\bigcup x) \subseteq TC(x)$, pošto je $\bigcup x \subseteq \bigcup\left\{TC(y) \mid y \in x\right\} \subseteq TC(x)$. Slično tome, pošto je $TC(\left\{x, y\right\}) = \left\{x, y\right\} \cup TC(x) \cup TC(y)$, sledi da ako $x, y \in H(\kappa)$, onda i $\left\{x, y\right\} \in H(\kappa)$. Skup $H(\kappa)$ je i supertranzitivan, tj. ako je $y \subseteq x \in H(\kappa)$, onda je i $y \in H(\kappa)$. Jer, ako je $y \subseteq x$, onda je i $TC(y) \subseteq TC(x)$, pa ako $x \in H(\kappa)$, onda i $y \in H(\kappa)$. Takođe važi da je $H(\kappa) \cap Ord = \kappa$. To je lako da se vidi, pošto je svaki ordinal α tranzitivan skup imamo da je $TC(\alpha) = \alpha$, pa ako je $|TC(\alpha)| < \kappa$, onda je i $\alpha < \kappa$. Ako je κ regularan kardinal, onda za svako x važi: $x \in H(\kappa)$ akko $x \subseteq H(\kappa)$ i $|x| < \kappa$. Primetimo da je $TC(x) = x \cup \bigcup\left\{TC(y) \mid y \in x\right\}$, a pošto je κ regularan kardinal, imamo da je unija $< \kappa$ skupova kardinalnosti $< \kappa$ takođe kardinalnosti $< \kappa$. □

Sada ćemo da pokažemo da je skup $H(\aleph_0)$ jednak prvom beskonačnom nivou kumulativne hijerarhije:

LEMA 51. $H(\aleph_0) = V_\omega$.

DOKAZ. Na osnovu prethodne teoreme, treba samo da pokažemo da je $V_\omega \subseteq H(\aleph_0)$. Poslednje tvrđenje će da sledi iz činjenice da je $V_n \subseteq H(\aleph_0)$, za svako $n < \omega$ koju ćemo dokazati indukcijom. Jasno je da $V_0 \subseteq H(\aleph_0)$. Pretpostavimo da $V_n \subseteq H(\aleph_0)$, za $n > 0$, i neka je $x \in V_{n+1}$. Pošto je $x \subseteq V_n$ a V_n je konačan skup, sledi da je x konačan skup čiji su svi elementi, prema induktivnoj hipotezi, nasledno konačni. Drugim rečima, x je nasledno konačan skup pa $x \in H(\aleph_0)$. □

S druge strane, skup $H(\aleph_1)$ je mnogo manji od skupa V_{ω_1}. Na primer, imamo da $\mathscr{P}(\omega) \in V_{\omega_1} \setminus H(\aleph_1)$. Da bismo videli koliko je zaista skup V_{ω_1} veći od skupa $H(\aleph_1)$, biće nam potrebna sledeća definicija:

DEFINICIJA 52. Ako su $\kappa \geq 2$ i $\lambda \geq \aleph_0$ kardinali, onda je

$$\kappa^{<\lambda} =_{def} sup\left\{\kappa^\mu \mid \mu < \lambda \text{ i } \mu \text{ je kardinal}\right\}.$$

Prethodna operacija je interesantna kada je λ granični kardinal, mada naša definicija pokriva i slučaj kada je $\lambda = \mu^+$, za neki kardinal μ.

LEMA 53. *Ako je κ beskonačan kardinal, onda je $|H(\kappa)| = 2^{<\kappa}$.*

DOKAZ. Za svako $\lambda < \kappa$ imamo da je $\mathscr{P}(\lambda) \subseteq H(\kappa)$, pa za svako takvo λ imamo $|H(\kappa)| \geq 2^{<\lambda}$. Dakle $|H(\kappa)| \geq 2^{<\kappa}$. S druge strane, da bismo pokazali da je $|H(\kappa)| \leq 2^{<\kappa}$, možemo da konstruišemo injekciju $f : H(\kappa) \to \bigcup\{P(\lambda \times \lambda) \mid \lambda < \kappa\}$ na sledeći način: ako je $x \in H(\kappa)$, neka je $\lambda = |TC(x) \cup \{x\}|$. Imamo da je $\lambda < \kappa$, pa na osnovu AC možemo da izaberemo relaciju $f(x) \subseteq \lambda \times \lambda$ tako da su uređenja $(\lambda, f(x))$ i $(TC(x) \cup \{x\}, \in)$ izomorfna. Funkcija f je injekcija jer je x određen tipom izomorfizma relacija $\in$ na skupu $TC(x) \cup \{x\}$. □

Vratimo se našem primeru gore: imamo da je $|H(\aleph_1)| = 2^{<\aleph_1} = 2^{\aleph_0} = \beth_1$, s druge strane $\left|V_{\omega_1}\right| = \beth_{\omega_1}$. Biće međutim i kardinala $\kappa > \aleph_0$ za koje će da važi $H(\kappa) = V_\kappa$. Tada će da važi $2^{<\kappa} = \beth_\kappa = \kappa$. O ovim ćemo kardinalima ćemo nešto više da kažemo u narednom odeljku.

1.6. Modeli teorije skupova

U nastavku ćemo da kažemo nekoliko reči o semantici jezika teorije skupova. Prvo, *struktura* za jezik teorije skupova je jedan uređeni par $\mathscr{M} = (M, E)$, gde je M neprazan skup, domen ove strukture, a $E \subseteq M \times M$ binarna relacija na ovom domenu kojom ćemo da interpretiramo binarni predikat $\in$. U nastavku ćemo elemente skupa M da označavamo malim slovima s početka abecede, $a, b, c, \ldots$ itd. Ako nam je data struktura $\mathscr{M}$, onda ćemo elemente skupa $\boldsymbol{a} \in {}^{\omega}M$ da zovemo *individualnim valuacijama*. Uloga individualnih valuacije je da pripisuju vrednosti iz skupa M slobodnim promenljivama iz formula našeg jezika. Ako je $\boldsymbol{a} \in {}^{\omega}M$ individualna valuacija, onda ćemo sa $\boldsymbol{a}^i_b$ da označavamo individualnu valuaciju koja se od $\boldsymbol{a}$ razlikuje samo po tome što je $\boldsymbol{a}^i_b(i) = b$. Za strukturu $\mathscr{M}$, formulu φ jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ i individualnu valuaciju $\boldsymbol{a} \in {}^{\omega}M$ sada možemo da definišemo relaciju $\mathscr{M} \models \varphi\,[\boldsymbol{a}]$, što čitamo kao „*$\mathscr{M}$ je model formule φ za individualnu valuaciju $\boldsymbol{a}$*”:

$\mathscr{M} \models x_i = x_j\,[\boldsymbol{a}]$ akko $a_i = a_j$;

$\mathscr{M} \models x_i \in x_j\,[\boldsymbol{a}]$ akko $a_i E a_j$;

$\mathscr{M} \models \neg\varphi\,[\boldsymbol{a}]$ akko ne $\mathscr{M} \models \varphi\,[\boldsymbol{a}]$;

$\mathscr{M} \models (\varphi \wedge \psi)\,[\boldsymbol{a}]$ akko $\mathscr{M} \models \varphi\,[\boldsymbol{a}]$ i $\mathscr{M} \models \psi\,[\boldsymbol{a}]$;

$\mathscr{M} \models \exists x_i \varphi\,[\boldsymbol{a}]$ akko postoji $b \in M$ takvo da važi $\mathscr{M} \models \varphi\left[\boldsymbol{a}^i_b\right]$.

Kažemo da je struktura $\mathscr{M}$ *model* formule φ i pišemo $\mathscr{M} \models \varphi$ akko je $\mathscr{M}$ model formule φ za svaku individualnu valuaciju $\boldsymbol{a} \in {}^{\omega}M$. Ako je Γ skup formula, kažemo da je $\mathscr{M}$ *model* od Γ akko je $\mathscr{M} \models \varphi$, za svako φ iz Γ. Pisaćemo $\Gamma \models \varphi$ akko je svaki model Γ ujedno i model od φ. Na osnovu teoreme potpunosti znamo da važi $\Gamma \vdash \varphi$ akko $\Gamma \models \varphi$.

Svi modeli kojima ćemo mi da se bavimo u nastavku ovog rada će da budu *standardni*, tj. ako je $\mathscr{M} = (M, E)$ struktura za jezik teorije skupova, onda ćemo da podrazumevamo da je E baš relacija pripadnosti na skupu M, a ne neka druga relacija. Takođe, skupovi M kojima ćemo da se u nastavku bavimo će svi da budu tranzitivni. U nastavku ovog rada ćemo često da pojednostavljujemo notaciju pa ćemo, ako nam je data neka struktura $\mathscr{M} = (M, E)$, pisati $x \in \mathscr{M}$ ili $x \subseteq \mathscr{M}$, kada bi u stvari trebalo da pišemo $x \in M$ ili $x \subseteq M$.

Još jedan pojam koji će nam koristiti u nastavku rada jeste pojam *relativizacije*. Ako je φ formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ i C klasa (ili skup), onda je *relativizacija od* φ *na* C , koju ćemo da označavamo sa φ^C, formula koju definišemo induktivno na sledeći način:

$(x = y)^C$ je $x = y$,

$(x \in y)^C$ je $x \in y$,

$(\neg\phi)^C$ je $\neg\phi^C$,

$(\phi \wedge \psi)^C$ je $\phi^C \wedge \psi^C$,

$(\exists x\phi)^C$ je $\exists x(x \in C \wedge \phi^C)$.

Za formulu ϕ kažemo da *važi u* C, ili da je *istinita u* C akko važi $ZFC \vdash \phi^C$. Ponekad ćemo mesto $ZFC \vdash \phi^C$, da kažemo da ϕ^C važi ili da je ϕ^C istinito. Recimo, kada želimo da kažemo da je $(C,\in)$ model teorije ZFC, to možemo da izrazimo tako što ćemo da tvrdimo da za svaku aksiomu φ ove teorije, važi φ^C. Ovde se, kao i u nastavku, podrazumeva da kada pišemo $(C,\in)$ u stvari mislimo na $(C,\in \cap C \times C)$, dakle na restrikciju relacije $\in$ na C, osim ako eksplicitno ne naglasimo drugačije.

Još jedna terminološka napomena: kada govorimo o klasama u kontekstu teorije ZFC, mi u stvari govorimo o formulama jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ koje ih definišu. Jedna preciznija definicija pojma relativizacije gore bi onda, mesto o klasi C, govorila o trima formulama, ϕ, φ i ψ, gde je formula ϕ relativizacija formule φ na formulu ψ.

Sledeći važan pojam *definabilnosti* će nam biti neophodan u sledećem odeljku:

DEFINICIJA 54. Ako je C skup, onda kažemo da je skup $A \subseteq C$ *definabilan sa parametrima iz* C akko postoji formula $\varphi(x, x_1, ..., x_n)$ jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ i elementi $a_1, ..., a_n$ iz C, takvi da važi

$$A = \left\{x \in C \mid \varphi^C(x, a_1, ..., a_n)\right\}.$$

Sa $\mathscr{D}(C)$ ćemo da označavamo skup svih podskupova skupa C koji su definabilni sa parametrima iz C.

Nije teško da se vidi da ćemo, za svaki skup C, imati da važi $\mathscr{D}(C) \subseteq \mathscr{P}(C)$, a (**a**) ako je skup C konačan onda će važiti $\mathscr{D}(C) = \mathscr{P}(C)$. S druge strane, (**b**) ako je skup C beskonačan, imaćemo da je $|\mathscr{D}(C)| = |C|$, a (**c**) ako je skup C tranzitivan, onda ćemo imati da važi $C \subseteq \mathscr{D}(C)$ i skup $\mathscr{D}(C)$ će biti tranzitivan. Da bismo videli da (**a**) važi, treba da primetimo da ako je C konačan skup i $A = \{a_1, ..., a_n\}$ je neki podskup skupa C, onda formula

$$x = a_1 \vee x = a_2 \vee ... \vee x = a_n,$$

definiše skup A, pa je $A \in \mathscr{D}(C)$. Ako je skup C beskonačan, onda će skup svih formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ koji ćemo da proširimo simbolima za parametre iz C, biti kardinalnosti $|C|$, pa za svako $a \in C$ možemo da definišemo skup $\{a\} \in \mathscr{D}(C)$ pomoću formule $x = a$. Dakle, imamo da važi i (**b**). Na kraju, (**c**) ako je skup C tranzitivan i $a \in C$, onda formula $x \in a$ definiše a kao element skupa $\mathscr{D}(C)$.

Još jedno svojstvo formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ koje igra važnu ulogu kada se bavimo modelima teorije ZFC je *apsolutnost:*

DEFINICIJA 55. Ako je C klasa (ili skup) i $\varphi(x_1, ..., x_n)$ formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$, kažemo da je formula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ *apsolutna za C* akko važi:

$$\forall x_1...x_n \in C(\varphi(x_1, ..., x_n) \leftrightarrow \varphi^C(x_1, ..., x_n)).$$

Za relaciju ili funkciju kažemo da je *apsolutna za C* akko je formula koja je definiše apsolutna za C.

Formule jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ u kojima se javljaju samo ograničeni kvantifikatori, $\exists x \in y\varphi$ i $\forall x \in y\varphi$, ćemo zvati Δ_0- formulama. Dakle, skup Δ_0-formula je najmanji skup za koji važi 1) sve atomske formule su u njemu, 2) ako su formule ϕ i ψ u tom skupu, onda su i formule $\phi \wedge \psi$ i $\neg\phi$ takođe u tom skupu, 3) ako je formula ϕ u tom skupu, onda je i formula $\exists x \in y\phi$ takođe u tom skupu. Skup Δ_0-formula predstavlja samo prvi nivo hijerarhije formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ koje su klasifikovane po svojoj složenosti. Više o toj hijerarhiji ćemo da kažemo u odeljku [6.2], a sada ćemo da vidimo kakva je veza između Δ_0-formula i pojma apsolutnosti.

TEOREMA 56. *Ako je C tranzitivna klasa (ili skup) i φ Δ_0-formula, onda je φ apsolutna za C.*

DOKAZ. Dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Ako je φ atomska formula, $x \in y$ ili $x = y$, onda rezultat sledi na osnovu definicije pojma relativizacije gore. Takođe, ako je φ oblika $\phi \wedge \psi$ ili $\neg\phi$, gde su formule ϕ i ψ apsolutne za C, rezultat jednostavno sledi. Ostaje nam da proverimo da ako je φ oblika $\exists x \in y\phi(x, y)$ (što je skraćenica za $\exists x(x \in y \wedge \phi(x, y)))$ gde je formula $\phi(x, y)$ apsolutna za C, onda je i φ apsolutna za C. Formula φ može naravno da ima i druge slobodne promenljive osim y, ali je dokaz u ovom slučaju u potpunosti analogan. Pretpostavimo da $y \in C$ i da važi $\exists x \in y\phi(x, y)$. Uzmimo neko $x \in y$ takvo da važi $\phi(x, y)$. Pošto je C tranzitivna, imamo da $x \in C$ pa na osnovu induktivne hipoteze važi $\phi^C(x, y)$. Dakle, važi i $(\exists x \in y\phi(x, y))^C$. U drugom smeru, pretpostavimo da važi $(\exists x \in y\phi(x, y))^C$. Dakle, $\exists x \in C(x \in y \wedge \phi^C(x, y))$. Na osnovu induktivne hipoteze imamo da važi $\phi(x, y)$ pa sledi da važi i $\exists x \in y\phi(x, y)$. □

Na osnovu ovog tvrđenja možemo jednostavno da pokažemo da su neki skupovno-teorijski pojmovi apsolutni tako što ćemo pokazati da se oni mogu definisati pomoću Δ_0−formula. Na primer:

x JE ORDINAL $\Leftrightarrow \forall y \in x \forall z \in y(z \in x) \wedge \forall y \in x \forall z \in y \forall v \in z(v \in y)$,

x JE GRANIČNI ORDINAL $\Leftrightarrow \exists y \in x(y = y) \wedge x$ JE ORDINAL $\wedge \forall y \in x \exists z \in x(y \in z)$,

x JE ORDINAL SLEDBENIK $\Leftrightarrow x$ JE ORDINAL $\wedge \exists y \in x(y = y) \wedge$ x NIJE GRANIČNI ORDINAL,

x JE KONAČNI ORDINAL $\Leftrightarrow \neg\exists y \in x(y = y) \vee (x$ JE ORDINAL SLEDBENIK $\wedge \forall y \in x(\neg\exists z \in y(z = z) \vee y$ JE ORDINAL SLEDBENIK$)$,

x JE $\omega \Leftrightarrow x$ JE GRANIČNI ORDINAL $\wedge \forall y \in x(y$ JE KONAČNI ORDINAL$)$.

Definicija ordinala koju smo sada dali (ordinal je tranzitivan skup čiji je svaki element tranzitivan) nije ista kao naša definicija s početka ovog poglavlja (ordinal je tranzitivan skup dobro uređen relacijom $\in$), ali nije teško da se u ZFC (ili u nekoj slabijoj teoriji) pokaže da su ove dve definicije u stvari ekvivalentne.

Nisu svi skupovno-teorijski pojmovi apsolutni za tranzitivne klase. Recimo, relacija $y \subseteq x$ jeste apsolutna za sve tranzitivne klase, pošto možemo da je definišemo pomoću Δ_0−formule: $y \subseteq x \Leftrightarrow \forall z \in y(z \in x)$. Neka je $\varphi(x, y)$ ova poslednja formula. Dalje, neka je $\psi(x,v)$ formula $\forall y(y \in v \leftrightarrow \varphi(x,y))$. Ovu smo formulu zapisivali kao $v = \mathscr{P}(x)$. Imamo da važi $\psi^C(x,v)$, gde je klasa C tranzitivna, akko za svako $y \in C$ važi: $y \in v$ akko $\varphi^C(x,y)$ akko $\varphi(x,y)$ akko $x \subseteq y$. Pošto za svako y iz v imamo da $y \in C$, na osnovu tranzitivnosti od C, svaki takav y iz v će biti podskup od x, i v će da sadrži sve podskupove od x *koji se nalaze u* C. Ovo ne moraju da budu *svi* podskupovi skupa x, tj. $v = \mathscr{P}(x) \cap C$, pa možemo imati da je $\mathscr{P}(x) \cap C \neq \mathscr{P}(x)$. Evo jednog primera koji će ovo da ilustruje. Klasa svih ordinala Ord je tranzitivna. Međutim, za svaki ordinal $\alpha \in Ord$ imamo da važi $(Ord, \in) \models \mathscr{P}(\alpha) = \alpha + 1$. Recimo, $(Ord, \in) \models \mathscr{P}(2) = 3$, pošto su u ovoj strukturi elementi skupa 3 tačno oni ordinali (elementi klase Ord) koji su podskupovi ordinala 2, a to su 0, 1 i 2. Naravno, u V važi da je $\mathscr{P}(2) = \{0,1,\{1\},2\} \neq \{0,1,2\}$.

Sledeći pojam koji će nam biti neophodan u nastavku rada je pojam *elementarnog podmodela*:

DEFINICIJA 57. Ako su $\mathscr{M} = (M,E)$ i $\mathscr{N} = (N,E)$ dve strukture jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ i važi $N \subseteq M$, onda kažemo da je $\mathscr{N}$ *elementarni podmodel* od $\mathscr{M}$, što označavamo sa $\mathscr{N} \preceq \mathscr{M}$, akko za svaku formulu $\varphi(x_1,...,x_n)$ jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ i za sve elemente $a_1,...,a_n$ iz N važi

$$\mathscr{N} \models \varphi(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow \mathscr{M} \models \varphi(a_1,...,a_n).$$

Da bismo videli kako pojam elementarnog podmodela može da se upotrebi, prvo ćemo da dokažemo jednu teoremu koja će posebno da nas zanima u kasnijim delovima ovog rada. Da bismo je dokazali, biće nam potrebna sledeća lema (varijanta tvrđenja koje se ponekad zove i TARSKI-VOTOV TEST):

LEMA 58. *Neka je* C *klasa i* $\varphi_1,...,\varphi_n$ *niz formula jezika* $\mathscr{L}_{ZFC}$ *koji je zatvoren za potformule, tj. svaka potformula formule koja se nalazi u ovom nizu, se takođe nalazi u ovom nizu. Formule* $\varphi_1,...,\varphi_n$ *su apsolutne za* C *ako za svaku formulu* $\varphi_i(y_1,...,y_m)$ *koja je oblika* $\exists x \varphi_j(x,y_1,...,y_m)$ *važi*

$$\forall y_1...y_m \in C(\exists x \varphi_j(x,y_1,...,y_m) \rightarrow \exists x \in C \varphi_j(x,y_1,...,y_m)).$$

DOKAZ. Dokazujemo indukcijom po dužini formule φ_i. Pretpostavimo da je tvrđenje dokazano za sve formule manje dužine od φ_i. Ako je formula φ_i atomska, onda je ona apsolutna za C. Takođe, ako je φ_i oblika $\varphi_j \wedge \varphi_k$ ili $\neg\varphi_j$, onda na osnovu apsolutnosti formula φ_j i φ_k možemo da zaključimo da je i formula φ_i apsolutna za C. Pretpostavimo da je φ_i oblika $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_m)$ i uzmimo neke $y_1 ... y_m \in C$. Onda imamo da važi

$$\begin{aligned}
\varphi_i^C(y_1, ..., y_m) \quad &\leftrightarrow \quad \text{(na osnovu definicije relativizacije)} \\
\exists x \in C \varphi_j^C(x, y_1, ..., y_m) \quad &\leftrightarrow \quad \text{(na osnovu apsolutnosti od } \varphi_j) \\
\exists x \in C \varphi_j(x, y_1, ..., y_m) \quad &\leftrightarrow \quad \text{(na osnovu pretpostavke iz tvrđenja)} \\
\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_m) \quad &\leftrightarrow \quad \text{(na osnovu definicije relativizacije)} \\
\varphi_i(y_1, ..., y_m). &
\end{aligned}$$

□

Sledeće tvrđenje se zove TEOREMA REFLEKSIJE i njime ćemo detaljnije da se bavimo u šestoj glavi ovog rada:

TEOREMA 59. *Neka je $Z : Ord \to V$ klasna funkcija koja ima sledeće osobine:*

(1) za svaki par ordinala α i β, takav da važi $\alpha < \beta$, imamo $Z(\alpha) \subseteq Z(\beta)$,

(2) ako je γ granični ordinal, onda je $Z(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z(\alpha)$,

(3) $V = \bigcup_{\alpha \in Ord} Z(\alpha)$.

Za svaki niz formula $\varphi_1, ..., \varphi_n$ i svaki ordinal α, postoji ordinal $\beta > \alpha$, takav da su formule $\varphi_1, ..., \varphi_n$ apsolutne za $Z(\beta)$.

DOKAZ. Neka su $\varphi_1, ..., \varphi_n$ formule jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$. Možemo da pretpostavimo da je ovaj niz formula zatvoren za potformule. Neka je α ordinal. Na osnovu prethodne leme, biće dovoljno da pokažemo da postoji $\beta > \alpha$ takav da za svaku formulu $\varphi_i(y_1, ..., y_{m_i})$ koja je oblika $\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_{m_i})$ važi

$$\forall y_1 ... y_{m_i} \in Z(\beta)(\exists x \varphi_j(x, y_1, ..., y_{m_i}) \to \exists x \in Z(\beta) \varphi_j(x, y_1, ..., y_{m_i})). \tag{1.6.1}$$

Za svako $1 \leq i \leq n$ definisaćemo jednu funkciju F_i na sledeći način: pretpostavimo da je $\varphi_i(y_1,...,y_{m_i})$ oblika $\exists x \varphi_j(x, y_1,..., y_{m_i})$. Neka je $F_i(b_1,...,b_{m_i}) = 0$, ako ne postoji a takvo da $\varphi_j(a, b_1,..., b_{m_i})$ važi u V. Ako postoji takvo a, onda neka je $F_i(b_1,...,b_{m_i})$ najmanji ordinal δ takav da $a \in Z(\delta)$.

Sada ćemo da konstruišemo niz ordinala $\langle \beta_k \mid k < \omega \rangle$ na sledeći način: neka je $\beta_0 = \alpha$. Ako je β_k definisano, neka je β_{k+1} najmanji ordinal $> \beta_k$ takav da za svaku formulu $\varphi_i(y_1,...,y_{m_i})$ i sve $b_1,...,b_{m_i}$ iz $Z(\beta_k)$, važi da je $F_i(b_1,...,b_{m_i}) < \beta_{k+1}$. Neka je $\beta = \bigcup_{k<\omega} \beta_k$. Na osnovu konstrukcije od β lako može da se proveri da je $F_i(b_1,...,b_{m_i}) < \beta$, za svaku formulu $\varphi_i(y_1,...,y_{m_i})$ i sve $b_1,...,b_{m_i}$ iz $Z(\beta)$. Međutim, na osnovu definicije funkcije F_i onda sledi da važi (1.6.1), pa je svaka od formula φ_i apsolutna za $Z(\beta)$, gde je $\beta > \alpha$. □

Možemo da primetimo da funkcija $\alpha \mapsto V_\alpha$ zadovoljava uslove iz prethodne teoreme. Ako mesto o opštijoj hijerarhiji $Z(\alpha)$ govorimo o kumulativnoj hijerarhiji V, onda TEOREMA REFLEKSIJE glasi:

TEOREMA 60. *Za svaki niz formula $\varphi_1,...,\varphi_n$ važi*

$$ZF \vdash \forall \alpha \exists \beta > \alpha (\varphi_1,...,\varphi_n \textit{ su apsolutne za } V_\beta).$$

Na osnovu prethodnog tvrđenja možemo da zaključimo da ako su aksiome teorije ZFC istinite u V, onda za svaki konačan skup aksioma $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ teorije ZFC postoje proizvoljno veliki nivoi kumulativne hijerarhije V_α, takvi da je $(V_\alpha, \in) \models \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$.

Sledeća teorema je takozvana LEVENHAJM-SKOLEMOVA TEOREMA:

TEOREMA 61. *Neka je $\mathcal{M}$ struktura jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$. Za svako $X \subseteq \mathcal{M}$, postoji elementarni podmodel $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$, takav da važi $X \subseteq \mathcal{N}$ i $|\mathcal{N}| \leq |X| + \aleph_0$.*

DOKAZ. Slično kao i u dokazu prethodne teoreme, biće dovoljno da pokažemo da postoji $\mathcal{N} \preceq \mathcal{M}$ takav da $X \subseteq \mathcal{N}$, $|\mathcal{N}| \leq |X| + \aleph_0$ i za svaku egzistencijalnu formulu $\varphi(x, y_1,..., y_n)$ i sve $b_1,...,b_n \in \mathcal{N}$ takve da važi

$$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(b_1,...,b_n),$$

postoji $a \in \mathcal{N}$, takvo da važi

$$\mathcal{M} \models \varphi(a, b_1, ..., b_n).$$

Za svaku formulu $\varphi(x, y_1, ..., y_n)$ možemo da definišemo funkciju $f_\varphi : \mathcal{M}^n \to \mathcal{M}$, tako da za sve $b_1, ..., b_n \in \mathcal{M}$, ako važi

$$\mathcal{M} \models \exists x \varphi(b_1, ..., b_n),$$

onda važi i

$$\mathcal{M} \models \varphi(f_\varphi(b_1, ..., b_n), b_1, ..., b_n).$$

Za svako $X \subseteq \mathcal{M}$, neka je $Sk(X)$ zatvorenje skupa X za funkcije f_φ. Ove se funkcije zovu još i *Skolemovim funkcijama*, a skup $Sk(X)$ se zove i *Skolemova ljuska* skupa X. Pošto formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ ima prebrojivo mnogo, toliko će da bude i Skolemovih funkcija f_φ. Dakle, za svaki skup $X \subseteq \mathcal{M}$ ćemo imati da važi $|Sk(X)| \leq |X| + \aleph_0$. S druge strane, struktura $\mathcal{N}$ čiji je domen $Sk(X)$, će da zadovoljava sva egzistencijalna tvrđenja sa parametrima u $\mathcal{N}$ koja su zadovoljena u $\mathcal{M}$, pa sledi da je $\mathcal{N}$ elementarni podmodel od $\mathcal{M}$. □

Neka je, kao i gore, $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ jedan konačan skup aksioma teorije ZFC. Kao što smo već rekli, ako je V model teorije ZFC, onda na osnovu teoreme refleksije postoje proizvoljno veliki nivoi V_α koji su modeli ovog skupa aksioma. Uzmimo jednu takvu strukturu $(V_\alpha, \in)$. Na osnovu prethodne teoreme sledi da ova struktura ima *prebrojiv* elementarni podmodel $\mathcal{N} \preceq (V_\alpha, \in)$, pa $\mathcal{N} \models \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n$. Da ovaj podmodel uvek može da bude i tranzitivan, govori nam sledeća teorema:

TEOREMA 62. *Neka je C klasa i R dobro zasnovana, skupovna relacija na C koja je ekstenzionalna, tj.* $\forall x, y \in C(\forall z \in C(zRx \leftrightarrow zRy) \to x = y)$. *Tada postoji tranzitivna klasa D i izomorfizam* $\pi : (C, R) \to (D, \in)$.

DOKAZ. Izomorfizam π definišemo rekurzivno na sledeći način: za svako $a \in C$ neka je $\pi(a) = \{\pi(b) \mid b \in ext_R(a)\}$. Neka je $D = \{\pi(a) \mid a \in C\}$. Prvo treba da pokažemo da je π injekcija. Pretpostavimo da ovo nije slučaj i neka je $a \in C$ minimalan element u odnosu na relaciju R, takav da za neko $b \in C$, imamo da važi $a \neq b$ i $\pi(a) = \pi(b)$. Na osnovu definicije funkcije π onda imamo da važi:

$$\{\pi(c) \mid c \in ext_R(a)\} = \{\pi(c) \mid c \in ext_R(b)\}.$$

Međutim, na osnovu $R-$minimalnosti od a sledi da je $ext_R(a) = ext_R(b)$. Pošto je relacija R ekstenzionalna, imamo da je $a = b$, što je nemoguće, pa je funkcija π injekcija. Da je funkcija π surjekcija sledi na osnovu definicije ove funkcije.

S druge strane, ako su $a, b \in C$ takvi da važi aRb, onda je $\pi(a) \in \pi(b)$. U suprotnom smeru, pošto je funkcija π injekcija, onda ako je $\pi(a) \in \pi(b)$, imamo da važi $a \in ext_R(b)$, tj. aRb. Dakle, funkcija π je izomorfizam.

Ostaje nam da pokažemo da je D tranzitivna klasa. Pretpostavimo da $b \in a \in D$. Posmatrajmo c iz C takvo da je $\pi(c) = a$. Na osnovu definicije funkcije π, sledi da je b oblika $\pi(d)$, za neko d iz $ext_R(c)$. Dakle, $d \in C$, pa imamo da je $b = \pi(d) \in D$. □

Teorema koju smo upravo dokazali zove se TEOREMA MOSTOVSKOG O KOLAPSU. Struktura $(D, \in)$ iz teoreme zove se *kolapsom Mostovskog* strukture (C, R), a izomorfizam π se zove još i *kolabirajuća funkcija*. Već smo videli da ako je $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ konačan skup aksioma teorije ZFC, i teorija ZFC ima model, onda postoji prebrojiv model ovog skupa aksioma. TEOREMA MOSTOVSKOG O KOLAPSU nam omogućava da tvrdimo više: pod uslovima koje smo naveli, ovaj skup aksioma ima *tranzitivan*, prebrojiv model.

Prethodna tvrđenja nam pružaju uvid u to kada neki konačan fragment teorije ZFC ima model, i kakva je struktura ovih modela. Ovi rezultati imaju još neke zanimljive posledice. Recimo, jedna od posledica TEOREME REFLEKSIJE jeste da ZF nije konačno aksiomatska teorija. Jer, pretpostavimo da postoji konačan skup aksioma Γ teorije ZF takav da važi $\Gamma \vdash ZF$. Pošto ZF dokazuje TEOREMU REFLEKSIJE, neka je β najmanji ordinal takav da je $(V_\beta, \in) \models \Gamma$. Imamo dakle i $(V_\beta, \in) \models ZF$. Pošto ZF dokazuje da postoji ordinal α, takav da je $(V_\alpha, \in) \models \Gamma$ ovo mora da važi i u $(V_\beta, \in)$, pa ZF dokazuje da postoji ordinal $\alpha < \beta$ takav da važi $(V_\alpha, \in) \models \Gamma$. Ali ovo protivreči minimalnosti od β, pa ZF nije konačno aksiomatska teorija. Nije teško da se vidi da smo u dokazu ovog rezultata takođe mogli da se pozovemo i ne drugu Gedelovu teoremu o nepotpunosti.

Ne treba gubiti iz vida da je TEOREMA REFLEKSIJE jedna *shema* teoreme. Dakle, po jedna teorema za svaku instancu formula $\varphi_1,...,\varphi_n$. Inače bismo mogli da zaključujemo na sledeći način: ZFC dokazuje da svaki konačan skup aksioma Γ ove teorije ima model. Međutim, ZFC dokazuje i teoremu kompaktnosti logike prvog reda: ako je Σ beskonačan skup rečenica takav da svaki njegov konačan podskup ima model, onda i Σ ima model. Dakle, ZFC dokazuje da ZFC ima model, pa je ZFC inkonzistentna teorija. Ovde se radi o sledećem: ZFC *ne dokazuje* „ZA SVAKI KONAČAN SKUP AKSIOMA Γ TEORIJE ZFC, Γ IMA MODEL". Već, za svaki konačan skup aksioma Γ teorije ZFC, ZFC dokazuje „Γ IMA MODEL".

Do sada smo govorili o modelima konačnih fragmenata teorije ZFC. U nastavku ćemo da kažemo nekoliko reči o tome kako izgledaju modeli čitave ove teorije.

Neka je $ZFC - Inf + \neg Inf$ teorija koja se dobija kada skupu aksioma ZFC umesto aksiome beskonačnosti pridružimo njenu negaciju. Skup V_ω čiji su elementi svi *nasledno konačni skupovi*, je model teorije $ZFC - Inf + \neg Inf$, tj. $(V_\omega, \in) \models ZFC - Inf + \neg Inf$. Unutar strukture $(V_\omega, \in)$ možemo definisati skup prirodnih brojeva kao i standardne operacije nad njima, pa pokazati da $(V_\omega, \in)$ zadovoljava sve aksiome teorije (koja je uzajamno interpretabilna sa) PA. Na sledećem nivou, struktura $(V_{\omega+1}, \in)$ zadovoljava sve aksiome teorije (koja je uzajamno interpretabilna sa) PA^2, aritmetike drugog reda, dok $(V_{\omega+2}, \in)$ zadovoljava sve aksiome teorije (koja je uzajamno interpretabilna sa) PA^3, aritmetike trećeg reda. Na ovaj način možemo da sagledamo niz sve jačih aritmetičkih teorija unutar teorije ZFC.

Međutim, šta je sa samom teorijom ZFC? Videli smo da, služeći se njenim sredstvima, možemo otkloniti problem nedokazivosti konzistentnosti koji se pojavljuje u slučaju aritmetike. Ali, ako je i sama konzistentna, teorija ZFC ne dokazuje sopstvenu konzistentnost što je opet posledica Gedelove druge teoreme o nepotpunosti. Da stvar bude gora, izražajna moć teorije skupova otvara vrata mnogim problemima koji su mnogo bliži uobičajenoj matematičkoj praksi od rečenica koje tvrde konzistentnost formalne teorije, a koji su i dalje neodlučivi na osnovu trenutno prihvaćenih aksioma.

Već smo napomenuli da je $(V_\omega, \in)$ model teorije $ZFC - Inf + \neg Inf$. Modeli teorije skupova koji su ove vrste, $(V_\alpha, \in)$ gde je V_α neki inicijalni segment kumulativne hijerarhije, će posebno da nas zanimaju u nastavku ovog rada. Takvi se modeli nazivaju *prirodnim modelima* teorije skupova [Montague and Vaught, 1959]. Kada je $(V_\alpha, \in) \models ZFC$?

Prvo, svaki skup V_α je tranzitivan. Ovo je dovoljno da se pokaže da $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA EKSTENZIONALNOSTI, $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA REGULARNOSTI i $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA UNIJE. Proverimo, primera radi, da važi $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA EKSTENZIONALNOSTI. Za proizvoljne $x, y \in V_\alpha$ imamo da važi $(V_\alpha, \in) \models \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$ akko za svako $z \in V_\alpha$ važi da $z \in x$ akko $z \in y$, tj. ako x i y imaju iste elemente u V_α. Međutim, pošto je skup V_α tranzitivan, on sadrži *sve* elemente svojih elemenata, pa x i y imaju iste elemente i jednaki su. Dakle, $(V_\alpha, \in) \models \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y$. Što se aksiome unije tiče, treba primetiti da je, za svaki skup x, $\rho(\bigcup x) \leq \rho(x)$ pa ako imamo $x \in V_\alpha$, onda imamo i $\bigcup x \in V_\alpha$.

Aksioma beskonačnosti će da važi u svakom $(V_\alpha, \in)$ takvom da je $\alpha \geq \omega + 1$. Ovo je zato što za svaki takav α imamo da $\omega \in V_\alpha$. Ako je α granični ordinal, onda ćemo imati $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA PARA i $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA PARTITIVNOG SKUPA. Jer, ako $x, y \in V_\alpha$, onda postoji $\beta < \alpha$ tako da važi $x, y \in V_\beta$. Tada ćemo imati da važi $\{x, y\} \in V_{\beta+1} \subseteq V_\alpha$ kao i $\mathscr{P}(x) \in V_{\beta+2} \subseteq V_\alpha$.

Da se pokaže da aksioma izbora važi u $(V_\alpha, \in)$, gde je α granični ordinal, je takođe jednostavno. Prvo ćemo da navedemo jednu ekvivalentnu formulaciju ove aksiome: *proizvod neprazne familije nepraznih skupova je neprazan.* Drugim rečima, za familiju $\{x_i \mid i \in I\}$ gde je $I \neq \emptyset$ i svako $x_i \neq \emptyset$, važi da je $\prod_{i \in I} x_i \neq \emptyset$. Možemo da pokažemo da važi sledeće tvrđenje:

LEMA 63. *Ako je A tranzitivan skup, zatvoren za operaciju partitivnog skupa (tj. $x \in A \Rightarrow \mathscr{P}(x) \in A$), operaciju unije ($x \in A \Rightarrow \bigcup x \in A$) i konačne proizvode ($x, y \in A \Rightarrow x \times y \in A$), onda* $(A, \in) \models$AKSIOMA IZBORA.

DOKAZ. Da bismo ovo tvrđenje dokazali, pretpostavimo da $I \in A$ i da $\{x_i \mid i \in I\} \in A$. Tada važi da je $I \times \bigcup\{x_i \mid i \in I\}$ takođe element skupa A. Pošto je A tranzitivan skup, svaki njegov element je ujedno i njegov podskup, pa važi $\bigcup\{x_i \mid i \in I\}^I \subseteq A$. Na osnovu aksiome izbora, postoji funkcija f iz $\{x_i \mid i \in I\}^I$, takva da za svako $i \in I$ važi $f(i) \in x_i$. Međutim, imamo da važi i $P(I \times \bigcup\{x_i \mid i \in I\}) \in A$ pa je funkcija f element skupa A. $\square$

Već smo videli da za granični ordinal α imamo da je V_α zatvoren za operaciju partitivnog skupa i operaciju unije, a slično tome može da se pokaže da je skup V_α zatvoren i za konačne proizvode. Dakle, za jedan takav ordinal imaćemo da važi $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA IZBORA.

Ako je A tranzitivan skup, onda će shema separacije nakon što je relativizujemo na A da kaže sledeće: za proizvoljnu formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n, u)$ jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$, proizvoljan skup y iz A i skupove $x_1, \ldots, x_n$ takođe iz A , postoji skup z iz A koji sadrži tačno one u iz y za koje važi $(A, \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n, u)$. Ovaj skup z je $\{u \in y \mid (A, \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n, u)\}$. Kada kažemo da ova instanca sheme separacije važi u $(A, \in)$ to znači da navedeni skup pripada skupu A. Dakle, da bismo pokazali da $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA SEPARACIJE, gde je α granični ordinal, treba da pokažemo da za svako $y \in V_\alpha$ i $x_1, \ldots, x_n \in V_\alpha$, kao i za svaku formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n, u)$ jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$, skup $\{u \in y \mid (V_\alpha, \in) \models \varphi(x_1, \ldots, x_n, u)\}$ pripada V_α. Ovaj poslednji skup je podskup skupa y, a pošto za V_α važi da ako $x \in V_\alpha$, onda važi i $\mathscr{P}(x) \in V_\alpha$, to znači da $(V_\alpha, \in) \models$AKSIOMA SEPARACIJE.

Na osnovu ovoga što smo rekli do sada možemo da zaključimo da je $(V_\alpha, \in)$, gde je α granični ordinal $> \omega$, model svih aksioma teorije ZFC osim aksiome zamene. Recimo, $(V_{\omega+\omega}, \in)$ je jedan takav model. Međutim, $(V_{\omega+\omega}, \in)$ ne može biti model aksiome zamene, jer postoji formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ koja unutar skupa $V_{\omega+\omega}$ određuje surjekciju iz ω u $\omega + \omega$, ali $\omega + \omega$ nije element skupa $V_{\omega+\omega}$. Aksioma zamene zahteva da se u kumulativnoj hijerarhiji popnemo mnogo više od $V_{\omega+\omega}$.

DEFINICIJA 64. Kardinal κ je *slabo nedostižan* akko je regularan i granični kardinal. Kažemo da je κ *jako nedostižan* akko je regularan i jako granični kardinal.

Nedostižni kardinali se ponekad u literaturi zovu još i *nedostiživi*. Jasno je da je svaki jako nedostižan kardinal slabo nedostižan. U nastavku nećemo mnogo govoriti o slabo nedostižnim kardinalima pa ćemo kada kažemo da je κ *nedostižan*, da mislimo jako nedostižan, osim ako jasno ne kažemo drugačije.

Ako je κ nedostižan kardinal, onda $(V_\kappa, \in) \models$ AKSIOMA ZAMENE. Da bismo ovo pokazali, prvo ćemo da dokažemo neke jednostavne osobine nedostižnih kardinala:

LEMA 65. *Neka je κ nedostižan kardinal. Imamo da važi:*

(1) za svako $x \in V_\kappa$ važi $|x| < \kappa$,

(2) κ je fiksna tačka funkcije $\beth$, tj. $\kappa = \beth_\kappa$,

(3) $|V_\kappa| = \kappa$.

DOKAZ. 1) Dokazaćemo da za svako $\alpha < \kappa$ imamo da važi $|V_\alpha| < \kappa$. Ovo poslednje tvrđenje se dokazuje transfinitnom indukcijom po ordinalu α. Pretpostavimo da je $\alpha < \kappa$ i da važi $\left|V_\beta\right| < \kappa$, za svaki ordinal $\beta < \alpha$. Ako je α oblika $\beta + 1$, za neki ordinal β, onda na osnovu induktivne hipoteze imamo da važi $|V_\alpha| = 2^{|V_\beta|} < \kappa$, pošto je κ jako granični. Ako je α granični ordinal, onda je $|V_\alpha| = sup\left\{\left|V_\beta\right| \mid \beta < \alpha\right\}$. Pošto je na osnovu induktivne hipoteze $\left|V_\beta\right| < \kappa$ i važi $|\alpha| < \kappa$, imamo da takođe važi i $|V_\alpha| < \kappa$, pošto je κ regularan kardinal.

2) Treba samo da primetimo da na osnovu dokaza tvrđenja 1) imamo da važi sledeće: $\beth_\alpha < \kappa$, za svako $\alpha < \kappa$. Na osnovu ovoga sledi da je $\beth_\kappa = \kappa$.

3) Pošto je κ kardinal $> \omega$, imamo da je $|V_\kappa| = \beth_\kappa = \kappa$, na osnovu TEOREME 47 i tvrđenja 2). $\square$

Vratimo se sada aksiomi zamene i pretpostavimo da je κ nedostižan kardinal. Takođe, pretpostavimo da je $\varphi(x, y)$ formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ takva da važi

$$(V_\kappa, \in) \models \forall x \forall y \forall z(\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y = z).$$

Neka je

$$u = \left\{y \in V_\kappa \mid \exists x \in v((V_\kappa, \in) \models \varphi(x, y))\right\}.$$

Treba da pokažemo da za svaku formulu $\varphi(x, y)$ i za svaki element v skupa V_κ imamo da važi $u \in V_\kappa$. Pošto je $u \subseteq V_\kappa$, imamo da važi $\rho(u) \leq \kappa$. Treba međutim da pokažemo da je $\rho(u) < \kappa$. Neka je $F(x) =_{def} \rho(y) + 1$, gde je $(V_\kappa, \in) \models \varphi(x, y)$, ako takvo y postoji u V_κ; inače neka je $F(x) = 0$. Tada će da važi da je $\rho(u) = sup\{F(x) \mid x \in v\}$. Pošto $v \in V_\kappa$ a κ je granični ordinal, sledi da $v \in V_\alpha$ za neko $\alpha < \kappa$. Pošto je, kao što smo gore videli,

$|V_\alpha| < \kappa$, sledi da je $|v| < \kappa$. Kako je F funkcija koja slika v u κ, a κ je regularan, sledi da je $\rho(u) = sup\{F(x) \mid x \in v\} < \kappa$ pa $u \in V_\kappa$, što je i trebalo dokazati. Dakle, ako je κ nedostižan kardinal, onda $(V_\kappa, \in) \models$AKSIOMA ZAMENE.

Postojanje nedostižnih kardinala je nedokazivo u teoriji ZFC, ako je ova teorija konzistentna. Ovo je posledica druge Gedelove teoreme o nepotpunosti. Kada bi njihovo postojanje bilo dokazivo unutar ZFC, onda bismo u ovoj teoriji mogli da dokažemo da ova teorija ima model, tj. da je teorija ZFC konzistentna, što protivreči drugoj Gedelovoj teoremi.

U nastavku ćemo da damo još jedan dokaz tvrđenja iz prve rečenice prethodnog pasusa koji se ne oslanja na Gedelovu teoremu. Neka je $\mathbf{Card}(x)$ skraćenica za formulu jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ kojom se tvrdi da je x kardinal. Dalje, neka su $\mathbf{Ord}(x)$, $\mathbf{Reg}(x)$, $\mathbf{SL}(x)$ i $\mathbf{In}(x)$ skraćenice za formule istog ovog jezika kojima se tvrdi da je x ordinal, regularan, jako granični i nedostižan kardinal, tim redom.

LEMA 66. *Ako je α granični ordinal i $\kappa \in V_\alpha$, onda $\mathbf{In}(\kappa) \Leftrightarrow (V_\alpha, \in) \models \mathbf{In}(\kappa)$. Drugim rečima, formula* **In** *je apsolutna za takvo V_α .*

DOKAZ. Pretpostavimo da je α granični ordinal i da $\kappa \in V_\alpha$. Prvo ćemo da pokažemo da važi $\mathbf{Ord}(\kappa) \Leftrightarrow (V_\alpha, \in) \models \mathbf{Ord}(\kappa)$. To je jednostavno, pošto formula $\mathbf{Ord}(x)$ može da bude ona kojom smo definisali ordinale na početku ovog odeljka. To je jedna Δ_0-formula, a ove su formule apsolutne za tranzitivne klase na osnovu TEOREME 37.

Sada ćemo da pokažemo da važi $\mathbf{Card}(\kappa) \Leftrightarrow (V_\alpha, \in) \models \mathbf{Card}(\kappa)$. Kardinale smo definisali kao inicijalne ordinale, tj. κ je kardinal akko ne postoji bijekcija $f : \beta \to \kappa$ za neko $\beta < \kappa$. Pretpostavimo da važi $\mathbf{Card}(\kappa)$. Nije teško da se pokaže da postoji Δ_0-formula $\mathbf{Bi}(x)$ jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ za koju važi $\mathbf{Bi}(x) \Leftrightarrow x$ JE BIJEKCIJA. Pošto smo pretpostavili da važi $\mathbf{Card}(\kappa)$, ne postoji bijekcija $f : \beta \to \kappa$ za neko $\beta < \kappa$. Pošto je formula **Bi** apsolutna za tranzitivne klase, takva bijekcija ne postoji ni u V_α; dakle $(V_\alpha, \in) \models \mathbf{Card}(\kappa)$. U suprotnom smeru, pretpostavimo da važi $(V_\alpha, \in) \models \mathbf{Card}(\kappa)$ i da postoji bijekcija $f : \beta \to \kappa$ za neko $\beta < \kappa$. Pošto je $f \subseteq \beta \times \kappa \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\beta \cup \kappa))$, sledi da je $\rho(f) \leq \rho(\kappa) + 2$. Pošto je α granični ordinal, imamo da $\kappa \in V_\gamma$, za neko $\gamma < \alpha$. Sledi da $f \in V_{\gamma+2} \subseteq V_\alpha$, pa $f \in V_\alpha$. Pošto je ovo nemoguće, imamo da je $\mathbf{Card}(\kappa)$.

Pokažimo da važi $\mathbf{Reg}(\kappa) \Leftrightarrow (V_\alpha, \in) \models \mathbf{Reg}(\kappa)$. Dokazujemo smer sleva na desno. Pretpostavimo da je κ regularan kardinal, tj. $cf(\kappa) = \kappa$. Ovo možemo da izrazimo na sledeći način: ne postoji ordinal $\beta < \kappa$ i funkcija $f : \beta \to \kappa$ koja je kofinalna u κ. Kao i pojam bijekcije, i pojam funkcije je apsolutan za tranzitivne klase. S druge strane, kofinalnost funkcije $f : \beta \to \kappa$ možemo da izrazimo kao $\bigcup Rng(f) = \kappa$, a $\rho(\bigcup Rng(f)) \leq \rho(Rng(f))$. Sledi da takvo$\beta < \kappa$ neće postojati ni u V_α, pa imamo $(V_\alpha, \in) \models \mathbf{Reg}(\kappa)$. U suprotnom smeru, pretpostavimo da važi $(V_\alpha, \in) \models \mathbf{Reg}(\kappa)$ i pretpostavimo, pored toga, da postoji neko $\beta < \kappa$ i funkcija $f : \beta \to \kappa$ koja je kofinalna u κ. Za ovo β važi da $\beta \in V_\alpha$, a kao i u prethodnom slučaju važiće i $f \in V_\alpha$, što je nemoguće. Imamo dakle da važi $\mathbf{Reg}(\kappa)$.

Dokazujemo da važi $\mathbf{SL}(\kappa) \Leftrightarrow (V_\alpha, \in) \models \mathbf{SL}(\kappa)$. Pretpostavimo da važi $\mathbf{SL}(\kappa)$. Dakle, $2^\lambda < \kappa$, za svaki kardinal $\lambda < \kappa$. Ovo je slučaj akko postoji injekcija $f : \mathscr{P}(\lambda) \to \kappa$, za svaki takav kardinal. Kao i u prethodnim slučajevima, možemo da zaključimo da $f \in V_\alpha$. Dakle, $(V_\alpha, \in) \models \mathbf{SL}(\kappa)$. U suprotnom smeru, pretpostavimo da važi $(V_\alpha, \in) \models \mathbf{SL}(\kappa)$. Pošto je ovo slučaj, imamo da za svaki kardinal $\lambda < \kappa$ postoji injekcija $f : \mathscr{P}(\lambda) \to \kappa$ iz V_α. Svaka takva injekcija nam garantuje da važi $2^\lambda < \kappa$, tj. $\mathbf{SL}(\kappa)$.

Ostaje nam još da pokažemo da važi κ JE NEPREBROJIV $\Leftrightarrow (V_\alpha, \in) \models \kappa$ JE NEPREBROJIV. Pretpostavimo da je κ neprebrojiv; onda ne postoji injekcija $f : \kappa \to \omega$. Takva injekcija neće da postoji ni u V_α, jer je pojam injekcije iz κ u ω apsolutan za V_α. U suprotnom smeru, pretpostavimo da važi $(V_\alpha, \in) \models \kappa$ JE NEPREBROJIV kao i da postoji injekcija $f : \kappa \to \omega$. Kao i ranije, jednostavno je da se vidi da $f \in V_\alpha$, što je nemoguće, pa imamo da važi je κ neprebrojiv. □

TEOREMA 67. *ZFC* $\nvdash \exists\kappa\mathbf{In}(\kappa)$.

DOKAZ. Neka je λ najmanji nedostižan kardinal. Na osnovu onoga što smo rekli gore, imamo da je $(V_\lambda, \in) \models ZFC$. Ako $ZFC \vdash \exists\kappa\mathbf{In}(\kappa)$, onda $(V_\lambda, \in) \models \exists\kappa\mathbf{In}(\kappa)$. Dakle, mora postojati neki kardinal $\kappa < \lambda$, takav da važi $(V_\lambda, \in) \models \mathbf{In}(\kappa)$. Na osnovu prethodne leme imamo da je κ zaista nedostižan kardinal i $< \lambda$, što protivreči minimalnosti od λ. □

Vratimo se za trenutak hijerarhiji skupova $H(\kappa)$ koju smo definisali u prethodnom odeljku. Neka je $ZFC - P$ teorija ZFC bez aksiome partitivnog skupa.

TEOREMA 68. *Ako je κ regularan kardinal veći od $\aleph_0$, onda je $(H(\kappa), \in) \models ZFC - P$.*

DOKAZ. Svaki od skupova $H(\kappa)$ je tranzitivan, zatvoren za unije, parove i podskupove svojih elemenata, pa će AKSIOMA EKSTENZIONALNOSTI, AKSIOMA REGULARNOSTI, AKSIOMA UNIJE, AKSIOMA PARA i AKSIOMA SEPARACIJE da važe u $(H(\kappa), \in)$, na osnovu LEME 50 u prethodnom odeljku. Takođe, pošto $\omega \in H(\kappa)$, na osnovu 5) LEME 50, nije teško videti da važi $(H(\kappa), \in) \models$AKSIOMA BESKONAČNOSTI. Na osnovu 6) iste leme, važiće da $(H(\kappa), \in) \models$AKSIOMA ZAMENE. Da se vidi da će važiti $(H(\kappa), \in) \models$AKSIOMA IZBORA, treba prvo da se proveri da za svako x iz $H(\kappa)$ postoji y takođe iz $H(\kappa)$, takvo da je y dobro uređenje na skupu x . To se postiže tako što se prvo proveri da je pojam dobrog uređenja apsolutan za $H(\kappa)$. Na osnovu aksiome izbora, za proizvoljno x iz $H(\kappa)$, postoji dobro uređenje $y \subseteq x \times x$. Treba proveriti da ovo y pripada skupu $H(\kappa)$. Međutim, skup $H(\kappa)$ je zatvoren za proizvode na osnovu LEME 50, pa ako $x \in H(\kappa)$, onda i $x \times x \in H(\kappa)$. Pošto je $H(\kappa)$ zatvoren za podskupove svojih elemenata, sledi da je $y \in H(\kappa)$. □

Sledeće pitanje koje možemo da postavimo jeste: kada je $(H(\kappa), \in) \models ZFC$? To će da bude slučaj kada je κ regularan, jako granični kardinal veći od $\aleph_0$. Drugim rečima, kada je κ nedostižan:

TEOREMA 69. *Ako je κ nedostižan, onda je $V_\kappa = H(\kappa)$.*

DOKAZ. Na osnovu TEOREME 49 već znamo da je $H(\kappa) \subseteq V_\kappa$. Pošto je κ nedostižan, onda za svako $\alpha < \kappa$ važi $|V_\alpha| < \kappa$, na osnovu dokaza LEME 41. Pošto za proizvoljno x iz V_κ važi da je $x \in V_\alpha$, za neko $\alpha < \kappa$, sledi da je $\rho(x) < \kappa$, pa je $TC(x) \subseteq V_{\rho(x)}$. Iz ovoga sledi da je $|TC(x)| < \kappa$, pa imamo da je $x \in H(\kappa)$, tj. $V_\kappa \subseteq H(\kappa)$. □

Ovaj odeljak o modelima teorije skupova koji su oblika $(V_\kappa, \in)$ i $(H(\kappa), \in)$, možemo da sumiramo na sledeći način:

ako je $\kappa = \omega$, onda je $V_\kappa = H(\kappa)$, i strukture $(V_\kappa, \in)$ i $(H(\kappa), \in)$ su modeli svih aksioma teorije ZFC, sa izuzetkom aksiome beskonačnosti;

ako je κ granični ordinal, onda je $(V_\kappa, \in)$ model svih aksioma teorije ZFC, sa izuzetkom aksiome zamene;

ako je κ regularan kardinal, onda je $(H(\kappa), \in)$ model svih aksioma teorije ZFC, sa izuzetkom aksiome partitivnog skupa;

ako je κ nedostižan, onda je $V_\kappa = H(\kappa)$ i strukture $(V_\kappa, \in)$ i $(H(\kappa), \in)$ su modeli teorije ZFC.

U sledećem odeljku ćemo nešto više da kažemo o nedostižnim kardinalima kojima smo se bavili u ovom odeljku. Osim toga, definisaćemo još neke klase takozvanih *velikih kardinala*, koji će posebno da nas zanimaju u nastavku ovog rada.

1.7. Veliki kardinali

U prethodnom odeljku smo videli da, ako je κ nedostižan kardinal, onda je $(V_\kappa, \in) \models ZFC$, pa postojanje ovih kardinala nije dokazivo u teoriji ZFC na osnovu druge Gedelove teoreme. Ovi kardinali su najmanji u hijerarhiji takozvanih *velikih kardinala*, a aksiome koje tvrde njihovo postojanje zovu se još i *jake aksiome beskonačnosti* ili *aksiome velikih kardinala*.

Neka je In^n , za $n \geq 1$, tvrđenje POSTOJI NAJMANJE n NEDOSTIŽNIH KARDINALA. Videli smo da $ZFC \nvdash \mathrm{In}^1$. U opštem slučaju ćemo imati da $ZFC + \mathrm{In}^n \nvdash \mathrm{In}^{n+1}$. Na primer, teorija $ZFC + \mathrm{In}^2$ dokazuje postojanje modela teorije $ZFC + \mathrm{In}^1$, na sličan način kao što teorija $ZFC + \mathrm{In}^1$ dokazuje postojanje modela teorije ZFC. Ova su tvrđenja linearno uređena u pogledu *konzistentske snage*: za svako $n \geq 1$, $Con(ZFC + \mathrm{In}^{n+1}) \Rightarrow Con(ZFC + \mathrm{In}^n)$. Ovo će da bude slučaj i sa drugim aksiomama velikih kardinala o kojima ćemo da govorimo u nastavku.

Definicija nedostižnih kardinala može dodatno da se ojača, što će onda da proizvede jače aksiome velikih kardinala. Pretpostavimo da postoji prava klasa nedostižnih kardinala, tj. za svaki ordinal α postoji nedostižan kardinal $\kappa > \alpha$. Neka je $\langle \iota_\alpha \mid \alpha \in Ord \rangle$ strogo rastući niz koji pobrojava sve nedostižne kardinale. Tada ćemo imati da je $\iota_\omega > \bigcup_{n<\omega} \iota_n$, pošto je $cf(\bigcup_{n<\omega} \iota_n) = \omega$ a svaki nedostižan kardinal je regularan. Međutim, ako pretpostavimo da postoje granični ordinali γ takvi da je $\iota_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} \iota_\alpha$, onda će za takve ordinale da važi da je $\iota_\gamma = \gamma$, pošto je $cf(\bigcup_{\alpha<\gamma} \iota_\alpha) \leq \gamma$ i ι_γ je regularan. Takve ordinale zovemo $1-$*nedostižnim kardinalima.* Pretpostavka o postojanju $1-$nedostižnih kardinala je jača od pretpostavke o postojanju prave klase nedostižnih kardinala. Ako je κ $1-$nedostižan kardinal, onda je $(V_\kappa, \in) \models$POSTOJI PRAVA KLASA NEDOSTIŽNIH KARDINALA. Vidimo da ako je κ $1-$nedostižan, onda je on $\kappa-$ti po redu nedostižan kardinal. Ako ovo iteriramo, onda možemo da kažemo da je κ $\alpha-$*nedostižan*, za proizvoljan ordinal α, akko je κ nedostižan i za svaki ordinal $\beta < \alpha$ imamo da je κ $\kappa-$ti po redu $\beta-$nedostižan kardinal. U ovom kontekstu, $0-$nedostižan kardinali su prosto nedostižni. Ove napomene možemo da sumiramo sledećom definicijom:

DEFINICIJA 70. Za svaki ordinal α, definišemo $\alpha-$*nedostižne* kardinale κ rekurzivno, na sledeći način:

> κ je $0-$*nedostižan* akko je κ nedostižan;
> κ je $(\alpha+1)-$*nedostižan* akko je κ nedostižan i $\kappa = \bigcup\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE } \alpha-\text{NEDOSTIŽAN}\}$;
> κ je $\gamma-$*nedostižan*, za granični ordinal γ, akko je κ $\alpha-$nedostižan za svako $\alpha < \gamma$.

Da bismo definisali veće kardinale od nedostižnih i $\alpha-$nedostižnih, poslužićemo se nešto drugačijom idejom. Pretpostavimo da postoji prava klasa nedostižnih kardinala, tj. za svaki ordinal α postoji nedostižan kardinal $\kappa > \alpha$. Označimo ovu klasu sa $\mathfrak{In}$. Neka je κ beskonačan, regularan kardinal i $C \subseteq \kappa$ **CLUB** u κ. Mogli bismo da zahtevamo da svaki skup C sadrži nedostižan kardinal, tj. da je $\mathfrak{In} \cap C \neq \emptyset$. Ovo nas dovodi do definicije *Maloovih kardinala*, koji će da budu mnogo veći od nedostižnih:

DEFINICIJA 71. Neka je κ beskonačan, regularan kardinal. Kažemo da je κ *Maloov kardinal* akko je skup

$$\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE NEDOSTIŽAN}\}$$

stacionaran u κ.

Prisetimo se da je E' skup svih graničnih tačaka skupa ordinala E (v. LEMA 32). Sledeće tvrđenje nam daje bolji uvid u veličinu Maloovih kardinala:

LEMA 72. *Ako je κ Maloov kardinal, onda je κ $\kappa-$nedostižan i skup*

$$\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE } \lambda\text{-NEDOSTIŽAN}\}$$

je stacionaran u κ.

DOKAZ. Uzmimo stacionaran skup $S = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE NEDOSTIŽAN}\}$ i definišimo skupove C_α , za $\alpha < \kappa$, transfinitnom indukcijom na sledeći način:

$C_0 = S \cup S'$,

$C_{\alpha+1} = (C_\alpha \cap S)'$,

$C_\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha$, za granični ordinal $\gamma < \kappa$.

Svaki od skupova C_α je **CLUB** u κ. To nije teško da se vidi: svaki stacionaran podskup od κ je neograničen u κ, pa su na osnovu LEME 32 skupovi S' i $S \cup S'$ *CLUB* podskupovi u κ. Takođe, za svako $\alpha < \kappa$ imamo da je $S_\alpha = C_\alpha \cap S$ stacionaran u κ. Nije teško da se vidi da je $S_\alpha = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE } \alpha\text{-NEDOSTIŽAN}\}$ i da je $\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$, pa je κ $\kappa-$nedostižan. Takođe, ako je $D = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$, onda je D **CLUB** u κ, pa je skup $S^\star = D \cap S$ stacionaran u κ. Međutim, imamo da je $S^\star = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE } \lambda\text{-NEDOSTIŽAN}\}$. ☐

U pogledu konzistentske snage, jasno je da važi $Con(ZFC + \exists\kappa\ \kappa \text{ JE MALOOV}) \Rightarrow Con(ZFC + \exists\kappa\ \kappa \text{ JE NEDOSTIŽAN})$, a ako uzmemo u obzir prethodnu lemu važi i mnogo više.

Maloove kardinale smo dobili tako što smo iterirali svojstva nedostižnosti, pa smo onda posmatrali one kardinale koji po svojoj veličini svaku takvu iteraciju prevazilaze. Ovo nije jedini način na koji možemo da definišemo nove klase velikih kardinala. Još jedan način bi bio da posmatramo neko svojstvo najmanjeg beskonačnog kardinala $\aleph_0$, pa da onda zahtevamo da postoji kardinal $> \aleph_0$ koji takođe poseduje ovo svojstvo. O jednom takvom svojstvu ćemo nekoliko reči da kažemo u nastavku.

Ako je X skup i n prirodan broj, sa $[X]^n$ ćemo da označavamo skup svih podskupova skupa X koji imaju tačno n elemenata. Ako je $\{Y_1, Y_2\}$ jedna dvočlana particija skupa $[X]^n$, tj. neprazni skupovi $Y_1, Y_2 \subseteq [X]^n$ su takvi da važi $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ i $Y_1 \cup Y_2 = [X]^n$, onda možemo da se pitamo da li postoji neki veliki podskup H skupa X, takav da je $[H]^n \subseteq Y_1$ ili $[H]^n \subseteq Y_1$?

Da bismo prethodno pitanje bolje ilustrovali, prvo ćemo da uvedemo neke jednostavne definicije:

Definicija 73. *Graf* G je jedan uređeni par (V, E), gde je V skup *čvorova* grafa G, a $E \subseteq V \times V$ skup *ivica* ovog grafa. Grafovi u kojima su svaka dva čvora povezana nekom ivicom, tj. $E = V \times V$, zovu se *potpuni grafovi.* Potpune grafove sa n čvorova označavamo sa K_n.

Grafove možemo i da *bojimo.* Jako zanimljivi i duboki problemi u teoriji grafova tiču se njihovog bojenja. Recimo, mogli bismo da svaku od ivica nekog grafa G obojimo jednom od dve boje, npr. crvenom ili plavom. Ovakvo bojenje grafova dvema bojama se zove još i $2-$*bojenje.* Uzmimo na primer potpuni graf sa šest čvorova, K_6. Može da se pokaže da će svako $2-$bojenje ovog grafa da proizvede plavi ili crveni trougao (ovo je graf K_3). Ovakav podgraf početnog grafa, u kome su sve ivice obojene jednom bojom zovemo još i *monohromatskim.* Graf K_6 je najmanji graf ove vrste - nije teško da se vidi da postoji $2-$bojenje grafa K_5 takvo da K_5 ne sadrži monohromatski K_3. Takođe, može da se pokaže da će za svako $2-$bojenje, graf K_{18} da sadrži monohromatski K_4.

Sada možemo da preformulišemo naše pitanje koje smo postavili gore. Neka je $n = 2$ i uzmimo da je naš skup X skup čvorova grafa $\mathscr{X} = (X, [X]^2)$. Neka su sve ivice iz $Y_1 \subseteq [X]^2$ obojene crvenom, a sve ivice iz $Y_2 \subseteq [X]^2$ plavom bojom. Ovo je jedno $2-$bojenje grafa $\mathscr{X}$. Pitanje koje smo postavili gore onda glasi: da li postoji neki veliki podskup $H \subseteq X$, takav da je graf $\mathscr{H} = (H, [H]^2)$ monohromatski?

Da bismo na ovo pitanje mogli da odgovorimo, biće nam neophodne neke definicije:

Definicija 74. Neka su X i M skupovi, $n > 0$ i f funkcija iz skupa $[X]^n$ u M. Ako je $H \subseteq X$ i funkcija f je konstantna na $[H]^n$, onda kažemo da je H *homogen* za funkciju f. Ako je $|X| = \kappa$, $|M| = \mu$ i za svaku funkciju $f : [X]^n \to M$ postoji $H \subseteq X$ koji je homogen za f i $|H| = \lambda$, onda pišemo

$$\kappa \to (\lambda)^n_\mu.$$

Ako postoji $f : [X]^n \to M$ za koju ne postoji homogen skup kardinalnosti μ, onda pišemo

$$\kappa \nrightarrow (\lambda)^n_\mu.$$

Tvrđenja oblika $\kappa \to (\lambda)^n_\mu$ i $\kappa \nrightarrow (\lambda)^n_\mu$ zovu se još i *teoreme o particijama* ili *relacije particije*. Funkcija $f : [X]^n \to M$ je jedna particija skupa $[X]^n$ na $|M|$ blokova ili bojenje elemenata skupa $[X]^n$ u $|M|$ boja. Naše napomene o monohromatskim podgrafovima grafova K_5 i K_6 gore, bi onda mogle u ovoj notaciji da se izraze kao: $5 \nrightarrow (3)^2_2$ i $6 \to (3)^2_2$.

Da bismo ovaj pojam još malo približili čitaocu, dokazaćemo jedan osnovni rezultat iz ove oblasti. Reč je o REMZIJEVOJ TEOREMI:

TEOREMA 75. *Za svako* $1 \le n, m < \omega$ *važi* $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m$.

DOKAZ. Tvrđenje ćemo da dokažemo indukcijom po n. Za $n = 1$, ovo je takozvani *Dirikleov princip*: ako beskonačno mnogo objekata stavimo u konačno mnogo kutija, onda će makar jedna kutija da sadrži beskonačno mnogo objekata. Pretpostavimo onda da tvrđenje važi za $n \ge 1$ i neka je $f : [\aleph_0]^{n+1} \to m$ jedna particija skupa $[\aleph_0]^{n+1}$ u m blokova.

Želimo da pokažemo da postoji beskonačan skup E koji ima sledeću osobinu: $(\star)$ Ako su $a_1 < ... < a_n < a < b$ elementi skupa E, onda je $f(\{a_1, ..., a_n, a\}) = f(\{a_1, ..., a_n, b\})$. Da bismo pokazali da takav skup E postoji, prvo ćemo da definišemo dva niza $\langle A_i \mid i < \omega\rangle$ i $\langle x_i \mid i < \omega\rangle$ za koje će da važi

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq ...$$

kao i

$$x_0 < x_1 < ....$$

Ove nizove definišemo na sledeći način: neka je $A_0 = \aleph_0$, a ako je skup A_i definisan, neka je x_i najmanji element ovog skupa. Tada će svako z iz $A_i \setminus \{x_i\}$ da određuje jednu particiju g_z $n-$torki skupa $\{x_0, ..., x_i\}$, tako što ćemo da imamo $g_z(\{x_{j_1}, ..., x_{j_n}\}) =$

$f(\{x_{j_1},\dots,x_{j_n},z\})$. Pošto je skup $[\{x_0,\dots,x_i\}]^n$ konačan, postoji samo konačno mnogo različitih particija ovog skupa u m blokova. Na osnovu ovoga sledi da postoji beskonačan skup $A_{i+1} \subseteq A_i \setminus \{x_i\}$ takav da su, za $z \in A_{i+1}$, sve funkcije g_z jednake. Dakle, imamo da je $E = \{x_0, x_1, \dots\}$ jedan beskonačan skup koji zadovoljava uslov $(\star)$ gore.

Uzmimo sada particiju $g : [E]^n \to m$ za koju će da važi $g(\{a_1,\dots,a_n\}) = f(\{a_1,\dots,a_n,a\})$, gde je $a \in E$ i $a > a_n$. Na osnovu induktivne hipoteze sledi da postoji beskonačan skup $H \subseteq E$ koji je homogen za particiju g. Međutim, na osnovu definicije particije g sledi da će skup takođe H biti homogen i za particiju f. □

Jedna od posledica REMZIJEVE TEOREME, tj. njenog posebnog slučaja $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$, je i sledeća: Neka je $G = (V, E)$ potpuni graf, takav da je $|V| = \aleph_0$. Za svako 2−bojenje ivica ovog grafa, G sadrži potpuni podgraf $G' = (V', E')$ takav da je $\left|V'\right| = \aleph_0$ i G' je monohromatski.

Sledeća dva negativna rezultata su takođe klasični primeri teorema o particijama. Prvi rezultat je Gedelov, mada su ga nezavisno od Gedela dokazali i Erdeš (Paul Erdős) i Kakutani (Shizuo Kakutani). Drugi rezultat je dokazao Šerpinjski (Wacław Sierpiński).

LEMA 76. *Za svaki kardinal κ važi:*

(1) $2^\kappa \not\to (3)^2_\kappa$,

(2) $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$.

DOKAZ. (1) Posmatrajmo skup $S = \{g \mid g : \kappa \to \{0,1\}\}$. Definišimo particiju $f : [S]^2 \to \kappa$ na sledeći način: $f(\{g_0, g_1\}) = \alpha$, za $\alpha < \kappa$, akko je α najmanja koordinata takva da je $g_0(\alpha) \neq g_1(\alpha)$. Da ne postoji tročlani skup $A \subseteq S$ takav da je koji je homogen za f jednostavno je da se vidi, pošto bi to značilo da postoje tri funkcije g_0, g_1 i g_2 takve da su $g_0(\alpha), g_1(\alpha), g_2(\alpha)$ tri različita elementa skupa $\{0,1\}$.

(2) Neka je skup S kao i u prethodnom slučaju. Posmatrajmo dva uređenja na ovom skupu, leksikografsko uređenje $<_l$ ($g_0 <_l g_1$ akko postoji $\gamma < \kappa$ takvo da je $g_0(\gamma) < g_1(\gamma)$ i $g_0(\delta) = g_1(\delta)$, za svako $\delta < \gamma$) i dobro uređenje $<_w$. Definišimo particiju $f : [S]^2 \to 2$ na sledeći način: $f(\{g_0, g_1\}) = 0$ ako je $g_0 <_l g_1 \Leftrightarrow g_0 <_w g_1$, inače, neka je $f(\{g_0, g_1\}) = 1$.

TVRDNJA 77. U uređenju $(2^\kappa, <_l)$ ne postoje rastući ili opadajući nizovi dužine κ^+.

DOKAZ. Pretpostavimo da nam je dat skup $G = \{g_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\} \subseteq 2^\kappa$, gde ako je $\alpha < \beta$, onda je $g_\alpha <_l g_\beta$. Za svako α, definišimo γ_α kao najmanje $\gamma < \kappa$ takvo da , za neko β, imamo da važi , $g_\alpha \restriction \gamma = g_\beta \restriction \gamma$ i $0 = g_\alpha(\gamma) < g_\beta(\gamma) = 1$. Neka je β_α najmanje takvo β.

Uzmimo skup $F_\gamma = \{\alpha \mid \gamma_\alpha = \gamma\}$, i pretpostavimo da $\alpha, \alpha^\star \in F_\gamma$. Tada će da važi $g_\alpha \restriction \gamma = g_{\beta_\alpha} \restriction \gamma = g_{\alpha^\star} \restriction \gamma$, kao i $g_\alpha(\gamma) = g_{\alpha^\star}(\gamma) = 0 < g_{\beta_\alpha}(\gamma) = 1$. Dakle, $g_{\alpha^\star} < g_{\beta_\alpha}$.

Za svaki par $\alpha, \alpha^\star \in F_\gamma$ imamo da je $\beta_\alpha = \beta_{\alpha^\star}$. Neka je δ_γ ovo β_α. Onda će uvek da važi $F_\gamma \subseteq \delta_\gamma$, pa ćemo imati da je $|F_\gamma| \leq \kappa$. Međutim, $\kappa^+ = \bigcup_{\gamma<\kappa} F_\gamma$, što je nemoguće pa je tvrđenje dokazano. $\square$

Vratimo se sada dokazu naše leme. Ako je $X \subseteq S$ homogen za f , $f(\{g_0, g_1\}) = 0$, za svaki par funkcija g_0, g_1 iz X i $|X| = \kappa^+$, onda se leksikografsko uređenje $<_l$ i dobro uređenje $<_w$ slažu na skupu X. Pošto je $<_w$ dobro uređenje, sledi da je i $<_l$ takođe dobro uređenje. Međutim, na osnovu tvrđenja, imamo da ne može postojati podskup od 2^κ čiji je tip uređenja $\geq \kappa^+$. $\square$

Videli smo da je posledica Remzijeve teoreme da važi $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$. Možemo da se pitamo da li postoje neprebrojivi kardinali koji poseduju ovo svojstvo? Na osnovu rezultata Šerpinjskog, iz prethodne leme, vidimo da ovi kardinali ne mogu da budu kardinali sledbenici, tj. za svaki kardinal κ ćemo imati da važi $\kappa^+ \nrightarrow (\kappa^+)^2_2$. Ovo ostavlja mogućnost da neki granični kardinal $\kappa > \aleph_0$ zadovoljava $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Međutim, sada ćemo da pokažemo da svaki takav kardinal ne može da bude singularan, pa je njihovo postojanje nedokazivo u ZFC:

TEOREMA 78. *Ako je $\kappa > \aleph_0$ kardinal za koji važi $\kappa \to (\kappa)^2_2$, onda je κ regularan i jako granični kardinal, tj. κ je nedostižan.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je κ singularan i neka je $\kappa = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$, gde su skupovi S_α disjunktni, kardinalnosti manje od κ i $\lambda < \kappa$. Neka je particija $f : [\kappa]^2 \to 2$ definisana na sledeći način: $f(\{\xi, \zeta\}) = 1$ ako postoji neko $\alpha < \lambda$ takvo da je $\xi, \zeta \in S_\alpha$, i neka je $f(\{\xi, \zeta\}) = 0$ inače. Ako je $H \subseteq \kappa$ homogen za ovo f, onda ili je H podskup nekog od skupova S_α, pa je kardinalnosti manje od κ, ili seče svaki od skupova S_α u tačno jednoj tački, pa je takođe kardinalnosti $< \kappa$. Dakle, κ je regularan kardinal.

Pretpostavimo sada da postoji neko $\lambda < \kappa$, takvo da je $2^\lambda \geq \kappa$. Na osnovu LEME 76.2 gore, imamo da je $2^\lambda \nrightarrow (\lambda^+)^2_2$, pa sledi da je $\kappa \nrightarrow (\lambda^+)^2_2$ i na kraju $\kappa \nrightarrow (\kappa)^2_2$. Dakle, κ je jako granični. □

Na osnovu prethodnog tvrđenja vidimo da se ovde radi velikim kardinalima:

DEFINICIJA 79. Kardinal $\kappa > \aleph_0$ je *slabo kompaktan* akko važi $\kappa \to (\kappa)^2_2$.

Slabo kompaktni kardinali su dobili ime po tome što karakterišu neke infinitarne jezike sa jakim svojstvima kompaktnosti. Da bismo mogli da steknemo bolji uvid u veličinu slabo kompaktnih kardinala i da bismo videli da su oni mnogo veći od nedostižnih, biće nam neophodne neke definicije:

DEFINICIJA 80. *Drvo* $\mathcal{T} = \langle T, \leq_T \rangle$ je parcijalno uređen skup takav da je za svako $x \in T$ skup $\check{x} = \{y \mid y \leq_T x\}$ dobro uređen. Za svaki element x iz T, koji zovemo još i *račvom* drveta $\mathcal{T}$, definišemo njegovu *visinu* $ht(x)$ u drvetu $\mathcal{T}$ na sledeći način: $ht(x) =$ jedinstveni ordinal izomorfan sa $\check{x}$. Sa $\mathcal{T}_\alpha$ ćemo da označimo $\alpha-$ti *nivo* drveta $\mathcal{T}$, tj. skup svih x iz T takvih da je $ht(x) = \alpha$. *Visina drveta* $\mathcal{T}$ će biti najmanji ordinal α takav da je $\mathcal{T}_\alpha = \emptyset$. Maksimalne lance (podskupove skupa T linearno uređene relacijom $\leq_T$) u drvetu $\mathcal{T}$ ćemo zvati njegovim *granama*.

Za kardinal κ kažemo da ima *svojstvo drveta* akko svako drvo kardinalnosti κ čiji su nivoi svi kardinalnosti $< \kappa$ ima granu kardinalnosti κ. Primera radi, kardinal $\aleph_0$ ima svojstvo drveta i ovaj je rezultat poznat kao KENIGOVA LEMA koja je dobila ime po mađarskom matematičaru Kenigu (Dénes König) koji ju je dokazao. Da $\aleph_1$ ovo svojstvo nema, dokazao je Aronšajn (Nachman Aronszajn).

TEOREMA 81. *Ako je κ kardinal takav da važi $\kappa \to (\kappa)^2_2$, onda κ ima svojstvo drveta.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \leq_T \rangle$ jedno drvo kardinalnosti κ čiji su svi nivoi kardinalnosti $< \kappa$. Možemo da pretpostavimo da je $T = \kappa$. Za α, β iz T, definišimo relaciju $\alpha <_l \beta$, koja će da širi relaciju $<_T$, na sledeći način: $\alpha <_l \beta$ akko $\alpha <_T \beta$ ili su α i β neuporedivi u T (ne važi $\alpha \leq_T \beta$ niti $\beta \leq_T \alpha$) i važi $\alpha^\star < \beta^\star$, gde su $\alpha^\star \leq_T \alpha$ i $\beta^\star \leq_T \beta$ najmanji u T

koji su neuporedivi. Neka je $f : [\kappa]^2 \to 2$ particija takva da je $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$ ako je $\alpha \leq_T \beta$ ili $\alpha <_l \beta$. Neka je skup $H \subseteq \kappa$ homogen za f, $|H| = \kappa$ i $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$, za svaki par α, β iz H.

Posmatrajmo skup $B = \{\alpha < \kappa \mid |\{\beta \in H \mid \alpha <_T \beta\}| = \kappa\}$. Pokazaćemo da je $|B \cap \mathcal{T}_\gamma| = 1$, za svako $\gamma < \kappa$. Da bismo ovo videli, uzmimo neki nivo $\mathcal{T}_\gamma$, za $\gamma < \kappa$. Onda imamo da važi $|\bigcup_{\delta \leq \gamma} \mathcal{T}_\delta| < \kappa$, pa skup H ima κ elemenata u $\mathcal{T}$ iznad $\mathcal{T}_\gamma$. Ako je $\zeta \in \mathcal{T}_\gamma$, neka je $H_\zeta = \{\xi \in H \mid \zeta <_T \xi\}$. Tada će da važi da je $\left|\bigcup_{\zeta \in \mathcal{T}_\gamma} H_\zeta\right| = \kappa$. Međutim, imamo da je $|\mathcal{T}_\gamma| < \kappa$, pa mora da postoji neko $\zeta \in \mathcal{T}_\gamma$, takvo da je $|H_\zeta| = \kappa$. Ovo znači da $\zeta \in B$. Dakle, B je jedan lanac u $\mathcal{T}$, kardinalnosti κ , pa κ ima svojstvo drveta. $\square$

Oslanjajući se na svojstvo drveta, može da se pruži alternativna karakterizacija slabo kompaktnih kardinala: κ je slabo kompaktan akko je nedostižan i ima svojstvo drveta. Činjenica da slabo kompaktan kardinal ima svojstvo drveta je po sebi zanimljiva ali će nama da posluži više kao tehničko sredstvo da pokažemo da slabo kompaktni kardinali nisu samo nedostižni, već i Maloovi. Pre nego što ovo uradimo biće nam potrebne sledeće dve tehničke leme:

LEMA 82. *Neka je A skup kardinala takav da za svaki regularan kardinal κ, skup $A \cap \kappa$ nije stacionaran u κ. Onda postoji regresivna funkcija čiji je domen A i koja je injekcija.*

DOKAZ. Neka je $\gamma = \bigcup A$. Pošto je A skup kardinala, i γ je kardinal. Tvrđenje ćemo da dokažemo indukcijom po kardinalu γ. Ako je $\gamma = 0$, onda je $A = \emptyset$. Takođe, ako je $\gamma = \omega$, onda je $A = \{\omega\}$. Ako je γ oblika λ^+, onda je $A = B \cup \{\lambda^+\}$, za neki skup beskonačnih kardinala manjih od λ^+. Međutim, onda ćemo imati da je $\bigcup B < \kappa^+$, pa na osnovu induktivne hipoteze sledi da postoji regresivna funkcija f na B koja je injekcija. Ovu funkciju možemo da proširimo do skupa A tako što ćemo da stavimo da je $f(\kappa^+) = \kappa$, što nam daje regresivnu funkciju na skupu A koja je injekcija.

Ako je γ singularan kardinal, neka je $\delta = cf(\gamma)$. Takođe, neka je $\langle \mu_\xi \mid \xi < \delta \rangle$ neprekidan rastući niz kardinala koji je kofinalan u γ i važi da je $\mu_0 > \delta$. Za svaki kardinal $\lambda < \gamma$, imaćemo da važi $\lambda < \mu_0$ ili postoji $\xi < \delta$ takvo da je $\mu_\xi \leq \lambda < \mu_{\xi+1}$. Za svako $\xi < \delta$ možemo da primenimo induktivnu hipotezu na $A \cap \mu_\xi$, i time dobijemo jednu regresivnu funkciju g_ξ koja je injekcija i čiji je domen $A \cap \mu_\xi$. Pomoću ovih funkcija sada možemo da definišemo funkciju f čiji je domen skup A i koja zadovoljava uslove iz tvrđenja:

$$f(\lambda) = \begin{cases} g_0(\lambda) + 1 & \text{ako } \lambda < \mu_0, \\ \mu_\xi + g_{\xi+1}(\lambda) & \text{ako } \mu_\xi < \lambda < \mu_{\xi+1}, \\ \omega \otimes \xi & \text{ako } \lambda = \mu_\xi. \end{cases}$$

Ako je γ jedan regularan, granični kardinal, onda na osnovu pretpostavke postoji **CLUB** C u γ takav da je $C \cap \gamma \cap A = \emptyset$. Možemo takođe da pretpostavimo da je $C \cap \omega = \emptyset$. Neka je $\langle \mu_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$ jedan rastući niz koji pobrojava skup C. Onda možemo, slično onome što smo imali u prethodnom slučaju, da definišemo funkciju f koja će da zadovoljava uslove iz tvrđenja na sledeći način:

$$f(\lambda) = \begin{cases} g_0(\lambda) + 1 & \text{ako } \lambda < \mu_0, \\ \mu_\xi + g_{\xi+1}(\lambda) & \text{ako } \mu_\xi < \lambda < \mu_{\xi+1}, \\ 0 & \text{ako } \lambda = \gamma \in A \end{cases}$$

□

LEMA 83. *Ako je κ slabo kompaktan i $S \subseteq \kappa$ je stacionaran, onda postoji regularan kardinal $\lambda < \kappa$ takav da je $S \cap \lambda$ stacionaran u λ.*

DOKAZ. Pretpostavimo da za svaki regularan kardinal $\lambda < \kappa$, skup $S \cap \lambda$ nije stacionaran u λ. Skup C, čiji su elementi svi beskonačni kardinali manji od κ, je **CLUB** u κ. Dakle, $S \cap C$ je stacionaran u κ. S druge strane skup $S \cap C \cap \lambda$ nije stacionaran u λ, pa možemo da pretpostavimo da je skup S u stvari skup čiji su elementi beskonačni kardinali. Neka je $\langle \lambda_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ strogo rastući niz koji pobrojava skup S. Neka je

$$T = \left\{ s \mid \exists \xi < \kappa (s \in \prod_{\zeta < \xi} \lambda_\zeta \text{ I } s \text{ JE INJEKCIJA }) \right\}.$$

Za svako $\xi < \kappa$, skup $S \cap \lambda_\xi$ nije stacionaran ni u jednom regularnom kardinalu, pa na osnovu LEME 82 postoji regresivna funkcija s koja je injekcija i čiji je domen skup $S \cap \lambda_\xi$. Pošto je $S \cap \lambda_\xi = \{\lambda_\zeta \mid \zeta < \xi\}$ imamo da $s \in T$.

Nije teško videti da je $\mathscr{T} = (T, \subseteq)$ jedno drvo kardinalnosti κ. Ta svako $\alpha < \kappa$ imamo da je

$$\prod_{\beta<\alpha} \lambda_\beta \leq (\bigcup_{\beta<\alpha} \lambda_\beta)^{|\alpha|} < \kappa,$$

tj. svaki nivo u drvetu $\mathscr{T}$ je kardinalnosti manje od κ. Na osnovu TEOREME 81, ovo drvo ima granu B kardinalnosti κ. Međutim, onda je $\bigcup B$ regresivna funkcija koja je injekcija i čiji je domen skup S, što protivreči TEOREMI 40. □

POSLEDICA 84. *Svaki slabo kompaktan kardinal je Maloov.*

DOKAZ. Neka je κ slabo kompaktan kardinal i C proizvoljan **CLUB** u κ. Skup C je i stacionaran u κ, pa na osnovu prethodne leme imamo da postoji regularan kardinal $\lambda < \kappa$, takav da je skup $C \cap \lambda$ stacionaran u λ. Međutim, pošto je $C \cap \lambda$ neograničen u λ a skup C je zatvoren u κ, imamo da je $\lambda \in C$. Dakle, svaki **CLUB** u κ sadrži regularan kardinal, pa je κ Maloov. □

Oslanjajući se LEMU 83, lako može da se pokaže da ne samo što je skup

$$S_0 = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE REGULARAN }\}$$

stacionaran u κ, pa je κ Maloov, već je i skup

$$S_1 = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE MALOOV }\}$$

stacionaran u κ. Kardinali koji imaju ovo poslednje svojstvo ponekad se nazivaju *hiper-Maloovi.* Jer, ako je κ slabo kompaktan, onda je κ Maloov, na osnovu POSLEDICE 84. Ako je C proizvoljan **CLUB** u κ, onda je $C \cap S_0$ stacionaran u κ, pa, na osnovu LEME 83, postoji regularan $\lambda < \kappa$, takav da je $\lambda \cap C \cap S_0$ stacionaran u λ. Ovo znači da je λ Maloov. Kao i u prethodnom slučaju, sledi da $\lambda \in C$, pa je κ hiper-Maloov. Ovaj argument može da se iterira pa da se pokaže da su slabo kompaktni kardinali *hiper-hiper-Maloovi*, *hiper-hiper-hiper-Maloovi* itd.

Vratimo se za trenutak relacijama particije $\kappa \to (\lambda)^n_\mu$. Videli smo da za svako $1 \leq n, m < \omega$ važi $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m$. Možemo da se pitamo da li postoje kardinali κ takvi da za svaku particiju *prebrojivih* podskupova od κ u dva bloka postoji homogen skup kardinalnosti κ? Drugim rečima, da li postoje kardinali κ za koje važi $\kappa \to (\kappa)^\omega_2$? U opštijem slučaju, da li postoji kardinal κ, takav da važi $\kappa \to (\lambda)^\lambda_2$, gde je λ beskonačan? Takvi kardinali ne postoje. Međutim, u odsustvu aksiome izbora, postojanje ovakvih kardinala je, uz izvesne pretpostavke, konzistentno sa ZF. Recimo, Martin (Donald Martin) je pokazao da ako teoriji ZF pridružimo izvesno tvrđenje koje se zove *aksioma determinisanosti*, o kojem će više reči biti u glavama [7.1 – 7.2] ovog rada, onda važi $\aleph_1 \to (\aleph_1)^{\aleph_1}_2$. U ovom okruženju, kardinal $\aleph_1$ poseduje neka svojstva koja ga u izvesnom smislu čine jako velikim.

S druge strane, pošto ne možemo da eksponent u relaciji $\kappa \to (\lambda)^n_\mu$ učinimo beskonačnim, možda možemo da uradimo nešto što je tome blisko. Evo o čemu je reč.

DEFINICIJA 85. Neka je $[X]^{<\omega}$ skup svih konačnih podskupova od X, drugim rečima $[X]^{<\omega} = \{x \subseteq X : |x| < \omega\}$. Ako nam je data particija $f : [\kappa]^{<\omega} \to \mu$, za skup $H \subseteq \kappa$ kažemo da je *homogen* za f akko za svako $n < \omega$ imamo da je f konstantna na $[H]^n$. Kažemo da $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_\mu$ važi akko za svaku particiju $f : [\kappa]^{<\omega} \to \mu$ postoji homogen skup $H \subseteq \kappa$ čiji je tip uređenja α.

Služeći se relacijom particije $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_\mu$ možemo da definišemo još jednu važnu klasu velikih kardinala:

DEFINICIJA 86. Za svako $\alpha \geq \omega$, *Erdešov kardinal* $\kappa(\alpha)$ je najmanji kardinal κ takav da važi $\kappa \to (\alpha)^{<\omega}_2$.

Prethodna definicija nam daje jednu rastuću hijerarhiju Erdešovih kardinala. Naime, ako je $\omega \leq \alpha < \beta$, onda je $\kappa(\alpha) < \kappa(\beta)$. Svaki Erdešov kardinal je slabo kompaktan, pa time i Maloov i nedostižan. Još neke klase velikih kardinala ćemo da definišemo u glavi [6] ovog rada, i tada ćemo nešto više da kažemo i o veličini kardinala o kojima smo u ovom odeljku govorili. Posebno ćemo na Erdešove kardinale da se vratimo u odeljku [6.4], a u sledećem odeljku ćemo da kažemo nekoliko reči o rezultatima koji se tiču nezavisnosti hipoteze kontinuuma.

1.8. Nezavisnost hipoteze kontinuuma

Vratimo se za trenutak teoriji PA. Posle Gedelovog dokaza teorema o nepotpunosti 1931. dugo se nije znalo postoje li neka prirodna[5] kombinatorna tvrđenja koja su istinita u standardnoj strukturi prirodnih brojeva a koja su nedokaziva sredstvima PA. Sredinom sedamdesetih godina prošlog veka, Paris (Jeff Paris) i Harington (Leo Harrington) su [Paris and Harrington, 1978], oslanjajući se na prethodne rezultate Parisa i Kirbija (Laurence Kirby) [Kirby and Paris, 1977], dokazali da izvesno proširenje konačne Remzije teoreme, iako istinito, nije dokazivo unutar PA. Oni su pokazali da pomenuto tvrđenje za posledicu ima konzistentnost PA, pa bi tako njegova dokazivost unutar PA protivrečila Gedelovoj drugoj teoremi o nepotpunosti. Posle ovog rezultata pojavio se čitav niz tvrđenja koja su istinita a nedokaziva sredstvima PA. Gudstinova teorema [Kirby and Paris, 1982], Kanamori-Mekalonova teorema [Kanamori and McAloon, 1987], Fridmanova (Harvey Friedman) varijanta Kruskalove teoreme [Friedman, 1981], su samo neka od njih. Da bismo dokazali ova tvrđenja, sredstva PA nisu dovoljna, nego se kao i u slučaju nedokazivosti $Con(PA)$, moramo poslužiti jačim teorijama ne bismo li ih dokazali. Svako od pomenutih tvrđenja dokazivo je unutar ZFC. Štaviše, mnogo slabija teorija PA^2, dokazuje svako od njih. Dakle, nepotpunost Peanove aritmetike nije ograničena na metamatematička tvrđenja koja liče na ona koja srećemo u dokazima Gedelovih teorema o nepotpunosti, nego se proteže i na prirodne matematičke rezultate.

U slučaju teorije skupova stvari stoje još drastičnije. Postoje elementarna tvrđenja jezika teorije skupova koja su neodlučiva na osnovu trenutno prihvaćenih aksioma. Sigurno najpoznatije od njih jeste Kantorova (Georg Cantor) *hipoteza kontinuuma* CH: svaki beskonačan podskup skupa realnih brojeva je ili prebrojiv ili iste kardinalnosti kao ceo skup realnih brojeva. Pošto je 1874. dokazao da postoji bijekcija između skupa

[5] Prirodnost matematičkih tvrđenja nije jednostavno odrediti. U ovom kontekstu, pak, možemo u svojstvu grube aproksimacije reći da su prirodna ona tvrđenja koja se ne pozivaju eksplicitno na aritmetizaciju sintakse ili na pojam formalne dokazivosti.

svih prirodnih brojeva i skupa svih algebarskih brojeva, ali i da ne postoji bijekcija između skupova prirodnih i realnih brojeva, Kantor je otvorio put „višim beskonačnostima" u matematici. Ono što je Kantor pokazao bilo je da $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, gde je $\aleph_0$ kardinalnost skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ dok je $2^{\aleph_0}$ kardinalnost skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. On je u stvari pokazao i više od toga. Naime, ako je A proizvoljan skup, kardinalnost njegovog partitivnog skupa $\mathscr{P}(A)$ je strogo veća od njegove kardinalnosti. Drugim rečima, za proizvoljan kardinal κ, imamo da važi $2^\kappa > \kappa$ (v. TEOREMA 9). Pitanje koje se prirodno nameće jeste gde se tačno nalazi $2^{\aleph_0}$ na skali alefa? Hipoteza kontinuuma kaže da je $2^{\aleph_0}$ upravo prvi veći kardinal od $\aleph_0$, tj.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Ovo je poseban slučaj uopštene hipoteze kontinuuma GCH koja kaže da je, za svaki ordinal α, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Hipoteza kontinuuma je zaokupljala Kantorovu pažnju sve do kraja njegove matematičke karijere. Iako nije uspeo da je dokaže ona je bila podstrek za njegovu novostvorenu teoriju skupova. Hipoteza kontinuuma je pronašla svoje mesto kao prva na čuvenoj listi Hilbertovih (David Hilbert) problema s početka XX veka, i iako su mnoga velika imena tog perioda, uključujući i Hilberta, pokušavala da sa njom izađu na kraj, ona je ostala nerešena.

Jedna zanimljiva epizoda vezana za hipotezu kontinuuma datira od 9. avgusta 1904. godine, kada je Kenig (Julius König) na trećem svetskom kongresu matematičara u Hajdelbergu predstavio „dokaz" tvrđenja da $2^{\aleph_0}$ nije alef, tj. da se ne može dobro urediti tako da tip njegovog uređenja bude neki od $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$. Važan deo ovog dokaza predstavlja sledeće tvrđenje, koje se često naziva *Kenigovom teoremom*:

TEOREMA 87. *Neka je I proizvoljan skup i neka su, za svako $i \in I$, κ_i i λ_i kardinali za koje važi $\kappa_i < \lambda_i$. Tada važi sledeća nejednakost*

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i.$$

DOKAZ. Pretpostavimo da važi $\kappa_i < \lambda_i$, za svako $i \in I$, i neka je $\kappa = \sum_{i\in I}\kappa_i$ i $\lambda = \prod_{i\in I}\lambda_i$. Za svako i iz I, neka je l_i skup kardinalnosti λ_i. Možemo da pretpostavimo da su skupovi l_i međusobno disjunktni, jer uvek možemo da mesto l_i posmatramo skup $l_i \times \{i\}$. Pošto za svako i iz I imamo da važi $\kappa_i < \lambda_i$, za svaki skup l_i možemo da nađemo njegov podskup k_i koji će da bude kardinalnosti κ_i, kao i neki element a_i iz $l_i \setminus k_i$. Neka je $X = \bigcup_{i\in I} k_i$ i $Y = \prod_{i\in I} l_i$. Imamo da je $|X| = \kappa$ i $|Y| = \lambda$. Sada ćemo da konstruišemo jednu injekciju $f : X \to Y$, na osnovu čega će da sledi da je $\kappa \leq \lambda$. Za svako x iz X , neka je $f(x)$ jednak nizu $\langle y_i \mid i \in I\rangle$, gde je $y_i = x$, ako $x \in k_i$, i $y_i = a_i$ inače. Da bismo proverili da je funkcija f injekcija, uzmimo neke $x_1 \neq x_2$ iz X, takve da je $y = f(x_1)$ i $z = f(x_2)$. Ako postoji neko $i \in I$, takvo da važi $x_1, x_2 \in k_i$, onda je $y_i = x_1 \neq x_2 = z_i$. S druge strane, ako za $i \neq j$ imamo da važi $x_1 \in k_i$ i $x_2 \in k_j$, onda imamo da je $y_i = x_1 \neq a_i = z_i$. Pošto u oba ova slučaja imamo da je $y \neq z$, sledi da je funkcija $f : X \to Y$ injekcija.

S druge strane, poslužićemo se idejom Kantorovog dijagonalnog argumenta da pokažemo da proizvoljna funkcija $g : X \to Y$ ne može da bude surjekcija. Za svako $i \in I$, neka je $p_i : Y \to l_i$ $i-$ta projekcija. Takođe, neka je $B_i = \{p_i(g(x)) \mid x \in k_i\}$. Skup B_i je podskup skupa l_i, kardinalnosti najviše κ_i, pa uvek postoji neko $b_i \in l_i \setminus B_i$. Treba da uočimo da niz $b = \langle b_i \mid i \in I\rangle \in Y$ nije element skupa $Rng(g)$. Jer, ako $x \in X$, onda $x \in k_i$, za neko i iz I, pa $p_i(g(x)) \in B_i$ a $p_i(b) = b_i \notin B_i$. Imamo dakle da je $g(x) \neq b$, pa funkcija $g : X \to Y$ nije surjekcija. □

Služeći se ovim rezultatom, Kenig je nameravao da pokaže da $2^{\aleph_0}$ nije alef na sledeći način: pretpostavimo da je $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, za neki ordinal α. Ako posmatramo $\omega-$niz $\aleph_{\alpha+1}, \aleph_{\alpha+2}, \ldots$, možemo da primetimo da je njegov supremum $\aleph_{\alpha+\omega}$ jednak sumi

$$\sum_{n<\omega} \aleph_{\alpha+n}.$$

Na osnovu Kenigove teoreme gore, znamo da je

$$\prod_{n<\omega} \aleph_{\alpha+n+1} > \sum_{n<\omega} \aleph_{\alpha+n}.$$

Odavde sledi da je

$$(\dagger) \quad (\aleph_{\alpha+\omega})^{\aleph_0} > \aleph_{\alpha+\omega}.$$

Sledeći rezultat na koji se Kenig pozvao, bila je Bernštajnova (Felix Bernstein) teorema, koju je formulisao u svojoj tezi iz 1901. godine:

$$(\aleph_\beta)^{\aleph_0} = \aleph_\beta \cdot 2^{\aleph_0}, \text{ za svaki ordinal } \beta.$$

Ako u ovom poslednjem tvrđenju supstituišemo $\alpha+\omega$ mesto β, dobijamo $(\aleph_{\alpha+\omega})^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+\omega} \cdot 2^{\aleph_0}$, a pošto smo pretpostavili da je $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$, sledi da je $(\aleph_{\alpha+\omega})^{\aleph_0} = \aleph_{\alpha+\omega} \cdot \aleph_\alpha = \aleph_{\alpha+\omega}$. Pošto ovo protivreči nejednakosti (†), sledi da $2^{\aleph_0}$ nije alef.

Kenigov argument je, naravno, pogrešan. Greška leži u Bernštajnovoj teoremi koja ne važi za ordinale β koji su prebrojive kofinalnosti. Međutim, upravo je ovaj slučaj Bernštajnove teoreme onaj koji je Kenigu bio neophodan za „dokaz" tvrđenja da $2^{\aleph_0}$ nije alef. Ovaj netačan Bernštajnov rezultat je „popravio" Hausdorf (Felix Hausdorff) koji je dokazao sledeću jednakost:

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}, \text{ za sve ordinale } \alpha, \beta.$$

Kenigova teorema (TEOREMA 87) koju smo naveli gore nam ipak daje neke informacije o kardinalnosti kontinuuma.

LEMA 88. *Ako su $\kappa \geq 2$ i $\lambda \geq \aleph_0$ kardinali, onda je $cf(\kappa^\lambda) > \lambda$.*

DOKAZ. Pokazaćemo da ako je $\kappa_i < \kappa^\lambda$, za svako $i \in I$ i $|I| = \lambda$, onda važi da je $\sum_{i\in I} \kappa_i < \kappa^\lambda$. Međutim, na osnovu TEOREME 87, ovo je lako da se vidi:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \kappa^\lambda = (\kappa^\lambda)^\lambda = \kappa^{\lambda\cdot\lambda} = \kappa^\lambda.$$

□

Na osnovu prethodne leme imamo da je $cf(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$, pa kontinuum ne može da prebrojive kofinalnosti. Ovo isključuje kardinale kao što su $\aleph_\omega$ ili $\aleph_{\omega^{\omega^\omega}}$ kao moguće kardinalnosti kontinuuma, primera radi.

I pored ovog Kenigovog rezultata, dugo nije bilo većeg napretka na polju CH. Prvi značajan pomak u njenom rešavanju dogodio se 1938. godine kada je Gedel dokazao da su CH kao i GCH konzistentne sa aksiomama ZFC.

TEOREMA 89. *Pretpostavimo da je ZFC konzistentna teorija. Onda $ZFC \nvdash \neg CH$ i $ZFC \nvdash \neg GCH$.*

Metoda kojom se Gedel poslužio u dokazu prethodne teoreme naziva se metodom *unutrašnjih modela*. Ukratko, on je, radeći u teoriji ZF, definisao minimalan unutrašnji model L teorije ZFC i pokazao da su unutar modela L hipoteze CH i GCH istinite. Ovaj Gedelov model L , zove se još i *konstruktibilni univerzum*:

DEFINICIJA 90. Definišimo skupove L_α, za svaki ordinal α , na sledeći način:

$L_0 = \emptyset$,

$L_{\alpha+1} = \mathscr{D}(L_\alpha)$,

$L_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} L_\alpha$, za granični ordinal γ.

Na kraju, neka je $L = \bigcup_{\alpha \in Ord} L_\alpha$.

Vidimo, dakle, da konstrukcija unutrašnjeg modela L prati konstrukciju kumulativne hijerarhije V sa ključnom razlikom da dok u slučaju definicije od V u naslednom koraku $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$ sakupljamo sve podskupove prethodnog nivoa u sledeći nivo, u izgradnji klase L skup $L_{\alpha+1}$ definišemo tako da sadrži samo *definabilne* podskupove skupa L_α(v. DEFINICIJA 54 u odeljku [1.6]). Na ovaj način „kontrolišemo" operaciju partitivnog skupa, dodajući samo one podskupove koji su neophodni da bi L bio model aksioma teorije ZFC.

Neke jednostavne osobine nivoa konstruktibilnog univerzuma navodimo u sledećoj lemi:

LEMA 91. *Za sve ordinale α i β važi:*

(1) $L_\alpha \subseteq V_\alpha$, a za $\alpha \le \omega$ važi $L_\alpha = V_\alpha$,

(2) L_α je tranzitivan skup,

(3) $\beta < \alpha \Rightarrow L_\beta \subseteq L_\alpha$,

(4) $\beta < \alpha \Rightarrow L_\beta \in L_\alpha$ *i* $\beta \in L_\alpha$,

(5) *za* $\alpha \geq \omega$, $|L_\alpha| = |\alpha|$,

(6) $\alpha \subseteq L_\alpha$,

(7) $L_\alpha \cap Ord = \alpha$.

DOKAZ. Prvi deo tvrđenja 1) se dokazuje transfinitnom indukcijom po ordinalu α, oslanjajući se na činjenicu da je $\mathscr{D}(x) \subseteq \mathscr{P}(x)$, za svaki skup x. Drugi deo ovog tvrđenja će da sledi nakon što pokažemo da je $L_n = V_n$, za svaki prirodan broj n. Međutim, već smo pokazali da ako je x konačan skup, onda je $\mathscr{D}(x) = \mathscr{P}(x)$ (v. napomene posle DEFINICIJE 54 u odeljku [1.6]).

Tvrđenja 2) i 3) takođe dokazujemo transfinitnom indukcijom po α. Ako je $\alpha = 0$ ili je α granični ordinal, onda oba tvrđenja slede jednostavno. Ako je $\alpha = \beta + 1$, pretpostavimo da $x \in L_\beta$. Formula $y \in x$ (ovde je x parametar) definiše skup $x' = \{y \in L_\beta \mid y \in x\}$. Pošto je na osnovu induktivne hipoteze skup L_β tranzitivan, iz $y \in x$ sledi da $y \in L_\beta$, pa imamo da je $x = x'$ i $x \in L_{\beta+1} = L_\alpha$. Dakle, $L_\beta \subseteq L_\alpha$. S druge strane, ako $x \in L_\alpha$, onda $x \subseteq L_\beta$, pa na osnovu prethodnog tvrđenja imamo $x \subseteq L_\alpha$. Dakle, skup L_α je tranzitivan.

Formula $x = x$ definiše skup L_β u L_β, pa sledi da $L_\beta \in \mathscr{D}(L_\beta)$. Takođe, $\beta = \{x \in L_\beta \mid x$ JE ORDINAL$)^{L_\beta}\} \in L_\alpha$, pa je time je tvrđenje 4) dokazano.

Da bismo dokazali 5), pretpostavimo da je $\alpha \geq \omega$. Na osnovu 1) znamo da je $|L_\omega| = |V_\omega| = \aleph_0$. Pretpostavimo da važi $|L_\alpha| \leq |\alpha|$. Pošto je svaki element skupa $L_{\alpha+1}$ određen jednim konačnim nizom elemenata iz skupa L_α i jednom formulom jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$, kojih ima prebrojivo mnogo, onda važi

$$|L_{\alpha+1}| \leq \left|L_\alpha^{<\omega}\right| \cdot |\omega| \leq |\alpha| = |\alpha+1|.$$

Ako je γ granični ordinal, onda važi

$$\left|L_\gamma\right| = \left|\bigcup_{\omega \leq \alpha < \gamma} L_\alpha\right| \leq \sum_{\omega \leq \alpha < \gamma} |\alpha| \leq \left|\gamma\right|.$$

Da bismo dokazali da važi i $|\alpha| \leq |L_\alpha|$, treba samo da primetimo da na osnovu 4) sledi da je $\alpha \subseteq L_\alpha$, što nam daje $|\alpha| \leq |L_\alpha|$. Dakle, ako je $\alpha \geq \omega$, onda važi $|L_\alpha| = |\alpha|$.

Tvrđenja 6) i 7) takođe slede iz tvrđenja 4) pošto, kao što smo napomenuli, za svaki ordinal α imamo da važi $\alpha \in L_{\alpha+1}$. $\square$

Na osnovu prethodnog tvrđenja možemo da vidimo da se hijerarhije L i V slažu sve do nivoa $\omega+1$. Sa jedne strane imamo da je $|L_{\omega+1}| = |\omega+1| = \aleph_0$, a s druge $|V_{\omega+1}| = 2^{\aleph_0}$. Na sledećem nivou imamo da je $|L_{\omega+2}| = \aleph_0$ dok je $|V_{\omega+1}| = 2^{2^{\aleph_0}}$ itd. Nivoi L_α će da ostanu prebrojivi, za svaki prebrojiv ordinal α, dok će kardinalnost nivoa V_α da raste veoma brzo. S druge strane, obe ove hijerarhije sadrže sve ordinale; za svaki ordinal α imamo da važi $\alpha \in L_{\alpha+1} \setminus L_\alpha$ i $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$, pa se L i V ne razlikuju po svojoj „visini".

Međutim, Gedel je pokazao da je konzistentno sa aksiomama teorije ZF da isti skupovi mogu biti izgrađeni u oba ova slučaja. Drugim rečima, $V = L$, i ovo je Gedelova *aksioma konstruktibilnosti* koju bismo, u nešto formalnijem obliku, mogli da zapišemo kao $\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$. Da bismo dokazali da je aksioma $V = L$ konzistentna sa ZF, prvo treba da proverimo da je $(L, \in)$ model teorije ZF. Ovo se proverava na sličan način kao što smo u odeljku [1.6] proverili da je $(V_\kappa, \in)$, gde je κ nedostižan, model teorije ZFC. Na primer, pošto je klasa L tranzitivna na osnovu LEME 91 (2), sledi da $(L, \in) \models$AKSIOMA EKSTENZIONALNOSTI. Isto tako, pošto $\omega \in L_{\omega+1}$ na osnovu LEME 91 (4), sledi da $(L, \in) \models$AKSIOMA BESKONAČNOSTI itd. Kao i u odeljku [1.6] i ovde se važan deo dokaza zasniva na apsolutnosti određenih pojmova za tranzitivne klase. Nakon što se pokaže da sve aksiome teorije ZF važe u L, treba da pokažemo da je i funkcija kojom je rekurzivno definisana konstruktibilna hijerarhija $L = \langle L_\alpha \mid \alpha \in Ord \rangle$ takođe apsolutna za tranzitivne klase koje su modeli teorije ZF. Kada se i ovo proveri nije teško da se dokaže sledeće:

TVRĐENJE 92. $(L, \in) \models ZF + V = L$.

Već smo rekli da je $(L, \in)$ model teorije ZF. Treba samo da se proveri da je $(L, \in)$ model aksiome konstruktibilnosti. Drugim rečima, treba da pokažemo da važi $ZF \vdash (V = L)^L$, tj. da dokažemo $\forall x \in L \exists \alpha \in L (x \in L_\alpha^L)$. Uzmimo neko x iz L i neka je α ordinal takav da važi $x \in L_\alpha$. Pošto L sadrži sve ordinale na osnovu LEME 91 (7), imamo da

$\alpha \in L$. Da $x \in L_\alpha^L$ sledi na osnovu apsolutnosti funkcije $L = \langle L_\alpha \mid \alpha \in Ord \rangle$ za tranzitivne klase koje su modeli teorije ZF, što nam daje $L_\alpha^L = L_\alpha$, za svaki ordinal α.

Na osnovu prethodnog tvrđenja imamo da važi sledeća implikacija: $Con(ZF) \Rightarrow Con(ZF+V=L)$. Sada ćemo, radeći u teoriji $ZF+V=L$, da pokažemo da važi aksioma izbora. Drugim rečima, pokazaćemo da važi $(L, \in) \models$AKSIOMA IZBORA.

Prvo treba da primetimo da ako je x tranzitivan skup, onda dobro uređenje skupa x može da se proširi do dobrog uređenja skupa $\mathscr{D}(x)$. Već smo napomenuli da je svaki element skupa $\mathscr{D}(x)$ određen jednim uređenim parom $(\varphi, \vec{a})$, gde je φ formula jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ a $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ jedna konačna $n-$torka parametara iz skupa x. Međutim, moguće je da za neki element skupa $\mathscr{D}(x)$ postoji više ovakvih parova koji ga određuju, recimo $(\varphi, \vec{a})$ i $(\psi, \vec{b})$. Ovo može da se reši tako što ćemo ove parove dobro urediti, pa ćemo svakom elementu skupa $\mathscr{D}(x)$ da pripišemo odgovarajući uređeni par koji je najmanji u ovom dobrom uređenju. Inicijalni segment dobrog uređenja skupa $\mathscr{D}(x)$ će onda da čine elementi skupa x, a pomoću uređenja skupa x možemo da leksikografski uredimo skup $x^{<\omega}$ - ovo je skup svih konačnih nizova elemenata skupa x. Formule φ jezika $\mathscr{L}_{ZFC}$ možemo da uredimo tako što ćemo da uredimo njihove Gedelove brojeve $\lceil \varphi \rceil$. Na kraju, elemente skupa $\mathscr{D}(x)$ ćemo da uredimo na sledeći način:

$$(\varphi, \vec{a}) < (\psi, \vec{b}) \text{ akko } \lceil \varphi \rceil < \lceil \psi \rceil \text{ ili } (\lceil \varphi \rceil = \lceil \psi \rceil \text{ i } \vec{a} < \vec{b}).$$

Na ovaj način možemo da dobro uredimo svaki od nivoa konstruktibilne hijerarhije L_α i to tako da ako je $\alpha < \beta$, onda je dobro uređenje na L_α inicijalni segment dobrog uređenja na L_β. Ovo nam daje jedno definabilno dobro uređenje konstruktibilnog univerzuma L. Dakle, $(L, \in) \models$AKSIOMA IZBORA.

Pre nego što pokažemo kako Gedelova aksioma konstruktibilnosti povlači GCH, navodimo jedan važan sastojak ovog dokaza. U pitanju je GEDELOVA LEMA O KONDENZACIJI:

LEMA 93. *Neka je α granični ordinal i $(X, \in) \preceq (L_\alpha, \in)$. Tada postoji jedinstveni ordinal $\beta \leq \alpha$ i jedinstveni izomorfizam $\pi : (X, \in) \to (L_\beta, \in)$.*

DOKAZ. Prvo treba da se proveri da $L_\omega \subseteq X$. Ovo proveravamo indukcijom, tako što ćemo da pokažemo da $L_n \subseteq X$, za svako $n < \omega$. Međutim, jednostavno je videti da je ovo slučaj pošto su svi elementi skupova L_n definabilni. Naime, ako $a \in L_{n+1}$, onda je $a = \{a_1, ..., a_m\} \subseteq L_n$, za neke $a_1, ..., a_m$ iz L_n. Dakle, rečenica

$$\exists x((a_1 \in x) \wedge ... \wedge (a_m \in x) \wedge \forall y \in x((y = a_1) \vee ... \vee (y = a_m)))$$

je istinita u $(L_n, \in)$. Pošto je po pretpostavci $L_n \subseteq X$, ova će rečenica bude istinita i u $(X, \in)$, što znači da $a \in X$. Ako je $\alpha = \omega$, onda je $X = L_\omega$ pa tvrđenje trivijalno sledi.

Pretpostavimo da je $\alpha > \omega$. Na osnovu TEOREME MOSTOVSKOG O KOLAPSU (pošto u $(X, \in)$ važi aksioma ekstenzionalnosti, jer važi u $(L_\alpha, \in)$) znamo da postoji jedinstvena kolabirajuća funkcija $\pi : (X, \in) \to (M, \in)$ koja je izomorfizam, i M je tranzitivan. Sada treba da se pokaže da je $M = L_\beta$, za neko $\beta \leq \alpha$. Ideja je da se pokaže da konstrukcija od L može da se ponovi unutar $(L_\alpha, \in)$ pa će da važi $(L_\alpha, \in) \models V = L$. Drugim rečima, imamo da je $L_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta^{L_\alpha}$. Posle toga, treba da se pokaže da je $M = \bigcup_{\beta \in Ord^M} L_\beta^M$, i osim toga da važi $L_\beta^M = L_\beta$, za svako $\beta \in Ord^M$. Dakle, imaćemo da je $M = L_{Ord^M}$, pa samo treba da se proveri da je $Ord^M \leq \alpha$. Međutim, pošto je svaki ordinal u M oblika $\pi(\delta)$, za neki ordinal δ iz X, imaćemo da je Ord^M jednak tipu uređenja od $Ord \cap X$ koji je $\leq \alpha$. □

Sada možemo da u grubim crtama objasnimo Gedelov dokaz konzistentnosti GCH:

TEOREMA 94. $ZFC + V = L \vdash GCH$.

DOKAZ. Ovde ćemo da damo samo skicu ovog Gedelovog dokaza, kao što smo to uradili i gore, za AC. Dakle, treba da se pokaže da, ako $V = L$, onda za svaki beskonačni kardinal κ važi $2^\kappa = \kappa^+$. Dovoljno će biti da pokažemo da je $2^\kappa \leq \kappa^+$. Pretpostavimo da je $a \subseteq \kappa$. Na osnovu aksiome konstruktibilnosti, postoji neki granični ordinal γ, takav da je $a \in L_\gamma$. Treba da pokažemo da je najmanji takav γ strogo manji od κ^+.

Neka je, na osnovu LEVENHAJM-SKOLEMOVE TEOREME, $(X, \in)$ elementarni podmodel od $(L_\gamma, \in)$, takav da je $|X| = \kappa$ i $\kappa \cup \{a\} \subseteq X$. Na osnovu TEOREME MOSTOVSKOG O KOLAPSU i GEDELOVE LEME O KONDENZACIJI sledi da postoji kolabirajuća funkcija

$\pi : (X, \in) \to (L_\delta, \in)$, za neko $\delta \leq \gamma$. Pošto je kolabirajuća funkcija π identitet na skupovima koji su tranzitivni, a pošto je $\kappa \cup \{a\} \subseteq X$ tranzitivan jer je κ tranzitivan, imamo da je $\pi(a) = a$. Dakle, $a \in L_\delta$. Međutim, na osnovu LEME 91 (5), imamo da važi:

$$|\delta| = |L_\delta| = |X| = \kappa.$$

Pa imamo da je $a \in L_\delta$ i $\delta < \kappa^+$. Dakle, $\mathscr{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$, pa je $2^\kappa \leq |L_{\kappa^+}| = \left|\kappa^+\right| = \kappa^+$. $\square$

Rezultat koji je komplementaran Gedelovom rezultatu, dokazao je Koen (Paul Cohen) 1963:

TEOREMA 95. *Pretpostavimo da je ZFC konzistentna teorija. Onda $ZFC \nvdash CH$ i $ZFC \nvdash GCH$.*

Dualno Gedelu, Koen se služio metodom *spoljašnjih modela* ili *forsinga* u dokazu prethodne teoreme. Sada ćemo ukratko da prikažemo ideju ovog Koenovog dokaza. Jednostavnosti radi, ograničićemo se na dokaz tvrđenja $ZFC \nvdash CH$. Da se pokaže da, ako je teorija ZFC konzistentna, onda važi i $ZFC \nvdash GCH$, nije ništa teže od ovoga, što će čitalac jednostavno moći da vidi.

Treba, dakle, da pokažemo da konzistentnost teorije ZFC povlači da $ZFC \nvdash CH$. Drugim rečima, ako je teorija ZFC konzistentna, onda je konzistentna i teorija $ZFC + \neg CH$. U opštem slučaju, da bismo pokazali da $Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC + \varphi)$, gde je φ neko tvrđenje izraženo u jeziku $\mathscr{L}_{ZFC}$, biće dovoljno da se pokaže sledeće:

($\star$): Svaki prebrojiv, tranzitivan model $\mathscr{M}$ teorije ZFC može da se proširi do prebrojivog, tranzitivnog modela $\mathscr{N}$ teorije $ZFC + \varphi$.

Tvrđenje ($\star$) je dokazivo u teoriji ZFC. U nastavku ćemo da pretpostavimo da postoji prebrojiv, tranzitivan model $\mathscr{M}$ teorije ZFC (ovo ćemo skraćeno da zapisujemo kao CTM $\mathscr{M}$), i u grubim crtama ćemo da pokažemo kako uz pomoć ovog modela može da se konstruiše CTM $\mathscr{N}$, takav da je $\mathscr{N} \models ZFC + \neg CH$. Kako tačno izgleda ova konstrukcija ćemo moći da kažemo nakon što damo neke jednostavne definicije:

DEFINICIJA 96. Neka je $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1}_\mathbb{P})$ jedno parcijalno uređenje sa najvećim elementom $\mathbf{1}_\mathbb{P}$, tj. $\forall p \in P (p \leq \mathbf{1}_\mathbb{P})$. Elemente skupa P zovemo *uslovima* i kažemo da je uslov

p *jači* od uslova q akko važi $p \leq q$. Za uslove $p, q \in P$ kažemo da su *kompatibilni* akko postoji $r \in P$, tako da važi $r \leq p, q$.

Jedan važan primer parcijalnog uređenja možemo da definišemo na sledeći način: ako su I i J proizvoljni skupovi, neka je $Fn(I,J)$ skup svih parcijalnih, konačnih funkcija iz I u J, tj.

$$Fn(I,J) = \{p \mid p : Dom(p) \to J \wedge Dom(p) \subseteq I \left|Dom(p)\right| < \aleph_0\} = \bigcup \{J^K \mid K \subseteq I \wedge |K| < \aleph_0\}.$$

Za dve funkcije iz ovog skupa, p i q, kažemo da važi $p \leq q$ akko $p \supseteq q$, tj. akko je funkcija p ekstenzija funkcije q. Nije teško da se proveri da je $(Fn(I,J), \supseteq, \emptyset)$ jedno parcijalno uređenje sa najvećim elementom $\emptyset$. Dva uslova p i q su kompatibilna u ovom uređenju akko je $p \cup q$ funkcija.

Jedan konkretan primer ovog parcijalnog uređenja čini $(Fn(\omega, 2), \supseteq, \emptyset)$. Elementi skupa $Fn(\omega, 2)$ su konačne funkcije iz konačnih podskupova skupa ω u 2, tj. konačne, parcijalne funkcije iz ω u 2. Ovim funkcijama možemo da se poslužimo da bismo aproksimirali totalnu funkciju $g : \omega \to 2$. Pošto svaku ovu funkciju možemo da poistovetimo sa realnim brojem $r \in \mathbb{R}$, mi u stvari pomoću elemenata skupa $Fn(\omega, 2)$ aproksimiramo realne brojeve.

DEFINICIJA 97. Ako je $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1}_{\mathbb{P}})$ parcijalno uređenje, za skup $G \subseteq P$ kažemo da je *filter* nad $\mathbb{P}$ akko važi:

(1) $\mathbf{1}_P \in G$,

(2) $\forall q \in G \forall p \geq q (p \in G)$,

(3) $\forall p, q \in G \exists r \in G (r \leq p \wedge r \leq q)$.

Ako je $(Fn(\omega, 2), \supseteq, \emptyset)$ parcijalno uređenje kao gore, onda je filter G nad ovim parcijalnim uređenjem jedna kolekcija međusobno kompatibilnih parcijalnih funkcija iz ω u 2. Unija ovih funkcija, $\bigcup G$, će takođe da bude parcijalna funkcija iz ω u 2. Da bismo obezbedili da ova funkcija bude *totalna*, uvešćemo pojam *generičkog* filtera:

DEFINICIJA 98. Ako je $\mathbb{P}$ parcijalno uređenje, kažemo da je skup $D \subseteq P$ *gust* u $\mathbb{P}$ akko za svako $p \in \mathbb{P}$ (preciznosti radi, trebalo bi da pišemo $p \in P$ mesto $p \in \mathbb{P}$; ovako ćemo međutim pisati i u nastavku da bismo pojednostavili notaciju) postoji $q \in D$ tako da važi $q \leq p$. Ako je $\mathscr{D}$ familija gustih podskupova u $\mathbb{P}$ i $G \subseteq \mathbb{P}$ filter, onda kažemo da je filter G $\mathscr{D}-$*generički* akko za svako D iz $\mathscr{D}$ važi $G \cap D \neq \emptyset$.

NAPOMENA 99. Neka je $D_n = \{p \in Fn(\omega, 2) \mid n \in Dom(p)\}$, za svako $n < \omega$. Svaki takav skup D_n je gust u $(Fn(\omega, 2), \supseteq)$. Ako je $G \subseteq Fn(\omega, 2)$ jedan $\{D_n \mid n < \omega\}-$generički filter, onda je $\bigcup G$ totalna funkcija iz ω u 2. Ovo će da važi i u opštijem slučaju parcijalnih uređenja $(Fn(I, J), \supseteq)$:

LEMA 100. *Neka je $\mathbb{P} = (Fn(I, J), \supseteq)$ parcijalno uređenje i G filter nad $\mathbb{P}$. Tada će $g = \bigcup G$ biti funkcija i $G \subseteq \{f \in Fn(I, J) \mid f \subseteq g\}$. Takođe:*

(1) ako G seče svaki skup $D_i = \{p \in Fn(I, J) \mid i \in Dom(p)\}$ za i iz I, onda je $Dom(g) = I$,

(2) ako G seče svaki skup $R_j = \{p \in Fn(I, J) \mid j \in Rng(p)\}$ za j iz J, onda je $Rng(g) = J$.

DOKAZ. Neka je G filter nad $\mathbb{P}$ i $g_1, g_2 \in G$. Pretpostavimo da $x \in Dom(g_1) \cap Dom(g_2)$ i neka je $h \in G$ takav da $h \leq g_1$ i $h \leq g_2$, tj. $h \supseteq g_1$ i $h \supseteq g_2$. Dakle, imamo da je $x \in Dom(h)$, pa je $g_1(x) = h(x) = g_2(x)$, na osnovu čega sledi da je g funkcija. Da je $G \subseteq \{f \in Fn(I, J) \mid f \subseteq g\}$ sledi na osnovu definicije pojma filtera. (1) Ako $i \in I$, onda postoji neko $p \in G \cap D_i$, pa imamo da je $p \subseteq g$ i $i \in Dom(p) \subseteq Dom(g)$. (2) Slično prethodnom slučaju, ako $j \in J$, onda postoji neko $p \in G \cap R_j$. A pošto je $p \subseteq g$, sledi da je $j \in Rng(p) \subseteq Rng(g)$. □

$\mathscr{D}-$generički filteri će posebno da nas zanimaju u slučajevima kada je familija $\mathscr{D}$ prebrojiva. Da ovakvi filteri postoje je posledica sledećeg tvrđenja koje se zove LEMA RAŠOVE I SIKORSKOG:

LEMA 101. *Ako je $\mathbb{P}$ parcijalno uređenje i $\mathscr{D}$ prebrojiva familija gustih podskupova od $\mathbb{P}$, onda postoji $\mathscr{D}-$generički filter G nad $\mathbb{P}$.*

DOKAZ. Neka je $\mathbb{P}$ parcijalno uređenje i $\mathscr{D}$ prebrojiva familija skupova koji su gusti u $\mathbb{P}$. Ako je familija $\mathscr{D}$ prazna, onda možemo da fiksiramo proizvoljno $p \in \mathbb{P}$ i neka je $G = \{q \in \mathbb{P} \mid p \leq q\}$. Skup G je filter nad $\mathbb{P}$.

Pretpostavimo sada da je familija $\mathscr{D}$ neprazna i neka je $\langle D_n \mid n < \omega \rangle$ niz koji pobrojava (sa ponavljanjima, ako je familija $\mathscr{D}$ konačna) sve elemente od $\mathscr{D}$. Definišimo niz $\langle p_n \mid n < \omega \rangle$ elemenata od $\mathbb{P}$ indukcijom na sledeći način: neka je p_0 proizvoljan element od $\mathbb{P}$. Ako je element p_n definisan, neka je p_{n+1} takav da važi $p_{n+1} \leq p_n$ i $p_{n+1} \in D_n$. Ovakvi elementi uvek postoje, na osnovu gustine skupova D_n u $\mathbb{P}$. Neka je sada $G = \{q \in \mathbb{P} \mid p_n \leq q \text{ za neko } n < \omega\}$. Skup G je filter nad $\mathbb{P}$ i važi da $G \cap D_n \neq \emptyset$, za svako $n < \omega$. □

Na ovo ćemo tvrđenje da se vratimo u odeljku [7.3] kada budemo govorili o *Martinovoj aksiomi*. Sada nastavljamo našu skicu Koenovog dokaza nezavisnosti od CH.

Neka je, kao i gore, $\mathscr{M}$ jedan CTM. Uzmimo neko parcijalno uređenje $\mathbb{P} = (P, \leq, \mathbf{1}_{\mathbb{P}})$ iz $\mathscr{M}$ (to znači da $P \in \mathscr{M}, \leq \in \mathscr{M}$ i $\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \in \mathscr{M}$). Za svako $D \in \mathscr{M}$, svojstvo da je D gust u $\mathbb{P}$ je apsolutno za $\mathscr{M}$, a pošto je $\mathscr{M}$ prebrojiv, on sadrži samo prebrojivo mnogo gustih podskupova od $\mathbb{P}$. Sada, na osnovu LEME RAŠOVE I SIKORSKOG, možemo da zaključimo da postoji filter G nad $\mathbb{P}$ takav da je $G \cap D \neq \emptyset$, za svaki gust skup D u $\mathbb{P}$ koji pripada $\mathscr{M}$. Takve filtere ćemo da zovemo *$\mathbb{P}-$generičkim filterima nad $\mathscr{M}$*. Sumirajmo upravo rečeno:

POSLEDICA 102. *Za svaki* CTM $\mathscr{M}$ *i parcijalno uređenje* $\mathbb{P}$ *iz* $\mathscr{M}$, *postoji* $\mathbb{P}-$*generički filter* G *nad* $\mathscr{M}$.

Pošavši od CTM $\mathscr{M}$ i parcijalnog uređenja $\mathbb{P}$ iz $\mathscr{M}$, želimo da se poslužimo $\mathbb{P}-$generičkim filterom G da bismo konstruisali CTM $\mathscr{N}$ iz tvrđenja ($\star$) gore:

TEOREMA 103. *Za svaki* CTM $\mathscr{M}$, *parcijalno uređenje* $\mathbb{P}$ *iz* $\mathscr{M}$ *i* $\mathbb{P}-$*generički filter* G *nad* $\mathscr{M}$, *postoji najmanji* CTM $\mathscr{N}$ *takav da je* $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{N}$ *i* $G \in \mathscr{N}$.

Model $\mathscr{N}$ iz prethodne teoreme se najčešće označava sa $\mathscr{M}[G]$ i zove se *generičko proširenje* modela $\mathscr{M}$. U ovom kontekstu, model $\mathscr{M}$ se zove još i *osnovni model.* Sada ćemo nešto detaljnije da opišemo ovu konstrukciju.

Prvo treba da primetimo da filter G pripada generičkom proširenju $\mathscr{M}[G]$ iz teoreme. Može međutim i da se dogodi da ovaj filter pripada i osnovnom modelu $\mathscr{M}$. Ovakvi slučajevi nam neće biti zanimljivi, jer nam je ideja da pošavši od nekog modela $\mathscr{M}$ u kome važi neko tvrđenje φ, konstruišemo njegovo generičko proširenje $\mathscr{M}[G]$ u kome će da važi $\neg\varphi$. Da bi ovo bio slučaj, generičko proširenje mora da bude *pravo*, tj. $\mathscr{M} \neq \mathscr{M}[G]$. Međutim, videćemo da je dovoljno da parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ zadovoljava neke relativno slabe uslove pa da nam to onda garantuje da $G \notin \mathscr{M}$. O kojim se uslovima tačno radi, videćemo nakon sledeće jednostavne definicije:

DEFINICIJA 104. Ako je $\mathbb{P}$ parcijalno uređenje, onda za uslove $p, q \in \mathbb{P}$ kažemo da su *kompatibilni* akko postoji $r \in \mathbb{P}$, tako da važi $r \leq p, q$. U suprotnom kažemo da su p i q *inkompatibilni*, što označavamo sa $p \perp q$.

LEMA 105. *Ako je $\mathscr{M}$ tranzitivan model teorije ZFC, $\mathbb{P}$ je parcijalno uređenje iz $\mathscr{M}$ takvo da važi*

$$\forall p \in \mathbb{P} \exists q, r \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$$

i G je jedan $\mathbb{P}-$generički filter nad $\mathscr{M}$, onda važi $G \notin \mathscr{M}$.

DOKAZ. Pretpostavimo da $G \in \mathscr{M}$. Onda ćemo da imamo i da $D = \mathbb{P} \setminus G \in \mathscr{M}$. Uzmimo neko p iz $\mathbb{P}$. Na osnovu uslova koji parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ zadovoljava sledi da postoje inkompatibilni q i r iz $\mathbb{P}$, takvi da je $q \leq p$ i $r \leq p$. Pošto je G filter, on ne može da sadrži oba ova inkompatibilna elementa, pa jedan od njih mora pripadati skupu D. Dakle D je gust u $\mathbb{P}$. Međutim, imamo da je $G \cap D = \emptyset$, što protivreči pretpostavci da je filter G u stvari $\mathbb{P}-$generički. □

Antecedens prethodne teoreme može dodatno da se oslabi: ne moramo da pretpostavimo da je $\mathscr{M}$ model teorije ZFC, dovoljno bi bilo pretpostaviti da je $\mathscr{M}$ model teorije $ZF - P$, tj. teorije ZF bez aksiome partitivnog skupa.

Vratimo se sada konstrukciji modela $\mathscr{M}[G]$ iz $\mathscr{M}$. Elementi modela $\mathscr{M}[G]$ će, grubo govoreći, biti neki skupovi koje možemo da konstruišemo iz G, služeći se sredstvima modela $\mathscr{M}$. Svaki element modela $\mathscr{M}[G]$ će biti kodiran jednim *imenom* iz $\mathscr{M}$, koje treba da beleži kako je ovaj element konstruisan iz G.

DEFINICIJA 106. Za dato parcijalno uređenje $\mathbb{P} = (P, \leq)$, klasu $\mathbb{P}-$*imena*, $V^{\mathbb{P}}$, definišemo rekurzijom na sledeći način:

$$V_0^{\mathbb{P}} = \emptyset,$$
$$V_{\alpha+1}^{\mathbb{P}} = \mathscr{P}(V_\alpha^{\mathbb{P}} \times \mathbb{P}),$$
$$V_\gamma^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha^{\mathbb{P}}, \text{ za granični ordinal } \gamma,$$
$$V^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha\in Ord} V_\alpha^{\mathbb{P}}.$$

Ako je $\mathscr{M}$ tranzitivan model teorije ZFC i $\mathbb{P}$ je parcijalno uređenje iz $\mathscr{M}$, onda je $\mathscr{M}^{\mathbb{P}} = V^{\mathbb{P}} \cap \mathscr{M} = \left\{\tau \in \mathscr{M} \mid (\tau \text{ je } \mathbb{P} - \text{ime})^{\mathscr{M}}\right\}$.

Na osnovu prethodne definicije vidimo da je $\mathbb{P}-$ime τ jedan skup uređenih parova (σ, p), gde je σ jedno $\mathbb{P}-$ime a $p \in \mathbb{P}$.

DEFINICIJA 107. Neka je G $\mathbb{P}-$generički filter nad $\mathscr{M}$. Za svako τ iz $\mathscr{M}^{\mathbb{P}}$ definišemo *interpretaciju* od τ u odnosu na G, τ_G, na sledeći način:

$$\tau_G = \left\{\sigma_G \mid \exists p \in G((\sigma, p) \in \tau)\right\}.$$

Već smo napomenuli da je uloga $\mathbb{P}-$imena da možemo, pomoću njih, da unutar $\mathscr{M}$ govorimo o objektima iz $\mathscr{M}[G]$. Ovo se postiže uz pomoć interpretacije τ_G koju smo definisali gore. Definicija koju smo dali nije u potpunosti formalna ali se ovaj pojam može formalno definisati pomoću rekurzije.

Evo nekoliko primera koji bi trebalo da ilustruju pojam interpretacije $\mathbb{P}-$imena. Prazan skup, $\emptyset$, je jedno $\mathbb{P}-$ime. Interpretacija ovog imena je prazan skup, za svaki $\mathbb{P}-$generički filter G nad $\mathscr{M}$ - $\emptyset_G = \emptyset$. U ovom trivijalnom slučaju interpretacija $\mathbb{P}-$imena ne zavisi od generičkog filtera G. S druge strane, ako je p uslov iz $\mathbb{P}$ i $\tau = \left\{(\emptyset, p)\right\}$ je $\mathbb{P}-$ime, onda interpretacija imena zavisi od generičkog filtera G. Naime, imaćemo da je $\tau_G = \emptyset$, ako $p \notin G$ (dakle, različita imena mogu da imaju istu interpretaciju) i $\tau_G = \{\emptyset\}$, ako $p \in G$. Takođe, ako je $\tau = \{(\sigma_i, \mathbf{1}_{\mathbb{P}}) \mid i \in I\}$, onda je $\tau_G = \{\sigma_G \mid i \in I\}$, pa interpretacija od τ ne zavisi od generičkog filtera G, jer svaki takav filter sadrži najveći element u uređenju $\mathbf{1}_{\mathbb{P}}$.

Na osnovu prethodne napomene sledi da postoje takozvana *kanonička imena* za sve elemente modela $\mathcal{M}$, koja ne zavise od izbora generičkog filtera G. Naime, ako je $x \in \mathcal{M}$, onda je kanoničko ime od x, koje označavamo sa $\check{x}$, jednako skupu $\{(\check{y}, \mathbf{1}_P) \mid y \in x\}$. Nije teško pokazati da za svako $x \in \mathcal{M}$ imamo da je $\check{x}_G = x$: ovo se dokazuje indukcijom po rangu skupa x. Pretpostavimo da je $\check{y}_G = y$ za svako $y \in x$. Onda je $\check{x}_G = \{\tau_G \mid \exists p \in G((p,\tau) \in \check{x})\} = \{\check{y}_G \mid y \in x\}$. Ova jednakost važi jer je $G \neq \emptyset$ pa $\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \in G$. Međutim, na osnovu induktivne hipoteze imamo da je $\{\check{y}_G \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\}$, a ovaj poslednji skup je naravno jednak skupu x.

Definicija kanoničkih imena je apsolutna za tranzitivne modele teorije ZFC. Takođe, možemo da konstruišemo i kanoničko ime za generički filter G:

$$\breve{G} = \{(\check{p}, p) \mid p \in P\}.$$

Na osnovu definicije je jednostavno da se vidi da je interpretacija ovog poslednjeg imena baš skup G: $\breve{G}_G = \{\check{p}_G \mid p \in G\} = \{p \mid p \in G\} = G$.

Sada možemo da vidimo kako će naše generičko proširenje $\mathcal{M}[G]$ da izgleda:

$$\mathcal{M}[G] = \{\tau_G \mid \tau \in \mathcal{M}^{\mathbb{P}}\}.$$

Za ovako konstruisan model $\mathcal{M}[G]$ sada može da se pokaže da ima sve one osobine modela $\mathcal{N}$ iz TEOREME 103: da je to najmanji prebrojiv, tranzitivan model teorije ZFC za koji važi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}[G]$ i $G \in \mathcal{M}[G]$. Mi ovde nećemo da dokazujemo da je $\mathcal{M}[G] \models ZFC$, ali ćemo da dokažemo ostale osobine $(1-5)$ modela $\mathcal{M}[G]$ iz TEOREME 103:

(1) $\mathcal{M}[G]$ *je prebrojiv skup*: na osnovu aksiome zamene, $\mathcal{M}[G]$ je skup pošto funkciju interpretacije $(\cdot)_G$ možemo da definišemo pomoću formule, a

$$(\cdot)_G\left[\mathcal{M}^{\mathbb{P}}\right] = \mathcal{M}[G].$$

Skup $\mathcal{M}[G]$ je prebrojiv pošto je $\mathcal{M}^{\mathbb{P}} \subseteq \mathcal{M}$, a skup $\mathcal{M}$ je prebrojiv.

(2) $\mathcal{M}[G]$ *je tranzitivan i* $Ord^{\mathcal{M}} = Ord \cap \mathcal{M} = Ord^{\mathcal{M}[G]}$: pretpostavimo da $x \in y \in \mathcal{M}[G]$. Pošto je $\mathcal{M}[G] = \left\{\tau_G \mid \tau \in \mathcal{M}^{\mathbb{P}}\right\}$, sledi da je y oblika

$$\tau_G = \left\{\sigma_G \mid \exists p \in G((\sigma, p) \in \tau)\right\},$$

za neko $\tau \in \mathcal{M}^{\mathbb{P}}$. Dakle, x je oblika σ_G za neko $(\sigma, p) \in \tau \in \mathcal{M}$. Pošto je $\mathcal{M}$ tranzitivan, iz ovoga sledi da je σ jedno $\mathbb{P}-$ime iz $\mathcal{M}$, pa je $x = \sigma_G \in \mathcal{M}[G]$. Da važi $Ord^{\mathcal{M}} \subseteq Ord^{\mathcal{M}[G]}$ jednostavno je da se vidi, pošto $\check{\alpha} \in \mathcal{M}$ za svaki ordinal α iz $\mathcal{M}$, a $\check{\alpha}_G = \alpha$. S druge strane, nije teško da se pokaže da je $\rho(\tau_G) \leq \rho(\tau)$ za svako $\mathbb{P}-$ime τ. Međutim, onda ćemo imati da, ako je $\alpha = \tau_G \in Ord^{\mathcal{M}[G]}$ za neko $\mathbb{P}-$ime τ, onda je $\alpha \leq \rho(\tau) \in Ord^{\mathcal{M}}$.

(3) $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}[G]$: neka je $x \in \mathcal{M}$. Na osnovu apsolutnosti definicije kanoničkih imena gore, imamo da je $\check{x} \in \mathcal{M}^{\mathbb{P}}$. Međutim, već smo napomenuli da za svako kanoničko ime $\check{x}$ imamo da važi $\check{x}_G = x$, pa sledi da $x \in \mathcal{M}[G]$.

(4) $G \in \mathcal{M}[G]$: kao i u prethodnom slučaju, kanoničko ime $\breve{G}$ je jedno $\mathbb{P}-$ime, a kako je $\breve{G}_G = \left\{\check{p}_G \mid p \in G\right\} = \left\{p \mid p \in G\right\} = G$, sledi da $G \in \mathcal{M}[G]$.

(5) $\mathcal{M}[G]$ *je minimalan*: pošto je svaki element iz $\mathcal{M}[G]$ oblika τ_G, on mora pripadati svakom tranzitivnom modelu teorije ZFC koji sadrži τ i G.

U nastavku ćemo želeti da pokažemo kako možemo, grubo govoreći, sa stanovišta osnovnog modela $\mathcal{M}$ da govorimo o tome koja su tvrđenja istinita u generičkom proširenju $\mathcal{M}[G]$. Da bismo ovo uradili definisaćemo *forsing relaciju* $\Vdash$. Ovo će da bude relacija između uslova u nekom zadatom parcijalnom uređenju $\mathbb{P}$ iz CTM $\mathcal{M}$ i rečenica *jezika forsinga*. Rečenice jezika forsinga će da budu izrazi oblika $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ koje dobijamo iz formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ $\varphi(x_1, ..., x_n)$ tako što mesto svakog slobodnog javljanja promenljive x_i u φ supstituišemo $\mathbb{P}-$ime τ_i. $\mathbb{P}-$imena ovde igraju ulogu individualnih konstanti.

DEFINICIJA 108. Neka je $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$ rečenica jezika forsinga. Ako je $p \in \mathbb{P}$, onda definišemo relaciju $p \Vdash^{\mathcal{M}}_{\mathbb{P}} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$, što čitamo kao „$p$ forsira $\varphi(\tau_1, ..., \tau_n)$”, akko za svaki $\mathbb{P}-$generički filter G nad $\mathcal{M}$, takav da je $p \in G$ imamo da važi

$$\varphi^{\mathcal{M}[G]}((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G).$$

Važno je napomenuti da se prethodna definicija poziva na objekte koji ne moraju da budu u modelu $\mathscr{M}$. Naime, definicija relacije $\Vdash$ zavisi od CTM $\mathscr{M}$ i parcijalnog uređenja $\mathbb{P}$ iz $\mathscr{M}$ i poziva se na sve $\mathbb{P}-$generičke filtere nad $\mathscr{M}$ - ovi objekti u opštem slučaju ne moraju da budu u $\mathscr{M}$. Međutim, postoji ekvivalentna forsing relacija (u stvari, ima mnogo takvih), $\Vdash^{\star}$, koja jeste definabilna u $\mathscr{M}$ i koja je takva da za svaku formulu φ važi:

$$p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathscr{M}} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow (p \Vdash^{\star} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n))^{\mathscr{M}}$$

Da je takva relacija definabilna u $\mathscr{M}$ sadržaj je takozvane FORSING TEOREME, važnog tehničkog tvrđenja koje ovde nećemo dokazivati:

TEOREMA 109. *Za svaku formulu* $\varphi(x_1, ..., x_n)$ *jezika* $\mathscr{L}_{ZFC}$, *postoji formula* $\psi(y, z, x_1, ..., x_n)$, *koju pišemo kao* $y \Vdash_z^{\star} \varphi(x_1, ..., x_n)$, *takva da za svaki* CTM $\mathscr{M}$ *teorije* ZFC, *parcijalno uređenje* $\mathbb{P}$ *iz* $\mathscr{M}$, *i* $\mathbb{P}-$*imena* $\tau_1, ..., \tau_n$ *važi*

$$p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathscr{M}} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n) \Leftrightarrow \mathscr{M} \models (p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\star} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)),$$

za svako p *iz* $\mathbb{P}$. *Takođe:*

$$\mathscr{M}[G] \models \varphi((\tau_1)_G, ..., (\tau_n)_G) \Leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathscr{M}} \varphi(\tau_1, ..., \tau_n)),$$

za svaki $\mathbb{P}-$*generički filter* G *nad* $\mathscr{M}$.

U nastavku ćemo da pišemo samo $\Vdash$ mesto $\Vdash_{\mathbb{P}}^{\mathscr{M}}$ ili $\Vdash^{\star}$.

Neke od osobina forsing relacije su sledeće (za dokaz v. [Barwise, 1977, pp. 415-416]):

ako $p \Vdash \varphi_1, ..., p \Vdash \varphi_n$ i $ZFC + \{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \psi$, onda $p \Vdash \psi$;

nije $(p \Vdash \varphi$ i $p \Vdash \neg\varphi)$;

ako $p \Vdash \varphi$ i $q \leq p$, onda $q \Vdash \varphi$;

ako $p \Vdash \varphi$ i $q \Vdash \neg\varphi$, onda $p \perp q$;

$p \Vdash \varphi \wedge \psi$ akko $(p \Vdash \varphi$ i $p \Vdash \psi)$;

$p \Vdash \neg\varphi$ akko $\forall q \leq p($nije $q \Vdash \varphi)$;

$p \Vdash \exists x \varphi(x)$ akko $\forall q \leq p \exists r \leq q \exists \tau \in M(r \Vdash \varphi(\tau))$.

U nastavku ćemo da navedemo još nekoliko tehničkih rezultata koji će nam biti neophodni da bismo pokazali da važi $Con(ZFC + \neg CH)$.

DEFINICIJA 110. Ako je $\mathbb{P}$ parcijalno uređenje, onda kažemo da je $A \subseteq \mathbb{P}$ *antilanac* u $\mathbb{P}$ akko su svaka dva različita elementa iz A inkompatibilna. Kažemo da $\mathbb{P}$ zadovoljava *uslov prebrojivih lanaca* ili da je $\mathbb{P}$ ccc (skraćenica od *countable chain condition*) akko je svaki antilanac u $\mathbb{P}$ prebrojiv.

Na primer, svako prebrojivo parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ je ccc. Nešto manje trivijalan primer je sledeći: neka je $S_\omega = \{x \subseteq \omega \mid x \neq \emptyset\}$ i $x \leq y$ akko $x \subseteq y$. Nije teško da se proveri da je $\mathbb{S}_\omega = (S_\omega, \leq)$ parcijalno uređenje koje je ccc. Skupovi su inkompatibilni u ovom uređenju akko su disjunktni, a pošto ne možemo imati neprebrojivo mnogo disjunktnih podskupova od ω uređenje $\mathbb{S}_\omega$ je ccc. Takođe, parcijalno uređenje $(Fn(\omega, 2), \supseteq)$ je ccc; ovo će da bude posledica jednog opštijeg tvrđenja koje ćemo kasnije da dokažemo. S druge strane, uređenje $\mathbb{S}_{\omega_1} = (S_{\omega_1}, \leq)$ očigledno nije ccc, kao ni $(Fn(\omega, \omega_1), \supseteq)$ pošto je $A = \{(0, \alpha) \mid \alpha < \omega_1\}$ neprebrojivi antilanac u ovom poslednjem uređenju.

NAPOMENA 111. Pogledajmo sada kako bi dokaz konzistentnosti teorije $ZFC + \neg CH$ mogao da izgleda. Uzmimo neki CTM $\mathscr{M}$ i parcijalno uređenje

$$\mathbb{P} = (Fn(\omega_2 \times \omega, 2), \supseteq)$$

iz $\mathscr{M}$. Ako je G $\mathbb{P}-$generički filter nad $\mathscr{M}$, onda na osnovu LEME 100 imamo da je

$$g = \bigcup G : \omega_2 \times \omega \to 2.$$

Ova funkcija je element generičkog proširenja $\mathscr{M}[G]$. Za svako $\gamma < \delta < \omega_2$ sledeći skupovi su gusti u $\mathbb{P}$ i pripadaju $\mathscr{M}$:

$$D_\gamma^\delta = \left\{p \in \mathbb{P} \mid \exists n < \omega((\gamma, n), (\delta, n) \in Dom(p) \wedge p(\gamma, n) \neq p(\delta, n)\right\}.$$

Da bismo videli da su skupovi D_γ^δ gusti, uzmimo neko p iz $\mathbb{P}$. Pošto je domen funkcije p konačan, možemo da pronađemo neko $n < \omega$, takvo da $(\gamma, n) \notin Dom(p)$ i $(\delta, n) \notin Dom(p)$. Dakle, $p \cup \left\{((\gamma, n), 0), ((\delta, n), 1)\right\}$ je element ekstenzije funkcije p koja pripada skupu D_γ^δ. Pošto su ovi skupovi gusti, $\mathbb{P}-$generički filter G seče svaki od njih, pa imamo da važi: $(*)$ za svako $\gamma < \delta < \omega_2$ postoji $n < \omega$ takvo da je $g(\gamma, n) \neq g(\delta, n)$.

Za svako $\delta < \omega_2$ možemo da definišemo funkciju $g_\delta : \omega \to 2$ putem $g_\delta(n) = g(\delta, n)$. Skup svih takvih funkcija $\{g_\delta \mid \delta < \omega_2\}$ će biti u modelu $\mathscr{M}[G]$, pošto je definisan uz pomoć funkcije $g \in \mathscr{M}[G]$. Međutim, na osnovu $(*)$, sve funkcije g_δ su različite i imamo da je

$$\{g_\delta \mid \delta < \omega_2\} \subseteq 2^\omega.$$

Dakle, u $\mathscr{M}[G]$, 2^ω sadrži podskup $\{g_\delta \mid \delta < \omega_2\}$ koji je kardinalnosti ω_2, pa je $2^\omega \geq \omega_2 > \omega_1$.

Da li iz ovoga možemo da zaključimo da je $\mathscr{M}[G] \models \neg CH$? Ne.

Oba modela, $\mathscr{M}$ kao i $\mathscr{M}[G]$, su CTM. Takođe znamo da je $Ord^{\mathscr{M}} = Ord \cap \mathscr{M} = \xi$ u stvari jedan prebrojivi ordinal, kada ga posmatramo u univerzumu skupova V. Ordinali $\omega_1^{\mathscr{M}} < \omega_2^{\mathscr{M}} < \xi$ su takođe prebrojivi, posmatrano iz V, ali su u modelu $\mathscr{M}$ ovo prva dva neprebrojiva kardinala. Nije jasno da će ovi ordinali to i ostati u generičkom proširenju $\mathscr{M}[G]$. Drugim rečima, treba da se uverimo da ćemo imati $\omega_1^{\mathscr{M}} = \omega_1^{\mathscr{M}[\mathscr{G}]}$ i $\omega_2^{\mathscr{M}} = \omega_2^{\mathscr{M}[\mathscr{G}]}$. Da je moguće da će $\omega_1^{\mathscr{M}}$ postati prebrojiv u generičkom proširenju ilustrovaćemo pomoću sledećeg primera: neka je $\mathbb{P} = (Fn(\omega, \omega_1), \supseteq)$ parcijalno uređenje i neka je G $\mathbb{P}-$generički filter nad $\mathscr{M}$. Tada će da važi (v. LEMA 100) da je funkcija $g = \bigcup G : \omega \to \omega_1^{\mathscr{M}}$ jedna surjekcija iz $\mathscr{M}[G]$, pa je u modelu $\mathscr{M}[G]$ ordinal $\omega_1^{\mathscr{M}}$ prebrojiv.

Neka parcijalna uređenja $\mathbb{P}$, dakle, mogu da dovedu do toga da neki kardinal κ iz $\mathscr{M}$ prestane da bude kardinal u $\mathscr{M}[G]$, kao u primeru koji smo naveli u prethodnom pasusu.

DEFINICIJA 112. Ako je $\mathscr{M}$ CTM, $\mathbb{P}$ parcijalno uređenje iz $\mathscr{M}$ i $\kappa \in \mathscr{M}$ ordinal za koji važi $\mathscr{M} \models \kappa$ JE KARDINAL, onda ako važi $\mathscr{M}[G] \models \kappa$ JE KARDINAL, za svaki $\mathbb{P}-$generički filter G nad $\mathscr{M}$, kažemo da $\mathbb{P}$ *čuva kardinal* κ. A ako, pod uslovima kao u prethodnoj rečenici, $\mathscr{M}[G] \models \kappa$ NIJE KARDINAL, za svaki $\mathbb{P}-$generički filter G nad $\mathscr{M}$, kažemo da $\mathbb{P}$ *kolabira kardinal* κ. Kažemo da $\mathbb{P}$ *čuva kardinale*, ako $\mathbb{P}$ čuva svaki kardinal κ iz $\mathscr{M}$.

Sada ćemo da pokažemo da parcijalna uređenja koja su ccc čuvaju kardinale. Ovo će da bude posledica sledeće leme:

TEOREMA 113. *Neka je* $\mathcal{M}$ CTM *i* $\mathbb{P}$ *parcijalno uređenje iz* $\mathcal{M}$, $\lambda < \kappa$ *beskonačni kardinali iz* $\mathcal{M}$, τ *jedno* $\mathbb{P}-$*ime a* $p \in \mathbb{P}$ *uslov, takav da važi*

$$p \Vdash \tau \text{ JE FUNKCIJA } \wedge \tau : \check{\lambda} \to \check{\kappa}.$$

Pretpostavimo još da je $\mathbb{P}$ ccc. *Onda će da važi* $p \Vdash \tau$ NIJE SURJEKCIJA .

DOKAZ. Za svako $\xi < \lambda$, neka je $D_\xi = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists \alpha < \kappa (p \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\alpha})\}$. Treba da proverimo da je svaki od skupova D_ξ gust u $\mathbb{P}$. Ako je $p \in P$, neka je G jedan $\mathbb{P}-$generički filter takav da je $p \in G$. Pošto je $p \Vdash \tau$ JE FUNKCIJA $\wedge \tau : \check{\lambda} \to \check{\kappa}$, sledi da je $\tau_G : \lambda \to \kappa$ funkcija. Neka je $\alpha < \kappa$ takvo da je $\tau_G(\xi) = \alpha$. Na osnovu FORSING TEOREME će da sledi da postoji $q \in G$ takvo da je $q \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\alpha}$. Pošto $p, q \in G$, sledi da postoji r iz G, takvo da je $r \leq p$ i $r \leq q$. Za ovo r će da važi $r \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\alpha}$, pa je skup D_ξ gust u $\mathbb{P}$.

Za svako $\xi < \lambda$, neka je $A_\xi \subseteq D_\xi$ maksimalan antilanac u $\mathbb{P}$. Pošto je $\mathbb{P}$ *ccc* svaki takav antilanac će da bude prebrojiv. Za $\xi < \lambda$, neka je

$$\mathscr{A}_\xi = \{\alpha < \kappa \mid \exists p \in D_\xi (p \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\alpha})\}.$$

Treba da proverimo da je $|\mathscr{A}_\xi| \leq \aleph_0$. Za svako α iz $\mathscr{A}_\xi$, neka je $q_\alpha \in A_\xi$ kompatibilan sa nekim uslovom $p_\alpha \in \mathbb{P}$ za koji važi $p_\alpha \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\alpha}$. Pošto su ovi uslovi kompatibilni i $q_\alpha \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\alpha}'$, za neko α', imaćemo da je $\alpha = \alpha'$. Dakle, $\mathscr{A}_\xi \subseteq \{\alpha \mid \exists p \in A_\xi (p \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{\alpha})\}$. Međutim, kardinalnost ovog poslednjeg skupa je $\leq \aleph_0$, pa ćemo imati da je $|\mathscr{A}_\xi| \leq \aleph_0$.

Na osnovu FORSING TEOREME, imamo da je $Rng(\tau_G) \subseteq \bigcup_{\xi<\lambda} \mathscr{A}_\xi$, za svaki $\mathbb{P}-$generički filter G nad $\mathcal{M}$, i $p \in \mathbb{P}$. Ali, $M \models \left|\bigcup_{\xi<\lambda} \mathscr{A}_\xi\right| \leq |\lambda \times \aleph_0| = \lambda < \kappa$, što povlači da je $\bigcup_{\xi<\lambda} \mathscr{A}_\xi \neq \kappa$, pa funkcija τ_G ne može biti surjekcija ni za jedno G. □

POSLEDICA 114. *Ako je* $\mathcal{M}$ CTM *i* $\mathbb{P}$ *parcijalno uređenje iz* $\mathcal{M}$ *za koje važi* $\mathcal{M} \models$ $\mathbb{P}$ JE ccc, *onda* $\mathbb{P}$ *čuva kardinale. Za svaki* $\mathbb{P}-$*generički filter G nad* $\mathcal{M}$ *i svaki ordinal* α *iz* $\mathcal{M}$ *imaćemo da je* $\omega_\alpha^{\mathcal{M}} = \omega_\alpha^{\mathcal{M}[G]}$.

Na kraju, treba da pokažemo da je parcijalno uređenje $(Fn(\omega_2 \times \omega, 2), \supseteq)$ kojim smo se služili u našoj skici dokaza $Con(ZFC + \neg CH)$ gore, jedno ccc uređenje. Da bismo to uradili, biće nam neophodno sledeće tehničko tvrđenje koje se zove LEMA O $\Delta-$SISTEMU:

LEMA 115. *Ako je $\mathscr{A}$ neprebrojiva familija konačnih skupova, onda postoji neprebrojiva familija $\mathscr{A}' \subseteq \mathscr{A}$ i konačan skup A, takav da važi $X \cap Y = A$ za svaki par različitih skupova X i Y iz $\mathscr{A}'$.*

DOKAZ. Pošto je $|\mathscr{A}| > \aleph_0$, možemo da pretpostavimo da postoji $n < \omega$, takav da svaki član familije $\mathscr{A}$ ima tačno n elemenata. Tvrđenje ćemo da dokažemo indukcijom po n. Pošto je $n \geq 1$, primetimo da ako je $n = 1$, elementi od $\mathscr{A}$ moraju da budu uzajamno disjunktni, pa će $A = \emptyset$ i $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$ da zadovoljavaju uslove iz teoreme. Pretpostavimo da je $n > 1$ i da tvrđenje važi za skupove koji imaju $n-1$ elemenata. Možemo da razlikujemo dva slučaja:

Slučaj 1. Postoji neko $A_0 \in \mathscr{A}$, takvo da A_0 seče neprebrojivo mnogo elemenata A familije $\mathscr{A}$. Tada će da postoji neko a iz A_0, takvo da je a element neprebrojivo mnogo $A \in \mathscr{A}$. Tada ćemo imati da je $\mathscr{B} = \{A \setminus \{a\} \mid A \in \mathscr{A} \wedge a \in A\}$ jedna neprebrojiva familija skupova koji su kardinalnosti $n-1$, pa na osnovu induktivne hipoteze postoji neprebrojiva familija $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ i konačan skup B, takav da je $C \cap D = B$, za svaki par različitih skupova C i D iz $\mathscr{B}'$. Međutim, onda ćemo imati da je $\mathscr{A}' = \left\{C \cup \{a\} \mid C \in \mathscr{B}'\right\} \subseteq \mathscr{A}$ neprebrojiva familija, i da je $X \cap Y = B \cup \{a\}$, za svaki par različitih skupova X i Y iz $\mathscr{A}'$.

Slučaj 2. Za svako $A \in \mathscr{A}$, skup $S_A = \{B \in \mathscr{A} \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ je najviše prebrojiv. Transfinitnom indukcijom možemo da konstruišemo niz $\langle A_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$ koji pobrojava sve uzajamno disjunktne podskupove od $\mathscr{A}$. Ovo može da se učini pošto je, za svako $\xi < \omega_1$, skup $\left\{B \in A \mid \exists \zeta < \xi (B \cap A_\zeta \neq \emptyset)\right\} = \bigcup_{\zeta < \xi} S_{A_\zeta}$ najviše prebrojiv. Međutim, onda ćemo imati da $\mathscr{A}' = \left\{A_\xi \mid \xi < \omega_1\right\}$ i $A = \emptyset$ zadovoljavaju uslove iz teoreme.

$\square$

LEMA 116. *Parcijalno uređenje* $\mathbb{P} = (Fn(I,J), \supseteq)$ *je* ccc *za svaki prebrojiv skup* J.

DOKAZ. Neka je $\langle p_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$ niz koji pobrojava elemente skupa $Fn(I,J)$. Treba da pokažemo da $\langle p_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$ ne pobrojava antilanac u $\mathbb{P}$, tj. da postoje $\zeta < \xi < \omega_1$, takvi da su p_ζ i p_ξ kompatibilni. Posmatrajmo familiju $\{Dom(p_\xi) \mid \xi < \omega_1\}$. To je jedna neprebrojiva familija konačnih skupova, pa na osnovu LEME O $\Delta-$SISTEMU, postoji neprebrojiv skup $S \subseteq \omega_1$ i konačan skup A takav da je $Dom(p_\zeta) \cap Dom(p_\xi) = A$, za svaki par različitih ordinala ζ, ξ iz S. Međutim, skup J^A je najviše prebrojiv, pa postoje različiti ζ, ξ iz S takvi da je $p_\zeta \restriction A = p_\xi \restriction A$. Na osnovu ovoga sledi da je $p = p_\zeta \cup p_\xi : Dom(p_\zeta) \cup Dom(p_\xi) \to J$ funkcija, pa $p \in Fn(I,J)$. Pošto je $p \le p_\zeta, p_\xi$, možemo da zaključimo da su p_ζ i p_ξ kompatibilni, pa $\langle p_\xi \mid \xi < \omega_1 \rangle$ ne može da bude neprebrojivi antilanac u $(Fn(I,J), \supseteq)$. □

Sada možemo da pokažemo da je teorija $ZFC + \neg CH$ konzistentna:

TEOREMA 117. $Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC + \neg CH)$.

DOKAZ. Ovo ćemo tvrđenje da dokažemo onako kako smo to skicirali u NAPOMENI 111. Neka je $\mathcal{M}$ CTM. Parcijalno uređenje $\mathbb{P} = (Fn(\omega_2^{\mathcal{M}} \times \omega, 2), \supseteq)$ možemo da definišemo u $\mathcal{M}$. Neka je G jedan $\mathbb{P}-$generički filter nad $\mathcal{M}$. Želimo da pokažemo da će u modelu $\mathcal{M}[G]$ da važi $2^\omega > \omega_1$.

Ako je $x \in \omega_2^{\mathcal{M}} \times \omega$, neka je $D_x = \{p \in \mathbb{P} \mid x \in Dom(p)\}$. Skupovi D_x su definabilni u $\mathcal{M}$, pošto $x, \mathbb{P} \in \mathcal{M}$. Takođe, svaki od skupova D_x je gust u $\mathbb{P}$, pošto za svako p iz $\mathbb{P}$ imamo da je $x \in Dom(p)$ i $p \in D_x$ ili $x \notin Dom(p)$ i $p \cup \{(x,0)\} \in D_x$ je ekstenzija funkcije p. Na osnovu LEME 82, imamo da je $g = \bigcup G : \omega_2^{\mathcal{M}} \times \omega \to 2$. Ova je funkcija u modelu $\mathcal{M}[G]$, jer je $G \in \mathcal{M}[G]$.

Takođe, treba da primetimo da su, za svako $\gamma < \delta < \omega_2^{\mathcal{M}}$, skupovi

$$D_\gamma^\delta = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n < \omega ((\gamma, n), (\delta, n) \in Dom(p) \wedge p(\gamma, n) \neq p(\delta, n)\}$$

gusti u $\mathbb{P}$, kao i da pripadaju modelu $\mathcal{M}$. Nao osnovu ovoga sledi da $\mathbb{P}-$generički filter nad $\mathcal{M}$ seče svaki od ovih skupova, tj. za svako $\gamma < \delta < \omega_2^{\mathcal{M}}$ postoji $n < \omega$ tako da važi $g(\delta, n) \neq g(\gamma, n)$. Ako je $\delta < \omega_2^{\mathcal{M}}$, onda u $\mathcal{M}[G]$ možemo da definišemo funkciju $g_\delta : \omega \to 2$ na sledeći način: $g_\delta(n) = g(\delta, n)$. Familija ovih funkcija $\{g_\delta \mid \delta < \omega_2^{\mathcal{M}}\}$ takođe se nalazi u modelu $\mathcal{M}[G]$, pošto je konstruisana iz funkcije $g \in \mathcal{M}[G]$. Takođe, $\{g_\delta \mid \delta < \omega_2^{\mathcal{M}}\} \subseteq 2^\omega$, a sve funkcije g_δ su različite pa imamo da važi $\mathcal{M}[G] \models 2^\omega \geq \omega_2^{\mathcal{M}}$. Na osnovu POSLEDICE 114 i LEME 116 sledi da je $\omega_2^{\mathcal{M}} = \omega_2^{\mathcal{M}[G]}$, pa imamo da je $\mathcal{M}[G] \models 2^\omega \geq \omega_2^{\mathcal{M}[G]} > \omega_1$, pa je $\mathcal{M}[G] \models \neg CH$. □

U ovom odeljku smo ukratko skicirali Gedelov i Koenov rezultat, koji zajedno daju *nezavisnost* CH i GCH od aksioma ZFC, tj. ako je teorija ZFC konzistentna onda ne dokazuje niti CH niti njenu negaciju $\neg CH$, i slično tome za GCH. Ovi rezultati kao i način na koji ih je Gedel interpretirao predstavljaju polazište ovog rada, čiju ćemo strukturu ukratko opisati u nastavku.

1.9. Rezime ovog rada

U PRVOM DELU ovog rada (glave 2 – 5) ispitaćemo osnovne pretpostavke Gedelovog platonizma. Trudićemo se da pažljivo razlikujemo dva osnovna aspekta Gedelove pozicije: *ontološki* i *epistemološki*. S obzirom na platonističko stanovište, Gedelov odgovor na pitanje o ontološkom statusu matematičkih objekata je očekivan: oni postoje nezavisno od svesti, kao i našeg saznanja o njima. Odgovor koji je ponudio u pogledu mogućnosti njihovog saznanja je, međutim, mnogo kompleksniji. U prikazima Gedelovog platonizma često se navodi njegovo uverenje da mi posedujemo sposobnost matematičke intuicije, analogne čulnom opažanju, koja nam omogućava saznanje matematičkih objekata. Međutim, uprkos činjenici da je Gedel svojim opaskama zaista upućivao na jedno takvo gledište, ovo ni u kom slučaju ne iscrpljuje sve njegove argumente u prilog platonizmu. Videćemo da Gedel iznosi argumente za platonizam koji su nezavisni od njegovog shvatanja matematičke intuicije, kao i da postoje mesta koja upućuju na to da Gedel vidi platonizam, uprkos svim njegovim nedostacima, kao jedino održivo stanovište. On nastupa sa pozicije logičara sa istančanim razumevanjem matematičke i skupovno-teorijske prakse kao i dubokih rezultata logike i osnova matematike. Njegovi argumenti prirodno proističu iz toga.

Posle formulisanja Gedelove pozicije, predstavićemo neke od kritika koje su joj upućivane. Na prvom mestu, razmotrićemo Benaserafov (Paul Benacerraf) argument [Benacerraf, 1973] usmeren protiv matematičkog platonizma koji ima sledeću strukturu:

(1) Ako je matematički platonizam istinit, onda posedujemo znanje apstraktnih matematičkih entiteta.

(2) Ako posedujemo znanje apstraktnih matematičkih entiteta, onda smo sa njima kauzalno povezani.

(3) Mi nismo kauzalno povezani sa apstraktnim matematičkim entitetima.

(4) Matematički platonizam nije istinit.

Premise (1) i (3) ovog argumenta se ne čine problematičnim. Tako treća premisa sledi iz definicije samog platonizma dok prva premisa neposredno sledi iz ove definicije zajedno sa činjenicom da posedujemo matematičko saznanje. Sa platonističkog stanovišta, problematičan deo ovog argumenta počiva u premisi (2), koja je sve samo ne očigledna. Ako zajedno sa Gedelom smatramo da posedujemo sposobnost matematičke intuicije, jasno je da ćemo ovu premisu smatrati lažnom. Međutim, prigovor ovom argumentu možemo izneti i ne pozivajući se eksplicitno na komponente platonističke pozicije. Takođe ćemo ispitati argument protiv platonizma koji je formulisao Fild (Hartry Field), a koji ima za cilj da otkloni nedostatke Benaserafovog argumenta i da u isto vreme zadrži svu oštrinu napada na platonizam [Field, 1980, 1989].

Na ovom mestu je važno istaći da postoje indicije da je Gedel, posle 1954. godine, razmatrao platonističko stanovište koje počiva na ideji matematičke intuicije kompleksnijoj od one koja je u jakom smislu analogna opažanju, pa nam pomoću nje matematički objekti bivaju dati u neposrednom iskustvu:

> Treba istaći da se matematička intuicija ne mora shvatiti kao sposobnost koja nam omogućava *neposredno* saznanje njenih objekata. Izgleda da je pre slučaj da, kao i u slučaju fizičkog iskustva, mi *formiramo* naše ideje tih objekata na osnovu nečega što *jeste* neposredno

dato. Međutim, ovo nešto *nije*, ili nije u suštinskom smislu, oset. [Gödel, 1964, p. 268]

Dakle, snagu Gedelovog stanovišta ćemo biti u mogućnosti da procenimo tek pošto ispitamo da li i u kojoj meri ovakvo razumevanje matematičke intuicije jeste u skladu sa načelnim epistemološkim stanovištem koje usvajamo. Ovo nas prirodno dovodi do razmatranja epistemoloških pozicija sa kojih nastupamo prilikom objašnjenja matematičkog saznanja. Tako možemo tvrditi da naša empiristička epistemologija predstavlja Prokrustovu postelju za platonizam pa da nije adekvatna u pogledu objašnjenja matematičkog saznanja. U ovom smislu, racionalistička epistemologija (kao što je na primer ona iz [Katz, 1998]) bi mogla imati više izgleda na uspeh.

Posle formulacije Gedelovog filozofskog stanovišta, prigovora koji su mu upućivani, kao i mogućih odgovora na njih, razmotrićemo na koji način Gedelov platonizam sugeriše usvajanje novih aksioma teorije skupova koje bi nam pružile odgovore na pitanja koja trenutno prihvaćena aksiomatizacija ZFC ostavlja otvorenim. Ovo nas dovodi do problema opravdanja novih aksioma. Detaljno ćemo ispitati Gedelovu podelu tipova opravdanja novih aksioma na unutrašnje i spoljašnje. Unutrašnje opravdanje novih aksioma počiva na analizi pojma skupa dok se spoljašnje opravdanje zasniva na posledicama koje usvajanje nekog tvrđenja kao aksiome nosi sa sobom. Videćemo da je moguće ponuditi unutrašnje opravdanje svih aksioma teorije ZFC (sa mogućim izuzetkom *aksiome zamene*) pozivajući se na pojam kumulativne hijerarhije skupova koja, sa svoje strane, počiva na *iterativnom pojmu skupa*.

Takođe ćemo ispitati na koji način je moguće, služeći se iterativnim pojmom skupa, opravdati neke od aksioma velikih kardinala, na prvom mestu aksioma koje tvrde postojanje nedostižnih i Maloovih kardinala. Pored analize iterativne koncepcije skupa, ispitaćemo još neke heurističke principe koji se mogu pronaći u literaturi a koji rukovode potragom za novim aksiomama i služe prilikom opravdanja već prihvaćenih.

U DRUGOM DELU rada (glava 6) bavićemo se *principima refleksije* koji počivaju na ideji da je univerzum teorije skupova toliko veliki da ga ne možemo na zadovoljavajući način opisati unutar naše teorije. Ta ideja se tehnički razrađuje, kao što ćemo videti u glavi 6 (v. takođe i TEOREMA 59 u odeljku [1.6]). Principe refleksije ćemo posmatrati kroz nekoliko ključnih aspekata u kojima se javljaju u savremenoj teoriji skupova, i to kao:

- izvor unutrašnjeg opravdanja aksioma teorije skupova;
- teorema teorije ZF;
- nove aksiome teorije ZFC i centralni deo aksiomatizacije nekih alternativnih teorija, kao što je Akermanova (Wilhelm Ackermann) teorija klasa A.

Videćemo da je Gedelovo stanovište da principi refleksije pružaju veoma snažno opravdanje aksiomama teorije skupova, kako onim trenutno prihvaćenim tako i nekim kandidatima za nove aksiome. Posebno će nas zanimati u kojoj je meri moguće pružiti opravdanje jakih aksioma beskonačnosti pozivajući se na ovaj princip. Da li je, na primer, moguće formulisati nove aksiome koje na neki način počivaju na principu refleksije a koje za posledicu imaju $V \neq L$?

Što se mogućih proširenja teorije ZFC principima refleksije tiče, videćemo da se svi veliki kardinali čije je postojanje na ovaj način moguće dokazati relativizuju na L. Ovo ima za posledicu da je odgovor na pitanje postavljeno u poslednjoj rečenici prethodnog pasusa odričan, barem ako principe refleksije shvatimo na uobičajen način. Naravno, nije isključeno da neki novi principi refleksije, koji počivaju na drugačijim idejama, mogu da prevaziđu barijeru $V = L$.

Pored mogućih proširenja teorije ZFC principima refleksije, ispitaćemo i jednu drugačiju teoriju skupova, naime Akermanovu teoriju klasa A u čijoj je aksiomatizaciji, za razliku od one od ZFC, ideja refleksije od početka prisutna. Iako ćemo videti da je Akermanova teorija A ekvikonzistentna sa ZF i time ne dokazuje nijedno tvrđenje o skupovima koje ZF nije u stanju da dokaže, i dalje je otvoreno pitanje mogućih proširenja teorije A, koja bi imala neke zanimljive posledice. Naravno, sasvim je moguće proširiti teoriju A nekim jakim aksiomama beskonačnosti koje su formulisane u kontekstu teorije ZFC, ali takav je potez, sa stanovišta opravdanja novih aksioma, potpuno neprimeren. Naime, same te aksiome su ono što bi trebalo na izvestan način opravdati, a čak i kada bismo imali nekakav razlog da ih usvojimo kao dodatne aksiome nije jasno zašto bismo to učinili u kontekstu teorije A pre nego teorije ZFC kojoj one prirodno pripadaju. Naravno, ostaje mogućnost da ispitamo moguća proširenja teorije A novim aksiomama koje su neka vrsta prirodnih ojačanja aksioma koje imamo u A. Videćemo da je moguće formulisati veoma jaka proširenja teorije A na ovaj način, ali da se i najjača do sada poznata proširenja teorije A pokazuju kao nedovoljna da dokažu $V \neq L$.

U ovom pogledu, proširenja teorije A su u sličnom položaju kao i proširenja teorije ZFC principima refleksije. Naime, iako je moguće pružiti solidnu intuitivnu podršku takvim teorijama, one su naprosto nedovoljno jake. Konkretno, sve ove teorije su relativno konzistentne u odnosu na prvi Erdešov kardinal $\kappa(\omega)$, što daje dodatnu podršku Kelnerovoj (Peter Koellner) hipotezi [Koellner, 2009] da su svi mogući razložni principi refleksije relativno konzistentni u odnosu na ovaj kardinal i time nedovoljni da bi se prevazišla $V = L$ barijera.

Najjače meni poznato proširenje Akermanove teorije A - teorija T o kojoj ćemo više da kažemo u odeljku [6.4] - takođe ne može da ovu barijeru prevaziđe. Ovo će tvrđenje biti dokazano u odeljku [6.4] i koliko je meni poznato ono do sada nije zabeleženo u literaturi.

U TREĆEM I POSLEDNJEM DELU OVOG RADA (glava 7) razmotrićemo neke od savremenih programa formulisanja novih aksioma teorije skupova. Najviše pažnje ćemo posvetiti Vudinovom (Hugh Woodin) programu [Woodin, 2001a,b], što odgovara položaju koju ovaj program zauzima u današnjoj skupovno-teorijskoj zajednici. Ispitaćemo izvesne *filozofske* aspekte Vudinovog programa kao i programa (ili pozicija) koji su mu, u izvesnom smislu, konkurentski. Trudićemo se da ispitamo šta se tačno očekuje od svakog programa formulisanja novih aksioma teorije skupova, i koliko su takvi programi u skladu sa Gedelovim gledištima.

Naši zaključci u ovom poglavlju će biti uglavnom negativni. Naime, čak i ako prihvatimo veoma liberalno čitanje Gedelovog stanovišta na osnovu kojeg je aksiome moguće opravdati oslanjajući se u potpunosti (ili gotovo u potpunosti) na njihove posledice, nije jasno da Vudinov program uspeva da na konkluzivan način izoluje dodatnu aksiomu (ili klasu aksioma) koju bi trebalo usvojiti. Ovome u prilog govori i činjenica da je sam Vudin u poslednjih nekoliko godina bliži ideji da je hipoteza kontinuuma *istinita,* a ne lažna. Ovakav zaokret u svojoj osnovi ima pojam „krajnjeg L−a" (*the ultimate* L), unutrašnjeg modela teorije skupova koji bi za razliku od Gedelovog konstruktibilnog univerzuma L, koji je minimalan, imao izvesna svojstva maksimalnosti.

GLAVA 2

ONTOLOŠKA I EPISTEMOLOŠKA DIMENZIJA GEDELOVOG PLATONIZMA

Kakva je priroda matematičkih objekata? Da li oni uopšte postoje? Ako postoje, da li njihovo postojanje zavisi od nas ili, pak, oni postoje nezavisno od naše svesti? U vezi sa ovim nameće se pitanje našeg znanja o ovoj vrsti objekata. Ova dva pitanja stoje u neraskidivoj vezi. Koje god stanovište zauzeli u pogledu načina saznanja matematičkih objekata, ujedno smo dužni da damo nekakav odgovor na pitanje kakve sve stvari postoje u sferi matematičkog. I obrnuto, ako pođemo od stanovišta koje daje odgovor na pitanje o postojanju matematičkih objekata, drugo pitanje, koje se tiče načina na koji ih saznajemo, postaje neizbežno. Mnoga druga važna pitanja se javljaju kao posledica ovih, a naši odgovori na njih umnogome će opredeliti poziciju koju zauzimamo u filozofiji matematike.

Cilj ovog odeljka je da, koliko je to moguće, rasvetli poziciju Kurta Gedela u odnosu na pomenuta pitanja. Na njegovom primeru ćemo videti da uzajamna povezanost ovih odgovora može dovesti do finog raslojavanja unutar nečega što, na prvi pogled, izgleda kao monolitna filozofska pozicija.

2.1. O Gedelovom platonizmu

Kao što smo već napomenuli u uvodu, Gedelova pozicija u filozofiji matematike uobičajeno se označava kao *platonizam*. To je gledište po kojem matematički objekti postoje nezavisno od naše svesti.[1] Iako prećutno prihvatan kao "radna" hipoteza mnogih savremenih matematičara, platonizam je sve samo ne opšte prihvaćen kada je potrebno da se matematičari izjasne u pogledu svojih filozofskih stanovišta. Ovo je donekle razumljivo ako se uzme u obzir problem postuliranja apstraktnih objekata, kao i epistemološki problemi vezani za mogućnost njihovog saznanja. Zašto uopšte prihvatiti filozofsku poziciju koja je u ovoj meri problematična? Jedan mogući odgovor na ovo pitanje bio bi da platonizam predstavlja opravdanje matematičke gramatike. Upravo ovo predstavlja važnu komponentu Gedelovog stanovišta.

S obzirom na platonističko stanovište, Gedelov odgovor na pitanje o statusu matematičkih objekata je očekivan: oni postoje nezavisno od svesti, kao i našeg saznanja o njima. Odgovor koji je ponudio u pogledu mogućnosti njihovog saznanja je, međutim, mnogo kompleksniji. U prikazima Gedelovog platonizma često se navodi njegovo uverenje da posedujemo sposobnost matematičke intuicije, analogne čulnom opažanju, koja nam omogućava saznanje matematičkih objekata [Benacerraf, 1973]. Međutim, uprkos činjenici da je Gedel svojim opaskama zaista upućivao na jedno takvo gledište, to ni u kom slučaju ne iscrpljuje sve njegove argumente u prilog platonizmu.

U nastavku ćemo videti da Gedel iznosi argumente za platonizam koji su nezavisni od njegovog shvatanja matematičke intuicije kao i da postoje mesta koja upućuju na to da Gedel vidi platonizam, uprkos svim njegovim nedostacima, kao jedino održivo stanovište. Ne smemo takođe gubiti iz vida činjenicu da Gedelovi argumenti nisu argumenti filozofa koji nastupa sa dobro utvrđene filozofske pozicije. Smatrati ih takvim, bilo bi nepravedno prema njemu. Naprotiv, Gedel nastupa sa pozicije logičara sa istančanim razumevanjem matematičke i skupovno-teorijske prakse, kao i dubokih

[1] Postojanje ovde treba razumeti u apstraktnom smislu. Objekti kao što su brojevi, skupovi ili trouglovi ne postoje u prostorno-vremenskom svetu kao što je slučaj, na primer, sa zvezdama, protonima i šoljicama za kafu.

rezultata logike i osnova matematike. Njegovi argumenti su prirodne posledice ovog razumevanja.

Gedelovi najpoznatiji radovi o načinu našeg saznavanja matematičkih objekata i njihovoj prirodi akcenat stavljaju na našu sposobnost saznanja istina o transfinitnim skupovima. Ono što je dalo podsticaj takvom projektu jeste pitanje nezavisnosti Kantorove hipoteze kontinuuma od aksioma ZFC teorije skupova. Hipoteza kontinuuma je po svom obliku prilično elementarno tvrđenje o strukturi univerzuma skupova.

Naime, Kantor je krajem XIX veka pokazao da je kardinalnost skupa realnih brojeva striktno veća od kardinalnosti skupa prirodnih brojeva. Ovaj Kantorov rezultat otvara neka pitanja. Da li je kardinalnost skupa realnih brojeva sledeća po redu beskonačna kardinalnost veća od kardinalnosti skupa prirodnih brojeva? Ili pak postoje skupovi koji se po kardinalnosti nalaze između skupova prirodnih i realnih brojeva? Hipoteza kontinuuma kaže da ovakvi skupovi ne postoje i da je kardinalnost skupa realnih brojeva upravo sledeća veća u odnosu na kardinalnost skupa prirodnih brojeva. Međutim, čak i posle aksiomatizacije teorije skupova u prvoj polovini XX veka, nije se znalo da li je ovo tvrđenje istinito ili lažno.

Kao što smo napomenuli u uvodu, tridesetih godina prošlog veka Gedel je ispitivao ograničenje kumulativne hijerarhije ZF teorije skupova, koja na svakom nivou ima skupove koji su definabilni pomoću skupova koji se nalaze na prethodnim nivoima. Model ZF teorije skupova dobijen na ovaj način ima to svojstvo da u njemu važe kako aksioma izbora, tako i uopštena hipoteza kontinuuma. Ono što Gedelova konstrukcija pokazuje jeste da je hipoteza kontinuuma konzistentna sa aksiomama ZF teorije skupova. Drugim rečima, ne postoji bojazan da će posle usvajanja hipoteze kontinuuma kao dodatne pretpostavke, pored aksioma ZF, naš sistem postati inkonzistentan, naravno pod pretpostavkom da je ZF konzistentna teorija. Drugim rečima, ako je ZF konzistentna teorija, onda ona ne dokazuje negaciju hipoteze kontinuuma.

Bilo je potrebno da prođe nekih tridesetak godina, do 1963. godine, kada je Koen, primenom metode forsinga, konstruisao model ZF u kojem ne važi hipoteza kontinuuma. Gedelovi i Koenovi rezultati zajedno daju nezavisnost hipoteze kontinuuma od aksioma ZF teorije skupova. Nezavisnost ovog tvrđenja se ogleda u tome što ZF, ako je konzistentna, ne dokazuje ni hipotezu kontinuuma, niti njenu negaciju.

Treba istaći da su najpoznatiji Gedelovi stavovi o platonizmu iz perioda koji prethodi Koenovom dokazu nezavisnosti hipoteze kontinuuma. Međutim, čak je i tada smatrao verovatnim da će se hipoteza kontinuuma pokazati nezavisnom, što je i bio slučaj. Tako, na primer, Benaseraf u svojoj kritici [Benacerraf, 1973] Gedelovog platonizma, kao centralan uzima rad „Šta je Kantorov problem kontinuuma?", koji je prvi put objavljen 1947. godine, da bi se dopunjena verzija pojavila 1964. godine, odmah pošto je Koen objavio svoj rezultat. U ovom radu Gedel se bavi pitanjem nezavisnosti hipoteze kontinuuma, kao i opštijim pitanjem faktora koji određuju istinitost tvrđenja koja se tiču skupova.

Pošto je hipoteza kontinuuma nezavisna od aksioma ZFC, postavlja se pitanje da li postoji nešto izvan ovih aksioma što može odrediti istinosnu vrednost tvrđenja o skupovima. Fenomen nezavisnosti nam ne dopušta da kažemo da je istinito samo ono što sledi iz aksioma teorije skupova, jer aksiome ne mogu da odluče istinosnu vrednost svih tvrđenja ove teorije. Tim pre što je hipoteza kontinuuma prirodno tvrđenje o strukturi univerzuma teorije skupova. Čak iako neka tvrđenja o skupovima prihvatimo naprosto kao nezavisna, ne brinući previše o usvajanju nekih dodatnih pretpostavki koje bi njihovu istinosnu vrednost fiksirale, hipoteza kontinuuma sigurno nije takvo tvrđenje. Zastupati gledište da teorija skupova nije dužna da pruži odgovor na pitanje da li je postoje skupovi kardinalnosti striktno veće od kardinalnosti skupa prirodnih brojeva, a u isto vreme striktno manje od kardinalnosti skupa realnih brojeva, donekle je analogno gledištu da PA nije dužna da pruži odgovor na pitanje da li postoji prirodan broj između 1 i 2. Jasno je da ako postoji stanje stvari u domenu skupova koje aksiome opisuju, trebalo bi da te iste aksiome određuju istinosnu vrednost pitanja kao što je ovo. Međutim, da li možda postoji stanje stvari u domenu skupova koje se ne oslanja na aksiome kao na garant sopstvene legitimnosti?

Jedan mogući odgovor na ovo pitanje je negativan. On nas oslobađa obaveze da objasnimo šta to, pored standardnih aksioma, može odrediti istinosnu vrednost u domenu skupova. U tom slučaju pitanje da li je hipoteza kontinuuma istinita ili lažna ostaje bez odgovora.

Možemo tvrditi i više. Pošto tvrđenja kao što je hipoteza kontinuuma nemaju određenu istinosnu vrednost u ZFC, onda su ona naprosto *besmislena*. Ovo otvara put raznim „alternativnim" teorijama skupova, slično onome što postoji u geometriji, gde bismo u nekim od tih teorija hipotezu kontinuuma usvojili kao istinitu, dok bismo u drugim kao istinitu usvojili njenu negaciju. Ovakvo gledište se na prvi pogled kosi sa idejom, oličenom u platonističkoj poziciji u filozofiji matematike, da zaista postoje matematički objekti. Jer, tvrđenja o postojećim objektima treba da budu istinita ili lažna, a ne neodređena u pogledu istinosne vrednosti, što je ovde slučaj.

Ovakvo antirealističko gledište zapada u teškoće time što naše znanje o skupovima čini u izvesnom smislu trivijalnim. Izgleda da ono prestaje da bude znanje o bilo čemu. Nasuprot tome, pretpostavka postojanja matematičkih objekata pruža nam nešto što može odrediti istinosnu vrednost tvrđenja u domenu skupova, baš kao što fizički objekti određuju istinosnu vrednost empirijskih tvrđenja. Ovo u stvari znači tvrditi da postoji stanje stvari koje uključuje skupove a koje nije u potpunosti obuhvaćeno našim aksiomama, što sledi iz rezultata nezavisnosti. To stanje stvari, dakle, nije konstituisano onim što sledi iz naših aksioma.

Ovakvo gledište zastupa i Gedel tvrdeći da matematički objekti postoje „nezavisno od naše konstrukcije kao i od naše intuicije svakog od njih pojedinačno" [Gödel, 1964, p. 258], što je oštro suprotstavljeno Brauverovom (Luitzen Egbertus Jan Brouwer) intuicionizmu, koji priznaje „matematičke objekte samo ako se mogu interpretirati kao naše sopstvene konstrukcije ili bar mogu biti potpuno dati u matematičkoj intuiciji" [Gödel, 1964, p. 258]. Brauverov intuicionizam Gedel smatra pogubnim po teoriju skupova, a gledišta Poenkarea (Henri Poincaré) i Vajla (Hermann Weyl), koja naziva „semi-intuicionističkim", smatra gotovo jednako razornim.

Na ovom mestu je važno istaći da, iako postoje suštinska filozofska neslaganja između Gedela i intuicionista, njegov glavni intelektualni protivnik jeste Karnap, koji zastupa *konvencionalističko* stanovište u filozofiji matematike. O ovome jasno svedoči pažnja koju je Gedel poklanjao formulisanju argumenata koji bi trebalo da pobiju konvencionalizam. Pošto je 1953. godine prihvatio poziv, koji mu je uputio Pol Šilp (Paul Schilpp), urednik edicije *The Library of Living Philosophers*, da napiše rad za tom o Karnapu (Rudolf Carnap) koji je u pripremi, Gedel je napisao šest različitih verzija teksta „Is mathematics syntax of language?". Međutim, nijednom od ovih verzija nije bio u potpunosti zadovoljan, pa rad nije ugledao svetlost dana sve do objavljivanja Gedelove zaostavštine. Razložno je pretpostaviti da se Gedel nadao u potpunosti konkluzivnom argumentu koji bi trebalo da pobije konvencionalizam, ali se ispostavilo da je situacija teža nego što je očekivao. [Gödel, 2003b, p. 244]

Međutim, iako možemo smatrati da matematički, baš kao i fizički, objekti postoje nezavisno od naše sposobnosti da ih konstruišemo ili opažamo, sigurno se nameće jedna ključna razlika. Naime, mi posedujemo čulne opažaje kao deo mehanizma uz pomoć kojeg, pretpostavlja se, možemo steći znanje o fizičkim objektima. Iako je naše razumevanje povezanosti čulnih opažaja i znanja o fizičkim objektima nepotpuno, ono i dalje predstavlja izvor opravdanja, način da objasnimo pouzdanost naših verovanja o njima. Matematički objekti se umnogome razlikuju od fizičkih, a ovo čini epistemičku situaciju znatno drugačijom.

Naime, uticaj dokaza nezavisnosti na istinosnu vrednost tvrđenja razlikuje se u različitim granama matematike u zavisnosti od njihove povezanosti sa fizičkim svetom. U tom smislu, Gedel poredi teoriju skupova sa geometrijom. Ako uzmemo u obzir nezavisnost Euklidovog postulata paralelnosti i nezavisnost hipoteze kontinuuma:

> [M]ora se istaći da dokazom neodlučivosti pitanje gubi smisao samo ako se aksiomatski sistem koji se razmatra interpretira kao hipotetičko-deduktivni sistem, tj. ako se značenja primitivnih termina ostave neodređenim. U geometriji, na primer, pitanje da li je Euklidov peti postulat istinit zadržava svoje značenje ako se primitivni termini shvate

> u tačno određenom smislu, tj. tako da referiraju na ponašanje krutih tela, svetlosnih zraka, itd. Situacija je slična i u teoriji skupova, razlika je samo u tome što se u geometriji značenje, koje se danas najčešće usvaja, odnosi na fizičku pre nego na matematičku intuiciju, pa time odluka počiva van matematičkog domena. S druge strane, objekti transfinitne teorije skupova [...] nedvosmisleno ne pripadaju fizičkom svetu. [Gödel, 1964, p. 267]

Dakle, za hipotezu kontinuuma ne postoji merilo van matematičkog domena na osnovu kojeg se može utvrditi njena istinosna vrednost. U geometriji, istinosnu vrednost postulata paralelnosti možemo odrediti pomoću takvog spoljašnjeg merila, naime na osnovu toga da li je postulat paralelnosti istinit ili ne kada se primeni na fizički prostor. Pozivanje na fizički svet nije nam dostupno u slučaju transfinitne teorije skupova, pa je jedino matematička stvarnost ta koja nam može biti od pomoći pri utvrđivanju istinosne vrednosti pitanja kao što je problem kontinuuma. Upravo iz ovog razloga Gedel mora da pokaže na koji način saznajemo istine o transfinitnim skupovima.

Po njegovom mišljenju, istinitost tvrđenja o skupovima jeste u krajnjoj instanci određena samim objektima: hipoteza kontinuuma je nešto što naprosto mora biti istinito ili lažno za ove objekte. Aksiome su onda samo opis jedne već postojeće matematičke stvarnosti i ako postoje tvrđenja koja nisu odlučiva na osnovu ovih aksioma, onda moraju postojati delovi te matematičke stvarnosti koje ovi ne opisuju. Dakle, objekti sami, a ne aksiome ZFC teorije skupova, jesu ono što određuje istinitost tvrđenja o skupovima.

> Ako se značenja primitivnih termina teorije skupova [...] prihvate kao valjana, sledi da pojmovi i teoreme teorije skupova opisuju neku dobro određenu stvarnost u kojoj Kantorova hipoteza mora biti istinita ili lažna. Dakle, njena neodlučivost na osnovu trenutno prihvaćenih aksioma može samo značiti da one ne sadrže potpun opis te stvarnosti.[Gödel, 1964, p. 260]

Takva slika je, međutim, nepotpuna bez objašnjenja kako možemo imati saznanje o toj matematičkoj stvarnosti. Benaseraf ističe da ovakvo gledište implicira da postoji sredstvo pomoću kojeg saznajemo matematičke istine, a koje je analogno čulnom opažanju. Mi posedujemo sposobnost matematičke intuicije i upravo ona predstavlja vezu između matematičkih objekata i našeg saznanja o njima. U prilog ovome Gedel ističe da nam se aksiome „nameću kao istinite"[Gödel, 1964, p. 268]. Aksiome možemo posmatrati tako da između njih i očiglednih empirijskih tvrđenja postoji jaka analogija. U pogledu obe vrste tvrđenja mislimo potpuno isto kada kažemo da nam se „nameću kao istinita", razlika leži u vrsti i sposobnosti opažanja. Mi posedujemo čulno opažanje kao sposobnost preko koje nam se nameće istinitost nekih očiglednih empirijskih tvrđenja. Njeno mesto u kontekstu matematičkih tvrđenja zauzeće matematička intuicija. Epistemološki posmatrano, naše znanje o matematičkim objektima nije zagonetnije od našeg znanja o fizičkim objektima, ali se u prilog tvrđenja da mi zaista posedujemo sposobnost matematičke intuicije, veoma malo toga navodi kao opravdanje.

Ovo problematizovanje teškoća sa kojima se suočava Gedelov platonizam previđa jedan važan aspekt njegove pozicije. Radi se, naime, o razlozima koje je imao za prihvatanje platonističkog stanovišta. Jer, ako detaljnije ispitamo njegovu raspravu o platonizmu u radu o Kantorovoj hipotezi, izgleda da Gedel ne nudi pozitivan argument u prilog platonizmu nego pre razmatranje problema kontinuuma sa platonističkog stanovišta. Smatrati ova gledišta o platonizmu razrađenim argumentima, donekle je nefer prema Gedelu (ovo naravno ne znači da Gedel nije imao argumente u prilog platonizmu koji su razvijeniji od ovih; o tome će više reči da bude u odeljku [3.3] ovog rada). Ovo se može dodatno ojačati tvrđenjem da sposobnost matematičke intuicije ne predstavlja suštinsku komponentu Gedelovog platonizma, kako se to na prvi pogled može činiti.

Na primer, Parsons (Charles Parsons) [Parsons, 1995] ističe da se Gedelovo shvatanje intuicije može veoma jasno razlikovati od gledišta onih koji sebe nazivaju intuicionistima. Prema Parsonsu, Brauver i njegovi sledbenici „prihvataju paradigmu filozofske koncepcije matematičke intuicije koja seže do Kanta, prema kojoj se matematička intuicija tiče prostora i vremena kao formi naše čulnosti" [Parsons, 1995, p. 45]. Nasuprot tome, Gedel cilja na nešto drugo i to na

> [o]no što bi neki filozofi (u kantovskoj tradiciji) nazvali teorijom uma, pre nego teorijom intuicije. Gedel je, naime, očigledno pod uticajem predkantovske tradicije koja ne vidi ova dva poduhvata kao oštro podeljena i dopušta „intuitivno saznanje" u onim slučajevima koji nama izgledaju potpuno pojmovno.[Parsons, 1995, p. 45]

Ovim nam se nameće izvestan oprez u pogledu toga u kojoj meri želimo da insistiramo na analogiji između čulnog opažanja i matematičke intuicije. Uzeti ovu analogiju previše ozbiljno, pridalo bi suviše težine ideji da je Gedel zastupao kantovsko gledište u pogledu prirode intuicije.

Parsons posebno ističe jedan zanimljiv aspekt Gedelovog realizma, po kom on prihvata, pored realizma u pogledu objekata, i neku vrstu pojmovnog realizma. Drugim rečima, njegov realizam obuhvata i objekte koji su označeni predikatima. Ovo unosi promenu u Gedelov platonizam budući da se priroda matematičkih objekata može shvatiti nešto drugačije. Naime, ako je Parsons u pravu, matematička stvarnost obuhvata ne samo skupove, nego i skupovno-teorijske pojmove. Pojmovni realizam ne možemo naprosto redukovati na realizam u pogledu skupova, jer se u najmanju ruku „među svojstvima i relacijama između skupova kojima se teorija skupova bavi, nalaze i oni čije ekstenzije nisu skupovi"[Parsons, 1995, p. 48], što možemo označiti kao realizam u pogledu klasa.

Međutim, Parsons citira i Gedelovo predavanje iz 1933. godine, koje se fokusira na aksiomatizaciju teorije skupova, kao i na opravdanje tih aksioma. U predavanju Gedel pravi i donekle iznenađujući osvrt na platonizam:

> Rezultat prethodne diskusije jeste da naše aksiome, ako se interpretiraju kao smislena tvrđenja, nužno pretpostavljaju neku vrstu platonizma koja nije u stanju da zadovolji kritički duh i koja čak ne može proizvesti uverenje da su one konzistentne. [Gödel, 1933, p. 50]

Ovo je zanimljivo tvrđenje utoliko što se ne slaže sa slikom koju imamo o Gedelu kao najčistijem platonisti. Jedan mogući način da interpretiramo ovo mesto bio bi da kažemo da Gedel, iako jasno uočava probleme sa kojima se platonizam suočava, ne vidi nijednu održivu alternativu ovoj poziciji. Gedelovu opasku možemo tumačiti i kao dobar razlog zbog kojeg bi trebalo da budemo platonisti. Iako postoje brojni problemi u vezi sa platonizmom, izgleda da postoje i razlozi zbog kojih smo prinuđeni da ga prihvatimo[2].

2.2. *Gibs predavanje* i pojmovni realizam

Neposredan argument u prilog platonizmu možemo naći u Gedelovom *Gibs predavanju* koje je održao 1951 godine. Ovo predavanje se može grubo podeliti na dva dela. U prvom delu se razmatraju određeni logički rezultati i njihove filozofske posledice, dok se drugi deo bavi filozofskim pitanjima, među kojima je i pitanje matematičkog platonizma. Argumenti koje Gedel ovde iznosi imaju više posledica po filozofiju duha nego po filozofiju matematike. Za veoma lep prikaz tih Gedelovih argumenata čitaoca upućujemo na Penrouzov (Roger Penrose) noviji rad [Penrose, 2011] koji je inspirisan Gedelom ali sadrži i mnogo toga originalnog.

Logički rezultati koje Gedel navodi u prvom delu predavanja u vezi su sa pojmom matematičke neiscrpnosti ili neupotpunjivosti. Kao primere takvih rezultata on navodi sopstvene teoreme o nepotpunosti. Tako druga teorema o nepotpunosti

> [...] čini nemogućim da neko konstruiše izvestan dobro definisan sistem aksioma i pravila zaključivanja i da na konzistentan način o njemu tvrdi sledeće: Opažam (sa matematičkom izvesnošću) da su sve ove aksiome, kao i pravila zaključivanja, valjane i verujem da one sadrže čitavu matematiku. Ako neko tvrdi tako nešto, on protivreči sebi. Jer ako opaža da su aksiome o kojima je reč valjane, on takođe opaža (sa istim stepenom izvesnosti) da su one konzistentne. Dakle on poseduje matematički uvid koji nije posledica njegovih aksioma.[Gödel, 1951, p. 309]

[2] Još jednu moguću interpretaciju ove Gedelove napomene ponudićemo u nastavku rada kada budemo detaljnije govorili o njegovom shvatanju matematičke intuicije (v. FUSNOTA 6 na str. 141).

Na osnovu ovoga, Gedel pravi podelu na objektivnu i subjektivnu matematiku. Objektivna matematika bi bila sistem svih istinitih matematičkih tvrđenja, dok subjektivnu matematiku čini sistem svih dokazivih matematičkih tvrđenja. Nijedan dobro definisan aksiomatski sistem ne može da se poistoveti sa objektivnom matematikom, jer je tvrđenje koje kaže da je sam ovaj sistem konzistentan istinito a ipak, prema drugoj teoremi o nepotpunosti, nedokazivo u ovom aksiomatskom sistemu. Sledećom po Gedelovom mišljenju neizbežnom dilemom, koju on zove jednostavno *disjunkcijom*, možemo da sumiramo prethodno rečeno:

> Ili matematika ne može da se kompletira u smislu da se njene aksiome nikada ne mogu obuhvatiti pomoću konačnog pravila, što će reći da ljudski duh (čak i u oblasti čiste matematike) beskonačno prevazilazi moći ma koje konačne mašine, ili pak postoje apsolutno nerešivi diofantovski problemi navedene vrste [...] [Gödel, 1951, p. 310]

Upravo je drugi disjunkt ove dileme, u kom se jasno ocrtava jaz između objektivne i subjektivne matematike, onaj koji je relevantan za razumevanje Gedelovog platonizma. Njega Gedel smatra protivargumentom gledištu da matematika nije ništa više od ljudske tvorevine. Naime, ako smo mi sami tvorci matematike, onda bismo znali sve o njoj, jer tvorac mora znati sve o sopstvenoj tvorevini. Štaviše, čak i kada bi se tvrdilo da mogu postojati činjenice o matematici koje ne znamo, realističko stanovište se i dalje nameće. Mi zaista konstruišemo stvari kao mašine čije ponašanje ne možemo u potpunosti predvideti. Baš zato što se mašine konstruišu iz nekog datog materijala odgovarajuća situacija u matematici bi i dalje povlačila neku vrstu realizma, jer bi i dalje postojala objektivna osnova naše konstrukcije. Gedel smatra da to povlači „da matematički objekti i činjenice (ili bar nešto u njima) postoje objektivno i nezavisno od naših mentalnih akata i odluka"[Gödel, 1951, p. 311].

Do sada je platonizam bio posledica jednog od dva disjunkta dileme koju smo naveli. Kasnije u predavanju Gedel tvrdi da argumenti za platonizam, koji on naziva i *pojmovnim realizmom*, imaju kao podršku određene rezultate iz osnova matematike, nezavisno od toga koji disjunkt dileme zaista važi. Reč je o tri argumenta usmerena protiv ideje da je matematika ljudska ili slobodna tvorevina.

Na prvom mestu, kao što je rečeno, ako bi matematika bila ljudska tvorevina, mi sami ne bismo bili lišeni znanja o predmetu koji smo stvorili, bar ne u meri u kojoj to zaista jesmo. Kao drugo, matematičku praksu ne odlikuje sloboda nego nužnost. Matematičari nisu u stanju da pukom snagom sopstvene volje dokazuju važenje svojih teorema. Najzad, izgleda da dokazi tvrđenja o izvesnoj klasi objekata zahtevaju upotrebu objekata druge klase. Na primer, Gedel ističe da neki dokazi tvrđenja o prirodnim brojevima zahtevaju upotrebu skupova prirodnih brojeva, pa je i pojam skupa prirodnih brojeva nužan u ovom kontekstu. Ali prirodni brojevi i skupovi prirodnih brojeva nisu iste stvari i stvaranje objekata prve vrste ne čini nužnom stvaranje objekata druge. To znači da ako želimo da utvrdimo svojstva stvari koje smo stvorili moramo ujedno da stvorimo i objekte druge vrste koji će nam u tome pomoći.

Parsons s pravom ističe da ovi pozitivni argumenti za platonizam uopšte ne pretpostavljaju pojam intuicije koja se u Gedelovom radu o Kantorovom problemu kontinuuma činila centralnom. U pomenutom Gibs predavanju postoji mesto koje se ponovo bavi temama iz upravo pomenutog rada, ali koje je ovoga puta formulisano pomoću jezika pojmova pre nego pomoću jezika skupova. Tako Gedel kritikuje zamisao prema kojoj se za

> [...] značenje termina (tj. pojmova na koje referiraju) tvrdi da predstavlja nešto stvoreno od strane čoveka, a što se prosto sastoji iz semantičkih konvencija. Verujem da istina leži u tome da ovi pojmovi poseduju objektivnu stvarnost po sebi, koju ne možemo stvoriti ili izmeniti, nego samo opaziti i opisati. [Gödel, 1951, p. 320]

U najmanju ruku ovo nas navodi da preispitamo stav da je Gedelov pojam intuicije zaista toliko uzak koliko se činilo. Ovo ujedno baca i novo svetlo na Gedelove opaske iz 1964. godine. Parsons razmatra naredni odeljak, u kojem nalazi materijal za nešto istančaniju interpretaciju od uobičajene:

> Ali, uprkos njihovoj udaljenosti od čulnog iskustva, ipak posedujemo nešto što liči na opažanje objekata teorije skupova, o čemu svedoči činjenica da nam se aksiome nameću kao istinite. Ne vidim nikakav razlog zbog kojeg bismo imali manje poverenja u ovu vrstu opažanja, tj. u matematičku intuiciju, nego u čulno opažanje koje nam omogućava da gradimo fizičke teorije i da očekujemo da će se naša buduća čulna opažanja sa njima slagati, kao i da verujemo da pitanje koje je trenutno neodlučivo nije bez značenja i da može biti odlučeno u budućnosti. [Gödel, 1964, p. 268]

Parsons ističe da Gedelovo zastupanje *pojmovnog realizma*, pored „uobičajenog” matematičkog realizma, po svemu sudeći utiče na to koji su to objekti teorije skupova koje opažamo. Pod objektima teorije skupova treba razumeti ne samo same skupove, nego i skupovno-teorijske pojmove kakvi su, na primer, pojmovi skupa, pripadnosti, klase i tome slično.[Parsons, 1995, p. 65] Osim toga, izgleda da intuicije koje imamo o samim skupovima zauzimaju manje centralno mesto u Gedelovom objašnjenju problema matematičkog znanja od intuicija koje imamo o skupovno-teorijskim pojmovima. Razlikovanje između skupa i pojma skupa će nam biti veoma važno u nastavku ovog rada. Više o ovom razlici ćemo reći u odeljku [3.3.1] ovog rada i dalje.

Gedel napominje da „matematička intuicija ne mora biti shvaćena kao sposobnost koja daje neposredno znanje o objektima. Pre će biti slučaj da, kao i u fizičkom iskustvu, mi formiramo naše ideje o tim objektima na osnovu nečeg drugog što jeste neposredno dato”[Gödel, 1964, p. 268]. Ovo bi trebalo da ide u prilog tezi da su neki od naših apstraktnih matematičkih pojmova primitivni, pa da na osnovu njih zasnivamo naše znanje o ostalim matematičkim objektima. Ovi pojmovi su neophodni da bismo imali ideje o matematičkim objektima i kao takvi zasnivaju ostatak našeg matematičkog znanja. O Gedelovom pojmovnom realizmu i ulozi matematičke intuicije u njegovoj epistemologiji ćemo reći više u odeljcima [3.3.2] i [3.3.3].

Čak i ako bi se ispostavilo da matematički objekti ne postoje, Gedel sugeriše da i dalje možemo pružiti smislen odgovor na pitanja kakvo je hipoteza kontinuuma, i to upravo na osnovu ovih intuicija, budući da

> [P]itanje objektivnog postojanja objekata matematičke intuicije [...] nije presudno za problem koji trenutno razmatramo. Prosta psihološka činjenica postojanja intuicije, koja je dovoljno jasna da proizvede aksiome teorije skupova, kao i neograničen niz njihovih proširenja, dovoljna je da da smisao pitanju o istinitosti tvrđenja kakvo je Kantorova hipoteza kontinuuma. [Gödel, 1964, p. 268]

Gedelovo razlikovanje između objektivne i subjektivne matematike nam ovde može biti od pomoći. U subjektivnom smislu, ono što određuje istinu u domenu skupova jesu upravo aksiome teorije skupova koje prihvatamo, kao i njihova moguća proširenja. S druge strane, ono što određuje aksiome teorije skupova, kao i njihova proširenja, jesu naše matematičke intuicije primitivnih pojmova. Gedel veruje da se mogu navesti jaki argumenti u prilog tvrdnji da zaista postoji nešto kao što je objektivna matematika, koja je u potpunosti nezavisna od subjektivne matematike. Upravo to nameće platonizam kao poziciju, onako kako je određena u Gibs predavanju.

Na ovom mestu možemo istaći dva aspekta dosadašnje analize platonizma i intuicije u Gedelovom radu. Prvi je da Gedel iznosi argumente za platonizam koji su nezavisni od njegovih ideja o prirodi matematičke intuicije. Ovi argumenti počivaju na Gedelovim teoremama nepotpunosti kao i na razlikovanju između objektivne i subjektivne matematike koje iz njih sledi. Postoje mesta, kao što smo videli, na kojima Gedel vidi platonizam, uprkos svim njegovim nedostacima, kao jedinu održivu poziciju. Uvođenje sposobnosti matematičke intuicije, kao dodatne komponente u argumentaciji, možemo videti kao nešto što dolazi posle prihvatanja samog platonizma a u cilju objašnjenja onoga za šta već znamo da je istinito. To je teza koju smo pokušali da branimo u ovom odeljku.

Drugi aspekt se ogleda u tome što se matematička intuicija ne odnosi samo na skupove nego i na druge primitivne skupovno-teorijske pojmove. Upravo su ovi pojmovi ono što, u mnogo većoj meri od samih skupova, stvara aksiome koje sa svoje strane određuju ono što je dokazivo u teoriji skupova. Detaljniju analizu Gedelovog pojma intuicije pružićemo u odeljku [3.3.2] ovog rada, nakon što navedemo neke od kritika koje su mu upućene. Iako je za Gedela ontologija primarna u odnosu na epistemologiju, on je i dalje dužan da kaže makar nešto o načinu na koji stičemo znanje o skupovima. Međutim, pokazaćemo da je njegova epistemologija bila žrtva pogrešne interpretacije, koja je njegov pojam intuicije svela na karikaturu i koja ne uzima u obzir ono što Gedel zaista kaže o ovoj sposobnosti.

Treba napomenuti da je Gedelovo stanovište koje smo opisali u ovom odeljku u velikom raskoraku sa onim što se događalo u filozofiji pedesetih godina prošlog veka. Primat teorije značenja nad epistemologijom i ontologijom koji je obeležio čitavu dvadesetovekovnu filozofiju kao da ni najmanje nije uticao na Gedela. Na primer, Vitgenštajnovo (Ludwig Wittgenstein) insistiranje na analizi jezika i njegove upotrebe u *Filozofskim istraživanjima* Gedelu je bilo potpuno strano.

S druge strane, neke sličnosti između Gedelove i Vitgenštajnove filozofije ipak postoje. Pojam matematičke *prakse*, onoga što matematičari zaista rade kada se bave matematikom bio je veoma važan za Gedela. Ako se usredsredimo samo na način na koji stičemo znanje o skupovima možemo izgubiti iz vida njegova gledišta o skupovno-teorijskoj praksi, kao i načinu na koji je ona povezana s njegovim platonizmom. Međutim, to nije sve. Ovim rizikujemo da izgubimo iz vida i sledeći važan aspekt koji možemo naći unutar Gedelovog programa formulisanja novih aksioma teorije skupova: hipotezu kontinuuma možemo posmatrati ne samo kao pitanje šta određuje matematičku istinu, nego i kao pitanje kako dolazimo do novih aksioma i verovanja u njih.

Kako za platonistu aksiome daju samo nepotpun opis univerzuma skupova, mora se postaviti pitanje kakve su to aksiome koje bi nam mogle dati potpun opis tog univerzuma. To onda prerasta u problem opravdanosti verovanja u takve aksiome. Jedno objašnjenje koje Gedel pruža oslanja se na sposobnost matematičke intuicije. Međutim, ovo nije jedino objašnjenje koje on nudi. Pored ovog, po Gedelovom mišljenju, nove aksiome mogu se opravdati svojim posledicama u drugim granama matematike kao što je aritmetika. [Gödel, 1964, p. 261]

Jedan prikaz i kritika Gedelove dileme o kojoj smo u ovom odeljku govorili mogu se naći u [Feferman, 2006].

GLAVA 3

NOMINALISTIČKA KRITIKA PLATONIZMA

Videli smo da je jedan od osnovnih problema platonističke pozicije epistemološki: na koji način objasniti naše znanje o apstraktnim matematičkim objektima koji nimalo ne liče na objekte našeg svakodnevnog iskustva? U ovom odeljku ispitaćemo neke od najuticajnijih argumenata koji su formulisani protiv matematičkog platonizma sa ciljem da pokažu da, ako je platonizam istinit, mi ne možemo posedovati matematičko znanje. Kako retko ko poriče da posedujemo matematičko znanje, ovo bi trebalo da konačno presudi svakom pokušaju platonističkog razumevanja matematičke istine.

Na prvom mestu, ispitaćemo veoma uticajan argument protiv platonizma koji je 1973. godine formulisao američki filozof Pol Benaseraf (Paul Benacerraf). Taj argument poznat je i pod imenom *Benaserafova dilema*, iz razloga koji će postati jasni u nastavku. Pošto u osnovnim crtama iznesemo Benaserafov argument ukazaćemo na neke probleme sa kojima se suočava. Posle toga, predstavićemo izvesno poboljšanje Benaserafovog argumenta koje je formulisao Hartri Fild (Hartry Field) a koje ima za cilj da prevaziđe probleme sa kojima se suočava Benaseraf. Posle formulacije tih argumenata usmerenih protiv matematičkog platonizma, pokušaćemo da pokažemo kako je na njih moguće odgovoriti sa jednog opšteg realističkog stanovišta. Na kraju, ispitaćemo da li i u kojoj meri ovi argumenti pogađaju Gedelov platonizam.

3.1. Benaserafova dilema

Benaserafova dilema [Benacerraf, 1973] se može opisati kao konflikt između zahteva za adekvatnom semantikom jezika matematike i zahteva za adekvatnom matematičkom epistemologijom.

> Čini mi se da su dve različite vrste zahteva motivisale, svaka na svoj način, gledišta o prirodi matematičke istine: (1) zahtev za homogenom semantičkom teorijom na osnovu koje semantika matematičkih tvrđenja sledi onu ostatka jezika, i (2) zahtev da se priroda matematičke istine usaglasi sa razumnom epistemologijom. [Benacerraf, 1973, p. 661]

Prema Benaserafovom mišljenju, problem se ogleda u tome što su gotovo svi pokušaji objašnjenja prirode matematičke istine forsirali jedan od ova dva zahteva na uštrb drugog. Tako, na primer, ako objašnjenje matematičke istine prati razložna epistemološka pozicija, semantika matematičkih iskaza na kojoj ta istina počiva je daleko od adekvatne.

S druge strane, platonistički shvaćena semantika u potpunosti odgovara semantici prirodnih jezika, ali, po Benaserafovom mišljenju, platonizam ne može opravdati svoje epistemološke pretpostavke. Tako jezik unutar platonistički shvaćenih matematičkih teorija u mnogome odgovara jeziku fizike koji pretpostavlja postojanje objekata na koje termini ove nauke referiraju.

Benaserafov argument se često interpretira tako da osim što predstavlja izazov matematičkom platonizmu on je u isto vreme i argument u prilog *nominalizmu*.[1] Najkraće rečeno, nominalizam u filozofiji matematike je pozicija koja poriče postojanje matematičkih objekata. Matematički objekti ne postoje, postoje samo njihova imena.

[1]Ovako ga na primer razume Fild. O ovome ćemo reći nešto više u nastavku.

Strogo govoreći pošto ta imena ništa ne označavaju ona i nisu imena nego *façon de parler*.

Problemi za platonističku poziciju dakle nastaju kada treba da objasni naše znanje apstraktnih matematičkih objekata. Na suprotnoj strani, problem za Hilbertov *formalizam* nalazio bi se ne u epistemologiji nego u semantici. Formalizam matematičku istinu shvata u strogo kombinatornom smislu, pozivajući se na pojam dokaza u nekom formalnom aksiomatskom sistemu. Međutim, formalizam mora pretpostaviti da semantika matematičkog jezika u izvesnom smislu odudara od semantike ostatka jezika.

Na osnovu ovog problema Benaseraf formuliše dve prepreka koje svaka zadovoljavajuća teorija o prirodi matematičke istine mora da prevaziđe.

- *Semantička prepreka*: Pružiti homogenu semantičku teoriju unutar koje će semantika matematičkog jezika biti u skladu sa semantikom ostatka jezika.
- *Epistemološka prepreka*: Pružiti adekvatno objašnjenje matematičke istine koje je u skladu sa prihvatljivim epistemološkim teorijama.

Po Benaserafovom mišljenju, idealno objašnjenje pojma matematičke istine bilo bi ono koje

> [...] se mora uklopiti u sveobuhvatno objašnjenje našeg saznanja na način koji će učiniti razumljivim to kako posedujemo matematičko znanje koje posedujemo. Prihvatljiva semantika matematičkog jezika mora se uskladiti sa prihvatljivom epistemologijom. [Benacerraf, 1973, p. 667]

3.1.1. Semantička prepreka. Posvetimo se ukratko Benaserafovom zahtevu za homogenom semantikom i razmotrimo naredne dve rečenice:

(1) Postoje najmanje tri velika grada starija od Njujorka.

(2) Postoje najmanje tri prosta broja veća od 17.

Benaseraf zaključuje da ono što ove dve rečenice imaju zajedničko jeste njihova logička ili gramatička forma. Ovu formu možemo izraziti na sledeći način:

(3) Postoje najmanje tri $F-$a koja su u relaciji R sa a.

Po Benaserafovom mišljenju rečenica (1) će biti istinita samo u slučaju da objekt na koji se njome referira (Njujork) stoji kao drugi član u relaciji R („je stariji od") sa najmanje tri objekta koji zadovoljavaju predikat F („je veliki grad"). Slično tome, rečenica (2) će biti istinita samo u slučaju da objekt na koji se njome referira (broj 17) stoji kao drugi član u relaciji R („x je veće od y") sa najmanje tri objekta koji zadovoljavaju predikat F („biti prost broj").

Benaseraf kaže da rečenice (1) i (2) imaju istu logičku formu, naime formu koja je izražena rečenicom (3), pa se na njih da primeniti ista vrsta analize, koju naziva *standardnim semantičkim objašnjenjem*. Primer ovog standardnog semantičkog objašnjenja nudi nam matematički platonizam.

Objašnjenje koje ne interpretira rečenice (1) i (2) homogeno tako da one dobijaju logičku formu (3) nego nudi alternativnu matematičku analizu Benaseraf naziva *kombinatornim objašnjenjem*. Kao primer kombinatornog objašnjenja Benaseraf navodi formalističku analizu matematičkih iskaza u Hilbertovom duhu. Standardno objašnjenje sigurno ispunjava zahteve koje postavlja semantička prepreka. Platonizam je u ovom smislu u prednosti, jer objašnjava jezik matematike kao i nematematički jezik istim sredstvima. U oba slučaja oslanjamo se na istu semantiku.

Nasuprot tome, kombinatorno objašnjenje ne može ispuniti ovaj zahtev. Sa stanovišta formalizma, nema ničeg spornog u analizi rečenice (1) tako da ona dobije formu rečenice (3). Međutim, ono što formalizam poriče jeste da će isto važiti i za rečenicu (2). Istinosni uslovi matematičkih tvrđenja, sa stanovišta formalizma, ogledaju se u njihovoj formalnoj izvodivosti iz određenog skupa aksioma. Dakle, formalizam je prinuđen da se odrekne homogene semantičke teorije koja bi obuhvatala matematički kao i nematematički deo jezika – ova dva dela jezika naprosto funkcionišu na drugačiji način, bar što se njihove semantike tiče.

Vratimo se razlozima koji su doveli do Benaserafove formulacije semantičke prepreke. Zašto on uopšte smatra prednošću da se istina matematičkih rečenica analizira na način koji je u skladu sa analizom koju imamo u ostatku jezika? Pozicija koju Benaseraf zastupa, *fizikalizam*, motivisana je idejom jedinstva nauke, koja sugeriše mogućnost razumevanja istinitih rečenica različitih naučnih oblasti na jedinstven način. Ako posedujemo jedinstvenu teoriju istine, koja je nezavisna od pojedinačnih oblasti u kojima se iskazi koje analiziramo javljaju, onda možemo reći, na primer, da je konjunkcija $A \wedge B$ istinita, ako su rečenice A i B istinite. Međutim, ako analiziramo matematičku istinu na jedan a istinu u fizici na drugi način javlja se problem. Ako je rečenica A matematički istinita a rečenica B fizički istinita, kada možemo reći da je njihova konjunkcija istinita? Ova istina neće biti ni u potpunosti matematička niti u potpunosti fizička. Ako je međutim ova rečenica istinita u nekakvom opštem smislu, ovo nas vraća ideji nekog generičkog, predmetno-neutralnog shvatanja istine.

Na osnovu semantičke prepreke, mora postojati adekvatna analiza matematičke istine koja je u skladu sa opštom semantičkom teorijom ostatka našeg jezika. Primetimo da Benaseraf redukuje problem semantičke teorije jezika na teoriju istine tog jezika. Odgovarajuća semantička analiza matematičke istine mora biti konzistentna sa opštijim objašnjenjem šta tačno znači reći da su neke od rečenica našeg jezika istinite. Po Benaserafovom mišljenju, najbolje objašnjenje pojma istine pruža analiza Tarskog (Alfred Tarski):

> Čini mi se da posedujemo samo jedno takvo objašnjenje, ono Tarskog, i da je njegovo glavno obeležje definicija istinitosti na osnovu referencije (zadovoljenja) zasnovane na određenoj vrsti sintaktičko-semantičke analize jezika i, dakle, da svaka potencijalna analiza matematičke istine mora biti analiza pojma istine, bar u smislu Tarskog. [Benacerraf, 1973, p. 667]

3.1.2. Epistemološka prepreka. Drugi deo Benaserafove dileme počiva u zahtevu za objašnjenjem kako je matematičko znanje uopšte moguće. Kao i u slučaju semantičke prepreke, Benaseraf zahteva da svako objašnjenje prirode matematičkog saznanja bude u skladu sa ostatkom naše epistemologije. U ovom pogledu on predlaže *kauzalnu teoriju znanja* kao najbolju teoriju koja može dati objašnjenje uslova matematičkog znanja:

> Ja favorizujem kauzalno objašnjenje saznanja na osnovu koga da bi X znao da je S istinito, mora postojati kauzalna veza između X–a i referencije imena, predikata i promenljivih od S [...] Mora biti moguće uspostaviti odgovarajuću vrstu veze između istinosnih uslova za S (na koje se referira u definiciji istinitosti za jezik u kojem je S izraženo) i razloga zbog kojih smo u stanju da tvrdimo da su se ti istinosni uslovi stekli [...] Ako to nije moguće učiniti, nikakva veza između istinitosti iskaza i razloga koje imamo da u nju verujemo ne može biti uspostavljena. [Benacerraf, 1973, p. 671]

Ako zaista postoje istinita matematička tvrđenja, onda nas ona obavezuju (u skladu sa semantičkim skrupulama koje usvajamo) na postojanje objekata na koje referiraju. Međutim, matematički objekti su, sa platonističkog stanovišta, apstraktni pa nije jasno kako možemo steći saznanje o objektima koji nisu kauzalno povezani sa nama kao subjektima saznanja niti sa ostatkom fizičkog sveta. Zahtevi koje postavljamo pred svaku epistemološku teoriju koja treba da objasni postojanje matematičkog saznanja nam, po Benaserafovom mišljenju, zabranjuju da se pozivamo na standardno objašnjenje: naše najbolje epistemološke teorije zahtevaju postojanje kauzalne veze između subjekta saznanja i objekata koji predstavljaju uslov istinitosti matematičkih tvrđenja.

Standardno objašnjenje, ono koje počiva na kauzalnoj teoriji znanja, tako čini matematičko saznanje nemogućim jer zahteva postojanje kauzalne veze koja uključuje objekte koji su po svojoj definiciji kauzalno inertni. Benaserafova dilema dakle izoluje izvesnu tenziju koja je u to vreme postojala između dva uspešna modela: jednog semantičkog, teorije istine Tarskog, i jednog epistemološkog, Goldmanove (Alvin Goldman) kauzalne teorije znanja [Goldman, 1967]. Ona zahteva da referencijalno (platonističko) objašnjenje pojma matematičke istine bude kompatibilno sa kauzalnom teorijom matematičkog znanja. Međutim, kao što smo videli, prvo isključuje drugo i obratno.

3.1.3. Kauzalna teorija znanja i platonizam. Videli smo da Benaserafova kritika platonizma počiva na kauzalnoj teoriji znanja. Za početak, prikažimo njegov argument u sažetoj formi:

(1) Istinita matematička tvrđenja referiraju na matematičke objekte.
(2) Kauzalna teorija znanja je istinita.
(3) Kauzalna teorija znanja zahteva kauzalnu povezanost subjekata saznanja i matematičkih objekata kao uslova istinitosti matematičkih tvrđenja.
(4) Matematički objekti su kauzalno inertni, pa ne mogu učestvovati u kauzalnim relacijama sa subjektima saznanja (niti sa bilo čim drugim).

Dakle, referencijalna (platonistička) semantika jezika matematike čini matematičko znanje nemogućim što diskredituje platonizam kao održivu filozofsku poziciju.

Međutim, kauzalna teorija znanja na kojoj ovaj argument počiva nije nimalo monolitna. Prema ovoj teoriji, u svetlu getijeovskih primera, klasičnu tripartitnu analizu znanja je neophodno dopuniti uslovom da subjekt S zna da p samo ako je činjenica da je p uzrok S-ovog verovanja da p.

Ovo porađa nekoliko problema koje ćemo sada izneti. Na primer, ako je kauzalna teorija znanja istinita, ja ne znam da *u ovom trenutku* imam dve ruke. Moje trenutno verovanje da imam dve ruke *nije* uzrokovano činjenicom da u ovom trenutku imam dve ruke, nego nedavno prošlom činjenicom da sam imao dve ruke. U najboljem slučaju, mogu znati da sam nedavno imao dve ruke. Ovo je, u najmanju ruku, čudan zaključak.

Pored toga, nije potpuno jasno na koji način *činjenice* mogu učestvovati u kauzalnim lancima? Tako, ako usvojimo sledeću veoma opštu formulaciju kauzalne teorije znanja:

(KTZ): S ne može znati da p osim u slučajevima kada činjenica da p uzrokuje $S-$ovo znanje (ili verovanje) da p.

izgleda da ona pretpostavlja postojanje činjenica koje su i same apstraktni entiteti. Kao takvi, oni su kauzalno inertni pa (KTZ) u stvari čini svo znanje nemogućim, jer zahteva postojanje kauzalne veze između apstraktnih objekata i subjekata saznanja. Ovaj argument je prvi istakao Stejner (Marc Steiner) [Steiner, 1975].

Dalje, kauzalna teorija znanja suočava se sa problemom objašnjenja znanja budućih događaja. Ako i prihvatimo da činjenice mogu biti deo uzročnih lanaca, ne postoji način da neka buduća činjenica može uzrokovati moje sadašnje znanje nekog budućeg događaja. Tako, na primer, ne mogu znati da će Sunce sutra izaći.

Ako platonizam kao pozicija u filozofiji matematike nudi najbolje moguće objašnjenje našeg matematičkog saznanja, racionalno je da ga preferiramo u odnosu na komplikovanu kauzalnu teoriju znanja. Treba da potražimo alternativne teorije koje će biti u većoj meri saglasne sa platonizmom. Po rečima Bardžisa (John Burgess) i Rozena (Gideon Rosen):

> [U] odsustvu detaljne formulacije kauzalne teorije opravdanja, možemo se pitati da li se takva teorija zaista može formulisati na takav način da ima upravo one posledice koje konveniraju nominalistima [...] za koje onda nastaje problem da objasne zašto bi trebalo da imamo više poverenja u kauzalnu teoriju opravdanja nego u našu trenutnu matematiku [...] [Burgess and Rosen, 1997, p. 40.]

Da li kritičari platonizma imaju izlaz iz ove neugodne pozicije? Pošto kauzalna teorija znanja u onom obliku u kom ju je formulisao Benaseraf danas više pripada filozofskoj arheologiji nego filozofiji *per se*, možda postoji mogućnost da se argument protiv platonizma preformuliše i tako izbegnu neki od prigovora upućenih Benaserafu. Začetke ove ideje možemo naći već dosta rano, naime u Hartovom (William Hart) prikazu Stejnerove knjige [Steiner, 1975] koju smo već spomenuli:

> Zločin je protiv intelekta pokušaj da se problem naturalizacije matematičke epistemologije prikrije filozofskim smicalicama. Površna zabrinutost oko intelektualne higijene kauzalnih teorija znanja je irelevantna za ovaj problem i navodi nas na pogrešan trag. Problem se ne tiče toliko kauzaliteta koliko same mogućnosti prirodnog znanja apstraktnih objekata. [Hart, 1977, pp. 125-126]

Pošto se do sada nismo susreli sa *epistemološkim naturalizmom* kao filozofskim stanovištem, reći ćemo nekoliko reči o tome. Tradicionalno se epistemologija razumevala kao apriorna, *normativna* filozofska disciplina: ona propisuje kako bi do verovanja *trebalo* da dolazimo ako želimo da ona budu opravdana, primera radi. Ovako ju je, na primer, razumeo Dekart (René Descartes) u prvoj meditaciji. Nije posao epistemologije da opisuje kako mi *zaista* dolazimo do naših verovanja. To tradicionalno razumevanje epistemologije je verovatno najsnažnije napadao Kvajn (Willard van Orman Quine) kome i dugujemo kovanicu *naturalistička epistemologija* [Quine, 1969, pp. 69-90]:

> Kvajn potpuno menja perspektivu. Budućnost epistemologije je, prema njegovom mišljenju, u napuštanju normativnog pitanja koje je okupiralo tradicionalne epistemologe i posvećivanju deskriptivnom pitanju o tome kako zaista dolazimo o do naših verovanja o spoljašnjem svetu [...] tradicionalnu epistemologiju kao normativnu disciplinu smenila bi psihologija (i eventualno još neke empirijske nauke) čiji je cilj da empirijski istraži naš stvarni put do saznanja.[Živan Lazović, 1994, str. 15]

Naturalistička epistemologija ide ruku pod ruku sa *scijentizmom*. Od psihologije i drugih prirodnih nauka se očekuje da daju odgovore na pitanja koja se tiču našeg matematičkog saznanja. Postoje i neke umerenije naturalističke pozicije od ove. Recimo, Bardžis i Rozen [Burgess and Rosen, 1997] zastupaju poziciju koja naturalizam miri sa platonizmom. Jednoj naturalističkoj poziciji sličnoj ovoj ćemo da posvetimo pažnju u odeljku [5.3].

U nastavku ćemo predstaviti argument usmeren protiv platonizma koji je formulisao Fild a za koji se, u izvesnom smislu, može reći da je *neutralan* u pogledu semantičkih i epistemoloških pretpostavki koje usvaja. U tom pogledu, on bi trebalo da zadrži svu snagu Benaserafovog argumenta ne pretpostavljajući pritom da je kauzalna teorija znanja istinita.

3.2. Fildov nominalizam

Ovaj odeljak posvetićemo jednom od najuticajnijih nominalista u savremenoj filozofiji, Hartriju Fildu. Njegova gledišta u filozofiji matematike [Field, 1980, 1989] su dijametralno suprotna Gedelovim, a njegovi argumenti protiv platonizma unapređuju Benaserafov argument koji smo razmatrali gore. Fildovu poziciju nije jednostavno formulisati. Njegovi argumenti su složeni i dotiču se mnogih važnih i teških pitanja ontologije, epistemologije, filozofije jezika, filozofije logike itd., za koja, na prvi pogled, ne bismo pomislili da su relevantna za filozofiju matematike. Zato ćemo u nastavku pokušati da Fildove argumente pojednostavimo onoliko koliko je to moguće. Za više detalja zainteresovanog čitaoca upućujemo na [Field, 1980, 1989].

Kao što smo već napomenuli, Hartri Fild je svoje argumente usmerene protiv platonizma formulisao tako da izbegavaju potencijalno problematične pojmove kakvi su *znanje*, *istina* itd., a čije je značenje ukorenjeno u naučnim teorijama. Umesto toga, Fild polazi od pitanja: *zašto su tvrđenja koja matematičari formulišu pouzdana*? Po njegovom mišljenju, kada matematičari formulišu svoja tvrđenja ona su u načelu pouzdana i ovu pouzdanost treba da objasnimo. Daleko od toga da matematičari odlučuju bacanjem novčića o tome da li će tvrditi određeni iskaz ili ne.

Fild smatra svoj argument (kao uostalom i Benaserafov) argumentom u prilog nominalizmu i on ovu poziciju zastupa. Sasvim je sigurno da ovi argumenti predstavljaju izazov matematičkom platonizmu ili nekim srodnim oblicima realizma, ali da li oni samim tim potvrđuju nominalizam? Potrudićemo se da pokažemo da ovo prebacivanje tereta dokaza na platoniste nema osnova u nominalističkoj poziciji. Nominalizam se mora braniti *pozitivnim* argumentima koji pružaju podršku nominalističkom shvatanju matematike nezavisno od kritike platonizma.

3.2.1. Fild o neophodnosti apstraktnih objekata. Pre nego što formulišemo Fildov argument biće nam od koristi da ukratko ispitamo motivaciju za njega. Nesumnjivo je da je, pored toga što je lepa, matematika i jako korisna nauka. Iako je jako mali deo matematike zapravo primenjen, ona predstavlja suštinski deo korpusa nekih drugih empirijskih nauka, na prvom mestu fizike. Fizika je sa svoje strane nauka koja nam daje najpotpuniji opis sveta u kojem živimo. Ako je matematika *neophodna* za funkcionisanje naših najboljih fizičkih teorija izgleda da smo obavezni da prihvatimo i ontološki bagaž koji ona sa sobom nosi. Naime, ako nije moguće da referiranje na entitete kakvi su brojevi, funkcije, skupovi itd., uklonimo iz naših najboljih naučnih teorija onda bi trebalo da verujemo u postojanje tih entiteta. Ovo je takozvani *Kvajn-Patnamov argument iz neophodnosti*, koji pokazuje da je određena vrsta matematičkog platonizma prirodna posledica činjenice da se naše empirijske nauke – na prvom mestu fizika– na suštinski način oslanjaju na matematiku.

Uloga matematike u našim naučnim teorijama je višestruka. Ne samo što nam omogućava da formulišemo empirijska predviđanja, nego nam matematika pomaže da pružimo elegantnu formulaciju naših naučnih teorija. Nije jasno kako bi naše naučne teorije izgledale ako se ne bi oslanjale na matematiku. Da li bi imale jednaku eksplanatornu moć? Da li bi neke njihove aspekte uopšte bilo moguće formulisati bez pomoći matematičkog aparata? Takođe, da li bi takve naučne teorije bile jednako otvorene za velika otkrića u nauci kao i naše *normalne* teorije?

Nije nimalo jasno da je odgovor na ma koje od prethodnih pitanja potvrdan. Međutim, kako god stvari stajale sa time, naše se najbolje naučne teorije *zaista* oslanjaju na matematiku i to je nesumnjiva činjenica.

> Jezik nauke, ako ga interpretiramo na standardan način, suštinski nas obavezuje na apstraktne objekte - nacije, vrste, brojeve, funkcije, skupove - kao što nas obavezuje na postojanje jabuka i drugih tela. Sve

> ove stvari predstavljaju vrednosti promenljivih u našem celokupnom sistemu sveta. Brojevi i funkcije doprinose fizici podjednako suštinski kao što to čine hipotetičke čestice. [Quine, 1981, pp. 149-150]

U sažetom obliku, Kvajn-Patnamov argument iz neophodnosti možemo predstaviti na sledeći način:

(1) Trebalo bi da se obavežemo na postojanje svih i samo onih entiteta koji su neophodni u našim najboljim naučnim teorijama.

(2) Matematički entiteti su neophodni za naše najbolje naučne teorije.

(3) Trebalo bi da se obavežemo na postojanje matematičkih entiteta.

Međutim, ne smatraju svi da matematika mora biti istinita da bi bila korisna. Iako prethodni argument smatra jedinim ozbiljnim argumentom u prilog platonizmu [Field, 1980, p. viii] Fild ga i dalje ne smatra konkluzivnim. Naravno, dedukcija (3) iz (1) i (2) je potpuno korektna, ali je, po njegovom mišljenju, premisa (2) lažna.

Dakle, po Fildovom mišljenju, matematički entiteti nisu neophodni za formulisanje naših najboljih naučnih teorija. Oni su u najboljem slučaju korisne fikcije pa se otud i Fildova verzija nominalizma često naziva i *fikcionalizam*[2]. Na osnovu Okamovog brijača, treba biti ekonomičan kada se radi o ontologiji i obavezati se samo na postojenje fizičkih objekata.

Fildov pozitivan argument za fikcionalizam (ujedno i argument protiv premise (2) gore) počiva na reformulaciji Njutnove teorije gravitacije tako da ona ne referira na brojeve ili neke druge apstraktne entitete nego isključivo na prostorno-vremenske tačke. Pored činjenice da je formulisao nominalistički prihvatljivu verziju jedne fizičke teorije, Fild je takođe pokušao da pokaže da je matematika *konzervativna* u odnosu na nominalističke teorije. Drugim rečima, ako je neko nominalistički formulisano tvrđenje dokazivo u proširenju neke nominalistički formulisane teorije standardnim matematičkim aparatom, onda je ono dokazivo i u samoj nominalistički formulisanoj teoriji

[2]Prva jasna formulacija fikcionalizma, koliko je nama poznato, dolazi iz matematike a ne iz filozofije, kao što bi možda moglo da se očekuje. Čuveni mađarski matematičar Alfred Renji (Alfréd Rényi) je još 1964. godine formulisao jedno takvo stanovište [Rényi, 1964, pp. 445-448].

(više napomena o ovom pojmu konzervativnosti daćemo u odeljku [3.2.3]). Na ovaj način Fild je, izgleda, pokazao da matematika u stvari nije neophodna za funkcionisanje naših najboljih fizičkih teorija, što je u suprotnosti sa premisom (2) gore.

Ovo, razume se, nije sve što se može reći o Fildovom projektu „nauke bez brojeva" [Field, 1980]. Nešto više detalja ćemo ponuditi u nastavku.

3.2.2. Fildov argument protiv platonizma. Okrenimo se Fildovom argumentu protiv platonizma, koji ima sledeći oblik:

(1) Kada matematičari veruju da je neki matematički iskaz p istinit, onda je to gotovo uvek i slučaj.

(2) Ako je (1) istinito, mora biti moguće, makar u principu, objasniti (1).

(3) Ako je platonizam istinit, (1) se ne može objasniti čak ni u principu.

Premise (1) i (2) se ne čine kontroverznim sa platonističkog stanovišta. Premisa (2), na primer, jeste razložan zahtev da se (1) objasni. Naime (1) kaže da postoji izvesna vrsta korelacije između sfere činjenica koje se tiču verovanja matematičara i sfere činjenica koje se tiču apstraktnih matematičkih objekata. Pretpostaviti da je ova korelacija takva da se o njoj ne može ništa dalje reći sem da postoji deluje u najmanju ruku sumnjivo.

Međutim, Fildova teza (3) nije ni najmanje očigledna. Ako je sa stanovišta platonizma moguće objasniti (1), jasno je da (3) postaje lažna. Ali da li nam platonizam pruža sredstva da to učinimo?

> [...] izgleda da kauzalna inertnost apstraktnih objekata isključuje svaku mogućnost objašnjenja teze (1). Činjenice o apstraktnim objektima ne mogu biti uzroci činjenica o verovanjima, budući da su apstraktni objekti kauzalno inertni. Činjenice o verovanjima ne mogu biti uzroci činjenica o apstraktnim objektima iz istog ovog razloga [...] Nekauzalno objašnjenje pouzdanosti logičkog i analitičkog znanja o apstraktnim objektima [...] je možda moguće [...], ali kako bi moglo izgledati jedno takvo nekauzalno objašnjenje pouzdanosti sintetičkih verovanja o apstraktnim objektima? [Burgess and Rosen, 1997, p. 42]

Na prvom mestu izgleda da Fildov izazov zaista donosi nešto novo u poređenju sa Benaserafovim argumentom. Naime, kao što smo već napomenuli Fildov argument (u nastavku FA) je formulisan „bez upotrebe tehničkog termina „znati" kao i bez razmatranja koja se tiču istine" [Field, 1989, p. 230]. U ovom pogledu njegove semantičke i epistemološke pretpostavke su minimalne.

Sumirajmo upravo pomenute odlike FA zajedno sa još nekima koje Fild navodi, preglednosti radi:

(i): minimalne pretpostavke koje se tiču pojma istine (*redundantna teorija istine*[3] je korisna radi elegantnije formulacije FA, ali nije i nužna);

(ii): FA se ne služi pojmovima kao što su „znanje", „znati" i sličnim;

(iii): FA ne počiva ni na jednoj konkretnoj epistemološkoj teoriji;

(iv): FA se ne poziva ni na jedan epistemički pojam;

(v): FA se ne tiče opravdanja matematičkih verovanja nego samo objašnjenja njihove pouzdanosti.

U nastavku ćemo pokušati da utvrdimo da li i u kojoj meri FA zaista poseduje upravo pomenuta svojstva i da li je na njega moguće odgovoriti sa jednog opšteg realističkog stanovišta.

3.2.3. Nedostaci Fildove pozicije. Postoje bar dva načina da na FA odgovorimo. Na prvom mestu, možemo izneti izvesne njegove nedostatke i pokušati da pokažemo da on nije konkluzivan razlog za napuštanje pozicije matematičkog platonizma. Mogli bismo reći da FA, sem što teret dokaza neopravdano svaljuje na leđa platonista, naprosto zahteva previše. Ovakav odgovor bi bio negativne prirode utoliko što bi isticao nedostatke FA. S druge strane, mogli bismo pokušati da pružimo pozitivan argument koji bi uključivao koherentnu platonističku epistemologiju a koja bi onda odgovorila na pitanje pouzdanosti koje Fild apostrofira. Naravno, ove dve vrste odgovora dopuštaju i određena preklapanja pa tako zajedno sa delimičnim objašnjenjem činjenice da

[3]Redundantna teorija istine je, grubo govoreći, stanovište na osnovu kojeg tvrditi da je određeni iskaz istinit znači naprosto tvrditi sam taj iskaz. Reći da je iskaz „Trava je zelena" istinit ili da je istina da je trava zelena znači isto što i prost iskaz da je trava zelena. Pojam istine je redundantan. Tvorac ove teorije je engleski logičar i filozof Remzi (Frank Plumpton Ramsey) [Ramsey, 1927].

su verovanja matematičara pouzdana možemo tvrditi da nas FA ne primorava da pružimo iscrpnu epistemološku teoriju koja je u skladu sa matematičkim platonizmom.

Odgovor na FA koji ćemo u nastavku ponuditi ima upravo ovaj, mešoviti oblik. Prvo ćemo izneti neke načelne prigovore na FA koji se mogu uputiti sa antinominalističkog stanovišta da bismo, posle, razmotrili mogući Gedelov odgovor na FA koji uključuje i delimično objašnjenje činjenice o pouzdanosti verovanja matematičara.

Pođimo od stavke (v) gore. Njome Fild tvrdi da se FA ne tiče opravdanja verovanja matematičara nego isključivo njihove pouzdanosti. Međutim, nije jednostavno naći smisao prethodnog tvrđenja ako imamo u vidu premisu (2) od FA. Izgleda da je ono što ona kaže upravo suprotno onome što Fild tvrdi; naime, ako se premisa (1) od FA ne može objasniti, onda i verovanja matematičara u pogledu matematičkih tvrđenja ne mogu biti opravdana [Burgess and Rosen, 1997, p. 42].

Stavka (iii) čini suštinsku razliku između FA i Benaserafovog argumenta. Ako je istinita, ona zaista čini FA značajno snažnijim u odnosu na Benaserafov argument. Međutim, da li je tvrđenje (iii) istinito? Videli smo da se Benaserafov argument eksplicitno poziva na kauzalnu teoriju znanja. Izgleda da se i Fildov argument, makar implicitno i u minimalnom smislu, poziva na neku vrstu epistemološke teorije pouzdanosti. Ako ovo ne bi bio slučaj, nije jasno kako razumeti Fildov zahtev za *opravdanjem verovanja* matematičara koji smo spominjali u prethodnom pasusu. Ako je ovo slučaj, jasno je da ni tvrđenje (iv) gore neće biti istinito.

Ako je prethodno rečeno tačno, ni tvrđenje (ii) neće proći mnogo bolje od svojih pratilaca. Naime, iako se FA ne poziva eksplicitno na pojam znanja koji je kodifikovan nekom epistemološkom teorijom, neka vrsta teorije pouzdanosti će u pozadini argumenta i dalje fiksirati taj pojam.

Važno je reći da neke od značajnijih varijanti teorije pouzdanosti, Armstrongova (David Armstrong) *teorija pouzdanih indikatora* [Armstrong, 1973] i Goldmanova *teorija pouzdanosti procesa* [Goldman, 1979], na primer, uključuju pojam kauzalnosti, makar u minimalnom smislu, u svoj model objašnjenja. Da li se i na koju od ovih teorija Fild oslanja u formulaciji svog argumenta nije u potpunosti jasno. Izgleda da on sigurno pretpostavlja *neku* teoriju pouzdanosti, a ako je to slučaj, onda nam duguje njenu eksplicitnu formulaciju. U suprotnom, imamo jake razloge da pretpostavimo (v. citat dole) da Fild, baš kao i Benaseraf, zahteva od platonista da na osnovu neke vrste kauzalne teorije opravdanja objasne pouzdanost verovanja koje matematičari imaju o svom predmetu.

Dakle, umesto da nam ponudi epistemološki neutralan argument protiv platonizma, Fild u izvesnom smislu premešta težište izazova sa pretpostavke o istinitosti kauzalne teorije znanja na istinitost teorije pouzdanosti opravdanja. Naravno, prethodno rečeno ne treba shvatiti kao kritiku teorija pouzdanosti. Ono što smo želeli da istaknemo jeste da Fild, baš kao i Benaseraf, čini neopravdan korak u svom argumentu pretpostavljajući da će pojam kauzaliteta, koji sigurno ima ključnu ulogu u objašnjenju našeg empirijskog znanja, ovu ulogu zadržati i u objašnjenju svake druge vrste znanja pa i matematičkog. Da je ovo slučaj svedoči i sledeći citat:

> Ne postoji *kauzalna povezanost* između nas i entiteta koji pripadaju platonističkoj sferi. Kako onda možemo bilo šta znati o onome što se u toj sferi događa? [...] Izgleda da ako želimo da odgovorimo na ovo pitanje, moramo postulirati neku vrstu nefizičke povezanosti, neku misterioznu mentalnu aprehenziju između nas i elemenata ove platonističke sfere. [Field, 1989, p. 68]

Kao što već napomenuli, izgleda da FA zahteva da pružimo makar neku vrstu parcijalnog objašnjenja pouzdanosti verovanja matematičara. Takođe, Fild na nekim mestima ovaj zahtev precizira time što kaže da će biti dovoljno ako budemo u stanju da objasnimo pouzdanost njihovih verovanja u pogledu aksioma teorije skupova. Dakle, treba objasniti korelaciju između istinitosti aksioma teorije skupova i verovanja matematičara da je ovo slučaj [Burgess and Rosen, 1997, p. 45]. Međutim, kako ističu Bardžis i Rozen, ako aksiome teorije skupova razumemo kao parcijalan opis kumulativne hijerarhije skupova, onda sve ove aksiome u stvari možemo svesti na jednu jedinu: *Postoji kumulativna hijerarhija skupova.* Budući da je ovo slučaj, teško da možemo govoriti o korelaciji.

Naime, FA zahteva od nas da objasnimo konjunkciju sledećih tvrđenja:

(1) Istina je da kumulativna hijerarhija skupova postoji.

(2) Matematičari veruju da kumulativna hijerarhija skupova postoji.

Međutim

> [...] pod pretpostavkom da matematički objekti određene vrste postoje izgleda da nema mnogo smisla zahtevati odgovor na pitanje zašto oni postoje, kao da bi lako mogli ne postojati (baš kao što bi pod pretpostavkom da oni ne postoje imalo malo smisla zahtevati odgovor na pitanje zašto oni ne postoje, kao da bi jednako lako mogli postojati). [Burgess and Rosen, 1997, p. 45]

Dakle, FA se svodi na zahtev da objasnimo (2) na takav način koji neće činiti vezu između (1) i (2) pukim srećnim pogotkom. Ovom objašnjenju ćemo se vratiti u narednom odeljku kada budemo ispitivali moguće Gedelove odgovore na FA . Do kraja ovog odeljka iznećemo neke od prigovora koji se mogu uputiti Fildovom pozitivnom argumentu za fikcionalizam što će nam pomoći da jasnije opišemo razliku između ove pozicije i one koju je zastupao Gedel.

Spomenuli smo da Fildov fikcionalizam matematiku vidi kao korisnu fikciju. Evo kako Fild opisuje svoju poziciju:

> Ne predlažem da reinterpretiramo bilo koji deo klasične matematike; umesto toga želim da pokažem da matematika koja je neophodna za primenu na fizički svet ne sadrži ništa što *prima facie* uključuje referenciju na [...] apstraktne entitete kao što su brojevi, funkcije ili skupovi. Prema onom delu matematike koji uključuje referenciju na [...] apstraktne entitete - a ovo je gotovo cela matematika - ja zauzimam fikcionalistički stav. Drugim rečima, ne vidim razlog da ovaj deo matematike smatram *istinitim*. [Field, 1980, pp. 1-2]

Ovo stanovište dakle ima za posledicu da su sva matematička tvrđenja strogo govoreći *lažna*. Matematički objekti ne postoje pa je status iskaza „$7+5=12$" sličan statusu iskaza „Šerlok Holms je živeo u ulici Bejker”. Oba ova iskaza su samo „fiktivno istinita”. Matematička istina je samo „istina u priči o matematici”.

Međutim, ovo nosi sa sobom određene probleme. Na prvom mestu, ne samo što smo na osnovu Fildove pozicije prinuđeni da kažemo da je tvrđenje da (ostavivši po strani Euklidov dokaz) postoji beskonačno mnogo prostih brojeva lažno, jer ne postoje takve stvari kao što su prosti brojevi, nego moramo priznati i da je tvrđenje da ne postoji prirodan broj između 2 i 4 istinito, iz istog ovog razloga. Ovo je u najmanju ruku čudno.

Pored toga, neki matematički iskazi su, izgleda, „fiktivno istinitiji” od drugih: „$3 + 2 = 5$” naspram „$3 + 2 = 4$” recimo. Fildov odgovor mogao bi biti da je samo prvi iskaz istinit „na osnovu matematičke priče”. Međutim, ovo ne može biti potpun odgovor. Zašto u Konan Dojlovoj priči Šerlokovo srednje ime može biti Majkroft u jednom delu ove čuvene sage, a Virdžil u drugom, dok broj 7 ne može sutra biti ništa manje prost nego što je to danas? Ako je matematika samo priča, zašto od nje zahtevamo *konzistentnost* dok smo prema nekim drugim pričama popustljivi? Moglo bi se reći da likovi u pričama imaju samo ona svojstva koja diktira način na koji ih shvatamo. Možemo pretpostaviti da Šerlokovo srednje ime nije jedno od onih svojstava koje bi izazvalo nedoumicu u pogledu identiteta ovog slavnog detektiva ako bi, čitajući o njegovim avanturama, primetili da ono varira. Ovo bismo, izgleda, pripisali omašci autora ili štampara ili nečem sličnom. Nasuprot tome, u „matematičkoj priči” izgleda da su sva svojstva prirodnih brojeva nužna svojstva. Ako je matematika samo fikcija onda je Fild dužan da nam pruži odgovor šta je to što ovu fikciju čini tako neizbežno zakonomernom u odnosu na njene srodnike.

Delimično pojašnjenje fraze „istinito na osnovu matematičke priče” Fild formuliše kada kaže da je matematičko tvrđenje *fikcionalistički tačno* ako je

> [...] posledica prihvaćenih aksioma [...] u objektivnom, ali ne i u potpunosti formalizabilnom smislu posledice, koja minimalno prevazilazi logiku prvog reda utoliko što uključuje i kvantifikator „samo konačno mnogo”. [Field, 1998, p. 391]

Međutim, ovo otvara problem za Fildovu poziciju u pogledu statusa matematičkih tvrđenja koja su neodlučiva na osnovu trenutno prihvaćenih aksioma teorije skupova - tvrđenja kao što je CH na primer. Na osnovu Fildove pozicije, ni CH niti $\neg CH$ ne mogu biti fikcionalistički tačne. U ovom pogledu oba ova tvrđenja pripadaju grupi tvrđenja kao što je „$3+2=4$”. Nije teško uočiti da nešto nije u redu sa ovakvim stanovištem. Na stranu što na osnovu Fildove pozicije iskaz „$3+2\neq 4$” možemo smatrati fikcionalistički tačnim. U matematičkom pogledu postoji ogromna razlika između iskaza tipa „$3+2=4$” s jedne i CH s druge strane, koju fraza „nisu fikcionalistički tačni” ne odražava. Fild bi mogao reći da pored fikcionalistički tačnih matematičkih tvrđenja, možemo razlikovati fikcionalistički netačna i fikcionalistički neodlučiva tvrđenja. Ovo nam se čini kao prilično rogobatan način da se govori o istinitim, lažnim i neodlučivim tvrđenjima.

Napomenuli smo da Fildovo odbacivanje argumenta iz neophodnosti počiva na njegovom predlogu nominalizacije fizike, konkretno na nominalizaciji Njutnove teorije gravitacije. Potrebno je dati nekoliko komentara o ovom delu Fildovog projekta.

Pošto Fild smatra da je argument iz neophodnosti jedini argument u prilog platonizmu koji ima nekakvu snagu, pobijanje ovog argumenta je od velike važnosti za pobijanje samog platonizma. Sa platonističkog stanovišta, naprotiv, možemo reći da argument iz neophodnosti nipošto nije najsnažniji argument koji se može izneti u prilog platonizmu. Ovaj argument je naprosto samo u skladu sa naturalističkim skrupulama koje i Fild usvaja. Međutim, čak i da je ovaj argument jedini argument u prilog platonizmu postavlja se pitanje da li je Fildova nominalizacija dovoljno uspešna da bismo ga odbacili?

Bardžis, na primer, smatra da je odgovor na poslednje pitanje negativan:

> [...] Fild je možda preduzeo veliki napor ne bi li pokazao da se naukom *možemo* baviti bez brojeva. Tvrdim, međutim, da se trenutnom naukom bavimo uz pomoć brojeva kao i da ne postoji naučni razlog zašto bi se u budućnosti naukom *trebalo* baviti bez njih. Dakle, nije prihvatanje matematičkih objekata ono što čini neopravdan i antinaučni filozofski

> dogmatizam, nego je to upravo nominalističko insistiranje na njihovom odbacivanju. [Burgess, 2008, p. 34]

Na prvi pogled, izgleda da Bardžisov argument počiva na nerazumevanju Fildove pozicije. Naime, mogli bismo tvrditi da Fild ne predlaže stvarnu reformulaciju fizike na nominalističkim osnovama nego samo njenu mogućnost ističe kao način da se uverimo da fizika ne mora imati ontološke obaveze koje joj se pripisuju. Teško da će ovo biti slučaj budući da sam Fild insistira na elegantnoj formulaciji svoje teorije kao i na lakoći njene upotrebe:

> Moje formulacije se oslanjaju na izvestan aparat teorije merenja koji nije dobro poznat i nema sumnje da još uvek nije optimalno formulisan, ali sumnjam da je suštinski nepodobniji [od standardne formulacije Njutnove teorije, *prim. prev.*] [Field, 1990, p. 210]

Međutim, čak i da je prethodni prigovor na mestu on i dalje ne može legitimisati Fildov projekat. Njegova ideja da formuliše nominalistički prihvatljivu fizičku teoriju koja je *empirijski ekvivalentna* trenutno prihvaćenoj fizičkoj teoriji mora imati nešto što je preporučuje *osim* filozofskih stavova određene vrste. Da li ona „doprinosi jasnoći, jednostavnosti, inteligibilnosti [...] na način koji je relevantan naučnicima koji se njome bave" [Burgess, 2008, p. 37]?

> Ne izgleda da je izbegavanje ontoloških obaveza u pogledu apstraktnih entiteta izvojevalo priznanje u naučnoj zajednici kao cilj naučnog istraživanja kojem treba težiti pored opsega i preciznosti, prigodnosti i efikasnosti, u pogledu predviđanja i kontrolisanja iskustva. Izgleda da je, naprotiv, to pitanje kojem većina naučnika ne pridaje nikakvu važnost. Izgleda da je to isključivo preokupacija filozofa određene vrste. [Burgess, 2008, p. 37]

Fildova nominalistička reformulacija fizike niti je *pragmatički* superiorna u odnosu na trenutno prihvaćene fizičke teorije niti se može pohvaliti nekim drugim *naučno priznatim* kvalitetima teorija u stepenu koji nadmašuje one koje su trenutno prihvaćene. Ono što je preporučuje, smatra Fild, jeste njena ontološka osvešćenost.

Ako i pretpostavimo da je Fildova nominalistička reformulacija fizike uspešno sprovedena ovo je i dalje samo *ex post facto*. Naime, Fild je svoj projekat započeo sa postojećom fizičkom teorijom koja *jeste* formulisana uz pomoć matematičkog aparata, da bi dalje pokazao kako možemo konstruisati njoj empirijski ekvivalentnu teoriju koja se ovim aparatom ne služi. Ono što bi međutim Fildov program značajno ojačalo jeste argument koji bi tvrdio da bismo bili u stanju da stvorimo *novu*, napredniju, fizičku teoriju ne služeći se matematikom. Izgleda da u ovom pogledu Fildov izbor Njutnove teorije gravitacije kao primera za nominalizaciju nije mogao biti lošiji imajući u vidi značaj infinitezimalnog računa u formulaciji Njutnove mehanike. Teško je videti kako razumevanje matematike kao korisne „fikcije" može objasniti ovu činjenicu. Opet, govoriti o njenoj korisnosti u ovom kontekstu izgleda kao čudan način da kažemo da je ona istinita.

Još jedan aspekt Fildovog projekta zaslužuje komentar. Reč je o njegovom tvrđenju da je matematika *konzervativna* u odnosu na nominalistički formulisane teorije. Pogledajmo šta ovo znači za Filda. Ako nam je data teorija T_1 čiji je jezik $\mathscr{L}_1$ i teorija T_2 čiji je jezik $\mathscr{L}_2$, tako da važi $T_1 \subseteq T_2$ i $\mathscr{L}_1 \subseteq \mathscr{L}_2$, kažemo da je T_2 konzervativna u odnosu na T_1 ako je svako tvrđenje izraženo u jeziku $\mathscr{L}_1$ koje je dokazivo u T_2 takođe dokazivo i u T_1. Drugim rečima, teorija T_2 je konzervativna u odnosu na T_1 pošto ne dokazuje *nove* teoreme izražene u jeziku stare teorije.

Na primer, ako je T_1 teorija skupova ZF čiji jezik $\mathscr{L}_1$ sadrži samo nelogički simbol $\in$ i ako je T_2 teorija koju dobijamo tako što teoriji T_1 dodamo novu aksiomu $\forall x(\neg x \in \emptyset)$ i čiji je jezik $\mathscr{L}_2 = \{\in, \emptyset\}$, gde je $\emptyset$ individualna konstanta, onda je T_2 konzervativna u odnosu na T_1. U ovom primeru teorija T_2 se naziva još i proširenjem teorije T_1 pomoću definicija. Takva proširenja uvek kao rezultat daju teorije koje su konzervativne u odnosu na teorije od kojih polazimo i njihova uloga je pre svega da skrate zapisivanje i olakšaju rad. Osim proširenja putem definisanja novih simbola konstanti, postoje još i proširenja pomoću novih relacijskih i funkcijskih simbola, kao što su $\mathscr{P}$ (unarni funkcijski simbol koji interpretiramo kao operaciju partitivnog skupa) i $\subseteq$ (binarni relacijski simbol koji interpretiramo kao relaciju „biti podskup") u slučaju teorije skupova. I ovakva proširenja su takođe konzervativna u odnosu na početnu teoriju. Na neka od ovih proširenja smo se već implicitno pozivali u uvodu ovog rada kada smo navodili aksiome teorije ZFC (v. odeljak [1.2]).

Nisu svi primeri konzervativnosti ovog tipa. Teorija klasa NBG je konzervativna u odnosu na teoriju ZFC iako nije dobijena proširenjem ove teorije putem definicija[4]. Takođe, teorija ZFC je konzervativna u odnosu na ZF ukoliko se ograničimo na formule određenog stepena složenosti.

Sada kada znamo šta konzervativnost znači pogledajmo kako izgleda Fildov argument. Pretpostavimo da je T teorija formulisana na jeziku koji sadrži unarni predikatski simbol $M(x)$, takav da „x je M" znači intuitivno „x je matematički objekat". Za tvrđenje kažemo da je *nominalističko* (u odnosu na T) ako se nelogički simboli koji se javljaju u tom tvrđenju ne javljaju u T. Ako je A proizvoljno tvrđenje, neka je A^* rezultat relativizacije svih kvantifikatora koji se javljaju u A na $\neg M(x)$. Drugim rečima, mesto svakog javljanja od $\forall x\varphi$ u A pišemo $\forall x\left(\neg M(x) \rightarrow \varphi\right)$ i mesto svakog javljanja od $\exists x\varphi$ u A pišemo $\exists x\left(\neg M(x) \wedge \varphi\right)$. Ideja koja stoji iza ovoga je da ograničavamo opseg kvantifikatora na nematematičke objekte. Ako je A nominalističko tvrđenje i N proizvoljan skup takvih tvrđenja, kažemo da je teorija T *konzervativna* u odnosu na $N^* = \left\{A^* \mid A \in N\right\}$ kada važi sledeće: ako je A^* posledica od $N^* + T + \exists x \neg M(x)$, onda je A posledica od N.

Pod izvesnim minimalnim uslovima koje teorija T mora da zadovolji može se pokazati da je ona zaista konzervativna u odnosu na skupove nominalističkih tvrđenja. Međutim, u pogledu primene Fildovog kriterijuma javljaju se određeni problemi:

> Farmer Džim Braun ima 34 krave i 57 svinja. Koliko životinja (krava i svinja) farmer Braun ima ukupno?
>
> Farmer Braun (budući logički nastrojen) zaključuje na sledeći način. „Kardinalnost skupa mojih krava je 34, kardinalnost skupa mojih svinja

[4] U odeljku [4.3], FUSNOTA 7, spomenućemo još jedan rezultat analogan ovom.

je 57, dakle ... ." Međutim, ovde se javlja problem. Kako možemo govoriti o kardinalnosti ako funkcija kardinalnosti povezuje skupove konkretnih objekata sa apstraktnim objektima (brojevima)? Tvrđenje koje je farmer Braun upravo formulisao nije nominalističko na osnovu definicije koju smo pružili, niti je ono čisto matematičko tvrđenje.

> Zaključak: princip [koji tvrdi konzervativnost teorije T, *prim. prev.*] je tačan ali u potpunosti neupotrebljiv. [Urquhart, 1990, pp. 149-150]

Iako je Fildova definicija konzervativnosti koju smo gore naveli samo preliminarna ona na lep način odslikava probleme sa kojima se ovakav pokušaj suočava. Pošto nećemo detaljnije govoriti o Fildovim rezultatima konzervativnosti, primetimo samo još i to da oni otvaraju pitanja prirode logike koja se pretpostavlja i matematičkih teorija čija se konzervativnost tvrdi. Za detaljniju analizu zainteresovanog čitaoca upućujemo na Erkartov (Alasdair Urquhart) rad [Urquhart, 1990] koji uspešnost Fildovog projekta ocenjuje na sledeći način:

> Fild ne kaže na samom početku na kojoj logičkoj osnovi radi. Konkretno, oslanjanje na logiku drugog reda se ne vidi jasno sve do četvrtog poglavlja [knjige [Field, 1980], *prim. prev.*]. U nekim ranijim razmatranjima koje tom poglavlju prethode izgleda da se implicitno pretpostavlja logika prvog reda. Kao rezultat ovoga, priroda tvrđenja o konzervativnosti nije jasna. Izgleda da postoje bar četiri načina na koje je moguće ova tvrđenja učiniti preciznim, a koji zavise od snage logike koja se pretpostavlja kao i od matematičkih teorija koje se razmatraju. Od ovih načina, prva dva su preslaba da bi podržala program nominalizacije. Treći način se čini delimično uspešnim, ali on uključuje pozivanje na logiku drugog reda. Četvrti način, koji je u izvesnom smislu kompromis, čini se kao pogrešan izbor jer na osnovu prirodne interpretacije rezultati konzervativnosti koji se tvrde nisu tačni. [Urquhart, 1990, p. 148]

Logika drugog reda međutim nije najprirodniji izbor za nominalistu kakav je Fild. Kvantifikovanje preko proizvoljnih skupova prostorno-vremenskih tačaka i nije najveći problem. Ozbiljniji je problem činjenica da puna logika drugog reda koju Fild na nekim mestima prihvata nije aksiomatizabilna. U svetlu ovoga izgleda da, ako hoćemo da utvrdimo istinosnu vrednost nekog tvrđenja, najbolji način da to uradimo jeste da se oslonimo na teoriju skupova koja nam pruža analizu skupova tačaka nekog prostora. Međutim, iz očiglednih razloga, ovo ne može biti rešenje koje bi zadovoljilo Filda.

Što se Fildove ontologije tiče ona je u potpunosti naturalistička. Postoje materijalni objekti, prostorno-vremenske tačke, kao i proizvoljne prostorno vremenske regije [Field, 1980, p. 36]. Pored toga, posledica Fildovih aksioma jeste da prostorno-vremenskih tačaka ima onoliko koliko (platonisti smatraju da ima) realnih brojeva, dakle kontinuum mnogo [Field, 1980, p. 31]. On smatra da je ovo u mnogo manjoj meri problematično od postuliranja makar jednog apstraktnog objekta. Ovo nije jasno. Sa logičke tačke gledišta, prihvatanje da beskonačnost postoji ima mnogo dalekosežnije posledice nego prihvatanje da apstraktni objekti postoje. Takođe, tvrditi da je naš univerzum beskonačan je veoma jaka teza. Tvrditi da postoji $2^{\aleph_0}$ objekata u univerzumu je još jača. U svakom slučaju, na osnovu svega što znamo naš univerzum može biti i konačan. Fildov stav da je tvrđenje o postojanju kontinuum mnogo prostorno-vremenskih tačaka manje problematično od tvrđenja da postoje apstraktni objekti je naprosto neosnovan.

Ovo su samo neki od prigovora koje je moguće uputiti Fildovom argumentu. Prigovori koje smo formulisali imaju za cilj da pokažu da je fikcionalizam u filozofiji matematike neprirodna pozicija, koja nije u skladu sa praksom matematičara, koja nema dovoljno pozitivnih argumenata sebi u prilog koji bi je preporučili u odnosu na njoj suprotstavljene pozicije i čija je eksplanatorna vrednost u oblasti koju ispituje veoma mala. Prisetimo se da Fildov argument protiv platonizma ima za cilj da pokaže da ako je platonizam istinit onda mi ne možemo posedovati matematičko znanje. Fildov fikcionalizam, kao izlaz iz ovog problema, sugeriše da matematičko znanje u pravom smislu te reči i ne postoji. Ono je znanje ni o čemu. U najmanju ruku zanimljiv obrt.

Sledeći citat iz Kripkeove (Saul Kripke) poznate knjige o Vitgenštajnu u kome kritikuje Barklija (George Berkeley) sasvim se lepo može primeniti i na Fildovu poziciju:

> Filozof zastupa gledište koje je u očiglednoj suprotnosti sa zdravim razumom. Umesto da odbaci zdravorazumsko stanovište on, naprotiv, tvrdi da sukob nastaje usled pogrešne filozofske interpretacije običnog jezika, dodajući ponekad da ovu pogrešnu interpretaciju dugujemo „površnoj formi" običnog jezika. Posle toga, on nudi sopstvenu analizu relevantnih tvrđenja običnog jezika, koja nam pokazuje da ona ne govore o onome o čemu nam se čini da govore [...] Čini mi se da su takva filozofska tvrđenja gotovo uvek sumnjiva. Ono što onaj ko ih iznosi naziva „zavodljivom i pogrešnom filozofskom interpretacijom" nekog svakodnevnog tvrđenja jeste verovatno prirodno i ispravno razumevanje istog. Prava pogrešna interpretacija počinje kada onaj ko tvrdi kaže „Ono što obični ljudi zaista žele da kažu je..." posle čega pruža sofisticiranu analizu koja je u skladu sa njegovom filozofskom pozicijom. [Kripke, 1982, p. 65]

3.3. Gedel i nominalizam

Gedelov platonizam sigurno nije bez nedostataka. Epistemološki problemi sa kojima se suočava mogu se činiti nerešivim i, pored svega što ovu poziciju preporučuje, diskvalifikovati ga kao stanovište vredno razmatranja. Ovo je sigurno stav autora čija smo gledišta razmatrali u prethodnom odeljku. Nije od pomoći ni to što su Gedelova gledišta koja su relevantna za ovaj problem izražena pre kao napomene ili opaske nego kao dosledno izvedeni filozofski argumenti. Na nesreću, fragmentarnost Gedelovih opaski o platonizmu i prirodi matematičkog saznanja uopšte često je davala za pravo onima koji su bili njegovi filozofski protivnici da u svega dva-tri poteza odbace njegovu poziciju kao neprihvatljivu. Naravno, nije pomoglo ni to što Gedelovo stanovište stoji u potpunoj suprotnosti sa „duhom vremena" u savremenoj filozofiji, koja je u suštini empiristička.

Međutim, Gedela ne pogađa samo spor oko „filozofske ideologije”, da se tako izrazimo. U mnogo većoj meri, Gedelova pozicija je žrtva pogrešne interpretacije, namerne ili nenamerne, ali i dalje pogrešne. Zato nam se čini prirodnim da pre nego što ispitamo kako bi Gedel mogao odgovoriti na prigovore koji su mu upućeni, na prvom mestu ukažemo na nerazumevanje na koje je njegova pozicija nailazila u filozofskoj literaturi. Ovo će nam pomoći da bolje razumemo šta je Gedel zaista tvrdio i, na osnovu toga, kako bi mogao odgovoriti na nominalističke izazove sa kojima se njegova pozicija suočava.

3.3.1. Platonizam i misticizam. Filozof matematike Čarls Čihara (Charles Chihara), čije je nominalističko stanovište blisko Fildovom, koje smo razmatrali gore, na sledeći način opisuje Gedelov platonizam (naš kurziv):

> Bilo da vam se Gedelovo shvatanje matematičkih objekata čini iole plauzibilnim ili ne, čak se i oni koji prihvataju Gedelovo gledište moraju složiti da ga neka njegova svojstva čine teško prihvatljivim. Matematičar je opisan tako da teoretiše o objektima koji ne postoje u fizičkom prostoru. Ovo nas navodi da pomislimo da je matematika veoma spekulativan poduhvat, ne mnogo različit od tradicionalne metafizike. Postulira se *misteriozna sposobnost* da bi objasnila kako možemo imati znanje o ovim objektima. *Gedelovo pozivanje na matematičke percepcije da bi opravdao svoje verovanje u skupove zapanjujuće je slično pozivanju na mistična iskustva na koje su se neki filozofi oslanjali ne bi li opravdali svoje verovanje u Boga. Matematika počinje da liči na nekakvu teologiju.* Nije iznenađujuće da su razmatrani drugačiji pristupi problemu postojanja u matematici. [Chihara, 1990, p. 21]

Pridevi „misteriozno” i „mistično” koji bi, izgleda, po sebi trebalo da poseduju snagu filozofskog argumenta nalaze svoje mesto, kao što smo videli, i u Fildovom opisu platonističke pozicije (naš kurziv):

> Ne postoji kauzalna povezanost između nas i entiteta koji pripadaju platonističkoj sferi. Kako onda možemo bilo šta znati o onome što se u toj

> sferi događa? [...] Izgleda da ako želimo da odgovorimo na ovo pitanje, moramo postulirati neku vrstu nefizičke povezanosti, neku *misterioznu mentalnu aprehenziju* između nas i elemenata ove platonističke sfere. [Field, 1989, p. 68]

Ovakvim čudnim sposobnostima nema mesta u ozbiljnoj filozofiji. Njihovo prihvatanje degradira filozofiju na nivo misticizma, koji nema veze sa racionalnom delatnošću kakvom smatramo današnju filozofiju (naš kurziv):

> Platonizam je, kao pozicija u filozofiji matematike, zasnovan na poistovećivanju: poređenje između aprehenzije matematičke istine i percepcije fizičkih objekata i time matematičke stvarnosti i fizičkog univerzuma [...] Ovo poređenje [...] ima karakterističan prizvuk *filozofskog sujeverja* [...] [Dummett, 1978, p. 202]

Nažalost, ovakva interpretacija Gedelovog stanovišta na osnovu koje je matematička intuicija sposobnost *neposrednog* uvida u strukturu matematičkog univerzuma koji je (apstraktna) slika i prilika fizičkog nije strana ni autorima načelno blagonaklonim prema Gedelovoj poziciji. Tako na primer Frančesko Berto (Francesco Berto) govoreći o filozofskim posledicama Gedelove teoreme o nepotpunosti kaže da je sam Gedel smatrao da one „pobijaju ideju shvatanja matematika kao čiste sintakse i potvrđuju metafizičko tvrđenje da su brojevi stvarni, objektivni entiteti na bezvremenom Platonovom nebu” [Berto, 2009, pp. 152-153]

Da je Gedel smatrao da teorema o nepotpunosti predstavlja izuzetno jak argument protiv Karnapovog konvencionalizma je potpuno tačno. Smatramo da je potpuno tačno i Gedelovo uverenje da je taj argument takav. Govoriti o „bezvremenom Platonovom nebu” jeste međutim u najboljem slučaju način da sebe poštedite posla filozofa. Oslanjanje na metafore, koje istini za volju ni Gedelu nisu bile strane, ne može biti opravdanje za nedostatak filozofske analize stanovišta koje se može pronaći iza njih.

Svi sudovi o Gedelovoj poziciji koje smo upravo naveli u najvećoj meri su „inspirisani” sledećom Gedelovom opaskom (naš kurziv):

> Ali, uprkos njihovoj udaljenosti od čulnog iskustva, ipak posedujemo nešto što *liči na* opažanje objekata teorije skupova, o čemu svedoči činjenica da nam se aksiome nameću kao istinite. Ne vidim nikakav razlog zbog kojeg bismo imali manje poverenja u ovu vrstu opažanja, tj. u matematičku intuiciju, nego u čulno opažanje koje nam omogućava da gradimo fizičke teorije i da očekujemo da će se naša buduća čulna opažanja sa njima slagati, kao i da verujemo da pitanje koje je trenutno neodlučivo nije bez značenja i da može biti odlučeno u budućnosti.[Gödel, 1964, p. 268]

Dakle ova misteriozna, mistična, aprehenzija koja *liči na* opažanje osnovni je razlog etiketiranja Gedelove pozicije kao retrogradne i njegovog platonizma koji na njoj počiva kao neuspešnog. Matematička intuicija kao saznajna sposobnost je puko sujeverje, i mi bi tog sujeverja trebalo da se odreknemo. Pošto, izgleda, ne postoji nijedan naturalistički prihvatljiv način da objasnimo našu interakciju sa apstraktnim objektima putem matematičke intuicije, ovakva sposobnost i ne postoji. Ne postoji „šesto čulo” putem koga nam matematički objekti bivaju neposredno dati i na osnovu koga, jednim prodirućim uvidom u strukturu univerzuma skupova saznajemo istine o njima.

Sa poslednjim tvrđenjem se u potpunosti slažemo. Štaviše, izgleda da bi se sa njime složio i sam Gedel. Govoriti o „interakciji” [Benacerraf, 1973] između nas i sfere apstraktnih objekata, o „opažanju” ili „percepciji” skupova ili brojeva i ostaviti stvar na tome nije filozofski korektno prema Gedelu. Ovo bi, u najboljem slučaju, bila gruba karikatura njegovog stanovišta. U nastavku ćemo pokušati da pružimo nešto detaljniju analizu pojma matematičke intuicije u Gedelovim radovima. Videćemo da Gedelovo stanovište nije ni izbliza tako naivno koliko bi se činilo nekome ko se o njegovom radu obaveštava iz izvora koje smo naveli gore.

Za početak, pogledajmo šta Gedel ima da kaže o intuiciji u pasusu koji sledi iza onog navedenog gore:

> Treba istaći da se matematička intuicija ne mora shvatiti kao sposobnost koja nam omogućava *neposredno* saznanje njenih objekata. Izgleda

> da je pre slučaj da, kao i u slučaju fizičkog iskustva, mi *formiramo* naše ideje o tim objektima na osnovu nečega što *jeste* neposredno dato. Međutim, ovo nešto *nije*, ili nije u suštinskom smislu, oset. Da nešto pored oseta jeste neposredno dato sledi (nezavisno od matematike) iz činjenice da čak i naše ideje koje referiraju na fizičke objekte sadrže konstituente koji su kvalitativno različiti od oseta ili puke kombinacije oseta, npr. sama ideja objekta. S druge strane, mi putem našeg mišljenja ne možemo stvarati nikakve kvalitativno nove elemente nego samo reprodukovati i kombinovati one koji su nam dati. Jasno je da „datosti" na kojima matematika počiva jesu tesno povezane s apstraktnim elementima koji su sadržani u našim empirijskim idejama. Međutim, ni u kom slučaju ne sledi da su datosti ove druge vrste, budući da ne mogu biti povezane sa dejstvima izvesnih predmeta na naša čula, nešto u potpunosti subjektivno, kao što to Kant tvrdi nego i one mogu predstavljati izvestan aspekt objektivne stvarnosti. Međutim, nasuprot osetima, njihovo prisustvo u nama se možda može objasniti nekom drugom vrstom odnosa između nas i stvarnosti. [Gödel, 1964, p. 268]

Za Gedela, dakle, intuicija ne predstavlja sposobnost *neposrednog* uvida u strukturu matematičkog univerzuma. Naprotiv, mi *formiramo* ideje matematičkih objekata na osnovu materijala koji nam jeste neposredno dat. Ali, ako nam matematički objekti nisu neposredno dati, šta je to što jeste? Nažalost, Gedel na ovom mestu ne kaže više o važnom odnosu koji pominje u poslednjoj rečenici koju smo naveli gore, niti o prirodi „datosti" o kojima je reč. Prethodne Gedelove napomene, međutim, zahtevaju filozofsku analizu i ne mogu se dogmatski otpisati kao nekonkluzivne. U odeljku [2.2] smo sugerisali da se ova neposredna datost odnosi na primitivni skupovno-teorijske pojmove, kao što su pojam skupa, pripadnosti i klase. Na koji način pojmovi mogu biti *neposredno dati* jeste pitanje kojem ćemo da se posvetimo u narednom odeljku.

3.3.2. O matematičkoj intuiciji. U nastavku ćemo ponuditi jednu moguću analizu Gedelovog pojma intuicije. Pored pasusa koji smo upravo naveli, uzećemo u obzir i neka druga važna mesta iz Gedelovih objavljenih i neobjavljenih radova za koja nam se čini da mogu pojasniti njegovu poziciju. Treba međutim imati u vidu da pozicija koju je Gedel zastupao ima izvestan „organski" karakter i da se menjala tokom vremena. Izgleda da postoji zajedničko jezgro koje je zadržano kroz razne promene Gedelovog stanovišta, ali to jezgro nije jednostavno izolovati.

Pojam matematičke intuicije onako kako je opisan u drugoj verziji Gedelovog rada o Kantorovoj hipotezi kontinuuma i koji su njegovi kritičari tako sistematski uzeli na zub, ne može se naći u njegovim ranijim radovima. Ako o intuiciji uopšte i govori ona sigurno nema sva ona obeležja koja joj Gedel pripisuje u tom kasnijem radu [5]. Na prvom mestu, razumevanje intuicije u Gedelovim ranijim radovima ne čini je centralnom za platonizam u onoj meri u kojoj će to ona kasnije postati. To je jedan od zaključaka do kojih smo došli u prvom odeljku ovog rada. Takođe, može se tvrditi da je i opštije stanovište Gedelovog platonizma trpelo izvesne promene tokom godina.[6]

[5] Ovakvo gledište zastupa i Parsons [Parsons, 1995].

[6] U ovom pogledu je veoma indikativna Gedelova opaska, koju smo već naveli, a koju je izneo u tekstu predavanja u Američkom matematičkom društvu, decembra 1933. godine, govoreći o aksiomatizaciji teorije skupova:

> Rezultat prethodne diskusije jeste da naše aksiome, ako se interpretiraju kao smislena tvrđenja, nužno pretpostavljaju neku vrstu platonizma koja nije u stanju da zadovolji kritički duh i koja čak ne može proizvesti uverenje da su one konzistentne. [Gödel, 1933, p. 50]

Ovo nije u skladu sa Gedelovim odgovorom na upitnik Berka Granžana (Burke Grandjean), doktoranda sociologije na univerzitetu u Teksasu. Naime, za Gedelovog života jako malo se znalo o njemu kao čoveku za razliku od logičara. U svetlu ovog, ispitujući „socijalnu i intelektualnu istoriju Centralne Evrope u prvoj trećini XX veka" uopšte, Granžanu je 1974. godine uputio Gedelu upitnik u kojem se zanimao za detalje njegovog života, obrazovanja kao i za hronologiju njegovih filozofskih uverenja. Na pitanje od kada je zastupao platonističku poziciju u filozofiji matematike, Gedelov odgovor (na upitnik koji je popunio ali nikada nije vratio Granžanu) bio je od njegovih studentskih dana, 1925. godine [Gödel, 2003b, p. 447].

Kako u svetlu ovog razumeti Gedelovu napomenu koju smo naveli gore? Neke od mogućih interpretacija naveli smo u prvom odeljku ovog rada. Ove interpretacije bismo sada mogli dopuniti i sledećom: mogli bismo pretpostaviti da je Gedelov platonizam s kraja te 1933. godine bio u „prelaznoj fazi" pa da se Gedel nadao argumentima u prilog neke sofisticiranije vrste platonizma koja bi mogla prevazići probleme sa kojima se neke naivnije vrste platonizma suočavaju.

Ako ispitamo kontekst Gedelove napomene, videćemo da je problem *predikativnosti* za njega igrao veoma važnu ulogu. Naime, *impredikativne definicije* i pojam *klase*, koji je sa njima povezan, „pretpostavljaju da totalitet svih svojstava postoji na neki način nezavisno od našeg saznanja i naših definicija, pa da naše definicije služe samo da izdvoje neka od ovih prethodno postojećih svojstava" [Gödel, 1933, p. 50] a i imaju po Gedelovom mišljenju platonizam kao logičnu posledicu. Međutim, Gedel ne misli da je opravdanje koje je u stanju da pruži za ovakvo jedno stanovište u potpunosti zadovoljavajuće, naprotiv: „[...] u pogledu opravdanja naših aksioma i pravila zaključivanja [...] mora se reći da je situacija krajnje nezadovoljavajuća. Naš formalizam je u potpunosti siguran sve dok ga smatramo pukom igrom simbola, ali čim ovim simbolima pridamo značenje javljaju se teškoće" [Gödel, 1933, p. 49].

Jedna od konstanti Gedelove pozicije međutim jeste njegov *pojmovni realizam.*[7] Naime, kao što smo već napomenuli, za Gedela pojmovi takođe predstavljaju vrstu matematičkih objekata. Oni su „svojstva ili relacije stvari koje postoje nezavisno od naših definicija i konstrukcija" [Gödel, 1944, p. 128]. Na prvi pogled se čini da je ovo u neskladu sa Fregeovom (Gottlob Frege) pozicijom utoliko što su za Fregea pojmovi, za razliku od objekata, „nezasićeni". Međutim, nije jasno da li Gedel zahteva da svi matematički objekti budu „zasićeni" u ovom smislu. Razlika bi onda bila više terminološke prirode i počivala bi na različitom razumevanju pojma objekta kod Fregea i Gedela. Ovo sugeriše i Martin (Donald Martin) [Martin, 2005, p. 209] kada kaže da je Gedelovo insistiranje na razumevanju pojmova kao objekata posledica njegove želje da istakne njihovu nezavisnost od saznajnih subjekata. Izgleda da je ovakva interpretacija u skladu sa Gedelovim neslaganjem sa Kantovim (Immanuel Kant) subjektivističkim stanovištem. [8]

Govoreći o *iterativnom pojmu skupa* o kome će više reči biti u narednom odeljku, Gedel kaže:

> Ovaj pojam skupa, međutim, na osnovu kojeg je skup sve ono što je dobijeno iz prirodnih brojeva (ili nekih drugih dobro definisanih objekata) iteracijom primene operacije „skup od", a ne nešto dobijeno podelom

Izgleda nam da se Gedelovi oprezni stavovi mogu pre tumačiti kao nedostatak solidnijih argumenata za platonističku poziciju koju on već prihvata i isticanje potrebe za njima, nego kao neslaganje sa platonizmom kako to na primer smatra Feferman [Gödel, 1995, pp. 39-40]. Na kraju, ovo je u skladu sa Gedelovim tvrđenjem da je zastupao matematički realizam još od 1925. godine.

[7]Vidi: [Gödel, 1944, pp. 128-132], [Gödel, 1947, pp. 180-181], [Gödel, 1951, pp. 320-323], [Gödel, 1959a, p. 354], [Gödel, 1959b, p. 359], [Gödel, 1964, pp. 258-261].

[8]Međutim, prethodno rečeno bi trebalo uporediti sa sledećom Gedelovom opaskom koju citira Vang (Hao Wang):

> Skupovi su objekti ali pojmovi nisu objekti. Mi opažamo objekte a pojmove razumemo. Razumevanje je drugačija vrsta opažanja: ono je korak u pravcu svođenja na prvi uzrok. [Wang, 1996, p. 235]

Izgleda kao da Gedel ovde ima u vidu pojam objekta u užem smislu, kao nečega što može biti predmet „opažanja", između ostalog. Kada govori o *matematičkim objektima*, međutim, izgleda da misli na sve ono što može biti predmet „opažanja" ili razumevanja u matematičkom domenu, kako sugeriše prethodni citat.
Navedena Gedelova primedba u kojoj insistira na *razumevanju* (osnovnih) matematičkih pojmova kao na „drugačijoj vrsti opažanja", nije u tom pogledu usamljena u njegovim radovima, što ćemo videti u nastavku. Takođe, videćemo i da njegovo neslaganje sa Kantovim stanovištem u pogledu objektivnosti matematičkih pojmova ne isključuje njegovo načelno slaganje sa Kantom u vezi nekih srodnih pitanja.

> celine svih postojećih stvari u dve kategorije, nikada nije doveo ni do kakve antinomije [...] [Gödel, 1947, p. 180]

Ovaj citat nam pruža lepu ilustraciju razlike između skupova i pojmova. Skupovi su objekti dobijeni iteracijom operacije „skup od" na nekom unapred zadatom skupu.[9] S druge strane, pojmovi su svojstva koja nam omogućavaju da delimo „celinu svih postojećih stvari u dve kategorije", naime na one stvari koje zadovoljavaju i na one koje ne zadovoljavaju određeno svojstvo. Gedelovo spominjanje antinomija gore je očigledno aluzija na Fregeov princip neograničene komprehenzije koji se pokazao inkonzistentnim.

Takođe, citat koji smo upravo naveli sugeriše da je iterativni pojam skupa nešto što Gedel smatra adekvatnom analizom pojma skupa. Njegova prednost ne ogleda se samo u tome što pruža opravdanje našim trenutno prihvaćenim skupovno-teorijskim aksiomama nego nam i omogućava da vidimo da su one „ne samo nepotpune, nego i da se mogu dopuniti bez proizvoljnosti novim aksiomama koje samo razvijaju sadržaj pojma skupa" [Gödel, 1964, p. 261].

Kao što smo ranije napomenuli, izgleda da za Gedela matematički pojmovi imaju primat u odnosu na matematičke objekte za objašnjenja našeg matematičkog znanja. Mi formiramo ideje o matematičkim objektima kao što su skupovi na osnovu pojmova skupa, pripadnosti i tome slično. Takođe, mi se uveravamo u istinitost naših skupovno-teorijskih aksioma na osnovu toga što su one posledica značenja ovih pojmova. Tako, „ako želimo da izbegnemo paradokse teorije skupova ne oslanjajući se pritom na nešto što je potpuno strano stvarnoj matematičkoj praksi, moramo pojam skupa aksiomatizovati korak po korak" [Gödel, 1951, p. 306].

Gedelov pojmovni realizam nam osvetljava neka pomalo nejasna mesta iz njegovih radova. Uzmimo na primer njegovo tvrđenje da činjenica da nam se aksiome nameću kao istinite ima za posledicu da posedujemo nešto što liči na opažanje objekata teorije skupova. Kako Parsons primećuje [Parsons, 1995, p. 65], ovde imamo dve različite vrste matematičke intuicije: *intuiciju u odnosu na objekte* (skupove) i *intuiciju odnosu*

[9] Ako ne postoji neko ograničenje u pogledu toga koliko dugo možemo iterirati operaciju „skup od" možemo umesto od skupa prirodnih brojeva početi od praznog skupa i rezultat će u suštini biti isti.

na tvrđenja (aksiome). Nije nimalo jasno na koji način činjenica da opažamo objekte sledi iz činjenice da nam se aksiome nameću kao istinite. Međutim, ako pretpostavimo da Gedel ovde govori pre o *pojmu skupa* nego o pojedinačnim skupovima, činjenica da nam se aksiome nameću kao istinite naprosto znači da one beleže neke od osnovnih aspekata pojma skupa koji želimo da opišemo.

Izgleda međutim kao da ovo samo odlaže pitanje „kako saznajemo istine o skupovima" za jedan korak. Ako su, naime, matematički pojmovi osnovnija vrsta entiteta makar u eksplanatornom smislu, kako ih saznajemo? Kako opisati „intuiciju" ili „opažanje" matematičkih pojmova na zadovoljavajući način?

U Gedelovim radovima se mogu pronaći tvrđenja u prilog tezi da matematičke pojmove saznajemo tako što ih *razumemo*. Shodno tome, postoje izvesna mesta kod Gedela koja sugerišu da matematička intuicija *nije* nezavisna sposobnost pomoću koje se uveravamo u istinitost osnovnih matematičkih tvrđenja. Ono što ova mesta sugerišu jeste da je matematička intuicija u stvari *moć* našeg intelekta koja nam omogućava da ispitujemo osnovne matematičke pojmove, kakav je na primer pojam skupa.

Praveći razliku između fizičke i matematičke stvarnosti kao i između naših običnih čula i „matematičkog čula" koje posedujemo, Gedel kaže (naš kurziv):

> [...] ovo dodatno čulo (tj. *razum*) se i ne smatra čulom, pošto su njegovi objekti potpuno različiti u poređenju sa objektima drugih čula. Dok čulnim opažanjem saznajemo pojedinačne objekte i njihova svojstva i relacije, *matematičkim razumom opažamo najopštije (naime, „formalne") pojmove i njihove relacije*, koji su odvojeni od prostorno-vremenske stvarnosti utoliko što je ova potpuno određena celinom pojedinačnih stvari bez ikakvog pozivanja na formalne pojmove. [Gödel, 1959a, p. 354]

Vidimo dakle da za je Gedela matematička intuicija moć našeg razuma. Da je njegovo insistiranje na „opažanju" matematičkih pojmova samo metaforički način izražavanja svedoči i citat koji smo ranije naveli (naš kurziv):

> Skupovi su objekti, ali pojmovi nisu objekti. *Mi objekte opažamo, a pojmove razumemo.* Razumevanje je drugačija vrsta opažanja: ono je korak u pravcu svođenja na prvi uzrok. [Wang, 1996, p. 235]

Ako je sve to što smo rekli tačno, možemo se pitati zašto je Gedel toliko insistirao na „opažanju" matematičkih pojmova? Deo odgovora leži u prirodi matematičkih pojmova, za koje je Gedel tvrdio da ih možemo „opažati". Naime, kao što smo već napomenuli, reč je o pojmu skupa, kao i osnovnih skupovno-teorijskih relacija kao što je na primer relacija pripadnosti. Činjenica da su ovi pojmovi osnovni i da sve ostale matematičke pojmove možemo analizirati pomoću njih, kao i da nije jasno na koji način bismo mogli same te pojmove analizirati pomoću drugih pojmova tako da to pomogne boljem razumevanju njihovih suštinskih svojstava, govori u prilog tome da je naše razumevanje pojma skupa nesvodivo i da je u izvesnom smislu neposredno. Na primer, ako posmatramo pojam realne funkcije, daleko od toga da je naše razumevanje ovog pojma „neposredno". Da bismo ga razumeli, moramo prethodno razumeti pojmove skupa realnih brojeva, pojam funkcije i pojam uređenog para. Nasuprot tome, pojam skupa ne proizvodi ovakvu vrstu svođenja u razumevanju. Nema sumnje da je ova neposrednost razumevanja igrala važnu ulogu u Gedelovoj epistemologiji. Pretpostavljamo da je, da bi je podvukao, Gedel s vremena na vreme pribegavao slikovitijem rečniku, pa je mesto o razumevanju pojma skupa govorio o njegovom opažanju.

Na osnovu toga trebalo bi da bude jasno da Gedel ni u kom slučaju ne smatra da mi posedujemo *potpuno* razumevanje pojma skupa. Naprotiv, naše razumevanje ovog pojma je samo parcijalno. Činjenica da možemo „napredovati" u razumevanju pojma skupa je između ostalog zaslužna za neiscrpnost matematičkog saznanja:

> „Neiscrpnost" matematike čini sličnost između razuma i čula još većom jer pokazuje da i kod „čula" [razuma, *prim. prev.*] postoji praktično neograničen broj nezavisnih percepcija. Primetimo da se neiscrpnost matematike javlja ne samo u istraživanjima u osnovama matematike nego i u stvarnom razvoju matematike; na primer, u neograničenom nizu aksioma beskonačnosti u teoriji skupova, koje su analitičke (i očigledne)

> u smislu da one samo razvijaju sadržaj opšteg pojma skupa. Da takav niz može sadržati veoma veliki (možda čak i beskonačan) broj stvarno realizabilnih nezavisnih racionalnih percepcija vidi se iz činjenice da takve aksiome nisu očigledne od samog početka nego postaju očigledne tokom razvoja matematike. Na primer, da bismo mogli razumeti prvu transfinitnu aksiomu beskonačnosti, moramo prethodno u dobroj meri razviti teoriju skupova. [Gödel, 1959a, p. 353, fn 43]

Na ovom mestu je važno istaći i to da Gedel matematičku intuiciju *ne smatra* nepogrešivom. Činjenica da osnovne matematičke pojmove razumemo neposredno ne znači da u tom razumevanju ne možemo pogrešiti. Jedna od posledica pogrešnog razumevanja pojma skupa jesu skupovno-teorijski paradoksi. Naime, iako može izgledati da je pojam skupa korektno (i u potpunosti) opisan aksiomama ekstenzionalnosti i neograničene komprehenzije, paradoksi nam govore da ovo ne može biti slučaj:

> Naše saznanje sveta pojmova može biti jednako ograničeno i nepotpuno kao i naše saznanje sveta stvari. Ne može se poreći da je, u pojedinim slučajevima, ovo saznanje ne samo nepotpuno nego i nerazgovetno. Ovo je slučaj sa paradoksima teorije skupova, koji se često, po mom mišljenju potpuno neopravdano, smatraju pobijanjem platonizma. Naši vizuelni doživljaji ponekad protivreče našim taktilnim doživljajima; na primer u slučaju štapa uronjenog u vodu, ali niko ko je pri čistoj svesti ne bi iz ovoga zaključio da spoljašnji svet ne postoji. [Gödel, 1951, p. 321]

S ovim u vezi, zanimljivo je i pitanje prirodnosti naših skupovno-teorijskih aksioma. Da su kojim slučajem aksioma ekstenzionalnosti i neograničene komprehenzije konzistentne one bi, izgleda, davale teoriju koju je mnogo lakše opravdati sa Gedelovog stanovišta. Ograničenja aksiome komprehenzije koja je Cermelo (Ernst Zermelo) uveo u ZF (najbolje oličena u aksiomi separacije) mogu delovati pomalo *ad hoc*. Takođe, činjenica da su aksiome teorije ZFC formulisane pre svega sa idejom da se kodifikuje matematička praksa ne govore u prilog „dedukovanju” svojstava i relacija skupova iz pojma skupa.

To međutim ne predstavlja problem sa Gedelovog stanovišta. Naime, aksiome ZFC ne predstavljaju jedini niti najbolji mogući opis pojma skupa (mada je sasvim sigurno da nešto od tog opisa one u sebi sadrže). Ovo poslednje je naravno posledica nepotpunosti. Deluje međutim razumno pretpostaviti da su principi kojima se rukovodila matematička praksa u odnosu na skupove, pre njihove aksiomatizacije, bili takvi da su odražavali to kako su matematičari razumevali njihova osnovna svojstva. S druge strane, sasvim je moguće zamisliti aksiomatizaciju teorije skupova koja počiva na drugačijim idejama, a koja se opet može opravdati pozivajući se na izvesne aspekte pojma skupa. U stvari, jednu takvu aksiomatizaciju, Akermanovu teoriju klasa, predstavićemo u sledećem odeljku ovog rada.

Primetimo da ako zajedno sa Gedelom prihvatimo pojmovni realizam i ako prihvatimo da matematička intuicija primenjena na pojam skupa jeste razumevanje ovog pojma, tvrđenja o „mističnoj” ili „misterioznoj” sposobnosti postaju neprimerena. Prvo i prvo, ne postoji nikakva dodatna racionalna moć pored naše moći da mislimo. Osim toga, ta moć primenjena na pojam skupa je mistična i misteriozna koliko i naše mišljenje uopšte.

Napomenuli smo da Gedel ne smatra matematičku intuiciju nepogrešivom. Sasvim je moguće pogrešno razumevanje naših osnovnih matematičkih pojmova. To međutim nikako ne znači da matematička intuicija nije *pouzdana*. Ako smatramo da je naša sposobnost rasuđivanja u načelu pouzdana, a mi to inače smatramo, onda činjenica da matematička intuicija predstavlja samo posebnu vrstu našeg mišljenja primenjenog na elementarne matematičke pojmove i tvrđenja omogućava „prenošenje” pouzdanosti i na nju.

Iako je sigurno da Gedel nije tokom čitave svoje karijere matematičku intuiciju shvatao na način koji smo upravo opisali, nadamo se da su razlozi koje smo izneli dovoljni da se zaključi da je u određenom periodu on ovo ili neko slično shvatanje mogao imati na umu. Grubo govoreći, ovde pre svega mislimo na period od druge polovine četrdesetih godina do kasnih pedesetih godina prošlog veka. Dakle, od Gedelovog rada o Raselu (Bertrand Russell) (1944) zaključno sa njegovim radom o Karnapovom konvencionalizmu (1959?).

Već smo napomenuli da je početkom 1959. godine Gedel pismom obavestio Šilpa, urednika edicije *The Library of Living Philosophers*, o svojoj odluci da rad o Karnapu ne objavi. Iako je smatrao da poseduje snažne argumente protiv konvencionalizma, oni ga i dalje nisu u potpunosti zadovoljavali. Jedan od razloga koji Gedel navodi jeste i taj što su problemi sa kojima se njegovi argumenti suočavaju „blisko povezani i delom identični jednom od osnovnih filozofskih problema, naime pitanju o objektivnosti pojmova i njihovim relacijama" [Gödel, 2003b, p. 244].

Te iste 1959. godine Gedel je otpočeo svoje intenzivno proučavanja Huserla (Edmund Husserl) [Tieszen, 2011; Wang, 1996]. Razložno je pretpostaviti da se Gedel nadao konkluzivnijem argumentu za platonizam i da je smatrao da mu fenomenologija može u tome pomoći. Konkretno, izgleda da je fenomenološka analiza matematičke intuicije ono što je Gedela posebno zanimalo. Ovakvo gledište potvrđuje i Hao Vang:

> Pre 1959. Gedel je pažljivo proučavao Platona, Lajbnica i Kanta i njegove su simpatije bile na strani Platona i Lajbnica. Međutim, osećao je da Kantovu kritiku Lajbnica mora ozbiljno uzeti u obzir i da mora pronaći način da odgovori na Kantove prigovore racionalizmu. On nije bio zadovoljan Kantovim dualizmom niti njegovim ograničavanjem intuicije na čulnu intuiciju, koja je isključivala mogućnost intelektualne ili kategorijalne intuicije. Verovatno je tokom pisanja rada o Karnapu pedesetih godina Gedel shvatio da njegov realizam s obzirom na pojmovni svet zahteva čvršće utemeljenje od onog koje je on tada bio u stanju da pruži. U tim okolnostima nije iznenađujuće da se okrenuo Huserlovoj fenomenologiji, koja obećava opšti okvir za opravdanje izvesnih osnovnih uverenja koja je Gedel imao: realizam s obzirom na pojmovni svet,

> analogiju između pojmova i matematičkih objekata s jedne strane i fizičkih objekata sa druge, mogućnost i značaj kategorijalne intuicije ili neposrednog pojmovnog saznanja, i najzad jednostranost onoga što je Huserl nazvao „naivnim ili prirodnim stanovištem". [Wang, 1996, pp. 164-165]

Da je Gedel verovao u mogućnost „neposrednog pojmovnog saznanja" može se dovesti u pitanje pogotovo ako uzmemo u obzir njegovu napomenu iz druge verzije rada o hipotezi kontinuuma (1964) „da se matematička intuicija ne mora shvatiti kao sposobnost koja nam omogućava *neposredno* saznanje njenih objekata" [Gödel, 1964, p. 268]. Pa ipak, izgleda da ako je naša interpretacija Gedelovog stanovišta pre 1959. tačna, matematička intuicija kao *razumevanje* osnovnih matematičkih pojmova (kao što je pojam skupa) ne zadovoljava Gedela u potpunosti, pa kasnije, kroz Huserlovu fenomenologiju, on pokušava da razume intuiciju kao sposobnost koja ima više toga zajedničkog sa opažanjem pre nego sa diskurzivnim elementima naše svesti.

Zašto Gedel pravi ovaj zaokret ka Huserlu i koliko je fenomenologija uticala na njegova filozofska stanovišta posle 1959. godine? Već smo sugerisali mogući odgovor na prvi deo ovog pitanja, ali želeli bismo da dodamo i to da je, veoma zdravorazumski, Gedel mogao pretpostaviti da ako Huserlova fenomenologija zaista nudi razjašnjenje uvida u svet matematičkih pojmova i objekata, onda nema razloga da je u tom pogledu ne iskoristimo i da matematičko znanje objasnimo po analogiji sa našim empirijskim znanjem, tj. polazeći od „datosti" (koje su u ovom slučaju očigledno neempirijske). Ako bi ovo bio slučaj, onda bismo problem objektivnosti matematičkih pojmova, koji je krajem pedesetih godina toliko mučio Gedela, rešili na potpuno zadovoljavajući način. Da li je međutim ovo slučaj? Da li fenomenologija zaista nudi metod uvida u strukturu neempirijske stvarnosti kojem se Gedel nadao? Mislimo da je odgovor na ovo pitanje negativan, ali zainteresovanog čitaoca bismo uputili na bolje poznavaoce Huserla, da bi sam mogao da donese sud o ovome [Tieszen, 2011; Hauser, 2006, 2014].

Što se tiče Huserlovog uticaja na Gedelova filozofska stanovišta, iako bi čitalac nacrta za neodržano predavanje „The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy" [Gödel, 1961, pp. 374-387] iz 1961. mogao da zaključi drugačije, mislimo da on nije bio toliko snažan koliko se to često smatra. Fenomenologija po Gedelovim rečima pruža „sistematski metod za rasvetljavanje značenja" gde se rasvetljavanje značenja „sastoji u sve preciznijem fokusiranju na pojmove o kojima je reč, usmeravanjem naše pažnje na određeni način" [Gödel, 1961, p. 383]. Međutim, tri godine kasnije, radeći na izmenama i dopunama prve verzije rada o hipotezi kontinuuma, i pored više od stotinu ispravki koje je uneo (istina, većina ih je bila stilske prirode) Gedel gotovo svu svoju pažnju posvećuje matematičkim rezultatima u teoriji skupova, čineći da nova verzija rada na veran način odslikava ondašnje znanje o problemu kontinuuma.[10] Njegove napomene o platonizmu dalje razvijaju ideje koje je već formulisao u prvoj verziji rada iz 1947. godine, posebno u pogledu analogije između matematike i fizike, što smo već imali priliku da navedemo gore. U tom radu naprosto ne možemo naći „sistematsko rasvetljavanje značenja" pojma skupa, ako pod ovim shvatamo nešto drugo od Gedelove analize koja sledi njegove ranije radove.

Ono što međutim jeste u izvesnom smislu novo, je snažnije insistiranje na matematičkoj intuiciji kao sposobnosti koja „liči na opažanje". Ovo je možda posledica Gedelovog proučavanja Huserla i njegovog stava da nam fenomenologija pruža adekvatno objašnjenje „kategorijalne intuicije". Ako je ovo slučaj, izgleda da tamo gde je Huserl uticao na Gedela, posledice tog uticaja su već proizilazile iz nekog od aspekata Gedelovog stanovišta. Na kraju i *u potpunosti spekulativno*, želeli bismo da predložimo sledeće: moguće je da je Gedelovo obraćanje Huserlu delom rezultat njegovog nezadovoljstva tokom kojim je filozofija njegovog vremena tekla. Naime, Gedelov platonizam je bio sve samo ne opšte prihvaćena pozicija u filozofiji matematike; i pored njegovih izuzetnih rezultata u logici i njegove filozofske pronicljivosti i poštenja, njegovi su filozofski argumenti od strane filozofa najčešće posmatrani kao argumenti „drugog reda",

[10] Tako u FUSNOTI 20, Gedel spominje Skotov (Dana Scott) rezultat da postojanje merljivog kardinala ima za posledicu $V \neq L$, iz 1961. godine dok u dodatku on navodi Koenov rezultat o nazavisnosti CH iz 1963. i razmatra pitanje da li problem nezavisnosti dovodi u pitanje postojanje objektivne istinosne vrednosti ovog tvrđenja.

kao nešto što nije u skladu sa skrupulama koje se od filozofije zahtevaju. Pozivajući se na Huserla Gedel je možda želeo da pokaže da je u savremenoj filozofiji još uvek moguće zastupati racionalističko stanovište, pa da racionalizam nije naprosto atavizam iz vremena Lajbnica (Gottfried Wilhelm Leibniz) i Dekarta (René Descartes).

Bilo kako bilo, Gedelovo stanovište je, makar u periodu 1944-1959., daleko od filozofskog sujeverja i može se na razložan način braniti. Detaljna analiza Gedelovog stanovišta posle 1959. godine, iako zanimljiva, prevazilazi okvire ovoga rada. Za savremena razmatranja matematičke intuicije kao funkcije razuma, na tragu Gedelovih gledišta koja smo gore ispitali, zainteresovanog čitaoca upućujemo na Kacovu (Jerrald Katz) studiju [Katz, 1998] kao i skoriji rad [Katz, 2002]. Ideje slične Gedelovim brani i Bonžur (Laurence BonJour) [Bonjour, 1998], koji zastupa poziciju *umerenog racionalizma* u epistemologiji.

3.3.3. Gedel i Kant. Vredi razmotriti još jedan aspekt Gedelovog razumevanja matematičke intuicije i pojma skupa. Reč je naime o njegovom stavu da su „datosti” na kojima matematika počiva „tesno povezane sa apstraktnim elementima koji su sadržani u našim empirijskim idejama” [Gödel, 1964, p. 268]. U fusnoti koja prati upravo navedeno tvrđenje Gedel kaže:

> Primetimo da postoji tesna veza između pojma skupa [...] i kategorija čistog razuma u Kantovom smislu. Naime, u oba slučaja njihova je funkcija „sinteza”, tj. stvaranje jedinstva iz mnogostrukosti (na primer kod Kanta, ideje *jednog* objekta iz njegovih različitih aspekata). [Gödel, 1964, p. 268]

Kantov transcendentalni projekat se, grubo govoreći, može razumeti kao utvrđivanje neophodnih uslova našeg iskustva. Njegov cilj je da objasni ne samo kako možemo imati iskustvo objekata u prostoru i vremenu nego i kako na primer možemo imati iskustvo objekata kao koherentnih individua koje opstaju kroz razne promene i koje mogu učestvovati u kauzalnim vezama. Jedan od centralnih uslova ovakvog iskustva objekata jeste naša sposobnost *sinteze*. Po Kantovom mišljenju, sposobnost sinteze nam omogućava da „mnogostrukost predstava” (u nešto modernijoj terminologiji mogli bismo reći i „neposredno datih čulnih utisaka”) ujedinimo unutar tvrđenja o *objektima*. Međutim, sinteza ne može biti puka *kombinacija* mnogostrukosti predstava, smatra Kant. Razlog ovome jeste to što kombinacija u najboljem slučaju može proizvesti *mnoštvo*. Mnoštvo, međutim, čak iako je uređeno nije isto što i jedna stvar. Da bismo mogli imati objekat kao jednu stvar o kojoj možemo nešto tvrditi, neophodan nam je pojam *sintetičkog jedinstva*. Ovaj pojam je između ostalih, po Kantovom mišljenju, doprinos našeg razuma izgradnji sveta koji nas okružuje.

Izgleda da bi ovo mogao biti „apstraktni element naših empirijskih ideja” koji je Gedel imao na umu. Po njegovim rečima:

> Razlika između jednog i mnoštva je nesvodiva. Osnovno svojstvo stvarnosti jeste da je sačinjavaju mnoge stvari. Izvorna ideja našeg mišljenja jeste da mislimo o mnoštvu objekata kao o jednom objektu. [Wang, 1996, p. 254]

Da je pojam jedinstva u bliskoj vezi sa pojmom skupa svedoči i Kantorova dobro poznata definicija na osnovu koje je skup „svako združivanje dobro određenih i razgovetnih objekata naše intuicije ili mišljenja [...] u jednu celinu.” [Cantor, 1962, str. 282] S obzirom na odnos pojma skupa i pojma jedinstva, Gedel kaže:

> Skup je jedno čiji su sastavni delovi njegovi elementi. Fundamentalno je svojstvo duha da mnoštvo razume kao jedno. Skupovi su mnoštva koja su takođe i jedno. Mnoštvo je suprotno jednom. Kako nešto može biti mnoštvo i jedno u isto vreme? Pa ipak, skup je upravo to. [Wang, 1996, p. 254]

Ako zanemarimo proročanski ton tih tvrđenja koja smo upravo naveli, jasno je da je Gedel smatrao da je pojam jedinstva vrlo blisko povezan sa pojmom skupa. Postoje međutim suštinske razlike između Gedelovog i Kantovog stanovišta o prirodi pojmova o kojima je reč. Ove razlike, čini nam se, govore mnogo više o prirodi Gedelovog pojmovnog realizma od sličnosti koje njegova pozicija ima sa Kantovom.

Kao što smo već napomenuli, Kantovo je gledište u osnovi subjektivističko. On smatra da je pojam jedinstva, između ostalih, doprinos našeg razuma konstrukciji sveta. Naš razum nameće pojmovni okvir svetu i ovo je razlog zašto imamo iskustvo objekata koji traju kroz vreme i učestvuju npr. u kauzalnim odnosima. Po Gedelovom mišljenju pak nema ničeg subjektivnog u vezi sa pojmom skupa koji je matematički pandan pojma jedinstva. Ako pretpostavimo, što nije nerazložno, da je za Gedela pojam skupa veoma važan za naše empirijsko saznanje (makar posredno, kroz poimanje jedinstva ako ne i neposredno) onda nije saznajni subjekt taj koji donosi ovaj pojam svetu „stvari po sebi" koji ga okružuje. Naprotiv, mi kao saznajni subjekti *razumemo* pojmovnu strukturu sveta koja je prisutna nezavisno od toga da li mi to činimo ili ne.

Ne želimo da prenaglasimo sličnosti između Kantove i Gedelove pozicije. Jasno je da je Gedel bio oštro suprotstavljen svakoj vrsti subjektivizma u matematici i prethodne napomene samo malim delom ilustruju jaz između Gedelovog matematičkog realizma i Kantovog transcendentalnog idealizma. Međutim, takođe ne želimo da zanemarimo ni sličnosti koje između njih postoje:

> Želeo bih da istaknem da je ovo intuitivno razumevanje uvek novih aksioma koje su logički nezavisne od prethodnih a koje je nužno za rešavanje svih problema, čak i unutar veoma ograničenog domena, u načelu u skladu sa Kantovim razumevanjem matematike. Kantove napomene koje su u ovom pogledu relevantne su sasvim sigurno pogrešne ako se shvate doslovno, budući da Kant tvrdi da su nam u izvođenju geometrijskih teorema uvek neophodne nove geometrijske intuicije i da je dakle čisto logičko izvođenje iz konačnog broja aksioma nemoguće. Može se dokazati da je ovo pogrešno. Međutim, ako u prethodnom tvrđenju termin „geometrijske" zamenimo sa „matematičke" ili „skupovno-teorijske", onda se može dokazati da je ovo tvrđenje istinito. Verujem da je opšte obeležje mnogih Kantovih tvrđenja to da su pogrešna ako se shvate doslovno ali da sadrže duboke istine ako ih razumemo u širem smislu. [Gödel, 1961, p. 385]

Na istom mestu, Gedel kaže i sledeće (za koje bi moglo da se pomisli da je ironično):

> Ako je pogrešno razumevanje Kanta dovelo do toliko toga interesantnog u filozofiji, a takođe posredno i u nauci, koliko tek možemo očekivati od ispravnog razumevanja Kanta? [Gödel, 1961, p. 387]

3.3.4. Posledice nominalizma. Sumirajmo ukratko sadržaj naše glave [3]. Njen cilj bio je da ispita neke od najuticajnijih prigovora Gedelovoj poziciji. Ispitali smo Benaserafov prigovor matematičkom platonizmu kao i Fildov argument koji je skrojen tako da otkloni nedostatke svog prethodnika. Oba ova prigovora postavljaju platonistima zahtev da objasne na koji način saznajemo apstraktne objekte. Oba ova prigovora takođe zaključuju da ako je matematički platonizam istinit, onda ne možemo posedovati matematičko znanje, jer ne postoji *naturalistički prihvatljiv* način da se objasni naše saznanje apstraktnih objekata.

Na ove prigovore se može odgovoriti na dva načina. Može se prvo poricati konkluzivnost argumenata na kojima oni počivaju, a time i opravdanost zaključaka do kojih dolaze. Osim toga, moguće je ponuditi i neku vrstu skice platonističke epistemologije koja ima veće izglede na uspeh od naivnog postuliranja matematičke intuicije kao nezavisne sposobnosti pomoću koje ulazimo u interakciju sa apstraktnim objektima. Još jedan dodatni odgovor koji se može ponuditi Fildu, koji za razliku od Benaserafa nudi alternativno nominalističko shvatanje matematike, počiva na argumentima iz matematičke prakse. U svetlu onoga što matematičari zaista čine kada se bave matematikom, Fildova pozicija deluje krajnje neubedljivo. Njena eksplanatorna moć je u najbolju ruku minimalna. Stav koji smo prema nominalizmu zauzeli u ovom odeljku, posebno u svetlu Hartovog stava o naturalizaciji matematičkog znanja (v. str. 120) koji smo naveli gore, veoma je lepo opisao Gič (Peter Geach):

> Kada čujemo za neki novi pokušaj da se mišljenje, jezik ili izbor objasne naturalistički, trebalo bi da reagujemo kao kada nam se kaže da je neko kvadrirao krug ili dokazao da je $\sqrt{2}$ racionalan broj: samo je blaga radoznalost ovde primerena - koliko je uspešno greška prikrivena? [Geach, 1977, p. 52]

Naš odgovor na kritike Gedelovog platonizma koji smo do sada ponudili u ovom poglavlju, iako načelno sledi podelu koju smo gore naveli, u najvećoj meri ističe neadekvatnost nominalizma u filozofiji matematike - u skladu sa Gičovim pitanjem. Tom odgovoru bismo, u ovom kratkom odeljku, želeli da pridodamo još nešto. To nešto neće biti, bar ne u suštinskom smislu, filozofski argument u prilog Gedelovom platonizmu, a protiv nominalizma i njemu srodnih pozicija. Ono što ćemo reći pripada u najvećoj meri istoriji logike i istoriji nauke uopšte.

Poznato je da je moderna logika, kao grana matematike, začeta pre svega u Fregeovim radovima iz druge polovine XIX veka, kao i da je svoju kanonizaciju doživela u prvim decenijama XX veka, zahvaljujući, pre svega, Hilbertovim i Bernajsovim (Paul Bernays) radovima. Period između dva svetska rata doveo je do raslojavanja unutar logike, koje je za posledicu imalo izdvajanje četiri osnovne grane ovog predmeta. Reč je o teoriji skupova, teoriji modela, teoriji dokaza i teoriji izračunljivosti.

Na komemoraciji posvećenoj Gedelu koja je održana na Prinstonskom *Institute for Advanced Study* 1978. godine, Sajmon Kočen (Simon Kochen) je njegova dostignuća u logici opisao na sledeći način:

> Njegovi se rezultati mogu nabrojati na prste jedne ruke. [...] Profesor Klini je bio član moje komisije za odbranu doktorata [...] i njegovo prvo pitanje je bilo: „Nabrojte mi pet Gedelovih teorema". Samo pet teorema. Ali kakve su to monumentalne i neverovatne teoreme. Svaka od njih predstavlja početak čitave jedne grane moderne matematičke logike.

O kojim Gedelovim rezultatima je reč? Gedel je prvo u svojoj doktorskoj tezi odbranjenoj 1929. godine dokazao *teoremu potpunosti* logike prvog reda i time dao odgovor na veoma važno pitanje koje su godinu dana ranije postavili Hilbert i Akerman [Hilbert and Ackermann, 1972], a koje glasi: „da li su sve logičke formule koje su istinite u svakom domenu individua dokazive"? Pored značaja koji ova teorema ima u teoriji modela ona predstavlja i sponu između teorije modela i teorije dokaza, dovodeći u vezu pojmove istine i dokazivosti. Gedel je takođe dokazao i *teoremu kompaktnosti* koja je, kao i teorema potpunosti, kamen temeljac teorije modela. Ovi rezultati su, zajedno sa rezultatima Tarskog, u mnogome odredili buduće kretanje ove matematičke discipline. Gedelove *teoreme o nepotpunosti* centralni su rezultati (Hilbertovske) teorije dokaza, dok su metode kojima su ove teoreme dokazane pomogle stvaranju teorije izračunljivosti i Gedel je bio jedan od pionira ove discipline. Gedelovi teoreme o relativnoj konzistentnosti AC i GCH sa aksiomama ZF stvorile su modernu teoriju skupova. Njegovo „destilovanje" *konstruktibilnog univerzuma L* bilo je začetak *teorije unutrašnjih modela* teorije skupova i Jensenove (Ronald Jensen) *teorije fine strukture*.

Ukratko, Gedelov uticaj na razvoj moderne logike i matematike je ogroman. Iako su njegovi rezultati veoma raznoliki jedno ih sigurno spaja: svaki od njih predstavlja rešenje jednog velikog otvorenog problema ili makar značajan korak ka njegovom rešenju. Takođe, svaki od njegovih rezultata otvorio je novi prostor za dalje matematičko istraživanje. Gedelova motivacija je dakle bila matematička. Trebalo je pružiti odgovor na važna matematička pitanja. Da li je i u kojoj meri njegova *filozofska* pozicija igrala ulogu u pogledu njegovih značajnih *matematičkih* otkrića?

U pismu Hao Vangu, Gedel kaže sledeće:

> Teorema potpunosti je zaista, matematički posmatrano, gotovo trivijalna posledica Skolemovog rada iz 1922. godine. Međutim, činjenica je da niko u ono vreme (uključujući i Skolema) nije ovo zaključio. [...]
>
> Ovo slepilo (predrasuda ili kako god želite da ga nazovete) logičara je zaista iznenađujuće. Međutim, mislim da ga nije teško objasniti. Ono leži u jednom nedostatku neophodnog epistemološkog stava prema metamatematici kao i prema ne-finitističkim metodama zaključivanja koji je u ono vreme bio veoma rasprostranjen. [Gödel, 2003b, p. 397]

Dakle, po Gedelovom mišljenju, skrupule koje su u matematici onog vremena postojale u pogledu korišćenja ne-finitističkih sredstava, konkretno aksiome izbora, bile su razlog tome što teorema potpunosti nije ranije dokazana. Da je neka vrsta infinitarnih metoda nužna za dokaz teoreme potpunosti govori i činjenica da je ova teorema (kao i teorema kompaktnosti) ekvivalentna jednoj varijanti aksiome izbora (o kojoj varijanti je reč zavisi pre svega od kardinalnosti jezika na koji se pomenute teoreme odnose). Za platonistu kakav je Gedel upotreba ovakvih metoda je potpuno legitimna i preporučljiva. Po Gedelovim rečima: „[...] moje objektivističko shvatanje matematike uopšte, kao i transfinitnih metoda zaključivanja posebno, bilo je od suštinskog značaja i za ostale rezultate do kojih sam došao u logici" [Gödel, 2003b, p. 398.]. Međutim, pored sumnje u opravdanost ne-finitističkih metoda u matematici, Gedel napominje i jedan dublji razlog koji je bio prepreka formulaciji i dokazu teoreme potpunosti pre njegovog rezultata:

> Želeo bih da dodam da je postojao još jedan razlog koji je smetao logičarima u primeni metamatematike, ne samo u pogledu transfinitnih metoda zaključivanja nego i u pogledu matematičkog zaključivanja uopšte. On se sastoji u činjenici da se, u velikoj meri, metamatematika nije smatrala naukom koja opisuje objektivno matematičko stanje stvari, nego pre teorijom ljudske aktivnosti manipulisanja simbolima. [Gödel, 2003b, p. 404]

Vidimo dakle da pored inspiracije koja je bila matematička Gedelovi rezultati u svojoj osnovi imaju i filozofsku motivaciju. Po Gedelovim rečima, njegov platonizam je bio ključan za otkrivanje svih velikih rezultata u logici do kojih je došao. Pretpostavka da matematička tvrđenja poseduju objektivno značenje, da pružaju opis matematičke stvarnosti, i da nisu puka igra simbola, jeste po Gedelovom mišljenju nužna (makar kao radna hipoteza) za napredak matematike [Tarski, 2000, p. 35]. Gore smo nešto detaljnije ispitali Gedelove napomene o otkriću teoreme potpunosti. Nešto slično smo mogli uraditi i za ostale njegove rezultate. Na primer, njegove teoreme nepotpunosti sugerisane su oštrim razlikovanjem između istine i dokazivosti u formalnim sistemima koji sadrže aritmetiku, dok se njegovi rezultati u teoriji skupova oslanjaju na pojam hijerarhije tipova, koji je prvo formulisan u skladu sa konstruktivističkim načelima u širem smislu da bi se u Gedelovim radovima tretirao na način koji je u potpunom neskladu sa konstruktivizmom [Gödel, 2003b, pp. 397-398]. Platonizam je za Gedela igrao veoma važnu heurističku ulogu. Ta filozofska pozicija je, kroz njegove važne rezultate, u mnogome odredila razvoj moderne logike.

Takva metodološka plodnost ne krasi samo platonizam. Hilbertov formalizam je na primer imao za posledicu formulaciju veoma važnog matematičkog pitanja konzistentnosti formalne aritmetike, i to pitanje vodilo je stvaranju teorije dokaza. Intuicionizam i konstruktivizam uopšte doveli su do otkrića intuicionističke logike, konstruktivne analize i postavljanja mnogih lepih matematičkih pitanja koja su zaokupljala pažnju matematičara prošlog i ovog veka. Intuicionistička logika je u vezi i sa važnim algebarskim, topološkim i kategorijalnim strukturama i posebno je značajna sa stanovišta opšte teorije dokaza. Logicizam je podstakao Fregea da načini prve korake u zasnivanju matematičke logike kakvom je danas poznajemo.

Nisu sve ove filozofske pozicije podjednako dobre. Ipak, jedno im je zajedničko. Te su pozicije formulisale duboka pitanja i izdvojile prave probleme. Odgovori ili pokušaji odgovora na njih doveli su do velikih *matematičkih* otkrića. U filozofiji matematike bi, kao i drugde, trebalo da sudimo po plodovima. Svaka filozofija nauke bi trebalo da razume nauku kojom se bavi. Samo dobra filozofija nauke će postaviti pitanja dovoljno precizna i sadržajna da odgovor na njih neće više biti u njenoj nadležnosti.

Ovo je jedna od suštinskih razlika između Gedelovog platonizma i nominalizma kakav zastupa Fild. Takođe, u poređenju sa Gedelovim stanovištem slično prolaze i Karnapov konvencionalizam kao i mnoge od savremenih pozicija u filozofiji matematike. Ono što takvim pozicijama nedostaje jeste matematička relevantnost pitanja koja sebi postavljaju. Ako Gedela razumemo tako da pita samo to da li matematički pojmovi i objekti postoje kao apstraktni entiteti, pogrešno ćemo ga razumeti. Pitanje koje Gedel sebi postavlja i na koje pokušava da odgovori jeste: „Zašto rezultati nezavisnosti u teoriji skupova ne stavljaju tačku na problem CH? Zašto se još uvek ima smisla nadati matematičkom rešenju ovog problema? Kako bi takvo matematičko rešenje moglo da izgleda?"

Istorija moderne matematike je opravdala ova pitanja. Gedelovi odgovori na njih pružili su snažnu orijentaciju razvoju moderne teorije skupova čiji smo svedoci i danas. Činjenica da u današnjoj skupovno-teorijskoj zajednici još uvek ima onih koji smatraju CH otvorenim problemom i koji, na tragu Gedelovih sugestija, pokušavaju da ga reše, po našem mišljenju govori više od filigranski sagrađenih filozofskih konstrukcija koje odolevaju naletima kritike.

Razumevanje matematike unutar filozofskih diskusija o njoj najbolje se vidi kroz primere. Filozofski relevantni aspekti nepotpunosti formalne aritmetike ili nezavisnosti u teoriji skupova ne mogu se ilustrovati primerima iz srednjoškolske matematike. Neki filozofi bi naravno mogli tvrditi da čak i na tom elementarnijem nivou postoje zablude kojih se valja rešiti i da bismo tek posle toga mogli da diskutujemo o kompleksnijim pitanjima navedenim gore, ako ona uopšte prežive ovu „terapiju”. Oni bi takođe mogli tvrditi da matematika, kao i neke biljke, najbolje raste u mraku, a da joj na svetlu adekvatne filozofske analize sleduje zaslužena dijeta [Wittgenstein, 1978, p. 381]. Filozofija bi, međutim, baš kao i matematika, trebalo da bude racionalan poduhvat. U kojoj meri je ona stekla mandat za revizionističko stanovište sugerisano pretposlednjom rečenicom, ostavljamo čitaocu da sam prosudi.

GLAVA 4

STARE I NOVE AKSIOME

Kako objasniti činjenicu da su trenutno prihvaćene aksiome teorije skupova upravo aksiome teorije ZFC? Zašto je ova teorija privilegovana u odnosu na neke druge teorije koje se takođe s pravom mogu nazvati teorijama skupova? Ako i ostavimo po strani teoriju kakva je na primer NBG teorija klasa (NBG je skraćenica od „fon Nojman-Bernajs-Gedelova") koja je u dovoljnoj meri slična teoriji ZFC, pitanje se i dalje nameće za teorije kakva je Kvajnova NF teorija klasa i neke druge teorije.

Takođe, budući da je teorija ZFC nepotpuna, na koji je način možemo proširiti dodatnim *aksiomama* pre nego ispitivati posledice izvesnih manje ili više plauzibilnih tvrđenja unutar nje? Da li danas uopšte možemo govoriti o razlici između novih aksioma teorije skupova i tvrđenja koja imaju izvesne poželjne i zanimljive posledice, koliko god ovo neodređeno zvučalo? Da li „mora postojati prvi korak u prepoznavanju aksioma [...], korak koji će aksiome učiniti vrednim razmatranja kao aksiome pre nego kao puke hipoteze ili spekulacije" [Reinhardt, 1974a, pp. 204-205]?

Čitalac može naslutiti da neke od Gedelovih odgovora na prethodna pitanja možemo rekonstruisati iz onoga što je do sada rečeno u ovom radu. Cilj ovog odeljka je da to sumira kao i da istakne neka od do sada nepomenutih Gedelovih gledišta koja nam mogu pomoći da na ova pitanja odgovorimo. Konkretno, u nastavku ćemo pokušati da objasnimo šta je tačno Gedel podrazumevao pod dvema vrstama opravdanja skupovno-teorijskih aksioma, *unutrašnjim* i *spoljašnjim* opravdanjem.

4.1. Unutrašnje i spoljašnje opravdanje

Videli smo da sa stanovišta Gedelovog platonizma nezavisnost CH ne dovodi u pitanje činjenicu da ovo tvrđenje poseduje određenu istinosnu vrednost. Naime, činjenica da naše trenutno prihvaćene aksiome ne mogu fiksirati kardinalnost skupa $\mathbb{R}$ znači samo da naše aksiome ne sadrže potpun opis univerzuma skupova. Ovo poslednje se tiče Gedelove teoreme o nepotpunosti spojene sa njegovim realizmom. Po Gedelovim rečima:

> [S]amo neko ko (kao što to intuicionisti čine) poriče da pojmovi i aksiome klasične teorije skupova imaju bilo kakvo značenje (ili dobro određeno značenje) može biti zadovoljan takvim rešenjem, ali ne i neko ko veruje da pojmovi i aksiome opisuju neku dobro određenu stvarnost. Jer, unutar ove stvarnosti, Kantorova hipoteza mora biti istinita ili lažna, a njena neodlučivost na osnovu danas poznatih aksioma samo znači da ove aksiome ne sadrže potpun opis te stvarnosti. [Gödel, 1947, p. 181]

Takođe, u pismu Čerču od 29. septembra 1966. godine, Gedel još konciznije ističe svoj stav:

> Vi znate da se ja ne slažem sa filozofskim posledicama Koenovog rezultata [na osnovu kojih je problem CH rešen dokazom njegove nezavisnosti od ZFC, *prim. prev.*]. Konkretno, ne mislim da bi realisti trebalo da se pribojavaju nekih trajnih grananja sve dok su u izboru svojih aksioma rukovođeni matematičkom intuicijom i drugim kriterijumima racionalnosti. [Gödel, 2003a, p. 372]

Grananja o kojima Gedel govori bi nastala ako bi npr. dve međusobno inkompatibilne teorije, kao što su $ZF + CH$ i $ZF + \neg CH$, bile podjednako prihvaćene. Koji su to „kriterijumi racionalnosti” koji, pored matematičke intuicije, mogu da pomognu prilikom izbora novih aksioma teorije skupova? Da li je sam Gedel predložio neku novu aksiomu koja bi mogla da rasvetli prethodno pitanje? Nažalost, sva tvrđenja poznata u Gedelovo vreme za koja bismo mogli reći da su makar potencijalno mogla imati status aksioma pokazala su se nedovoljnim da odluče, tj. potvrde ili opovrgnu, CH. Ovde pre svega mislimo na *jake aksiome beskonačnosti* ili *aksiome velikih kardinala*. Grubo govoreći, ove aksiome, od kojih ćemo neke kasnije detaljnije proučiti, postuliraju postojanje nekih jako velikih skupova, nešto što ne može biti dokazano sredstvima teorije ZFC.

Iako nije predložio neku novu aksiomu teorije skupova koja bi trebalo da odgovori na problem CH i slična pitanja, Gedel je bio sasvim jasan u pogledu „kriterijuma racionalnosti" na koje bi trebalo da se oslanjamo u potrazi za novim aksiomama:

> [Č]ak i ako zanemarimo intrinsičnu nužnost neke nove aksiome, čak i u slučaju da ona ne poseduje nikakvu intrinsičnu nužnost, na pitanje o njenoj istinitosti je moguće odgovoriti i na drugi način, naime, induktivno, ispitujući njenu „uspešnost", njenu plodnost u pogledu posledica i posebno „proverljivih" posledica, tj. posledica dokazivih bez pomoći nove aksiome čiji se dokazi uz pomoć ove aksiome, međutim, mogu smatrati jednostavnijim i lakšim za otkrivanje, i čine mogućim da se više dokaza podvede pod jedan dokaz. [Gödel, 1947, p. 182]

O „uspešnosti" kao induktivnom kriterijumu za izbor novih aksioma, Gedel u nastavku kaže:

> Mogle bi postojati aksiome toliko bogate u pogledu svojih proverljivih posledica, koje u tolikoj meri rasvetljavaju čitavu jednu disciplinu i pružaju snažne metode za rešavanje datih problema (rešavajući ih čak, u onoj meri u kojoj je to moguće, na konstruktivistički način) da bi, potpuno nezavisno od pitanja njihove intrinsične nužnosti, one morale biti prihvaćene makar u istom onom smislu u kom je to i bilo koja dobro utvrđena fizička teorija. [Gödel, 1947, pp. 182-183]

Kao što smo već napomenuli, Gedel razlikuje dve vrste opravdanja novih aksioma teorije skupova, unutrašnje i spoljašnje. I jedna i druga vrsta opravdanja prisutne su u obe verzije njegovog rada o CH koji smo naveli gore i mogu se u izvesnom obliku naći i u njegovim ranijim radovima[1]. Unutrašnje opravdanje aksioma je ono koje, grubo govoreći, počiva na analizi pojma skupa, kojem kao što smo već videli Gedelov pojmovni realizam dodeljuje posebno mesto. Aksiome poseduju unutrašnje opravdanje ako beleže naše korektno razumevanje ovog pojma. Ovo ih, po Gedelovim rečima, čini „intrinsično nužnim". U sledećem odeljku ispitaćemo jedan od aspekata pojma skupa, njegov *iterativni* aspekt, i pokazaćemo kako je na osnovu *iterativnog pojma skupa* moguće pružiti (unutrašnje) opravdanje svih aksioma teorije ZFC, kao i nekih aksioma (malih) velikih kardinala.

Do kraja ovog odeljka ispitaćemo Gedelov pojam spoljašnjeg opravdanja. Nekoliko istorijskih napomena će nam pomoći da ga bolje razumemo. Cermelova aksiomatizacija teorije skupova [Zermelo, 1908] bila je odgovor na paradokse koji su se počeli javljati u ovoj disciplini s kraja XIX i početkom XX veka. Da li je Kantorova „naivna" teorija skupova dovela do toga ili se njihov izvor pre može tražiti u „logičkom" shvatanju skupa kao ekstenzije ma kojeg dobro definisanog svojstva, neće nas ovde zanimati. Za nas je važno to da je Cermelo pokazao da se teorija skupova može postaviti na sigurnije osnove. Po njegovim rečima

> Kantorova izvorna definicija „skupa" kao „kolekcije, koja u jednu celinu sakuplja izvesne dobro određene objekte našeg opažanja ili mišljenja" sasvim sigurno zaslužuje izvesna ograničenja [...] U ovim okolnostima nama ne preostaje ništa drugo nego da krenemo u suprotnom smeru i da, počevši od „teorije skupova" kakva je istorijski data, tragamo za principima koji su neophodni za uspostavljanje osnova ove matematičke discipline. Da bismo rešili ovaj problem moramo, s jedne strane, ograničiti ove principe u dovoljnoj meri da bi odstranili sve protivrečnosti i, s druge strane, razumeti ih dovoljno široko da bismo zadržali sve ono što je vredno u ovoj teoriji. [Zermelo, 2010, pp. 190-191]

[1]Vidi npr. [Gödel, 1944, p. 121].

Cermelo ovde govori o spoljašnjem opravdanju u Gedelovom smislu. Naime, o opravdanju novih aksioma teorije skupova na osnovu matematičkih posledica koje one sa sobom nose. Istina, u Cermelovom slučaju nema „starih" aksioma pa je njegov primer granični slučaj situacije koju je Gedel pokušao da analizira. Ovo međutim ne utiče na činjenicu da je kao osnovne razloge koji preporučuju prihvatanje njegove aksiomatizacije Cermelo istakao: (i) njihovu verovatnu konzistentnost, (ii) njihovu *neophodnost* za opis Kantorove teorije ordinala i kardinala. Po Cermelovom mišljenju dakle „pitanje na koje je moguće dati objektivan odgovor jeste da li je princip *nužan za nauku*" [Zermelo, 2010, p. 132].

Jedna od aksioma koje je Cermelo formulisao, aksioma izbora, imala je prilično kontroverznu istoriju. U najkraćem, ova aksioma tvrdi da ako nam je data proizvoljna familija nepraznih, disjunktnih skupova onda postoji skup koji sadrži po jedan element iz svakog skupa koji pripada ovoj familiji. Budući da u opštem slučaju ova aksioma tvrdi postojanje skupa koji ne moramo znati kako da odredimo, ona je naišla na oštre kritike matematičara koje bismo mogli nazvati konstruktivistima u širem smislu te reči. Cermelov odgovor je bio jasan: ova aksioma je nužna za normalan razvoj matematike o čemu svedoči i činjenica da je pre nego što ju je formulisao kao aksiomu, ona, ili neki njoj ekvivalentan princip, naveliko korišćena kao deo standardne prakse matematičara. Danas znamo da je Cermelov stav bio u potpunosti opravdan. Aksioma izbora ima veoma važne posledice ne samo u teoriji skupova, nego i u logici, algebri, topologiji i drugim matematičkim disciplinama. Takođe, danas znamo i kako bi izgledali neki aspekti ovih disciplina u odsustvu te aksiome. U najkraćem, ta aksioma je s punim pravom jednako prihvaćena u današnjoj matematici koliko i aksiome čija je istorija bila manje burna. Govoreći o svom dokazu *teoreme o dobrom uređenju* uz pomoć aksiome izbora, Cermelo kaže (naš kurziv):

> Zabrana fundamentalnih činjenica i problema u nauci samo zato što se one ne mogu tretirati pomoću izvesnih propisanih principa bilo bi kao kada bi se zabranilo dalje razvijanje teorije paralelnosti u geometriji jer je aksioma na kojoj ova teorija počiva nedokaziva. U stvari, *principi se*

> *moraju procenjivati sa stanovišta nauke a ne nauka sa stanovišta principa koji su jednom za svagda fiksirani.* [Zermelo, 2010, p. 135]

Čini nam se da bi se Gedel složio sa ovim Cermelovim stavom. Aksiomatizacija teorije skupova ne nastaje u vakuumu, pa prilikom razmatranja kandidata za nove aksiome te teorije moramo voditi računa o tome kakve će posledice njihovo usvajanje imati po samu teoriju. Da li njihovo usvajanje čini našu teoriju organizovanijom? Da li njihove posledice uopštavaju one dokazive u izvornoj teoriji na prirodan način? Da li novonastala teorija bolje sugeriše plodne pravce istraživanja? Da li dokazi koji se oslanjaju na nove aksiome pružaju više zanimljivih informacija o predmetu od onih koji to ne čine? Ukratko, da li nove aksiome uvećavaju plodnost, moć predviđanja i eksplanatornu moć naše teorije?

Ovakvo razumevanje matematičkih teorija, pre svega teorije skupova, je u skladu sa analogijom koju Gedel povlači između matematike i fizike. Opravdanje aksioma teorije skupova može biti i „induktivno", na osnovu njihovih posledica, baš kao što i fizičke teorije procenjujemo, između ostalog, na osnovu njihove uspešnosti u opisu fenomena našeg iskustva. Ova ideja prisutna je i u ranijim Gedelovim radovima. U radu o Raselovoj logici iz 1944. godine npr. Gedel kaže:

> Rasel je posebno istakao analogiju između matematike i prirodne nauke i u drugom smislu [...] On poredi aksiome logike i matematike sa zakonima prirode a logičko svedočanstvo sa čulnim opažajima, tako da aksiome ne moraju nužno biti očigledne nego pre njihovo opravdanje počiva (baš kao i u fizici) na činjenici da one čine mogućim da se ovi „čulni opažaji" mogu dedukovati. Ovo naravno ne isključuje da one takođe mogu posedovati neku vrstu intrinsične plauzibilnosti slično onoj u fizici. Čini mi se da je (ako se „svedočanstvo" razume na dovoljno strog način) ovakvo gledište u mnogome opravdano kasnijim razvojem [kasnijim u odnosu na Raselova gledišta s početka prošlog veka na koja se Gedel ovde osvrće, *prim. prev.*] i da se može očekivati da će to biti još više u budućnosti. [Gödel, 1944, p. 121]

Najbolji primer aksiome za koju se može ponuditi jako spoljašnje opravdanje upravo je primer aksiome izbora koji smo naveli gore. Primer je utoliko bolji jer je u slučaju ove aksiome postojalo neslaganje između, s jedne strane, njene intuitivnosti, očiglednosti ili njenog sleđenja iz pojma skupa, dakle unutrašnje opravdanosti i s druge strane pragmatičkih razloga zasnovanih na njenim poželjnim posledicama po matematiku, tj. spoljašnje opravdanosti. Činjenica da ova kolizija nije bila dovoljna da dovede do odbacivanja ove aksiome govori o tome koliko je spoljašnje opravdanje aksioma važan faktor koji utiče na njihov izbor.

Još jedan dobar primer kandidata za novu aksiomu koja je veoma plodna u pogledu svojih posledica jeste neka od aksioma iz familije takozvanih aksioma determinisanosti. O ovim aksiomama će više reči biti u poslednjem delu ovog rada kada budemo govorili o Vudinovom programu. Važno je međutim istaći da Gedelove opaske o značaju spoljašnjeg opravdanja novih aksioma prethode nešto više od petnaest godina formulaciji aksioma determinisanosti. Mogli bismo reći takođe da je u razvoju teorije skupova u poslednjih pola veka većina kandidata za nove aksiome bila opravdavana baš na ovaj način.

Činjenica je takođe da iako je veliki broj kandidata za nove aksiome formulisan, nijedna od njih nije do sada dostigla status aksiome *per se*. Da li je nedostatak unutrašnjeg opravdanja tih „aksioma” ono što je do ovoga dovelo? Da bismo na ovo pitanje mogli da odgovorimo moramo pre svega da objasnimo šta Gedel tačno podrazumeva pod unutrašnjim opravdanjem aksioma. Pored njegovih opaski da aksiome poseduju unutrašnje opravdanje ako beleže neka važna svojstva pojma skupa, Gedel je ponudio i mnogo razvijeniji argument koji ima za cilj da pokaže da su sve aksiome teorija ZF ili ZFC opravdane na osnovu *iterativnog* aspekta pojma skupa kao i da, tako shvaćen, taj pojam pruža unutrašnje opravdanje nekim od jakih aksioma beskonačnosti.

4.2. Iterativni pojam skupa

Istorijski izvori iterativnog pojma skupa nisu potpuno jasni. Hao Vang [Wang, 1974, pp. 181-223] tvrdi da se on može naći već kod Kantora. Sasvim je sigurno da su ga

Cermelo [Zermelo, 1930] i fon Nojman (John von Neumann) [von Neumann, 1925] jasno razumeli, kao i da se neki njegovi aspekti mogu naći već kod Mirimanova (Dmitry Mirimanoff) [Mirimanoff, 1917]. Njegovom otkriću je značajno doprinela i Raselova teorija tipova. Međutim, centralno mesto u ukazivanju na značaj ovog pojma kao i na njegovo približavanje širim krugovima *logičke* zajednice sigurno pripada Gedelu. Gedelov rezultat o konzistentnosti CH i AC sa aksiomama teorije ZF, iako u izvornom obliku formulisan u kontekstu razgranate pre nego proste hijerarhije, učinio je mnogo da matematičarima približi ideju o skupovima koji se nalaze u dobro zasnovanoj kumulativnoj hijerarhiji V. Široj *filozofskoj* javnosti ovu ideju je predstavio Bulos (George Boolos) [Boolos, 1971].

Ono što ovu ideju čini filozofski zanimljivom može se grubo podeliti na dva aspekta. Ako prihvatimo platonizam ova nam ideja pruža opis sveta skupova. S druge strane, bez obzira na to koje filozofsko stanovište da zauzmemo, ona može igrati ulogu u motivisanju naših skupovno-teorijskih aksioma. Iako su aksiome teorije ZFC delom nastale kao odgovor na probleme izazvane paradoksima u osnovama matematike, što smo već napomenuli, u ovom novom svetlu ih možemo razumeti kao nešto što pruža opis nivoa kumulativne hijerarhije V o kojoj smo govorili u uvodu ovog rada. Nešto više detalja o njoj sledi u nastavku.

Šta je dakle iterativni pojam skupa? Poslužimo se sledećim primerom. Počevši od proizvoljnog skupa, možemo iterirati operaciju partitivnog skupa. Ako nam je dat skup ω, primenom operacije partitivnog skupa dobijamo skup $\mathscr{P}(\omega)$, tj. skup svih podskupova od ω. Ako na $\mathscr{P}(\omega)$ primenimo operaciju partitivnog skupa, dobijamo skup $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega))$ itd. To nam daje hijerarhiju skupova:

$$\omega, \mathscr{P}(\omega), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega)), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\omega))), \ldots$$

U ovom konkretnom slučaju pošli smo od skupa ω mada bilo koji skup može zauzeti njegovo mesto. Pošavši od ω, izgleda kao da smo zaboravili da pođemo „od početka”. Pođimo dakle od $\emptyset$ i pogledajmo kako u ovom slučaju izgleda hijerarhija koju smo opisali gore. U ovom slučaju, potrudićemo se da skupove imenujemo na neki jasan način. Prvih nekoliko nivoa ove hijerarhije jesu

$$V_0 = \emptyset,\ V_1 = \mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},\ V_2 = \mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$$

Posle svih konačnih nivoa dolazi prvi granični nivo, ω , na kom imamo skup $V_\omega = \bigcup_{n<\omega} V_n$. U ovaj skup smo sakupili sve skupove koji se javljaju na nivoima pre njega. Sada smo u poziciji da ponovo primenimo operaciju partitivnog skupa što nam daje

$$V_{\omega+1} = \mathscr{P}(V_\omega),\ V_{\omega+2} = \mathscr{P}(V_{\omega+1}), \ldots$$

I tako do sledećeg graničnog nivoa $\omega + \omega$ i skupa $\bigcup_{n<\omega} V_{\omega+n}$. Korake ove procedure možemo naravno i dalje iterirati prelazeći na sve veće i veće skupove. Da nećemo ostati bez nivoa garantuje nam klasa svih ordinala Ord. Recept za izgradnju ove hijerarhije je jasan i već smo ga opisali u uvodu ovog rada. Naime:

- $V_0 = \emptyset$,
- $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$, za svaki ordinal α,
- $V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta$, za granični ordinal λ.

Kao rezultat iteracije prethodne procedure *ad infinitum* dobijamo

$$V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha.$$

Iako je, za svaki ordinal α, V_α skup, V je nasuprot tome prava klasa. Ova klasa naziva se još i *univerzumom skupova.* Tako ZF teorija skupova dokazuje da svaki skup pripada nekom V_α. Za svaki skup x, najmanji ordinal α takav da važi $x \in V_{\alpha+1}$ zovemo *rangom* skupa x, i označavamo ga sa $\rho(x)$. Jednostavno je videti da, za svaki ordinal α važi, kao i da za proizvoljne skupove x i y važi: $x \in y \Rightarrow \rho(x) < \rho(y)$.

Ovako izgrađen univerzum skupova V naziva se *kumulativnom* (ili *fon Nojmanovom*) *hijerarhijom,* kao što smo već napomenuli u uvodu ovog rada. Hijerarhija je kumulativna jer, za proizvoljne ordinale α i β takve da je $\alpha \leq \beta$, imamo da važi $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Ideja koja pokreće ovu konstrukciju, da sve skupove možemo raslojiti po nivoima kao stupnjevima njihove izgradnje počevši od praznog skupa, tj. da za svaki skup x postoji α takav da $x \in V_\alpha$, jeste iterativni pojam skupa.

Postepenu proceduru izgradnje kumulativne hijerarhije $V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$ koju smo predstavili gore lepo i sažeto je opisao Bernajs:

> Najslabija „platonistička" pretpostavka koju aritmetika uvodi jeste ona o postojanju totaliteta celih brojeva [...] Međutim, analiza nije zadovoljna ovom skromnom vrstom platonizma. Ona ga odražava u većoj meri u odnosu na sledeće pojmove: skup brojeva, niz brojeva kao i pojam funkcije. Ovi pojmovi se koriste u „kvazi-kombinatornom" smislu, tj. u smislu analogije između beskonačnog i konačnog [...] U Kantorovim teorijama platonističke koncepcije sežu mnogo dalje od onih teorije realnih brojeva. Ovo se čini tako što se iterira upotreba kvazi-kombinatornog pojma funkcije kojoj se pridružuje metoda sakupljanja. Ovo je dobro poznata metoda u teoriji skupova. [Bernays, 1935, pp. 259-260.]

Ono što će nas posebno zanimati jeste Gedelovo razumevanje iterativnog pojma skupa. Naime, Gedel je smatrao da nam ovaj pojam omogućava da pružimo opravdanje aksioma ZFC.

Prisetimo se, Gedel razlikuje dve vrste opravdanja skupovno-teorijskih aksioma, *unutrašnje* i *spoljašnje* opravdanje. Unutrašnje opravdanje je ono koje počiva na uvidu u prirodu matematičkih objekata ili razumevanju primitivnih pojmova koje želimo da opišemo našim aksiomama. Govoreći o aksiomama teorije skupova, Gedel kaže da nam se one „nameću kao istinite" [Gödel, 1964, p. 268]. U ovom pogledu, korisno je imati u vidu analogiju sa empirijskim znanjem. Naime, „aksiome nam se nameću kao objašnjenje onoga što nam je intuitivno dato na isti onaj način na koji se pretpostavka o postojanju fizičkih objekata srednje veličine nameće kao objašnjenje naših čulnih iskustava" [Maddy, 1990, p. 31] Tako, govoreći o Raselovoj „nema klasa" (*no classes*) interpretaciji sistema *Principia mathematica*, koja je za cilj imala formulaciju teorija tipova koja se ne poziva eksplicitno na skupove, Gedel kaže:

> Čitava shema teorije nema-klasa od ogromnog je značaja kao jedan od nekoliko primera, sprovedenih do u detalje, tendencije da se eliminišu pretpostavke o postojanju objekata van „podataka" i da se zamene konstrukcijama na osnovu onoga što jeste dato. Rezultat je, u ovom slučaju, bio u suštini negativan; tj. klase i pojmovi uvedeni na ovaj način nemaju sva ona svojstva koja su neophodna za njihovu upotrebu u matematici, osim ako ne uvedemo posebne aksiome o podacima (npr. aksiomu reducibilnosti), koja u suštini znači da u podacima postoji ona vrsta objekata koju treba konstruisati, ili pak ako ne postuliramo fikciju da možemo formirati iskaze beskonačne (i čak neprebrojive) dužine, tj. da možemo raditi sa istinosnim funkcijama sa beskonačno mnogo argumenata, nezavisno od toga da li ih možemo konstruisati ili ne. Ali šta je drugo takva beskonačna istinosna funkcija do posebna vrste beskonačne ekstenzije (ili strukture), komplikovanija i od klase, sa naknadno dodeljenim hipotetičkim značenjem koje može razumeti samo beskonačan duh? Sve ovo jeste samo potvrda gledišta koje smo ranije zastupali da su logika i matematika (baš kao i fizika) izgrađene na aksiomama sa stvarnim sadržajem koji ne može biti eliminisan. [Gödel, 1944, p. 132]

Drugim rečima, Gedel smatra da je pretpostavka o postojanju matematičkih objekata nužna za ispravno funkcionisanje naših matematičkih teorija. Ma koji pokušaj sličan Raselovom koji za cilj ima eliminaciju pozivanja na objekte kakvi su skupovi ili klase zapada u nepremostive teškoće. Naše uverenje da matematički objekti postoje nije ništa manje plauzibilno od naše pretpostavke da postoje fizički objekti. Nešto ranije u istom radu, Gedel jasnije formuliše prethodno rečeno:

> Klase i pojmovi se, međutim, mogu razumeti kao stvarni objekti, naime klase kao „množine stvari" ili kao strukture koje se sastoje od množine stvari i pojmovi kao svojstva i relacije stvari koji postoje nezavisno od naših definicija i konstrukcija.

> Čini mi se da pretpostavka o postojanju takvih objekata legitimna koliko i ona o postojanju fizičkih tela i ima podjednako mnogo razloga da verujemo u njihovo postojanje. Oni su u istom smislu nužni da bi se dobio zadovoljavajući sistem matematike koliko su i fizička tela nužna za zadovoljavajuću teoriju čulnih opažaja [...] [Gödel, 1944, p. 128]

Međutim, osim uverenja da je to u principu moguće učiniti Gedel nam i dalje ne omogućava da vidimo na koji način su aksiome teorije skupova unutrašnje opravdane, tj. opravdane na osnovu uvida ili razumevanja koje imamo o samom pojmu skupa. Zato ćemo u nastavku ispitati mesta u Gedelovim radovima na kojima govori o iterativnoj koncepciji skupa i na koji način nam ona može biti od pomoći prilikom opravdanja trenutno prihvaćenih skupovno-teorijskih aksioma kao i nekih aksioma koje ih prevazilaze.

4.3. Gedel o iteraciji

Ispitaćemo prvo tekst Gedelovog neobjavljenog predavanja na skupu Američkog matematičkog društva održanog krajem 1933. godine [2]. Njegova tema bila je i opravdanje skupovno-teorijskih aksioma. Po njegovim rečima:

> Problem zasnivanja matematike [...] može se posmatrati tako da se grana u dva dela. Na prvom mestu, metode dokaza moraju se redukovati na minimalan broj aksioma i primitivnih pravila izvođenja, koja se moraju formulisati što je preciznije moguće. Pored toga, mora se tražiti neka vrsta opravdanja ovih aksioma [...] [Gödel, 1933, p. 45]

Pošto je istakao Fregeov program kao prvi ozbiljan, doduše neuspešan, odgovor na prvi od ova dva problema, Gedel kaže da je samo jedno zadovoljavajuće rešenje koje u isto vreme izbegava skupovno-teorijske paradokse i vodi adekvatnom zasnivanju matematike, a to je (prosta) teorija tipova. Međutim, i ova teorija, po Gedelovom mišljenju, pati od izvesnih nedostataka. Prvo, teorija tipova dopušta samo takozvane čiste tipove

[2] Naša interpretacija ovog Gedelovog rada u mnogome se zasniva na Tejtovoj (William Tait) [Tait, 2005, pp. 276-284] i Kelnerovoj [Koellner, 2003] analizi, na koje upućujemo čitaoca zainteresovanog za više detalja nego što ćemo mi pružiti u nastavku.

$0, 1, 2, \ldots$ gde objekti tipa $n+1$ mogu sadržati kao elemente samo objekte tipa n. Na osnovu prethodnog, tvrđenje $a \in b$ se smatra besmislenim ako objekti a i b nisu odgovarajućeg tipa. Osim toga, prosta teorija tipova dopušta samo konačne tipove.

Gedel predlaže da se pomenutih ograničenja oslobodimo pa da mesto Raselovih čistih tipova posmatramo *kumulativne* tipove kod kojih tip $n+1$ može sadržati sve tipove manje ili jednake od n. Tako ćemo tvrđenje $a \in b$ smatrati lažnim pre nego besmislenim ako je tip od b manji ili jednak tipu od a. Pored toga, nema razloga da se ograničimo samo na konačne tipove, nego iteraciju možemo nastaviti kroz beskonačne ordinale. Po Gedelovim rečima:

> Otklanjanje prva dva ograničenja nije u pravom smislu reči suštinsko; lako se može videti da nikakva kontradikcija ne može nastati kao posledica toga (kao i da je svako tvrđenje dokazivo u novom sistemu ekvivalentno nekom tvrđenju u *Principia mathematica*). Stvar je u mnogo kom pogledu drugačija za treće ograničenje, koje ću sada objasniti. U Raselovoj teoriji, proces prelaska na sledeći viši tip - npr. sa klasa individua na klase klasa individua - može se ponoviti samo konačno mnogo puta [...]
>
> Nema razloga da zaustavimo proces izgradnje tipova na ovom mestu [...] Možemo na primer formirati klasu svih klasa konačnog tipa koja naravno nije konačnog tipa, ali za nju možemo reći da je tipa ω [...] Jasno je kako se ova procedura može nastaviti do u nedogled. Možemo uzeti klasu svih klasa konačnog tipa, koja će nam igrati ulogu klase individua, tj. uzeti je kao osnovu za novu hijerarhiju tipova i tako formirati klase tipa $\omega+1$ i $\omega+2$ i tako dalje za svaki beskonačni ordinal. [Gödel, 1933, pp. 46-47]

Ono što Gedel kaže u priličnoj meri odgovara našem ranijem opisu izgradnje kumulativne hijerarhije skupova. Naime, počevši od praznog skupa $\emptyset$ možemo iterirati operaciju partitivnog skupa, koja nam daje sve veće i veće skupove, i ovo odgovara prelasku sa nižih na više tipove o kojima Gedel govori.[3] Takođe, ako uniramo sve skupove dobijene konačnim brojem iteracija operacije partitivnog skupa, kao rezultat ćemo dobiti skup koji ne može biti dobijen konačnim iteracijama operacije partitivnog skupa na praznom skupu. Ovaj skup smo gore nazvali V_ω i to je prvi granični nivo ove hijerarhije.

Međutim, takvoj proceduri mogu da se upute određeni prigovori. Naime:

> Da bismo formulisali aksiome formalnog sistema, uključujući sve tipove do nekog ordinala α, moramo pretpostaviti sam pojam ovog ordinala α, jer će se on pojavljivati u aksiomama. S druge strane, zadovoljavajuća definicija beskonačnih ordinala može se postići samo uz pomoć sistema čije aksiome treba da formulišemo. [Gödel, 1933, p. 47]

Gedel smatra da je poslednji prigovor jedan od razloga zbog kojih Rasel nije bio spreman da uvede beskonačne tipove u svoju teoriju. Još jedan mogući razlog, malo više tehničke prirode, možda je bio i taj što je Rasel želeo da njegovi tipovi budu disjunktni, što ne bi bio slučaj ako bi u graničnom tipu imali uniju svih prethodnih tipova. Međutim, ovo bi se onda moglo izbeći tako što bi granični tip definisali ne kao uniju prethodnih tipova nego kao tip funkcija definisanih na toj uniji.[4]

Da li i kako može da se odgovori na prethodni prigovor? Prisetimo se, cilj nam je da opišemo posledice iterativnog pojma skupa i da pokažemo na koji način nam on može poslužiti u opravdanju skupovno-teorijskih aksioma. Ako se u ovom opisu oslanjamo na ordinale onako kako su oni definisani u ZF izgleda da je naše rasuđivanje cirkularno.

Gedel ne smatra da ovaj prigovor ima neku stvarnu snagu. Naime, prvih nekoliko nivoa naše hijerarhije biće dovoljni da nam omoguće da se popnemo jako visoko:

> Prva dva ili tri tipa su sasvim dovoljna za definisanje veoma velikih ordinala. Možemo početi tako što ćemo formulisati aksiome za ovih prvih

[3] Napomenimo da Gedel svoju iteraciju započinje ne praznim skupom nego izvesnim prebrojivim skupom individua ili *urelemenata*. Međutim, s obzirom na poslednju rečenicu iz prethodnog citata ova razlika nije od suštinskog značaja.

[4] Strogo govoreći, Raselova hijerarhija tipova *nije* hijerarhija skupova nego domena *iskaznih funkcija*, tj. predikata ili karakterističnih funkcija skupova.

> nekoliko tipova, za šta nam nije potreban nikakav ordinal, posle čega možemo definisati beskonačni ordinal α pomoću ovih prvih nekoliko tipova i pomoću njega formulisati aksiome sistema koji uključuje sve klase tipa manjeg od α (zovimo ga S_α). Na sistem S_α možemo primeniti istu proceduru; tj. uzmimo neki ordinal β veći od α koji se može definisati pomoću sistema S_α, i pomoću njega formulišimo aksiome sistema S_β koji uključuje sve tipove manje od β. [Gödel, 1933, p. 47]

Kada govori o aksiomatizaciji „prvih nekoliko tipova" ove hijerarhije izgleda da Gedel misli, mada to ne kaže eksplicitno, na logiku drugog, trećeg reda itd. Dakle, ideja je da u sistemu $S_{\omega+1}$ definišemo neki veliki ordinal α pomoću $V_{\omega+1}$. Ako, kao što to Gedel čini, usvojimo aksiomu izbora (drugog reda, koja kaže da se domen može dobro urediti), onda na nivou $V_{\omega+1}$ možemo npr. definisati dobro uređenje dužine $\beth_1$ (v. DEFINICIJA 20).Ovaj kardinal onda može da nam dalje posluži za indeksiranje većih nivoa kumulativne hijerarhije, pa na nivou $V_{\beth_1}$ možemo definisati dobro uređenje dužine $\beth_{\beth_1}$ i tako dalje. Ovu operaciju možemo iterirati ω puta što nam daje fiksnu tačku funkcije $\beth$ kao rezultat. Ova fiksna tačka je limes niza:

$$\beth_1, \beth_{\beth_1}, \beth_{\beth_{\beth_1}}, \ldots$$

Ako ovaj kardinal označimo sa κ, onda imamo da važi $\kappa = \beth_\kappa$. Sada ovaj kardinal κ može, kao i gore, da nam posluži da njime indeksiramo veće nivoe kumulativne hijerarhije. U sledećem koraku bismo se poslužili skupom V_κ za definisanje još većih ordinala itd. (v. [Koellner, 2003, pp. 21-28])

Ovaj opis Gedelove procedure ne odgovara na neka važna pitanja. Naime, koje su tačno operacije uključene u iteraciju koju Gedel opisuje, i koliko visoko u klasi ordinala Ord nas ova iteracija može odvesti?

> Mesto koje aksiomatski sistem teorije agregata [*theory of aggregates*] zauzima u ovoj hijerarhiji može se opisati izvesnim svojstvom zatvorenja na sledeći način: Postoje dva načina putem kojih generišemo tipove.

Prvi se sastoji u prelasku sa jednog tipa na sledeći, a drugi u sumiranju beskonačnog niza prethodno datih tipova, što smo učinili, na primer, kada smo formirali tip ω. Aksiome teorije agregata u stvari tvrde sledeće, da nas ove dve procedure ne vode izvan sistema ako drugu proceduru primenjujemo samo na one nizove tipova koji se mogu definisati unutar samog sistema. (Drugim rečima, ako je M skup ordinala koji se može definisati unutar sistema i ako svakom ordinalu iz M dodelimo tip koji je takođe u sistemu, onda je i tip koji dobijamo kao rezultat sumiranja ovih tipova takođe u sistemu.) Međutim, bilo bi pogrešno pretpostaviti da smo sa ovim aksiomatskim sistemom za teoriju skupova došli do kraja hijerarhije tipova. Sve klase koje se javljaju u ovom sistemu mogu se posmatrati kao novi domen individua i iskoristiti kao početni korak za definisanje još viših tipova. Ova procedura nema kraja [...] [Gödel, 1933, p. 47]

Dakle, Gedel izdvaja dve operacije koje nam omogućavaju prelazak na sve veće i veće ordinale. Primetimo da prva operacija uključuje bar dve podoperacije: naime, operaciju partitivnog skupa koja nas vodi od $V_{\omega+1}$ do $V_{\omega+2}$, na primer, kao i operaciju $\alpha \mapsto \beth_\alpha$ koju smo opisali gore. Što se druge operacije tiče, možemo je opisati na sledeći način (pri čemu ćemo posmatrati M kao ordinal pre nego kao proizvoljan skup ordinala): ako svakom ordinalu $\alpha < M$ dodelimo neki ordinal $f(\alpha)$ koji pripada našem sistemu, onda će i $\bigcup_{\alpha<M} f(\alpha)$ takođe pripadati našem sistemu.

Koliko velike ordinale možemo dobiti primenom ovih dvaju operacija? Pošto nam je ordinal ω dostupan takoreći na početku naše iteracije, možemo se pitati koliko je velik najmanji ordinal $\kappa > \omega$ koji je zatvoren za prethodne dve operacije, tj. takav da važi sledeće (v. [Tait, 2005, p. 280]):

(1) $\alpha < \kappa \Rightarrow \beth_\alpha < \kappa$;

(2) $\left(\alpha < \kappa \wedge f : \alpha \to \kappa\right) \Rightarrow \bigcup_{\beta<\alpha} f\left(\beta\right) < \kappa$.

Na osnovu uslova gore, lako je videti da je κ regularan (2) i fiksna tačka $\beth$ funkcije(1), tj. jako nedostižan. Za takav ordinal κ važi da je V_κ prirodni model teorije ZF (v. odeljak [1.6]).

Ovoj temi Gedel se vraća 1951. godine u svom *Gibs predavanju.* Ono što na ovom mestu kaže dodatno rasvetljava analizu koju smo ponudili gore:

> [...] ako želimo da izbegnemo paradokse teorije skupova, a da se pritom ne oslanjamo na nešto potpuno strano stvarnom matematičkom rasuđivanju, pojam skupa se mora aksiomatizovati korak po korak. Ako na primer počnemo sa celim [prirodnim *prim. prev.*] brojevima, tj. konačnim skupovima posebne vrste, imaćemo prvo skupove celih brojeva kao i aksiome koje se na njih odnose (aksiome prvog nivoa), zatim skupove skupova celih brojeva sa njihovim aksiomama (aksiome drugog nivoa) itd, za proizvoljnu konačnu iteraciju operacije „skup od". Posle toga, imamo skup svih skupova konačnog reda. Međutim, sada možemo postupati sa ovim skupom baš kao što smo to činili sa celim brojevima, tj. posmatrati njegove podskupove (tj. skupove reda ω) i formulisati aksiome o njihovom postojanju. Jasno je da se ova procedura može iterirati dalje od ω, u stvari do proizvoljno velikog transfinitnog ordinala. Tako je možda neophodno kao sledeću aksiomu navesti da je iteracija moguća za svaki ordinal, tj. za svaki tip uređenja koji pripada nekom dobro uređenom skupu. Da li smo sada stigli do kraja? Ni govora. Sada imamo operaciju uz pomoć koje formiramo skupove počevši od nekog početnog skupa A i nekog dobro uređenog skupa B, primenjujući operaciju „skup od" na A onoliko puta koliko to skup B nalaže. Ako uzmemo da je B jednak nekom dobrom uređenju od A sada možemo iterirati ovu novu operaciju, i to transfinitan broj puta. Ovo će nam opet dati jednu novu operaciju koju možemo tretirati na isti način i tako dalje. Sledeći korak će dakle biti da zahtevamo da svaka operacija koja od skupova pravi skupove može biti iterirana do proizvoljnog ordinala (tj. tipa uređenja

dobro uređenog skupa). Da li smo sada stigli do kraja? Ne, jer možemo zahtevati ne samo da se procedura koju smo upravo opisali može sprovesti sa proizvoljnom operacijom nego i da mora postojati skup koji je za ovu operaciju zatvoren, tj. takav da poseduje svojstvo da ako je ova procedura (sa proizvoljnom operacijom) primenjena na njegove elemente, kao rezultat daje takođe elemente ovog skupa. [Gödel, 1951, pp. 306-307]

Poslednja Gedelova rečenica je posebno zanimljiva. U njoj se on oslanja na takozvani princip refleksije: *ako univerzum skupova poseduje izvesno dobro definisano svojstvo* P*, onda mora postojati skup koji takođe poseduje ovo svojstvo.*[5] Ako ovo primenimo na uslove (1) i (2) gore, Gedelova iteracija daje nedostižan ordinal kao rezultat. Međutim, nema razloga da ovde stanemo, pa mesto (1) možemo zahtevati postojanje ordinala sa sledećim svojstvom:

(3) $\alpha < \kappa \Rightarrow F(\alpha) < \kappa$

gde je $F(\alpha)$ najmanji nedostižan ordinal $> \alpha$. Ovakvi ordinali neće biti samo nedostižni nego i granice nedostižnih kardinala. Jače „operacije skoka” će nam dati sve veće i veće ordinale. Na primer, ako je klasa nedostižnih kardinala stacionarna u Ord i ako na ovo primenimo pomenuti princip refleksije, dobićemo ordinal α takav da je skup $\{\beta \mid \beta < \alpha \text{ I } \beta \text{JE NEDOSTIŽAN}\}$ stacionaran u α; drugim rečima, α je Maloov kardinal. Argumente za postojanje velikih kardinala koji počivaju na principu refleksije ćemo detaljno ispitati u narednom poglavlju ovog rada. Ostaje nam još da pokažemo kako na osnovu iterativnog pojma skupa može da se opravda svaka od pojedinačnih aksioma teorije ZF.

Aksioma ekstenzionalnosti, koja kaže da su skupovi jednaki ako i samo ako imaju iste elemente, služi nam da skupove, kao ekstenzionalne objekte, razlikujemo od svojstava koja su po svojoj prirodi intenzionalna. Ako se jedna te ista kolekcija javlja na različitim nivoima naše hijerarhije trebalo bi da je smatramo istim skupom. Za skup je jedino bitno od kojih je elemenata sačinjen.

[5] O principima refleksije će više reči biti u narednom poglavlju.

Aksioma regularnosti (ili aksioma zasnivanja) kaže da ako je skup x neprazan, onda on ima element y takav da su x i y disjunktni. Da bismo videli zašto je ova aksioma istinita na osnovu iterativnog pojma skupa, pretpostavimo da je neprazan skup x formiran na nivou α. Onda su svi elementi skupa formirani na nivoima manjim od α. Posmatrajmo nivo $\beta < \alpha$ koji je minimalan u sledećem smislu: neki element skupa x je formiran u β, ali nijedan element skupa x nije formiran na nivoima manjim od β. Za svaki element y skupa x koji je formiran u β važiće da je $y \cap x = \emptyset$, što sledi iz minimalnosti nivoa β na kojem je y formiran. U izvesnom smislu, aksioma zasnivanja je ugrađena u proceduru naše iteracije operacije „skup od".

Aksioma separacije, koju je Cermelo formulisao kao ograničenje neograničene (i inkonzistentne) aksiome komprehenzije, kaže da svaka definabilna kolekcija elemenata nekog unapred datog skupa x čini skup. Sa stanovišta iterativnog pojma skupa ovu je aksiomu lako opravdati. Naime, ako je skup x formiran na nivou α onda su svi njegovi elementi formirani na nivoima manjim od α. Dakle, na nivou α možemo od proizvoljne definabilne kolekcije elemenata od x napraviti skup.

Aksioma unije kaže da je unija elemenata proizvoljnog skupa x takođe skup. Kao i gore, pretpostavimo da je skup x formiran na nivou α. Svi njegovi elementi formirani su na nivoima manjim od α što samim tim važi i za sve elemente njegovih elemenata. Dakle, skup svih elemenata od elemenata nekog datog skupa x koji je formiran na nivou α može i sam biti formiran na nivou α.

Aksioma partitivnog skupa kaže da za svaki dati skup x postoji skup svih njegovih podskupova $\mathscr{P}(x)$. Pretpostavimo da je skup x formiran na nivou α. Onda je i svaki podskup od x takođe formiran zaključno sa α pa je skup $\mathscr{P}(x)$ formiran u $\alpha + 1$.

Aksioma beskonačnosti kaže da postoji beskonačan skup x, tj. skup koji sadrži $\emptyset$ kao element i koji je zatvoren za operaciju $y \mapsto y \cup \{y\}$. Primetimo da su neki od elemenata skupa x sledeći

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

Neka je y_0 prazan skup i neka je $y_{n+1} = y_n \cup \{y_n\}$. Pošto je svaki od ovih skupova formiran na nekom nivou $m < \omega$, i to tako da ako je y_n formiran na nivou n, onda je y_{n+1} formiran na sledećem nivou, $n+1$, na nivou ω je formiran skup $x = \{y_n\}_{n<\omega}$.

Aksioma zamene kaže da ako je $\psi(x, y)$ formula za koju važi da za svaki skup x postoji najviše jedan skup y takav da važi $\psi(x, y)$, onda za svaki skup z postoji skup w koji je slika skupa z u odnosu na funkciju koja odgovara formuli $\psi(x, y)$. Da bismo videli da li je i na koji način ova aksioma opravdana pomoću iterativnog pojma skupa, posmatrajmo skupove x koji su elementi od z i neka je $r(x)$ prvi nivo, ako takvog ima, na kom se javlja neko y takvo da važi $\psi(x, y)$; inače neka je $r(x) = 1$. Ova aksioma kaže da posle svih nivoa $r(x)$ za x iz z postoji nivo na kojem je skup $w = \{y \mid \psi(x, y) \text{ i } x \in z\}$ formiran.

Treba još nešto reći u vezi sa tim. Izgleda da su, sa stanovišta iterativnog pojma skupa, gotovo sve gorenavedene aksiome opravdane argumentima koje smo upravo formulisali. Više detalja čitalac može naći u Šenfildovom (Joseph Shoenfield) tekstu o aksiomama teorije skupova u [Barwise, 1977] kao i Bulosovom radu [Boolos, 1971]. Jedna veoma važna razlika između Gedelovog argumenta i onog koji nude Šenfild i Bulos jeste ta što Gedel ne pretpostavlja da je klasa ordinala Ord unapred data, tako da nam može služiti kao spoljašnja mera za indeksiranje naših nivoa primene operacije „skup od”.[6] Šenfild i Bulos pretpostavljaju upravo to, doduše govoreći o „teoriji nivoa”, pa nam se njihov argument čini cirkularnim. Kao ilustraciju, pogledajmo šta Šenfild kaže o „principu kofinalnosti”, koji je osnovni princip njegove teorije nivoa:

[6]Ovo se pre svega odnosi na Gedelovu poziciju s kraja 1933. godine. Važno je istaći da će uskoro zatim Gedel pretpostaviti upravo to - naime da su ordinali unapred dati, što predstavlja izvesno pojačanje njegove platonističke pozicije. Ova pretpostavka će onda igrati veoma važnu ulogu u Gedelovom dokazu konzistentnosti za AC i CH objavljenom 1938. godine. Hao Vang smatra da je Gedel ovu pretpostavku usvojio ne kasnije od 1935. godine, kada je stekao i jasnu ideju dokaza konzistentnosti AC sa aksiomama ZF:

> Od 1930. godine on [Gedel, *prim. prev.*] je počeo da razmišlja o problemu kontinuuma, koristeći se donekle Hilbertovim predloženim okvirom rešenja ovog problema. Ideja da se u ovom pogledu posluži razgranatom hijerarhijom javila mu se dosta rano, posle čega se bavio konstruisanjem dovoljnog broja ordinala. Konačno, proboj koji je nastao usled pretpostavke da su svi klasični ordinali dati, učinio je stvari lakšim. [Wang, 1987, p. 97]

Gedelovo „konstruisanje dovoljnog broja ordinala” se očigledno odnosi na period s kraja 1933, budući da je to jedna od osnovnih tema predavanja kojem smo posvetili pažnju u ovom odeljku.

> Pretpostavimo da nam je dat skup A i da smo pripisali nivo S_a svakom elementu a od A. Budući da možemo vizualizovati kolekciju A kao objekt (naime, skup A), takođe možemo vizualizovati i kolekciju nivoa S_a kao objekt pa time možemo vizualizovati i situaciju u kojoj su svi ovi nivoi završeni. [Shoenfield, 1967, p. 239]

Ovim principom se Šenfild kasnije služi da bi pružio opravdanje aksiome zamene. Međutim, Šenfildov princip kofinalnosti i nije ništa drugo nego aksioma zamene formulisana pomoću nedefinisanog pojma nivoa pre nego na standardan način kao što smo mi to učinili gore (ovo primećuje i Kelner, [Koellner, 2003]).

Gedel je u tom pogledu mnogo oprezniji od Šenfilda i Bulosa, utoliko što nam njegov argument omogućava da bez pomoći nekog spoljašnjeg etalona izgradimo univerzum skupova dovoljno bogat da nam posluži za opravdanje svih aksioma od ZFC. Naime, opravdanje pojedinačnih aksioma koje smo ponudili gore za Gedela dolazi *ex post facto*. Pošto smo konstruisali dovoljno velike ordinale možemo se njima poslužiti kao indeksima nivoa naše izgradnje skupova i pokazati da ih ima dovoljno da bi u univerzumu skupova sve aksiome bile zadovoljene. Međutim, ovo je neposredna posledica Gedelovog argumenta za postojanje nedostižnih kardinala na osnovu iterativnog pojma skupa.

Još jednu lepu ilustraciju činjenice da aksioma zamene važi u univerzumu skupova konstruisanom Gedelovom iteracijom pruža i sledeća njegova napomena:

> Iz same ideje iterativne koncepcije skupa sledi da ako je dobijen neki ordinal α, operacija partitivnog skupa iterirana α puta dovodi nas do skupa $\mathscr{P}^{\alpha}(\emptyset)$. Ali iz istog ovog razloga izgleda da sledi da ako mesto $\mathscr{P}$ uzmemo neki veći skok u hijerarhiji tipova, na primer prelazak Q sa x na $\mathscr{P}^{|x|}(x)$ (gde je $|x|$ najmanji ordinal među dobrim uređenjima od x), onda je i $Q^{\alpha}(\emptyset)$ takođe skup. Pretpostaviti ovo za svaku zamislivu operaciju skoka [...] ekvivalentno je aksiomi zamene. [Wang, 1996, p. 259]

Naravno aksioma zamene, baš kao i ostale aksiome teorije ZFC, mogu biti opravdane i na drugačiji način. Sa strane unutrašnjeg opravdanja one bi mogle biti posledica razumevanja nekog drugog aspekta pojma skupa osim iterativnog, dok bi sa strane spoljašnjeg opravdanja one mogle biti opravdane na osnovu poželjnih posledica koje imaju, u teoriji skupova kao i u ostatku matematike.

Primetimo da smo gore govorili o opravdanju aksioma teorije ZF preko iterativnog pojma skupa. To naravno ne znači da se aksioma izbora ne može opravdati na ovaj način. Prisetimo se da aksioma izbora kaže da ako nam je dat skup x čiji su elementi neprazni, disjunktni skupovi, onda postoji skup y takav da sadrži tačno po jedan element svakog skupa iz x i koji nema drugih elemenata. Međutim, ako je skup x formiran na nivou α onda su svi njegovi elementi kao i elementi elemenata od x formirani na nivoima manjim od α, pa će zaključno sa nivoom $\alpha+1$ biti formirani svi podskupovi skupa $\bigcup x$. Među ovima će, u opštem slučaju, biti mnogo takvih y koji imaju po jedan zajednički element sa svakim skupom iz x.

Ovakav način opravdavanja *AC* nije međutim dostupan Gedelu, koji ovu aksiomu eksplicitno pretpostavlja u svom postupku iteracije. Ovo bi mogao biti razlog njegove opaske da „postoje tri teškoće [u pogledu opravdanja aksioma i pravila zaključivanja, *prim. prev.*] [...] od kojih je treća povezana sa aksiomom izbora." [Gödel, 1933, pp. 49-50] Međutim, Gedelu je sigurno dostupno unutrašnje opravdanje aksiome izbora, koje ne počiva neposredno na analizi iterativnog pojma skupa[7], kao i spoljašnje opravdanje

[7]Jedan od načina na koji je moguće aksiomu izbora opravdati jeste i činjenica da ona sledi iz fon Nojmanove aksiome *ograničenja veličine* (*limitation of size*). Ova aksioma koju je fon Nojman formulisao u [von Neumann, 1925, Axiome IV.2] važan je deo njegove aksiomatizacije teorije klasa koja će kasnije da preraste u NBG. Ona kaže da je K prava klasa akko postoji surjekcija $F: K \to V$. Posledice ove aksiome su sheme separacije i zamene, aksioma unije iz ZF, kao i takozvana ***aksioma globalnog izbora*** iz NBG koja kaže da se univerzum V može dobro urediti. Aksioma globalnog izbora je snažnije tvrđenje od uobičajene aksiome izbore iz ZFC, i ova druga aksioma je posledica prve. Međutim, i teorija NBG sa globalnom aksiomom izbora je konzervativno proširenje teorije ZFC [Felgner, 1971]. Još neke napomene o konzervativnosti sličnih teorija smo izneli u odeljku [3.2.3].
Što se tiče plauzibilnosti fon Nojmanove aksiome ograničenja veličine, Gedel u pismu Ulamu (Stanislaw Ulam) od 8.11.1957. kaže:

> [...] verujem da je njegov nužan i dovoljan uslov koji neko svojstvo mora zadovoljavati da bi definisalo skup (oličen u aksiomi ograničenja veličine *prim. prev.*) od velike važnosti jer rasvetljava vezu između aksiomatske teorije skupova i paradoksa. Da ovaj uslov zaista pogađa u suštinu stvari može se videti iz činjenice da on povlači aksiomu izbora koja je pre toga bila prilično udaljena od drugih egzistencijalnih principa. [Gödel, 2003b, p. 295]

kojim se na kraju krajeva služio i sam Cermelo kada je aksiomu formulisao. U načelu, aksioma izbora je prirodno tvrđenje, pogotovo ako se zauzme realističko stanovište slično Gedelovom. Ako nam je data neka familija skupova, definabilnost funkcije izbora za ovu familiju se ponekad može činiti problematičnom. Ovo međutim nikako nema za posledicu to da pomenuta funkcija ne postoji. Funkcija izbora naprosto ne mora biti definabilna. [8]

Kao što vidimo na upravo pomenutom primeru aksiome izbora, jedna vrsta opravdanja ne isključuje drugu. Aksiome mogu biti u isto vreme opravdane obema vrstama opravdanja. Kakav je tačno odnos te dve vrste opravdanja pokušaćemo da donekle ispitamo u sledećem odeljku.

Povod za ovu Gedelovu napomenu o fon Nojmanu, koji je preminuo te iste 1957. godine, bio je članak o njegovom radu koji je Ulam u to vreme pisao [Ulam, 1958]. Pre nego što je rad sledeće godine objavljen Gedel je imao priliku da ga pročita i da uputi Ulamu nekoliko sugestija kako bi mogao da ga učini boljim. Zanimljivo je videti kako Ulam formuliše Gedelovo stanovište u pogledu fon Nojmanove aksiome koje smo naveli gore:

> Velika važnost koju ova aksioma poseduje leži u činjenici da je to jedan princip maksimuma, donekle sličan Hilbertovoj aksiomi potpunosti u geometriji. Jer ona, grubo govoreći, kaže da svaki skup koji ne povlači protivrečnost, na određeni dobro definisan način, postoji. Da se radi o jednom principu maksimuma može da objasni činjenicu da ova aksioma povlači aksiomu izbora. [Ulam, 1958, p.13 n.5]

Ova Gedelova primedba je naravno jako slična onoj koju je izneo u pismu Ulamu. Nova je karakterizacija fon Nojmanovog aksioma kao principa maksimalnosti. U nastavku rada ćemo da vidimo da je Gedel takvim principima pridavao veliku važnost i u drugim kontekstima.

[8] Ovakav odgovor onima koji su posmatrali *AC* sa izvesnom sumnjom formulisan je dosta rano. Tako je već 1905. Adamar (Jacques Hadamard) primetio da:

> Cermelo ne pruža metodu kojom bi se efektivno sprovela operacija o kojoj govori, i izgleda sumnjivim da će iko moći da pruži takvu metodu u budućnosti. Nema sumnje da bi bilo zanimljivije rešiti problem na ovaj način. Ali pitanje koje se na ovaj način postavlja (efektivno određenje željene korespondencije) je ipak potpuno različito od onoga koje mi razmatramo (da li takva korespondecija postoji?) [...] Da li možemo dokazati postojanje matematičkog objekta a da ga ne definišemo? Ja kažem [...] da, [...] postojanje [...] je činjenica baš kao i svaka druga. [Moore, 1982, pp. 312, 317]

Adamarove primedbe koje smo upravo naveli izneo je u pismu Borelu (Émile Borel). Ovo pismo je deo zanimljive prepiske koja se odvijala tokom 1905. godine između Adamara s jedne i Bera (René-Louis Baire), Lebega (Henri Lebesgue) i Borela s druge strane. Tema ove prepiske bila je upravo Cermelova aksioma kao i širi problem postojanja u matematici. Ber, Borel i Lebeg, koje bismo mogli nazvati konstruktivistima u širem smislu te reči, nisu jedini veliki matematičari onoga vremena koji su Cermelovu aksiomu smatrali problematičnom.
Istorija aksiome izbora je jako zanimljiva, što naše usputne napomene ne mogu na pravi način da dočaraju. Studija ove istorije koja je, trideset godina posle objavljivanja, i dalje bez premca je [Moore, 1982]. U ovoj knjizi može se pronaći prevod prepiske koju smo spominjali gore [Moore, 1982, pp. 311-320], kao i detaljna analiza njene sadržine [Moore, 1982, pp. 92-103]. U pogledu filozofskih pitanja vezanih za aksiomu izbora, zainteresovanog čitaoca upućujemo na [Hallett, 1984].

4.4. Odnos unutrašnjeg i spoljašnjeg opravdanja

Mogli bismo pretpostaviti da za platonistu kakav je Gedel unutrašnje opravdanje aksioma poseduje izvestan primat. Naime, ako postoji nezavisna sfera matematičkih objekata i ako mi posedujemo neku vrstu *a priori* uvida u njenu strukturu, onda će i opravdanost neke aksiome, koja onda ima za cilj da konstatuje neke važne osobine ove strukture, rasti proporcionalno sa stepenom našeg uvida u njenu prirodu. Uloga spoljašnjeg opravdanja jeste da *a posteriori* ovo opravdanje dodatno utvrdi.

Gedelov platonizam međutim nikako nije školski primer za to. Bilo da njegovo shvatanje matematičke intuicije shvatamo kao bazični čin razumevanja pojma skupa, kao što smo sugerisali, ili pak tako da se intuicija pre svega odnosi na objekte i to kao racionalan uvid Huserlovog tipa, na osnovu obe ove interpretacije ona može da pogreši. Ne postoji garantovani stepen izvesnosti kao nagrada za korektan opis sfere matematičkih entiteta.

Naša slika na osnovu koje je unutrašnje opravdanje primarno u odnosu na spoljašnje zasniva se na jednom kartezijanskom projektu. Radi se o staroj koncepciji arhitekture saznanja koje je postavljeno na apsolutno izvesnim temeljima. Nešto od te slike sadržano je u samom projektu zasnivanja matematike. Apsolutna izvesnost u pogledu adekvatnosti naših aksioma kao analiza pojma skupa je naravno nedostižna i Gedel je ovo vrlo dobro znao. Umesto da naivno pretpostavi, kao što smo mi to učinili gore, da je spoljašnje opravdanje samo sekundarno, on nudi sliku opravdanja aksioma u kojoj oba tipa opravdanja imaju svoju ulogu i na osnovu koje nema mnogo smisla pitati koja je od njih primarnija.

Na prvi pogled može izgledati da to što smo upravo rekli nije zasnovano na Gedelovim radovima. On je mnogo više pažnje posvetio analizi pojma skupa nego značaju matematičkih posledica za opravdavanje novih skupovnih aksioma. Ovom drugom je posvetio samo nekoliko napomena. Razlog ovome je izgleda sledeći: Gedelova analiza pojma skupa samo je deo njegovih argumenata u prilog platonizmu. I pored važnosti koju pojam spoljašnjeg opravdanja ima za Gedela, on je na prvom mestu zainteresovan za izgradnju uspešnog platonističkog stanovišta gde je pojam skupa njegov ključni deo.

Spoljašnje opravdanje aksioma velikim delom zavisi od stvarne matematičke prakse i toga kakve će posledice šira matematička zajednica smatrati „poželjnim”. Unutrašnje opravdanje pak zavisi od plauzibilnosti argumenata koje smo u stanju da pružimo za pojmovni realizam kao i za epistemološku teoriju koja je sa njim u skladu.

Činjenica da, po Gedelovom mišljenju, ne možemo govoriti o prednosti jednog tipa opravdanja nad drugim ne iscrpljuje sve što se može reći o njihovom međusobnom odnosu. Naime, između ovih tipova opravdanja postoji izvestan reciprocitet koji možemo objasniti na sledeći način: analizom iterativnog pojma skupa dolazimo do zaključka da su sve aksiome teorije ZFC opravdane, kao i neke aksiome koje tvrde postojanje malih velikih kardinala. Radeći unutar teorije ZFC mi dokazujemo veliki broj tvrđenja koja uvećavaju naše razumevanje pojmova koje smo aksiomatizovali u ZFC. Na ovaj način posledice naših aksioma dalje obogaćuju naše razumevanje pojma skupa. Takođe, razvijajući teoriju ZFC, baš kao i svaku drugu matematičku teoriju, stičemo viši nivo organizacije time što klasifikujemo objekte na prirodniji način, otkrivamo nove veze između njih i u stanju smo da konstruišemo nove dokaze starih teorema, koji dodatno rasvetljavaju materiju kojom se bavimo. Na ovaj način naše aksiome stiču dodatno spoljašnje opravdanje utoliko što za posledicu imaju uspešnu matematičku teoriju.

Ovaj „*povratni*” odnos između unutrašnjeg i spoljašnjeg opravdanja, posebno u pogledu „rastućeg” razumevanja pojma skupa, u skladu je sa Gedelovim stanovištem o prirodi našeg duha:

> Tjuring [...] pruža argument koji bi trebalo da pokaže da mentalni procesi ne prevazilaze mehaničke procese. Međutim, ovaj argument je nekonkluzivan. Ono što Tjuring u potpunosti zanemaruje jeste činjenica da *duh u svojoj aktivnosti nije statičan nego da se neprekidno razvija*, tj. da mi razumemo apstraktne termine sve preciznije što ih više upotrebljavamo, i da sve više takvih termina ulazi u domen našeg razumevanja. [Gödel, 1972, p. 306]

Još jedan zanimljiv oblik uzajamnog delovanja ova dva tipa opravdanja jeste i onaj na osnovu koga spoljašnje opravdanje može predstavljati izvestan korektiv unutrašnjem opravdanju. Prisetimo se da su po Gedelovom mišljenju skupovno-teorijski paradoksi znak da je naše razumevanje pojma skupa, oličeno u inkonzistentnoj aksiomatizaciji koja je do njih dovela, pogrešno. Ovde pre svega mislimo na aksiomu neograničene komprehenzije.

Šta se događa u slučaju kada imamo par međusobno inkompatibilnih teorija koje su obe u izvesnoj meri opravdane? Uzmimo na primer ZFC i $ZF + AD$.[9] Još jedan primer je par teorija $ZF + V = L$ i $ZFC + \exists 0^\sharp$.[10] Zašto se odričemo aksiome determinisanosti AD u korist AC? Zašto je aksioma $V = L$ restriktivna a $V \neq L$ poželjna posledica[11] koju bismo rado prihvatili? Ovo nas dovodi do pitanja „poželjnih" posledica proširenja teorije ZFC, na koje smo do sada izbegavali da odgovorimo. Delimičan razlog za to je i taj što nemamo potpun, a možda ni dovoljno dobar, odgovor. Nema sumnje da je ovo pitanje od velike važnosti u teoriji skupova, ali nam izgleda i da zadovoljavajući odgovor na njega tek treba da dobijemo. Podršku za to ćemo naći u jednoj epizodi iz istorije moderne teorije skupova, koju ćemo ukratko prikazati.

Početkom sedamdesetih godina prošlog veka, Solovej (Robert Solovay) je dokazao relativnu konzistentnost teorije $ZF + DC + LM$ (gde je DC *aksioma zavisnih izbora*[12] i LM je tvrđenje da je svaki podskup skupa $\mathbb{R}$ Lebeg-merljiv[13]) u odnosu na teoriju

[9]Aksioma determinisanosti AD tvrdi da su sve igre za dva igrača koje se igraju na skupovima $A \subseteq \mathbb{R}$ determinisane, tj. jedan igrač uvek ima pobedničku strategiju. Teorija $ZF + AD$ ima za posledicu $\neg AC$. Definiciju beskonačnih igara na skupovima realnih brojeva odlažemo za sedmu glavu ovoga rada gde će biti više reči o AD i srodnim tvrđenjima.

[10]Grubo govoreći, $0^\sharp$ je nekonstruktibilan podskup skupa ω koji kodira informaciju o tome kako se V razlikuje od konstruktibilnog univerzuma L. Teorija $ZFC + \exists 0^\sharp$ ima za posledicu $V \neq L$.

[11]Po Gedelovim rečima: „aksioma konstruktibilnosti tvrdi jedno minimalno svojstvo. Čini se da samo jedno maksimalno svojstvo može biti u skladu sa pojmom skupa." [Gödel, 1944, pp. 478-479]. Ovo Gedelovo stanovište dele mnogi (v. [Moschovakis, 1980, p. 608] i [Drake, 1974, p. 113], na primer), ali ne i svi. O plauzibilnosti aksiome $V = L$ pisao je Jensen (Ronald Jensen) u [Jensen, 1995]. Nešto novija filozofska analiza koja blagonaklono gleda na ovu aksiomu i Jensenove argumente njoj u prilog je [Arrigoni, 2010].

[12]DC kaže da ako je binarna relacija R na skupu X takva da za svako $x \in X$ postoji $y \in X$ tako da važi xRy, onda postoji beskonačan niz $(x_n)_{n<\omega}$ elemenata od X takvih da za svako $n < \omega$ važi $x_n R x_{n+1}$.

[13]Lebegova mera je, grubo govoreći, matematički odgovor na pitanje kako pripisati „veličinu" podskupovima od $\mathbb{R}^n$ na prirodan način koji uopštava naše intuicije o dužini, površini i zapremini. Neka je $\mathscr{F}$ familija podskupova euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ za $n \geq 1$ i neka je $\lambda : \mathscr{F} \to [0, \infty]$ funkcija tako da su sledeći uslovi zadovoljeni: (i) $\mathscr{F}$ je zatvorena za operacije komplementacije (ako $A \in \mathscr{F}$ onda i $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathscr{F}$) i prebrojive unije (ako $A_i \in \mathscr{F}$, za svako $i < \omega$, onda i $\bigcup_{i<\omega} A_i \in \mathscr{F}$). Familiju podskupova nekog skupa

ZFC+"postoji nedostižan kardinal" (ove dve teorije su u stvari ekvikonzistentne, što je dokazao Šelah (Saharon Shelah) 1980. godine). Teorija $ZF + DC + LM$ je naravno imuna na postojanje „patoloških" skupova realnih brojeva kakvi su oni koji se javljaju u Vitalijevoj konstrukciji ili u paradoksu Banaha i Tarskog. U ovom pogledu bilo je za očekivati da će ova teorija biti svesrdno prihvaćena od strane matematičara koji se bave pre svega analizom, kao okvir koji zadržava sve ono što im je neophodno a da u isto vreme otklanja čudne, nemerljive skupove koje smo pomenuli gore. Takođe, ova teorija ima i tu pragmatičku prednost što ne moramo proveravati da li je neki skup merljiv da bismo mogli primeniti Fubinijevu teoremu[14].

Međutim, matematičari koji se bave analizom nastavili su da rade u standardnom okruženju ZFC. Nemamo odgovor na pitanje zašto se to desilo, ali nam se čini da bi svaki takav odgovor morao uzeti u obzir činjenicu da je aksioma izbora standardan deo matematičke prakse u istoj onoj meri u kojoj su to i ostale aksiome teorije ZF. Štaviše, čini nam se da stalno potenciranje aksioma možda i nema mnogo smisla sa stanovišta nekoga ko se bavi analizom *per se*. Baviti se analizom sigurno podrazumeva neko znanje iz teorije skupova, koje uključuje i mogućnost da se njene aksiome navedu ako se za tim javi potreba. Međutim, ono što je pre svega uloga teorije skupova i njenih metoda u analizi, kao verovatno i u ostatku matematike, jeste da se „pročita, apsorbuje i zaboravi", po rečima jednog od doajena savremene matematike [Halmos, 1960].

S druge strane, iako je ograničenje koje DC uvodi u odnosu na AC supstancijalno, pa unutar $ZF + DC$ ne možemo dokazati postojenje skupa koji nije Lebeg-merljiv, ova teorija takođe ne dokazuje ni Tihonovljevu teoremu u topologiji. Takođe, Solovejev model se sastoji od izvesnih definabilnih skupova koji ne moraju izgledati toliko prirodno kao proizvoljni skupovi sa kojima su matematičari navikli da rade.

koja ima ovo svojstvo zovemo i $\sigma-$algebrom. (ii) $[0,1]^n \in \mathscr{F}$ i $\lambda([0,1]^n) = 1$. (iii) Za svaku familiju $(A_i)_{i<\omega}$ disjunktnih skupova iz $\mathscr{F}$ važi da je $\lambda(\bigcup_{i<\omega} A_i) = \sum_{i<\omega} \lambda(A_i)$. Ako λ zadovoljava ovaj uslov kažemo da je prebrojivo-aditivna. (iv) za svaku izometriju i od $\mathbb{R}^n$ (funkcija $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je izometrija ako čuva razdaljinu, tj. ako je komponovana od rotacija i translacija) važi $(iv.i)$ $A \in \mathscr{F}$ akko $i(A) \in \mathscr{F}$ i $(iv.ii)$ $\lambda(A) = \lambda(i(A))$, za svako A iz $\mathscr{F}$.
Ako je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i vrednost $\lambda(A)$ je definisana, kažemo da je skup A Lebeg-merljiv.

[14]U najkraćem, Fubinijeva teorema nam omogućava da, pod izvesnim uslovima, izračunavanje višestrukog integrala svedemo na izračunavanje iteriranog integrala.

Pitanje „poželjnih” posledica novih aksioma nije nimalo jednostavno i prethodno rečeno ilustruje samo delić problema koji se javljaju pri analizi ovog pojma. Ne tvrdimo da nije moguće pružiti upotrebljiv kriterijum „poželjnosti” kao nečega što bi većina matematičke zajednice preferirala u odnosu na alternativu. Čini nam se da ako ne želimo da ovo pitanje u potpunosti prepustimo sociologiji matematike moramo uzeti u obzir nešto što liči na međusobnu interakciju dve vrste opravdanja koja se može naći kod Gedela.

U narednom odeljku predstavićemo jedan skorašnji argument, formulisan sa platonističkog stanovišta, u korist prihvatanja određenih aksioma koje CH odlučuju. Iako na prvi pogled izgleda kao da on sledi Gedelove ideje u vezi sa opravdanjem novih aksioma, pokušaćemo da pokažemo da ovo nije slučaj, kao i da je argument nekonkluzivan pa da bi trebalo biti oprezan pri svakom sličnom poduhvatu.

GLAVA 5

INTUICIJA, SIMETRIJA I AKSIOMA IZBORA

Ako se ostave po strani Gedelova gledišta, matematički platonizam nije na ceni u savremenoj filozofiji matematike. U poslednjih pola veka, ova pozicija je bivala sve manje favorizovana u odnosu na svoje antirealističke suparnice, iako su je u nekom obliku zastupali neki od najvećih umova našeg vremena. Tu treba spomenuti Fregea [Frege, 1974], Rasela [Bernard, 1912], Hardija (Godfrey Harold Hardy) [Hardy, 1940] i Kvajna [Quine, 1953] a u novije vreme i Kona (Alain Connes) [Changeux and Connes, 1995; Connes et al., 2000]i Penrouza [Penrose, 2011] primera radi[1].

Jedna vrsta antirealizma kojom ćemo se baviti u ovom odeljku jeste *matematički naturalizam*. Grubo govoreći ovo je gledište na osnovu kojeg su tradicionalni metafizički i epistemološki problemi vezani za osnove matematike kojima je Gedel, kako smo

[1]Evo šta o prirodi matematičkih objekata kaže Kon:

> [T]vrdim da ona [matematika, *prim. prev.*] ima predmet isto tako stvaran kao onaj koji imaju nauke o kojima sam gore govorio [fizika, biohemija, geologija itd., *prim. prev.*], samo što se ne nalazi ni u prostoru ni u vremenu. On međutim postoji isto tako čvrsto kao spoljašnja stvarnost i matematičari se sa njom sudaraju pomalo kao što se čovek sudara sa jednim materijalnim objektom spoljašnje stvarnosti. [Connes et al., 2000, pp. 38-39]

već videli, pridavao veliku pažnju, naprosto pseudo-problemi. Matematika se ne može procenjivati nematematičkim sredstvima niti joj se mogu nametati filozofske skrupule. Sve što se od filozofije očekuje jeste rasvetljavanje stvarne matematičke prakse.

5.1. Braun protiv naturalizma

Jedan od načina da se suočimo sa prethodnim izazovom matematičkom platonizmu jeste da tvrdimo da se matematičko saznanje suštinski razlikuje od empirijskog, te da je nametanje empirističkih skrupula matematici u najmanju ruku neprimereno. Ovo dalje otvara put osporavanju premise koju smo ranije spominjali, a na osnovu koje objašnjenje matematičkog saznanja mora uključivati neku vrstu kauzalne veze. Ako ovo učinimo i ako smo u isto vreme u stanju da pružimo koherentno objašnjenje sposobnosti matematičke intuicije koje ide dalje od prostog tvrđenja da ona postoji, izgleda da samim tim platonizam postaje pozicija *par défaut* u poređenju sa *naturalizmom*, koji je veoma rasprostranjen u savremenoj filozofiji matematike.

Razume se, ovo nije jednostavno, a možda ni moguće učiniti. To je ipak zadatak koji je, između ostalih, sebi postavio Braun (James Robert Brown) u knjizi [Brown, 2012].

Ova knjiga ima mnogo toga što je preporučuje filozofskoj publici. Braunova kritika naturalističkih pozicija u filozofiji matematike nosi sa sobom pregršt novih argumenata koje naturalisti kao ni platonisti ne bi smeli da zanemare. Ovaj negativni i značajniji deo Braunove studije upotpunjen je pozitivnim argumentima u prilog platonizmu. Po Braunovim rečima, njegov osnovni cilj jeste „da pokaže koliko je nezadovoljavajuća naturalistička pozicija. Ako se u poređenju s njom platonizam čini uspešnijim, tim bolje.” [Brown, 2012, p. x]

Jedna od naturalističkih pozicija u filozofiji matematike kojoj Braun posvećuje pažnju jeste i ona koju zastupa Medijeva (Penelope Maddy) [Maddy, 1997, 2009], a na osnovu koje se „metodologija matematike može na pravi način procenjivati, braniti ili kritikovati samo na matematičkim, ali ne i filozofskim ili ma kojim drugim vanmatematičkim osnovama.” [Maddy, 1998, p. 164] Nasuprot ovome, Braun smatra da „postoji puno razloga da verujemo (*contra* Medijeve) da neke matematičke metode i rezultati dobijaju svoje opravdanje iz nematematičkih izvora, konkretno iz filozofije." [Brown, 2012, p. 134]. On sebi postavlja kao cilj da pokaže da „postoje potpuno legitimna [filozofska *prim. prev.*] razmatranja koja igraju ulogu svedočanstva u prilog nekih matematičkih rezultata." [Brown, 2012, p. 134]

Braunov argument je kompleksan i po mnogo čemu originalan. Njegova uspešnost međutim ponajviše zavisi od uspešnog objašnjenja fenomena matematičke intuicije. Čitava Braunova studija se može u izvesnom smislu razumeti i kao argument u prilog postojanja ove sposobnosti koja je, po njegovim rečima, „sa stanovišta svedočanstva, ekvivalentna empirijskom posmatranju u prirodnim naukama. Ona može pogrešiti i biti ograničenog opsega, ali ona predstavlja ogledno polje za spekulativnije [matematičke *prim. aut.*] aksiome. Ova kvazi-percepcija je ono što nam omogućava pristup sferi matematičkih entiteta.[...] Matematička intuicija je stabilna i podložna ponavljanju koliko i čulno iskustvo, verovatno i više od toga." [Brown, 2012, p. 139]

U ovom odeljku nećemo se baviti čitavim Braunovim argumentom usmerenim protiv matematičkog naturalizma niti ćemo razmatrati sve pozitivne argumente koje on iznosi u prilog postojanja matematičke intuicije. Cilj nam je međutim da pokažemo da su bar neki od njih nekonkluzivni i da utoliko njegova kritika naturalizma gubi na snazi.

5.2. Argumenti koji se tiču simetrije

Pre više od četvrt veka Friling (Christopher Freiling) [Freiling, 1986] je formulisao takozvanu *aksiomu simetrije* i na osnovu nje ponudio „filozofski dokaz" negacije hipoteze kontinuuma. Budući da trenutno prihvaćene aksiome ZFC ne odlučuju CH, postavlja se pitanje kakvi razlozi govore u prilog Frilingove aksiome kao nove aksiome teorije ZFC, koja bi odlučila CH?

Po Frilingovom mišljenju njoj u prilog govori simetrija prisutna u misaonom eksperimentu koji uključuje bacanje „slučajnih strelica" na kontinuum a koji za cilj ima „sticanje dodatnih intuicija o apstraktnom svetu teorije skupova." [Freiling, 1986, p.

190] Za razliku od „uobičajene metode opravdavanja aksioma koji intuiciju o konačnim ili prebrojivim skupovima neoprezno proširuje na sve skupove" [Freiling, 1986, p. 190], Friling predlaže da našu intuiciju primenimo neposredno na kontinuum budući da on „stoji u čvrstoj vezi sa stvarnim svetom kao i sa svetom teorije skupova." [Freiling, 1986, p. 190] Na ovom mestu je važno istaći da za Frilinga „intuicija" nije tehnički pojam u onom smislu u kojem je to za Gedela. Pre se radi o „osećaju" da bi nešto trebalo da važi, osećaju koji se stiče iskustvom bavljenja matematikom.

Braun smatra da nam Frilingov „dokaz" nedvosmisleno ukazuje na postojanje matematičke intuicije (sada shvaćene u smislu koji je mnogo bliži Gedelovom razumevanju ovog pojma) i time govori u prilog platonizmu. Po njegovim rečima „matematički platonizam podržavaju primeri ove vrste.[...] Jasno je da ne dokazujemo $\neg CH$ iz trenutno prihvaćenih matematičkih aksioma. Štaviše, jasno je i da rezultat nije empirijski, budući da možemo da pogađamo realne brojeve strelicama samo u pojmovnom smislu. Izgleda da postoji samo jedno plauzibilno objašnjenje kako Frilingov argument radi: negde usput, platonistička intuicija je bila na delu, što znači da se nijednoj vrsti naturalizma ne piše dobro." [Brown, 2012, pp. 157-158] U nastavku ovog odeljka ćemo ispitati Frilingov argument, ne bismo li utvrdili da li i u kojoj meri je Braunova ocena tačna.[2]

Frilingova ideja je u osnovi sledeća: ako zamislimo da se „slučajna strelica" baca na **I** (gde je **I** jedinični interval $[0,1]$), onda će ona gotovo izvesno promašiti svaki unapred dati broj. Kao što je to često slučaj, kada formalizujemo neku intuiciju, moramo je naknadno oslabiti.

Preliminarna, neformalna verzija Frilingove aksiome tada bi bila sledeća: za svaki realan broj postoji proces bacanja strelice koji će promašiti taj broj. Friling opisuje ovo slabljenje time što kaže da je naša intuicija negde između $\exists\forall$ i $\forall\exists$ pa biramo slabiju verziju što je u ovom slučaju $\forall\exists$. Nažalost, sve što ovo opravdava jeste $\forall x \exists y (x \neq y)$.

[2]Primedbe koje ćemo uputiti Frilingovom argumentu nisu nove, neke od njih pojavile su se ubrzo pošto je Frilingov rad objavljen. Za detaljniji prikaz Frilingovog argumenta, kao i kritika koje mu se mogu uputiti, zainteresovanog čitaoca upućujemo na [Hauser, 2002].

Međutim, moguće je proširiti prethodni argument i tako dobiti manje trivijalne rezultate. Pretpostavimo sada da dva igrača bacaju strelice na **I**, pri čemu su njihova bacanja potpuno nezavisna. Unapred možemo reći da je verovatnoća da će prvi igrač pogoditi neki iracionalan broj jednaka 1. Ovde se oslanjamo isključivo na činjenicu da je skup svih racionalnih brojeva prebrojiv. Ako drugi igrač baca strelicu posle prvog, kolika je verovatnoća da neće pogoditi neki racionalan umnožak broja koji je pogodio prvi igrač? Kako treba da promaši samo prebrojivo mnogo brojeva određenih bacanjem prvog igrača, odgovor je 1. Pretpostavimo dakle da imamo funkciju $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}_{\aleph_0}$ (gde je $\mathbf{I}_{\aleph_0}$ skup svih prebrojivih podskupova jediničnog intervala **I**) koja za svaki x iz **I** kao argument daje neki prebrojiv podskup skupa **I** kao vrednost $f(x)$. Ako je na primer prvi igrač pogodio neki broj x iz **I** , verovatnoća da će drugi igrač pogoditi neki broj iz $\mathbf{I} \setminus f(x)$ jednaka je 1. Kako su međutim bacanja naših igrača nezavisna situacija je simetrična, tako da možemo reći da, ako je drugi igrač pogodio neki broj y iz **I** , verovatnoća da će broj koji je pogodio prvi igrač biti u $\mathbf{I} \setminus f(y)$ takođe je ravna jedinici. Po Frilingovim rečima, kontinuum „ne zna koja je od dve strelice prva bačena.” [Freiling, 1986, p. 192]

Sada smo spremni da formulišemo Frilingovu aksiomu:

$A_{\aleph_0}$**:** $\forall f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}_{\aleph_0} \exists x \exists y \left(x \notin f(y) \wedge y \notin f(x) \right)$

U teoriji ZFC ova aksioma je, kako je to Friling pokazao, ekvivalentna sa $\neg CH$:

TEOREMA 118. *U ZFC imamo da je* $A_{\aleph_0} \Leftrightarrow \neg CH$.

DOKAZ. Dokažimo prvo da važi $A_{\aleph_0} \Rightarrow \neg CH$. Pretpostavimo da važi $A_{\aleph_0}$ i neka je $\prec$ dobro uređenje skupa $\mathbf{I}$ dužine $\aleph_1$ čije nam postojanje garantuje CH. Neka je funkcija $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}_{\aleph_0}$ definisana sa $f(x) = \{y \mid y \preceq x\}$. Na osnovu $A_{\aleph_0}$ imamo da postoje a i b iz $\mathbf{I}$ takvi da je $a \succ b \wedge b \succ a$, što je nemoguće.

Dokažimo sada da važi implikaciju i u suprotnom smeru, tj. $\neg CH \Rightarrow A_{\aleph_0}$. Pretpostavimo da je, na osnovu $\neg CH$, $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ i neka je $\langle x_\alpha \mid \alpha < \aleph_1 \rangle$ niz različitih realnih brojeva iz $\mathbf{I}$ čija je dužina ω_1. Uzmimo proizvoljnu funkciju f takvu da je $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}_{\aleph_0}$. Posmatrajmo skup $\bigcup_{\alpha<\aleph_1} f(x_\alpha)$ koji je kardinalnosti $\aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1$ pošto je, za svako $\alpha < \aleph_1$, skup $f(x_\alpha)$ prebrojiv. Kako je po pretpostavci $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, sledi da postoji y iz $\mathbf{I}$ takav da $y \notin \bigcup_{\alpha<\aleph_1} f(x_\alpha)$, a budući da je skup $f(y)$ prebrojiv, sledi i da postoji $\aleph_1-$ mnogo $x-$ova iz $\langle x_\alpha \mid \alpha < \aleph_1 \rangle$ takvih da važi $x \notin f(y)$. Dakle, $\exists x \exists y (x \notin f(y) \wedge y \notin f(x))$ pa $A_{\aleph_0}$ važi. □

Po Frilingovom mišljenju pomenuto tvrđenje kao i intuicija koja iza njega stoji predstavlja „jednostavan filozofski *dokaz* negacije Kantorove hipoteze kontinuuma.” [Freiling, 1986, p. 190]

Dakle, pitanje je da li prihvatamo $A_{\aleph_0}$ kao aksiomu koja odlučuje CH? Da li su intuicije koje podržavaju ovu aksiomu dovoljno jake da bismo je mogli prihvatiti bez sumnje? Drugim rečima, u kojoj meri Frilingov argument zaista predstavlja filozofski dokaz $\neg CH$, ako pod terminom „filozofski dokaz” podrazumevamo razložan i postojan argument u prilog izvesnom tvrđenju?

Pre nego što damo odgovor na ovo pitanje, razmotrićemo jedan problem koji sa njim stoji u tesnoj vezi. Dobro je poznato da je *AC* imala prilično kontroverznu istoriju. Počevši od prvih implicitnih upotreba sve do Cermelove eksplicitne formulacije ove aksiome, koju i danas koristimo, pa i u godinama posle toga, *AC* je uvek pobuđivala sumnju kod one grupe matematičara koje bismo mogli nazvati konstruktivistima, u širem smislu te reči.

Sama aksioma tvrdi postojanje funkcije izbora[3], a da pritom ne pruža nikakav postupak kojim bismo pomenutu funkciju mogli konstruisati. U slučaju konačnih skupova to naravno ne predstavlja problem. Međutim, kada je reč o beskonačnim skupovima aksioma iziskuje beskonačno mnogo proizvoljnih izbora, što je neprihvatljivo konstruktivistima. Njihova nastojanja da diskredituju *AC* kao legitimno matematičko sredstvo dobila su potporu u čuvenim rezultatima Banaha (Stefan Banach) i Tarskog (Alfred Tarski). Naime, oni su dokazali da *AC* ima za posledicu postojanje dekompozicije površine jedinične lopte na konačno mnogo delova od kojih se mogu, kretanjem u prostoru, složiti dve lopte iste veličine. Ovaj rezultat se često naziva i *paradoksom Banaha i Tarskog*. Krajnje je protivno intuiciji da, počevši od jedne lopte, njenim isecanjem na konačno mnogo delova i kasnijim slepljivanjem istih možemo dobiti dve takve lopte. Da li ovaj rezultat predstavlja nesumnjivo pobijanje aksiome izbora?

Ako bi geometrijska jedinična lopta bila ne više od fizičkih lopti našeg svakodnevnog iskustva, to bi verovatno bio slučaj. Međutim, stvari stoje nešto drugačije. Pre svega, delovi jedinične lopte dobijeni dekompozicijom su *nemerljivi skupovi*. Ako bi skupovi o kojima je reč bili merljivi, a znamo da izometrijska kretanja u prostoru čuvaju površinu, rezultat ne sledi, jer bi bio u suprotnosti sa aditivnošću mere. Da bismo s pravom mogli zaključiti da je *AC* netačna, bio bi nam neophodan nezavisan argument koji bi tvrdio nemogućnost dekompozicije navedene u tvrđenju, a koji se pritom ne bi oslanjao na pojam površine. Teško je zamisliti kako bi jedan takav argument izgledao. Ono što možemo da zaključimo jeste da naše intuicije nisu uvek krajnje merilo istinitosti nekog matematičkog tvrđenja.

Vratimo se sada našem centralnom problemu. Koliko je razložan Frilingov argument u prilog negaciji hipoteze kontinuuma? Razmotrimo za početak sledeće tvrđenje Šerpinjskog: hipoteza kontinuuma važi ako i samo ako postoji particija skupa $\mathbf{I}^2$ (gde je $\mathbf{I}^2$ jedinični kvadrat $[0,1]\times[0,1]$ u euklidskoj ravni) na dva skupa A_1 i A_2 takva da:[4]

(1) svaki *horizontalni presek* skupa $\mathbf{I}^2$ sadrži samo prebrojivo mnogo tačaka iz A_1;

[3] *Funkcija izbora* f je funkcija definisana na familiji nepraznih skupova X, tako da za svako S iz X važi $f(S)\in S$.

[4] Skup S je *horizontalni presek* skupa $\mathbf{I}^2$ ako i samo ako postoji x iz $\mathbf{I}$ takav da je $S=\{(x,y): y\in\mathbf{I}\}$. Slično tome, skup S je *vertikalni presek* skupa $\mathbf{I}^2$ ako i samo ako postoji y iz $\mathbf{I}$ takav da je $S=\{(x,y): x\in\mathbf{I}\}$.

(2) svaki *vertikalni presek* skupa $\mathbf{I}^2$ sadrži samo prebrojivo mnogo tačaka iz A_2.

Pretpostavimo sada da smo tačke iz skupa $\mathbf{I}^2$ obojili dvema bojama, recimo crvenom i plavom, tako da ako posmatramo proizvoljan horizontalni presek ovog skupa, sve sem prebrojivo mnogo tačaka jesu crvene boje dok, ako posmatramo proizvoljan vertikalni presek, sve sem prebrojivo mnogo tačaka jesu plave boje.[5] Koje je boje skup $\mathbf{I}^2$?

Ako se na neki čudan način fokusiramo na horizontalne, a zanemarimo vertikalne preseke, on će biti crvene boje. Ako pak posmatramo vertikalne dok zanemarujemo horizontalne preseke, skup će biti plave boje. Mogli bismo reći da je skup $\mathbf{I}^2$ u celini u isto vreme i crvene i plave boje. Ovo zvuči prilično paradoksalno. Budući da je tvrđenje koje nam omogućava particiju skupa $\mathbf{I}^2$ na skupove A_1 i A_2 , koje smo obojili, ekvivalentno sa CH, da li iz toga sledi da $\neg CH$?

Izgleda da je problem sa takvim gledištem sličan onom koji smo razmatrali u vezi sa teoremom Banaha i Tarskog. Naime, problem se javlja u onom trenutku kada naše intuicije u pogledu fizičkih objekata na identičan način primenimo na matematičke objekte. Kao što u teoremi Banaha i Tarskog nije bilo reči o odrescima neke fizičke lopte nego o delovima jedinične geometrijske lopte koji su štaviše nemerljivi skupovi, tako i u našem primeru nije reč o kuglicama koje smo navikli da bojimo u svakodnevnom životu nego o $2^{\aleph_0}$ tačaka skupa $\mathbf{I}^2$ i skupovima istih, koji sa svojim svojstvima ne moraju uvek odgovarati našim intuicijama.

Slično važi i za Frilingov primer. Naime, kao što particija skupa $\mathbf{I}^2$ na skupove A_1 i A_2 nema za naš primer relevantne veze sa bojenjem predmeta u svakodnevnom smislu, tako ni intuicije koje posedujemo u pogledu verovatnoće određenih ishoda bacanja strelica na metu ne moraju tačno odgovarati strukturi matematičkog kontinuuma. Jer pod pretpostavkom da CH važi imamo da ako neko $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}_{\aleph_0}$ ne zadovoljava uslove Frilingove aksiome, onda su skupovi $\{(x, y) : y \in f(x)\}$ i $\{(x, y) : x \in f(y)\}$ gde su x i y iz $\mathbf{I}$, nemerljivi. Međutim, zašto bismo morali zahtevati da naše intuicije o verovatnoći

[5]Ovaj primer dao je Erkart (Alasdair Urquhart) na FOM MEJLING LISTI: *http://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/*

moraju odgovarati svojstvima nemerljivih skupova? Kao što smo pomenuli ranije, nemerljivi skupovi imaju mnoga svojstva koja se ne slažu sa intuicijom. U to smo se uverili kada smo razmatrali teoremu Banaha i Tarskog. Frilingova implicitna pretpostavka u „misaonom eksperimentu” bacanja strelica jeste da su skupovi funkcija $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}_{\aleph_0}$ iz aksiome $A_{\aleph_0}$ merljivi. Međutim, to ne mora nužno biti slučaj. Da li se moramo odreći aksiome izbora jer nam dopušta konstrukciju nemerljivih skupova, na primer onih čije postojanje tvrdi teorema Banaha i Tarskog ili Vitalijeva (Giuseppe Vitali) konstrukcija nemerljivog skupa realnih brojeva?

5.3. Nedostaci Frilingovog i Braunovog argumenta

Braunovo tvrđenje „da postoji samo jedno plauzibilno objašnjenje kako Frilingov argument radi: negde usput, platonistička intuicija je bila na delu” [Brown, 2012, p. 158] naprosto je pogrešno. Toliko možemo da zaključimo iz prethodno rečenog. Za početak, Frilingov argument *ne radi*, „matematička greška u prelazu sa misaonog eksperimenta na $A_{\aleph_0}$ počiva na neopreznom uopštenju plauzibilne intuicije o merljivim podskupovima od **I** na proizvoljne podskupove od **I**.” [Hauser, 2002, p. 111]

Međutim, pretpostavimo za trenutak da Frilingov argument radi, pa da je platonistička intuicija zaista na delu i omogućava nam da se uverimo da je CH lažna. Prisetimo se da argument počiva na činjenici da je prebrojiv podskup skupa **I** manje kardinalnosti od **I** pa da je gotovo sigurno da će slučajna strelica pogoditi njegov komplement. Ako je ovo slučaj, prebrojiv podskup skupa **I** možemo zameniti ma kojim podskupom od **I** kardinalnosti $< 2^{\aleph_0}$ i time dobiti sledeću varijantu Frilingove aksiome:

$A_{<2^{\aleph_0}}$**:** $\forall f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}_{<2^{\aleph_0}} \exists x \exists y (x \notin f(y) \wedge y \notin f(x))$

gde je $\mathbf{I}_{<2^{\aleph_0}}$ skup svih podskupova od **I** kardinalnosti $< 2^{\aleph_0}$.

Izgleda da aksioma $A_{<2^{\aleph_0}}$ nije ništa manje opravdana od aksiome $A_{\aleph_0}$. Naime, ako ima smisla pripisivanje verovatnoće proizvoljnim podskupovima od **I**, onda zaista možemo tvrditi da će slučajna strelica gotovo sigurno promašiti neki unapred dati podskup od **I** kardinalnosti $< 2^{\aleph_0}$. Međutim, imamo da $ZF + A_{<2^{\aleph_0}} \Rightarrow \neg AC$. Konkretno, aksioma $A_{<2^{\aleph_0}}$ zajedno sa aksiomama teorije ZF povlači da ne postoji dobro uređenje skupa **I**. O aksiomi izbora Braun kaže sledeće:

> Cermelo ju je formulisao [aksiomu izbora *prim. prev.*] pre jednog veka da bi dokazao teoremu o dobrom uređenju. Mnogi su prigovarali njenoj upotrebi, ali tokom vremena ova aksioma [...] je postala standardno oruđe u matematici. Šta je tačno ubedilo širu matematičku zajednicu u ispravnost ove aksiome? Dve stvari. Na prvom mestu, ona predstavlja beskonačnu verziju deduktivnog principa koji je opšte prihvaćen u konačnom slučaju. Dakle, ona je podržana putem analogije. Na drugom mestu, ona za posledicu ima rezultate koji se obično smatraju plauzibilnim po sebi i koji se ne mogu dedukovati bez ove aksiome. Ovaj drugi razlog za prihvatanje ove aksiome je sličan načinu zaključivanja koji se često javlja u nauci: ako izvesna hipoteza ima za posledicu širok spektar prihvaćenih rezultata koji se ne mogu dedukovati ni na koji drugi razložan način, onda bi ovo trebalo da smatramo svedočanstvom o istinitosti pomenute hipoteze. Gedel je na primer jako zastupao ovaj način razmišljanja. Kako Gedelova podrška sugeriše, on je u skladu sa platonizmom. [Brown, 2012, p. 55]

Međutim, ako je AC opravdana sa platonističkog stanovišta koje Braun zastupa, kako možemo pomiriti njegovo tvrđenje da matematička intuicija stoji iza Frilingovog argumenta za $\neg CH$ ako ista ta intuicija takođe podržava komplementaran argument za $\neg AC$ koji smo gore naveli?

Pretpostavljamo da je matematička intuicija konzistentna, pa ne bi trebalo da je slučaj da nam ona omogućava da dokažemo međusobno protivrečna tvrđenja. Rešenje se možda ogleda u tome što, kako Braun kaže, matematička intuicija može da pogreši, pa naprosto nismo u stanju da tvrdimo $\neg AC$, jer nas u tom slučaju ona zavarava. Nije nažalost nimalo jasno u kom suštinskom smislu se razlikuju Frilingovi argumenti za $\neg CH$ s jedne i $\neg AC$ s druge strane. Braun nam duguje ovo objašnjenje ako želi da zadrži AC i da, u isto vreme, tvrdi da matematička intuicija stoji iza Frilingovog argumenta.

Tome u prilog govori i činjenica da su posle pojavljivanja Frilingovog rada njegovi argumenti interpretirani tako kao da su usmereni protiv AC pre nego protiv CH [Maddy, 1988a, p. 500]. Ilustrujmo ovo sledećim primerom. Neka je CH^- tvrđenje: *svaki neprebrojiv podskup skupa* $\mathbb{R}$ *se može dovesti u bijekciju sa* $\mathbb{R}$. U ZFC imamo da $CH \Leftrightarrow CH^-$, međutim u odsustvu AC ova dva tvrđenja nisu ekvivalentna. Neka je LM tvrđenje: *svaki podskup skupa* $\mathbb{R}$ *je Lebeg-merljiv*. Ranije smo napomenuli da je početkom sedamdesetih godina prošlog veka Solovej konstruisao model ZF teorije skupova $\mathcal{M}$ takav da u njemu važi:

(1) LM;

(2) Svaki podskup skupa $\mathbb{R}$ ima svojstvo savršenog skupa.[6]

U ovom modelu važi CH^-, budući da je svaki podskup od $\mathbb{R}$ prebrojiv ili kardinalnosti $2^{\aleph_0}$ na osnovu (2). Takođe, (1) ima za posledicu da $A_{\aleph_0}$ važi u $\mathcal{M}$ [Weitkamp, 1989, p. 732]. Kada saberemo sve što je prethodno rečeno imamo da:

$$\mathcal{M} \models ZF + LM + A_{\aleph_0} + CH^-$$

Drugim rečima, u odsustvu pune aksiome izbora, CH^- zajedno sa Frilingovom aksiomom je konzistentna sa ZF. Dakle, vinovnika sukoba između naših plauzibilnih intuicija o verovatnoći i strukture kontinuuma treba tražiti u aksiomi izbora. Tumačiti taj sukob kao „jasan filozofski dokaz” negacije hipoteze kontinuuma naprosto je neodrživo.

Ovde možemo dati jednu istorijsku napomenu. Braun tvrdi da bi „Gedel podržao Frilingov pristup problemu CH ako ne do detalja, a ono bar u načelu.” [Brown, 2012, p. 97] Izgleda da ovo teško može biti tačno budući da u svom čuvenom radu o Kantorovom problemu kontinuuma Gedel eksplicitno navodi tvrđenje Šerpinjskog (čija je $\neg A_{\aleph_0}$ jednostavna posledica) koje smo spomenuli gore. Istina, kao jednu od neintuitivnih posledica CH, ali ni u jednom trenutku ne predlažući da njegovu negaciju usvojimo kao aksiomu koja bi CH trebalo da odluči [Gödel, 1947, p. 186.]. Štaviše, u pismu

[6] Podskup skupa $\mathbb{R}$ ima *svojstvo savršenog skupa* ako je prebrojiv ili ima neprazan savršen podskup. Kako su savršeni podskupovi od $\mathbb{R}$ uvek kardinalnosti kontinuuma, oni ne mogu predstavljati kontrаprimer za CH.

Tarskom, osvrćući se na grešku u svom dokazu $\neg CH$ iz nekih „veoma plauzibilnih aksioma”, Gedel kaže: „Moje uverenje da je $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ je naravno donekle poljuljano. Ali ovo mi se i dalje čini plauzibilnim. Jedan od glavnih razloga jeste i taj što ne verujem ni u kakvu vrstu iracionalnosti kao što su, npr. slučajni nizovi u apsolutnom smislu.” [Gödel, 1970b, p. 424.]

Kao što smo već napomenuli, Braunova studija donosi mnogo toga novog filozofskoj literaturi o matematičkom platonizmu i suprotnim gledištima. U tom pogledu ona igra važnu ulogu pomažući nam da sagledamo probleme sa kojima se svaka pozicija u filozofiji matematike koja pretenduje na koherentnost suočava. Nema sumnje da je stanovište sa koga Braun nastupa polemičko. Njegovi originalni argumenti su formulisani veoma smelo, i može se reći da su u tom pogledu izuzetak u odnosu na veliki broj studija koje nam nude beskrajnu rekapitulaciju starih ideja sa malo ili nimalo novog.

Smelost međutim ima svoju cenu, posebno ako nije podržana solidnijim poznavanjem sadržaja o kojem se diskutuje. Braun s pravom ističe teoriju skupova i pitanje novih aksioma kao jedno od centralnih poprišta između platonizma i njemu suprotstavljenih gledišta. Sfera „viših beskonačnosti” takođe je oblast u kojoj se platonizam najsigurnije kreće i u kojoj uživa najveću podršku u poređenju sa ostalim granama matematike.

Nažalost, Braunovi originalni argumenti u kontekstu teorije skupova su kao što smo videli manjkavi. Izgleda da Medijeva bolje vlada teorijom skupova od Brauna, koji nije bio u stanju da formuliše argumente u prilog platonizmu koji bi se na najsnažniji način suprotstavili naturalizmu. Na primer, navodeći heurističko pravilo *maksimizacije* koje igra važnu ulogu u teoriji skupova, Medijeva ga ovako opisuje:

> [U]koliko matematika treba da se slobodno razvija [...] i ako teorija skupova treba da igra ulogu koju očekujemo u zasnivanju matematike, onda teorija skupova ne sme nametati nikakva sebi svojstvena ograničenja: skupovno teorijska arena u kojoj bi matematika trebalo da se modeluje trebalo bi da bude što prostranija. [Maddy, 1997, p. 210]

Braun tvrdi da „zahtev za maksimizacijom proističe iz želje za zasnivanjem drugih teorija [...] Teorija skupova se ne opravdava sopstvenim sredstvima nego pre potrebama drugih teorija (doduše drugih matematičkih teorija)." [Brown, 2012, p. 154]

Ogroman deo moderne matematike može se formalizovati unutar ZFC. Ovde ne spada teorija kategorija, ali su za formalizaciju ove matematičke discipline dovoljna proširenja teorije ZFC takozvanim malim velikim kardinalima. Ova proširenja predstavljaju tek početak rastućeg niza sve snažnijih teorija koje postuliraju postojanje velikih kardinala. Nesuvislo je tvrditi da su ova proširenja formulisana sa ciljem zasnivanja drugih matematičkih teorija. Ona su na prvom mestu formulisana zbog toga da bi se potražili odgovori na pitanja na koja ZFC nije mogla da odgovori, pitanja kao što je CH.

Šezdesetih godina prošlog veka, ubrzo posle Koenovog dokaza nezavisnosti CH, postalo je jasno da čak ni najjača proširenja teorije ZFC ne mogu dati odgovor na ovo pitanje. U tom periodu modeli teorije skupova kao i odnosi konzistentske snage između različitih proširenja teorije ZFC zauzimaju centralno mesto u skupovno-teorijskoj zajednici. Malo toga se promenilo do danas. Proširenja teorije skupova čiji smo svedoci bili u poslednjih pola veka svoj su izvor imala u samoj teoriji skupova i ona su pravdana (ako ih je uopšte bilo potrebno pravdati) željom za daljim razvojem ove discipline.

Platonizam je stanovište koje vredi braniti. On odgovara onome što veliki broj matematičara prećutno podrazumeva kada se bavi matematikom. Takođe, rezultati savremene teorije skupova ga u izvesnom smislu preporučuju u odnosu na njemu suprotstavljena gledišta. Platonizam, kao što smo videli, ima i ozbiljne epistemološke probleme sa kojima se suočava. Braunova studija ne približava nas, nažalost, značajno njihovom rešenju.

GLAVA 6

PRINCIP REFLEKSIJE

U ovom poglavlju ćemo se baviti već pomenutim *principom refleksije*. Kako smo već napomenuli u uvodu ovaj se princip može, grubo govoreći, razumeti kao tvrđenje da je univerzum teorije skupova V toliko veliki da se ne može u potpunosti opisati sredstvima naše teorije. Ova je karakterizacija nažalost veoma opšta i neprecizna i jedan od ciljeva ovog poglavlja jeste da je poboljša. Da bismo ovo učinili prvo ćemo predstaviti jedan mali istorijski uvod koji bi trebalo da učini jasnijom ideju na kojoj ovaj princip počiva. Potom ćemo videti kako se unutar ZF ovaj princip može formalno predstaviti i ispitaćemo neka njegova uopštenja. Razmotrićemo takođe i Gedelovo gledište da je ideja na kojoj princip refleksije počiva od velike važnosti za opravdanje novih aksioma teorije skupova. Osim što se može formalno predstaviti unutar ZF, princip refleksije može da posluži i kao inspiracija za formulisanje nekih alternativnih teorija skupova - kao u slučaju Akermanove teorije A. Ova je teorija za nas posebno značajna jer ćemo želeti da ispitamo u kojoj je meri moguće sprovesti Gedelovu ideju, koju je izložio u pismu Koenu, da se „svi principi uspostavljanja aksioma teorije skupova moraju moći redukovati na Akermanov princip" [Gödel, 2003b, p. 386], ako pod Akermanovim principom razumemo teoriju A ili neka njena prirodna proširenja. Drugim rečima, da li je moguće formulisati neka prirodna proširenja Akermanove teorije koja bi kao posledicu imala neke od jakih aksioma beskonačnosti. Posebnu pažnju ćemo posvetiti Alkorovoj (Cankaya Alkor) teoriji T koju možemo smatrati jednim takvim proširenjem i daćemo odgovore na neka od otvorenih pitanja koja su vezana za ovu teoriju.

6.1. Kantor o transfinitnom i apsolutnoj beskonačnosti

Tvorac teorije skupova, Kantor, započeo je svoje proučavanje ove matematičke discipline ranih sedamdesetih godina XIX veka nakon što je kao *Privatdozent* našao zaposlenje u Haleu. Pitanja kojima se tada bavio ticala su se jedinstvenosti trigonometrijskih redova, problem koji mu je sugerisao njegov stariji kolega iz Halea Edvard Hajne (Edward Heine).

Već krajem 1873. godine, u pismu Dedekindu (Richard Dedekind) od 29. novembra, Kantor postavlja pitanje koje, kao što znamo, čini kamen temeljac teorije skupova:

> Uzmimo kolekciju svih prirodnih brojeva n i označimo je sa (n); zatim uzmimo kolekciju svih realnih brojeva x i označimo je sa (x); postavlja se pitanje da li se (n) i (x) mogu dovesti u korespondenciju na takav način da svakoj individui iz jedne kolekcije odgovara jedna i samo jedna individua iz druge? Na prvi pogled mogli bismo reći ne, ovo nije moguće, jer se (n) sastoji od diskretnih delova dok (x) čini kontinuum; ali ovom se opaskom ništa ne postiže. Koliko god bio sklon mišljenju da između (n) i (x) ne postoji takva korespondencija, ne uspevam da pronađem razlog za to i iako tome pridajem veliku važnost, razlog bi mogao biti krajnje jednostavan.[Cantor, 1991, p. 31]

Nedugo zatim, već u decembru iste godine, Kantor će dati negativan odgovor na pitanje iz prethodnog citata. Ovaj (prvi) dokaz neprebrojivosti skupa realnih brojeva objaviće s počekom 1874. godine u Krelovom *Žurnalu* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*).

Između 1879. i 1884. godine Kantor je objavio šest radova koji su za cilj imali izlaganje njegove novostvorene teorije. Za nas je posebno značajan peti u nizu ovih radova koji je objavljen 1883. godine pod naslovom *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Pored strogo matematičkih rezultata ovaj rad sadrži i najrazvijeniju filozofsku analizu pojma beskonačnosti koju možemo pronaći kod Kantora. Jedan od važnih rezultata ove analize jeste Kantorovo razlikovanje između *transfinitnog* i *apsolutno beskonačnog*. Pridev „transfinitno" Kantor koristi da bi njime označio beskonačne skupove za koje je uvek moguće zamisliti da ih dodavanjem novih elemenata dalje uvećavamo. Ovo se odnosi kako na beskonačne ordinale i kardinale, tako i na beskonačne skupove uopšte. Ti se skupovi uvek mogu međusobno upoređivati na osnovu broja njihovih elemenata. S druge strane,

> [...] ja koristim reč „apsolutno" samo za ono što se ne može dalje *uvećavati*, tj. *usavršavati*, po analogiji sa „Apsolutom" u metafizici. Moji aktualno beskonačni ili, ako hoćete, transfinitni brojevi $\omega, \omega+1, \ldots$ nisu „apsolutni", jer iako nisu konačni oni se mogu dalje uvećavati. Apsolut se međutim ne može dalje uvećavati i za nas je nedostižan. [Cantor, 1991, p. 139]

U pogledu ove nedostižnosti Kantor kaže da se „apsolut može samo prepoznati (*anerkannt*) ali nikada i saznati (*erkannt*)" [Cantor, 1962, p. 205, n. 2]. Najviše čemu se možemo nadati jeste da *ukažemo* na Apsolut nekim za njega adekvatnim *simbolom*. Ova ideja simboličkog ukazivanja na Apsolut ima svoje izvore u srednjovekovnoj filozofiji i teologiji i možda je najjasnije formulisana u nešto kasnijem delu Nikole Kuzanskog (Nicolaus Cusanus) *De Docta Ignorantia* koje datira iz sredine XV veka. Kako Kuzanski kaže, Bog ili apsolutni maksimum (*maximum absolutum*) ne može se saznati niti u potpunosti razumeti *[Cusanus, 2001, De Docta Ignorantia, I, §32-33]*, ali smo ipak u stanju da simboličkim sredstvima *aproksimiramo* njegovu beskonačnost. U ovome nam, po njegovom mišljenju, pomaže matematika:

> [...] ako želimo da, služeći se konačnim stvarima, dostignemo neograničeni Maksimum moramo prvo da ispitamo konačne matematičke figure

zajedno sa njihovim svojstvima i relacijama. Potom, moramo da primenimo ove relacije, na drugačiji način, na odgovarajuće beskonačne matematičke figure. Na posletku moramo primeniti, ponovo na drugačiji način, relacije među ovim beskonačnim figurama na ono što je prosto Beskonačno, koje je u potpunosti nezavisno od svih figura. Tada će naše neznanje biti nejasno poučeno kako bi trebalo da ispravnije i tačnije mislimo o Najvišem dok tumaramo služeći se simbolizmom. *[Cusanus, 2001, De Docta Ignorantia, I, §33]*

Iako prethodni citat sadrži dosta toga nejasnog, izgleda da Kuzanski hoće da kaže da ako želimo da makar nerazgovetno sebi predstavimo apsolutni maksimum, onda je najbolji način da to učinimo tako što ćemo se služiti matematičkim sredstvima. Matematiku smo, za razliku od apsolutnog maksimuma, u stanju da razumemo i ovo nam razumevanje omogućava da „ispravnije i tačnije mislimo o Najvišem".

Iz prethodno rečenog se vidi da je Kuzanski uticao na Kantorovo shvatanje Apsoluta (v. [Cantor, 1962, p. 205, n. 2]) . Na sreću, Kantorove napomene o ovom pojmu su donekle jasnije od onih koje možemo naći kod Kuzanskog. Da bismo videli koji bi to, po Kantorovom mišljenju, adekvatan simbol Apsoluta mogao biti i na koji način on na Apsolut ukazuje, ukratko ćemo predstaviti njegove ideje u vezi sa sistematskom izgradnjom klasa transfinitnih brojeva[1].

Prvi princip stvaranja (*erste Erzeugungsprinzip*) brojeva koji Kantor izdvaja jeste onaj koji nam omogućava da dodamo jedinicu prethodno datom broju i pređemo sa α na $\alpha+1$. Drugi princip stvaranja (*zweite Erzeugungsprinzip*) nam omogućava da, ako je dat rastući beskonačan niz transfinitnih (ili konačnih) brojeva koji nema najveći element, „stvorimo" *limes* tog niza. Primera radi, ovaj nam princip omogućava da pređemo sa beskonačnog niza prirodnih brojeva $0,1,\ldots$ na prvi beskonačni ordinal ω.

[1]Za više detalja u vezi sa Kantorovim shvatanjem Apsoluta i idejama koje je formulisao Kuzanski, zainteresovanog čitaoca upućujemo na Hauzerov rad [Hauser, 2013], kojem i naše izlaganje dosta duguje.

Elementi Kantorove *prve klase brojeva* (I) su konačni ordinali. Elementi *druge klase brojeva* (II) su prebrojivo beskonačni ordinali, tipovi dobrog uređenja skupa svih konačnih ordinala. Treću klasu brojeva (III) čine neprebrojivi ordinali koji su tipovi dobrog uređenja skupa svih ordinala iz druge klase brojeva itd. O ovoj proceduri Kantor kaže:

> Apsolutno beskonačan niz brojeva (klasa svih ordinala Ord, *prim. prev.*) mi se čini, u izvesnom smislu, kao adekvatan simbol Apsoluta. I dok je do sada beskonačnost prve klase brojeva (I) služila kao takav simbol, upravo zato što sam beskonačnost shvatio kao opipljivu i razumljivu ideju, ona mi se činila u potpunosti ništavnom u poređenju sa apsolutno beskonačnim nizom brojeva. [Cantor, 1962, p. 205.]

Po Kantorovom mišljenju, pre njega je prva klasa brojeva smatrana „adekvatnim simbolom Apsoluta". Međutim, ovako jednostavna i „opipljiva" ideja (aritmetička operacija dodavanja jedinice prethodno datom konačnom ordinalu) može u najboljem slučaju poslužiti kao prva aproksimacija Apsoluta. Kao takva, ona ne uspeva u njegovoj karakterizaciji, nego samo ukazuje na skup ω koji dobijamo primenom drugog Kantorovog principa stvaranja.

Međutim, ako beskonačnost svih prirodnih brojeva ne može da posluži kao adekvatan simbol Apsoluta, šta je to što apsolutno beskonačan niz svih ordinala Ord čini adekvatnim u ovom pogledu? Deo odgovora na to pitanje sadržan je u prethodnom citatu, apsolutna beskonačnost klase Ord čini beskonačnost od ω ništavnom. Ona je takva da se ne može dalje uvećavati, za razliku od beskonačnosti koju poseduju Kantorovi transfinitni brojevi. U nešto modernijoj terminologiji razliku o kojoj je ovde reč mogli bismo predstaviti parom pojmova *skup* i (*prava*) *klasa*. Samo za skupove ima smisla postaviti pitanje o broju njihovih elemenata ili tipu njihovih uređenja; klase naprosto imaju *suviše* elemenata da bi oni zajedno mogli činiti skup. Ovo je i Kantoru bilo dobro poznato pa tako u pismu Dedekindu od 3. avgusta 1899. on kaže

> Ako pođemo od pojma određenog mnoštva [*Vielheit*] (sistema, totaliteta) stvari, nužno je kako sam otkrio razlikovati dve vrste kolekcija [...].

> Mnoštvo može biti takvo da pretpostavka da su *svi* njegovi elementi „združeni zajedno" vodi protivrečnosti, pa je tako nemoguće zamisliti ovo mnoštvo u njegovoj celosti kao jedno, kao „jednu završenu stvar". Takvo mnoštvo nazivam *apsolutno beskonačnim* ili *inkonzistentnim mnoštvom.*[...]
>
> Ako se, s druge strane, celina svih elemenata mnoštva može bez protivrečnosti zamisliti kao „združena", tako da ti elementi mogu zajedno činiti „jednu stvar", onda takvo mnoštvo nazivam *konzistentnim mnoštvom* ili „skupom". [...]
>
> *Sistem svih brojeva* Ω (naše Ord, *prim. prev.*) *je inkonzistentno, apsolutno beskonačno mnoštvo.* [Cantor, 1962, pp. 443-445]

Činjenica da apsolutna beskonačnost klase Ord prevazilazi sve beskonačnosti Kantorovih transfinitnih brojeva nije jedino što je čini adekvatnim simbolom Apsoluta. Osim toga, ona odslikava još jedno svojstvo Apsoluta koje je Kantor, baš kao i Kuzanski, smatrao veoma važnim. Reč je o tome da Apsolut u sebi obuhvata sve mogućnosti. Način na koji klasa Ord ovo svojstvo odslikava jeste taj što kako god da zamislimo transfinitni niz brojeva, kojom god se procedurom služili u njegovom građenju, ne možemo pobrojati ništa osim klase Ord ili nekog njenog inicijalnog segmenta.

Ako ovu Kantorovu ideju primenimo na univerzum svih skupova V, mesto na klasu Ord, mogli bismo reći da V u sebi obuhvata sve mogućnosti građenja skupova baš kao što je bio slučaj sa ordinalima i klasom Ord. Tada bi klasa V, baš kao i Ord, bila adekvatan simbol apsoluta. Posledicama ove ideje u okruženju teorije ZF ćemo se baviti u sledećem odeljku ovog rada.

6.2. Princip refleksije u ZF

Ideja na kojoj princip refleksije počiva jeste da je klasa V suviše velika da bismo je mogli u potpunosti opisati skupovno-teorijskim sredstvima. Ako klasa V poseduje neko dobro određeno skupovno-teorijsko svojstvo, ono ne može važiti samo u njoj, nego postoji neki prethodni nivo kumulativne hijerarhije V_α koji sa njom ovo svojstvo deli. U tom slučaju kažemo da, u pogledu ovog svojstva, pomenuti skup V_α *reflektuje* univerzum V. Ovo odgovara Kantorovoj ideji da V obuhvata sve mogućnosti građenja skupova[2].

> Kada pokušamo da pomirimo sliku neprekidno rastućeg univerzuma sa našom željom da govorimo o istinosnoj vrednosti tvrđenja koja referiraju na *sve* skupove, prirodno se nameće pretpostavka da neki „privremeni" univerzumi „aproksimiraju" krajnji, nedoseživi univerzum u onoj meri u kojoj mi to zahtevamo. [Fraenkel et al., 1973, p. 118]

Pogledajmo sada kako princip refleksije možemo da primenimo u neformalnim argumentima. Primera rada, klasa V sadrži sve prirodne brojeve (konačne fon Nojmanove ordinale). Dakle postoji skup koji sadrži sve prirodne brojeve. Ako primenimo aksiomu komprehenzije na ovaj skup, za rezultat imamo ω, skup prirodnih brojeva. Dalje, za svaki skup koji sadrži, V sadrži i sve njegove podskupove. Dakle, za svaki dati skup, postoji skup svih njegovih podskupova.

Služeći se principom refleksije, na sličan način možemo „dedukovati" još neke skupovno-teorijske aksiome. S druge strane, na osnovu ovog principa možemo pružiti izvesnu vrstu podrške postojanju nekih velikih kardinala. Recimo, univerzum V zadovoljava aksiomu zamene; dakle V je nedostižan. Na osnovu ovoga zaključujemo (oslanjajući se na princip refleksije) da postoji nedostižan kardinal. Važno je istaći da *neće svako* dobro određeno svojstvo univerzuma dopuštati refleksiju na neki skup. Na primer, V sadrži sve skupove. Reflektujući ovo svojstvo zaključujemo da postoji skup koji sadrži sve skupove. Izvesna doza pažnje je neophodna prilikom formulisanja ovih principa.

Gedel poklanja veliku pažnju ovoj ideji smatrajući je centralnom za opravdanje novih aksioma teorije skupova. Po njegovim rečima:

> [s]vi principi uspostavljanja aksioma teorije skupova moraju se moći redukovati na Akermanov princip: Apsolut je nesaznatljiv. Snaga ovog

[2] Ovi skupovi su kao Lajbnicove monade, mala ogledala univerzuma (v. *Monadologija* §56).

> principipa se uvećava kako usvajamo sve jače sisteme teorije skupova. Svi ostali principi su samo heuristički. Dakle, centralni princip je princip refleksije koji će se, izgleda, sve bolje razumeti kako se naše iskustvo uvećava. U međuvremenu, biće nam od pomoći ako izdvojimo konkretnije principe koji ili pružaju neke dodatne informacije ili nisu očigledne posledice principa refleksije kako ih trenutno razumemo. [Wang, 1996, p. 283]

Takođe, u pismu Koenu, govoreći o opravdanju aksioma koje tvrde postojanje nedostižnih kardinala, on kaže:

> Ne bih bio spreman da tvrdim da njihovo opravdanje počiva isključivo na analogiji sa prirodnim brojevima. Uveren sam, međutim, da je jasan argument koji počiva na analogiji mnogo uverljiviji od kvazi-konstruktivističkog argumenta na osnovu kojeg zamišljamo da smo na neki način u mogućnosti da dosegnemo nedostižan broj. S druge strane, Levijev princip se može smatrati uverljivijim od analogije. [Gödel, 2003b, p. 386]

Levijev (Azriel Levy) princip koji Gedel spominje je u stvari formalizacija Kantorovih ideja o Apsolutu kao onome što obuhvata sve mogućnosti a koji smo razmatrali ranije u tekstu. Levi je, međutim, bio prvi koji je sproveo sistematsko ispitivanje ovog i sličnih principa u okruženju moderne, aksiomatske teorije skupova. U ovom kontekstu, umesto o skupovno-teorijskim svojstvima, govorićemo o formulama jezika ZFC, dok ćemo umesto o proizvoljnim skupovima koji reflektuju, govoriti o inicijalnim segmentima kumulativne hijerarhije V, kao što smo to već učinili gore.

Gradeći na rezultatima koje je Montegju (Richard Montague) dokazao u svojoj tezi iz 1957, Levi je dokazao [Lévy, 1960a,b] sledeće tvrđenje[3] u ZF:

TEOREMA 119. *(Levi-Montegju) Za svaku formulu $\varphi(x_1, ..., x_n)$ jezika teorije skupova u kojoj su slobodne promenljive najviše $x_1, ..., x_n$ važi sledeće:*

[3]Ovu smo teoremu formulisali i dokazali (TEOREMA 59), u nešto opštijem obliku, u odeljku [1.6] ovog rada.

$$ZF \vdash \forall\alpha\exists\beta > \alpha\forall x_1,...,x_n \in V_\beta \left[\varphi(x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varphi^{V_\beta}(x_1,...,x_n)\right].$$

U prethodnom tvrđenju, φ^{V_β} je oznaka za relativizaciju formule φ na skup V_β (v. str. 42). Ono što ovo tvrđenje kaže jeste da, ako nam je data ma koja formula $\varphi(x_1,...,x_n)$, možemo naći proizvoljno veliki inicijalni segment kumulativne hijerarhije, takav da će formula jednako važiti u njemu kao i u čitavom univerzumu, sve dok se ograničimo na parametre, tj. (vrednosti za) slobodne promenljive u $\varphi(x_1,...,x_n)$) iz inicijalnog segmenta. Sa stanovišta ove formule, ovaj inicijalni segment u potpunosti liči na univerzum.

Posle ovoga, Levi je primetio da, ako iz skupa aksioma teorije ZF odstranimo aksiome beskonačnosti i zamene, i pridružimo im shemu refleksije iz prethodnog tvrđenja, ove aksiome postaju teoreme tako dobijenog sistema. Ovo jasno pokazuje da je princip refleksije inherentan teoriji skupova ZF. Ako imamo u vidu da su aksiome beskonačnosti i zamene (zajedno sa aksiomom partitivnog skupa) neophodne da bismo dokazali postojanje raznih beskonačnih kardinala unutar ZFC, Gedelova sugestija da se traga za proširenjima ove teorije koja bi počivala na principu refleksije deluje sasvim opravdano[4]. S druge strane, sledeća formulacija aksiome zamene pokazuje da nju samu možemo smatrati izvesnim principom refleksije:

> *Za svaku formulu $\varphi(x_1,...,x_n)$ jezika teorije skupova u kojoj su slobodne promenljive najviše $x_1,...,x_n$, postoji ordinal α takav da za svako $a_1,...,a_n \in V_\alpha$ važi $\varphi(a_1,...,a_n) \Leftrightarrow (V_\alpha,\in) \models \varphi(a_1,...,a_n)$.*

Pogledajmo sada na koji način možemo da formulišemo neka prirodna uopštenja principa refleksije. Na prvom mestu, mogli bismo zahtevati da skup V_β koji reflektuje formulu $\varphi(x_1,...,x_n)$ iz TEOREME 119. gore poseduje izvesna svojstva velikih kardinala. Ovakve principe je detaljno analizirao Levi s početka šezdesetih godina prošlog veka [Lévy, 1960a] i njima ćemo da posvetimo pažnju u nastavku ovog odeljka.

[4]Primera radi, bez aksiome zamene ne bismo mogli da dokažemo postojanje ordinala $\omega+\omega$, niti kardinala $\aleph_\omega$.

U pomenutom radu [Lévy, 1960a] Levi je formulisao sledeću shemu aksioma[5] (v. DEFINICIJA 24):

(1) Svaka normalna funkcija $f : Ord \to Ord$ ima najmanje jedan nedostižan kardinal kao vrednost.

za koju je pokazao da je ekvivalentna konjunkciji sledećih tvrđenja [Lévy, 1960b, p. 228]:

(2) Postoji prava klasa nedostižnih kardinala.

(3) Svaka normalna funkcija $f : Ord \to Ord$ ima najmanje jedan regularan kardinal kao vrednost.

U nastavku ćemo dokazati nešto jači rezultat time što ćemo pokazati da su (1) i (3) gore ekvivalentni. Isti rezultat, dokazan nešto drugačijom tehnikom može se pronaći u [Jorgensen, 1970]. Naš dokaz je možda donekle elementarniji od pomenutog.

Kao prvi korak ka dokazu našeg rezultata imamo sledeće jednostavno tvrđenje:

LEMA 120. *Shema* (3) *gore je ekvivalentna sledećoj shemi:*

(4)**:** *Svaka normalna funkcija $f : Ord \to Ord$ ima proizvoljno velike regularne fiksne tačke.*

DOKAZ. U netrivijalnom smeru, pretpostavimo da je $f : Ord \to Ord$ normalna funkcija i neka je f' funkcija koja pobrojava fiksne tačke od f, tj. $f'(\alpha) = \alpha$-ta po redu fiksna tačka of f. Funkcija f' je takođe normalna (v. napomene posle dokaza LEME 34). Za proizvoljne ordinale α, β neka je

$$g_\alpha(\beta) = f'(\alpha + \beta)$$

Jasno je da za svaki ordinal α imamo da je funkcija $g_\alpha : Ord \to Ord$ normalna. Ovo je posledica činjenice da je sabiranje ordinala koje drži levi sabirak fiksiranim normalna funkcija (v. napomene posle dokaza LEME 26) i da je rezultat kompozicije dve

[5]Ovo je tvrđenje shema, jedan beskonačan skup tvrđenja. Pošto klasa Ord nije skup, mi se u jeziku teorije ZFC služimo formulama koje ovu klasu definišu da bismo nešto o njoj tvrdili. Levijeva shema aksioma onda kaže: za svaku formulu φ jezika teorije skupova koja definiše funkciju iz ordinala u ordinale važi ...

normalne funkcije takođe normalna funkcija (LEMA 28). Na osnovu (3) imamo da za svaki ordinal α postoji ordinal β takav da je $g_\alpha(\beta) = \gamma$ regularan. Međutim, za svako takvo γ imamo da je $f(\gamma) = \gamma$, pa je γ regularna fiksna tačka od f. Štaviše, budući da je $f'(\alpha + \beta) \geq \alpha + \beta$ na osnovu monotonosti od f', imamo i da je $\gamma \geq \alpha$, tj. regularne fiksne tačke od f su neograničene u ordinalima. □

Sada možemo dokazati jaču verziju Levijeve teoreme:

POSLEDICA 121. *Sheme* (1) *i* (3) *su ekvivalentne.*

DOKAZ. Oslanjajući se na Levijevu teoremu treba da dokažemo da (3) ⇒ (1). Funkcija $\beth : Ord \to Ord$ je jedna normalna funkcija. Dobro je poznato da su sve fiksne tačke od $\beth$ jako granični kardinali. Međutim, na osnovu (4) i prethodne leme imamo da funkcija $\beth$ ima proizvoljno velike regularne, tj. nedostižne fiksne tačke. □

Na osnovu prethodnog tvrđenja takođe neposredno sledi da (3) ⇒ (2). Da bismo stekli ideju o tome koliko je shema (3), a time i shema (1) jaka, navodimo sledeće tvrđenje koje je laka posledica prethodne leme:

LEMA 122. *U ZFC shema* (1) *dokazuje postojanje prave klase $n-$nedostižnih kardinala, za svako $n < \omega$.*

DOKAZ. Slučaj $n = 0$ je (2) gore, pa pretpostavimo da tvrđenje važi za neko $n \geq 0$. Neka je funkcija $f : Ord \to Ord$ definisana na sledeći način:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \text{najmanji } n\text{−nedostižan} & \text{ako } \alpha = 0 \\ \text{najmanji } n\text{−nedostižan} > f(\beta) & \text{ako } \alpha = \beta + 1 \\ \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta) & \text{ako } \alpha = \bigcup \alpha \end{cases}$$

Jasno je da je funkcija f normalna. Primetimo da vrednost funkcije f za granični ordinal α ne mora biti $n-$nedostižan kardinal. Na primer, $f(\omega)$ je singularan kardinal kofinalnosti ω. Međutim, oslanjajući se na LEMU 120 možemo da zaključimo da funkcija f ima proizvoljno velike regularne fiksne tačke. Neka je $f(\gamma) = \gamma$ jedna takva. Primetimo da za svako $\alpha < \gamma$ imamo da je $f(\alpha+1)$ u stvari $n-$nedostižan kardinal ispod γ, a kako ovakvih ima $\gamma-$mnogo, možemo da zaključimo da je γ $(n+1)-$nedostižan. $\square$

Prethodni rezultat se može i dodatno ojačati transfinitnom iteracijom definicije $n-$nedostižnih kardinala, čime bismo dobili $\alpha-$nedostižne kardinale (v. odeljak [1.7]). Za nas je međutim posebno zanimljivo da je shema (1) ekvivalentna sledećem principu refleksije: *Za svaku formulu $\varphi(x_1,...,x_n)$ jezika teorije skupova u kojoj su slobodne promenljive najviše $x_1,...,x_n$ važi*

$$R_1: \quad \forall\alpha\exists\beta>\alpha(\beta \text{ JE NEDOSTIŽAN} \wedge \forall x_1,...,x_n \in V_\beta\left[\varphi(x_1,...,x_n) \leftrightarrow \varphi^{V_\beta}(x_1,...,x_n)\right]).$$

Za dokaz ove ekvivalencije v. [Drake, 1974]. Sledeće ojačanje principa refleksije zahtevalo bi postojanje Maloovog kardinala β takvog da V_β reflektuje gorenavedenu formulu itd. Na ovaj način, oslanjajući se na pomenuta uopštenja principa refleksije, možemo da opravdamo postojanje velikih kardinala na način koji je Gedel sugerisao u citatu s početka ovog poglavlja. Nažalost, kardinali čije smo postojanje u stanju da dokažemo pomoću principa koje smo do sada formulisali (nedostižni, $\alpha-$nedostižni, Maloovi itd.) žive veoma nisko u hijerarhiji velikih kardinala. Da bismo dobili kardinale veće od ovih moraćemo da se poslužimo nešto drugačijom idejom.

Primetimo da ako princip refleksije zapišemo kao shemu u jeziku $\mathscr{L}_{ZF}$, onda možemo da primenimo ovaj princip na njega samog. Ovo će za posledicu imati da postoje inicijalni segmenti kumulativne hijerarhije V_α za koje važi da svako tvrđenje koje je istinito u jednom takvom segmentu mora biti istinito u nekom ranijem segmentu V_β gde je $\beta < \alpha$. Ako osim toga dopustimo da se parametri višeg reda javljaju u formulama koje reflektujemo, onda će ordinali koji indeksiraju takve nivoe imati svojstva velikih kardinala daleko većih od onih koje smo do sada imali prilike da dobijemo. Da bismo ovu ideju pojasnili biće nam na prvom mestu neophodno da definišemo hijerarhiju formula jezika višeg reda teorije skupova i tome ćemo se posvetiti u nastavku ovog poglavlja.

Levijevu hijerarhiju formula jezika $\mathscr{L}$, gde je $\mathscr{L}$ proizvoljan jezik prvog reda koji širi jezik $\mathscr{L}_{ZF}$, definišemo na sledeći način. Formula je Σ_0 i Π_0 ako sadrži samo ograničene kvantifikatore. Formula je Σ_{n+1} ako je oblika $\exists x_1 ... \exists x_k \psi$ gde je ψ Π_n- formula. Formula je Π_{n+1} ako je oblika $\forall x_1 ... \forall x_k \psi$ gde je ψ Σ_n- formula.

Ova se hijerarhija može uopštiti i na jezike višeg reda, koji se definišu na sličan način kao i jezik Peanove aritmetike n-tog reda, $\mathscr{L}_{PA^n}$, o kojem smo govorili u uvodu. U opštem slučaju ovi će jezici imati promenljive svake sorte $X^i, Y^i, Z^i, ...$ gde je i prirodan broj. Ako je D domen strukture našeg jezika, onda su promenljive $X^1, Y^1, Z^1, ...$ uobičajene individualne promenljive koje uzimaju vrednosti iz domena, promenljive $X^2, Y^2, Z^2, ...$ uzimaju vrednosti iz partitivnog skupa domena $\mathscr{P}(D)$, dok promenljive $X^{j+1}, Y^{j+1}, Z^{j+1}, ...$ uzimaju vrednosti iz $\mathscr{P}^j(D)$, gde je $\mathscr{P}^j(D)$ $j-$ta iteracija operacije partitivnog skupa. Za formulu ovog jezika kažemo da je Σ_n^m ako započinje blokom egzistencijalnih kvantifikatora sorte $m+1$, koji sledi blok univerzalnih kvantifikatora sorte $m+1$ itd., sa najviše n alternacija ovih blokova, posle kojih sledi formula koja sadrži promenljive sorte najviše $m+1$ i kvantifikatore sorte najviše m. Analogno prethodnom, za formulu ovog jezika kažemo da je Π_n^m ako započinje blokom univerzalnih kvantifikatora sorte $m+1$, koji sledi blok egzistencijalnih kvantifikatora sorte $m+1$ itd., sa najviše n alternacija ovih blokova, posle kojih sledi formula koja sadrži promenljive sorte najviše $m+1$ i kvantifikatore sorte najviše m.

Služeći se jezicima višeg reda možemo da definišemo važnu klasu kardinala koju smo ranije spominjali a koja će nam biti neophodna i u nastavku ovog rada. U nastavku ćemo da podrazumevamo da je φ formula nekog takvog jezika u kojoj se samo promenljive drugog reda $X_1^2, ..., X_n^2$ javljaju slobodno, α će biti proizvoljan ordinal a $U_1, ..., U_n$ podskupovi od V_α.

DEFINICIJA 123. *α je opisiv pomoću formule φ sa parametrima $U_1, ..., U_n$* akko

$$(V_\alpha, \in) \models \varphi(U_1, ..., U_n)$$

i za svako $\beta < \alpha$ važi

$$(V_\beta, \in) \not\models \varphi(U_1 \cap V_\beta, \ldots, U_n \cap V_\beta).$$

α je opisiv pomoću formule φ akko za neke $U_1, \ldots, U_n \subseteq V_\alpha$ važi da je α opisiv pomoću formule φ sa parametrima $U_1, \ldots, U_n$.

Ako je Q neki skup formula jezika višeg reda u kojima se samo promenljive drugog reda javljaju slobodno, onda možemo da definišemo sledeću klasu ordinala:

DEFINICIJA 124. [Hanf and Scott, 1961] α je *$Q-$neopisiv* akko α nije opisiv ni pomoću jedne formule iz Q.

Skupovi Q koji će nas posebno da zanimaju su Π^m_n ili Σ^m_n, za $m, n < \omega$. Pre nego što kažemo nešto o veličini neopisivih kardinala, videćemo kako bi izgledali argumenti Gedelovog tipa koji bi govorili u prilog njihovom postojanju. Prisetimo se da smo u odeljku [4.3] videli na koji način Gedel opravdava postojanje jako nedostižnih kardinala. Pošto je klasa ordinala Ord apsolutno beskonačna, razložno je pretpostaviti da koju god proceduru generisanja sve većih i većih ordinala da posmatramo, postoje ordinali koji su za ovu proceduru zatvoreni. Gedelov primer bio je najmanji ordinal $\kappa > \omega$ za koji važi:

(1) $\alpha < \kappa \Rightarrow \beth_\alpha < \kappa$;

(2) $(\alpha < \kappa \wedge f : \alpha \to \kappa) \Rightarrow \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta) < \kappa$.

Jednostavno je videti da je κ jako nedostižan kardinal. Slične argumente je moguće ponuditi i za $\alpha-$nedostižne i Maloove kardinale, o tome smo već govorili u odeljku [4.3].

Neopisivi ordinali počivaju na ovim istim idejama. Ako nam je data neka kolekcija opisa procedura sličnih onima gore, mi tragamo za ordinalima α takvim da važi sledeće: ako je V_α zatvoren za svaku takvu proceduru, onda postoji $\beta < \alpha$ takvo da je V_β takođe zatvoren za svaku takvu proceduru.

Važno je primetiti da se u procedurama koje ovde razmatramo veoma često oslanjamo na proizvoljne podskupove nekog ordinala ili nivoa kumulativne hijerarhije.

Primera radi, da bismo dobili regularnost ordinala κ u Gedelovom primeru gore, κ mora biti zatvoren za $\bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)$, za svako $\alpha < \kappa$ i svako $f \subseteq V_\kappa$ koje je funkcija. Iz ovog razloga su parametri (slobodne promenljive) drugog reda prisutni u definiciji neopisivih ordinala. Kada to ne bi bilo tako, pojam neopisivog ordinala bi bio značajno oslabljen i ne bismo mogli da njime prevaziđemo velike kardinale kojima smo se do sada bavili. U nastavku ćemo da vidimo koliko su zaista veliki neopisivi kardinali.

Neki od velikih kardinala koje smo opisali ranije u ovom radu (v. odeljak [1.7]) sasvim se lepo mogu predstaviti pomoću pojma neopisivosti. Recimo, poznato je da je kardinal κ Π^1_0-neopisiv akko je κ jako nedostižan kardinal. Takođe, kardinal κ je Π^1_1-neopisiv akko je slabo kompaktan [Hanf and Scott, 1961]. Ako sa σ^m_n označimo najmanji Σ^m_n-neopisiv kardinal a sa π^m_n najmanji Π^m_n-neopisiv kardinal, onda može da se pokaže sledeće (za dokaz v. [Kanamori, 2009]):

Teorema 125. *[Hanf and Scott, 1961] (a) $\pi^1_1 = \sigma^1_2 < \pi^1_2 = \sigma^1_3 < \ldots$ (b) za svako $m > 1$ i $n > 0$, $\pi^m_n \neq \sigma^m_n$ i $\pi^m_n < \sigma^m_{n+1}, \pi^m_{n+1}$.*

S druge strane, Moskovakis (Yiannis Moschovakis) je uz Gedelovu aksiomu konstruktibilnosti dokazao sledeće poboljšanje prethodnog rezultata:

Teorema 126. *[Moschovakis, 1975] Ako $V = L$, $m > 1$ i $n > 0$, onda $\sigma^m_n < \pi^m_n$.*

Pomalo neočekivan rezultat koji je komplementaran prethodnom, dokazao je Hauzer (Kai Hauser): konzistentno je sa teorijom ZFC da za svako $m \geq 2$ važi $\pi^m_1 < \sigma^m_1$. Takođe, Hauzer je dokazao da ako je teorija $ZFC+$"postoji Σ^m_n-neopisiv kardinal i Π^m_n-neopisiv kardinal ispod njega" konzistentna, onda je i teorija $ZFC + GCH + \pi^m_n < \sigma^m_n$ konzistentna [Hauser, 1991, 1992].

Definiciju neopisivih kardinala gore možemo da uopštimo na sledeći način:

Definicija 127. Kardinal κ je *totalno neopisiv* akko je Π^m_n-neopisiv za svako $m, n < \omega$.

Nakon što su Hanf (William Hanf) i Skot dokazali da je svaki *merljiv kardinal*[6] Π_1^2-neopisiv, Vot (Robert Vaught) je pokazao da Π_1^2-neopisivost ne može pružati potpunu karakterizaciju merljivosti:

TEOREMA 128. *[Vaught, 1963] Ako je $\mathscr{U}$ normalan ultrafilter nad merljivim kardinalom κ, onda* $\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE TOTALNO NEOPISIV}\} \in \mathscr{U}$.

Jensen je predložio još jedno uopštenje prethodnih definicija. Ako sa jezika koji sadrži samo konačne tipove pređemo na jezik koji dopušta i beskonačne tipove, moguće je definisati sledeću klasu kardinala:

DEFINICIJA 129. Ako je ν ordinal > 0, kažemo da je kardinal β $\nu-$*neopisiv* akko za svaku formulu φ jezika $\mathscr{L}_{ZF}$ koja ima n slobodnih promenljivih i proizvoljne $U_1, \ldots, U_n \subseteq V_\beta$ važi sledeće: ako

$$(V_{\beta+\nu}, \in) \models \varphi(U_1, \ldots, U_n),$$

onda postoji $\delta < \beta$ takvo da važi

$$(V_{\delta+\nu}, \in) \models \varphi(U_1 \cap V_\delta, \ldots, U_n \cap V_\delta).$$

Sledeće tvrđenje pokazuje da se zaista radi o pojmu koji je snažniji od onog koji smo definisali služeći se jezicima višeg reda (za dokaz v. [Drake, 1974, Lemma 9.4.2]):

TEOREMA 130. *Ako je $\nu \geqslant \omega$ i κ je ν-neopisiv, onda je κ totalno neopisiv.*

Što se tiče konačnih vrednosti ordinala ν gore, znamo da je kardinal $m-$neopisiv, za neko $m < \omega$, akko je $\Pi_0^{m+1}-$neopisiv.

U ovom odeljku bavili smo se principom refleksije i njegovim uopštenjima u kontekstu ZFC. Takođe smo videli kako na osnovu ovog principa možemo da motivišemo

[6]Kardinal $\kappa > \aleph_0$ je *merljiv* akko postoji $\kappa-$potpun, neglavni ultrafilter nad κ (v. DEFINICIJA 36). Iako možda ne izgleda tako, merljivi kardinali su *veoma* veliki. Primera radi, oni su veći od svih velikih kardinala koje smo definisali do sada. U nastavku rada daćemo i jednu alternativnu definiciju merljivih kardinala, a definisaćemo i neke velike kardinale koji su veći od ovih.

definiciju neopisivih kardinala. U sledećem odeljku ćemo da zauzmemo drugačije stanovište; ispitaćemo Akermanovu teoriju skupova u čijoj aksiomatizaciji princip refleksije igra ključnu ulogu. Taj odeljak ne donosi ništa novo i ima za cilj da čitaoca bolje upozna sa Akermanovom teorijom.

6.3. Akermanova teorija skupova

Princip refleksije moguće je posmatrati i kao motivaciju za formulisanje nekih alternativnih teorija skupova. Tako na primer Akermanova teorija skupova A neposredno počiva na ideji „otvorenosti” ili „nedovršenosti” pojma skupa [Ackermann, 1956]. Jezik Akermanove teorije A je jezik prvog reda sa jednakošću $\mathscr{L}_A$ koji pored nelogičkog simbola $\in$, sadrži i individualnu konstantu V. Objekti domena ove teorije su klase, pri čemu „$x \in V$” čitamo kao „x je skup”. Dakle, unutar teorije A možemo razlikovati klase i skupove, svaki skup je istovremeno i klasa ali nisu sve klase skupovi. Takođe, ne pretpostavlja se da je svaki element klase skup. Aksiome teorije A su:

($A1$): $\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y$

($A2$): $\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow (y \in V \wedge \varphi))$, gde je φ proizvoljna formula u kojoj se x ne javlja slobodno.

($A3$): $(x \in V \wedge (y \in x \vee y \subseteq x)) \rightarrow y \in V$

($A4$): $\forall x_1, \ldots, x_n \in V \left[\forall y(\varphi \rightarrow y \in V) \rightarrow \exists z \in V \forall y(y \in z \leftrightarrow \varphi)\right]$, gde je φ proizvoljna formula u kojoj su slobodne promenljive najviše $x_1, \ldots, x_n, y$ i koja ne sadrži V.

Aksioma ($A1$) je standardna *aksioma ekstenzionalnosti*, ($A2$) je verzija *sheme aksiome komprehenzije*, dok se ($A3$) naziva *aksiomom naslednosti* ili *supertranzitivnosti*. Naziv te aksiome je prilično intuitivan budući da ona tvrdi da je V zatvoren ne samo za elemente svojih elemenata (pa je time tranzitivan) nego i za njihove podskupove, otud predlog *super* u složenici. Aksioma ($A4$) naziva se *shemom aksiome komprehenzije za skupove* i predstavlja centralno mesto Akermanove teorije. U ovoj shemi odslikava se princip refleksije. Pre no što pobliže razmotrimo motivaciju za ovu aksiomu, pogledajmo šta se događa ako odbacimo neke od uslova koji su navedeni u njenoj formulaciji. Na primer, ako odbacimo uslov da formula φ ne sme sadržati V i u $(A4)$ φ instanciramo formulom $y \in V \wedge \psi(y)$, za posledicu imamo da postoji *skup* $z = \{y : \psi(y)\}$, gde je $\psi(y)$ proizvoljna formula. Dakle, postoji i Raselov skup $\{y : y \notin y\}$, pa je naša teorija inkonzistentna.

Videli smo da centralna shema aksiome Akermanove teorije, tj. shema $(A4)$ kaže: ako je $x \subseteq V$ definabilan samo pomoću skupovnih parametara, ne služeći se individualnom konstantom V, onda $x \in V$. Kakvu vrstu motivacije možemo pružiti za ovo tvrđenje? Akerman polazi od Kantorove dobro poznate definicije pojma skupa: „Pod skupom razumem svako združivanje dobro određenih i razgovetnih objekata naše intuicije ili mišljenja [...] u jednu celinu.” [Cantor, 1962, p. 282] Akcenat ovde počiva na pojmu dobre određenosti. Po Akermanovom mišljenju, da bi neka kolekcija skupova mogla i sama biti skup, „ono što toj kolekciji pripada i ono što joj ne pripada mora biti strogo određeno” [Ackermann, 1956, p. 337] Ako, pak, razmotrimo sam pojam skupa, videćemo da ono što pod taj pojam potpada ne zadovoljava pomenutu vrstu strogosti. Zašto? U okruženju teorije skupova, nama nikada nisu dati svi skupovi odjednom, nego polazeći od nekih skupova koji su nam dati i primenjujući izvesne konstrukcije na njima, iznova i iznova dolazimo do novih skupova. U ovom smislu je ovaj pojam „otvoren” ili „nedovršen”, kao što smo napomenuli gore. Građenje skupova na ovaj način, „odozdo” da se tako izrazimo, je proces koji se potencijalno nastavlja *ad infinitum*. Ulogu pojma skupa, ili skupovno-teorijskog univerzuma, u Akermanovoj teoriji igra individualna konstanta V. Antecedens aksiome $(A4)$ nam onda daje dovoljne uslove pod kojima je izvesna kolekcija „strogo određena”. Ako su ovi uslovi ispunjeni, možemo zaključiti da je pomenuta kolekcija u stvari skup.

Ako sa A^* označimo teoriju koja nastaje kada Akermanovoj teoriji pridružimo aksiomu zasnivanja za skupove:

$(A5)$: $\quad x \in V \wedge \exists y(y \in x) \rightarrow \exists z(z \in x \wedge \forall v(v \in z \rightarrow v \notin x))$

možemo pokazati da je A^* konzervativna u odnosu na ZF u sledećem smislu: ako je σ rečenica jezika ZF (dakle, koja ne sadrži V) i σ^V njena relativizacija na V, onda

$$A^* \vdash \sigma^V \Rightarrow ZF \vdash \sigma.$$

Poslednji rezultat dokazali su Levi i Vot početkom šezdesetih godina prošlog veka [Lévy and Vaught, 1961]. Nekih deset godina kasnije, Rajnhard (William Reinhardt) je u svojoj doktorskoj tezi pokazao da važi implikacija i u drugom smeru, tj. ako je σ kao gore, onda

$$A^* \vdash \sigma^V \Leftrightarrow ZF \vdash \sigma.$$

Teorije A^* i ZF su ekvikonzistentne i dokazuju identične teoreme o skupovima [Reinhardt, 1970].

Kao ilustraciju, u nastavku ćemo pokazati kako izgledaju dokazi nekih od aksioma (tačnije, njihovih relativizacija na V) teorije ZF u A. Ovi se dokazi mogu pronaći u Akermanovom radu [Ackermann, 1956]. Posle toga ćemo da predstavimo najvažnije Greveove (Rudolf Grewe) rezultate iz [Grewe, 1969] koji pružaju karakterizaciju modela Akermanove teorije A. Pošto je cilj ostatka ovog odeljka da čitaoca bolje upozna sa Akermanovom teorijom i nije nužan za ono što u radu sledi, čitalac koji želi može ga bez bojazni preskočiti.

Pogledajmo sada kako unutar teorije A možemo da dokažemo relativizacije na V nekih od aksioma teorije ZF. Aksioma praznog skupa je sledeće tvrđenje:

$$\exists y(y \in V \wedge \forall z(z \notin y)).$$

Na osnovu $(A4)$ imamo

$$\forall x(x \neq x \rightarrow x \in V) \rightarrow \exists y(y \in V \wedge \forall z(z \in y \leftrightarrow z \neq z))$$

Kako je antecedens prethodne implikacije očigledno istinit, ovo nam daje aksiomu praznog skupa. Aksioma (neuređenog) para je sledeće tvrđenje:

$$(x, y \in V) \rightarrow \exists z(z \in V \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y)))$$

Imamo sledeći instancu od $(A4)$:

$$(x, y \in V) \to (\forall u((u = x \vee u = y) \to u \in V) \to$$

$$\exists z(z \in V \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow (u = x \vee u = y))))$$

Ako su x i y skupovi, tj. $x, y \in V$ jasno je da je i $\forall u((u = x \vee u = y) \to u \in V)$ istinito, pa postoji *skup* z čiji su jedini elementi x i y, na osnovu $(A4)$.

Aksioma unije je sledeće tvrđenje:

$$x \in V \to \exists y(y \in V \wedge \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists u(z \in u \wedge u \in x)))$$

Na osnovu aksiome $(A3)$ imamo ako je $x \in V$ i $u \in x$ onda $u \in V$. Takođe, imamo da važi $x \in V \to \forall z(\exists u(u \in x \wedge z \in u) \to z \in V)$. Primenjujući aksiomu $(A4)$ možemo da zaključimo da je i aksioma unije dokaziva u A. Aksioma partitivnog skupa glasi:

$$y \in V \to \exists z(z \in V \wedge \forall x(x \in z \leftrightarrow x \subseteq y))$$

Slično kao i u prethodnom slučaju, oslanjajući se na $(A3)$ imamo

$$y \in V \to \forall x\big(x \subseteq y \to x \in V\big).$$

Primenjujući aksiomu $(A4)$ na formulu $x \subseteq y$ dobijamo

$$\exists z\big(z \in V \wedge \forall x\big(x \in z \leftrightarrow x \subseteq y\big)\big).$$

Takođe, u A možemo dokazati i aksiomu beskonačnosti:

$$\exists y(y \in V \wedge \exists x \forall z(z \notin x \wedge x \in y) \wedge$$

$$\forall x, z(x \in y \wedge \forall u(u \in z \leftrightarrow u = x) \to z \in y)$$

Drugim rečima, postoji skup koji sadrži prazan skup i koji za svaki element x koji sadrži, sadrži i $x \cup \{x\}$. Da bi dokazali da je aksioma beskonačnosti dokaziva u A, označimo sa $\varphi(x)$ sledeću formulu:

$$\forall y(\exists z \forall u(u \notin z \land z \in y) \land$$

$$\forall z, u((u \in y \land \forall v(v \in z \leftrightarrow v = u) \rightarrow z \in y) \rightarrow x \in y)$$

Onda imamo da važi

$$\varphi(x) \land \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in V) \rightarrow (\exists z \forall u(u \notin z \land z \in V) \land$$

$$\forall z, u(u \in V \land \forall v(v \in z \leftrightarrow v = u) \rightarrow z \in V) \rightarrow x \in V)$$

Primetimo da na osnovu dokaza aksioma praznog skupa i unije imamo da je

$$\exists z \forall u (z \in V \land u \notin z)$$

kao i $\forall z, u(u \in V \land \forall v(v \in z \leftrightarrow v = u) \rightarrow z \in V)$ dokazivo, kao i da na osnovu aksiome $(A1)$ postoji jedinstveno z takvo da važi $\forall v(v \in z \leftrightarrow v = u)$. Na osnovu ovoga, imamo da važi $\varphi(x) \land \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in V) \rightarrow x \in V$. Oslanjajući se na aksiomu $(A2)$, imamo $\exists y \forall z \big(z \in y \leftrightarrow z \in V\big)$ što nam, zajedno sa prethodnim, daje $\varphi(x) \rightarrow x \in V$. Na osnovu aksiome $(A4)$ ovo nam daje (1) $\exists w(w \in V \land \forall s \big(s \in w \leftrightarrow \varphi(s)\big))$. Pomoću $(A1)$ možemo zaključiti da $\forall z(z \notin x) \rightarrow (\exists z \forall u \big(u \notin z \land z \in y\big) \rightarrow x \in y)$ kao i (2) $\forall z(z \notin x) \rightarrow \varphi(x)$. Međutim, na osnovu strukture formule $\varphi(x)$ zaključujemo da važi (3) $(\forall u(u \in w \leftrightarrow u = x) \land \varphi(x)) \rightarrow \varphi(w)$. Na osnovu (1), (2) i (3) možemo zaključiti da je aksioma beskonačnosti dokaziva u A.

Na kraju, pokažimo da je u A dokaziva i aksioma separacije:

$$y \in V \rightarrow \exists z(z \in V \land \forall x(x \in z \leftrightarrow (\psi(x) \land x \in y)))$$

gde je $\psi(x)$ formula u kojoj se samo x javlja slobodno.

Na osnovu aksiome $(A3)$ imamo $y \in V \rightarrow \forall x((\psi(x) \land x \in y) \rightarrow x \in V)$. Aksioma $(A2)$ nam daje (1) $y \in V \rightarrow \exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow (\psi(x) \land x \in y))$ kao i $\forall x(x \in z \leftrightarrow (\psi(x) \land x \in y)) \rightarrow$

$z \subseteq y$. Iz prethodno rečenog, na osnovu $(A3)$ imamo (2) $y \in V \rightarrow (\forall x(x \in z \leftrightarrow (\psi(x) \wedge x \in y)) \rightarrow z \in V)$. Formule (1) i (2) nam sada, pomoću aksiome $(A1)$, daju traženi zaključak.

Takođe, zanimljivo je ispitati kako se intuitivni princip refleksije da je „V nesaznatljiv" odslikava unutar teorije A. Da bi ovo učinili biće nam neophodne izvesne definicije. Na prvom mestu neka je $Tran(x)$ skraćenica za formulu $\forall y, z(y \in z \wedge z \in x \rightarrow y \in x)$, „$x$ je tranzitivan". Neka je $St(x)$ skraćenica za formulu

$$Tran(x) \wedge \forall y, z(z \subseteq y \wedge y \in x \rightarrow z \in x)$$

„x je supertranzitivan". Sa $Ord(x)$, što čitamo kao „x je ordinal", ćemo se služiti da označimo formulu

$$St(x) \wedge \forall y, z, w \in x(y \notin y \wedge (y \in z \vee y = z \vee z \in y) \wedge$$

$$(w \in y \in z \rightarrow w \in z)) \wedge \forall u(u \subseteq x \wedge \exists t(t \in u) \rightarrow$$

$$\exists t(t \in u \wedge \neg \exists s(s \in t \wedge s \in u))) \wedge$$

$$\forall u, v \subseteq x \exists w \subseteq x \forall t(t \in w \leftrightarrow t \in u \wedge t \notin v)$$

U A možemo dokazati da postoji klasa svih ordinala koji su skupovi, koja je jedinstvena. Ovu ćemo klasu označavati sa α. Dakle, $t \in \alpha \leftrightarrow t \in V \wedge Ord(t)$. Sada smo spremni da formulišemo neke od principa refleksije u A (gde je φ proizvoljna $\in$ −formula):

(1) $A \vdash \neg(y \in V \wedge \forall x(x = \alpha \leftrightarrow \varphi(x, y)))$, PRINCIP NEDEFINABILNOSTI OD α.

(2) $A \vdash y \in V \wedge \varphi(\alpha, y) \rightarrow \exists x \in \alpha(\varphi(x, y))$, PRINCIP REFLEKSIJE ZA α.

(3) $A^* \vdash y \in V \wedge \varphi(V, y) \rightarrow \exists z \in V(\varphi(z, y))$, PRINCIP REFLEKSIJE ZA V.

Za dokaz v. [Reinhardt, 1970]. Takođe, analogno formuli (1) gore, u A možemo da dokažemo sledeći PRINCIP NEDEFINABILNOSTI OD V :

$$\neg \exists y(y \in V \wedge \forall x(x \in V \leftrightarrow \varphi(x, y)))$$

DOKAZ. Pretpostavimo da važi $\forall x(x \in V \leftrightarrow \varphi(x, y))$ kao i $y \in V$. Na osnovu $(A4)$, postoji $z \in V$ takav da važi $\forall x(x \in z \leftrightarrow \varphi(x, y))$. Na osnovu aksiome $(A1)$ imamo da je $z = V$, pa je i $V \in V$. Iz aksiome $(A2)$, međutim, sledi da postoji v takav da važi $\forall x(x \in v \leftrightarrow x \in V \wedge x \notin x)$. Dakle, važi i $\forall x(x \in v \to x \in V)$ pa na osnovu aksiome $(A3)$ imamo $v \in V$. Međutim, onda imamo da je $v \in v \leftrightarrow v \notin v$. □

Princip nedefinabilnosti od V ima i semantičku formulaciju. Naime, neka je $\mathcal{M} = (M, U, E)$ model jezika $\mathcal{L}_A$, gde je $M \neq \emptyset$ domen, $U \subseteq M$ interpretacija individualne konstante V (klasa svih skupova) i $E \subseteq M^2$ interpretacija od $\in$ (relacija pripadnosti za $\mathcal{M}$).

Sledeće tvrđenje predstavlja semantičku varijantu principa nedefinabilnosti od V:

TEOREMA 131. *[Grewe, 1969] Ako je $\mathcal{M} = \langle M, U, E\rangle$ model teorije A onda U nije definabilan*[7] *u $(\mathcal{M}, U)$.*

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno. Dakle, postoje $b_1, \ldots, b_n \in U$ i formula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ takvi da za svako $a \in M$ važi:

$$a \in U \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_n) \tag{6.3.1}$$

Na osnovu ovoga sledi da

$$\mathcal{M} \models b_1, \ldots, b_n \in V \wedge \forall x(\varphi(x, b_1, \ldots b_n) \to x \in V)$$

Budući da je $\mathcal{M} \models A$, imamo da važi

$$\mathcal{M} \models \exists z(z \in V \wedge \forall x(x \in z \leftrightarrow \varphi(x, b_1, \ldots, b_n))$$

Dakle, postoji neko $c \in U$ takvo da za svako $a \in M$:

$$a \in c \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi(a, b_1, \ldots, b_n)$$

Međutim, na osnovu (6.3.1) vidimo da je $c \in U$ i u isto vreme $c = U$ što je nemoguće, čime je tvrđenje dokazano. □

[7] Ako je $\mathcal{M} = \langle M, U, E\rangle$ model teorije A i $N \subseteq M$, onda kažemo da je N *definabilan u* $(\mathcal{M}, B)$ akko je N definabilan u $\mathcal{M}$ sa parametrima iz B.

Rezultat konverzan prethodnom može se formulisati za takozvane *standardne modele* Akermanove teorije skupova. U najkraćem, model teorije A je standardan ako je oblika $(V_\alpha, V_\beta, \in)$, gde su V_α i V_β , $\beta < \alpha$, inicijalni segmenti kumulativne hijerarhije.

TEOREMA 132. *[Grewe, 1969] Neka je $\mathcal{V} = (V_\alpha, V_\beta, \in)$, $\beta < \alpha$ i α je granični ordinal. Ako V_β nije definabilan u $(\mathcal{V}, V_\beta)$, onda je $\mathcal{V}$ model teorije A.*

DOKAZ. Budući da su nivoi kumulativne hijerarhije tranzitivni i supertranzitivni, tj. $x \in y \in V_\gamma \Rightarrow x \in V_\gamma$ i $x \subseteq y \in V_\gamma \Rightarrow x \in V_\gamma$, za svako x, y i ordinal γ, lako je videti da aksiome $(A1 - A3)$ važe u $\mathcal{V}$.

Da bi pokazali da aksioma $(A4)$ važi u $\mathcal{V}$ pretpostavimo da V_β nije definabilan u $(\mathcal{V}, V_\beta)$ i neka je $\varphi(x, y_1, ..., y_n)$ proizvoljna $\in$ –formula, z promenljiva različita od $x, y_1, ..., y_n$ i $b_1, ..., b_n \in V_\alpha$. Pretpostavimo da

$$\mathcal{V} \models b_1, ..., b_n \in V \wedge \forall x(\varphi(x, b_1, ..., b_n) \to x \in V) \tag{6.3.2}$$

Kako aksioma $(A2)$ važi u $\mathcal{V}$, imamo

$$\mathcal{V} \models \exists z \forall x(x \in z \leftrightarrow x \in V \wedge \varphi(x, b_1, ..., b_n))$$

Na osnovu (6.3.2) postoji $c \in V_\alpha$ takvo da je $c \subseteq V_\beta$ i važi

$$\mathcal{V} \models \forall x(x \in c \leftrightarrow \varphi(x, b_1, ..., b_n)) \tag{6.3.3}$$

Neka je γ rang od c, tj. γ je najmanji ordinal takav da $c \in V_{\gamma+1}$. Imamo da je $\gamma \leq \beta$. Ako je $\gamma < \beta$ onda je $c \in V_\beta$ i time je

$$\mathcal{V} \models c \in V \wedge \forall x(x \in z \leftrightarrow \varphi(x, b_1, ..., b_n))$$

što je konsekvens aksiome $(A4)$ koji je trebalo dokazati. S druge strane, pokazaćemo da $\gamma = \beta$ ne može biti slučaj, čime će naš dokaz biti završen.

Pretpostavimo da je $\gamma = \beta$. Neka je $\psi(u, y_1, ..., y_n)$ skraćenica za sledeću formulu

$$\exists x, w, v(\varphi(x, y_1, ..., y_n) \wedge RK(x, v) \wedge R(v, w) \wedge u \in w)$$

Onda ćemo, na osnovu pretpostavke da je $\gamma = \beta$, za svako $d \in V_\alpha$ dokazati da važi:

$$d \in V_\beta \Leftrightarrow \mathcal{V} \models \psi(d, b_1, ..., b_n) \tag{6.3.4}$$

Međutim, kako na osnovu (6.3.2) imamo $b_1, ..., b_n \in V_\beta$, ovo povlači da je V_β definabilan u $(\mathcal{V}, V_\beta)$ što je suprotno našoj početnoj pretpostavci.

Ostaje nam, dakle, da dokažemo da pod pretpostavkom $\gamma = \beta$ važi i (6.3.4). Pretpostavimo da $d \in V_\beta$. Neka je δ rang od d. Jasno je da je $\delta < \beta$ kao i da je β granični ordinal. Budući da imamo da $\gamma = \beta$, postoji neko $a \in V_\beta$ takvo da je rang od $a > \delta$ i važi

$$\mathcal{V} \models \varphi(a, b_1, ..., b_n)$$

Neka je ζ rang od a. Onda imamo da je $\delta < \zeta < \beta$ i $d \in V_\zeta$. Na osnovu apsolutnosti od $x \in y$, $R\left(x, y\right)$ i $RK\left(x, y\right)$ imamo da važi $\mathcal{V} \models d \in V_\zeta$, $\mathcal{V} \models R(\zeta, V_\zeta)$ kao i $\mathcal{V} \models RK(\zeta, a)$. Dakle, imamo da važi i sledeće

$$\mathcal{V} \models \psi(d, b_1, ..., b_n)$$

Time smo dokazali smer sleva na desno od (6.3.4). Da bi dokazali implikaciju u suprotnom smeru pretpostavimo da važi

$$\mathcal{V} \models \psi(d, b_1, ..., b_n)$$

Na osnovu definicije formule $\psi(u, y_1, ..., y_n)$ sledi da postoje $a, r, s \in V_\alpha$ takvi da važi

$$\mathcal{V} \models \varphi(a, b_1, ..., b_n), \quad \mathcal{V} \models RK(r, a), \quad \mathcal{V} \models R(r, s), \quad \mathcal{V} \models d \in s$$

Iz (6.3.2) i apsolutnosti formula $x \in y$, $R(x, y)$ i $RK(x, y)$ možemo da zaključimo da je $a \in c$, r je rang od a, da je $s = R(r)$ kao i da je $d \in s$. Kako je $c \subseteq V_\beta$ sledi da je $d \in V_\beta$ što je i trebalo pokazati. □

6.4. Alkorova teorija T

U ovom odeljku predstavićemo jedno proširenje Akermanove teorije A koje, za razliku od Akermanove teorije, dokazuje postojanje nekih (malih) velikih kardinala. Ovu je teoriju formulisao Alkor [Alkor, 1980] i ona je izražena na istom jeziku, $\mathscr{L}_A$, kao i Akermanova teorija. Predstavićemo Alkorov dokaz konzistentnosti ove teorije koji ćemo donekle da poboljšamo. Koliko mi je poznato, ovaj rezultat do sada nije objavljen u literaturi. Pre nego što formulišemo Alkorovu teoriju koju ćemo označavati sa T, uvešćemo neke skraćenice koje će olakšati dalje izlaganje.

Sa $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ ćemo označavati konačne nizove promenljivih. Ako je $\vec{x}$ niz $x_1, \ldots, x_k$ a $\vec{y}$ niz $y_1, \ldots, y_k$ za $k < \omega$, onda pišemo $\vec{x} \subseteq \vec{y}$ mesto $x_1 \subseteq y_1 \wedge \ldots \wedge x_k \subseteq y_k$. Takođe, za proizvoljan term t, pisaćemo $\vec{x} \in t$ $(\vec{x} \subseteq t)$ mesto $x_1 \in t \wedge \ldots \wedge x_k \in t$ $(x_1 \subseteq t \wedge \ldots \wedge x_k \subseteq t)$, gde je $\vec{x}$ niz dužine k. Sa $\varphi\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ ćemo označavati formulu čije su sve slobodne promenljive među $\vec{x}, \vec{y}$.

Sada možemo da formulišemo Alkorovu teoriju T. Jedina razlika u odnosu na teoriju A jeste što mesto aksiome $(A4)$ imamo sledeću aksiomu

$(T4)$**:** $\vec{x} \in V \wedge \vec{y} \subseteq V \wedge \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \to \exists \vec{z} \subseteq \vec{y}(\vec{z} \in V \wedge \varphi(\vec{x}, \vec{z}))$

gde je $\varphi \in -$formula, tj. formula u kojoj se ne javlja individualna konstanta V.

Da bismo pružili motivaciju za ovu aksiomu, prisetimo se da Akermanova aksioma $(A4)$ kaže da svaka klasa $x \subseteq V$ koja je definabilna samo uz pomoć skupovnih parametara, ne služeći se individualnom konstantom V, jeste skup, tj. $x \in V$. Alkor naziva takve klase *ostenzivno dovršenim*. Dakle, aksioma $(A4)$ kaže da je svaka ostenzivno dovršena klasa skup. S druge strane, za klasu ćemo reći da je *dovršena* ako njena ekstenzija ne zavisi od toga za koje će objekte naknadno biti utvrđeno da su skupovi. Služeći se ovom idejom, možemo Akermanovu aksiomu $(A4)$ zameniti jačom koja bi tvrdila da je svaka dovršena klasa skup kao i da važi sledeći *princip refleksije*: ako neko tvrđenje φ važi za klase $\vec{y} \subseteq V$, onda postoje dovršene klase $\vec{z} \subseteq \vec{y}$ za koje ovo tvrđenje važi. Pošto smo pretpostavili da su sve dovršene klase skupovi, sledi da $\vec{z} \in V$. Takođe, formula φ može da sadrži i skupovne parametre $\vec{x} \in V$ pored parametara za klase. Ovi se parametri ne menjaju pošto su svi skupovi dovršene klase. Formalizacija ove ideje je aksioma $(T4)$.

Da bismo videli da teorija T ne gubi na snazi u poređenju sa teorijom A dokazaćemo sledeće tvrđenje.

TEOREMA 133. *Akermanova shema* $(A4)$ *je dokaziva u teoriji* T.

DOKAZ. Pretpostavimo antecedens od $(A4)$, tj.

$$T \vdash \vec{x} \in V \wedge \forall y(\varphi \to y \in V).$$

Na osnovu aksiome $(A2)$ imamo da postoji neko $z \subseteq V$ takvo da važi $\forall y \left(y \in z \leftrightarrow \varphi\right)$. Aksioma $(T4)$ ima za posledicu da postoji neko $u \subseteq z$ takvo da je $u \in V$ i za koje važi $\forall y \left(y \in u \leftrightarrow \varphi\right)$. Na osnovu aksiome $(A1)$ imamo da je $z = u$ pa sledi da $z \in V$. Dakle, imamo da važi $\exists z \in V \forall y \left(y \in z \leftrightarrow \varphi\right)$ što je i trebalo dokazati. □

Oslanjajući se na aksiomu $(T4)$ možemo da pokažemo da je dovoljno pretpostaviti sledeću slabiju aksiomu mesto Akermanove aksiome $(A3)$:

$(T3)$**:** $\left(x \in V \wedge y \in x\right) \to y \in V$

Nas će međutim posebno zanimati činjenica da je teorija T *pravo* proširenje teorije A. Da bismo ovo videli biće nam neophodne neke definicije. Neka je $Ord(x)$ formula jezika teorije T koja intuitivno znači „x je tranzitivan i $\in$ je dobro uređenje na x" (za preciznu formulaciju v. prethodni odeljak). Sa ϑ ćemo da označimo klasu $\{x \in V \mid Ord(x)\}$, tj. klasu svih ordinala koji su skupovi. Ova klasa postoji na osnovu aksiome $(A2)$ i imamo da za nju važi da je $Ord(\vartheta)$.

Naredno tvrđenje, dokazivo u teoriji T, pokazuje da ϑ poseduje svojstva velikih kardinala (za dokaz v. [Alkor, 1980, Theorem 3.2]):

TEOREMA 134. *Za svako* $\nu < \vartheta$, ϑ *je* ν*-neopisiv i klasa*

$$\{\kappa < \vartheta \mid \kappa \text{ JE } \nu\text{-NEOPISIV}\}$$

je stacionarna u ϑ.

S druge strane, Alkor je takođe pokazao da je teorija T konzistentna uz izvesne pretpostavke o postojanju velikih kardinala koje ćemo definisati u nastavku.

DEFINICIJA 135. Ako su $\mathscr{M} = (M, \ldots)$ i $\mathscr{N} = (N, \ldots)$ strukture jezika $\mathscr{L}$, za injekciju $j : M \to N$ kažemo da je *elementarno utapanje* od $\mathscr{M}$ u $\mathscr{N}$, što ćemo označavati sa

$j : \mathscr{M} \prec \mathscr{N}$, akko za svaku formulu $\varphi(x_1, ..., x_n)$ jezika $\mathscr{L}$ i proizvoljne $a_1, ..., a_n \in M$ važi

$$\mathscr{M} \models \varphi(a_1, ..., a_n) \text{ akko } \mathscr{N} \models \varphi(j(a_1), ..., (a_n)).$$

Oslanjajući se na prethodnu definiciju, možemo da definišemo sledeću klasu velikih kardinala:

DEFINICIJA 136. Kardinal κ je 1-*ekstendibilan* akko postoji λ i elementarno utapanje $j : (V_{\kappa+1}, \in) \prec (V_{\lambda+1}, \in)$ takvo da je $j(x) = x$, za $x \in V_\kappa$ i $j(\kappa) = \lambda$.

Kardinali koji imaju ovo svojstvo su veoma veliki. Primera radi, svaki 1-ekstendibilan kardinal je merljiv. Važi i više od toga (za dokaz v. [Kanamori, 2009, Proposition 23.1]:

TEOREMA 137. *Ako je κ 1-ekstendibilan, onda je κ merljiv i postoji normalan ultrafilter $\mathscr{U}$ nad κ takav da važi*

$$\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE MERLJIV}\} \in \mathscr{U}.$$

Drugim rečima, ne samo što je svaki 1-ekstendibilan kardinal merljiv, već ispod svakog takvog kardinala ima mnogo merljivih kardinala.

Oslanjajući se na prethodno rečeno možemo formulisati Alkorov rezultat koji smo spominjali (za dokaz v. [Alkor, 1980, Theorem 4.1]).

TEOREMA 138. $ZFC+$ "$\exists\kappa$ κ JE 1-EKSTENDIBILAN KARDINAL"$\vdash Con(T)$.

U nastavku ćemo pokazati da je mnogo slabija pretpostavka dovoljna za dokaz konzistentnosti teorije T, čime ćemo odgovoriti na neka otvorena pitanja iz [Alkor, 1980].

Na početku ćemo da definišemo jednu važnu klasu kardinala koja će nam biti neophodna u nastavku rada :

DEFINICIJA 139. Kardinal κ je *suptilan* akko za svaki niz $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ takav da $S_\alpha \subseteq \alpha$ za svako $\alpha < \kappa$, i svaki **CLUB** C u κ (v. DEFINICIJA 31), postoje $\beta < \gamma$ iz C takvi da imamo $S_\beta = S_\gamma \cap \beta$.

Otkriće pojma suptilnog kardinala dugujemo Jensenu (Ronald Jensen) i Kunenu (Keneth Kunnen), koji su ga formulisali u [Jensen and Kunen, 1969]. Osim ovog pojma, Jensen i Kunen su takođe formulisali i srodne pojmove *neizrecivih* (*ineffable*) i *gotovo neizrecivih* (*almost ineffable*) kardinala, pružajući detaljnu analizu nekih uopštenja Jensenovog *karo principa* $\diamondsuit$.[8] Hijerarhiju $n-$suptilnih, $n-$neizrecivih i $n-$gotovo neizrecivih kardinala definisao je Baumgartner (James Baumgartner) u [Baumgartner, 1975], koji je dokazao mnoge rezultate koji unapređuju one Jensena i Kunena. Nekim Baumgartnerovim metodama ćemo da se poslužimo u nastavku kada budemo dokazivali da su suptilni kardinali Maloovi. Noviji rad koji neke od Baumgartnerovih rezultata predstavlja na jednostavniji način, usput dokazujući i neka nova svojstva suptilnih kardinala je Fridmanov (Harvey Friedman) [Friedman, 2001].

Sledeći rezultat će nam pomoći da vidimo koje mesto zauzimaju suptilni kardinali u hijerarhiji velikih kardinala. Ovaj rezultat takođe dugujemo Jensenu i Kunenu.

TEOREMA 140. *Ako je κ suptilan onda je κ jako nedostižan kardinal.*

DOKAZ. Pretpostavimo da je κ singularan kardinal i neka je $f : cf(\kappa) \to \kappa$ strogo rastuća i neprekidna funkcija. Neka je $C = f'' cf(\kappa)$ i definišimo $S_\alpha = \{\beta\}$ gde je $f(\beta) = \alpha$ za $\alpha \in C$ i $S_\alpha = \emptyset$ inače. Kako je κ suptilan, znamo da postoje $\alpha < \beta$ iz C takvi da je $S_\alpha = S_\beta \cap \alpha$. Međutim, iz ovoga sledi da je $f^{-1}(\alpha) = f^{-1}(\beta)$ što je kontradikcija. Dakle, κ je regularan kardinal.

Pretpostavimo dalje da κ nije jako granični kardinal. Tada postoji $\lambda < \kappa$ takav da je $\kappa \leq 2^\lambda$. Neka je $C = \kappa \setminus \lambda$, skup C je **CLUB**. Definišimo S_α = različit podskup od λ za svako $\alpha \in C$, i $S_\alpha = \emptyset$ inače. Kako je κ suptilan, postoje $\alpha < \beta$ iz C takvi da je $S_\alpha = S_\beta \cap \alpha$. Međutim, ovo je kontradikcija jer su S_α i S_β različiti podskupovi od λ i $\lambda < \alpha$. $\square$

Osim što su jako nedostižni, suptilni kardinali su i Maloovi i to u jakom smislu. U radu [Baumgartner, 1975] Baumgartner je prilikom ispitivanje suptilnih, neizrecivih

[8] Jensenov princip $\diamondsuit$ je sledeće tvrđenje: postoji niz $\langle S_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ takav da $S_\alpha \subseteq \alpha$ za svako $\alpha < \omega_1$, i za svaki skup $X \subseteq \omega_1$ važi da je skup $\{\alpha < \omega_1 \mid X \cap \alpha = S_\alpha\}$ stacionaran u ω_1.
Ovo je tvrđenje posledica Gedelove aksiome konstruktibilnosti $V = L$, a ono samo ima mnoge važne posledice među kojima su i CH, kao i negacija *Suslinove hipoteze.* Za više detalja zainteresovanog čitaoca upućujemo na [Drake, 1974]. Jedno od prirodnih uopštenja principa $\diamondsuit$ jeste princip $\diamondsuit_\kappa$. Ovo tvrđenje dobijamo iz $\diamondsuit$ tako što svuda mesto ω_1 pišemo κ, pod pretpostavkom da je κ proizvoljan regularan kardinal veći od ω. Kao i $\diamondsuit$, i $\diamondsuit_\kappa$ je posledica Gedelove aksiome konstruktibilnosti $V = L$. Kunen je pokazao da ako je κ suptilan kardinal, onda važi $\diamondsuit_\kappa$.

itd. kardinala, zauzeo tačku gledišta (koju je u kontekstu neopisivih kardinala nešto ranije zauzimao Levi) prema kojoj se ova svojstva velikih kardinala mogu bolje razumeti ako ne posmatramo neposredno same kardinale već normalne ideale i filtere koji su njima pridruženi. Da bi ovo učinio, on je za svako od ovih svojstava nekog kardinala κ prvo definisao šta znači da neki podskup A od κ ima to svojstvo. U slučaju suptilnih kardinala koji će nas jedino da zanimaju imamo sledeće:

DEFINICIJA 141. Ako je κ suptilan kardinal i $A \subseteq \kappa$, kažemo da je A *suptilan* akko za svaki niz $\langle S_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ takav da $S_\alpha \subseteq \alpha$ za svako $\alpha < \kappa$, i svaki **CLUB** C u κ, postoje $\beta < \gamma$ iz $C \cap A$ takvi da imamo $S_\beta = S_\gamma \cap \beta$.

Baumgartner je pokazao da ako je κ suptilan kardinal, onda je

$$\mathscr{I} = \{A \subseteq \kappa \mid A \text{ NIJE SUPTILAN}\}$$

pravi, $\kappa-$potpun i normalan ideal nad κ. Ovaj ideal ćemo da zovemo *suptilnim idealom* (nad κ). Dualno prethodnom, imamo da je

$$\mathscr{F} = \left\{\kappa \setminus A \mid A \in \mathscr{I}\right\}$$

pravi, $\kappa-$potpun i normalan filter nad κ. Ovaj ćemo filter da zovemo *suptilnim filterom* (nad κ).

Prisetimo se da smo Maloove kardinale definisali (v. DEFINICIJA 71) na sledeći način: κ je Maloov akko je skup

$$\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE NEDOSTIŽAN}\}$$

stacionaran u κ. Definiciju Maloovih kardinala možemo da uopštimo: kažemo da je kardinal κ $1-$*Maloov* akko je Maloov. Kardinal κ je $\alpha+1-$*Maloov*, za $\alpha > 0$, akko je $\alpha-$Maloov i skup $\left\{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ je } \alpha-\text{Maloov}\right\}$ je stacionaran u κ. Kardinal κ je $\gamma-$*Maloov*, za granični ordinal γ, akko je $\alpha-$Maloov za svako $\alpha < \gamma$ (ovo uopštava definiciju hiper-Maloovih kardinala iz odeljka [1.7]).

Suptilni kardinali imaju veoma jaka Maloova svojstva. Da bismo ovo videli, prvo ćemo da dokažemo jedno jednostavno tvrđenje koje bi trebalo da ilustruje ideju metoda koje je Baumgartnerovih formulisao u [Baumgartner, 1975].

LEMA 142. *Ako je κ suptilan, onda je $I = \{\delta \mid \delta < \kappa$ I δ JE JAKO NEDOSTIŽAN$\}$ u suptilnom filteru nad κ.*

DOKAZ. Neka je κ suptilan kardinal. Tada je κ jako nedostižan pa je skup

$$L = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \text{ JE JAKO GRANIČNI KARDINAL}\}$$

CLUB u κ. Da je skup L zatvoren u κ, jednostavno je da se vidi, pošto je supremum skupa jako graničnih kardinala takođe jako granični kardinal. Da bismo videli da je skup L neograničen u κ, uzmimo proizvoljno $\gamma < \kappa$, i definišimo sledeći niz kardinala:

- $\lambda_0 = \gamma$,
- $\lambda_{n+1} = 2^{\lambda_n}$,
- $\lambda_\omega = \bigcup_{n<\omega} \lambda_n$.

Ako su $\mu, \nu < \lambda_\omega$, onda postoji neko $n < \omega$ takvo da važi $max\{\mu, \nu\} \leq \lambda_n$. Na osnovu ovoga imamo da je

$$\mu^\nu \leq \lambda_n^{\lambda_n} = 2^{\lambda_n} = \lambda_{n+1} < \lambda_\omega,$$

pa je λ_ω jako granični, singularni kardinal koji je $< \kappa$, pošto je κ nedostižan.

Pošto jako granični kardinali čine **CLUB** podskup od κ , i pošto je ovaj podskup u suptilnom filteru nad κ jer je ovaj filter normalan i $\kappa-$potpun, ostaje nam da dokažemo da je $R = \{\alpha \mid \alpha < \kappa$ I α JE REGULARAN$\}$ u suptilnom filteru nad κ, tj. da je

$$\overline{R} = \kappa \setminus R = \{\alpha \mid \alpha < \kappa \text{ I } \alpha \text{ JE SINGULARAN}\}$$

u suptilnom idealu nad κ.

Neka je S_α kofinalni niz u α čiji je tip uređenja $cf(\alpha)$ i čiji je prvi član $cf(\alpha)$. Ako je $S_\alpha = S_\beta \cap \alpha$ za $\alpha < \beta$ iz κ, onda je $cf(\alpha) = cf(\beta)$. Međutim, ne možemo imati kofinalni niz u α i β sa istim tipom uređenja, odakle sledi da $\overline{R}$ nije suptilan podskup od κ pa je R u suptilnom filteru nad κ. □

Sledeće snažnije tvrđenje je takođe posledica Baumgartnerovih rezultata:

TEOREMA 143. *Ako je κ suptilan, onda je skup $M_\alpha = \{\beta \mid \beta \text{ JE } \alpha - \text{MALOOV}\}$ u suptilnom filteru nad κ, za svako $\alpha < \kappa$.*

Ovo se tvrđenje dokazuje transfinitnom indukcijom po α, a baza indukcije je LEMA 142 gore (za dokaz v. [Boos, 1975]). Jedna od posledica ovog tvrđenja jeste da ako je κ suptilan, onda je κ $\kappa-$Maloov. Dakle, suptilni kardinali su veći od nedostižnih kao i od Maloovih kardinala. Da oni nisu suviše veliki govori sledeći rezultat Jensena i Kunena:

TEOREMA 144. *Ako je κ suptilan, onda je κ suptilan u L.*

Isto važi i za neizrecive i gotovo neizrecive kardinale. Svaka od ovih vrsta kardinala konzistentna je sa $V = L$.

Na sledeći tehnički rezultat iz [Abramson et al., 1977] ćemo se osloniti prilikom dokaza glavne teoreme u ovom odeljku (TEOREMA 146):

LEMA 145. *Neka je κ suptilan kardinal i $C \subseteq \kappa$* **CLUB**. *Pretpostavimo da $S_\alpha \subseteq V_\alpha$ za svako $\alpha \in C$. Tada postoje ordinali $\alpha < \beta$ iz C takvi da važi $S_\alpha = S_\beta \cap V_\alpha$.*

DOKAZ. Na prvom mestu, pošto je κ nedostižan kardinal, postoji bijekcija $F : V_\kappa \to \kappa$ i **CLUB**

$$D = \{\alpha < \kappa \mid |V_\alpha| = \beth_\alpha = \alpha\}$$

u κ takav da važi $F[V_\alpha] = \alpha$ za svako $\alpha \in D$ (v. [Boos, 1975, p. 31]). Neka je $C^* = C \cap \{\alpha < \kappa : |V_\alpha| = \alpha\}$. Skup C^* je takođe **CLUB** u κ. Neka je

$$S^*_\beta = \begin{cases} \emptyset & \text{za } \beta \notin C^* \\ F[S_\beta] & \text{za } \beta \in C^* \end{cases}$$

Za $\alpha < \beta$ iz C^* imamo da ako je $S^*_\alpha = S^*_\beta \cap \alpha$, onda je $S_\alpha = S_\beta \cap V_\alpha$. □

Sada možemo da pokažemo da je pretpostavka o postojanju suptilnog kardinala dovoljna da se dokaže konzistentnost Alkorove teorije T. Rezultat sličan ovom je najavljen na kraju Alkorovog rada [Alkor, 1980] ali, koliko je nama poznato, nikada nije objavljen. Dokaz koji ćemo u nastavku predstaviti inspirisan je Jensenovim dokazom tvrđenja da ispod svakog suptilnog kardinala postoji totalno neopisiv kardinal (za dokaz v. [Abramson et al., 1977] ili [Friedman, 2001]).

TEOREMA 146. $ZFC+$ "$\exists\kappa$ κ JE SUPTILAN KARDINAL"$\vdash Con(T)$.

DOKAZ. Neka je $C = \{\alpha < \kappa : |V_\alpha| = \alpha\}$. Skup C je **CLUB** u κ. Za svako $\alpha \in C$, neka je $\varphi_\alpha\left(x, y\right)$ $\in -$formula, $a_\alpha \in V_\alpha$, $b_\alpha \subseteq V_\alpha$ takvi da:

$$(V_\kappa, \in) \models \varphi_\alpha(a_\alpha, b_\alpha)$$

ali za svako $c \in V_\alpha$ takvo da je $c \subseteq b_\alpha$:

$$(V_\kappa, \in) \not\models \varphi_\alpha(a_\alpha, c)$$

Dalje, neka je $p_\alpha \in \omega$ Gedelov broj formule $\varphi_\alpha\left(x, y\right)$ (kodirajući formule elementima skupa ω, onako kako je to učinjeno u, recimo, [Drake, 1974, p. 90 ff]) i neka je

$$S_\alpha = \left\{(0, p_\alpha)\right\} \cup \{(1, a_\alpha)\} \cup \{(2, x) : x \in b_\alpha\}$$

gde su φ_α, a_α i b_α kao gore. Inače, neka je $S_\alpha = \emptyset$.

Neka su $\beta < \gamma$ iz C takvi da je $S_\beta = S_\gamma \cap V_\beta$, na osnovu prethodne leme. Primetimo da su, prema konstrukciji od S_α gore, S_β i S_γ ili oba neprazna ili oba jednaka $\emptyset$. Pretpostavimo da su S_β i S_γ neprazni. Onda će φ_β biti ista formula kao i φ_γ, i važiće $a_\beta = a_\gamma$ kao i $b_\beta = b_\gamma \cap V_\beta$. Međutim, kako je $(V_\kappa, \in) \models \varphi_\beta(a_\beta, b_\beta)$, $b_\beta \subseteq b_\gamma$ i $b_\beta \in V_\gamma$, ovo protivreči gorenavedenom uslovu za S_γ. Dakle, imamo da $S_\beta = S_\gamma = \emptyset$.

Sada ćemo da pokažemo da aksioma $(T4)$ važi u strukturi $(V_\kappa, V_\gamma, \in)$. Da bi izlaganje bilo preglednije, aksiomu $(T4)$ ćemo da formulišemo sa po jednom promenljivom x, y i z mesto konačnih nizova $\vec{x}, \vec{y}$ i $\vec{z}$. Dokaz opštijeg slučaja u potpunosti nalikuje ovom jednostavnijem dokazu. Da bismo videli da:

$$(V_\kappa, V_\gamma, \in) \models x \in V \wedge y \subseteq V \wedge \varphi(x, y) \to \exists z \subseteq y(z \in V \wedge \varphi(x, z))$$

pretpostavimo da postoje $x \in V_\gamma$ i $y \subseteq V_\gamma$ takvi da je

$$(V_\kappa, \in) \models \varphi(x, y)$$

Na osnovu izbora od S_γ gore, imamo da postoji neko $z \subseteq y$ takvo da je $z \in V_\gamma$ i važi

$$(V_\kappa, \in) \models \varphi(x, z)$$

drugim rečima

$$(V_\kappa, V_\gamma, \in) \models \exists z \subseteq y(z \in V \wedge \varphi(x, z))$$

Pošto su nivoi kumulativne hijerarhije tranzitivni i supertranzitivni, tj. $x \in y \in V_\gamma \Rightarrow x \in V_\gamma$ i $x \subseteq y \in V_\gamma \Rightarrow x \in V_\gamma$, za svako x, y i ordinal γ, lako je videti da ostale aksiome teorije T (aksiome $(A1 - A3)$ gore) važe u $(V_\kappa, V_\gamma, \in)$. $\square$

Poslednje tvrđenje odgovara na pitanje iz [Alkor, 1980, Question 4.3], naime da li postoji karakterizacija (pomoću svojstava velikih kardinala) parova κ, γ takvih da $(V_\kappa, V_\gamma, \in) \models T$? Da bismo odgovorili na još neka pitanja koja su u ovom radu postavljena, biće nam neophodna sledeća tvrđenja (za dokaz v. [Boos, 1975]).

TEOREMA 147. *[Jensen and Kunen, 1969] Za svako $\alpha \geq \omega$, ako je $\kappa(\alpha) = \kappa$ Erdešov kardinal onda je κ suptilan kardinal.*

Dakle, svaki Erdešov kardinal (v. DEFINICIJA 86) je suptilan. Međutim, najmanji Erdešov kardinal veći je od najmanjeg suptilnog kardinala (za dokaz v. [Boos, 1975]):

TEOREMA 148. *[Reinhardt and Silver, 1965] Ako je $\kappa = \kappa(\omega)$ onda postoji $\lambda < \kappa$ gde je λ suptilan kardinal.*

Oslanjajući se na poslednje tvrđenje i TEOREMU 146 možemo da odgovorimo na sledeće pitanje iz [Alkor, 1980, Question 3.3]: Da li je u teoriji T dokazivo $\vartheta \to (\omega)_2^{<\omega}$, tj. da je ϑ najmanji Erdešov kardinal? Naime, ovo tvrđenje nije dokazivo u T, ako je teorija T konzistentna.

6.5. Još o principima refleksije

U prethodnim poglavljima bavili smo se principima refleksije sledeći Gedelovu sugestiju da se sve jake aksiome beskonačnosti moraju moći redukovati na njih. U odeljku [4.3] smo videli na koji način Gedel, služeći se ovim principima, daje neformalno opravdanje postojanja nekih velikih kardinala. U odeljku [6.2] smo na osnovu pre svega Levijeve analize teoreme refleksije u ZFC videli da je moguće ovu Gedelovu zamisao odvesti još dalje, tako što možemo da formulišemo jake principe refleksije koji za posledicu imaju postojanje velikih kardinala koje Gedel nije eksplicitno razmatrao.

Međutim, svi veliki kardinali koje smo na ovaj način u mogućnosti da opravdamo (nedostižni, $\alpha-$nedostižni, Maloovi, $\alpha-$Maloovi, itd.) pripadaju familiji takozvanih malih velikih kardinala. Za ovu familiju važi sledeće: ako je σ tvrđenje koje tvrdi postojanje nekog od kardinala iz ove familije, onda

$$Con(ZFC+\sigma) \Rightarrow Con(ZFC+V=L+\sigma).$$

Ovaj ograničavajući rezultat nameće sledeće pitanje: da li je moguće formulisati principe refleksije koji će posedovati visok stepen unutrašnje opravdanosti (onako kako ju je Gedel razumeo, v. odeljke [4.1] i [4.4]), a koji će za posledicu imati $V \neq L$?

Da bismo pokušali da na ovo pitanje odgovorimo, Gedelova sugestija da „[s]vi principi uspostavljanja aksioma teorije skupova moraju se moći redukovati na Akermanov princip: Apsolut je nesaznatljiv.”[Wang, 1996, p. 283] nam je poslužila kao podsticaj da u odeljku [6.4] ispitamo neka moguća proširenja Akermanove teorije A. Po Gedelovom mišljenju Akermanov „sistem je zanimljiv jer je slab u pogledu svojih posledica, međutim, nešto što je slabije može ponekad da posluži kao bolja osnova za snažna prirodna proširenja neko neki jak početni sistem” [Wang, 1996, pp. 282-283]. Međutim, i najjače takvo proširenje koje je nama poznato, Alkorova teorija T, pokazalo se kao suviše slabo da prevaziđe barijeru $V = L$.

Pitanje formulisanja plauzibilnih principa refleksije koji bi za posledicu imali $V \neq L$ nije novo. Njega je u [Koellner, 2009] postavio Kelner. Prisetimo se da smo se prilikom definisanja neopisivih kardinala (DEFINICIJA 123, DEFINICIJA 129) u odeljku [6.2] služili samo parametrima drugog reda $U_1, \ldots, U_n \subseteq V_\alpha$. Ako bismo dopustili parametre trećeg reda $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathscr{P}(V_\alpha)$ u pomenutim definicijama, onda bismo u ZFC mogli da pokažemo da ne postoje Π^1_1-neopisivi kardinali. U kontekstu principa refleksije ovo znači da su principi koji dopuštaju parametre trećeg reda inkonzistentni [Reinhardt, 1974a]. Kao pokušaj da ovu prepreku prevaziđe, Tejt je formulisao principe refleksije višeg reda [Tait, 2005, pp. 133-154] u kojima su klase formula koje reflektujemo ograničene na takozvane *pozitivne formule*[9]. Uz ovo ograničenje, Tejt je pokazao da je princip refleksije trećeg reda konzistentan (uz izvesne pretpostavke o postojanju velikih kardinala), i strogo jači od principa refleksije drugog reda, dok je međutim Kelner pokazao [Koellner, 2009] da je čak i sa ovim ograničenjem na pozitivne formule Tejtov princip refleksije četvrtog reda inkonzistentan.

Što se tiče snage Tejtovog ograničenog principa refleksije trećeg reda, Kelner je u istom radu pokazao da oni ne dokazuju postojanje najmanjeg Erdešovog kardinala $\kappa(\omega)$ (v. DEFINICIJA 86). Posledica ovog rezultata je po njegovom mišljenju sledeće:

> Na osnovu ovoga bismo mogli da zaključimo da su „principi refleksije” uopšte uzev slabi. Međutim, u odsustvu preciznog određenja pojma principa refleksije ne možemo formulisati, a tim pre ni dokazati, ograničavajući rezultat koji bi ovo tvrdio. Šta više, teško je videti kako bismo mogli da pružimo adekvatnu i precizno određenje neformalnog pojma principa refleksije pošto izgleda da je priroda ovog pojma u suštini shematska i „neograničeno proširiva” (*indefinitely extendible*), u smislu da svaki pokušaj preciziranja može biti prevaziđen reflektujući refleksiju. Međutim, naš glavni ograničavajući rezultat je takođe shematski i čini se da bi njegov dokaz mogao biti ponovljen u svakom takvom slučaju - Erdešov kardinal $\kappa(\omega)$ se čini kao nepremostiva prepreka kada su principi refleksije u pitanju[10].

[9]Grubo govoreći, ovo su formule u kojima se ne javlja veznik implikacije niti negacije.
[10]Erdešov kardinal $\kappa(\omega_1)$ ima za posledicu $0^\sharp$ što povlači da je $V \neq L$.

> Ovo nije precizno tvrđenje, ali ono vodi sledećem izazovu: formulisati snažan princip refleksije koji poseduje unutrašnje opravdanje na osnovu iterativnog pojma skupa i koji prevazilazi $\kappa(\omega)$ prepreku. [Koellner, 2009, p. 217]

Rezultat koji se tiče Alkorove teorije T iz odeljka [6.4] možemo da posmatramo kao podršku ovom Kelnerovom izazovu. Principi refleksije koji su nastali kao uopštenja rezultata Levija i Montegjua, kao i njihovi pandani u Akermanovoj aksiomatizaciji teorije skupova i njenim proširenjima čine se kao suviše slabi da bi imali za posledicu $V \neq L$. U prilog Kelnerovom izazovu govori i sledeće: postojanje kardinala $\kappa = \kappa(\omega)$ (što je konzistentno sa $V = L$) ima za posledicu postojanje $\omega-$niza *nerazlučivih* za strukturu $(V_\kappa, \in)$, gde za svaki član tog niza λ važi da je $(V_\lambda, \in) \prec (V_\kappa, \in)$, i pride je $(V_\lambda, \in)$ zatvoren za mnoga jaka svojstva refleksije. Na ovaj način bismo mogli da pokažemo, ne pozivajući se na činjenicu da je svaki Erdešov kardinal suptilan, da postojanje Erdešovog kardinala $\kappa(\omega)$ dokazuje konzistentnost Alkorove teorije T.

Na osnovu prethodno rečenog Kelner zaključuje da bi trebalo da se rukovodimo pre razlozima spoljašnje opravdanosti novih aksioma nego li njihovim unutrašnjim opravdanjem. Pošto principi refleksije, po njegovom mišljenju, poseduju najviši stepen unutrašnjeg opravdanja od svih kandidata za nove aksiome, a ovi principi su ili preslabi ili inkonzistentni, da bismo bili u stanju da formulišemo veoma jake aksiome i time umanjimo posledice nepotpunosti unutar ZFC moramo da odustanemo od dodeljivanja primata unutrašnjoj opravdanosti novih aksioma. Iako je Kelnerova kritika pozicija koje favorizuju unutrašnje opravdanje usmerena pre svega na Tejta, čini se da on i Gedelu pripisuje slično stanovište [Koellner, 2009, p. 208].

U odeljku [4.4] zastupali smo smo gledište da Gedel nije dodeljivao primat unutrašnjem opravdanju i da je odnos između unutrašnjeg i spoljašnjeg opravdanja razumeo na kompleksniji način koji potcrtava njihovu uzajamnu interakciju. Ako je ovo gledište tačno, onda Gedel ne može biti meta Kelnerove kritike. Na početku odeljka [6.2] naveli smo sledeću Gedelovu opasku koja se ticala principa refleksije:

> [s]vi principi uspostavljanja aksioma teorije skupova moraju se moći redukovati na Akermanov princip: Apsolut je nesaznatljiv. Snaga ovog principa se uvećava kako usvajamo sve jače sisteme teorije skupova. Svi ostali principi su samo heuristički. Dakle, centralni princip je princip refleksije koji će se, izgleda, sve bolje razumeti kako se naše iskustvo uvećava. U međuvremenu, biće nam od pomoći ako izdvojimo konkretnije principe koji ili pružaju neke dodatne informacije ili nisu očigledne posledice principa refleksije kako ih trenutno razumemo. [Wang, 1996, p. 283]

Ideju da će se princip refleksije „sve bolje razumeti kako se naše iskustvo uvećava" smo već imali prilike da sretnemo u pomenutom odeljku [4.4] kada smo govorili o *povratnom* odnosu između unutrašnjeg i spoljašnjeg opravdanja. Ova vrsta odnosa podrazumeva da jedna vrsta opravdanja nadopunjuje drugu pri čemu se nijednoj od njih ne može dati preimućstvo.

Poslednja Gedelova napomena može da pomogne i da bolje razumemo ograničavajuće rezultate koji se tiču principa refleksije o kojima smo ranije govorili. Iako su svi ti principi kojima smo se do sada bavili slabi, sasvim je moguće da će neki drugačiji principi imati veću snagu i da će moći da prevaziđu prepreke koje se pred njih postavljaju. Prilikom formulisanja takvih, novih, principa veliku ulogu će imati naše dosadašnje iskustvo sa uopštenjima rezultata Levija i Montegjua, Akermanovom aksiomatizacijom teorije skupova kao i principima refleksije koji se javljaju u drugačijim kontekstima.

GLAVA 7

VUDINOV PROGRAM

U ovom poglavlju ćemo da predstavimo neke savremene programe formulisanja novih aksioma teorije skupova. Posebno će nas zanimati Vudinov program i njegova filozofska pozadina, kao i rezultati iz oblasti takozvanih *forsing aksioma*. Za razliku od ostalih poglavlja gde smo mogli da postignemo kakav-takav stepen potpunosti materije o kojoj smo pisali, to u ovom poglavlju, zbog prirode rezultata o kojima ćemo da govorimo, neće biti moguće. Ono što možemo da uradimo jeste da ponudimo jednu grubu skicu rezultata iz ove oblasti koji se nama čine najrelevantnijim za probleme kojima se bavimo. Za više detalja, zainteresovanog čitaoca upućujemo na literaturu koja će u ovom poglavlju da bude navođena.

7.1. Igre i determinisanost

Prisetimo se da je cilj Gedelovog programa formulisanja novih aksioma teorije skupova relativna redukcija nepotpunosti kojoj je izložena teorija ZFC. Videli smo da postoje neka prirodna tvrđenja jezika teorije skupova, na prvom mestu CH, koja ova teorija nije u stanju da odluči. Uloga novih aksioma jeste da ova i slična tvrđenja odluči, dokazujući njih ili njihovu negaciju. Nažalost, iz rezultata Levija i Soloveja [Lévy and Solovay, 1967] sledi da aksiome velikih kardinala ne odlučuju CH. Međutim, iako ne uspevaju da odluče CH, aksiome velikih kardinala su veoma uspešne u pogledu tvrđenja manje kompleksnosti od ovog.

Da bismo objasnili poslednje tvrđenje neophodno je da uvedemo nekoliko novih pojmova, na prvom mestu pojam *igre*. Igre koje ćemo razmatrati biće takozvane *igre dva igrača sa savršenim informacijama*, tj. igre u kojima igrači naizmenično igraju poteze koji su oboma poznati i u kojima ishod igre zavisi isključivo od niza odigranih poteza. Igre mogu biti konačne ili beskonačne, u zavisnosti od toga posle koliko odigranih poteza se igra smatra završenom. Potezi naših igrača biće prirodni brojevi, mada smo namesto prirodnih brojeva mogli uzeti i neke druge objekte za poteze u igri. Motivacije radi, pogledajmo kako izgleda jedna konačna igra.

Neka je n prirodan broj i neka je A proizvoljan podskup od ω^{2n}. Igru $G_n(A)$ dužine n igramo na sledeći način: dva igrača, I i II se naizmenično smenjuju birajući po jedan prirodan broj. Potez igrača I u i-tom koraku označavamo sa x_i, dok sa y_i označavamo potez igrača II u istom koraku. Posle odigranih n koraka, igra izgleda ovako:

$$\begin{array}{lcccccccc} I: & x_0 & & x_1 & & \dots & & x_{n-1} & \\ II: & & y_0 & & y_1 & & \dots & & y_{n-1} \end{array}$$

Niz $s = \langle x_0, y_0, x_1, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1} \rangle$ redom odigranih poteza oba igrača zvaćemo *partijom* igre $G_n(A)$. Dužinu niza s ćemo označavati sa $lh(s)$. Igrač I pobeđuje u igri $G_n(A)$ ako $s \in A$, dok II pobeđuje ako $s \notin A$. Nerešen rezultat igre nije dopušten. Skup A zovemo *skupom pobedničkih ishoda* za igrača I.

Da bismo naše igre učinili zanimljivijim, uvodimo pojam *strategije* za igrače I i II. Strategije naših igrača biće metode pomoću kojih će, na osnovu prethodno odigranih poteza, određivati svoj naredni potez. Uzmimo da je, kao i gore, $G_n(A)$ konačna igra dužine n. Takođe, neka je

$$E\left(\omega^{<2n}\right) = \left\{ s : s \in \bigcup_{k<2n} \omega^k \text{ i } lh(s) \text{ je paran} \right\}.$$

Strategija za igrača I je funkcija:

$$\sigma : E\left(\omega^{<2n}\right) \to \omega.$$

Dakle, strategija za igrača I je funkcija koja svakom parnom nizu prirodnih brojeva dužine $< 2n$ dodeljuje prirodan broj. Primetimo da je igrač I na potezu ako i samo ako je broj do tada odigranih poteza paran. Strategija σ mu onda govori kako da, na osnovu do tada odigranog, odigra sledeći potez. Strategiju za igrača II definišemo potpuno analogno, sa domenom skupom neparnih nizova dužine $< 2n$.

Ako nam je data strategija σ za igrača I, i proizvoljan niz poteza $s_{II} = \left\langle y_0, y_1, ..., y_{n-1}\right\rangle$ igrača II, možemo konstruisati partiju igre $G_n(A)$ tako što ćemo primeniti strategiju σ na s_{II}. Ovu partiju označavamo sa $\sigma * s_{II}$. Poteze igrača I definišemo induktivno na sledeći način:

$$\begin{aligned} &x_0 = \sigma(\langle\rangle), \\ &x_{k+1} = \sigma\left(\left\langle x_0, y_0, x_1, y_1, ..., x_k, y_k\right\rangle\right). \end{aligned}$$

Dakle, ako se I služi strategijom σ a II igra poteze $s_{II} = \left\langle y_0, y_1, ..., y_{n-1}\right\rangle$, igra čiji je ishod partija $\sigma * s_{II}$ izgleda ovako:

$$\begin{array}{lcccc} I: & \sigma(\langle\rangle) & & \sigma\left(\left\langle \sigma(\langle\rangle), y_0\right\rangle\right) & \ldots \\ II: & & y_0 & & y_1 \quad \ldots \end{array}$$

Analogno prethodnom možemo definisati partiju $s_I * \tau$ koja nastaje ako se igrač II drži neke strategije τ dok igrač I igra $s_I = \langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}\rangle$.

Međutim, neće svaka strategija biti jednako dobra. Posebno nas zanimaju one strategije koje garantuju pobedu jednom od igrača. Neka je, kao i do sada, $G_n(A)$ konačna igra. Kažemo da je σ *pobednička strategija* za igrača I ako za svaki niz $s \in \omega^n$, imamo da $\sigma * s \in A$. Analogno tome, τ je *pobednička strategija za igrača II* ako za svaki niz $s \in \omega^n$ imamo da $s * \tau \notin A$. Jasno je da ne mogu oba igrača imati pobedničku strategiju za datu igru $G_n(A)$. Jer, pretpostavimo da obojica imaju pobedničku strategiju i da je slede jedan protiv drugoga. To nam daje kontradikciju da neki niz i pripada i ne pripada A.

Sa tim pojmovima iza nas, možemo definisati sledeći, koji zauzima centralno mesto u teoriji igara:

DEFINICIJA. Igra $G_n(A)$ je *determinisana* ako jedan od igrača ima pobedničku strategiju.

Istorija narednog tvrđenja nije u potpunosti jasna [Schwalbe and Walker, 2001] , ali je sigurno da zasluge za njega pripadaju Cermelu [Zermelo, 1913], Kenigu [König, 1927] i Kalmaru [Kalmar, 1928], između ostalih:

TEOREMA 149. *Svaka konačna igra $G_n(A)$ je determinisana.*

Dokaz prethodnog tvrđenja je jednostavan. Ako nam je data proizvoljna konačna igra $G_n(A)$, onda igrač I ima pobedničku strategiju ako i samo ako važi sledeće:

$$\exists x_0 \forall y_0 \ldots \exists x_n \forall y_n \langle x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n \rangle \in A.$$

S druge strane, igrač II ima pobedničku strategiju ako i samo ako važi negacija prethodnog:

$$\forall x_0 \exists y_0 \ldots \forall x_n \exists y_n \langle x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n \rangle \notin A.$$

Dakle, determinisanost konačnih igara je logička teorema.

Analogno konačnim igrama, možemo definisati beskonačne igre $G(A)$ dužine ω. U ovom slučaju, skupovi pobedničkih ishoda A biće proizvoljni podskupovi od ω^ω. Elementi skupa ω^ω su beskonačni nizovi prirodnih brojeva, koje u teoriji skupova često poistovećujemo sa realnim brojevima. Pojmove strategije, igranja u skladu sa strategijom, pobedničke strategije za igrače I i II kao i pojam determinisanosti beskonačnih igara, definišemo analogno slučaju konačnih igara.

7.2. Aksiome determinisanosti i veliki kardinali

Da li su, kao i u konačnom slučaju, sve beskonačne igre determinisane? Ovo nije slučaj. U ZFC možemo dokazati da postoji skup $A \subseteq \omega^\omega$ koji nije determinisan. Za dokaz poslednje činjenice, neophodna nam je aksioma izbora. Međutim, daleko od toga da to čini teoriju beskonačnih igara nezanimljivom. Ako se skupovi $A \subseteq \omega^\omega$ „lepo ponašaju", igre $G(A)$ će biti determinisane. Pokušajmo da bacimo malo svetla na prethodno, veoma neodređeno, tvrđenje. Prisetimo se da se, u teoriji skupova, elementi skupa ω^ω nazivaju još i realnim brojevima, dok sam skup ω^ω zovemo *Berovim prostorom*. Na prirodan način, skup ω^ω možemo snabdeti topologijom, što će nam omogućiti da između ostalog govorimo o *otvorenim* i *zatvorenim* skupovima. Pošavši od otvorenih skupova, možemo definisati klasu *Borelovih podskupova* od ω^ω kao najmanju klasu koja se dobija zatvaranjem otvorenih skupova za operacije komplementacije i prebrojive unije. Ove skupove možemo klasifikovati unutar (transfinitne) *Borelove hijerarhije* na osnovu toga koliko koraka nam je neophodno da do njih stignemo, ako pođemo od otvorenih skupova i primenjujemo dve gorepomenute operacije.

Klasičan rezultat u teoriji beskonačnih igara koji kaže da su igre na otvorenim, kao i igre na zatvorenim skupovima $A \subseteq \omega^\omega$ determinisane, dokazali su Gejl i Stjuart [Gale and Stewart, 1953] početkom pedesetih godina prošlog veka. Napredak na ovom polju je dolazio polako, pa je tako, sve do 1975. godine dokazana determinisanost igara na skupovima koji čine svega nekoliko početnih nivoa Borelove hijerarhije. Pomenute godine Martin [Martin, 1975] je dokazao da su sve igre na Borelovim skupovima determinisane. Ovo je najbolji mogući rezultat koji možemo dokazati u teoriji ZFC, u tom pogledu što je determinisanost igara na skupovima $A \subseteq \omega^\omega$ koji su, u izvesnom smislu, kompleksniji od Borelovih, nedokaziva unutar ove teorije. Na primer, ako dozvolimo operaciju uzimanja neprekidne slike Borelovih skupova, dobijamo takozvane *analitičke skupove*. Ovi poslednji, pak, čine samo prvi nivo *projektivne hijerarhije* skupova. Klasu projektivnih skupova dobijamo zatvaranjem analitičkih skupova za operacije komplementacije i projekcije. Martin [Martin, 1970] je u $ZFC + \exists\kappa\ \kappa$ JE MERLJIV dokazao da su sve analitičke igre determinisane.[1] Deset godina pošto je dokazao determinisanost svih igara na Borelovim skupovima Martin je, zajedno sa Stilom (John Steel) [Martin and Steel, 1989], dokazao i determinisanost svih igara na projektivnim

[1]Posledica ovog rezultata jeste i determinisanost svih igara na Borelovim skupovima. Martinov dokaz iz 1975. godine, međutim, eliminiše dodatnu pretpostavku postojanja velikih kardinala u ovom slučaju.

skupovima $A \subseteq \omega^\omega$. Poslednje tvrđenje, koje kaže da su sve igre na projektivnim skupovima determinisane, najčešće se označava skraćenicom PD.[2] Neka je ψ tvrđenje „postoji beskonačno mnogo Vudinovih kardinala”. Sredstva koja su neophodna da bismo dokazali PD pruža nam teorija $ZFC + \psi$. Precizna definicija Vudinovih kardinala je donekle komplikovana, u tehničkom smislu, pa je nećemo navoditi na ovom mestu. Recimo samo da su Vudinovi kardinali regularni, strogo veći od merljivih, kao i da je skup $\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ JE MERLJIV}\}$, gde je κ Vudinov kardinal, stacionaran u κ.

S druge strane, ako pretpostavimo determinisanost igara na određenim klasama skupova $A \subseteq \omega^\omega$, za posledicu imamo da ovi skupovi time dobijaju neka veoma poželjna svojstva. Reč je o svojstvima regularnosti kao što su *Lebeg-merljivost*, *Berovo svojstvo*, *svojstvo savršenog skupa* itd. Na primer, ako teoriji ZF dodamo aksiomu AD, koja kaže da su igre na svim skupovima $A \subseteq \omega^\omega$ determinisane[3] [Mycielski and Steinhaus, 1962], za rezultat imamo da teorija $ZF + AD$ dokazuje da je *svaki* skup realnih brojeva (tj. podskup skupa ω^ω) Lebeg-merljiv, da ima Berovo svojstvo, kao i svojstvo savršenog skupa. Međutim, kao što smo na početku odeljka kazali, teorija $ZFC + AD$ je inkonzistentna, pa je AD usvojena samo kao tvrđenje koje pruža dobru heuristiku za to kakvu vrstu aksioma bi trebalo tražiti ako želimo lepa svojstva regularnosti na skupovima realnih brojeva.

Osim toga, možemo ograničiti AD na neki unutrašnji model teorije ZF, u kojem bi onda živeli „regularni” skupovi, oni lišeni patoloških svojstava koje povlači aksioma izbora. Na primer, $L(\mathbb{R})$, najmanji tranzitivni unutrašnji model teorije ZF koji sadrži sve ordinale i sve realne brojeve, može poslužiti toj svrsi. Neka je $AD^{L(\mathbb{R})}$ tvrđenje da su sve igre na skupovima realnih brojeva iz $L(\mathbb{R})$ determinisane. Takođe, neka je ϕ tvrđenje „postoji beskonačno mnogo Vudinovih kardinala i merljiv kardinal iznad svih njih”. Vudin je pokazao [Woodin, 1988] da $ZFC + \phi \vdash AD^{L(\mathbb{R})}$. S druge strane, teorija $ZFC + AD^{L(\mathbb{R})}$ dokazuje postojanje unutrašnjeg modela teorije $ZFC + \psi$, gde je ψ, kao i gore, tvrđenje „postoji beskonačno mnogo Vudinovih kardinala”.

[2] Skraćenica PD stoji mesto „projektivna determinisanost”.
[3] Skraćenica AD stoji mesto „aksioma determinisanosti”.

Što se projektivne determinisanosti, PD, tiče teorija $ZFC+PD$ dokazuje da su svi projektivni skupovi realnih brojeva Lebeg-merljivi, da imaju Berovo svojstvo kao i svojstvo savršenog skupa. Dakle, situacija je potpuno analogna slučaju teorije $ZF+AD$, s ključnom razlikom što smo, ograničavanjem na *definabilnu* determinisanost, u mogućnosti da zadržimo neograničenu aksiomu izbora. To proširenje pomenutih svojstava regularnosti na čitavu projektivnu hijerarhiju od centralnog je značaja u *deskriptivnoj teoriji skupova*. U tom pogledu, posledice projektivne determinisanosti predstavljaju *prirodnu* ekstenziju klasičnih rezultata koji se tiču početnih nivoa ove hijerarhije [Moschovakis, 2009]. Jedina poznata tvrđenja aritmetike drugog reda koja su neodlučiva u teoriji $ZFC+PD$ jesu instance Gedelovih rečenica, kao i rečenica koja tvrdi konzistentnost te teorije. Na osnovu sadašnjeg znanja, možemo reći da teorija $ZFC+PD$ „potpunije" opisuje svoju strukturu $(H(\aleph_1),\in)$ (v. Definicija 48), nego što to čini Peanova aritmetika, PA, za standardnu strukturu prirodnih brojeva . Naime, nisu poznata „prirodna" matematička tvrđenja izražena na jeziku $\mathscr{L}_{PA^2}$ koja bi bila neodlučiva sredstvima teorije $ZFC+PD$. U tom smislu, možemo reći da je teorija $ZFC+PD$ *prava*[4] teorija strukture $(H(\aleph_1),\in)$.

7.3. Generička apsolutnost i forsing aksiome

Imajući u vidu te posledice teorije $ZFC+PD$ po strukturu nivoa $H(\aleph_1)$, možemo se pitati da li je moguće formulisati neke aksiome koje bi imale slične posledice po strukturu nivoa $H(\aleph_2)$? Ideja je da pokušamo da na neki način „obuzdamo" varijabilnost koju sa sobom nosi forsing na nivou $H(\aleph_2)$. U pogledu strukture $(H(\aleph_0),\in)$ znamo da su njena svojstva, u kontekstu teorije ZF, *generički apsolutna*, tj. invarijantna u pogledu forsinga. Drugim rečima „$(H(\aleph_0),\in)$ zadovoljava φ" je zadovoljeno u modelu $\mathscr{M}$ teorije skupova ako i samo ako je zadovoljeno u generičkom proširenju $\mathscr{M}[G]$. Ovo je posledica *Šenfildove teoreme o apsolutnosti*. U okruženju teorije $ZF+PD$, prethodni rezultat se prenosi na narednu strukturu; svojstva teorije $(H(\aleph_1),\in)$ postaju generički apsolutna. Naredna struktura $(H(\aleph_2),\in)$ ima pak posebnu važnost, utoliko što je ovo

[4] „Prava" u tom pogledu što izgleda poseduje najveći mogući stepen potpunosti, dok u isto vreme strukturu opisuje na način koji smatramo ispravnim.

nivo na kom se javlja hipoteza kontinuuma CH. Imajući u vidu prethodno rečeno, Vudin [Woodin, 2010b]je dokazao sledeći rezultat služeći se pojmom Ω-hipoteze, koji ćemo donekle razjasniti pošto navedemo samu teoremu:

TEOREMA 150. *Ako je Ω-hipoteza istinita, onda svaka teorija skupova koja nastaje iz ZFC pridruživanjem aksioma koje su kompatibilne sa postojanjem velikih kardinala i koja čini svojstva strukture $(H(\aleph_2), \in)$ invarijantnim u pogledu forsinga implicira da je CH lažna.*

Vudinova Ω-hipoteza je tehnički zahtevno tvrđenje koje, grubo govoreći, kaže da je Ω-logika, logika koju je Vudin formulisao ne bi li ideju invarijantnosti u pogledu forsinga učinio matematički operabilnom, potpuna u užem smislu. Istinitost Ω-hipoteze je međutim i dalje otvoren problem. Takođe, koliko je nama poznato, u jednom važnom delu Vudinovog argumenta je bila greška. Radi se naime o tvrđenju da ako je $\Omega-$hipoteza istinita, onda je skup $\Omega-$valjanih formula definabilan u izvesnom lokalnom smislu.

Da li pomenuti rezultati predstavljaju rešenje problema kontinuuma? Teško da se može reći da je to slučaj, i Vudin se sa tim slaže. Ono što ovi rezultati pokazuju jeste da problem kontinuuma nije „inherentno neodređen", pa da je moguće ponuditi matematičko rešenje za njega u budućnosti [Woodin, 2001b,c].

Vudinov program, podizanje generičke apsolutnosti do nivoa $H(\aleph_2)$, ima izvesnih ograničenja. Na primer, nemoguće je postići generičku apsolutnost od nivoa $(H(\aleph_3), \in)$ nagore. S druge strane, izgleda da Vudinov rezultat daje ispravan odgovor na CH. Naime, jedna od aksioma koje je Vudin predložio, takozvana $(*)$-aksioma, koja zadovoljava uslove iz prethodne teoreme, povlači da je $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Izgleda da, u tom pogledu, kardinal $\aleph_2$ predstavlja fokalno mesto vrednosti kontinuuma. Jedna važna klasa aksioma, za koju ćemo nešto više detalja da damo u nastavku, takođe ima za posledicu $2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

Aksiome koje smo upravo spomenuli zovu se *forsing aksiome*. Forsing aksiome nastale su kao ojačanja jednog tvrđenja koje je formulisao Martin, a koje se zove *Martinova aksioma* (MA). Tokom 1964/65. godine Tenenbaum (Stanley Tennenbaum) i

Solovej su zajedno radili na dokazu konzistentnosti Suslinove hipoteze (SH), tj. na dokazu sledećeg tvrđenja: $Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC+SH)$. Ovaj dokaz je kasnije objavljen u [Solovay and Tennenbaum, 1971]. Kada je Martin 1967. godine pogledao Solovejev i Tenenbaumov dokaz, primetio je da služeći se idejama iz njihovog rada može da se dokaže sledeća implikacija: $Con(ZFC) \Rightarrow Con(ZFC+MA+2^{\aleph_0}=\aleph_2)$, i Solovej je ovu primedbu uneo u rad [Solovay and Tennenbaum, 1971].

DEFINICIJA 151. Ako je $\kappa \geq \aleph_0$ kardinal onda je $MA(\kappa)$ skraćenica za sledeće tvrđenje: za svako *ccc* parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ i za svaku familiju $\mathscr{D}$ gustih podskupova u $\mathbb{P}$ kardinalnosti $\leq \kappa$, postoji $\mathscr{D}-$generički filter G u $\mathbb{P}$.

Martinova aksioma MA je sledeće tvrđenje:

(MA): $\quad MA(\kappa)$ važi za svaki kardinal $\kappa < 2^{\aleph_0}$.

Tvrđenje $MA(\aleph_0)$ poznato je još i pod imenom LEMA RAŠOVE I SIKORSKOG i dokazivo je u ZFC (v. LEMA 101).

Na osnovu prethodnog tvrđenja sledi da $CH \Rightarrow MA$. S druge strane, već smo napomenuli da je MA konzistentna sa $\neg CH$, pri čemu su mnoge posledice od CH takođe posledice i od MA. Tvrđenje $MA(\aleph_1)$ nije ekvivalentno sa $MA+\neg CH$; može da se pokaže da $MA(\aleph_1)$ ne povlači $MA(\aleph_2)$. Međutim, $MA(\aleph_1)$ povlači $\neg CH$:

DOKAZ. Pretpostavimo da CH važi i neka je $s = \langle r_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ niz koji pobrojava sve realne brojeve. Za svako $\alpha < \omega_1$, neka je $D_\alpha = \{a \in \mathbb{R} \mid a \neq r_\alpha\}$. Skup D_α je otvoren skup koji je gust u $\mathbb{R}$, za svako $\alpha < \omega_1$. Dakle, svaki realni broj koji pripada preseku svih D_α je realni broj koji ne pripada nizu s gore, što je nemoguće. $\square$

Jedno važno pojačanje $MA(\aleph_1)$ koje ima posledice u pogledu kardinalnosti kontinuuma jeste takozvana *aksioma pravog forsinga* (PFA, što je skraćenica od *proper forcing axiom*). Ovu je aksiomu formulisao Baumgartner [Baumgartner, 1983, 1984] koji je između ostalog dokazao i da je ona relativno konzistentna u odnosu na postojanje superkompaktnog kardinala[5]. Baumgartnerova aksioma je sledeće tvrđenje:

[5]Kažemo da je kardinal κ $\lambda-$ *superkompaktan* ako postoji elementarno utapanje $j : V \to M$ čija je kritična tačka κ i važi ${}^{\lambda}M \subseteq M$. Kardinal κ je *superkompaktan* ako je $\lambda-$ superkompaktan za svaki ordinal λ.

(PFA): za svako *pravo* (*proper*) parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ i za svaku familiju $\mathscr{D}$ gustih podskupova u $\mathbb{P}$ kardinalnosti $\leq \aleph_1$ postoji $\mathscr{D}-$generički filter G u $\mathbb{P}$.

Pojam pravog uređenja je tehnički zahtevan i nećemo ga ovde definisati. Dovoljno će biti da kažemo da se ovde radi o izvesnom oslabljenju uslova ccc iz MA. Jedna od posledica aksiome PFA jeste da važi $2^{\aleph_1} = \aleph_2$. Takođe važi i da $PFA \Rightarrow MA(\aleph_1)$. Pošto je $2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_1} = \aleph_2$, na osnovu prve od ovih posledica, a $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ na osnovu druge, sledi da PFA povlači $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Ovaj je rezultat dokazao Stevo Todorčević krajem osamdesetih godina prošlog veka [Bekkali, 1991]. Za više detalja o PFA, zainteresovanog čitaoca upućujemo na sledeći pregledni rad [Moore, 2010].

Tvrđenje PFA može se još više ojačati. Jedno snažnije, važno tvrđenje jeste *Martinov maksimum* (MM). Ta aksioma može da se formuliše na sličan način kao i PFA, s tom razlikom što zahtevamo da parcijalno uređenje ima svojstvo da čuva stacionarne podskupove[6] od $\aleph_0$. To tvrđenje je prvi put formulisano u [Foreman et al., 1988], i autori su u tom radu pokazali da ako postoji superkompaktan kardinal κ, onda postoji forsing proširenje u kome važi $\kappa = \aleph_2$ kao i MM. Jedna od posledica MM jeste da za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \aleph_2$, važi da je $\kappa^{\aleph_1} = \kappa$. Na osnovu te posledice imamo da važi $2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_1} \leq \aleph_2^{\aleph_1} = \aleph_2$. S druge strane, pošto MM povlači $MA(\aleph_1)$, a $MA(\aleph_1)$ povlači da važi $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, sledi da MM povlači da je $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Takođe, posledica od MM je i PFA.

S druge strane, može da se pokaže da su neke ograničene varijante forsing aksioma ekvivalentne nekim prirodnim principima koji tvrde generičku apsolutnost [Bagaria, 2000]. Na primer, jedna takva aksioma, *ograničeni Martinov maksimum* (BMM, od *bounded Martin maximum*) iz [Goldstern and Shelah, 1995], ekvivalentna je sledećem tvrđenju: *svaka* Σ_1 *rečenica sa parametrima iz* $H(\aleph_2)$ *koja važi u forsing proširenju koje čuva stacionarne podskupove od* $\aleph_1$ *je istinita.*

Tvrđenje BMM takođe odlučuje hipotezu kontinuuma. Vudin je uz pretpostavku o postojanju merljivog kardinala dokazao da važi: $BMM \Rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Taj su rezultat poboljšali Aspero (David Asperó) i Velč (Philip Welch) dokazavši [Asperó and Welch, 2002]

[6] Ukratko, parcijalno uređenje $\mathbb{P}$ *čuva stacionarne podskupove od* $\aleph_1$ ako i samo ako stacionarni podskupovi od $\aleph_1$ ostaju stacionarni u svakom forsing proširenju sa $\mathbb{P}$.

da ta implikacija važi uz nešto slabiju pretpostavku od merljivosti. Konačno, Todorčević [Todorčević, 2002] je dokazao da te pretpostavke o postojanju velikih kardinala mogu u potpunosti da se izostave. U stvari, Todorčevićev rezultat je još jači: ne samo što BMM povlači $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ u ZFC, već ovo tvrđenje povlači veoma jake kombinatorne principe θ_{AC} i θ^*_{AC} čija je prethodna jednakost posledica (v. navedeni Todorčevićev rad za formulaciju ovih principa).

Forsing aksiome mogu da se dovedu u vezu i sa aksiomama determinisanosti. Nedavno je Stil [Steel, 2005] pokazao, gradeći na ranijim Todorčevićevim rezultatima [Todorčević, 1984], da PFA ima za posledicu $AD^{L(\mathbb{R})}$, što na jako lep način povezuje ove dve oblasti.

U ovom odeljku smo videli da aksioma $(*)$ koju Vudin predlaže ima za posledicu $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Međutim, pored te aksiome, i tvrđenja iz familije forsing aksioma takođe povlače isti taj rezultat. Na ovom mestu je važno istaći da je i Gedel verovao da je kardinalnost kontinuuma jednaka $\aleph_2$ i, s tim u vezi, formulisao izvesna tvrđenja čija bi konjunkcija trebalo da povlači rezultat $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ [Gödel, 1970a, pp. 420-425]. Nažalost, u Gedelovom argumentu bila je greška, ali u prilog njegovoj intuiciji govori skorašnja rekonstrukcija [Brendle et al., 2008], u kojoj su autori pokazali da tvrđenja koja je Gedel formulisao zaista postavljaju gornju granicu za vrednosti kontinuuma, i to $\leq \aleph_2$.

7.4. Krajnji L

Osim pristupa problemu CH koji smo izložili gore, i koji ima za cilj da neutrališe posledice forsinga, Vudin je u poslednjih nekoliko godina formulisao i drugačiji pristup ovom problemu [Woodin, 2010a, 2011b]. Ovaj drugačiji pristup međutim ima i drugačije posledice u pogledu CH. Ovde ćemo moći da damo samo grubu ideju tih novijih rezultata, delom zbog toga što su sami rezultati još uvek u nastajanju, a delom i zbog toga što bi nas njihov detaljan prikaz odveo suviše daleko od naše teme.

U uvodu smo napomenuli da se Gedel u dokazu konzistentnosti CH i GCH sa ZFC služio metodom unutrašnjih modela. Njegovo destilovanje konstruktibilnog univerzuma L predstavlja rođenje takozvanog *programa unutrašnjih modela*. U najkraćem, taj program ima za cilj detaljno proučavanje velikih kardinala. Nakon što je 1961. Skot dokazao [Scott, 1961] da postojanje merljivog kardinala ima za posledicu $V \neq L$, jedna od ideja vodilja tog programa je bila da se formulišu proširenja od L koja su kompatibilna sa postojanjem velikih kardinala koji ne mogu postojati u L. Kunenova [Kunen, 1970] konstrukcija modela $L[U]$ koji je kompatibilan sa postojanjem merljivog kardinala kao i model $L[E]$ Mičela (John Mitchell) i Stila [Mitchell and Steel, 1994] koji je kompatibilan sa postojanjem beskonačno mnogo Vudinovih kardinala bili su koraci u tom pravcu - na taj način konstrukcija unutrašnjih modela koji liče na model L i koji su kompatibilni sa postojanjem velikih kardinala napreduje „odozdo", od manjih kardinala ka većim, korak po korak. Međutim, ispostavilo se da je proširenje Mičelovog i Stilovog rezultata na veće kardinale veoma težak problem. Konstrukcija unutrašnjeg modela koji je kompatibilan sa postojanjem *superkompaktnog* kardinala najveći je otvoreni problem teorije unutrašnjih modela. Međutim, u novijim Vudinovim radovima koje smo naveli gore, mogu se pronaći rezultati koji sugerišu da će uspešna konstrukcija unutrašnjeg modela koji sadrži superkompaktan kardinal ujedno da proizvede i unutrašnji model za *sve* velike kardinale. To proširenje Gedelovog konstruktibilnog univerzuma Vudin naziva *krajnji* L (*ultimate* L). Aksioma koju Vudin predlaže (zapravo, shema aksioma) na osnovu prethodno rečenog je: $V = \text{KRAJNJI } L$. Njena precizna formulacija[7] je veoma tehnička, ali je ideja koja iza nje stoji jednostavna: mi jako dobro razumemo unutrašnji model L kao i njegova proširenja, pre svega zahvaljujući Jensenovoj *teoriji fine strukture*. To bismo razumevanje onda pomoću Vudinove aksiome mogli da „preslikamo" na V, univerzum svih skupova. Što se posledica ove Vudinove aksiome tiče, ona dokazuje da je GCH istinita, kao i da Vudinova $\Omega-$hipoteza važi.

Ovde je na delu jedan zanimljiv obrt događaja. Prvi Vudinov program o kojem smo ranije govorili, podizanje generičke apsolutnosti do nivoa $H(\aleph_2)$, imao je za posledicu

[7] Postoji prava klasa Vudinovih kardinala i za svaku Σ_3-rečenicu σ važi da ako σ važi u V, onda postoji univerzalno Berov skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da važi

$$HOD^{L(A,\mathbb{R})} \cap V_\Theta \models \sigma,$$

gde je $\Theta = \Theta^{L(A,\mathbb{R})}$. Za više detalja o ovoj aksiomi zainteresovanog čitaoca upućujemo na navedene Vudinove radove.

(uz dodatne pretpostavke o kojima smo govorili gore) negaciju hipoteze kontinuuma, naime $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Ovaj je rezultat bio u skladu sa očekivanjima većine u skupovno-teorijskoj zajednici, bio je podržan mnogim drugim rezultatima, pre svega posledicama forsing aksioma o kojima smo ranije govorili, a ovakvom ishodu u pogledu veličine kontinuuma se i Gedel nadao. Da li će Vudinov krajnji L imati dovoljno toga da se preporuči pre svega skupovno-teorijskoj zajednici, ostaje da se vidi. Ono što nas međutim zanima jeste kako izgleda Vudinova pozicija u svetlu zahteva koje Gedel nameće kandidatima za nove aksiome?

7.5. Vudinovi filozofski argumenti

O filozofskoj pozadini svog programa Vudin govori u [Woodin, 2010a, 2011c], a najviše detalja može da se nađe u [Woodin, 2011a]. Svoje argumente on iznosi u obliku diskusije između skeptika i nekoga ko se bavi teorijom skupova. Gledišta ovog drugog su Vudinova gledišta. Diskusija između Vudina i skeptika ima dva dela. U prvom delu, Vudin iznosi argumente u prilog postojanja velikih *konačnih* brojeva (reda veličine 2^n gde je $n = |V_{1000}|$) i smislenosti tvrđenja o njima, a skeptik to osporava, tvrdeći da postoje samo „mali" konačni brojevi. Skeptikovo stanovište je neka vrsta ultrafinitizma i nije ga nimalo lako braniti. Međutim, Vudinovi argumenti nisu standardni argumenti koji se iznose protiv ultrafinitizma (v. [Dummett, 1975]). Njegova ideja je da u prvom delu diskusije na jednostavniji način predstavi argumente koje će usmeriti protiv skeptika, koji prihvata i mnogo više od onoga što ultrafinitizam dopušta. On želi da pokaže da nepostojanje velikih konačnih brojeva jeste činjenica koja može da se otkrije već u sferi malih konačnih brojeva, kao i da služeći se velikim konačnim brojevima mi možemo da predvidimo da se njihovo nepostojanje nikada neće otkriti u sferi malih konačnih brojeva. Mi možemo da pokušamo da u sferi malih konačnih brojeva pronađemo dokaz za činjenicu da veliki konačni brojevi ne postoje (dokaz koji ne bi bio duži od na primer 10^{24}, što je prema skeptikovom mišljenju mali broj, i koji bi tvrdio za 2^n, n kao gore, ne postoji), ali ako ne uspemo da taj dokaz pronađemo, a nećemo, onda je razložno da napustimo prvobitnu skeptičku poziciju i da prihvatimo postojanje velikih konačnih brojeva.

Drugi deo diskusije je zanimljiviji i tu ulazimo u sferu beskonačnosti. U ovom kontekstu stanovište koje skeptik zauzima je sledeće:

> Matematičko razumevanje beskonačnosti je besmisleno i bez posledica, jer je čitava koncepcija univerzuma skupova čista izmišljotina. Šta više, sve teoreme teorije skupova su naprosto finitističke istine, refleksije matematičara, a ne odraz neke prave matematičke „stvarnosti". [Woodin, 2011a, p. 94]

Iako izgleda da Vudinov skeptik ne prihvata ni jednu vrstu beskonačnosti, to nije slučaj, jer „„skeptik" referira na metamatematičku poziciju koja poriče bilo kakvo značenje koncepciji neprebrojivih skupova." [Woodin, 2011a, p. 94]. Izgleda da je pozicija Vudinovog skeptika najbliža onoj koju zastupa Feferman [Feferman, 1999], koji prihvata postojanje prirodnih brojeva i smislenost tvrđenja o njima, ali koji nasuprot tome smatra da je pojam proizvoljnog podskupa skupa prirodnih brojeva „neodređen" i da zahvaljujući tome mnoga tvrđenja aritmetike drugog reda nemaju određenu istinosnu vrednost. Kao odgovor na ovakvo stanovište, Vudin tvrdi sledeće:

> Razvoj teorije skupova, nakon Koena, doveo je do uvida da postoji čvrsta hijerarhija jakih aksioma beskonačnosti [...] otkriveno je da u mnogim slučajevima veoma različiti pravci istraživanja vode problemima čiji je stepen nerazrešivosti precizno kalibrisan pojmom beskonačnosti. Hijerarhija velikih kardinala se pojavljuje kao intrinsična, fundamentalna koncepcija teorije skupova. [Woodin, 2011a, p. 95]

Za razliku od skeptika koji poriče određenu istinosnu vrednost tvrđenjima koja se tiču velikih kardinala, Vudin smatra da je, baš kao i u slučaju aritmetičkih tvrđenja, njihova istinosna vrednost određena i na osnovu činjenice da su jake aksiome beskonačnosti *istinite* on iznosi sledeće predviđanje: *u sledećih 10,000 godina neće biti otkriveno da je teorija $ZF + AD$ inkonzistentna.* [Woodin, 2011a, p. 96] To predviđanje može da se pobije pomoću konačnog svedočanstva, tj. konstruisanja dokaza protivrečnosti u $ZF + AD$.

U sledećem koraku diskusije skeptik preuzima na sebe teret da opravda ovo predviđanje [Woodin, 2011a, pp. 96-97]. Zašto skeptik to čini? Ako skeptik smatra da su razlozi na kojima počiva Vudinovo poverenje u $ZF + AD$ slabi, ako veliki kardinali ne postoje i jedino čime se matematičari unutar teorije skupova bave jesu „finitističke istine" o tome šta iz čega sledi, ako jake aksiome beskonačnosti *nisu* istinite, zašto bi onda skeptik preuzeo na sebe teret da opravda predviđanje za koje smatra da je zasnovano na pogrešnim pretpostavkama? Vudin to ne kaže. Ono što može da se nasluti jeste da, pošto je skeptik prihvatio smislenost aritmetičkih tvrđenja, a $Con(ZF + AD)$ je jedno takvo tvrđenje, onda on može da to tvrđenje prihvati ili odbaci, ali ne i da ga proglasi besmislenim ili neodređenim u pogledu njegove istinosne vrednosti. Ako skeptik to tvrđenje odbaci, smatrajući da je ono lažno, onda bi takođe trebalo da objasni činjenicu da protivrečnost unutar teorije $ZF + AD$ nije otkrivena. Sličan zahtev biće postavljen i pred skeptikom koji će se u ovom slučaju „uzdržati od suda". S druge strane, izgleda da je Vudinova ideja da ako skeptik prihvati tvrđenje $Con(ZF + AD)$, onda će on videti da su najjači razlozi koji ovom tvrđenju govore u prilog upravo razlozi koji počivaju na jakim aksiomama beskonačnosti. Pošto izgleda da je Vudinov skeptik veoma blagonaklon, on će prihvatiti ove razloge kao razloge u prilog tvrđenja o postojanju velikih kardinala i time napustiti svoju početnu poziciju.

Ukratko, Vudinov argument bismo mogli da sumiramo na sledeći način. Ako neko prihvata smislenost tvrđenja o prirodnim brojevima, ali ne i o velikim kardinalima, onda bi on trebalo da se izjasni po pitanju tvrđenja $Con(ZF + AD)$. Ako smatra da je ovo tvrđenje lažno, a nije u stanju da to i dokaže, onda ide nasuprot onome što misli većina današnje skupovno-teorijske zajednice. To stručno mišljenje nije konkluzivan argument u prilog tvrđenju $Con(ZF + AD)$, ali sigurno ima neku težinu. Takođe, činjenica da protivrečnost unutar teorije $ZF + AD$ još uvek nije otkrivena dodatno slabi poziciju onoga ko u konzistentnost te teorije sumnja. Ako je racionalno da to tvrđenje prihvatimo, onda je takođe racionalno da prihvatimo i najubedljivije razloge koji tom tvrđenju govore u prilog. Ti razlozi počivaju na jakim aksiomama beskonačnosti. Po Vudinovim rečima:

> Razvoj matematičke teorije beskonačnosti doveo je do izvesnog broja predviđanja koja tvrde da određene tehničke aksiome koje se tiču postojanja velikih kardinala nisu inkonzistentne sa aksiomama teorije skupova [...] Do današnjeg dana nema poznatog (i pouzdanog) objašnjenja ovih predviđanja, osim onog koje kaže da su ona istinita zato što su odgovarajuće aksiome istinite u univerzumu skupova. [Woodin, 2011a, p. 116]

Sudeći po poslednjoj rečenici iz prethodnog citata, i Vudinovo stanovište pripada nekoj vrsti matematičkog realizma baš kao i Gedelov platonizam. Detalje ovog svog stanovišta Vudin ne iznosi pa ne možemo sa sigurnošću da kažemo koliko je to u skladu sa Gedelovim gledištima o prirodi matematičkih objekata kao i načinu na koji mi te objekte saznajemo. Možda bismo nešto više mogli da zaključimo ako uzmemo u obzir stanovišta skeptika kojima se Vudin suprotstavlja. Iz ovoga bi onda sledilo da je matematičko razumevanje beskonačnosti smisleno kao i da teoreme teorije skupova jesu odraz matematičke stvarnosti koja nije nešto subjektivno i ne zavisi od „refleksija matematičara". Jedno takvo stanovište bilo bi mnogo bliže Gedelovom platonizmu, posebno u pogledu njegove ontološke dimenzije. Nije međutim jasno da li bi Vudin prihvatio to snažnije realističko stanovište.

Ostaje da se vidi u kojoj meri je program koji Vudin predlaže u skladu sa zahtevima koje je Gedel postavio za formulisanje novih aksioma teorije skupova. Prisetimo se da nove aksiome u optimalnim okolnostima, po Gedelovom mišljenju, treba da poseduju određeni stepen kako unutrašnje tako i spoljašnje opravdanosti. Što se spoljašnje opravdanosti tiče, nema sumnje da je aksiome koje Vudin predlaže poseduju, na osnovu njihovih posledica od kojih smo neke opisali u ovom odeljku. S druge strane, teško da se može reći da te aksiome poseduju jako unutrašnje opravdanje (ili intrinsičnu nužnost, kako je to Gedel ponekad nazivao). Ako smo saglasni sa Gedelom da unutrašnju opravdanost poseduju one aksiome koje „slede” iz našeg razumevanja iterativnog pojma skupa, onda nije jasno da Vudinove aksiome taj uslov zadovoljavaju. Cilj naše analize iterativnog pojma skupa je bio da pokaže, oslanjajući se na principe refleksije, da su aksiome koje tvrde postojanje nekih (malih) velikih kardinala opravdane na ovaj način. Međutim, najviše što smo na ovaj način mogli da pokažemo bilo je da totalno neopisivi kardinali mogu da budu motivisani preko iterativnog pojma skupa. Čak ni za sve kardinale koji su konzistentni sa $V = L$ nije jasno kako bi takva motivacija mogla da se ponudi. Uzmimo, primera radi, pojam suptilnog kardinala. Na osnovu definicije ovog pojma, možemo da vidimo da tu nije reč samo o veličini tih kardinala, već da oni treba da poseduju određena kombinatorna svojstva (koherenciju $S_\alpha = S_\beta \cap \alpha$ za svaki par ordinala $\alpha < \beta$ iz proizvoljnog **CLUB** podskupa). Njihova veličina je posledica ovih kombinatornih svojstava. Ta su svojstva naravno motivisana i mi smo nešto o tome rekli kada smo ove kardinale definisali, ali ta motivacija nije ista ona na koju smo se pozivali kada smo govorili o refleksiji, nedostižnim, Maloovim i neopisivim kardinalima. Ne možemo da kažemo da pojam suptilnog kardinala „sledi” iz našeg razumevanja iterativnog pojma skupa. Slično će da bude i sa kardinalima koji su mnogo veći od ovih a o kojima Vudin govori, kao što su merljivi, Vudinovi, superkompaktni itd.

Jedan mogući način da se na ovo odgovori bio bi da se kaže da pojam elementarnog utapanja (v. DEFINICIJA 135) takođe počiva na ideji refleksije univerzuma skupova i da je na osnovu tog pojma moguće motivisati veće kardinale od onih koje smo u stanju da motivišemo služeći uopštenjima teoreme Levija i Montegjua.

7.6. Rajnhard o pojmu elementarnog utapanja

Takvo jedno stanovište prvi je zastupao Rajnhard u [Reinhardt, 1974a]. Grubo govoreći, Rajnhardova ideja počiva na sledećem misaonom eksperimentu: zamislimo da smo u mogućnosti da posmatramo univerzum teorije skupova V spolja, i da se prema njemu odnosimo kao prema bilo kom drugom skupu. Pošto je $V = V_\Omega$ (Rajnhard klasu svih ordinala označava sa Ω mesto našeg Ord; ovoga ćemo se i mi držati u prikazu njegovog rada), mogli bismo na taj način da posmatramo i objekte kao što su $\Omega+1$, $\Omega+\Omega$, $V_{\Omega+\Omega}$ itd. To je, kako kaže Rajnhard [Reinhardt, 1974a, p. 192], analogno *virtualnom pomeranju* u fizici gde zamišljamo da se beskonačno malo pomeranje koordinata sistema događa dok se vreme drži konstantnim. Pomeranje je virtualno pre nego stvarno jer svako stvarno pomeranje zahteva protok vremena. [Ginsberg, 1998, p. 267] U našem slučaju, umesto da tvrdimo da su objekti kao što su $\Omega+1$ ili $V_{\Omega+1}$ nedopustivi, jer su i Ω i $V_\Omega = V$ prave klase pa ih ne možemo tretirati kako bismo inače tretirali ordinale ili skupove uopšte, ovaj bi misaoni eksperiment trebalo da posluži kao motivacija za formulisanje sledeće teorije: jeziku $\mathscr{L}_{ZFC}$ možemo da dodamo dve individualne konstante V i Ω, kao što smo to učinili prilikom formulisanja Akermanove teorije A. Konstantu V ćemo da interpretiramo kao univerzum svih skupova a konstantu Ω kao klasu svih ordinala. Dalje, uzmimo sve aksiome teorije ZF i relativizujmo ih na V i dodajmo osim toga i aksiomu $V = V_\Omega$. Ova poslednja aksioma nam garantuje, po Rajnhardovim rečima [Reinhardt, 1974a, p. 192], da za svako $x \in V$, imamo da $\mathscr{P}(x)$ sadrži sve moguće podskupove od x . Međutim, postavlja se pitanje šta ćemo da pretpostavimo o tim novim, „virtualnim" objektima kao što su $\Omega+1$ ili $V_{\Omega+\Omega}$? Rajnhardova ideja je da na te objekte primenimo našu staru teoriju za V_Ω i predlaže sledeću shemu aksiome:

$$(S2): \qquad \forall x, y \in V(\theta^V(x,y) \leftrightarrow \theta(x,y))$$

gde je θ proizvoljna $\in$ –formula u kojoj se samo promenljive x i y javljaju slobodno a θ^V je relativizacija formule θ na V. Tom se aksiomom tvrdi da je svaka rečenica teorije V_Ω istinita i u većem univerzumu koji je obogaćen virtualnim objektima. Te objekte i taj veći univerzum koji ih sadrži Rajnhard naziva još i *projektovanim* (*projected*). Skupovno-teorijski deo teorije $ZF + V = V_\Omega + S2$ jednak je ZF, te dve teorije dokazuju iste $\in$ –rečenice [Reinhardt, 1970, p. 242].

Sledeći Rajnhardov korak jeste da pokuša da u okruženju svoje teorije projektovanih objekata povuče razliku između skupova i klasa. On kaže, „[...] u teoriji skupova i klasa imamo klase koje su različite od skupova. Ali, ako ih posmatramo prosto kao kolekcije, čini se da povlačimo razliku koja ništa ne znači" [Reinhardt, 1974a, p. 196].

Nasuprot tome, možemo da pokušamo da tu razliku između skupa x i prave klase P objasnimo na sledeći način. Ako bi postojalo više ordinala nego što ih zaista ima, onda bi klasa P nužno posedovala neke nove elemente, dok bi skup x imao tačno one elemente koje i inače sadrži. Mogli bismo da kažemo da je „ekstenzija od x fiksirana ali da ekstenzija od P zavisi od toga koji skupovi postoje. Grubo govoreći, skup x *jeste* sopstvena ekstenzija, dok klasa P ima i nešto pride” [Reinhardt, 1974a, p. 196]. Ako sa $j(P)$ označimo ovu ekstenziju klase P u projektovanom univerzumu, onda mesto $(S2)$ imamo sledeću shemu:

$$(S4): \qquad \forall x, y \in V \forall P \subseteq V (\theta^{\mathscr{P}(V)}(x, y, P) \leftrightarrow \theta(x, y, j(P)))$$

U ovoj shemi, j je unarni funkcijski simbol, u formuli θ se samo promenljive x, y i P javljaju slobodno a u $\theta^{\mathscr{P}(V)}$ su svi kvantifikatori relativizovani na $x \subseteq V$. Pošto za svaki skup $x \in V$ važi da je $x \subseteq V$, jedna instanca sheme $(S4)$ je $x = x \leftrightarrow x = j(x)$. Skupovi, dakle, zadržavaju svoju ekstenziju u projektovanom univerzumu, $x = j(x)$ za svako $x \in V$. Ta shema je veoma jaka. Više o njenoj snazi ćemo da kažemo u nastavku kada ćemo je formulisati u nešto drugačijem obliku. Pre toga ćemo, sledeći Rajnharda, da vidimo kako razlikovanje između skupova i klasa može da nam posluži da ideju koja stoji iza sheme $(S4)$ dodatno ojačamo.

U projektovanom univerzumu, onom u kojem zamišljamo da postoji više ordinala nego što ih zaista ima, klasa $j(\Omega)$ će da sadrži sve *stare* ordinale, kao i neke nove, *zamišljene* ordinale pride. Pošto smo već povukli razliku između skupova i klasa, ne moramo ovde da stanemo. Možemo da posmatramo klase pravih klasa, klase koje sadrže klase pravih klasa itd. Ove klase Rajnhard naziva $\Omega-$*klasama*, pošto su one izgrađene nad Ω [Reinhardt, 1974a, p. 198]. Na ovaj način mi možemo da izgradimo jednu novu, zamišljenu hijerarhiju $V_{\Omega'}$, gde je $\Omega < \Omega'$. Uzmimo sada neko $\lambda > \Omega$ takvo da je V_λ kolekcija $\Omega-$klasa. Recimo, λ može da bude $\Omega + 1$, što bi odgovaralo shemi $(S4)$ gore ili neki drugi, veći „ordinal” iz našeg projektovanog univerzuma. Želimo da pored V_Ω i V_λ, kolekcija skupova i $\Omega-$klasa, posmatramo i $V_{\Omega'}$, kolekciju zamišljenih skupova kao i $V_{\lambda'}$, kolekciju zamišljenih $\Omega-$klasa; u ovoj poslednjoj, Ω je zamišljeni skup. Međutim, ovde moramo da vodimo računa o tome da klase skupova odgovaraju klasama zamišljenih skupova, kao i da $\Omega-$klase x odgovaraju zamišljenim klasama $j(x)$ na takav način da naša stara teorija ostaje očuvana. Da bismo ovo osigurali, zahtevaćemo da važi sledeće:

(1) $\Omega < j(\Omega) = \Omega' < \lambda'$,

(2) $\forall x \in V_\Omega\, j(x) = x$,

(3) $j : (V_\lambda, \in) \prec (V_{\lambda'}, \in)$, tj. j je elementarno utapanje (v. DEFINICIJA 135).

Ove Rajnhardove uslove možemo da sumiramo na sledeći način: (†) postoji elementarno utapanje $j : (V_\lambda, \in) \prec (V_{\lambda'}, \in)$ čija je *kritična tačka*[8] Ω i $j(\Omega) = \Omega'$ [Kanamori, 2009, p. 314].

Prisetimo se da smo u odeljku [6.4] definisali pojam $1-$ekstendibilnog kardinala. Taj pojam može da se uopšti na sledeći način:

DEFINICIJA 152. Kardinal κ je $\eta-$*ekstendibilan* akko postoji ζ i elementarno utapanje $j : (V_{\kappa+\eta}, \in) \prec (V_\zeta, \in)$ čija je kritična tačka κ i važi $\eta < j(\kappa)$. Kažemo da je κ *ekstendibilan* akko je $\eta-$ekstendibilan za svako $\eta > 0$.

Ono što Rajnhardov princip (†) kaže jeste da je klasa Ω $\lambda-$ekstendibilna. Ako (†) tvrdimo za svako $\lambda > \Omega$ [Reinhardt, 1974a, Axiom 6.3], onda je klasa Ω ekstendibilna. Shema $(S4)$ je slabija, njena modelsko-teorijska verzija je sledeća: (††) postoji elementarno utapanje $j : (V_{\Omega+1}, \in) \prec (V_{j(\Omega)+1}, \in)$ čija je kritična tačka Ω. Dakle, princip (††) kaže da je klasa Ω $1-$ekstendibilna.

To nam dalje omogućava da služeći se sledećim principom refleksije zaključimo da postoji $1-$ekstendibilan kardinal κ (na osnovu (††)), tj. ekstendibilan kardinal κ (na osnovu (†)):

$(P1)$: Ako Ω poseduje neko svojstvo P, onda postoji ordinal $\kappa < \Omega$ koji takođe poseduje svojstvo P. [Reinhardt, 1974a, p. 190]

[8] Ako je $j : (V, \in) \prec (M, \in)$ netrivijalno $(j \neq id)$ elementarno utapanje, gde je M tranzitivna klasa, onda postoji neki ordinal α takav da je $j(\alpha) \neq \alpha$. Najmanji takav ordinal naziva se kritičnom tačkom utapanja j. Taj ordinal je kardinal i ima mnoga svojstva velikih kardinala: on je regularan, neprebrojiv, nedostižan, Maloov i slabo kompaktan. Da svaki takav kardinal ima još jača svojstva velikih kardinala videćemo u nastavku.

Već smo videli (TEOREMA 137) da su 1−ekstendibilni kardinali veoma veliki. Što se veličine ekstendibilnih kardinala tiče, imamo sledeće tvrđenje (za dokaz v. [Kanamori, 2009, Proposition 23.6, 23.7]:

TEOREMA 153. *Ako je κ ekstendibilan, onda je κ superkompaktan i postoji normalan ultrafilter $\mathscr{U}$ nad κ takav da važi*

$$\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ JE SUPERKOMPAKTAN}\} \in \mathscr{U}.$$

7.7. Nedostaci Rajnhardovog argumenta

Rajnhardovom argumentu u prilog motivisanja ekstendibilnih kardinala mogu da se upute neki prigovori. Da bismo formulisali prvi od njih, vratimo se za trenutak pojmu $\Omega-$klase. Da li V_λ, kolekcija $\Omega-$klasa iz (†), može da sadrži sve moguće $\Omega-$klase? U tom slučaju imaćemo da je $\lambda = \lambda'$, pošto λ' ne može da bude manje od λ, a ovo λ indeksira nivo koji sadrži *sve moguće* klase [Reinhardt, 1974a, p. 200], jedino će Ω da se pomeri do Ω'. Mesto (†) gore, u tom ćemo slučaju da imamo sledeći princip: (‡) postoji elementarno utapanje $j : (V_\lambda, \in) \prec (V_\lambda, \in)$ čija je kritična tačka Ω i $j(\Omega) = \Omega'$. U svojoj doktorskoj tezi iz 1967. godine Rajnhard je predložio princip (‡), jer mu se činilo plauzibilnim da postoje nedostižni kardinali λ koji imaju ova svojstva [Reinhardt, 1974a, p. 200]. Na istom mestu on je predložio i sledeću aksiomu: postoji netrivijalno elementarno utapanje $j : (V, \in) \prec (V, \in)$. Ta aksioma je izgledala kao prirodno ojačanje aksioma koje tvrde postojanje netrivijalnih elementarnih utapanja, pošavši od $j : (V, \in) \prec (M, \in)$, gde je M tranzitivna klasa. Kritična tačka ovog poslednjeg elementarnog utapanja je merljiv kardinal[9]. Sve veće kardinale dobijamo tako što zahtevamo da klasa M više nalikuje V. Na primer, da bismo dobili $\lambda-$superkompaktan kardinal zahtevamo da je klasa M zatvorena za $\lambda-$nizove svojih elemenata.

[9]Kao što smo već napomenuli, merljivi kardinali su jako veliki. Svaki merljiv kardinal je regularan, jako nedostižan, slabo kompaktan, neizreciv itd. Takođe smo spominjali Skotov rezultat da je posledica postojanja merljivog kardinala $V \neq L$.
S druge strane, merljivi kardinali su manji od Vudinovih, superkompaktnih i ekstendibilnih kardinala. Recimo, skup merljivih kardinala ispod svakog Vudinovog kardinala je stacionaran, κ je $\kappa-$superkompaktan akko je merljiv, a ako je κ $2^\kappa-$superkompaktan, onda je on $\kappa-$ti po redu merljiv kardinal. [Solovay et al., 1978]

Međutim, nekoliko godina nakon što je Rajnhard ove aksiome predložio u svojoj doktorskoj tezi Kunen [Kunen, 1971] je dokazao sledeću teoremu:

TEOREMA 154. (ZFC) *Ne postoji netrivijalno elementarno utapanje*

$$j : (V, \in) \prec (V, \in).$$

Otvoreno je pitanje da li je ovu teoremu moguće dokazati bez aksiome izbora.[10] Što se tiče Rajnhardovog principa (‡), na osnovu analize Kunenovog dokaza sledi da λ u V_λ mora biti oblika ζ ili $\zeta + 1$, gde je $cf(\zeta) = \omega$. Aksiome koje odgovaraju ovim dvema slučajevima zovu se *rang-u-rang* aksiomama. Prva, slabija, aksioma koja tvrdi postojanje netrivijalnog elementarnog utapanja $j : (V_\zeta, \in) \prec (V_\zeta, \in)$ označava se još i sa (**I3**). Druga aksioma koja tvrdi postojanje netrivijalnog utapanja $j : (V_{\zeta+1}, \in) \prec (V_{\zeta+1}, \in)$ je snažnija i povlači prvu aksiomu. Ona se označava još i sa (**I1**). Te dve aksiome pripadaju familiji najsnažnijih jakih aksioma beskonačnosti za koje ne znamo da su inkonzistentne sa ZFC.

Prvi prigovor koji bi se Rajnhardovom argumentu mogao uputiti jeste sledeći: njegovo opravdanje ekstendibilnih kardinala napreduje korak po korak, od 1−ekstendibilnosti klase Ω, preko pune ekstendibilnosti klase Ω, sve do postojanja netrivijalnog elementarnog utapanja $j : (V_{\zeta+1}, \in) \prec (V_{\zeta+1}, \in)$. Isti ovaj argument izgleda da sugeriše da je postojanje elementarnog utapanja $j : (V, \in) \prec (V, \in)$ jednako opravdano kao i ovi slabiji principi. Međutim, na osnovu Kunenovog rezultata postojanje takvog elementarnog utapanja je inkonzistentno sa ZFC. Mogli bismo da budemo pragmatični pa da jednostavno prihvatimo one principe za koje ne znamo da su inkonzistentni sa ZFC. Ovakvu strategiju Medijeva zove *korak od propasti* (*one step back from disaster*)[Maddy, 1988a, p. 485]. To će dosta oslabiti Rajnhardove argumente u pogledu njihove unutrašnje opravdanosti (da se poslužimo Gedelovim terminom). Velike kardinale čije postojanje tvrdi $j : (V_{\zeta+1}, \in) \prec (V_{\zeta+1}, \in)$ prihvatićemo zato što je teorija $ZFC + \mathbf{I1}$ u pogledu

[10] Strogo govoreći, Kunen nije ovu teoremu dokazao u ZFC, već u takozvanoj *Mors-Keli* teoriji klasa. Takođe ga je moguće izvesti i u NBG teoriji klasa sa aksiomom izbora. Da bismo ovo tvrđenje dokazali u ZFC, jedan od načina je da jeziku L_{ZFC} dodamo novi unarni funkcijski simbol j kao i aksiomu kojom će se tvrditi da je j elementarno utapanje. Osim toga treba još u shemama separacije i zamene dopustiti formule koje sadrže j.

konzistentske snage jedna od najjačih teorija koje poznajemo, kao i zbog drugih njenih poželjnih posledica, a ne zato što su oni opravdani plauzibilnim razlozima koji počivaju na analizi strukturalnih svojstava pojma skupa. Ova poslednja vrsta opravdanja je ono što je Rajnhard želeo da ponudi. Takav jedan prigovor Rajnhardovom argumentu prvi je izneo Pauel (William Powell) [Wang, 1977, p. 333 n. 14] a kasnije i Kelner [Koellner, 2009, p. 217] ne navodeći Pauela.

Drugi prigovor koji bi mogao da se uputi Rajnhardovom argumentu jeste da objekti kao što su $\Omega+1$, $V_{\Omega+\Omega}$ itd. nisu skupovi pa da se njihovim uvođenjem dovodi u pitanje univerzalnost teorije skupova. Rajnhardov odgovor je da bismo mogli „da se utešimo time što bismo univerzalnost teorije skupova zahtevali u njenoj primenljivosti, a ne u ekstenziji pojma skupa” [Reinhardt, 1974a, p. 198]. Tako bismo teoriju skupova mogli da razumemo kao opštu teoriju kolekcija koja je primenljiva kako na skupove tako i na nove objekte Rajnhardove teorije kao što su $\Omega+1$ i $V_{\Omega+\Omega}$ gore. Međutim, pošto očekujemo bezrezervnu primenljivost teorije skupova i na te nove objekte, možemo da se pitamo da li je ovde zaista reč o nekim novim objektima? Možda se tu pre radi o tome da smo „zaboravili” da završimo kumulativnu hijerarhiju i da govoreći o V_Ω mi u stvari govorimo o nekom inicijalnom segmentu V_κ . Svi ti dodatni nivoi nakon V_Ω su možda samo nivoi uobičajene kumulativne hijerarhije koja nam je svima poznata.

Da se ti novi objekti ipak razlikuju od skupova govori nam Rajnhardovo razlikovanje između skupova i klasa koje smo naveli gore. Međutim, kao što Medijeva kaže [Maddy, 1988b, p. 754], nije jasno da su Rajnhardovi argumenti dovoljni da opravdaju postojanje elementarnog utapanja $j:(V_{\Omega+1},\in)\prec(V_{j(\Omega)+1},\in)$. Izgleda de je najviše što na osnovu Rajnhardovog zahteva možemo da tražimo to da strukture o kojima je reč budu elementarno ekvivalentne, tj. da teorije struktura $(V_{\Omega+1},\in)$ i njoj odgovarajuće projektovane strukture, primera radi, budu jednake, ali to neće biti dovoljno da proizvede $1-$ekstendibilnost.

Ono što nas posebno zanima jeste da li su Rajnhardovi argumenti opravdani na osnovu iterativnog pojma skupa, tj. da li su to argumenti koji počivaju na principu refleksije. Sigurno da je nešto od te ideje sadržano u pojmu elementarnog utapanja koji možemo da razumemo kao transformaciju univerzuma skupova koja čuva istinitost. Da je ovde ipak reč o jednoj drugačijoj ideji smatrao je i sam Gedel koji je Rajnhardove argumente smatrao „prilično nezadovoljavajućim” i da bi se „nešto bolje moglo postići na osnovu prave analize ideje *strukturalnog svojstva* pojma skupa, što bi onda vodilo principima refleksije koji bi imali sledeći oblik „svako strukturalno svojstvo pojma skupa reflektovano je nekim skupom””[Reinhardt, 1974a, p. 189 n.1]. Koja to svojstva pojma skupa Gedel smatra *strukturalnim* nije u potpunosti jasno. Najviše što o tome govori može da se nađe u [Wang, 1996, pp. 283-284]. Neka svojstva očigledno nisu strukturalna, kao što je svojstvo da sadrži sve skupove, ali Gedel ne daje neku pozitivnu karakterizaciju ovih svojstava koja bi učinila ono što se od nje očekuje: da princip koji tvrdi da se ova svojstva reflektuju sa V na elemente od V ima za posledicu postojanje velikih kardinala.

Što se merljivih kardinala tiče, izgleda da se Gedel nadao njihovoj karakterizaciji koja bi, grubo govoreći, mogla da ima sledeći oblik: kardinal κ je merljiv ako i samo ako je V_κ zatvoren za operacije određene vrste. Takođe, zatvorenost za ove operacije bi trebalo da sugeriše veličinu merljivih kardinala slično onome što imamo u slučaju nedostižnih i Maloovih kardinala:

> Međutim, ostaje utisak da svojstvo merljivosti kardinala govori više od toga da je ovaj kardinal veliki, iako je veličina posledica ovog svojstva. [Wang, 1996, p. 263]

Izgleda dakle da je Gedel očekivao karakterizaciju merljivih kardinala koja bi počivala na principima refleksije sličnim onima koji se dobijaju kao uopštenja teoreme Levija i Montegjua, i da bi prethodna analiza pojma strukturalnog svojstva skupova trebalo da do takvih principa dovede. Rajnhardovi i Pauelovi radovi [Reinhardt, 1974b] bi se mogli smatrati pokušajima pružanja jedne takve analize, ali nije u potpunosti jasno da je to baš ono čemu se Gedel nadao (v. [Wang, 1996, p. 285]).

7.8. *Coda*

Prisetimo se da smo želeli da utvrdimo da li aksiome koje Vudin predlaže poseduju ono što Gedel zove unutrašnjom opravdanošću. Pošto su, po Vudinovim rečima, jake aksiome beskonačnosti tvrđenja u čiju istinitost ne bi trebalo da sumnjamo, a za njih imamo prilično uniformu formulaciju pomoću pojma elementarnog utapanja koji donekle podseća na principe refleksije, činilo se da je ove aksiome moguće na taj način opravdati. Na to bismo opravdanje onda mogli da se pozovemo prilikom opravdavanja Vudinovih aksioma, bilo onih koje tvrde invarijatnost strukture $(H(\aleph_2), \in)$ u pogledu forsinga, bilo aksiome $V =$KRAJNJI L.

Najozbiljniji pokušaj unutrašnjeg opravdanja velikih kardinala pomoću pojma elementarnog utapanja je Rajnhardov [Reinhardt, 1974a]. Koliko je nama poznato, Rajnhard je bio i jedini koji je Gedelov zahtev za unutrašnjim opravdanjem ozbiljno shvatio i pokušao da pruži *filozofske argumente*, pre nego naznake o plauzibilnosti novih aksioma. Njegova analiza toga kako bi nove aksiome teorije skupova trebalo da izgledaju i šta se sve od njih očekuje je sigurno najbolja posle Gedelove, i pored svih problema sa kojima se suočava. Iako veoma uspešna u nekim drugim svojim delovima, ta Rajnhardova analiza nije uspela da pokaže da je pojam elementarnog utapanja moguće opravdati na osnovu refleksije na način koji bi bio u sklada su onim što je Gedel očekivao.

Ali čak i ako Vudinove aksiome ne možemo da opravdamo na osnovu iterativnog pojma skupa, one mogu biti toliko plodne u pogledu svojih posledica da nam se njihovo usvajanje čini gotovo neizbežnim:

> [Č]ak i ako zanemarimo intrinsičnu nužnost neke nove aksiome, čak i u slučaju da ona ne poseduje nikakvu intrinsičnu nužnost, na pitanje o njenoj istinitosti moguće je odgovoriti i na drugi način, naime, induktivno, ispitujući njenu „uspešnost", njenu plodnost u pogledu posledica i posebno „proverljivih" posledica, tj. posledica dokazivih bez pomoći nove aksiome, čiji se dokazi uz pomoć ove aksiome međutim mogu smatrati jednostavnijim i lakšim za otkrivanje, i čine mogućim da se više dokaza podvede pod jedan dokaz. [Gödel, 1947, p. 182.]

Slično tome, Gedel kaže:

> Mogle bi postojati aksiome toliko bogate u pogledu svojih proverljivih posledica, koje u tolikoj meri rasvetljavaju čitavu jednu disciplinu i pružaju snažne metode za rešavanje datih problema (rešavajući ih čak, u onoj meri u kojoj je to moguće, na konstruktivistički način) da bi, potpuno nezavisno od pitanja njihove intrinsične nužnosti, one morale biti prihvaćene makar u istom onom smislu u kom je to i bilo koja dobro utvrđena fizička teorija. [Gödel, 1947, pp. 182-183.]

Vudinove aksiome su veoma bogate u pogledu svojih posledica, od kojih smo neke naveli u odeljcima [7.3] i [7.4]. Po našem mišljenju, ovo nije dovoljno da se baš te aksiome izoluju kao nove aksiome teorije skupova koje bi trebalo da usvojimo. Ako kao merilo postavimo CH, onda Vudinova aksioma $(*)$, baš kao i forsing aksiome o kojima smo govorili u odeljku [7.3], ima za posledicu $2^{\aleph_0} = \aleph_2$; vrednost $\aleph_2$ mnogi matematičari koji se teorijom skupova bave, uključujući i Gedela, smatraju „pravom" vrednošću [11]. Kako bismo trebali da odaberemo između ovih aksioma? Forsing aksiome, baš kao i aksioma koju Vudin predlaže, odlučuju mnoga inače neodlučiva tvrđenja i makar su delom zasnovane na ideji da je univerzum teorije skupova veoma bogat. One se možda ne „nameću kao istinite", ali ovo nije slučaj ni sa aksiomama koje Vudin predlaže. Jedan od argumenata u prilog Vudinovoj $(*)$ aksiomi bio je taj što ona tvrdi invarijantnost određenih struktura u pogledu forsinga i tako donekle neutrališe posledice nepotpunosti u ZFC. Međutim, videli smo da i neke varijante forsing aksioma mogu da se formulišu kao principi generičke apsolutnosti koji imaju isto ovo svojstvo.

Neka vrsta amalgamacije između forsing aksioma i Vudinove aksiome $(*)$, bi izgleda dodatno ojačala obe ove pozicije. Na osnovu Larsonovog (Paul Larson) rezultata [Larson, 2000] znamo da ako postoji superkompaktan kardinal koji je limes superkompaktnih kardinala, onda postoji model teorije skupova u kome važi MM ali ne i Vudinova aksioma $(*)$. Magidor (Menachem Magidor) je u [Magidor, 2012] izneo hipotezu

[11] Osim činjenice da je kardinalnost $\aleph_2$ posledica tvrđenja o kojima smo govorili u navedenim odeljcima, postoje i drugi razlozi zbog kojih matematičari preferiraju $\neg CH$ u odnosu na CH. Neki od ovih razloga sabrani su u [Maddy, 1988a].

da jedna varijanta od MM, takozvana MM^{++} aksioma (v. navedeni Magidorov rad za formulaciju ove aksiome), povlači $(*)$. Pošto $MM^{++} \Rightarrow MM$, ovo bi bio primer jedne jake forsing aksiome koja poseduje sve one poželjne posledice koje preporučuju $(*)$. U vreme kada je Magidor pisao pomenuti rad, Šindler (Ralf Schindler) i Aspero su najavili dokaz pomenutog tvrđenja, ali se ispostavilo da ovaj dokaz ima određene nedostatke. Koliko je nama poznato, ovo tvrđenje još uvek nije dokazano (v. [Asperó and Schindler, 2014]).

S druge strane, Vudinov program koji nastoji da izoluje krajnje uvećanje konstruktibilnog univerzuma L , daleko je od završenog. Činjenica jeste da Vudinova $V =$KRAJNJI L aksioma povlači CH , ali iz činjenice da univerzum V ima lepe unutrašnje modele ne sledi da V jeste jedan takav model. Takođe, unutrašnji model koji je kompatibilan sa postojanjem superkompaktnog kardinala još uvek nije konstruisan i ostaje da se vidi kako će tačno taj model da izgleda.

Naravno, ništa od onoga što smo rekli ne umanjuje matematički značaj rezultata o kojima smo govorili. Radi se prosto o tome da ne postoje jaki filozofski razlozi koji bi preporučili Vudinove programe pre svih drugih. Mogli bismo da kažemo da je u savremenoj teoriji skupova Gedelov *povratni* odnos između unutrašnjeg i spoljašnjeg opravdanja (v. odeljak [4.4]) sve prisutniji, i nema sumnje da će tako i ostati. Složenost problema kojima se teorija skupova bavi bi trebalo da sugeriše da će u pogledu pitanja kao što je CH, mnogo više moći da se kaže kako se naše razumevanje strukture univerzuma V bude uvećavalo. Pitanja kao što je ovo teoriju skupova unapređuju - poslednjih pola veka razvoja ove discipline veoma snažno svedoče o tome.

BIBLIOGRAFIJA

Abramson, F., Harrington, L., Kleinberg, E., and Zwicker, W. (1977). Flipping properties: a unifying thread in the theory of large cardinals. *Ann. Math. Logic*, 12(1):25–58.

Ackermann, W. (1956). Zur Axiomatik der Mengenlehre. *Math. Ann.*, 131:336–345.

Alkor, C. (1980). On a theory of classes. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 26(4):337–342.

Armstrong, D. M. (1973). *Belief, truth and knowledge.* Cambridge University Press, Cambridge.

Arrigoni, T. (2010). $V = L$ and intuitive plausibility in set theory. A case study. *Bull. Symbolic Logic*, 17(3):337–360.

Asperó, D. and Schindler, R. (2014). Bounded Martin's maximum with an asterisk. To appear in *Notre Dame J. of Form. Log.*

Asperó, D. and Welch, P. (2002). Bounded Martin's maximum, weak Erdős cardinals, and ψ_{AC}. *J. Symbolic Logic*, 67(3):1141–1152.

Bagaria, J. (2000). Bounded forcing axioms as principles of generic absoluteness. *Arch. Math. Logic*, 39(6):393–401.

Barwise, J., editor (1977). *Handbook of mathematical logic.* North-Holland, Amsterdam.

Baumgartner, J. (1975). Ineffability properties of cardinals. I. In Hajnal, A., Sós, V., and Rado, R., editors, *Infinite and finite sets. Volume I,* pages 109–130. North-Holland, Amsterdam.

Baumgartner, J. (1983). Iterated forcing. In Mathias, A., editor, *Surveys in set theory*, pages 1–59. Cambridge University Press, Cambridge.

Baumgartner, J. (1984). Applications of the proper forcing axiom. In Kunen, K. and Vaughan, J., editors, *Handbook of set-theoretic topology*, pages 913–959. North-Holland, Amsterdam.

Bekkali, M. (1991). *Topics in set theory.* Springer, Berlin.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *J. Philos.*, 70(19):661–679.

Bernard, R. (1912). *The problems of philosophy.* Williams and Norgate, London.

Bernays, P. (1935). Sur le platonisme dans les mathématiques. *L'ensiegnement mathématique*, 34:52–69. Prevod na engleski jezik u: Bennaceraf P. and Putnam H., *Philosophy of mathematics. Selected readings.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964. pp. 274-286.

Berto, F. (2009). *There's something about Gödel.* Wiley-Blackwell, Chichester.

Bonjour, L. (1998). *In defense of pure reason. A rationalist account of a priori justification.* Cambridge University Press, Cambridge.

Boolos, G. (1971). The iterative conception of set. *J. Philos.*, 68(8):215–231.

Boos, W. (1975). Lectures on large cardinal axioms. In Müller, G., Oberschelp, A., and Potthoff, K., editors, *ISILC Logic Conference*, pages 25–88. Springer, Berlin.

Brendle, J., Larson, P., and Todorčević, S. (2008). Rectangular axioms, perfect set properties and decomposition. *Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math.*, 137(33):91–130.

Brown, J. (2012). *Platonism, naturalism, and mathematical knowledge.* Routledge, London.

Burgess, J. (2008). *Mathematics, models, and modality.* Cambridge University Press, Cambridge.

Burgess, J. and Rosen, G. (1997). *A subject with no object. Strategies for nominalistic interpretation of mathematics.* Oxford University Press, Oxford.

Cantor, G. (1962). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind.* Georg Olms, Hildesheim.

Cantor, G. (1991). *Briefe.* Springer, Berlin.

Changeux, J.-P. and Connes, A. (1995). *Conversations on mind, matter, and mathematics.* Princeton University Press, Princeton. Edited and translated from the 1989 French original by M. B. DeBevoise.

Chihara, C. S. (1990). *Constructibility and mathematical existence.* The Clarendon Press, New York.

Ciesielski, K. (1997). *Set theory for the working mathematician.* Cambridge University Press, Cambridge.

Connes, A., Lichnerowicz, A., and Schützenberger, M. P. (2000). *Triangle de pensées.* Odile Jacob, Paris.

Cusanus, N. (2001). *Complete philosophical and theological treatises of Nicholas of Cusa: De docta ignorantia.* Complete Philosophical and Theological Treatises of Nicholas of Cusa. A. J. Banning Press, Minneapolis.

Drake, F. (1974). *Set theory. An introduction to large cardinals.* North-Holland, Amsterdam.

Dummett, M. (1975). Wang's paradox. *Synthese*, 30(3/4):pp. 301–324.

Dummett, M. (1978). *Truth and other enigmas.* Duckworth, London.

Feferman, S. (1999). Does mathematics need new axioms? *Amer. Math. Monthly*, 106(2):99–111.

Feferman, S. (2006). Are there absolutely unsolvable problems? Gödel's dichotomy. *Philos. Math. (3)*, 14(2):134–152.

Felgner, U. (1971). Comparison of the axioms of local and universal choice. *Fund. Math.*, 71(1):43–62.

Field, H. (1980). *Science without numbers.* Princeton University Press, Princeton.

Field, H. (1989). *Realism, mathematics and modality.* Blackwell, New York.

Field, H. (1990). Mathematics without truth (a reply to Maddy). *Pacific Philosophical Quarterly*, 71(3):206–222.

Field, H. (1998). Mathematical objectivity and mathematical objects. In Laurence, S. and Macdonald, C., editors, *Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics*, pages 387–403. Blackwell, New York.

Foreman, M., Magidor, M., and Shelah, S. (1988). Martin's maximum, saturated ideals, and nonregular ultrafilters. I. *Ann. of Math. (2)*, 127(1):1–47.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y., and Levy, A. (1973). *Foundations of set theory (revised edition.* North-Holland, Amsterdam.

Frege, G. (1974). *The foundations of arithmetic. Die Grundlagen der Arithmetik.* Northwestern University Press, Evanston. A logico-mathematical enquiry into the concept of number. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Containing a translation by J. L. Austin and a reprinting of the 1884 German original, Third reprinting of the second revised edition of 1953.

Freiling, C. (1986). Axioms of symmetry: throwing darts at the real number line. *J. Symbolic Logic*, 51(1):190–200.

Friedman, H. (1981). On the necessary use of abstract set theory. *Adv. in Math.*, 41(3):209–280.

Friedman, H. (2001). Subtle cardinals and linear orderings. *Ann. Pure Appl. Logic*, 107(1-3):1–34.

Gale, D. and Stewart, F. (1953). Infinite games with perfect information. In Kuhn, H. and Tucker, A., editors, *Contributions to the theory of games. Volume II*, pages 245–266. Princeton University Press, Princeton.

Geach, P. (1977). *The virtues.* Cambridge University Press, Cambridge.

Ginsberg, J. (1998). *Advanced engineering dynamics.* Cambridge University Press.

Gitik, M. (1980). All uncountable cardinals can be singular. *Israel J. Math.*, 35(1-2):61–88.

Gödel, K. (1931). On undecidable sentences. In Gödel [1995], pages 31–35.

Gödel, K. (1933). The present situation in the foundations of mathematics. In Gödel [1995], pages 45–53.

Gödel, K. (1944). Russell's mathematical logic. In Gödel [1990], pages 119–141.

Gödel, K. (1947). What is Cantor's continuum problem? In Gödel [1990], pages 176–187.

Gödel, K. (1951). Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications. In Gödel [1995], pages 304–323.

Gödel, K. (1959?a). Is mathematics a syntax of language? In Gödel [1995], pages 334–356.

Gödel, K. (1959?b). Is mathematics a syntax of language? In Gödel [1995], pages 356–362.

Gödel, K. (1961). The modern developement of the foundations of mathematics in the light of philosophy. In Gödel [1995], pages 374–387.

Gödel, K. (1964). What is Cantor's countinuum problem? In Gödel [1990], pages 254–270.

Gödel, K. (1970a). Some considerations leading to the probable conclusion that the true power of the continuum is $\aleph_2$. In Gödel [1995], pages 420–422.

Gödel, K. (1970b). Unsent letter to Alfred Tarski. In Gödel [1995], pages 424–425.

Gödel, K. (1972). Some remarks on the undecidability results. In Gödel [1990], pages 305–306.

Gödel, K. (1990). *Kurt Gödel. Collected works. Volume II.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York.

Gödel, K. (1995). *Kurt Gödel. Collected works. Volume III.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York.

Gödel, K. (2003a). *Kurt Gödel. Collected works. Volume IV.* The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford.

Gödel, K. (2003b). *Kurt Gödel. Collected works. Volume V.* The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford.

Goldman, A. I. (1967). A causal theory of knowing. *The Journal of Philosophy*, 64(12).

Goldman, A. I. (1979). What is justified belief? In G., P., editor, *Justification and knowledge*, pages 1–23. Reidel, Dordrecht.

Goldstern, M. and Shelah, S. (1995). The bounded proper forcing axiom. *J. Symbolic Logic*, 60(1):58–73.

Grewe, R. (1969). Natural models of Ackermann's set theory. *J. Symbolic Logic*, 34:481–488.

Hallett, M. (1984). *Cantorian set theory and limitation of size.* Clarendon Press, Oxford.

Halmos, P. R. (1960). *Naive set theory.* Van Nostrand, Princeton.

Hanf, W. and Scott, D. (1961). Classifying inaccessible cardinals (abstract). *Notices Amer. Math. Soc.*, 8:445.

Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology.* Cambridge University Press, Cambridge.

Hart, W. (1977). Review of "Mathematical knowledge"by Mark Steiner. *The Journal of Philosophy*, 74(2):pp. 118–129.

Hauser, K. (1991). Indescribable cardinals and elementary embeddings. *J. Symbolic Logic*, 56(2):439–457.

Hauser, K. (1992). The indescribability of the order of the indescribable cardinals. *Ann. Pure Appl. Logic*, 57(1):45–91.

Hauser, K. (2002). What new axioms could not be. *Dialectica*, 56(2):109–124.

Hauser, K. (2006). Gödel's program revisited. I. The turn to phenomenology. *Bull. Symbolic Logic*, 12(4):529–590.

Hauser, K. (2013). Cantor's absolute in metaphysics and mathematics. *International Philosophical Quarterly*, 53(2):161–188.

Hauser, K. (2014). Intuition and its object. *Axiomathes*, 24:1–29.

Hilbert, D. and Ackermann, W. (1972). *Grundzüge der theoretischen Logik (Sechste Auflage).* Springer, Berlin.

Jensen, R. (1995). Inner models and large cardinals. *Bull. Symbolic Logic*, 1(4):393–407.

Jensen, R. and Kunen, K. (1969). Some combinatorial properties of L and V. Unpublished manuscript.

Jorgensen, M. (1970). An equivalent form of Lévy's axiom schema. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 26:651–654.

Kalmar, L. (1928). Zur Theorie der abstrakten Spiele. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 4:65–85.

Kanamori, A. (2009). *The higher infinite (second edition)*. Springer, Berlin.

Kanamori, A. and McAloon, K. (1987). On Gödel incompleteness and finite combinatorics. *Ann. Pure Appl. Logic*, 33(1):23–41.

Katz, J. (1998). *Realistic rationalism*. MIT Press, Cambridge, MA.

Katz, J. (2002). Mathematics and metaphilosophy. *The Journal of philosophy*, 99(7):362–390.

Kirby, L. and Paris, J. (1977). Initial segments of models of Peano's axioms. In Marek, W., Srebrny, M., and Zarach, A., editors, *Set theory and hierarchy theory*, pages 211–226. Springer, Berlin.

Kirby, L. and Paris, J. (1982). Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bull. London Math. Soc.*, 14(4):285–293.

Koellner, P. (2003). *The search for new axioms*. PhD thesis, M. I. T.

Koellner, P. (2009). On reflection principles. *Ann. Pure Appl. Logic*, 157(2-3):206–219.

König, D. (1927). Über eine Schlussweise aus dem Endlichen ins Unendliche. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 3:121–130.

Kripke, S. (1982). *Wittgenstein on rules and private language: an elementary exposition*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

Kunen, K. (1970). Some applications of iterated ultrapowers in set theory. *Ann. Math. Logic*, 1:179–227.

Kunen, K. (1971). Elementary embeddings and infinitary combinatorics. *J. Symbolic Logic*, 36:407–413.

Kunen, K. (1980). *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. North-Holland, Amsterdam.

Larson, P. (2000). Martin's maximum and the $\mathbf{P}_{\max}$ axiom. *Ann. Pure Appl. Logic*, 106(1-3):135–149.

Lévy, A. (1960a). Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory. *Pacific J. Math.*, 10:223–238.

Lévy, A. (1960b). Principles of reflection in axiomatic set theory. *Fund. Math.*, 49:1–10.

Lévy, A. and Solovay, R. M. (1967). Measurable cardinals and the continuum hypothesis. *Israel J. Math.*, 5:234–248.

Lévy, A. and Vaught, R. (1961). Principles of partial reflection in the set theories of Zermelo and Ackermann. *Pacific J. Math.*, 11:1045–1062.

Maddy, P. (1988a). Believing the axioms. I. *J. Symbolic Logic*, 53(2):481–511.

Maddy, P. (1988b). Believing the axioms. II. *J. Symbolic Logic*, 53(3):736–764.

Maddy, P. (1990). *Realism in mathematics.* Oxford University Press, Oxford.

Maddy, P. (1997). *Naturalism in mathematics.* Clarendon Press, Oxford.

Maddy, P. (1998). How to be a naturalist about mathematics. In Dales, H. and Oliveri, G., editors, *Truth in mathematics*, pages 161–180. Oxford University Press, Oxford.

Maddy, P. (2009). *Second philosophy.* Oxford University Press, Oxford.

Magidor, M. (2012). Some set theories are more equal. *Exploring the frontiers of incompleteness* workshop preprint.

Martin, D. (1970). Measurable cardinals and analytic games. *Fund. Math.*, 66:287–291.

Martin, D. (1975). Borel determinacy. *Ann. of Math. (2)*, 102(2):363–371.

Martin, D. (2005). Gödel's conceptual realism. *Bull. Symbolic Logic*, 11(2):207–224.

Martin, D. and Steel, J. (1989). A proof of projective determinacy. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(1):71–125.

Mirimanoff, D. (1917). Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles. *Enseign. Math.*, 19:37–52.

Mitchell, W. and Steel, J. (1994). *Fine structure and iteration trees.* Springer, Berlin.

Montague, R. and Vaught, R. L. (1959). Natural models of set theories. *Fund. Math.*, 47:219–242.

Moore, G. (1982). *Zermelo's axiom of choice.* Springer, New York.

Moore, J. (2010). The proper forcing axiom. In Bhatia, R., Pal, A., Rangarajan, G., Srinivas, V., and Vanninathan, M., editors, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II*, pages 3–29, New Delhi. Hindustan Book Agency.

Moschovakis, Y. (1975). Indescribable cardinals in L (abstract). *J. Symbolic Logic*, 41:554–555.

Moschovakis, Y. (1980). *Descriptive set theory.* North-Holland, Amsterdam.

Moschovakis, Y. (2009). *Descriptive set theory (second edition).* American Mathematical Society, Providence.

Mycielski, J. and Steinhaus, H. (1962). A mathematical axiom contradicting the axiom of choice. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 10:1–3.

Paris, J. and Harrington, L. (1978). A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. In Barwise, J., editor, *Handbook of mathematical logic*, pages 1133–1142. North-Holland, Amsterdam.

Parsons, C. (1995). Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought. *Bull. Symbolic Logic*, 1(1):44–74.

Penrose, R. (2011). Gödel, the mind, and the laws of physics. In *Kurt Gödel and the foundations of mathematics*, pages 339–358. Cambridge University Press, Cambridge.

Quine, W. V. (1969). *Ontological relativity and other essays.* Columbia University Press, New York.

Quine, W. V. (1981). *Theories and things.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Quine, W. V. O. (1953). *From a logical point of view. 9 logicophilosophical essays.* Harvard University Press, Cambridge, Mass.

Ramsey, F. P. (1927). Facts and propositions. *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes*, 7:pp. 153–170.

Reinhardt, W. (1970). Ackermann's set theory equals ZF. *Ann. Math. Logic*, 2(2):189–249.

Reinhardt, W. (1974a). Remarks on reflection principles, large cardinals, and elementary embedding. In Jech, T., editor, *Proceedings of the symposium in pure mathematics*, pages 189–205. American Mathematical Society, Providence.

Reinhardt, W. (1974b). Set existence principles of Shoenfield, Ackermann, and Powell. *Fund. Math.*, 84(1):5–34.

Reinhardt, W. and Silver, J. (1965). On some problems of Erdős-Hajnal (abstract). *Notices Amer. Math. Soc.*, 12:723–724.

Rényi, A. (1964). A Socratic dialogue on mathematics. *Canad. Math. Bull.*, 7:441–462.

Schwalbe, U. and Walker, P. (2001). Zermelo and the early history of game theory. *Games Econom. Behav.*, 34(1):123–137.

Scott, D. (1961). Measurable cardinals and constructible sets. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 9:521–524.

Shoenfield, J. (1967). *Mathematical logic.* Addison-Wesley, Reading.

Solovay, R., Reinhardt, W., and Kanamori, A. (1978). Strong axioms of infinity and elementary embeddings. *Ann. Math. Logic*, 13(1):73–116.

Solovay, R. and Tennenbaum, S. (1971). Iterated Cohen extensions and Souslin's problem. *Ann. of Math. (2)*, 94:201–245.

Steel, J. (2005). PFA implies $AD^{L(\mathbb{R})}$. *J. Symbolic Logic*, 70(4):1255–1296.

Steiner, M. (1975). *Mathematical knowledge.* Cornell University Press, Ithaca.

Tait, W. W. (2005). *The provenance of pure reason.* Oxford University Press, New York.

Takeuti, G. (1987). *Proof theory (second edition).* North-Holland, Amsterdam.

Tarski, A. (2000). Address at the Princeton university bicentennial conference on problems of mathematics (december 17–19, 1946). *Bull. Symbolic Logic*, 6(1):1–44.

Tieszen, R. (2011). *After Gödel.* Oxford University Press, Oxford.

Todorčević, S. (1984). A note on the proper forcing axiom. In Baumgartner, J., Martin, D., and Shelah, S., editors, *Axiomatic set theory*, pages 209–218. Amererican Mathematical Society, Providence.

Todorčević, S. (2002). Generic absoluteness and the continuum. *Math. Res. Lett.*, 9(4):465–471.

Ulam, S. (1958). John von Neumann, 1903–1957. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:1–49 (1 plate).

Urquhart, A. (1990). The logic of physical theory. In Irvine, A., editor, *Physicalism in Mathematics*, pages 145–154. Reidel, Dordrecht.

Vaught, R. (1963). Indescribable cardinals (abstract). *Notices Amer. Math. Soc.*, 10:126.

von Neumann, J. (1925). Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *J. Reine. Angew. Math.*, 154:219–240.

Živan Lazović (1994). *O prirodi epistemičkog opravdanja.* Filozofsko društvo Srbije, Beograd.

Wang, H. (1974). *From mathematics to philosophy.* Humanities Press, New York.

Wang, H. (1977). Large sets. In Butts, R. and Hintikka, J., editors, *Logic, foundations of mathematics and computability theory*, pages 309–333. Reidel, Dordrecht.

Wang, H. (1987). *Reflections on Kurt Godel.* MIT Press, Cambridge, MA.

Wang, H. (1996). *A logical journey: from Gödel to philosophy.* MIT Press, Cambridge, MA.

Weitkamp, G. (1989). The Σ^1_2 theory of axioms of symmetry. *J. Symbolic Logic*, 54(3):727–734.

Wittgenstein, L. (1978). *Philosophical Grammar.* Basil Blackwell, Oxford.

Woodin, H. (1988). Supercompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 85(18):6587–6591.

Woodin, H. (2001a). The continuum hypothesis. I. *Notices Amer. Math. Soc.*, 48(6):567–576.

Woodin, H. (2001b). The continuum hypothesis. II. *Notices Amer. Math. Soc.*, 48(7):681–690.

Woodin, H. (2001c). The Ω conjecture. In Downey, R. and Hirschfeldt, D., editors, *Aspects of complexity*, pages 155–169. de Gruyter, Berlin.

Woodin, H. (2010a). Strong axioms of infinity and the search for V. In Bhatia, R., Pal, A., Rangarajan, G., Srinivas, V., and Vanninathan, M., editors, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume I*, pages 504–528, New Delhi. Hindustan Book Agency.

Woodin, H. (2010b). *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal*, volume 1 of *de Gruyter Series in Logic and its Applications.* Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, revised edition.

Woodin, H. (2011a). The realm of the infinite. In Heller, M. and Woodin, H., editors, *Infinity: new research frontiers*, pages 89–118. Cambridge University Press, Cambridge.

Woodin, H. (2011b). Suitable extender models II: beyond ω-huge. *J. Math. Log.*, 11(2):115–436.

Woodin, H. (2011c). The transfinite universe. In Baaz, M., Papadimitriou, C., Putnam, H., Scott, D., and Harper, C., editors, *Kurt Gödel and the foundations of mathematics*, pages 449–471. Cambridge University Press, Cambridge.

Zermelo, E. (1908). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Math. Ann.*, 65(2):261–281.

Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians*.

Zermelo, E. (1930). Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. Neue Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. *Fund. Math.*, 16:29–47.

Zermelo, E. (2010). *Ernst Zermelo. Gesammelte Werke. Band I.* Springer, Berlin.

BIOGRAFIJA:

Miloš Adžić se rodio 1982. godine. Završio je gimnaziju u Smederevskoj Palanci. Studije filozofije na Odeljenju za filozofiju Filozofskog fakulteta u Beogradu upisao je 2002. godine, a završio 2008. godine sa prosečnom ocenom 9,82 i ocenom 10 na diplomskom ispitu. On je tokom svojih studija filozofije pokazao naročitu sklonost ka logici. Njegov diplomski rad iz te oblasti pod naslovom *Istraživanja o zakonima asocijativnosti i komutativnosti*, odbranjen je 16.06.2008.

Na doktorske studije filozofije na Odeljenju za filozofiju Filozofskog fakulteta upisao se školske godine 2008-2009. Na tim studijama predmeti koje je izabrao su uglavnom bili usmereni ka logici, i on je položio četiri predmeta (TEORIJA DEDUKCIJE, FILOZOFIJA I POSEBNE NAUKE, TRADICIONALNA I SAVREMENA METAFIZIKA i TEORIJA SKUPOVA na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu) sa ocenom 10.

Dana 29.12.2011. odbranio je predlog teme doktorske disertacije pod naslovom „Gedel o aksiomatizaciji teorije skupova" pred komisijom u sastavu prof. dr Živan Lazović, prof. dr Mirjana Borisavljević, doc. dr Aleksandar Perović i prof. dr Kosta Došen (mentor).

Od 01.02.2009. godine zaposlen je kao saradnik u nastavi na odeljenju za filozofiju Filozofskog fakulteta u Beogradu, gde drži nastavu iz predmeta Logika na prvoj godini studija filozofije i izbornog predmeta Filozofija matematike na četvrtoj.

Od 30.9.2010. radi u zvanju asistenta na istom predmetu. Adžić je bio saradnik na projektu „Reprezentacije logičkih struktura i njihove primene u računarstvu" Matematičkog Instituta u Beogradu u periodu od 2009. do 2010. Trenutno učestvuje na projektima „Reprezentacije logičkih struktura i formalnih jezika i njihove primene u računarstvu" i „Dinamički sistemi u prirodi i društvu: filozofski i empirijski aspekti" čiji su nosioci, redom, Matematički Institut u Beogradu i Institut za filozofiju Filozofskog fakulteta u Beogradu, a koje finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ____

број уписа ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, ________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____

Број уписа ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Потписани ____

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, __________________________

____

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.