

UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

Milan S. Stojković

**DUGOROČNE PROMENE U  
STOHAŠTIČKOJ STRUKTURI  
HIDROLOŠKIH VREMENSKIH SERIJA**

doktorska disertacija

Beograd, 2015.



UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Milan S. Stojković

**LONG-TERM CHANGES IN  
STOCHASTIC STRUCTURE OF  
HYDROLOGIC TIME SERIES**

doctoral dissertation

Belgrade, 2015.



## Sadržaj:

Sadržaj slika: .....	VII
Sadržaj tabela:.....	XII
Spisak oznaka: .....	XVI
Spisak skraćenica:.....	XVII
Rezime:.....	XIX
Summary.....	XXII
1. Uvod .....	1
1.1 Dugoročne promene atmosferskih činilaca.....	1
1.2 Dugoročne projekcije atmosferskih činilaca.....	3
1.3 Predmet rada .....	6
2. Pregled literature.....	11
2.1 Metodološki pristupi za analizu strukture vremenskih serija .....	12
2.2 Metodološki pristupi za modeliranje vremenskih serija.....	14
2.3 Trend hidroloških vremenskih serija .....	17
2.3.1 Proticaj.....	17
2.3.2 Evapotranspiracija i zemljišna vlaga .....	19
2.4 Višegodišnja periodičnost hidroloških serija.....	19
2.5 Projekcije hidroloških vremenskih serija.....	22
3. Pregled metoda za utvrđivanje strukture vremenskih hidroloških serija.....	24
3.1 Vremenske serije i njihova klasifikacija .....	24
3.2 Stacionarnost.....	25
3.2.1 Dickey-Fuller test .....	26
3.2.2 Analiza pokretnih sredina.....	27
3.3 Homogenost .....	27
3.3.1 Integralna kriva standardizovanih odstupanja .....	27

3.3.2	Test normalnosti vremenske serije .....	30
3.3.2.1	Test normalnosti Jarque-Bera .....	30
3.3.2.2	PPCC test .....	30
3.3.3	Testiranje jednakosti srednjih vrednosti .....	31
3.3.3.1	Normalizovani Z test .....	32
3.3.3.2	Studentov t-test .....	32
3.3.4	Testiranje jednakosti varijansi Fisher testom .....	32
3.3.5	Testiranje jednakosti raspodela neparametarskim Wilcoxon testom .....	33
3.3.6	Asimptotska relativna efikasnost testiranja hipoteza.....	34
3.4	Dekompozicija hidroloških vremenskih serija .....	35
3.5	Trend.....	36
3.5.1	Neparametarsko testiranje trenda .....	36
3.5.1.1	Mann-Kendall test.....	36
3.5.1.2	Multi-vremenska analiza trenda.....	38
3.5.2	Parametarsko testiranje trenda.....	40
3.5.2.1	Linearan trend .....	40
3.5.2.2	Linearni trend sa pokretnim vremenskim prozorom.....	41
3.6	Periodična komponenta.....	43
3.6.1	Diskretni spektar.....	43
3.6.1.1	Uglašavanje vremenskih serija .....	44
3.6.1.2	Izbor optimalnog koraka uglašavanja vremenskih serija .....	45
3.6.1.3	Značajnost perioda .....	46
3.6.2	Neprekidni spektar – metoda Blackman-Tukey .....	48
3.6.3	Test zaostale periodičnosti .....	49
3.6.4	Hurstov fenomen .....	50
3.7	Stohastička komponenta .....	52

3.7.1	Autokorelaciona analiza stacionarnih procesa .....	53
3.7.1.1	Srednja vrednost i varijansa .....	53
3.7.1.2	Autokorelaciona funkcija.....	53
3.7.1.3	Parcijalna autokorelaciona funkcija.....	55
3.7.2	Linearni stacionarni autoregresioni modeli .....	56
3.7.2.1	Definicija modela.....	57
3.7.2.2	Identifikacija modela .....	60
3.7.2.3	Estimacija parametara modela .....	61
3.7.2.4	Izbor modela .....	64
3.7.2.5	Verifikacija modela.....	65
3.7.2.6	Prognoza modela.....	66
4.	Rezultati i diskusija analize vremenskih serija: primeri većih reka u Srbiji.....	70
4.1	Raspoložive vremenske serije.....	70
4.2	Rezultati analize vremenskih serija .....	72
4.2.1	Analiza stacionarnosti.....	73
4.2.1.1	Dicky-Fuller test .....	73
4.2.1.2	Analiza pokretnih sredina .....	74
4.2.2	Analiza homogenosti .....	75
4.2.2.1	Integralna kriva standardizovanih odstupanja .....	75
4.2.2.2	Testiranje normalnosti .....	77
4.2.2.3	Testiranje homogenosti.....	79
4.2.3	Analiza trenda.....	81
4.2.3.1	Neparametarsko testiranje.....	81
4.2.3.2	Parametarsko testiranje .....	83
4.2.4	Periodična komponenta .....	85
4.2.4.1	Diskretni periodogram .....	85

4.2.4.2	Kontinualni periodogram .....	92
4.2.4.3	Uticaj dužine vremenske serije na ocenu periodičnosti .....	93
4.2.4.4	Hurstov fenomen .....	95
4.2.5	Stohastička komponenta .....	96
4.3	Diskusija .....	100
5.	Model za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja .....	104
5.1	Klasifikacija prognostičkih modela .....	104
5.2	Predloženi model za kratkoročne projekcije .....	104
5.2.1	Modeliranje determinističke komponente .....	106
5.2.2	Modeliranje stohastičke komponente .....	107
5.2.3	Ocena efikasnosti modela .....	107
5.2.4	Agregacija modeliranih komponenti vremenskih serija .....	109
5.3	Primena modela za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja ...	110
5.4	Rezultati .....	112
5.4.1	Rezultati modeliranja razmatranih vremenskih serija .....	112
5.4.1.1	Ocena efikasnosti modela .....	112
5.4.1.2	Verifikacija rezultata modela .....	113
5.4.2	Rezultati kratkoročnih projekcija .....	114
6.	Model za dugoročne projekcije mesečnih proticaja .....	117
6.1	Uvod .....	117
6.2	Analiza osetljivosti proticaja na meteorološke serije .....	119
6.3	Modeli vremenskih serija sa transfer funkcijama .....	121
6.3.1	Određivanje kros-kovarijansne funkcije i impulsnih odzivnih težina .....	123
6.3.2	Identifikacija transfer funkcije postupkom „prewhitening“ .....	125
6.3.3	Transfer funkcije sa višestrukim ulaznim serijama .....	127
6.3.4	Testiranje greške modeliranja višestrukih TF .....	129



6.4	Predloženi model za modeliranje mesečnih proticaja.....	129
6.4.1	Deterministička komponenta.....	132
6.4.2	Stohastička komponenta i transfer funkcije.....	133
6.4.3	Agregacija modeliranih komponenti vremenskih serija.....	134
6.5	Predloženi model za dugoročne projekcije mesečnih proticaja.....	135
6.5.1	Deterministička komponenta.....	135
6.5.1.1	Projekcije godišnjih vrednosti determinističke komponente primenom inicijalnog hidrološkog modela .....	135
6.5.1.2	Projekcije mesečnih vrednosti determinističke komponente – sezonska komponenta .....	137
6.5.2	Stohastička komponenta.....	138
6.5.3	Agregacija modeliranih komponenti vremenskih serija.....	139
6.6	Raspoložive vremenske serije.....	139
6.7	Rezultati.....	144
6.7.1	Rezultati analize osetljivosti.....	144
6.7.1.1	Višegodišnji ciklusi proticaja.....	144
6.7.1.2	Mesečni proticaji.....	146
6.7.2	Rezultati modeliranja razmatranih vremenskih serija .....	147
6.7.3	Dugoročne projekcije padavina i temperatura.....	155
6.7.4	Rezultati dugoročnih projekcija mesečnih proticaja .....	158
6.7.4.1	Deterministička komponenta .....	158
6.7.4.2	Stohastička komponenta .....	163
6.7.4.3	Agregirane komponente vremenskih serija .....	165
6.7.5	Neizvesnost <i>inicijalnog</i> modela.....	169
6.7.6	Diskusija o modeliranju vremenskih serija za potrebe dugoročnih projekcija promena hidrološkog režima.....	170

6.7.7	Diskusija o rezultatima dugoročnih projekcija za slivove Velike Morave i Lima	172
7.	Zaključna razmatranja	177
7.1	Rezime ciljeva i predmeta disertacije	177
7.2	Rezime rezultata	179
7.2.1	Ocena efikasnosti predloženih modela	179
7.2.2	Kratkoročne projekcije modificovanim TIPS modelom	180
7.2.3	Dugoročne projekcije modelom SDTS	181
7.2.4	Diskusija	184
7.3	Mogućnosti daljeg razvoja i primene	185
7.4	Zaključak	186
8.	Literatura	188
	Tabelarni prilozi	208
	Grafički prilozi	228

## Sadržaj slika:

Slika 1-1. Sunčeva aktivnost iskazana preko godišnjih vrednosti Wolfvog broja za period 1700-2011.....	1
Slika 1-2. Prosečni godišnji intenzitet dolaznog Sunčevog zračenja $R$ i njegova uglačana serija $R_{loess}$ na površini Zemlje za stanicu Stokholm (Švedska) za period 1923-2010. (IPCC, 2013).....	1
Slika 1-3. Projekcije godišnjih temperatura vazduha za sliv Dunava za period 2021-2050. i 2071-2100. po klimatskom scenariju A1B (ICPDR, 2012).....	4
Slika 1-4. Projekcije sume godišnjih padavina za sliv Dunava za period 2021-2050. i 2071-2100. po klimatskom scenariju A1B i A2 (ICPDR, 2012).....	5
Slika 2-1. Klasifikacija metoda za dekompoziciju i modeliranje vremenskih hidroloških serija.....	14
Slika 3-1. Klasifikacije (a) determinističkih i (b) slučajnih vremenskih serija (Jevđević, 1972).....	24
Slika 3-2. Integralna kriva standardizovanih odstupanja: osmotrena kriva ( $f^0$ ) i kriva posle zamene članova vremenske serije korišćenjem <i>boot-strap</i> metode ( $f^1, f^2, f^3, f^4, f^5$ ).....	29
Slika 3-3. Shema za računanje trenda vremenskih serija po multi-vremenskom pristupu.....	39
Slika 3-4. Ilustracija metode linearnog trenda $Q_{Tw}$ sa pokretnim vremenskim prozorom $w$ : $Q_T$ -linearni trend, $m$ -vremenski pomak, $t$ -vremenska osa, $N$ -ukupan broj članova serije $Q$ .....	42
Slika 3-5. Procedura za određivanje linearnog trenda $Q_{Tw}$ sa pokretnim vremenskim prozorom $w$ : $m$ -vremenski pomak, $t$ -vremenski korak, $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ -ocenjeni parametri linearnog trenda, $N$ -ukupan broj članova serije $Q$ .....	42
Slika 4-1. Prikaz analiziranih hidroloških stanica na karti Republike Srbije: Oršava, Bogojevo, Senta, Sremska Mitrovica, Ljubičevski Most, Prijepolje.....	71
Slika 4-2. Srednji godišnji proticaji na razmatranim stanicama: (a) Oršava, (b) Bogojevo, (c) Sremska Mitrovica, (d) Senta, (e) Ljubičevski Most, (f) Prijepolje.....	72
Slika 4-3. Srednji sezonski proticaji $Q_{III}$ sa pokretnom sredinom $m_{Q_{III}}$ širine prozora od 30 koraka na st. Prijepolje (r. Lim) (pokretne sredine su date za kraj perioda osrednjavanja).....	74

Slika 4-4. Integralna kriva modulnih odstupanja analiziranih godišnjih serija proticaja za period 1931–2012. ....	76
Slika 4-5. PPCC test normalnosti serija logaritmovanih proticaja sa koeficijentima korelacije $r$ na st. Prijepolje: (a) godišnji proticaji, (b) zimski proticaji, (c) prolećni proticaji, (d) letnji proticaji, (e) jesenji proticaji.....	78
Slika 4-6. Statistika $Z_s$ multi-vremenskog trend testa Mann-Kendall na st. Prijepolje: (a) godišnji proticaji, (b) zimski proticaji, (c) prolećni proticaji, (d) letnji proticaji, (e) jesenji proticaj.....	83
Slika 4-7. Značajnost trenda multi-vremenskog testa Mann-Kendall na st. Prijepolje: (a) godišnji proticaji, (b) zimski proticaji, (c) prolećni proticaji, (d) letnji proticaji, (e) jesenji proticaji.....	83
Slika 4-8. Linearni trend $Q_{Tw}$ sa pokretnim vremenskim prozorom $w=30$ godina za st. Prijepolje (r. Lim) .....	85
Slika 4-9. Optimizaciona tehnika DPU za određivanje širine $nw$ vremenskog prozora metode LOESS za godišnje i sezonske proticaje na st. Ljubičevski Most (r. Velika Morava).....	86
Slika 4-10. Osmotreni i uglačani godišnji proticaji po metodi LOESS sa širinom prozora uglašavanja $nw=13$ na analiziranim stanicama za period 1931–2012.....	87
Slika 4-11. Periodogram osmotrenog $I(Q IV)$ i uglačanog proticaja $I_{loess}(Q IV)$ tokom jesenje sezone po metodi LOESS na st. Oršava (r. Dunav).....	88
Slika 4-12. Periodogram $I$ (a) i relativni kumulativni periodogram RKP (b) osmotrenih i uglačanih (LOESS) godišnjih proticaja za st. Oršava (r. Dunav).....	89
Slika 4-13. Značajne periode ( $Q_{P1}, Q_{P2}, Q_{P3}, Q_{P4}, Q_{P5}$ ) i makroperiodična komponenta $Q_P$ godišnjih proticaja na st. Oršava (r. Dunav).....	92
Slika 4-14. Spektar po metodi $B-T$ (a) i periodogram (b) godišnjih proticaja na stanici Oršava za periode 1900–2012 i 1931–2012 .....	93
Slika 4-15. Godišnji proticaji $Q$ i modelirane periodične komponente $Q_P$ na st. Oršava za periode 1900–2012. i 1931–2012. sa modeliranjem unazad za period 1900–1930 .....	94
Slika 4-16. Hurstov koeficijent $h$ za seriju godišnjih i sezonskih proticaja na st. Oršava (r. Dunav).....	95

Slika 4-17. ACF (a) i PACF (b) godišnje serije $x_t$ sa intervalima poverenja 95% na st. Oršava (r. Dunav) .....	96
Slika 4-18. Testiranje greške modela $\varepsilon_t$ ARMA modela putem ACF (a) i NKP i (b) za seriju godišnjih proticaja na st. Oršava za prag značajnosti $\alpha=0.05$ .....	98
Slika 4-19. Gustina raspodele greške modeliranja (a) i testiranje normalnosti korišćenjem PPCC testa (b) za godišnje proticaje na st. Oršava (r. Dunav).....	100
Slika 5-1. Shema modifikovanog TIPS modela za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja.....	105
Slika 5-2. Kratkoročne projekcije (a) i ažurirane projekcije (b) godišnjih proticaja na st. Bogojevo (r. Dunav) za period 2013-2015 .....	115
Slika 6-1 Ulazna $X_t$ (a), slučajna $\varepsilon_t$ (b) i izlazna $Y_t$ (c) vremenska serija dinamičkog sistema .....	122
Slika 6-2 Shema SDTS modela za modeliranje i dugoročnu projekciju mesečnih proticaja .....	131
Slika 6-3 Shema <i>inicijalnog</i> hidrološkog modela za ocenu vrednosti godišnje determinističke komponente u budućnosti .....	136
Slika 6-4. Prikaz slivnog područja reke Lim do st. Prijepolje: topografija terena (a), Thiessenovi poligoni padavinskih (b) i temperaturnih stanica (c).....	141
Slika 6-5. Prikaz slivnog područja reke Velike Morave do st. Ljubičevski Most: topografija terena sa hidrografskom mrežom (a) i Thiessenovi poligoni padavinskih i temperaturnih stanica (b) .....	142
Slika 6-6. Unutargodišnja raspodela mesečnih proticaja (a), padavina (b) i temperatura (c) za st. Prijepolje (1) i Ljubičevski Most (2) za tri dvadesetogodišnja perioda....	143
Slika 6-7 Standardizovane i uglačane serije godišnjih proticaja (a), NAO indeks (b), sume padavina (c) i temperature vazduha (d) za stanice Ljubičevski Most (1) i Prijepolje (2) .....	144
Slika 6-8 Indeksi osetljivosti $\beta$ mesečnih proticaja na st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b) u odnosu na mesečne indekse NAO ( $\beta_1$ ), mesečne padavine ( $\beta_2$ ) i mesečne temperatura ( $\beta_3$ ).....	146
Slika 6-9 Osmotreni godišnji proticaji $Q$ , nelinearni trend $Q_{Tw}$ i makroperiodična komponenta $Q_p$ na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje za period 1931-2012. ....	147

Slika 6-10 Periodogram reziduala druge vrste $Q''$ na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje.....	148
Slika 6-11 Prosečni mesečni reziduali druge vrste $Q''$ i modelirana sezonska komponenta $Q_S$ na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje za period 1931-2012. ....	149
Slika 6-12 Kros-korelaciona funkcija $r_{xy}$ vremenskih serija $x_1$ i $x_2$ za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b); kros-korelaciona funkcija $r_{\alpha\beta}$ slučajnih vremenskih serija $\beta_t, \alpha_{1t}, \alpha_{2t}$ za st. Ljubičevski Most (c) i st. Prijepolje (d) .....	151
Slika 6-13 Gustina raspodele greške modeliranja mesečnih proticaja (a) i rezultati PPCC testa za normalnu raspodelu (b) na st. Ljubičevski Most (1) i st. Prijepolje (2).....	152
Slika 6-14 Osmotreni mesečni proticaji $Q$ , modelirani proticaji $Q_m$ , nelinearni trend $Q_{Tw}$ , makroperiodična komponenta $Q_P$ i sezonska komponenta $Q_S$ na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje za period 1951-2012. ....	153
Slika 6-15 Autokorelaciona funkcija $\rho$ osmotrenih $Q$ i modeliranih mesečnih proticaja $Q_m$ na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje.....	154
Slika 6-16 Objašnjenost varijanse $\Phi$ za seriju modeliranih mesečnih proticaja na st. Ljubičevski Most i st. Prijepolje sa uključenjem komponente (1) nelinearnog trenda, (2) makroperiodične komponente, (3) sezonske komponente i (4) stohastičke komponente.....	154
Slika 6-17 Autokorelaciona funkcija $\rho$ mesečnih padavina ( $P, P_m$ ) i mesečnih temperatura ( $T, T_m$ ) za osmotrene i modelirane serije na slivovima Velike Morave (a) i Lima (b) za period 1961-1990. ....	156
Slika 6-18 Projekcije godišnjih padavina $P$ i temperatura $T$ za period 2013-2100. po klimatskim scenarijima A1B i A2 za sliv Velike Morave (minimalne i maksimalne mesečne vrednosti; prvi, drugi i treći kvartil kumulativne raspodele godišnjih vrednosti) .....	157
Slika 6-19 Projekcije godišnjih padavina $P$ i temperatura $T$ za period 2013-2100. po klimatskim scenarijima A1B i A2 za sliv Lima (minimalne i maksimalne mesečne vrednosti; prvi, drugi i treći kvartil kumulativne raspodele godišnjih vrednosti) ...	157
Slika 6-20 Usporedni prikaz osmotrenih i modeliranih godišnjih proticaja korišćenjem osmotrenih godišnjih serija padavina i temperatura i serija klimatskog modeliranja za st. Ljubičevski Most i st. Prijepolje tokom perioda 1961-1990.....	161

Slika 6-21 Srednji mesečni proticaji, mesečne padavina i padavine iz klimatskog modela EBU-POM za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b) tokom perioda 1961-1990. ....	162
Slika 6-22 Sezonska komponenta $Q_S$ za referentni period (1961-1990) i tri višegodišnja perioda (2013-2040; 2041-2070; 2071-2100) za klimatske scenarije A1B (1) i A2 (2) za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b).....	163
Slika 6-23 Empirijska kumulativna verovatnoća $F(Q_{STOCH})$ stohastičke komponente $Q_{STOCH}$ dobijena korišćenjem serija osmatranja i serija iz klimatskog EBU-POM modela za period 1961-1990 za stanice Ljubičevski Most (a) i Prijepolje (b).....	164
Slika 6-24 Empirijska kumulativna verovatnoća $F(Q_{STOCH})$ stohastičke komponente $Q_{STOCH}$ za tri višegodišnja buduća perioda (2013-2040; 2041-2070; 2071-2100) za stanice Ljubičevski Most (a) i Prijepolje (b) .....	165
Slika 6-25 Dugoročne projekcije srednjih godišnjih proticaja za period 2013-2100. za klimatske scenarije A1B i A2 na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje .....	166
Slika 6-26 Projekcije srednjih godišnjih proticaja za period do 2100. po klimatskom scenariju A1B (a) i A2 (b) za st. Ljubičevski Most (1) i st. Prijepolje (2) (minimalne i maksimalne godišnje vrednosti; prvi, drugi i treći kvartil kumulativne raspodele godišnjih vrednosti) .....	167
Slika 6-27 Relativna promena medijana srednjih sezonskih i godišnjih proticaja za period 2013-2100. u odnosu na korespondentne vrednosti tokom perioda 1961-1990. po klimatskom scenariju A1B (1) i A2 (2) za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b).....	168
Slika 6-28 Empirijska kumulativna verovatnoća $F(Q)$ za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b) tokom perioda 1961-1990: $Q$ -osmotreni godišnji proticaji, $Q_{mo}$ -modelirani godišnji proticaji korišćenjem osmotrenih ulaznih serija, $Q_{mm}$ -modelirani godišnji proticaji korišćenjem serija klimatskog modeliranja .....	169

## Sadržaj tabela:

Tabela 1-1 Trend intenziteta dolaznog Sunčevog zračenja ( $Wm^{-2}/dek.$ ) na površini Zemlje po dekadi .....	2
Tabela 1-2 Trend srednje globalne temperature vazduha ( $^{\circ}C/dek.$ ) po dekadi i 90%-tni intervali poverenja .....	3
Tabela 1-3 Trend godišnjih globalnih padavina (mm/dek.) po dekadi i 90%-tni intervali poverenja na rasponu geografske širine od $30^{\circ}$ do $60^{\circ}$ .....	3
Tabela 3-1. Kritične vrednosti Smirnov-Kolmogorov statistike $K_{\alpha}$ za različite pragove značajnosti $\alpha$ (Jevđević, 1972).....	50
Tabela 3-2 Identifikacija ARMA modela na osnovu oblika ACF i PACF (Salas i sar., 1980).....	61
Tabela 4-1. Analizirane hidrološke stanice: površina sliva $F$ , srednji višegodišnji proticaj $Q$ , modul oticanja $q$ , standardna devijacija $\sigma$ , koeficijent asimetrije $C_s$ .....	71
Tabela 4-2 Dicky-Fuller test statistike $\tau$ serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja $Q$ .....	73
Tabela 4-3 Dicky-Fuller test statistike $\tau$ priraštaja prvog reda srednjih godišnjih i sezonskih proticaja $\nabla Q$ .....	73
Tabela 4-4. Standardna devijacija $\sigma_m$ i koeficijent varijacije $C_v$ pokretne sredine godišnjih i sezonskih proticaja na razmatranim stanicama sa širinom prozora od 30 koraka.....	74
Tabela 4-5. Prelomne tačke na integralnoj krivoj standardizovanih odstupanja sa verovatnoćom $p$ pojave i periodima za koje se sprovodi analiza homogenosti.....	77
Tabela 4-6. Rezultati testova homogenosti logaritmovanih srednjih godišnjih proticaja na razmatranim stanicama za prag značajnosti $\alpha=0.05$ .....	79
Tabela 4-7. Rezultati testiranja srednjih godišnjih proticaja po Mann-Kendall testu: $S$ - test statistika, $Z_s$ i $Z_{s, kor}$ - standardizovana promenljiva.....	81
Tabela 4-8 Koeficijenti pravca $\beta$ linearnog trenda za srednje godišnje i sezonske proticaje .....	84
Tabela 4-9 Periodogram godišnjih proticaja na razmatranim stanicama: $a_i$ i $b_i$ - Furijeovi koeficijenti, $c_i$ - rezultujuća amplituda harmonika, $I_i$ - intenzitet periodičnosti, $f_i$ - frekvencija, $T_i$ -perioda, $g_i$ - Fisher test statistika, $RKP_i$ - relativni kumulativni periodogram.....	90



Tabela 4-10. Parametri ARMA ( $p, q$ ) modela i testiranje greške $\varepsilon_t$ modeliranja srednjih godišnjih proticaja: $p$ -red modela, AIC kriterijum, $Q_{BL}$ i $Q_{PM}$ - test statistike .....	99
Tabela 5-1. Učešće u varijansi serije srednjih godišnjih proticaja komponente trenda $\Phi_T$ , makroperiodične komponente ( $\Phi_P$ ), ukupne determinističke ( $\Phi_{DET}$ ) i stohastičke komponente ( $\Phi_{STOCH}$ ).....	112
Tabela 5-2. Kriterijumske funkcije NSE, RMSE i RSR modeliranih srednjih godišnjih i sezonskih proticaja.....	113
Tabela 5-3. Kratkoročne projekcije godišnjih proticaja sa intervalima poverenja od 50% i modulima $k$ za period 2013–2015.....	114
Tabela 6-1. Analizirane meteorološke stanice: srednje godišnje padavine $P$ , srednje godišnje temperature $T$ i njihove standardne devijacije $\sigma$ i koeficijenti asimetrije $C_s$ .....	140
Tabela 6-2. Značajne periode sezonske komponente $Q_S$ na st. Ljubičevski Most i st. Prijepolje: Furijeovi koeficijenti ( $a_{Si}, b_{Si}, c_{Si}$ ), intenzitet periodičnosti $I_i$ , frekvencija $f_i$ , perioda $T_i$ , Fisherova statistika $g_i$ i ordinate relativnog kumulativnog periodograma RKP $_i$ .....	149
Tabela 6-3 Testiranje filtrirane greške modeliranja $a_t$ stohastičke komponente: $S, S^*$ - Haugh statistika, $Q_{BL}$ - Box-Ljung statistika .....	151
Tabela 6-4. Verifikacija rezultata modeliranja mesečnih proticaja $Q_m$ za st. Ljubičevski Most i st. Prijepolje u periodu 1950-2012. ....	153
Tabela 6-5. Verifikacija klimatskih scenarija u slivu Velike Morave i Lima za period 1961-1990: osmotrene ( $P, T$ ) i modelirane ( $P_m, T_m$ ) mesečne serije padavina i temperatura .....	155
Tabela 6-6. Promene medijana srednjih godišnjih temperatura i padavina na slivovima V. Morave i Lima u tri buduća perioda u odnosu na 1961-1990 prema klimatskim scenarijima A1B i A2 .....	158
Tabela 6-7 Testiranje greške modeliranja $a_t$ inicijalnog hidrološkog modela: $S, S^*$ - Haugh statistika, $Q_{BL}$ - Box-Ljung statistika .....	160
Tabela 6-8. Verifikacija TF inicijalnog hidrološkog modela za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje tokom perioda 1950-2012: $Q'_m$ -modelirani godišnji proticaji inicijalnim modelom; $Q$ -osmotreni godišnji proticaji; $Q_p, Q'_{mP}$ - makroperiodična komponenta,	

$Q_{Tw}$ , $Q'_{mTw}$ -nelinearni trend; $q$ kvartili kumulativne raspodele; $\Phi$ -objašnjenost varijanse; $r$ -koeficijent korelacije .....	160
Tabela 6-9. Promene medijana dugoročnih projekcija srednjih godišnjih proticaja za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje u tri buduća perioda u odnosu na 1961-1990 prema klimatskim scenarijima A1B i A2 .....	167

Zahvalnost dugujem svom mentoru vanr. prof. dr Jasni Plavšić na pomoći i podršci pruženoj tokom istraživanja, kao i na savetima koje sam dobijao tokom izrade doktorske disertacije i izrade radova.

Takođe, zahvalnost dugujem članovima komisije vanr. prof. dr Jovanu Despotoviću, vanr. prof. dr Vesni Jevremović i doc. dr Dragutinu Pavloviću na konstruktivnim predlozima datim tokom izrade doktorske disertacije.

Motivaciju za izučavanje teme u okviru doktorske disertacije, kao i stručnu i institucionalnu podršku, dobio sam od prof. dr Stevana Prohaske kome se na tome zahvaljujem.

Doktorska disertacija je izrađena u okviru naučnog projekta „Ocena uticaja klimatskih promena na vodne resurse Srbije (TR 37005)“ pod rukovođenjem (mentorstvom) prof. dr Stevana Prohaske. Osim toga, tokom izrade doktorske disertacije autor rada je bio angažovan na naučnom projektu „Razvoj sistema za podršku optimalnom održavanju visokih brana u Srbiji (TR 37013)“ pod rukovođenjem vanr. prof. dr Dejana Divca. Navedeni projekti bili su realizovani u okviru Instituta za vodoprivredu „Jaroslav Černi“ u kome je autor rada zaposlen.

U Beogradu, jun 2015.

Milan Stojković

## **Spisak oznaka:**

ACF – Autokorelaciona funkcija

ANN – veštačke neuronske mreže (*Artificial Neural Networks*)

A1B – klimatski scenario

A2 – klimatski scenario

AR – autoregresioni model

ARMA – autoregresioni model pokretnih sredina

ARIMA – autoregresioni integrisani model pokretnih sredina

CT – teorija haosa (*Chaos Teory*)

DFT – diskretna Furijeova transformacija

GP – genetsko programiranje (*Genetic Programming*)

FFT – brza Furijeova transformacija

FL – fazi logika (*Fuzzy Logic*)

HMC – hibridni metrično-konceptualni modeli

EMD – empirijska dekompozicija (*Empirical Mode Decomposition*)

IP – intervali poverenja

LOESS – lokalna regresiona metoda (*locally weighted smoothing scatter plots*)

MA – model pokretnih sredina

NKP – normalizovani kumulativni periodogram

PACF – parcijalna autokorelaciona funkcija

RKP – relativni kumulativni periodogram

SSA – singularna spektralna analiza (*Singular Spectrum Analysis*)

STL – metoda za modeliranje vremenskih serija (*Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess*)

SVM – metoda za modeliranje vremenskih serija (*Support Vector Machines*)

TIPS – metoda za modeliranje vremenskih serija (*Tendency, Intermittency, Periodicity, Stochasticity Method*)

WWF – modeliranje vremenske serije pomoću talasne transformacije (*Wavelet Modeling Framework*)

**Spisak skraćenica:**

$G$  – relativna greška modeliranja

$I$  – periodogram vremenske serije

$N$  – broj članova vremenske serije

$M$  – dužina skraćivanja kovarijansne funkcije

$K_Q$  – moduli proticaja

$K_P$  – moduli padavina

$Q, \hat{Q}, \tilde{Q}$  – osmotrena, modelirana i projektovana serija srednjeg godišnjeg, sezonskog ili mesečnog proticaja

$Q_{DET}, \hat{Q}_{DET}, \tilde{Q}_{DET}$  – osmotrena, modelirana i projektovana deterministička komponenta vremenske serije  $Q$

$Q_{STOCH}, \hat{Q}_{STOCH}, \tilde{Q}_{STOCH}$  – osmotrena, modelirana i projektovana stohastička komponenta vremenske serije  $Q$

$Q_T, \hat{Q}_T, \tilde{Q}_T$  – osmotreni, modeliran i projektovan trend vremenske serije  $Q$

$Q_p, \hat{Q}_p, \tilde{Q}_p$  – osmotrena, modelirana i projektovana serija višegodišnje makroperiodične komponente vremenske serije  $Q$

$Q_s, \hat{Q}_s, \tilde{Q}_s$  – osmotrena, modelirana i projektovana komponenta vremenske serije  $Q$

$C_\tau$  – kovarijansna funkcija

$\gamma_{xy}$  – kros-kovarijansa funkcija

$S^*$  – Hagova statistika

$S$  – spektar vremenske serije

$Var$  – varijansa vremenske serije

$Y$  – standardizovana vrednost serije proticaja  $Q$

$X$  – standardizovana vrednost meteoroloških serija

$a, b, c$  – Furijevi koeficijenti ili amplitude trigonometrijskih talasa  
 $h$  – Hurstov koeficijent  
 $g$  – Fišerova statistika  
 $nw$  – širina prozora metode LOESS  
 $m_Q$  – pokretne sredine serije  $Q$   
 $\rho_\tau$  – autokorelaciona funkcija  
 $p$  – red AR modela  
 $r$  – koeficijent autokorelacije  
 $q$  – red MA modela  
 $t$  – vremenski korak  
 $w$  – težina uglašavanja članova serije u metodi LOESS  
 $x$  – priraštaji prvog reda standardizovane vrednosti serije proticaja  $Q$   
 $y$  – priraštaji prvog reda standardizovanih meteoroloških serija  
 $\Psi$  – koeficijenti kratkoročnih projekcija  
 $\Phi$  – objašnjenost varijanse  
 $\alpha$  – prag značajnosti testiranja hipoteze  
 $\alpha_t$  – slučajna serija meteoroloških serija po metodi *prewhitening*  
 $\beta_t$  – slučajna serija hidroloških serija po metodi *prewhitening*  
 $\lambda$  – težinski koeficijenti kovarijansne funkcije  
 $\phi_{kk}$  – parcijalna kros-korelaciona funkcija  
 $\phi$  – koeficijenti AR modela  
 $\theta$  – koeficijenti MA modela  
 $v$  – impulsna odzivna težina  
 $\tau$  – vremenski pomak

**Naziv doktorske disertacije:** Dugoročne promene u stohastičkoj strukturi hidroloških vremenskih serija

**Rezime:**

Hidrološki proces moguće je analizirati kao stohastički proces na osnovu koga se donosi zaključak o njegovoj unutrašnjoj stohastičkoj strukturi. Struktura hidrološkog procesa predstavlja bitnu osobinu na osnovu koje se dobijaju informacije o njegovoj vremenskoj zakonomernosti. Dugoročne promene u strukturi hidrološkog procesa predstavljaju značajno pitanje savremene nauke. Isto tako, važna istraživačka pitanja predstavljaju i matematičko opisivanje hidroloških procesa, opisivanje njihove uzročno-posledične veze sa meteorološkim parametrima, kao i predviđanje dugoročnih promena hidroloških procesa.

Osnovni cilj ovog rada je razvoj metodologije kojom se analiziraju dugogodišnje promene u hidrološkim serijama. U doktorskoj disertaciji su predložene metodologije za formiranje stohastičkih modela za kratkoročne i dugoročne projekcije godišnjih i mesečnih protoka.

Metodologija za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih protoka se zasniva na dekompoziciji vremenskih serija na trend, periodičnost, stohastičku i slučajnu komponentu, po uzoru na metodu TIPS koju je predložio Jevđević (1984). Predložena metodologija je nazvana modifikovana TIPS metoda. Vremenska serija se deli na deterministički deo koga čine linearni trend i višegodišnja periodičnost. Drugi deo predstavlja stohastička komponenta koja se modelira autoregresionim modelima višeg reda. Modifikacija TIPS metode se sastoji u identifikaciji makroperiodične komponente na uglačanim godišnjim i sezonskim serijama proticaja tehnikom LOESS. Na ovaj način se uklanjaju oscilacije visoke frekvencije i olakšava identifikacija makroperiodične komponente koja je od prevashodnog značaja za razmatranje dugoročnih promena u hidrološkim nizovima. Ovako uspostavljen model se koristi za kratkoročne projekcije godišnjih proticaja tako što se determinističke komponente ekstrapoluju, vrši se prognoza stohastičke komponente i određuje interval poverenja prognoziranih proticaja.

Za razliku od kratkoročnih projekcija koje se dobijaju pomoću modela zasnovanog na unutrašnjoj strukturi serija protoka, za dugoročne projekcije mesečnih proticaja predložen je model koji koristi zavisnost proticaja od padavina i temperatura. Cilj

modela jeste da se omogući njegova primena za dugoročne projekcije proticaja na osnovu klimatskih scenarija. Primenom analize osetljivosti protoka na glavne meteorološke faktore, utvrđeno je da na mesečne proticaje najviše utiču mesečne padavine. Takođe, dugoročne promene u proticajima su posledica postojanja istih promena u padavinama. Drugi uticajni faktor je temperatura, zbog čega je odlučeno da se model za dugoročne projekcije zasniva na zavisnosti protoka od padavina i temperatura. Za dugoročne projekcije protoka predložen je model SDTS, kojim se mesečni proticaji dele na deterministički deo sastavljen iz kompozitnog nelinearnog trenda, makroperiodične i sezoneke komponente. Drugi deo je stohastički baziran na transfer funkcijama sa dvostrukim ulazom (padavinama i temperaturama) na mesečnoj vremenskoj skali. Ostatak serije čini potpuno slučajna komponenta. Prve dve determinističke komponente u predloženom modelu SDTS (nelinearni trend i makroperiodična komponenta) se modeliraju na godišnjem nivou, dok se preostale komponente modeliraju na mesečnom nivou.

Pored modela SDTS, kao pomoćni model, razvijen je inicijalni model godišnjih proticaja zasnovan na transfer funkcijama sa godišnjim padavinama i temperaturama kao ulaznim vremenskim serijama. Ovaj model omogućava dugoročnu prognozu trenda i makroperiodične komponente na godišnjem nivou.

Primena modela SDTS sa dugoročnim projekcijama padavina i temperatura iz klimatskih modela je moguća ukoliko se obezbedi ekstrapolacija svih komponenti modela u budućnost. U predloženom modelu komponente su ekstrapolovane na različite načine: (1) Nelinearni trend i makroperiodična komponenta za budućnost su dobijene na osnovu simuliranih godišnjih proticaja inicijalnim modelom sa padavinama i temperaturama iz klimatskih scenarija na godišnjem nivou; (2) Sezonska komponenta u budućnosti je formirana na osnovu pretpostavke da će se unutargodišnji ciklus proticaja u budućnosti menjati u skladu sa promenom unutargodišnjeg ciklusa padavina; (3) Stohastička komponenta za budućnost je rezultat primene modela transfer funkcija na mesečnom nivou sa mesečnim padavinama i temperaturama iz klimatskih scenarija.



Ključne reči: stohastički model, Mann-Kendall trend test, multi-vremenska analiza trenda, dugoročna periodičnost proticaja, Furijeva transformacija, ARMA model, kros-korelaciona transfer funkcija, dugoročne projekcije, donji sliv reke Dunav

Naučna oblast: Građevinarstvo

Uža naučna oblast: Stohastička hidrologija

UDK: 556:519.21(043.3)

**Doctoral Dissertation Title:** Long-term changes in stochastic structure of hydrologic time series

### **Summary**

Hydrological time series is analysed as a stochastic process that is utilized to make an inference according to the internal stochastic structure. The stochastic structure of a hydrological process presents the main characteristic that is used to obtain information about its realization pattern through the time. The long-term change in the structure of hydrological process presents essential issue of contemporary science. Also, the important research questions are mathematical modeling of hydrological process, its cause-consequence relation with meteorological variables and prediction of a long-term change of hydrological process.

The aim of this research is to develop the methodology used to analyse the long-term projections in hydrological time series. In the doctoral dissertation the methodologies for constituting stochastic models for the short-term and long-term projection of annual and monthly flows are proposed.

The methodology for short-term projection of annual and seasonal flows is based on decomposition of time series on trend, periodical component, stochastic and random component inspired by TIPS method proposed by Yevjevich (1984). The proposed methodology is called the modified TIPS method. The time series is divided into two parts: the deterministic part which is constituted of linear trend and long-term periodicity and the stochastic component is modeled by autoregression models of higher orders. The modification of the TIPS method consists of identification of macroperiodical component of annual and seasonal flows by using the LOESS technique. In this manner, the high-frequency oscillations are removed. This fact is facilitated identification of long-term periodical component which is of fundamental significance for consideration of long-term changes in hydrological time series. The established model is used for the short-term projection of annual flows by extrapolation of deterministic component, the projection of stochastic component and determining the confidence interval of projected flows.

In contrary to the short-term projections determined by using the model based on internal structure of flow series, the model based on relations among flows,

precipitations and temperatures is proposed for a long-term projection of annual flows. The aim of the model is to provide the application of long-term projection of flows in accordance with climatic scenarios. The Application of sensitivity analysis of flow using the main meteorological factors is determined by the precipitations as the major influential parameter on flows pattern. Moreover, the long-term changes of flow time series are the consequence of the same multi-decadal changes in precipitations. The second influential parameter is temperature. Due to this fact, the model for long-term projection is considered to be constituted by using the relation among the flows, precipitations and temperatures. For the long-term projection the proposed SDTD model is used for decomposition of the monthly flow series into the deterministic part composed of composite non-linear trend, macroperiodical component and seasonal component. The second part is stochastic component modeled by the Transfer Functions with multiple inputs (precipitation and temperature) on monthly time scale. The first two deterministic components of the proposed SDTS model (non-linear trend and macroperiodical component) are modeled at the annual level, while the rest of the components are modeled by using a monthly time scale.

In addition to the SDTS model, the Initial model of annual flows is developed as an auxiliary model based on Transfer Functions with annual precipitations and temperatures as input time series. This model provides the long-term projection of trends and macroperiodical component at annual level.

The application of the SDTD model with long-term projections of precipitations and temperatures from climatic models is possible under conditions provided by extrapolation of all model's components in the future. In the proposed model the components are extrapolated by employing different manners: (1) Non-linear trend and macroperiodical component in the future are determined by using the simulated annual flows which are modeled with precipitations and temperatures from climatic model at annual time scale, (2) Seasonal component in the future is formed on the assumption that the interannual flows will be changed according to the interannual changes of precipitations, (3) Stochastic component in the future is result of the Transfer Function model on monthly time scales with monthly precipitations and temperatures from the climatic scenarios.

Key words: Stochastic model, Mann-Kendall trend test, multi-temporal trend analysis, long-term flow periodicity, Fourier transformation, ARMA model, cross-correlation transfer function, long-term projections, upper Danube river basin

Scientific area: Civil Engineering

Scientific sub-area: Stochastic hydrology

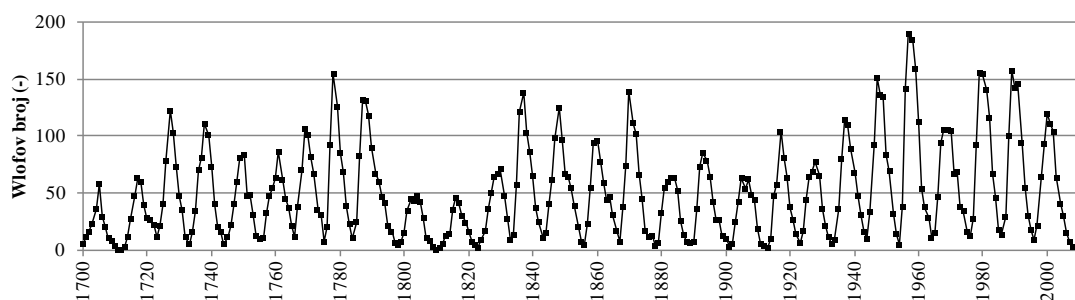
UDC: 556:519.21(043.3)

*„Change is Nature’s style and occurs at all time and all time scales“ (Koutsoyiannis i Montanari, 2014).*

# 1. Uvod

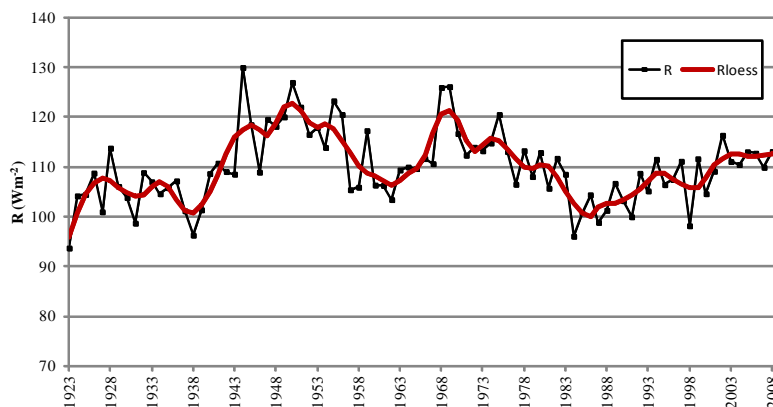
## 1.1 Dugoročne promene atmosferskih činilaca

Praćenje emisione aktivnosti Sunca prisutno je od davnina. Sve promene koje se dešavaju na Suncu imaju svoje posledice na klimatski sistem Zemlje, pa samim tim i na hidrološki ciklus. Na slici 1-1 prikazana je rekonstruisana serija godišnjih vrednosti Sunčevih pega iskazana preko Wolfvog broja na kojoj se jasno vidi njen periodični karakter.



Slika 1-1. Sunčeva aktivnost iskazana preko godišnjih vrednosti Wolfvog broja za period 1700-2011.

Merenja intenziteta Sunčevog zračenja na površini Zemlje su kasnijeg datuma, a dugogodišnje serije od početka 20. veka postoje na svega nekoliko meteoroloških stanica u Evropi. Najduža serija intenziteta Sunčevog zračenja zabeležena je na stanici Stokholm koja je prikazana na slici 1-2 (IPCC, 2013).



Slika 1-2. Prosečni godišnji intenzitet dolaznog Sunčevog zračenja  $R$  i njegova uglačana serija  $R_{loess}$  na površini Zemlje za stanicu Stokholm (Švedska) za period 1923-2010. (IPCC, 2013)

Na prethodnoj slici se zapaža složena struktura godišnjeg intenziteta dolaznog Sunčevog zračenja na površini Zemlje gde je naglašena njena periodična osobina preko uglačane serije intenziteta zračenja  $R_{loess}$ .

Energetska razmena između Sunca, Zemlje i atmosfere zahteva složena merenja koja se sprovode kako na Zemlji tako i u atmosferi. Ovakva merenja su novijeg datuma i sprovode se pomoću svemirskih platformi kao što su CERES (*Clouds and the Earth's Radiant Energy System*) i SORCE (*Solar Radiation and Climate Experiment*) koji su počeli sa radom 2000, odnosno 2003. Ovim merenjima obuhvaćen je ukupni bilans Sunčevog zračenja.

Istraživanja sprovedena merenjem intenziteta dolaznog Sunčevog zračenja na površini Zemlje pokazuju rastući trend u poslednjim dekadama. Dostupni rezultati istraživanja su prikazani u tabeli 1-1 i definišu rast intenziteta dolaznog zračenja u rasponu 1.7-2.7  $Wm^{-2}$  po dekadi na globalnom nivou.

**Tabela 1-1 Trend intenziteta dolaznog Sunčevog zračenja ( $Wm^{-2}/dek.$ ) na površini Zemlje po dekadi**

<b>Modeli:</b>	<b>Period obrade:</b>	<b>Dekadni trend Sunčevog zračenje (<math>Wm^{-2}/dek.</math>):</b>
Wild i sar., 2008	1900-2000.	+2.6
Prata, 2008	1964-1990.	+1.7
Philiphona i sar., 2009	1981-2005.	+(2.4-2.7)

Neto toplotna energija na površini Zemlje, koja predstavlja razliku dolazne i emitovane toplotne energije, takođe, pokazuje trend porasta. Tako su Wild i sar. (2008) pokazali da postoji povećanje neto toplotne energije u iznosu 2  $Wm^{-2}$  po dekadi za period 1960-1980, a da se takav trend nastavio za period 1980-2000. Istraživanja sprovedena u centralnoj Evropi i na Alpima pokazuju rastući trend neto toplotne energije u iznosu 1.3-2.0  $Wm^{-2}$  za period 1981-2005. (Philipona i sar., 2009).

Porast neto toplotne energije na površini Zemlje predstavlja pokretač povećanja srednje globalne temperature vazduha na Zemlji. U poslednjem izveštaju Međuvladinog panela za klimatske promene (IPCC, 2013) uzeta su u obzir četiri modela kojima se rekonstruiše osmotrena srednja globalna temperatura vazduha za period 1880-2012. (tabela 1-2).

**Tabela 1-2 Trend srednje globalne temperature vazduha ( $^{\circ}\text{C}/\text{dek.}$ ) po dekadi i 90%-tni intervali poverenja**

Modeli:	1880-2012.	1901-2012.	1901-1950.	1951-2012.	1979-2012.
<i>CRUTEM4.1.1.0</i> Jones i sar., 2012	0.086 $\pm$ 0.015	0.095 $\pm$ 0.020	0.097 $\pm$ 0.029	0.175 $\pm$ 0.037	0.254 $\pm$ 0.050
<i>GHCNv3.2.0</i> Lawrimore i sar., 2011	0.094 $\pm$ 0.016	0.107 $\pm$ 0.020	0.100 $\pm$ 0.033	0.197 $\pm$ 0.031	0.273 $\pm$ 0.047
<i>GISS</i> Harries i sar., 2010	0.095 $\pm$ 0.015	0.099 $\pm$ 0.020	0.098 $\pm$ 0.032	0.188 $\pm$ 0.032	0.267 $\pm$ 0.054
<i>Berkeley</i> Rohde i sar., 2013	0.094 $\pm$ 0.013	0.101 $\pm$ 0.017	0.111 $\pm$ 0.034	0.175 $\pm$ 0.029	0.254 $\pm$ 0.049

Na osnovu podataka iz tabele 1-2 zaključuje se da je u svim periodima prisutan značajan rastući trend u srednjim godišnjim vrednostima globalnih temperatura vazduha, a da je najveći ostvaren tokom perioda 1979-2012. sa priraštajem u rasponu 0.25-0.27  $^{\circ}\text{C}$  po dekadi.

Za rekonstrukciju osmotrenih globalnih godišnjih padavina na Zemlji i definisanje njihovog trenda IPCC je koristio četiri modela kojima su dobijeni trendovi za dva vremenska perioda, 1901-2008. i 1951-2008. (tabela 1-3).

**Tabela 1-3 Trend godišnjih globalnih padavina (mm/dek.) po dekadi i 90%-tni intervali poverenja na rasponu geografske širine od 30 $^{\circ}$  do 60 $^{\circ}$** 

Modeli:	1901-2008.	1951-2008.
<i>CRU TS 3.10.01</i> Mitchell i Joens, 2005	2.770 $\pm$ 1.906	5.652 $\pm$ 3.725
<i>GHCN V2</i> Vose i sar., 1992	3.234 $\pm$ 1.097	1.385 $\pm$ 1.980
<i>GPCC V6</i> Becker i sar., 2013	3.135 $\pm$ 1.049	1.500 $\pm$ 1.926
Smith i sar., 2012	1.444 $\pm$ 0.502	0.969 $\pm$ 0.881

Iz rezultata modela se zaključuje da su trendovi tokom dvadesetog veka rastući za oba perioda za područje iznad 30 $^{\circ}$  geografske širine. Inače su registrovani rastući trendovi suma godišnjih padavina na celoj zemaljskoj kugli sa izuzetkom tropskih predela.

## 1.2 Dugoročne projekcije atmosferskih činilaca

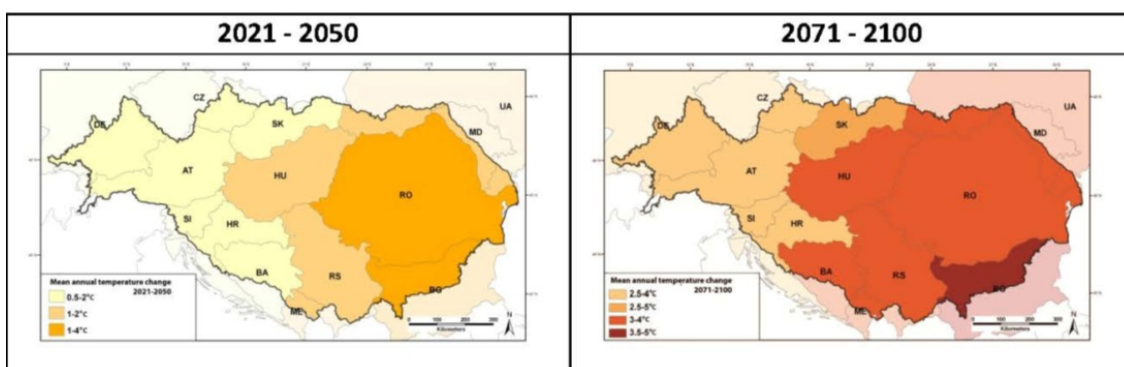
Projekcije klimatskih elemenata u budućnosti se vrše korišćenjem globalnih (*global circulation model*) i regionalnih klimatskih modela (*regional circulation model*). Kako bi se podaci o klimatskim pokazateljima sa globalnih modela preneli na regionalne



koristi se *downscaling* tehnika (Đurđević i Rajković, 2010). Ovi modeli predstavljaju spoj fizičkih procesa koji se dešavaju na kopnu, iznad okeana i u atmosferi. Međutim, uprkos pažljivoj kalibraciji i validaciji ovi modeli pokazuju značajna odstupanja sa osmotrenim podacima (ICPDR, 2012).

Za potrebe četvrtog izveštaja IPCC panela definisano je 40 budućih klimatskih scenarija (Nakićenović i Swart, 2000). Na osnovu njih u „Dunavskoj studiji – Adaptacija na klimatske promene“ (ICPDR, 2012) izabrana su dva klimatska scenarija za potrebe dunavskog sliva: A1B i A2. Realizacija navedenih klimatskih scenarija u budućnosti pokriva širok spektar demografskih, tehnoloških i ekonomskih društvenih aktivnosti. Prvi, scenarijo A1B, obuhvata izbalansiranu proizvodnju energije na svim resursima i predstavlja dopunu A1 scenarija koji predviđa oštar ekonomski rast sa maksimumom u sredini 21. veka kao i značajno efikasnije tehnologije u proizvodnji. Za razliku od ovog scenarija, A2 scenario predviđa stalni rast svetske populacije sa heterogenim i stalnim ekonomskim razvojem koji je praćen većom emisijom gasova staklene bašte.

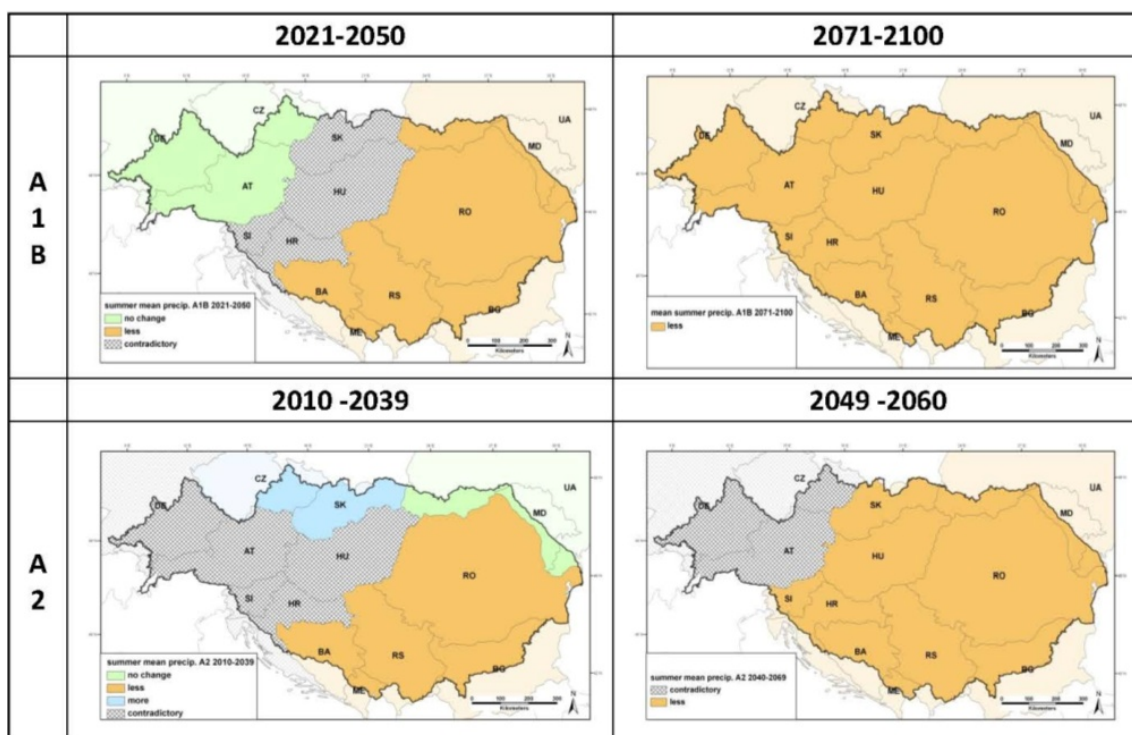
Projekcije temperature vazduha u budućnosti analizirane su u okviru „Dunavske studije“ (ICPDR, 2012). Prostorna diskretizacija korišćenih globalnih modela se kreće u rasponu 0.3<sup>0</sup>-2.0<sup>0</sup> (50-150 km) dok je kod regionalnih između 20 i 50 km. Za ceo sliv Dunava predviđa se porast srednjih temperatura vazduha, kako srednjih godišnjih tako i za sva godišnja doba (slika 1-3). Srednje dnevne temperature vazduha za period 2021-2050. porašće na kraju perioda za +0.5 do +4 °C u zavisnosti od regije. Očekivani rast dnevnih temperatura na kraju drugog perioda (2071-2100) iznosi od 2.8 do 6.0 °C.



Slika 1-3. Projekcije godišnjih temperatura vazduha za sliv Dunava za period 2021-2050. i 2071-2100. po klimatskom scenariju A1B (ICPDR, 2012)

Prema rezultatima „Dunavske studije“ očekuje se da srednje godišnje temperature za Republiku Srbiju po scenariju A1B budu povećane na kraju 2050. za 1-2 °C, dok je očekivano povećanje na kraju 2100. od 3 do 4 °C. Bitno je naglasiti da se po zadatom klimatskom scenariju povećanje temperature u slivu Dunava očekuje sa gradijentom od severozapada ka jugoistoku, a da Republika Srbija spada u zemlju sa umerenim povećanjem temperature.

Rezultati regionalnih klimatskih modela, korišćenjem scenarija A1B i A2, ukazuju da se očekuje porast padavina koji zahvata severni deo Evrope i da se opadanje očekuje na njenom južnom delu. Povećanje suma godišnjih padavina u severnim delovima sliva Dunava praćeno je povećanjem intenziteta padavina (PRUDENCE, 2004). Porast padavina se očekuje u zimskim mesecima i iznosi oko +20%. Ovaj porast je u širokom rasponu, pa je u pojedinim regionima očekivano povećanje od +5% dok u drugim +35%. Smanjenje padavina očekivano je u južnoj Evropi u rasponu od -25% do -45%, dok je u centralnoj smanjenje umerenije i iznosi oko -20% (ICPDR, 2012). Područje Alpa predstavlja zonu promene režima padavina, deli se na vlažni sever i sušni jug gde se jugoistočni deo Austrije nalazi u sušnjoj zoni (ADAPTALP, 2011).



Slika 1-4. Projekcije sume godišnjih padavina za sliv Dunava za period 2021-2050. i 2071-2100. po klimatskom scenariju A1B i A2 (ICPDR, 2012)

Uzimajući u obzir klimatske scenarije A1B i A2 Republika Srbija se nalazi u frontu gde projekcije pokazuju smanjenje padavina u budućnosti. Po scenariju A1B do 2050. očekivano je smanjenje padavina u rasponu 5-15%, dok za period do 2100. smanjenje iznosi u intervalu 10-30% u odnosu na zabeležene godišnje padavine. Rezultati u drugom scenariju (A2) ukazuju na smanjenje od 5% na kraju prvog perioda i 30% na kraju drugog perioda (ICPDR, 2013). Do sličnog zaključka su došli Rसानен и sar. (2004), kao i Giorgi i sar. (2004) tako što su predvideli smanjenje padavina na jugoistoku Evrope, a povećanje u severnim delovima po scenariju A1B i A2. Povećanje padavina na severu donosi severno-atlantska oscilacija i to povećanje bi se kretalo u rasponu 15-30%. Severno-atlantska oscilacija ujedno utiče na smanjenje padavina u južnim delovima koje je najizraženije u Mediteranskoj regiji i iznosi 30-40%.

Za projekcije meteoroloških parametara na području Republike Srbije razvijen je EBU-POM atmosfersko-okeanski objedinjeni regionalni model (Đurđević i Rajković, 2008). Parametri EBU-POM modela su verifikovani za period 1961-1990. na 17 meteoroloških stanica u Srbiji (Kržić i sar., 2011). Posle verifikacije modela korišćeni su klimatski scenariji A1B i A2 kako bi se dale projekcije meteoroloških parametara za period 2071-2100. (Đurđević i Rajković, 2010; Kržić i sar., 2011). Rezultati pokazuju povećanje temperatura na analiziranim stanicama u rasponu od 2 do 4 °C, dok se očekuje smanjenje padavina za 13 do 16 mm na godišnjem nivou za scenarije A1B, odnosno A2. Broj tropskih dana sa temperaturom iznad 30 °C biće povećan, dok se očekuje smanjenje broja hladnih dana sa temperaturom manjom od 0 °C. Isto tako očekuje se smanjenje dužine hladnih perioda, a povećanje dužine suvih perioda i perioda vegetacije.

### **1.3 Predmet rada**

Svaka promena u klimatskom sistemu Zemlje neminovno vodi do promene u hidrološkom ciklusu. Uticaj klimatskih promena na vodne resurse je veliki što opravdano postavlja ovo naučno polje u sam vrh društvenog značaja. Veliki značaj ovoj temi dale su države na evropskom kontinentu. Rezultat su evropski i nacionalni naučni projekti među kojima je i projekat „Ocena uticaja klimatskih promena na vodne resurse u Srbiji“ finansiran od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije za period 2010-2015. godine. Evropska komisija donela je Belu knjigu „Prilagođavanje na klimatske promene: U susret evropskom akcionom planu“. Za

potrebe Dunavske komisije, tokom 2012. godine završena je studija uticaja klimatskih promena na celom slivu Dunava (ICPDR, 2012). Na osnovu navedene studije Dunavska komisija donela je Strategiju za prilagođavanje uticajima klimatskih promena, kojim je stvoren pravni i institucionalni okvir za izradu nacionalnih strategija u ovoj oblasti. Nacionalna strategija Republike Srbije o prilagođavanju od uticaja klimatskih promena očekuje se da bude usvojena do kraja 2015. godine.

Velika pažnja, kako na globalnom tako i na lokalnom nivou, daje se pitanju klimatskih promena. Za razliku od intenzivnog istraživanja atmosferskih činilaca, uticaj klimatskih promena na rečni oticaj je mnogo manje izučen i jasan. Sam proces rečnog oticaja reflektuje integralne karakteristike sliva i predstavlja rezultantu uzajamnog uzročno-posledičnog dejstva sledećih faktora: geofizičkih procesa na relativno velikom prostranstvu, fizičko-geografskih karakteristika sliva i vodoprivredne aktivnosti čoveka. Veze između procesa rečnog oticaja i pomenutih faktora su veoma složene. S druge strane, osmatranja hidrometeoroloških procesa su relativno ograničena po prostoru i vremenu. Zbog toga se i o karakteru njihove promene kroz vreme relativno malo zna. Ipak, podaci osmatranja hidrometeoroloških veličina analiziraju se metodama verovatnoće, statistike i slučajnih procesa jer ove metode omogućavaju donošenje određenih zaključaka s obzirom na stohastički karakter ovih procesa. Analiza unutrašnje strukture hidrološke serije predstavlja važan faktor pri definisanju zakonomernosti razvoja procesa, što predstavlja osnovu za donošenje odluka od vodoprivrednog značaja.

Nasuprot konceptu da se hidrološke serije izučavaju kao slučajni procesi postoje brojne studije u kojima se prilikom modeliranja proticaja koristi zakonomernost između proticaja i meteoroloških parametara u slivu uz pomoć determinističkih hidroloških modela (Middelkoop i Kwadijk, 2001; Arnell, 2003; Ireasson i sar., 2004; Alcamo i sar., 2007; ICPDR, 2012; Haddeland, 2013; Plavšić, 2014). U okviru hidroloških modela uključuju se dugoročne projekcije padavina, temperatura i evapotranspiracije prema različitim scenarijima emisije gasova staklene bašte (Đurđević i Rajković, 2010). Na osnovu zadatih klimatskih scenarija određuju se buduće hidrološke projekcije u slivu. Nedostatak ovog pristupa predstavlja zanemarivanje dugoročne i kratkoročne autokorelacione zavisnosti godišnjih vremenskih serija koje postoje kod osmotrene serije, a izostavljene su u projekcijama determinističkog modela (Koutsoyiannis, 2010).

Dugoročna statistička zavisnost predstavlja svojstvo hidro-meteoroloških serija da vlažne godine grupišu u okviru višegodišnjeg vlažnog ciklusa, dok se sušne godine grupišu u okviru višegodišnje sušne epizode. Nasuprot tome, kratkoročna statistička zavisnost predstavlja korelisanost nekoliko uzastopnih vrednosti u seriji godišnjih proticaja. Navedene karakteristike hidrološkog procesa čine da je on autokorelisan na različitim vremenskim skalama, pa se zaključuje da se menja sve vreme na svim vremenskim razmerama (Koutsoyiannis i Montanari, 2014).

Sve hidrološke serije imaju elemente slučajnog karaktera, i zato se mogu razmatrati kao slučajni procesi koji se razvijaju u vremenu. Njihove determinističke komponente mogu biti izražene u većoj ili manjoj meri, što zavisi od same prirode procesa (npr. periodična smena velikih i malih voda unutar godišnjeg ciklusa ili višegodišnji ciklusi vodnih i sušnih godina). Delatnost čoveka, takođe, može imati uticaja na promenu strukture hidrološkog procesa i po pravilu povećava determinističku komponentu. Uticaj čoveka se može odvijati postepeno u vremenu ili naglo, što ima za posledicu pojavu trenda, odnosno skoka kod razmatrane hidrološke serije. Pojava trenda i skoka kod hidrološkog procesa izaziva promenu osnovnih statističkih karakteristika po vremenu, što je usko vezano sa pojavom nestacionarnosti.

Poznato je da su hidrološke vremenske serije, po svojoj prirodi, ciklične sa manje ili više pravilno izraženim dugoročnim periodima smenjivanja sušnih i kišnih godina. Savremena hidrološka praksa zahteva relativno pouzdanije poznavanje unutrašnje strukture i utvrđivanje karaktera promena hidroloških procesa. Tu se, pre svega, misli na razotkrivanje zakonomernosti smenjivanja kišnih i sušnih perioda/godina čije poznavanje je od velikog značaja za izradu strategije dugoročnog vodoprivrednog razvoja, posebno u oblasti korišćenja voda, poljoprivrede, hidroenergetike i dr.

Očekivane promene klime ovakvu vrstu analiza samo pospešuju. Promene pojedinih klimatskih parametara imaju za posledicu promenu karaktera osnovnih stohastičkih karakteristika tokom višegodišnjeg vremenskog perioda. Tu se, pre svega, misli na pojavu izraženijeg trenda u srednjoj vrednosti stohastičke vremenske serije ili promenu parametara periodične (ciklične) komponente serije, kao što su perioda, amplituda i fazno pomeranje.

U cilju izučavanja dugoročnih promena hidroloških vremenskih serija sa aspekta prirodnih i antropogenih promena postavljeni su ciljevi naučnog istraživanja u okviru predložene teme:

- Sistematizacija postojećih znanja i iskustva koja se tiču unutrašnje stohastičke strukture hidroloških serija;
- Utvrđivanje unutrašnje stohastičke strukture i registrovanje dugoročnih promena u vremenskim serijama godišnjih i sezonskih proticaja;
- Definisanje stohastičkog modela kojim se oslikava unutrašnja stohastička struktura godišnjih i sezonskih proticaja, a koji služi za kratkoročne projekcije hidroloških serija za nekoliko godišnjih koraka;
- Utvrđivanje modela za dugoročne projekcije mesečnih proticaja do kraja 21. veka na bazi kratkoročne i dugoročne statističke zavisnosti serije proticaja, kao i uzročno-posledične veze između hidroloških i meteoroloških procesa u slivu.

Analizom je potrebno utvrditi da li hidrološki proces ispunjava uslove stacionarnosti i homogenosti. Isto tako je potrebno analizirati trend vremenskih serija korišćenjem parametarskog (linearni i nelinearni trend) i neparametarskog pristupa, kao i putem multi-vremenske analize trenda. Zatim je potrebno utvrditi višegodišnju periodičnost godišnjih i sezonskih serija proticaja, izvršiti odvajanje stohastičke i slučajne komponente godišnjih i sezonskih proticaja, pri čemu je potrebno definisati autoregiona svojstva stohastičkog procesa.

Cilj doktorske disertacije je definisanje stohastičkog modela kojim se oslikava struktura serija godišnjih i sezonskih proticaja. Kako bi se pristupilo modeliranju neophodno je utvrditi da li hidrološke serije predstavlja Hurstov proces, tj. da li one poseduju dugu memoriju. Zbirne karakteristike hidroloških serija koje oslikavaju kratkoročnu i dugoročnu godišnju statističku zavisnost proticaja je potrebno definisati kao modelske komponente, koje bi služile za utvrđivanje kratkoročnih hidroloških projekcija u slivu.

Pored toga, uzročno-posledične veze između hidroloških i meteoroloških serija, na više vremenskih razmera, je potrebno ispitati analizom osetljivosti. Na osnovu utvrđenih veza hidroloških i meteoroloških serija je potrebno formirati stohastički modela za projekciju mesečnih serija proticaja. Model dugoročnih projekcija treba da na adekvatan

način predstavi mesečnu, godišnju i višegodišnju statističku zavisnost serija proticaja. Cilj modela predstavlja određivanje dugoročne projekcije mesečnih proticaja u skladu sa dugoročnim projekcijama klimatskog modeliranja za period do kraja 21. veka.

## 2. Pregled literature

Energija koja dolazi sa Sunca transformiše se kroz atmosferu Zemlje, a na transformaciju u velikoj meri utiče hemijski sastav atmosfere. Zemlja apsorbuje deo energije Sunca, a ostatak vraća nazad van atmosfere. Gasovi u atmosferi, koji se nazivaju gasovi staklene bašte, zadržavaju deo reflektovanog Sunčevog zračenja. Ovi gasovi predstavljaju barijeru i emituju zračenje nazad ka Zemlji i utiču na njeno dodatno zagrevanje. Gasovi staklene bašte nastaju prirodno i čine život na Zemlji onakvim kakav poznajemo. Međutim, ljudska aktivnost u prošlom veku dovela je do povećanja koncentracije ovih gasova, čineći atmosferu toplijom što dovodi do promene klime na Zemlji. Od gasova staklene bašte beleži se najveće povećanje ugljen-dioksida (CO<sub>2</sub>). Pored njega značajno učešće uzimaju metan (CH<sub>4</sub>), azot-oksidi (N<sub>2</sub>O) i hlorofluorokarbon (CFC). Udeo CO<sub>2</sub> iznosi 62% od ukupne zapremine gasova staklene bašte u atmosferi. Gasovi CH<sub>4</sub>, N<sub>2</sub>O i CFC imaju udeo u ukupnoj zapremini gasova staklene bašte koji redom iznosi 20% , 14% i 4% (Fishman, 2002).

Navedeni procesi u atmosferi posledično utiču na klimatski sistem, što neminovno vodi do promena u hidrološkom ciklusu. Zalihe vode na globalnom nivou mogu da se podele na vodu u okeanima, vodu u atmosferi, polarni led, podzemnu vodu i vodenu paru neposredno iznad površine Zemlje (Sorooshian i Whitaker, 2002). Promene u ovim rezervoarima na globalnom nivou se odvijaju putem četiri fluksa: padavina, evapotranspiracijom, sublimacijom i oticanjem. Na lokalnom nivou jednog sliva zalihe vode se nalaze u jezerima, rečnim tokovima, podzemlju i atmosferi. Voda u okeanima i polarni led su na lokalnom nivou irelevantni, ali sezonsko otapanje snega može da predstavlja značajni deo hidrološkog ciklusa. Pitka voda čini ukupno 2.5% zaliha vode na Zemlji, od toga se 69.6% nalazi u okviru leda u polarnim krajevima, 30.1% čini podzemna voda, a samo 0.3% čini voda u rekama, jezerima i vodena para (Sorooshian i Whitaker, 2002). Porast temperatura dovodi do većeg isparavanja, a povećanje evapotranspiracije može da dovede do suše u pojedinim područjima, ujedno do povećanih padavina u drugim područjima (USGCRP, 2009). Povećanje zimskih temperatura dovodi do povećanja padavina u obliku kiše u odnosu na sneg. To uzrokuje da se otapanje snega pomera u vremenu i počinje ranije tokom godine.



Uticao promene klime na vodne resurse predstavlja kompleksno pitanje, a posebno sa aspekta dostupnosti voda u uslovima naglog rasta populacije, industrijalizacije, urbanizacije i drugih faktora. Na ovaj način zahtevi za pitkom vodom se povećavaju, dok se ujedno njena dostupnost smanjuje.

### **2.1 Metodološki pristupi za analizu strukture vremenskih serija**

Dugogodišnje promene hidroloških serija izučavaju se u okviru dva metodološka pristupa: putem analize trenda i utvrđivanjem višegodišnje periodičnosti. Osnovna razlika navedenih pristupa leži u pretpostavkama koje se vezuju za ove metode. Analiza trenda polazi od pretpostavke da su promene proticaja monotone, tj. monotono rastuće ili opadajuće. Nasuprot njoj, analizom periodičnosti se utvrđuju značajni makro ciklusi godišnjih proticaja, na osnovu čijih amplituda i faznih pomeranja se vrši modeliranje periodične komponente. Kako bi se iskoristile dobre strane obe metode za modeliranje vremenskih serija koristi se objedinjeni pristup, tj. prvo se odstrani monotono rastući ili opadajući trend, a zatim se utvrđuje periodični karakter hidrološke serije. Kada se determiniše trend i periodičnost hidroloških vremenskih serija tada se njene projekcije dobijaju ekstrapolacijom registrovanog trenda i višegodišnje periodičnosti.

Kratkoročne promene godišnjih proticaja oslikavaju se u stohastičkoj komponenti koja poseduje izraženu autokorelacionu zavisnost na prvih nekoliko vremenskih pomaka. Za modeliranje ove komponente koriste se modeli sa kratkom memorijom kao što su AR i ARMA modeli (Box i sar., 2008). Parametri navedenih modela ocenjuju se na osnovu osmotrenih vremenskih serija, a projekcije se određuju na osnovu utvrđene zavisnosti.

Analiza trenda sprovodi se putem parametarskih i neparametarskih testova (Helsel i Hirsch, 2002). Neparametarski testovi su bazirani na utvrđivanju verovatnoće pojave trenda u vremenskoj seriji putem rangiranja članova vremenske serije (Douglas i sar., 2000). Neparametarski Mann-Kendall test se koristi za utvrđivanje trenda u vremenskoj seriji (Mann, 1945). U poglavlju 3.5.1.1 dat je detaljan opis ovog testa. U današnje vreme ovaj test ima veliku primenu prilikom registrovanja trenda u godišnjim hidrološkim serijama (Douglas i sar., 2000; Yue i Wang, 2002; Yue i Pilon, 2004; Bayazit i Onoz, 2007; Khaliq i sar, 2009). Prilikom korišćenja Mann-Kendall testa ne podrazumeva se pretpostavka o normalnosti vremenskih serija, ali vremenske serije ne smeju da poseduju serijsku korelaciju. Khaliq i sar. (2009) prikazali su pristupe za

odstranjivanje uticaja serijske korelacije korišćenjem *pre-whitening* metode (Bayazit i Onoz, 2007), metoda korekcije varijanse (Hamed i Rao, 1998; Yue i Wang, 2002) i *boot-strap* metode (Douglas i sar. 2000; Yue i Pilon, 2004). Kada se standardnim testom Mann-Kendall utvrdi značajan monotoni trend za utvrđivanje nagiba trenda koristi se neparametarski Theil-Sen test (Zhao i sar. 2010; Murphy i sar. 2013). Osim testa Mann-Kendall za utvrđivanje monotonog trenda hidroloških serija moguće je koristiti i neparametarski Spearman test (*Spearman's Rank Correlation Test*) (Villarini i sar., 2011).

Ukoliko u vremenskoj seriji postoji vidljiv linearni trend onda se za utvrđivanje njegove značajnosti kao i modeliranje koristi parametarski linearni trend. Parametarskim i neparametarskim pristupom se testiraju iste hipoteze ali su pretpostavke za korišćenje testova i test statistike međusobno različite. Testiranjem nagiba linearnog trenda utvrđuje se značajnost linearnog trenda (Kendall i Stuart, 1966; Varga i Prohaska, 1976). Ovim testom uvodi se pretpostavka da su reziduali hidrološke vremenske serije normalni, da je varijansa reziduala konstantna i da je na dijagramu reziduala proticaja (apscisa) i linearne komponente trenda (ordinata) raspored tačaka potpuno slučajan (Helsel i Hirsch, 2002). U poglavlju 3.5.2.1 je opisan postupak za određivanje nagiba linearnog trenda kao i test nagiba trenda kojim se utvrđuje njegova značajnost.

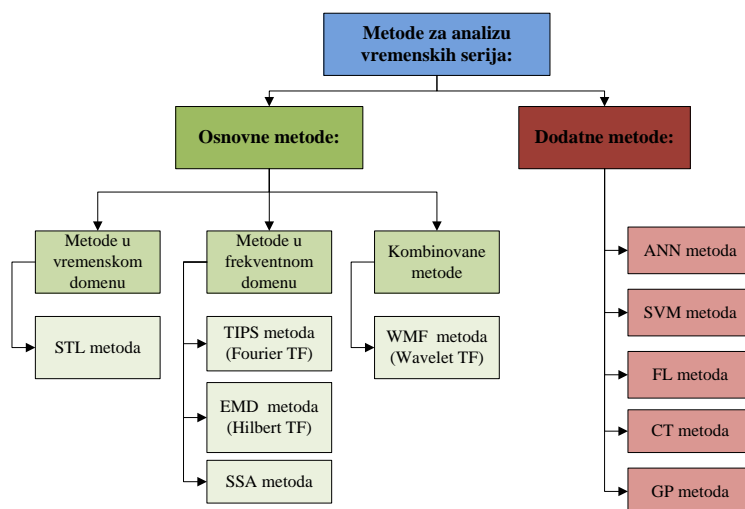
Analiza periodičnosti godišnjih serija proticaja bazirana je na sledećim metodama (Fendekova i sar., 2014): autokorelaciji, kroskorelaciji, analizi spektra i analizi talasnih transformacionih funkcija (*Wavelet transform function*). Aproksimativna dužina perioda može se odrediti na osnovu oblika autokorelacione funkcije, a vremenski pomak između korespondentnih značajnih vrednosti između dva uzastopna ciklusa na autokorelacionoj funkciji predstavlja približnu vrednost jedne periode. Uzročno-posledična veza između meteoroloških činilaca i oticaja sa sliva utvrđuje se kroskorelacionom funkcijom. Analiza spektra predstavlja tehniku kojom je moguće tačno utvrditi periodičnost vremenske serije, a ujedno i periodično ponašanje modelirati korišćenjem značajnih perioda i faznih pomeranja. Spektar je moguće odrediti u dva vida, kao diskretni i neprekidni spektar (poglavlje 3.6). Diskretni spektar je primenjen u mnogim hidrološkim studijama kako bi se definisale i modelirale značajne periode (Jevđević 1974; Jevđević 1984; Salas i sar. 1988; Radić i Mihajlović, 2006; Stojković i

sar. 2012a; Stojković i sar. 2013). Za razliku od njega, neprekidni spektar predstavlja transformaciju autokorelacione funkcije i njime se utvrđuje intenzitet periodičnosti na neprekidnoj frekventnoj skali (Jevđević 1974; Pekarova i sar., 2006; Pekarova i Pekar, 2006). Algoritmi po kojima se utvrđuje diskretni spektar su diskretna i brza Furijeova transformacija. Prilikom korišćenja neprekidnog spektra neophodno je izvršiti korekcije autokorelacione funkcije radi lakše interpretacije spektra (Hamming i Turkey, 1949). Često korišćen način za korekciju autokorelacione funkcije je *B-T* metoda (Blackman i Turkey, 1959) koja je detaljno prikazana u poglavlju 3.6.2.

## 2.2 Metodološki pristupi za modeliranje vremenskih serija

Dekompozicija vremenskih serija definiše način odvajanja svake pojedinačne komponente u okviru hidrološke vremenske serije. Dekompozicija serija sastoji se u odvajanju determinističke, stohastičke i slučajne komponente (Jevđević, 1984). Svaka pojedinačna komponenta modelira se zasebno kako bi se na kraju komponente sumirale i tako formirale ukupnu modeliranu vremensku seriju.

Metode za dekompoziciju hidroloških vremenskih serija podeljene su na osnovne i dodatne metode (slika 2-1). Osnovne metode dele se na (1) metode u vremenskom domenu, (2) metode u frekventnom domenu i (3) kombinovane metode koje spajaju vremenski domen i domen frekvencija. Suština metoda u frekventnom domenu predstavlja uvođenje transformacionih funkcija kako bi se osobine vremenske serije ocenile u domenu frekvencija. Metode u vremenskom domenu predstavljaju matematičke funkcije kojima se vrednosti članova serije opisuju kao funkcija vremena.



Slika 2-1. Klasifikacija metoda za dekompoziciju i modeliranje vremenskih hidroloških serija

STL metoda (*Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess*) predstavlja osnovnu metodu u vremenskom domenu zasnovanu na uglačavanju vremenskih serija. Prednost ove metode ogleda se u malom broju potrebnih parametara, dok je njenim korišćenjem nemoguće doći do analitičkog rešenja periodične komponente, već rezultat predstavljaju samo dekomponovane serije. STL metodu prvi put su predstavili Cleveland i sar. (1990), a zasnovana je na lokalnoj regresionoj tehnici LOESS. Razvoj lokalnih regresionih metoda odvija se krajem 20. veka, a o samoj LOESS regresionoj tehnici detaljno objašnjenje je dato u delu 3.6.1.1.

TIPS (*Tendency, Intermittency, Periodicity, Stochasticity*) metoda predstavlja tradicionalnu metodu za analizu vremenskih serija u frekventnom domenu koja je primenjena u mnogim hidrološkim studijama (Jevđević, 1984). U TIPS metodi se modelira deterministički i stohastički deo vremenske serije. Deterministički deo serije se sastoji iz trenda, komponente prekida i periodične komponente. Periodična komponenta se modelira korišćenjem analize spektra, tačnije primenom transformacione funkcije Furijea. Stacionarna stohastička komponenta se modelira korišćenjem linearnih autoregresionih modela. Za svaku komponentu se određuje matematički model i formira agregirani model koji se sastoji od zbira komponentnih delova i potpuno slučajnog člana koji ima osobine belog šuma. Primena TISP metode demonstrirana je prilikom strukturalne analize dnevnih hidroloških serija u Srbiji (Radić i Mihalović, 2006).

Empirijska dekompozicija vremenskih serija (*EMD-Empirical Mode Decomposition*) koristi Hilbertovu spektralnu transformaciju vremenskog u frekventni domen (Huang i sar, 2009). EMD metoda predstavlja osnovnu metodu u frekventnom domenu. Prednost ove metode ogleda se u njenoj adaptivnosti na sve vremenske serije, pa tako i na nestacionarne. Polazna pretpostavka EMD metode je da se vremenske serije sastoje od više signala koji se prostiru nesimultano duž serije, a da tokom prostiranja signala dolazi do njihove superpozicije (Huang i sar, 1998, 1999). Sve češća je upotreba ove metode u hidrološkim vremenskim serijama (Huang i sar., 2009; Rudi i sar., 2010; Karthikeyan i Kumar, 2013).

Singularna spektar analiza (*SSA-Singular Spectrum Analysis*) predstavlja takođe osnovnu metodu u frekventnom domenu (Broomhead i King, 1986). SSA metoda ne podrazumeva korišćenje funkcije transformacije vremenskog u frekventni domen već se

dekompozicija serija određuje posredno, upotrebom multi-varijantne statistike vremenskih serija. Ona je uspešno primenjena u mnogim hidrometeorološkim studijama (Fraedrich, 1986; Ghil i Vautard, 1991; Ghil i sar., 2002), a njena primena uključuje i prognozu vremenskih serija i predstavlja sredstvo za rešavanje sledećih zadataka (Ghil i sar., 2002; Vautard i sar, 1992; Elsner i Tsonis, 1997; Zhang i sar., 2011): pronalaženje trendova, uglašavanje serije, izolovanje sezonske komponente, izolovanje talasa u polju malih i velikih frekvencija, izolovanje perioda sa promenljivim amplitudama, izolovanje slučajne komponente i prognozu vremenske serije. SSA metoda je novijeg datuma, a njena prednost ogleda se u primeni na nestacionarne vremenske serije. Za razliku od drugih metoda prednost ove metode ogleda se u malom broju parametara jer su za dekompoziciju vremenske serije putem SSA metode potrebna samo dva ulazna parametra.

U analizi vremenskih serija razvijena je metoda dekompozicije vremenske serije pomoću talasne transformacione funkcije (*Wavelet transform function*) koja se naziva WMF (*Wavelet Modeling Framework*) metoda. Osnovna prednost WMF metode u odnosu na ostale metode nalazi se u kombinovanoj analizi vremenskog i frekventnog domena. Tako se promene u frekvenciji vremenske serije prate na svakom vremenskom koraku, a ne samo na ukupnom segmentu vremenske serije (Karthikeyan i Kumar, 2013). Upotreba ovakve analize treba da da odgovor da li postoje promene u višegodišnjim periodičnim komponentama serije, kao što su amplituda i period oscilovanja. Posebna prednost ove metode ogleda se u primeni na nestacionarnim vremenskim serijama. Prilikom modeliranja hidroloških procesa evidentna je upotreba WMF metode u poslednjoj dekadi (Coulibaly i Burn, 2004; Labat, 2005; Kisi, 2009a; Kisi, 2009b; Sang, 2013).

Druga vrsta metoda koja se u poslednje vreme učestalije koristi za modeliranje hidroloških procesa su metode zasnovane na veštačkoj inteligenciji. Prednost ovih metoda u odnosu na tradicionalne ogleda se u sposobnosti da reprodukuju nelinearne veze između ulazne i izlazne vremenske serije (Jain i Kumar, 2007). Za modeliranje hidroloških vremenskih serija se primenjuje ANN (*Artificial Neural Network*) metoda koja je bazirana na mreži neurona (Dawson i Wilby, 1998; Hu i sar, 2001; Cigizoglu i sar, 2003). Često se u hidrološkoj praksi sreću kompozitni ANN modeli koji koriste i

linearne autoregresione modele (Toth i sar, 2000; Chang i sar, 2007; Chen i sar, 2013). SVM metoda (*Support Vector Machines*) predstavlja takođe metodu baziranu na neuronskim mrežama (Vapnik i sar, 1997). Sa uspehom se primenjuje za modeliranje i prognozu hidroloških serija (Liong i Sivapragasm, 2002; Bray i Han, 2004; Lin i sar, 2006; Noori i sat., 2011). SVM metoda se koristi zajedno sa modelima kao što su Evolucionim algoritam (Yu i sar, 2004) i model SOM (*Self Organizing Map*) (Ismail i sar, 2012). Slično kao i ANN metoda formirana je i fazi logika (FL-Fuzzy Logic) sa ciljem da reprodukuje aktivnosti nervnog sistema. Ovu matematičku disciplinu prvi put je predstavio Zadeh (1965), a koristi se za modeliranje i prognozu hidroloških procesa (Chang i Chen, 2001; Nayak i sar, 2005). Paralelno sa razvojem neuronskih mreža u poslednje dve dekade u okviru nelinearnih dinamičkih sistema, kakav je hidrološki sistem, razvija se teorija haosa (CT-Chaos Teory). Teorija haosa se razvija u pravcu prognoze haosa vremenskih serija padavina i proticaja (Park i sar. 2005; Sivakumar, 2009). Za modeliranje i projekciju vremenskih serija koristi se i genetsko programiranje bazirano na evolucionom algoritmu (*GP-Genetic Programming*). Prvi put genetski algoritam upotrebio je Barricelli (1954), dok se sve češće ovi algoritmi koriste za modeliranje i prognoziranje hidroloških vremenskih serija (Wang i sar. 2009; Mehr i sar. 2013).

## **2.3 Trend hidroloških vremenskih serija**

### **2.3.1 Proticaj**

Hidrološki ciklus je povezan sa promenama u bilansu Sunčevog zračenja i meteorološkim parametrima u atmosferi. Isto tako, antropogeni uticaj u slivu utiče na hidrološki ciklus, kao što je izgradnja akumulacija i promena namene površina zemljišta. Izgradnja velikih akumulacija kratkoročno utiče tako što se izvesna zapremina vode koristi za punjenje akumulacije i ne učestvuje u oticanja sa sliva. Dugoročne promene se ogledaju u isparavanju sa vodene površine iz akumulacije umesto sa vegetacije i modifikacijom proticaja kao posledica upravljanja akumulacijom. Pretvaranje šuma i pašnjaka u obradivo ili urbano zemljište za posledicu ima smanjenje isparavanja sa sliva i povećanje proticaja (Huntington, 2006; Vornsmarty i Sahagian, 2000). Međutim, u slivovima sa prisustvom stalnog leda na većim nadmorskim visinama, do povećanja proticaja može doći ne samo povećanjem padavina nego i otapanjem leda (Yang i Shiklomanov, 2004).

Sistemska merenja proticaja u modernoj eri počinju dosta kasno. Najduže vremenske serije proticaja su dostupne u Evropi, ali one ne prelaze 200 godina. Višegodišnje promene hidroloških i meteoroloških veličina zaokuplja istraživače u ovim oblastima od sredine 20. veka. Veliki broj studija je sproveden na istraživanju trenda godišnjih proticaja. Metodologija kojom se definiše trend svakako ima uticaj na konačan rezultat. Kao primer uzima se da različiti statistički testovi daju različite zaključke o značajnosti trenda, kao i da na trend utiče i dužina vremenske serije, pa tako različite dužine iste serije mogu dovesti do različitog nagiba trenda. Limitirajući faktor u analizi trenda su i kvalitet podataka o merenju proticaja. Na mnogim slivovima ljudska aktivnost je dovela do nehomogenosti proticaja na stanicama, a često su prisutni i nedostajući podaci u vremenskim serijama.

Na globalnom nivou registrovani su rastući trendovi godišnjih proticaja u delovima na severnoj hemisferi sa većom geografskom širinom, kao što su Severna Amerika i severna Evropa (Labat i sar. 2004; Bates i sar., 2008). Opadajući trendovi primećeni su u delovima zapadne, južne Afrike i južne Evrope i Srednjeg Istoka (Labat i sar. 2004; Milly i sar., 2005). Kundzewicz i sar. (2005) su analizirali 195 hidroloških stanica na Zemlji. Identifikovali su rastući trend na 27 stanica, dok 31 stanica pokazuje opadajući trend, a na ostalim stanicama značajan trend nije identifikovan. Birsan i sar. (2005) su sprovedli analizu trenda na 48 slivova u Švajcarskoj na neregulisanim slivovima. Izučavali su statističku značajnost trenda srednjih godišnjih i sezonskih proticaja, identifikovali značajne rastuće trendove srednjih godišnjih proticaja tokom zimske i prolećne sezone, dok su opadajući trendovi registrovani tokom leta. Promene u padavinama nisu dovoljne da bi se njima objasnili trendovi u proticajima, a korelaciona analiza je pokazala snažnu vezu između trendova proticaja i srednje nadmorske visine sliva. Opsežno istraživanje višegodišnje promene proticaja sprovedli su Stahl i sar. (2010) na 411 neregulisanih slivova u 15 zemalja Evrope. Dobili su rezultate koji ukazuju da se opadajući trendovi godišnjih proticaja javljaju u južnoj i istočnoj Evropi, a da se u ostalim delovima Evrope javljaju rastući trendovi. Trendovi mesečnih proticaja pokazuju varijabilnost i zavise od karakteristika sliva, ali se na mnogim slivovima zapaža da se rastući trendovi javljaju tokom zimskih meseci, a opadajući trendovi su najveći u avgustu.

### 2.3.2 Evapotranspiracija i zemljišna vlaga

Potencijalne promene u vodnim resursima se registruju u dugogodišnjim vrednostima elemenata vodnog bilansa u slivu kao što su stvarna evapotranspiracija i vlaga u zemljištu. Direktna merenja potencijalne evapotranspiracije su ograničena malim brojem stanica, kao i različitim metodama merenja (Bates i sar., 2008). Godišnje vrednosti stvarne evapotranspiracije poseduju rastući trend u mnogim delovima SAD i u Rusiji u drugoj polovini dvadesetog veka (Golubev i sar., 2001). Qian i sar. (2006) su preračunavali evapotranspiraciju na osnovu podataka o padavinama, temperaturama, oblačnosti, solarnoj radijaciji, vetru i došli do zaključka da na globalnom nivou stvarna evapotranspiracija ima trendove koji su istovetni trendovima globalnih padavina (poglavlje 1.1). Godišnje globalne padavine su maksimum ostvarile tokom 70-ih godina dvadesetog veka. Pokazano je da stvarna evapotranspiracija ne zavisi samo od deficita vlažnosti vazduha, već i od prisutne toplotne energije na površini zemlje, kao i od vetra.

Istorijsko praćenje zemljišne vlage, koje se registruje *in situ*, postoji samo za nekoliko delova na Zemlji (Bates i sar., 2008). Robock i sar. (2000) su utvrdili rastući dugogodišnji trend zemljišne vlage do dubine tla od 1 m. Za ovo analizu su koristili 600 stanica u zemljama bivšeg Sovjetskog Saveza, Kine, Indije i SAD-a. Istraživanje sprovedeno u Ukrajini obuhvatilo je poslednjih 45 godina merenja zemljišne vlage do dubine od 1 m (Robosk i sar., 2000; Hurrell, 1995). Trend godišnje vrednosti zemljišne vlage je rastući, s tim što je u poslednje dve dekade došlo do uravnoteženja trenda. Ovo je u suprotnosti sa rastućom globalnom temperaturom na površini Zemlje (poglavlje 1.1), a došli su i do zaključka da rastući trend zemljišne vlage predstavlja posledicu opadajućeg trenda intenziteta Sunčevog zračenja u ovim regionima.

### 2.4 Višegodišnja periodičnost hidroloških serija

Početak 20. veka smatralo se da se u hidrologiji i meteorologiji javlja višegodišnji Bruknerov ciklus od oko 35 godina kao izvesno dokazan u Evropi (Jevđević, 1956). Dalja osmatranja i proveravanja dovela su u sumnju ovu periodičnost i danas se ovaj ciklus pominje kao istorijska pojava u studijama periodičnosti. Williams (1961) je istraživao prirodu i uzroke cikličnosti hidroloških serija u svetu. On je pokušao da uspostavi vezu između hidroloških podataka i Sunčevih pega, čija izražena periodičnost iznosi oko 11 godina, ali direktna veza nije pronađena.



Postoje prirodni faktori koji utiču na višegodišnju periodičnost serija proticaja. Istraživači se fokusiraju na relaciju između padavina, proticaja i velikih oscilacija atmosferskog pritiska iznad okeana. Tipični predstavnik je Južna Oscilacija SO (*South Oscillation*) preko Pacifika i severno-atlantska oscilacija NAO (*North Atlantic Oscillation*) preko Atlantskog okeana. Promene atmosferskog pritiska zahvataju velike površine i utiču na transport padavina preko susednih kontinenata. Pored toga, za promenu višegodišnjih proticaja značajna je i Kvazi-Bijenalna oscilacija (*Quasi-Biennial Oscillation*).

Za utvrđivanje višegodišnjih promena proticaja, osim analize trenda, neophodno je utvrditi periodičnost vremenskih serija. Serije koje poseduju dugogodišnju periodičnost predstavljaju serije sa dugom memorijom, a ovo svojstvo geofizičkih vremenskih serija naziva se Hurstov fenomen. Naziv ovog fenomena potiče od istraživača Harolda Hursta koji je prvi utvrdio da se u okviru dugogodišnjeg sušnog perioda grupišu godine sa manjkom vode i obrnuto (Hurst, 1951). Zapažene su analize fluktuacije godišnjih proticaja na 50 izabranih stanica u svetu korišćenjem metode filtracije vremenskih serija (Probst i Taddy, 1987). Utvrdili su sukcesivno višegodišnje smenjivanje vlažnih i suvih perioda na rekama. Fluktacije su sinhronne između kontinenata Južne Amerike i Afrike, a suprotne između Severne Amerike i Evrope. Pekarova i sar. (2006) su pokazali da postoji pravilno smenjivanje sušnih i vodnih dugogodišnjih epizoda na 18 većih reka Evrope. Za analizu su koristili serije godišnjih proticaja koje su duge 150 godina. Ustanovili su da postoje dugogodišnji ciklusi godišnjih proticaja od 13.5 godina i 28-29 godina i da su ovi periodi pomereni za nekoliko godina između severne i zapadne Evrope, odnosno centralne Evrope. Labat (2006) se fokusirao na sukcesivnu promenu sušnih i vlažnih višegodišnjih perioda. On je utvrdio više perioda: 4-8 godina, 14-16 godina, 20-25 godina i 30-40 godina. Dekompoziciju mesečnih proticaja na velikom broju manjih slivova u Evropi izvršio je Gudmundsson i sar. (2011), sa ciljem izolovanja nisko frekventne komponente koja predstavlja višegodišnju fluktuacionu komponentu proticaja. Ovom prilikom je korišćen STL metod dekompozicije, gde je utvrdio da modelirane komponente sadrže 80.6% varijanse osnovne serije mesečnih proticaja. Stojković i sar. (2012a) su koristili uglačane serije srednjih godišnjih proticaja na sedam stanica na Dunavu. Uglašavanje su vršili lokalnom regresionom metodom LOESS i utvrdili da postoji periodičnost proticaja u domenu velikih perioda koja iznosi

14, 21-24 i 27-32 godina. Za višegodišnju varijaciju proticaja vezuju se retenzione karakteristike sliva. Tako su Wanga i sar. (2014) analizirajući hidrološke režime u severo-istočnim delovima SAD-a sa minimalnim učešćem antropogenog faktora utvrdili da su višegodišnje varijacije padavina ublažene retenzionim kapacitetom sliva. Utvrdili su da procentualno učešće varijanse niskih frekvencija (velikih perioda) proticaja je veće za slivove većih površina koje poseduju veću podzemnu retenziju.

Dugogodišnje fluktuacije serija proticaja uslovljene su atmosferskim fenomenima, kao što je severno-atlantska oscilacija. NAO oscilacija se našla u ekstremnoj fazi tokom 80-ih godina 20. veka, što je dovelo do sušnih godina u južnoj Evropi i Mediteranu, dok je u predelu Severne Evrope i Skandinavije preovladalo vlažno vreme (Hurrell, 1995). Rodriguez-Puebla i sar. (1996) su doveli u vezu prostornu raspodelu padavina sa atmosferskim fenomenima među koja je obuhvaćena i severno-atlantska oscilacija. Među studijama koje povezuju višegodišnju varijabilnost proticaja i NAO fenomen zapažena je studija sprovedena u nižem delu sliva Dunava, na stanici Ceatal Izmail (Rimbu i sar. 2002). Zaključili su da se dekadna varijabilnost NAO indeksa reflektuje na proticaje, pa kada je NAO u pozitivnoj fazi, tada se javljaju sušnije godine i obrnuto. Na isti način povezane su i padavine i severno-atlantska oscilacija gde je zaključeno da su padavine pod uticajem ovog fenomena. Uticajem severno-atlantske oscilacije bavili su se Danilovich i sar. (2007) na serijama proticaja na rekama u Belorusiji koje pripadaju slivu Baltičkog mora. Utvrđeno je da postoji značajna korelaciona veza između srednjih mesečnih indeksa NAO i proticaja, isto tako na sezonskom i godišnjem nivou. Najveće korelacione zavisnosti između navedenih serija registrovane su tokom zime i leta. Labat (2008) je transformaciju talasa primenio za analizu dugogodišnje serije proticaja u Severnoj Americi i Evropi, gde je zaključio da postoje značajne fluktuacije koje su u skladu sa severno-atlantskom oscilacijom NAO i južnom oscilacijom SO. Bouwer i sar. (2008) su sprovedli regionalnu analizu osetljivosti srednjih i maksimalnih godišnjih proticaja na 608 stanica u Evropi. Pokazano je da postoji značajna veza između godišnjih serija NAO i serija proticaja, a da je veza još snažnija kada se upoređuju maksimalni proticaji. Istraživanje povezanosti mesečnih i sezonskih vrednosti NAO i proticaja izvršili su Wrzesnski i sar. (2011). Oni su na osnovu značajnosti ove veze grupisali 510 reka u okviru 7 grupa. Dugogodišnja promena proticaja u slivu dešava se kao posledica meteoroloških parametara u slivu ali i

kao posledica karakteristika sliva koje definišu režim oticanja vode. U skladu sa tim Gudmundsson i sar. (2011) su hidrološke serije podelili u dve kategorije po karakteristikama sliva koje definišu višegodišnju periodičnost, pa tako postoji brdski režim oticaja koji se formira kao posledica otapanja snega i leda. Drugu kategoriju čine ravničarski tokovi na koje u većoj meri utiče isparavanje sa sliva. Za razliku od višegodišnjih promena proticaja koje aproksimativno iznose 30 godina, istraživanje Fendekove i sar. (2014) na slivu reke Nitra u Slovačkoj pokazalo je uzajamnu vezu promene godišnjih proticaja sa Kvazi-Bijenalnom oscilacijom čije se periode smenjuju tokom 2.3-2.4 godine.

### **2.5 Projekcije hidroloških vremenskih serija**

Padavine i temperature vazduha su od ključnog značaja za hidrološki proces u celini. Uticaj porasta temperature vazduha na hidrološki režim analizirali su Renner i Bernhofer (2011) na 27 hidroloških stanica u Saksoniji u Nemačkoj. Zaključeno je da je od 1988. došlo do zajedničke promene hidroloških karakteristika na svim analiziranim slivnim područjima, pri čemu se prosečna temperatura povećala za  $1\text{ C}^0$ . Ovakva promena se odrazila na oticaj sa sliva kod koga se grana porasta hidrograma javlja 1 do 3 nedelje ranije.

Na osnovu dugoročnih klimatskih projekcija putem hidroloških modela moguće je odrediti dugoročne hidrološke projekcije u slivu. Hidrološkim modelima se utvrđuje da su buduće promene proticaja u slivu prevashodno lokalnog i regionalnog karaktera (ICPDR, 2012), a sve promene se dešavaju kao posledica povećanja globalnih temperatura vazduha, a u isto vreme smanjenje suma godišnjih padavina na jugoistoku Evrope i povećanja na severnom delu Evrope (poglavlje 1.2). Očekivane su unutargodišnje promene u hidrološkom ciklusu pri čemu bi se povećali proticaji u zimskim i prolećnim mesecima, a smanjili se tokom leta i jeseni. Predviđaju su promene u preraspodeli padavina između snega i kiše pri čemu bi se smanjile padavine u obliku snega dok bi se povećale padavine u obliku kiše (ICPDR, 2012). Došlo bi do kraćeg zadržavanja snega sa manjom visinom snežnog pokrivača, kao i do njegovog ranijeg topljenja. Tokom letnjih meseci došlo bi do smanjenja nivoa podzemnih voda, a potencijalna evapotranspiracija bi rasla čime bi došlo do dodatnog zagrevanja atmosfere.

U regionima sa manje dostupnom podzemnom vodom, što predstavlja region jugoistočne Evrope, došlo bi do opadanja stvarne evapotranspiracije.

Rezultati hidroloških modela upućuju da će se smanjiti proticaji na jugu i istoku Evrope, dok se u severnoj Evropi predviđa povećanje proticaja (Ireasson i sar., 2004; ICPDR, 2012). Korišćenjem hidrološkog modela za područja severne Evrope prognozirano je povećanje srednjih godišnjih proticaja do 2020. za 5-15%, kao i povećanje 9-22% za period do 2070. uz korišćenje scenarija emisije gasova staklene bašte A1 i A2 (Alcamo i sar., 2007). Smanjenje proticaja po istom klimatskom scenariju treba da se očekuje južnije od 47<sup>o</sup> geografske širine, a očekivane su vrednosti u iznosu do 22% do 2020, kao i smanjenje u rasponu 6-36% do 2070. Sprovedene studije na severu Evrope pokazuju promenu unutar hidrološkog ciklusa pa se očekuje povećanje proticaja tokom zime i smanjenje tokom leta (Middelkoop i Kwadijk, 2001).

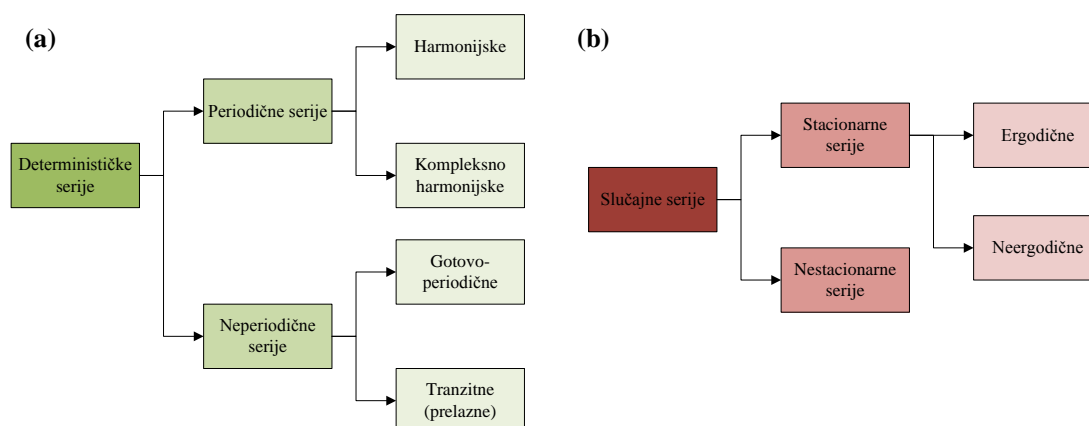
Uticaj klimatskih promena u jugoistočnoj Evropi je proučavan u nekoliko studija gde su korišćeni hidrološki modeli sa velikom diskretizacijom po prostoru (Arnell, 2003), kao i modeli sa mikro razmerom (Haddeland, 2013; Plavšić, 2014). Arnell (2003) sugeriše da se na području istočne Evrope očekuje smanjenje godišnjih proticaja za 20-30% pri čemu se u isto vreme očekuje povećanje varijacije godišnjih proticaja. Haddeland (2013) je analizirao uticaj klimatskih promena na proticaje u slivu reke Kolubare i Toplice. Rezultati pokazuju da se u bližoj budućnosti dešava smanjenje godišnjih proticaja od 10% dok u daljoj budućnosti smanjenje iznosi između 30 i 40% u odnosu na referentni period 1961-1990. Na prostoru jugoistočne Evrope analiziran je uticaj klimatskih promena na hidrološki režim reke Save (Plavšić, 2014). Za budući period korišćene su padavine i temperature iz klimatskog scenarija A1B iz pet klimatskih modela. Kao referentni period korišćen je period 1961-1990, dok su promene u proticajima sagledane tokom bliže (2011-2040) i dalje budućnosti (2041-2070). Sugeriše se porast proticaja tokom zimske sezone u intervalu od +11% do +13%. Tokom letnjih meseci očekuje se smanjenje proticaja koje je manje u bližoj budućnosti dok se u dalekoj budućnosti očekuje smanjenje za oko 15%. Ukupne godišnje promene u proticajima su male, pa se tako u bližoj budućnosti medijana godišnjeg proticaja smanjuje za 1.4%, a u dalekoj budućnosti za 4.7%.

### 3. Pregled metoda za utvrđivanje strukture vremenskih hidroloških serija

#### 3.1 Vremenske serije i njihova klasifikacija

Pod pojmom vremenska serija podrazumeva se hronološki niz podataka osmatranja koji oslikava promenu određene fizičke veličine u vremenu. Hidrološke vremenske serije uglavnom su rezultat rada nekog sistema, bio on prirodni ili veštački. One predstavljaju skup osmatranja tokom vremena koji može da se predstavi kao realizacija slučajne promenljive koja čini jedan slučajan proces (Koutsoyiannis i Montanari, 2014).

Svi prirodni procesi koji se osmatraju mogu se podeliti u dva osnovna vida, determinističke i slučajne procese. Na slici 3-1 data je klasifikacija determinističke i slučajne vremenske serije.



Slika 3-1. Klasifikacije (a) determinističkih i (b) slučajnih vremenskih serija (Jevđević, 1972)

U determinističke procese ubrajaju se svi procesi koji se mogu opisati matematičkim relacijama. Vremenske serije koje opisuju determinističke pojave mogu biti periodične i neperiodične. Periodične vremenske serije mogu se podeliti na harmonijske i kompleksno-harmonijske. Neperiodične vremenske serije se dalje dele na gotovo-periodične i tranzitne. Tranzitne komponente se u hidrologiji javljaju kao trend ili skok u vremenskoj seriji.

Serije kod kojih se vrednosti članova ne mogu izraziti kao deterministička funkcija vremena predstavljaju jedan od mogućih rezultata prirodnih pojava i nazivaju se slučajne serije. U zavisnosti od toga da li se parametri i karakteristike serija menjaju s

vremenom, razlikujemo stacionarne i nestacionarne serije. Stacionarne vremenske serije dele se na ergodične i neergodične.

Nestacionarne slučajne serije dekomponuju se na determinističke, stacionarne stohastičke i slučajne komponente. Ukoliko se pretpostavi da je vremenska serija  $Q(t)$  nestacionarna tada može da se predstavi kao:

$$Q(t) = Q_{DET}(t) + Q_{STOH}(t) + \varepsilon(t) = [Q_T(t) + Q_P(t)] + Q_{STOH}(t) + \varepsilon(t), \quad (3.1)$$

gde je  $Q(t)$  nestacionarna hidrološka serija,  $Q_{DET}(t)$  je deterministička komponenta serije koja se sastoji iz trenda  $Q_T(t)$  i makroperiodične komponente  $Q_P(t)$ ,  $Q_{STOH}(t)$  je stacionarna stohastička komponenta serije dok je  $\varepsilon(t)$  slučajna vremenska serija.

### 3.2 Stacionarnost

Pri analizi vremenskih serija postavlja se pitanje da li je analizirani proces stacionaran. Uopšteno govoreći, ukoliko se karakteristike vremenske serije, kao što su matematičko očekivanje, varijansa, gustina raspodele ne menjaju tokom vremena onda je serija stacionarna, u suprotnom je nestacionarna. Osnov za postavljanje pitanja u vezi stacionarnosti nalazi se u potrebi određivanja karaktera vremenske hidrološke serije da bi se primenio matematički aparat za dekompoziciju vremenske serije koji je iznet u izrazu (3.1).

Slučajni proces  $Q(t)$  za  $t \in T$  je stacionaran ako su njegove konačnodimenzionalne raspodele invarijante u odnosu na translaciju vremena (Mališić i Jevremović, 2008), pri čemu  $T$  predstavlja skup prirodnih brojeva. Preciznije rečeno, za svaku konačnu kolekciju  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$  zajednička raspodela slučajnih promenljivih  $Q(t_1+\tau), \dots, Q(t_n+\tau)$  ne zavisi od  $\tau$ .

Iz definicije stacionarnih procesa sledi da sve karakteristike tih procesa koje se određuju raspodelama slučajnih promenljivih na zavise od  $\tau$ . Na primer, ako postoji matematičko očekivanje procesa  $Q(t)$  ono mora biti konstantno (Mališić i Jevremović, 2008):

$$E(Q_t) = E(Q_{t+\tau}) = \bar{Q} = const \quad (3.2)$$

Isto tako, ako stacionaran proces  $Q(t)$  ima konačne momente drugog reda onda njegova kovarijansna funkcija  $C_\tau$  mora biti funkcija razlike argumenata  $B(t-\tau)$ :

$$C_\tau = cov(Q_t, Q_{t+\tau}) = E[(Q_t - \bar{Q})(Q_{t+\tau} - \bar{Q})] = E(Q_{t+\tau} - \bar{Q})(Q_t - \bar{Q}_{t+\tau}) = B(t-\tau). \quad (3.3)$$

Slaba i stroga stacionarnost su dva zasebna krajnja shvatanja pojma stacionarnosti. Slaba stacionarnost je dovoljna u slučajevima kada se zadovoljavamo ispitivanjima samo pomoću momenata prvog i drugog reda (Mališić i Jevremović, 2008). U tom slučaju se kaže da je slučajni proces stacionaran reda  $r=2$ . Ako jedan od ovih uslova nije zadovoljen tada proces  $Q(t)$  nije slabo stacionaran. Mališić (2002) definiše stacionarnost u jakom smislu na način da svi procesi  $Q(t)$  za  $t \in T$  imaju istu raspodelu. Takvi procesi imaju homogeno ponašanje tokom vremena. U slučaju kada je slučajni proces  $Q(t)$  stacionaran reda  $r=n$ , tj. za sve momente slučajnog procesa, tada se kaže da je on ergodičan. Ukoliko je to slučaj, tada se statističke karakteristike procesa  $Q(t)$  mogu odrediti na osnovu jedne kolekcije iz skupa  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ .

### 3.2.1 Dickey-Fuller test

Ukoliko vremenske serije poseduju serijsku korelaciju tada se za ispitivanje stacionarnosti koriste autoregresiona svojstva serija. Uvodi se pretpostavka da vremenska serija može da se predstavi kao AR(1) proces (Wang i sar., 2009). Neophodno je standardizovati seriju godišnjih proticaja  $Q(t)$  čime se dobija transformisana serija  $x(t)$ . Serija  $x(t)$  se predstavlja preko AR(1) modela na sledeći način:

$$x(t) = \rho_1 x(t-1) + \varepsilon(t), \quad (3.4)$$

gde je  $\rho_1$  parametar AR(1) modela koji je jednak koeficijentu autokorelacije procesa  $x(t)$  na prvom pomaku ( $\tau=1$ ) dok je  $\varepsilon(t)$  vremenska serija reziduala.

Testiranje stacionarnosti vremenskih serija korišćenjem testa Dickey-Fuller vrši se pomoću  $\tau$  statistike testa (Richards, 2014):

$$\tau = \frac{\rho_1 - 1}{SE(\rho_1)}, \quad SE(\rho_1) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}, \quad (3.5)$$

gde  $\sigma_x$  predstavlja standardno odstupanje vremenske serije  $x(t)$ , dok  $N$  predstavlja broj članova vremenske serije. Ukoliko je  $|\tau| < |\tau_{krit}|$  tada se usvaja hipoteza  $H_0$  da je vremenska serija nestacionarna, u suprotnom ( $|\tau| > |\tau_{krit}|$ ) se odbacuje hipoteza  $H_0$  i usvaja hipoteza  $H_1$  da je vremenska serija stacionarna. Statistika  $\tau$  ne pripada konvencionalnoj  $t$  raspodeli, a njene kritične vrednosti su u funkciji praga značajnosti  $\alpha$  odredili Dickey i Fuller (1979).

### 3.2.2 Analiza pokretnih sredina

Pored konvencionalnog pristupa za ispitivanje stacionarnosti u radu je korišćena i vizuelna provera stacionarnosti vremenskih serija po srednjoj vrednosti (stacionarnost prve vrste  $r=1$ ). Potrebno je formirati pokretne sredine  $m$  vremenske serije  $Q$  sa širinom prozora od 30 koraka. Širina prozora izabrana je na osnovu poznate periodičnosti godišnjih hidroloških serija proticaja u Evropi koja iznosi u proseku 30 godina (Labat 2000; Pekarova i sar., 2006), kao i na osnovu principa Svetske meteorološke organizacije (*World Meteorological Organization*,) po kome se višegodišnje srednje vrednosti (*normale*) meteoroloških parametara ocenjuju na osnovu perioda od 30 godina (WMO, 2014).

Kao mera odstupanja pokretne sredine  $m$  od srednje vrednosti serije  $Q$  koristi se koeficijent varijacije  $C_v$  koji se određuje na sledeći način:

$$C_v = \frac{\sigma_m}{\bar{Q}}, \quad (3.6)$$

gde je  $\bar{Q}$  srednja vrednost vremenske serije  $Q$ , a  $\sigma_m$  predstavlja standardno odstupanje pokretne sredine  $m$ . U slučaju da vremenska serija  $Q$  ne sadrži izraženu višegodišnju periodičnost standardna odstupanja pokretnih sredina biće mala, pa tako i vrednosti koeficijenta  $C_v$ . U suprotnom, ukoliko na određivanje srednje vrednosti serije  $Q$  na vremenskom segmentu od 30 godina bitno utiče višegodišnja periodičnost proticaja tada će biti veće vrednosti koeficijenta  $C_v$ .

### 3.3 Homogenost

#### 3.3.1 Integralna kriva standardizovanih odstupanja

Analiza promene vodnosti u slivu u radu se sprovodi putem integralne krive standardizovanih odstupanja. Ova kriva je iskorišćena kako bi se odredila tačka promene vodnosti i njome definisala dva perioda u kome se testiraju hipoteze o homogenosti dva uzorka iste populacije. Tačka promene vodnosti se određuje kao apsolutni maksimum na integralnoj krivoj. Stoga, najviša ili najniža tačka na ovoj krivoj definiše promenu režima, tj. smenu perioda sa pozitivnim i negativnim vodnim priraštajima. Integralna kriva standardizovanih odstupanja  $f_t$  predstavlja kumulativnu funkciju (Prohaska i Ristić, 2003):



$$f_t = \sum_{t=1}^N \left( \frac{Q_t - \bar{Q}}{\sigma_Q} \right) \quad (3.7)$$

gde je  $Q_t$  srednji godišnji proticaj u  $t$ -toj godini,  $\bar{Q}$  je srednje višegodišnji proticaj u periodu od  $N$  godina i  $\sigma_Q$  je standardno odstupanje godišnjeg proticaja.

Postavlja se pitanje sa kojom pouzdanošću se prelomna tačka, tj. promena vodnog režima, dešava na datom segmentu vremenske serije. Kako bi se dao odgovor na ovo pitanje vrši se promena redosleda članova serije po slučajnom rasporedu bez zamene osmotrenih vrednosti. Simulacije godišnjih vrednosti članova serije vrše se upotrebom *boot-strap* metode (Mudelsee, 2010). Simulirane serije sa redosledom koji se razlikuje od hronološkog niza osmotrenih godišnjih proticaja koriste se kako bi se definisala pouzdanost prelomne tačke.

Na prvom koraku potrebno je definisati maksimalno odstupanje  $f_{dif}$  na krivoj  $f$ , koje se predstavlja na sledeći način:

$$f_{dif}^0 = f_{max}^0 - f_{min}^0, \quad (3.8)$$

gde su  $f_{max}$  i  $f_{min}$  maksimalna i minimalna vrednost integralne krive standardizovanih odstupanja. Indeks „0“ korespondira sa hronološkim redom osmotrenih godišnjih proticaja.

U narednom koraku vrši se slučajna promena redosleda serije godišnjih proticaja. Na taj način je formirana serija:

$$Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_{N-1}^1, Q_N^1, \quad (3.9)$$

pri čemu su ostale nepromenjene vrednosti srednjeg godišnjeg proticaja, dok indeks „1“ označava prvu promenu rasporeda u *boot-strap* metodi.

Zatim se određuje integralna kriva standardizovanih odstupanja serije sa izmenjenim redosledom članova:

$$f_1^1, f_2^1, \dots, f_{N-1}^1, f_N^1. \quad (3.10)$$

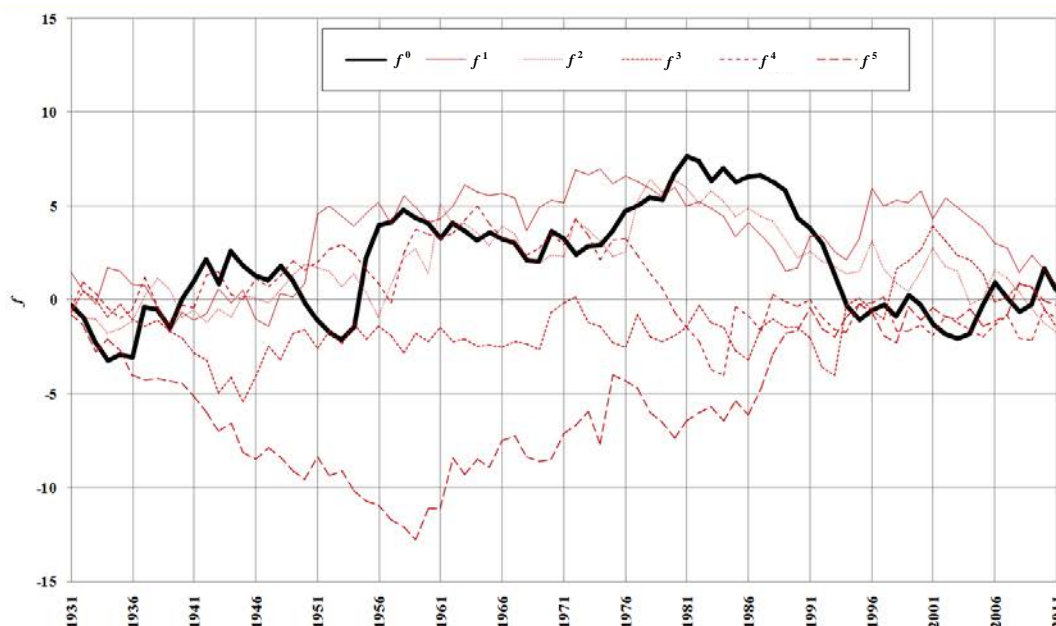
Zamena članova serije godišnjih proticaja sprovodi se *BS* puta i na taj način se određuju simulirane vrednost proticaja pomoću *boot-strap* metode:

$$\{Q_1^2, Q_2^2, \dots, Q_{N-1}^2, Q_N^2\}, \{Q_1^3, Q_2^3, \dots, Q_{N-1}^3, Q_N^3\}, \dots, \{Q_1^{BS}, Q_2^{BS}, \dots, Q_{N-1}^{BS}, Q_N^{BS}\}, \quad (3.11)$$

kao i integralne krive standardizovanih odstupanja:

$$\{f_1^2, f_2^2, \dots, f_{N-1}^2, f_N^2\}, \{f_1^3, f_2^3, \dots, f_{N-1}^3, f_N^3\}, \dots, \{f_1^{BS}, f_2^{BS}, \dots, f_{N-1}^{BS}, f_N^{BS}\}. \quad (3.12)$$

Na slici 3-2 ilustrovana je *boot-strap* metoda pri čemu je crnom bojom prikazana originalna integralna kriva standardizovanih odstupanja, dok su crvenom bojom date prvih pet integralnih krivih dobijene zamenu članova vremenske serije pomoću *boot-strap* metode.



Slika 3-2. Integralna kriva standardizovanih odstupanja: osmotrena kriva ( $f^0$ ) i kriva posle zamene članova vremenske serije korišćenjem *boot-strap* metode ( $f^1, f^2, f^3, f^4, f^5$ )

Za integralne krive standardizovanih odstupanja  $f^1, f^2, \dots, f^{BS}$  određuju se minimalne vrednosti ( $f_{min}$ ), lokalni maksimumi ( $f_{max}$ ) i ukupne razlike ( $f_{dif}$ ). Lokalni maksimum simuliranih vrednosti  $f_{max}$  definiše se na vremenskom segmentu oko osmotrene prelomne tačke (Chan i Gupta, 2000).

Metoda *boot-strap* predviđa da se uporede vrednosti  $f_{dif}$  između osmotrenih i simuliranih serija godišnjih proticaja. Potrebno je da se na osnovu simuliranog ukupnog broja prekoračenja vrednosti  $f^{1,2,\dots,BS}_{dif} > f^0_{dif}$  izračuna verovatnoća pojave prelomne tačke za datu seriju godišnjih proticaja:

$$p = 100 \cdot \frac{P}{BS}, \quad (3.13)$$

pri čemu  $P$  predstavlja broj prekoračenja dok ukupan broj simulacija iznosi  $BS=1000$  (Chan i Gupta, 2000).

### 3.3.2 Test normalnosti vremenske serije

U analizi vremenskih serija koristi se pretpostavka o normalnosti vremenskih serija. Ukoliko se zanemari ova pretpostavka može se doneti pogrešan zaključak, čiji rezultat predstavlja netačnu interpretaciju dobijenih informacija. Testiranje normalnosti vremenskih serija u radu sprovodi se pomoću *Jarque-Bera* i *PPCC* testa (*Probability Plot Correlation Coefficient*).

#### 3.3.2.1 Test normalnosti Jarque-Bera

Jarque-Bera test sprovodi se putem *JB* statistike koja pripada  $\chi^2$  raspodeli sa ukupno dva stepena slobode (Jarque i Bera, 1987):

$$JB = n \left[ \frac{\gamma_1^2}{6} + \frac{(\gamma_2 - 3)^2}{24} \right], \quad (3.14)$$

gde se koeficijent asimetrije  $\gamma_1 (= C_s)$  i koeficijent spljoštenosti  $\gamma_2$  određuju na sledeći način:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q - \bar{Q})^3}{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q - \bar{Q})^2 \right]^{3/2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q - \bar{Q})^4}{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q - \bar{Q})^2 \right]^2}. \quad (3.15)$$

Koeficijent asimetrije  $\gamma_1$  može biti pozitivan i negativan dok za normalnu raspodelu iznosi  $\gamma_1=0$ . Koeficijent spljoštenosti  $\gamma_2$  za slučaj normalne raspodele ima vrednost 3, a odstupanje od ove vrednosti upućuje na jaču ili blažu spljoštenost gustine raspodele uzorka u odnosu na normalnu raspodelu.

Ukoliko se pokaže da je *JB* statistika manja od kritične vrednosti  $JB_{krit}$  po  $\chi^2$  raspodeli sa ukupno dva stepena slobode usvaja se hipoteza  $H_0$  da je serija prema normalnoj raspodeli na pragu značajnosti  $\alpha$ . U suprotnom, odbacuje se hipoteza  $H_0$  i usvaja se hipoteza  $H_1$  po kojoj serija nije po normalnoj raspodeli.

#### 3.3.2.2 PPCC test

PPCC test predstavlja statistički test kojim se ispituje da li vremenska serija pripada normalnoj ili nekoj drugoj raspodeli (Filliben, 1975). Ovaj test koristi koeficijent korelacije  $r$  između vremenske serije  $Q_i$  i korespondentnih kvantila  $M_j$ . Podrazumeva se da ukoliko koeficijent korelacije  $r$  ima vrednosti bliske 1 tada vremenska serija  $Q_i$  pripada razmatranjoj raspodeli (Heo i sar., 2008).

Koeficijent korelacije  $r$  između serije  $Q_i$  i  $M_i$  definiše se na sledeći način (Filliben, 1975):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (Q_i - \bar{Q})(M_i - \bar{M})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (Q_i - \bar{Q})^2 \sum_{i=1}^N (M_i - \bar{M})^2}}, \quad (3.16)$$

gde su  $\bar{Q}$  i  $\bar{M}$  srednje vrednosti vremenske serije  $Q_i$  i kvantila  $M_i$ , a  $N$  predstavlja dužinu vremenske serije. Kvantili  $M_i$  predstavljaju inverznu funkciju  $\Phi^{-1}$  normalne kumulativne raspodele (Filliben, 1975):

$$M_i = \Phi^{-1}(m_i) \quad (3.17)$$

za kompromisnu verovatnoću  $m_i$ . Kompromisna verovatnoća  $m_i$  definisana je kao:

$$\begin{aligned} m_i &= 1 - (0.5)^{1/N}, \quad i = 1; \\ m_i &= (i - 0.3175) / (N + 0.365), \quad i = 2, \dots, N - 1; \\ m_i &= (0.5)^{1/N}, \quad i = N. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ukoliko je  $r > r_\alpha(N)$  usvaja se nulta hipoteza  $H_0$  da vremenska serija pripada normalnoj raspodeli. U suprotnom se odbacuje hipoteza  $H_0$  i usvaja alternativna hipoteza  $H_1$  da vremenska serija ne pripada normalnoj raspodeli. Kritične vrednosti  $r_\alpha(N)$  definišu se na osnovu praga značajnosti  $\alpha$  i dužine vremenske serije  $N$  (Filliben, 1975).

### 3.3.3 Testiranje jednakosti srednjih vrednosti

Postojanje antropogenog faktora u slivu, kao što je izgradnja akumulacija ili uticaj prirodnih faktora, može da ima za posledicu modifikaciju prosečnih vrednosti vremenske serije u odnosu na prirodno stanje. Navedene pojave dovode do nehomogenosti vremenskih serija.

Suština testiranja jednakosti srednjih vrednosti sastoji se u ispitivanju da li dva uzorka obima  $n_1$  i  $n_2$  pripadaju istoj populaciji. Tako se testira hipoteza  $H_0$  po kojoj su srednje vrednosti uzoraka obima  $n_1$  i  $n_2$  približno jednake:

$$H_0: \bar{Q}_1 = \bar{Q}_2. \quad (3.19)$$

Za tu svrhu primenjena su dva testa, normalizovani  $Z$  test i Studentov  $t$ -test.

**3.3.3.1 Normalizovani Z test**

Pretpostavka je da je slučajno promenljiva  $Q$  normalno raspoređena i da su članovi serije međusobno nezavisni. Kriterijum testa je sledeća statistika (Prohaska i Ristić, 2003):

$$Z = \frac{\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2}{\sigma_{\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2}}, \quad (3.20)$$

gde je:

$$\sigma_{\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_{Q_1}^2}{n_1} + \frac{\sigma_{Q_2}^2}{n_2}}. \quad (3.21)$$

Pošto standardizovana promenljiva  $Z$  ima  $N(0,1)$  raspodelu, nulta hipoteza  $H_0$  se prihvata ukoliko je ispunjeno:

$$Z_{\alpha/2} < Z < Z_{1-\alpha/2}, \quad (3.22)$$

pri čemu  $\alpha$  predstavlja prag značajnosti. U suprotnom se odbacuje hipoteza  $H_0$  i prihvata alternativna hipoteza  $H_1$  da dva uzorka ne pripadaju istoj populaciji.

**3.3.3.2 Studentov t-test**

Studentovim testom uvodi se pretpostavka da slučajna promenljiva  $Q$  prati normalnu raspodelu i da su varijanse dva uzorka jednake ( $\sigma_{Q_1}^2 = \sigma_{Q_2}^2 = \sigma_Q^2$ ). Kriterijum za proveru homogenosti srednjih vrednosti je statistika (Hald, 1995):

$$t = \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2}{\sqrt{n_1 \cdot \sigma_{Q_1}^2 + n_2 \cdot \sigma_{Q_2}^2}}, \quad (3.23)$$

koja ima Studentovu raspodelu  $S_\nu(t)$  sa  $\nu = n_1 + n_2 - 2$  stepeni slobode.

Hipoteza  $H_0$  se prihvata na pragu značajnosti  $\alpha$  ako je ispunjeno:

$$t_{\alpha/2} < t < t_{1-\alpha/2}, \quad (3.24)$$

u suprotnom se odbacuje hipoteza  $H_0$  i usvaja hipoteza  $H_1$  da dva uzorka ne pripadaju istoj populaciji.

**3.3.4 Testiranje jednakosti varijansi Fisher testom**

Jednakost varijansi serija ispitana je korišćenjem Fisher testa u kome se pretpostavlja da su članovi serije nezavisni i da dva uzorka potiču iz iste populacije. Nulta hipoteza  $H_0$  pretpostavlja da su varijanse dva uzorka serije jednake:

$$H_0: \sigma_{Q1}^2 = \sigma_{Q0}^2. \quad (3.25)$$

Kriterijum za jednakost varijanse je statistika:

$$F = \frac{\sigma_{Q1}^2}{\sigma_{Q2}^2} \text{ pri čemu je ispunjeno } (\sigma_{Q1}^2 > \sigma_{Q2}^2). \quad (3.26)$$

Statistika  $F$  prati Fišerovu raspodelu sa  $v_1 = n_1 - 1$  i  $v_2 = n_2 - 1$  stepeni slobode. Hipoteza  $H_0$  se prihvata na pragu značajnosti  $\alpha$  ako je ispunjeno  $F < F_{1-\alpha}(v_1, v_2)$ , u suprotnom se odbacuje  $H_0$  i usvaja se hipoteza  $H_1$  da serija nije homogena po varijansi.

### 3.3.5 Testiranje jednakosti raspodela neparametarskim Wilcoxon testom

Wilcoxon test ispituje jednakost funkcije raspodele dva uzorka jedne serije. Ako dva uzorka obima  $n_1$  i  $n_2$  pripadaju istoj seriji postavlja se sledeća hipoteza:

$$H_0: F(Q_1) = F(Q_2). \quad (3.27)$$

Formira se zajednički niz obima  $n = n_1 + n_2$  uređen po rastućim vrednostima. Određuje se suma rangova  $u_1$  i  $u_2$  dva uzorka  $n_1$  i  $n_2$  iste populacije  $n$ .

Teorijski je pokazano da je kod homogenih vremenskih serija broj inverzija raspoređen po normalnom zakonu raspodele, pa tako srednja vrednost sume rangova  $\bar{u}$  i njeno srednje odstupanje  $\sigma_u^2$  može da se prikaže kao (Moore i McCabe, 2013):

$$\bar{u} = \frac{n_1 \cdot n_2}{2}, \quad (3.28)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{n_1 \cdot n_2}{12} (n_1 + n_2 + 1).$$

Na osnovu navedenih vrednosti računa se statistika testa:

$$Z = \frac{W - \bar{u}}{\sigma_u}, \quad (3.29)$$

pri čemu  $W$  predstavlja veću vrednost sumarnih rangova ( $u_1$  ili  $u_2$ ) dva uzorka jedne serije, dok  $Z$  ima normalnu raspodelu. Nulta hipoteza  $H_0$  po kojoj je serija homogena po funkciji raspodele se prihvata na pragu značajnosti  $\alpha$  ako je ispunjen uslov:

$$Z_{\alpha/2} < Z < Z_{1-\alpha/2}, \quad (3.30)$$

u suprotnom se odbacuje hipoteza  $H_0$  i usvaja hipoteza  $H_1$  da dva uzorka ne pripadaju istoj populaciji.

Wilcoxon test je ekvivalentan Mann-Whitney testu (Gibbons i Chakaborti, 2011). Mann-Whitney test je neparametarski i njime se utvrđuje jednakost medijane dva

uzorka, u ovom slučaju serija  $Q_1$  i  $Q_2$ . Između statistika navedenih testova postoji međusobna veza:

$$U = W + n_1(n_1 + 1)/2, \quad (3.31)$$

gde je  $U$  statistika testa Mann-Whitney, a  $W$  statistika testa Wilcoxon.

### 3.3.6 Asimptotska relativna efikasnost testiranja hipoteza

Testiranje jednakosti dva uzorka iste populacije sprovodi se korišćenjem više testova. Međutim, test statistike različitih testova mogu sugerisati međusobno različite zaključke. Iz tog razloga je bitno da se prilikom testiranja uzorka odabere odgovarajući test. U skladu sa tim neophodno je definisati kriterijum na osnovu koga se definiše efikasnost testa.

Pretpostavlja se da  $\{T_N\}$  i  $\{V_N\}$  predstavljaju dva skupa test statistika vremenske serije  $Q$  sa  $N$  osmatranja. Ovom prilikom oba testa se koriste za testiranje iste nulte hipoteze  $H_0$  protiv alternativne  $H_1$ . Neka su  $N_T(\alpha, \beta, \theta)$  i  $N_V(\alpha, \beta, \theta)$  minimalni obimi uzorka dva različita testa na pragu značajnosti  $\alpha$  sa skupom parametara  $\theta$  kako bi se postigla moć testa  $\beta$ . Kao kriterijum za poređenje dva testa sa test statistikama  $\{T_N\}$  i  $\{V_N\}$  koristi se relativna efikasnost koja se iskazuje kao (Obradović, 2015):

$$e_{V,T} = \frac{N_T(\alpha, \beta, \theta)}{N_V(\alpha, \beta, \theta)}. \quad (3.32)$$

Ukoliko je  $e_{V,T}$  manja od 1 zaključuje se da ukoliko se koristi test statistika  $\{T_N\}$  biće potreban manji uzorak za dostizanje odgovarajuće moći testa  $\beta$  nego u slučaju ako se koristi test statistika  $\{V_N\}$ .

Problem predstavlja to što je određivanje vrednosti  $e_{V,T}$  isuviše kompleksno. Iz tog razloga se donose zaključci u vezi kvaliteta testiranja na osnovu asimptotske relativne efikasnosti (ARE). U literaturi se sreću tri osnovna tipa ARE (Nikitin, 2011): Pitman, Bahadur i Hodges–Lehmann. Pitmanov tip ARE korišćen je kako bi se uporedila dva testa za ispitivanje homogenosti, test Wilcoxon i Studentov  $t$ -test. Na osnovu vrednosti ARE uzoraka koji pripadaju normalnoj raspodeli zaključuje se da veću efikasnost ima Studentov  $t$ -test u odnosu na test Wilcoxon (Nikitin, 2011). Stoga, prilikom donošenja zaključaka u vezi homogenosti vremenskih serija potrebno je voditi računa o efikasnosti korišćenih testova.

### 3.4 Dekompozicija hidroloških vremenskih serija

Dekompozicija godišnjih hidroloških vremenskih serija sastoji se u odvajanju determinističke, stohastičke i slučajne komponente u skladu sa izrazom (3.1). Deterministička komponenta sastoji se iz komponente trenda i makroperiodičnosti. Komponenta trenda predstavlja dugogodišnju tendenciju vremenske serije na dužem vremenskom segmentu. Ukoliko je trend značajan  $Q_T(t)$ , neophodno je odstraniti iz vremenske serije godišnjih proticaja kako bi se pristupilo daljoj analizi (Jevđević, 1984):

$$Q'(t) = Q(t) - Q_T(t), \quad (3.33)$$

gde je  $Q(t)$  vremenska serija godišnjeg proticaja, dok su  $Q'(t)$  reziduali godišnjih proticaja prve vrste  $Q'(t)$ . Koji će se parametarski trend koristiti zavisi od osmotrenih serija i ukupnog raspoloživog perioda osmatranja. Tradicionalan način modeliranja trenda hidroloških serija koristi pretpostavku o linearnosti trenda (Jevđević, 1984). Vizuelna provera razmatranih serija proticaja, godišnjih i logaritmovanih godišnjih proticaja, upućuje da je za modeliranje trenda potrebno koristiti linearni trend.

Reziduali  $Q'(t)$  sadrže ciklične komponente u domenu niskih i visokih frekvencija. Niske frekvencije predstavljaju harmonike sa velikim periodama oscilovanja koje utiču na smenu višegodišnje vodnosti u slivu. Skup značajnih niskofrekventnih harmonika konstituše makroperiodičnu komponentu. Makroperiodična komponenta  $Q_p(t)$  se procenjuje korišćenjem spektralne analize (Jevđević, 1984) koja je izložena u delu 3.6.1.

U narednom koraku od reziduala prve vrste  $Q'(t)$  potrebno je oduzeti ukupnu makroperiodičnu komponentu  $Q_p(t)$ :

$$Q''(t) = Q'(t) - Q_p(t). \quad (3.34)$$

Posle primene izraza (3.34) u rezidualima godišnjih proticaja druge vrste  $Q''(t)$  ostaje samo visoko frekventna komponenta. Ovaj deo vremenske serije se naziva stohastička komponenta  $Q_{STOCH}(t)$  koju karakteriše izražena autokorelisanost na nekoliko prvih pomaka. Za modeliranje stohastičke komponente koriste se stohastički linearni modeli koji su prikazani u delu 3.7.2.

Kada se sprovede modeliranje determinističkog i stohastičkog dela vremenske serije potrebno je odrediti prirodu slučajne komponente  $\varepsilon(t)$ :



$$\varepsilon(t) = Q''(t) - Q_{STOCH}(t). \quad (3.35)$$

Slučajna komponenta  $\varepsilon(t)$  prati normalnu raspodelu čije je matematičko očekivanje  $E(\varepsilon)=0$ , varijansa  $\sigma^2(\varepsilon)=\text{const}$  i kovarijansa  $C_\tau(\varepsilon)=0$  za  $\tau > 0$ . Na poslednjem koraku je potrebno ispitati normalnosti slučajne komponente  $\varepsilon(t)$  putem testova prikazanih u delu 3.3.2.

### 3.5 Trend

U analizi unutrašnje strukture vremenskih serija trend srednje godišnje vrednosti predstavlja bitnu osobinu. Hidrološki procesi često su u prirodi izloženi promenama prirodnog i antropogenog karaktera. Posmatrajući ove promene tokom vremena one se mogu manifestovati postepeno ili u vidu naglih promena. Iz tih razloga u okviru hidroloških serija često se nailazi na determinističke prelazne komponente serija koje se registruju u dva vida: linearni ili nelinearni trend i skok. Za analizu trenda u vremenskim serijama godišnjih proticaja koriste se parametarski i neparametarski testovi (Helsel i Hirsch, 2002). Bitna osobina trend testa predstavlja njihova efikasnost na osnovu čega se daje veće ili manje poverenje jednom ili drugom testu. Sheng i Pilon (2004) su poredili efikasnost Mann-Kendall testa i parametarskog linearnog testa na vremenskim serijama koji prate raspodele: Pearson 3, Gumbel, Extreme Value, Weibull. Zaključili su da je Mann-Kendal test efikasniji u poređenju sa parametarskim testom. Pored toga, Wang (2005) je poredili efikasnost parametarskih testova čiji su nagibi regresione prave ocenjeni korišćenjem metode minimalnih kvadrata i korišćenjem Theil-Sen estimatora. Zaključili su da je efikasnost Theil-Sen estimatora veća za vremenske serije po normalnoj raspodeli i serije sa dugačkim „repovima“.

#### 3.5.1 Neparametarsko testiranje trenda

##### 3.5.1.1 Mann-Kendall test

Mnoge analize trenda zasnovane su na dobro poznatom Mann-Kendall trend testu (Douglas i sar, 2000). Ovaj test je neparametarski, baziran je na rangiranju članova u vremenskoj seriji. Članovi vremenske serije rangiraju se na način da se svaki član vremenske serije upoređuje sa podacima koji slede u vremenu. Test statistika se računa na sledeći način (Kendall, 1962; Douglas i sar., 2000):

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{sign}(Q_i - Q_j), \quad (3.36)$$

gde je  $Q$  srednji godišnji proticaj na vremenskom koraku  $i$  i  $j$ ,  $sign(Q_i - Q_j)$  jednak je  $+1$  u slučaju kada je  $Q_i$  veće od  $Q_j$  i  $-1$  ako je suprotno. Ukoliko se pokaže da je  $S > 0$  tada u vremenskoj seriji postoji opadajući trend, za  $S < 0$  trend je rastući. Matematičko očekivanje i varijansa za test statistiku  $S$  su sledeći:

$$E(S) = 0, \quad (3.37)$$
$$Var(S) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{18} = \sigma^2.$$

Kada dođe do ponavljanja vrednosti u vremenskoj seriji tada se varijansa statistike testa koriguje na sledeći način:

$$Var(S) = \frac{n(n-1)(2n+5) - \sum_{i=1}^n t_i(i-1)(2i+5)}{18}, \quad (3.38)$$

gde  $t_i$  predstavlja broj grupa istih vrednosti u vremenskoj seriji. Ukoliko u vremenskoj seriji postoje dve iste vrednosti, tada je  $i=2$  i  $t_i=1$ .

Analiza trenda može da dovede do pogrešnog zaključka zbog nestacionarnosti vremenskih serija, odnosno zbog postojanja višegodišnjih vodnih i sušnih ciklusa u serijama. Iz tog razloga neophodno je za ocenu trenda uzeti nekoliko punih ciklusa vremenske serije kako bi trend bio pravilno ocenjen. Dodatni problem u detekciji trenda može da predstavlja zanemarivanje serijske korelacije, što dovodi da smanjenja broja podataka za ocenu trenda (Douglas i sar., 2000). Mann-Kendall test polazi od pretpostavke da su vremenske serije slučajne, međutim, u mnogim slučajevima se dešava da godišnje serije proticaja taj uslov ne ispunjavaju.

Kako bi se test Mann-Kendall primenio na vremenske serije sa autokorelacijom Khaliq i sar. (2009) prikazali su metode za odstranjivanje uticaja autokorelisanosti iz hidroloških vremenskih serija kao što su (1) *pre-whitening* metoda, (2) metoda korekcije varijanse test statistike i (3) *boot-strap* metoda (Yue i Pilon, 2004). Metoda *pre-whitening* podrazumeva da se iz vremenske serije otkloni deo koji je autokorelisan uz pretpostavku da su serije značajno autokorelisane na prvom koraku, pa se primenjuje AR(1) model (Yue i Wang, 2002). Međutim, upotreba *pre-whitening* metode u analizi trenda vremenske serije izazvala je oprečne stavove (Bayazit i Onoz, 2007). Ovim postupkom se smanjuje stvarna verovatnoća detekcije trenda kada je on izražen, a Bayazit i Onoz (2007) su pokazali da se *pre-whitening* može primeniti na vremenskim serijama osim u

slučaju kada su koeficijenti varijacije veoma veliki ili kada nagib trenda prekoračava zadanu granicu.

Za odstranjivanje uticaja serijske korelacije u ovom radu korišćen je pristup korekcije varijanse statistike testa  $S$ . Ovaj pristup podrazumeva da serija sa autokorelacijom sadrži  $N$  članova, a da je efektivan broj članova koji nisu međusobno korelisani manji od  $N$ . S tim u vezi, Hamed i Rao (1998) i Yue i Wang (2004), predložili su različite korekcije varijanse statistike  $S$  u testu Mann-Kendall:

$$Var^*(S) = CF \cdot Var(S),$$

$$\text{Hamed i Rao(1998): } CF_1 = 1 + \frac{2}{N(N-1)(N-2)} \sum_{\tau=1}^{N-1} (N-1)(N-1-\tau)(N-1-2)\rho_{\tau}^R, \quad (3.39)$$

$$\text{Yu i Vang(2004): } CF_2 = 1 + 2 \sum_{\tau=1}^{N-1} (1 - N/\tau)\rho_{\tau},$$

gde  $\rho_{\tau}$  predstavljaju vrednosti autokorelacione funkcije serije godišnjih proticaja  $Q$  za pomak  $\tau$ , a  $r_{\tau}^R$  definiše istu funkciju samo za seriju rangova iz izraza (3.36). Korekcija varijanse test statistike  $S$  primenjuje se za autoregresione procese prvog reda AR(1) ali i za autoregresione procese višeg reda (Khaliq i sar., 2009).

Za vremensku seriju godišnjih proticaja standardizovana promenljiva  $Z_s$  računa se kao:

$$Z_s = \begin{cases} \frac{S-1}{\sigma}, & S > 0 \\ \frac{S+1}{\sigma}, & S < 0 \\ 0, & S = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

pri čemu  $Z_s$  prati standardnu normalnu raspodelu (Kendall, 1962). Ukoliko je  $Z_s$  veće od 1.96, što odgovara pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ , usvaja se hipoteza  $H_0$  da postoji značajan trend u vremenskoj seriji godišnjih proticaja. U suprotnom, odbacuje se hipoteza  $H_0$  da je trend statistički značajan i usvaja alternativna hipoteza  $H_1$ .

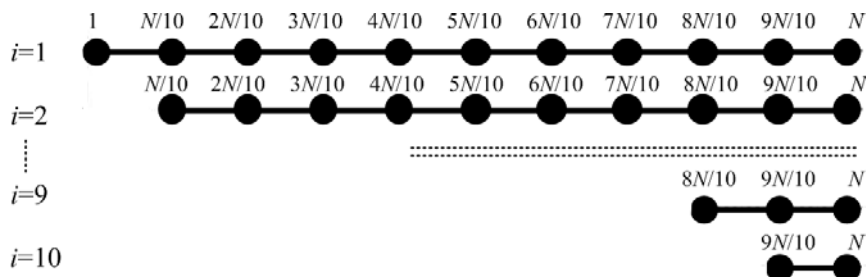
### 3.5.1.2 Multi-vremenska analiza trenda

Analize trenda sprovedene na hidrološkim vremenskim serijama podrazumevaju da se ocena trenda vrši korišćenjem podataka od prve do poslednje godine u vremenskoj seriji. Multi-vremenski pristup predstavlja alternativni način ocenjivanja trenda na nizu

podserija. Podserija predstavlja skup članova serije u jednom kontinualnom periodu različitih dužina.

Vizuelizaciju trenda vremenske serije kombinovanjem trendova podserija prvi su predstavili McCabe i Wolock (2002) koji su za ocenu trenda koristili Kendall-tau neparametarsku korelacionu statistiku. Ovakav pristup primenjen je u analizi trenda maksimalnih godišnjih proticaja u Nemačkoj (Petrow i sar., 2009) i Švajcarskoj (Schmocker-Fackel i Naef, 2010). Hannaford i sar. (2013) analizirali su serije srednjih godišnjih i maksimalnih proticaja putem multi-vremenskog pristupa, obuhvativši pritom veliki broj manjih slivova u Evropi. Grupisali su serije proticaja po slivovima i regionima, gde su u okviru svake grupe izvršili standardizaciju članova serije. Srednje standardizovane vrednosti proticaja uglašavali su metodom LOESS. Takvim pristupom pokazali su da na trend vremenske serije u velikoj meri utiču fluktuacije godišnjih proticaja. Za određivanje značajnosti trenda koristili su test Mann-Kendall.

Prateći iskustva iz literature (Hannaford i sar., 2013), u ovom radu trend godišnjih proticaja računat je za podserije dobijene kombinacijom različitih segmenata. Serija je podeljena na 10 jednakih segmenata, a u prvom koraku ( $i = 1$ ) podserije se formiraju počevši od prvog člana. Trend u proticajima računa se najpre za prvi segment, tj. segment od prvog člana do člana  $N/10$  (slika 3-3). Sukcesivno se nastavlja kombinovanje segmenata po sledećem redosledu: od 1 do  $2N/10$ , od 1 do  $3N/10$ , ..., i konačno od 1 do  $N$ . U drugom koraku ( $i = 2$ ) odbacuje se prvi segment do člana  $N/10$ , a zatim se nastavlja sukcesivno računanje trendova podserija: od  $N/10$  do  $2N/10$ , od  $N/10$  do  $3N/10$ , ..., i od  $N/10$  do  $N$ . Postupak se nastavlja do desetog koraka ( $i = 10$ ) kada preostaje poslednja podserija od  $9N/10$  do  $N$ . Na kraju se ocena trenda na segmentu podserija vrši korišćenjem testa Mann-Kendall.



Slika 3-3. Shema za računanje trenda vremenskih serija po multi-vremenskom pristupu

Primenom multi-vremenskog pristupa u analizu trenda se uvode dodatni parametri, kao što su dužina vremenske serije i položaj analiziranog segmenta vremenske serije unutar celog vremenskog raspona. Krajnji cilj ove analize je da pokaže da li na pravac i intenzitet trenda utiču periodične višegodišnje smene sušnih i vodnih ciklusa u slivu.

### 3.5.2 Parametarsko testiranje trenda

#### 3.5.2.1 Linearan trend

Za hidrološke vremenske serije obično se pretpostavlja da je trend u srednjoj vrednosti linearan i da se može definisati sledećom formulom:

$$Q_T(t) = \alpha + \beta \cdot t. \quad (3.41)$$

Na osnovu podataka osmatranja srednjih godišnjih vrednosti proticaja treba odrediti parametre regresione jednačine  $\alpha$  i  $\beta$ . Obično se raspolaže ograničenim brojem podataka, pa zbog toga dobijeni parametri  $\hat{\alpha}$  i  $\hat{\beta}$  predstavljaju ocenjenu vrednost i mogu dosta odstupati od stvarnih vrednosti. Računska vrednost  $Q_T(t)$ , koja se dobija korišćenjem ocenjenih parametara, predstavlja ocenjenu vrednost i obeležava se sa  $\hat{Q}_T(t)$ . Prema tome, jednačina regresije glasi:

$$\hat{Q}_T(t) = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \cdot t. \quad (3.42)$$

Ocena parametara  $\hat{\alpha}$  i  $\hat{\beta}$  u izrazu (3.42) vrši se po metodi najmanjih kvadrata.

Za sve razmatrane serije godišnjih proticaja izvršena je identifikacija linearnog trenda. Ocena statističke značajnosti identifikovanih trendova izvršena je pomoću testa koga su predložili Kendall i Stuart (1966). Varijansa ocene regresionog koeficijenta  $\hat{\beta}$  računa se kao:

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \frac{12}{N(N^2 - 1)} \sigma_\varepsilon^2 \approx \frac{12}{N^3} \sigma_\varepsilon^2, \quad (3.43)$$

gde je  $\sigma_\varepsilon^2$  varijansa reziduala serija godišnjih proticaja posle otklanjanja linearnog trenda. Pod pretpostavkom da je zakon raspodele ocene koeficijenata  $\hat{\beta}$  normalan, dobija se sledeći izraz za testiranje trenda na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$  (Kendall i Stuart, 1966):

$$|\hat{\beta}| > 1.96 \sqrt{\frac{12}{N^3} \sigma_\varepsilon^2}, \quad (3.44)$$

To praktično znači da ukoliko je  $\hat{\beta}$  manji od vrednosti iz izraza (3.44) tada se usvaja hipoteza  $H_0$  da je trend statistički bez značaja na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . U suprotnom, odbacuje se hipoteza  $H_0$  i usvaja alternativna  $H_0$  da je trend statistički značajan na zadatom pragu značajnosti.

### 3.5.2.2 Linearni trend sa pokretnim vremenskim prozorom

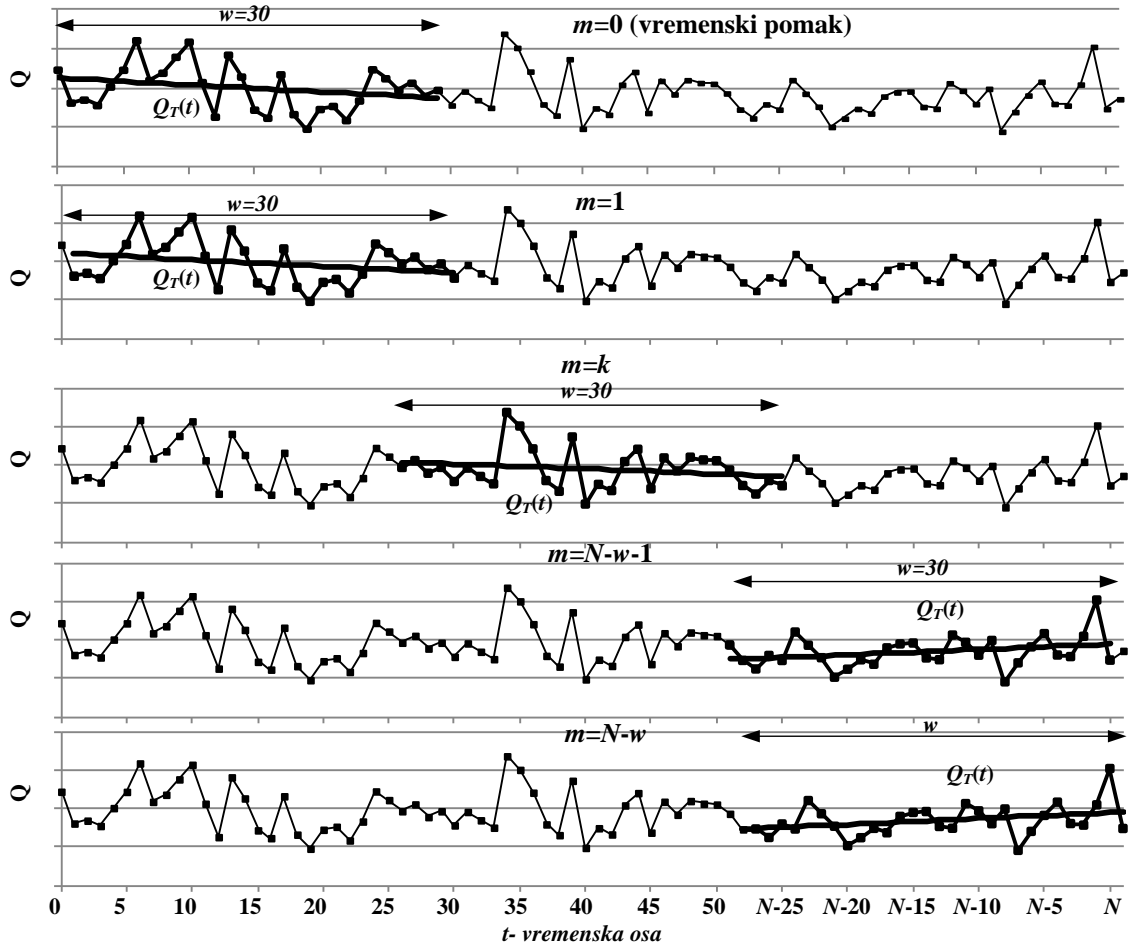
Prilikom standardne analize trenda, koja uzima u razmatranje celu dužinu vremenske serije, uticaj periodičnosti serije na pravac trenda nije moguće utvrditi. Trend godišnje serije proticaja se postepeno menja u skladu sa višegodišnjom smenom vlažnih i sušnih godina u slivu. U literaturi se sreće pristup u kome se pravac i nagib trenda ocenjuju u pokretnom vremenskom prozoru (Wilby, 2006; Hannaford i sar., 2013). Ovom prilikom su korišćeni neparametarski testovi za ocenu značajnosti trenda kao što su testovi Mann-Kendall i Theil-Sen.

U ovom radu parametri linearnog trenda  $\hat{\alpha}$  i  $\hat{\beta}$  ocenjeni su na segmentu pokretnog vremenskog prozora  $w$  prema uputstvima u delu 3.5.2.1. Širina vremenskog prozora od 30 godina izabrana je u skladu sa rezultatima analize periodičnosti iz literature i preporukama WMO, a obrazloženje je detaljno prikazano u delu 3.2. Linearni trend je određen u vremenskom prozoru  $w$  na prvom pomaku  $m=1$  počev od vremenskog koraka  $t=1$  do koraka  $t=w$ . Na narednom pomaku  $m=2$  vremenski prozor se pomerio za jedan korak napred ka poziciji do  $t=w+1$ . Pokretni vremenski prozor  $w$  se sukcesivno pomera po jednu poziciju napred do poslednjeg člana vremenske serije  $t=N$ . Tada se vremenski prozor nalazi na poziciji od  $t=N-w$  do  $t=N$ . U nastavku je na slici 3-4 prikazana ilustracija određivanja linearnog trenda  $Q_{T_w}(t)$  sa pokretnim vremenskim prozorom  $w$ .

Rezultujući trend  $Q_{T_w}(t)$  vremenske serije proticaja na svakom vremenskom koraku  $t$  se određuje kao funkcija linearnog trenda u vremenskom prozoru  $w$  za različite vremenske pomake  $m$ . Tačnije,  $Q_{T_w}(t)$  se ocenjuje na polovini funkcije raspodele:

$$P(\hat{Q}_T \leq \hat{Q}_{T_w}) \geq 0.5 \wedge P(\hat{Q}_T \geq \hat{Q}_{T_w}) \leq 0.5, \quad (3.45)$$

pri čemu  $\hat{Q}_{T_w}$  predstavlja medijanu serije trenda  $\hat{Q}_T$  na vremenskom koraku  $t$  za različite vremenske pomake  $m$ . Procedura određivanja  $\hat{Q}_{T_w}$  prikazana je na slici 3-5.



Slika 3-4. Ilustracija metode linearnog trenda  $Q_{Tw}$  sa pokretnim vremenskim prozorom  $w$ :  $Q_T$  - linearni trend,  $m$ -vremenski pomak,  $t$ -vremenska osa,  $N$ -ukupan broj članova serije  $Q$

$t/m$	$t=1$	$t=2$	...	$t=w-1$	$t=w$	$t=k$
$m=1$	$\hat{Q}_T^{1,1} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \cdot 1$	$\hat{Q}_T^{1,2} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \cdot 2$	...	$\hat{Q}_T^{1,w-1} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \cdot (w-1)$	$\hat{Q}_T^{1,w} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 \cdot w$	
$m=2$		$\hat{Q}_T^{2,2} = \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \cdot 2$	...	$\hat{Q}_T^{2,w-1} = \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \cdot (w-2)$	$\hat{Q}_T^{2,w} = \hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 \cdot (w-1)$	
...	...	...	...	...	...	...
$m=N-w-1$			...			...
$m=N-w$			...			...
$\hat{Q}_{Tw}$	$\hat{Q}_T^{1,1}$	$Med(\hat{Q}_T^{1,2}, \hat{Q}_T^{1,2})$	...	$Med(\hat{Q}_T^{1,w-1}, \hat{Q}_T^{2,w-1}, \dots, \hat{Q}_T^{w,w-1})$	$Med(\hat{Q}_T^{1,w}, \hat{Q}_T^{2,w}, \dots, \hat{Q}_T^{w,w})$	$Med(\hat{Q}_T^{1,k}, \hat{Q}_T^{2,k}, \dots, \hat{Q}_T^{w,k})$

$t/m$	$t=k$	$t=N-1$	$t=N$
$m=1$			
$m=2$			
...	...	...	...
$m=N-w-1$		$\hat{Q}_T^{N-w-1, N-1} = \hat{\alpha}_{N-w-1} + \hat{\beta}_{N-w-1} \cdot (N-1)$	
$m=N-w$		$\hat{Q}_T^{N-w, N-1} = \hat{\alpha}_{N-w} + \hat{\beta}_{N-w} \cdot (N-1)$	$\hat{Q}_T^{N-w, N} = \hat{\alpha}_{N-w} + \hat{\beta}_{N-w} \cdot N$
$\hat{Q}_{Tw}$	$Med(\hat{Q}_T^{1,k}, \hat{Q}_T^{2,k}, \dots, \hat{Q}_T^{w,k})$	$Med(\hat{Q}_T^{N-w-1, N-1}, \hat{Q}_T^{N-w, N-1})$	$\hat{Q}_T^{N-w, N}$

Slika 3-5. Procedura za određivanje linearnog trenda  $Q_{Tw}$  sa pokretnim vremenskim prozorom  $w$ :  $m$ -vremenski pomak,  $t$ -vremenski korak,  $\hat{\alpha}$  i  $\hat{\beta}$  -ocenjeni parametri linearnog trenda,  $N$ -ukupan broj članova serije  $Q$

### 3.6 Periodična komponenta

Neposredni uzročnici hidroloških pojava, kao što su atmosferska cirkulacija i Sunčevo zračenje, imaju posledicu na samu prirodu hidrološkog procesa. Poznato je da su atmosferski procesi, a pogotovo Sunčevo zračenje, ciklični (poglavlje 1.1). Ovo neminovno navodi na zaključak da i njihova posledica, hidrološki proces, mora u sebi kriti cikličnu komponentu. Za analizu periodičnosti vremenskih serija koristi se spektralna (harmonijska) analiza.

#### 3.6.1 Diskretni spektar

Kao pogodno sredstvo za analizu periodičnosti hidroloških vremenskih serija u ovom radu izabrana je harmonijska analiza, a u okviru nje diskretna Furijeova transformacija kojom se određuje diskretni spektar ili često korišćen naziv u hidrološkoj praksi – periodogram (Jevđević, 1972).

Za definisanje periodičnosti vremenskih serija neophodno je isključiti trend  $Q_T(t)$  u srednjoj vrednosti vremenske serije  $Q(t)$ . U skladu sa formulom (3.33) formiraju se reziduali prve vrste  $Q'(t)$ .

Harmonijska analiza polazi od činjenice da se razmatrani reziduali  $Q'(t)$  vremenske serije  $Q(t)$  mogu razložiti na niz konačnih ili beskonačnih suma trigonometrijskih funkcija sledećeg tipa:

$$Q'(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \theta_i) \quad (3.46)$$

gde je  $t$  vremenski korak,  $f_i$  je frekvencija,  $A_i$  je amplituda i  $\theta_i$  predstavlja fazno pomeranje.

Periodična komponenta vremenske serije modelira se na sledeći način:

$$Q'(t) = \sum_{i=1}^q (a_i \sin(2\pi f_i t) + b_i \cos(2\pi f_i t)), \quad (3.47)$$

gde su  $a_i$  i  $b_i$  Furijeovi koeficijenti, dok je  $q$  broj harmonika. Navedeni koeficijenti se određuju prema izrazima (Jevđević, 1972):

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f_i \cos(2\pi f_i t), \\ b_i &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} f_i \sin(2\pi f_i t), \end{aligned} \quad (3.48)$$



gde je  $t$  vremenski korak,  $f_i$  je frekvencija i  $N$  ukupan broj članova vremenske serije.

Funkcija periodograma sastoji se iz  $i=1,2,\dots,(N-1)/2$  diskretnih vrednosti ukoliko je  $N$  neparan broj. Za paran broj članova vremenske serije  $N$  funkcija periodograma se sastoji od  $i=1,2,\dots, N/2$  diskretnih vrednosti. Periodičnost se određuje na tačno definisanim frekvencijama (Jevđević, 1972):

$$f_i = i/N \quad (3.49)$$

pri čemu je  $f_i$  frekvencija  $i$ -te periode,  $i$  predstavlja redni broj periode ( $i=1,2,\dots, q$ ) dok  $q$  odgovara ukupnom broju diskretnih vrednosti za paran i neparan broj članova ( $N$ ) vremenske serije.

Intenzitet periodičnosti ili periodogram računa se kao:

$$I(f_i) = \frac{N}{2} (a_i^2 + b_i^2); \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (3.50)$$

Pošto se sinusni i kosinusni talasi, koji imaju amplitude  $a_i$  i  $b_i$ , superponiraju u jedinstveni talas potrebno je sračunati rezultujuću amplitudu:

$$c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}. \quad (3.51)$$

Periodična komponenta može da se predstavi i preko kosinusnog talasa sa superponirajućom amplitudom ( $c_i$ ) i faznim pomeranjem ( $\theta_i$ ) (Hrelja i Mulamerović, 2012):

$$Q(t) = \sum_{i=1}^q c_i \cos(2\pi f_i t + \theta_i), \quad (3.52)$$

pri čemu je  $c_i^2 = a_i^2 + b_i^2$  i  $\theta_i = \arctg(-b_i / a_i)$ .

### 3.6.1.1 Uglašavanje vremenskih serija

Da bi se izvršila bolja procena periodičnosti hidroloških vremenskih serija, u skladu sa zaključcima koje su izneli Bartlett (1963) i Daniell (1946), potrebno je izvršiti uglašavanje vremenskih serija. Na taj način, iz vremenske serije odstranjuje se stohastička i slučajna komponenta, a ostaje primarna višegodišnja makroperiodičnost (Stojković i sar., 2013).

Za glačanje serija srednje godišnjeg proticaja izabrana je u ovom radu LOESS (*locally weighted smoothing scatter plots*) metoda (Loader, 1999). Ova metoda se sprovodi

polinomnom regresijom koja koristi metodu najmanjih kvadrata na segmentu sa ograničenim brojem tačaka (na vremenskom prozoru), pri čemu se različitim težinama daje veći značaj bližim tačkama nego udaljenim.

Parametar LOESS metode je širina vremenskog prozora uglačavanja koji sadrži članove skupa:

$$[Q(t - (nw - 1) / 2), Q(t + (nw - 1) / 2)] \quad (3.53)$$

gde je  $nw$  širina prozora glačanja,  $Q$  vremenska serija godišnjih proticaja i  $t$  vremenski korak. Ukoliko je širina vremenskog prozora  $nw$  veća tada je glačanje vremenske serije  $Q$  intenzivnije, kao i obrnuto.

U okviru vremenskog prozora uglačavanja  $nw$  zadaju se težine  $w_i$  svakoj nezavisnoj promenljivoj  $Q$  (Loader, 1999):

$$w_i = W \left[ \frac{Q_i - Q}{d(Q)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, nw, \quad (3.54)$$

gde je  $W$  funkcija uglačavanja,  $w_i$  su lokalne težine članova serije pri čemu je  $0 \leq w_i \leq 1$ ,  $Q$  je vrednost člana za koji se traži uglačana težina,  $Q_i$  je susedni član serije definisan korakom  $i=1, 2, \dots, nw$ , i  $d(Q)$  je rastojanje po apscisi (po vremenu) članova serije  $Q_i$  od člana koji se uglačava  $Q$ . Težine imaju karakteristiku da članovi niza koji su bliži članu  $Q$  imaju veće težine, dok članovi koji su van vremenskog prozora uglačavanja imaju težinu 0.

U ovom radu su težine  $w_i$  određene korišćenjem funkcija uglačavanja  $W$  trećeg stepena (Loader, 1999):

$$w_i = W [d(Q)] = \left[ 1 - \left| \frac{Q - Q_i}{d(Q)} \right|^3 \right]^3, \quad i = 1, 2, \dots, nw. \quad (3.55)$$

### 3.6.1.2 Izbor optimalnog koraka uglačavanja vremenskih serija

Izbor optimalnog koraka uglačavanja vremenskih serija definiše se preko serija reziduala  $\varepsilon_t$ , tj. razlike serija godišnjeg proticaja i uglačanih serija korišćenjem regresionog modela LOESS:

$$\varepsilon(t) = Q(t) - \mu(Q_t), \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (3.56)$$

gde je  $Q(t)$  serija godišnjeg proticaja, a  $\mu(Q_t)$  modelirana serija godišnjeg proticaja metodom LOESS.

Povećanjem broja članova u vremenskom prozoru  $nw$  postiže se veći stepen izolovanja reziduala iz uglačane serije, ali se u isto vreme, smanjuje učešće uglačane serije u varijansi osnovne serije. Smanjenje vremenskog prozora uglačavanja  $nw$  za posledicu ima zaostajanje stohastičke komponente u okviru uglačane serije, a ujedno se povećava varijansa uglačane serije.

Ova dva suprotstavljena kriterijuma rešavaju se korišćenjem optimizacione tehnike DPU (dobrota prilagođavanja uglačavanja) koja je korišćena u ovom radu:

$$\begin{aligned} \text{DPU}(nw) &= \frac{1}{N} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^N (\mu(Q_t) - \bar{\mu})^2} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^N (Q_t - \mu(Q_t))^2} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^N (\mu(Q_t) - \bar{\mu})^2} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^N \varepsilon_t^2} \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (3.57)$$

Veličine u formuli (3.57) su sledeće:  $Q(t)$  je vrednost godišnjeg proticaja,  $\mu(Q_t)$  je vrednost uglačane serije,  $\bar{\mu}$  je srednja vrednost serije  $\mu(Q_t)$ ,  $\varepsilon_t$  su reziduali uglačavanja i  $N$  je broj članova vremenske serije. Optimalna širina prozora glačanja  $nw$  određuje se na osnovu maksimalne vrednosti funkcije  $\text{DPU}(nw)$ .

### 3.6.1.3 Značajnost perioda

Kako bi se definisale značajne periode vremenske serije godišnjih proticaja potrebno je uporediti intenzitet periodičnosti na svakoj frekvenciji u odnosu na ukupnu periodičnost vremenske serije. Za tu svrhu u ovom radu primenjen je Fisherov test (Jevđević, 1972). Fisherov test koristi odnos dela varijanse kojeg objašnjava najveća perioda ( $c_1^2/2$ ) i ukupnu varijansu serije  $\text{Var}(Q)$ , koja predstavlja statistiku testa:

$$g_1 = \frac{c_1^2}{2\text{Var}(Q)}. \quad (3.58)$$

Verovatnoća  $p_f$  da je kritična vrednost statistike testa  $g_{cr}$  prekoračena određuje se sledećim izrazom (Jevđević, 1972):

$$p_f = N(1 - g_{cr})^{q-1} - \frac{q(q-1)}{2}(1 - 2g_{cr})^{q-1} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{q!}{k!(q-k)!} (1 - kg_{cr})^{q-1}, \quad (3.59)$$

gde je  $N$  ukupan broj članova vremenske serije godišnjih proticaja  $Q$ ,  $g_{cr}$  je kritična vrednost test statistike, a broj  $k$  predstavlja najveću celobrojnu vrednost  $1/g_{cr}$ .

Kritična vrednost statistike testa  $g_{cr}$  određuje se korišćenjem prvog dela prethodnog izraza, zanemarujući ostale članove (Jevđević, 1972):

$$g_{cr} = 1 - \left( \frac{p_f}{N} \right)^{\frac{1}{N-1}}, \quad (3.60)$$

pri čemu se usvaja da je verovatnoća prekoračenja kritične vrednosti statistike testa  $p_f=0.05$ .

Ukoliko se pokaže da je najveća perioda  $c_1$  statistički značajna, određuje se statistika testa za sledeću periodu  $c_2$ :

$$g_2 = \frac{c_1^2}{2\text{Var}(Q) - c_1^2}. \quad (3.61)$$

Za testiranje  $i$ -te periode, počevši redom od najveće ka najmanjoj, vrednost  $2 \cdot \text{Var}(Q)$  treba umanjiti za vrednost sume kvadrata prethodnih amplituda:

$$g_i = \frac{c_i^2}{2 \cdot \text{Var}(Q) - \sum_{i=1}^{i-1} c_i^2}. \quad (3.62)$$

Veličina  $g_i$  iz prethodnog izraza predstavlja test statistiku za  $i$ -tu periodu.

Periodičnost vremenskih serija je u ovom radu testirana i putem relativnog testa periodičnosti. Relativni kumulativni periodogram (RKP) definiše učešće u varijansi dela vremenske serije godišnjih proticaja koju objašnjava prvih  $h$  harmonika u odnosu na ukupnu periodičnost serije (Jevđević, 1972):

$$RKP = \frac{100 \cdot \sum_{i=1}^h \frac{c_i^2}{2}}{\sum_{i=1}^q \frac{c_i^2}{2}}, \quad h = 1, \dots, q \quad (3.63)$$

pri čemu je  $c_i$  amplituda  $i$ -te harmonike, a  $q$  je ukupan broj harmonika.

RKP je primenjen sa namerom da se zadrži učešće u varijansi serije godišnjih proticaja koje objašnjavaju niske frekvencije. Kako bi se odredile značajne periode neophodno je definisati nivoe značajnosti perioda (NZP) na relativnom kumulativnom periodogramu. U radu je usvojen NZP u iznosu od 95%.

### 3.6.2 Neprekidni spektar – metoda Blackman-Tukey

Neprekidni spektar daje odgovor na pitanje kakav je karakter promene intenziteta periodičnosti vremenske serije pri kontinualnim vrednostima frekvence  $f$ . Značaj ovog pitanja je ogroman, pošto je u praksi pri definisanju periodičnih komponenti razmatranog slučajnog procesa veoma teško *a priori* odrediti njihove periode, odnosno učestalosti.

Veličina  $S(f)$  predstavlja spektar koji je analogan intenzitetu periodograma  $I(f)$  u formuli (3.50). Spektar se može koristiti za otkrivanje i ocenu sinusoidnih komponenti nepoznatih frekvenci. U poređenju sa periodogramom, spektar je pogodniji za praktičnu primenu, pošto je u mogućnosti da otkrije sve komponente bilo koje vrednosti frekvence, odnosno periodičnosti.

Spektralna funkcija  $S(f)$  se ocenjuje na sledeći način (Jevđević, 1972):

$$S(f) = 2 \left[ C(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{N-1} C(\tau) \cos(2\pi\tau f) \right]; \quad 0 \leq f \leq 0.5, \quad (3.64)$$

gde  $C(\tau)$  predstavlja kovarijansnu funkciju na vremenskom pomaku  $\tau$ ,  $f$  predstavlja vrednost date frekvencije dok je  $N$  ukupan broj članova vremenske serije. Iz formule (3.64) vidi se da spektar nije ništa drugo nego Furijeova transformacija kovarijansne funkcije  $C(\tau)$ .

Bartlett (1963) i Daniell (1946) su pokazali da je potrebno korigovati spektar dobijen po izrazu (3.64), tj. korigovati vrednosti kovarijansne funkcije  $C(\tau)$  da bi se on lakše interpretirao. Da bi se ocenio spektar  $S(f)$  srednjih godišnjih proticaja u ovom radu korišćena je metoda *B-T* (Blackman i Turkey, 1959). Po ovoj metodi potrebno je ponderisati kovarijansnu funkciju  $C(\tau)$  za određen broj koraka, pri čemu se ne uzima u proračun svih  $N-1$  vremenskih pomaka  $\tau$ , već se koriste samo prve, tj. veće vrednosti kovarijansne funkcije ( $M$  vrednosti), što je prikazano sledećim izrazom (Jevđević, 1972):

$$\bar{S}(f) = 2 \left[ C(0) + 2 \sum_{\tau=1}^M \lambda(\tau-1) C(\tau) \cos(2\pi f \tau) \right], \quad 0 \leq f \leq 0.5 \quad (3.65)$$

pri čemu  $\lambda(\tau)$  predstavlja težinski koeficijent kovarijansne funkcije, dok  $M(<N)$  predstavlja dužinu skraćene kovarijansne funkcije ( $\tau=1,2,\dots,M$ ). Vrednost koeficijenta  $\lambda(\tau)$  računa se na sledeći način:

$$\lambda(\tau) = 0.5 \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi\tau}{M}\right) \right), \quad \tau = 0, \dots, M \quad (3.66)$$

Kada se definiše dužina  $M$ , formira se Blackman-Tukey prozor. Na osnovu izraza (3.66) zaključuje se da  $\lambda(\tau)$  ima vrednosti od 1 na nultom pomaku ( $\tau = 0$ ), do 0 na poslednjem pomaku širine prozora  $\tau = M$ , a da prosečna vrednost težinskog koeficijenta iznosi 0.5.

Testiranje saglasnosti gustine spektra iz izraza (3.65), vrši se pomoću  $\chi^2$  raspodele. Broj stepeni slobode definisan je kao  $\nu = 2.67 N/M$ . Intervali poverenja spektra definišu se na sledeći način:

$$\left[ \frac{\nu \bar{S}(f)}{\chi_{\alpha/2}}, \frac{\nu \bar{S}(f)}{\chi_{1-\alpha/2}} \right]. \quad (3.67)$$

Širina spektra  $bw$  predstavlja opseg u domenu frekvencija u kome se ocenjuju vrednosti spektralne funkcije. Korišćenjem veličina  $bw$  određuje se optimalna vrednost  $M$  prema kojoj se skraćuje kovarijansna funkcija. Za Blackman-Tukey prozor data je povezanost širine spektra  $bw$  i dužine  $M$  (Chatfield, 2004):

$$bw = 8\pi / (3M). \quad (3.68)$$

Prema izrazu (3.68), dužina skraćene kovarijansne funkcije  $M$  treba da se poveća da bi širina spektra  $bw$  bila što manja, da bi se bolje uočile osobine spektra. Generalna preporuka za usvajanje vrednosti  $M$  je da ona treba da se nađe u intervalu  $(1/20)N < M < (1/3)N$ .

### 3.6.3 Test zaostale periodičnosti

Kada se iz reziduala prve vrste  $Q'(t)$  ukloni makroperiodična komponenta, koja se modelira primenom izraza (3.47), postavlja se pitanje da li tada reziduali druge vrste  $Q''(t)$  sadrže zaostalu periodičnost. Stepen preostale periodičnosti unutar vremenske serije  $Q''(t)$  ispituje se primenom testa zaostale periodičnosti (Jevđević, 1972).

Ovaj test podrazumeva da se periodičnost ispituje korišćenjem normalizovanog kumulativnog periodograma (NKP) tako što se na njemu nanosi prava linija koja spaja tačku  $(0,0)$  i  $(h,1)$ , gde  $h$  definiše ukupan broj harmonika. NKP se dobija sumiranjem intenziteta periodičnosti počevši od najmanje do najveće frekvencije, a ne od najmanjeg do najvećeg intenziteta periodičnosti, kao što to je slučaj sa relativnim kumulativnim periodogramom RKP (poglavlje 3.6.1.3). Ukoliko vremenska serija sadrži značajnu

periodičnost, odstupanje od prave linije biće veliko zbog pojave velikih amplituda na visokim frekvencijama.

Postavlja se hipoteza  $H_0$  da vremenska serija predstavlja slučajnu seriju, a alternativna hipoteza  $H_1$  je da vremenska serija nije slučajna i da u sebi sadrži zaostalu cikličnost. Ovom prilikom se koristi prag značajnosti  $\alpha=0.05$ .

Intervali poverenja formiraju se oko granične teorijske linije korišćenjem Kolmogorov-Smirnov statistike (Jevđević, 1972). U zavisnosti od izabranog praga značajnosti  $\alpha$ , intervali poverenja formiraju se na rastojanju od  $\pm K_\alpha / \sqrt{N'}$  od teorijske prave linije, pri čemu je  $N'=(N-2)/2$  za parne vrednosti dužine serije  $N$  dok je za neparne  $N'=(N-1)/2$ . Vrednosti za  $K_\alpha$  u zavisnosti od praga poverenja prikazani su u tabeli 3-1 (Jevđević, 1972).

**Tabela 3-1. Kritične vrednosti Smirnov-Kolmogorov statistike  $K_\alpha$  za različite pragove značajnosti  $\alpha$  (Jevđević, 1972)**

$\alpha$	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25
$K_\alpha$	1.63	1.36	1.22	1.07	1.02

Testiranje hipoteze  $H_0$  vrši se grafičkim putem korišćenjem intervala poverenja formiranih na osnovu Smirnov-Kolmogorov statistike iz tabele 3-1. Iskakanje od intervala poverenja na NKP-u upućuje da je potrebno odbaciti hipotezu  $H_0$  i usvojiti alternativnu  $H_1$  na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ .

### 3.6.4 Hurstov fenomen

Pedesetih godina prošlog veka Hurst (Hurst, 1951) je u svojoj studiji dugogodišnjih vodnih zaliha reke Nil istražio specijalno ponašanje drugih geofizičkih vremenskih serija. On je do tog otkrića došao primenom jedinstvene analize, koja se nadovezuje na analizu periodičnosti. Njegovo otkriće je poznato kao Hurstov fenomen. Taj fenomen baziran je na tendenciji da se sušne godine grupišu u okviru dužeg sušnog perioda, kao i da se vodne godine grupišu u dugogodišnji period sa više vode. Vremenska serija za koju je Hurstov fenomen karakterističan naziva se Hurstov proces ili Hurst-Kolmogorov proces (Tyrallis i Koutsoyiannis, 2010).

Formula koja opisuje Hurstov fenomen je sledeća:

$$R / S = (N / 2)^h, \quad (3.69)$$

gde  $R$  predstavlja kumulativno odstupanje od aritmetičke sredine vremenske serije,  $S$  predstavlja standardnu devijaciju iste serije ( $S=\sigma$ ), dok je dužina serije prikazana sa  $N$ . Koeficijent  $h$  označava Hurstov koeficijent. Hurst je u svojim istraživanjima na reci Nil utvrdio da je taj koeficijent  $h=0.73$  (Hurst, 1951). Tendencija da Hurstov koeficijent bude veći od 0.5 zapravo predstavlja Hurstov fenomen koji je karakterističan za serije sa dugom memorijom.

Pokazano je da ukoliko je  $h=0.5$  da se tada radi o vremenskoj seriji bez memorije koja se naziva *slučajni koraci* (*random walk*) (Salas i sar., 1988). Manje vrednosti Hurstovog koeficijenta  $h<0.5$  predstavljaju serije sa kratkom memorijom (*short memory*). Ukoliko serije imaju ovakvu karakteristiku onda se modeliraju korišćenjem autoregresionih modela (poglavlje 3.7.2). Autokorelaciona funkcija ovih modela na prvim koracima naglo opada, za razliku od procesa sa dugom memorijom (*long memory*), koji pokazuju blago opadanje ove funkcije. Veća vrednost Hurstovog koeficijenta od 0.5 upućuje na to da je za modeliranje neophodno korišćenje modela sa dugom memorijom. U tu svrhu koriste se modeli zasnovani na izrazu (3.47) čiji se elementi dobijaju korišćenjem Furijeove transformacije.

Procena Hurstovog koeficijenta može da se izvrši korišćenjem više metoda (Blasco i sar., 1996): (1)  $R/S$  analizom, (2) regresionim periodogramom i (3) fluktuacionom analizom sa isključivanjem trenda iz vremenske serije. U radu je korišćena široko rasprostranjena  $R/S$  analiza koja se zasniva na korišćenju različitog vremenskog intervala ( $i$ ) serije za definisanje odnosa  $(R/S)_i$ . Ova analiza je predstavljena u narednim koracima (Voss, 2013):

- Potrebno je definisati vremenski interval u kome se vrši procena odnosa  $(R/S)_i$ . Prvo se analizira cela vremenska serija ( $t=1, \dots, N$ ). U narednom koraku serija se deli na dva dela i formiraju se dve podserije ( $t_1=1, \dots, N/2$ ;  $t_2=N/2+1, \dots, N$ ). Nastavlja se takvim redom, serija se deli na 4, 6, 8 delova.
- Za svaku podseriju neophodno je naći srednju vrednost  $\bar{Q}$  i standardnu devijaciju  $S$ :



$$\bar{Q} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Q_t, \quad (3.70)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Q_t - \bar{Q})^2},$$

gde je  $Q$  srednji godišnji proticaj, a  $n$  broj članova serije na podintervalu.

- Potrebno je napraviti seriju odstupanja od srednje vrednosti  $Y_t$  za svaku podseriju:

$$Y_t = Q_t - \bar{Q} \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (3.71)$$

- Na osnovu serije odstupanja  $Y_t$  potrebno je za svaku podseriju formirati kumulativnu seriju  $Y_t^{cum}$ :

$$Y_t^{cum} = \sum_{t=1}^n Y_t, \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad (3.72)$$

- Za svaku podseriju kumulativnih razlika ( $Y_t^{cum}$ ) potrebno je odrediti apsolutno najveće odstupanje  $R$ :

$$R = \max(Y_t^{cum}) - \min(Y_t^{cum}). \quad (3.73)$$

Kada je poznato maksimalno odstupanje potrebno je odrediti odnos  $(R/S)_i$ , a za podserije ovaj odnos se određuje kao srednja vrednost na svakom vremenskom podintervalu. Zatim se logaritmuje izraz (3.69) koji se transformiše u sledeći oblik:

$$\log(R/S)_i = \log(c) + h \log(n), \quad (3.74)$$

gde  $n$  predstavlja broj članova serije na podintervalu, a  $c$  je konstanta koja je dobijena logaritmovanjem početne formule.

### 3.7 Stohastička komponenta

Kada se iz hidrološke vremenske serije godišnjih proticaja  $Q(t)$  ukloni ukupna deterministička komponenta  $Q_{DET}(t)$ , tada se u skladu sa formulom (3.34) formiraju reziduali druge vrste  $Q''(t)$ . Osobine reziduala druge vrste ispituju se u ovom radu primenom autokorelacione analize stacionarnih procesa. Ovom analizom se utvrđuje međusobna povezanost ili autokorelaciona svojstva vrednosti vremenske serije između različitih vremenskih preseka. Cilj ove analize je da se utvrdi *obrazac* (pravilo) po kome se reziduali druge vrste realizuju tokom vremena. Na osnovu zapažene zakonomernosti potrebno je odabrati odgovarajući autoregresioni model kojim se modelira ponašanje reziduala druge vrste  $Q''(t)$ .

### 3.7.1 Autokorelaciona analiza stacionarnih procesa

#### 3.7.1.1 Srednja vrednost i varijansa

Stacionarni stohastički proces  $x(t)$  je baziran na pretpostavci da se njegove osobine ne menjaju tokom vremena, odnosno da je raspodela procesa  $p(x)$  ista za sve vremenske korake  $t$ . Na osnovu ove osobine stohastički proces  $x(t)$  ima konstantnu srednju vrednost  $\mu$  koja se definiše na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\mu = E(x_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x_t) dx. \quad (3.75)$$

Varijansa stohastičkog procesa  $x(t)$  je konstantna vrednost koje se određuje kao:

$$\text{Var}(x_t) = \sigma^2(x_t) = E[(x_t - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_t - \mu)^2 \cdot p(x_t) dx. \quad (3.76)$$

Ukoliko se stohastički proces  $x(t)$  sastoji iz vrednosti  $x_1, x_2, \dots, x_N$  srednja vrednost i varijansa ovog procesa ocenjuju se kao (Box i sar., 2008):

$$\bar{x} = \mu = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x(t), \quad (3.77)$$

$$\hat{\text{Var}}(x_t) = \hat{\sigma}^2(x_t) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x(t) - \bar{x})^2. \quad (3.78)$$

#### 3.7.1.2 Autokorelaciona funkcija

Za razliku od klasične teorije verovatnoće, koja istražuje zakone raspodele slučajnih veličina ne vodeći računa o redosledu pojave slučajnih veličina u vremenu, autokorelaciona teorija slučajnih procesa istražuje zakonitosti promena slučajnih veličina u zavisnosti od vremenskog redosleda pojavljivanja.

Uvodi se pretpostavka da stacionaran stohastički proces  $x(t)$  ima identičnu verovatnoću  $p(x_t, x_{t+\tau})$  za vremenske korake  $t$  i  $t+\tau$ . Na osnovu toga sledi da kovarijansna funkcija između vrednosti  $t$  i  $t+\tau$ , odvojena vremenskim intervalom  $\tau$ , mora biti ista za svako  $t$ . Kovarijansna funkcija se naziva i autokovarijansa na koraku  $\tau$  i definiše se na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$C_\tau = \text{cov}(x_t, x_{t+\tau}) = E[(x_t - \mu)(x_{t+\tau} - \mu)]. \quad (3.79)$$

Autokorelaciona funkcija (ACF) na koraku  $\tau$  se određuje kao (Box i sar., 2008):

$$\rho_\tau = \frac{E[(x_t - \mu)(x_{t+\tau} - \mu)]}{\sqrt{E[(x_t - \mu)^2] E[(x_{t+\tau} - \mu)^2]}} = \frac{E[(x_t - \mu)(x_{t+\tau} - \mu)]}{\sigma_x^2}, \quad (3.80)$$

pri čemu je za stacionarne procese varijansa  $\text{Var}(x_t) = \sigma_x^2$  konstantna za svako  $\tau$ .

Procena vrednosti autokorelacione funkcije za stacionarni stohastički proces sa članovima serije  $x_1, x_2, \dots, x_N$  na pomaku  $\tau$  određuje se na osnovu izraza (Box i sar., 2008):

$$\hat{\rho}_\tau = \frac{\hat{C}_\tau}{\hat{\sigma}_x^2}, \quad (3.81)$$

pri čemu se vrednost kovarijansne funkcije  $C_\tau$  na pomaku  $\tau$  određuje kao:

$$\hat{C}_\tau = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} (x(t) - \bar{x})(x(t+\tau) - \bar{x}) \quad \tau = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.82)$$

Bitno je naglasiti da je funkcija  $\rho_\tau$  simetrična oko  $\tau=0$ , pa se iz tog razloga koristi pozitivna polovina funkcije od  $\tau=0$  do  $\tau=N-1$  koja se ujedno naziva korelogram (Box i sar., 2008).

Kako bi se utvrdilo da li vrednosti autokorelacione funkcije na razmatranom pomaku  $\tau$  značajno odstupaju od standardne greške prilikom ocenjivanja datih funkcija u ovom radu koristi se Bartlett test. U ovu svrhu, varijansa vrednosti autokorelacionog koeficijenta za stacionarne procese po normalnoj raspodeli iskazuje se na pomaku  $\tau$  kao (Bartlett, 1946):

$$\text{var}(\rho_\tau) \approx \frac{1}{N} \sum_{v=-\infty}^{+\infty} (\rho_v^2 + \rho_{v+\tau}\rho_{v-\tau} - 4\rho_\tau\rho_v\rho_{v-\tau} + 2\rho_v^2\rho_\tau^2). \quad (3.83)$$

Za procese za koje važi da je  $\rho_\tau = 0$  za  $v > q$ , tada su svi članovi izraza (3.83) jednaki nuli izuzev prvog člana za vremenski pomak  $\tau > q$ . Varijansa autokorelacione funkcije na pomaku  $\tau$  koji je veći od  $q$  je sledeća (Bartlett, 1946):

$$\text{var}(\rho_\tau) \approx \frac{1}{N} \left( 1 + 2 \sum_{v=1}^q \rho_v^2 \right). \quad (3.84)$$

Ukoliko su vrednosti autokorelacione funkcije približno po normalnoj raspodeli tada se mogu definisati intervali poverenja na osnovu kojih se utvrđuje na kojim pomacima je autokorelacija značajna. Intervali poverenja se određuju na osnovu varijanse autokorelacione funkcije iz izraza (3.84) na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\left[ -z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left( 1 + 2 \sum_{v=1}^q \hat{\rho}_v^2 \right)}; +z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left( 1 + 2 \sum_{v=1}^q \hat{\rho}_v^2 \right)} \right], \quad (3.85)$$

pri čemu se vrednosti  $\rho_\tau$  procenjuju na osnovu uzorka.

Ukoliko je autokorelaciona funkcija na svim pomacima jednaka nuli sa izuzetkom pomaka  $\tau=0$ , za takav proces se kaže da je u užem smislu slučajan, odnosno da su svi članovi te serije nezavisni jedan od drugog. Određivanje intervala poverenja autokorelacione funkcije za jedan slučajan proces se pojednostavljuje (Box i sar., 2008):

$$\left[ -z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{N}}; +z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \right]. \quad (3.86)$$

Ukoliko se vrednost autokorelacione funkcije  $\rho_\tau$  na vremenskom pomaku  $\tau$  nalazi unutar intervala poverenja koji su definisani izrazom (3.85) usvaja se hipoteza  $H_0$  da je  $\rho_\tau$  jednako nula na pragu poverenja značajnosti  $\alpha$ . U suprotnom se odbacuje hipoteza  $H_0$  i usvaja alternativna hipoteza  $H_1$  da postoji značajna autokorelisanost na vremenskom pomaku  $\tau$ .

### 3.7.1.3 Parcijalna autokorelaciona funkcija

Pored autokorelacione funkcije prilikom analize stohastičkih procesa koristi se parcijalna autokorelaciona funkcija (PACF) koja se označava sa  $\phi_{kk}$ . Analogno višeparametarskoj regresionoj analizi gde parcijalni regresioni koeficijent definiše uticaj jedne nezavisne promenljive na zavisnu promenljivu, tako i funkcija  $\phi_{kk}$  definiše stepen autokorelacije stacionarnog stohastičkog procesa u preseccima  $x_t$  i  $x_{t+\tau}$  pri čemu ne uzima u obzir vremenske pomake između datog vremenskog preseka.

Funkcija  $\phi_{kk}$  za autoregresioni proces reda  $k$  određuje se na osnovu sistema jednačina (Box i sar., 2008):

$$\rho_t = \phi_{k1}\rho_{t-1} + \dots + \phi_{k(k-1)}\rho_{t-k+1} + \phi_{kk}\rho_{t-k} \quad t = 1, 2, \dots, k; \quad (3.87)$$

ili iskazana u matricnoj formi pomoću Yule-Walker sistema jednačina (Box i sar., 2008):

$$\mathbf{P}_k \cdot \boldsymbol{\phi}_{kk} = \boldsymbol{\rho}_k, \quad (3.88)$$

pri čemu  $\mathbf{P}_k$  predstavlja autokorelacionu matricu.

Vrednosti parcijalne autokorelacione funkcije  $\phi_{kk}$  za stacionaran stohastički proces sa članovima serije  $x_1, x_2, \dots, x_N$  se procenjuju rešavanjem sistema jednačina:

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{kk} = \hat{\boldsymbol{\rho}}_k \cdot \hat{\mathbf{P}}_k^{-1}. \quad (3.89)$$

Kada se izvrši ocena vrednosti parcijalne autokorelacione funkcije potrebno je odrediti njene značajne vrednosti. U tu svrhu iskorišćena je pretpostavka da autoregresioni

proces reda  $p$  ima koeficijente parcijalne autokorelacije koji su međusobno nezavisni i pripadaju normalnoj raspodeli za red autoregresionog operatora  $p+1, p+2, \dots$  (Quenouille, 1949). Iz ovog proizilazi da varijansa koeficijenata parcijalne autokorelacije za vremenske pomake veće ili jednake od  $p+1$  iznosi (Box i sar., 2008):

$$\text{var}(\rho_\tau) \approx \frac{1}{N} \quad \tau \geq p+1. \quad (3.90)$$

Izraz (3.90) se koristi kako bi se odredili intervali poverenja parcijalne autokorelacione funkcije (Box i sar., 2008):

$$\left[ -z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{N}}; +z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \right]. \quad (3.91)$$

Ukoliko se vrednost parcijalne autokorelacione funkcije  $\phi_{kk}$  na vremenskom pomaku  $\tau$  nalazi unutar intervala poverenja tada se usvaja hipoteza  $H_0$  da vrednost funkcije  $\phi_{kk}$  na datom pomaku nije značajna na pragu poverenja poverenja  $\alpha$ . U suprotnom se odbacuje hipoteza  $H_0$  i usvaja alternativna hipoteza  $H_1$  da postoji značajna parcijalna autokorelisanost na vremenskom pomaku  $\tau$ .

### 3.7.2 Linearni stacionarni autoregresioni modeli

Za modeliranje reziduala godišnjih proticaja druge vrste  $Q''(t)$  koriste se linearni stacionarni autoregresioni modeli tipa AR, MA, ARMA i ARIMA. Autoregresioni modeli (AR) se uspešno primenjuju za modeliranje hidroloških procesa sa malim varijacijama u vremenskoj seriji (Salas i sar., 1988). Za vremenske serije u kojima je prisutna slučajna komponenta češće se koriste objedinjeni ARMA modeli, tj. autoregresioni modeli (AR) kojima su dodati modeli pokretnih sredina (MA modeli). U slučaju izraženog slučajnog karaktera vremenske serije koriste se MA modeli. Za prikazivanje nestacionarnih procesa koriste se ARIMA modeli.

U ovom radu je izvršena standardizacija reziduala druge vrste  $Q''(t)$  na način da su reziduali transformisani u seriju  $x_t$  koju karakteriše matematičko očekivanje  $E(x_t)=0$  i  $\text{Var}(x_t)=1$ . Transformacija je sprovedena na sledeći način (Salas i sar., 1988):

$$x_t = \frac{Q''(t) - \bar{Q}''}{\sigma_{Q''}}, \quad (3.92)$$

gde  $\sigma_Q$  i  $\bar{Q}$  predstavljaju standardno odstupanje i srednju vrednost reziduala druge vrste  $Q''(t)$ . Potrebno je napomenuti da je srednja vrednost reziduala  $\bar{Q}$  približno jednaka nuli.

### 3.7.2.1 Definicija modela

#### Model linearnog filtra

Stohastički linearni modeli bazirani su na ideji da se vremenska serija  $x(t)$  u kojoj su članovi serije međusobno zavisni može smatrati kao serija generisana iz serije nezavisnih impulsa  $(a_t)$  (Box i sar., 2008). Ti impulsi su slučajne veličine dobijene obično iz normalne raspodele sa matematičkim očekivanjem  $E(a_t)=0$ , konstantnom varijansom  $\text{Var}(a_t)=\sigma_a^2$  i kovarijansnom funkcijom  $C_\tau=0$  za vremenske pomake  $\tau>0$ . Niz slučajnih promenljivih  $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$  naziva se beli šum.

Korišćenjem linearnog filtra vremenska serija  $x_t$  može se predstaviti kao ponderisana suma prethodnih događaja iz slučajne serije  $a_t$  (Box i sar., 2008):

$$x_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \quad (3.93)$$

Težinski koeficijenti  $\psi_t$  koji transformišu slučajni niz  $a_t$  u seriju  $x_t$  nazivaju se transfer funkcija. Koeficijenti  $\psi_1, \psi_2, \dots$  mogu biti konačni i beskonačni. Ukoliko su konačni ili beskonačni i u isto vreme apsolutno sumabilni tada je linearni filter stabilan, a proces  $x(t)$  stacionaran.

Linearni filter iz izraza (3.93) može da se prikaže korišćenjem vremenskog operatora  $B$  na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots, \quad (3.94)$$

gde se  $B$  definiše kao  $x_t B^j = x_{t-j}$ .

#### AR model

Linearni autoregresioni modeli AR predstavljaju linearnu ponderisanu sumu konačnog broja prethodnih vrednosti stohastičkog procesa  $x(t)$  (Box i sar., 2008):

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + a_t. \quad (3.95)$$

U izrazu (3.95) nalaze se sledeće veličine:  $x_t$  vrednost stacionarne vremenske serije osmotrene u trenutku  $t$ ,  $\varepsilon_t$  je slučajna promenljiva dok su  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  autoregresioni koeficijenti.

Autoregresioni model može da se predstavi korišćenjem vremenskog operatora  $B$ , gde se autoregresioni proces definiše na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3 - \dots - \phi_p B^p, \quad (3.96)$$

ili u skraćenom obliku:

$$\phi(B)x_t = a_t. \quad (3.97)$$

Autoregresioni model sastoji se iz  $p+2$  nepoznatih parametara  $\mu$ ,  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \sigma_a^2$  koji se određuju iz podataka. U slučaju razmatrane vremenske serije iz izraza (3.92) srednja vrednost iznosi  $\mu=0$ .

Autoregresioni proces iz izraza (3.97) može da se predstavi u formi modela linearnog filtera na sledeći način:

$$x_t = a_t \phi^{-1}(B) = a_t \psi(B), \quad (3.98)$$

gde  $\psi$  predstavlja težinske koeficijente modela linearnog filtera iz izraza (3.93).

Autoregresioni model može biti stacionaran i nestacionaran. Za stacionarne procese autoregresioni koeficijenti  $\phi_1, \phi_2, \dots$  moraju biti takvi da težine linearnog filtera  $\psi_1, \psi_2, \dots$  u izrazu  $\phi^{-1}(B) = \psi(B)$  formiraju konvergentnu seriju (Box i sar., 2008). Neophodan uslov za stacionarnost  $AR(p)$  procesa je da se regresioni operator iz izraza (3.96) razmatra kao polinom  $B$  stepena  $p$  čije se vrednosti određuju rešavanjem karakteristične jednačine  $\phi(B)=0$ . Sva rešenja polinoma za  $\phi(B)=0$  moraju biti u apsolutnoj vrednosti veća od 1, što podrazumeva da rešenja leže izvan jediničnog kruga. Invertibilnost  $AR(p)$  modela se ne ispituje već se podrazumeva (Box i sar., 2008).

Rešenja karakteristične jednačine  $\phi(B)=0$  mogu biti realna i kompleksna. U slučaju realnih rešenja neophodno je da ona po apsolutnoj vrednosti budu veća od 1. Za kompleksna rešenja utvrđuje se modul kompleksnog broja  $C(B)$  pri čemu sve apsolutne vrednosti modula moraju biti veći od 1.

### MA model

Druga vrsta modela koji imaju veliku primenu u reprezentovanju osmotrenih vremenskih serija su modeli pokretnih sredina. Proces koji se iskazuje izrazom (Box i sar., 2008):

$$x_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q}, \quad (3.99)$$

naziva se proces pokretnih sredina reda  $q$  ili  $MA(q)$  proces gde  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  predstavljaju koeficijente pokretnih sredina.

Ukoliko se izraz (3.99) predstavi korišćenjem vremenskog operatora  $B$  tada se izraz transformiše na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3 - \dots - \theta_q B^q, \quad (3.100)$$

ili u skraćenom obliku:

$$x_t = a_t \theta(B). \quad (3.101)$$

$MA(q)$  model ima ukupno  $q+2$  parametra  $\mu, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$  koji se određuju na osnovu osmotrenih vremenskih serija. Kao i u slučaju  $AR(p)$  modela srednja vrednost razmatranog stohastičkog procesa iznosi  $\mu=0$ .

Invertibilnost  $MA(q)$  modela ispituje se tako što se odrede rešenja karakteristične jednačine polinoma  $B$  (Box i sar., 2008):

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \theta_3 B^3 - \dots - \theta_q B^q = 0. \quad (3.102)$$

Neophodan uslov za invertibilnost  $MA(q)$  procesa jeste da sva rešenja polinoma  $B$  za  $\theta(B)=0$  moraju biti u apsolutnoj vrednosti veća od 1. To podrazumeva da se rešenja jednačine (3.102) nalaze izvan jediničnog kruga. Stacionarnost se ne ispituje već se podrazumeva da je  $MA(q)$  proces stacionaran (Box i sar., 2008).

### ARMA model

Kako bi se postigla veća fleksibilnost prilikom predstavljanja vremenske serije linearnim stohastičkim modelom potrebno je uključiti autoregresioni model  $AR(p)$ , kao i model pokretnih sredina  $MA(q)$ . Na ovaj način formira se autoregresioni model pokretnih sredina  $ARMA(p, q)$  koji se iskazuje izrazom (Box i sar., 2008):

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q}, \quad (3.103)$$

ili u formi:

$$\phi(B)x_t = \theta(B)a_t. \quad (3.104)$$

Razmatrani model ima ukupno  $p+q+2$  parametra  $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$  koji se određuju korišćenjem osmotrenih vremenskih serija. Stacionarnost i invertibilnost  $ARMA(p, q)$  procesa se utvrđuje tako što se zasebno utvrđuje stacionarnost autoregresionog procesa i invertibilnost procesa pokretnih sredina.



**ARIMA model**

Osmotrene vremenske serije koje se prezentuju korišćenjem linearnih stohastičkih modela su često nestacionarne. Kako bi serije postale stacionarne potrebno je formirati njihove priraštaje. Obično se stacionarnost zadovoljava formiranjem priraštaja prvog ( $d=1$ ) i drugog ( $d=2$ ) reda (Box i sar., 2008). Nestacionarne vremenske serije predstavljaju autoregresione integrisane procese pokretnih sredina ili ARIMA ( $p, d, q$ ) procese. Vremenska serija se predstavlja korišćenjem ARIMA ( $p, d, q$ ) modela na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\nabla x_t = \phi_1 \nabla x_{t-1} + \phi_2 \nabla x_{t-2} + \dots + \phi_p \nabla x_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q}, \quad (3.105)$$

gde je  $\nabla x_t = (1-B)^d x_t$ . U slučaju kada je  $d=0$  tada se ARIMA ( $p, d, q$ ) model transformiše u autoregresioni model pokretnih sredina ARMA ( $p, q$ ).

Model iz izraza (3.105) se skraćeno zapisuje kao:

$$\phi(B)w_t = \theta(B)a_t. \quad (3.106)$$

Model ARIMA ima ukupno  $p+q+3$  parametra  $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, d, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \sigma_a^2$  koji se određuju korišćenjem podataka osmatranja. Stacionarnost i invertibilnost ARIMA procesa se utvrđuje na isti način kao i kod ARMA modela.

**3.7.2.2 Identifikacija modela**

Identifikacija stacionarnih autoregresionih modela predstavlja proceduru koja se primenjuje nad vremenskim serijama sa ciljem definisanja reda ARIMA modela ( $p, d$  i  $q$ ). Procedura identifikacije sastoji se u formiranju priraštaja vremenske serije prvog, drugog do  $d$ -tog reda sa ciljem ostvarivanja neophodne stacionarnosti (Box i sar., 2008). Kada se postigne stacionarnost priraštaja vremenske serije i odredi red  $d$  ARIMA modela, tada se određuju vrednosti ACF i PACF priraštaja vremenskih serija (Box i sar., 2008). Na osnovu vrednosti navedenih funkcija određuje se red  $p$  i  $q$  autoregresionog operatora i operatora pokretne sredine. Za identifikaciju autoregresionih modela potrebno je analizirati ACF i PACF do pomaka  $\tau=N/4$ , gde je  $N$  dužina vremenske serije (Box i sar., 2008).

Na osnovu oblika ACF i PACF funkcije može se utvrditi red  $p$  i  $q$  autoregresionog operatora i operatora pokretne sredine (Box i sar., 2008). Tako za autoregresione procese važi da ukoliko postepeno opadanje ACF funkcije započinje na vremenskom pomaku  $p$  tada se vrednosti PACF funkcije posle pomaka  $p$  naglo smanjuju i iznose

nula. Suprotno od ovoga, za procese pokretnih sredina važi da ACF funkcija naglo opada i izjednačava sa nulom na pomaku  $q$  dok PACF funkcija počinje polako da opada na pomacima posle  $q$ . Ukoliko ACF i PACF počinju da polako opadaju tada se za razmatrane vremenske serije koriste ARMA modeli.

Prilikom identifikacije stacionarnog stohastičkog modela za predstavljanje reziduala godišnjih proticaja druge vrste  $Q''(t)$  nije potrebno formirati priraštaje vremenske serije kako bi se postigla potrebna stacionarnost. Razlog predstavlja to da su prilikom formiranja reziduala odstranjeni delovi serije koje predstavljaju nestacionarnu komponentu kao što su linearni trend i višegodišnji ciklusi. Reziduali druge vrste  $Q''(t)$  predstavljaju stacionarnu komponentu pa je red priraštaja vremenske serije  $d=0$ .

Za analizu ACF i PACF funkcija vremenske serije  $Q''(t)$  značajna su iskustva vezana za modeliranje stacionarnih hidroloških serija izneta u knjizi Salasa i sar. (1980). Karakteristična svojstva ACF i PACF funkcije stacionarnih serija za izbor reda  $p$  i  $q$  autoregresionog operatora i operatora pokretne sredine prikazana su u tabeli 3-2.

**Tabela 3-2 Identifikacija ARMA modela na osnovu oblika ACF i PACF (Salas i sar., 1980)**

Modeli	ACF funkcija	PACF funkcija
AR( $p$ )	Funkcija je eksponencijalna ili talasna tokom svih pomaka, pri čemu na manjim pomacima istupa iz intervala poverenja.	Uočava se skok/pad u vrednosti funkcije od prvog do $p$ -tog pomaka posle čega funkcija nema značajne vrednosti.
MA( $q$ )	Funkcija ima skok do pomaka $q$ posle koga njene vrednosti nisu značajne.	Tokom svih pomaka funkcija ima oblik prigušene eksponencijalne ili talasne funkcije sa blagim opadanjem.
ARMA ( $p,q$ )	Na pomaku od 1 do $p/q$ funkcija pokazuje odstupanje od intervala poverenja, posle čega dobija oblik prigušene eksponencijalne ili talasne funkcije.	Na pomacima do $p/q$ ima značajne vrednosti posle čega postaje prigušena eksponencijalna funkcija.

### 3.7.2.3 Estimacija parametara modela

#### Autoregresioni parametri

Kako bi se ocenili autoregresioni koeficijenti  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  potrebno je iskoristiti njihovu vezu sa koeficijentima autokorelacije  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  koja se predstavlja kao (Box i sar., 2008):

$$\rho_\tau = \phi_1 \rho_{\tau-1} + \phi_2 \rho_{\tau-2} + \dots + \phi_p \rho_{\tau-p}, \quad \tau = 1, 2, \dots, p. \quad (3.107)$$

Kada se u prethodni izraz uvrste vrednosti koeficijenta autokorelacije  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  za vremenske pomake  $\tau=1, 2, \dots, p$  dobija se sledeći sistem jednačina (Box i sar., 2008):

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \phi_3 \rho_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-1}, \\
 \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \phi_3 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-2}, \\
 &\dots \\
 \rho_p &= \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \phi_3 \rho_{p-3} + \dots + \phi_p,
 \end{aligned}
 \tag{3.108}$$

koji je poznat kao Yule-Walker sistem jednačina. Jednačine daju direktnu zavisnost između autokorelacione funkcije i parametara AR( $p$ ) modela. Drugim rečima, kada se iz vremenske serije odredi autokorelaciona funkcija, korišćenjem Yule-Walker jednačina, određuju se parametri autoregresionog modela  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ .

Yule-Walker jednačine iz izraza (3.108) mogu se napisati u matričnom obliku:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\rho}_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix},
 \tag{3.109}$$

pri čemu se rešenje sistema jednačina predstavlja kao (Box i sar., 2008):

$$\hat{\phi} = \hat{\mathbf{P}}_p^{-1} \cdot \hat{\mathbf{\rho}}_p,
 \tag{3.110}$$

gde su  $\rho_\tau$  ( $\tau=1,2,\dots, p$ ) koeficijenti autokorelacije, dok  $\mathbf{P}_p$  predstavlja autokorelacionu matricu. Navedeni koeficijenti se ocenjuju na osnovu osmotrene vremenske serije  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Za AR( $p$ ) proces potrebno je utvrditi vrednost varijanse slučajne serije  $\hat{\sigma}_a^2$ . Ocena varijanse slučajne serije sprovodi se na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\hat{\sigma}_a^2 = \hat{C}(\tau=0) \left( 1 - \hat{\phi}_1 \hat{\rho}_{\tau-1} - \hat{\phi}_2 \hat{\rho}_{\tau-2} - \dots - \hat{\phi}_p \hat{\rho}_{\tau-p} \right)
 \tag{3.111}$$

gde je  $\hat{C}_\tau$  ocenjena kovarijansa serije iz uzorka na pomaku  $\tau=0$ .

Ukoliko se pretpostavi da vremenska serija  $x(t)$  predstavlja AR(1) ili AR(2) proces tada se rešavanjem Yule-Walker jednačina (3.110) ocenjuju autoregresioni koeficijenti koji za AR(1) proces iznosi  $\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1$ , dok se za AR(2) proces određuje kao:

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_{21} &= \frac{\hat{\rho}_1(1 - \hat{\rho}_2)}{1 - \hat{\rho}_1^2}, \\
 \hat{\phi}_{22} &= \frac{\hat{\rho}_2 - \rho_1^2}{1 - \hat{\rho}_1^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.112}$$

Potrebno je napomenuti da se koeficijenti autokorelacije  $\hat{\rho}_1$  procenjuju na osnovu uzorka.

Ocenjeni autoregresioni koeficijenti AR(1) i AR(2) procesa treba da zadovolje uslove stacionarnosti koja je za AR(1) proces ispunjena kada je  $|\hat{\phi}_{11}| < 1$ . Za AR(2) proces uslov stacionarnosti se definiše na sledeći način:

$$(\hat{\phi}_{21} + \hat{\phi}_{22}) < 1, (\hat{\phi}_{21} - \hat{\phi}_{22}) < 1, |\hat{\phi}_{22}| < 1. \quad (3.113)$$

### Parametri pokretnih sredina

Koeficijenti modela pokretnih sredina  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  ocenjuju se na osnovu veze sa koeficijentima autokorelacije  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$  koja se definiše izrazom (Box i sar., 2008):

$$\rho_\tau = \begin{cases} \frac{-\theta_\tau + \theta_1\theta_{\tau+1} + \dots + \theta_{q-\tau}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \tau = 1, 2, \dots, q; \\ 0 & \tau > q, \end{cases} \quad (3.114)$$

gde se vidi da je autokorelaciona funkcija MA( $q$ ) procesa nula za vrednosti veće od vremenskog pomaka  $\tau > q$ . Na osnovu izraza (3.114) ocenjuju se parametri MA( $q$ ) modela iz  $q$  nelinearnih jednačina sa  $q$  nepoznatih pri čemu je potrebno uvrstiti koeficijente autokorelacije koji su ocenjeni iz osmotrene vremenske serije  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Na osnovu ocenjivanja parametara MA( $q$ ) modela  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  potrebno je utvrditi vrednost varijanse slučajne serije  $\sigma_a^2$ . Ocena varijanse slučajne serije  $\hat{\sigma}_a^2$  sprovodi se na osnovu izraza (Box i sar., 2008):

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{\hat{C}(\tau=0)}{(\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_2^2 + \dots + \hat{\theta}_q^2)} \quad (3.115)$$

gde je  $\hat{C}_\tau$  ocenjena kovarijansa serije na pomaku  $\tau=0$  dobijena na osnovu uzorka.

Ukoliko se pretpostavi da vremenska serija  $x(t)$  predstavlja MA(1) proces tada se na osnovu izraza (3.114) određuje koeficijent modela pokretnih sredina rešavanjem jednačine:

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \rightarrow \theta_1^2 + \frac{1}{\rho_1}\theta_1 + 1 = 0. \quad (3.116)$$

Rešenja prethodne jednačine su sledeća:

$$\hat{\theta}_{1,1} = -\frac{1}{2\hat{\rho}_1} + \left[ \left( \frac{1}{2\hat{\rho}_1} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}; \quad \hat{\theta}_{1,2} = -\frac{1}{2\hat{\rho}_1} - \left[ \left( \frac{1}{2\hat{\rho}_1} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad (3.117)$$

pri čemu se bira ono rešenje koje zadovoljava uslove invertibilnosti, što je u razmatranom slučaju za MA(1) proces ispunjeno kada je  $|\hat{\theta}_1| < 1$ .

Parametri modela MA(2) dobijaju se na osnovu vrednosti autokorelacione funkcije na prvom i drugom pomaku korišćenjem sledećih jednačina:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{[-\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_2)]}{(1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2)}, \quad (3.118)$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{-\hat{\theta}_2}{(1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2)}.$$

Jednačine (3.118) su nelinearne pa je za ocenu koeficijenata  $\hat{\theta}_1$  i  $\hat{\theta}_2$  potrebno koristiti interaktivne numeričke metode kao što je metoda Newton-Raphson. Invertibilnost MA(2) procesa je zadovoljena ukoliko ocenjeni parametri pokretnih sredina ispunjavaju uslove sledećih jednačina :

$$(\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2) < 1, \quad (\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) < 1, \quad |\hat{\theta}_2| < 1. \quad (3.119)$$

#### 3.7.2.4 Izbor modela

Izbor linearnog stohastičkog modela zavisi od greške modeliranja  $\varepsilon_t$ . Pomoću greške modeliranja definiše se kriterijumska funkcija AIC (*Akaike's Information Criterion*) na osnovu koje se vrši izbor modela kojim se predstavlja stohastički proces  $x(t)$ .

Ukoliko se pretpostavi da vremenska serija  $x(t)$  predstavlja jedan ARMA ( $p, q$ ) proces tada se ocenjena greška modela iskazuje kao (Box i sar., 2008):

$$\hat{\varepsilon}_t = x_t - \hat{\phi}_1 x_{t-1} - \hat{\phi}_2 x_{t-2} - \dots - \hat{\phi}_p x_{t-p} + \hat{\theta}_1 a_{t-1} + \hat{\theta}_2 a_{t-2} + \dots + \hat{\theta}_q a_{t-q}. \quad (3.120)$$

Zatim se varijansa greške modela  $\varepsilon_t$  ocenjuje na osnovu sume kvadrata greške:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{\varepsilon}_t)^2. \quad (3.121)$$

Kriterijumska funkcija AIC se ocenjuje na sledeći način (Akaike, 1974):

$$AIC(p, q) = N \ln [\hat{\sigma}_\varepsilon^2] + 2(p + q) = N \ln \left[ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{\varepsilon}_t)^2 \right] + 2(p + q + 1), \quad (3.122)$$

pri čemu prvi član korespondira logaritmovanoj varijansi greške modela, dok drugi član zavisi od broja parametara ARMA modela. Za potencijalni skup linearnih stohastičkih modela potrebno je oceniti kriterijumsku funkciju AIC. Minimalna vrednost kriterijumske funkcije AIC definiše najbolje prilagođavanje ARMA modela stohastičkom procesu  $x(t)$ .

### 3.7.2.5 Verifikacija modela

Posle izbora najboljeg modela potrebno je izvršiti verifikaciju modela. Verifikacija, kao i u slučaju izbora modela, vrši se pomoću ocenjene greške modela  $\hat{\varepsilon}_t$ . U idealnom slučaju greška modela predstavlja beli šum ukoliko ispunjava uslove da je njeno matematičko očekivanje  $E(\varepsilon_t)=0$ , da ima konstantnu varijansu  $\sigma_\varepsilon^2=\text{const}$  i da je kovarijansna funkcija  $C_\tau=0$  za  $\tau>0$ . Ukoliko greška modela  $\varepsilon_t$  ispunjava navedene uslove i podleže normalnoj raspodeli onda se ona naziva Gausov šum.

Najbitnija osobina greške modela je da ne sadrži skrivenu cikličnost i da nije autokorelisana, tj. da su članovi serije  $\varepsilon_t$  međusobno nezavisni događaji. Ispitivanje osobina greške modela  $\varepsilon_t$  vrši se u tri pravca: (1) korišćenjem normalizovanog kumulativnog periodograma (NKP) (poglavlje 3.6.3); (2) ispitivanjem autokorelacione funkcije (ACF) (poglavlje 3.7.1.2); (3) korišćenjem Portemanteau i Box-Ljung test statistike.

Testiranje greške modela putem NKP i ACF je bazirano na utvrđivanju da li postoje značajna odstupanja njenih vrednosti od intervala poverenja na pragu značajnosti  $\alpha$ . Za razliku njih, testiranje greške modela korišćenjem test statistike Portemanteau i Box-Ljung se utvrđuje sveobuhvatnu vrednost ovih statistika do zadatog  $m$ -tog pomaka na autokorelacionoj funkciji. Pomak  $m$  se određuje na osnovu izraza (Box i sar., 2008):

$$m = N / 10 + p + q, \quad (3.123)$$

gde  $p$  i  $q$  predstavljaju red ARMA modela, a  $N$  definiše ukupan broj članova vremenske serije.

Test statistika je sledeća (Box i sar., 2008):

$$\text{Portemanteau: } Q_{PM} = N \sum_{\tau=1}^m \hat{\rho}_\varepsilon^2(\tau), \quad (3.124)$$

$$\text{Box-Ljung: } Q_{BL} = N(N+2) \sum_{\tau=1}^m \frac{\hat{\rho}_\varepsilon^2(\tau)}{N-\tau},$$

gde je  $\hat{\rho}_\varepsilon$  ocenjena autokorelaciona funkcija greške modeliranja na pomaku  $\tau$  ( $=1,2,\dots,m$ ). Ukoliko se pokaže da je  $Q_{PM}$  i  $Q_{BL} < \chi_{1-\alpha}^2$  usvaja se hipoteza  $H_0$  da je vremenska serija slučajna, u suprotnom odbacuje se hipoteza  $H_0$  i usvaja alternativna hipoteza  $H_1$  da serija nije slučajna. Usvojen prag značajnosti je  $\alpha=0.05$ , dok broj stepeni slobode  $\chi_{1-\alpha}^2$  raspodele odgovara vrednosti  $m-p-q$  za prikazane test statistike (Box i sar., 2008). Kada se iskoristi izraz (3.123) i zameni se vrednost  $m$  tada se dobija da je broj stepeni slobode jednak  $N/10$ .

### 3.7.2.6 Prognoza modela

Za prognozu stohastičkog procesa  $x(t)$  koriste se modeli ARMA( $p, q$ ) sa prethodno ocenjenim parametrima. Korišćenjem ARMA modela utvrđuje se prognoza  $\tilde{x}(l)$  serije  $x_{t+l}$  na vremenskom koraku  $t+l$ , pri čemu  $\tilde{x}_t(l)$  može da se nazove projekcija, prognoza, predviđanje ili očekivanje stohastičkog procesa  $x_{t+l}$ :

$$\tilde{x}_t(l) = E(x_{t+l} / x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots; a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots, a_{t-q}). \quad (3.125)$$

Potrebno je naglasiti da za razliku od AR( $p$ ) modela čija je memorija beskonačna, tj. prognoza se može vršiti za neograničeni vremenski period, MA( $q$ ) modeli imaju ograničenu memoriju samo do vremenskog koraka  $t+q$  gde je  $q$  operator modela pokretnih sredina. Ova pravila važe i za ARMA( $p,q$ ) modele koji predstavljaju objedinjene AR( $p$ ) i MA( $q$ ) modele.

### Princip minimalne sume kvadratne greške

Suma kvadrata greške između realizovane  $x_{t+l}$  i prognozirane serije  $\tilde{x}_t(l)$  predstavlja najčešće korišćen kriterijum za generisanje serija (Box i sar., 2008). Greška prognoze serije  $x(t)$  u trenutku  $l$  je sledeća:

$$e_t(l) = x_{t+l} - \tilde{x}_t(l). \quad (3.126)$$

Vrednost serije  $x_{t+l}$  može da se predstavi kao beskonačna suma prethodno ponderisanih članova slučajne serije (Box i sar., 2008):

$$x_{t+l} = a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \psi_2 a_{t+l-2} + \dots, \quad (3.127)$$

gde se težinski koeficijenti  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{l-1}$  određuju korišćenjem izraza (Box i sar., 2008):

$$\varphi(B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = \theta(B) \quad (3.128)$$

pri čemu  $\varphi(B)$  i  $\theta(B)$  predstavljaju autoregresioni operator i operator pokretnih sredina.

Ukoliko se pretpostavi da se najbolje prognozirana vrednost  $\tilde{x}_t(l)$  dobija korišćenjem izraza:

$$\tilde{x}_t(l) = \psi_l^* a_t + \psi_{l+1}^* a_{t-1} + \psi_{l+2}^* a_{t-2} + \dots, \quad (3.129)$$

gde su  $\psi_l^*$ ,  $\psi_{l+1}^*$ ,  $\psi_{l+2}^*$ ... težinski koeficijenti koje je potrebno odrediti, tada se koristi princip minimalne sume kvadratne greške (Box i sar., 2008):

$$E[e_t(l)]^2 = E[x_{t+l} - \tilde{x}_t(l)]^2 = (1 + \psi_1^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\psi_{l+j} - \psi_{l+j}^*) \sigma_a^2. \quad (3.130)$$

Izraz (3.130) ima minimalnu vrednost ako je ispunjeno  $\psi_{l+j}^* = \psi_{l+j}$ , pri čemu sledi da je realizacija stohastičkog procesa  $x_{t+l}$ :

$$x_{t+l} = (a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1}) + (\psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \dots) = e_t(l) + \tilde{x}_t(l). \quad (3.131)$$

gde je  $e_t(l)$  greška prognoze  $\tilde{x}_t(l)$  na koraku  $l$ .

Kada se iz prethodnog izraza odvoji deo koji predstavlja greška prognoze  $e_t(l)$  na koraku  $l$  tada se dobija sledeća jednakost (Box i sar., 2008):

$$e_t(l) = a_{t+l} + \psi_1 a_{t+l-1} + \dots + \psi_{l-1} a_{t+1}, \quad (3.132)$$

pri čemu ukoliko je prognoza stohastičkog procesa  $x_{t+l}$  nepristrasna tada je matematičko očekivanje greške prognoze  $E[e_t(l)] = 0$ , dok je varijansa:

$$\text{var}[e_t(l)] = (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{l-1}^2) \sigma_a^2. \quad (3.133)$$

Osim matematičkim očekivanjem i varijansom koji karakterišu grešku prognoze  $e_t(l)$ , potrebno je da  $e_t(1)$  na prvom koraku stohastičkog procesa  $x(t)$  ima međusobno nekorelisane vrednosti za različite trenutke ( $t, t-1, t-2, \dots$ ) u kome se prognoza određuje. U slučaju da je greška prognoze korelisana tada se  $e_{t+1}$  može predvideti na osnovu greške modela na prethodnim koracima  $e_t, e_{t-1}, e_{t-2} \dots$

Ukoliko je  $E[e_t(l)] = 0$  tada se prognoza stohastičkog procesa  $x_{t+l}$  određuje kao (Box i sar., 2008):

$$\tilde{x}_t(l) = \psi_l a_t + \psi_{l+1} a_{t-1} + \psi_{l+2} a_{t-2} + \dots \quad (3.134)$$

Pošto se stohastički proces  $x_{t+l}$  predstavlja korišćenjem modela ARMA tada se prognoza za vremenski korak  $l$  može iskazati na sledeći način:

$$\tilde{x}_t(l) = \phi_1 x_{t+l-1} + \phi_2 x_{t+l-2} + \dots + \phi_p x_{t+l-p} + a_{t+l} - \theta_1 a_{t+l-1} - \theta_2 a_{t+l-2} - \dots - \theta_q a_{t+l-q}. \quad (3.135)$$



### Ažuriranje prognoze

Kako bi se utvrdili intervali poverenja prognoze i izvršilo ažuriranje projekcija u trenutku pristizanja osmotrenih serija potrebno je odrediti težinske koeficijente  $\psi_j$ . Oni se određuju korišćenjem izraza (3.128) koji se raščlanjuju u vidu:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \quad (3.136)$$

Uključivanjem vrednosti  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  i  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  u izraz (3.136) moguće je odrediti vrednosti težina  $\psi$  rešavanjem sistema jednačina (Box i sar., 2008):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \phi_1 - \theta_1, \\ \psi_2 &= \phi_1 \psi_1 + \phi_2 - \theta_2, \\ \vdots & \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \psi_j &= \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} + \dots + \phi_p \psi_{j-p} - \theta_j, \end{aligned} \quad (3.137)$$

gde je  $\psi_0=1, \psi_j=0$  za  $j < 0$  i  $\theta_j=0$  za  $j > q$ .

Korišćenjem izraza (3.134) mogu se utvrditi prognoze procesa  $\tilde{x}_{t+1}(l)$  i  $\tilde{x}_t(l+1)$  iznete u trenutku  $t$  i  $t+1$  (Box i sar., 2008):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t+1}(l) &= \psi_l a_{t+1} + \psi_{l+1} a_t + \psi_{l+2} a_{t-1} + \dots \\ \tilde{x}_t(l+1) &= \psi_{l+1} a_t + \psi_{l+2} a_{t-1} + \dots \end{aligned} \quad (3.138)$$

Oduzimanjem prethodnih izraza dobija se:

$$\tilde{x}_{t+1}(l) = \tilde{x}_t(l+1) + \psi_l a_{t+1}. \quad (3.139)$$

Na osnovu prethodnog izraza može se izvući generalni zaključak u vezi ažuriranja prognoze stohastičkog procesa. Pretpostavlja se da se određuje prognoza u vremenskom trenutku  $t$  za buduće korake 1, 2, ...,  $L$ . Kada osmotrena serija  $z_{t+1}$  postane dostupna tada je moguće odrediti  $e_{t+1}(1) = x_{t+1} - \tilde{x}_t(1)$  u vremenskom trenutku  $t+1$  za buduće korake 1, 2, ...,  $L-1$ , pri čemu izuzetak predstavlja prognoza  $\tilde{x}_{t+1}(L)$  za korak  $L$  koju nije moguće ažurirati.

### Intervali poverenja prognoze

Ukoliko se pretpostavi da greška prognoze prati normalnu raspodelu, uslovna verovatnoća  $p(x_{t+1} | x_t, x_{t-1}, \dots)$  buduće vrednosti procesa  $x_{t+1}$  biće normalna sa srednjom vrednosti  $\tilde{x}_t(l)$  i standardnim odstupanjem:

$$\sigma(l) = \left( 1 + \sum_{j=1}^{l-1} \psi_j^2 \right)^{1/2} \sigma_a. \quad (3.140)$$

Vrednosti izraza  $(x_{t+1} - \tilde{x}_t(l)) / \sigma(l)$  imaće jediničnu normalnu raspodelu pri tome da će se vrednost  $x_{t+1}$  naći u okviru intervala poverenja  $\tilde{x}_t(l) \pm z_{\alpha/2} \sigma_a$  sa verovatnoćom  $1-\alpha$ , gde  $z_{\alpha/2}$  predstavlja standardizovanu promenljivu po normalnoj raspodeli na pragu značajnosti  $\alpha$ .

Intervali poverenja sa verovatnoćom  $1-\alpha$  prognoze procesa  $x_{t+l}$  za korak  $l$  se ocenjuju na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\left[ \hat{x}_t(l) + z_{\alpha/2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{l-1} \hat{\psi}_j^2 \right]^{1/2} \hat{\sigma}_a; \hat{x}_t(l) - z_{\alpha/2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{l-1} \hat{\psi}_j^2 \right]^{1/2} \hat{\sigma}_a \right], \quad (3.141)$$

pri čemu se težinski koeficijenti  $\hat{\psi}_j$  i varijanse greške modela  $\hat{\sigma}_a$  ocenjuju na osnovu uzorka.

## **4. Rezultati i diskusija analize vremenskih serija: primeri većih reka u Srbiji**

### **4.1 Raspoložive vremenske serije**

Predmet hidroloških analiza u ovom radu predstavlja reka Dunav zajedno sa svojim većim pritokama, kao što su reke: Sava, Tisa i Velika Morava. Analize su koncentrisane na prostoru Republike Srbije, a potrebne hidrološke vremenske serije preuzete su od Republičkog hidrometeorološkog zavoda Srbije. Reka Dunav razmatrana je na hidrološkoj stanici Bogojevo kojoj gravitiraju tranzitne vode sa sliva Dunava koje ulaze na prostor Republike Srbije. Na izlazu Dunava iz Srbije hidrološke analize sprovedene su na stanici Oršava na prostoru Rumunije, do koje se ulivaju vode sa slivova Save, Tise, Drine, Kolubare i Velike Morave. Slivno područje reke Dunav obuhvata prostor centralne, jugoistočne i, u jednom delu, severne Evrope. Reka Dunav izvire na Švarcvvaldu, a uliva se deltom u Crno More.

Reka Sava analizirana je na stanici Sremska Mitrovica, dok je u slučaju reke Tise korišćena stanica Senta. Sliv reke Save prostire se u predelu jugoistočne Evrope, a izvire na južnim padinama Alpa. Svojom jugozapadnom vododelnicom odvojena je od reka koje gravitiraju ka Jadranskom moru. Za razliku od nje sliv reke Tise obuhvata prostor istočne Evrope, a izvire u oblasti Karpata u Ukrajini. U Panonskoj niziji se uliva u Dunav. Reka Velika Morava predstavlja domaću reku i njeno slivno područje čini oko 42% ukupne površine Republike Srbije. Nastaje spajanjem Južne i Zapadne Morave, a hidrološke analize na ovoj reci su sprovedene na stanici Ljubičevski Most koja se nalazi na 22 km od uliva u Dunav.

Osim velikih međunarodnih reka u dunavskom slivu, analizirana je i reka Lim koju karakteriše brdsko-planinski hidrološki režim. Lim predstavlja najveću pritoku reke Drine, koja se kasnije uliva u Savu. Prednost ove reke u odnosu na ostale reke u slivu Drine su duga merenja proticaja na stanici Prijepolje, a da pritom prirodni hidrološki režim nije narušen izgradnjom vodoprivrednih objekata. Lim izvire u severnom delu Crne Gore, a nizvodni deo sliva nalazi se u zapadnoj Srbiji.

Analize su sprovedene za sinhroni period na svim stanicama od 1931. do 2012. Analizirane stanice prikazane su u tabeli 4-1 zajedno sa površinom sliva, srednjim

višegodišnjim proticajem  $Q$ , modulom oticanja  $q$ , standardnom devijacijom  $\sigma$  i koeficijentom asimetrije  $C_s$ . Na slici 4-1 prikazana je karta Republike Srbije sa položajem razmatranih hidroloških stanica zajedno sa delovima hidrografske mreže i topografijom terena.

**Tabela 4-1. Analizirane hidrološke stanice: površina sliva  $F$ , srednji višegodišnji proticaj  $Q$ , modul oticanja  $q$ , standardna devijacija  $\sigma$ , koeficijent asimetrije  $C_s$**

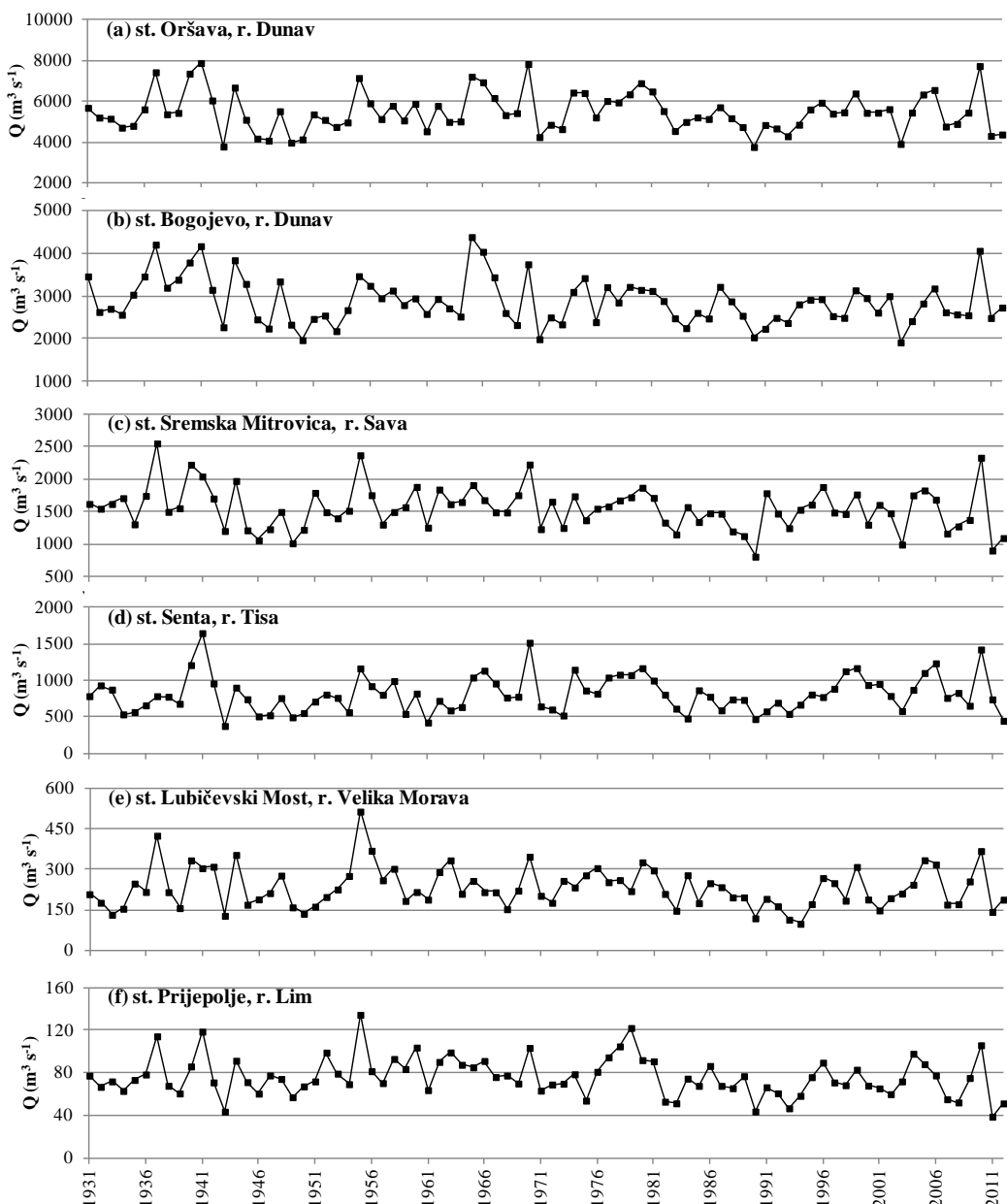
reka	stanica	$F$ (km <sup>2</sup> )	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$q$ (l/s/km <sup>2</sup> )	$\sigma$ (m <sup>3</sup> /s)	$C_s$
r. Dunav	st. Oršava	576232	5478	9.5	959.1	0.598
r. Dunav	st. Bogojevo	251593	2879	11.4	541.3	0.704
r. Sava	st. Sremska Mitrovica	87996	1532	17.4	311.1	0.471
r. Tisa	st. Senta	141715	798.6	5.6	253.8	0.881
r. V. Morava	st. Lubičevski Most	37320	229.3	6.1	73.2	0.989
r. Lim	st. Prijepolje	3160	76.5	24.2	18.3	0.581



**Slika 4-1. Prikaz analiziranih hidroloških stanica na karti Republike Srbije: Oršava, Bogojevo, Senta, Sremska Mitrovica, Ljubičevski Most, Prijepolje**

## 4.2 Rezultati analize vremenskih serija

Analiza vremenskih serija sprovedena je korišćenjem srednjih godišnjih i sezonskih proticaja na razmatranim stanicama u tabeli 4-1. Sezonski proticaji određeni su osrednjavanjem mesečnih vrednosti proticaja tokom zimske sezone -  $Q$  I (januar, februar, mart), prolećne sezone -  $Q$  II (april, maj, jun), letnje sezone -  $Q$  III (jul, avgust, septembar) i jesenje sezone -  $Q$  IV (oktobar, novembar, decembar). Na slici 4-2 prikazane su serije srednjih godišnjih proticaja na razmatranim stanicama, dok su serije sezonskih proticaja prikazane u prilogu G-1.



Slika 4-2. Srednji godišnji proticaji na razmatranim stanicama: (a) Oršava, (b) Bogojevo, (c) Sremska Mitrovica, (d) Senta, (e) Lubičevski Most, (f) Prijepolje

#### 4.2.1 Analiza stacionarnosti

##### 4.2.1.1 Dicky-Fuller test

Analiza stacionarnosti godišnjih i sezonskih proticaja sprovedena je korišćenjem Dickey-Fuller testa (poglavlje 3.2.1). Rezultati testa prikazani su u tabeli 4-2. Apsolutna vrednosti statistike testa  $\tau$  serija godišnjih i sezonskih proticaja pokazuje manje vrednosti od apsolutne kritične vrednosti test statistike  $\tau_{krit}=-2.905$  na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ .

**Tabela 4-2 Dicky-Fuller test statistike  $\tau$  serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja  $Q$**

<i>Stanica</i>	$\tau(Q)$	$\tau(Q I)$	$\tau(Q II)$	$\tau(Q III)$	$\tau(Q IV)$
st. Oršava	<b>-1.084</b>	<b>-1.438</b>	<b>-1.502</b>	<b>-1.512</b>	<b>-2.079</b>
st. Bogojevo	<b>-1.125</b>	<b>-1.318</b>	<b>-1.598</b>	<b>-1.607</b>	<b>-1.801</b>
st. Sremska Mitrovica	<b>-1.286</b>	<b>-1.810</b>	<b>-1.756</b>	<b>-2.415</b>	<b>-2.566</b>
st. Senta	<b>-1.706</b>	<b>-2.230</b>	<b>-2.147</b>	<b>-2.891</b>	-3.466
st. Lubičevski Most	<b>-1.770</b>	<b>-2.363</b>	-3.096	-3.493	<b>-2.476</b>
st. Prijepolje	<b>-2.005</b>	<b>-2.362</b>	<b>-1.449</b>	<b>-2.525</b>	-3.231

Na osnovu rezultat iz tabele 4-2 zaključuje sa da ukupno 26 od 30 vremenskih serija nisu stacionarne. Vrednosti statistike testa  $\tau$  tokom sezona ne odstupaju u velikoj meri od kritične vrednosti test statistike na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Za razliku od sezonskih proticaja, kod godišnjih proticaja je utvrđeno veće odstupanje od test statistike. Stacionarne vremenske serije su registrovane za sezonske proticaje na stanici Ljubičevski Most (serija  $Q II$  i  $Q III$ ), Senta (serija  $Q IV$ ) i Prijepolje (serija  $Q IV$ ).

Osim utvrđivanja stacionarnosti serija godišnjih i sezonskih proticaja testirana je stacionarnost priraštaja prvog reda razmatranih serija. Statistike testa  $\tau$  priraštaja prvog reda srednjih godišnjih i sezonskih proticaja prikazane su u tabeli 4-3.

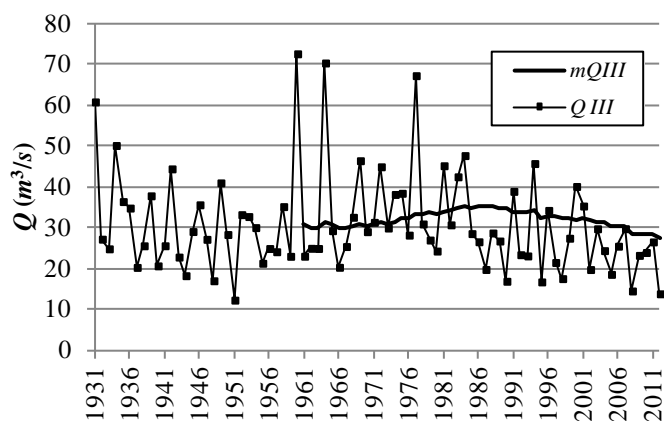
**Tabela 4-3 Dicky-Fuller test statistike  $\tau$  priraštaja prvog reda srednjih godišnjih i sezonskih proticaja  $\nabla Q$**

<i>Stanica</i>	$\tau(\nabla Q)$	$\tau(\nabla Q I)$	$\tau(\nabla Q II)$	$\tau(\nabla Q III)$	$\tau(\nabla Q IV)$
st. Oršava	-12.44	-13.46	-14.68	-13.51	-16.65
st. Bogojevo	-12.50	-12.21	-14.43	-14.66	-17.67
st. Sremska Mitrovica	-13.84	-14.23	-16.17	-15.11	-15.47
st. Senta	-11.79	-14.17	-12.73	-12.47	-16.48
st. Lubičevski Most	-13.05	-16.25	-15.22	-16.33	-14.66
st. Prijepolje	-13.35	-13.51	-14.97	-15.42	-16.06

Rezultati iz tabele 4-3 pokazuju da je apsolutna vrednost statistike testa  $\tau$  za priraštaje prvog reda srednjih godišnjih i sezonskih proticaja značajno premašila apsolutnu kritičnu vrednosti test statistike  $\tau_{krit}=-2.905$  na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Zaključuje se da su priraštaji prvog reda razmatranih procesa stacionarni.

#### 4.2.1.2 Analiza pokretnih sredina

Pokretne sredine godišnjih i sezonskih proticaja poslužile su kao vizuelna provera dugoročnih varijacija srednje vrednosti proticaja. Analizirane su pokretne sredine serija godišnjih i sezonskih proticaja  $m_Q$  sa širinom prozora od 30 koraka u skladu sa preporukama u poglavlju 3.2. Na slici 4-3 prikazana je pokretna sredina  $m_{QIII}$  za srednje sezonske proticaje tokom jesenje sezone na stanici Prijepolje na reci Lim.



Slika 4-3. Srednji sezonski proticaji  $Q_{III}$  sa pokretnom sredinom  $m_{QIII}$  širine prozora od 30 koraka na st. Prijepolje (r. Lim) (pokretne sredine su date za kraj perioda osrednjavanja)

Pokretna sredina  $m_{QIII}$  pokazuje karakteristično ciklično ponašanje, pri čemu je periodičan karakter prisutan i na ostalim godišnjim i sezonskim vremenskim serijama koje su sa pokretnim sredinama prikazane na grafičkom prilogu G-1.

Mera varijacije pokretnih sredina izražava se preko koeficijenta varijacije  $C_v$  koji je prikazan u formuli (3.6). Vrednosti koeficijenta  $C_v$  i standardne devijacije  $\sigma_m$  pokretnih sredina za razmatrane vremenske serije date su u tabeli 4-4.

Tabela 4-4. Standardna devijacija  $\sigma_m$  i koeficijent varijacije  $C_v$  pokretne sredine godišnjih i sezonskih proticaja na razmatranim stanicama sa širinom prozora od 30 koraka

Stanica:	Parametar:	$Q$	$Q I$	$Q II$	$Q III$	$Q IV$
st. Oršava	$\sigma_m$	49.59	134.37	199.37	204.38	112.30
	$C_v$	0.009	0.023	0.028	0.045	0.025
st. Bogojevo	$\sigma_m$	51.24	48.96	133.27	210.78	82.47
	$C_v$	0.017	0.019	0.037	0.068	0.037
st. S. Mitrovica	$\sigma_m$	22.24	75.98	66.65	39.21	64.49

Stanica:	Parametar:	$Q$	$Q I$	$Q II$	$Q III$	$Q IV$
st. Senta	$C_v$	0.014	0.040	0.034	0.050	0.043
	$\sigma_m$	21.35	44.21	49.37	47.59	53.00
	$C_v$	0.028	0.052	0.041	0.081	0.098
st. Ljubičevski M.	$\sigma_m$	4.03	20.96	5.07	7.97	22.04
	$C_v$	0.017	0.062	0.045	0.053	0.067
st. Prijepolje	$\sigma_m$	1.36	5.84	4.03	2.05	4.97
	$C_v$	0.017	0.068	0.032	0.064	0.066

Na osnovu iznetih rezultata zaključuje se da su varijacije srednje vrednosti proticaja najmanje kod godišnjih serija gde se koeficijent varijacije  $C_v$  nalazi u granicama 0.009-0.017. Tokom zimske ( $Q I$ ) i prolećne sezone ( $Q II$ ) varijacije proticaja su veće nego u slučaju godišnjih vrednosti za sve razmatrane serije. Najveće vrednosti koeficijenata varijacije  $C_v$  zabeležene su tokom letnje ( $Q III$ ) i jesenje ( $Q IV$ ) sezone gde se nalaze u granicama 0.045-0.081 i 0.025-0.098.

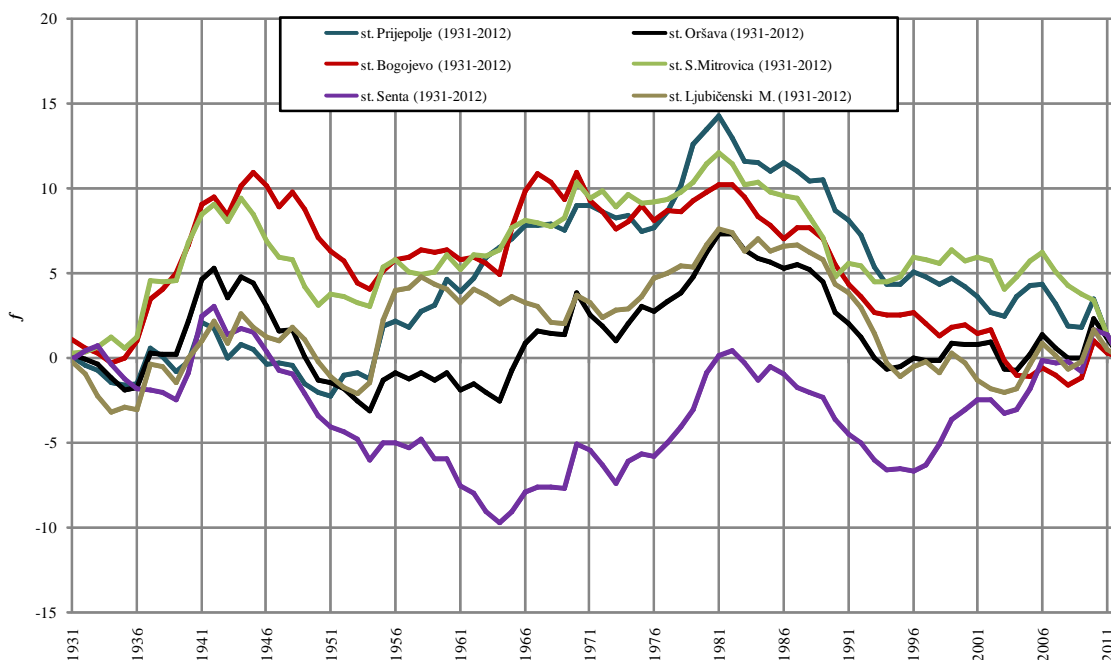
#### 4.2.2 Analiza homogenosti

##### 4.2.2.1 Integralna kriva standardizovanih odstupanja

Kako bi se analizirala homogenost srednjih godišnjih proticaja neophodno je odrediti vremenski period u kome se analiza sprovodi. U tu svrhu korišćena je integralna kriva standardizovanih odstupanja sa *boot-strap* analizom čiji je metodološki okvir dat u poglavlju 3.3.1.

Integralna kriva standardizovanih odstupanja određuje se prema formuli (3.7). Na slici 4-4 prikazane su krive za razmatrane serije godišnjih proticaja tokom perioda 1931–2012. Ekstremnim vrednostima integralne krive definišu se periodi promene režima. Tako maksimalna vrednost integralne krive predstavlja prelazak iz vlažnijeg u sušniji višegodišnji period, dok minimalne vrednosti predstavljaju ulazak u vlažniji višegodišnji period.





Slika 4-4. Integralna kriva modulnih odstupanja analiziranih godišnjih serija proticaja za period 1931–2012.

Na slici 4-4 uviđa se razlika u godišnjim hidrološkim režimima između analiziranih reka, a pogotovo na stanici Senta, čija se integralna kriva u najvećoj meri nalazi u negativnom delu (slika 4-4). U periodu 1940–1945. registrovana je tačka preloma kada je došlo do promene režima na navedenim stanicama. Međutim, najveću apsolutnu vrednost integralna kriva ima na segmentu 1981–1982. kada se na svim stanicama zapaža promena režima, a do 2012. beleži se negativan priraštaj na integralnoj krivoj. Na stanici Senta prelomna tačka se javlja u istom periodu, ali se do 1994. javljaju negativni, a do kraja 2012. pozitivni priraštaji.

Kako bi se odredila statistička značajnost apsolutno maksimalnih vrednosti (prelomnih tačaka) na integralnoj krivoj standardizovanih odstupanja koristi se *boot-strap* metoda. Ovom metodom vrši se zamena redosleda članova vremenske serije, pri čemu zamena redosleda uključuje 1000 ponavljanja. Time se dobijaju nove vremenske serije sa slučajno izmenjenim redosledom bez zamene originalnih vrednosti članova serije. Zatim se određuje verovatnoća  $p$  pojave prelomne tačke za datu seriju godišnjih proticaja. Određivanje verovatnoće  $p$  pojave prelomne tačke vrši se na osnovu broja prekoračenja  $P$  u skladu sa formulom (3.13).

U tabeli 4-5 prikazana je verovatnoća  $p$  pojave prelomne tačke godišnjih proticaja. Pored toga data je godina kada se desila promena režima kao i periodi (I i II) u okviru kojih se testira homogenost vremenskih serija.

**Tabela 4-5. Prelomne tačke na integralnoj krivoj standardizovanih odstupanja sa verovatnoćom  $p$  pojave i periodima za koje se sprovodi analiza homogenosti**

reka/ stanica	Tačka preloma		Periodi za analizu homogenosti	
	god	$p$ (%)	I period	II period
r. Dunav, st. Oršava	1982	92	1931–1981	1982–2012
r. Dunav, st. Bogojevo	1982	90	1931–1981	1982–2012
r. Sava, st. S.Mitrovica	1981	89	1931–1980	1981–2012
r. Tisa, st. Senta	1982	58	1931–1981	1982–2012
r. V. Morava, st. Ljubičevski M.	1981	66	1931–1980	1981–2012
r. Lim, st. Prijepolje	1981	87	1931–1980	1981–2012

Na osnovu pokazanih rezultata zaključuje se da je najveća verovatnoća  $p$  pojave prelomne tačke na stanici Oršava u iznosu 92%, dok je najmanja na stanicama Ljubičevski Most i Senta. Međutim, verovatnoće  $p$  prevazilaze vrednost od 50% i za stanice sa manje verovatnom promenom hidrološkog režima. Zaključuje se da je sa velikim stepenom sigurnosti došlo do promene režima na svim hidrološkim stanicama, a da se prelomna tačka nalazi između 1981–1982. Na osnovu prelomne tačke definisani su prvi i drugi period za koje je testirana homogenost serija godišnjih i sezonskih proticaja:

- I period: 1931 - 1980(1981),
- II period: 1981(1982) - 2012,

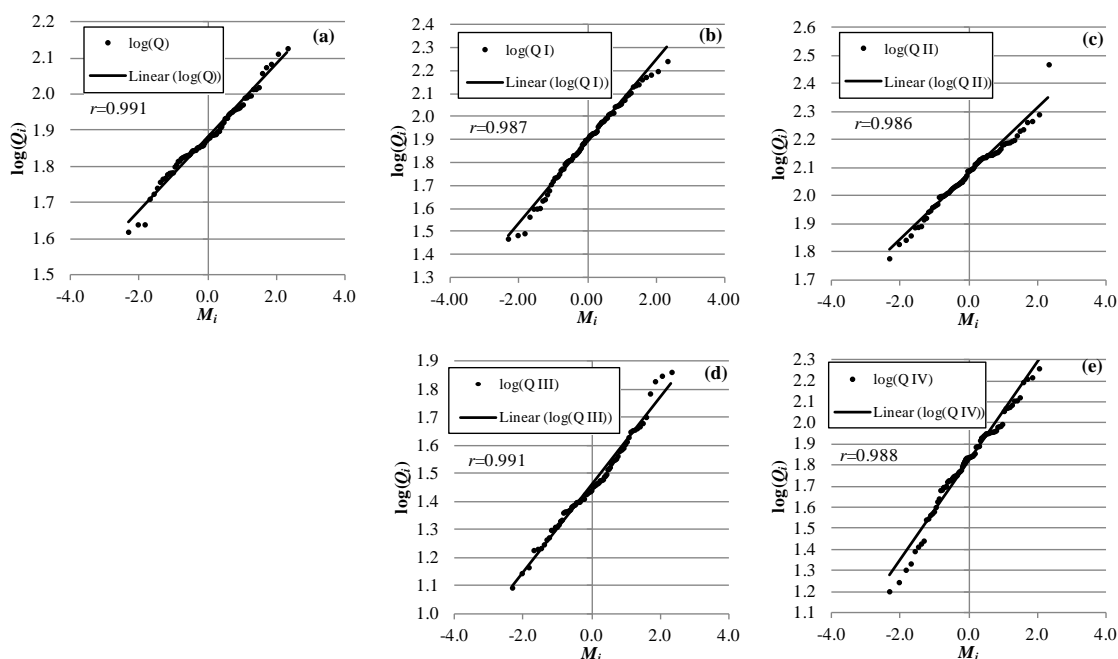
sa pretpostavkom da se promena režima sezonskih proticaja desila u isto vreme kada i srednjih godišnjih.

#### 4.2.2.2 Testiranje normalnosti

Pre nego što su primenjeni testovi homogenosti potrebno je proveriti normalnost serija. Normalnost serija se utvrđuje Jarque-Bera i PPCC testom. Detaljan opis navedenih testova dat je u poglavljima 3.3.2.1 i 3.3.2.2. Korišćenjem oba testa utvrđeno je da serije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja odstupaju od normalnih serija na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ .

Kako bi se ispunio uslov normalnosti, vremenske serije su logaritmovane. Serije godišnjih i sezonskih logaritmovanih proticaja su zatim testirane Jarque-Bera testom, gde je pokazano da 28 od ukupno 30 uzoraka ima normalnu raspodelu na pragu značajnosti 5%. Rezultati testiranja vremenskih serija putem Jarque-Bera testa prikazani su u tabelarnom prilogu T-1 (prvi deo). Serije sezonskih logaritmovanih proticaja tokom prve sezone na stanici Oršava i stanici Sremska Mitrovica nisu zadovoljile uslove testa, dok su ostale logaritmovane serije saglasne sa normalnom raspodelom.

Kontrola normalnosti vremenskih serija vršena je i korišćenjem PPCC testa. Ovim testom određen je koeficijent korelacije između logaritmovanih serija proticaja i korespondentnih vrednosti kompromisne verovatnoće po normalnoj raspodeli. Rezultati testa mogu se grafički interpretirati, pri čemu je prikazan primer stanice Prijepolje na slici 4-5.



**Slika 4-5. PPCC test normalnosti serija logaritmovanih proticaja sa koeficijentima korelacije  $r$  na st. Prijepolje: (a) godišnji proticaji, (b) zimski proticaji, (c) prolećni proticaji, (d) letnji proticaji, (e) jesenji proticaji**

Na osnovu odnosa koeficijenta korelacije  $r$  i njegove kritične vrednosti  $r_{\alpha}(N)$  određuje se da li je logaritmovana vremenska serija saglasna sa normalnom raspodelom u skladu sa metodologijom iznetom u delu 3.3.2.2. Kritična vrednost za prag značajnosti  $\alpha=0.05$  iznosi  $r_{\alpha}(82)=0.984$ . Utvrđeno je da su ispunjeni uslovi testa za 28 vremenskih serija od ukupno 30 razmatranih. Rezultati ovog testa potvrdili su rezultate testa Jarque-Bera, pa i

ovog puta serije srednjih logaritmovanih sezonskih proticaja tokom prve sezone na stanici Oršava i Sremska Mitrovica ne prate normalnu raspodelu na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Koeficijenti korelacije  $r$  prikazani su za razmatrane serije proticaja u tabelarnom prilogu T-1 (drugi deo).

#### 4.2.2.3 Testiranje homogenosti

Pošto je zadovoljen uslov normalnosti za većinu logaritmovanih vremenskih serija, tada je ispunjen preduslov analize homogenosti koja se sprovodi korišćenjem serija sa normalnom raspodelom. Analiza homogenosti sprovedena je za serije logaritmovanih godišnjih i sezonskih proticaja za dva perioda koji su za razmatrane serije prikazani u poglavlju 4.2.2.1. Testiranje homogenosti uključilo je ispitivanje jednakosti srednje vrednosti (Z test,  $t$ -test), varijanse (Fisher test) i kumulativne raspodele (Wilcoxon test) dva uzorka iste populacije logaritmovanih proticaja. Metodološki okvir analize homogenosti dat je u delu 3.3.3, a rezultati ovih testova za serije godišnjih logaritmovanih proticaja prikazani su u tabeli 4-6.

**Tabela 4-6. Rezultati testova homogenosti logaritmovanih srednjih godišnjih proticaja na razmatranim stanicama za prag značajnosti  $\alpha=0.05$**

reka/ stanica	Z-test		t- test		Fisher test		Wilcoxon test		
	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	Z	t	$\sigma_1$	$\sigma_2$	F	W	Z
r. Dunav, st. Oršava	5570	5391	0.626	0.669	1059	857	1.257	1800	-0.482
r. Dunav, st. Bogojevo	3027	2738	<b>2.271</b>	<b>2.576</b>	613.9	422.6	<b>1.528</b>	1889	<b>2.124</b>
r. Sava, st. S.Mitrovica	1613	1477	<b>1.934</b>	<b>1.995</b>	336.7	299.1	1.125	1002	<b>-7.182</b>
r. Tisa, st. Senta	766.3	829.3	-1.373	-1.398	265.9	240.8	1.081	1517	-1.322
r. V. Morava, st. Lj. Most	236.1	222.9	0.795	0.849	82.0	64.2	1.251	1706	0.422
r. Lim, st. Prijepolje	80.6	72.8	<b>2.307</b>	<b>2.273</b>	17.8	17.7	1.020	1582	<b>-2.252</b>

Testiranjem homogenosti srednjih logaritmovanih godišnjih proticaja utvrđena je nejednakost u razmatranim periodima (period I: 1931-1980(1981), period II: 1981(1982)-2012) po srednjoj vrednosti, prema Z testu i  $t$ -testu, za stanicu Bogojevo, Sremsku Mitrovicu i Prijepolje na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$  (tabela 4-6). U ovim slučajevima uviđa se opadanje srednjih godišnjih proticaja tokom drugog perioda. Isto

tako, Fisher test je potvrdio nehomogenost varijanse za seriju godišnjih proticaja na stanici Bogojevo na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Nehomogenost funkcije raspodele zabeležena je za serije godišnjih proticaja na stanicama Bogojevo, Sremska Mitrovica i Prijepolje po testu Wilcoxon na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Ostale serije su homogene po svim parametrima na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ , ali se smanjenje proticaja u drugom periodu javlja na svim stanicama osim na stanici Senta gde je došlo do povećanja proticaja.

Rezultati analize homogenosti sezonskih logaritmovanih proticaja na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$  prikazani su u tabelarnom prilogu T-2. U skladu sa nehomogenošću logaritmovanih srednjih godišnjih proticaja reke Save, na stanici Sremska Mitrovica, pokazuje se nehomogenost sezonskih logaritmovanih proticaja po srednjoj vrednosti tokom I i II sezone (zima i proleće) kada dolazi do smanjenja proticaja koje se javlja tokom svih sezona. Stanica Bogojevo na Dunavu, takođe, pokazuje nehomogenost srednjih logaritmovanih sezonskih proticaja u II i III sezoni (proleće i leto) kada su manji proticaji u prvom periodu u odnosu na drugi. Na Limu je primećeno smanjenje logaritmovanih proticaja tokom svih sezona, a serija srednjih logaritmovanih proticaja je nehomogena tokom I sezone po srednjoj vrednosti i funkciji raspodele. Srednji sezonski logaritmovani proticaji na Velikoj Moravi su homogeni, a primećeno je umanjeње proticaja tokom prvog perioda za I i II (zima i proleće) sezonu, isto tako primećeno je povećanje proticaja tokom III i IV sezone (leto i jesen). Reka Tisa na stanici Senta beleži povećanje proticaja u drugom periodu tokom svih sezona, a srednji sezonski logaritmovani proticaji su homogeni po svim sezonama.

Prilikom testiranja homogenosti serija potrebno je voditi računa o efikasnosti korišćenih testova (poglavlje 3.3.6). Na osnovu asimptotske relativne efikasnosti zaključeno je da je test Wilcoxon manje efikasan nego Studentov  $t$ -test. Utvrđeno je da su oba testa prilikom ispitivanja homogenosti godišnjih logaritmovanih proticaja na stanicama Bogojevo, Sremska Mitrovica i Prijepolje međusobno saglasna. Na osnovu test statistika odbačena je nulta hipoteza i usvojena alternativna da vremenske serije nisu homogene. Nasuprot tome može se primetiti da sezonski logaritmovani proticaji na stanicama Sremska Mitrovica i Bogojevo pokazuju nehomogenost po  $t$ -testu dok su serije homogene u skladu sa testom Wilcoxon (tabelarni prilog T-2).

Dolazi se do zaključka da usled nedovoljnog obima uzorka manje efikasan test Wilcoxon nije registrovao nehomogenost sezonskih proticaja.

### 4.2.3 Analiza trenda

#### 4.2.3.1 Neparametarsko testiranje

Za analizu trenda vremenskih serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja korišćen je neparametarski test Mann-Kendall (poglavlje 3.5.1.1). U tu svrhu korišćen je standardni trend test i trend test koji uključuje multi-vremenski pristup. Prilikom korišćenja standardnog Mann-Kendall testa određena je standardizovana promenljiva  $Z_s$  u skladu sa izrazom (3.40). U slučaju kada se koriguje varijansa statistike  $S$  usled prisutne serijske korelacije dobijena je vrednosti  $Z_{s, kor}$ .

Test statistika  $S$  pokazala je opadajući trend godišnjih proticaja koji je prisutan na stanicama Bogojevo, Prijepolje, Sremska Mitrovica, Lubičevski Most i Oršava, dok je rastući trend prisutan na stanici Senta. Međutim, sa usvojenim pragom značajnosti od  $\alpha=0.05$  trend srednjih godišnjih proticaja na ovim stanicama nije značajan (tabela 4-7). Isključivanje efekta serijske korelacije uticalo je na to da se umanjuje vrednost test statistike  $S$ .

**Tabela 4-7. Rezultati testiranja srednjih godišnjih proticaja po Mann-Kendall testu:  $S$  - test statistika,  $Z_s$  i  $Z_{s, kor}$  - standardizovana promenljiva**

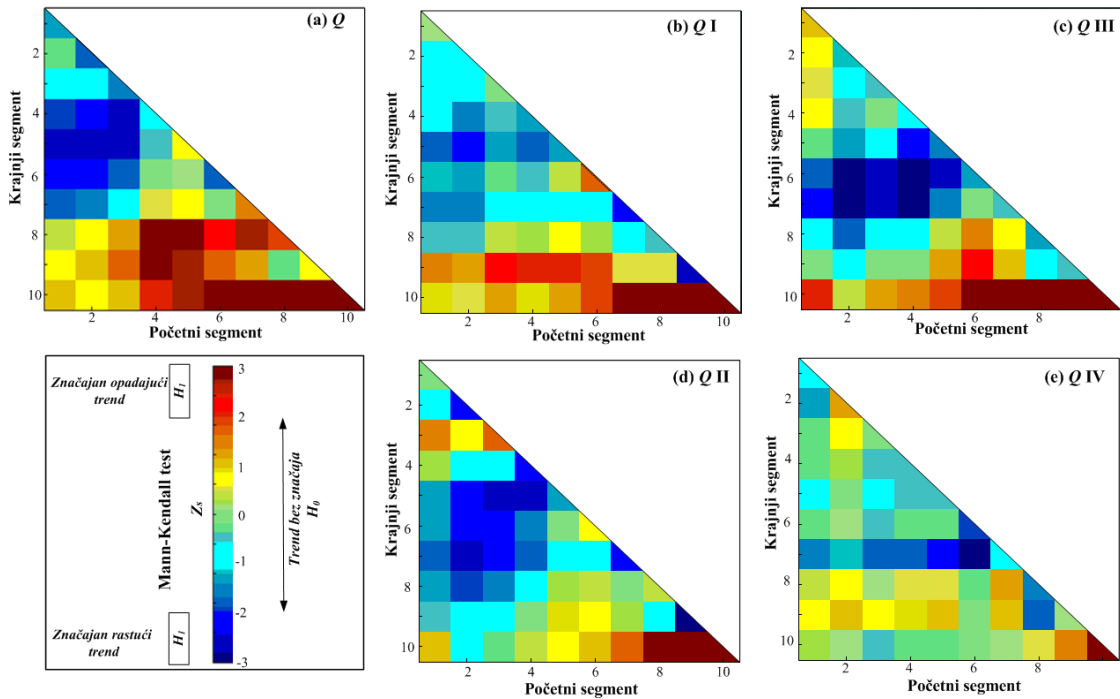
reka	stanica	Mann-Kendall test		
		$S$	$Z_s$	$Z_{s, kor}$
r. Dunav	st. Oršava	67	0.264	0.223
r. Dunav	st. Bogojevo	468	1.870	1.500
r. Sava	st. S. Mitrovica	365	1.458	1.386
r. Tisa	st. Senta	-355	-1.418	-1.125
r. V. Morava	st. Lubičevski Most	115	0.457	0.387
r. Lim	st. Prijepolje	388	1.550	1.315

Za razliku od srednjih godišnjih proticaja, sezonski proticaji na pojedinim stanicama pokazuju da postoji značajan trend. Značajan rastući trend registrovan je tokom zimske sezone ( $Q$  I) na stanici Senta, dok je tokom letnje sezone ( $Q$  III) značajan opadajući trend registrovan na stanici Bogojevo. Na ostalim stanicama nije registrovan značajan trend sezonskih proticaja na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Rezultati testiranja trenda pomoću Mann-Kendall testa za serije srednjih sezonskih proticaja prikazani su u tabelarnom prilogu T-3.

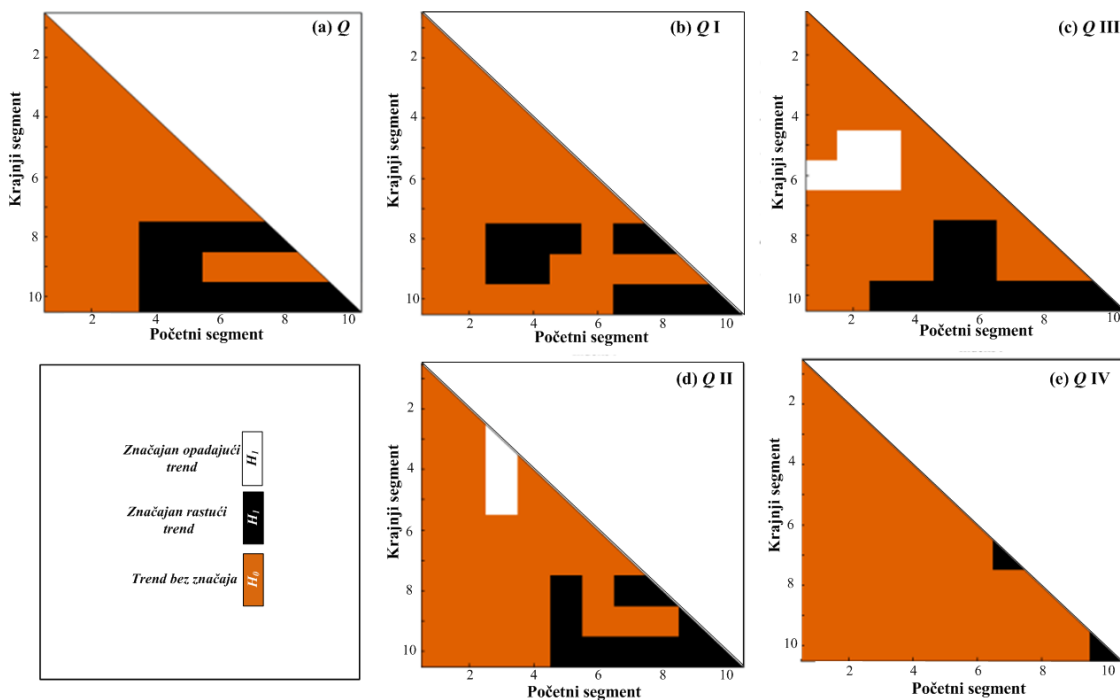
Standardni pristup ispituje trend proticaja tokom cele vremenske serije, dok alternativni multi-vremenski pristup sagledava trend serije kroz kombinaciju podserija. Ovakva analiza trenda podrazumeva da se kombinuju podserije ne samo od početka vremenske serije već i od početka ostalih segmenata. Multi-vremenska analiza trenda opisana je u delu 3.5.1.2 pri čemu zbog malog vremenskog segmenta od 8 godina efekat serijske korelacije nije uzet u obzir.

Na slici 4-6 prikazana je Mann-Kendall standardizovana promenljiva  $Z_s$  za  $i=1,2,\dots,10$  na stanici Prijepolje. Grafičke statistike  $Z_s$  za različite segmente vremenske serije potvrđuje periodično ponašanje trenda sa izraženim negativnim trendom (pozitivan znak  $Z_s$ ) na krajnjem vremenskom intervalu  $8N/10-N$  za serije  $Q$ ,  $Q I$ ,  $Q II$  i  $Q III$  (slika 4-6). Za navedene vremenske serije rasući trend (negativan znak  $Z_s$ ) registrovan je na segmentu  $4N/10-7N/10$ .

Grafički prikaz značajnog trenda srednjih godišnjih i sezonskih proticaja na stanici Prijepolje u multi-vremenskom pristupu dat je na slici 4-7. Uočava se da je opadajući značajan trend registrovan kod srednjih godišnjih proticaja tokom poslednje podserije na delu  $8N/10-N$  za seriju srednjih godišnjih proticaja ( $Q$ ), srednjih godišnjih proticaja tokom zimske, prolećne i letnje sezone ( $Q I$ ,  $Q II$  i  $Q III$ ) na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Značajan pozitivan trend karakterističan je tokom treće sezone do dužine serije  $4N/10-6N/10$  na istom pragu značajnosti. Na ostalim stanicama registrovane su sukcesivne promene pozitivnog i negativnog trenda u vremenskoj seriji. Ove promene pokazuju zavisnost trenda od vremena, što pokazuje da nije opravdana ekstrapolacija trenda duže vreme u budućnosti. Rezultati multi-vremenske analize trenda prikazani su u grafičkom prilogu G-2.



Slika 4-6. Statistika  $Z_s$  multi-vremenskog trend testa Mann-Kendall na st. Prijepolje: (a) godišnji proticaji, (b) zimski proticaji, (c) prolećni proticaji, (d) letnji proticaji, (e) jesenji proticaj



Slika 4-7. Značajnost trenda multi-vremenskog testa Mann-Kendall na st. Prijepolje: (a) godišnji proticaji, (b) zimski proticaji, (c) prolećni proticaji, (d) letnji proticaji, (e) jesenji proticaji

#### 4.2.3.2 Parametarsko testiranje

Utvrđivanje značajnosti linearnog trenda korišćenjem parametarskog testa sastoji se u upoređivanju koeficijenta pravca  $\beta$  regresione krive sa kritičnom vrednosti na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Kritična vrednost koeficijenta pravca  $\beta$  regresione prave utvrđuje se



na osnovu varijanse trenda date u izrazu (3.43). Korišćena metodologija data je u poglavlju 3.5.2.1, a rezultati testiranja koeficijenta  $\beta$  za analizirane vremenske serije godišnjih i sezonskih proticaja prikazani su u tabeli 4-8.

**Tabela 4-8 Koeficijenti pravca  $\beta$  linearnog trenda za srednje godišnje i sezonske proticaje**

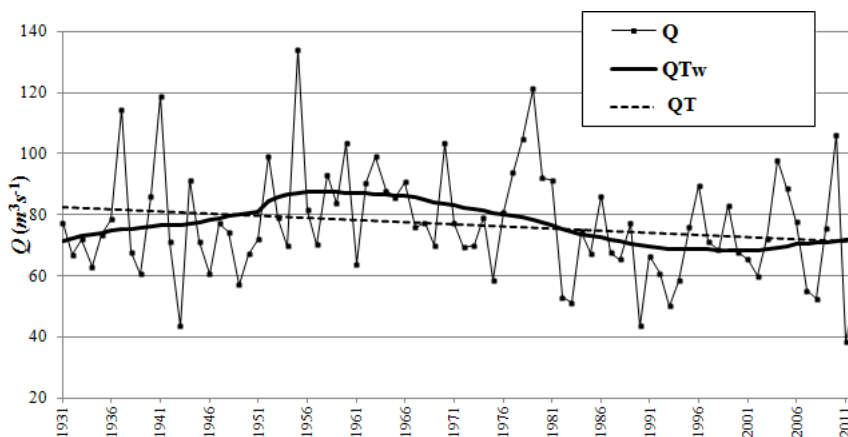
<i>Reka</i>	<i>Stanica</i>	$\beta(Q)$	$\beta(Q I)$	$\beta(Q II)$	$\beta(Q III)$	$\beta(Q IV)$
r. Dunav	st. Oršava	-2.235	4.293	-8.872	-2.924	-1.390
r. Dunav	st. Bogojevo	<b>-5.223</b>	0.268	<b>-7.445</b>	<b>-9.357</b>	-4.331
r. Sava	st. Sremska Mitrovica	<b>-3.446</b>	-3.610	-4.875	-0.568	-4.750
r. Tisa	st. Senta	1.456	<b>3.332</b>	0.396	1.087	1.043
r. V. Morava	st. Lubičevski Most	-0.246	-0.520	-0.386	0.039	0.020
r. Lim	st. Prijepolje	-0.146	-0.175	-0.137	-0.095	-0.167

Linearni trend godišnjih i sezonskih proticaja ocenjen je za period 1931-2012. Kritična test statistika se određuje za prag značajnosti  $\alpha=0.05$  u skladu sa izrazom (3.44). Za serije godišnjih proticaja registrovani su značajni opadajući trendovi na stanicama Bogojevo i Sremska Mitrovica. Pored toga, sezonski proticaji na stanicama Bogojevo tokom prolećne ( $Q II$ ) i letnje sezone ( $Q III$ ) pokazuju značajne opadajuće trendove, dok je na stanici Senta prisutan značajan rastući trend proticaja tokom zimske sezone ( $Q I$ ). Za ostale razmatrane serije nije registrovan značajan trend proticaja za prag značajnosti  $\alpha=0.05$ .

Linearni trend srednjih godišnjih proticaja je opadajući na svim stanicama osim na stanici Senta na reci Tisi koja pokazuje rastući trend. Takve osobine reke Tise zapažaju se i tokom sezona, gde je linearni trend suprotnog nagiba nego na ostalim rekama. Tokom letnje i jesenje sezone ( $Q III$ ,  $Q IV$ ) javljaju se opadajući linearni trendovi. Prikaz linearnog trenda na navedenim stanicama za serije srednje godišnjeg i sezonskog proticaja dat je u grafičkom prilogu G-3.

Za određivanje trenda korišćen je i linearni trend sa pokretnim vremenskim prozorom. Ova metoda pokazana je u delu 3.5.2.2 pri čemu njen cilj predstavlja utvrđivanje da li na ocenu linearnog trenda utiče višegodišnja periodičnost vremenske serije. Iz tog razloga usvojen je vremenski prozor od 30 godina koji aproksimativno odgovara višegodišnjoj periodičnosti serija proticaja u Evropi (Labat, 2003; Pekarova i sar., 2006).

Na slici 4-8 prikazan je linearni trend  $Q_{Tw}$  godišnjih proticaja sa pokretnim vremenskim prozorom  $w=30$  godina na stanici Prijepolje, dok su ostale stanice prikazane u grafičkom prilogu G-4.



Slika 4-8. Linearni trend  $Q_{Tw}$  sa pokretnim vremenskim prozorom  $w=30$  godina za st. Prijepolje (r. Lim)

Rezultati analize linearnog trenda sa pokretnim vremenskim prozorom sugeriraju da se trend sastoji iz linearne komponente i nelinearne komponente koju karakteriše mala amplituda, a velika perioda oscilovanja. U sušnijem višegodišnjem periodu oscilacija trenda  $Q_{Tw}$  je u negativnoj fazi, dok je trend u pozitivnoj fazi pri višegodišnjem vlažnom periodu. Periodična komponenta je registrovana na svim razmatranim serijama godišnjeg i sezonskog proticaja.

#### 4.2.4 Periodična komponenta

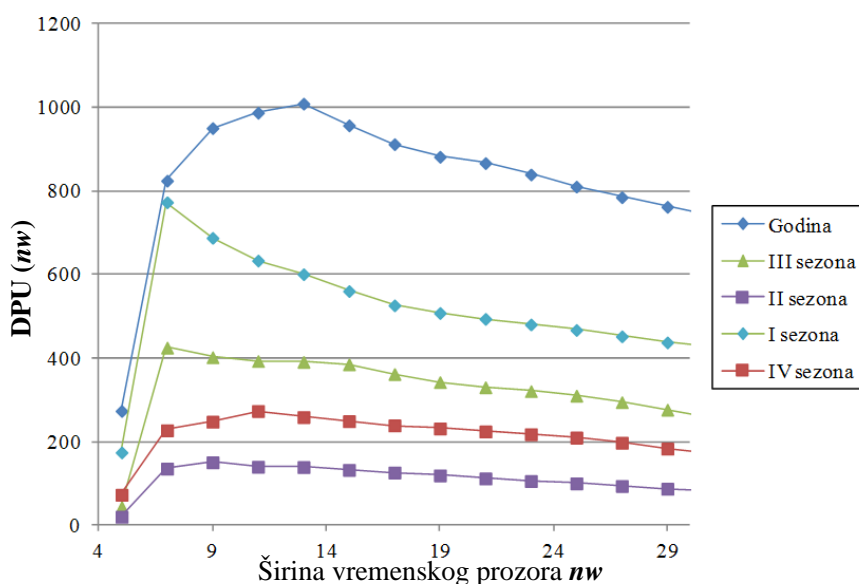
##### 4.2.4.1 Diskretni periodogram

Na prvom koraku potrebno je modelirati linearni trend  $Q_T(t)$ , ukoliko je on značajan, serije godišnjih i sezonskih proticaja prema izrazu (3.42). Zatim se linearni trend oduzima od serije godišnjih proticaja pri čemu se formiraju reziduali prve vrste  $Q'(t)$  u skladu sa izrazom (3.33). Kako bi se modelirala makroperiodičnost vremenskih serija u radu je korišćen diskretni spektar ili periodogram.

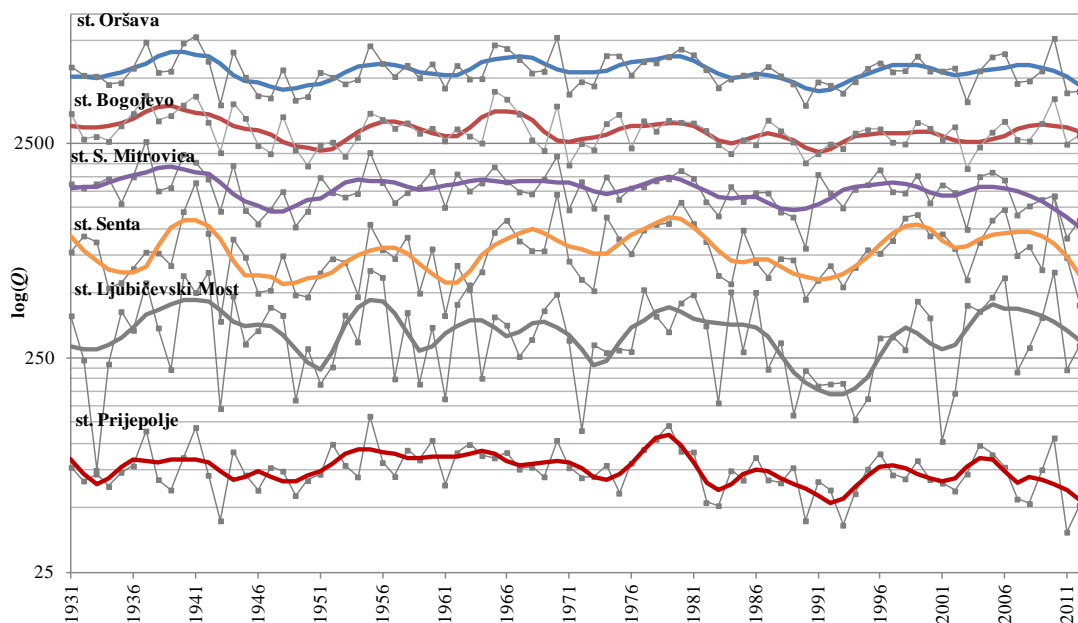
Prethodno su vremenske serije reziduala prve vrste  $Q'(t)$  uglačane da bi u okviru uglačane serije ostala samo makroperiodičnost. Za uglačavanje vremenske serije korišćena je regresiona tehnika LOESS i optimizaciona funkcija DPU kojom se definiše širina prozora glačanja  $nw$ . LOESS metoda je prikazana u poglavlju 3.6.1.1, dok se optimizaciona funkcija DPU određuje prema izrazu (3.57) datom u poglavlju 3.6.1.2.

Optimizaciona funkcija DPU određena je za serije srednjih sezonskih i godišnjih proticaja. Na slici 4-9 prikazane su vrednosti funkcije DPU na primeru stanice Ljubičevski Most. Najveću vrednost srednjih godišnjih proticaja ova funkcija ima prilikom izbora veličine vremenskog prozora od  $n_w=13$  članova, koji uključuje 6 članova pre i posle  $i$ -tog člana koji se uglašava. Najveća vrednost ujedno definiše optimalnu širinu vremenskog prozora glačanja  $n_w$ . Srednji sezonski proticaji ukazuju na to da je prilikom dostizanja maksimalnih vrednosti DPU funkcije potrebna manja širina vremenskog prozora uglašavanja  $n_w$  nego u slučaju godišnjeg proticaja.

Definisanjem širine prozora uglašavanja  $n_w$  za analizirane sezonske i godišnje serije stiže se neophodan uslov za upotrebu metode LOESS. Rezultati ove analize dati su na slici 4-10 gde su prikazani uglašani srednji godišnji proticaji na analiziranim stanicama za period 1931–2012. zajedno sa širinom prozora uglašavanja  $n_w$  koji sadrži 13 članova.



Slika 4-9. Optimizaciona tehnika DPU za određivanje širine  $n_w$  vremenskog prozora metode LOESS za godišnje i sezonske proticaje na st. Ljubičevski Most (r. Velika Morava)



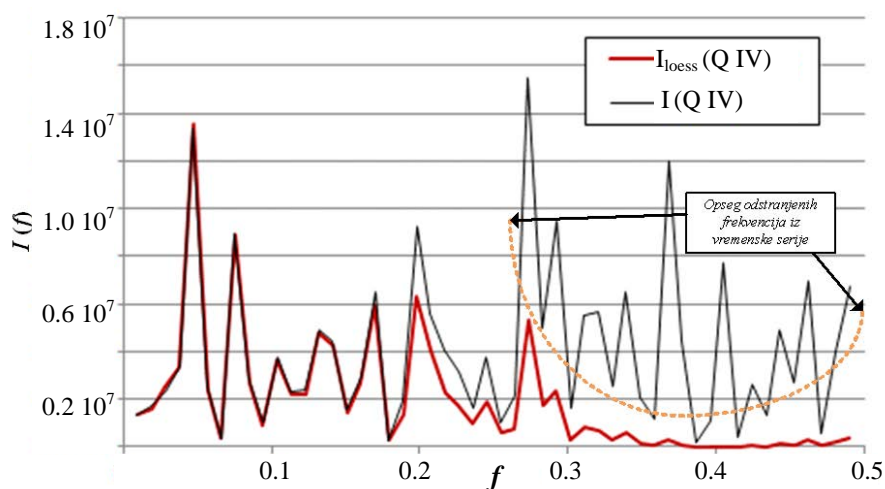
**Slika 4-10. Osmotreni i uglačani godišnji proticaji po metodi LOESS sa širinom prozora uglačavanja  $nw=13$  na analiziranim stanicama za period 1931–2012.**

Uglačani proticaji pokazuju da su promene vlažnih i sušnih višegodišnjih perioda prisutne na svim stanicama (slika 4-10). Reka Dunav (stanice Oršava i Bogojevo) ima istovremenu smenu višegodišnjih perioda na stanicama Oršava i Bogojevo. Na reci Savi (stanica Sremska Mitrovica) je smena ovih perioda pomerena i dešava se nekoliko godina ranije. Reke Velika Morava, Tisa i Lim pokazuju slične višegodišnje cikluse sa manjim međusobnim faznim razlikama. Prikaz uglačanih srednjih godišnjih i sezonskih proticaja zajedno sa širinom prozora uglačavanja  $nw$  po metodi LOESS dat je u grafičkom prilogu G-6.

Na razmatranim godišnjim serijama utvrđena je optimalna širina prozora od  $nw=13$  članova (slika 4-10), dok se kod sezonskih proticaja širina prozora kreće u razmaku od 7 do 11 članova. Tokom zimskih ( $Q I$ ) i letnjih ( $Q III$ ) sezona širina prozora uglačavanja iznosi 9-11 članova, u prolećnoj sezoni ( $Q II$ ) za uglačavanje proticaja je potrebno od 7 do 9 članova, dok je najmanja širina prozora uglačavanja od 7 članova potrebna u jesenjim mesecima ( $Q IV$ ). Manji broj članova u vremenskom prozoru upućuje na veći stepen uglačavanja sezonskih proticaja kako bi se izolovala makroperiodičnost. To ujedno znači da je u sezonskim serijama u većoj meri prisutna periodičnost visokih frekvencija, nego u slučaju godišnjih serija. Ukoliko bi se na sezonskim proticajima primenio širi prozor uglačavanja to bi dovelo do izolovanja makroperiode sa malim

učešćem u varijansi ukupne serije, pogotovo u jesenjoj sezoni u kojoj je širina prozora uglačavanja najmanja.

Uglačane serije godišnjih i sezonskih proticaja se koriste za određivanje periodograma. Periodogram se određuje u skladu sa formulom (3.50) pri čemu se Furijeovi koeficijenti ( $a_i$ ,  $b_i$ ) određuju za zadatu frekvenciju  $f_i$  prema formuli (3.48). Na taj način se definiše intenzitet periodičnosti  $I_{loess}(f)$  duž zadatih frekvencija  $f$ . Ilustracija periodograma data je na slici 4-11 za serije srednjih jesenjih proticaja ( $Q$  IV) na stanici Oršava.

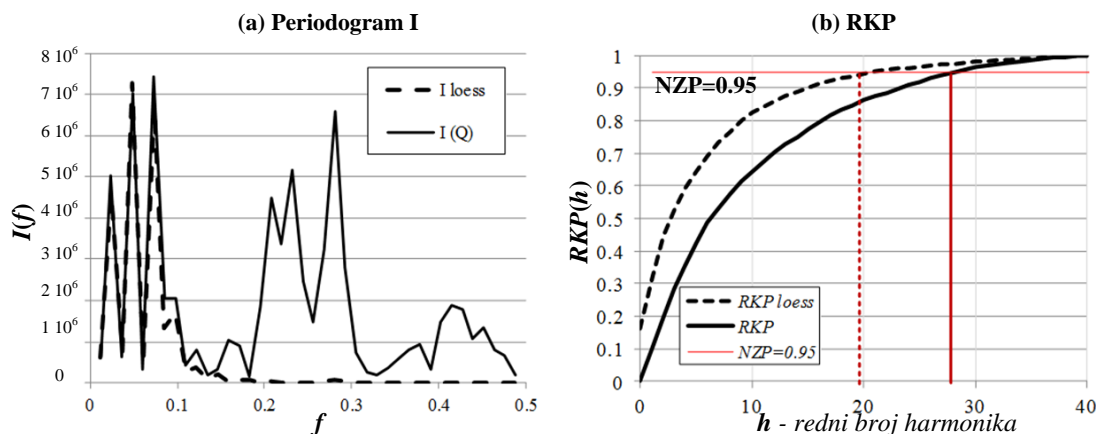


**Slika 4-11. Periodogram osmotrenog  $I(Q IV)$  i uglačanog proticaja  $I_{loess}(Q IV)$  tokom jesenje sezone po metodi LOESS na st. Oršava (r. Dunav)**

Na prethodnoj slici osim periodograma uglačanih serija  $I_{loess}(Q IV)$  dat je i periodogram osmotrenih serija  $I(Q IV)$ . Periodogram osmotrenih srednjih sezonskih proticaja  $I(Q IV)$  daje skokove u širokom rasponu frekvencija. Skokovi u intezitetu periodičnosti javljaju se kako kod nižih, tako i kod viših frekvencija. Uglačavanjem vremenske serije postiže se izolovanje nižih frekvencija, tj. velikih perioda, koje karakterišu višegodišnju makroperiodičnost serije. Razlika između periodograma osmotrenih  $I(Q IV)$  i uglačanih serija  $I_{loess}(Q IV)$  predstavlja odstranjene frekvencije (slika 4-11). Odstranjene periodičnosti na visokim frekvencijama (malim periodama) predmet su modeliranja autoregresionim modelima koji su prikazani u poglavlju 3.7.2.

Kada su registrovani svi skokovi periodograma određuje se njihovo učešće u varijansi uglačane serije i definiše skup značajnih perioda na osnovu kojih će se modelirati višegodišnja periodična komponenta. Određivanje značajnih perioda vrši se putem relativnog kumulativnog periodograma (RKP) koji se određuje korišćenjem izraza (3.63).

Primena relativnog kumulativnog periodograma (RKP) data je na slici 4-12(b) zajedno sa periodogramom (I) (slika 4-12(a)). Ovom prilikom je korišćena stanica Oršava sa serijom godišnjih i uglačanih godišnjih proticaja za period 1931–2012.



**Slika 4-12. Periodogram I (a) i relativni kumulativni periodogram RKP (b) osmotrenih i uglačanih (LOESS) godišnjih proticaja za st. Oršava (r. Dunav)**

Nivo značajnosti perioda NZP zadat je na 95% sume intenziteta periodičnosti (slika 4-12(a)). Priraštaj RKP je veći za seriju uglačanih godišnjih proticaja u odnosu na osnovnu seriju. Razlog se nalazi u činjenici da osnovna serija ima cikličnost u domenu visokih i niskih frekvencija, dok uglačana serija ima cikličnost samo u domenu niskih frekvencija. Po svojoj prirodi razmatrani godišnji proticaji imaju veće amplitude značajnih višegodišnjih perioda nego što je slučaj sa malim periodama na visokim frekvencijama, pa je priraštaj kumulativnog periodograma osnovnih serija manji nego kod uglačanih serija. RKP periodogram pojedinih serija sezonskih proticaja ima brži priraštaj osnovnih serija u odnosu na uglačane vrednosti. Ova pojava je naglašena tokom jesenje sezone ( $Q$  IV) na stanicama Oršava, Bogojevo, Sremska Mitrovica i Prijepolje, kao i kod letenje sezone ( $Q$  III) na stanicama Ljubičevski Most i Prijepolje. Brži priraštaji osnovnih serija sezonskih proticaja objašnjavaju se većim amplitudama značajnih harmonika visokih frekvencija u odnosu na niske frekvencije. Relativni kumulativni periodogram RKP svih analiziranih serija godišnjih i sezonskih proticaja sa nivoom značajnih perioda NZP= 95% je prikazan u grafičkom prilogu G-8.

Postupak sa zadatim pragom periodičnosti od 95% primenjen je za određivanje značajnih perioda na svim razmatranim serijama proticaja, gde je definisan broj značajnih perioda koje se koriste za modeliranje periodične komponente vremenske serije. Istovremeno sa ovim testom primenjen je i Fisher test koji je prikazan u delu

3.6.1.3. Ovim testom se definiše učešće svake periode u ukupnoj periodičnosti serije. Statistika testa data je u izrazu (3.62), a na osnovu ukupnog broja članova vremenske serije  $N$  određuje se kritična vrednost statistike testa. Rezultati analize periodičnosti godišnjih proticaja prikazani su u tabeli 4-9 zajedno sa elementima prvih pet značajnih harmonika.

**Tabela 4-9 Periodogram godišnjih proticaja na razmatranim stanicama:  $a_i$  i  $b_i$  - Furijeovi koeficijenti,  $c_i$  - rezultujuća amplituda harmonika,  $I_i$  - intenzitet periodičnosti,  $f_i$  - frekvencija,  $T_i$  - perioda,  $g_i$  - Fisher test statistika,  $RKP_i$  - relativni kumulativni periodogram**

stanica	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$I_i$	$f_i$	$T_i$	$g_i$	$RKP_i$
r. Dunav, st. Oršava	-354.4	228.3	421.6	7286400	0.049	20.5	<b>0.291</b>	<b>0.162</b>
	-194.9	-354.5	404.5	6708537	0.073	13.7	<b>0.378</b>	<b>0.317</b>
	333.6	-25.2	334.6	4590038	0.024	41.0	<b>0.415</b>	<b>0.445</b>
	-203.8	-6.7	203.9	1705016	0.098	10.3	<b>0.263</b>	<b>0.524</b>
	136.2	-116.9	179.5	1320896	0.085	11.7	<b>0.277</b>	<b>0.593</b>
r. Dunav, st. Bogojevo	197.6	-0.8	197.6	1600844	0.024	41.0	<b>0.207</b>	<b>0.130</b>
	-178.5	60.9	188.6	1458653	0.049	20.5	<b>0.238</b>	<b>0.254</b>
	-76.1	-158.0	175.3	1260596	0.073	13.7	<b>0.270</b>	<b>0.370</b>
	-167.2	-11.3	167.6	1151263	0.098	10.3	<b>0.337</b>	<b>0.480</b>
	0.5	117.5	117.5	565623	0.037	27.3	<b>0.250</b>	<b>0.557</b>
r. Sava, st. S.Mitrovica	-62.5	128.2	142.6	823443	0.049	20.3	<b>0.372</b>	<b>0.174</b>
	-107.6	-55.0	120.9	591607	0.074	13.5	<b>0.426</b>	<b>0.321</b>
	62.5	-50.0	80.0	259346	0.025	40.5	<b>0.326</b>	<b>0.419</b>
	-28.8	53.9	61.1	151339	0.037	27.0	<b>0.282</b>	<b>0.493</b>
	-40.4	35.7	53.9	117826	0.062	16.2	<b>0.306</b>	<b>0.559</b>
r. Tisa, st. Senta	-22.0	-101.2	103.5	439389	0.073	13.7	<b>0.218</b>	<b>0.115</b>
	-77.8	54.9	95.2	371543	0.049	20.5	<b>0.236</b>	<b>0.221</b>
	91.9	13.4	92.8	353352	0.024	41.0	<b>0.293</b>	<b>0.325</b>
	-68.1	-28.7	73.9	223908	0.037	27.3	<b>0.263</b>	<b>0.407</b>
	58.5	-10.0	59.3	144234	0.085	11.7	<b>0.230</b>	<b>0.473</b>
r. V.Morava st. Lj. Most	-20.2	19.3	27.9	32003	0.049	20.5	<b>0.228</b>	<b>0.076</b>
	-22.1	-5.2	22.7	21173	0.061	16.4	<b>0.195</b>	<b>0.152</b>
	-21.1	7.6	22.4	20593	0.098	10.3	<b>0.236</b>	<b>0.214</b>
	-0.7	-18.1	18.1	13468	0.037	27.3	<b>0.189</b>	<b>0.269</b>
	-1.0	-18.1	18.1	13450	0.073	13.7	<b>0.162</b>	<b>0.322</b>
r. Lim st.Prijepolje	-5.05	6.08	7.91	2563	0.049	20.5	<b>0.283</b>	<b>0.164</b>
	3.58	-3.55	5.04	1043	0.122	8.2	<b>0.161</b>	<b>0.268</b>
	0.84	4.57	4.64	884	0.110	9.1	<b>0.162</b>	<b>0.364</b>
	-3.76	-0.84	3.85	609	0.073	13.7	0.134	<b>0.444</b>
	-2.84	0.87	2.97	361	0.098	10.3	0.091	<b>0.506</b>

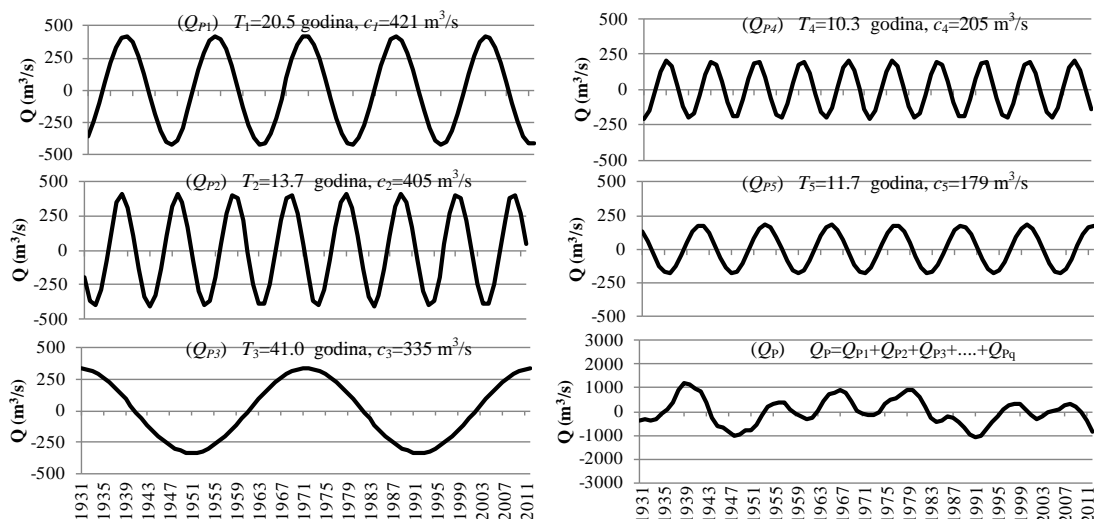
Prva značajna godišnja perioda na svim stanicama kreće se u rasponu 14-41 godina, druga perioda u granicama 8-41 godina dok treća perioda u okviru intervala 9-41 godinu. Zaključuje se da su u najvećem broju slučajeva periode u tabeli 4-9 značajne po RKP testu sa zadatim pragom periodičnosti od 95% kao i Fisher testu na pragu značajnosti

$\alpha=0.05$ . Na stanici Prijepolje registrovane su periode koje se nalaze u okviru RKP periodograma za NZP=95%, a nisu značajne po Fisher testu.

Na osnovu rezultata analize periodičnosti iz tabele 4-9 moguće je modelirati promenu višegodišnjih sušnih i vlažnih ciklusa na analiziranim slivovima. Tako se definiše skup značajnih perioda godišnjih i sezonskih proticaja za NZP=95% i modelira se makroperiodična komponenta  $Q_P(t)$  u skladu sa izrazom (3.47). U tabelarnom prilogu T-5 pokazana je statistika Fisher testa za prvih pet najuticajnijih perioda serija sezonskih proticaja na razmatranim stanicama. Periodogrami korišćeni za modeliranje makroperiodične komponente  $Q_P(t)$  za godišnje i sezonske proticaje prikazani su u grafičkom prilogu G-7.

Značajne periode godišnjih proticaja iz tabele 4-9 upućuju na to da u serijama postoji osnovna perioda sa periodom oscilovanja  $T_0$  koji se zatim kod drugih perioda multiplikuje više puta  $2T_0, 3T_0, \dots$ . Kako bi se ispitaio ovaj fenomen izolovana je prva po značajnosti godišnja perioda  $Q_{P1}$  na stanici Oršava. Odstranjivanjem prve modelirane periode godišnja serija proticaja je podvrgnuta utvrđivanju periodičnosti. Postupak je nastavljen tako što se sukcesivno odstranjuje perioda sa najvećom amplitudom ( $Q_{P2}, Q_{P3}, \dots$ ), a zatim se utvrđuje periodičnost. Zaključeno je da ne postoji multiplikacija perioda u godišnjoj seriji proticaja već su sukcesivno izolovane periode identične po periodu oscilovanja, amplitudama i faznim pomeranjima kao i periode utvrđene iz integralne serije godišnjih proticaja. Kako bi se ilustrovaio ovaj postupak na slici 4-13 prikazane su modelirane značajne periode na stanici Oršava. Sumiranjem značajnih perioda do nivoa NZP=95% dobija se ukupna modelirana makroperiodična komponenta  $Q_P$ .





Slika 4-13. Značajne periode ( $Q_{P1}$ ,  $Q_{P2}$ ,  $Q_{P3}$ ,  $Q_{P4}$ ,  $Q_{P5}$ ) i makroperiodična komponenta  $Q_P$  godišnjih proticaja na st. Oršava (r. Dunav)

#### 4.2.4.2 Kontinualni periodogram

Kontinualni spektar je upotrebljen da bi se utvrdila periodičnost duž celog frekventnog opsega, a da se potom niske frekvencije ili frekvencije velikih perioda uporede sa rezultatima diskretnog spektra ili periodograma. Kontinualna frekventna analiza sprovedena je ponederisanjem i skraćivanjem kovarijansne funkcije  $C_r$ . Spektar je određen u skladu sa izrazom (3.65), a težinski koeficijent kovarijansne funkcije  $\lambda$  je određen skraćivanjem ukupne dužine kovarijansne funkcije za trećinu ( $M = N/3$ ) prema iznetim generalnim preporukama (Chatfield, 2004).

U tabelarnom prilogu T-4 prikazano je po pet najuticajnijih perioda za analizirane vremenske serije godišnjih i sezonskih proticaja, koje su dobijene po metodi B-T. Grafička interpretacija spektra godišnjih i sezonskih proticaja data je u grafičkom prilogu G-5. Analiza u frekventnom domenu pokazala je da serije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja imaju izraženu periodičnost u domenu niskih i visokih frekvencija. Na svim analiziranim stanicama postoje značajne male periode od 3.6 i 4.9 godina. Na stanicama Bogojevo i Ljubičevski Most pojavljuje se i dodatna perioda od 4.3 godina.

Od posebne važnosti za analizu vremenskih serija je periodičnost u domenu niskih frekvencija ili velikih perioda. Višegodišnje makroperiode dobijene po metodi B-T mogu da se grupišu po veličini perioda u sledeće grupe:

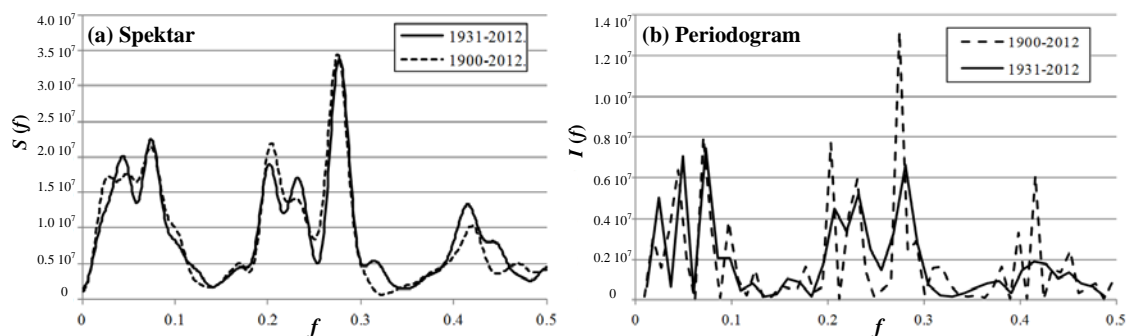
- I grupa: 8.5–10.5 godina,
- II grupa: 12.5–14.5 godina,

- III grupa: 20.5–24.5 godina,
- IV grupa: 27.5–35.5 godina.

Kada se utvrde značajne periode niskofrekventnog kontinualnog spektra uviđa se da su one slične periodama uglačanih vremenskih serija dobijenim diskretnim spektrom. Tako su na stanici Oršava registrovani najveći skokovi na periodogramu sa periodama od 20.5, 13.7 i 41 godina, a korespondentne periode sa kontinualnog spektra iznose 20.8, 13.5 i 35.7 godina. Primećena je i osobina periodograma da se njegove dve uticajne periode superponiraju u jednu periodu, koja je dobijena na osnovu kontinualnog spektra. Na primeru stanice Senta registrovane su uticajne periode korišćenjem periodograma od 20.5 i 41.0 godina koje se superponiraju u jednu periodu kontinualnog spektra od 32.3 godina.

#### 4.2.4.3 Uticaj dužine vremenske serije na ocenu periodičnosti

Bitan parametar prilikom ocene periodičnosti vremenskih serija jeste dužina vremenske serije. Vremenska serija treba da ima dovoljnu dužinu da bi se periodičnost što bolje procenila. Uticaj dužine vremenske serije na procenu spektra ispitan je korišćenjem kontinualnog spektra na primeru stanice Oršava. Tom prilikom korišćen je kontinualni spektar po metodi *B-T* i to za dva perioda, 1900–2012 i 1931–2012.

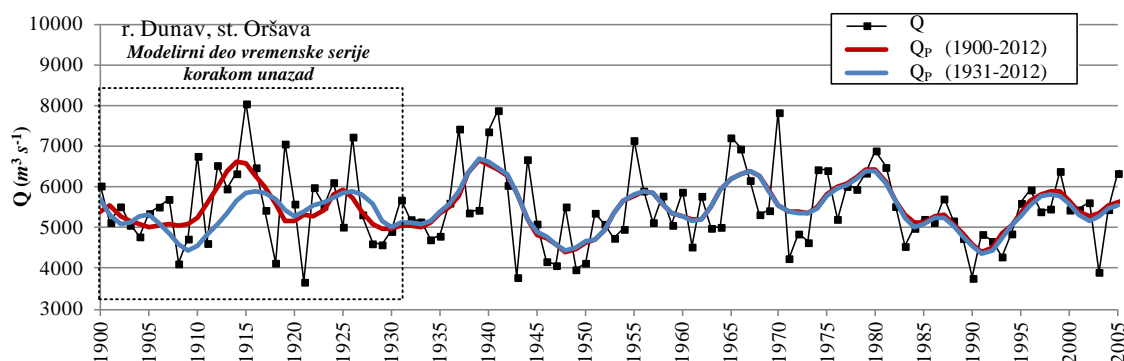


Slika 4-14. Spektar po metodi *B-T* (a) i periodogram (b) godišnjih proticaja na stanici Oršava za periode 1900–2012 i 1931–2012

Na slici 4-14 se vidi da se javljaju odstupanja u intenzitetu periodičnosti na spektru i periodogramu usled nejednakih vremenskih intervala za ocenu periodičnosti, pri čemu su odstupanja periodograma izraženija. Odstupanja su vidljiva u domenu visokih frekvencija ili malih perioda, dok se skokovi na spektru i periodogramu nalaze na približno istim frekvencijama za niske frekvencije ili velike periode koje se koriste prilikom modeliranja makroperiodične komponente. Odstupanja u domenu visokih

frekvencija ili malih perioda se registruje za frekventni opseg koji korespondira periodama od 2.5 do 2 godine.

Da bi se utvrdio uticaj dužine vremenske serije na ocenu periodičnosti, izvršeno je modeliranje periodične komponente srednjih godišnjih proticaja za istorijski period koji ne obuhvata period za ocenu periodičnosti. Tom prilikom korišćen je periodogram stanice Oršava za period 1931–2012. (slika 4-14, b), a za modeliranje srednjih uglačanih godišnjih proticaja periodogram za period 1900–1931. Drugim rečima, modelira se period od 1900. do 1930. godine korišćenjem informacija o periodičnosti vremenskih serija za period 1931–2012. Modelirane godišnje vremenske serije na stanici Oršava prikazane su na slici 4-15. Na ovoj slici su prikazane modelirane periodične komponente za period 1900–2012. (crvena linija) i za period 1931–2012. (plava linija).



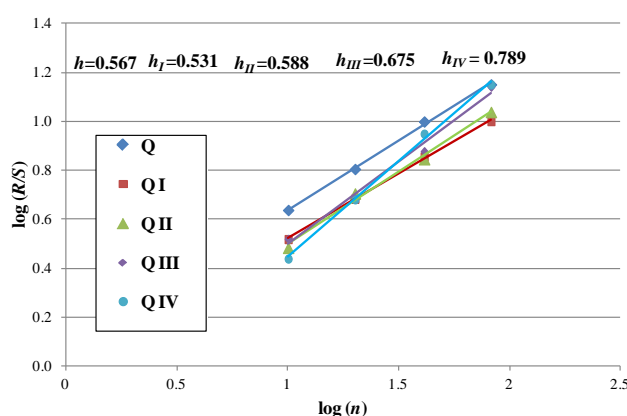
Slika 4-15. Godišnji proticaji  $Q$  i modelirane periodične komponente  $Q_p$  na st. Oršava za periode 1900–2012. i 1931–2012. sa modeliranjem unazad za period 1900–1930

Kao što se vidi sa slike 4-15, za zajednički period 1931–2012. uglačani srednji godišnji proticaji pokazuju visok stepen slaganja za oba perioda koja su korišćena za procenu periodograma. Za period 1900–1930. korišćen je kraći period za ocenu periodičnosti, a modeliranje ostatka vremenske serije vršeno je korakom unazad. Korišćenjem takvog pristupa modelirana višegodišnja komponenta za period 1917–1930. pokazuje slaganje po amplitudi i faznom pomeranju, uz manja odstupanja. Modelirani period od 1908. do 1916. godine pokazuje veća odstupanja, pa se fazno pomeranje od dve godine javlja tokom lokalnog maksimuma koji se u uglačanoj seriji javlja 1914. Osim toga, apsolutne vrednosti modeliranih uglačanih proticaja su manje nego u osnovnoj seriji. Poslednji period 1900–1907. pokazuje bolje slaganje nego u slučaju prethodnog dela modelirane serije.

#### 4.2.4.4 Hurstov fenomen

Za utvrđivanje dužine memorije vremenskih serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja koristi se Hurstova analiza. Detaljno objašnjenje ove analize dato je u poglavlju 3.6.4. Ovaj fenomen je utvrđen na velikom broju hidrometeoroloških vremenskih serija. Tako je Bloomfeld (1992) pokazao da serije srednjih temperatura na zemlji poseduju dugu memoriju, tj. predstavljaju Hurstov proces. Radziejewski i Kundzewicz (1997) i Vogel i sar. (1998) utvrdili su isto svojstvo za serije srednjih godišnjih proticaja u Evropi i SAD.

Kada se definiše odnos  $(R/S)_i$  za različite dužine podserija ( $n$ ) za razmatranu seriju godišnjeg ili sezonskog, tada je potrebno u skladu sa formulom (3.74) date veličine logaritmovati. U logaritamskoj razmeri nanose se vrednosti dužine podserije ( $n$ ) na apcisi i vrednosti odnosa  $(R/S)_i$  na ordinati. Koeficijent  $h$  dobija se primenom postupka linearne regresije, gde on predstavlja koeficijent nagiba regresione prave. Na slici 4-16 prikazano je određivanje Hurstovog koeficijenta  $h$  za seriju srednjih sezonskih i godišnjih proticaja na stanici Oršava.



Slika 4-16. Hurstov koeficijent  $h$  za seriju godišnjih i sezonskih proticaja na st. Oršava (r. Dunav)

Na primeru srednjih godišnjih i sezonskih proticaja na stanici Oršava utvrđeno je da Hurstov koeficijent iznosi u rasponu 0.531–0.789, pri čemu najdužu memoriju imaju jesenji i letnji proticaji.

Razmatrane vremenske serije imaju 82 člana, pri čemu se formiranim podserijama sukcesivno smanjuje broj članova na 41, 20 i 10. Hurstov koeficijent za serije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja na analiziranim hidrološkim stanicama dat je u grafičkom prilogu G-9. Veličina koeficijenta  $h$  kreće se u rasponu 0.509–0.795 što

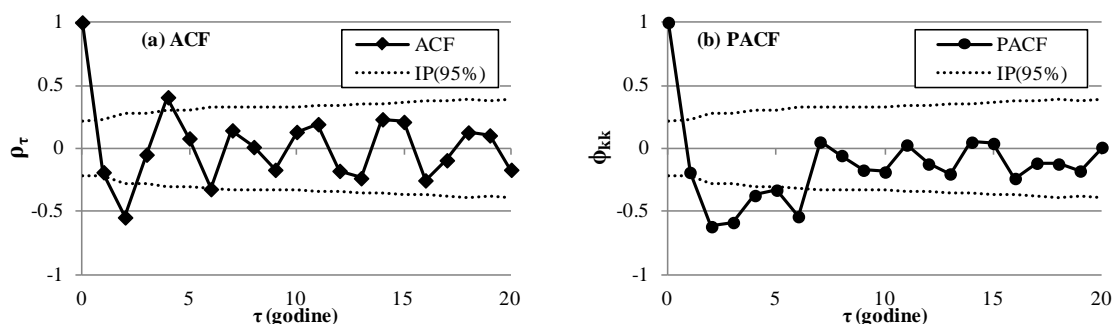
dovodi do zaključka da su razmatrane vremenske serije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja sa dugom memorijom.

#### 4.2.5 Stohastička komponenta

Stohastička komponenta se modelira korišćenjem reziduala druge vrste  $Q''(t)$  iz izraza (3.34), pošto je iz godišnjih i sezonskih serija proticaja oduzet modeliran značajan linearni trend  $Q_T(t)$  i makroperiodična komponenta  $Q_P(t)$ . Vremenska serija  $Q''(t)$  transformiše se u skladu sa izrazom (3.92) pri čemu se dobija nova serija  $x_t$ . Postupak modeliranja serije  $x_t$  korišćenjem stohastičkih linearnih modela sastoji se iz četiri faze: identifikacija, estimacija, izbor i verifikacija modela. Metodološki okvir za modeliranje stohastičke komponente prikazan je u poglavlju 3.7.

#### Identifikacija modela

Identifikacija ARMA modela sprovodi se analizom vrednosti ACF i PACF godišnjih i sezonskih vremenskih serija  $x_t$ . ACF serija  $x_t$  pokazuje značajnu autokorelaciju na prvih  $\tau=6-7$  pomaka izvan intervala poverenja od 95%. ACF je u obliku prigušenog talasa iz čega proizilazi da se sukcesivno javlja negativna i pozitivna autokorelisanost razmatranih serija. Za razliku od nje, PACF godišnjih i sezonskih serija  $x_t$  pokazuje značajnu autokorelaciju do  $\tau=6-7$  pomaka. Posle toga, vrednosti PACF se naglo smanjuju i nakon  $\tau=6-7$  pomaka vrednosti više nisu značajne. Ovo ponašanje ACF i PACF karakteristično je za sve analizirane serije, tj. za transformisane rezidualne druge vrste srednjih godišnjih i sezonskih proticaja. Za ilustraciju su poslužile ACF i PACF godišnje vremenske serije  $x_t$  na stanici Oršava.



Slika 4-17. ACF (a) i PACF (b) godišnje serije  $x_t$  sa intervalima poverenja 95% na st. Oršava (r. Dunav)

Na slici 4-17 zapaža se talasasti oblik ACF za godišnju seriju proticaja na stanici Oršava koji odstupa od intervala poverenja 95% do pomaka  $\tau=6$ . PACF ima značajne vrednosti do pomaka  $\tau=6$  posle čega vrednosti ove funkcije nisu značajne. Identifikacija ARMA

modela za razmatranu seriju godišnjeg proticaja vrši se korišćenjem karakterističnih oblika ACF i PACF iznetih u tabeli 3-2. Razmatrane ACF i PACF pokazuju osobine autoregresionih procesa  $AR(p)$  višeg reda  $p$ , a potrebno je razmatrati i ARMA  $(p, q)$  modele pri čemu je operator pokretnih sredina  $q$  nižeg reda. Sprovedenjem identifikacije modela na svim razmatranim serijama godišnjeg i sezonskog proticaja zaključuje se da predstavljaju  $AR(p)$  procese reda  $p=6-7$  ili ARMA  $(p, q)$  procese sa regresionim operatorom reda  $p=6-7$  i operatorom pokretnih sredina  $q=1$ .

### **Estimacija modela**

Pošto je izvršena identifikacija modela potrebno je proceniti autoregresione koeficijente  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  i koeficijent modela pokretnih sredina  $\theta_1$ . Određivanje autoregresionih koeficijenata vrši se korišćenjem Yule-Walker sistema jednačina (3.110). Parametri pokretne sredine MA(1) procesa određeni su za red  $q=1$  u skladu sa rešenjima jednačine (3.117). Proces određivanja parametara predstavlja privremenu formulaciju modela, posle čega se vrši preciznija procena parametara modela. Precizna procena parametara predstavlja kompleksnu strukturu matematičkih operacija koje je potrebno preduzeti kako bi se poboljšali parametri efikasnosti ARMA modela. U tu svrhu upotrebljen je softverski paket MatLab u kome se za precizno ocenjivanje parametara modela koristi princip minimalne sume kvadratne greške (Box i sar., 2008).

Paralelno sa estimacijom parametara ARMA modela ispituje se stacionarnost autoregresionog dela  $AR(p)$  i invertibilnost modela pokretnih sredina MA(1). Invertibilnost MA(1) procesa je ispunjena pošto je koeficijent pokretnih sredina zadovoljio uslov  $|\theta_1| < 1$ . Pokazano je da autoregresioni modeli srednjih godišnjih i sezonskih proticaja ispunjavaju uslove stacionarnosti, tj. sva rešenja polinoma za  $\phi(B)=0$  se nalaze izvan jediničnog kruga. Stacionarnost je iskazana korišćenjem modula kompleksnog broja  $C_i$  iracionalnih i racionalnih rešenja pri čemu racionalna rešenja polinoma imaju koordinatu na imaginarnoj osi jednaku nula. Moduli kompleksnog broja  $C_i$  razmatranih modela godišnjih i sezonskih proticaja dati su u tabelarnom prilogu T-6.

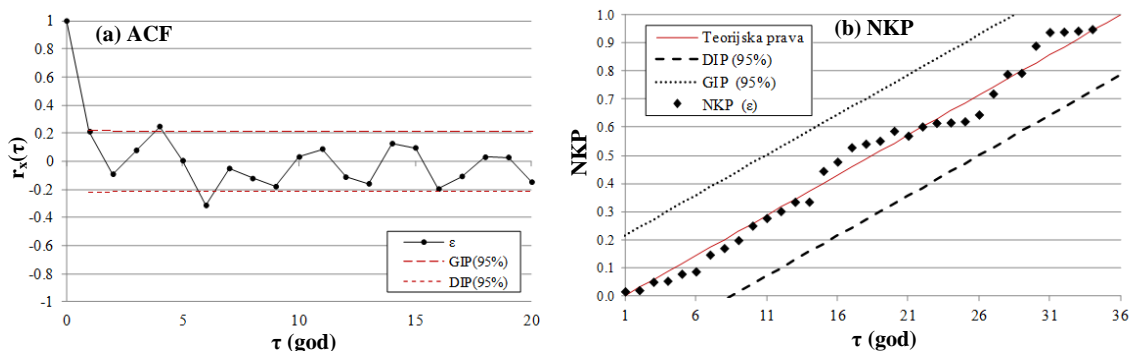
### **Izbor modela**

Izbor modela vršen je u skladu sa kriterijumom AIC koji je prikazan u izrazu (3.122). Minimizacijom kriterijuma  $AIC(p, q)$  izvršen je izbor modela koji se najbolje prilagođava vremenskoj seriji  $x_t$  godišnjih i sezonskih proticaja. Tako je za srednje

godišnje serije  $x_t$  na stanici Oršava (slika 4-16) izabran model AR(6). Zapaža se da modeli ARMA( $p,1$ ) pokazuju veće odstupanje od reziduala druge vrste po kriterijumu AIC. Razlog se nalazi u činjenici da stohastička komponenta pokazuje izraženu autokorelisanost, a da su slučajne osobine ove komponente naglašene u manjoj meri. Stohastička komponenta na ostalim analiziranim serijama godišnjeg i sezonskog proticaja pokazuje da se najbolje slaganje ostvaruje primenom AR(6) i AR(7) modela. Rezultati modeliranja stohastičke komponente srednjih godišnjih proticaja izloženi su u tabeli 4-10 dok su izabrani autoregresioni modeli za serije sezonskih proticaja prikazani u tabelarnom prilogu T-7.

### Verifikacija

Verifikacija ARMA modela vršena je korišćenjem autokorelacione funkcije ACF i normalizovanim kumulativnim periodogramom NKP. Za ilustraciju su na slici 4-18 prikazane ACF i NKP greške modeliranja  $\varepsilon_t$  ARMA modela za godišnje proticaje na stanici Oršava.



Slika 4-18. Testiranje greške modela  $\varepsilon_t$  ARMA modela putem ACF (a) i NKP (b) za seriju godišnjih proticaja na st. Oršava za prag značajnosti  $\alpha=0.05$

ACF greške modeliranja  $\varepsilon_t$  na prvim koracima ne odstupaju od intervala poverenja od 95% pri čemu se manje odstupanje javlja na većem pomaku  $\tau$ . Primećeno je da  $\varepsilon_t$  ne sadrži zaostalu periodičnost jer ne postoji odstupanje od Kolmogorov-Smirnov teorijskih linija za interval poverenja 95%. Zaključuje se da greška modeliranja predstavlja slučajnu vremensku seriju bez značajne serijske korelacije i periodičnosti.

ACF za ostale vremenske serije godišnjih i sezonskih proticaja ne pokazuje značajnu autokorelisanost za prag značajnosti  $\alpha=0.05$ . Manja odstupanja od intervala poverenja se javljaju za nekoliko vremenskih serija na većim pomacima  $\tau$ . Greška modeliranja analiziranih godišnjih i sezonskih proticaja je takođe bez zaostale periodičnosti na

zadatom pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Rezultati testiranja greške modeliranja sezonskih i godišnjih proticaja korišćenjem ACF i NKP prikazani su u grafičkom prilogu G-11 i G-12.

Slučajnost greške modeliranja  $\varepsilon_t$  ARMA modela testirana je putem Portemanteau i Box-Ljung test statistike. Na osnovu izraza (3.124) određene su vrednosti test statistika  $Q_{BL}$  i  $Q_{PM}$  koje su za razmatrane serije godišnjih proticaja prikazane u tabeli 4-10.

**Tabela 4-10. Parametri ARMA ( $p, q$ ) modela i testiranje greške  $\varepsilon_t$  modeliranja srednjih godišnjih proticaja:  $p$ -red modela, AIC kriterijum,  $Q_{BL}$  i  $Q_{PM}$  - test statistike**

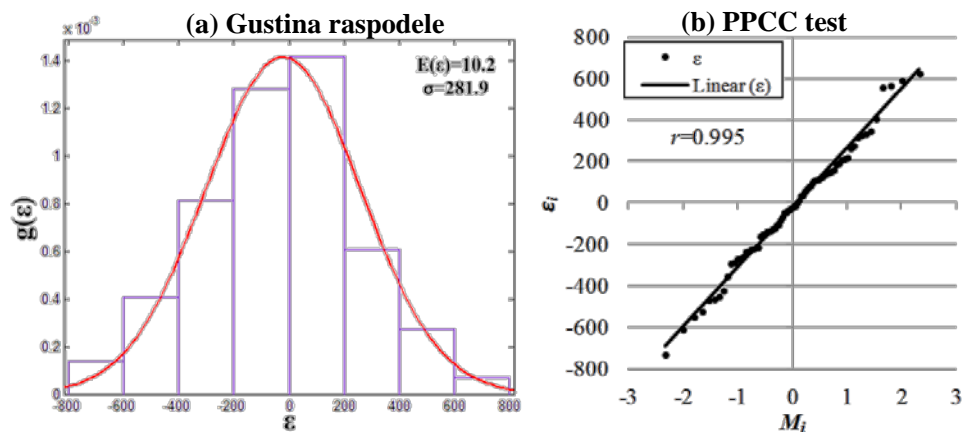
<i>reka/ stanica</i>	AR ( $p$ )	AIC	$Q_{BL}$	$Q_{PM}$
Dunav, Oršava	6	-113.0	13.06	13.80
Dunav, Bogojevo	6	-80.5	14.56	11.87
Sava, S. Mitrovica	6	-74.5	14.57	13.40
Tisa, Senta	7	-83.0	11.51	10.62
Velika Morava, Lj. Most	7	-116.9	15.26	14.67
Lim, Prijepolje	7	-97.1	13.55	12.43

Kritična vrednost test statistike za prag značajnosti  $\alpha=0.05$  i broj stepeni slobode 8 iznosi  $\chi^2_{\alpha}=15.79$ . Test statistike  $Q_{BL}$  i  $Q_{PM}$  u slučaju srednjih godišnjih proticaja pokazuju manje vrednosti od kritične pa greška modeliranja predstavlja slučajnu seriju. U slučaju razmatranih srednjih sezonskih proticaja greška modeliranja takođe predstavlja slučajnu vremensku seriju na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$  što je pokazano u tabelarnom prilogu T-7.

Kada je utvrđeno da greška ARMA modela predstavlja slučajnu seriju na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$  ispituje se da li je ona saglasna normalnoj raspodeli. U tu svrhu korišćeni su Jarque-Bera i PPCC test koji su prikazani u delu 3.3.2. Rezultati testiranja normalnosti su pokazali saglasnost oba testa. Utvrđeno je da 24 vremenske serije  $\varepsilon_t$  pripadaju normalnoj raspodeli, a da 6 serija ne pripada normalnoj raspodeli na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Vremenske serije koje pripadaju normalnoj raspodeli odstupaju značajno od kritičnih vrednosti razmatranih testova. Pored toga, utvrđeno je da aritmetička sredina vremenskih serija  $\varepsilon_t$  ne odstupa značajno od  $E(\varepsilon_t)=0$ . Uzoračka varijansa serije greške modeliranja ne pokazuje značajne promene tokom vremena. Na kraju se zaključuje da greška modeliranja u 24 od 30 slučajeva predstavlja Gausov šum. Rezultati primenjenih testova dati su u tabelarnom prilogu T-12.



Kako bi se grafički interpretirale osobine greške modeliranja na slici 4-19 (a) prikazan je histogram greške modeliranja srednjih godišnjih proticaja na stanici Oršava. Osim toga, na slici 4-19 (b) prikazani su rezultati PPCC testa za istu vremensku seriju.



Slika 4-19. Gustina raspodele greške modeliranja (a) i testiranje normalnosti korišćenjem PPCC testa (b) za godišnje proticaje na st. Oršava (r.Dunav)

Na slici 4-19 data je grafička interpretacija koeficijenta korelacije ( $r=0.995$ ) između greške modeliranja  $\varepsilon_i$  i inverzne kompromisne verovatnoće normalne raspodele  $M_i$ . Koeficijent korelacije prevazilazi kritičnu vrednost  $r_{\alpha=0.05}(82)=0.984$  za seriju srednjih godišnjih proticaja na stanici Oršava tako da greška modeliranja ima normalnu raspodelu.

### 4.3 Diskusija

Brojna istraživanja sprovedena u skorije vreme upućuju na zaključak da se klimatski sistem Zemlje kroz istoriju menjao na svim vremenskim skalama (Koutsoyiannis 2003; Koutsoyiannis i Montanari 2014). U skladu sa promenama klimatskog sistema dešavaju se i promene hidrološkog sistema. Promene godišnjih proticaja sastoje se u smeni dugoročnih sušnih i vlažnih perioda i oslikavaju se dugoročnom statističkom zavisnošću godišnjih serija proticaja. Pored dugoročnih promena postoje i promene na kratkoročnoj vremenskoj skali koje se iskazuju autokorelacionom zavisnošću nekoliko sukcesivnih godišnjih serija proticaja.

Rezultati analize vremenskih serija za područje donjeg dela dunavskog sliva (reka Dunav, Sava, Tisa, Velika Morava i Lim) pokazale su da su tokom perioda 1931-2012. registrovane značajne dugoročne promene u godišnjim i sezonskim proticajima. Posle ispitivanja stacionarnosti putem Dickey-Fuller testa zaključuje se da najveći broj serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja nije stacionarno, dok je stacionarnost prisutna

kod priraštaja prvog reda analiziranih serija. Vizualno ispitivanje stacionarnosti sprovedeno je pokretnim sredinama od 30 godina. Pokretne sredine razmatranih procesa pokazuju varijacije tokom vremena, a neke serije pokazuju i vidljiv trend pokretnih sredina. Varijacije su najmanje za serije godišnjih proticaja dok su najveće za proticaje tokom letnje i jesenje sezone.

Integralnom krivom standardizovanih odstupanja godišnjih proticaja utvrđeno da se u okviru perioda 1931-2012. značajna smena vodnosti desila početkom 80-tih godina 20. veka. Za utvrđivanje pouzdanosti tačke promene hidrološkog režima korišćena je metoda *boot-strap*. Analiza homogenosti je potvrdila da je u drugom periodu, od početka 80-tih do 2012, došlo do značajnog smanjenja proticaja. Međutim, u vremenskim serijama srednjih godišnjih i sezonskih proticaja se ne zapažaju nagli skokovi ili prekidi u srednjoj vrednosti, tako da se zaključuje da navedene serije nisu prekidne. Obzirom da ne postoje nagle promene u vremenskim serijama dolazi se do zaključka da se promene dešavaju u višegodišnjim intervalima vremena, pri čemu je analiza trenda i periodičnosti ključna za analizu dugoročnih promena u serijama proticaja.

Parametarski (linearni trend) i neparametarski (Mann-Kendall test) trend testovi su registrovali opadajuće trendove godišnjih proticaja na svim rekama sa izuzetkom reke Tise (stanica Senta). Pored toga, opadajući trendovi tokom letnje i jesenje sezone prisutni su na svim stanicama pri čemu reka Tisa poseduje rastuće trendove. Ukoliko se rezultati testiranja monotonog trenda sagledaju sa gledišta značajnosti trenda dolazi se do toga da godišnji trendovi nisu značajni na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Značajni sezonski trendovi registrovani su tokom letnje sezone na stanici Bogojevo i tokom zimske sezone na stanici Senta dok za ostale sezonske proticaje trend nije značajan na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Rezultati Mann-Kendall testa ukazuju da se vrednosti test statistike umanjuju kada se uračuna efekat serijske korelacije. S obzirom na to da se u preduslovima razmatranog testa zahteva odstranjivanje serijske korelacije, merodavna statistika testa uključuje korekciju varijanse. Uprkos rezultatima neparametarskog testa, parametarski test je pokazao značajnost linearnog trenda godišnjih proticaja na stanici Bogojevo i Sremska Mitrovica za prag značajnosti  $\alpha=0.05$ . Značajan trend je registrovan tokom prolećne i letnje sezone na stanici Bogojevo i tokom zimske sezone

na stanici Senta. Ostale serije godišnjih i sezonskih proticaja ne pokazuju značajan linearni trend godišnjih i sezonskih proticaja. Ukoliko se rezultati analize trenda uporede sa prethodnim istraživanjima dolazi se do zaključka da je trend godišnjih proticaja, kao i trend tokom letnje i jesenje sezone, saglasan sa registrovanim opadajućim trendovima u jugoistočnom delu Evrope (Labat i sar., 2004; Milly i sar., 2005; Stahl i sar., 2010; Stojković i sar., 2013), nasuprot severnim delovima Evrope gde su registrovani rastući trendovi. Za razliku od njih, reka Tisa sa slivnim područjem u oblasti Karpata pokazuje rastuće trendove godišnjih i sezonskih proticaja.

Analiza neparametarskog trenda sprovedena korišćenjem multi-vremenskog pristupa pokazala je da na pravac i intenzitet trenda utiče dužina vremenske serije i položaj podserije u celoj vremenskoj seriji. Rezultati su dalje pokazali da na pravac trenda utiče višegodišnja periodičnost vremenskih serija. Uticaj periodičnosti je registrovan i primenom linearnog trenda sa pokretnim vremenskim prozorom od 30 godina. Ovom metodom se utvrđuje da se trend karakteriše dugogodišnjom linearnom komponentom ali i harmonijskom komponentom trenda. Izneti rezultati u skladu su sa zapažanjima drugih autora, pa je tako uticaj višegodišnje periodičnosti na analizu trenda maksimalnih godišnjih proticaja detektovao Kundzewicz i sar. (2005). Osobina vremenskih serija da tokom vremena menja pravac i intenzitet trenda, a kao posledica periodičnosti, primetili su Wilby (2006), Hannaford i Buys (2012), Hannaford i sar. (2013).

Analiza periodičnosti definiše ciklične promene proticaja koje se predstavljaju amplitudama, periodama i faznim pomeranjima. Na analiziranim serijama godišnjih i sezonskih proticaja značajne periode svrstane su u okviru četiri kategorije čije su srednje vrednosti sledeće: 9.5, 13.5, 22.5 i 31.5 godina. Brojne studije periodičnosti na prostoru Evrope su pokazale slične rezultate pri čemu se smena sušnih i vlažnih višegodišnjih perioda dešava u periodu od 10 do 40 godina (Pekarova i sar., 2006; Labat, 2006, Gudmundsson i sar., 2011; Stojković i sar., 2012a). Osim toga, utvrđene su pravilne smene višegodišnjih ciklusa na kontinentima (Probst i Taddy, 1987). Pekarova i sar. (2006) pokazali su da su višegodišnji ciklusi u Evropi pomereni za nekoliko godina između severne i zapadne Evrope.

Utvrđeni višegodišnji periodični obrazac služi da bi se dobile projekcije hidroloških serija koje se očekuju u budućnosti (Pekarova i Pekar, 2006). Pošto buduće serije nisu dostupne, u radu je primenjeno modeliranje godišnjih serija na osnovu značajnih perioda sa korakom u nazad. Modeliranjem korakom unazad izvršena je ekstrapolacija višegodišnje periodične komponente na stanici Oršava za period koji se desio u prošlosti, a koji nije korišćen za ocenu periodičnosti. Takav pristup nosi sa sobom stepen nesigurnosti, pogotovo zato što se radi o višegodišnjem periodu od 1900 do 1930. Pozitivna karakteristika takvog pristupa je da uspešno reprodukuje tendenciju istorijskih kraćih segmenata vremenske serije pri čemu je za period 1917–1930. god. utvrđeno značajno slaganje.

Utvrđivanje dugoročnih promena godišnjih proticaja ogleda se u ispitivanju dugoročne statističke zavisnosti vremenskih serija. Ukoliko postoji ovakva zavisnost onda serije godišnjih proticaja predstavljaju Hurstov proces (Hurst, 1951). Ispitivanje Hurstovog fenomena sprovedeno je pomoću  $R/S$  analize. U serijama godišnjeg i sezonskog proticaja utvrđeno je da se Hurstov koeficijent  $h$  nalazi u granicama 0.509–0.795. Pošto je  $h > 0.5$  zaključuje se da serije imaju dugu memoriju i da predstavljaju Hurstov proces.

Nasuprot dugoročnim promenama godišnjih serija proticaja stohastička komponenta definiše kratkoročne promene u vidu autokorelacione zavisnosti na prvim pomacima ACF. Stohastička komponenta serije godišnjih i sezonskih procesa modelirana je korišćenjem linearnih autoregresionih modela. Proces modeliranja obuhvatio je identifikaciju, izbor, estimaciju i verifikaciju modela. Utvrđeno je da serije godišnjih i sezonskih proticaja predstavljaju AR(6) i AR(7) procese. Greška modeliranja AR modela je slučajna vremenska serija, pri čemu je pokazano da 24 uzorka pripadaju normalnoj raspodeli i predstavljaju Gausov šum od ukupno razmatranih 30 uzoraka.

## 5. Model za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja

### 5.1 Klasifikacija prognostičkih modela

Prognoza hidrološkog procesa predstavlja bitnu informaciju na osnovu koje se upravlja kompleksnim vodoprivrednim sistemima i donose odluke od značaja u vodoprivredi i hidroenergetici. Predviđanje hidrološkog procesa moguće je zbog inercije sliva koja dovodi do vremenske asinhronosti između uzročnika u atmosferi, kao što su padavine i temperatura vazduha, i posledice i vidu oticaja sa sliva.

Savremena hidrološka prognostika ne daje jedinstven pristup u klasifikaciji prognoza. U zavisnosti od samog prilaza metodama razni autori daju različite klasifikacije. U ovom radu data je klasifikacija hidroloških prognoza prema dužini perioda po kome se izdaje prognoza:

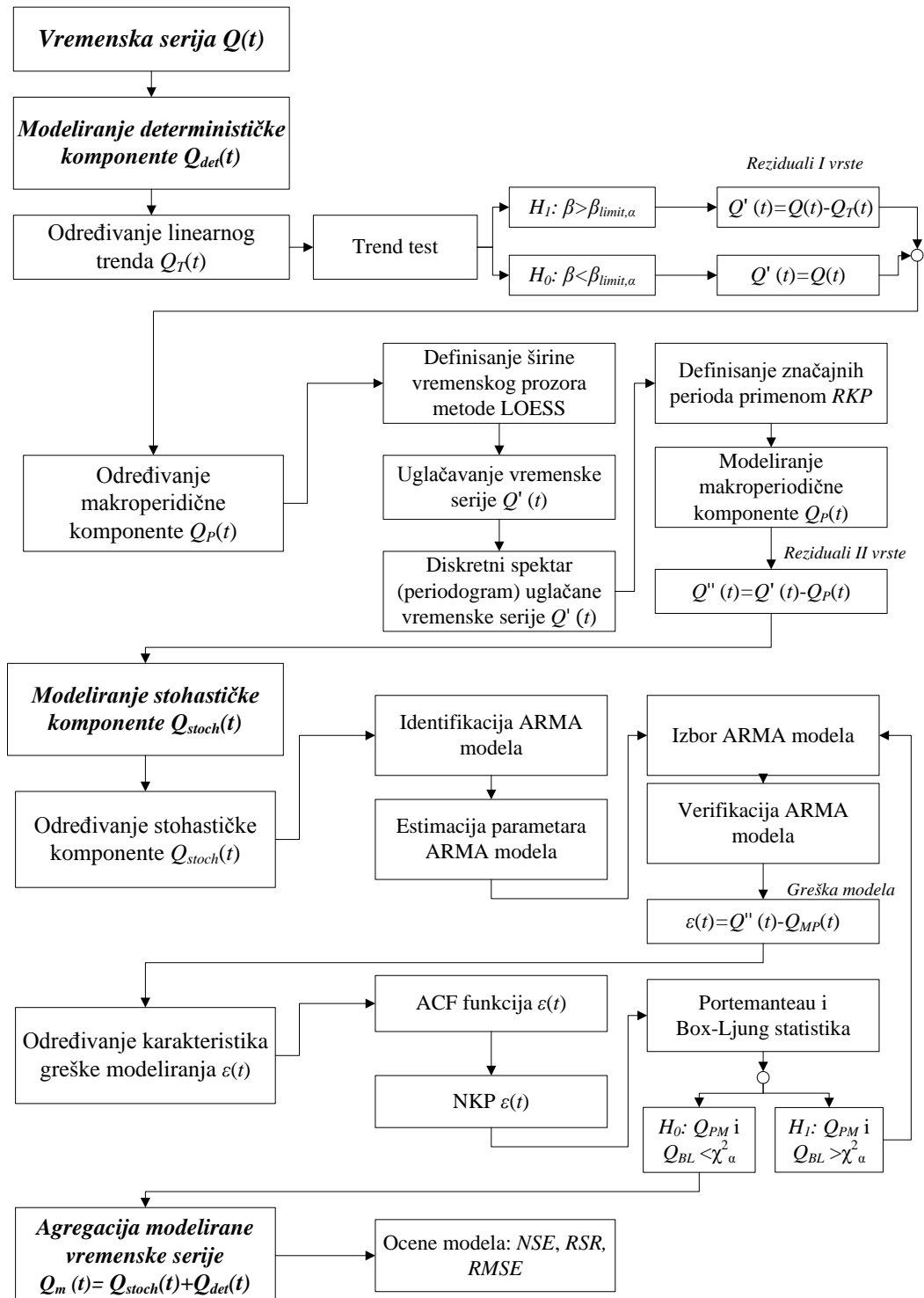
- Hidrološke prognoze (kratkoročne prognoze proticaja do 10 dana, dugoročne prognoze proticaja do godinu dana);
- Hidrološke projekcije (kratkoročne projekcije proticaja za period od nekoliko godina, dugoročne projekcije ili naddugoročne projekcije proticaja za period do kraja 21. veka).

Kako bi se formirale kratkoročne projekcije sezonskih i godišnjih proticaja potrebno je na osnovu unutrašnje strukture hidroloških procesa, čiji su rezultati prikazani u poglavlju 4.2, utvrditi zakonitost njihovog odvijanja tokom vremena. U tu svrhu u nastavku je predložen modifikovani TIPS model čiji se parametri utvrđuju tokom istorijskog perioda, a zatim se model koristi za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja.

### 5.2 Predloženi model za kratkoročne projekcije

Dekompozicija vremenske serije vrši se na osnovu postulata stohastičke hidrologije odvajanjem determinističke i stohastičke komponente (Jevđević, 1972). Determinističku komponentu čine komponenta trenda i višegodišnja makroperiodična komponenta. Stohastička komponenta se sastoji od periodičnosti velikih frekvencija, dok ostatak predstavlja slučajna komponenta. Princip dekompozicije je izložen u izrazu (3.1), a baziran je na TIPS metodi za modeliranje vremenskih serija (Jevđević, 1984).

Originalni pristup je modifikovan pa se umesto dnevnih serija koriste srednje godišnje i sezonske serije proticaja sa ciljem da se modelira dugogodišnja makroperiodična komponenta. Prikaz modifikovanog TIPS modela dat je u obliku sheme koja je prikazana na slici 5-1.



Slika 5-1. Shema modifikovanog TIPS modela za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja

### 5.2.1 Modeliranje determinističke komponente

Modeliranje determinističke komponente uključuje modeliranje trenda i višegodišnje makroperiodične komponente. Da bi se modelirala višegodišnja makroperiodična komponenta potrebno je iz vremenske serije proticaja ukloniti trend u srednjoj vrednosti. Uz pretpostavku da je trend linearan izvršeno je testiranje trenda proverom značajnosti nagiba regresionog koeficijenta pravca trenda  $\beta$  (Kendall i Stuart, 1966). Postupak određivanja značajnosti linearnog trenda prikazan je u delu 3.5.2.1. Ukoliko se trend pokaže kao značajan, sprovodi se modeliranje trenda prema formuli (3.42). Zatim se određuju reziduali prve vrste  $Q'(t)$  u skladu sa formulom (3.33).

Za modeliranje višegodišnje periodičnosti u serijama srednjih godišnjih i sezonskih proticaja potrebno je izabrati model koji odgovara procesima sa dugom memorijom. U tu svrhu korišćena pretpostavka da se vremenska serija može prikazati putem skupa trigonometrijskih talasa različitih amplituda, perioda i faznih pomeranja (poglavlje 3.6.1).

Reziduali prve vrste  $Q'(t)$  podvrgavaju se uglašavanju primenom regresione lokalne metode LOESS. Širina prozora za uglašavanje vremenskih serija određuje se primenom optimizacione tehnike DPU prikazane u poglavlju 3.6.1.3. Zatim se pristupa spektralnoj analizi, tačnije diskretnom spektru, gde se određuju periode, amplitude i fazna pomeranja uglašanih srednjih godišnjih i sezonskih serija proticaja (poglavlje 3.6.1). Značajne periode određuju se na osnovu relativnog kumulativnog periodograma RKP sa zadatim nivoom značajnosti perioda NZP od 95% (slika 4-12), kao i putem Fisher testa sa pragom značajnosti  $\alpha=0.05$ . Detaljno objašnjenje navedenih testova dato je u poglavlju 3.6.1.3.

Kada su određene značajne periode moguće je modelirati dugogodišnju periodičnost vremenskih serija  $\hat{Q}_p(t)$ . Potrebno je korišćenjem ocenjene amplitude  $\hat{b}_i$  kosinusnog i  $\hat{a}_i$  sinusnog talasa na značajnim frekvencijama  $\hat{f}_i$  modelirati makroperiodičnu komponentu na vremenskim koracima  $t=1,2,\dots, N$ , gde  $N$  predstavlja ukupnu dužinu vremenske serije. Postupak modeliranja prikazan je u formuli (3.47), dok se amplitude značajnih talasa određuju u skladu sa izrazom (3.48). Sabiranjem modelirane

komponente trenda  $\hat{Q}_T(t)$  i makroperiodičnosti  $\hat{Q}_P(t)$  dobija se ukupna modelirana deterministička komponenta  $\hat{Q}_{DET}(t)$ .

### 5.2.2 Modeliranje stohastičke komponente

Da bi se modelirala stohastička komponenta  $Q_{STOCH}(t)$  potrebno je od vremenske serije godišnjih i sezonskih proticaja  $Q(t)$  oduzeti determinističku komponentu  $\hat{Q}_{DET}(t)$ . Na taj način, a u skladu sa izrazom (3.34), određuju se reziduali druge vrste  $Q''(t)$ . Kako bi se modelirali reziduali druge vrste  $Q''(t)$  neophodno je izvršiti njihovu standardizaciju na osnovu izraza (3.92). Modeliranje standardizovane vremenske serije  $x_t$  vrši se korišćenjem linearnih autoregresionih modela ARMA (poglavlje 3.7.2). Proces izrade ARMA modela prati sledeće korake: identifikacija, estimacija, izbor i verifikacija modela.

Identifikacija modela sastoji se u analizi ACF i PACF funkcije reziduala druge vrste  $Q''(t)$ . Na osnovu smernica iz tabele 3.2 vrši se određivanje skupa potencijalnih AR, MA i ARMA modela. Za skup potencijalnih modela vrši se estimacija autoregresionih parametara i parametara pokretnih sredina prema metodologiji iznetoj u delu 3.7.2.3. Na osnovu kriterijumske funkcije AIC date u izrazu (3.122) vrši se izbor autoregresionog modela. Na kraju je potrebno verifikovati izabrani autoregresioni model što se čini korišćenjem greške modeliranja  $\varepsilon_t$ . Slučajnost greške modeliranja ispituje se korišćenjem ACF i NKP greške modeliranja, kao i korišćenjem Portemanteau i Box-Ljung test statistike. Verifikacija ARMA modela prikazana je u delu 3.7.2.5 pri čemu se određivanje test statistike vrši prema izrazu (3.124). Očekuje se da greška modeliranja predstavlja slučajnu komponentu čije je matematičko očekivanje  $E(\varepsilon_t)=0$ , varijansa  $Var(\varepsilon_t)=const$  i kovarijansa  $C_\tau(\varepsilon_t)=0$  za  $\tau>0$ . Normalnost greške modeliranja ispituje se putem Jarque-Bera i PPCC testa koji su prikazani u delu 3.3.2. Kada je verifikovan ARMA model neophodno je transformisati vremensku seriju  $x_t$  u modeliranu stohastičku komponentu  $\hat{Q}_{STOCH}(t)$  putem formule (3.92).

### 5.2.3 Ocena efikasnosti modela

Prilikom modeliranja vremenskih serija odnos varijanse modelirane serije u odnosu na ukupnu varijansu predstavlja bitnu osobinu modela. Cilj modeliranja je da objašnjenost varijanse bude što veća, tj. da se modelom u što većoj meri oslikava vrednost članova



serije koja se modelira. Neobjašnjena varijansa definiše učešće slučajne vremenske serije koja se ne može predstaviti datim modelom.

Da bi se predstavio doprinos komponenti modifikovanog TIPS modela potrebno je odrediti udeo varijanse pojedinačne komponente u ukupnoj vremenskoj seriji (Gudmundsson i sar., 2011):

$$\Phi_{\rho} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_{\rho}^2}, \quad (5.1)$$

gde  $\sigma_i^2$  predstavlja varijansu svake pojedinačne komponente, a  $\sigma_{\rho}^2$  predstavlja ukupnu varijansu serije.

Za ocenu kvaliteta modeliranja koriste se pokazatelji efikasnosti modela. Greška modela može da se iskaže na sledeći način:

$$\varepsilon(t|\theta) = Q(t) - \hat{Q}(t|\theta), \quad (5.2)$$

gde  $\varepsilon(t|\theta)$  predstavlja grešku modeliranja sa skupom parametara  $\theta$ ,  $Q(t)$  je srednji godišnji ili sezonski proticaj, dok je  $\hat{Q}(t|\theta)$  modelirani srednji godišnji ili sezonski proticaj. Skup parametara  $\theta$  u ovom slučaju definisan je skupovima koji su korišćeni za modeliranje determinističke komponente, odnosno trenda i makroperiodične komponente, kao i stohastičke komponente.

Pokazatelji efikasnosti modifikovane TIPS metode su sledeći:

- Nash–Sutcliffe koeficijent – NSE,
- Relativna srednja kvadratna greška – RMSR,
- Standardizovana relativna srednja kvadratna greška – RSR.

Nash–Sutcliffe koeficijent predstavlja procenat objašnjene varijanse modelirane serije u ukupnoj varijansi osmotrene serije (Moriasi i sar. 2007):

$$\text{NSE}(\theta) = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N (Q(t) - \hat{Q}(t|\theta))^2}{\sum_{t=1}^n (Q(t) - \bar{Q})^2}. \quad (5.3)$$

U prethodnoj formuli  $Q(t)$  je srednji godišnji ili sezonski proticaj,  $\bar{Q}$  je srednji višegodišnji ili sezonski prosečni proticaj,  $\hat{Q}(t|\theta)$  je modelirana vrednost srednjeg

godišnjeg ili sezonskog proticaja dok je  $N$  ukupan broj članova vremenske serije. Vrednost ovog koeficijenta kreće se u rasponu  $-\infty$  do 1, što se vrednost NSE približava vrednosti 1, kvalitet modeliranja je bolji.

Relativna srednja kvadratna greška (RMSE) definisana je na sledeći način:

$$\text{RMSE}(\theta) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Q(t) - \hat{Q}(t|\theta))^2}. \quad (5.4)$$

Kako bi se standardizovala vrednost kriterijumske funkcije RMSE i dala ocena modeliranih serija koristi se sledeći izraz (Moriasi i sar. 2007):

$$\text{RSR}(\theta) = \text{RMSE}(\theta) / \sigma_Q, \quad (5.5)$$

gde je  $\sigma_Q$  standardna devijacija serije srednjih godišnjih ili sezonskih proticaja.

Na osnovu pokazatelja efikasnosti modela (NSE i RSR) kvalitet modeliranja mesečnih vremenskih serija svrstava se u četiri grupe (Moriasi i sar. 2007):

- veoma dobro  $0.75 < \text{NSE} \leq 1.00$ ,  $0.00 < \text{RSR} \leq 0.50$ ,
- dobro  $0.65 < \text{NSE} \leq 0.75$ ,  $0.50 < \text{RSR} \leq 0.60$ ,
- zadovoljavajuće  $0.50 < \text{NSE} \leq 0.65$ ,  $0.60 < \text{RSR} \leq 0.70$ ,
- nezadovoljavajuće  $\text{NSE} \leq 0.50$ ,  $\text{RSR} > 0.70$ .

#### 5.2.4 Agregacija modeliranih komponenti vremenskih serija

Agregacijom modelirane determinističke  $\hat{Q}_{DET}(t)$  i stohastičke komponente  $\hat{Q}_{STOH}(t)$  na istom vremenskom koraku dobija se ukupna modelirana vrednost vremenske serije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja  $\hat{Q}(t)$  po modifikovanoj TIPS metodi:

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t) &= \hat{Q}_{DET}(t) + \hat{Q}_{STOH}(t) = \hat{Q}_T(t) + \hat{Q}_P(t) + \hat{Q}_{STOH}(t) = \\ &= \left[ \hat{\alpha} + \hat{\beta}t \right] + \left[ \sum_{i=1}^q (\hat{a}_i \sin(2\pi \hat{f}_i t) + \hat{b}_i \cos(2\pi \hat{f}_i t)) + \right. \\ &\quad \left. \hat{\sigma}_Q \left[ \hat{\phi}_1 x_{t-1} + \hat{\phi}_2 x_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p x_{t-p} + a_t + \hat{\theta}_1 a_{t-1} + \hat{\theta}_2 a_{t-2} + \dots + \hat{\theta}_q a_{t-q} \right] \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

$t = 1, 2, \dots, N$ .

Komponente formule (5.6) objašnjene su u okviru prethodnih poglavlja: 3.5.2.1 Linearan trend, 3.6 Periodična komponenta i 3.7.2 Linearni stacionarni autoregresioni modeli.

### 5.3 Primena modela za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja

Modifikovana TIPS metoda se koristi da se njome izdaju projekcije godišnjih proticaja za period od nekoliko godina. Prema dužini perioda po kome se izdaje prognoza on se svrstava u modele za kratkoročne hidrološke projekcije.

Kratkoročne projekcije determinističke komponente  $Q_{DET}(t)$ , tj. komponente trenda  $Q_T(t)$  i makroperiodičnosti  $Q_P(t)$ , utvrđuju se primenom ekstrapolacije. Identifikacija linearnog trenda vrši se u okviru istorijskog vremenskog intervala  $t = 1, 2, \dots, N$ . Ukoliko se utvrdi da je trend značajan potrebno je izvršiti modeliranje trenda. Za budući period  $t = N+1, N+2, \dots, L$  trend se određuje ekstrapolacijom prema izrazu (3.42) uz pretpostavku da se parametri trenda  $\hat{\beta}$  procenjuju tokom istorijskog perioda. S obzirom na to da linearni trend definiše tendenciju celokupne vremenske serije ekstrapolacija linearnog trenda na kraćem vremenskom segmentu je opravdana.

Metoda ekstrapolacije primenjena je i za određivanje kratkoročnih projekcija dugogodišnje makroperiodične komponente vremenske serije  $Q(t)$ . Ukupna makroperioda  $\tilde{Q}_p(t)$ , za razliku od trenda koji predstavlja tendenciju ukupne dužine serije, predstavlja tendenciju vremenske serije na kraćem segmentu. Kako bi se odredile projekcije makroperiodične komponente izvršena je provera pristupa ekstrapolacije na stanici Oršava. Modelirani su srednji godišnji proticaji korakom unazad i zaključeno je da pokazuje zadovoljavajuće poklapanje na kraćem segmentu (poglavlje 4.2.4.3). Ekstrapolacija periodične komponente  $Q_P(t)$  za period  $t = N+1, N+2, \dots, N+L$  izvršena je prema formuli (3.47). Tako su ekstrapolovani značajni talasi sa vrednostima amplituda  $\hat{a}_i$  i  $\hat{b}_i$  na značajnim frekvencijama  $\hat{f}_i$  koji su procenjeni tokom istorijskog perioda  $t = 1, 2, \dots, N$ .

Prognoza stohastičke komponente  $Q_{STOCH}(t)$  za budući period od  $L$  godina ( $t = N+1, N+2, \dots, N+L$ ) vršena je korišćenjem principa minimalne sume kvadratne greške. Metodološki pristup detaljno je izložen u poglavlju 3.7.2.6. Prognoza se sastoji iz dva dela, u prvom delu se na osnovu ocenjenih parametara ARMA modela iz uzorka vrši modeliranje serije za naredne korake u skladu sa izrazom (3.135). U drugom delu se određuju intervali poverenja stohastičke komponente. Intervali poverenja se definišu

korišćenjem težinskih koeficijenata  $\psi_j$ , varijanse greške modeliranja  $\varepsilon_t$  i pomoću standardizovane promenljive  $z_\alpha$  po normalnoj raspodeli na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ .

Kratkoročne projekcije srednjih sezonskih i godišnjih proticaja vrše se agregacijom komponente trenda, višegodišnje makroperiodičnosti i stohastičke mikroperiodične komponente za period  $t+1, t+2, \dots, t+L$ . Formula koja objedinjuje navedene komponente je sledeća:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(t) &= \tilde{Q}_{DET}(t) + \tilde{Q}_{STOCH}(t) = \tilde{Q}_T(t) + \tilde{Q}_P(t) + \tilde{Q}_{STOCH}(t) = \\ &= \left[ \hat{\alpha} + \hat{\beta}t \right] + \sum_{i=1}^q \left( \hat{a}_i \sin(2\pi \hat{f}_i t) + \hat{b}_i \cos((2\pi \hat{f}_i t)) \right) + \\ &+ \hat{\sigma}_{Q^*} \left[ \left( \hat{\phi}_1 x_{t-1} + \hat{\phi}_2 x_{t-2} + \dots + \hat{\phi}_p x_{t-p} + a_t + \hat{\theta}_1 a_{t-1} + \hat{\theta}_2 a_{t-2} + \dots + \hat{\theta}_q a_{t-q} \right) \pm z_{\alpha/2} \left( 1 + \sum_{j=0}^{L-1} \hat{\psi}_j^2 \right)^{1/2} \sigma_\varepsilon \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

$t = N+1, N+2, \dots, N+L$ .

Delovi formule (5.7) objašnjeni su u okviru pregleda metoda u poglavlju 3 (3.5.2.1 Linearan trend, 3.6 Periodična komponenta, 3.7.2 Linearni stacionarni autoregresioni modeli i 3.7.2.6 Prognoza).

Ažuriranje prognoze godišnjih proticaja vrši se sukcesivno, po pristizanju informacija o realizaciji serije godišnjeg proticaja  $Q_t(N+l)$  u trenutku  $N+l$ . Potrebno je odrediti grešku prognoze  $\tilde{Q}_t(N+l)$  za vremenski korak  $N+l$  na sledeći način:

$$e_t(N+l) = Q_t(N+l) - \tilde{Q}_t(N+l), \quad (5.8)$$

koja se zatim koristi za ažuriranje kratkoročnih projekcija  $\tilde{Q}_t(N+L)$  do koraka  $L-1$  prema iznetoj metodologiji u delu 3.7.2.6.

Za meru odstupanja projekcija i osmotrenih vrednosti koristi se relativna greška  $G$ :

$$G = \frac{e_t(N+l)}{Q_t(N+l)} = \frac{Q_t(N+l) - \tilde{Q}_t(N+l)}{Q_t(N+l)}, \quad (5.9)$$

gde  $\tilde{Q}_t(N+l)$  predstavlja kratkoročnu projekciju godišnjeg proticaja na vremenskom koraku  $N+l$ , dok  $Q_t(N+l)$  predstavlja pristiglu vrednost serije na datom vremenskom koraku.

## 5.4 Rezultati

### 5.4.1 Rezultati modeliranja razmatranih vremenskih serija

#### 5.4.1.1 Ocena efikasnosti modela

Modelirani srednji sezonski i godišnji proticaji prema modifikovanoj TIPS metodi dobijeni su agregacijom determinističke i stohastičke komponente na istom vremenskom koraku prema formuli (5.6). Prilikom ocene modela analizirano je učešće svake pojedinačne komponente u varijansi osnovne serije prema formuli (5.1). Tako je analiziran udeo varijanse komponente trenda i makroperiodične komponente, kao učešće ukupne determinističke komponente i stohastičke komponente (tabela 5-1).

**Tabela 5-1. Učešće u varijansi serije srednjih godišnjih proticaja komponente trenda ( $\Phi_T$ ), makroperiodične komponente ( $\Phi_P$ ), ukupne determinističke ( $\Phi_{DET}$ ) i stohastičke komponente ( $\Phi_{STOCH}$ )**

<i>reka/ stanica</i>	$\Phi_T$	$\Phi_P$	$\Phi_{DET}$	$\Phi_{STOCH}$	$\Phi_m = \Phi_{DET} + \Phi_{STOCH}$
r. Dunav, st. Oršava	0.000	0.353	0.353	0.396	0.749
r. Dunav, st. Bogojevo	0.046	0.398	0.443	0.300	0.743
r. Sava, st. Sremska Mitrovica	0.063	0.279	0.342	0.297	0.638
r. Tisa, st. Senta	0.000	0.404	0.404	0.343	0.747
r. V. Morava, st. Ljubičevski Most	0.000	0.538	0.538	0.296	0.834
r. Lim, st. Prijepolje	0.000	0.441	0.441	0.297	0.738

Na osnovu rezultata zaključuje se da komponenta trenda ima učešće u ukupnoj varijansi i kreće se od 4.6% na stanici Bogojevo do 6.3% na stanici Sremska Mitrovica. Takva raspodela udela varijanse srazmerna je nagibu linearnog trenda, koji je značajan na pomenutim stanicama, dok na ostalim stanicama nije registrovan značajan linearni trend. Makroperiodična komponenta beleži učešće u ukupnoj varijansi u rasponu od 27.9% do 51.3%, dok je u slučaju stohastičke komponente učešće od 29.6% do 39.6% ukupne varijanse. Na kraju se zaključuje da stanica Ljubičevski Most ima najveći udeo determinističke komponente, a suprotno njoj najmanje učešće ove komponente je na stanici Oršava. Učešće analiziranih komponenti u varijansi osnovne serije srednjih sezonskih proticaja prikazano je u tabelarnom prilogu T-8.

Upoređivanjem modeliranih sa osmotrenim vremenskim serijama dobijene su ocene efikasnosti modifikovanog TIPS modela. Ocena efikasnosti modela iskazuje se pomoću funkcija NSE, RMSE i RSR iz izraza (5.3), (5.4) i (5.5). U tabeli 5-2 prikazane su navedene funkcije za analizirane srednje sezonske i godišnje serije.

**Tabela 5-2. Kriterijumske funkcije NSE, RMSE i RSR modeliranih srednjih godišnjih i sezonskih proticaja**

<i>reka/ stanica</i>	Kriterijumska funkcija	$\tilde{Q}$	$\tilde{Q}_I$	$\tilde{Q}_{II}$	$\tilde{Q}_{III}$	$\tilde{Q}_{IV}$	$\tilde{Q}^*$
r. Dunav, st. Oršava	NSE	0.817	0.793	0.891	0.885	0.957	0.887
	RMSE	5.923	8.360	6.406	6.326	4.463	4.387
	RSR	0.086	0.103	0.062	0.099	0.074	0.070
r. Dunav, st. Bogojevo	NSE	0.777	0.771	0.957	0.896	0.962	0.924
	RMSE	4.691	5.574	3.098	4.835	2.588	2.738
	RSR	0.101	0.113	0.077	0.100	0.079	0.077
r. Sava, st. S.Mitovica	NSE	0.680	0.898	0.904	0.768	0.953	0.919
	RMSE	4.524	3.897	3.858	5.054	3.481	2.281
	RSR	0.114	0.100	0.099	0.143	0.100	0.081
r. Tisa, st. Senta	NSE	0.811	0.864	0.878	0.815	0.943	0.888
	RMSE	3.975	4.215	4.877	5.590	3.089	3.056
	RSR	0.127	0.129	0.127	0.163	0.123	0.112
r. V. Morava, st. Lj. Most	NSE	0.926	0.943	0.849	0.954	0.942	0.943
	RMSE	1.274	1.618	1.970	1.569	1.852	1.116
	RSR	0.099	0.137	0.154	0.122	0.101	0.096
r. Lim, st. Prijepolje	NSE	0.809	0.864	0.883	0.936	0.951	0.905
	RMSE	0.918	1.344	0.933	0.541	0.958	0.647
	RSR	0.108	0.128	0.098	0.105	0.111	0.091

Rezultati iz tabele 5-2 sugerišu da modelirane vremenske serije prema vrednostima NSE i RSR predstavljaju veoma dobro i dobro modelirane serije prema klasifikaciji za ocenu modela iznetoj u delu 5.2.3. Najbolje slaganje je na stanici Ljubičevski Most gde je NSE=0.943. RMSR=1.116 i RSR=0.096, dok najmanje slaganje pokazuje stanica Sremska Mitrovica i iznosi NSE=0.680, RMSR=4.524 i RSR=0.114. Sezonski proticaji pokazuju bolje slaganje sa osmotrenim sezonskim proticajima, pa se zaključuje da se smanjenjem vremenske diskretizacije dobijaju bolji rezultati. Modelirani srednji godišnji proticaji  $\tilde{Q}^*$  dobijeni osrednjavanjem modeliranih sezonskih proticaja predstavljaju serije sa najboljim slaganjem, gde se NSE nalazi u granicama između 0.89-0.94 dok je RSR u granicama 0.070-0.112.

#### 5.4.1.2 Verifikacija rezultata modela

Naredni korak pre korišćenja modifikovanog TIPS modela predstavlja verifikacija rezultata modela. Verifikacija rezultata sastoji se iz upoređivanja statističkih parametara osmotrenih godišnjih i sezonskih proticaja sa modeliranim proticajima. Tako se vrši upoređivanje kvartila osmotrenih i modeliranih srednjih godišnjih i sezonskih proticaja. Kvartili  $q_i$  predstavljaju tačke na kumulativnoj raspodeli za verovatnoću pojave 25%, 50% i 75%. Pored kvantila korišćena je ACF osmotrenih i modeliranih srednjih godišnjih i sezonskih proticaja.

Analizom osmotrenih i modeliranih kvartila utvrđuje se da je postignuto zadovoljavajuće slaganje. Veće slaganje postiže se za kumulativnu verovatnoću od 50%, nego u slučaju 25% i 75%. Kvartili na analiziranim stanicama za srednje godišnje i sezonske proticaje prikazani su u tabelarnom prilogu T-11. ACF funkcija je pokazala zadovoljavajuće slaganje između modeliranih i osmotrenih serija. Najveća odstupanja ACF funkcije javljaju se na stanici Sremska Mitrovica, Senta i Ljubičevski Most tokom IV sezone, kao i tokom III sezone na stanici Sremska Mitrovica. ACF funkcija za analizirane serije prikazana je u grafičkom prilogu G-16.

#### 5.4.2 Rezultati kratkoročnih projekcija

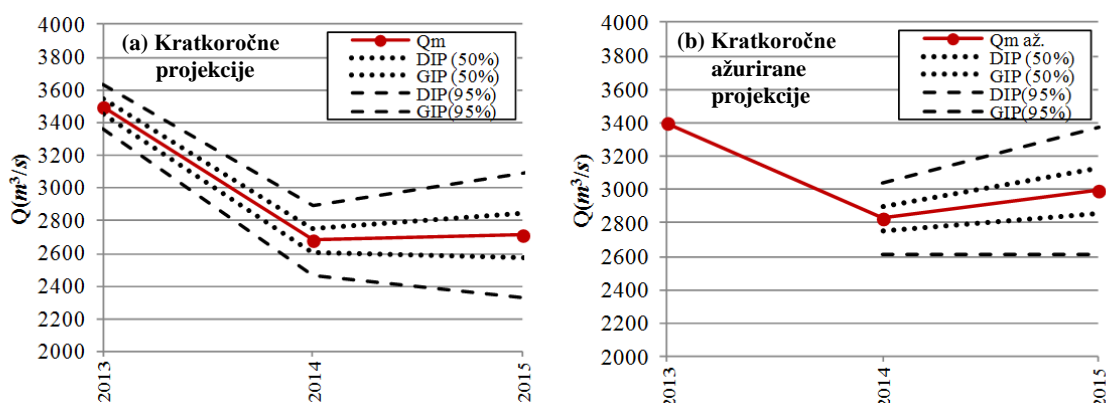
Kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja dobijaju se korišćenjem formule (5.7). U tabeli 5-3 za analizirane stanice date su projekcije godišnjih proticaja tokom perioda 2013-2015. Ujedno su prikazani intervali poverenja od 50% i moduli  $k$  koji definišu procentualno odstupanje kratkoročnih projekcija u odnosu od višegodišnji prosek proticaja u periodu 1931-2012.

**Tabela 5-3. Kratkoročne projekcije godišnjih proticaja sa intervalima poverenja od 50% i modulima  $k$  za period 2013–2015.**

reka/ stanica	$\hat{Q}$			$k$ (%)		
	2013.	2014.	2015.	2013.	2014.	2015.
st. Oršava	6116±256	5173±468	5531±992	11.6	-5.6	1.0
st. Bogojevo	3495±47	2680±74	2712±132	21.4	-6.9	-5.8
st. S.Mitrovica	1840±12	1409±14	1309±15	20.1	-8.0	-14.6
st. Senta	737.7±13	785.4±24	400.3±52	-7.6	-1.7	-49.9
st. Lubičevski Most	201.7±8	173.8±11	147.2±16	-12.0	-24.2	-35.8
st. Prijepolje	74.1±4	84.8±7	73.8±16	-3.1	10.8	-3.5

Tokom 2013. na Dunavu je predviđeno smanjenje proticaja u rasponu 11.6-21.4% od višegodišnjeg proseka dok se na reci Savi predviđa smanjenje od 20.1%. Reke Tisa, Velika Morava i Lim tokom 2013. pokazuju smanjenje protoka u rasponu 3.1-12% u odnosu na višegodišnji prosek. U 2014. na Dunavu i Savi očekuje se smanjenje proticaja u rasponu 5.6-8.0% od višegodišnjeg proseka, u slivu Velike Morave smanjenje proticaja iznosi 24.2%, na reci Tisi se proticaji smanjuju za 1.7% dok se na Limu očekuje povećanje protoka od 10.8%. Tokom 2015. očekuju se nesinhrona odstupanja od godišnjeg proseka, a najveće smanjenje protoka je na Tisi (49.9%), na Velikoj Moravi (35.8%) i na Savi (14.6%). Kratkoročne projekcije srednjih sezonskih proticaja prikazane su u grafičkom prilogu G-14 i tabelarnom prilogu T-9.

Prilikom pristizanja podataka o srednjim godišnjim proticajima za 2013. godinu potrebno je ažurirati kratkoročne projekcije godišnjih proticaja. Na stanici Oršava registrovan je srednji godišnji proticaj tokom 2013. u iznosu  $Q=6302 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $\tilde{Q}=6116 \text{ m}^3/\text{s}$ ), na stanici Bogojevo  $Q=3398 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $\tilde{Q}=3495 \text{ m}^3/\text{s}$ ), na stanici Sremska Mitrovica  $Q=1790 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $\tilde{Q}=1840 \text{ m}^3/\text{s}$ ), na stanici Senta  $Q=740.4 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $\tilde{Q}=737.7 \text{ m}^3/\text{s}$ ), na stanici Ljubičevski Most  $Q=167.8 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $\tilde{Q}=201.7 \text{ m}^3/\text{s}$ ) i na stanici Prijepolje  $Q=89.3 \text{ m}^3/\text{s}$  ( $\tilde{Q}=74.1 \text{ m}^3/\text{s}$ ). Vrednosti kratkoročnih projekcija za 2014. i 2015. iz tabela 5-3 koriguju se na osnovu greške prognoze po formuli (3.139). Nove ažurirane vrednosti srednjih godišnjih proticaja za period 2014-2015. prikazane su u tabelarnom prilogu T-10 kao i na grafičkom prilogu G-15. Kao ilustracija godišnjih kratkoročnih projekcija i njihovih ažuriranja na slici 5-2 dat je primer stanice Bogojevo.



Slika 5-2. Kratkoročne projekcije (a) i ažurirane projekcije (b) godišnjih proticaja na st. Bogojevo (r. Dunav) za period 2013-2015

Kratkoročne projekcije godišnjih proticaja na stanici Bogojevo prikazane su zajedno sa intervalima poverenja od 50% i 95% (slika 5-2, a). Ažurirane vrednosti kratkoročnih projekcija godišnjih proticaja za period 2014-2015. koje su dobijene korišćenjem pristigle vrednosti godišnjeg proticaja za 2013. prikazane su na slici 5-2 (b).

Za odstupanje godišnjih projekcija od osmotrenih vrednosti proticaja koristi se relativna greška  $G$  data u formuli (5.9). Tako je na stanici Oršava registrovana relativna greška  $G=-3.0\%$ , na stanici Bogojevo  $G=2.8\%$ , na stanici Sremska Mitrovica  $G=5.2\%$ , na stanici Senta  $G=-0.6\%$ . Veća odstupanja prisutna su na stanici Ljubičevski Most i Prijepolje čije relativne greške iznose  $G=16.7\%$  i  $G=20.5\%$ . Na osnovu iznetih podataka zaključuje se da je najmanja relativna greška prisutna na većim rekama, nasuprot njima, odstupanje na manjim rekama je veće. Razlog za ovako odstupanje projekcija od



osmotrenih serija nalazi se u činjenici da su godišnje varijacije proticaja veće na manjim rekama nego na velikim. Ujedno je utvrđeno da veće reke pokazuju izraženiju periodičnost godišnjih proticaja zbog veće podzemne retenzije (Wanga i sar., 2014). U skladu sa tim, koeficijent varijacije  $C_v$  na Dunavu kreće se od 0.175 do 0.187, dok na manjim rekama kao što su Velika Morava ( $C_v=0.320$ ) i Lim ( $C_v=0.239$ ) ima veće vrednosti.

Za razliku od kratkoročnih godišnjih projekcija, projekcije sezonskih proticaja pokazuju veća odstupanja u poređenju sa osmotrenim serijama u 2013. Primećeno je da tokom zimske i prolećne sezone greška prognoze ima manje vrednosti. Tokom letnje i jesenje sezone greška modeliranja je značajno veća. Ova pojava se objašnjava većim učešćem stohastičke komponente tokom leta i jeseni, pa su proticaji tokom ovih sezona teže predvidivi. Sumiranjem greške prognoze tokom svih sezona dolazi do njenog smanjivanja čime se postiže da u slučaju godišnjih proticaja greška modeliranja ima zadovoljavajuće vrednosti. Ova pojava primetna je i tokom perioda 1931-2012. kada su modelirane serije godišnjih proticaja pokazale bolje slaganje u slučaju kada su određene kao srednje vrednosti modeliranih sezonskih proticaja nego u slučaju kada su direktno modelirane iz godišnjih vrednosti.

## 6. Model za dugoročne projekcije mesečnih proticaja

### 6.1 Uvod

Vremenske serije mesečnih proticaja predstavljaju bitan hidrološki parametar za mnoge vodoprivredne grane. Pre svega, one su osnova za dimenzionisanje vodoprivrednih sistema sa akumulacijama i retenzijama, a intenzivno se koriste i u procesu optimizacije upravljanja vodoprivrednim sistemima. Dosadašnji proračuni raspoloživog hidropotencijala reka uglavnom se baziraju na serijama mesečnih proticaja, dok se u oblasti vodosnabdevanja i navodnjavanja ove serije koriste za identifikaciju kritičnih vremenskih perioda koji ugrožavaju stabilnost funkcionisanja izgrađenih sistema za navedene namene. Imajući u vidu praktični značaj vremenskih serija mesečnih proticaja, neophodno je istraživanje njene unutrašnje strukture.

Za modeliranje mesečnih serija proticaja razvijen je i u ovom delu rada opisan model SDTS (*Stochastic Decomposition of Time Series*) koji je zasnovan na pretpostavci da se deterministički deo vremenske serije godišnjih proticaja sastoji od složenog nelinearnog trenda i makroperiodične komponente. Utvrđene dugoročne promene u seriji godišnjih protoka iskazane preko navedenih komponenata se prenose sa godišnje vremenske skale na mesečnu skalu korišćenjem niskopropusnog filtra zasnovanog na uglačavanju serije. Poslednji deo determinističke komponente je komponenta sezonskog ciklusa. Stohastička komponenta mesečnih serija proticaja modelira se kao stacionarni proces koji zavisi od klimatskih parametara u slivu (padavine i temperature) korišćenjem kroskorelacionih transfer funkcija (TF). Sastavni deo modela je i slučajna vremenska serija koja predstavlja ostatak (rezidual) nakon modeliranja determinističke i stohastičke komponente.

Cilj SDTS modela predstavlja određivanje dugoročnih projekcija mesečnih proticaja. Predloženi SDTS model moguće je koristiti za dugoročne projekcije mesečnih proticaja pod pretpostavkom da se deterministička komponenta (trend i višegodišnja periodičnost) izrazi kao funkcija vremena, a da se prognoza stohastičke komponente odredi na osnovu projekcija mesečnih padavina i temperatura. Međutim, na primeru stanice Oršava pokazano je primenom modela sa korakom unazad da se modelirana makroperiodična komponenta u godišnjim protocima slaže sa makroperiodom osmotrene serije na

kraćem vremenskom segmentu, a da se u dužem periodu javljaju značajna odstupanja (poglavlje 4.2.4.3). Iz tog razloga, komponenta složenog nelinearnog trenda u modelu SDST je zamišljena kao komponenta koja treba da reprezentuje i deo višegodišnjih oscilacija umesto makroperiodične komponente.

Ekstrapolacija složenog nelinearnog trenda u godišnjim protocima kao komponente SDTS modela u budućnost nije direktno moguća. U tu svrhu formiran je *inicijalni* hidrološki model godišnjih protoka zasnovan na TF i zavisnosti protoka sa identifikovanim klimatskim parametrima (padavine i temperature). U prvom koraku određene su *inicijalne* godišnje vrednosti proticaja u budućnosti na osnovu godišnjih projekcija padavina i temperatura iz klimatskog modela. Na osnovu prognoziranih inicijalnih godišnjih vrednosti proticaja utvrđene su dugoročne projekcije determinističke komponente modela SDTS, tj. nelinearnog trenda i makroperiodične komponente, na godišnjem nivou. U sledećem koraku, projekcije sezonske komponente su određene kao periodična funkcija vremena na osnovu parametara identifikovanih za period osmatranja, a potom je pretpostavljena promena sezonska komponenta u skladu sa promenom unutargodišnje raspodele padavina u budućnosti. Stohastička komponenta dugoročnih projekcija formira se korišćenjem TF čiji su parametri ocenjeni za period osmatranja, a kao ulazne vremenske serije koriste se mesečne projekcije padavina i temperatura iz klimatskog modela do kraja 21. veka.

Za formiranje modela namenjenog dugoročnim projekcijama mesečnih proticaja na osnovu klimatskih parametara neophodno je utvrditi vezu proticaja i tih parametara u slivu. U svrhu izbora relevantnih klimatskih parametara potrebno je sprovesti analizu osetljivosti proticaja u odnosu na meteorološke serije, što je tema poglavlja 6.2. Teorijske osnove modeliranja vremenskih serija korišćenjem transfer funkcija sa uzročnim promenljivama kao što su klimatski parametri prikazane su u poglavlju 6.3, dok su predloženi model mesečnih proticaja SDTS i model za dugoročne projekcije prikazani u poglavljima 6.4 i 6.5. Primena modela sa podacima opisanim u poglavlju 6.6 prikazana je u poglavlju 6.7.

## **6.2 Analiza osetljivosti proticaja na meteorološke serije**

Varijabilnost atmosferskih parametara predstavlja bitan faktor koji učestvuje u godišnjoj i višegodišnjoj varijabilnosti proticaja na rekama. U mnogim studijama je pokazano da je varijabilnost proticaja rezultat atmosferskih cirkulacija iznad okeana, koje utiču na raspored padavina na Zemlji (Hurrell, 1995; Rodriquez-Puebla i sar., 1996; Rimbu i sar., 2002; Danilovich i sar., 2007). Za razliku od njih Zhang i sar. (2007) sugerišu da se promena padavina na Zemljinoj kugli ne može objasniti samo atmosferskim cirkulacijama, već predstavljaju i deo antropogenog uticaja tokom prošlog veka koji je doveo do značajnog povećanja padavina na severnoj hemisferi, smanjenja padavina u tropskim krajevima i većoj vlažnosti vazduha na južnoj hemisferi.

Varijacija atmosferske cirkulacije na evropskom kontinentu se iskazuje preko NAO indeksa. NAO indeks je baziran na gradijentu atmosferskog pritiska između severnog i južnog dela severne hemisfere. Gradijent atmosferskog pritiska predstavlja indikator pravca, frekvencije i lokacije kišnih oblaka u atmosferi iznad Evrope. Za vreme perioda sa malim gradijentom pritiska kišni oblaci dospevaju do Mediterana gde dolazi do povećanja padavina. Ovaj period predstavlja pozitivnu fazu NAO indeksa. Tokom negativne faze, kada je gradijent pritiska veliki, kišni oblaci se sele ka Skandinaviji što dovodi do povećanja padavina na severu Evrope (Bouwer i sar., 2008). Produženo trajanje negativne cirkulacije dovodi da smanjenja evapotranspiracije kao posledice povećanja oblačnosti i vlažnosti vazduha. Ovaj fenomen potencijalno uzrokuje povećanje srednjih godišnjih proticaja. Udeo proticaja na rekama u Evropi tokom zimskih meseci, kada je izražena negativna cirkulacija, iznosi između 23% i 43% ukupnih godišnjih proticaja (Bouwer i sar., 2006). Međutim, najveće reke u Evropi obuhvataju centralni i zapadni deo kontinenta, koji ujedno predstavlja i tranzitnu zonu uticaja NAO indeksa. To dovodi do toga da sumarne godišnje padavine u ovim slivovima nisu strogo povezane sa ovom atmosferskom cirkulacijom. Korelaciona veza između mesečnih padavina i NAO indeksa izučavana je na ukupno 63 stanica u Srbiji za period 1961-2009 (Luković i sar. 2015). Utvrđeno je da je korelisanost najveća tokom zimske sezone, ali najveći broj stanica ima značajnu korelisanost tokom oktobra što upućuje na povećanu vlažnost tokom jeseni.

U dosadašnjim analizama osetljivosti u kojima se utvrđuje zavisnost hidroloških i meteoroloških parametara mali je broj onih koje su sprovedene na području jugoistočne

Evrope, a težište ovih analiza nalazi se na području severnog i zapadnog dela evropskog kontinenta. Krasovskaia (1996) i Krasovskaia i Sælthun (1997) su analizirali osetljivost hidroloških serija na temperature vazduha korišćenjem koncepta entropije. Istraživanja su sprovedena na severu Evrope gde je pokazano da u unutargodišnjoj raspodeli proticaja dolazi do promena kao posledica povećanja temperature vazduha, a da se promene ogledaju pre svega u procesu formiranja i otapanja snega. U nastavku korišćenja metode entropije Bower i sar. (2004) su na području Engleske definisali indeks osetljivosti proticaja na meteorološke parametre i izvršili klasifikaciju sedam rečnih režima. Za definisanje uticaja meteoroloških veličina na serije godišnjih proticaja Bouwer i sar. (2008) su koristili formulu linearne regresije sa prethodno standardizovanim hidrološkim serijama. Koeficijente linearne regresije između hidroloških i meteoroloških serija su predstavili kao meru osetljivosti pri čemu greška modeliranja treba da predstavlja slučajnu vremensku seriju.

Kako bi se u ovom radu sprovela analiza osetljivosti rečnih proticaja u zavisnosti od meteoroloških parametara u slivu kao što su padavine, temperature i NAO indeks, primenjena je višestruka regresiona analiza (Bouwer i sar. 2006; 2008). Linearni regresioni model sa više promenljivih ima sledeću formu (Kottegoda, 2008):

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{p-1} x_{p-1} + \varepsilon. \quad (6.1)$$

gde je  $y$  zavisna promenljiva,  $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$  su nezavisne promenljive praćene sa  $p$  regresionih koeficijenata (indeksa osetljivosti)  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ . Greška modeliranja  $\varepsilon$  predstavlja nezavisnu slučajnu veličinu sa matematičkim očekivanjem  $E(\varepsilon)=0$ , varijansom  $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$  i kovarijansnom funkcijom  $C_\tau(\varepsilon)=0$  za  $\tau > 0$ .

U ovom radu analiza osetljivosti kroz višestruku linearnu regresiju poslužila je za definisanje zavisnosti između:

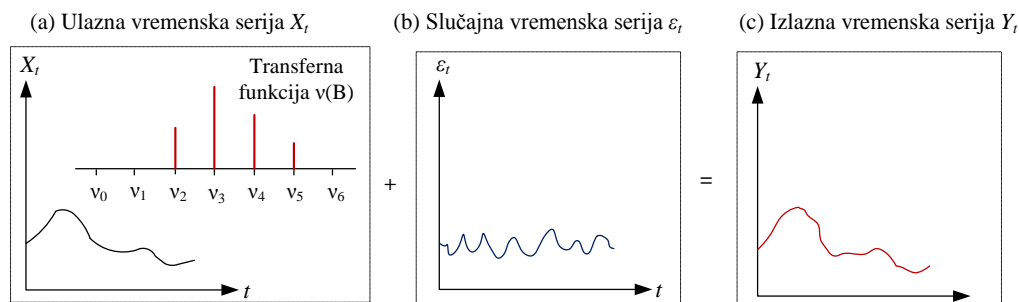
- (1) standardizovanih mesečnih serija proticaja, sa jedne strane, i standardizovanih serija mesečnih padavina, temperatura i NAO indeksa, sa druge strane,
- (2) standardizovanih godišnjih serija proticaja sa korespondentnim standardizovanim godišnjim meteorološkim serijama, i
- (3) uglačanih godišnjih hidroloških i meteoroloških serija sa ciljem utvrđivanja povezanosti višegodišnjih periodičnih ciklusa proticaja i meteoroloških veličina.

### 6.3 Modeli vremenskih serija sa transfer funkcijama

Prilikom formiranja modela SDTS bitan deo predstavljaju modeli vremenskih serija sa transfer funkcijama (TF) kojima se modelira stohastička komponenta mesečnih proticaja korišćenjem ulaznih meteoroloških serija kao što su padavine i temperature. Tako identifikovan model sa TF se koristi za određivanje stohastičke komponente serije mesečnih proticaja u budućnosti na osnovu projekcija meteoroloških veličina iz klimatskog modela. Pored toga, TF imaju svoju upotrebu i prilikom formiranja *inicijalnog* hidrološkog modela kojim se godišnje serije proticaja predstavljaju kao zavisne serije od godišnjih vrednosti padavina i temperatura. Identifikovani *inicijalni* model sa TF se zatim koristi za projekciju determinističke komponente serije godišnjih proticaja (tj. nelinearnog trenda i makroperiodičnosti) do kraja 21. veka na osnovu projekcija padavina i temperatura.

Generalno govoreći, modeli koji transformišu padavine u oticaj dele se na sledeće četiri kategorije koje su predložili Wheater i sar (1993): konceptualni modeli, fizički zasnovani modeli, metrični modeli i hibridni metrično-konceptualni modeli (HMC). TF postaju korisno sredstvo HMC modeliranja. Primena TF za opisivanje hidroloških procesa započinje u drugoj polovini 20. veka i zasnovane su na metodološkom okviru koji su predložili Box i sar. (2008). Virgilio i Ubertain (1979) formirali su TF za tri sliva u Italiji kako bi dobili hidrograme na osnovu satne kiše velikog intenziteta. Koristeći kros-korelacionu zavisnost na različitim vremenskim koracima odredili su hidrogram na izlaznom profilu, a parametre su odredili primenom pomenutog metodološkog okvira (Box i sar., 2008). Pošto na formiranje oticaja sa sliva utiče veliki broj atmosferskih parametara, Eni i sar. (2013) su formirali TF sa trostrukom ulaznom serijom. Kros-korelacionom analizom su utvrdili značajne vrednosti odzivnih impulsnih težina i formirali model za sliv Calabar River u Nigeriji.

Ukoliko se pretpostavi da su parovi osmotrenih hidrometeoroloških veličina  $X_t$  i  $Y_t$  dostupni za isti vremenski interval pri čemu  $X_t$  predstavlja ulaznu seriju dok je  $Y_t$  izlazna serija jednog dinamičkog sistema, takav sistem može da se ilustruje kao na slici 6-1.



Slika 6-1 Ulazna  $X_t$  (a), slučajna  $\varepsilon_t$  (b) i izlazna  $Y_t$  (c) vremenska serija dinamičkog sistema

Za dinamički sistem izlazna veličina  $Y_t$  može da se izrazi preko ulazne serije  $X_t$  korišćenjem linearnog filtra (Box i sar., 2008):

$$Y_t = v(B)X_t + \varepsilon_t, \quad (6.2)$$

gde je  $v(B)$  transfer funkcija linearnog filtra, dok  $\varepsilon_t$  predstavlja grešku modela koja je nezavisna slučajna serija. TF linearnog filtra može da se predstavi kao:

$$v(B) = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j B^j, \quad (6.3)$$

gde je  $B$  vremenski operator pri čemu je  $B^j X_t = X_{t-j}$ , dok su  $v_j$  koeficijenti uz pojedine članove koji se nazivaju težinama impulsnog odgovora sistema (impulsne odzivne težine). Model TF je stabilan ukoliko je ispunjen uslov da su impulsne odzivne težine sumabilne, tj. potrebno je ispuniti uslov:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |v_j| < \infty. \quad (6.4)$$

Procedura modeliranja TF sastoji se od identifikacije same transfer funkcije, tj. impulsnih odzivnih težina  $v(B)$  i slučajne serije  $\varepsilon_t$  bazirane na dostupnim informacijama o ulaznoj seriji  $X_t$  i izlaznoj seriji  $Y_t$  za  $t=1,2,\dots,N$ . Međutim, prilikom definisanja veza ulaznih i izlaznih veličina nekog sistema korišćenjem TF javlja se problem prikazivanja velikog broja težina  $v(B)$ . Za predstavljanje impulsnih odzivnih težina  $v(B)$  koristi se racionalna forma čiji zapis ima kraći oblik (Box i sar., 2008):

$$v(B) = \frac{\omega(B)B^b}{\delta(B)}, \quad (6.5)$$

gde su parametri TF definisani kao  $\omega(B) = \omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s$ ,  $\delta(B) = 1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r$  pri čemu  $s$  definiše broj značajnih članova kros-kovarijanske funkcije, parametar  $r$  je analogan redu  $p$  koji definiše red ARMA modela dok parametar  $b$  predstavlja kašnjenje u odzivu izlazne od ulazne vremenske serije.

Parametri  $s$ ,  $r$  i  $b$  i njihova veza sa impulsnom odzivnom funkcijom  $v(B)$  mogu se odrediti korišćenjem obe strane jednačine (Box i sar., 2008):

$$\delta(B)v(B) = \omega(B)B^b, \quad (6.6)$$

$$\left[1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r\right] \left[v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots\right] = \left[\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s\right] B^b.$$

Na osnovu izraza (6.6) dobija se sledeći sistem linearnih jednačina čijim se rešavanjem određuju impulsne odzivne težine  $v_j$  (Box i sar., 2008):

$$\begin{aligned} v_j &= 0, & j < b, \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} + \omega_0, & j = b, \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r} - \omega_{j-b}, & j = b+1, b+2, \dots, b+s, \\ v_j &= \delta_1 v_{j-1} + \delta_2 v_{j-2} + \dots + \delta_r v_{j-r}, & j > b+s. \end{aligned} \quad (6.7)$$

### 6.3.1 Određivanje kros-kovarijanske funkcije i impulsnih odzivnih težina

Za identifikaciju linearnih TF koristi se pretpostavka da su ulazne i izlazne vremenske serije stacionarne (Box i sar., 2008). U praksi se često dešava da izlazna serija  $Y_t$  i ulazne serije  $X_t$  jednog dinamičkog sistema predstavljaju nestacionarne procese. Kako bi se ocenile vrednosti kros-kovarijanse potrebno je transformisati vremenske serije korišćenjem priraštaja procesa prvog reda:

$$y_t = \nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}, \quad x_t = \nabla X_t = X_t - X_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, N, \quad (6.8)$$

gde  $y_t$  predstavlja priraštaje prvog reda izlazne serije, a  $x_t$  su priraštaji prvog reda ulazne vremenske serije. Transformacijom (6.8) potrebno je postići neophodnu stacionarnost ulaznih i izlaznih vremenskih serija. Ukoliko to nije slučaj potrebno je formirati priraštaje vremenskih serija reda  $d$  za koje je ispunjen uslov stacionarnosti.

Kada je ispunjena pretpostavka o stacionarnosti vremenskih serija  $y_t$  i  $x_t$  tada one imaju konstantne srednje vrednosti ( $\mu_x, \mu_y$ ) i varijanse ( $\sigma_x^2, \sigma_y^2$ ) tokom vremena. Pored njih bitnu osobinu vremenske serije predstavlja kros-kovarijanska funkcija ( $\gamma_{xy}, \gamma_{yx}$ ). Kros-kovarijanska funkcija na pomaku  $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  se predstavlja na sledeći način (Box i sar., 2008):

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(\tau) &= E\left[(x_t - \mu_x)(y_{t+\tau} - \mu_y)\right], \\ \gamma_{yx}(\tau) &= E\left[(y_t - \mu_y)(x_{t+\tau} - \mu_x)\right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Standardizacijom kros-kovarijanske funkcije  $\gamma_{xy}$  dobija se kros-korelaciona funkcija  $\rho_{xy}$ :



$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{\gamma_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.10)$$

pri čemu  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  predstavljaju standardnu devijaciju ulazne  $x_t$  i izlazne  $y_t$  vremenske serije. Potrebno je naglasiti da, za razliku autokorelacione funkcije koja je simetrična, i za koju važi  $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$ , kros-korelaciona funkcija nije simetrična:  $\rho_{xy}(\tau) \neq \rho_{xy}(-\tau)$  u odnosu na vremenski pomak  $\tau$ .

Ocena kros-kovarijansne funkcije  $c_{xy}(\tau)$  vrši se iz uzorka za različite pomake  $\tau$  (Box i sar., 2008):

$$c_{xy}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} (x_t - \bar{x})(y_{t+\tau} - \bar{y}), & \tau = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} (y_t - \bar{y})(x_{t-\tau} - \bar{x}), & \tau = 0, -1, -2, \dots \end{cases} \quad (6.11)$$

gde su  $\bar{x}$  i  $\bar{y}$  srednje vrednosti ulazne i izlazne vremenske serije. Korišćenjem izraza (6.11) ocenjuje se kros-korelaciona funkcija  $r_{xy}$ :

$$r_{xy}(\tau) = \frac{c_{xy}(\tau)}{\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y}, \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.12)$$

pri čemu  $\hat{\sigma}_x$  i  $\hat{\sigma}_y$  predstavljaju ocenjene vrednosti standardnih devijacija vremenskih serija  $x_t$  i  $y_t$ .

Kako bi se odredile značajne vrednosti kovarijansne funkcije polazi se od pretpostavke da su vrednosti kros-korelacione funkcije  $\rho_{xy}(\tau)$  i  $\rho_{xy}(\tau + l)$  raspoređene po normalnoj raspodeli za  $\tau \geq 1$  (Box i sar., 2008). Varijansa funkcije  $r_{xy}(\tau)$  određuje se uz pretpostavku da  $x_t$  predstavlja slučajnu vremensku seriju ( $x_t = a_t$ ) dok je  $y_t$  autokorelisana vremenska serija (Box i sar., 2008):

$$\sigma^2 [r_{xy}(\tau)] = \text{Var} [r_{xy}(\tau)] \approx (N - \tau)^{-1}. \quad (6.13)$$

Značajne vrednosti kros-korelacione funkcije  $r_{xy}$  predstavljaju one ocenjene vrednosti koje su veće od dvostruke standardne devijacije funkcije  $r_{xy}$ , tj. od  $\pm 2\sigma = \pm 2(N - \tau)^{-1/2}$  na različitim pomacima  $\tau$ .

Impulsne odzivne težine TF određuju se na osnovu kros-korelacione funkcije  $\rho_{xy}$  (Box i sar., 2008):

$$v(\tau) = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \rho_{xy}(\tau), \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.14)$$

pri čemu se teorijske vrednosti funkcije  $\rho_{xy}$  ocenjuju iz uzorka (Box i sar., 2008) tako da su ocene impulsnih odzivnih težina:

$$\hat{v}(\tau) = \frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_x} r_{xy}(\tau), \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \quad (6.15)$$

Može se videti da su ocenjene impulsne odzivne težine  $\hat{v}(\tau)$  direktno proporcionalne vrednostima ocenjene kros-korelacione funkcije  $r_{xy}(\tau)$ .

### 6.3.2 Identifikacija transfer funkcije postupkom „prewhitening“

Kao bi se omogućilo jednostavno identifikovanje modela TF, uvodi se pretpostavka da ulazne vremenske serije mogu da se predstavljaju kao ARMA procesi i da se identifikacija TF onda može sprovesti na rezidualnoj seriji tj. na belom šumu. Takav postupak, koji se naziva *prewhitening* (ili izbeljivanje vremenske serije), predložili su Box i sar. (2008), a prednost ovog postupka ogleda se u eliminisanju autokorelacije iz ulaznih i izlazne vremenske serije.

Kao što je već rečeno, ako su ulazne vremenske serije  $X_t$  su nestacionarne, ali imaju stacionarne priraštaje, tada se formira serija priraštaja  $x_t$ . Ukoliko se stacionarni priraštaji  $x_t$  prikažu kao ARMA ( $p, q$ ) proces:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} - a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}, \quad (6.16)$$

tada se vremenska serija  $X_t$  može shvatiti kao ARIMA ( $p, 1, q$ ) proces.

U slučaju modela TF sa jednom ulaznom serijom, identifikacija se odvija u naredna tri koraka (Box i sar., 2008):

1. Potrebno je sprovesti *prewhitening* postupak nad serijom stacionarnih priraštaja slučajnog procesa tj. vremensku seriju  $x_t$  prikazati kao ARMA ( $p, q$ ) proces:

$$\phi_x(B)x_t = \theta_x(B)\alpha_t, \quad (6.17)$$

gde  $\alpha_t$  predstavlja slučajnu vremensku seriju, odnosno beli šum, dok su  $\phi_x$  i  $\theta_x$  koeficijenti ARMA modela koji se mogu identifikovati. Odavde sledi:

$$\alpha_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} x_t, \quad (6.18)$$

2. *Prewhitening* model iz prethodne formule se primenjuje sa istim koeficijentima i za filtriranje izlazne vremenske serije  $y_t$ :

$$\beta_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} y_t, \quad (6.19)$$

pri čemu se dobija filtrirana slučajna izlazna serija  $\beta_t$ .

3. Potrebno je odrediti kros-korelacionu funkciju između slučajnih vremenskih serija  $\alpha_t$  i  $\beta_t$  na vremenskim pomacima  $\tau$ :

$$r_{\alpha\beta}(\tau) = \frac{c_{\alpha\beta}(\tau)}{\hat{\sigma}_\alpha \hat{\sigma}_\beta}, \quad (6.20)$$

a potom odrediti impulsne odzivne težine  $v_k(\tau)$ :

$$\hat{v}(\tau) = \frac{\hat{\sigma}_\beta}{\hat{\sigma}_\alpha} r_{\alpha\beta}(\tau). \quad (6.21)$$

Sa težinama koje su određene na osnovu značajnih članova funkcije  $r_{\alpha\beta}$  dobija se preliminarni model TF. Istovremeno se identifikuje i parametar kašnjenja  $b$  iz jednačine (6.5). Način određivanja značajnih vrednosti funkcije  $r_{\alpha\beta}$  je prikazan u delu 6.3.1.

Kada se odredi preliminarna TF potrebno je sračunati grešku modela (Box i sar., 2008):

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \hat{v}(B)x_t = y_t - \frac{\hat{\omega}(B)}{\hat{\delta}(B)}x_t, \quad (6.22)$$

pri čemu  $y_t$  predstavlja ulaznu vremensku seriju dok je  $\hat{y}_t$  serija dobijena primenom modela TF.

Ukoliko u greški modeliranja ima zaostale autokorelacije, ona može da se prikaže kao ARMA ( $p, q$ ) proces:

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} a_t, \quad (6.23)$$

gde  $a_t$  predstavlja slučajnu vremensku seriju,  $\theta(B)$  i  $\phi(B)$  su parametri ARMA modela slučajne vremenske serije  $\varepsilon_t$ . Na kraju se izlazna vremenska serija  $y_t$  prikazuje kao model TF kombinovanjem jednačina (6.2), (6.5) i (6.23):

$$\hat{y}_t = \frac{\hat{\omega}(B)}{\hat{\delta}(B)} x_{t-b} + \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} a_t. \quad (6.24)$$

gde su njene parametri  $\delta=(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$ ,  $\omega=(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s)$ ,  $\phi=(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$ ,  $\theta=(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$  i  $\sigma_a^2$ . Parametri TF  $\delta$  i  $\omega$  se određuju na osnovu vrednosti impulsnih odzivnih težina  $\hat{v}$  i primenom sistema linearnih jednačina (6.7), dok su  $\phi$  i  $\theta$  identifikovani iz greške modeliranja.

### 6.3.3 Transfer funkcije sa višestrukim ulaznim serijama

U modeliranju hidroloških procesa često se javlja potreba da se uspostavi linearna zavisnost između zavisne promenljive  $Y_t$  i više nezavisnih promenljivih  $X_{mt}$  pri čemu je  $m=1,2,3\dots k$ . Na osnovu izabranih ulaznih serija formiraju se TF pri čemu su u ovom radu izabrane dve ulazne promenljive (padavine i temperature), pa se koristi i dvostruka *prewhitening* metoda (Haugh i Box, 1977). Ova metoda predstavlja dalji razvoj jednostruke *prewhitening* metode. Metoda *prewhitening* sa dvostrukim ulazom ima za cilj povećanje tačnosti prilikom modeliranja izlazne veličine  $y_t$ .

Umesto ove metode, za formiranje TF između višestrukih ulaznih vremenskih serija i izlazne vremenske serije mogla bi se koristiti i metoda *covariance contraction* koju je predložio Priestley (1971). Metoda je zasnovana na metodi *prewhitening*, pri čemu se za procenu impulsnih odzivnih težina koristi metoda minimalnih kvadrata. Fask i Robinson (1977) su generalizovali metodu koju su predložili Haugh i Box (1977), kao i metodu Priestley (1971), koje se za razliku od osnovnih metoda koje se odnose na dve ulazne vremenske serije sada primenjuju i na višestruke ulazne serije. Navedene metode su u vremenskom domenu dok postoje i alternativne TF koje se formiraju u frekventnom domenu (Box i sar., 2008; Priestley, 1971). Metode u frekventnom domenu su manje primenjivane zbog otežane primene u praksi. Osnovne poteškoće koje su prisutne u svim metodama potiču od međusobne zavisnosti ulaznih serija, zbog čega su i dalje prisutni naponi na usavršavanju postojećih metoda (Wei, 2006).

Do pojave greške prilikom formiranja TF može doći zbog značajne autokorelisanosti vremenskih serija  $x_{mt}$  i  $y_t$ , koja je primenom metode *prewhitening* isključena (Montgomery i sar., 2007).

Ukoliko na izlaznu vremensku seriju  $y_t$  ima uticaja više ulaznih vremenskih serija  $m$  tada TF sa višestrukom ulaznom serijom  $x_{mt}$  može da se prikaže (Box i sar., 2008):

$$y_t = \sum_{m=1}^k v_m(B)x_{mt} + \varepsilon_t, \quad (6.25)$$

ili, po analogiji sa (6.24):

$$y_t = \sum_{m=1}^k \frac{\omega_m(B)}{\delta_m(B)} x_{mt} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t, \quad (6.26)$$

gde je  $v_m(B)$  transfer funkcija  $m$ -te ulazne serije  $x_{mt}$  dok se podrazumeva da je  $a_t$  slučajna serija u odnosu na ulazne serije  $x_{mt}$  pri čemu je  $m=1,2,\dots,k$ . Ako su sve ulazne serije  $x_{jt}$  i  $x_{it}$  nekorelisane za  $i \neq j$  tada se za formiranje TF primenjuje metodologija izneta u delu 6.3.2.

Kada je ispunjen uslov međusobne nekorelisanosti ulaznih serija tada je moguće primeniti dvostruku *prewhitening* metodu sa dvostrukom ulaznom serijom po postupku koji je analogan prethodnom poglavlju:

$$\begin{aligned} \phi_1(B)x_{1t} = \theta_1(B)\alpha_1 &\rightarrow \alpha_1 = \frac{\phi_1(B)}{\theta_1(B)} x_{1t}, \beta_t = \frac{\phi_1(B)}{\theta_1(B)} y_t, \\ \phi_2(B)x_{2t} = \theta_2(B)\alpha_2 &\rightarrow \alpha_2 = \frac{\phi_2(B)}{\theta_2(B)} x_{2t}, \beta_t = \frac{\phi_2(B)}{\theta_2(B)} y_t, \end{aligned} \quad (6.27)$$

gde  $\alpha_{1t}$  predstavlja slučajnu vremensku seriju dobijenu filtriranjem serija godišnjih ili mesečnih padavina,  $\alpha_{2t}$  je slučajna serija proizašla na osnovu godišnjih ili mesečnih temperatura vazduha, a  $\beta_t$  predstavlja slučajnu vremensku seriju nastalu iz izlazne vremenske serije  $y_t$  koja predstavlja seriju godišnjeg proticaja ili stohastičku komponentu mesečnog proticaja.

Na osnovu značajnih vrednosti kros-korelacionih funkcija  $r_{\alpha_1\beta}$  i  $r_{\alpha_2\beta}$  određuju se impulsne odzivne težine:

$$\hat{v}_{\alpha_1} = \frac{\hat{\sigma}_\beta}{\hat{\sigma}_{\alpha_1}} r_{\alpha_1\beta}, \quad \hat{v}_{\alpha_2} = \frac{\hat{\sigma}_\beta}{\hat{\sigma}_{\alpha_2}} r_{\alpha_2\beta}. \quad (6.28)$$

Kada su određene impulsne odzivne težine, tada TF izlazne vremenske serije  $y_t$  sa dve ulazne serije  $x_{t1}$  i  $x_{t2}$  može da se predstavi na sledeći način (Haugh i Box, 1977; Wei, 2006):

$$\hat{y}_t = \frac{\hat{\omega}_1(B)}{\hat{\delta}_1(B)} x_{t1} + \frac{\hat{\omega}_2(B)}{\hat{\delta}_2(B)} x_{t2} + \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} a_t. \quad (6.29)$$

gde su  $\hat{\omega}_1(B)$  i  $\hat{\delta}_1(B)$  parametri ulazne serije padavina  $x_1$ , a  $\hat{\omega}_2(B)$  i  $\hat{\delta}_2(B)$  parametri ulazne serije temperatura vazduha  $x_2$ ,  $\theta(B)$  i  $\phi(B)$  su parametri ARMA modela greške modeliranja, i  $a_t$  je slučajna vremenska serija.

### 6.3.4 Testiranje greške modeliranja višestrukih TF

Po završetku modeliranja potrebno je pokazati da greška modeliranja  $a_t$  predstavlja slučajnu vremensku seriju, kako bi model TF bio verifikovan. To znači da treba proveriti da li je slučajna serija  $a_t$  autokorelisana i da li je korelisana sa ulaznim serijama  $\alpha$ . Testiranje autokorelacije serije  $a_t$  se vrši korišćenjem Box-Ljung statistike  $Q_{BL}$  čiji je način određivanja prikazan u izrazu (3.124). Vrednosti ocenjene kros-korelacione funkcije  $r_{\alpha\alpha}$  testiraju se na osnovu  $S$  statistike koju je predložio Haugh (1976):

$$S = N \sum_{k=-M}^M (r_{\alpha\alpha}(\tau))^2, \quad (6.30)$$

koja prati  $\chi^2$  raspodelu sa brojem stepeni slobode koja korespondira sa ukupnim brojem koraka  $(2M+1)$  u kros-korelacionoj funkciji, gde je  $M$  broj koraka unapred i unazad. Haugh (1976) je predložio i modifikovanu  $S^*$  statistiku:

$$S^* = N^2 \sum_{k=-M}^M (r_{\alpha\alpha}(\tau)^2 / (N - |k|)), \quad (6.31)$$

sa  $(2M+1)$  stepeni slobode po  $\chi^2$  raspodeli. Ukoliko se pokaže da  $S$  i  $S^*$  imaju manje vrednosti od kritične vrednosti statistike  $\chi^2$  raspodele na pragu značajnosti  $\alpha$  sa brojem stepeni slobode  $(2M+1)$ , tada se usvaja hipoteza  $H_0$  da ne postoji statistički značajna kros-korelaciona veza. U suprotnom se odbacuje hipoteza  $H_0$  i usvaja alternativna hipoteza  $H_1$  da postoji značajna kros-korelaciona veza.

### 6.4 Predloženi model za modeliranje mesečnih proticaja

Za dekompoziciju i modeliranje vremenske serije proticaja na mesečnom nivou, koja uvažava mesečnu cikličnost, predložen je SDTS model koji je razvijen i prikazan u ovom radu. Vremenske serije mesečnih proticaja predstavljaju procese u kojima postoji izražena vremenska zakonomernost, pre svega sezonska periodičnost. Osnovna pretpostavka je da se vremenske serije mesečnih proticaja mogu, sa gledišta unutrašnje strukture procesa, razložiti na dve osnovne komponente: determinističku, koja je isključivo u funkciji vremena, i stohastičku, koja se može aproksimirati nekim stohastičkim modelom. Deterministička komponenta u vremenskoj seriji mesečnih

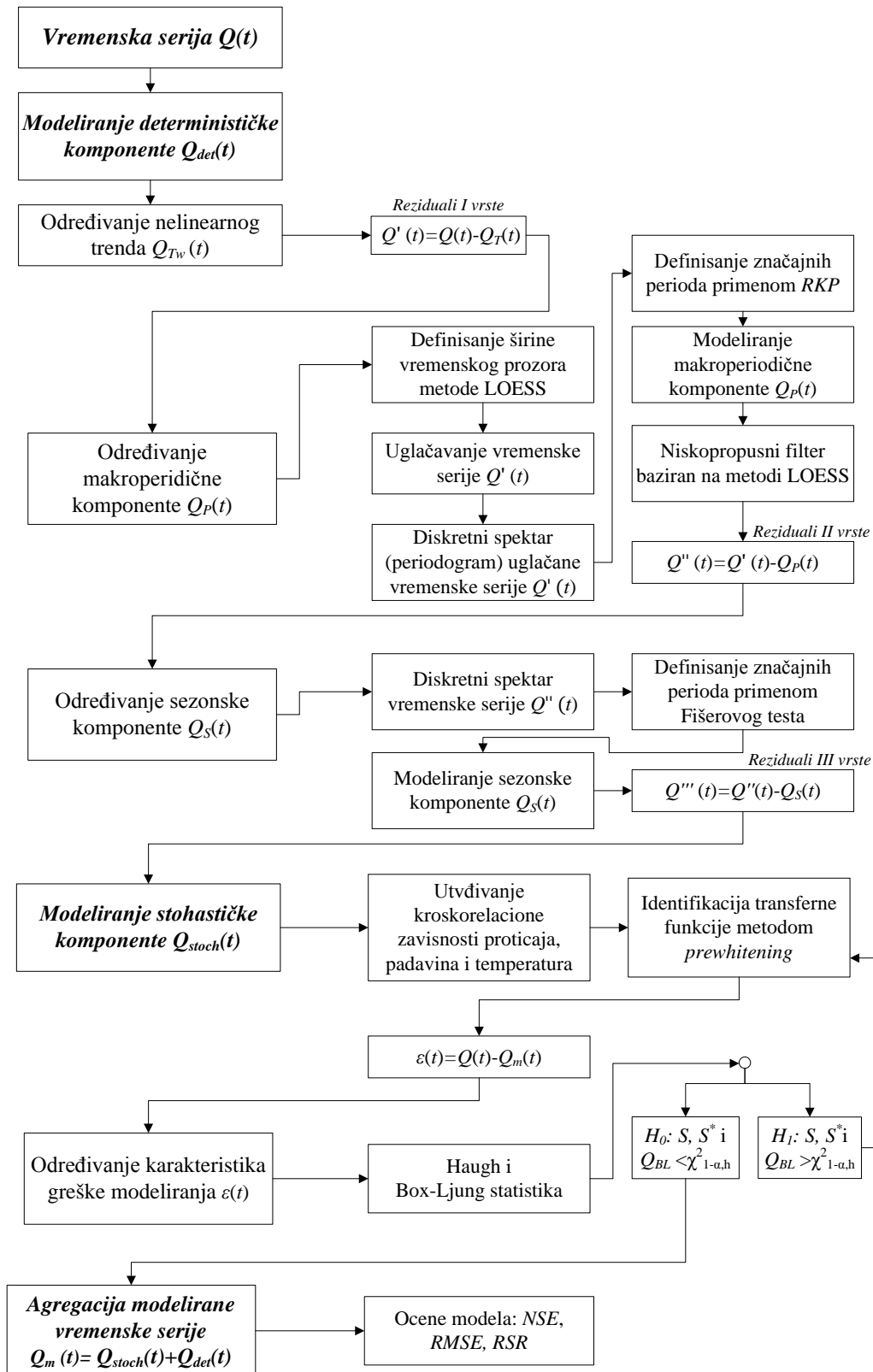
proticaja se pojavljuje u vidu trenda ili skoka, dok se za preostali deo determinističke komponente smatra da ima cikličan karakter na različitim vremenskim skalama. Na nivou godišnjih vrednosti cikličnost se ogleda kroz nagomilavanje sušnih i kišnih perioda, tako da ona predstavlja višegodišnju cikličnost. Kod vremenskih serija mesečnih proticaja najuticajnija je pojava sezonske cikličnosti, iako i višegodišnja cikličnost može biti izražena.

U predloženom modelu stohastička komponenta u vremenskim serijama mesečnih proticaja zasniva se na kros-korelacionoj zavisnosti sa klimatskim parametrima. S obzirom da stohastička komponenta proticaja sadrži izraženu serijsku korelaciju, ona bi alternativno mogla da se modelira i kao ARMA proces. Međutim, na taj način ne bi mogla da se izvrši dugoročna ekstrapolacija ovog modela u budućnost.

Dekompozicija vremenske serije  $Q(t)$  na mesečnom nivou u modelu SDTS izvršena je na sledeći način:

$$Q(t) = Q_{DET}(t) + Q_{STOCH}(t) + \varepsilon_t(t) = [Q_{Tw}(t) + Q_P(t) + Q_S(t)] + Q_{STOCH}(t) + \varepsilon_t(t). \quad (6.32)$$

gde  $Q(t)$  predstavlja mesečne proticaje,  $Q_{Tw}(t)$  je komponenta složenog nelinearnog trenda,  $Q_P(t)$  je dugogodišnja makroperiodična komponenta,  $Q_S(t)$  je sezonska komponenta,  $Q_{STOCH}(t)$  je stohastička komponenta i  $\varepsilon_t(t)$  je greška modeliranja. Shema SDTS modela prikazana je na slici 6-2.



Slika 6-2 Shema SDTS modela za modeliranje i dugoročnu projekciju mesečnih proticaja



### 6.4.1 Deterministička komponenta

Deterministička komponenta SDTS modela sastoji se od složenog nelinearnog trenda, makroperiodične i sezone periodične komponente. Za modeliranje komponente nelinearnog trenda i višegodišnje makroperiodične komponente korišćena je vremenska diskretizacija od godinu dana. Za razliku od njih, modeliranje sezone periodične komponente vrši se korišćenjem mesečnih serija.

Kao nelinearni trend  $Q_{Tw}(t)$  korišćen je kompozitni trend dobijen sa pokretnim vremenskim prozorom širine  $w=30$  godina. Ovaj pristup prikazan je u delu 3.5.2.2. U ovom pristupu, komponenta trenda objedinjuje njegovo linearno i ciklično svojstvo koje se karakteriše u vidu oscilacija velikih perioda i malih amplituda. Nelinearni trend  $Q_{Tw}$  moguće je predstaviti i kao funkciju vremena pri čemu je spektralnom analizom potrebno odrediti njegovu cikličnu komponentu, a parametarskim trendom njegov linearni deo.

Za modeliranje makroperiodične komponente koriste se reziduali prve vrste  $Q'(t)$  koji se definišu oduzimanjem nelinearnog trenda od osnovne vremenske serije godišnjih protoka:

$$Q'(t) = Q(t) - Q_{Tw}(t). \quad (6.33)$$

Makroperiodična komponenta  $Q_P(t)$  modelirana je korišćenjem diskretnog spektra po metodologiji iznetoj u poglavlju 3.6.

Kada se iz vremenske serije odstrani nelinearni trend  $Q_{Tw}(t)$  i makroperiodičnost  $Q_P(t)$ , tada u vremenskoj seriji ostaje cikličnost koja odgovara sezonskom ciklusu. U ovom koraku je neophodno preći sa godišnje na mesečnu vremensku diskretizaciju. Prelazak se vrši transformacijom godišnjih vrednosti nelinearnog trenda i makroperiodične komponente na mesečnu vremensku skalu korišćenjem niskopropusnog filtra. Cleveland i sar. (1990) su predstavili niskopropusni filter kao skup iterativnih uglačavanja vremenske serije baziran na metodi LOESS. Serija godišnjih vrednosti nelinearnog trenda i makroperiodične komponente se diskretizuje na mesečnoj vremenskoj skali i na taj način se od godišnje vremenske serije formira stepenasta serija sa mesečnim vrednostima. Primenom niskopropusnog filtra postiže se uglačavanje stepenaste serije i formira se glatka mesečna serija.

Kada su nelinearni trend i makroperiodična komponenta određeni na mesečnoj vremenskoj skali, oni se oduzimaju od serije mesečnih proticaja i na taj način se dobijaju reziduali druge vrste  $Q''(t)$  koji predstavljaju osnov za modeliranje sezonske komponente:

$$Q''(t) = Q(t) - Q_{Tw}(t) - Q_P(t). \quad (6.34)$$

Sezonska komponenta  $Q_S(t)$  se modelira na bazi periodograma (poglavlje 3.6) tako što se izoluju značajne periode od kojih je najizraženija ona koja odgovara sezonskom ciklusu od 12 meseci. Zatim se za značajne frekvencije određuju Furijeovi koeficijenti  $a_{si}$  i  $b_{si}$  koji predstavljaju amplitude sezonskih sinusnih i kosinusnih talasa. U poslednjem koraku sezonska komponenta  $Q_S$  se predstavlja kao deterministička funkcija vremena na mesečnom nivou.

#### 6.4.2 Stohastička komponenta i transfer funkcije

Odstranjivanjem determinističke komponente, tj. nelinearnog trenda i ukupne periodične komponente (višegodišnja i sezonska), iz serije mesečnih proticaja  $Q(t)$ , dobijaju se reziduali treće vrste:

$$Q'''(t) = Q(t) - [Q_{Tw}(t) + Q_P(t) + Q_S(t)]. \quad (6.35)$$

Na osnovu reziduala treće vrste  $Q'''(t)$  modelira se stohastička komponenta  $Q_{STOCH}(t)$ , koja se smatra stacionarnom. Stacionarnu stohastičku komponentu  $Q_{STOCH}(t)$  karakteriše matematičko očekivanje  $E(Q_{STOCH})=0$  ali i izražena kros-korelisanost sa meteorološkim parametrima u slivu. Stohastička komponenta mesečnih proticaja izražava stanje mesečnih serija padavina i temperatura i za njeno modeliranje u ovom radu se koristi model TF sa dvostrukom ulaznom serijom po metodi *prewhitening* koji je detaljno objašnjen u poglavlju 6.3. Na ovaj način se meteorološki parametri u slivu transformišu u oticaj, tačnije, deo oticaja koji predstavlja stohastičku komponentu.

Kako bi se TF primenile na hidrološke i meteorološke serije, ulazne i izlazne vremenske serije se standardizuju:

$$Y(t) = \frac{Q'''(t) - \bar{Q}}{\sigma_{Q'''}} , X_1(t) = \frac{P(t) - \bar{P}}{\sigma_P} , X_2(t) = \frac{T(t) - \bar{T}}{\sigma_T} , \quad (6.36)$$

gde su  $Q'''(t)$  reziduali treće vrste serije mesečnih proticaja,  $P(t)$  su mesečne padavine i  $T(t)$  su mesečne temperature. Međutim, standardizovane vremenske serije padavina  $X_1$  i temperatura  $X_2$  predstavljaju nestacionarne serije pa je neophodno transformisati

formiranjem serija stacionarnih priraštaja procesa u skladu sa izrazom (6.8). Tako se formiraju stacionarni priraštaji  $y_t$  izlazne vremenske serije na osnovu standardizovanih reziduala  $Q'''(t)$ , a zatim i serije priraštaja  $x_{1t}$  i  $x_{2t}$  ulaznih vremenskih serija na osnovu standardizovanih mesečnih serija padavina i temperatura  $X_1$  i  $X_2$ . Nakon toga se pristupa identifikaciji TF modela:

$$\hat{y}_t = \frac{\hat{\omega}_1(B)}{\hat{\delta}_1(B)} x_{1t} + \frac{\hat{\omega}_2(B)}{\hat{\delta}_2(B)} x_{2t} + \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} a_t. \quad (6.37)$$

po postupku koji je detaljno opisan u poglavlju 6.3.

### 6.4.3 Agregacija modeliranih komponenti vremenskih serija

Kada je određena deterministička  $Q_{DET}(t)$  i stohastička  $Q_{STOCH}(t)$  komponenta mesečnih serija proticaja tada je moguće odrediti modelirane mesečne serije proticaja primenom modela SDTS na osnovu polazne formule (6.32). Agregacija svih komponenti može da se iskaže sledećim izrazom:

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}_{DET}(t) + \hat{Q}_{STOCH}(t) = \left[ \hat{Q}_{Tw}(t) + \hat{Q}_p(t) + \hat{Q}_s(t) \right] + \hat{Q}_{STOCH}(t),$$

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}_{Tw}(t) + \hat{Q}_p(t) + \left[ \sum_{i=1}^{q_s} \left( \hat{a}_{Si} \sin(2\pi \hat{f}_i t) + \hat{b}_{Si} \cos(2\pi \hat{f}_i t) \right) + \hat{\sigma}_Q \left[ (Y(t-1) + \frac{\hat{\omega}_1(B)}{\hat{\delta}_1(B)} x_{1t} + \frac{\hat{\omega}_2(B)}{\hat{\delta}_2(B)} x_{2t} + \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} a_t) \right] \right], \quad (6.38)$$

$$t = 1, 2, \dots, N.$$

Pri tome su komponente  $\hat{Q}_{Tw}(t)$  i  $\hat{Q}_p(t)$  određene korišćenjem godišnjih vremenskih serija, a komponente  $\hat{Q}_s(t)$  i  $\hat{Q}_{STOCH}(t)$  su modelirane sa mesečnom vremenskom diskretizacijom.

Po formiranju modela, određuje se greška modeliranja  $\varepsilon(t)$  tako što se od serije osmotrenih mesečnih proticaja  $Q(t)$  oduzme ukupna modelirana serija mesečnih proticaja  $\hat{Q}(t)$  iz izraza (6.38):

$$\hat{\varepsilon}(t) = Q(t) - \hat{Q}(t) \quad (6.39)$$

Greška modeliranja treba da ima matematičko očekivanje  $E(\varepsilon)=0$ , varijansu  $Var(\varepsilon)=const$  i kros-korelacionu funkciju  $C_\tau(\varepsilon)=0$  za  $\tau>0$ . Osim toga, ako vremenska serija  $\varepsilon(t)$  prati normalnu raspodelu, onda ona predstavlja Gausov šum.

## 6.5 Predloženi model za dugoročne projekcije mesečnih proticaja

### 6.5.1 Deterministička komponenta

Cilj razvoja modela SDTS je da se koristi za dugoročne projekcije mesečnih proticaja. Dugoročne projekcije mesečnih proticaja mogu da posluže da se definiše stanje vodnih resursa do kraja 21. veka. Deterministička komponenta SDTS modela može da se predstavi kao funkcija vremena. Međutim, na primeru primene modela makroperiodične komponente na stanici Oršava sa korakom unazad pokazalo se da nije opravdana ekstrapolacija višegodišnje cikličnosti na duži period (poglavlje 4.2.4.3). Shodno tome zaključeno je da iskazivanje godišnje determinističke komponente kao funkcije vremena i njeno razvijanje do kraja 21. veka nije opravdano. Isto tako, prilikom definisanja dugoročnih promena godišnjih proticaja u budućnost neophodno je sagledati projekcije klimatskih parametara, što su pokazali i rezultati analize osetljivost.

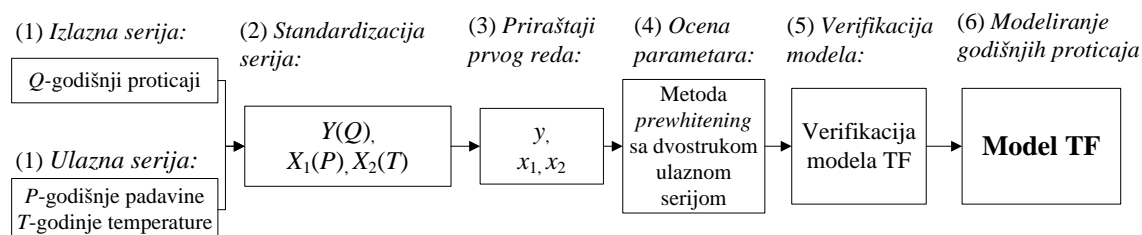
Kao rezultat ovih razmatranja, formiran je *inicijalni* stohastički model na godišnjem nivou, zasnovan na transfer funkcijama, kojim se godišnje padavine i temperature transformišu u godišnje proticaje. Na osnovu *inicijalnih* projekcija godišnjih proticaja korišćenjem ovog modela određuje se deterministička komponenta dugoročnih hidroloških projekcija na godišnjem nivou. Po analogiji sa modelom SDTS, smatra se da se tako definisana deterministička komponenta dugoročnih projekcija sastoji od nelinearnog trenda i makroperiodične komponente.

Preostali deo determinističke komponente u modelu SDTS predstavlja sezonsku komponentu koja se prikazuje na mesečnom nivou. Ocena značajnih talasa sezonske komponente izvršena je za period osmatranja mesečnih proticaja. Sezonska komponenta se tako predstavlja kao funkcija vremena i razvija do kraja 21. veka. Pored toga, pošto se očekuje promena unutargodišnje raspodele padavina u budućnosti, u skladu sa tim promenama se koriguje i buduća sezonska komponenta proticaja.

#### **6.5.1.1 Projekcije godišnjih vrednosti determinističke komponente primenom inicijalnog hidrološkog modela**

*Inicijalni* hidrološki model baziran je na TF koje se koriste kako bi se modelirao godišnji proticaj na osnovu meteoroloških parametara u slivu. Ovom prilikom koriste se TF sa dvostrukom ulaznom meteorološkom serijom (serije padavina i temperature), a za ocenu parametara modela koristi se metoda *prewhitening*. Ista metoda primenjena je prilikom modeliranja stohastičke komponente mesečnih proticaja (poglavlje 6.4.2). Na

slici 6.3 prikazana je shema *inicijalnog* hidrološkog modela koji se koristi za ocenu buduće determinističke komponente.



**Slika 6-3 Shema *inicijalnog* hidrološkog modela za ocenu budućih vrednosti godišnje determinističke komponente**

Modeliranje serija godišnjeg proticaja korišćenjem *inicijalnog* hidrološkog modela sastoji se iz šest delova. Na prvom koraku potrebno je definisati ulazne godišnje serije padavina  $P$  i temperatura  $T$ , kao i izlaznu seriju godišnjih proticaja  $Q$  tokom sinhronog perioda osmatranja. Zatim se na narednom koraku sprovodi postupak standardizacije serija  $Y$ ,  $X_1$  i  $X_2$  u skladu sa izrazom (6.36). Treći korak obuhvata formiranje priraštaja prvog reda standardizovanih serija  $y$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  čime se postiže potrebna stacionarnost. Na narednom koraku se vrši ocena parametara TF korišćenjem *prewhitening* metode sa dvostrukom ulaznom serijom. Na petom koraku se vrši verifikacije modela TF ispitivanjem zastale autokorelisanosti i kros-korelisanosti greške modela  $\varepsilon$ . Poslednji korak podrazumeva modeliranje vremenskih serija godišnjih proticaja korišćenjem verifikovanog modela TF koji je prikazan u sledećem izrazu:

$$\hat{y}_t = \frac{\hat{\omega}_1(B)}{\hat{\delta}_1(B)} x_{1t} + \frac{\hat{\omega}_2(B)}{\hat{\delta}_2(B)} x_{2t} + \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} a_t, \quad (6.40)$$

pri čemu je navedeni postupak detaljno opisan u poglavlju 6.3.

Inicijalni hidrološki model se koristi za određivanje *inicijalne* projekcije godišnjih proticaja  $\tilde{Q}'(t)$  do kraja 21. veka. Umesto osmotrenih serija padavina i temperatura koriste se njihove projekcije iz klimatskog modela. Dugoročne projekcije godišnje determinističke komponente određuju se na osnovu *inicijalnih* projekcija godišnjih serija  $\tilde{Q}'(t)$ . Tada se iz serije  $\tilde{Q}'(t)$  određuje nelinearni trend  $\tilde{Q}'_{tw}(t)$  i makroperiodična komponenta  $\tilde{Q}'_p(t)$  za period 2013-2100. na isti način kao i za osmotrene serije godišnjih proticaja korišćenjem SDTS modela (poglavlje 6.4.1).

### 6.5.1.2 Projekcije mesečnih vrednosti determinističke komponente – sezonska komponenta

Nelinearni trend i makroperiodična komponenta dugoročnih projekcija proticaja određuju se na vremenskoj skali od godinu dana. Korišćenjem niskopropusnog filtra baziranog na LOESS metodi dobijaju se serije sa mesečnom vremenskom diskretizacijom, kao što je opisano u poglavlju 3.6.1.1. Tada se navedenim projekcijama determinističke komponente priključuje preostala deterministička komponenta, tj. mesečne projekcije sezonske komponente.

Identifikacija sezonske komponente se sprovodi na podacima osmatranja. Međutim, njena direktna ekstrapolacija u budućnost bi podrazumevala da se unutargodišnja raspodela tj. sezonski ciklus protoka ne menja kroz vreme. Ovakva pretpostavka nije realna. Unutargodišnja raspodela mesečnih proticaja za tri dvadesetogodišnja vremenska intervala je prikazana sa unutargodišnjom raspodelom mesečnih padavina i temperatura na slici 6-6 za slivove Velike Morave i Lima (poglavlje 6.6). Uviđa se da se unutargodišnja raspodela proticaja tokom tri višegodišnjih perioda značajno razlikuje, a da su ove promene praćene promenom unutargodišnje raspodele padavina na razmatranim slivovima. Kako bi se obuhvatile buduće promene sezonskog ciklusa, uvodi se pretpostavka da promena unutargodišnje raspodele proticaja prati promenu unutargodišnje raspodele padavina. To znači da je sezonsku komponentu  $Q_s(t)$  koja je registrovana tokom perioda osmatranja potrebno korigovati u skladu sa projektovanom unutargodišnjom raspodelom padavina. Uporište ovakvom pristupu korekcije sezonske komponente  $Q_s(t)$  u budućnosti nalazi se u postojanju značajne korelacione veze između mesečnih proticaja i mesečnih padavina tokom perioda osmatranja, kao što je pokazala analiza osetljivosti (poglavlje 6.2).

Najpre je za period 1961-1990 pronađena veza između mesečnih padavina iz klimatskog modela EBU-POM i osmotrenih mesečnih proticaja. Veza između unutargodišnje raspodele padavina i sezonske komponente započinje određivanjem mesečnih modula (standardizovanih vrednosti) proticaja  $k_Q$  i padavina  $k_P$ :

$$k_Q(t) = \frac{Q_s(t) - \bar{Q}_s}{\sigma_{Q_s}}, \quad k_P(t) = \frac{P_s(t) - \bar{P}_s}{\sigma_P}, \quad t=1, 2, \dots, 12, \quad (6.41)$$

gde je  $Q_s$  prosečna komponenta sezonskog ciklusa protoka za mesec  $t$ ,  $P_s$  je su prosečne padavine za mesec  $t$ ,  $\bar{Q}_s, \bar{P}_s$  i  $\sigma_{Q_s}, \sigma_P$  predstavljaju njihove srednje višegodišnje vrednosti

i standardne devijacije za period 1961-1990. Pri tome je srednja vrednost sezonske komponente  $\bar{Q}_s$  približno jednaka nuli (poglavlje 6.4.1).

Tokom perioda 2013-2100. poznati su samo mesečni moduli padavina prema klimatskim scenarijima. Ovaj period se deli na tri dugogodišnja vremenska intervala: bliža (2013-2040), dalje (2041-2070) i daleke (2071-2100) budućnosti. Tokom svakog pojedinačnog intervala smatra se da je sezonska komponenta ista u svakoj godini tog intervala. Kako bi se odredili mesečni moduli proticaja, smatra se da su promene modula proticaja  $\Delta k_Q$  jednake promenama modula padavina  $\Delta k_P$  tokom jednog meseca:

$$\begin{aligned}\Delta k_Q(t) &= \Delta k_P(t), \\ k_Q(t) - k'_Q(t) &= k_P(t) - k'_P(t),\end{aligned}\tag{6.42}$$

$$k'_Q(t) = k_Q(t) - \Delta k_P(t).$$

gde  $k'_Q$  i  $k'_P$  predstavljaju module proticaja i padavina za periode 2011-2040, 2041-2070. i 2071-2100. Kada su određeni mesečni moduli proticaja pristupa se određivanju dugoročnih projekcija sezonske komponente:

$$\tilde{Q}_s(t) = k'_Q(t) \cdot \sigma_{Q_s} + \bar{Q}_s \quad t=1,2,\dots,12,\tag{6.43}$$

gde su  $\bar{Q}_s$  i  $\sigma_{Q_s}$  srednja višegodišnja vrednost sezonske komponente  $Q_s$  i standardno odstupanje ocenjeni tokom perioda 1961-1990.

### 6.5.2 Stohastička komponenta

Osim projekcija determinističke komponente potrebno je odrediti dugoročne projekcije stohastičke komponente  $Q_{STOCH}(t)$ . Stohastička komponenta ima matematičko očekivanje koje je jednako nuli, ali predstavlja zavisnu seriju koja se modelira putem padavina i temperatura. Dugoročne projekcije stohastičke komponente utvrđuju se na osnovu postojeće TF date u izrazu (6.29), u kojoj se umesto istorijskih serija padavina i temperatura koriste serije projekcija iz klimatskog modela. Na ovaj način dobijaju se vrednosti stohastičke komponente za period 2013-2100.

Stohastička komponenta modelirana je pomoću TF čiji su parametri ocenjeni za istorijski period na bazi osmotrenih hidroloških i meteoroloških serija. Meteorološke mesečne serije iz klimatskog modela imaju slične statističke parametre kao osmotrene mesečne serije, ali se u hronološkom redosledu razlikuju. Kako bi se stohastička

komponenta mesečnih proticaja koristila za dugoročne projekcije, neophodno je uporediti vrednosti statističkih parametara ove komponente, kao što je kumulativna raspodela, dobijene korišćenjem osmotrenih mesečnih serija padavina i temperatura kao i odgovarajućih vremenskih serija dobijenih klimatskim modeliranjem. Ukoliko se kumulativne raspodele stohastičke komponente slažu, tada se model TF iz izraza (6.29) može koristiti za dugoročne projekcije ove komponente korišćenjem dugoročnih klimatskih projekcija.

### 6.5.3 Agregacija modeliranih komponenti vremenskih serija

Agregirane dugoročne projekcije srednjih mesečnih proticaja po modelu SDTS date su u sledećoj formuli:

$$\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}_{DET}(t) + \tilde{Q}_{STOH}(t) = \left[ \tilde{Q}'_{Tw}(t) + \tilde{Q}'_p(t) + \tilde{Q}_s(t) \right] + \tilde{Q}_{STOH}(t),$$

$$\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}'_{Tw}(t) + \tilde{Q}'_p(t) + \left[ \begin{array}{l} \left( k'_Q(t) \cdot \sigma_{Q_s} + \bar{Q}_s \right) + \\ \hat{\sigma}_Q \left[ \left( Y(t-1) + \frac{\hat{\omega}_1(B)}{\hat{\delta}_1(B)} x_{1t} + \frac{\hat{\omega}_2(B)}{\hat{\delta}_2(B)} x_{2t} + \frac{\hat{\theta}(B)}{\hat{\phi}(B)} a_t \right) \right] \end{array} \right], \quad (6.44)$$

$$t = N + 1, N + 2, \dots, N + L.$$

pri čemu  $\tilde{Q}(t)$  predstavlja dugoročne projekcije srednjih mesečnih proticaja, a  $\tilde{Q}_{DET}(t)$  je dugoročna projekcija mesečne determinističke komponente koja se sastoji iz nelinearnog trenda  $\tilde{Q}'_{Tw}(t)$ , makroperiodične komponente  $\tilde{Q}'_p(t)$  i sezonske komponente  $\tilde{Q}_s(t)$ . Poslednji deo formule predstavlja prognozu stohastičke komponente  $\tilde{Q}_{STOH}(t)$ .

### 6.6 Raspoložive vremenske serije

U radu su korišćene serije srednjih godišnjih i mesečnih proticaja u slivu Velike Morave, na stanici Ljubičevski Most, kao i u slivu reke Lim na stanici Prijepolje. Korišćene hidrološke stanice prikazane su u delu 4.1. Osim hidroloških vremenskih serija korišćene su i serije klimatskih parametara, kao što su godišnje i mesečne padavine i mesečne i godišnje temperature. Osim njih korišćen je i indeks severno-atlantske oscilacije (NAO). U slivu Velike Morave analizirano je 16 meteoroloških stanica sa podacima o padavinama i temperaturama vazduha, dok je u slivu Lima korišćeno šest stanica sa podacima o padavinama i četiri stanice sa podacima o temperaturama. Meteorološke serije preuzete su od Republičkog hidrometeorološkog zavoda Srbije i Crne Gore. Serije NAO indeksa preuzete su od Hidrološkog instituta u Bratislavi pri slovačkoj Akademiji nauka. U tabeli 6-1 prikazane su meteorološke stanice sa kojih su

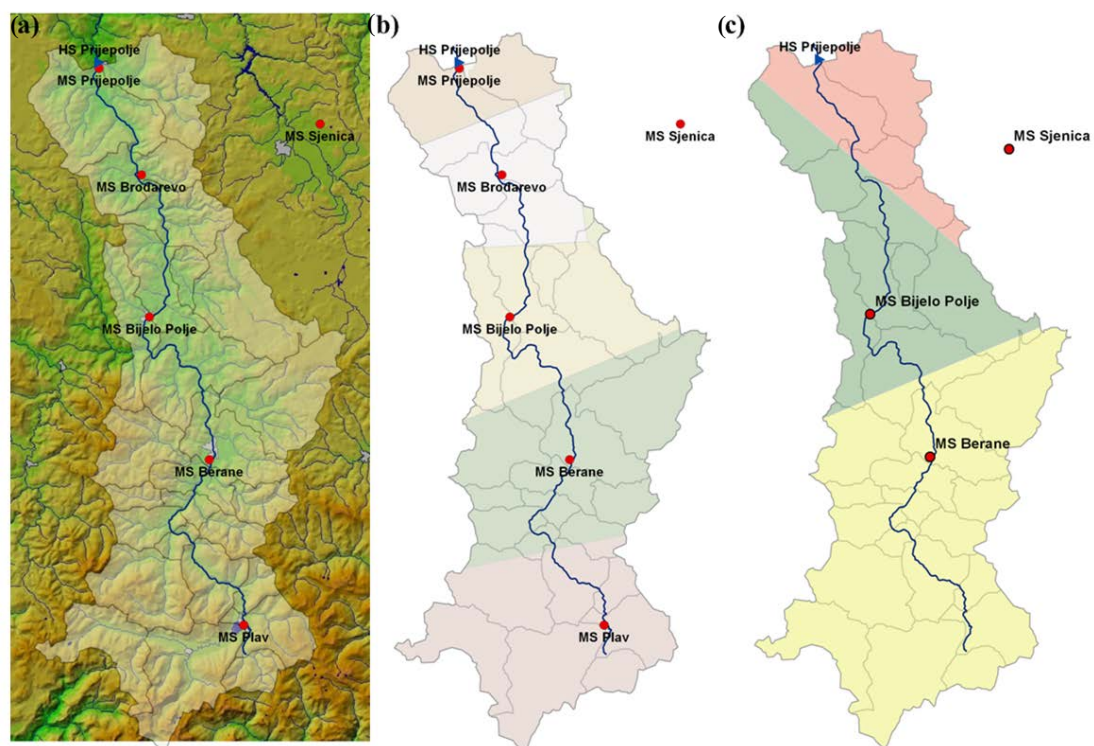


korišćene raspoložive vremenske serije. Za stanice prikazane su srednje godišnje padavine  $P$  i temperature vazduha  $T$ , kao i vrednosti njihovih standardnih devijacija  $\sigma$  i koeficijenta asimetrije  $C_s$ .

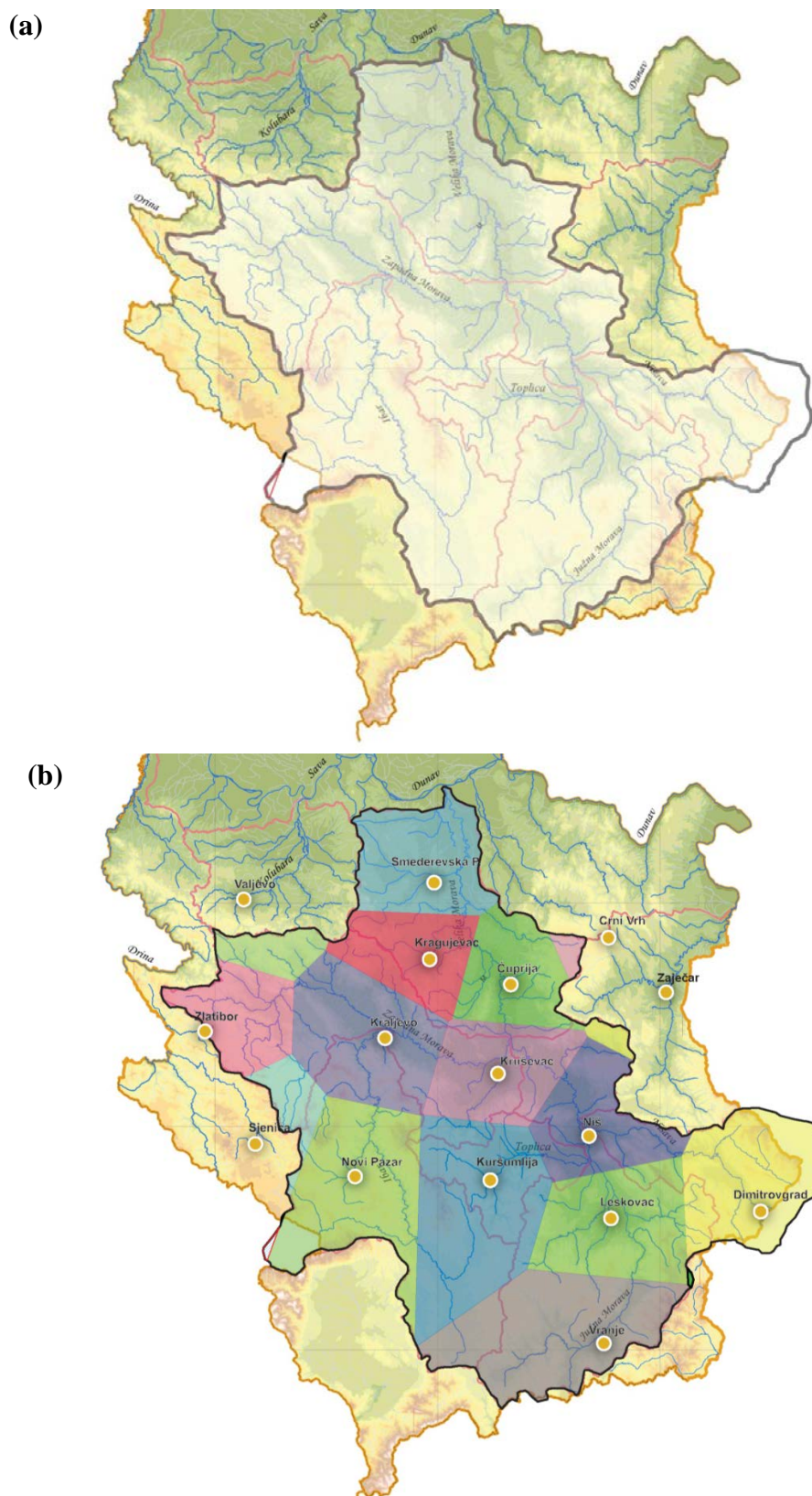
**Tabela 6-1. Analizirane meteorološke stanice: srednje godišnje padavine  $P$ , srednje godišnje temperature  $T$  i njihove standardne devijacije  $\sigma$  i koeficijenti asimetrije  $C_s$**

<i>Stanica:</i>	$P$ (mm)	$\sigma_P$ (mm)	$C_{sP}$	$T_{sr}$ ( $C^0$ )	$\sigma_T$ ( $C^0$ )	$C_{sT}$
st. Smederevska Palanka	637.2	113.5	-0.075	11.5	0.740	0.376
st. Zaječar	607.8	120.4	0.141	10.8	0.723	0.065
st. Crni vrh	789.1	142.9	0.115	8.6	2.058	0.061
st. Čuprija	656.8	120.7	0.338	11.1	0.717	0.334
st. Kragujevac	628.1	114.0	0.089	11.4	0.732	0.439
st. Valjevo	782.7	131.7	0.099	11.2	0.730	0.368
st. Kruševac	647.0	131.7	0.780	11.2	0.752	0.462
st. Kraljevo	750.6	132.2	0.211	11.3	0.676	0.366
st. Zaltibor	967.2	144.9	0.097	7.5	0.745	0.421
st. Niš	588.0	99.1	-0.022	11.8	0.743	0.435
st. Novi Pazar	625.7	115.1	0.079	9.4	0.888	0.202
st. Sjenica	726.1	129.2	0.298	6.5	0.707	0.183
st. Dimitrovgrad	632.8	114.3	-0.372	10.0	0.729	1.240
st. Leskovac	619.0	111.7	0.318	11.1	0.711	0.380
st. Vranje	604.8	118.3	0.019	11.1	0.651	0.442
st. Kuršumlija	647.1	123.8	0.261	10.3	0.703	0.685
st. Bjelo Polje	897.0	162.7	0.159	9.172	0.810	0.800
st. Plav	1058.8	288.4	0.326	8.323	0.814	0.416
st. Berane	907.3	175.5	0.829	9.308	0.926	0.292
st. Sjenica	726.1	129.2	0.298	6.548	0.726	0.003
st. Prijepolje	801.8	137.6	0.405	-	-	-
st. Brodarevo	732.8	125.8	-0.038	-	-	-

Prostorni položaj analiziranih meteoroloških stanica u slivu reke Lim do stanice Prijepolje kao i u slivu reke Velike Morave do stanice Ljubičevski Most dat je na slikama 6-4 i 6-5.



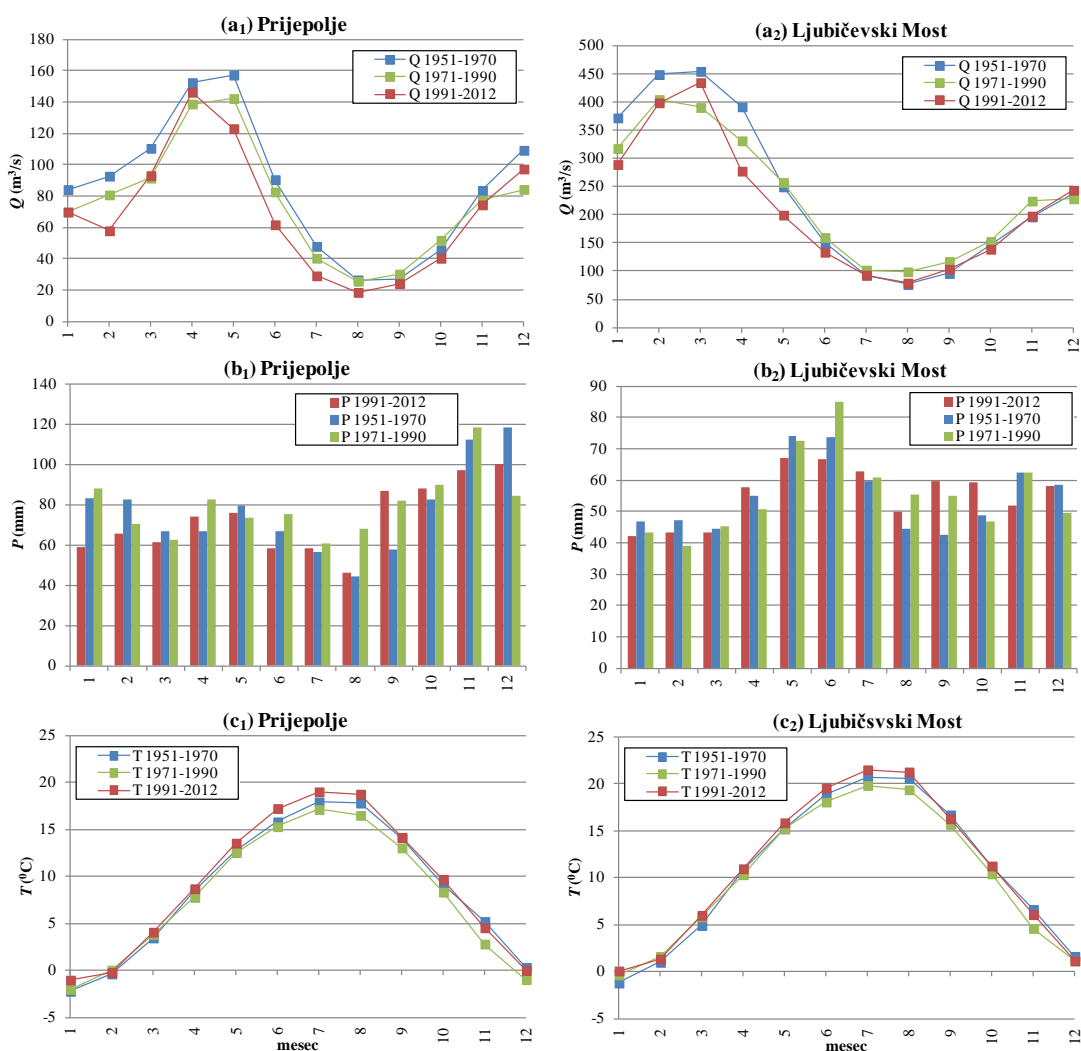
Slika 6-4. Prikaz slivnog područja reke Lim do st. Prijepolje: topografija terena (a), Thiessenovi poligoni padavinskih (b) i temperaturnih stanica (c)



Slika 6-5. Prikaz slivnog područja reke Velike Morave do st. Ljubičevski Most: topografija terena sa hidrografskom mrežom (a) i Thiessenovi poligoni padavinskih i temperaturnih stanica (b)

Uticaj stanica na slivu određen je korišćenjem Thiessenovih poligona. Srednje mesečne i godišnje vrednosti padavina i temperatura u slivovima određene su korišćenjem uticajnih koeficijenata koji su dobijeni kao odnos površine uticajnog poligona svake pojedinačne stanice i ukupne površine analiziranog sliva. Uticajni koeficijenti množe se sa meteorološkom vremenskom serijom pri čemu se dobija ponderisana serija. Sumiranjem ponderisanih meteoroloških serija u slivu dobija se rezultujuća serija za razmatrano slivno područje.

Unutargodišnja raspodela razmatranih serija mesečnih proticaja na stanici Prijepolje i Ljubičevski Most, zajedno sa rezultujućom unutargodišnjom raspodelom mesečnih padavina i temperatura u slivu Lima i Velike Morave, data je za tri dvadesetogodišnja perioda na slici 6-6.



Slika 6-6. Unutargodišnja raspodela mesečnih proticaja (a), padavina (b) i temperatura (c) za st. Prijepolje (1) i Ljubičevski Most (2) za tri dvadesetogodišnja perioda

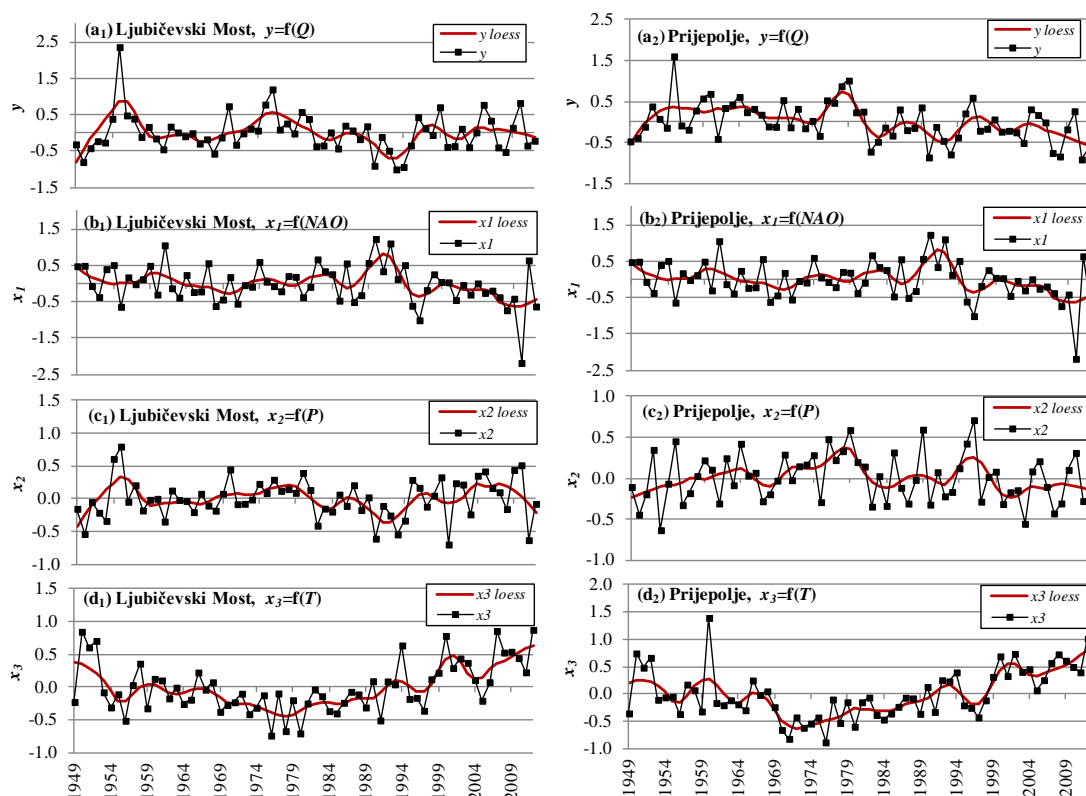
## 6.7 Rezultati

### 6.7.1 Rezultati analize osetljivosti

#### 6.7.1.1 Višegodišnji ciklusi proticaja

Analiza osetljivosti sprovedena je i sa ciljem utvrđivanja uzročno-posledične veze proticaja i meteoroloških parametara u slivu. Osim toga, zadatak analize osetljivosti predstavlja i razotkrivanje uzroka višegodišnje makroperiodičnosti serija godišnjih proticaja. Ova analiza sprovedena je putem višestruke linearne regresione analize po izrazu (6.1).

Pre toga izvršena je standardizacija vremenskih serija pri čemu su formirane standardizovane serije  $y$  godišnjih proticaja, standardizovane serije  $x_1$  godišnjih indeksa NAO, standardizovane serije  $x_2$  godišnjih padavina i standardizovane serije  $x_3$  srednjih godišnjih temperatura. Kako bi se lakše analizirala makroperiodična komponenta godišnjih proticaja vršeno je uglačavanje serija lokalnom regresionom metodom LOESS sa širinom vremenskog prozora od  $nw=13$  godina. Isto tako uglačane su i vremenske serije godišnjih padavina, srednjih godišnjih temperatura i indeksa NAO. Na slici 6-7 pored standardizovanih ulaznih i izlaznih serija prikazane su i njihove serije uglačane metodom LOESS.



Slika 6-7 Standardizovane i uglačane serije godišnjih proticaja (a), NAO indeks (b), sume padavina (c) i temperature vazduha (d) za stanice Ljubicevski Most (1) i Prijepolje (2)

Analiza osetljivosti sprovedena je korišćenjem regresione analize između uglačanih godišnjih meteoroloških i hidrološke serije prikazanih na slici 6-7. Regresiona jednačina između uglačanih proticaja ( $y_{loess}$ ) i uglačanih NAO indeksa ( $x_{1,loess}$ ), padavina ( $x_{2,loess}$ ) i temperatura ( $x_{3,loess}$ ) u opštem slučaju glasi:

$$y_{loess} = \beta_0 - \beta_1 x_{1,loess} + \beta_2 x_{2,loess} + \beta_3 x_{3,loess} + \varepsilon, \quad (6.45)$$

dok su odgovarajuće jednačine za dva razmatrana sliva:

(a) Ljubičevski Most, Velika Morava:

$$y_{loess} - \beta_0 = -(0.454 \pm 0.35)x_{1,loess} + (2.044 \pm 0.34)x_{2,loess} + (0.028 \pm 0.19)x_{3,loess}, \quad (6.46)$$

(b) Prijepolje, Lim:

$$y_{loess} - \beta_0 = +(0.052 \pm 0.39)x_{1,loess} + (1.185 \pm 0.58)x_{2,loess} - (0.099 \pm 0.25)x_{3,loess}.$$

U gornjem izrazu u zagradama su date vrednosti regresionih koeficijenata i njihove standardne greške. Rezultati iz izraza (6.46) pokazuju je indeks  $\beta_2$  relativno najveći u odnosu na svoju standardnu grešku. Na osnovu toga zaključuje se da višegodišnji ciklusi proticaja ( $y_{loess}$ ) u najvećoj meri zavise od višegodišnjih ciklusa padavina ( $x_{2,loess}$ ) za slivna područja Velike Morave i Lima. Pri tome je osetljivost višegodišnjeg ciklusa proticaja u odnosu na padavine veća u slivu Velike Morave, nego što je slučaj sa rekom Lim. Podudaranje makro ciklusa oticanja i padavina u slivovima može se uočiti na slici 6-7 gde uglačane serije proticaja ( $y_{loess}$ ) i padavina ( $x_{2,loess}$ ) imaju sinhronu fluktuacije, tj. podudarajuću makroperiodičnost za sliv Velike Morave i Lima. Indeksi osetljivosti  $\beta_1$  i  $\beta_3$  imaju manje vrednosti pa tako višegodišnji ciklusi NAO indeksa i temperatura ne utiču u velikoj meri na periodičnost uglačanih godišnjih proticaja za oba slivna područja.

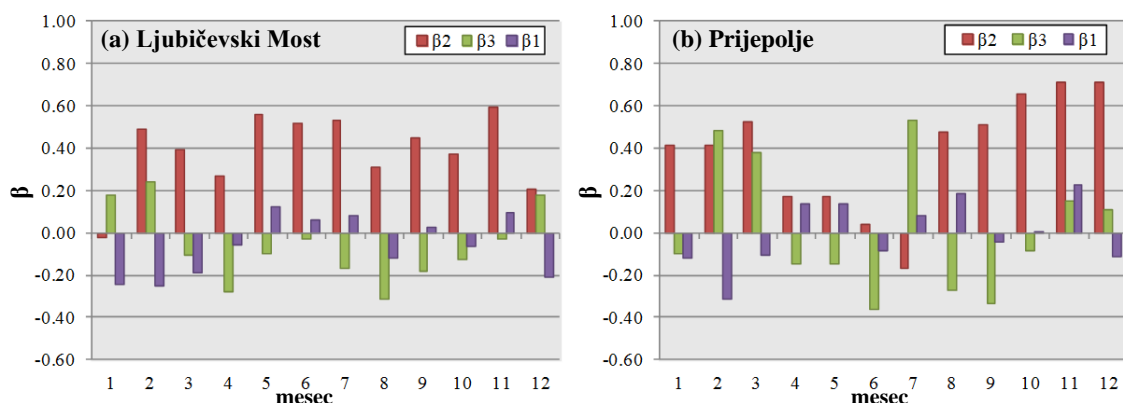
Objašnjenost varijanse uglačanih proticaja u slivu Velike Morave klimatskim promenljivama u gornjoj regresionoj jednačini iznosi čak  $\Phi=80.44\%$ , a kada se izuzme uticaj temperatura vazduha i indeksa NAO objašnjenost varijanse iznosi  $\Phi=75.80\%$ . U slivu Lima objašnjenost varijanse svim klimatskim promenljivama je manja i iznosi  $\Phi=40.04\%$ , a samo uticaj padavina iznosi  $\Phi=23.30\%$ . Sagledavajući veliki indeks osetljivosti  $\beta_2$  kao i visoki procenat objašnjene varijanse  $\Phi$  padavinama zaključuje se da na formiranje višegodišnjih makroperiodičnih ciklusa godišnjih proticaja u najvećoj meri utiču ciklusi u godišnjim padavinama, a da je ova pojava izraženija u slivu Velike Morave nego u slivu Lima.

Na osnovu povezanosti višegodišnjih ciklusa padavina i proticaja zaključuje se da je prilikom formiranja dugoročnih projekcija korišćenjem SDTS modela neophodno uzeti u obzir periodičnost u projekcijama godišnjih padavina. Iz tog razloga se za dugoročne projekcije determinističke komponente godišnjih protoka (nelinearni trend i makroperiodičnost) koristi se *inicijalni* hidrološki model kojim se godišnji proticaji određuju direktno iz padavina i temperatura (poglavlje 6.5.1.1). Korišćenjem *inicijalnog* modela makroperiodičnost meteoroloških činilaca u slivu se preslikava u buduće višegodišnje cikluse proticaja.

Analiza osetljivosti nije obuhvatila rezidualne uglačanih proticaja, tj. stohastičku komponentu godišnjih protoka. Stohastička komponenta je u modelu SDTS razmatrana na mesečnom nivou kao zavisna serija od meteoroloških parametara i njena osetljivost ili kros-korelaciona veza u odnosu na ulazne meteorološke činioce je uzeta u obzir kroz kros-korelacione funkcije  $\rho_{xy}$  u modelu sa TF (poglavlje 6.3.1).

### 6.7.1.2 Mesečni proticaji

Analiza osetljivosti mesečnih proticaja u odnosu na mesečne padavine, temperature i NAO indeks sprovedena je putem višestruke linearne regresione analize po formuli (6.1). Na slici 6-8 prikazani su indeksi osetljivosti  $\beta$  mesečnih proticaja na st. Ljubičevski Most i Prijepolje u odnosu na mesečne indekse NAO ( $\beta_1$ ), mesečne padavine ( $\beta_2$ ) i mesečne temperature vazduha ( $\beta_3$ ).



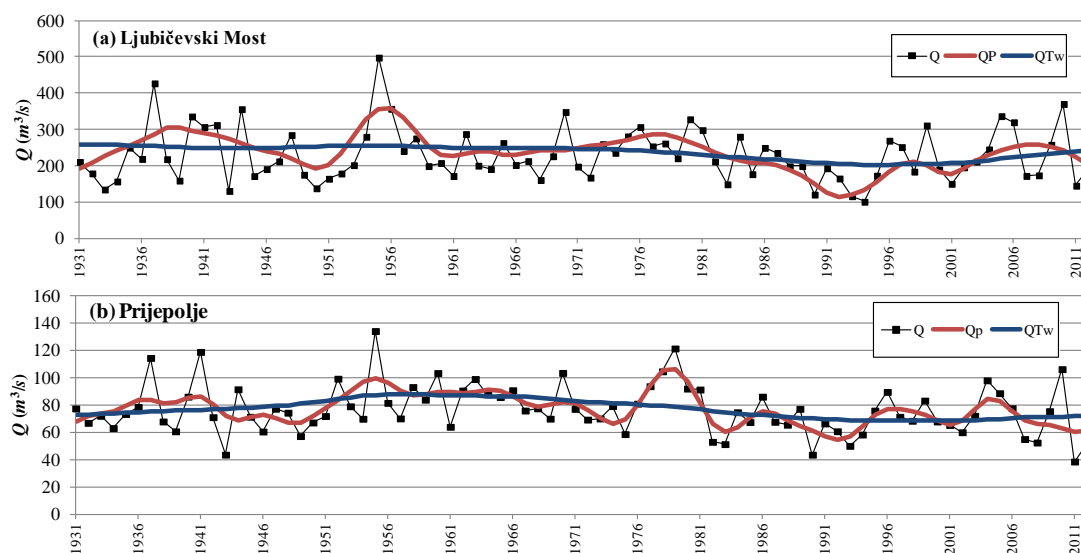
Slika 6-8 Indeksi osetljivosti  $\beta$  mesečnih proticaja na st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b) u odnosu na mesečne indekse NAO ( $\beta_1$ ), mesečne padavine ( $\beta_2$ ) i mesečne temperatura ( $\beta_3$ )

Na osnovu vrednosti indeksa osetljivosti (regresionih koeficijenata) sa slike 6-8 zaključuje se da je osetljivost srednjih mesečnih proticaja najveća u odnosu na mesečne padavine, u poređenju sa temperaturama i NAO indeksom. Najveća osetljivost se u

slučaju oba sliva javlja u 11. mesecu, ali je osetljivost tokom godine za slivove međusobno različita. U slučaju Velike Morave osetljivost mesečnih proticaja u odnosu na mesečne padavine je najmanja tokom januara kada je vrednost regresionog koeficijenta bliska nuli. Za slučaj stanice Prijepolje osetljivost je mala od aprila do jula, dok je izražena na početku i kraju kalendarske godine. Mesečni proticaji imaju najmanju osetljivost na NAO indeks. Osetljivost srednjih mesečnih proticaja u odnosu na korespondentne temperature izražena je tokom februara i marta. Iskazuje se priraštajem proticaja u ovom periodu kada dolazi do otapanja snega. Isto tako se negativni regresioni koeficijenti javljaju tokom avgusta i septembra kada dolazi do pojave minimalnih proticaja. U tabelarnom prilogu T-13 prikazani su indeksi osetljivosti, objašnjenost varijanse i varijansa reziduala regresione jednačine (6.1) za razmatrana slivna područja.

### 6.7.2 Rezultati modeliranja razmatranih vremenskih serija

Modeliranje srednjih mesečnih proticaja izvršeno je korišćenjem SDTS modela za sliv Velike Morave i Lima na stanicama Ljubičevski Most i Prijepolje. Nelinearni trend  $Q_{Tw}$  i makroperiodična komponenta  $Q_P$  modelirani su korišćenjem vremenske diskretizacije od godinu dana prema metodologiji iznetoj u poglavlju 6.4.1. Na slici 6-9 prikazane su modelirane serije  $Q_P$  i  $Q_{Tw}$  zajedno sa osmotrenim proticajima na stanici Ljubičevski Most i Prijepolje za period 1931-2012.

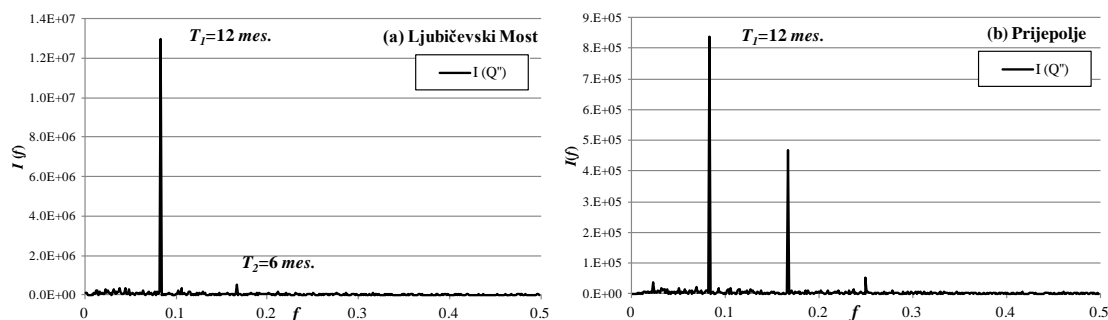


Slika 6-9 Osmotreni godišnji proticaji  $Q$ , nelinearni trend  $Q_{Tw}$  i makroperiodična komponenta  $Q_P$  na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje za period 1931-2012.



Nelinearni trend  $Q_{Tw}$  razmatranih godišnjih serija sadrži u sebi cikličnu komponentu koja ima veliku periodu oscilovanja dok je amplituda oscilovanja mala. Osim ciklične komponente nelinearni trend sadrži linearnu komponentu koja ima negativan nagib za period 1931-2012. za obe serije godišnjih proticaja. Makroperiodična komponenta  $Q_P$  na stanici Ljubičevski Most ima najznačajnije periode od 20.5, 10.3 i 8.2 godina, dok su na stanici Prijepolje najznačajnije periode od 20.5, 8.2 i 9.1 godina. Značajne makroperiode  $Q_P$  sa amplitudama i test statistikama prikazane su u tabelarnom prilogu T-14. Rezultati analize periodičnosti SDTS modela pokazuju slične elemente značajnih perioda kao i u slučaju modifikovanog TIPS modela (poglavljje 4.2.4). Razlika je u tome što se deo makroperiodične komponente SDTS modela nalazi i u nelinearnom trendu u odnosu na modifikovani TIPS model čiji je trend godišnjih proticaja linearan.

Kada je određena godišnja deterministička komponenta  $Q_P$  i  $Q_{Tw}$  tada su primenom niskopropusnog filtra godišnje serije transformisane u serije sa mesečnom vremenskom diskretizacijom. U skladu sa izrazom (6.34) navedene komponente su odstranjene iz mesečnih serija proticaja pri čemu su određeni reziduali druge vrste  $Q''(t)$ . Na osnovu vremenske serije  $Q''(t)$  modelirana je sezonska komponenta  $Q_S(t)$ . Značajne periode sezonske komponente određene se korišćenjem periodograma i primenom Fisherovog testa (poglavljje 3.6.1.3). Na slici 6-10 prikazan je periodogram reziduala druge vrste na  $Q''(t)$  stanicama Ljubičevski Most i Prijepolje.



Slika 6-10 Periodogram reziduala druge vrste  $Q''$  na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje

Sa slike 6-10 vidi se razlika u sezonskom ciklusu Velike Morave i Lima. U oba slučaja najznačajnija je perioda od  $T_1=12$  meseci. U slučaju reke Velike Morave značajna je perioda od  $T_2=6$  meseci dok su za reku Lim značajne periode od  $T_2=6$  i  $T_3=4$  meseca. Razlika u intenzitetu periodičnosti perioda od 4 i 6 meseci na datim slivovima upućuje na različitu unutargodišnju raspodelu proticaja, tj. pokazuje se različit karakter sezonskog režima datih slivova. Osnovni elementi značajnih perioda, kao što su

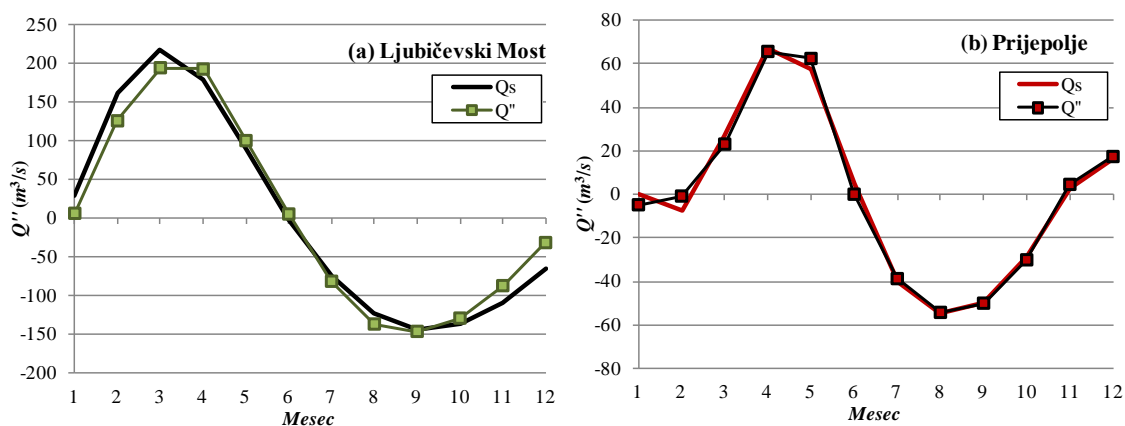
Furijeovi koeficijenti ( $a_{Si}$ ,  $b_{Si}$ ,  $c_{Si}$ ), frekvencija  $f_i$ , Fisherova statistika ( $g_i$ ) i ordinate relativnog kumulativnog periodograma  $RKP_i$  prikazani su u tabeli 6-2.

**Tabela 6-2. Značajne periode sezone komponente  $Q_S$  na st. Ljubičevski Most i st. Prijepolje: Furijeovi koeficijenti ( $a_{Si}$ ,  $b_{Si}$ ,  $c_{Si}$ ), intenzitet periodičnosti  $I_i$ , frekvencija  $f_i$ , perioda  $T_i$ , Fisherova statistika  $g_i$  i ordinate relativnog kumulativnog periodograma  $RKP_i$**

reka/stanica	$a_{Si}$	$b_{Si}$	$c_{Si}$	$I_i$	$f_i$	$T_i$	$g_i$	$RKP_i$
r. V.Morava	57.1	153.1	163.4	1297678	0.083	12	0.421	0.045
st. Ljubičevski M.	-33.0	4.4	33.3	537765	0.167	6	0.031	0.064
r. Lim	17.1	37.9	41.6	839192	0.083	12	0.308	0.039
st. Prijepolje	-19.7	-24.0	31.0	467725	0.167	6	0.248	0.069
	3.1	-9.9	10.4	52664	0.250	4	0.037	0.079

Kritična vrednost Fisherove statistike za analizirane vremenske serije iznosi  $g_{cr}=0.010$  za prag značajnosti  $\alpha=0.05$ . Pošto su vrednosti statistike  $g_i$  veće od kritične vrednosti zaključuje se da razmatrane periode imaju statističku značajnost na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ .

Kada se iskoriste elementi talasa značajnih perioda reziduala druge vrste  $Q''(t)$  dobija se modelirana komponenta sezonskog ciklusa  $Q_S(t)$  koja je prikazana za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje na slici 6-11.



**Slika 6-11 Prosečni mesečni reziduali druge vrste  $Q''$  i modelirana sezonska komponenta  $Q_S$  na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje za period 1931-2012.**

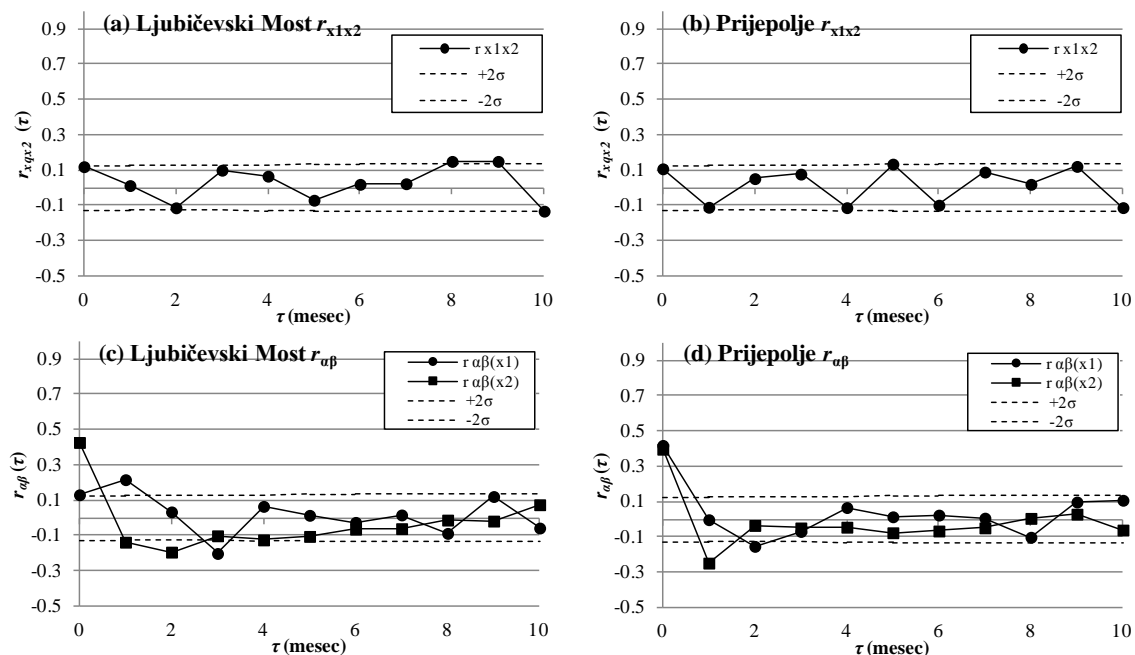
Uočava se da u slučaju stanice Ljubičevski Most sezonski ciklus raste naglo, a da se vrh ostvaruje u martu. U slučaju stanice Prijepolje porast sezonskog ciklusa je umereniji, a maksimalnu vrednost dostiže tokom četvrtog meseca. Minimalni proticaji se na stanici Ljubičevski Most javljaju tokom devetog meseca, dok se u slučaju stanice Prijepolje dešavaju u osmom mesecu. Ordinata RKP na stanici Prijepolje za tri značajne periode ima veće vrednosti nego u slučaju stanice Ljubičevski Most gde su registrovane dve značajne periode (tabela 6-2). Zbog većeg učešća značajnih perioda na stanici Prijepolje

u ukupnoj periodičnosti reziduala druge vrste  $Q''(t)$  modelirana sezonska komponenta  $Q_S(t)$  na ovoj stanici pokazuje bolje slaganje sa serijom  $Q''(t)$  nego u slučaju stanice Ljubičevski Most.

Kada je sezonska komponenta modelirana, na osnovu izraza (6.35) određeni su reziduali treće vrste  $Q'''(t)$ . Stohastička komponenta  $Q_{STOCH}(t)$  je modelirana na osnovu vremenske serije  $Q'''(t)$  korišćenjem TF po metodi *prewhitening* sa dvostrukom ulaznom vremenskom serijom čiji način određivanja je prikazan u delu 6.4.2. Ocena parametara TF modela izvršena je za dostupan period hidro-meteoroloških serija (1950-2012).

Pre primene ove metode ispitana je stacionarnost standardizovanih mesečnih priraštaja prvog reda  $y$ ,  $x_{1t}$  i  $x_{2t}$  serija putem Dickey-Fuller testa (poglavlje 3.2.1). Test statistika  $\tau$  za ove tri serije za stanicu Ljubičevski Most redom iznosi -48.4, -68.5 i -25.7, dok za stanicu Prijepolje za analizirane serije vrednost statistika  $\tau$  ima vrednosti -52.5, -68.1 i -25.3. Apsolutne vrednosti statistike  $\tau$  su veće od apsolutne kritične vrednosti test statistike  $\tau_{krit}=-2.905$  na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ , na osnovu čega se nulta hipoteza o nestacionarnosti odbacuje. Zaključeno je da su razmatrani standardizovani priraštaji prvog reda stacionarne vremenske serije.

Zatim je ispitana značajnost kros-korelacione funkcije priraštaja prvog reda standardizovanih mesečnih padavina  $x_{1t}$  i mesečnih temperatura  $x_{2t}$ . Značajnost kros-korelacionih funkcija je ispitana njihovim poređenjem sa dvostrukom standardnom greškom  $\pm 2\sigma$  empirijskih koeficijenata kros-korelacije (poglavlje 6.3.2). Utvrđeno je da ne postoji značajna kros-korelaciona veza između vremenskih serija  $x_{1t}$  i  $x_{2t}$  na stanicama Ljubičevski Most i Prijepolje (slika 6-12 a, b). Tako se stiču uslovi za primenu postupka *prewhitening* sa dve ulazne vremenske serije (poglavlje 6.3.3). U narednom koraku ocenjena je kros-korelaciona funkcija između slučajnih vremenskih serija  $\alpha$  i  $\beta$  (tj. filtriranih proticaja i klimatskih promenljivih) po izrazu (6.20). Na slici 6-12 (c) i (d) date su ocenjene kros-korelacione funkcije  $r_{\alpha\beta}$  između vremenske serije  $\beta_t$  i serija  $\alpha_{1t}$  i  $\alpha_{2t}$  za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje.



Slika 6-12 Kros-korelaciona funkcija  $r_{xy}$  vremenskih serija  $x_1$  i  $x_2$  za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b); kros-korelaciona funkcija  $r_{\alpha\beta}$  slučajnih vremenskih serija  $\beta_t$ ,  $\alpha_{1t}$ ,  $\alpha_{2t}$  za st. Ljubičevski Most (c) i st. Prijepolje (d)

Sa poznatim značajnim vrednostima funkcija  $r_{\alpha\beta}$  ocenjene su impulsne odzivne težine  $\hat{v}$  prema formuli (6.21). Zatim su parametri TF određeni rešavanjem sistema jednačina (6.7) i formirane TF u skladu sa formulom (6.29). Transfer funkcije stohastičke komponente  $Q_{STOH}(t)$  mesečnih proticaja za sliv (a) Velike Morave i (b) Lima su sledeće:

$$(a) \hat{y}_t = \frac{(0.427 + 0.107B - 0.193B^2)x_{1t}}{1 + 0.288B + 0.295B^2} + (0.102 - 0.202B^2)x_{2t} + (1 + 0.069B)a_t, \quad (6.47)$$

$$(b) \hat{y}_t = \frac{(0.398 + 0.247B)x_{1t}}{1 + 0.434B + 0.352B^2} + (0.419 - 0.153B^2)x_{2t} + (1 + 0.008B)a_t.$$

Kako bi se verifikovala TF ispitano je da li filtrirana greška modeliranja  $a_t$  predstavlja slučajnu seriju. Greška modeliranja je izračunata prema formuli (6.22). Rezultati testiranja slučajnosti vremenske serije  $a_t$  dati su u tabeli 6-3.

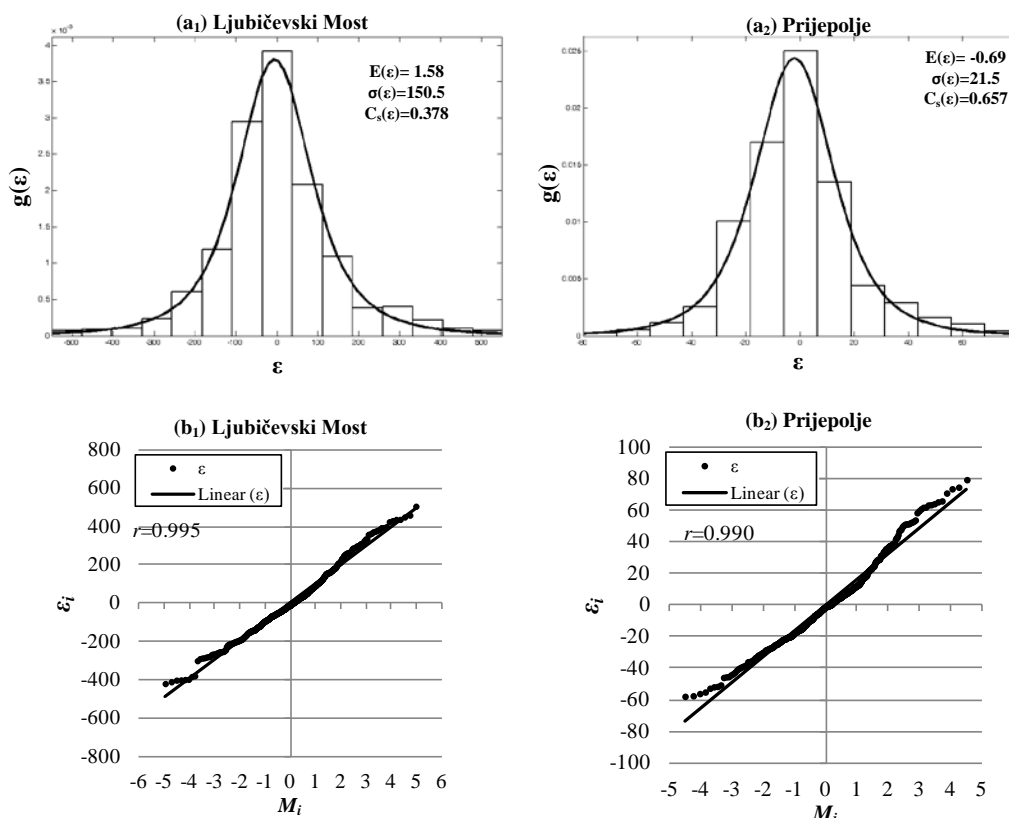
Tabela 6-3 Testiranje filtrirane greške modeliranja  $a_t$  stohastičke komponente:  $S$ ,  $S^*$  - Haugh statistika,  $Q_{BL}$  - Box-Ljung statistika

stanica/test	$S(aa_1)$	$S(aa_2)$	$S^*(aa_1)$	$S^*(aa_2)$	$Q_{BL}(a)$
statistika:	$\chi^2_{101,0.05}=125.48$				$\chi^2_{76,0.05}=97.35$
st. Ljubičevski Most	117.46	120.92	120.72	124.58	8.67
st. Prijepolje	118.33	122.21	120.34	125.01	15.38

Iz rezultata prikazanih u tabeli 6-3 se vidi da test statistike  $S$ ,  $S^*$  i  $Q_{BL}$  imaju manje vrednosti od kritičnih vrednosti na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Zaključeno je da je greška modeliranja nezavisna od slučajnih vremenskih serija  $a_1$  i  $a_2$  dobijenih u *prewhitening*

postupku filtriranjem standardizovanih priraštaja prvog reda mesečnih padavina i temperatura (statistika  $S$ ,  $S^*$ ). Isto tako, greška modeliranja ne sadrži značajnu serijsku korelaciju (statistika  $Q_{BL}$ ). Na osnovu svih rezultata, zaključeno je da je greška modeliranja  $a_t$  slučajna vremenska serija za razmatrane mesečne serije proticaja.

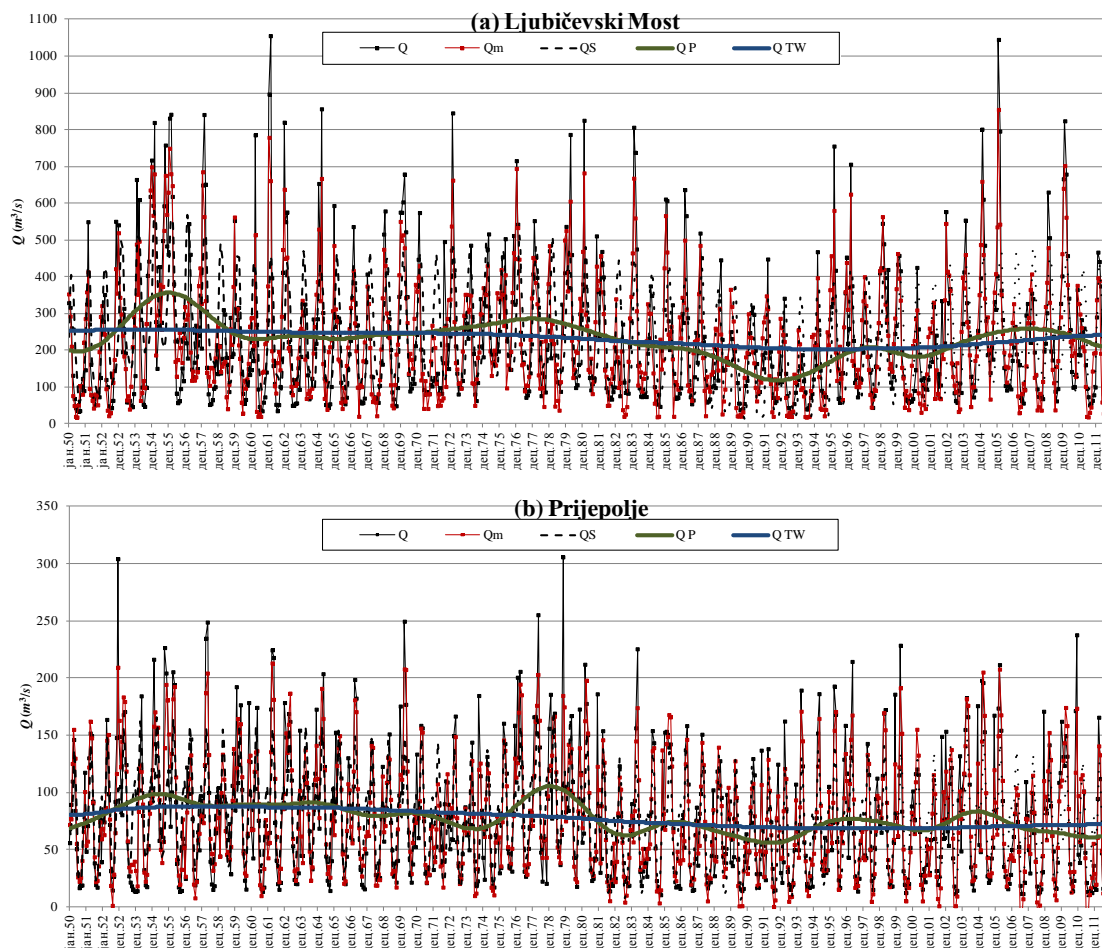
Normalnost greške modeliranja testirana je PPCC testom (poglavlje 3.3.2). Asimetrija greške je znatno izraženija na stanici Prijepolje nego na stanici Ljubičevski Most (slika 6-13). Na stanici Prijepolje hipoteza o nultom koeficijentu asimetrije se odbacuje na pragu značajnosti od  $\alpha=0.05$  ( $p$ -vrednost je 0.03), a na stanici Ljubičevski most se može prihvatiti ( $p$ -vrednost je 0.21).



Slika 6-13 Gustina raspodele greške modeliranja mesečnih proticaja (a) i rezultati PPCC testa za normalnu raspodelu (b) na st. Ljubičevski Most (1) i st. Prijepolje (2)

Kada su određene sve komponente modeliranih mesečnih proticaja iz izraza (6.38) izvršena je agregacija komponenti na istom koraku. Rezultati modeliranja mesečnih proticaja  $Q_m$  prikazani su na slici 6-14. Upoređivanjem modeliranih sa osmotrenim serijama mesečnih proticaja tokom perioda 1950-2012. dobijene su ocene efikasnosti SDTS modela koje za stanicu Ljubičevski Most iznose  $NSE=0.737$ ,  $RMSE=6.094 \text{ m}^3/\text{s}$  (2.6%) i  $RSR=0.513$ , dok za stanicu Prijepolje iznose  $NSE=0.829$ ,  $RMSE=2.559 \text{ m}^3/\text{s}$

(3.3%) i  $RSR=0.417$ . U slučaju stanice Prijepolje radi se o veoma dobrom slaganju, dok je slaganje na stanici Ljubičevski Most dobro, a prema klasifikaciji vrednosti kriterijumskih funkcija NSE i RSR iznetoj u poglavlju 5.2.3.

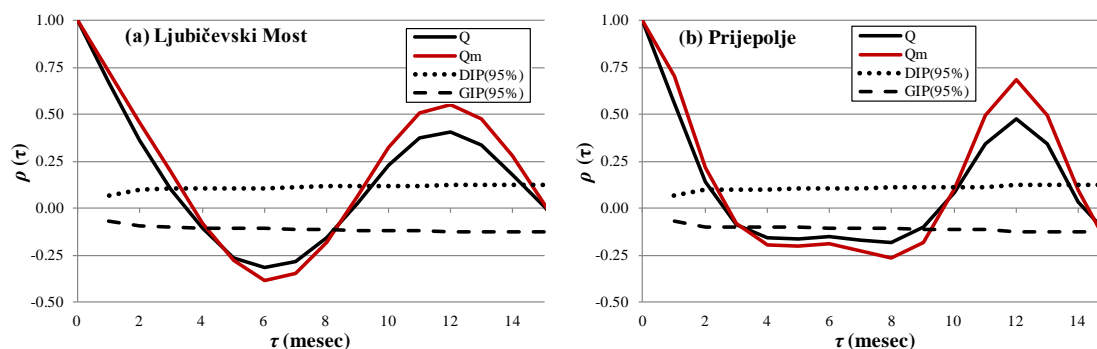


Slika 6-14 Osmotreni mesečni proticaji  $Q$ , modelirani proticaji  $Q_m$ , nelinearni trend  $Q_{Tw}$ , makroperiodična komponenta  $Q_P$  i sezonska komponenta  $Q_S$  na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje za period 1951-2012.

Verifikacija rezultata modeliranja mesečnih proticaja izvršena je pomoću kvartila  $q$  koji su prikazani u tabeli 6-4 i autokorelacione funkcije  $\rho$  koja je data na slici 6-15.

Tabela 6-4. Verifikacija rezultata modeliranja mesečnih proticaja  $Q_m$  za st. Ljubičevski Most i st. Prijepolje u periodu 1950-2012.

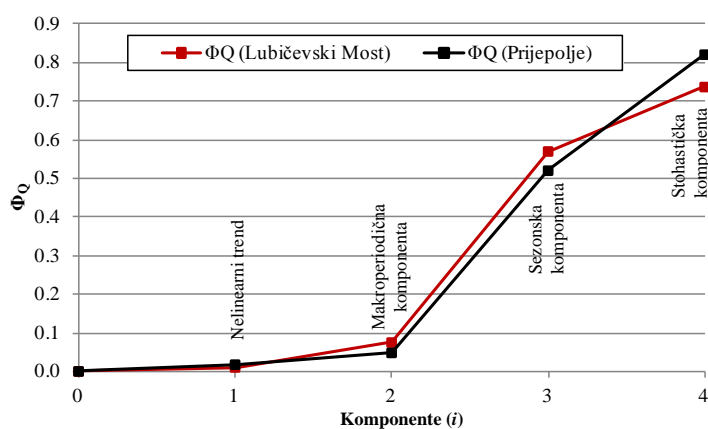
	Ljubičevski Most			Prijepolje		
Parametri:	$q(0.25)$	$q(0.50)$	$q(0.75)$	$q(0.25)$	$q(0.50)$	$q(0.75)$
$Q$	93.4	180.3	316.8	35.4	65.2	113.5
$Q_m$	104.9	197.4	299.5	37.0	67.6	111.3



Slika 6-15 Autokorelaciona funkcija  $\rho$  osmotrenih  $Q$  i modeliranih mesečnih proticaja  $Q_m$  na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje

Najbolje slaganje kvantila modeliranih mesečnih proticaja je za medijanu. Autokorelaciona funkcija  $\rho$  pokazuje zadovoljavajuće slaganje, a primetna je nešto veća autokorelacija modeliranih serija.

Uticaj svake pojedinačne modelirane komponente u ukupnoj varijansi serije godišnjih proticaja prikazan je na slici 6-16. U formuli (5.1) koja definiše objašnjenost varijanse komponenata, komponente redom uključuju (1) nelinearni trend, (2) makroperiodičnu komponentu, (3) sezonsku komponentu i (4) stohastičku komponentu.



Slika 6-16 Objašnjenost varijanse  $\Phi$  za seriju modeliranih mesečnih proticaja na st. Ljubičevski Most i st. Prijepolje sa uključenjem komponente (1) nelinearnog trenda, (2) makroperiodične komponente, (3) sezonske komponente i (4) stohastičke komponente

Rezultati pokazuju veće učešće nelinearnog trenda u slučaju reke Lim, a manje učešće makroperiodične komponente nego u slučaju stanice Ljubičevski Most. Sezonska komponenta pokazuje najveće pojedinačno učešće u varijansi serije, pa tako iznosi 49.6% i 47.2% za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje. Stohastička komponenta je obuhvatila veći deo varijanse serije na stanici Prijepolje, pa ukupna objašnjenost varijanse na ovoj stanici dostiže 85.9% dok u slučaju stanice Ljubičevski Most iznosi 75.6%.

### 6.7.3 Dugoročne projekcije padavina i temperatura

Za potrebe ovog rada, na raspolaganju su bile projekcije meteoroloških parametara na području Srbije koje su rezultat primene regionalnog klimatskog modela EBU-POM (Đurđević i Rajković, 2008) sa početnim i graničnim uslovima iz globalnog klimatskog modela AOGCM SX-G. Projekcije padavina i temperatura na analiziranim meteorološkim stanicama u slivu Velike Morave i Lima su bile na raspolaganju za dva scenarija emisije gasova staklene bašte A1B i A2. Da bi se odredile prosečne padavine i temperature na slivu, primenjene su iste težine meteoroloških stanica kao i tokom istorijskog perioda određene Thiessenovim poligonima.

Rezultati klimatskog modeliranja verifikovani su za period 1961-1990. Poređeni su kvartili kumulativne raspodele  $q$ , standardna devijacija  $\sigma$  i koeficijent asimetrije  $C_s$  osmotrenih ( $P$ ,  $T$ ) i modeliranih ( $P_m$ ,  $T_m$ ) mesečnih serija padavina i temperatura (tabela 6-5).

**Tabela 6-5. Verifikacija klimatskih scenarija u slivu Velike Morave i Lima za period 1961-1990: osmotrene ( $P$ ,  $T$ ) i modelirane ( $P_m$ ,  $T_m$ ) mesečne serije padavina i temperatura**

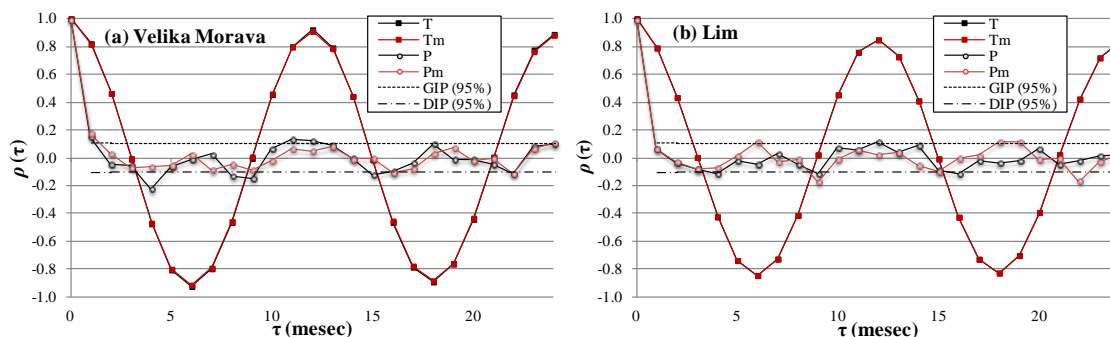
<i>reka Velika Morava, stanica Ljubičevski Most</i>					
Parametri:	$q(0.25)$	$q(0.50)$	$q(0.75)$	$\sigma$	$C_s$
$T$	3.2	5.3	7.1	7.49	-0.178
$P$	33.6	52.4	72.0	29.37	0.742
$T_m$	3.2	5.1	7.4	7.47	-0.170
$P_m$	32.5	52.1	77.1	34.88	1.275
<i>reka Lim, stanica Prijepolje</i>					
Parametri:	$q(0.25)$	$q(0.50)$	$q(0.75)$	$\sigma$	$C_s$
$T$	1.8	6.3	11.2	7.07	-0.163
$P$	36.1	62.5	94.2	48.74	1.365
$T_m$	1.8	6.8	13.0	7.00	-0.140
$P_m$	43.4	64.6	91.4	37.13	0.822

Na osnovu rezultata iz tabele 6-5 zaključuje se da su rezultati klimatskog modela u velikoj meri saglasni sa osmotrenim serijama za period 1961-1990. Kvartili kumulativne raspodele mesečnih padavina i mesečnih temperatura pokazuju bliske vrednosti, isto kao i standardna devijacija  $\sigma$  i koeficijent asimetrije  $C_s$ . Veća odstupanja od oko 20% se primećuju na slivu Lima za prvi kvartil padavina i za njihovu standardnu devijaciju.

Poređenje unutargodišnjih raspodela padavina i temperatura za period 1961-1990 prema osmatranjima i prema klimatskim modelima prikazano je u poglavlju 6.7.4.1 na slici 6-21.



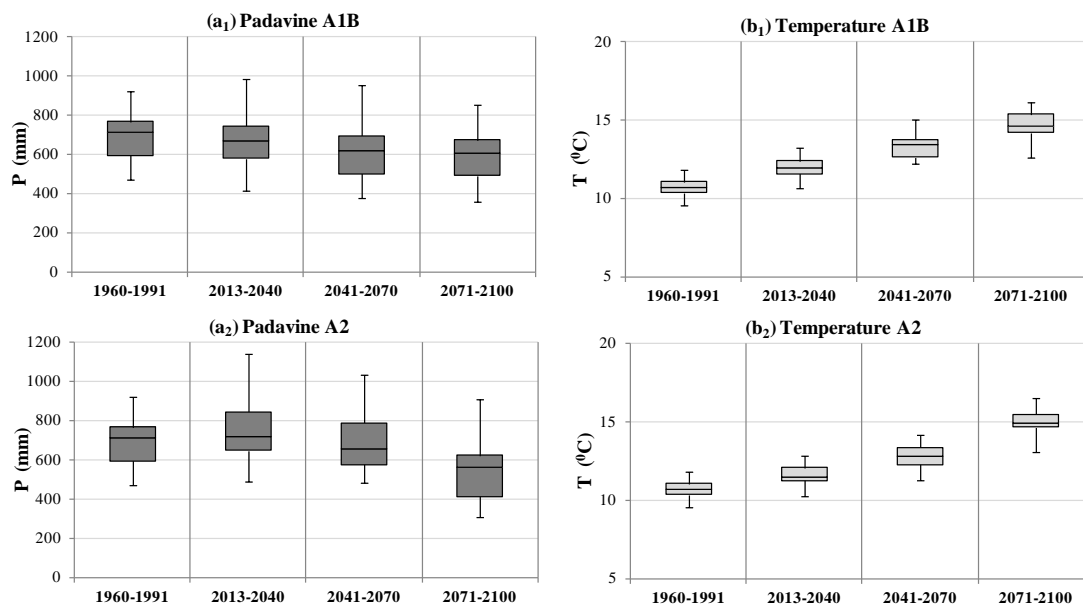
Osim navedenih statističkih parametara rezultati klimatskog modela upoređeni su sa osmotrenim mesečnim padavinama i mesečnim temperaturama prema autokorelacionoj funkciji  $\rho$  (slika 6-17).



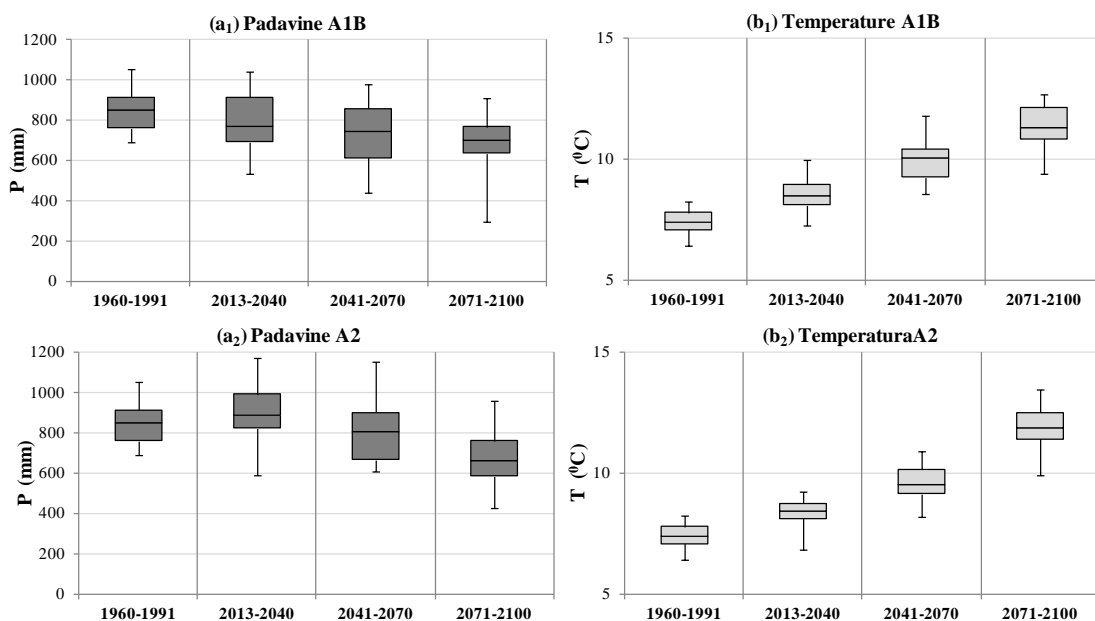
Slika 6-17 Autokorelaciona funkcija  $\rho$  mesečnih padavina ( $P$ ,  $P_m$ ) i mesečnih temperatura ( $T$ ,  $T_m$ ) za osmotrene i modelirane serije na slivovima Velike Morave (a) i Lima (b) za period 1961-1990.

Autokorelaciona funkcija  $\rho$  ima istovetne vrednosti u slučaju osmotrenih i modeliranih vremenskih serija mesečnih temperatura. Kod padavina postoji odstupanje ove funkcije za osmotrene i modelirane serije, ali je slaganje dobro na manjim vremenskim pomacima.

Za projekcije budućeg hidrološkog režima u okviru perioda 2013-2100. korišćena su dva klimatska scenarija A1B i A2 u tri višegodišnja vremenska intervala: bliže (2013-2040), dalje (2041-2070) i daleke budućnosti (2071-2100). Na slikama 6-18 i 6-19 prikazane se dugoročne projekcije godišnjih padavina i temperatura za date vremenske intervale za klimatske scenarije A1B i A2 na slivovima Velike Morave i Lima.



Slika 6-18 Projekcije godišnjih padavina  $P$  i temperatura  $T$  za period 2013-2100. po klimatskim scenarijima A1B i A2 za sliv Velike Morave (minimalne i maksimalne mesečne vrednosti; prvi, drugi i treći kvartil kumulativne raspodele godišnjih vrednosti)



Slika 6-19 Projekcije godišnjih padavina  $P$  i temperatura  $T$  za period 2013-2100. po klimatskim scenarijima A1B i A2 za sliv Lima (minimalne i maksimalne mesečne vrednosti; prvi, drugi i treći kvartil kumulativne raspodele godišnjih vrednosti)

Na osnovu rezultata klimatskog modeliranja uočava se smanjenje prosečnih godišnjih padavina do 2100. za oba klimatska scenarija. Smanjenje godišnjih padavina u okviru sliva Velike Morave i Lima praćeno je povećanjem srednjih godišnjih temperatura. Rezultati pokazuju manje godišnje padavine u okviru scenarija A1B nego što je slučaj sa scenarijom A2. Najveće smanjenje padavina i najveće temperature očekuju se u periodu daleke budućnosti (2071-2100). Promene medijana godišnjih padavina i

temperatura klimatskog modeliranja u odnosu na referentni period 1961-1990. za klimatske scenarije A1B i A2 za slivove Velike Morave i Lima dati su u tabeli 6-6.

**Tabela 6-6. Promene medijana srednjih godišnjih temperatura i padavina na slivovima V. Morave i Lima u tri buduća perioda u odnosu na 1961-1990 prema klimatskim scenarijima A1B i A2**

Period:	V. Morava – Ljubičevski Most				Lim – Prijepolje			
	Temperature		Padavine		Temperature		Padavine	
	A1B	A2	A1B	A2	A1B	A2	A1B	A2
2013-2040	+0.8°C	+1.3°C	-5.5%	+1.4%	+1.1°C	+1.2°C	-9.5%	+4.8%
2041-2070	+2.2°C	+2.8°C	-13.2%	-7.4%	+2.2°C	+2.7°C	-12.5%	-5.3%
2071-2100	+4.0°C	+4.2°C	-14.5%	-20.8%	+3.9°C	+4.5°C	-17.6%	-22.2%

Osim promene godišnjih vrednosti padavina i temperatura, u dugoročnim klimatskim projekcijama dolazi i do promene njihove unutargodišnje raspodele. Unutargodišnja raspodela projekcija padavina i temperatura analizirana je na nivou sezonskih vrednosti (zimski sezona - I, prolećna sezona - II, letnja sezona - III, jesenja sezona - IV) u odnosu na referentni period 1961-1990. Ilustracija dugoročnih projekcija sezonskih padavina i temperatura na stanicama Lubičevski Most i Prijepolje iskazana preko kvartila kumulativne raspodele i ekstremnih vrednosti data je u grafičkom prilogu G-19, dok su relativne promene sezonskih vrednosti padavina i apsolutne promene sezonskih vrednosti temperatura date u grafičkom prilogu G-20. Rezultati klimatskog modeliranja ukazuju da se očekuje povećanje sezonskih temperatura tokom svih sezona za klimatske scenarije A1B i A2 za period 2013-2100. Projekcija sezonskih padavina ukazuju na smanjenje njihovih vrednosti u oba sliva koje je najizraženije tokom letnje sezone za oba klimatska scenarija. Smanjenje letnjih padavina od više od 40% u odnosu na 1961-1990. je najizraženije u poslednjih 30 godina 21. veka na slivu Velike Morave i Lima. Za razliku od preovladavajućeg smanjenja sezonskih padavina prema scenariju A1B, prema klimatskom scenariju A2 tokom perioda bliže (2013-2040) i dalje (2041-2070) budućnosti u slivu Velike Morave i Lima očekuje se povećanje padavina u okviru zimске, prolećne i jesenje sezone.

## 6.7.4 Rezultati dugoročnih projekcija mesečnih proticaja

### 6.7.4.1 Deterministička komponenta

#### Ocena godišnjih vrednosti determinističke komponente korišćenjem inicijalnog hidrološkog modela

*Inicijalni* hidrološki model predstavlja neophodan element prilikom definisanja dugoročnih projekcija godišnjih proticaja jer se njime uspostavlja direktna veza između padavina i temperatura u slivu, sa jedne strane, i proticaja, sa druge strane. Ocenjeni

parametri TF se zatim koriste kako bi se odredile dugoročne projekcije godišnjih proticaja. Detaljan opis *inicijalnog* modela dat je u poglavlju 6.5.1.1.

Identifikacija modela TF sa godišnjim padavinama i temperaturama kao ulazom izvršena je primenom metode *prewhitening* sa dvostrukom ulaznom serijom koja je prikazana u okviru poglavlja 6.3.

Najpre je ispitana stacionarnost priraštaja prvog reda godišnjih proticaja ( $y_t$ ) i priraštaja prvog reda godišnjih padavina ( $x_{1t}$ ) i srednjih godišnjih temperatura ( $x_{2t}$ ) primenom Dickey-Fuller testa (poglavljje 3.2.1). Test statistika  $\tau$  za tri serije na stanici Ljubičevski Most redom iznosi -12.9, -20.6 i -21.1, dok za stanicu Prijepolje za analizirane serije test statistika  $\tau$  ima sledeće vrednosti: -13.1, -21.4 i -21.6. Apsolutne vrednosti statistike  $\tau$  razmatranih serija su veće od apsolutne kritične vrednosti test statistike  $\tau_{krit}=-2.905$  na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$ . Zaključuje se da su razmatrani priraštaji prvog reda stacionarne vremenske serije.

Kada je utvrđena stacionarnost vremenskih serija  $y$ ,  $x_{1t}$  i  $x_{2t}$  tada je moguće oceniti parametre TF u okviru sinhronog perioda 1950-2012. Transfer funkcije za sliv Velike Morave (a) i sliv Lima (b) imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \hat{y}_t &= \frac{(0.629 + 0.279B^2)x_{1t}}{1 + 0.159B} + (-0.481 + 0.342B^2)x_{2t} + (1 + 0.204B)a_t, \\ \text{(b)} \quad \hat{y}_t &= \frac{(0.615 - 0.187B - 0.337B^2)x_{1t}}{1 + 0.482B + 0.318B^2} + (-0.418B + 0.120B^2)x_{2t} + (1 + 0.113B)a_t. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Prilikom modeliranja TF potrebno je da greška modeliranja predstavlja slučajnu seriju. Model TF je u tom smislu verifikovan na osnovu Haugh ( $S$ ,  $S^*$ ) i Box-Ljung ( $Q_{BL}$ ) statistika. Rezultati testiranja pokazuju da greška modeliranja *inicijalnog* hidrološkog modela predstavlja seriju nezavisnu od ulaznih serija  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , tj. nije registrovana značajna kros-korelacija između greške i filtriranih ulaznih serija na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$  (tabela 6-7). Takođe je utvrđeno da greška modeliranja TF nije značajno autokorelisana na pragu značajnosti  $\alpha=0.05$  (tabela 6-7).

**Tabela 6-7 Testiranje greške modeliranja  $a_t$  inicijalnog hidrološkog modela:  $S, S^*$  - Haugh statistika,  $Q_{BL}$  - Box-Ljung statistika**

stanica/test statistika:	$S(aa_1)$	$S(aa_2)$	$S^*(aa_1)$	$S^*(aa_2)$	$Q_{BL}(a)$
		$\chi^2_{51,0.05}=72.62$			$\chi^2_{5,0.05}=12.59$
st. Ljubičevski Most	29.76	47.39	33.76	55.57	10.90
st. Prijepolje	58.78	41.72	67.59	47.69	5.65

Osim toga, verifikacija modela TF sprovedena je poređenjem autokorelacionih funkcija osmotrenih i modeliranih serija koje su prikazane u grafičkom prilogu G-17. Autokorelaciona funkcija na prvim pomacima na kojima je autokorelacija značajna pokazuje slične vrednosti, dok su na većim pomacima na kojima autokorelacija nije značajna primetna manja odstupanja od vrednosti funkcije osmotrenih serija.

Verifikacija modela TF sa dvostrukim ulazom sprovedena je i upoređivanjem kvartila osmotrenih i modeliranih serija godišnjih proticaja ( $Q, Q'_m$ ), makroperiodičnih komponenti osmotrene i modelirane serije ( $Q_P, Q'_{mP}$ ) i nelinearnih trendova osmotrene i modelirane serije ( $Q_{Tw}, Q'_{mTw}$ ). Takođe je utvrđena objašnjenost varijanse  $\Phi$  komponenti serije osmotrenih godišnjih proticaja odgovarajućim komponentama modelirane serije (tabela 6-8).

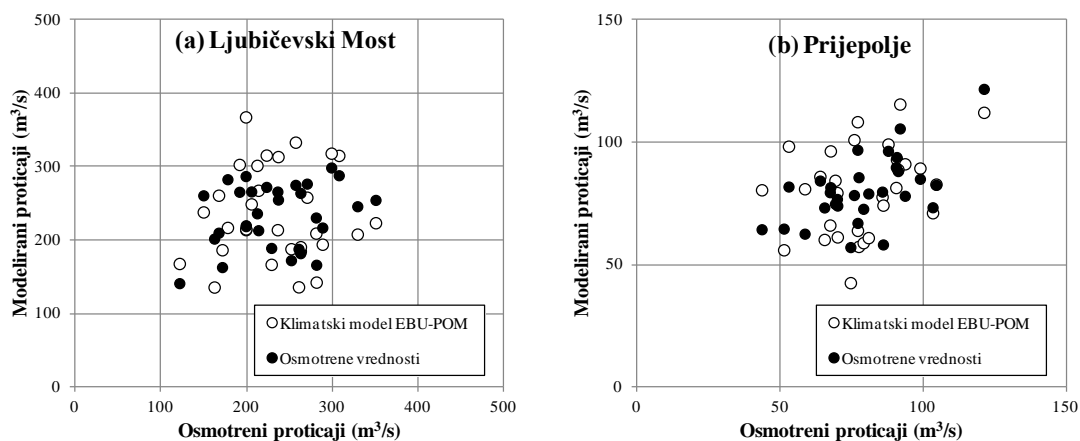
**Tabela 6-8. Verifikacija TF inicijalnog hidrološkog modela za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje tokom perioda 1950-2012:  $Q'_m$ -modelirani godišnji proticaji inicijalnim modelom;  $Q$ -osmotreni godišnji proticaji;  $Q_P, Q'_{mP}$  - makroperiodična komponenta,  $Q_{Tw}, Q'_{mTw}$  -nelinearni trend;  $q$  kvartili kumulativne raspodele;  $\Phi$ -objašnjenost varijanse;  $r$ -koeficijent korelacije .**

Parametri:	Ljubičevski Most					Prijepolje				
	$q(0.25)$	$q(0.50)$	$q(0.75)$	$\Phi(Q')$	$r(Q')$	$q(0.25)$	$q(0.50)$	$q(0.75)$	$\Phi(Q')$	$r(Q')$
$Q$	176.3	209.8	266.2			66.2	75.9	89.8		
$Q_P$	207.6	226.5	262.1			67.8	77.2	85.6		
$Q_{Tw}$	213.2	234.8	246.5			69.8	75.4	85.5		
$Q'_m$	189.5	230.0	270.8	0.628	0.390	69.3	76.3	87.9	0.611	0.571
$Q'_{mP}$	213.4	234.8	247.2	0.934	0.953	69.7	77.0	85.4	0.959	0.960
$Q'_{mTw}$	189.1	229.9	260.5	0.946	0.982	67.8	77.2	85.6	0.968	0.992

Na osnovu rezultata iz tabele 6-8 zaključuje se da kvartili  $q$  osmotrenih i modeliranih inicijalnih serija pokazuju zadovoljavajuće slaganje. Serija modeliranih godišnjih proticaja  $Q'_m$  objašnjava  $\Phi=61-63\%$  varijanse godišnjih proticaja  $Q$ , modelirana makroperioda  $Q'_{mP}$  objašnjava  $\Phi=93-96\%$  varijanse  $Q_P$  dok je objašnjenost varijanse najveća u slučaju nelinearnog trenda  $Q'_{mTw}$  gde iznosi  $\Phi=95-97\%$  varijanse  $Q_{Tw}$ . Osim toga, koeficijent linearne korelacije između modeliranih  $Q'_m$  i osmotrenih godišnjih proticaja  $Q$  nalazi se u razmaku 0.390-0.570, a u slučaju modeliranog nelinearnog

trenda ( $Q_{Tw}$ ,  $Q'_{mTw}$ ) i makroperiodične komponente ( $Q_P$ ,  $Q'_{mP}$ ) je značajno veći i za ove komponente iznosi u rasponu 0.934-0.960 i 0.982-0.992. Zaključuje se da *inicijalni* hidrološki model dobro reprezentuje godišnju determinističku komponentu (nelinearni trend i makroperiodičnu komponentu) tokom perioda osmatranja, tako da je na taj način u modeliranim serijama sačuvana dugoročna statistička zavisnost.

Uporedni prikaz osmotrenih i modeliranih proticaja korišćenjem osmotrenih padavina i temperatura, kao i meteoroloških parametara dobijenih klimatskim modeliranjem korišćenjem EBU-POM modela, za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje tokom perioda 1961-1990 dat je na slici 6-20. Pri tome se uočava snažnija korelaciona veza između osmotrenih proticaja i proticaja dobijenih modeliranjem pomoću osmotrenih serija padavina i temperatura. Rasipanje tačaka oko regresione prave je veće za slučaj modeliranih godišnjih proticaja dobijenih korišćenje EBU-POM klimatskog modela.



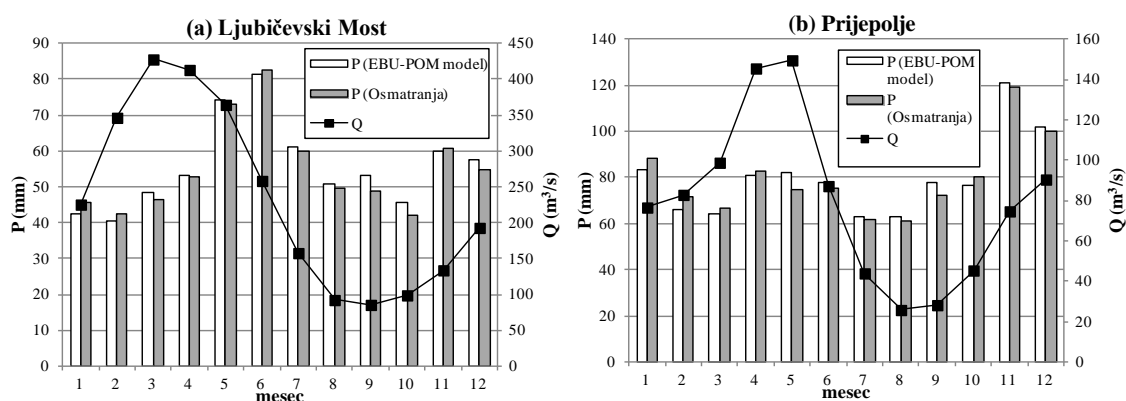
**Slika 6-20** Uporedni prikaz osmotrenih i modeliranih godišnjih proticaja korišćenjem osmotrenih godišnjih serija padavina i temperatura i serija klimatskog modeliranja za st. Ljubičevski Most i st. Prijepolje tokom perioda 1961-1990.

Kako su rezultati *inicijalnog* modela korišćenjem TF iz izraza (6.48) prikazali zadovoljavajuće slaganje tokom istorijskog perioda, omogućena je primena modela za prognozu godišnjih proticaja za budući period. Serije projekcija godišnjih proticaja  $\tilde{Q}'_m(t)$  određene su za period 2013-2100. na osnovu godišnjih padavina i temperatura iz klimatskog modela za klimatske scenarije A1B i A2. Na osnovu projekcija godišnjih proticaja  $\tilde{Q}'_m(t)$  određuje se godišnja deterministička komponenta do kraja 21. veka, tj. nelinearni trend  $\tilde{Q}'_{Tw}(t)$  i makroperiodična komponenta  $\tilde{Q}'_P(t)$ . Za to je korišćena

metodologija za određivanje godišnje determinističke komponente u skladu sa modelom SDTS koja je prikaza u poglavljima 3.5.2.2 i 3.6.1.

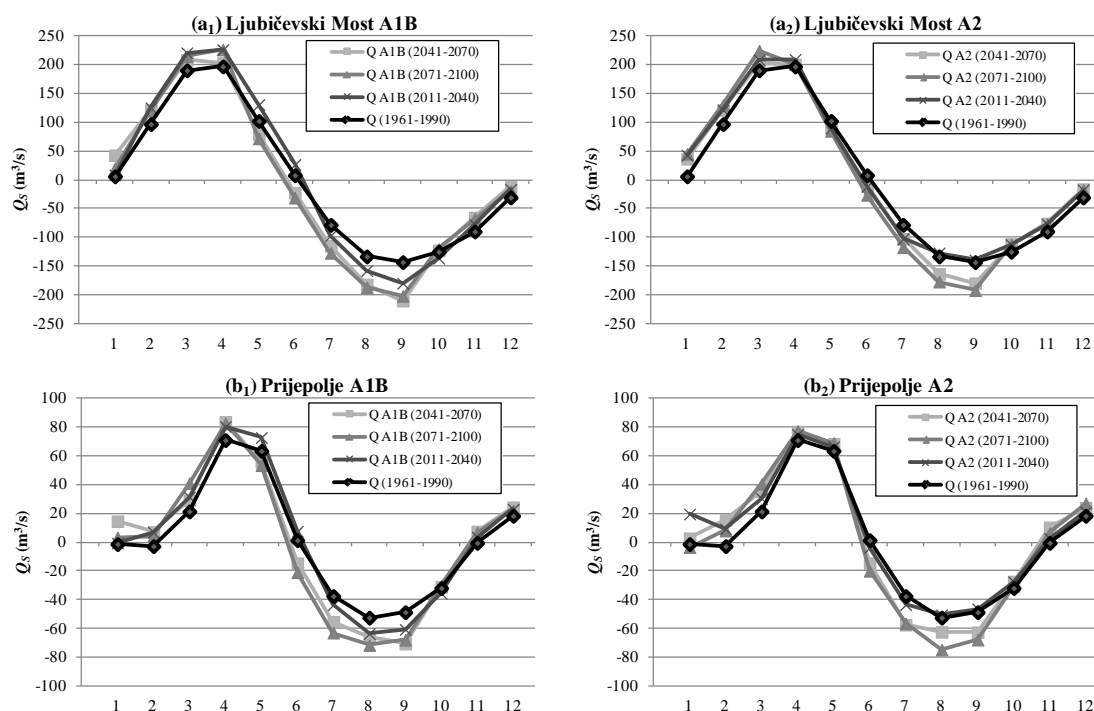
### Ocena mesečnih vrednosti determinističke komponente – sezonska komponenta

Metodološki okvir za određivanje sezonske komponente  $Q_S(t)$  u budućnosti dat je u poglavlju 6.5.1.2. Kako bi se ilustrovala unutargodišnja raspodela mesečnih proticaja i padavina na slici 6-21 prikazani su mesečni proticaji, osmotrene mesečne padavine i padavine klimatskog modeliranja korišćenjem EBU-POM modela za sliv Velike Morave i Lima za period 1961-1990.



Slika 6-21 Srednji mesečni proticaji, mesečne padavine i padavine iz klimatskog modela EBU-POM za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b) tokom perioda 1961-1990.

Prema metodologiji iznetoj u delu u poglavlju 6.5.1.2 promena sezonske komponente  $Q_S$  tokom budućeg perioda određene su promenom unutargodišnje raspodele padavina na osnovu izraza (6.43). Slično promenama mesečnih padavina, rezultati modeliranja pokazuju smanjenje mesečnih proticaja koji se javljaju tokom letnjih i jesenjih meseci. Na slici 6-22 prikazane su sezonske komponente / unutargodišnje raspodele proticaja za referentni period 1961-1990. i 3 buduća tridesetogodišnja perioda za klimatske scenarije A1B i A2 za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje.



Slika 6-22 Sezonska komponenta  $Q_s$  za referentni period (1961-1990) i tri višegodišnja perioda (2013-2040; 2041-2070; 2071-2100) za klimatske scenarije A1B (1) i A2 (2) za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b)

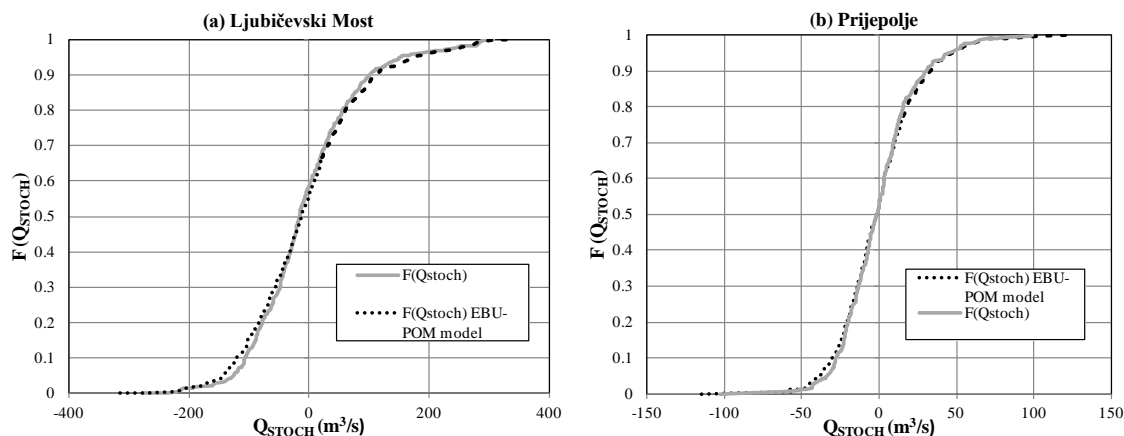
U grafičkom prilogu G-18 prikazane su sezonske komponente i srednje mesečne padavine tokom perioda 2013-2100. u okviru klimatskih scenarija A1B i A2 za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje.

#### 6.7.4.2 Stohastička komponenta

Dugoročne projekcije stohastičke komponente utvrđene su na osnovu modela TF datog u formuli (6.47) čiji su parametri određeni za period osmatranja korišćenjem mesečnih serija proticaja, padavina i temperatura. Umesto osmotrenih serija padavina i temperatura, kao ulaz za određivanje dugoročnih projekcija stohastičke komponente  $Q_{STOCH}(t)$  koriste se projekcije meteoroloških parametara iz klimatskog modela prema scenarijima A1B i A2. Treba imati u vidu da su serije dobijene iz klimatskih modela slične osmotrenim serijama po svojim statističkim parametrima, ali se od osmotrenih serija razlikuju u hronološkom redosledu. Iz tog razloga prilikom modeliranja stohastičke komponente javlja se neizvesnost koja je posledica klimatskog modeliranja. Potrebno je utvrditi da li modelirane stohastičke komponente  $Q_{STOCH}(t)$  dobijene modelom TF sa mesečnim serijama osmotrenih padavina i temperatura kao i onih iz klimatskog modela imaju saglasne raspodele. Na slici 6-23 prikazana je empirijska

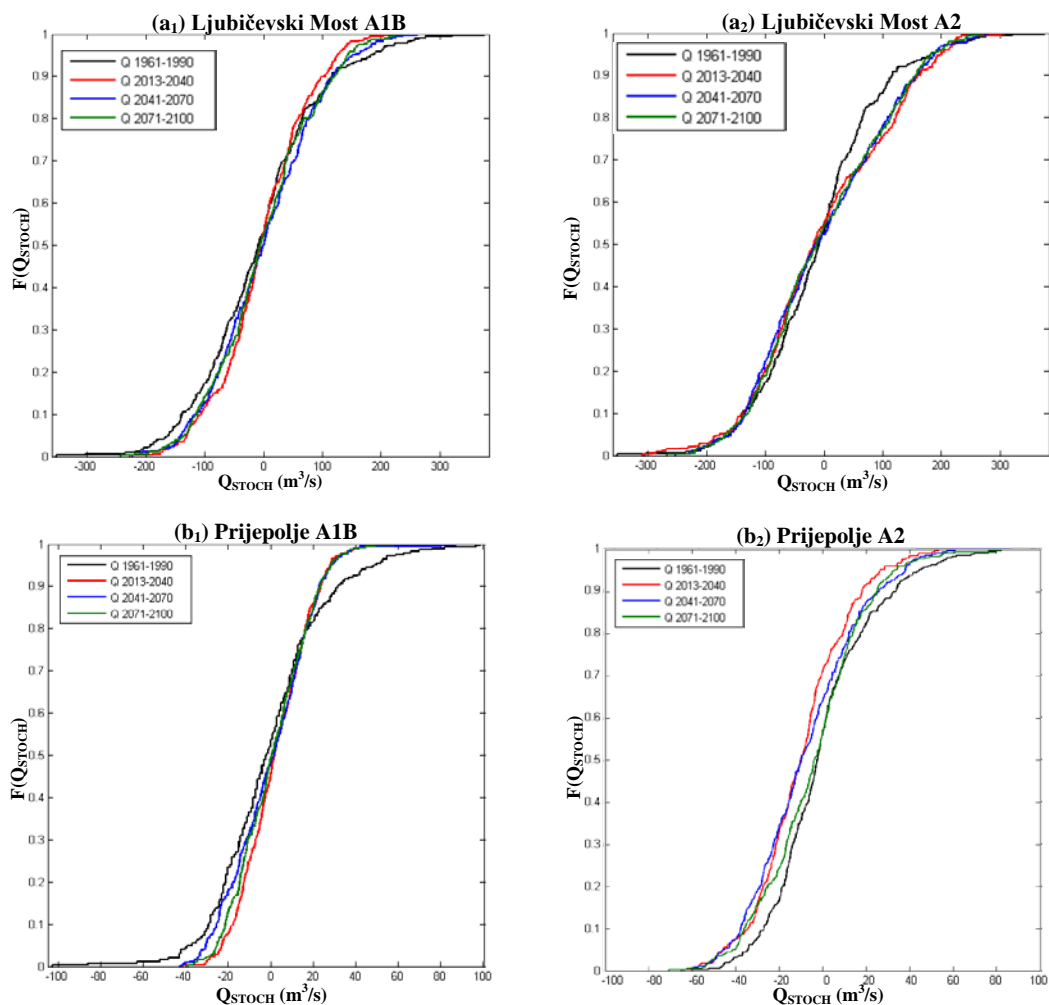


kumulativna verovatnoća stohastičke komponente  $Q_{STOCH}(t)$  dobijene na osnovu meteoroloških serija osmatranja i serija iz klimatskog modela EBU-POM za period 1961-1990. za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje.



**Slika 6-23** Empirijska kumulativna verovatnoća  $F(Q_{STOCH})$  stohastičke komponente  $Q_{STOCH}$  dobijena korišćenjem serija osmatranja i serija iz klimatskog EBU-POM modela za period 1961-1990 za stanice Ljubičevski Most (a) i Prijepolje (b)

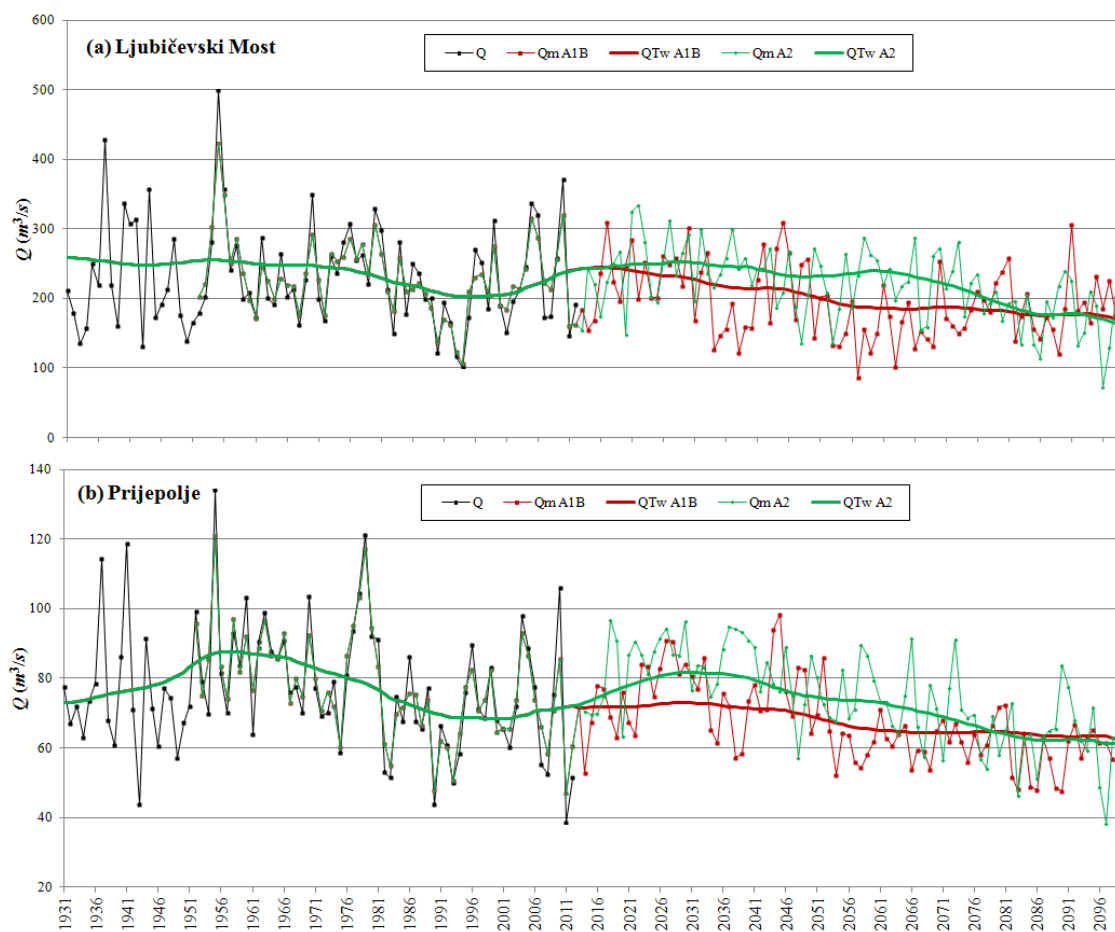
Slika 6-23 pokazuje da su kvantili stohastičke komponente  $Q_{STOCH}(t)$  dobijene iz osmotrenih meteoroloških serija i serija klimatskog modeliranja međusobno saglasni za period 1961-1990. Izvesna odstupanja kumulativne verovatnoće primetna su na krajevima raspodele za oba sliva. Na osnovu saglasnih raspodela zaključeno je da je model TF iz izraza (6.47) verifikovan i za ulazne serije klimatskog modeliranja i da se može koristiti sa projekcijama budućih meteoroloških parametara iz EBU-POM modela. Na ovaj način dobijaju se vrednosti serije stohastičke komponente  $Q_{STOCH}(t)$  mesečnih proticaja za period 2013-2100. po klimatskim scenarijima A1B i A2. Empirijska kumulativna verovatnoća  $F(Q_{STOCH})$  stohastičke komponente  $Q_{STOCH}$  je prikazana na slici 6-24 za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje tokom perioda 2013-2100.



Slika 6-24 Empirijska kumulativna verovatnoća  $F(Q_{STOCH})$  stohastičke komponente  $Q_{STOCH}$  za tri višegodišnja buduća perioda (2013-2040; 2041-2070; 2071-2100) za stanice Ljubičevski Most (a) i Prijepolje (b) po klimatskom scenariju A1B(1) i A2(2)

#### 6.7.4.3 Agregirane komponente vremenskih serija

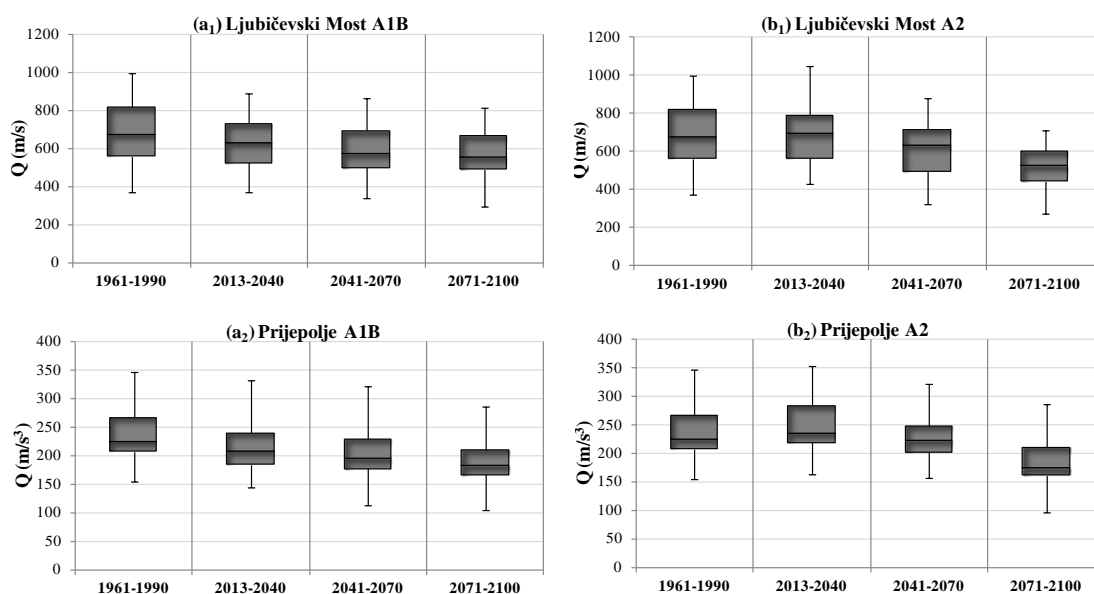
Dugoročne projekcije srednjih mesečnih proticaja određene su prema formuli (6.44) SDTS modela po klimatskim scenarijima A1B i A2 za period 2013-2100. Rezultati dugoročnih projekcija iskazani na godišnjem nivou dati su na slici 6-25 za stanice Ljubičevski Most i Prijepolje.



**Slika 6-25 Dugoročne projekcije srednjih godišnjih proticaja za period 2013-2100. za klimatske scenarije A1B i A2 na (a) st. Ljubičevski Most i (b) st. Prijepolje**

Rezultati hidroloških projekcija proticaja pomoću modela SDTS sagledani su za dva klimatska scenarija A1B i A2 u tri višegodišnja intervala tokom bliže (2011-2040), dalje (2041-2070) i daleke (2071-2100) budućnosti. Godišnje projekcije proticaja upoređene su sa višegodišnjom srednjom vrednosti proticaja tokom referentnog perioda 1961-1990.

Dugogodišnje projekcije ukazuju na smanjenje proticaja tokom perioda do 2100. Za ukupni budući period (2013-2100) u slivu Velike Morave očekivano smanjenje medijane godišnjih proticaja po klimatskom scenariju A1B i A2 iznosi 12.6% i 8.5%. U slučaju reke Lim smanjenje medijane godišnjih proticaja po navedenim scenarijima iznosi 13.6% i 6.1%. Tokom tri višegodišnja intervala bliže, dalje u daleke budućnosti dolazi do različitih promena godišnjeg proticaja. Na slici 6-26 prikazane su dugoročne projekcije srednje godišnjeg proticaja na stanicima Ljubičevski Most i Prijepolje za klimatske scenarije A1B i A2.



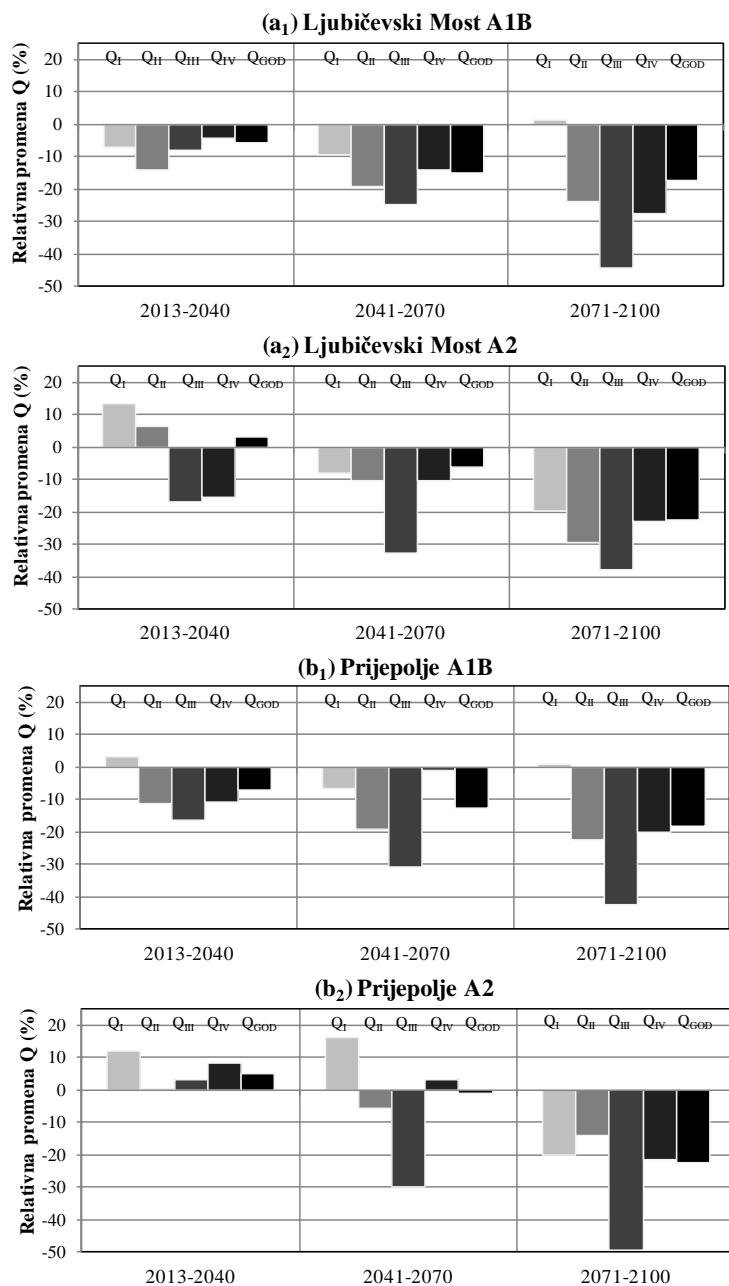
Slika 6-26 Projekcije srednjih godišnjih proticaja za period do 2100. po klimatskom scenariju A1B (a) i A2 (b) za st. Ljubicevski Most (1) i st. Prijepolje (2) (minimalne i maksimalne godišnje vrednosti; prvi, drugi i treći kvartil kumulativne raspodele godišnjih vrednosti)

Promene medijana godišnjih proticaja dugoročnih projekcija hidrološkog modeliranja u odnosu na period 1961-1990. za klimatske scenarije A1B i A2 dati su u tabeli 6-9.

Tabela 6-9. Promene medijana dugoročnih projekcija srednjih godišnjih proticaja za stanice Ljubicevski Most i Prijepolje u tri buduća perioda u odnosu na 1961-1990 prema klimatskim scenarijima A1B i A2

Period	Velika Morava – Ljubicevski Most		Lim – Prijepolje	
	A1B	A2	A1B	A2
2013-2100	-12.6%	-8.5%	-13.6%	-6.1%
2013-2040	-5.7%	+3.0%	-6.9%	+5.1%
2041-2070	-14.9%	-6.2%	-12.4%	-1.1%
2071-2100	-17.2%	-22.3%	-18.4%	-22.4%

Osim dugoročnih promena prosečnih proticaja očekuje se promene unutargodišnje raspodele proticaja. Promene unutargodišnje raspodele proticaja su posledica porasta temperatura tokom svih sezona unutar godine i smanjenja padavina tokom letnjih meseci kao i njihovog delimičnog uvećanja tokom zime. U grafičkom prilogu G-21 date su dugoročne projekcije sezonskih proticaja (zimski sezona  $Q_I$ , prolećna sezona  $Q_{II}$ , letnja sezona  $Q_{III}$ , jesenja sezona  $Q_{IV}$ ) tokom bliže, dalje i daleke budućnosti. Osim toga, na slici 6-27 prikazane su relativne promene medijane srednjih sezonskih i godišnjih proticaja u odnosu na korespondentne vrednosti za period 1961-1990.



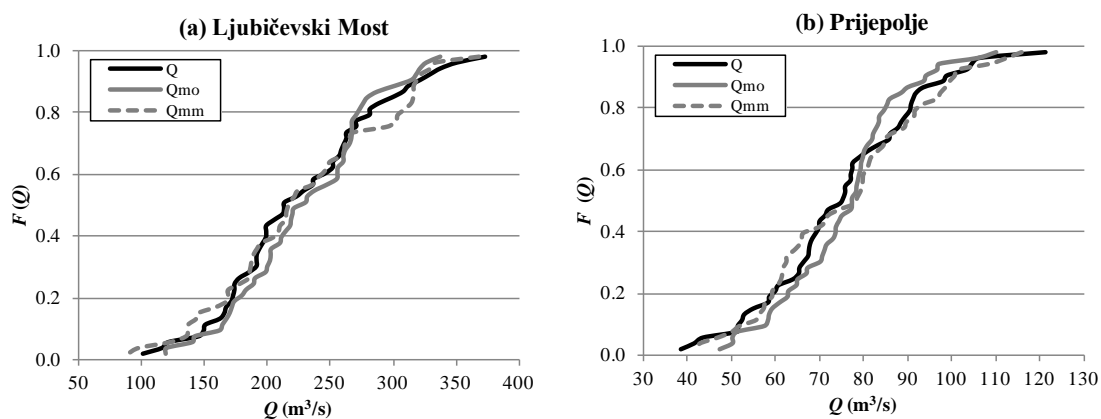
Slika 6-27 Relativna promena medijana srednjih sezonskih i godišnjih proticaja za period 2013-2100. u odnosu na korespondentne vrednosti tokom perioda 1961-1990. po klimatskom scenariju A1B (1) i A2 (2) za st. Ljubicevski Most (a) i st. Prijepolje (b)

Na osnovu rezultata sa slike 6-27 zaključuje se da se najveće smanjenje proticaja prema oba klimatska scenarija predviđa tokom letnje sezone ( $Q_{III}$ ), ali je smanjenje vidljivo i za jesenju ( $Q_{IV}$ ) i prolećnu sezonu (II). Povećanje sezonskih proticaja očekuje se prema klimatskom scenariju A2 tokom zimske sezone ( $Q_I$ ) za period bliže budućnosti (2013-2040). Najveće smanjenje proticaja očekuje se tokom perioda daleke budućnosti (2071-2100). Tada se predviđa smanjenje proticaja tokom svih sezona sa naglašenim smanjenjem tokom letnje sezone ( $Q_{III}$ ). Na osnovu iznetih rezultata može se izvesti

zaključak da su očekivana smanjenja godišnjih proticaja posledica umanjena proticaja tokom letnje sezone ( $Q_{III}$ ), ali da veliki uticaj ima i očekivano umanjeno proticaja u periodu velikih voda tokom zimsko-prolećnog perioda.

### 6.7.5 Neizvesnost *inicijalnog* modela

Za identifikaciju *inicijalnog* modela korišćene su osmotreni godišnji proticaji i meteorološke veličine na slivu, dok bi se za njegovu primenu u dugoročnim projekcijama koristile padavine i temperature iz klimatskih modela. Simulirane serije iz klimatskih modela se u opštem slučaju ne podudaraju sa osmotrenim serijama u hronološkom redosledu (kao posledica različitih početnih i graničnih uslova u klimatskim modelima), ali imaju slične statističke karakteristike kao i osmotrene. Zato neizvesnost rezultata klimatskih modela dovodi i do neizvesnosti u hidrološkim projekcijama kada se izlazi klimatskog modela koriste kao ulaz u hidrološki model. Kao mera neizvesnosti u proticajima usled neizvesnosti koja potiče od klimatskog modeliranja, korišćena je empirijska kumulativna verovatnoća modeliranih godišnjih proticaja dobijenih na osnovu godišnjih osmotrenih i modeliranih klimatskih parametara (padavina i temperatura). Na slici 6-28 prikazana je empirijska kumulativna raspodela  $F(Q)$  godišnjih osmotrenih proticaja ( $Q$ ) kao i modeliranih godišnjih proticaja dobijenih na osnovu *inicijalnog* modela za period 1961-1990. Ovom prilikom su kao ulazne vremenske serije korišćene osmotrene padavine i temperature čime su modelirani godišnji proticaji  $Q_{mo}$ . Osim osmotrenih klimatskih serija, korišćene su i serije klimatskog modeliranja EBU-POM modela za isti period (1961-1990) čime su određeni modelirani proticaji  $Q_{mm}$ .



Slika 6-28 Empirijska kumulativna verovatnoća  $F(Q)$  za st. Ljubičevski Most (a) i st. Prijepolje (b) tokom perioda 1961-1990:  $Q$ -osmotreni godišnji proticaji,  $Q_{mo}$ -modelirani godišnji proticaji korišćenjem osmotrenih ulaznih serija,  $Q_{mm}$ -modelirani godišnji proticaji korišćenjem serija klimatskog modeliranja

Kao mera neizvesnosti modeliranja godišnjih proticaja usled neizvesnosti klimatskog modela korišćen je parametar efikasnosti  $RMSE_x$  primenjen za empirijsku kumulativnu raspodelu  $F(Q)$  godišnjih proticaja na istim vrednostima kvantila. Ovom prilikom se upoređuju funkcije empirijske kumulativne raspodele za godišnje proticaje modelirane na bazi osmotrenih padavina i temperatura  $Q_{mm}$ , kao i za modelirane godišnje proticaje određene korišćenjem serija klimatskog modeliranja  $Q_{mm}$  (slika 6-28). Za sliv Velike Morave (a) i sliv Lima (b) neizvesnosti u hidrološkim projekcijama godišnjih proticaja je iskazana u sledećem izrazu:

$$\begin{aligned} (a) \quad \tilde{Q}(t) \pm RMSE_x &= \tilde{Q}(t) \pm 17.9 \text{ m}^3/\text{s}, \\ (b) \quad \tilde{Q}(t) \pm RMSE_x &= \tilde{Q}(t) \pm 5.4 \text{ m}^3/\text{s}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Ukoliko se parametar efikasnosti  $RMSE_x$  prilagođavanja empirijske kumulativne raspodele godišnjih proticaja prikaže u vidu procentualnog učešća u srednjoj vrednosti serije tada za sliv Velike Morave relativna srednja kvadratna greška iznosi 8.0%, dok za reku Lim iznosi 7.2%.

#### 6.7.6 Diskusija o modeliranju vremenskih serija za potrebe dugoročnih projekcija promena hidrološkog režima

Za razliku od determinističkih hidroloških modela (Arnell, 2003; ICPDR, 2012; Svetska banka, 2014; Haddeland i sar. 2013) koji se koriste za određivanje dugoročnih projekcija proticaja u ovoj disertaciji je za istu namenu predložen stohastički model. Tokom perioda osmatranja model je primenjen na godišnjim serijama proticaja kako bi se odredila godišnja deterministička komponenta u vidu nelinearnog trenda i makroperiodične komponente. Oduzimanjem godišnje determinističke komponente, koja se prevodi sa godišnjeg na mesečni vremenski korak primenom niskopropusnog filtra, od osmotrenih mesečnih proticaja formirani su reziduali iz kojih se ocenjuje mesečna deterministička komponenta, tj. komponenta sezonskog ciklusa. Za razliku od determinističke komponente koja se određuje različitim transformacijama iz serije osmotrenih proticaja, stohastička komponenta se izražava u vidu eksplicitne funkcije mesečnih serija padavina i temperatura. SDTS model je pogodan za prognozu mesečnih serija proticaja u nekoliko narednih koraka pošto se modelske komponente izražavaju kao funkcija vremena (deterministička komponenta) ili kao funkcija ulaznih klimatskih

serija (stohastička komponenta). Kao takav, SDTS model pogodan je za sezonsku prognozu mesečnih proticaja na rekama, a na bazi meteorološke mesečne prognoze.

Međutim, dugoročne projekcije mesečnih proticaja na ovaj način nije moguće odrediti zbog neophodnosti sagledavanja dugoročnih projekcija klimatskih parametara i njihove veze sa determinističkom komponentom. Iz tog razloga, formiran je *inicijalni* model (poglavlje 6.5.1) kojim se inicijalno određuju buduće serije godišnjeg proticaja na kojima se primenjuje SDTS model, na isti način, kao i za osmotrene serije godišnjeg proticaja. *Inicijalni* model zasnovan je na TF koje godišnje padavine i temperature u slivu transformišu direktno u godišnje proticaje. Parametri *inicijalnog* modela određeni su za period osmatranja, a inicijalne godišnje projekcije proticaja se određuju kada se umesto osmotrenih serija koriste serije dugoročnih klimatskih projekcija za period do kraja 21. veka.

Kako bi se SDTS model primenio za određivanje hidroloških mesečnih projekcija proticaja potrebno je da unapred budu određene inicijalne projekcije proticaja na godišnjoj vremenskoj skali. Zato SDTS model ne izražava determinističku komponentu u vidu eksplicitne zavisnosti padavina i temperatura, već se deterministička komponenta određuje izdvajanjem niskofrekventnih delova vremenskih serija (nelinearni trend i makroperiodična komponenta) i komponente sezonskog ciklusa iz serija osmatranja. Suprotno tome, stohastička komponenta predstavlja eksplicitnu funkciju ulaznih meteoroloških serija.

Za razliku od dugoročnih projekcija, korišćenje rezultata *inicijalnog* modela ne donosi dodatnu vrednost prilikom modeliranja osmotrenih proticaja. SDTS model se sastoji od determinističke i stohastičke komponente na različitim vremenskim skalama. Godišnja vremenska skala *inicijalnog* modela odgovara determinističkoj komponenti SDTS modela. Na ovoj skali SDTS modelom modelira se dugoročna statistička zavisnost godišnjih proticaja koja korespondira Hurstovom fenomenu, dok se kratkoročna statistička zavisnost proticaja modelira na mesečnoj skali. Za razliku od ovoga, rezultati *inicijalnog* modela sadrže kratkoročnu i dugoročnu statističku zavisnost na godišnjoj skali. S obzirom na to, da se vremenska skala kratkoročne statističke zavisnosti proticaja u navedenim modelima razlikuje, rezultate *inicijalnog* modela nije svrsishodno koristiti tokom perioda osmatranja. U prilog tome stoji činjenica da je slaganje



osmotrenih i modeliranih godišnjih proticaja korišćenjem inicijalnog modela slabo tokom perioda osmatranja, dok je slaganje makroperiodične komponente i nelinearnog trenda modeliranih i osmotrenih serija značajno veće (njihov koeficijent korelacije nalazi se u rasponu od 0.95 do 0.99).

Sezonski ciklus se tokom perioda osmatranja modelira kao stacionarna ciklična serija sa izraženom periodičnošću od 12 meseci koja se ponavlja tokom svake godine. Međutim, rezultati dugoročnih projekcija padavina i temperatura iz klimatskog modela pokazuju moguću promenu unutargodišnje raspodele padavina i povećanje temperatura. S obzirom na to, da je analiza osetljivosti pokazala visok stepen zavisnosti između mesečnih proticaja i padavina, uvedena je pretpostavka da promene unutargodišnje raspodele proticaja prate promenu unutargodišnje raspodele mesečnih padavina. Ovom prilikom sagledana su tri buduća višegodišnja perioda, a u okviru svakog od njih smatra se da modifikovana sezonska komponenta ima stacionarne karakteristike. Rezultati dugoročnih projekcija su pokazali da se očekuje smanjenje sezonske komponente tokom letnjih i jesenjih meseci i njeno povećanje tokom zimskih meseci.

Stohastička komponenta se modelira na mesečnoj vremenskoj skali korišćenjem TF sa dvostrukim ulazom. Za razliku od determinističke komponente, stohastička komponenta se iskazuje u vidu zavisnosti između mesečnih proticaja, sa jedne strane, i mesečnih padavina i temperatura, sa druge strane, na različitim vremenskim pomacima. Ovom komponentom se zadržava kratkoročna statistička zavisnost serije proticaja, a potrebno je imati u vidu da ova komponenta može da se modelira korišćenjem ARMA modela zbog svoje izražene serijske korelacije. Međutim, ovakav način prognoze hidrološkog procesa nije moguće koristiti za dugoročne projekcije. Upotreba ARMA modela je ograničena samo za kratkoročne projekcije mesečnih proticaja jer je za ovaj vid prognoziranja neophodno imati osmatranja hidrološkog procesa na prethodnim vremenskim koracima, što nije ispunjeno za dugoročne projekcije mesečnih proticaja do kraja 21. veka.

#### **6.7.7 Diskusija o rezultatima dugoročnih projekcija za slivove Velike Morave i Lima**

Za analizu uticaja klimatskih promena na vodne resurse, pored stohastičkih hidroloških modela, široko se koriste i deterministički hidrološki modeli. Pri tome su u literaturi

prisutni globalni hidrološki modeli sa makro prostornom razmerom kojima se analizira hidrološki ciklus na Zemlji. Intenzivniju primenu u hidrološkim analizama imaju deterministički hidrološki modeli razvijeni za pojedine slivove.

Korišćenjem globalnog hidrološkog modela Arnell (2003) je analizirao uticaj klimatskih promena na serije proticaja sa 1200 slivnih područja širom Zemlje. Kao ulazne meteorološke serije koristio je šest scenarija emisije gasova staklene bašte za period do 2080. Rezultati studije pokazuju da se na području istočne Evrope mogu očekivati u proseku manje godišnje zapremine otekle vode za 20-30% ali uz veće varijacije godišnjih proticaja.

Prema studiji ICPDR-a (2012), sliv reke Dunav nalazi se u tranzitnoj zoni u kojoj se u bližoj budućnosti može očekivati smanjenje proticaja na južnim delovima sliva, dok se na severnim delovima sliva ne očekuje značajna promena u serijama godišnjih proticaja. U daljoj budućnosti se može očekivati povećanje godišnjeg proticaja na severnom delu sliva i još veće smanjenje godišnjih proticaja na južnim delovima sliva. Do kraja 21. veka na području jugoistočne Evrope, na delu sliva reke Dunav, očekuje se smanjenje godišnjeg proticaja u rasponu od 20% do 40% u odnosu na referentni period 1980-1999.

Za analizu budućih promena količina vode na prostoru jugoistočne Evrope korišćeni su i hidrološki modeli za pojedinačne slivove. Rezultati korišćenja ovih modela, takođe, ukazuju na moguće smanjenje godišnjih proticaja na južnim delovima sliva reke Dunav. Haddeland i sar. (2013) su primenili hidrološki model HBV za slivna područja reka Kolubare i Toplice sa ciljem utvrđivanja uticaja promene klime na vodne resurse. Oni su koristili padavine i temperature vazduha za period bliže budućnosti (2001-2030) i daleke budućnosti (2070-2100) dobijene iz regionalnog klimatskog modela RCM-SEEVCCC prema scenariju A1B emisije gasova staklene bašte. Ove projekcije ukazuju da će mesečne padavine biti manje u periodu od maja do oktobra u odnosu na referentni period 1961-1990, dok su promene tokom zimskih meseci minimalne. Temperature u bližoj budućnosti biće neznatno izmenjene u odnosu na srednju vrednost tokom referentnog perioda. U daljoj budućnosti očekuje se veći porast temperatura, pogotovu tokom leta i jeseni. Sa takvim klimatskim projekcijama, procena smanjenja godišnjih proticaja u slivu Kolubare i Toplice u bližoj budućnosti iznosi oko 10%, dok u daljoj budućnosti ovo smanjenje može biti između 30% i 40% u odnosu na referentni period.

U bližoj budućnosti očekuje se blago povećanje zimskih proticaja i smanjenje letnjih i jesenjih proticaja. Znatno veće smanjenje letnjih i jesenjih proticaja očekuje se krajem 21. veka.

Rezultati hidrološkog modeliranja proticaja tokom perioda bliže budućnosti korišćenjem SDTS modela daju različite stepene smanjenja godišnjih proticaja na Velikoj Moravi i Limu, u odnosu na slivove Toplice i Kolubare. U periodu bliže budućnosti na Velikoj Moravi i Limu očekuje se smanjenje godišnjih proticaja u rasponu od 5.7% do 6.9% po klimatskom scenariju A1B, u odnosu na referentni period 1961-1990. Tako se zaključuje da rezultati SDTS modela za sliv Velike Morave i Lima pokazuju manju redukciju godišnjih proticaja nego u slučaju Toplice i Kolubare u bližoj budućnosti. Velika razlika u prognozama dugoročnih proticaja je za period daleke budućnosti (2070-2100) gde projekcije SDTS modelom pokazuju moguće smanjenje godišnjih proticaja u rasponu od 17.2% do 18.4% za klimatski scenario A1B u odnosu na smanjenje od 30% do 40% u studiji sprovedenoj na Kolubari i Toplici. Rezultati modeliranja budućih promena sezonskih proticaja za razmatrane slivove korišćenjem oba modela SDTS i HBV pokazuju moguće smanjenje proticaja tokom letnje i jesenje sezone, kao i moguće blago povećanje proticaja tokom zimske sezone.

Uticaj klimatskih promena na vodne resurse analiziran je na slivu reke Save (Svetska banka, 2014). U ovoj studiji razvijen je hidrološki model sliva Save u programu HEC-HMS. Za budući period korišćene su padavine i temperature iz pet kombinacija globalnih i regionalnih klimatskih modela iz projekta ENSEMBLES prema scenariju A1B. Kao referentni period korišćen je 1961-1990, dok su promene u proticajima sagledane tokom bliže (2011-2040) i dalje budućnosti (2041-2070). Prema ovim scenarijima, temperature pokazuju rastući trend sa malim varijacijama u celom slivu. Očekuje se povećanje godišnjih temperatura u bližoj budućnosti od 0.9°C do 1.8 °C, dok u daljoj budućnosti povećanje iznosi od 2.0°C do 3.1 °C u odnosu na referentni period, tokom svih sezona u godini. Za razliku od temperatura, projekcije padavina pokazuju promenljive trendove duž sliva, sezona i klimatskih modela. Tako se godišnje padavine menjaju od -6% do +4%, promene po sezonama u bližoj budućnosti iznose od -12% do +14% dok su u dalekoj budućnosti sezonske promene izraženije i iznose od -32% do +19%. Što se tiče promena u proticajima zaključeno je da korespondiraju sa

projekcijama padavina i temperatura. Očekuje se mogući porast proticaja u bližoj i dalekoj budućnosti tokom zimske sezone u intervalu od +11% do +13%. Tokom letnjih meseci očekuje se smanjenje proticaja ali se ono razlikuje u slučaju bliže i daleke budućnosti. U bližoj budućnosti smanjenje proticaja je manje dok se u daljoj budućnosti može očekivati smanjenje letnjeg proticaja za 15%. Ukupne godišnje promene u proticajima su male i rezultat su rastućih trendova tokom zime i opadajućih tokom leta. Tako se očekuje u bližoj budućnosti smanjenje godišnjih proticaja za oko 1.4%, dok je u daljoj budućnosti smanjenje izraženije i očekuje se u iznosu od oko 4.7%. Prema ovoj studiji, na slivu Lima do stanice Priboj do 2070. godine predviđa se povećanje jesenjeg i zimskog oticaja za oko 10%. Takođe se može očekivati smanjenje prolećnog proticaja za 4% i smanjenje letnjeg proticaja za 15%.

Dugoročne projekcije na reci Savi predviđaju umerenije smanjenje budućih godišnjih proticaja po scenariju A1B nego što je slučaj za slivove Velike Morave i Lima. Pri tome, potrebno je naglasiti da reka Lim pripada savskom slivu i da je uticaj klimatskih promena u datoj studiji sagledan na hidrološkoj stanici Priboj na reci Lim. Period bliže i dalje budućnosti na reci Lim korišćenjem hidroloških modela HEC-HMS i SDTS pokazuje različite stepene smanjenja godišnjih proticaja po klimatskom scenariju A1B, u odnosu na referentni period 1961-1990. Pri tome rezultati dobijeni modelom SDTS ukazuju na moguće veće smanjenje godišnjih proticaja na Limu (smanjenje od 6.9% u bližoj budućnosti i 12.4% u daljoj budućnosti) nego što je predviđeno modelom HEC-HMS. Projekcije sezonskih proticaja na reci Lim tokom dalje budućnosti prema hidrološkom modelu SDTS upućuju na moguće smanjenje letnjih proticaja od 22% do 30%. Nasuprot tome, rezultati hidroloških projekcija dobijenih korišćenjem HEC-HMS modela pokazuju da je moguće smanjenje letnjeg proticaja na Limu manje i da iznosi 15% u odnosu na referentni period.

Rezultati sprovedenih studija ukazuju na različitu prostornu raspodelu uticaja klimatskih promena na vodne resurse na južnom dela dunavskog sliva tokom 21. veka. Takav zaključak se donosi na osnovu različitih stepena smanjenja godišnjih proticaja na razmatranim slivnim područjima reka Save, Velike Morave, Kolubare, Lima i Toplice. Osim toga, na analiziranim rekama moguće je očekivati smanjenje letnjeg i jesenjeg proticaja, kao i blago povećanje proticaja tokom zimskih meseci.

Dugoročne hidrološke projekcije će uticati na način upravljanja vodnim resursima sliva, sa aspekta većih vodnih deficita tokom letnjeg i jesenjeg perioda i „viška“ vode koji se javlja tokom zimskih meseci, u odnosu na sadašnje iskustveno upravljanje. Očekivana promena klime donosi promenu u načinu upravljanja vodoprivrednim sistemima koja bi trebalo da umanjuje štetan uticaj na ljude, životnu sredinu i efikasnost rada navedenih sistema. Kritični periodi tokom letnjih meseci ujedno predstavljaju i najveću pretnju za vodoprivredne sisteme jer se dešavaju u vreme kada su zahtevi za vodom najveći, a u skladu sa pozitivnom stopom rasta ljudske populacije izgleda da će se zahtevi za vodom tokom budućeg perioda povećavati. Nasuprot tome, povećanje proticaja tokom zimskih meseci utiče na potrebu za proširenjem kapaciteta evakuacionih organa vodoprivrednih sistema, sa ciljem povećanje stepena njihove sigurnosti i umanjavanja posledica od štetnog dejstva voda. Prilikom planiranja novih vodoprivrednih sistema neophodno je sagledati uticaj promene klime koji uslovljava promene u hidrološkom režimu, kako sa aspekta vodnih deficita u pojedinim sezonama tako i sa aspekta viška voda za vreme drugih sezona koji iziskuje uvođenje novih metoda za analizu ekstremnih događaja, kao što su poplave i suše.

## 7. Zaključna razmatranja

### 7.1 Rezime ciljeva i predmeta disertacije

Osnovni cilj doktorske disertacije je razvoj metodologije kojom se analiziraju dugogodišnje promene u hidrološkim procesima. Metodološki okvir kojim se opisuju zakonomernost pojave hidroloških vremenskih serija i daju projekcije za kratkoročne i dugoročne periode u budućnost predstavlja put za izradu planova i strategija u oblasti vodoprivrede.

U doktorskoj disertaciji su predložene metodologije za formiranje stohastičkih modela za kratkoročne i dugoročne projekcije godišnjih i mesečnih proticaja. Kratkoročne projekcije predstavljaju prognozu hidrološkog procesa za nekoliko narednih godišnjih koraka. Za razliku od njih, dugoročne projekcije daju projekcije vodnih resursa do kraja 21. veka. Razvijeni su stohastički hidrološki modeli zasnovani na simuliranju unutrašnje strukture hidrološkog procesa koji se menja na različitim vremenskim skalama kao što je mesečna, godišnja i višegodišnja. Strukturne promene serija proticaja se iskazuju u vidu kratkoročne i dugoročne statističke zavisnosti koje upućuju da je hidrološki proces autokorelisan na različitim vremenskim pomacima. Dugoročna statistička zavisnost proticaja korespondira sa Hurstovim fenomenom po kome se vlažne godine grupišu u okviru dugogodišnjeg vlažnog ciklusa, a sušne godine u okviru višegodišnjih sušnih epizoda. Kratkoročna statistička zavisnost se iskazuje u vidu korelacione zavisnosti hidrološkog procesa na malim vremenskim pomacima.

Metodologija za kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih protoka se zasniva na dekompoziciji godišnjih i sezonskih vremenskih serija na trend, periodičnu komponentu, stohastičku komponentu i slučajnu vremensku seriju, po uzoru na metodu TIPS koju je predložio Jevđević (1984). Predložena metodologija je zbog toga nazvana modifikovana TIPS metoda. Vremenska serija se deli na deterministički deo u kome se posebno modeliraju linearni trend i višegodišnja periodičnost (makroperiodična komponenta), i na drugi deo koji čini stohastička komponenta opisana autoregresionim modelima višeg reda. Modifikacija TIPS metode (poglavlje 5.2) se sastoji u identifikaciji makroperiodične komponente na uglačanim godišnjim i sezonskim serijama proticaja tehnikom LOESS. Na ovaj način se uklanjaju oscilacije visoke frekvencije i olakšava identifikacija makroperiodične komponente koja je od prevashodnog značaja za

razmatranje dugoročnih promena u hidrološkim nizovima. Ovako uspostavljen model se koristi za kratkoročne projekcije godišnjih proticaja tako što se determinističke komponente (linearni trend i makroperiodičnost) ekstrapoluju, vrši se prognoza stohastičke komponente i određuje interval poverenja prognoze uzimanjem u obzir slučajne greške.

Za razliku od kratkoročnih projekcija koje se dobijaju pomoću modela zasnovanog na unutrašnjoj strukturi serija protoka, za dugoročne projekcije mesečnih proticaja predložen je složeni model koji koristi zavisnost proticaja od padavina i temperatura. Cilj formiranja takvog modela na osnovu podataka iz istorijskog perioda jeste da se omogući njegova primena za dugoročne projekcije proticaja na osnovu klimatskih scenarija, odnosno na osnovu padavina i temperatura kao izlaza iz klimatskih modela. Prilikom formiranja modela koriste se mesečne serije proticaja, sa jedne strane, i mesečne serije padavina i temperatura sa druge strane. Kroz preliminarnu analizu osetljivosti protoka na glavne meteorološke faktore, u ovom radu je utvrđeno da na mesečne proticaje najviše utiču mesečne padavine, kao i da su dugoročne promene u protocima posledica postojanja istih takvih promena u padavinama. Drugi najuticajniji faktor je temperatura, zbog čega je odlučeno da se model za dugoročne projekcije zasniva na zavisnosti protoka od padavina i temperatura. Kao model za dugoročne projekcije protoka predložen je složeni model SDTS (poglavlje 6.4) kojim se mesečni proticaji dele na deterministički i stohastički deo. Deterministički deo se sastoji iz složenog/kompozitnog nelinearnog trenda, makroperiodične i sezonske komponente. Drugi deo je stohastički, za čije modeliranje se koristi model transfer funkcije sa dvostrukim ulazom (padavine i temperature) sa podacima na mesečnom nivou. Ostatak serije čini potpuno slučajna komponenta.

Prve dve determinističke komponente u predloženom modelu SDTS (nelinearni trend i makroperiodična komponenta) se modeliraju iz osmotrenih podataka na godišnjom nivou, dok se preostale komponente modeliraju na mesečnom nivou.

Upotreba SDTS modela u prognostičke svrhe omogućava se kroz primenu inicijalnog modela godišnjih proticaja (poglavlje 6.5.1). Ovaj posebno razvijen model formira godišnje proticaje pomoću transfernih funkcija (TF) primenjenih za nizove godišnjih

padavina i temperatura kao ulaznih veličina. Model TF omogućava inicijalnu dugoročnu prognozu trenda i makroperiodične komponente na godišnjem nivou.

Primena modela SDTS sa dugoročnim projekcijama padavina i temperatura iz klimatskih modela je moguća ukoliko se obezbedi validna ekstrapolacija svih komponenti modela u budućnost. U tom smislu, u predloženom modelu različite komponente su ekstrapolovane na različite načine:

- 1) Nelinearni trend i makroperiodična komponenta za budućnost su dobijene na osnovu simuliranih godišnjih proticaja inicijalnim modelom sa padavinama i temperaturama iz klimatskih scenarija na godišnjem nivou;
- 2) Sezonska komponenta za budućnost je formirana na osnovu pretpostavke da će se budući unutargodišnji ciklus proticaja menjati u skladu sa promenom unutargodišnjeg ciklusa padavina;
- 3) Stohastička komponenta za budućnost je rezultat primene modela transfer funkcija na mesečnom nivou sa mesečnim padavinama i temperaturama iz klimatskih scenarija.

## **7.2 Rezime rezultata**

### **7.2.1 Ocena efikasnosti predloženih modela**

Modifikovani TIPS model je primenjen za modeliranje serija godišnjeg proticaja na 6 rečnih profila u Srbiji, pri čemu su parametri modela ocenjeni tokom perioda osmatranja hidroloških serija (1931-2012). Utvrđeno je da u objašnjenju varijanse osmotrenog procesa najveće učešće ima deterministička komponenta u rasponu 34%-54% za različite hidrološke stanice, dok je učešće stohastičke komponente manje i iznosi od 30% do 40%. Udeo neobjašnjene varijanse proticaja, ili greške modeliranja, kreće se u rasponu od 36% do 17% ukupne varijanse. Na osnovu vrednosti parametara efikasnosti modela može se zaključiti da su godišnje serije proticaja dobro modelirane. Ocena kvaliteta modeliranih serija godišnjih proticaja data je prema klasifikaciji Moriasia i sar. (2007). Pored toga, utvrđeno je da u najvećem broju uzoraka greška modeliranja predstavlja slučajnu seriju koja prati normalnu raspodelu, pa je tako u stohastičkom simuliranju moguće generisati ovu slučajnu komponentu iz navedene raspodele sa odgovarajućom uzoračkom varijansom.



Mesečne serije proticaja modelirane su primenom SDTS modela na dvema rekama (Velika Morava i Lim), pri čemu su parametri modela ocenjeni na bazi rezultata osmatranja hidro-meteoroloških serija (1950-2012). Period za identifikaciju modela SDTS je kraći nego za model TIPS zbog kraćih raspoloživih nizova temperatura i padavina. Najveće učešće u varijansi mesečnih proticaja ima sezonska komponenta u rasponu od 47% do 50%, dok ukupna deterministička komponenta čini od 52% do 57% ukupne varijanse serije. Stohastička komponenta ima manje učešće, a zajedno sa njom ukupna varijansa modeliranih proticaja dostiže od 76% do 86% ukupne varijanse osmotrene serije. Modeliranje vremenskih serija je ocenjeno kao dobro na osnovu parametara efikasnosti modela, a u skladu sa navedenom klasifikacijom. Greška modeliranja mesečnih proticaja predstavlja slučajnu seriju koja na reci Lim prati normalnu raspodelu, dok na Velikoj Moravi ima izraženiju asimetriju.

### **7.2.2 Kratkoročne projekcije modifikovanim TIPS modelom**

Modifikovana TIPS metoda korišćena je za modeliranje godišnjih i sezonskih proticaja na rekama: Dunav, Sava, Tisa, Velika Morava, Lim. Na stanicama Bogojevo (Dunav) i Sremska Mitrovica (Sava) je utvrđen značajan opadajući linearni trend godišnjih proticaja. Na ostalim stanicama nije registrovan značajan trend godišnjih proticaja. Za modeliranje makroperiodične komponente korišćeni su reziduali iz kojih je uklonjen trend u srednjoj vrednosti godišnjih proticaja. Uglaćavanje reziduala godišnjih proticaja sprovedeno je pomoću metode LOESS. Pronađene značajne periode uglačanih reziduala svrstavaju se u četiri grupe od oko 10, 13, 22 i 32 godina. Po uklanjanju ukupne determinističke komponente, utvrđeno je da reziduali stohastičke komponente predstavljaju procese AR(6) ili AR(7). Verifikacija modifikovanog TIPS modela je potvrdila da su osmotrene i modelirane serije saglasne u statističkom smislu (kvartili raspodela i autokorelacione funkcije).

Kratkoročne projekcije godišnjih proticaja su utvrđene za bliži budući period 2013-2015. Projekcije godišnjih proticaja pokazale su na većim rekama (Dunav, Sava, Tisa) značajnu saglasnost sa osmotrenim proticajima tokom 2013. godine gde relativna greška iznosi od 3% do 5%. Nasuprot njima, za druge nešto manje reke (Velika Morava i Lim) utvrđena su veća odstupanja kratkoročnih godišnjih projekcija u odnosu na osmatranja. Osmotreni proticaji tokom 2013. godine ukazuju da su kratkoročne godišnje projekcije

proticaja nešto precenjene za Veliku Moravu (relativna greška je 17%) dok su nešto potcenjene za reku Lim (relativna greška je 21%).

Na osnovu iznetih rezultata može se zaključiti da modifikovani TIPS model za kratkoročnu projekciju godišnjih proticaja daje rezultate za jedan godišnji korak unapred sa relativno malom neizvesnošću. Zato ova metoda može imati primenu prilikom izrade operativnih planova u vodoprivredi i hidroenergetici. U ovim privrednim granama su važne godišnje projekcije proticaja na osnovu kojih se definiše godišnji plan upravljanja vodoprivrednim sistemima.

### **7.2.3 Dugoročne projekcije modelom SDTS**

Za dugoročne projekcije korišćen je SDTS model koji je primenjen u slivu Velike Morave i Lima za period do kraja 21. veka. Pri modeliranju mesečnih serija proticaja konstatovano je da nelinearni trend godišnjih proticaja sadrži linearnu komponentu i harmonijsku komponentu male amplitude i velike periode oscilovanja. Ovim se pokazuje da se trend godišnjih proticaja menja duž vremenske serije, a da se smena negativnog i pozitivnog trenda menja sa dugogodišnjom cikličnošću godišnjih proticaja. Utvrđena makroperiodičnost godišnjih proticaja saglasna je sa rezultatima modifikovanog TIPS modela, osim što se jedan deo periodične komponente nalazi u okviru nelinearnog trenda.

Modeliranje stohastičke komponente pomoću model transfer funkcija sa dvostrukom ulaznom serijom (padavina i temperatura) je omogućeno time što stohastička komponenta proticaja pokazuje značajnu kros-korelacionu vezu sa padavinama i temperaturama na različitim vremenskim pomacima.

Tokom istorijskog perioda rezultati modeliranja pokazali su dobro slaganje sa osmotrenim serijama proticaja prema parametrima efikasnosti modeliranja. Pored toga, model je verifikovan putem provere statističkih parametara modeliranih i osmotrenih serija (kvantili raspodele i autokorelacione funkcije). Verifikacija modela SDTS je pokazala da su osmotrene i modelirane vremenske serije proticaja međusobno saglasne u statističkom smislu.

S obzirom na to, da su rezultati modeliranja godišnjih proticaja modifikovanom TIPS metodom pokazali da su prognoze višegodišnjih ciklusa moguće samo za manje

vremenske intervale od nekoliko godina, zaključeno je da ekstrapolacija determinističke komponente do kraja 21. veka za potrebe analize klimatskih promena nije opravdana. Iz tog razloga formiran je *inicijalni* hidrološki model kojim se omogućava dugoročna projekcija godišnjih proticaja na osnovu projekcija godišnjih padavina i temperatura. Parametri *inicijalnog* modela su ocenjeni tokom perioda osmatranja (1950-2012), a na osnovu njih određene su inicijalne godišnje projekcije proticaja za budući period 2013-2100 u skladu sa klimatskim scenarijima A1B i A2. Verifikacija *inicijalnog* modela je pokazala da između osmotrenih i modeliranih godišnjih proticaja u slivu Velike Morave i Lima ne postoji izražena korelacija, ali da su serije u statističkom smislu međusobno saglasne. Međutim, godišnja deterministička komponenta (nelinearni trend i makroperiodična komponenta) određena iz *inicijalnog* modela pokazuje podudarnost sa determinističkom komponentom određenom iz osmotrenih godišnjih serija proticaja. Pokazano je da nelinearni trend i makroperiodična komponenta osmotrenih i modeliranih godišnjih serija proticaja imaju koeficijent korelacije u razmaku od 0.95 do 0.99. Ovime se pokazuje da *inicijalni* model dobro oslikava dugoročnu statističku zavisnost proticaja, tako da se rezultati ovog modela mogu koristiti za dugogodišnje projekcije determinističke komponente.

Projekcije stohastičke mesečne komponente određene su primenom TF čiji su parametri ocenjeni tokom perioda osmatranja hidro-meteoroloških serija (1950-2012). Verifikacija ovog koraka modeliranja je pokazala da se kumulativne raspodele osmotrenih i modeliranih stohastičkih komponenti dobro slažu.

Rezultati dugoročnih projekcija za period do 2100. godine ukazuju na moguće smanjenje godišnjih proticaja za sliv Velike Morave i Lima u rasponu od 12.6% do 13.6% po scenariju A1B i od 6.1% do 8.5% za scenario A2 u odnosu na referenti period 1961-1990. Tokom budućeg perioda može se očekivati smena sušnih i vlažnih višegodišnjih ciklusa u skladu sa dugoročnom statističkom zavisnošću serija proticaja. Najizraženiji negativni višegodišnji ciklusi godišnjih proticaja mogu da se očekuju krajem 21. veka. Osim toga, rezultati dugoročnih projekcija mesečnih proticaja pokazuju da se može očekivati promena unutargodišnje raspodele proticaja sa značajnim smanjenjem proticaja tokom letnjih (JAS) i jesenjih meseci (OND). Za

razliku od njih, tokom zimskih meseci (JFM) može se očekivati blago povećanje proticaja.

Na prostoru jugoistočne Evrope, u poslednje vreme, su sprovedene studije u kojima se istražuje uticaj potencijalnih promena klimatskih parametara na hidrološki ciklus u 21. veku. Prema studiji ICPDR-a (2012) u bližoj budućnosti može se očekivati smanjenje godišnjih proticaja na južnim delovima sliva Dunava, a u daljoj budućnosti smanjenje proticaja je značajno i iznosi od 20% do 40%. Rezultati primene globalnih hidroloških modela na području istočne Evrope pokazuju moguće smanjenje godišnjih proticaja za 20-30% (Arnell, 2003). Pored korišćenih globalnih hidroloških modela sa makro prostornom razmerom, korišćeni su i hidrološki modeli sa mikro razmerom u analiziranoj regiji (Haddeland i sar. 2013; Svetska banka, 2014). Rezultati hidroloških projekcija na slivovima Kolubare i Toplice upućuju na moguće smanjenje godišnjih proticaja u bližoj budućnosti u iznosu od 10% dok se u daljoj budućnosti očekuje smanjenje godišnjih proticaja od 30% do 40% (Haddeland i sar. 2013). U slivu reke Save očekuje se neznatno smanjenje proticaja u periodu bliže budućnosti (1.4%), dok se u daljoj budućnosti može očekivati smanjenje godišnjih proticaja oko 4.7% (Svetska banka, 2014). Osim promena na godišnjem nivou očekuju se unutargodišnje promene proticaja. Rezultati prethodnih studija upućuju na moguće smanjenje proticaja tokom letnjih i jesenjih meseci, kao i moguće povećanje proticaja tokom zimske sezone.

Rezultati primene modela SDTS saglasni su u širem smislu sa rezultatima dugoročnih projekcija prethodnih studija. Slivovi Velike Morave i Lima pokazuju moguće umerenije smanjenje proticaja u daljoj budućnosti u odnosu na studiju ICPDR-a (2012), na istraživanje Arnela (2003), kao i studiju sprovedenu na reci Kolubari i Toplici (Haddeland i sar. 2013). Za razliku od ovih studija, analiza uticaja klimatskih promena na slivu Save pokazuje moguće blaže umanjene budućih godišnjih proticaja nego za slučaj reke Velike Morave i Lima (Svetska banka, 2014). Pored toga, rezultati projekcija prethodnih studija su saglasni sa promenama unutargodišnje raspodele proticaja, pri čemu se u slivu Velike Morave i Lima može očekivati značajnije umanjene letnjih i jesenjih proticaja, a blago povećanje mesečnih proticaja tokom zime.

Rezultati modela SDTS su verifikovani tako što su pokazali saglasnost statističkih parametara u odnosu na osmotrene serije proticaja. Pored toga, uporednom analizom

rezultata dugoročnih projekcija godišnjih proticaja iz prethodnih studija pokazano je da se tokom budućeg perioda mogu očekivati različiti stepeni smanjenja godišnjih proticaja. Ovakvo smanjenje upućuje na različitu prostornu raspodelu uticaja klimatskih promena na vodne resurse na prostoru južnog dunavskog sliva. Na osnovu toga predloženi model SDTS moguće je koristiti u izradi strategije za prilagođavanja uticajima klimatskih promena u sektoru vodoprivrede. Dugoročne projekcije serija proticaja mogu da predstavljaju podlogu za optimizaciju rada vodoprivrednih sistema i njihovo prilagođenje na očekivane vodne deficite tokom leta i jeseni, kao i na vodne viškove tokom zimskih meseci.

#### **7.2.4 Diskusija**

Korišćeni model za kratkoročne projekcije proticaja predstavlja doprinos razvoju TIPS metode (Jevđević, 1984) koja je u ovom radu primenjena kako bi se modelirale komponente vremenskih serija sezonskih i godišnjih proticaja. Ocenjeni parametri modifikovanog TIPS modela se zatim koriste za projekcije serija proticaja. Treba imati u vidu da je model primenjen sa velikom vremenskom diskretizacijom od godinu dana, a smanjenje vremenskog koraka dovodi do povećanja asimetričnosti vremenskih serija. Velika asimetrija koja je posebno izražena za dnevni ili sedmični vremenski korak za posledicu ima otežanu ocenu parametara modela. Iz tog razloga, model se ne može koristiti za predviđanje velikih voda ili deficita vode tokom malovodnih perioda.

Za razliku od prethodnog modela, model SDTS osmišljen je sa ciljem određivanja dugoročnih hidroloških projekcija na bazi klimatskog modeliranja. Iz tog razloga, stohastička komponenta je modelirana kao zavisna vremenska serija od nezavisnih promenljivih - serija padavina i temperatura. U primeni ovog modela za analizu uticaja klimatskih promena na vodne resurse, osnovni cilj je uvid u karakteristike proticaja u višegodišnjim periodima (najčešće 30 godina). U tom smislu, od hidrološkog modela koji se koristi za analizu uticaja klimatskih promena na vodne resurse se očekuje da reprodukuje raspodele osmotrenih vrednosti, a ne i vremenski redosled u seriji. U ovom radu je pokazano da predloženi model SDTS ispunjava ove zahteve.

Međutim, osim za dugoročne projekcije, primena SDTS modela je moguća i za mesečno prognoziranje proticaja jer je pokazano da model dobro reprodukuje autokorelaciona svojstva osmotrenih serija na godišnjem i mesečnom nivou.

Determinističku komponentu je moguće iskazati kao funkciju vremena što njenu prognozu čini jednostavnijom, dok se za prognozu stohastičke komponente mogu koristiti prognozirane vrednosti mesečnih padavina i temperatura.

Na osnovu rezultata modeliranja modelom SDTS zaključuje se da nelinearni trend i makroperiodična komponenta dobro oslikavaju dugoročnu statističku zavisnost vremenskih serija. Rezultati modeliranja korišćenjem TF pokazuju dobro slaganje stohastičke komponente za kvantile u domenu umerenih verovatnoća, dok postoje odstupanja u domenu velikih i malih kvantila. Parametri efikasnosti modeliranja ove komponente mogli bi se poboljšati ako bi se koristile metode zasnovane na veštačkoj inteligenciji koje dobro oslikavaju nelinearne veze u vremenskim serijama.

Nasuprot navedenim komponentama, sezonska komponenta modela SDTS oslikava cikličnost sezonskih proticaja koja je dobro aproksimirana pretpostavkom da je sezonski ciklus tokom perioda osmatranja homogen. Međutim, rezultati klimatskog modeliranja upućuju da se u budućnosti očekuju promene unutargodišnje raspodele padavina što će dovesti do promena sezonske komponente proticaja. U predloženom modelu uvedena je pretpostavka da će se budući sezonski ciklus menjati srazmerno promeni unutargodišnje raspodele padavina. Potrebno je naglasiti da je takva pretpostavka najjednostavnija moguća i da možda ne predstavlja pouzdanu ocenu budućih sezonskih promena. Pouzdaniji način procene promene sezonske komponente bi bio primenom determinističkih – fizički zasnovanih hidroloških modela u kojima bi se uzele u obzir promene svih pojedinačnih procesa u slivu koji zavise od padavina i temperatura.

### **7.3 Mogućnosti daljeg razvoja i primene**

U ovom radu modelirane su dugoročne projekcije proticaja za reke na prostoru donjeg sliva Dunava na bazi projekcija o smanjenju padavina i povećanju temperatura. Za razliku od ovog geografskog prostora, na severnom delu kontinenta projekcije ukazuju da će se padavine povećavati. Regija Mediterana predstavlja područje u kome je registrovano smanjenje padavina u poslednjim dekadama, a klimatskim modelima u ovoj regiji predviđa se dalje smanjenje padavina u 21. veku. S obzirom na prethodno izneto, dalje mogućnosti za razvoj i primenu modela SDTS mogu biti vezane za dugoročne projekcije proticaja u drugačijim klimatskim uslovima na severu i jugu

Evrope. Sa podacima o hidro-meteorološkim vremenskim serijama iz drugačijih klimata bi se, na neki način, verifikovala metodologija modela SDTS.

Prikazani modifikovani TIPS model i SDTS model su fleksibilni, pa je moguće formiranje modela i za više lokacija koji bi mogao uzeti u obzir i kros-korelaciju između susednih hidroloških stanica. Na ovaj način bi se mogao formirati „multi-site“ model koji bi omogućio stohastičko simuliranje proticaja na više lokacija uz očuvanje vremenske zavisnosti proticaja, i u isto vreme očuvanje kros-korelacione zavisnosti između susednih stanica.

Smanjenjem vremenske diskretizacije SDTS modela moguće je blagovremeno predvideti malovodne periode u slivu, odrediti dužinu trajanja sušnih epizoda, kao i zapreminu vodnih deficita. Za korišćenje modela SDTS sa dnevnom diskretizacijom, potrebno je prevazići poteškoće koje se tiču izražene asimetrije dnevnih serija koje bi se koristile za ocenjivanje parametara modela. Za razliku od malovodnih perioda čije vremenske serije imaju izraženo autoregresiono svojstvo, modeliranje ekstremnih događaja u periodima velikih voda je otežano. Poplave predstavljaju ekstremne događaje izrazito slučajnog karaktera. Dalja primena SDTS modela je moguća i u domenu modeliranja ekstremnih događaja sa modifikacijom metodološkog pristupa. Zato bi bilo potrebno utvrditi model koji bi dobro oslikavao nelinearno ponašanje vremenskih serija i njime zameniti kros-korelacione TF. Dalje ideje treba tražiti u metodama, kao što su neuronske mreže, genetsko programiranje, teorija haosa i dr.

#### **7.4 Zaključak**

Stohastički modeli primenjeni u analizi hidroloških serija predstavljaju značajan skup metoda kojima se rešavaju osnovni problemi hidrološkog modeliranja, kao što su promenljivost proticaja na različitim vremenskim skalama i određivanje neizvesnosti hidrološkog procesa utvrđivanjem slučajne greške modeliranja. Predloženim stohastičkim modelima za kratkoročne projekcije godišnjih proticaja (modifikovani TIPS model) i dugoročne projekcije mesečnih proticaja (SDTS) u doktorskoj disertaciji modelirani su proticaji na rekama u Srbiji.

Predloženi modeli uspešno su reprodukovali vremenske serije proticaja i njihovu prirodu da se promene u proticajima dešavaju sve vreme na svim vremenskim skalama.

Na taj način predloženi hidrološki modeli predstavljaju korisno sredstvo koje se može koristiti za kratkoročne i dugoročne projekcije proticaja u sektoru vodoprivrede, kao i za zaštitu životne sredine.

Rezultati prikazani u doktorskoj disertaciji, pored rezultata prethodnih studija, ukazuju na različitu prostornu raspodelu uticaja klimatskih promena na vodne resurse na širem prostoru Srbije u 21. veku. Takođe se na razmatranim slivovima može očekivati promena unutargodišnje raspodele proticaja, tj. smanjenje letnjeg i jesenjeg proticaja, a blago povećanje zimskih proticaja.

Dugoročne hidrološke projekcije imaju za posledicu prilagođavanje upravljanja vodnim resursima do kraja 21. veka. Potrebno je da se pogodnijim upravljanjem vodoprivrednim sistemima umanju štetan uticaj klimatskih promena na ljude, životnu sredinu i efikasnost rada sistema. Vodni deficiti tokom letnjih meseci ujedno predstavljaju i najveću pretnju za vodoprivredne sisteme jer se dešavaju u vreme kada su zahtevi za vodom najveći. Suprotno tome, povećanje proticaja tokom zimskih meseci utiče na potrebu za proširenjem kapaciteta evakuacionih organa vodoprivrednih sistema. Uticaj promene klime koji uslovljava promene u hidrološkom režimu neophodno je sagledati prilikom planiranja novih vodoprivrednih sistema sa aspekta budućih malovodnih perioda i budućih perioda sa viškom vode.



## 8. **Literatura**

- ADAPTALP. 2011. Adaptation to climate change in Alpine space. <http://www.adaptalp.org/>. access: 5 July 2014.
- Akaike H. 1974. A new look at the statistical model identification. *IEEE Trans. Automatic Control.* (19): 716–723.
- Alcamo J, Florke M, Marker M. 2007. Future long-term changes in global water resources driven by socio-economic and climatic change. *Hydrol. Sci. J.* 52 (2): 247–275.
- Arnell N. 2003. Effects of IPCC SRES emissions scenarios on the river runoff: a global perspective. *Hydrology and Earth System Sciences.* 7(5): 619-641.
- Barricelli NA. 1954. Esempi numerici di processi di evoluzione, *Methodos* voll. 6-7, pp. 45–68.
- Bartlett MS. 1946. On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series, *J. Royal Statist. Soc.* (8): 27–41.
- Bartlett MS. 1963. Statistical estimation of density functions. *Sankhya Ser. A.* 25(3): 245-254.
- Bates BC, Kundewicz ZW, Wu S, Palutikof JP (eds.). 2008. *Climate Change and Water*, Technical Paper of the Intergovernmental Panel on Climate Change, IPCC Secretariat, Geneva.
- Bayazit M, Onoz B. 2007. To prewhiten or not to prewhiten in trend analysis? *Hydrological Sciences Journal.* 52(4): 611-624.
- Becker A, Finger P, Meyer-Christoffer A, Rudolf B, Schamm K, Schneider U, Ziese M. 2013. A description of the global land-surface precipitation data products of the Global precipitation Climatology Centre with sample applications including centennial (trend) analysis from 1901–present. *Earth System Science Data.* 5: 71-99.
- Birsan MV, Molnar P, Burlio P, Pfaundler M. 2005. Streamflow trends in Switzerland. *Journal of Hydrology.* 314 (1-4): 312-329.

- Blackman RB, Turkey JW. 1959. The measurement of power spectra, from the point of view of communications engineering. New York. Dover.
- Blasco N, Santamaria R. 1996. Testing memory patterns in the Spanish stock market. *Applied Financial Economics*. 6(5): 401–411.
- Bloomfeld P. 1992. Trends in global temperatures. *Clim. Change*. 21(1): 1-16.
- Bouwer LM, Vermaat JE, Aerts CJHJ. 2006. Winter atmospheric circulation and river discharge in northwest Europe. *Geophysical Research Letters*. 33(6):1-4.
- Bouwer M, Vermaat JE, Aerts CJH. 2008. Regional sensitivities of mean and peak river discharge to climate variability in Europe. *Journal of geophysical research*. 113(33):1-11.
- Bower D, Hannah DM, McGregor GR. 2004. Techniques for assessing the climatic sensitivity of river flow regimes. *Hydrol. Process*. 18(13): 2515–2543.
- Box GEP, Jenkins GM, Reinsel GC. 2008. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Fourth Edition. John Wiley & Sons, INC., Publication. USA.
- Bray M, Han D. 2004. Identification of support vector machines for runoff modelling. *J. Hydroinf.* 6(4), 265–280.
- Broomhead DS, King GP. 1986. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*. 20(2-3): 217–236.
- Chan J, Gupta, AK. 2000. *Parametric statistical change point analysis*. Springer. Brokauer. Boston.
- Chang FJ, Chen YC. 2001. A Counterpropagation fuzzy-neural network modeling approach to real time streamflow prediction. *Journal of Hydrology*. 245(1-4): 153-164.
- Chang FJ, Chiang YM, Chang LC. 2007. Multi-step-ahead neural networks for flood forecasting. *Hydrol. Sci. J.* 52 (1): 114–130.
- Chatfield C. 2004. *The analysis of time series, an introduction, sixth edition*. New York. Chapman & Hall/CRC.
- Chen PA, Chang LC, Chang FJ. 2013. Reinforced recurrent neural networks for multi-step-ahead flood forecasts. *J. Hydrol.* 497: 71–79.

- Cigizoglu HK. 2003. Estimation, forecasting and extrapolation of river flows by artificial neural networks. *Hydrol. Sci. J.* 48(3): 349–362.
- Cleveland R, Cleveland W, McRae, Terpenning I. 1990. STL: A Seasonal-Trend Decomposition Procedure Based on Loess. *Journal of Official Statistics.* 6(1): 3–73.
- Coulibaly P, Burn DH. 2004. Wavelet analysis of variability in annual Canadian streamflows. *Water Resour Res.* 40(3):1-14.
- Daniell PJ. 1946. Discussion on the symposium on autocorrelation in the time series: *Roy.Statist.Soc.* 8(1): 88-90.
- Danilovich I, Wrzesinski D, Nekrasova L, 2007, Impact of the North Atlantic Oscillation on river runoff in the Belarus part of the Baltic Sea basin. *Nordic hydrology.* 38(4-5): 413-423.
- Dawson CW, Wilby R. 1998. An artificial neural network approach to rainfall–runoff modelling. *Hydrol. Sci. J.* 43(1): 47–66.
- Dickey D, Fuller A. 1979. Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series With a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association.* 74 (366): 427-431.
- Đurđević V, Rajković B. 2008. Verification of a coupled atmosphere-ocean model using satellite observations over the Adriatic Sea. *Annales Geophysicae.* 26(7): 1935-1954.
- Đurđević V, Rajković B. 2010. Development of the EBU-POM coupled regional climate model and results from climate change experiments, in *Advances in Environmental Modeling and Measurements*. Eds. Mihajlovic TD, Lalic B. Nova Publishers. pp.23-32, ISBN:978-1-60876-599-7
- Douglas EM, Vogel RM, Kroll CN. 2000. Trends in floods and low flows in the United States: impact of spatial correlation. *Journal of Hydrology.* 240(1-2): 90-105.
- Elsner JB, Tsonis AA. 1997. *Singular spectrum analysis: a new tool in time series analysis*. Plenum. New York.

- Eni D, Ibiang EI, Atsu J, Ewona IO. 2013. Three –Input Transfer Function Modeling of Rainfall in Calabar. Cross River State of Nigeria. *Journal of Emerging Trends in Engineering and Applied Sciences*. 4(4): 630-635.
- Fask A, Robinson PR. 1977. Identification of multivariate dynamic econometric models. *American Statistical Association. Proceedings of the Business and Economic Statistics Section*, pp: 284-289.
- Fendekova M, Pekarova P, Fendek M, Pekár J, Škoda P. 2014. Global drivers effect in multi-annual variability of runoff. *J. Hydrol. Hydromech.* 62(3): 169–176.
- Filliben JJ. 1975. The probability plot correlation coefficient test for normality. *Technometrics*. 17 (1): 111–117.
- Fishman J. 2002. Overview: Atmospheric chemistry. *Hand book of weather, climate and water*. Wiley Interscines. Ney Jersey. USA.
- Fraedrich K. 1986. Estimating the dimension of weather and climate attractors. *J Atmos Sci* 43(5): 419–432.
- Ghil M, Vautard R. 1991. Interdecadal oscillations and the warming trend in global temperature time series. *Nature*. 350:324–327
- Ghil M, Allen MR, Dettinger MD, Ide K, Kondrashov D, Mann ME, Robertson AW, Saunders A, Tian Y, Varadi F, Yiou P. 2002. Advanced spectral methods for climatic time series. *Rev. Geophys.*, 40(1): 3-41.
- Gibbons JD, Chakraborti S. 2011. *Nonparametric Statistical Inference*. 5th Ed. Boca Raton. FL: Chapman & Hall/CRC Press. Taylor & Francis Group.
- Giorgi F, Bi X, Pal J. 2004. Mean, interannual variability and trend in a regional climate change experiment over Europe. II: Climate change scenarios 2071–2100. *Clim. Dyn.* 23 (7-8): 839-858.
- Golubev VS, Lawrimore JH, Groisman PY, Speranskaya NA, Zhuravin SA, Menne JM, Peterson TC, Malone M. 2001. Evaporation changes over the contiguous United States and the former USSR: reassessment. *Geophys.Res. Lett.* 28(13): 2665–2668.

- Gudmundsson L, Tallaksen LM, Stahl K, Fleig AK. 2011. Low-frequency variability of European runoff. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 15: 2853–2869.
- Haddeland I. 2013. Effects of climate change in the Kolubara and Toplica catchments, Serbia. Norwegian Water Resources and Energy Directorate. Norway.
- Hald A. 1952. *Statistical Theory with Engineering Applications*. Wiley. New York.
- Hamed KH, Rao AR. 1998. A modified Mann–Kendall trend test for autocorrelated data. *J. Hydrol.* 204(1-4): 219–246.
- Hamed KH. 2008. Trend detection in hydrologic data: The Mann-Kendall trend test under the scaling hypothesis. *Journal of hydrology.* 349(3-4): 350-363.
- Hamming RW, Turkey JW. 1949. Measuring noise color. Bell Telephone Laboratories Memorium.
- Hannaford J, Buys G. 2012. Trends in seasonal river flow regimes in the UK. *Journal of hydrology.* 475: 158-174.
- Hannaford J, Buys G, Stahl K, Tallaksen LM. 2013. The influence of decadal-scale variability on trends in long European streamflow records. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 17: 2717–2733.
- Harries J, Belotti C. 2010. On the Variability of the Global Net Radiative Energy Balance of the Nonequilibrium Earth. *Journal of Climate.* 23: 1277-1290.
- Haugh LD. 1976. Checking the independence of two covariance-stationary time series: a univariate residual cross correlation approach. *J. Am. Statist. Assoc.* 71(354): 378-385.
- Haugh LD, Box GEP. 1977. Identification of Dynamic Regression (Distributed Lag) Models Connecting Two Time Series. *Journal of the American Statistical Association,* 72(357): 378-385.
- Helsel DR, Hirsch RM. 2002. *Statistical Methods in Water Resources Techniques of Water Resources Investigations*. Book 4. chapter A3. U.S. Geological Survey. pp: 522.

- Heo JH, Kho YW, Shin H, Kim S, Kim T. 2008. Regression equations of probability plot correlation coefficient test statistics from several probability distributions. *Journal of Hydrology*. 355(1-4): 1– 15.
- Hrelja H, Mulaomerović A. 2012. *Analiza hidroloških vremenskih serija*, Građevinski fakultet, Univerzitet u Sarajevu. Sarajevo.
- Hu T. S, Lam K.C, Ng ST. 2001. River flow time series prediction with range-dependent neural network. *Hydrol. Sci. J.* 46(5): 729–746.
- Huang N, Shen Z, Long S, Wu M, Shih H, Zheng Q, Yen N, Tung C, Liu H. 1998. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proc. R. Soc. Lond.* 454(971).
- Huang NE, Shen Z, Long SR. 1999. A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 31 (1): 417–457.
- Huang Y, Schmitt G, Lu Z, Liu Y. 2009. Analysis of daily river flow fluctuations using empirical mode decomposition. *Journal of Hydrology*. 373(1-2): 103–111.
- Huntington T. 2006. Evidence for intensification of the global water cycle: Review and synthesis. *Journal of Hydrology*. 319(1-4): 83–95.
- Hurrell JW. 1995. Decadal trends in the North Atlantic Oscillation and relationships to regional temperature and precipitation. *Science*. 269(5224): 676–679.
- Hurst H. 1951. Long term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 6: 770–799.
- ICPDR. 2012. *Danube Study – Climate Change Adaptation, Final Report*. International Commission for the Protection of the Danube River, Vienna, Austria. [http://www.icpdr.org/main/sites/default/files/nodes/documents/icpdr\\_climate-adaptation-strategy.pdf](http://www.icpdr.org/main/sites/default/files/nodes/documents/icpdr_climate-adaptation-strategy.pdf). accessed 8 July 2014.
- IPCC. 2007. *The Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). Fourth Assessment Report (AR4)*. Geneva, Switzerland. [http://www.ipcc.ch/publications\\_and\\_data/publications\\_ipcc\\_fourth\\_assessment\\_report\\_synthesis\\_report.htm](http://www.ipcc.ch/publications_and_data/publications_ipcc_fourth_assessment_report_synthesis_report.htm), accessed 8 July 2014.

- IPCC. 2013. Fifth Assessment Report (AR5). Intergovernmental Panel on Climate Change. Geneva 2. Switzerland. <http://www.ipcc.ch/report/ar5/index.shtml>, accessed 8 July 2014.
- Ireasson J, Bergstrom S, Carlsson B, Graham L, Lindstrom G. 2004. Hydrological change: climate impact imulations for Sweden. *Ambio*. 33(4–5): 228–234.
- Ismail S, Shabri A, Samsudin R. 2012. A hybrid model of self organizing maps and least square support vector machine for river flow forecasting, *Hydrology and Earth system sciences*.16(11): 4417-4433.
- Jain A, Kumar AM. 2007. Hybrid neural network models for hydrologic time series forecasting. *Appl Soft Comput*. 7(2):585–592
- Jarque CM, Bera AK. 1987. A Test for Normality of Observations and Regression Residuals. *International Statistical Review*.55(2): 163–172.
- Jevđević V. 1956. Hydrology. Institute for the Development of Water Resources Jaroslav Černi. Belgrade.
- Jevđević V. 1972. Stochastic processes in hydrology. Colorado. USA.
- Jevđević V. 1984. Structure of daily hydrologic series. Water Resources Publications. Colorado. USA.
- Jones P, Lister D, Osborn T, Harpham C, Salmon M, Morice C. 2012. Hemispheric and large-scale land-surface air temperature variations: An extensive revision and an update to 2010. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*. 117(16): 1-29.
- Karthikeyan L, Kumar DN. 2013. Predictability of nonstationary time series using wavelet and EMD based ARMA models. *Journal of hydrology*. 502: 103-119.
- Kendall MG. 1962. Rank Correlation Methods. 3rd ed. Hafner Publishing Company. New York.
- Kendall MG, Stuart A. 1966. Anvanced of Statistics. vol 3. Design and Analysis and Time Series, Hafner Publ.Co.New York.
- Khaliq MN, Ouarda TBMJ, Gachon P, Sushama L, St-Hilaire A. 2009. Identification of hydrological trends in the presence of serial and cross correlations: A review of

- selected methods and their application to annual flow regimes of Canadian rivers. *Journal of Hydrology*. 368(1-4): 117–130.
- Kisi O. 2009a. Neural network and wavelet conjunction model for modeling monthly level fluctuations in Turkey. *Hydrol Process*. 23(14): 2081–2092.
- Kisi O. 2009b. Wavelet regression model as an alternative to neural networks for monthly streamflow forecasting. *Hydrol Process*. 23(25): 3583–3597.
- Kottegoda NT, Rosso R. 2008. *Applied Statistics for Civil and Environmental Engineers*. Second edition. Blackwell publishing.
- Koutsoyiannis D. 2003. Climate change, the Hurst phenomenon and hydrological statistics. *Hydrol. Sci. J.* 48: 3-24.
- Koutsoyiannis D. 2010. A random walk on water. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 14: 585–601.
- Koutsoyiannis D, Montanari A. 2014. Negligent killing of scientific concepts: the stationarity case. *Hydrological Sciences Journal*. DOI: 10.1080/02626667.2014.959959
- Krasovskaia I. 1996. Sensitivity of the stability of river flow regimes to small fluctuations in temperature. *Hydrological Sciences Journal*. 41(2):251-264.
- Krasovskaia I, Sælthun NR. 1997. Sensitivity of the stability of Scandinavian river flow regimes to a predicted temperature rise. *Hydrological Sciences-Journal*. 42(5):693-711.
- Kržić A, Tošić I, Đurdjević V, Veljović K, Rajković B, 2011, Changes in some indices over Serbia according to the SRES A1B and A2 scenarios. *Climate Research*. 49(1): 73-86.
- Kundzewicz ZW, Graczyk D, Maurer T, Pinskiwar I, Radziejewski M, Svensson C, Szwed M. 2005. Trend detection in river flow series: 1. Annual maximum flow. *Hydrological Sciences Journal*. 50(5): 797-810.
- Labata D, Ababou R.B, Mangin A. 2000. Rainfall–runoff relations for karstic springs. Part II: continuous wavelet and discrete orthogonal multiresolution analyses. *Journal of Hydrology*. 238: 149–178



- Labat D, Godderis Y, Probst J.L, Guyot, J.L. 2004. Evidence for global runoff increase related to climate warming. *Advances in Water Resources*. 27(6): 631-642.
- Labat D. 2005. Recent advances in wavelet analyses: Part 1. A review of concepts. *J Hydrol* 314 (1-4): 275–288.
- Labat D. 2006. Oscillations in surface hydrological cycle. *Earth and Planetary Science Letters*. 242 (1-2): 143– 154.
- Labat D. 2008. Wavelet analysis of the annual discharge records of the world's largest rivers. *Advance Water Resources*. 31 (1): 109-117.
- Lawrimore J, Menne M, Gleason B, Williams C, Wuertz D, Vose R, Rennie J. 2011. An overview of the Global Historical Climatology Network monthly mean temperature data set, version 3. *Journal of Geophysical Research-Atmospheres*. 116(19): 1-18.
- Lin JY, Cheng CT, Chau KW. 2006. Using support vector machines for long-term discharge prediction. *Hydrol. Sci. J*. 51 (4): 599–612.
- Liong. SY, Sivapragasm C. 2002. Flood stage forecasting with SVM. *J. Am. Water Res. Assoc.* 38(1): 173–186.
- Loader C. 1999. *Local Regression and Likelihood – Statisting and Comuting*. Springer. Muray Hill. USA.
- Luković J, Blagojević D, Kilibarda M, Bajat B. 2015 Spatial patternof North Atlantic Oscillation impact on rainfall in Serbia. *Spatial Statistics* <http://dx.doi.org/10.1016/j.spasta.2015.04.007>
- Mališić J. 2002. *Vremenske serije*. Matematički Fakultet. Univerzitet u Beogradu. Srbija.
- Mališić J, Jevremović V. 2008. *Slučajni procesi i vremenske serije*. Matematički fakultet. Univerzitet u Beogradu. Srbija.
- Mann HB. 1945. Non-parametric Test against Trend. *Econometrika*. 13: 245-259.
- McCabe G J, Wolock DM. 2002. A step increase in streamflow in the conterminous United States. *Geophys. Res. Lett.* 29 (2185): 1-4.

- Mehr AD, Kahya E, Olyaie E. 2013. Streamflow prediction using linear genetic programming in comparison with a neuro-wavelet technique. *Journal of Hydrology*. 505: 240-249.
- Middelkoop H, Kwadijk J. 2001. Towards an integrated assessment of the implications of global change for water management: the Rhine experience. *Phys Chem Earth, Part B Hydrology, Oceans and Atmosphere*. 26(7–8): 553–560.
- Milly PCD, Dunne KA, Vecchia AV. 2005. Global pattern of trends in streamflow and water availability in a changing climate. *Nature*. 438(7066): 347–350.
- Mitchell T, Jones P, 2005, An improved method of constructing a database of monthly climate observations and associated high-resolution grids. *International Journal of Climatology*. 25(6): 693-712.
- Montgomery D, Jennings C, Kulahci M. 2007. *Introduction to Time Series Analysis and Forecasting*. Published by John Wiley & Sons. Inc . Hoboken. New Jersey.
- Moore D, McCabe G. 2013. *The Introduction to the Practice of Statistics*. 4th Edition. Chapter 14 – nonparametric Tests. Department of Statistics. University of Florida.
- Moriasi DN, Arnold JG, Van Liew MW, Bingner RL, Harmel RD, Veith TL. 2007. Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations *Transactions of the ASABE*. 50(3): 885-900.
- Mudelsee M. 2010. *Climate Time Series Analysis: Classical Statistical and Bootstrap Methods*. Springer. pp: 474.
- Murphy C, Harrigan S, Hall J, Wilby RL. 2013. Climate-driven trends in mean and high flows from a network of reference stations in Ireland. *Hydrological Sciences Journal*. 58 (4): 755-772.
- Nakićenović N, Swart R. 2000. *Special Report on Emissions Scenarios: A Special Report of Working Group III of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. IPCC. Geneva. Switzerli. pp: 20.
- Nayak PC, Sudheer KP, Ramasastri KS. 2005. Fuzzy computing based rainfall–runoff model for real time flood forecasting. *Hydrol Process*. 19(4):955–968.

- Nikitin Y. 2011. Asymptotic Relative Efficiency in Testing. International Encyclopedia of Statistical Science. Editor: Miodrag Lovrić. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Noori R, Karbassi AR, Moghaddamnia A, Han D, Zokaei-Ashtiani MH, Farokhnia A, Gousheh MG. 2011. Assessment of input variables determination on the SVM model performance using PCA, Gamma test, and forward selection techniques for monthly stream flow prediction. *J Hydrol.* 401(3-4): 177–189.
- Obradović M. 2015. Karakterizacije nekih raspodela i bahadurova asimptotska efikasnost testova saglasnosti. Doktorska disertacija. Matematički fakultet. Univerzitet u Beogradu. Beograd.
- Park J, Obeysekera R, VanZee R. 2005. Prediction boundaries and forecasting of non linear hydrologic stage data *J Hydrol.* 312 (1-4): 79-94.
- Pekarova P, Minklenek P, Pekar J. 2003. Spatial and temporal runoff oscillation analysis of the main rivers of the world during the 19th–20th centuries. *Journal of Hydrology.* 274(1–4): 62–79.
- Pekarova P, Miklanek P, Pekar J. 2006. Long-term trends and runoff fluctuations of European rivers. *Climate Variability and Change - Hydrological Impacts. Proceedings of the Fifth FRIEND World Conference held at Havana. Cuba. IAHS Publ.* 308.
- Pekarova P, Pekar J. 2006. Long-term discharge prediction for the Turnu Severin station (the Danube) using a linear autoregressive model. *Hydrological Processes.* 20(5): 1217-1228.
- Petrow T, Zimmer J, Merz B. 2009. Trends in flood magnitude, frequency and seasonality in Germany in the period 1951–2002. *J. Hydrol.,* 371(1-4): 129–141.
- Philipona R, Behrens K, Ruckstuhl C. 2009. How declining aerosols and rising greenhouse gases forced rapid warming in Europe since the 1980s. *Geophysical Research Letters,* 36(2): 1-5.

- Prata F. 2008. The climatological record of clear-sky longwave radiation at the Earth's surface: evidence for water vapour feedback? *International Journal of Remote Sensing*, 29 (17-18): 5247-5263.
- Priestley MB. 1971, Fittin relationships between time series. *Bu. Inst. Internat. Statist.* 98: 1-27.
- Probst J, Taddy Y. 1987. Long range streamflow and world continental runoff fluctuation since the beginning of this century. *Journal of Hydrology*. 94(3-4): 289–311.
- Prohaska S, Ristić V. 2003. *Hidrologija kroz teoriju i praksu*. Rudarsko-geološki fakultet. Srbija. Beograd.
- PRUDENCE. 2004. Prediction of Regional scenarios and Uncertainties for Defining European Climate change risks and Effects <http://prudence.dmi.dk/> access:12.09.2014.
- Qian T, Dai A, Trenberth K. E, Oleson K. W, 2006, Simulation of global land surface conditions from 1948 to 2004. *J. Hydrometeor.* 7(1): 953–975.
- Quenouille MH. 1949. Approximate tests of correlation in time-series. *J. Royal Statist. Soc.* (11): 68–84.
- Radić Z, Mihajlović V. 2006. Teorijske osnove i proširenje oblasti primene strukturne analize dnevnih hidroloških serija. *Vodoprivreda*. 38(1-3): 219-221.
- Radziejewski M, Kundzewicz YW. 1997. Fractal analysis of flow of the river Warta. *Journal of Hydrology*. 200(1-4): 280–294.
- Renner M, Bernhofer C. 2011. Long term variability of the annual hydrological regime and sensitivity to temperature phase shifts in Saxony/Germany. *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 15: 1819–1833.
- Richards R. 2014. *Modeling Financial Time Series*. University of Washington. <http://faculty.washington.edu/ezivot/econ584/notes/unitrootlecture.pdf> access:29.09.2014.

- Rimbu N, Constanta B, Buta K, Dima M. 2002. Decadal variability of the Danube river flow in the lower basin and its relation with the north atlantic oscillation. *Int. J. Climatol.* 22(10): 1169–1179.
- Robock A, Vinnikov K, Srinivasan G, Entin J, Hollinger S, Speranskaya N, Liu S, Namkhai A. 2000. The global soil moisture data bank. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 81: 1281–1299.
- Rohde R, Curry J, Groom D, Jacobsen R, Muller R, Perlmutter S, Rosenfeld A, Wickham C, Wurtele J. 2013. Berkeley Earth Temperature Averaging Process. *Geoinfor Geostat: An Overview*.
- Rodriguez-Puebla C, Encinas A.H, Nieto S, Garmendia J. 1998. Spatial i temporal patterns of annual precipitation variability over the Iberian Peninsula. *International Journal of Climatology.* 18 (3): 299–316.
- Rsisanen J, Hansson U, Ullerstieg A, Döscher R, Graham L, Jones C, Meier H, Samuelson P, Willén U. 2004. European climate in the late twenty-first century: regional simulations with two driving global models and two forcing scenarios. *Clim. Dyn.* 22(1): 13–31.
- Rudi J, Pabel R, Jage G, Koch R, Kunoth A, Bogena H. 2010. Multiscale Analysis of Hydrologic Time Series Data using the Hilbert-Huang Transform. *Vadose zone journal.* 9(4): 925-942.
- Salas JD, Delleur JW, Yevjevich V, Lane WL. 1988. *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*. Water Resources Publications. Littleton, Colorado. pp: 484 (2nd Printing 1985. 3rd Printing. 1988)
- Sang YF. 2013. Improved Wavelet Modeling Framework for Hydrologic Time Series Forecasting. *Water Resources Management.* 27(8): 2807-2821.
- Schmocker-Fackel P, Naef F. 2010. More frequent flooding? Changes in flood frequency in Switzerland since 1850. *J. Hydrol.* 381(1-2): 1–8.
- Sheng Y, Pilon P. 2004. A comparison of the power of the t test, MannKendall and bootstrap tests for trend detection. *Hydrological Sciences Journal Publication.* 29(1): 21-37.

- Sivakumar B. 2009. Nonlinear dynamics and chaos in hydrologic systems: latest developments and a look forward. *Stoch Environ Res Risk Assess.* 23(7):1027–1036.
- Smith T, Arkin P, Ren L, Shen S. 2012. Improved reconstruction of global precipitation since 1900. *J. atmospheric and Oceanic Technology.* 29(10): 1505-1517.
- Sorooshian S, Whitaker M. 2002. *Hydrology Overview. Hand book of weather, climate and water.* Wiley Interscines. Ney Jersey. USA.
- Stahl K, Hisdal H, Hannaford J, Tallaksen LM, Van Lanen HAJ, Sauquet E, Demuth S, Fendekova M, Jodar J. 2010. Streamflow trends in Europe: evidence from a dataset of near-natural catchments. *Hydrology and earth system sciences.* 14(12): 2367-2382.
- Stojković M, Plavšić J, Prohaska S. 2012a. Stohastička analiza serija godišnjih proticaja na stanicama na Dunavu. 16. naučno savetovanje Srpskog društva za hidraulička istraživanja (SDHI) i Srpskog društva za hidrologiju (SDH). Srbija. Gornji Milanovac.
- Stojković M, Prohaska S, Koprivica A. 2012b. Analysis of Trends and Cycles in Longest Hydrometeorological Time Series in the World. 5th Conference on Water. Climate and Environment - BALWOIS 2012. Ohrid, Macedonia. ISBN 978-608-4510-10-9.
- Stojković M, Prohaska S, Plavšić J. 2013. Stochastic Modeling of Time Series of Mean Annual Discharge in the 21st Century: Case Study of the River Ibar. International Conference Climate Change Impacts on Water Resources. 17-18. Belgrade. Serbia. ISBN 978-86-82565-41-3. pp. 55-63.
- Toth E, Brath A, Montanari A. 2000. Comparison of short-term rainfall prediction models for real-time flood forecasting. *J. Hydrol.* 239 (1): 132–147.
- Tyralis H, Koutsoyiannis D. 2011. Simultaneous estimation of the parameters of the Hurst–Kolmogorov stochastic process. *Stoch Environ Res Risk Assess.* 25: 21–33.

- USGCRP. 2009. Global Climate Change Impacts in the United States. Karl TR, Melillo JM, Peterson JM. United States Global Change Research Program. Cambridge University Press. New York. NY. USA.
- Vapnik V, Golowich S, Smola AJ. 1997. Support vector method for function approximation, regression estimation, and signal processing. *Adv. Neural Info. Processing Systems* 9: 281–287.
- Varga A, Prohaska S. 1976. Zbornik radova sa savetovanja o hidrologiji malih slivova, Odstranjivanje trenda u hidrološkim vremenskim serijama. Vrnjačka Banja.
- Vautard R, Yiou P, Ghil M. 1992. Singular spectrum analysis: a toolkit for short noisy and chaotic signals. *Physica D*. 58(1-4):95–126.
- Villarini G, Smith JA, Serinaldi F, Ntelekos AA. 2011. Analyses of seasonal and annual maximum daily discharge records for central Europe. *Journal of Hydrology*. 399 (3-4): 299-312.
- Virgilio A, Ubertin L. 1979. Transfer function-noise model applied to flow forecasting, *Hydrological Sciences-Bulletin-des Sciences Hydrologiques*. 24 (3): 353-359.
- Vogel RM, Tsai Y, Limbrunner JF. 1998. The regional persistence and variability of annual streamflow in the United States, *Wat. Resour. Res.* 34(12): 3445–3459.
- Vornsmarty CJ, Sahagian D. 2000. Anthropogenic disturbance of the terrestrial water cycle. *Bioscience*. 50(9): 753–765.
- Voss J. 2013. Rescaled Range Analysis: A Method for Detecting Persistence. Randomness or Mean Reversion in Financial Markets. [www.cfainstitute.org/investor/2013/01/30/rescaled-range-analysis-a-method-for-detecting-ersistence-randomness-or-mean-reversion-in-financial-markets](http://www.cfainstitute.org/investor/2013/01/30/rescaled-range-analysis-a-method-for-detecting-ersistence-randomness-or-mean-reversion-in-financial-markets) access: 08.11.2013.
- Wang H, Lin X, Qian L. 2009. Crytic period analysis model of hydrological process and its application. *Hydrol. Process*. 23(13): 1834–1843.
- Wang W.C, Chau K.W, Cheng C.T, Qiu L. 2009. A comparison of performance of several artificial intelligence methods for forecasting monthly discharge time series. *Journal of Hydrology*. 374 (3-4): 294-306.

- Wang XX (2005) Asymptotics of the Theil–Sen estimator in the simple linear regression model with a random covariate. *Journal of Nonparametric Statistics*. 17(1): 107-120.
- Wanga H, Sankarasubramanianb A, Ranjithanb RS. 2014. Understanding the Low-frequency Variability in Hydroclimatic Attributes over the Southeastern US. *Journal of Hydrology*. 521:170–181.
- Wei W. 2006. *Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods*. Second Edition. Perason Education. USA.
- Wheater HS, Jakeman AJ, Beven KJ. 1993. Progress and directions in rainfall-run-off modelling. In *Modelling Change in Environmental Systems*, Jakeman AJ, Beck MB. and McAleer MJ. (Eds.) Wiley: Chichester. pp: 101–132.
- Wilby RL. 2006. When and where might climate change be detectable in UK river flows? *Geophysical Research Letters*, 33(19): 1-5.
- Wild M, Grieser J, Schaer C. 2008. Combined surface solar brightening and increasing greenhouse effect support recent intensification of the global land-based hydrological cycle. *Geophysical Research Letters*. 35(17): 1-5.
- Williams GR. 1961. Cyclical variations in the world-wide hydrological data. *Journal of Hydraulic division*. 87(6): 71–88.
- WMO. 2014. *Climate Data and Data Related Products. Climate Normals*. World Meteorological Organization. [http://www.wmo.int/pages/themes/climate/climate\\_data\\_and\\_products.php](http://www.wmo.int/pages/themes/climate/climate_data_and_products.php) access: 29.09.2014.
- World Bank 2014. World Bank. *Water Climate and Adaptation Plan for the Sava River Basin. Draft Final Report. Annex 1.. Development of the Hydrologic Model for the Sava River Basin*. (Plavšić J.)
- Wrzesnski D, Paluszkiewicz R. 2011. Spatial differences in the impact of the North Atlantic Oscillation on the flow of rivers in Europe. *Hydrology Research*. 42(1): 30–39.
- Yang DB, Shiklomanov A. 2004. Discharge characteristics and changes over the Ob River watershed in Siberia. *Hydrometeorology*. 5(4): 595–610.



- Vose R. 1992. The Global historical climatology network: long-term monthly temperature, precipitation, sea level pressure, and station pressure data. Environmental Sciences Division. No. 3912.
- Yu X. Y, Liang S. Y, Babović V. 2004. EC-SVM approach for real-time hydrologic forecasting. *J. Hydroinf.* 6(3): 209–233.
- Yue S, Pilon P. 2004. A comparison of the power of the t test, Mann- Kendall and bootstrap tests for trend detection. *Hydrological Sciences Journal.* 49(1): 21-36.
- Yue S, Wang CY. 2004. The Mann–Kendall test modified by effective sample size to detect trend in serially correlated hydrological series. *Water Res. Manage.* 18(3): 201–218.
- Yue S. Wang CY. 2002. Applicability of pre-whitening to eliminate the influence of serial correlation on the Mann-Kendall test. *Water Resour. Res.* 38(6): 4-7.
- Zadeh LA. 1965. Fuzzy sets. *Information Contributions.* 8: 338-353.
- Zhang Q, Wang BD, He B, Peng Y, Ren ML. 2011. Singular Spectrum Analysis and ARIMA Hybrid Model for Annual Runoff Forecasting, *Water Resour Manage.* 25(11):2683–2703.
- Zhao GJ, Hormann G, Fohrer N, Zhang ZX, Zhai JQ. 2010. Streamflow Trends and Climate Variability Impacts in Poyang Lake Basin, China. *Water Resources Management.* 24 (4): 689-706.
- Zhang XFW, Zwiers GC, Hegerl FH, Lambert NP, Gillett S, Solomon PA, Stott T, Nozawa T. 2007. Detection of human influence, on twentieth century precipitation trends. *Nature.* 448: 461 – 465.

## Sadržaj priloga

<b>Tabelarni prilozi .....</b>	<b>208</b>
T-1 Test normalnosti serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja .....	209
(1) Jarque-Bera test .....	209
T-1 Test normalnosti serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja .....	210
(2) PPCC test .....	210
T-2 Homogenost srednjih sezonskih proticaja.....	211
T-3 Trend srednjih sezonskih proticaja po testu Mann-Kenadall.....	212
T-4 Spektar po metodi Blackman-Tukey za godišnje i sezonske proticaje .....	213
T-5 Periodogram srednjih sezonskih proticaja .....	215
T-6 Stacionarnost AR ( $p$ ) procesa .....	217
T-7 Parametri i verifikacija AR ( $p$ ) modela sezonskih proticaja .....	218
T-8 Učešće u varijansi serije srednjih sezonskih proticaja .....	219
T-9 Kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi .....	220
T-10 Ažuriranje kratkoročnih projekcija godišnjih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi .....	222
T-11 Verifikacija modeliranih serija korišćenjem modifikovane TIPS metode.....	223
T-12 Test normalnosti greške modeliranja modifikovanog TIPS modela.....	224
(1) Jarque-Bera test.....	224
T-12 Test normalnosti greške modeliranja modifikovanog TIPS modela.....	225
(2) PPCC test .....	225
T-13 Analiza osetljivosti mesečnih i godišnjih proticaja.....	226
T-14 Periodograma srednjih godišnjih i sezonskih proticaja u metodi SDTS.....	227
<b>Grafički prilozi.....</b>	<b>228</b>
G-1 Prikaz vremenskih serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja sa pokretnim sredinama .....	229

(pokretne sredine $m_Q$ su vezane za kraj perioda osrednjavanja).....	229
G-2 Multi-vremenska analiza trenda godišnjih i sezonskih proticaja korišćenjem testa Mann-Kendall .....	235
G-3 Linearni trend srednjih godišnjih i sezonskih proticaja.....	241
G-4 Linearni trend sa pokretnim vremenskim prozorom srednjih godišnjih i sezonskih proticaja .....	247
G-5 Spektar godišnjih i sezonskih proticaja po metodi Blackman-Tukey .....	253
G-6 Ugláčani godišnji i sezonski proticaji po metodi LOESS .....	259
G-7 Periodogram osmotrenih i ugláčanih godišnjih i sezonskih proticaja .....	265
G-8 Relativni kumulativni periodogram (RKP) godišnjih i sezonskih proticaja.....	271
G-9 Hurstov koeficijent $h$ serija godišnjih i sezonskih proticaja.....	277
G-10 Test zaostale periodičnosti reziduala druge vrste $Q''$ .....	278
G-11 Autokorelaciona funkcija (ACF) greške modeliranja $\varepsilon$ modifikovane TIPS metode.....	284
G-12 Test zaostale periodičnosti greške modeliranja modifikovane TIPS metode...290	
G-13 Modeliranje srednjih godišnjih i sezonskih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi .....	296
G-14 Kratkoročne projekcije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi.....	302
G-15 Ažurirane kratkoročne projekcije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi.....	308
G-16 Verifikacija rezultata modifikovane TIPS metode korišćenjem autokorelacione funkcije .....	311
G-17 Verifikacija <i>inicijalnog</i> hidrološkog modela za dugoročne projekcije godišnjeg proticaja .....	317
G-18 Sezonska komponenta i mesečne padavine iz klimatskog EBU-POM modela za period 2013-2100.....	319
G-19 Dugoročne projekcije sezonskih i godišnjih padavina i temperatura .....	321

G-20 Promene projekcija godišnjih i sezonskih padavina i temperatura (2013-2100) u odnosu na referentni period (1961-1990) .....	325
G-21 Projekcije godišnjih i sezonskih proticaja (2013-2100) .....	326

# **Tabelarni prilozi**

## T-1 Test normalnosti serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja

### (1) Jarque-Bera test

reka	stanica	god/sezona	JB test		
			P	JB	$JB_{crit}(\chi_{0.05}^2)$
r. Dunav	st. Oršava	god	0.693	0.660	5.991
		I	0.036	<b>6.787</b>	5.991
		II	0.876	0.226	5.991
		III	0.713	0.652	5.991
		IV	0.422	1.451	5.991
r. Dunav	st. Bogojevo	god	0.531	1.066	5.991
		I	0.674	0.671	5.991
		II	0.717	0.628	5.991
		III	0.504	1.067	5.991
		IV	0.178	2.403	5.991
r. Sava	st. S. Mitovica	god	0.399	1.399	5.991
		I	0.006	<b>13.632</b>	5.991
		II	0.235	2.143	5.991
		III	0.783	0.473	5.991
		IV	0.763	0.523	5.991
r. Tisa	st. Senta	god	0.803	0.400	5.991
		I	0.800	0.400	5.991
		II	0.634	0.780	5.991
		III	0.647	0.830	5.991
		IV	0.341	1.568	5.991
r. V. Morava	st. Lj. Most	god	0.891	2.056	5.991
		I	0.093	3.758	5.991
		II	0.176	2.688	5.991
		III	0.417	1.378	5.991
		IV	0.246	2.083	5.991
r. Lim	st. Prijepolje	god	0.782	0.423	5.991
		I	0.286	1.896	5.991
		II	0.206	2.461	5.991
		III	0.455	1.255	5.991
		IV	0.098	3.527	5.991

**T-1 Test normalnosti serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja**

**(2) PPCC test**

<i>Reka</i>	<i>Stanica</i>	$r(\log Q)$	$r(\log Q I)$	$r(\log Q II)$	$r(\log Q III)$	$r(\log Q IV)$
r. Dunav	st. Oršava	0.995	<b>0.980</b>	0.995	0.993	0.994
r. Dunav	st. Bogojevo	0.994	0.997	0.996	0.994	0.990
r. Sava	st. S. Mitovica	0.991	<b>0.973</b>	0.990	0.997	0.996
r. Tisa	st. Senta	0.998	0.990	0.995	0.996	0.994
r. V. Morava	st. Lj. Most	0.997	0.989	0.993	0.990	0.987
r. Lim	st. Prijepolje	0.991	0.994	0.986	0.991	0.988

## T-2 Homogenost srednjih sezonskih proticaja

reka/ stanica		Normalizovan Z test			Studen- tov test		Fisher-ov test		Wilcoxon-ov test	
		$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	Z	t	$\sigma_1$	$\sigma_2$	F	W	Z
r. Dunav, st. Oršava	I	5751	5719	0.067	0.068	1359	1273	1.042	1873	0.002
	II	7448	6922	1.332	1.425	1946	1530	1.258	1745	-0.853
	III	4583	4348	0.793	0.820	1194	1060	1.132	1745	-0.853
	IV	4522	4598	-0.638	-0.645	1444	1398	1.060	1915	0.282
r. Dunav, st. Bogojevo	I	2580	2533	0.162	0.164	606.0	568.2	1.067	1705	0.413
	II	3812	3392	<b>2.131</b>	<b>2.290</b>	986.1	772.2	1.277	1759	0.914
	III	3349	2834	<b>2.900</b>	<b>3.224</b>	898.0	645.5	1.427	1736	0.700
	IV	2369	2197	0.976	1.028	689.5	594.5	1.199	1602	-0.533
r. Sava, st. Sremska Mitrovica	I	2021	1768	<b>2.532</b>	<b>2.559</b>	542.1	501.0	1.057	1646	-1.712
	II	2070	1842	<b>1.968</b>	<b>2.098</b>	612.9	482.6	1.247	1680	-1.423
	III	776.6	755.2	0.792	0.839	284.2	301.6	1.218	1783	-0.552
	IV	1599	1467	0.134	0.131	681.2	562.4	1.063	1624	-1.899
r. Tisa st. Senta	I	807.7	892.8	-1.253	-1.217	321.2	335.2	1.064	1522	-1.276
	II	1213	1211	-0.094	-0.099	538.3	445.2	1.186	1619	-0.376
	III	542.8	613.8	-1.940	-1.860	290.6	333.5	1.108	1547	-1.044
	IV	507.6	605.7	-1.263	-1.188	284.3	311.2	1.175	1489	-1.582
r. V. Morava st. Ljubičevski Most	I	353.9	313.9	1.412	1.426	146.4	135.8	1.054	1800	1.294
	II	345.4	314.4	1.264	1.313	132.4	112.5	1.148	1763	0.951
	III	107.8	110.7	-0.805	-0.894	63.6	48.1	1.422	1523	-1.183
	IV	143.4	155.3	-0.349	-0.376	106.5	74.0	1.295	1505	-1.433
r. Lim, st. Prijepolje	I	90.2	77.2	<b>2.154</b>	<b>2.127</b>	32.9	32.6	1.013	1605	<b>-2.060</b>
	II	124.1	115.4	1.610	1.654	31.3	27.6	1.112	1678	-1.436
	III	31.3	27.8	0.775	0.816	12.2	10.9	1.199	1643	-1.739
	IV	77.3	70.8	1.486	1.526	41.0	33.6	1.111	1785	-0.535



### T-3 Trend srednjih sezonskih proticaja po testu Mann-Kendall

<i>reka</i>	<i>stanica</i>	<i>sezona</i>	<i>S</i>	<i>Z<sub>s</sub></i>	<i>Z<sub>s kor</sub></i>
r. Dunav	st. Oršava	I	-105	-0.417	-0.369
		II	191	0.761	0.712
		III	112	0.445	0.403
		IV	-95	-0.376	-0.417
r. Dunav	st. Bogojevo	I	-49	-0.192	-0.162
		II	372	1.486	1.367
		III	611	<b>2.443</b>	<b>2.184</b>
		IV	324	1.293	1.239
r. Sava	st. S. Mitrovica	I	361	1.442	1.278
		II	397	1.586	1.518
		III	88	0.348	0.379
		IV	324	1.293	1.357
r. Tisa	st. Senta	I	-588	<b>-2.351</b>	<b>-2.078</b>
		II	-82	-0.324	-0.272
		III	-172	-0.685	-0.599
		IV	-253	-1.009	-1.063
r. V. Morava	st. Ljubičevski Most	I	211	0.841	0.762
		II	163	0.649	0.740
		III	-150	-0.597	-0.628
		IV	-126	-0.501	-0.486
r. Lim	st. Prijepolje	I	289	1.153	1.012
		II	206	0.821	0.749
		III	473	1.890	1.936
		IV	147	0.585	0.689

### T-4 Spektar po metodi Blackman-Tukey za godišnje i sezonske proticaje

<i>reka/ stanica</i>	<i>Spektar – B-T (Q, Q<sub>I</sub> Q<sub>III</sub>)</i>			<i>Spektar – B-T (Q<sub>II</sub> Q<sub>IV</sub>)</i>		
	<i>f</i>	<i>T</i>	<i>S(f)</i>	<i>f</i>	<i>T</i>	<i>S(f)</i>
r. Dunav, st. Oršava <i>Q</i>	0.275	3.6	1234950			
	0.204	4.9	785852			
	0.074	13.5	768757			
	0.048	20.8	631894			
	0.028	35.7	620216			
r. Dunav, st. Oršava <i>Q<sub>I</sub></i> <i>Q<sub>II</sub></i>	0.276	3.6	1518373	0.275	3.6	2333853
	0.415	2.4	1269637	0.077	13.0	2233138
	0.065	15.4	1230381	0.204	4.9	2082723
	0.202	5.0	1177060	0.232	4.3	2040779
	0.099	10.1	1117710	0.429	2.3	2021568
r. Dunav, st. Oršava <i>Q<sub>III</sub></i> <i>Q<sub>IV</sub></i>	0.197	5.1	1238704	0.500	2.0	2372269
	0.275	3.6	1060037	0.367	2.7	1406209
	0.021	47.6	938404	0.051	19.6	1298799
	0.099	10.1	724263	0.203	4.9	1063542
	0.473	2.1	719197	0.274	3.6	1049529
r. Dunav, st. Bogojevo <i>Q<sub>sr.god.</sub></i>	0.276	3.6	270098			
	0.041	24.4	259636			
	0.097	10.3	196998			
	0.233	4.3	192703			
	0.202	5.0	147080			
r. Dunav, st. Bogojevo <i>Q<sub>I</sub></i> <i>Q<sub>II</sub></i>	0.101	9.9	402826	0.042	23.8	678026
	0.276	3.6	265594	0.28	3.6	577734
	0.145	6.9	171923	0.229	4.4	562981
	0.056	17.9	170740	0.397	2.5	493965
	0.244	4.1	170147	0.435	2.3	476244
r. Dunav, st. Bogojevo <i>Q<sub>III</sub></i> <i>Q<sub>IV</sub></i>	0.009	111.1	549086	0.5	2.0	540934
	0.412	2.4	465131	0.05	20.0	400875
	0.097	10.3	455291	0.376	2.7	188732
	0.232	4.3	388147	0.209	4.8	175744
	0.196	5.1	384141	0.275	3.6	171018
r. Sava, st. S.Mitrovi. <i>Q</i>	0.276	3.6	139899			
	0.045	22.2	91104			
	0.073	13.7	58144			
	0.215	4.7	56414			
	0.418	2.4	47370			
r. Sava, st. S.Mitrovi. <i>Q<sub>I</sub></i> <i>Q<sub>II</sub></i>	0.065	15.4	243126	0.275	3.6	240087
	0.118	8.5	240799	0.425	2.4	218582
	0.415	2.4	233815	0.071	14.1	209891
	0.278	3.6	181678	0.368	2.7	178277
	0.214	4.7	153219	0.046	21.7	166097
r. Sava, st. S.Mitrovi. <i>Q<sub>III</sub></i> <i>Q<sub>IV</sub></i>	0.277	3.6	70390	0.049	20.4	268663
	0.474	2.1	61969	0.274	3.6	240304
	0.370	2.7	58635	0.363	2.8	229969
	0.201	5.0	51806	0.255	3.9	229592
	0.306	3.3	50914	0.192	5.2	202157
r. Tisa, st. Senta <i>Q</i>	0.031	32.3	61065			
	0.076	13.2	60806			
	0.274	3.6	56951			
	0.204	4.9	46109			
	0.103	9.7	36569			
r. Tisa, st. Senta <i>Q<sub>I</sub></i> <i>Q<sub>II</sub></i>	0.095	10.5	93878	0.077	13.0	200211.8
	0.076	13.2	88470	0.168	6.0	197547.7
	0.246	4.1	71119	0.203	4.9	166801.1
	0.029	34.5	68436	0.104	9.6	136656.4
	0.419	2.4	63727	0.049	20.4	133559.8

reka/ stanica	Spektar – B-T ( $Q$ , $Q_I$ , $Q_{III}$ )			Spektar – B-T ( $Q_{II}$ , $Q_{IV}$ )		
	$f$	$T$	$S(f)$	$f$	$T$	$S(f)$
r. Tisa, st.Senta $Q_{III}$ $Q_{IV}$	0.198	5.1	95957.9	0.031	32.3	63483.5
	0.029	34.5	83068.0	0.08	12.5	21673.7
	0.274	3.6	74622.5	0.119	8.4	31357.8
	0.246	4.1	64296.1	0.172	5.8	41236.6
	0.226	4.4	58163.3	0.205	4.9	31822.4
r. V.Morava, st. Ljub.Most. $Q$	0.049	20.4	4255			
	0.112	8.9	3064			
	0.154	6.5	2873			
	0.204	4.9	2601			
	0.229	4.4	1257			
r. V.Morava, st. Ljub.Most. $Q_I$ sezona $Q_{II}$ sezona	0.500	2.0	4090	0.270	3.7	2674
	0.466	2.1	9878	0.373	2.7	2455
	0.425	2.4	10816	0.056	17.9	2069
	0.368	2.7	7383	0.099	10.1	1756
	0.310	3.2	5879	0.500	2.0	1555
r. V.Morava, st. Ljub.Most. $Q_{III}$ $Q_{IV}$	0.048	20.8	8559	0.275	3.6	18189
	0.113	8.8	7142	0.044	22.7	16068
	0.460	2.2	5883	0.143	7.0	11279
	0.384	2.6	4395	0.170	5.9	10284
	0.285	3.5	4267	0.386	2.6	9968
r. Lim, st. Prijepolje $Q$	0.273	3.7	480			
	0.117	8.5	301			
	0.011	90.9	282			
	0.384	2.6	243			
	0.046	21.7	221			
r. Lim, st. Prijepolje $Q_I$ $Q_{II}$	0.203	4.9	1033	0.108	9.3	998
	0.125	8.0	969	0.081	12.3	858
	0.273	3.7	871	0.019	52.6	638
	0.047	21.3	748	0.239	4.2	632
	0.387	2.6	700	0.271	3.7	623
r. Lim, st. Prijepolje $Q_{III}$ $Q_{IV}$	0.271	3.7	159	0.363	2.8	1494
	0.014	71.4	158	0.483	2.1	1005
	0.47	2.1	92	0.401	2.5	994
	0.409	2.4	79	0.276	3.6	837
	0.168	6.0	75	0.169	5.9	776

### T-5 Periodogram srednjih sezonskih proticaja (prve pet najuticajnije periode)

<i>reka/ stanica</i>	<i>Periodogram – najveće periode sa svojim karakteristikama</i>							
	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$I_i$	$f_i$	$T_i$	$g_i$	$RKP_i$
r. Dunav, st. Oršava	-511.5	180.6	542.4	12062681	0.049	20.5	<b>0.254</b>	0.136
$Q_I$	-391.3	-245.3	461.9	8745630	0.098	10.3	<b>0.247</b>	0.252
$g_{cr}=0.154$	-187.3	-408.2	449.1	8269921	0.073	13.7	<b>0.309</b>	0.365
	300.7	-18.5	301.3	3720831	0.024	41.0	<b>0.202</b>	0.441
	188.9	183.8	263.6	2848603	0.061	16.4	<b>0.193</b>	0.507
r. Dunav, st. Oršava	-219.9	-596.4	635.7	16568065	0.073	13.7	0.126	0.073
$Q_{II}$	-629.3	17.3	629.6	16250201	0.049	20.5	0.141	0.145
	2.0	546.4	546.4	12241883	0.207	4.8	0.124	0.208
	329.0	427.2	539.2	11920844	0.232	4.3	0.138	0.270
	288.1	322.8	432.6	7673866	0.110	9.1	0.103	0.320
r. Dunav, st. Oršava	369.5	-144.3	396.6	6450349	0.024	41.0	<b>0.163</b>	0.096
$Q_{III}$	-370.6	-22.4	371.3	5652476	0.098	10.3	<b>0.171</b>	0.185
	-102.6	-305.5	322.2	4257234	0.073	13.7	<b>0.155</b>	0.263
	-282.3	-106.0	301.5	3727478	0.195	5.1	<b>0.161</b>	0.336
	-291.4	66.5	298.9	3663924	0.012	82.0	<b>0.188</b>	0.408
r. Dunav, st. Oršava	-143.4	521.6	540.9	11997303	0.049	20.5	<b>0.167</b>	0.080
$Q_{IV}$	-177.0	349.5	391.8	6292926	0.171	5.9	0.105	0.139
	-26.4	-349.6	350.6	5039992	0.134	7.5	0.094	0.191
	314.1	-138.4	343.2	4830497	0.207	4.8	0.099	0.242
	-158.0	-277.4	319.2	4178361	0.195	5.1	0.095	0.289
r. Dunav, st. Bogojevo	-207.7	-105.8	233.1	2227198	0.098	10.3	<b>0.233</b>	0.126
$Q_I$	87.1	-197.3	215.6	1906499	0.110	9.1	<b>0.261</b>	0.243
$g_{cr}=0.154$	169.9	50.1	177.1	1286471	0.024	41.0	<b>0.238</b>	0.339
	-122.8	61.7	137.5	774788	0.049	20.5	<b>0.188</b>	0.413
	129.8	-45.1	137.4	774540	0.061	16.4	<b>0.231</b>	0.488
r. Dunav, st. Bogojevo	-341.5	-118.1	361.3	5352276	0.049	20.5	0.159	0.081
$Q_{II}$ sezona	243.7	131.5	276.9	3144204	0.232	4.3	0.111	0.143
	-135.3	-234.0	270.2	2994420	0.073	13.7	0.119	0.203
	-34.4	-236.1	238.6	2334964	0.171	5.9	0.105	0.256
	-210.8	87.7	228.4	2138074	0.098	10.3	0.107	0.307
r. Dunav, st. Bogojevo	-307.5	1.4	307.5	3875635	0.098	10.3	<b>0.204</b>	0.103
$Q_{III}$	238.4	-92.9	255.8	2683768	0.024	41.0	<b>0.177</b>	0.188
	-79.1	-215.1	229.2	2153609	0.073	13.7	<b>0.173</b>	0.264
	-125.8	-96.1	158.3	1027735	0.195	5.1	0.100	0.317
	120.4	93.3	152.4	951752	0.122	8.2	0.103	0.368
r. Dunav, st. Bogojevo	-131.8	233.8	268.4	2952986	0.049	20.5	<b>0.175</b>	0.086
$Q_{IV}$	187.9	-32.3	190.7	1490832	0.012	82.0	0.107	0.147
	190.2	5.9	190.3	1485049	0.024	41.0	0.120	0.208
	-101.5	-160.2	189.7	1474942	0.073	13.7	0.135	0.268
	117.8	-94.4	150.9	934157	0.207	4.8	0.099	0.316
r. Sava, st. S.Mitrovica	-156.9	120.6	197.9	1586118	0.049	20.3	<b>0.234</b>	0.093
$Q_I$	-121.4	-138.5	184.1	1373173	0.074	13.5	<b>0.264</b>	0.180
$g_{cr}=0.154$	102.1	140.7	173.8	1223612	0.062	16.2	<b>0.319</b>	0.262
	57.5	161.2	171.1	1185813	0.111	9.0	<b>0.454</b>	0.342
	-93.8	-140.8	169.2	1158788	0.123	8.1	<b>0.814</b>	0.422
r. Sava, st. S.Mitrovica	-175.9	62.6	186.7	1428689	0.061	16.4	0.142	0.109
$Q_{II}$	-75.5	-146.0	164.4	1107892	0.073	13.7	0.128	0.205
	-143.1	78.9	163.4	1094578	0.049	20.5	0.145	0.301
	88.3	79.5	118.9	579286	0.110	9.1	0.090	0.370
	-10.0	114.3	114.8	540070	0.134	7.5	0.092	0.437
r. Sava, st. S.Mitrovica	-80.5	-17.9	82.5	278932	0.061	16.4	0.030	0.123
$Q_{III}$	4.0	73.2	73.3	220247	0.049	20.5	0.025	0.232
	69.4	-23.0	73.1	218978	0.024	41.0	0.025	0.341
	-63.1	0.7	63.1	163381	0.012	82.0	0.019	0.435
	-34.7	47.9	59.2	143456	0.037	27.3	0.017	0.523
r. Sava, st. S.Mitrovica	-39.5	221.4	224.9	2073702	0.049	20.5	<b>0.370</b>	0.140
	-112.3	98.8	149.6	917136	0.037	27.3	<b>0.237</b>	0.232

reka/ stanica	Periodogram – najveće periode sa svojim karakteristikama							
	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$I_i$	$f_i$	$T_i$	$g_i$	$RKP_i$
$Q_{IV}$	-139.2	18.3	140.4	808059	0.073	13.7	<b>0.157</b>	0.319
	-6.1	-104.9	105.1	452934	0.061	16.4	<b>0.158</b>	0.385
	-29.5	91.3	96.0	377802	0.171	5.9	0.138	0.444
r. Tisa, st. Senta. $g_{cr}=0.154$	-98.2	-74.0	122.9	619728	0.098	10.3	<b>0.187</b>	0.097
	-36.5	-117.3	122.8	618469	0.073	13.7	<b>0.230</b>	0.193
	$Q_I$	73.0	40.4	83.4	285487	0.085	11.7	<b>0.158</b>
	75.0	-34.8	82.7	280127	0.024	41.0	<b>0.157</b>	0.324
	-47.0	-63.9	79.3	258078	0.037	27.3	<b>0.171</b>	0.387
	$Q_{II}$	-200.8	33.0	203.5	1698141	0.049	20.5	<b>0.184</b>
r. Tisa, st. Senta.	-26.5	-167.3	169.4	1176192	0.073	13.7	<b>0.157</b>	0.186
	105.5	126.4	164.6	1111118	0.110	9.1	<b>0.175</b>	0.268
	-108.6	-106.8	152.3	951429	0.171	5.9	<b>0.182</b>	0.344
$Q_{III}$	121.6	-43.6	129.2	684139	0.085	11.7	<b>0.160</b>	0.409
	109.9	27.4	113.3	526097	0.024	41.0	<b>0.217</b>	0.116
	56.7	72.6	92.1	347815	0.122	8.2	<b>0.283</b>	0.210
r. Tisa, st. Senta.	-75.0	-52.7	91.7	344474	0.037	27.3	<b>0.221</b>	0.304
	-42.8	75.9	87.2	311589	0.049	20.5	<b>0.257</b>	0.394
	0.0	-84.4	84.4	291854	0.073	13.7	<b>0.324</b>	0.480
$Q_{IV}$	-91.4	7.4	91.7	345029	0.037	27.3	0.100	0.060
	40.2	77.0	86.9	309535	0.122	8.2	0.100	0.118
	36.7	75.0	83.5	286173	0.244	4.1	0.103	0.173
r. V.Morava st.Lj. Most	-13.0	80.8	81.8	274630	0.049	20.5	0.110	0.226
	74.5	24.8	78.5	252913	0.024	41.0	0.113	0.278
	30.5	26.7	40.5	67347	0.232	4.3	0.127	0.110
$Q_I$	38.8	-3.1	38.9	61976	0.122	8.2	0.134	0.178
	-20.3	-27.8	34.4	48561	0.146	6.8	0.121	0.241
	19.1	-26.0	32.3	42671	0.159	6.3	0.121	0.296
$g_{cr}=0.154$	-25.7	16.6	30.5	38248	0.012	82.0	0.123	0.346
	-19.7	-4.5	20.2	16740	0.098	10.3	<b>0.207</b>	0.078
	-19.5	-0.2	19.5	15538	0.061	16.4	<b>0.242</b>	0.148
r. V.Morava st.Lj. Most	-4.1	17.3	17.7	12907	0.049	20.5	<b>0.265</b>	0.212
	-10.8	-7.1	13.0	6887	0.146	6.8	<b>0.192</b>	0.266
	-0.9	-9.5	9.6	3774	0.159	6.3	0.131	0.319
$Q_{II}$	0.6	35.9	35.9	52742	0.049	20.5	<b>0.154</b>	0.079
	-29.8	-7.2	30.6	38439	0.061	16.4	<b>0.153</b>	0.142
	-4.3	-30.2	30.5	38077	0.037	27.3	<b>0.152</b>	0.202
r. V.Morava st.Lj. Most	-27.8	-8.8	29.1	34758	0.110	9.1	<b>0.163</b>	0.261
	-20.7	20.2	28.9	34196	0.098	10.3	<b>0.192</b>	0.319
	-20.3	19.1	27.9	31835	0.049	20.5	<b>0.203</b>	0.077
$Q_{III}$	-22.8	8.0	24.1	23889	0.098	10.3	<b>0.191</b>	0.148
	-22.4	-5.1	23.0	21667	0.061	16.4	<b>0.214</b>	0.210
	-0.7	-19.1	19.1	15011	0.037	27.3	<b>0.188</b>	0.269
r. Lim st.Prijepolje	18.0	-4.1	18.4	13912	0.122	8.2	<b>0.215</b>	0.325
	-10.86	-5.96	12.39	6679.2	0.046	21.8	<b>0.181</b>	0.094
	-7.61	-8.57	11.46	5716.3	0.126	7.9	<b>0.189</b>	0.181
$Q_I$	-5.14	8.08	9.58	3992.4	0.103	9.6	<b>0.163</b>	0.254
	6.48	2.99	7.13	2213.2	0.115	8.7	0.108	0.308
	2.79	6.46	7.03	2152.0	0.207	4.8	0.117	0.362
r. Lim st.Prijepolje	-5.33	11.84	12.99	7337	0.103	9.7	<b>0.177</b>	0.087
	0.90	10.95	10.98	5249	0.080	12.4	<b>0.154</b>	0.161
	-6.17	6.96	9.30	3764	0.092	10.9	0.130	0.224
$Q_{II}$	-7.00	-4.00	8.07	2831	0.011	87.0	0.113	0.278
	6.43	3.77	7.45	2416	0.115	8.7	0.108	0.329
	-4.41	-1.43	4.64	936	0.011	87.0	<b>0.174</b>	0.078
r. Lim st.Prijepolje	3.10	0.71	3.18	441	0.276	3.6	0.099	0.132
	1.44	2.57	2.95	378	0.218	4.6	0.094	0.182
	1.97	-2.13	2.90	367	0.172	5.8	0.101	0.230
$Q_{III}$	2.74	-0.90	2.88	362	0.264	3.8	0.111	0.279
	-2.51	10.59	10.89	5156	0.172	5.8	0.111	0.065
	0.74	10.52	10.55	4841	0.115	8.7	0.117	0.127
r. Lim st.Prijepolje	-6.99	7.41	10.18	4512	0.046	21.8	0.124	0.187
	-8.82	-1.63	8.97	3498	0.138	7.3	0.110	0.240
	7.56	3.36	8.28	2981	0.207	4.8	0.105	0.290

**T-6 Stacionarnost AR ( $p$ ) procesa**

<i>stanica</i>		AR ( $p$ )	C(1)	C(2)	C(3)	C(4)	C(5)	C(6)	C(7)
st. Oršava	G	6	1.17	1.178	1.175	1.175	1.121	1.121	
	I	6	1.19	1.190	1.239	1.239	1.172	1.172	
	II	6	1.18	1.181	1.142	1.142	1.117	1.117	
	III	7	1.38	1.831	1.831	1.094	1.094	1.218	1.218
	IV	7	1.69	1.391	1.391	1.233	1.233	1.150	1.150
st. Bogojevo	G	6	9.52	1.198	1.198	1.239	1.239	1.129	
	I	6	9.52	1.198	1.198	1.239	1.239	1.129	
	II	6	5.28	5.283	1.281	1.281	1.207	1.207	
	III	7	1.47	1.226	1.226	1.256	1.256	1.210	1.210
	IV	6	4.41	1.258	1.258	1.145	1.211	1.211	
st. S.Mitrovica	G	6	1.73	1.736	1.371	1.371	1.169	1.169	
	I	7	5.94	1.250	1.250	1.131	1.131	1.243	1.243
	II	7	1.71	1.224	1.224	1.454	1.454	1.305	1.305
	III	7	1.28	1.337	1.337	1.115	1.115	1.179	1.179
	IV	7	1.19	1.206	1.206	1.102	1.102	1.127	1.127
st. Senta	G	7	2.04	1.607	1.607	1.159	1.159	1.150	1.150
	I	6	1.19	1.195	1.508	1.508	1.280	1.280	
	II	6	1.43	1.435	1.437	1.437	1.255	1.255	
	III	7	1.89	1.486	1.486	1.233	1.233	1.192	1.192
	IV	7	1.36	1.361	1.252	1.252	1.060	1.109	1.109
st. Lj.Most	G	7	3.91	2.194	1.040	1.167	1.167	1.210	1.210
	I	6	1.84	1.218	1.218	1.191	1.191	1.139	1.139
	II	6	14.3	1.270	1.270	1.422	1.422	1.252	1.252
	III	7	1.28	1.287	1.465	1.465	1.270	1.270	
	IV	7	1.85	1.232	1.232	1.288	1.288	1.268	1.268
st. Prijepolje	G		1.60	1.290	1.290	1.204	1.204	1.119	1.119
	I	6	1.28	1.282	1.150	1.150	1.252	1.252	
	II	6	1.72	1.309	1.309	1.540	1.540	1.470	1.470
	III	7	5.97	1.394	1.394	1.428	1.495	1.495	
	IV	7	1.37	1.371	1.346	1.346	1.152	1.186	1.186

### T-7 Parametri i verifikacija AR ( $p$ ) modela sezonskih proticaja

<i>reka</i>	<i>stanica</i>	<i>sezona</i>	AR ( $p$ )	<i>AIC</i>	$Q_{BL}$	$Q_{PM}$
r. Dunav	st. Oršava	I	6	-84.7	13.1	13.8
		II	6	-162.8	15.4	15.6
		III	7	-82.7	11.4	10.4
		IV	7	-148.1	9.36	8.97
r. Dunav	st. Bogojevo	I	6	-67.8	5.90	5.66
		II	6	-174.8	14.16	13.64
		III	7	-114.9	3.90	3.61
		IV	6	-212.3	5.03	4.45
r. Sava	st. S. Mitrovica	I	7	-78.3	12.65	11.49
		II	7	-102.7	15.73	13.90
		III	7	-99.9	14.52	13.80
		IV	7	-106.2	14.80	13.93
r. Tisa	st. Senta	I	6	-96.3	8.45	8.00
		II	6	-95.4	9.47	8.85
		III	7	-89.6	12.45	11.96
		IV	7	-159.7	14.17	14.15
r. V. Morava	st. Lj. Most	I	6	-148.4	13.51	12.47
		II	6	-124.5	1.876	1.218
		III	7	-153.2	15.77	15.12
		IV	7	-242.8	15.03	13.63
r. Lim	st. Prijepolje	I	6	-95.7	8.35	7.67
		II	6	-148.5	10.51	10.06
		III	7	-150.4	14.92	14.21
		IV	7	-195.1	12.39	11.15

## T-8 Učešće u varijansi serije srednjih sezonskih proticaja

<i>reka</i>	<i>stanica</i>	<i>sezona</i>	$\Phi_T$	$\Phi_P$	$\Phi_{DET}$	$\Phi_{STOCH}$	$\Phi_m$
r. Dunav	st. Oršava	I	0.000	0.333	0.338	0.269	<b>0.606</b>
		II	0.000	0.560	0.572	0.292	<b>0.863</b>
		III	0.000	0.390	0.393	0.283	<b>0.676</b>
		IV	0.000	0.451	0.452	0.449	<b>0.900</b>
r. Dunav	st. Bogojevo	I	0.000	0.343	0.343	0.227	<b>0.570</b>
		II	0.033	0.548	0.581	0.317	<b>0.897</b>
		III	0.060	0.420	0.480	0.356	<b>0.836</b>
		IV	0.000	0.525	0.547	0.425	<b>0.973</b>
r. Sava	st. S. Mitrovica	I	0.000	0.328	0.350	0.299	<b>0.648</b>
		II	0.000	0.278	0.315	0.411	<b>0.727</b>
		III	0.000	0.197	0.199	0.563	<b>0.763</b>
		IV	0.000	0.218	0.247	0.540	<b>0.787</b>
r. Tisa	st. Senta	I	0.046	0.412	0.458	0.264	<b>0.723</b>
		II	0.000	0.492	0.492	0.211	<b>0.703</b>
		III	0.000	0.318	0.324	0.291	<b>0.614</b>
		IV	0.000	0.467	0.473	0.360	<b>0.832</b>
r. V. Morava	st. Lj. Most	I	0.000	0.435	0.440	0.421	<b>0.861</b>
		II	0.000	0.330	0.330	0.444	<b>0.774</b>
		III	0.000	0.517	0.517	0.408	<b>0.924</b>
		IV	0.000	0.347	0.348	0.545	<b>0.893</b>
r. Lim	st. Prijepolje	I	0.000	0.441	0.450	0.232	<b>0.682</b>
		II	0.000	0.398	0.436	0.326	<b>0.761</b>
		III	0.000	0.447	0.496	0.294	<b>0.790</b>
		IV	0.000	0.401	0.413	0.432	<b>0.845</b>



## T-9 Kratkoročne projekcije godišnjih i sezonskih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi

reka/ stanica	Kratkoročna predviđanja sa poverenja 50% i 95%							
	$\phi$	$\psi$	GOD	IP <sub>50%</sub>	IP <sub>95%</sub>	Q	IP <sub>50%</sub>	IP <sub>95%</sub>
r. Dunav, st. Oršava	-0.900	0.900	2013	5372.9	5860.6	6116.2	6371.9	6859.6
Q	-1.251	0.987	2014	4251.9	4856.7	5173.7	5490.7	6095.6
Q <sub>I sezona</sub>	-1.212	1.123	2015	4420.5	5149.6	5531.7	5913.8	6642.9
r. Dunav, st. Oršava	-0.935	0.935	2013	5710.7	6740.0	7279.4	7818.8	8848.1
Q <sub>I sezona</sub>	-1.154	2.028	2014	2084.0	3923.5	4887.6	5851.7	7691.3
Q <sub>II sezona</sub>	-0.964	4.178	2015	1132.4	4772.8	6680.7	8588.7	12229.0
r. Dunav, st. Oršava	-1.652	1.652	2013	7061.1	8005.0	8499.7	8994.3	9938.2
Q <sub>II sezona</sub>	-1.365	4.095	2014	3391.8	5604.4	6764.1	7923.7	10136.3
Q <sub>III sezona</sub>	-0.378	8.697	2015	278.4	5070.5	7582.1	10093.7	14885.8
r. Dunav, st. Oršava	-0.900	0.900	2013	3663.8	4443.3	4851.9	5260.4	6039.9
Q <sub>III sezona</sub>	-1.251	2.062	2014	2520.7	3947.0	4694.5	5442.1	6868.4
Q <sub>IV sezona</sub>	-1.212	4.602	2015	921.5	3224.8	4809.6	6394.4	8697.7
r. Dunav, st. Oršava	-1.652	1.652	2013	2314.4	3311.5	3834.0	4356.6	5353.6
Q <sub>IV sezona</sub>	-1.365	4.095	2014	786.4	3123.7	4348.7	5573.7	7911.0
Q <sub>I sezona</sub>	-0.378	8.697	2015	-	401.3	3054.5	5707.6	11711.6
r. Dunav, st. Bogojovo	-0.719	0.719	2013	3359.6	3448.8	3495.5	3542.2	3631.4
Q	-0.985	1.502	2014	2465.9	2606.5	2680.1	2753.8	2894.4
Q <sub>I sezona</sub>	-0.900	2.897	2015	2326.9	2579.3	2711.6	2844.0	3096.4
r. Dunav, st. Bogojovo	-0.749	0.749	2013	2485.6	2701.6	2814.8	2928.0	3144.0
Q <sub>I sezona</sub>	-0.968	1.528	2014	2105.5	2446.9	2625.8	2804.7	3146.0
Q <sub>II sezona</sub>	-0.662	2.702	2015	1215.6	1794.2	2097.5	2400.8	2979.4
r. Dunav, st. Bogojovo	-1.778	1.778	2013	4029.8	4228.8	4333.2	4437.5	4636.6
Q <sub>II sezona</sub>	-1.847	5.007	2014	2303.3	2831.0	3107.6	3384.2	3911.9
Q <sub>III sezona</sub>	-1.389	13.799	2015	623.9	2070.4	2828.5	3586.6	5033.1
r. Dunav, st. Bogojovo	-1.627	1.627	2013	3230.3	3502.9	3645.8	3788.7	4061.4
Q <sub>III sezona</sub>	-2.042	4.688	2014	1989.4	2712.3	3091.1	3470.0	4192.8
Q <sub>IV sezona</sub>	-2.033	14.252	2015	890.9	2009.0	3140.8	4272.7	5390.8
r. Dunav, st. Bogojovo	-2.063	2.063	2013	2478.4	2944.1	3188.2	3432.3	3898.1
Q <sub>IV sezona</sub>	-2.489	6.747	2014	-	1137.6	1896.1	2654.6	4101.9
Q <sub>I sezona</sub>	-2.211	23.259	2015	-	190.2	2779.7	5369.3	8073.8
r. Sava, st. S.Mitrovica	-0.454	0.454	2013	1806.2	1829.0	1840.9	1852.9	1875.7
Q	-0.457	0.663	2014	1367.7	1394.3	1408.3	1422.2	1448.8
Q <sub>I sezona</sub>	-0.079	0.589	2015	1264.2	1293.5	1308.9	1324.2	1353.5
r. Sava, st. S.Mitrovica	-1.351	1.351	2013	1997.3	2038.1	2059.5	2080.9	2121.7
Q <sub>I sezona</sub>	-1.578	3.404	2014	1898.1	1990.3	2038.6	2087.0	2179.2
Q <sub>II sezona</sub>	-1.299	8.497	2015	858.7	1084.8	1203.2	1321.7	1547.7
r. Sava, st. S.Mitrovica	-1.688	1.688	2013	1629.8	1679.7	1705.9	1732.1	1782.1
Q <sub>II sezona</sub>	-2.114	4.964	2014	1398.8	1534.7	1605.9	1677.1	1813.0
Q <sub>III sezona</sub>	-1.993	15.334	2015	1192.0	1605.4	1822.0	2038.7	2452.1
r. Sava, st. S.Mitrovica	-1.110	1.110	2013	1870.7	1902.2	1918.8	1935.3	1966.9
Q <sub>III sezona</sub>	-1.394	2.625	2014	573.9	637.7	671.1	704.6	768.4
Q <sub>IV sezona</sub>	-1.229	6.119	2015	452.8	642.1	717.6	793.2	982.5
r. Sava, st. S.Mitrovica	-1.924	1.924	2013	1595.1	1650.5	1679.6	1708.6	1764.0
Q <sub>IV sezona</sub>	-2.138	5.841	2014	1074.8	1233.9	1317.3	1400.7	1559.9
Q <sub>I sezona</sub>	-1.636	17.830	2015	884.2	1239.7	1492.5	1745.3	2100.8
r. Tisa, st. Senta.	-0.904	0.904	2013	701.1	725.1	737.7	750.3	774.4
Q	-1.309	2.126	2014	717.0	761.9	785.4	808.9	853.8
Q <sub>I sezona</sub>	-1.315	4.916	2015	350.2	448.7	500.3	551.9	650.4
r. Tisa, st. Senta.	-1.302	1.302	2013	615.6	647.5	664.3	681.1	713.0
Q <sub>I sezona</sub>	-1.433	3.130	2014	728.8	797.7	833.7	869.8	938.7
Q <sub>II sezona</sub>	-1.160	7.343	2015	201.7	360.4	443.5	526.7	685.4
r. Tisa, st. Senta.	-1.232	1.232	2013	444.9	480.9	499.8	518.7	554.7
Q <sub>II sezona</sub>	-1.398	2.915	2014	681.4	756.8	796.3	835.8	911.2
Q <sub>III sezona</sub>	-1.175	6.767	2015	359.6	530.8	620.6	710.3	881.5
r. Tisa, st. Senta.	-1.001	1.001	2013	900.0	928.3	943.2	958.0	986.4
Q <sub>III sezona</sub>	-1.315	2.318	2014	725.0	779.4	807.9	836.4	890.8
Q <sub>IV sezona</sub>	-1.297	5.348	2015	287.8	432.5	495.5	558.4	703.1

reka/ stanica	Kratkoročna predviđanja sa poverenja 50% i 95%							
	$\phi$	$\psi$	GOD	IP <sub>50%</sub>	IP <sub>95%</sub>	Q	IP <sub>50%</sub>	IP <sub>95%</sub>
r. Tisa,	-1.578	1.578	2013	791.9	825.9	843.7	861.5	895.6
st. Senta.	-1.474	3.965	2014	582.0	661.8	703.6	745.4	825.2
Q <sub>IV sezona</sub>	-0.922	9.256	2015	130.1	344.9	442.6	540.3	755.2
r. V.Morava	-1.00	0.995	2013	177.2	193.2	201.7	210.1	226.2
st.Ljubatski Most	-0.22	1.212	2014	161.5	182.7	193.8	204.9	226.1
Q	0.58	1.838	2015	101.8	131.6	147.2	162.9	192.7
r. V.Morava	-1.51	1.510	2013	272.8	295.5	307.4	319.3	342.0
st.Ljubatski Most	-1.79	4.069	2014	125.6	181.5	210.7	240.0	295.8
Q <sub>I sezona</sub>	-1.50	11.059	2015	-	133.6	211.9	290.2	439.7
r. V.Morava	-1.99	1.989	2013	242.5	266.0	278.3	290.6	314.0
st.Ljubatski Most	-2.13	6.089	2014	285.5	353.9	389.7	425.5	493.9
Q <sub>I sezona</sub>	-1.42	18.368	2015	-	132.6	240.2	347.8	553.2
r. V.Morava	-0.79	0.792	2013	51.1	62.9	69.1	75.3	87.1
st.Ljubatski Most	-0.77	1.398	2014	51.1	68.6	77.8	87.0	104.5
Q <sub>III sezona</sub>	-0.56	2.268	2015	32.1	65.3	79.6	93.9	127.0
r. V.Morava	-1.98	1.981	2013	121.2	141.3	151.9	162.5	182.6
st.Ljubatski Most	-2.30	6.228	2014	5.6	65.6	97.1	128.5	188.6
Q <sub>IV sezona</sub>	-2.02	20.294	2015	-	-44.4	57.2	158.8	358.4
r. Lim	-1.039	1.039	2013	63.5	70.5	74.1	77.8	84.7
st.Prijepolje	-1.328	1.408	2014	69.9	79.7	84.8	89.9	99.6
Q	-1.184	2.133	2015	52.2	66.3	73.8	81.2	95.4
r. Lim	-1.136	1.136	2013	87.8	96.8	101.6	106.3	115.4
st.Prijepolje	-1.342	2.632	2014	55.8	73.9	83.5	93.0	111.2
Q <sub>I sezona</sub>	-1.080	5.904	2015	4.8	44.6	65.4	86.3	126.0
r. Lim	-1.484	1.484	2013	77.9	89.5	95.5	101.6	113.1
st.Prijepolje	-1.783	3.985	2014	61.7	89.8	104.6	119.3	147.5
Q <sub>I sezona</sub>	-1.516	10.821	2015	54.5	129.7	169.1	208.5	283.7
r. Lim	-1.485	1.485	2013	39.8	46.2	49.5	52.8	59.2
st.Prijepolje	-1.309	3.515	2014	-0.4	13.6	20.9	28.2	42.2
Q <sub>III sezona</sub>	-0.871	7.678	2015	-59.5	9.2	25.2	41.3	110.0
r. Lim	-1.936	1.936	2013	27.4	42.1	49.9	57.6	72.4
st.Prijepolje	-2.220	5.968	2014	64.5	107.6	130.1	152.7	195.7
Q <sub>IV sezona</sub>	-1.880	18.874	2015	-	-35.3	35.4	106.1	143.1

### T-10 Ažuriranje kratkoročnih projekcija godišnjih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi

<i>reka/ stanica</i>	<i>Ažuriranje kratkoročna predviđanja sa intervalima poverenja 50% i 95%</i>							
	$\phi$	$\psi$	<i>GOD</i>	$IP_{50\%}$	$IP_{95\%}$	$Q$	$IP_{50\%}$	$IP_{95\%}$
r. Dunav, st. Oršava	-0.900	0.900	2013			<b>6301</b>		
$Q$	-1.251	0.987	2014	4069	4674	4991	5913	4069
	-1.212	1.123	2015	4213	4942	5324	6435	4213
r. Dunav, st. Bogojevo	-0.719	0.719	2013			<b>3398</b>		
$Q$	-0.985	1.502	2014	2612	2752	2826	2900	3040
	-0.900	2.897	2015	2608	2861	2993	3125	3378
r. Sava, st. S.Mitrovica	-0.749	0.749	2013			<b>1792</b>		
$Q$	-0.968	1.528	2014	1400	1427	1441	1455	1482
	-0.662	2.702	2015	1293	1323	1338	1353	1383
r. Tisa, st. Senta.	-1.778	1.778	2013			<b>741.4</b>		
$Q$	-1.847	5.007	2014	709.1	754.0	777.6	801.1	846.0
	-1.389	13.799	2015	332.1	430.6	482.2	533.8	632.3
r. V.Morava st.Ljubatski Most	-1.627	1.627	2013			<b>167.8</b>		
$Q$	-2.042	4.688	2014	202.52	223.72	234.8	267.14	202.52
	-2.033	14.252	2015	164.01	193.82	209.4	254.86	164.01
r. Lim st.Prijepolje	-2.063	2.063	2013			<b>89.3</b>		
$Q$	-2.489	6.747	2014	48.5	58.2	63.3	68.5	78.2
	-2.211	23.259	2015	19.7	33.9	41.3	48.8	63.0

## T-11 Verifikacija modeliranih serija korišćenjem modifikovane TIPS metode

<i>reka/ stanica</i>	<i>sezona/ godina</i>	$Q$			$\hat{Q}$		
		<i>q<sub>25%</sub></i>	<i>q<sub>50%</sub></i>	<i>q<sub>75%</sub></i>	<i>q<sub>25%</sub></i>	<i>q<sub>50%</sub></i>	<i>q<sub>75%</sub></i>
r. Dunav, st. Oršava	I	4853.0	5407.0	6010.0	4800.8	5395.0	6079.0
	II	4991.5	5869.0	6495.8	5321.0	5819.0	6599.3
	III	5989.5	6986.0	8156.3	5902.5	6892.0	8040.5
	IV	3674.3	4422.0	4970.8	3731.5	4424.0	6081.5
	God.	3415.0	4112.0	5381.0	3643.8	4291.0	5300.0
r. Dunav, st. Bogojevo	I	2477.3	2803.0	3168.3	2473.2	2819.5	3135.1
	II	2101.8	2459.0	2877.3	2143.5	2521.0	2844.8
	III	2895.3	3493.0	4001.8	2877.3	3475.0	4071.0
	IV	2500.0	2963.0	3478.3	2542.5	2933.0	3416.5
	IV	1827.8	2059.0	2602.0	1826.0	2062.0	2590.3
r. Sava, st. S. Mitrovica	I	1291.8	1492.0	1709.3	1338.0	1507.2	1693.4
	II	1521.3	1870.0	2222.5	1605.8	1886.0	2104.3
	III	1555.5	1838.0	2303.8	1547.3	1894.0	2320.5
	IV	557.5	741.0	1922.8	571.5	777.0	1917.5
	God.	1094.8	1364.0	1906.3	1063.0	1363.0	1845.5
r. Tisa st. Senta	I	611.0	768.0	953.5	649.8	776.0	986.5
	II	624.3	867.0	1106.5	628.8	847.0	1086.3
	III	816.3	1187.0	1435.0	897.0	1172.0	1459.5
	IV	366.0	495.0	732.8	366.0	495.0	732.8
	God.	336.0	472.0	691.0	363.5	480.0	726.8
r. V. Morava st. Ljubičevski M.	I	176.3	212.0	279.0	185.0	218.0	283.5
	II	223.0	303.0	437.3	238.3	307.0	445.5
	III	68.5	96.0	129.8	80.3	96.0	137.8
	IV	87.0	119.0	200.3	83.5	128.0	206.0
	God.	219.5	305.0	438.8	260.0	337.0	413.3
r. Lim, st. Prijepolje	I	65.3	75.1	88.8	65.4	75.0	88.8
	II	56.8	80.3	102.8	63.5	82.2	97.8
	III	100.0	119.8	140.0	103.3	122.1	139.5
	IV	23.0	27.7	33.0	21.0	28.3	33.8
	God.	48.5	69.8	90.8	48.5	71.2	92.8

## T-12 Test normalnosti greške modeliranja modifikovanog TIPS modela

### (1) Jarque-Bera test

<i>reka</i>	<i>stanica</i>		<i>JB test</i>			<i>Greška</i>	
			<i>P</i>	<i>JB</i>	<i>JB<sub>crit</sub>(<math>\chi_{0.05}^2</math>)</i>	<i>E(<math>\epsilon</math>)</i>	<i><math>\sigma(\epsilon)</math></i>
r. Dunav	st. Oršava	god	0.876	0.010	5.991	-10.2	281.9
		I	0.610	0.905	5.991	-41.0	584.6
		II	0.736	0.586	5.991	26.8	380.0
		III	0.638	0.847	5.991	-17.0	450.5
		IV	0.337	1.591	5.991	3.3	401.5
r. Dunav	st. Bogojevo	god	0.371	1.491	5.991	0.125	550.7
		I	0.180	2.489	5.991	17.9	284.2
		II	0.203	2.322	5.991	19.7	185.5
		III	0.230	2.146	5.991	-7.4	270.5
		IV	<b>0.015</b>	<b>10.34</b>	5.991	5.5	124.0
r. Sava	st. S. Mitovica	god	0.876	0.129	5.991	-6.1	286.5
		I	0.653	0.728	5.991	5.2	256.6
		II	0.317	1.718	5.991	-3.4	230.5
		III	<b>0.025</b>	<b>7.931</b>	5.991	-3.5	137.5
		IV	0.876	0.039	5.991	10.2	263.9
r. Tisa	st. Senta	god	0.823	0.348	5.991	-17.0	239.3
		I	0.006	<b>20.62</b>	5.991	-1.7	125.5
		II	0.308	1.762	5.991	-18.8	170.7
		III	0.066	5.211	5.991	-15.9	135.6
		IV	0.876	0.173	5.991	-1.4	73.6
r. V. Morava	st. L. Most	god	0.470	1.197	5.991	-2.6	82.9
		I	0.856	0.27	5.991	-2.1	29.7
		II	<b>0.022</b>	<b>8.4</b>	5.991	0.2	22.6
		III	<b>0.006</b>	<b>32.2</b>	5.991	0.9	19.2
		IV	0.364	1.516	5.991	-2.4	54.8
r. Lim	st. Prijepolje	god	0.480	1.158	5.991	-2.61	82.9
		I	0.086	3.82	5.991	-2.13	29.7
		II	0.876	0.1	5.991	0.18	22.6
		III	<b>0.020</b>	<b>10.4</b>	5.991	0.86	19.2
		IV	0.074	4.191	5.991	-2.38	54.8

**T-12 Test normalnosti greške modeliranja modifikovanog TIPS modela**

**(2) PPCC test**

<i>Reka</i>	<i>Stanica</i>	$r(\varepsilon)$	$r(\varepsilon I)$	$r(\varepsilon II)$	$r(\varepsilon III)$	$r(\varepsilon IV)$
r. Dunav	st. Oršava	0.995	0.992	0.993	0.997	0.996
r. Dunav	st. Bogojevo	0.991	0.986	0.990	0.991	<b>0.977</b>
r. Sava	st. Sremska Mitovica	0.996	0.994	0.993	<b>0.977</b>	0.998
r. Tisa	st. Senta	0.990	<b>0.970</b>	0.984	0.984	0.997
r. V. Morava	st. Lubičevski Most	0.994	0.996	<b>0.980</b>	<b>0.961</b>	0.994
r. Lim	st. Prijepolje	0.988	0.987	0.996	<b>0.980</b>	0.986

### T-13 Analiza osjetljivosti mesečnih i godišnjih proticaja

#### Ljubičevski Most

<i>meseč/godina</i>	$\beta_1(NAO)$	$\beta_2(P)$	$\beta_3(T)$	$\Phi$	$\sigma_\varepsilon^2$
Januar	-0.245±0.262	-0.022±0.262	+0.180±0.257	0.072	0.960
Februar	-0.248±0.242	+0.489±0.241	+0.239±0.201	0.423	0.596
Mart	-0.186±0.238	+0.394±0.245	-0.104±0.233	0.306	0.717
april	-0.059±0.229	+0.266±0.247	-0.279±0.246	0.206	0.820
Maj	+0.122±0.204	+0.558±0.239	-0.096±0.240	0.387	0.633
Jun	+0.062±0.228	+0.514±0.258	-0.028±0.269	0.288	0.735
Jul	+0.078±0.230	+0.528±0.226	-0.170±0.246	0.382	0.638
Avgust	-0.117±0.213	+0.313±0.267	-0.314±0.268	0.306	0.706
Septembar	+0.025±0.226	+0.448±0.265	-0.182±0.255	0.316	0.706
Oktobar	-0.061±0.253	+0.370±0.252	-0.129±0.244	0.187	0.839
Novembar	+0.097±0.212	+0.592±0.21	-0.029±0.211	0.350	0.672
Decembar	-0.210±0.241	+0.204±0.241	+0.175±0.238	0.136	0.892
Godina	-0.025±0.328	+1.226±0.349	-0.285±0.248	0.608	0.766

#### Prijepolje

<i>meseč/godina</i>	$\beta_1(NAO)$	$\beta_2(P)$	$\beta_3(T)$	$\Phi$	$\sigma_\varepsilon^2$
Januar	+0.228±0.101	-0.101±0.229	-0.101±0.228	0.218	0.808
Februar	+0.180±0.482	+0.482±0.180	+0.482±0.152	0.656	0.355
Mart	+0.227±0.380	+0.380±0.236	+0.380±0.225	0.318	0.705
april	+0.243±0.146	-0.146±0.312	-0.146±0.313	0.126	0.902
Maj	+0.243±0.146	-0.146±0.312	-0.146±0.313	0.106	0.923
Jun	+0.253±0.364	-0.364±0.277	-0.364±0.291	0.133	0.895
Jul	+0.231±0.528	+0.528±0.246	+0.528±0.226	0.401	0.638
Avgust	+0.219±0.272	-0.272±0.206	-0.272±0.226	0.435	0.591
Septembar	+0.182±0.338	-0.338±0.198	-0.338±0.192	0.555	0.459
Oktobar	+0.223±0.085	-0.085±0.214	-0.085±0.203	0.430	0.589
Novembar	+0.192±0.153	+0.153±0.194	+0.153±0.184	0.502	0.514
Decembar	+0.163±0.111	+0.111±0.174	+0.111±0.165	0.646	0.366
Godina	-0.045±0.053	+1.112±0.326	-0.053±0.210	0.502	0.718

## T-14 Periodograma srednjih godišnjih i sezonskih proticaja u metodi SDTS

reka/ stanica	Periodogram – najveće periode sa svojim karakteristikama							
	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$I_i$	$f_i$	$T_i$	$g_i$	$RCP_i$
r. V.Morava	-19.8	19.5	27.8	31611	0.049	20.5	0.161	0.078
st.Ljubatski Most	-22.5	7.7	23.8	23212	0.098	10.3	0.155	0.144
$Q_{sr.god.}$	22.4	-6.5	23.4	22360	0.122	8.2	0.158	0.210
$g_{cr}=0.154$	-14.4	-16.7	22.0	19908	0.146	6.8	0.167	0.271
	-20.2	-4.1	20.6	17373	0.061	16.4	0.175	0.329
	2.9	-20.0	20.2	16802	0.159	6.3	0.127	0.385
	0.4	-18.5	18.5	14055	0.073	13.7	0.134	0.437
	5.1	15.8	16.6	11237	0.207	4.8	0.121	0.483
	-1.1	-16.5	16.5	11173	0.037	27.3	0.121	0.530
	8.3	-13.2	15.6	9939	0.280	3.6	0.123	0.573
r. Lim	-5.1	6.1	7.9	2563	0.049	20.5	0.279	0.164
st.Prijepolje	3.6	-3.6	5.0	1043	0.122	8.2	0.157	0.269
$Q_{sr.god.}$	0.8	4.6	4.6	884	0.110	9.1	0.158	0.365
$g_{cr}=0.154$	-3.8	-0.8	3.9	609	0.073	13.7	0.129	0.445
	-2.8	0.9	3.0	361	0.098	10.3	0.088	0.507
	2.5	0.3	2.5	253	0.085	11.7	0.068	0.558
	-2.3	-0.6	2.4	236	0.159	6.3	0.068	0.608
	-1.3	1.3	1.9	144	0.134	7.5	0.044	0.647
	1.1	1.3	1.7	125	0.207	4.8	0.040	0.683
	1.1	-0.8	1.3	74	0.024	41.0	0.025	0.711

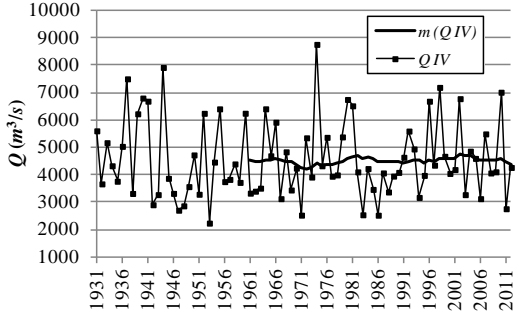
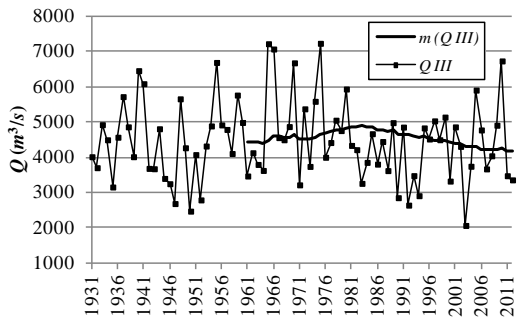
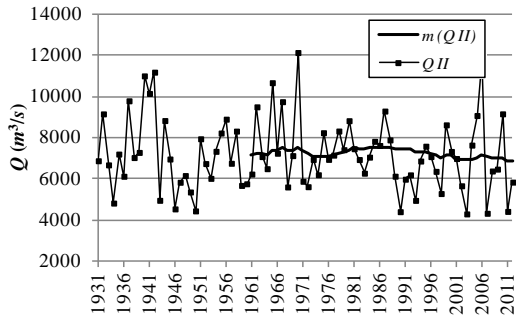
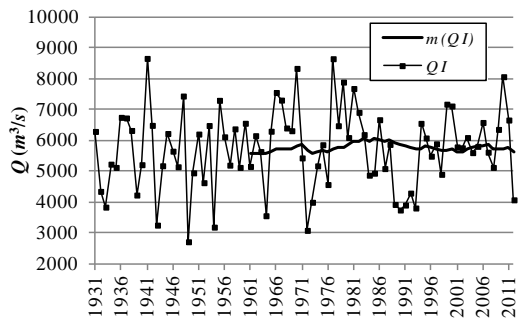
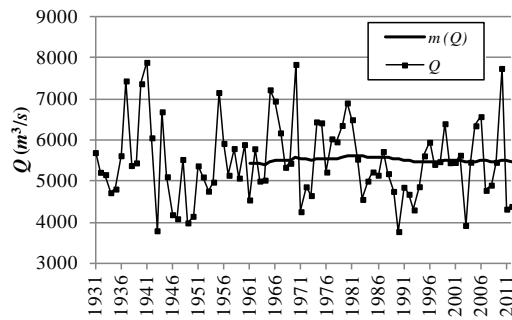


# **Grafički prilozi**

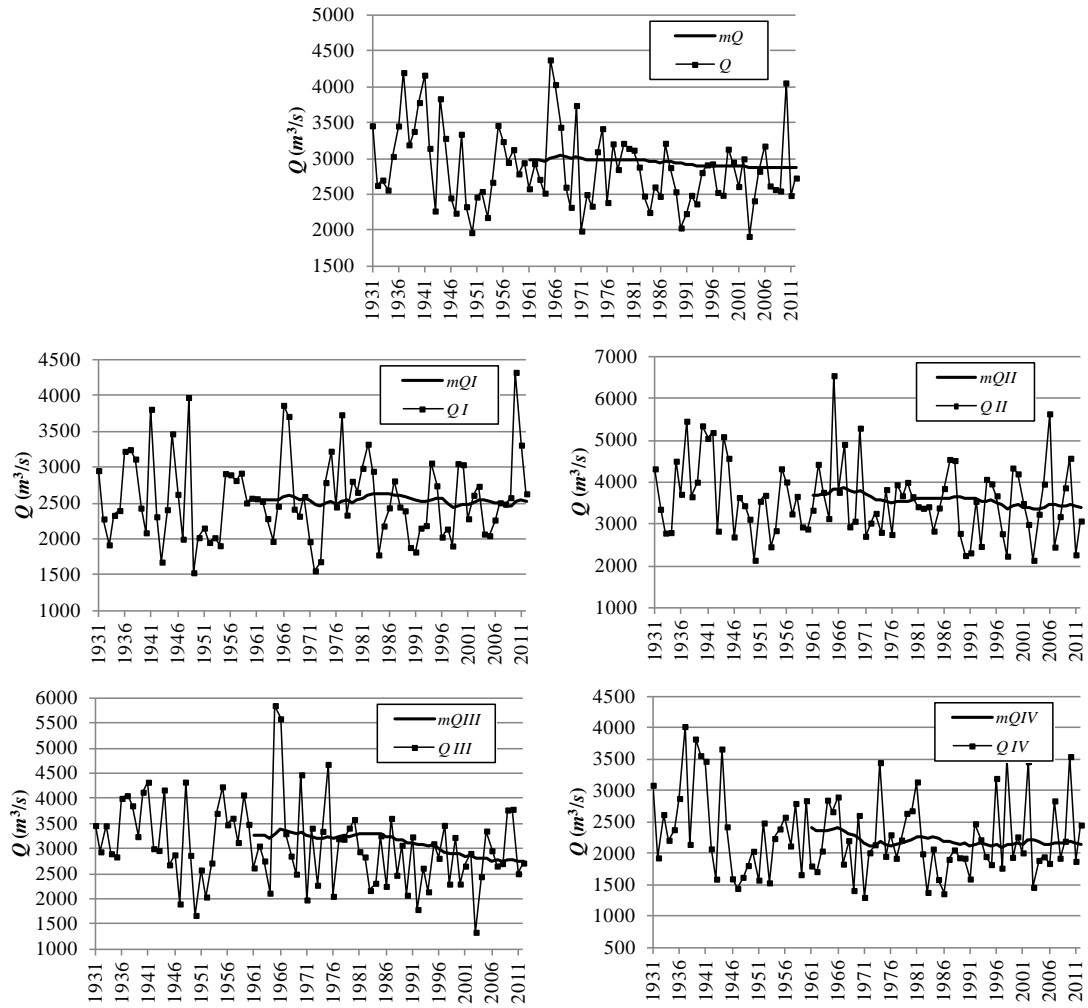
## G-1 Prikaz vremenskih serija srednjih godišnjih i sezonskih proticaja sa pokretnim sredinama

(pokretne sredine  $m_Q$  su vezane za kraj perioda osrednjavanja)

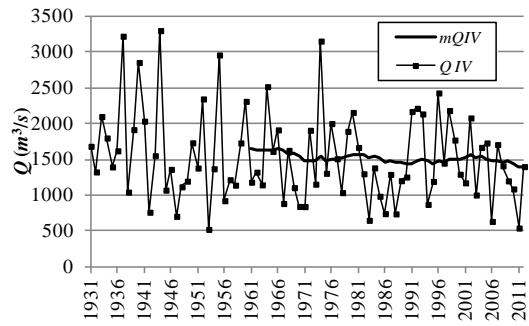
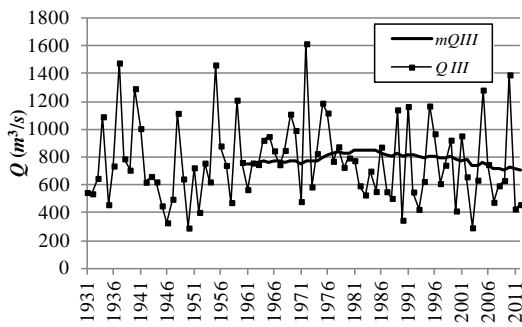
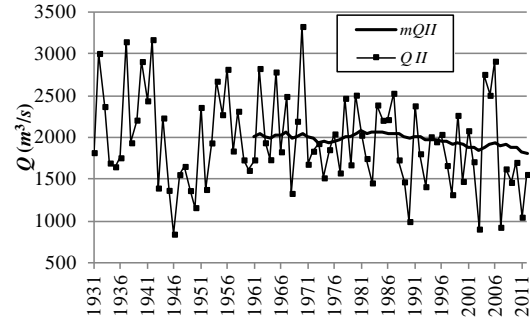
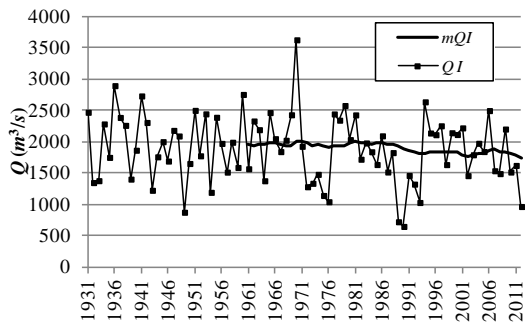
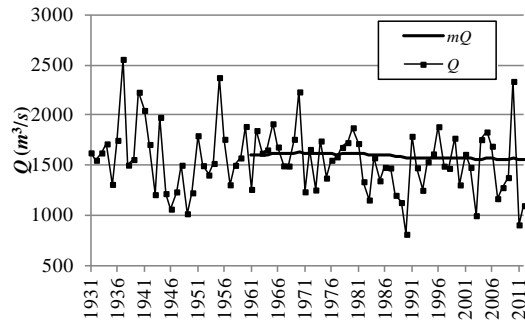
### G1.1 r. Dunav, st. Oršava



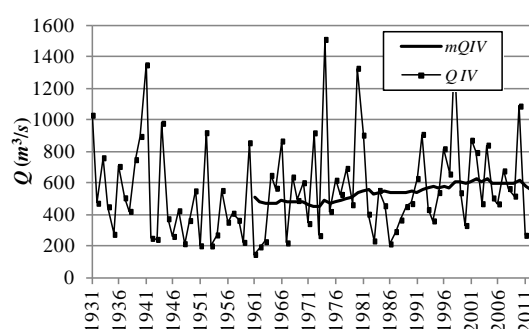
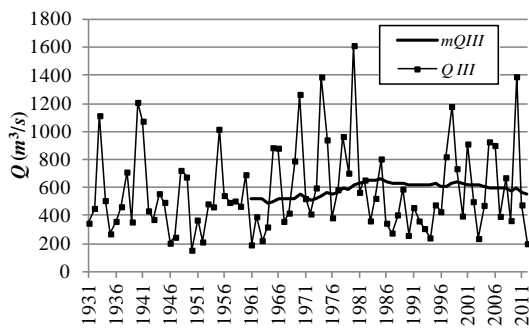
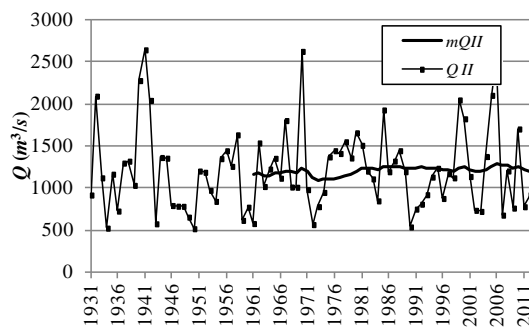
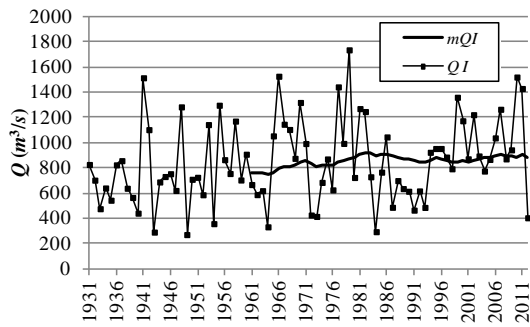
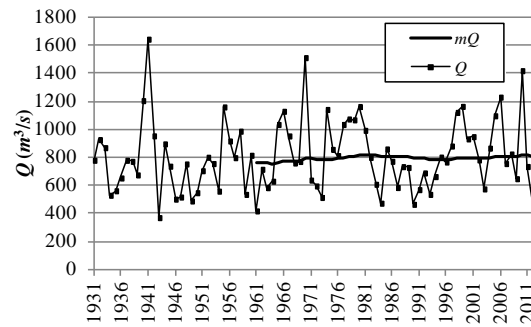
G1.2 r. Dunav, st. Bogojevo



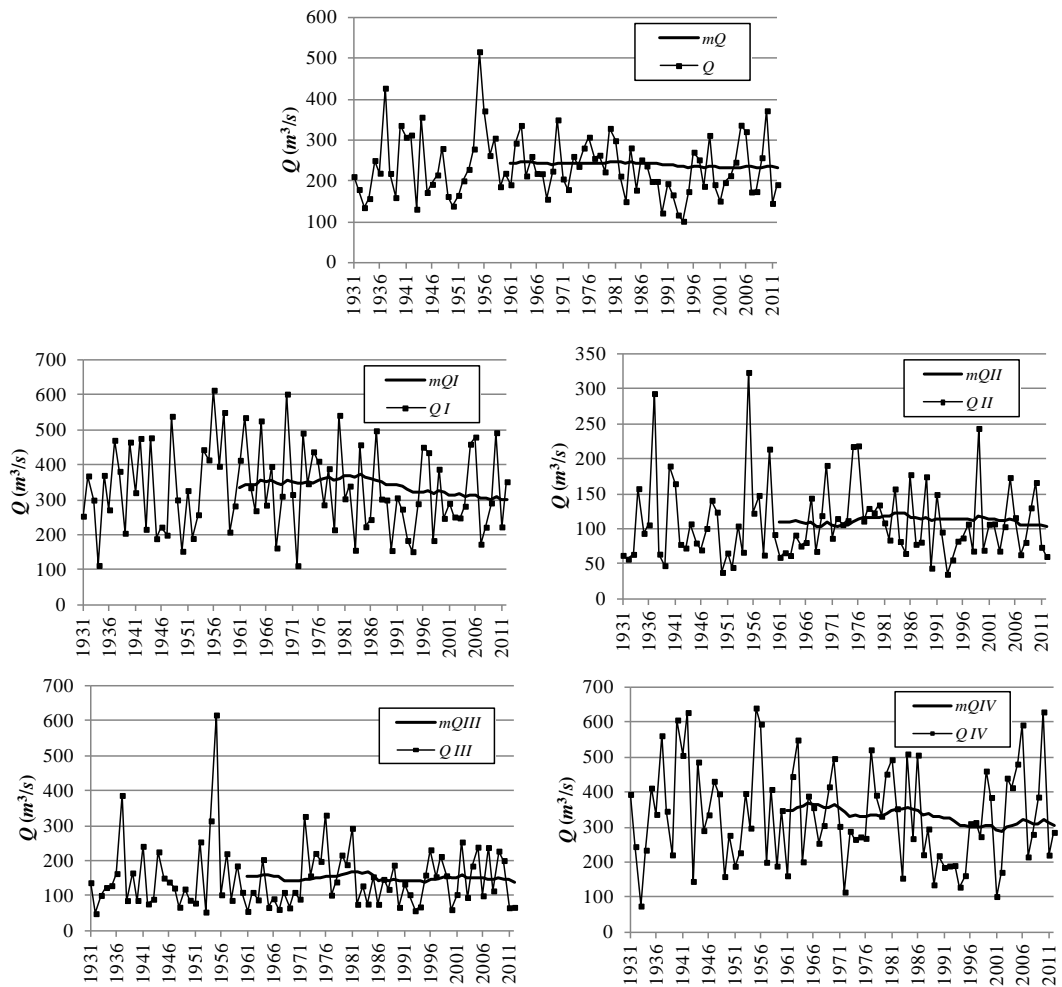
G1.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



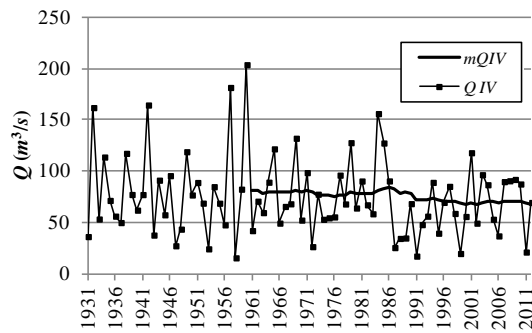
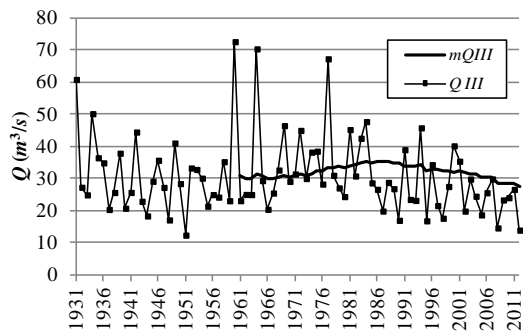
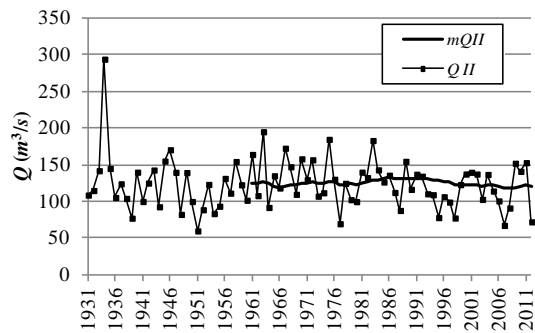
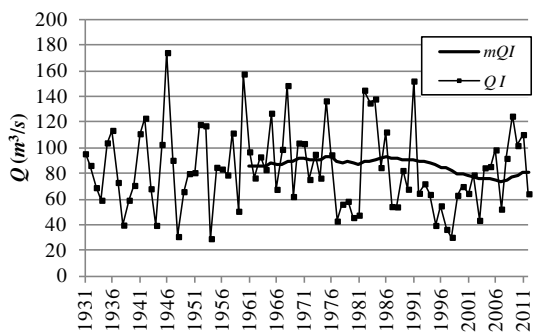
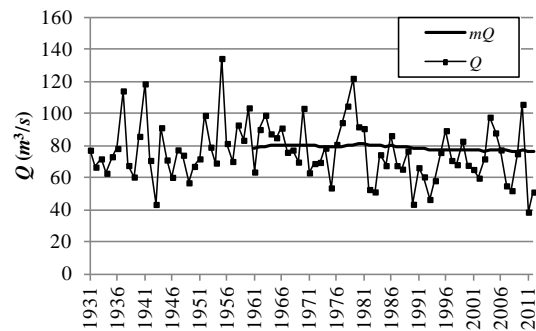
G1.4 r. Tisa, st. Senta



G1.5 r.Velika Morava, st.Ljubičevski Most

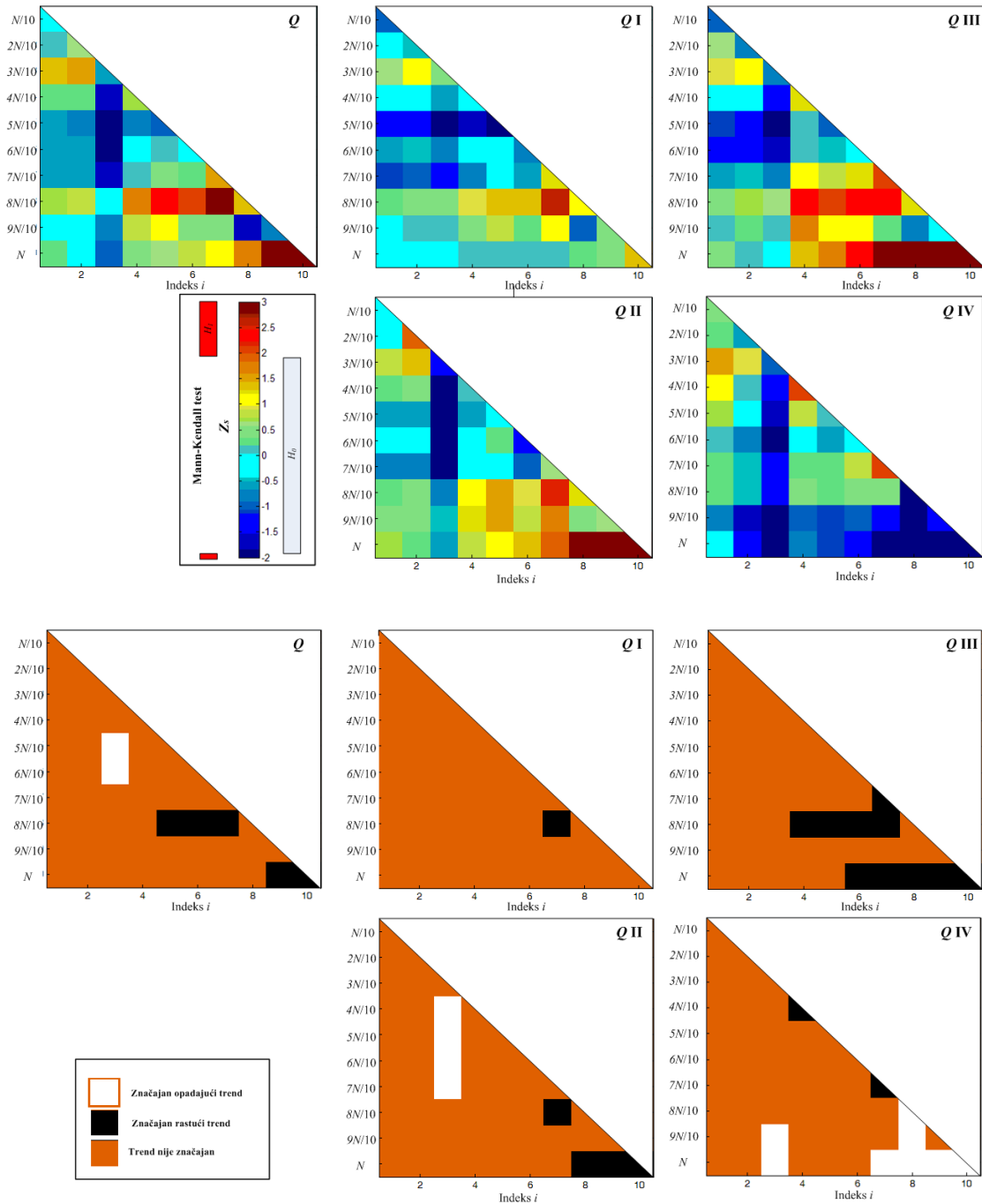


G1.6 r. Lim, st. Prijepolje



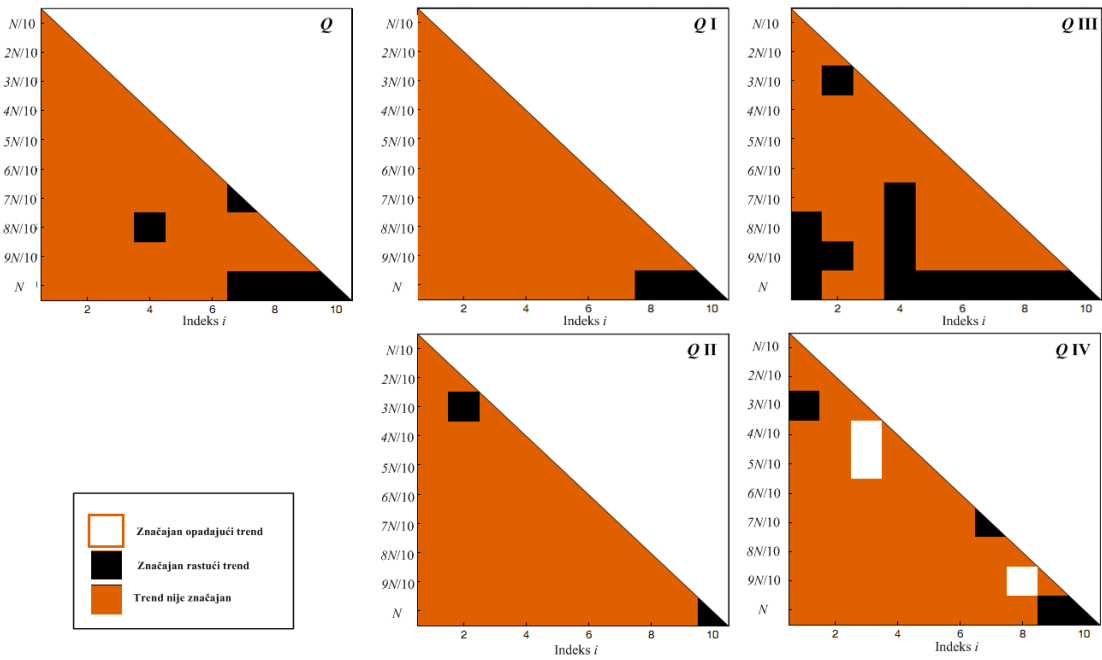
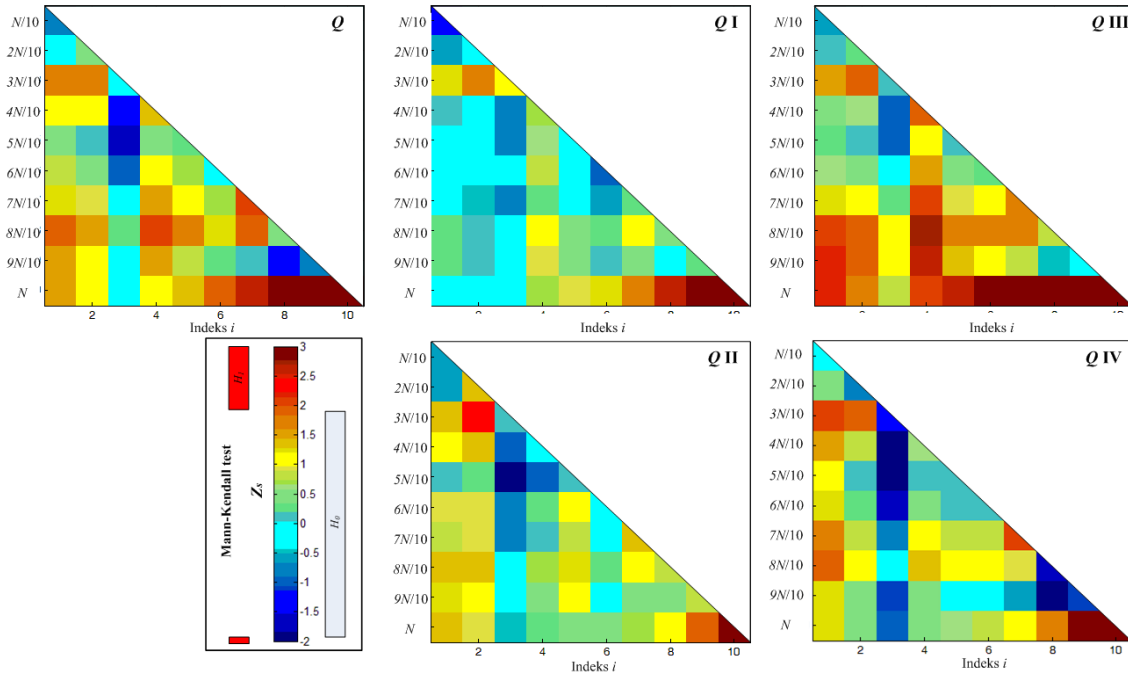
## G-2 Multi-vremenska analiza trenda godišnjih i sezonskih proticaja korišćenjem testa Mann-Kendall

### G2.1 r.Dunav, st.Oršava

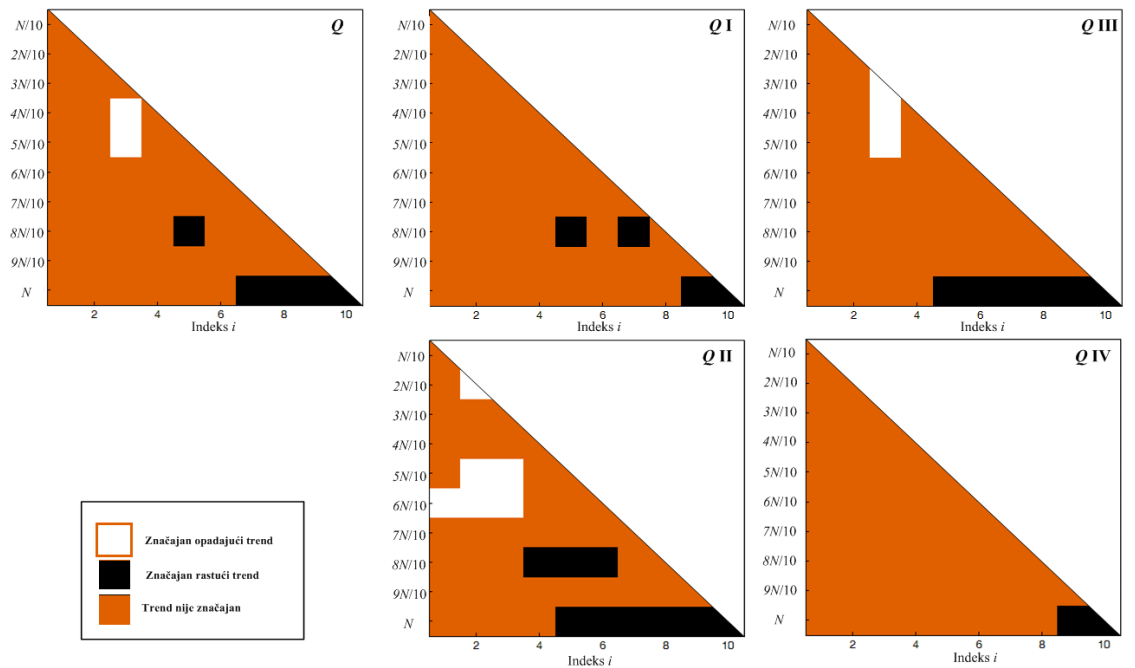
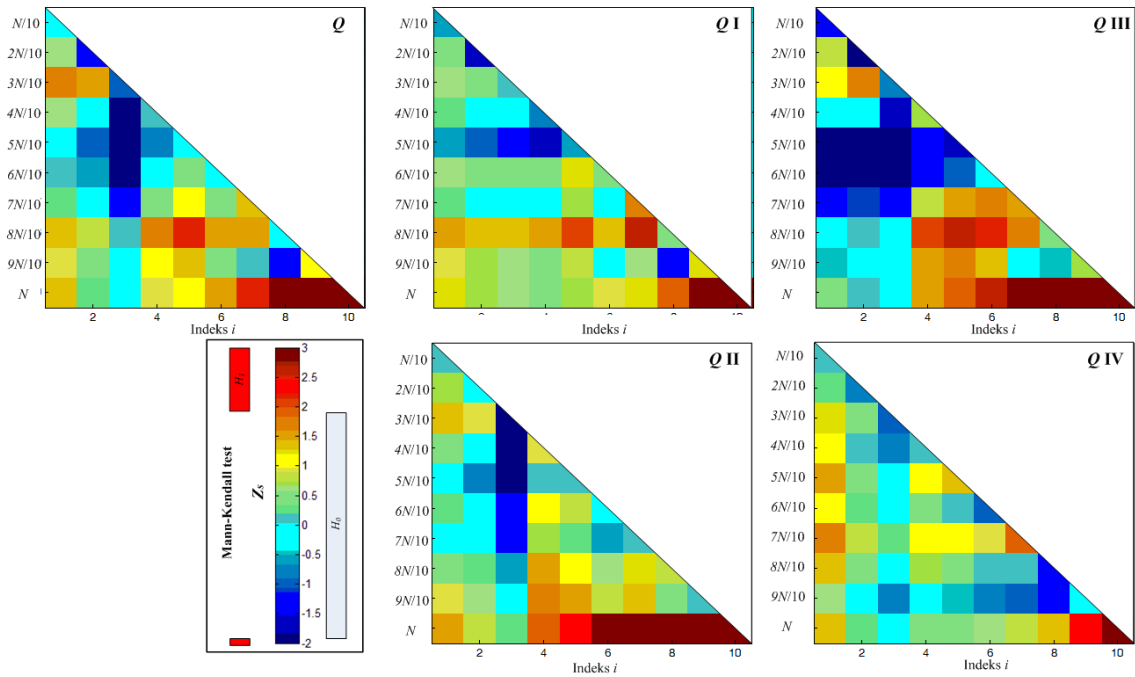




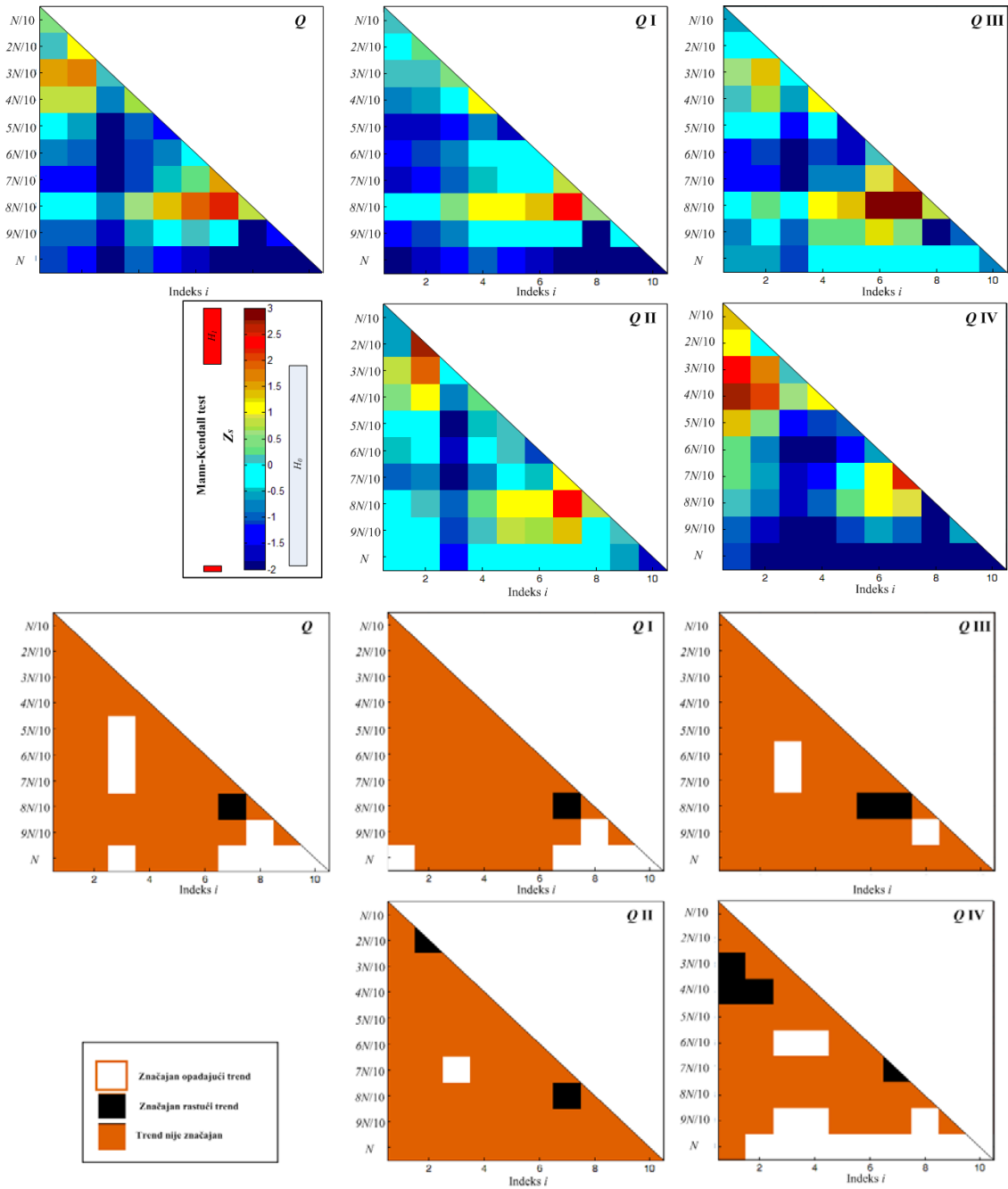
G2.2 r. Dunav, st. Bogojevo



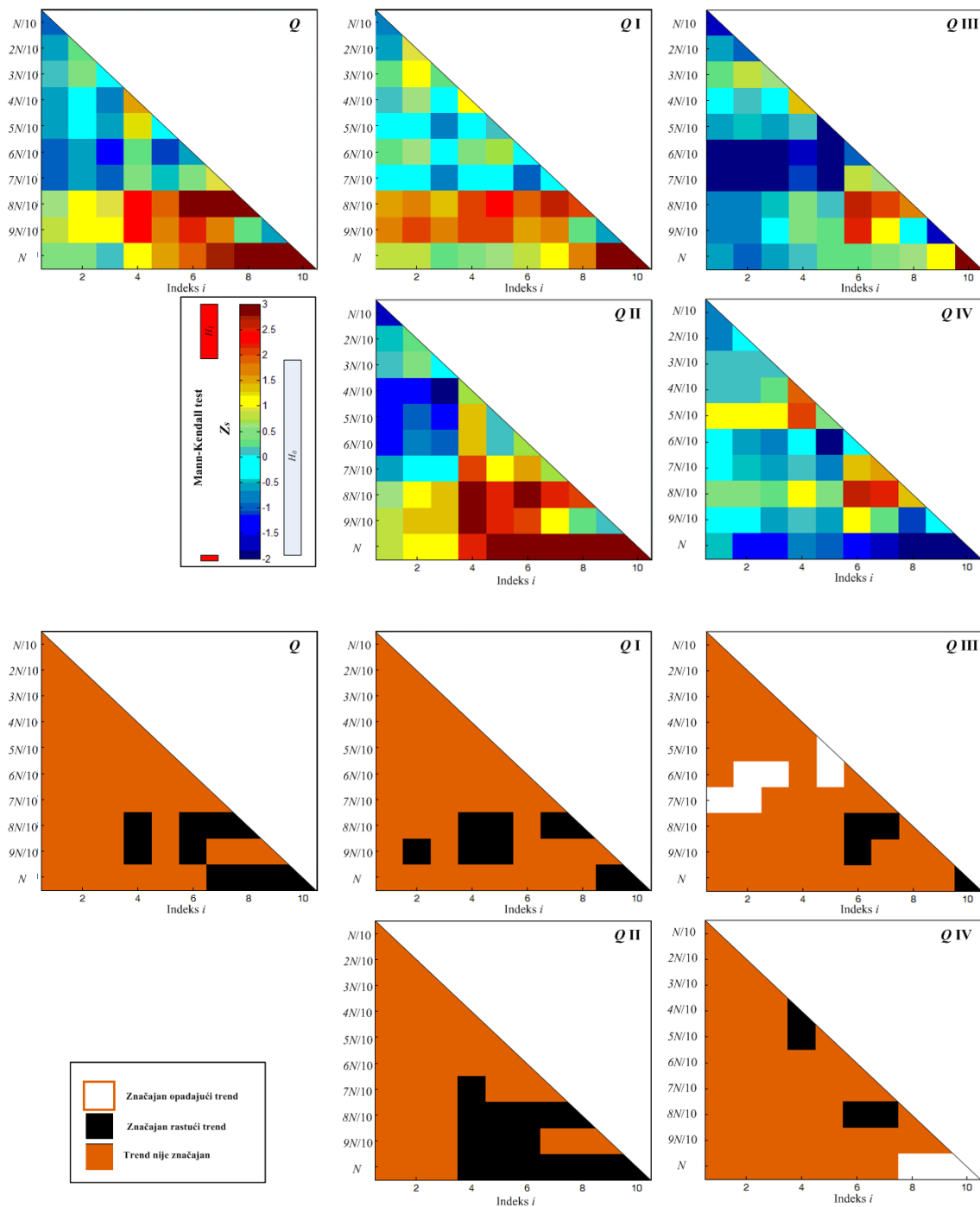
G2.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



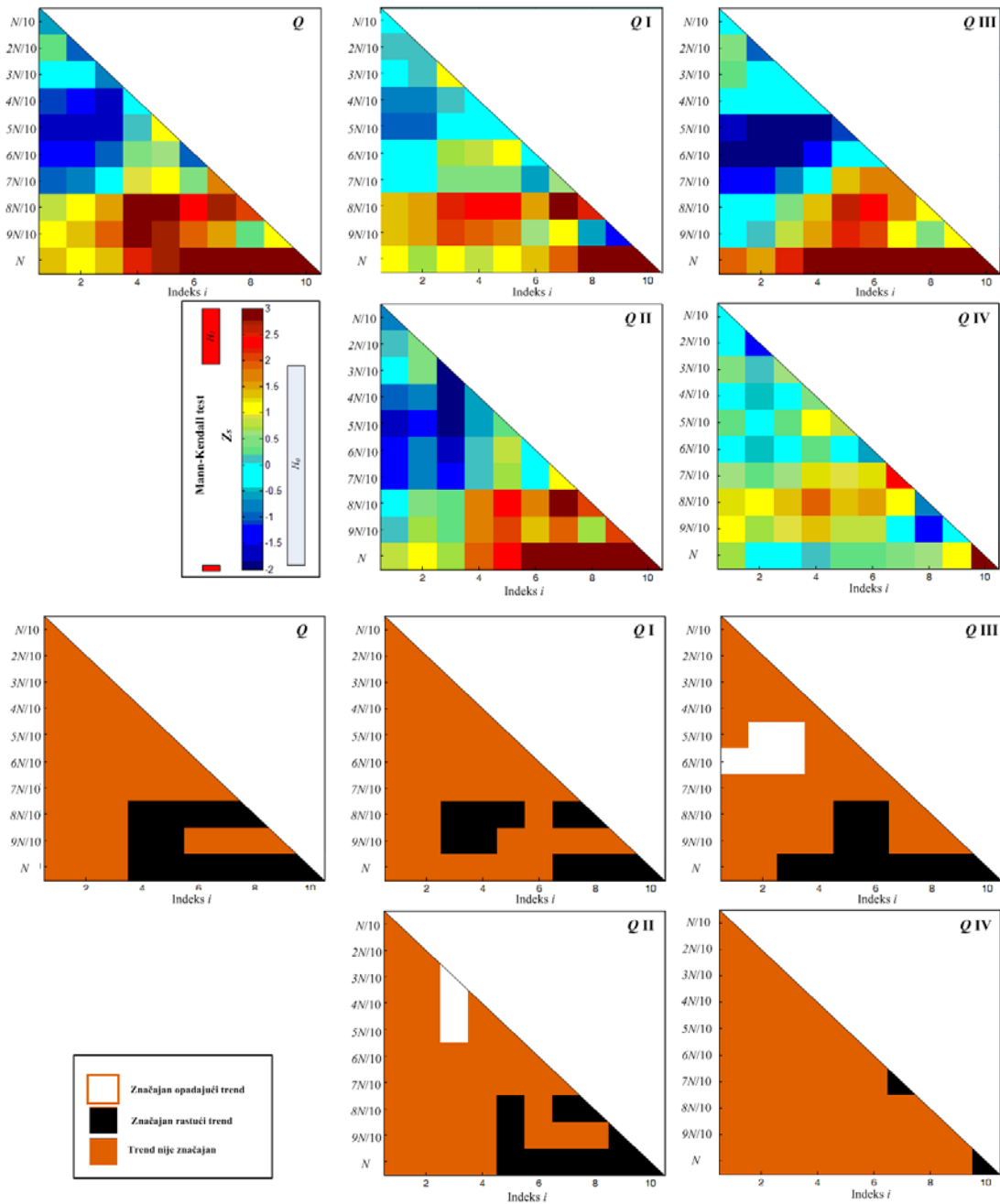
G2.4 r. Tisa, st. Senta



G2.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

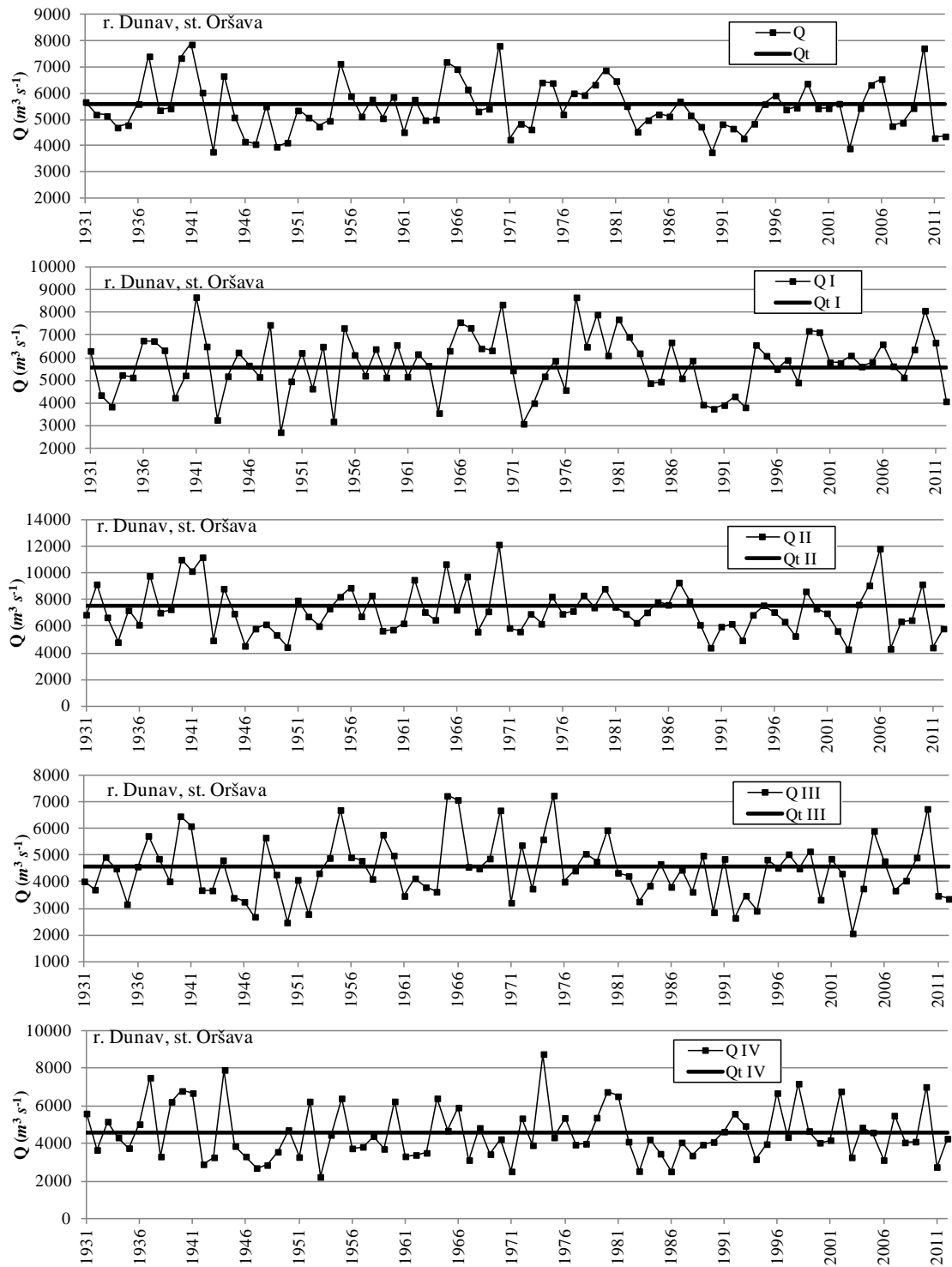


G2.6 r. Lim, st. Prijepolje

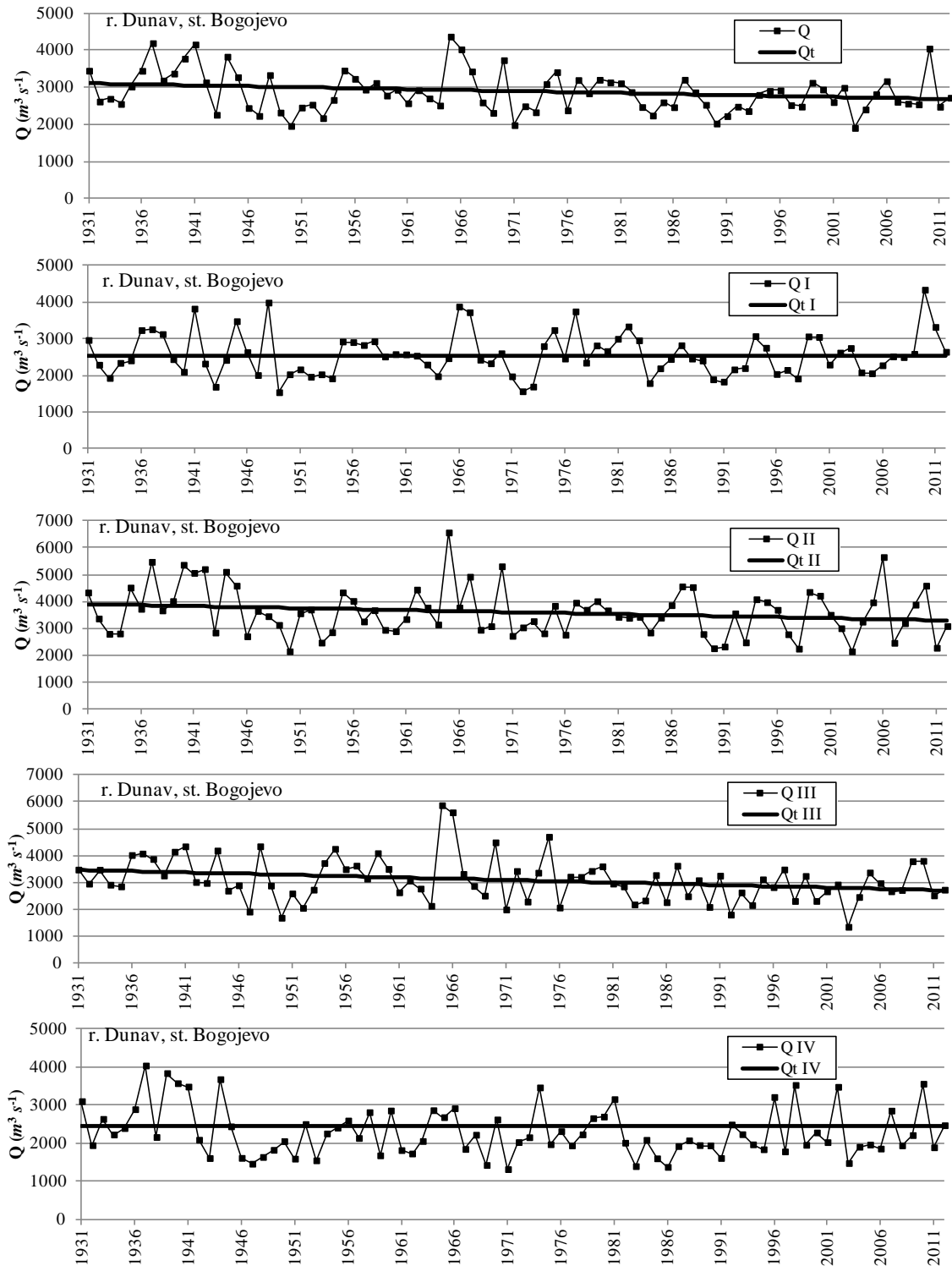


### G-3 Linearni trend srednjih godišnjih i sezonskih proticaja

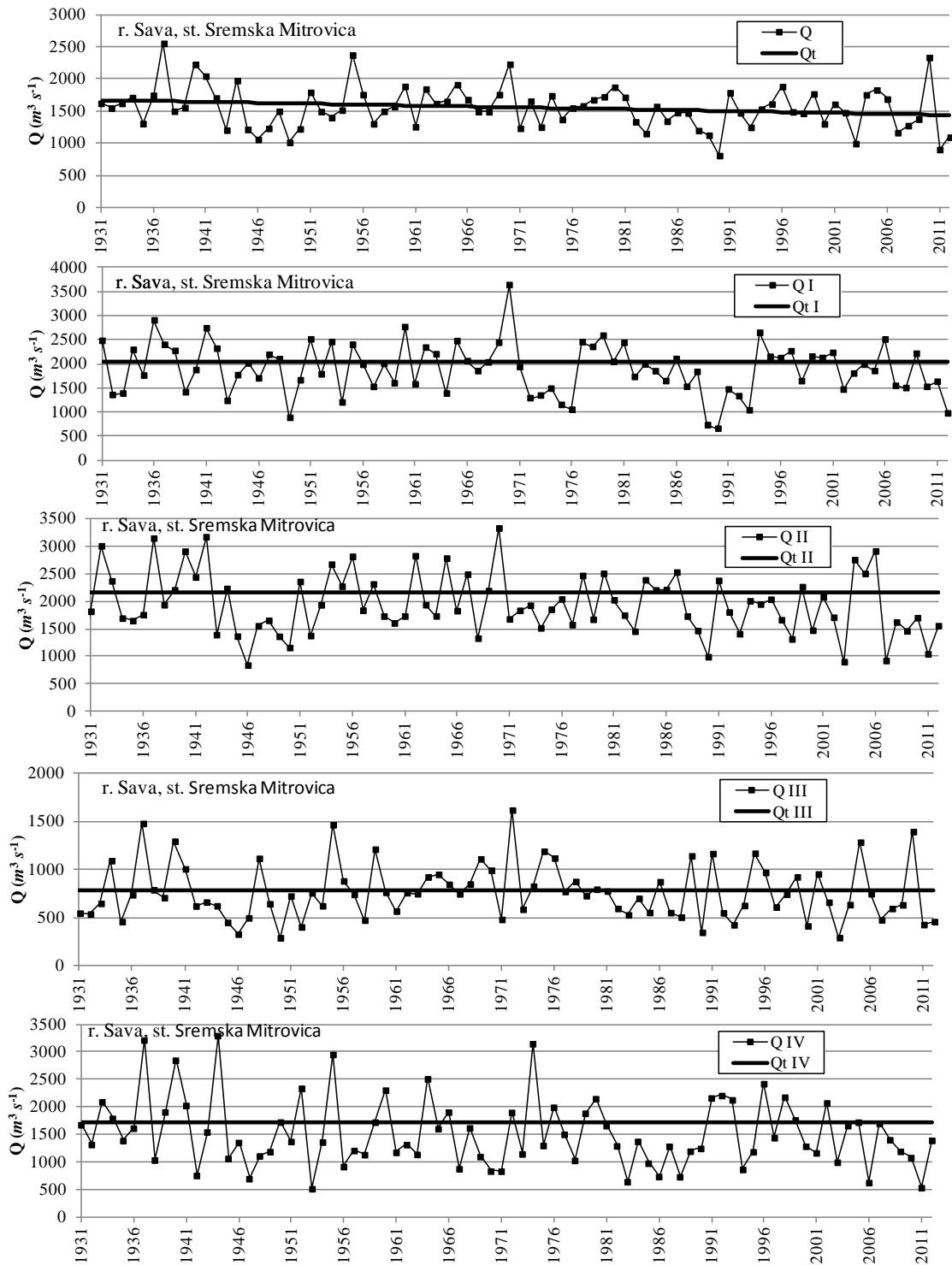
G3.1 r. Dunav, st. Oršava



G3.2 r. Dunav, st. Bogojevo

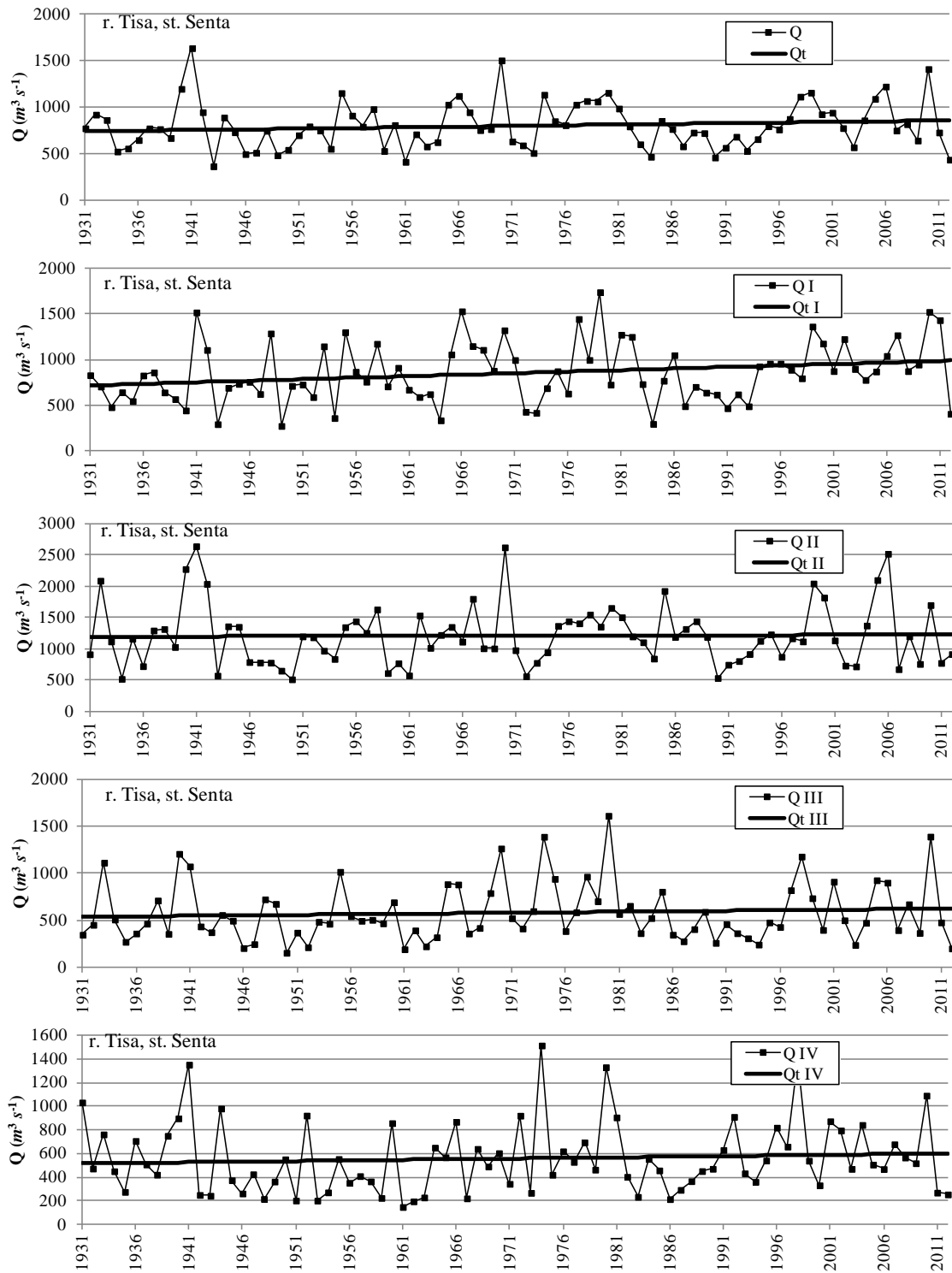


G3.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica

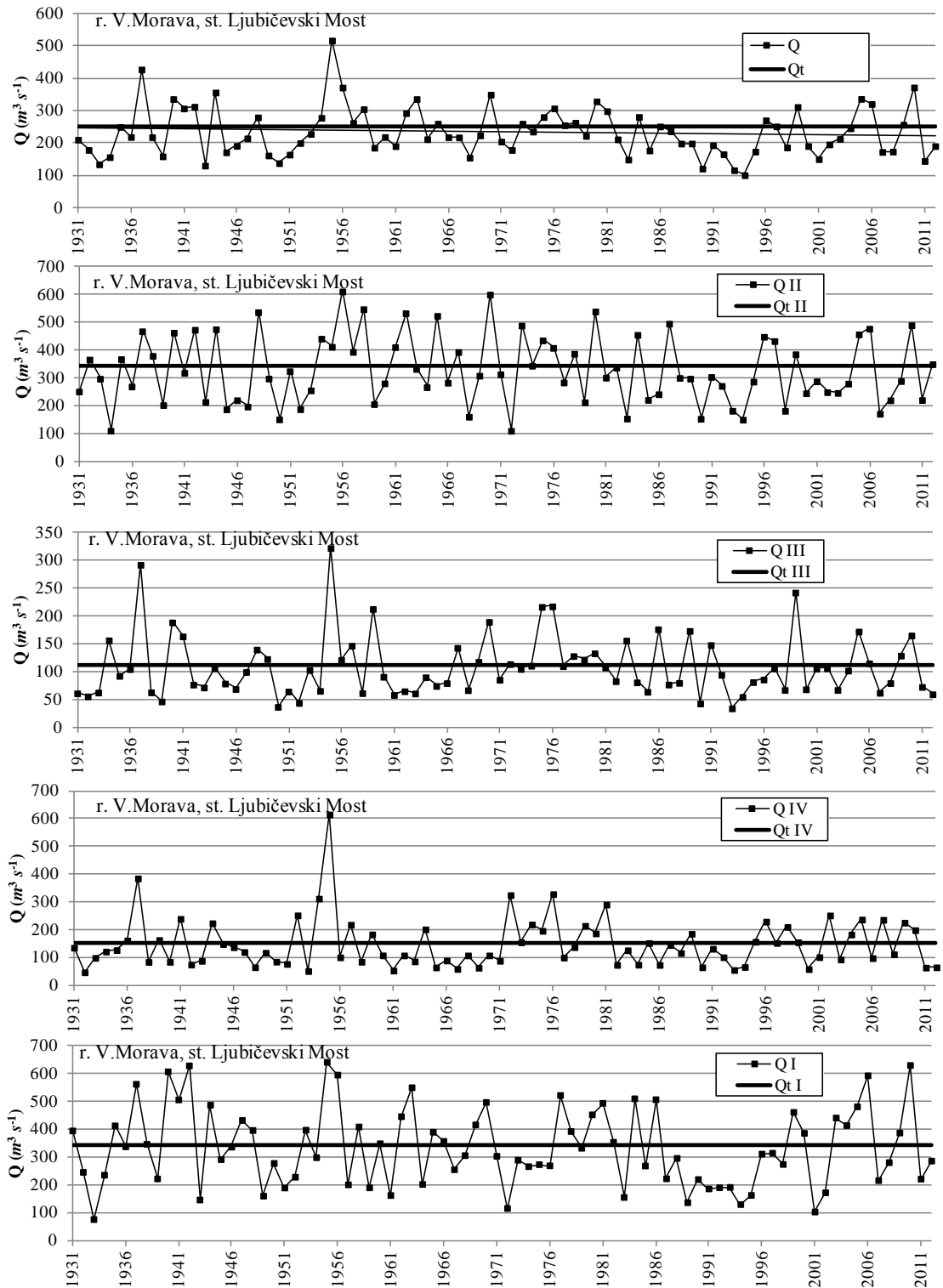




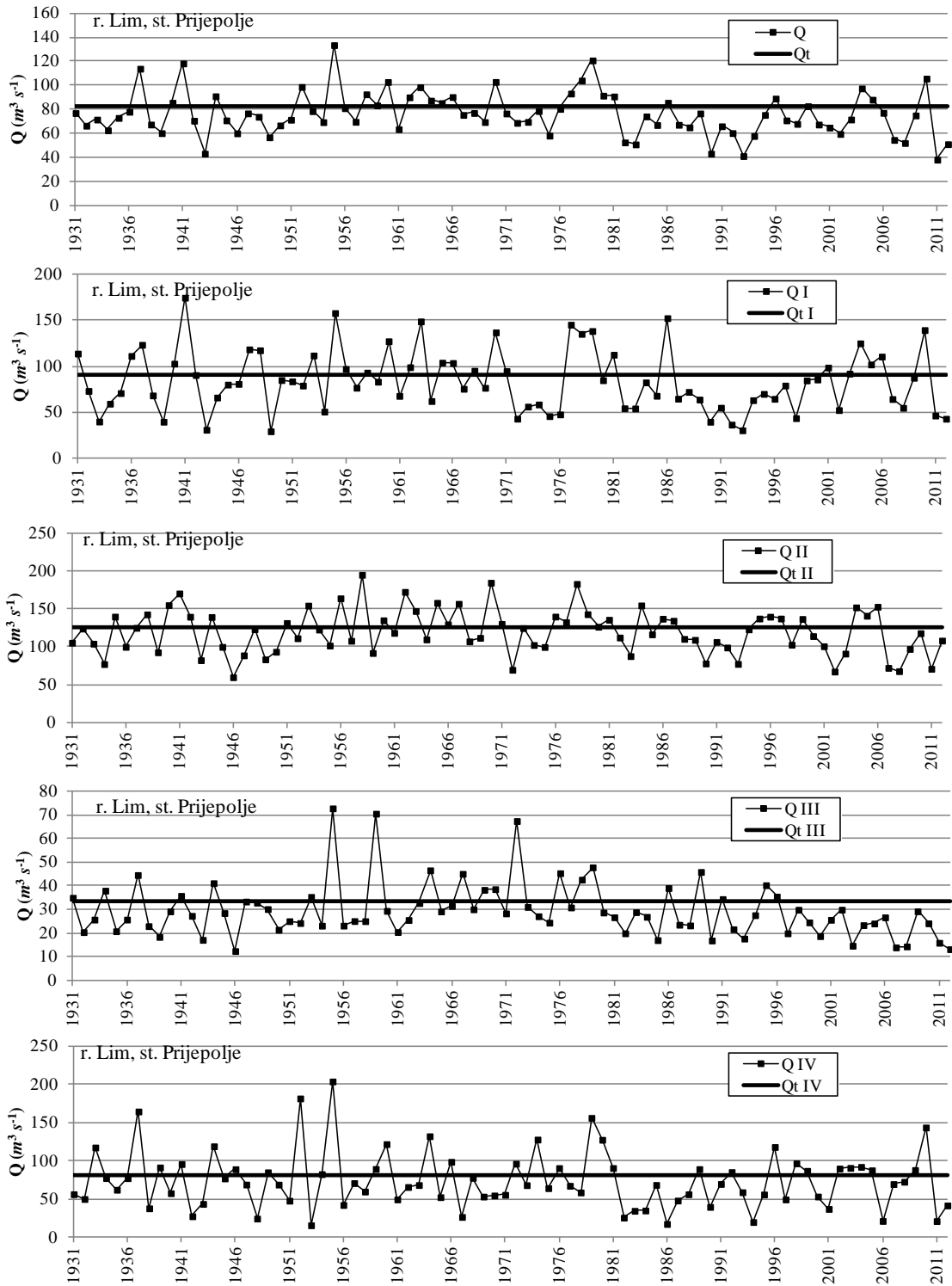
G3.4 r. Tisa, st. Senta



G3.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

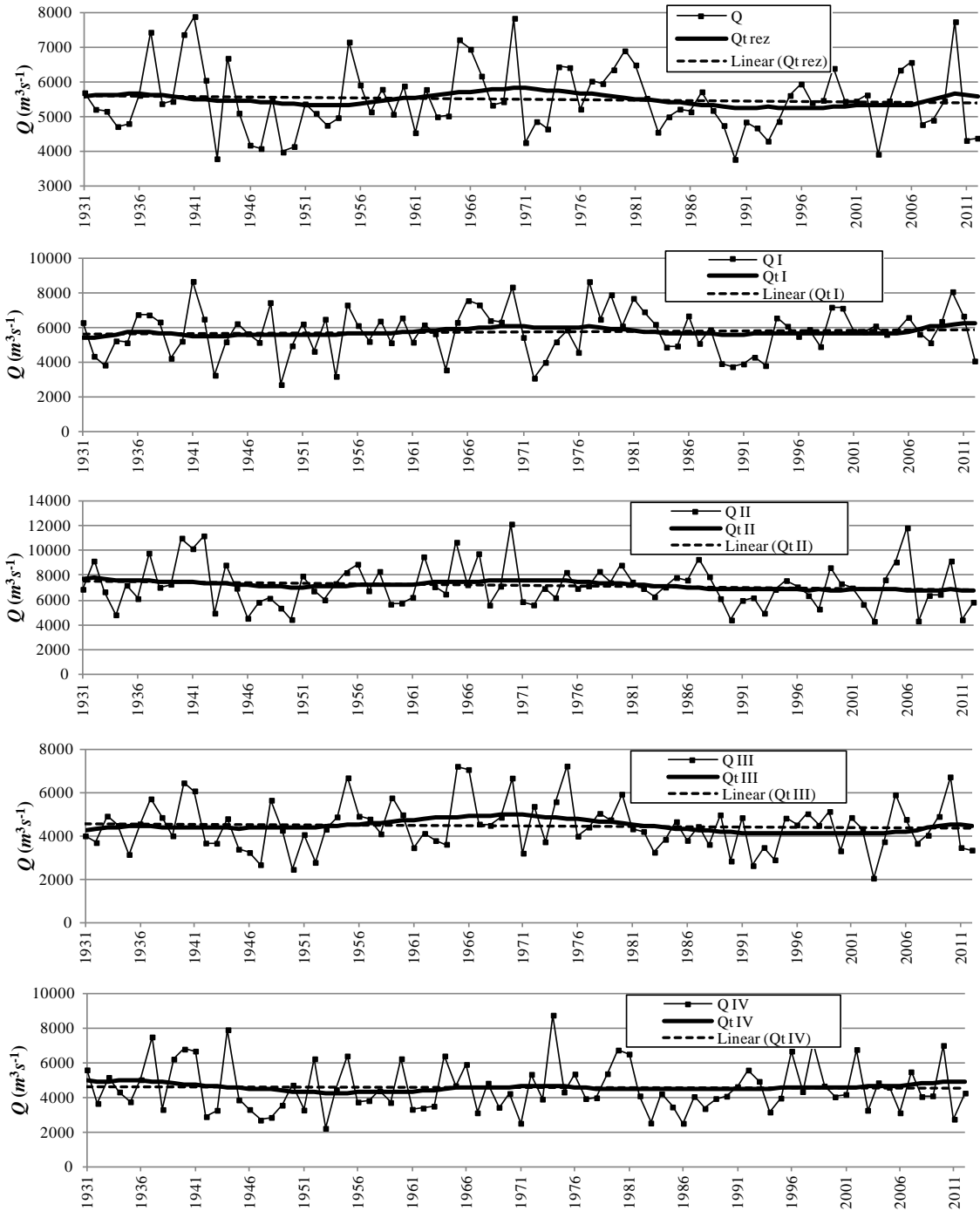


G3.6 r. Lim, st. Prijepolje

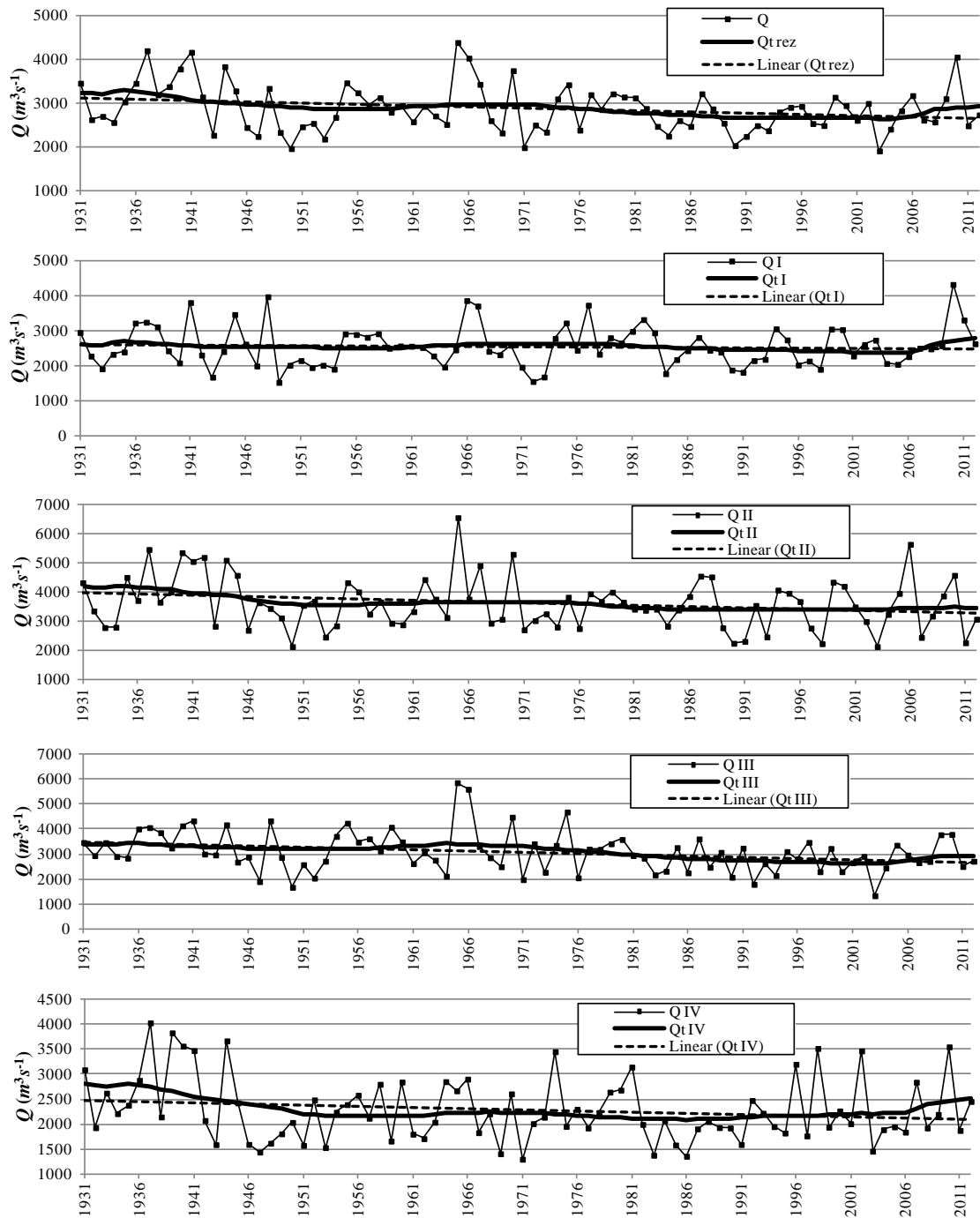


## G-4 Linearni trend sa pokretnim vremenskim prozorom srednjih godišnjih i sezonskih proticaja

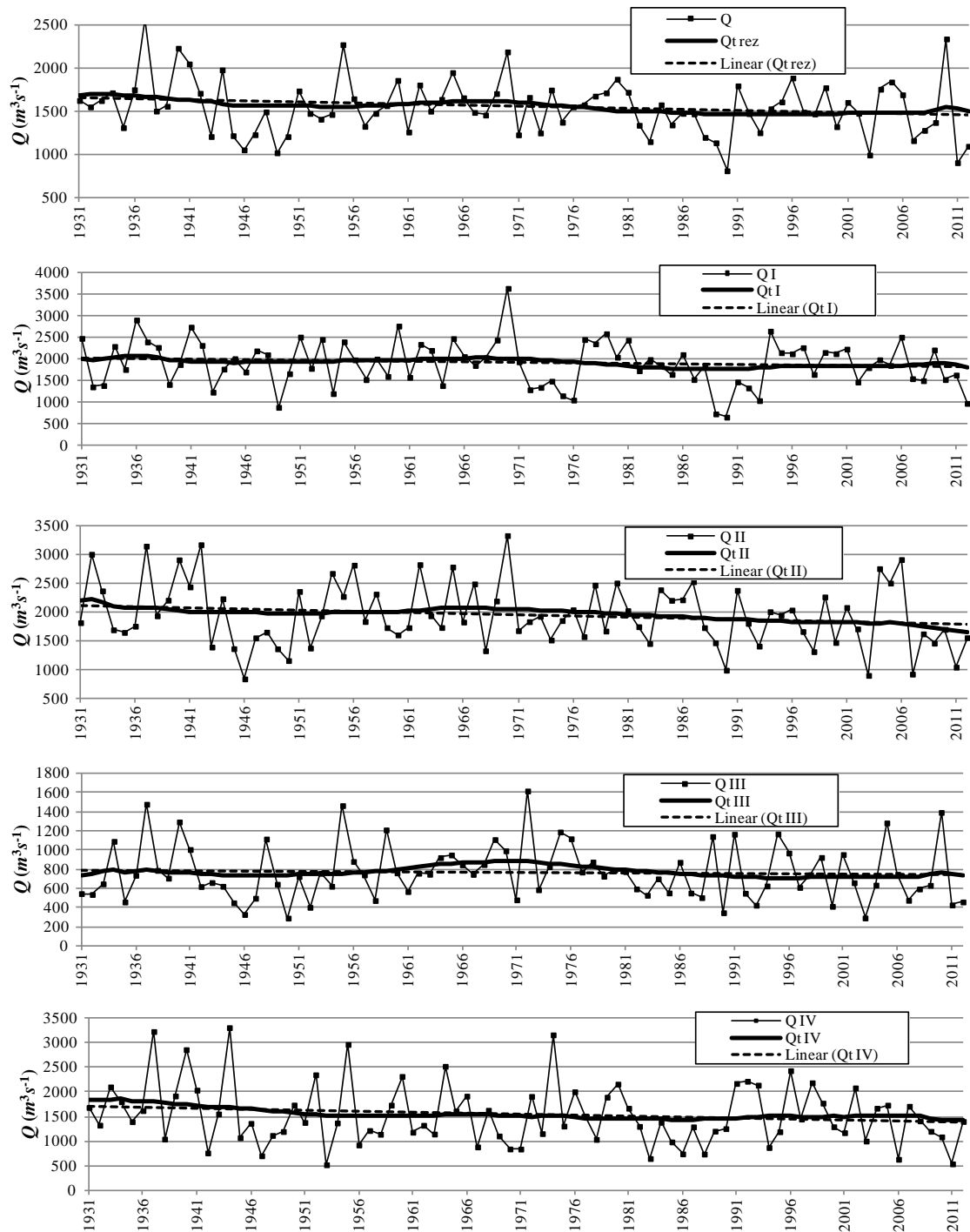
G4.1 r. Dunav, st. Oršava



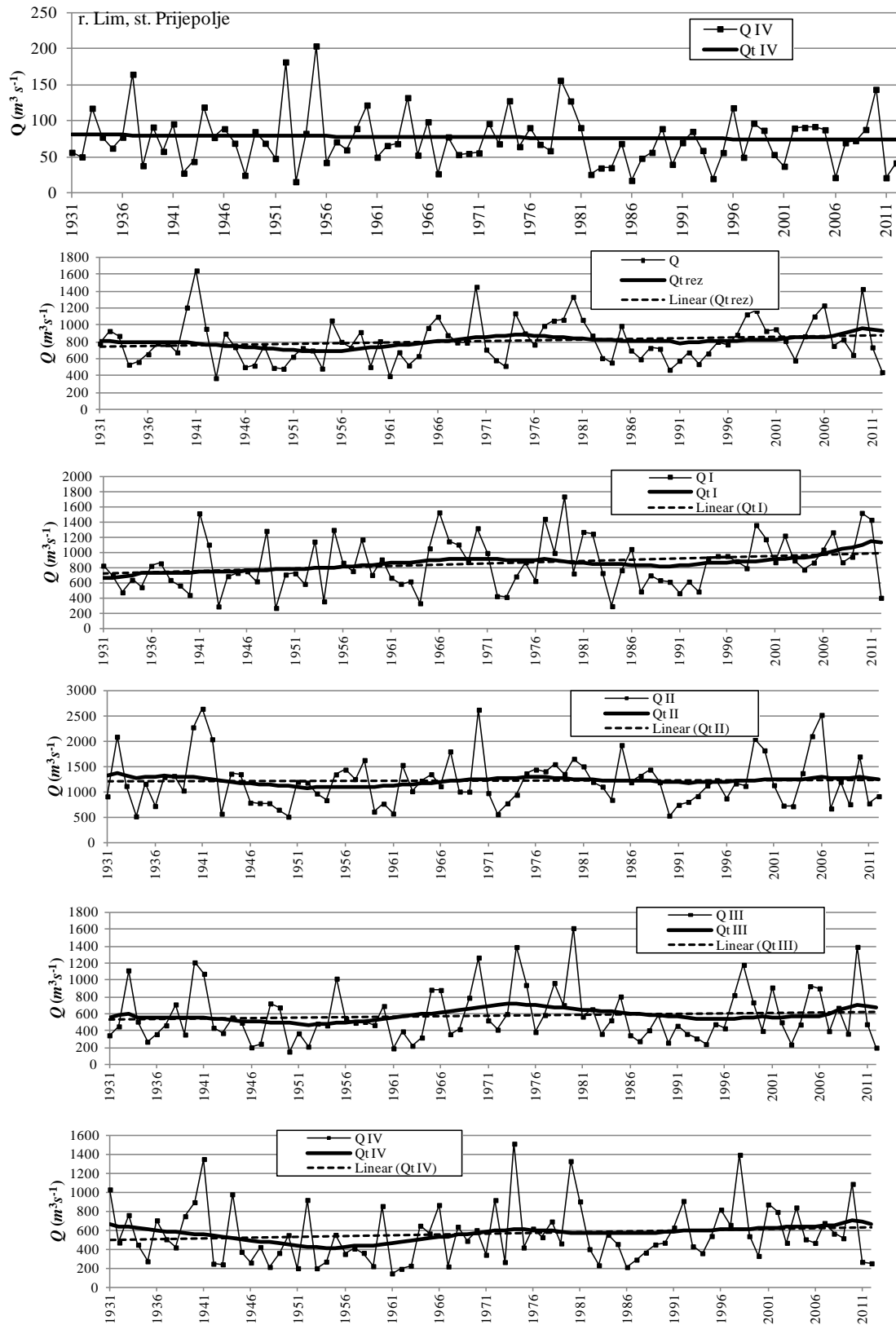
G4.2 r. Dunav, st. Bogojevo



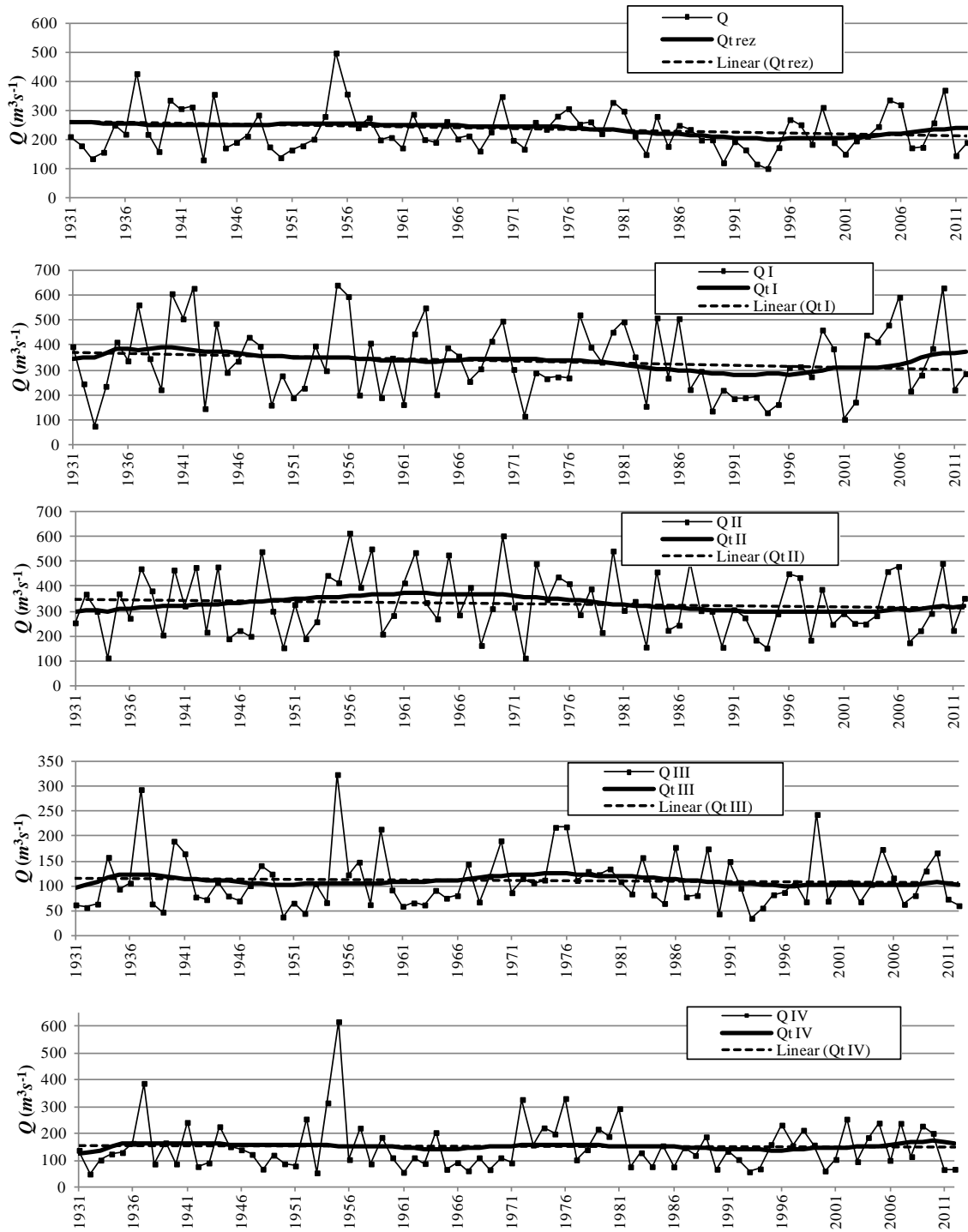
G4.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



G4.4 r. Tisa, st. Senta

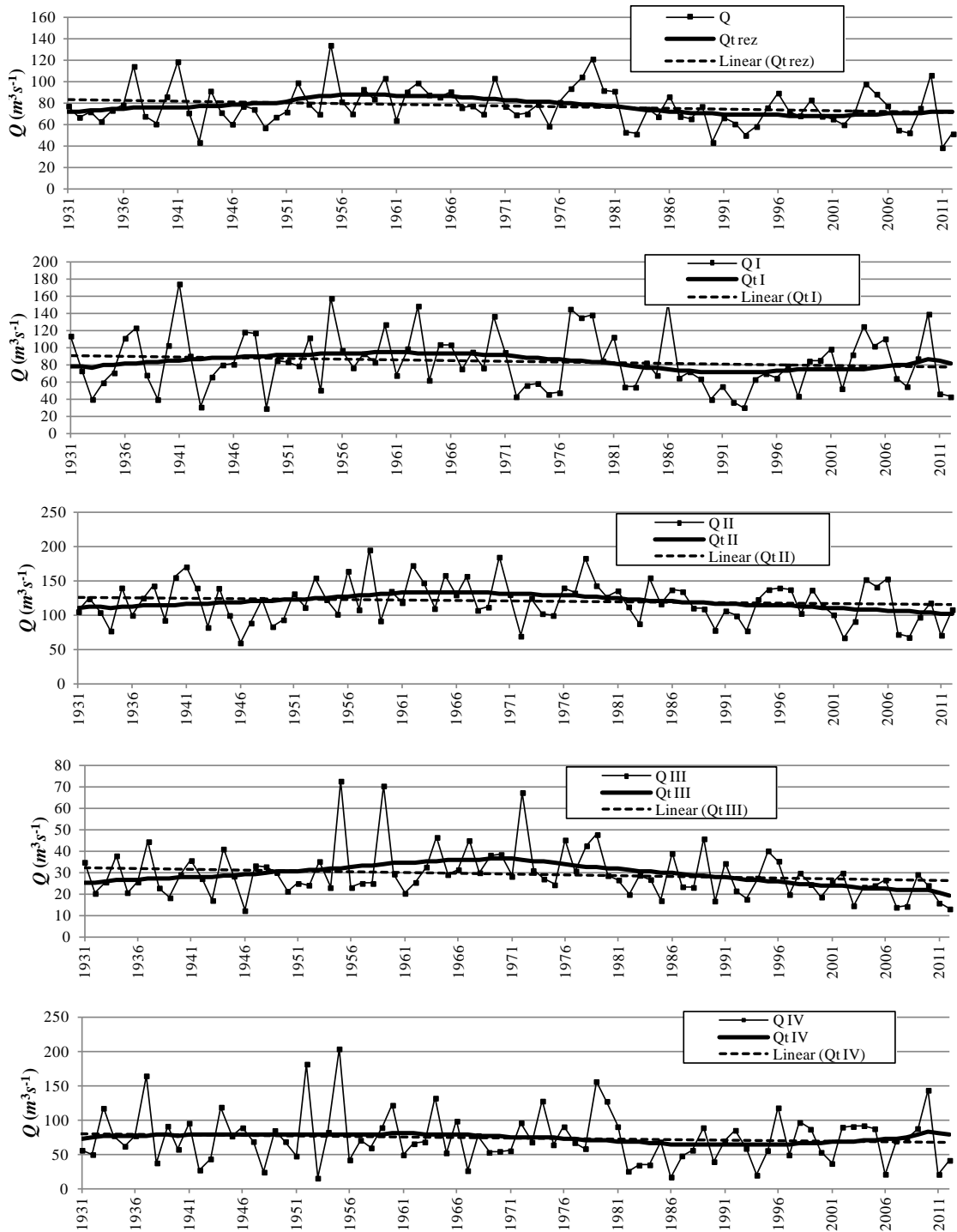


G4.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most



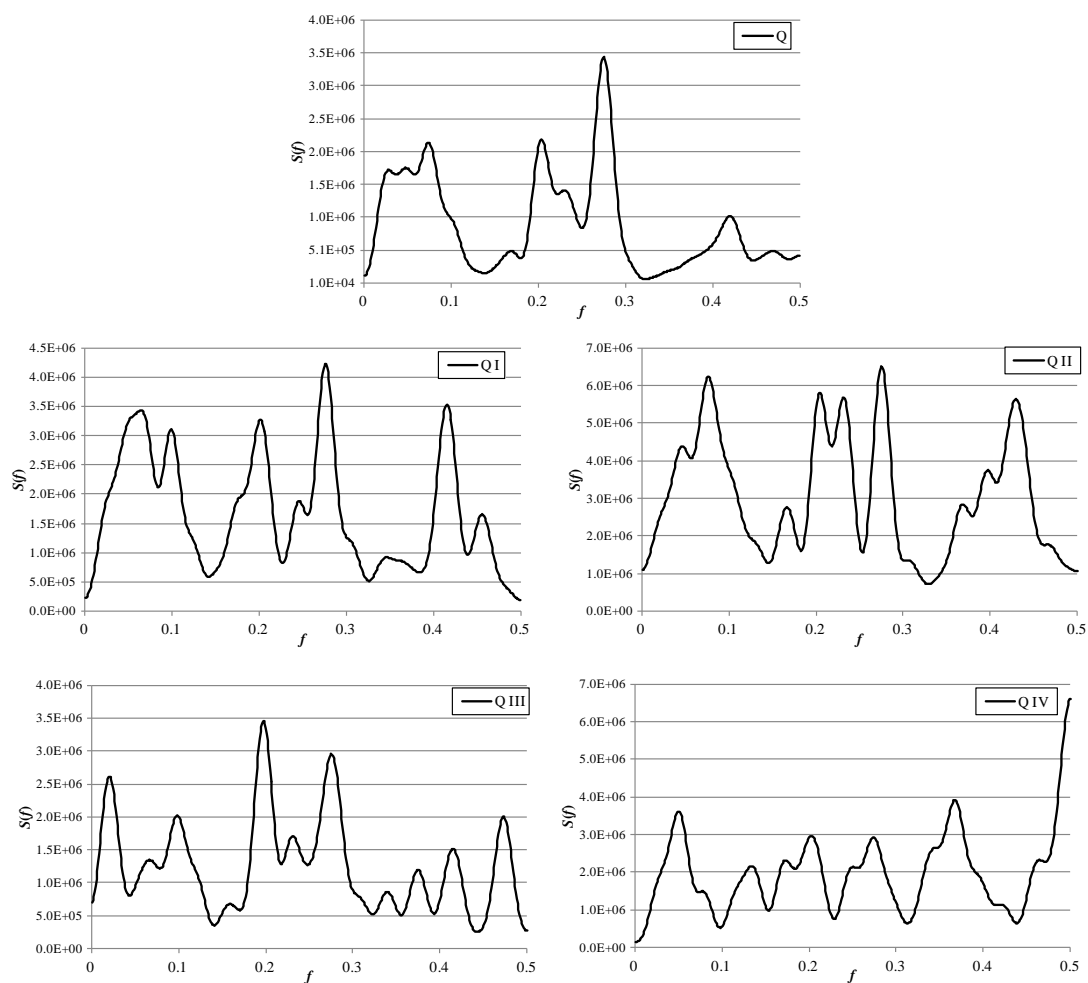


G4.6 r. Lim, st. Prijepolje

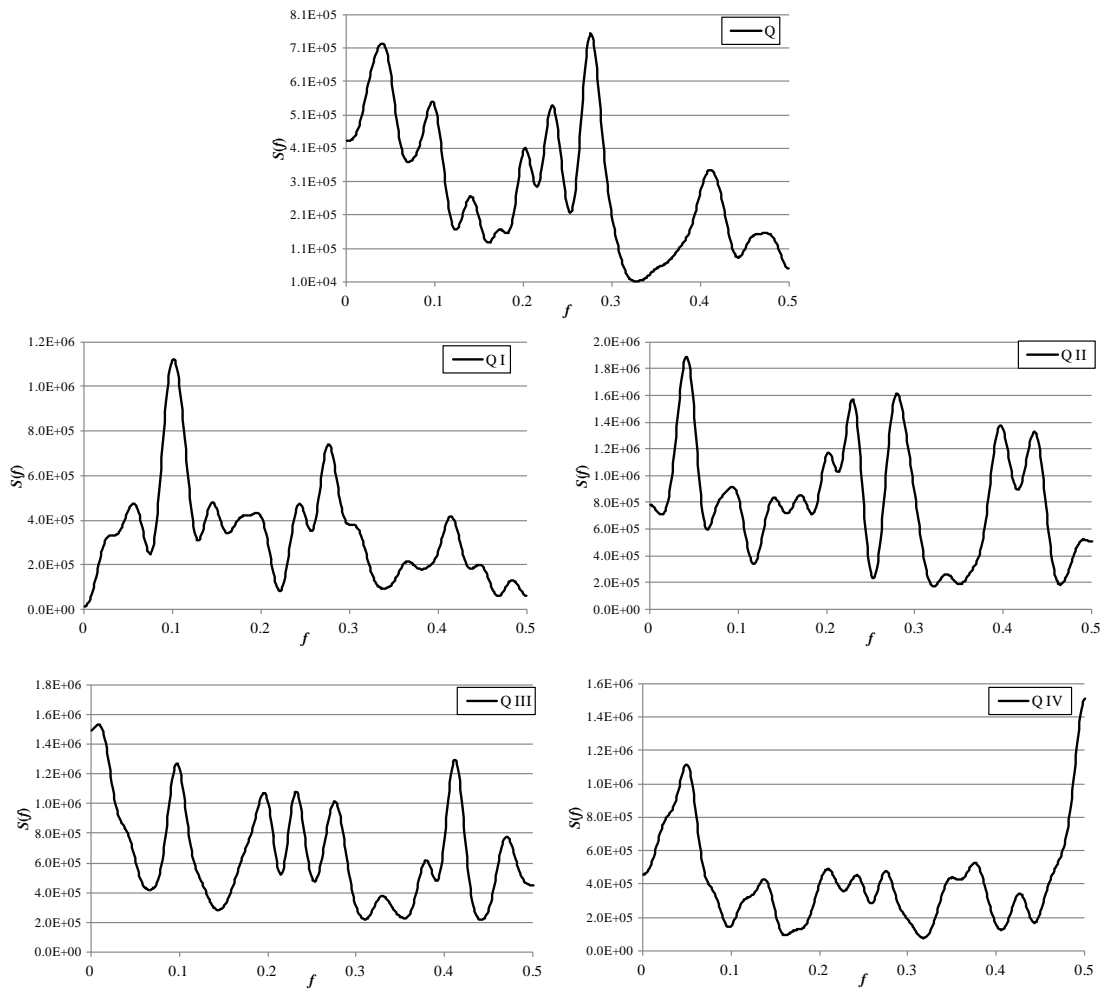


## G-5 Spektar godišnjih i sezonskih proticaja po metodi Blackman-Tukey

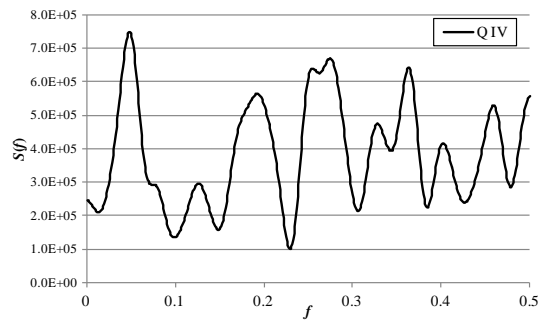
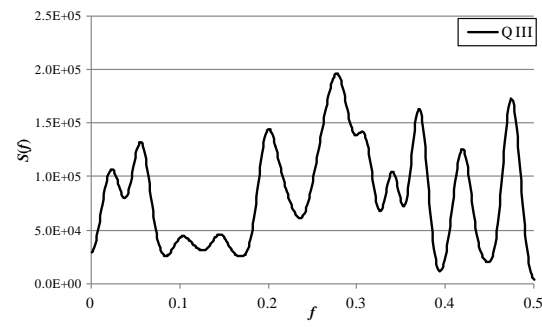
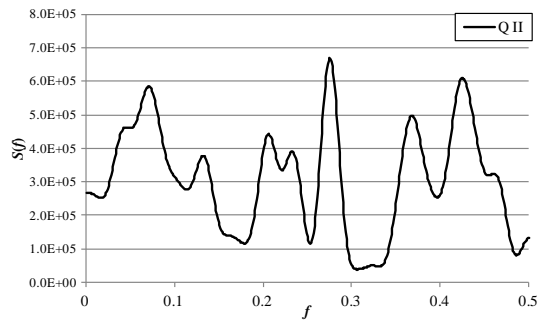
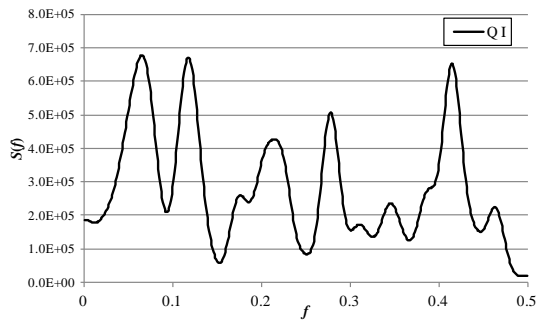
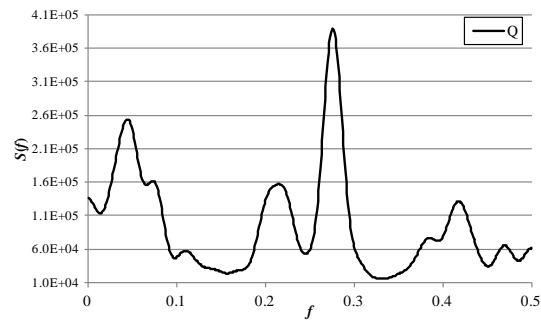
### G5.1 r. Dunav, st. Oršava



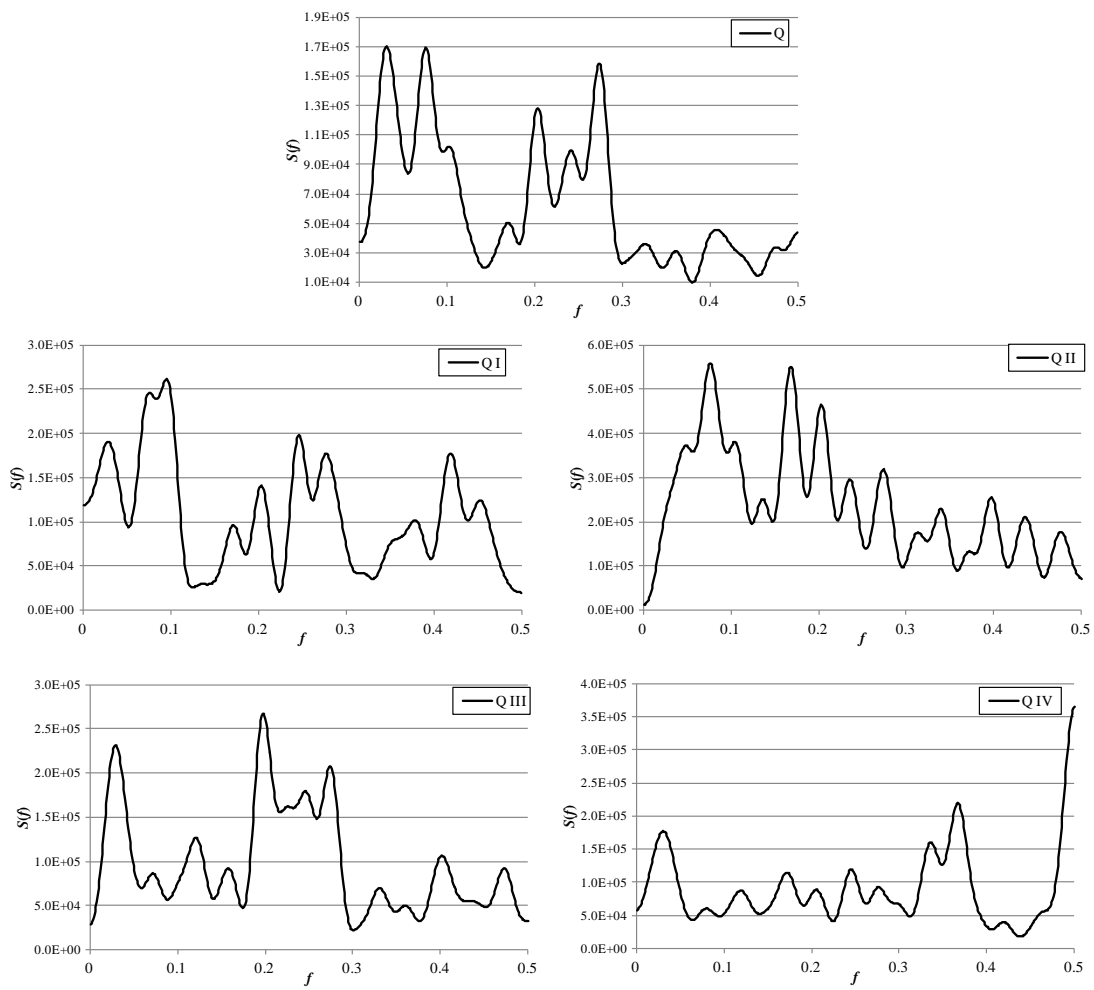
G5.2 r. Dunav, st. Bogojevo



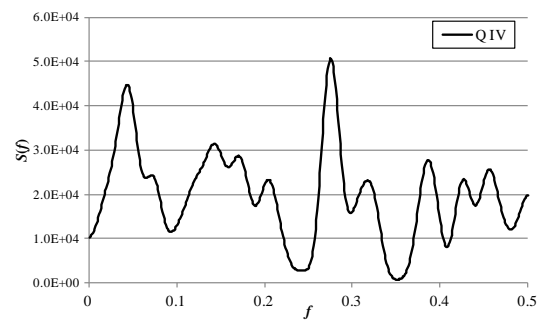
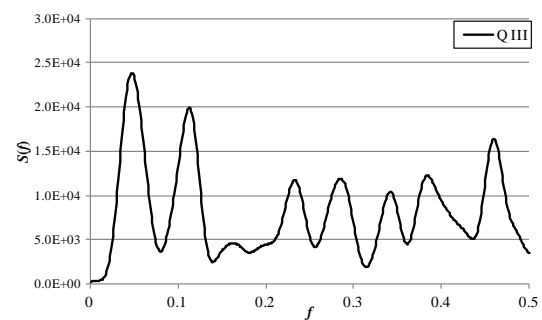
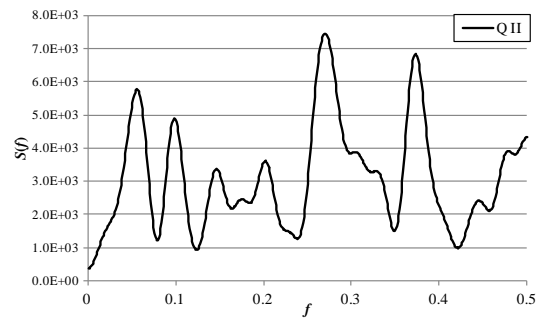
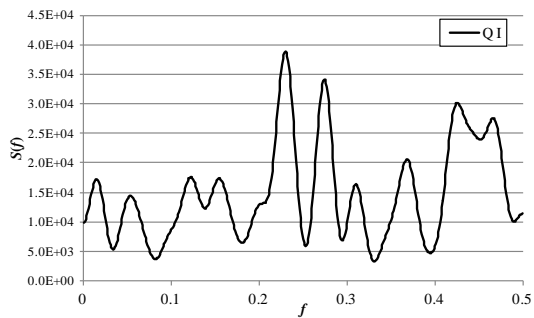
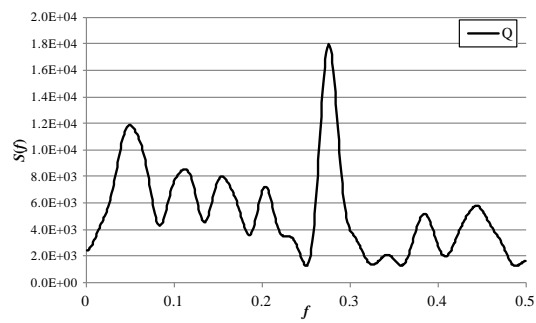
G5.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



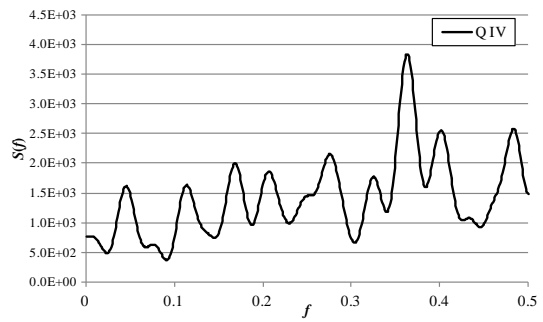
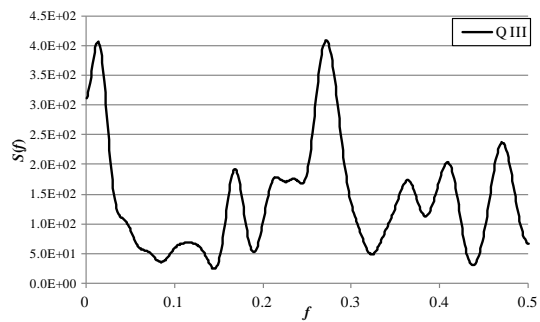
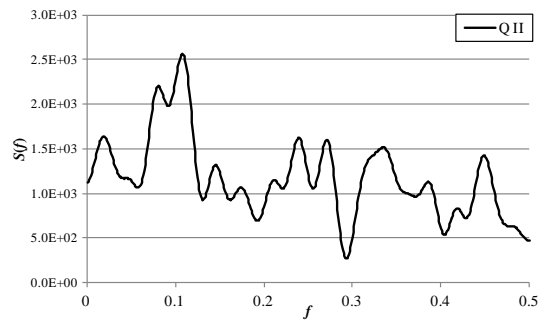
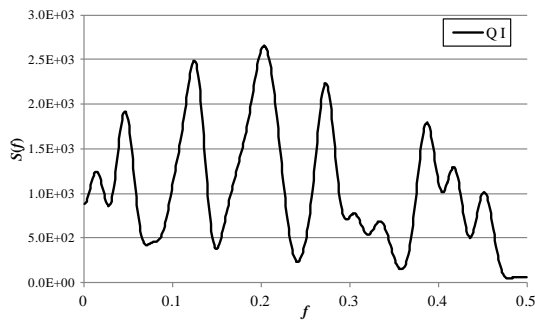
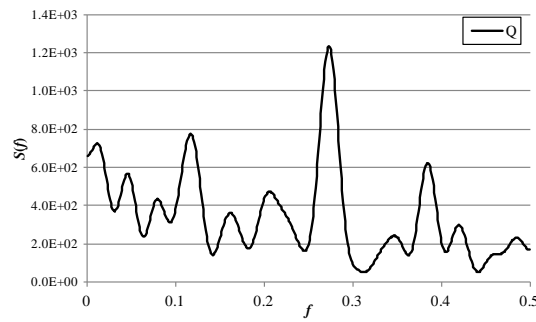
G5.4 r. Tisa, st. Senta



G5.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

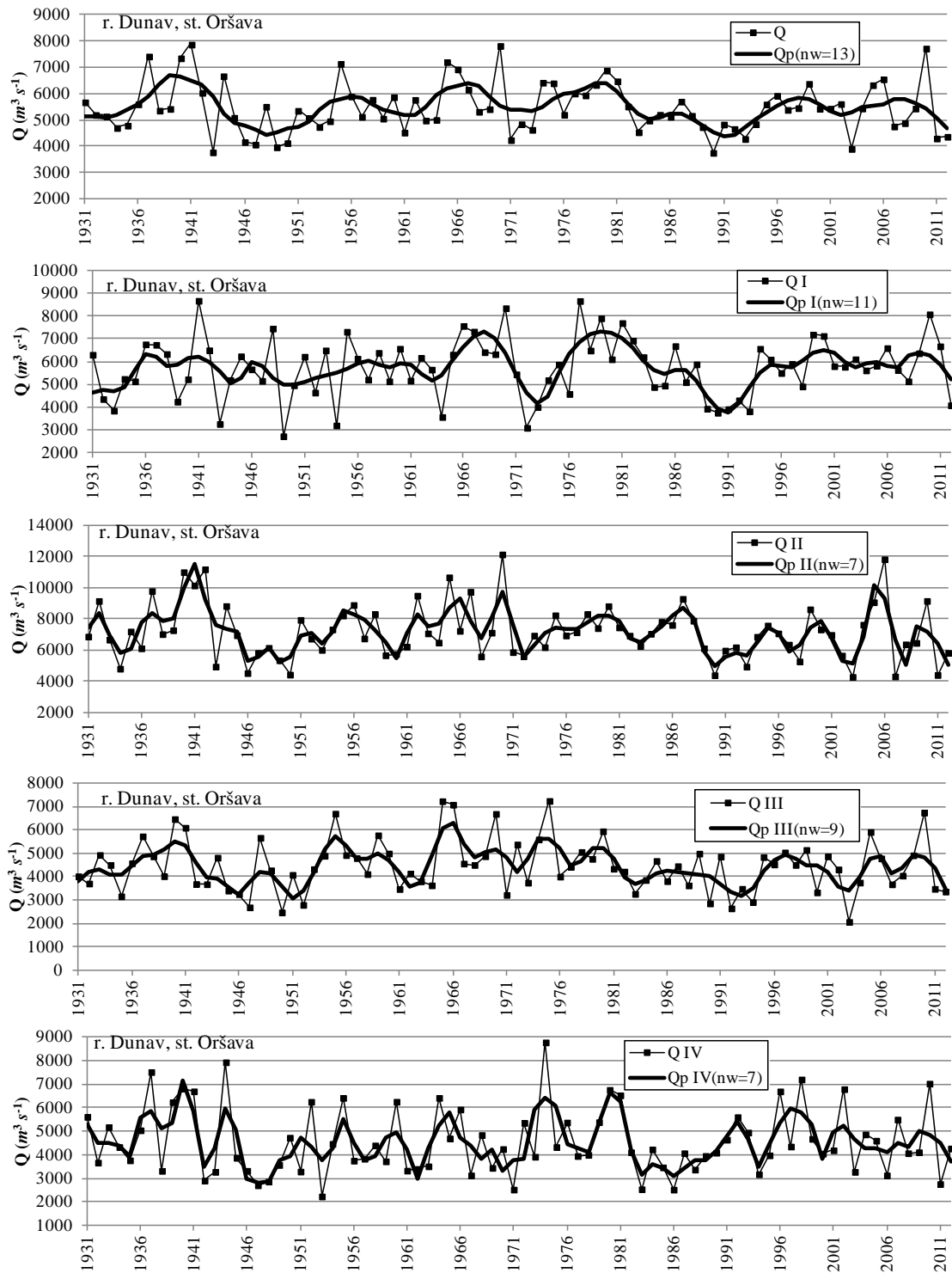


G5.6 r. Lim, st. Prijepolje



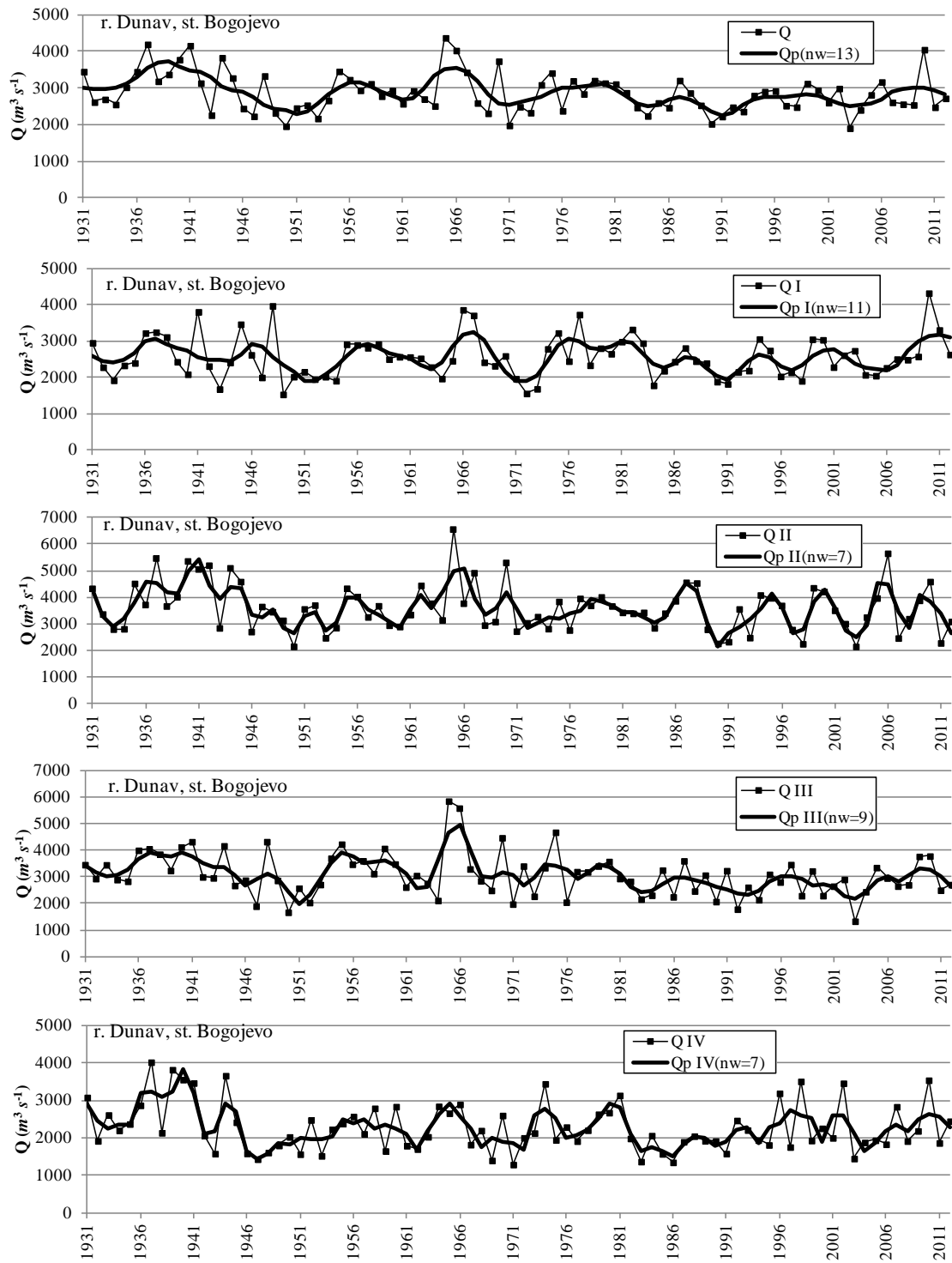
## G-6 Ugláčani godišnji i sezonski proticaji po metodi LOESS

### G6.1 r. Dunav, st. Oršava

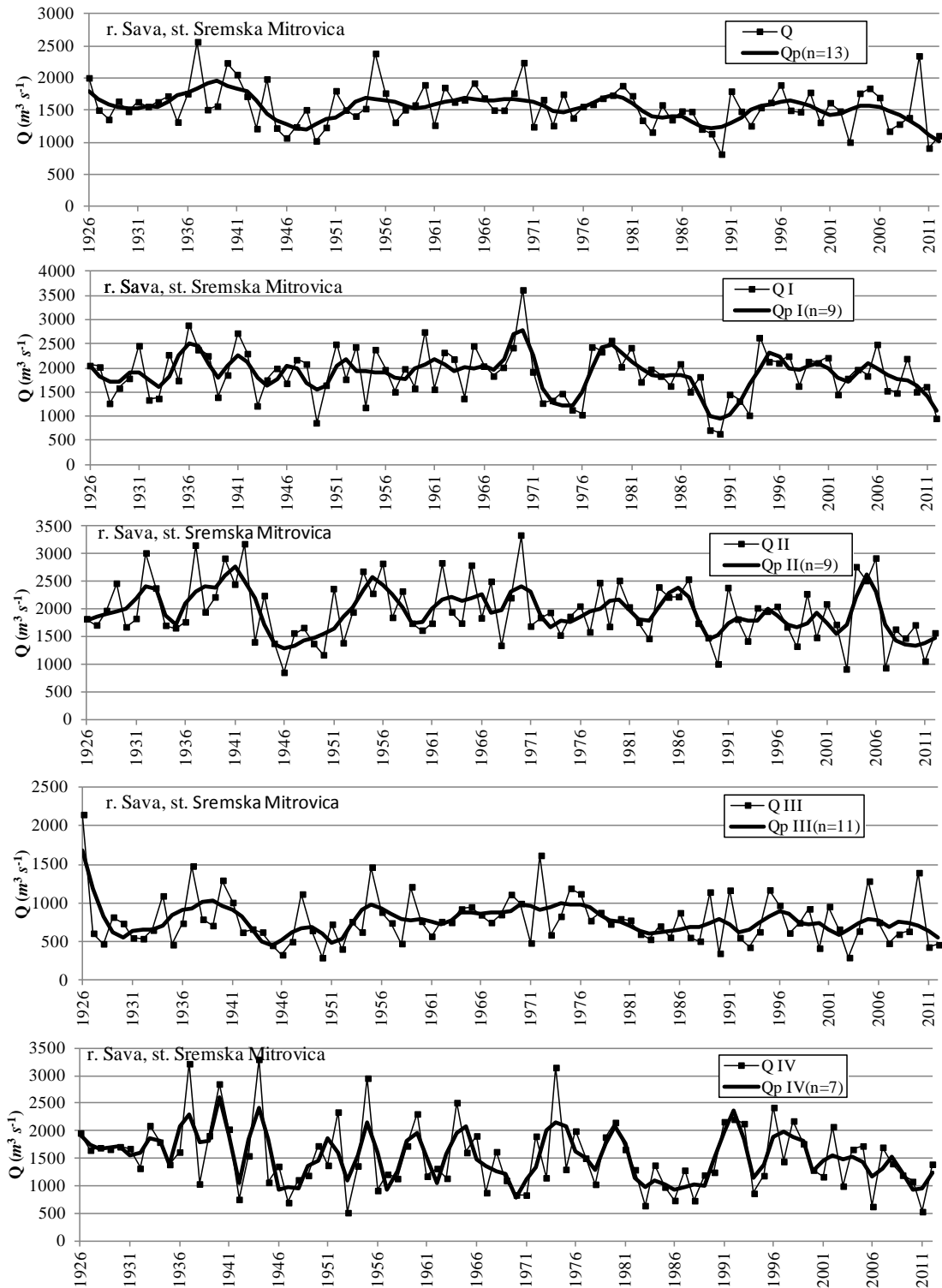




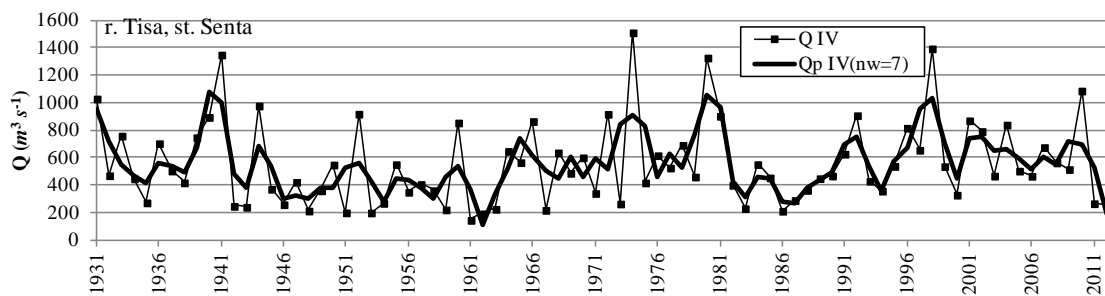
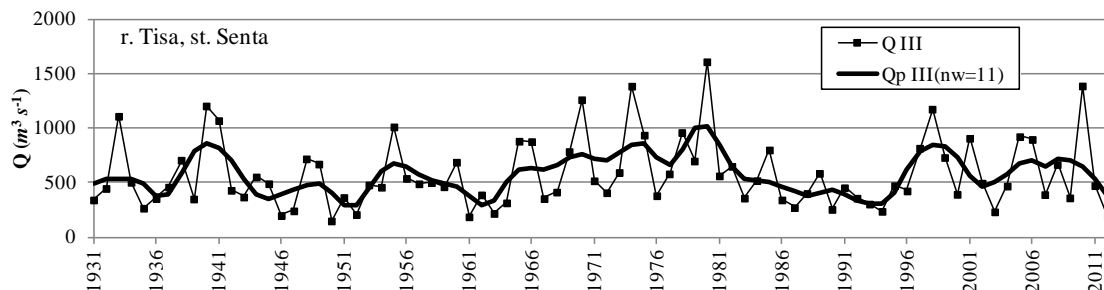
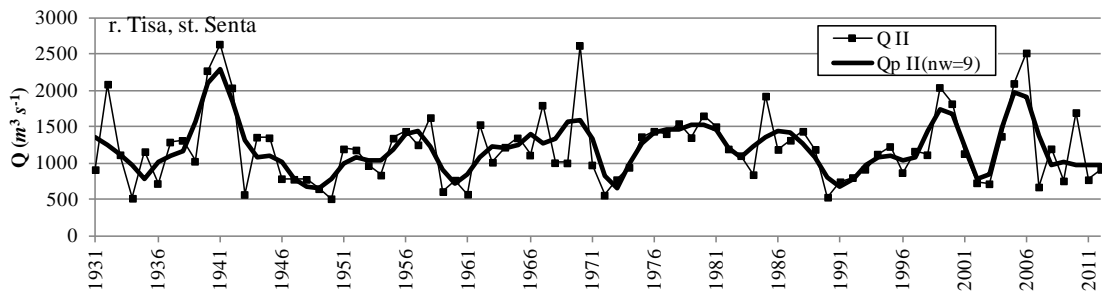
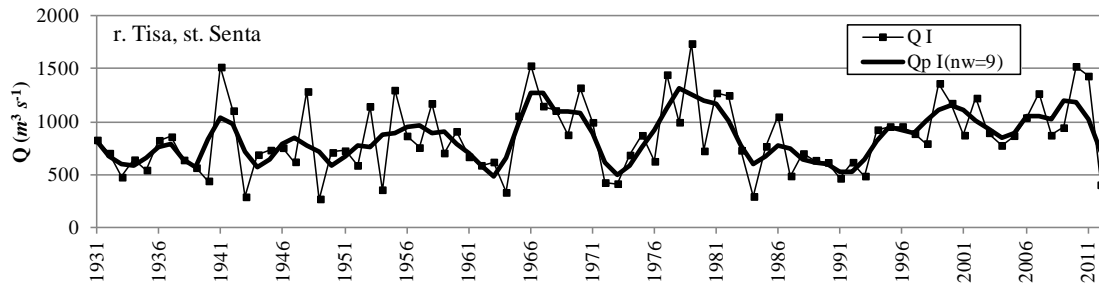
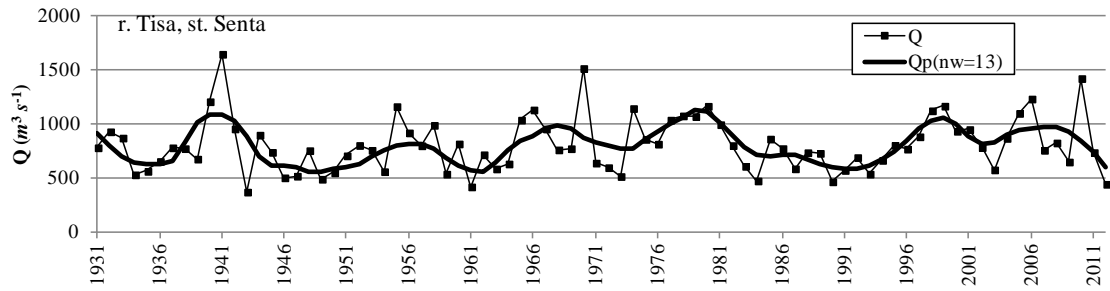
G6.2 r. Dunav, st. Bogojevo



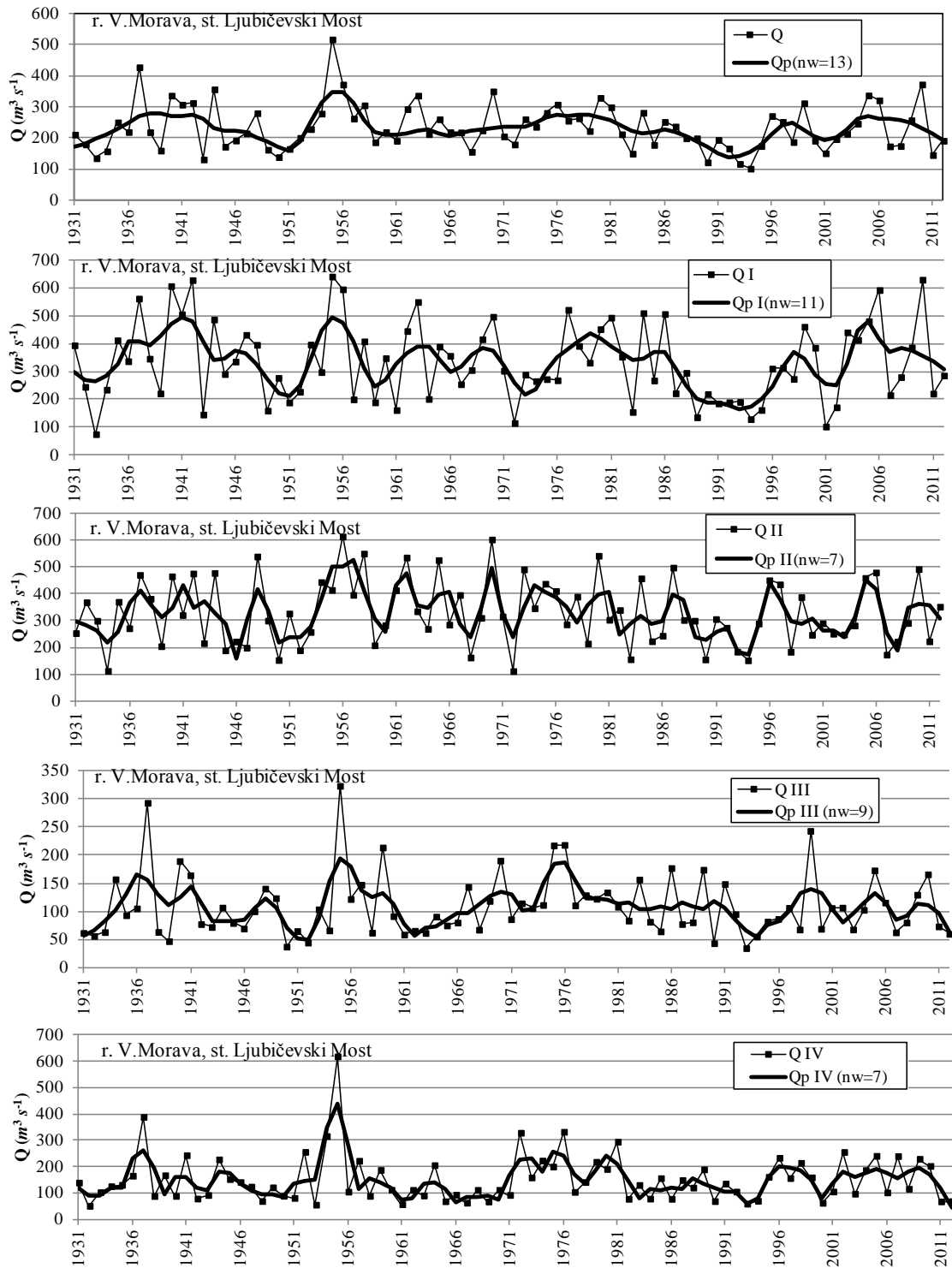
G6.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



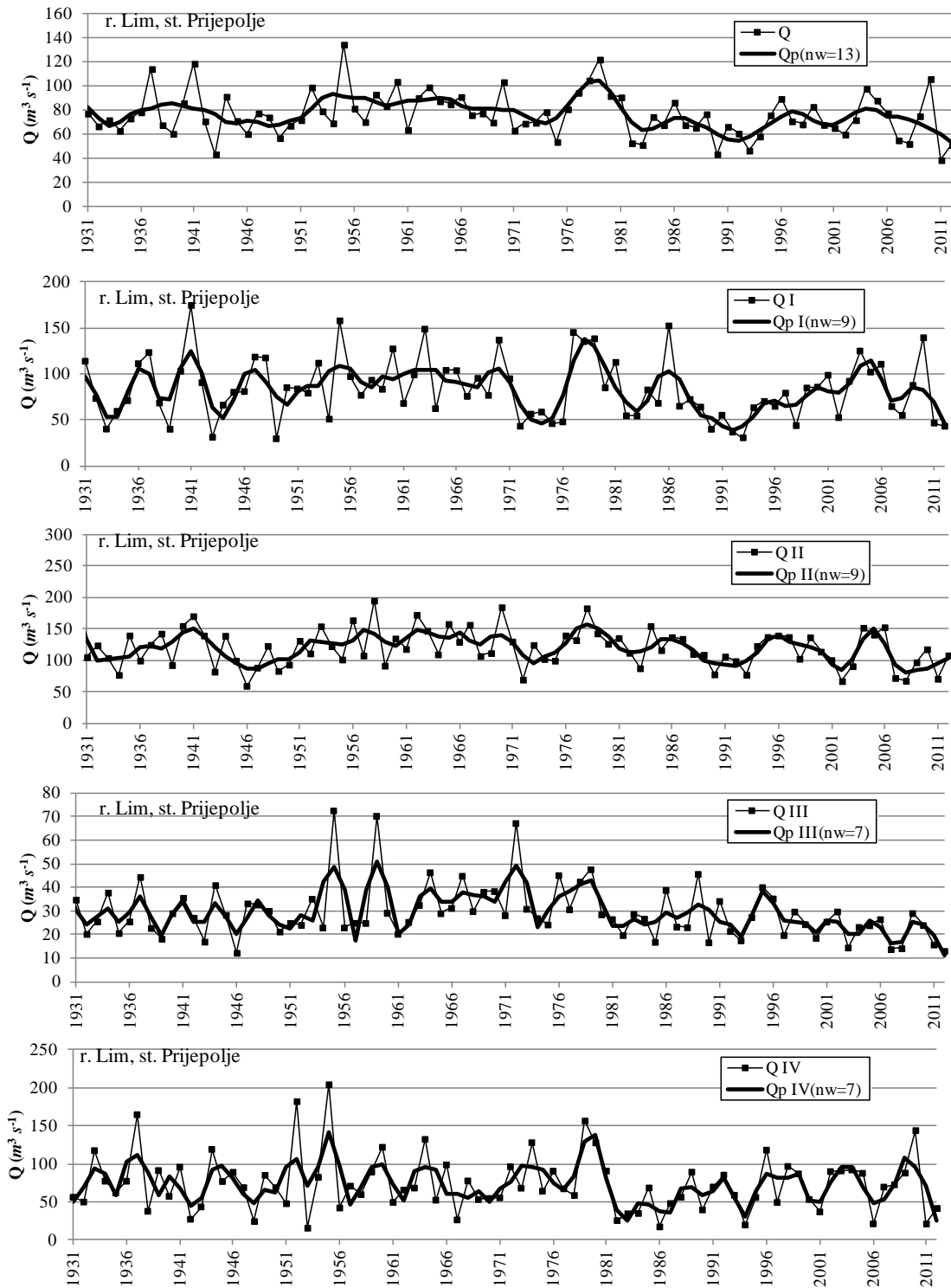
G6.4 r. Tisa, st. Senta



G6.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

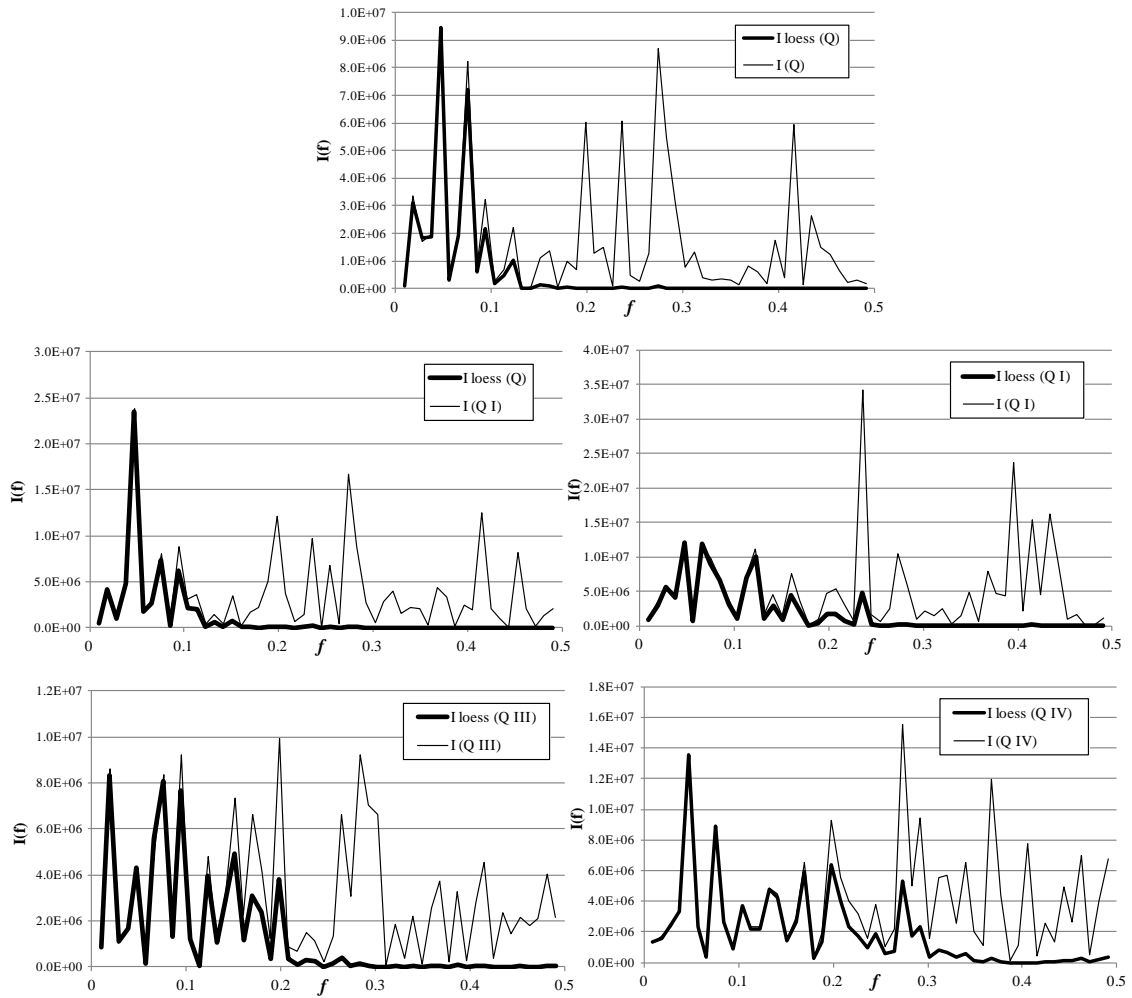


G6.6 r. Lim, st. Prijepolje

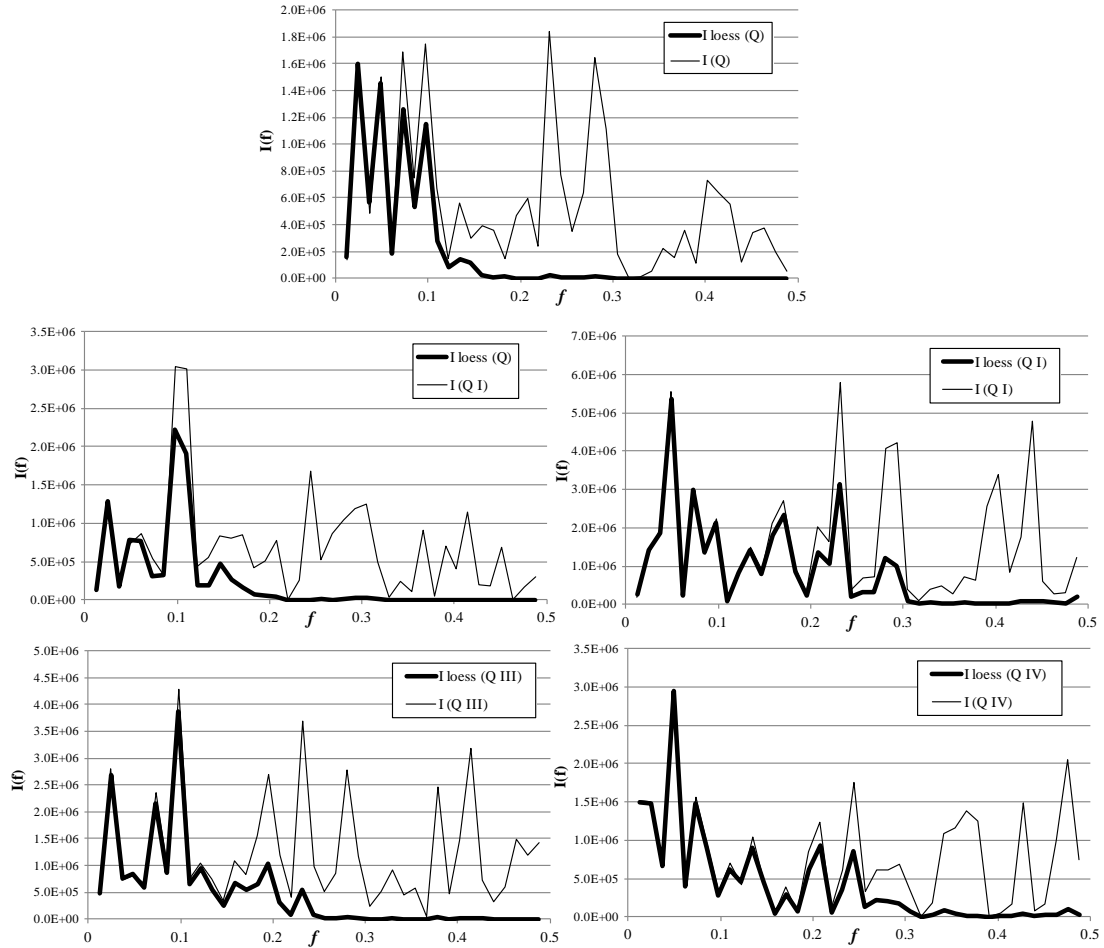


## G-7 Periodogram osmotrenih i uglačanih godišnjih i sezonskih proticaja

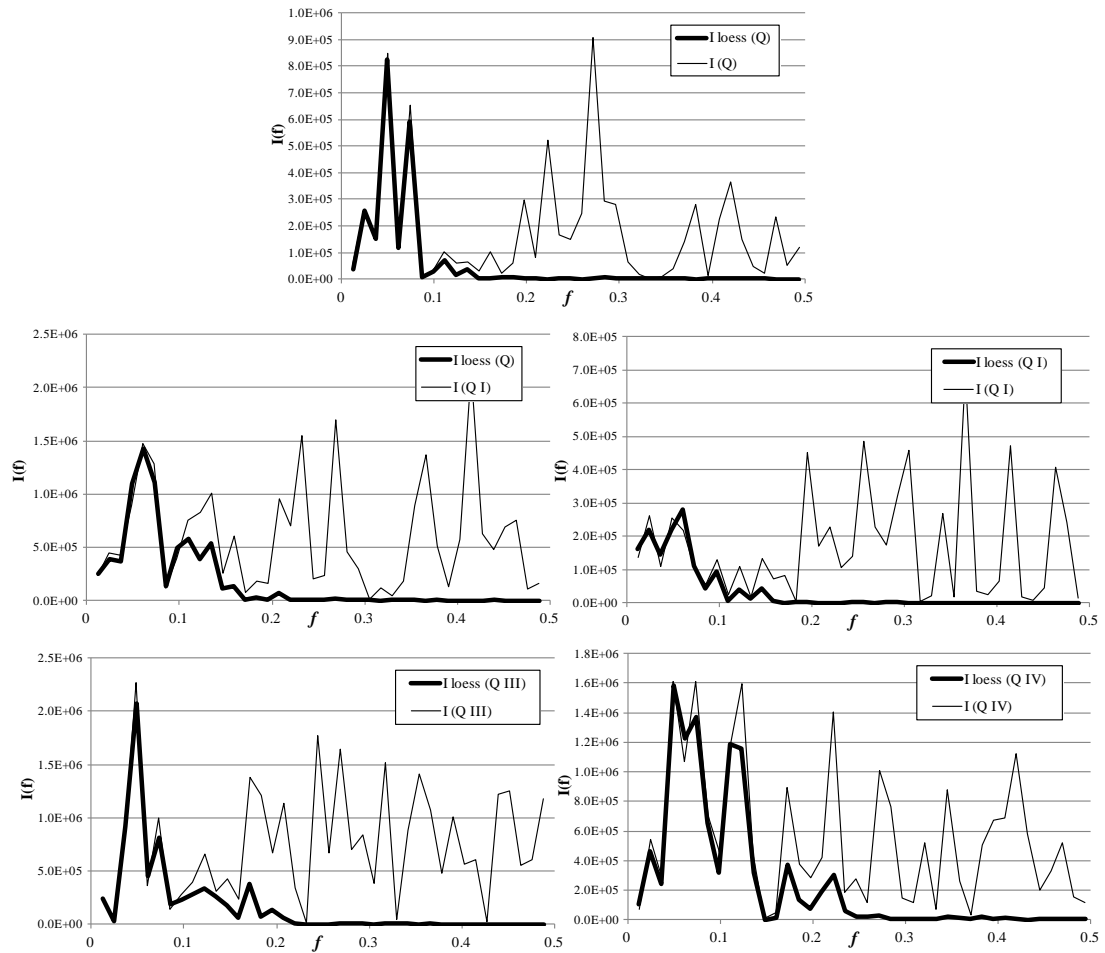
G7.1 r. Dunav, st. Oršava



G7.2 r. Dunav, st. Bogojevo

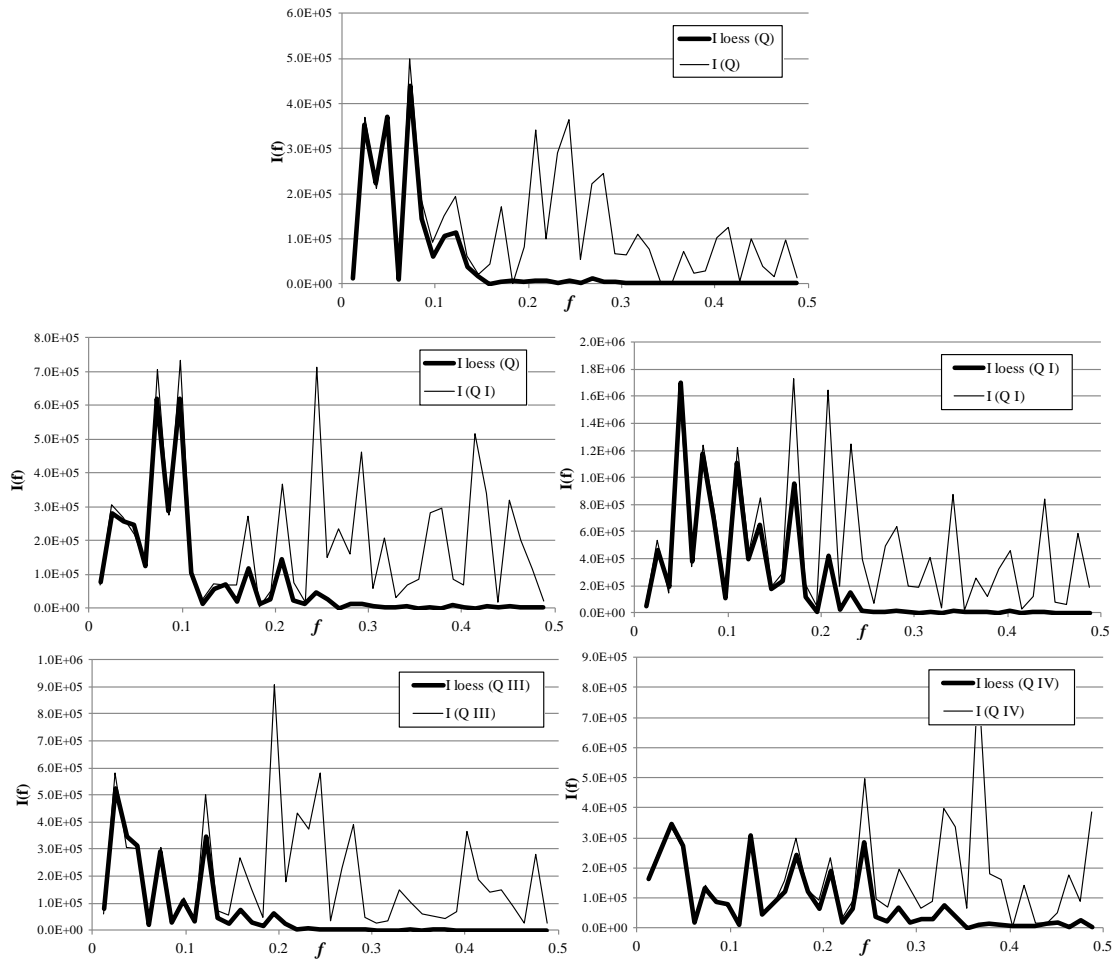


G7.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica

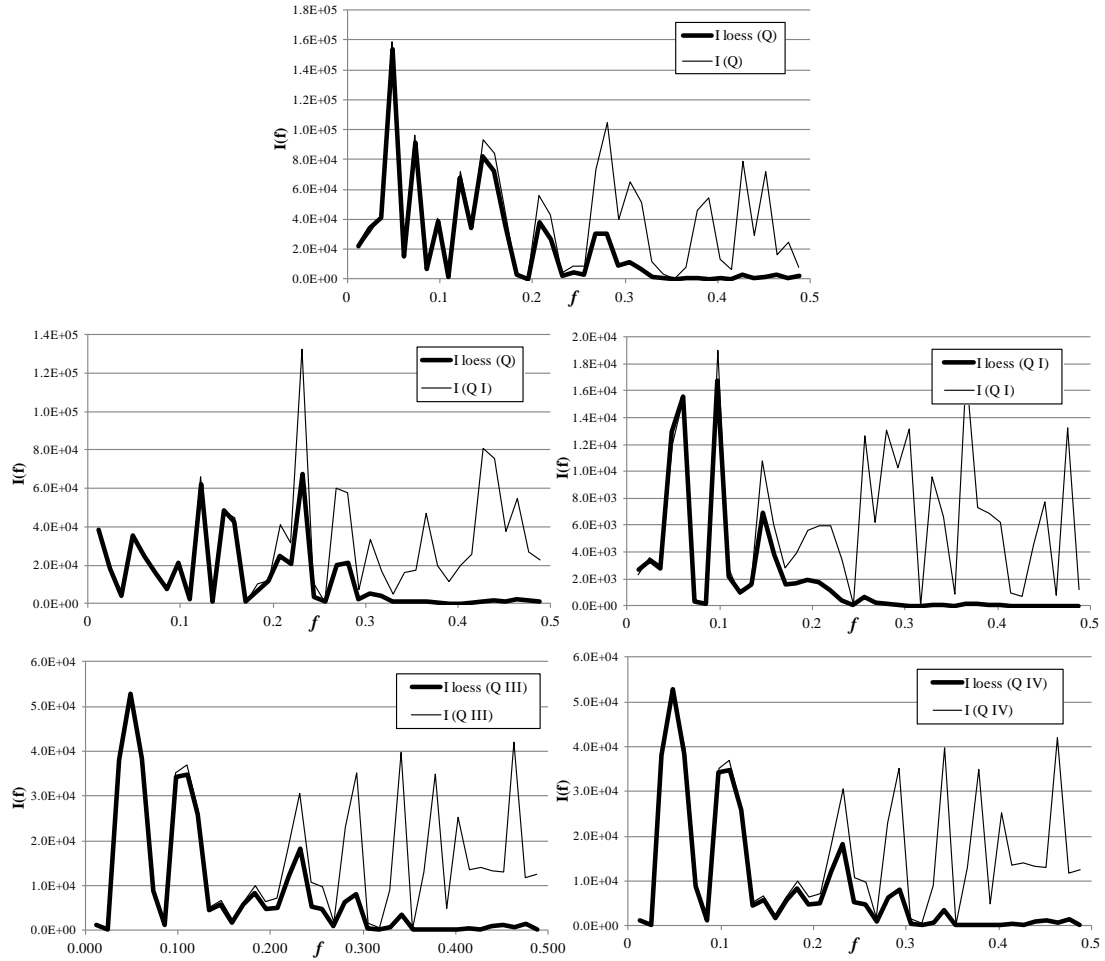




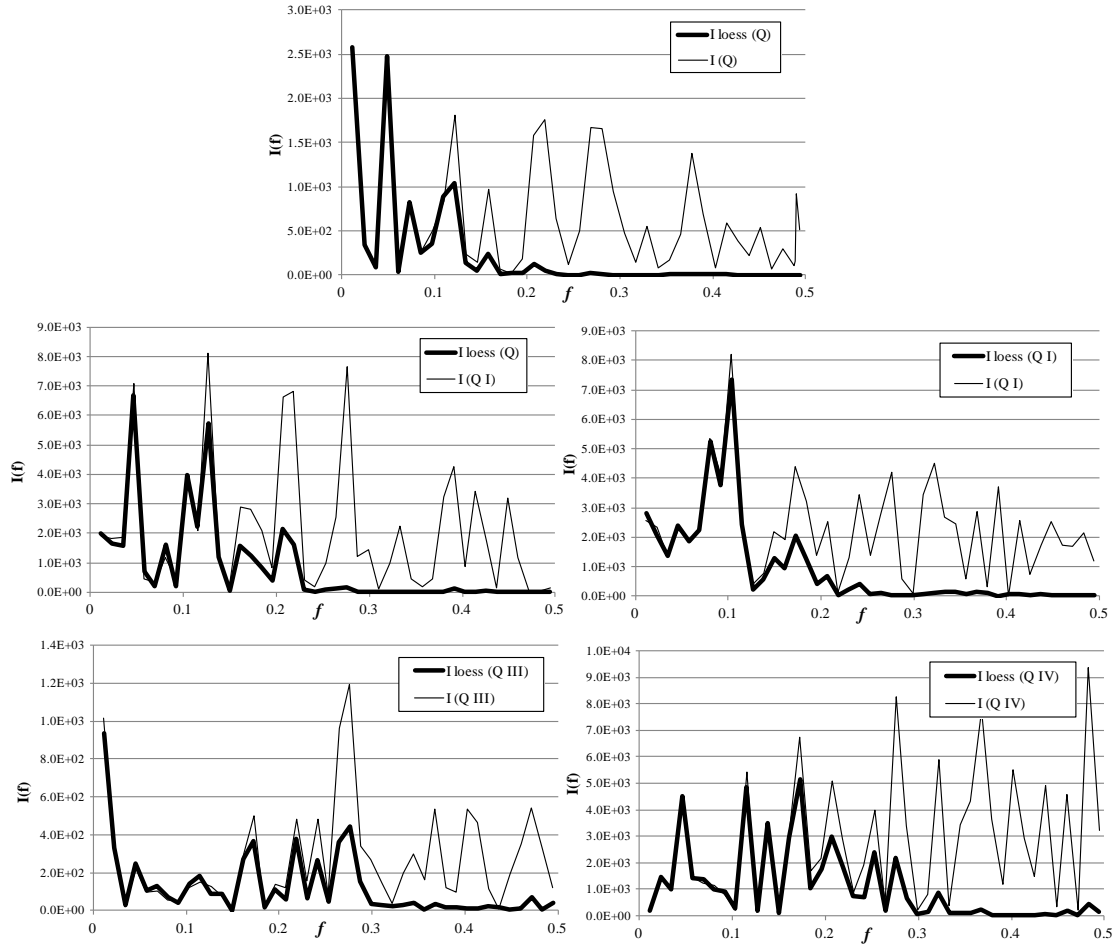
G7.4 r. Tisa, st. Senta



G7.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

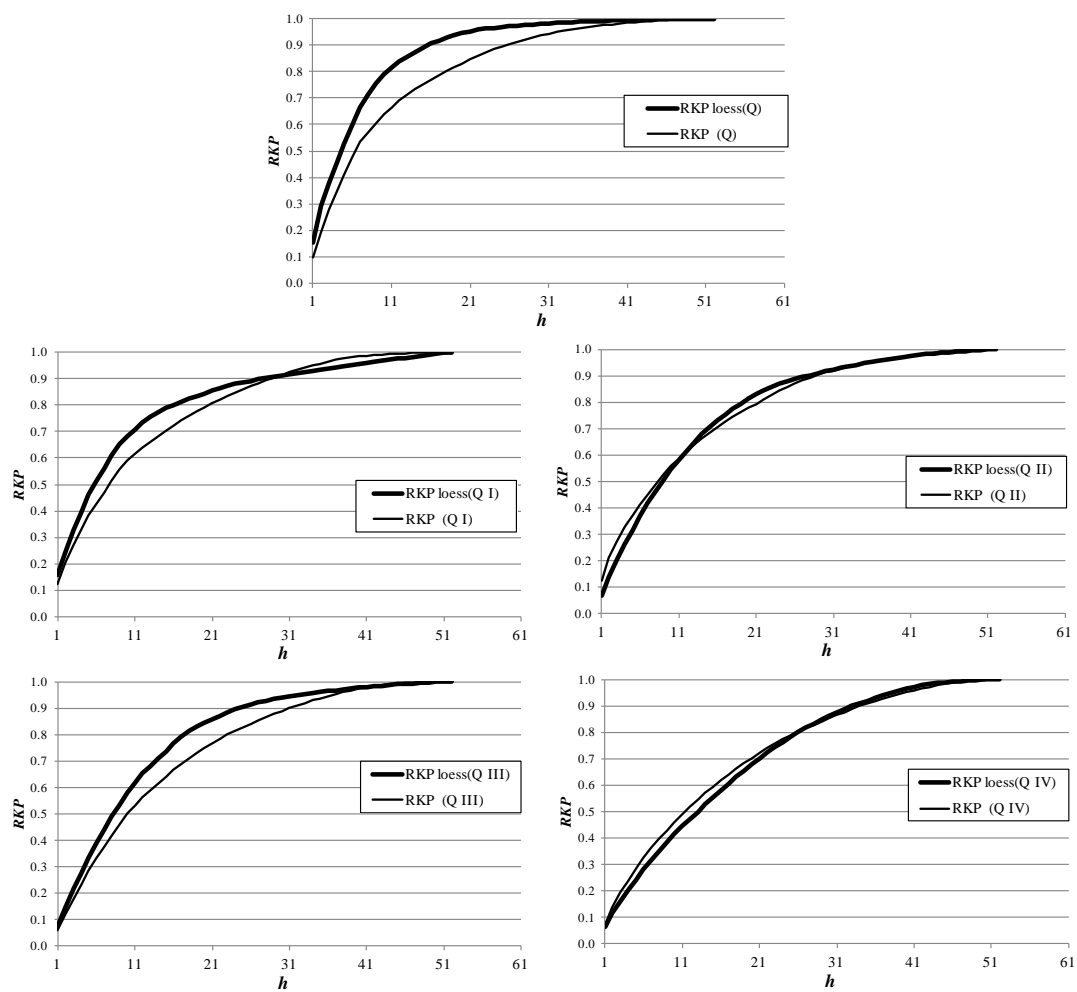


G7.6 r. Lim, st. Prijepolje

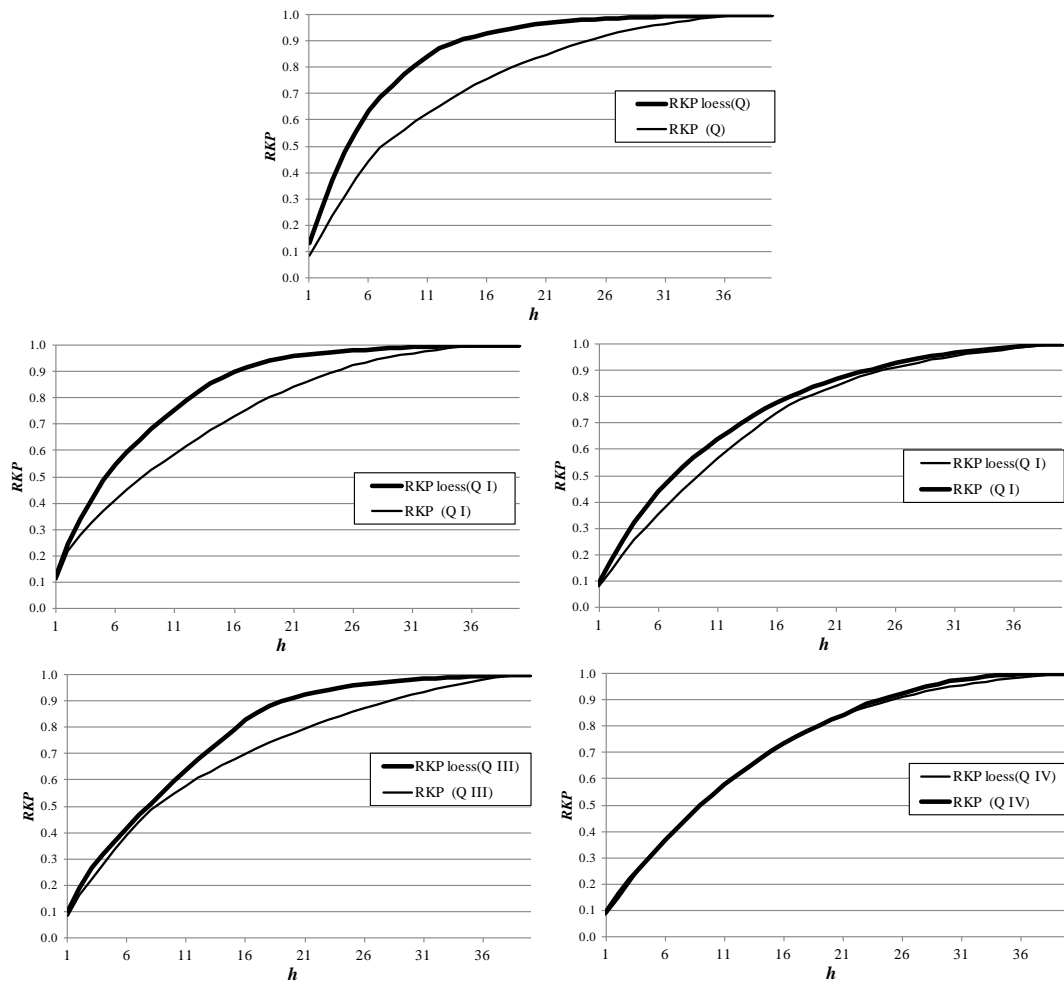


## G-8 Relativni kumulativni periodogram (RKP) godišnjih i sezonskih proticaja

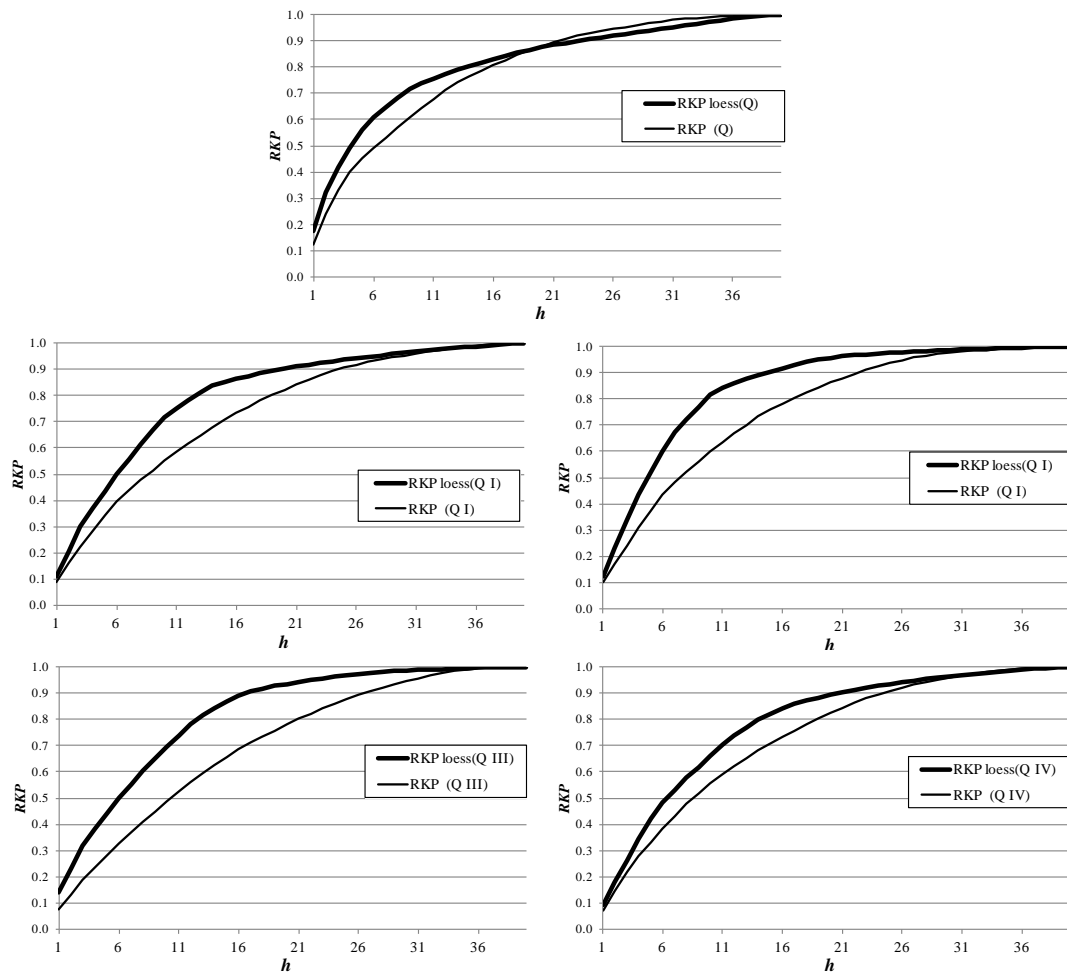
G8.1 r. Dunav, st. Oršava



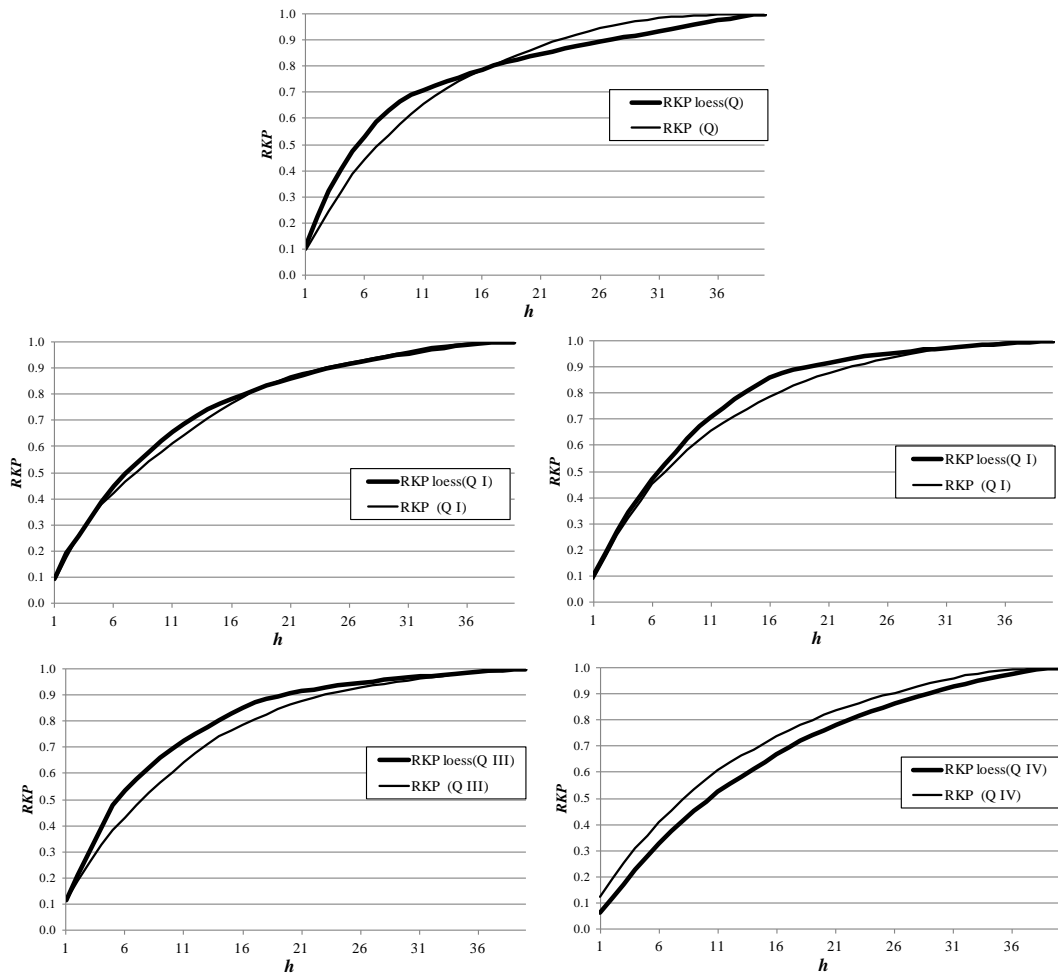
G8.2 r. Dunav, st. Bogojevo



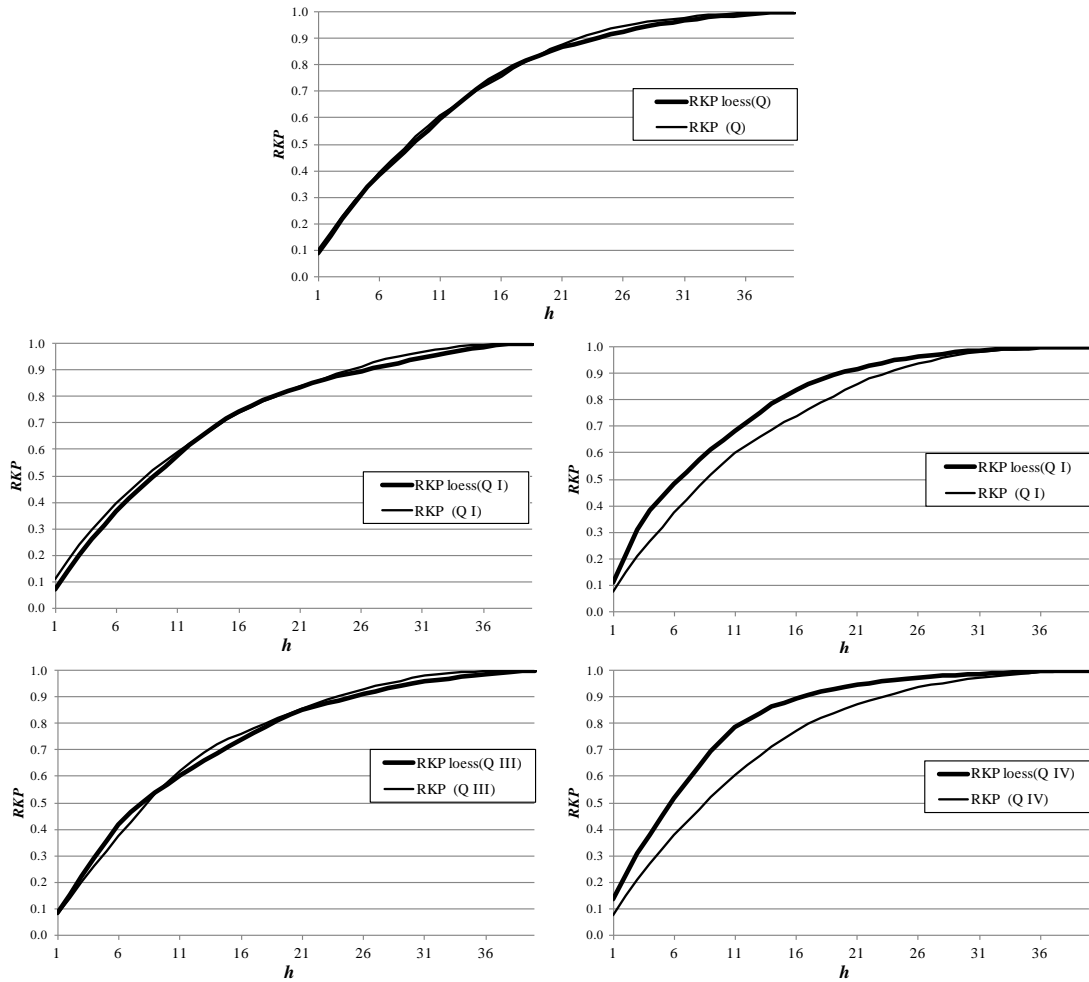
G8.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



G8.4 r. Tisa, st. Senta

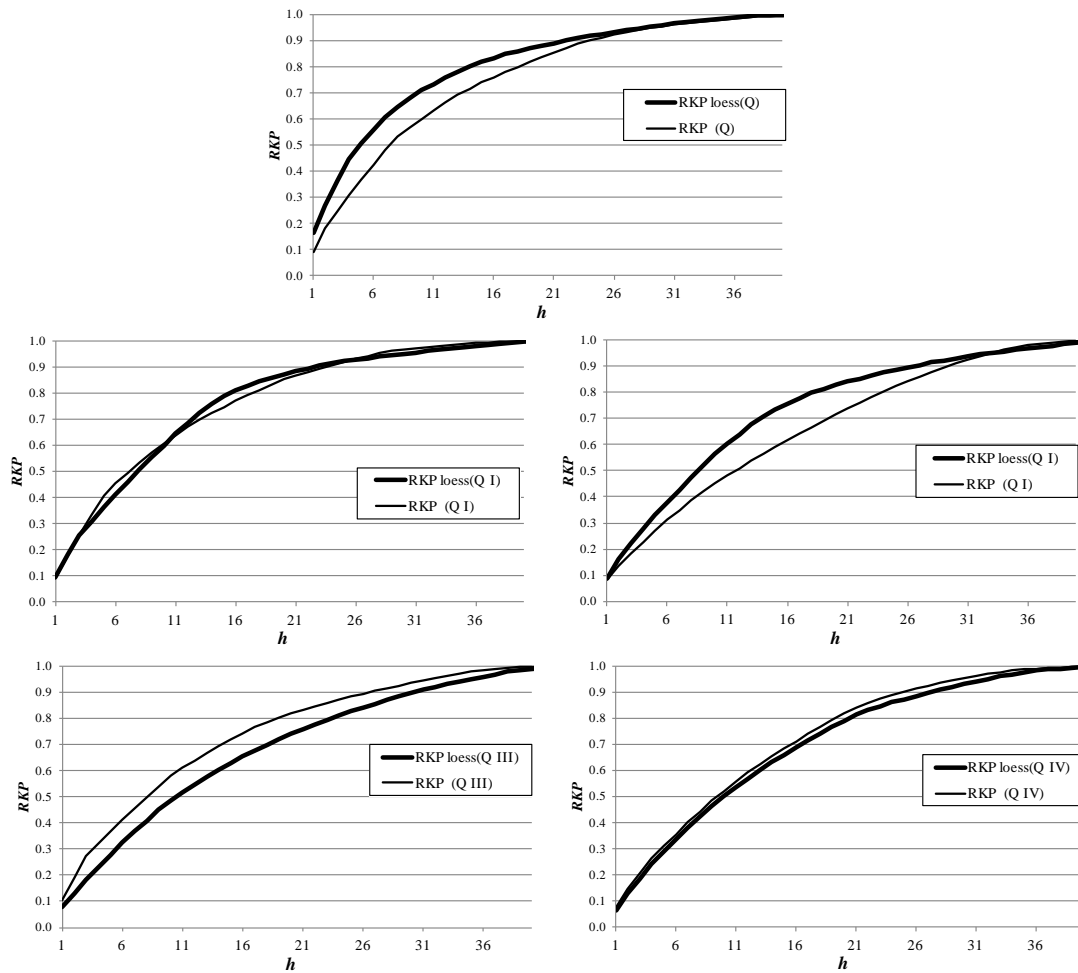


G8.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

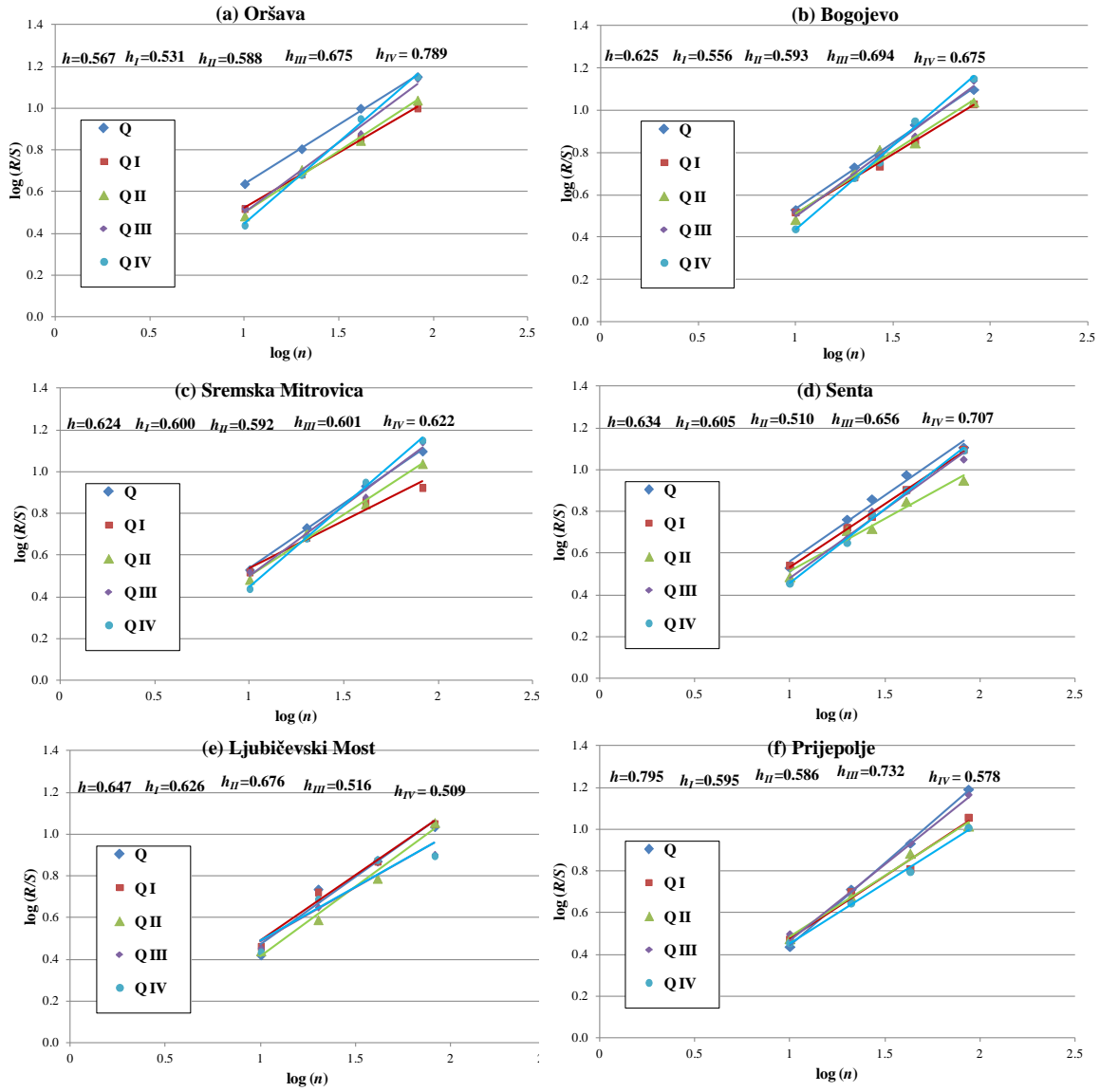




G8.6 r. Lim, st. Prijepolje

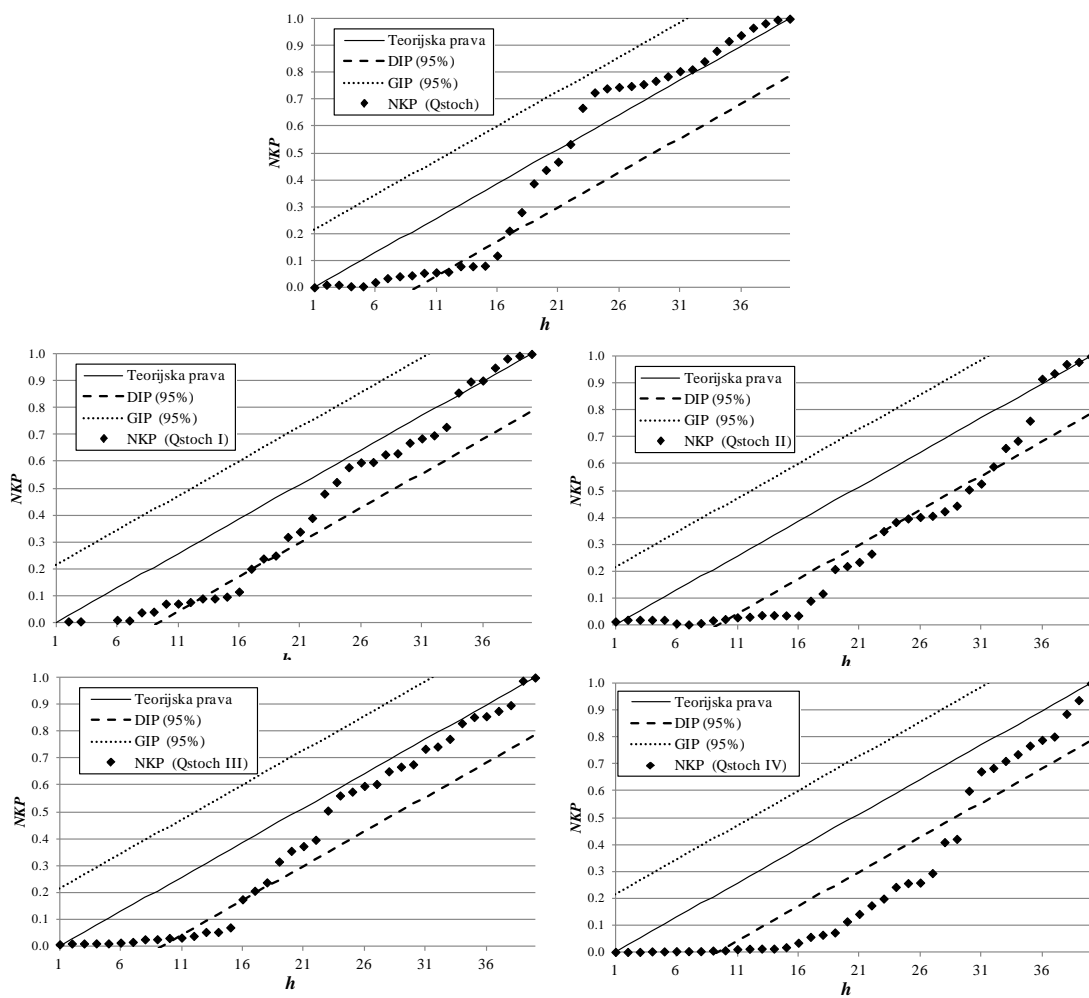


## G-9 Hurstov koeficijent $h$ serija godišnjih i sezonskih proticaja

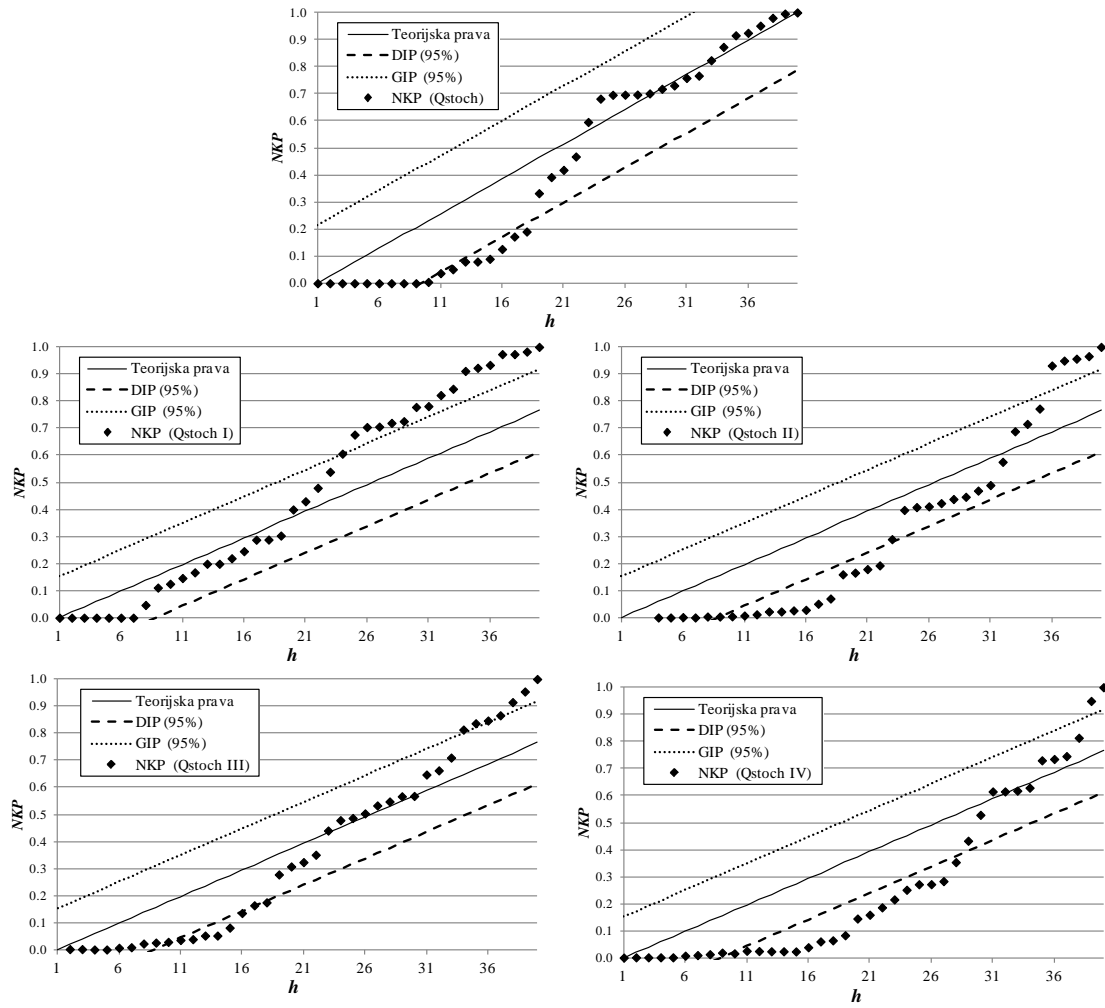


## G-10 Test zaostale periodičnosti reziduala druge vrste $Q''$

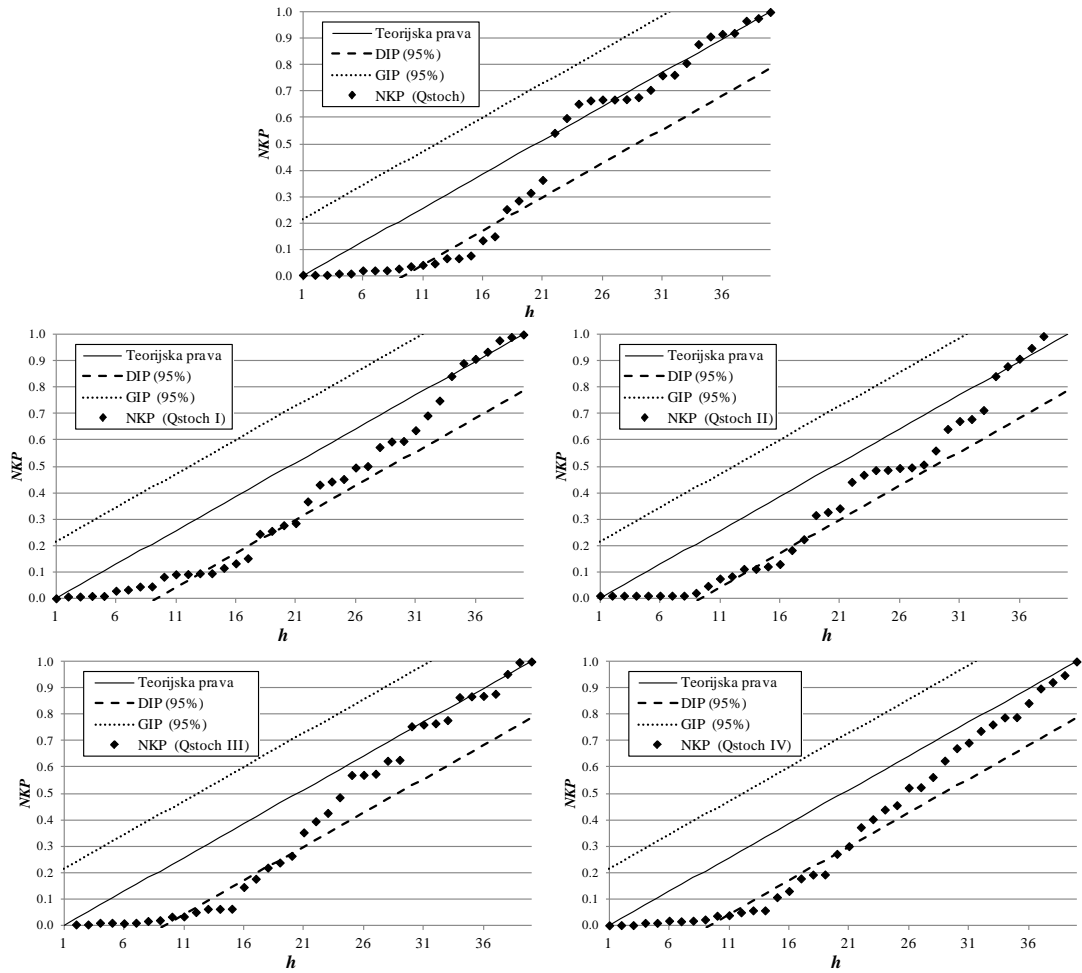
G10.1 r. Dunav, st. Oršava



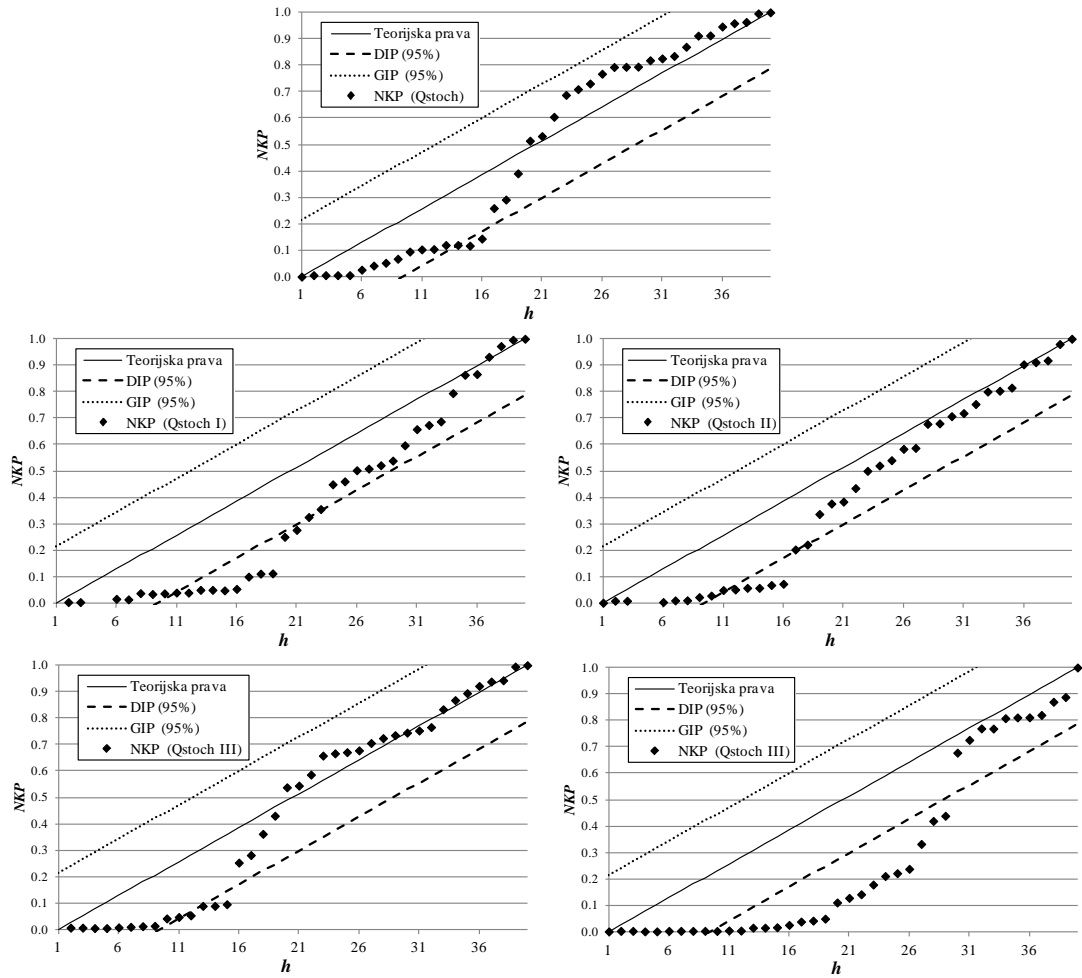
G10.2 r. Dunav, st. Bogojevo



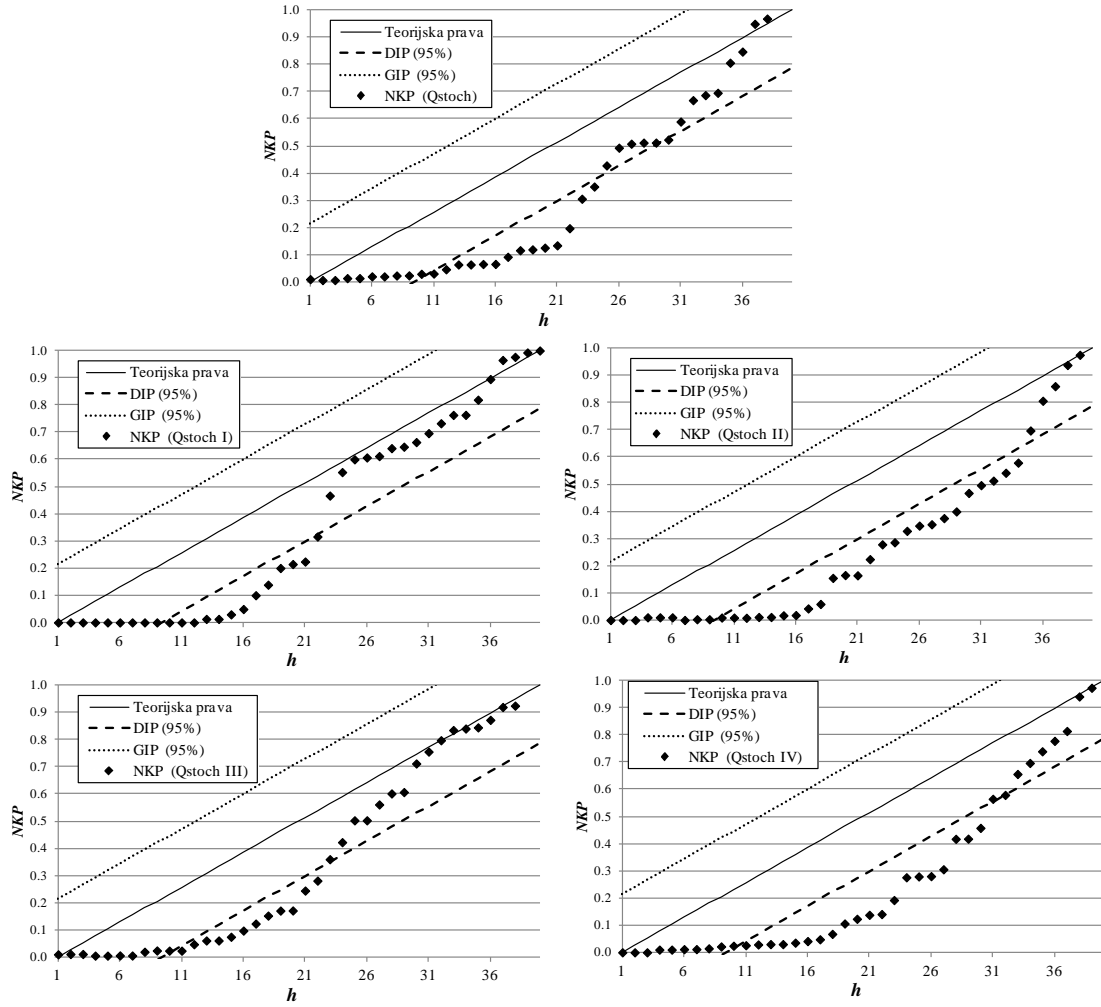
G10.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



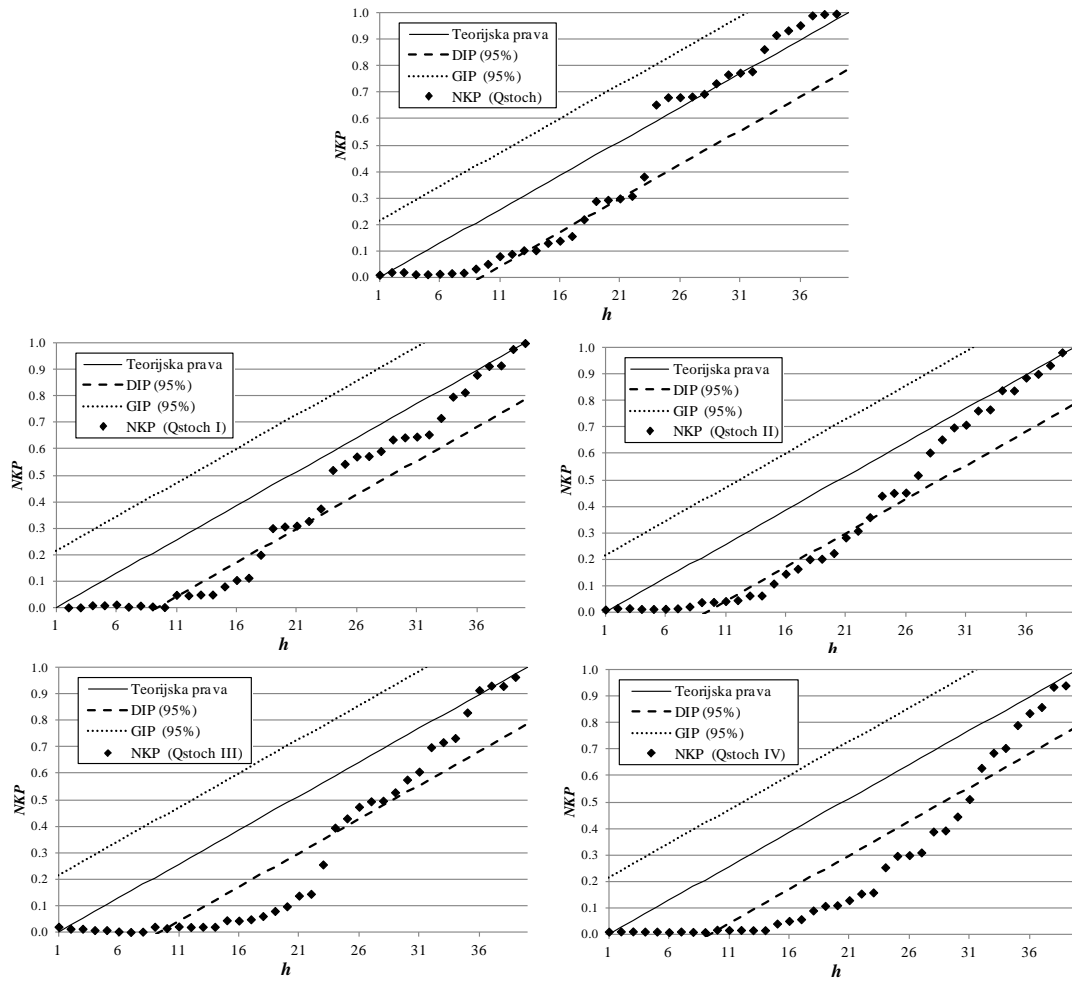
G10.4 r. Tisa, st. Senta



G10.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most



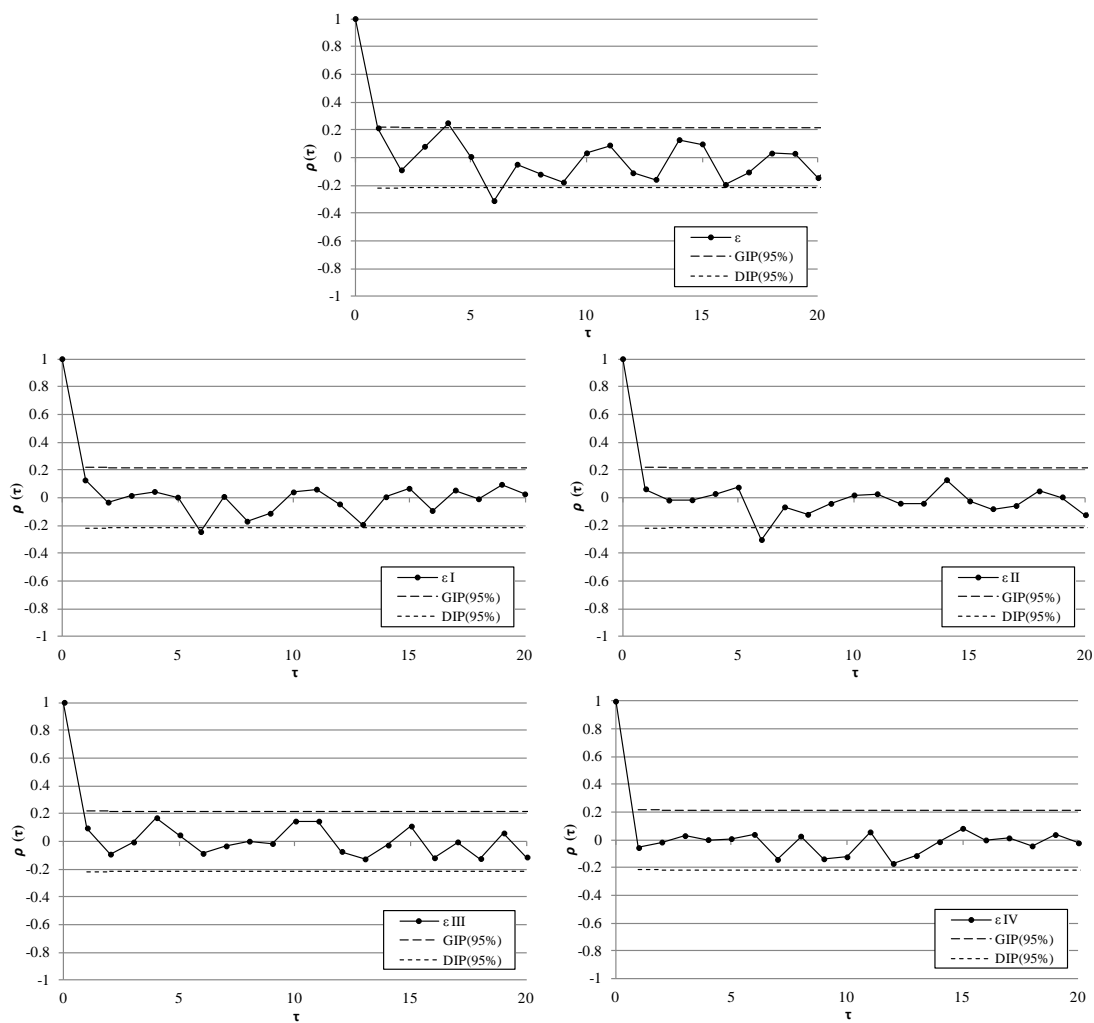
G10.6 r. Lim, st. Prijepolje



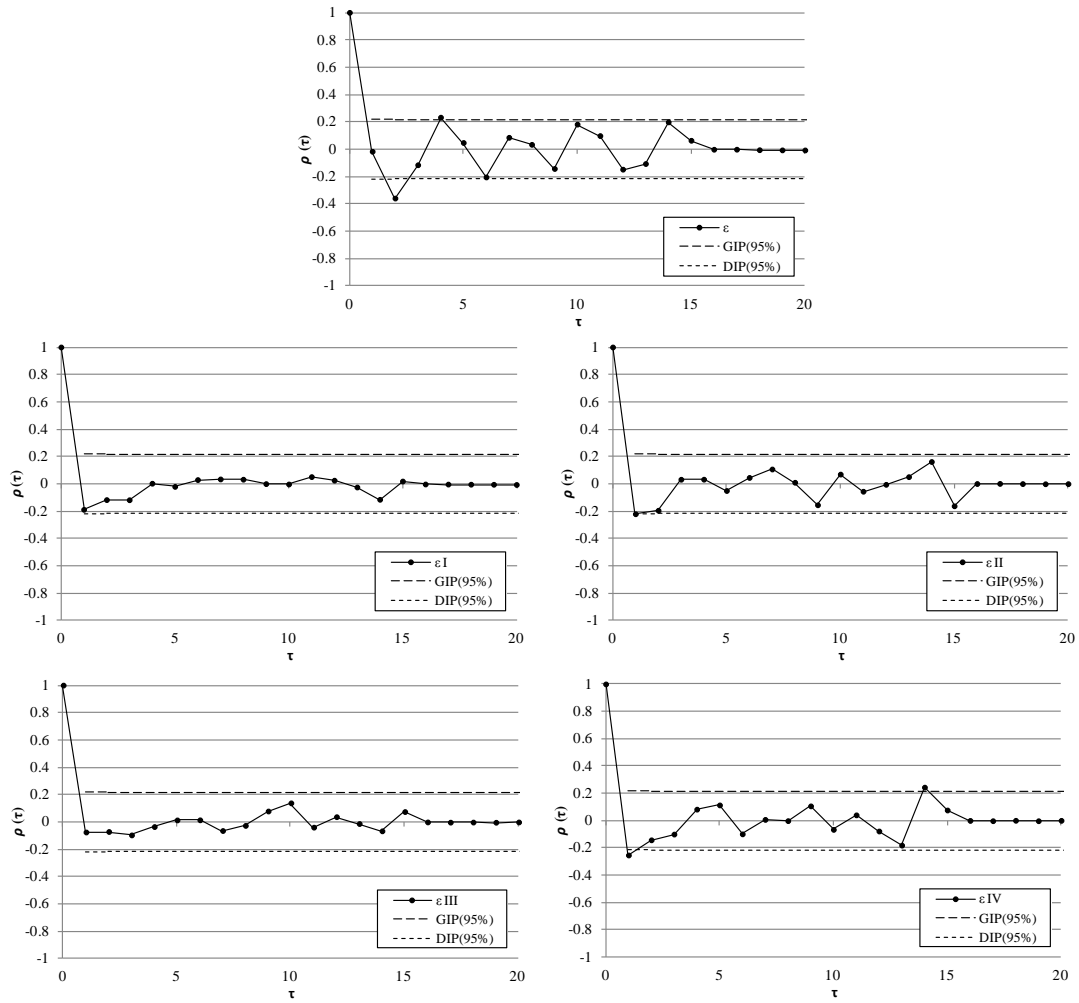


## G-11 Autokorelaciona funkcija (ACF) greške modeliranja $\varepsilon$ modifikovane TIPS metode

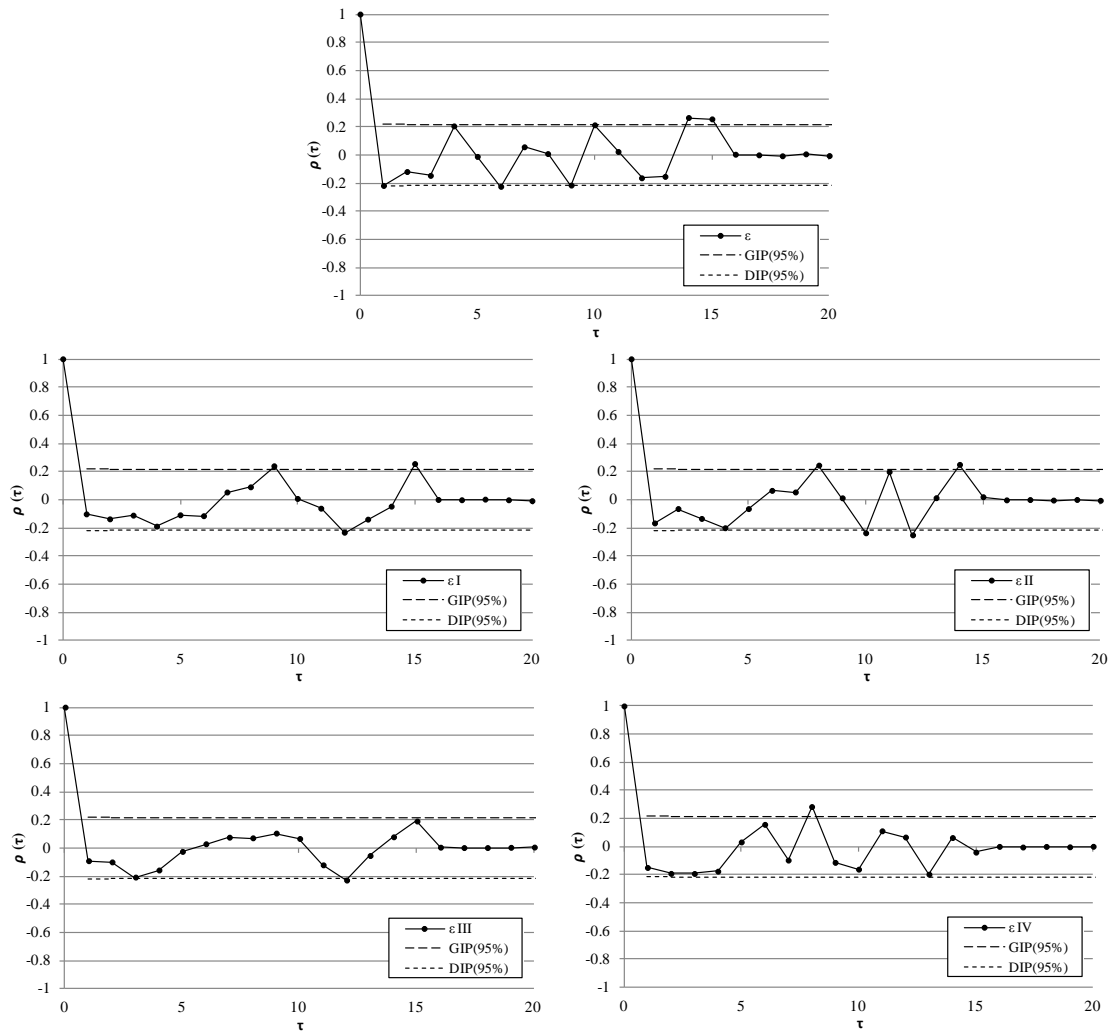
G11.1 r. Dunav, st. Oršava



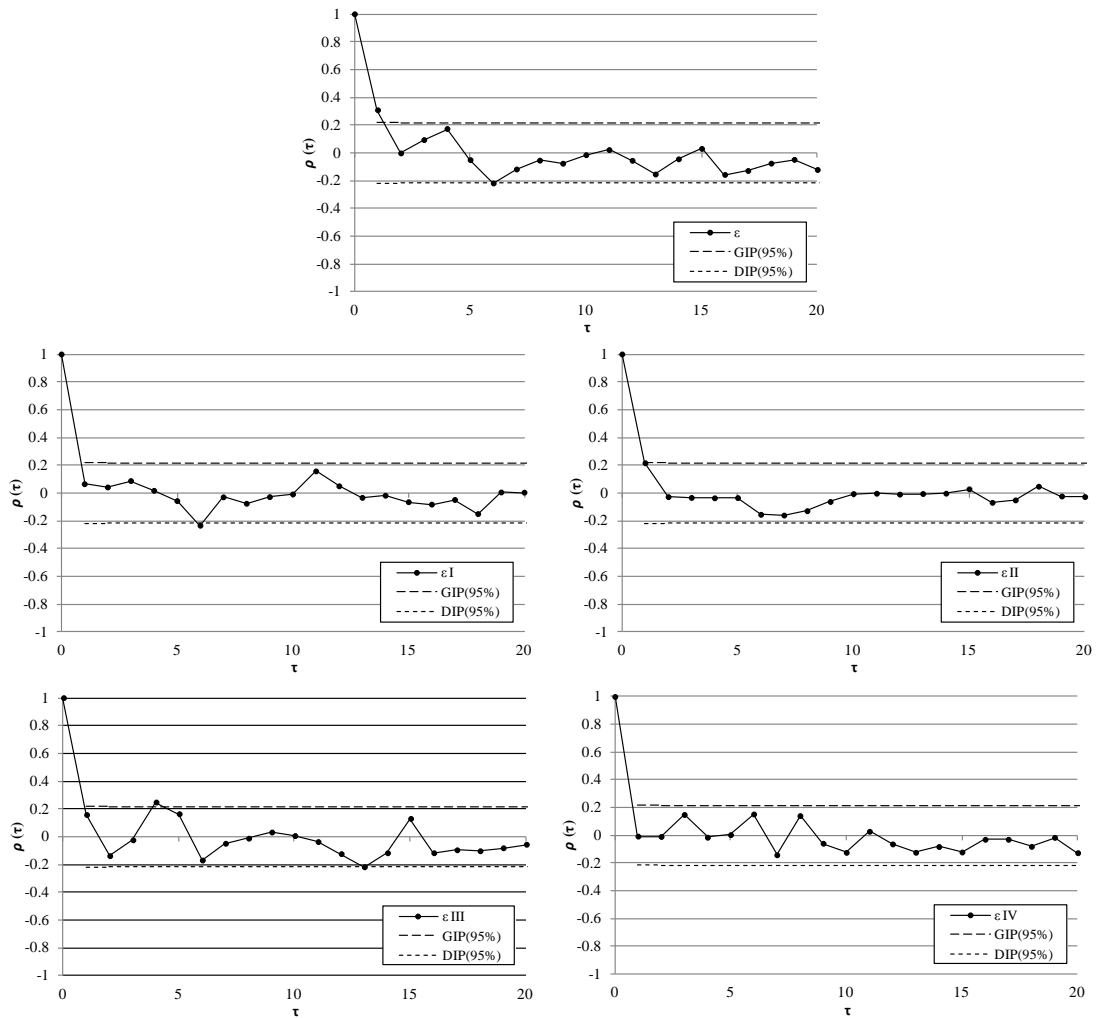
G11.2 r. Dunav, st. Bogojevo



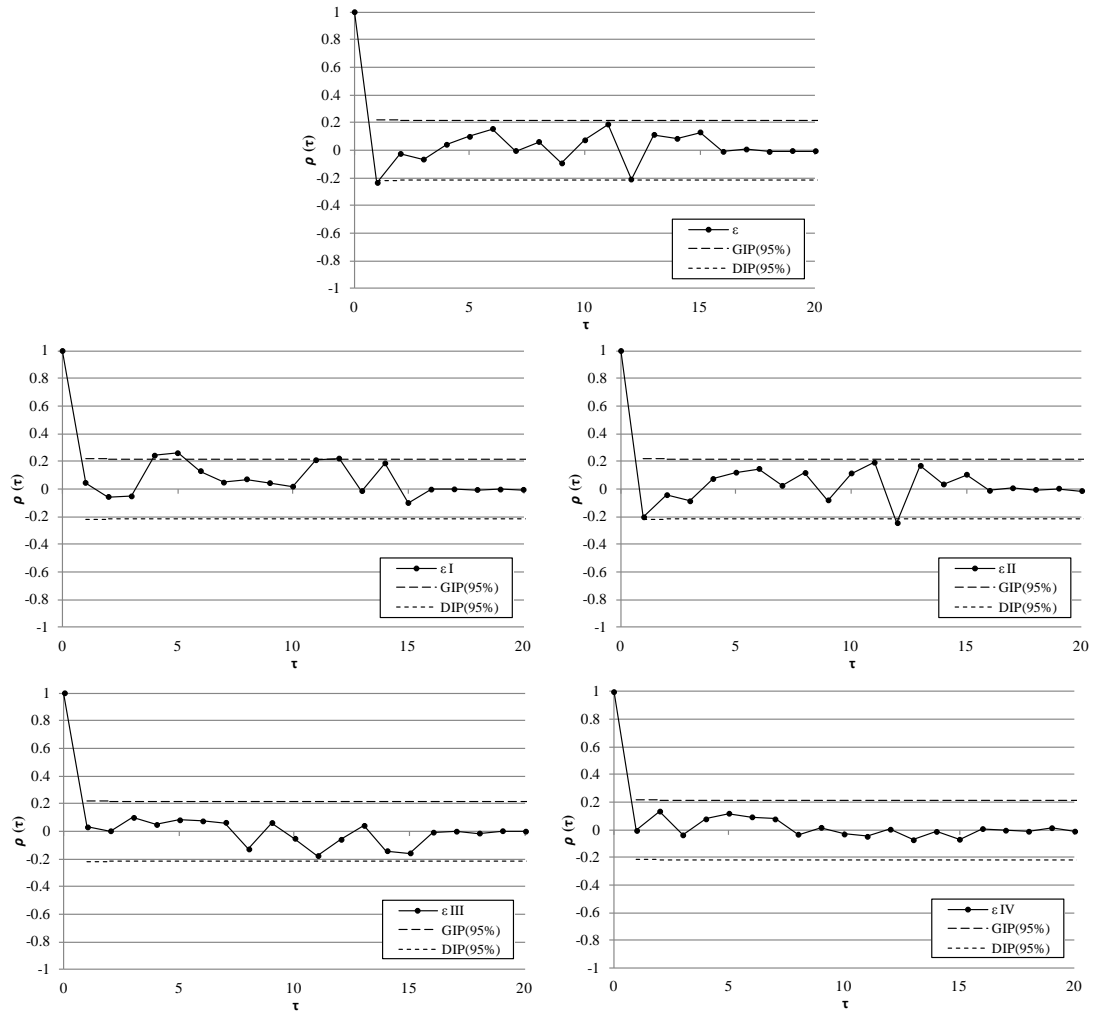
G11.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



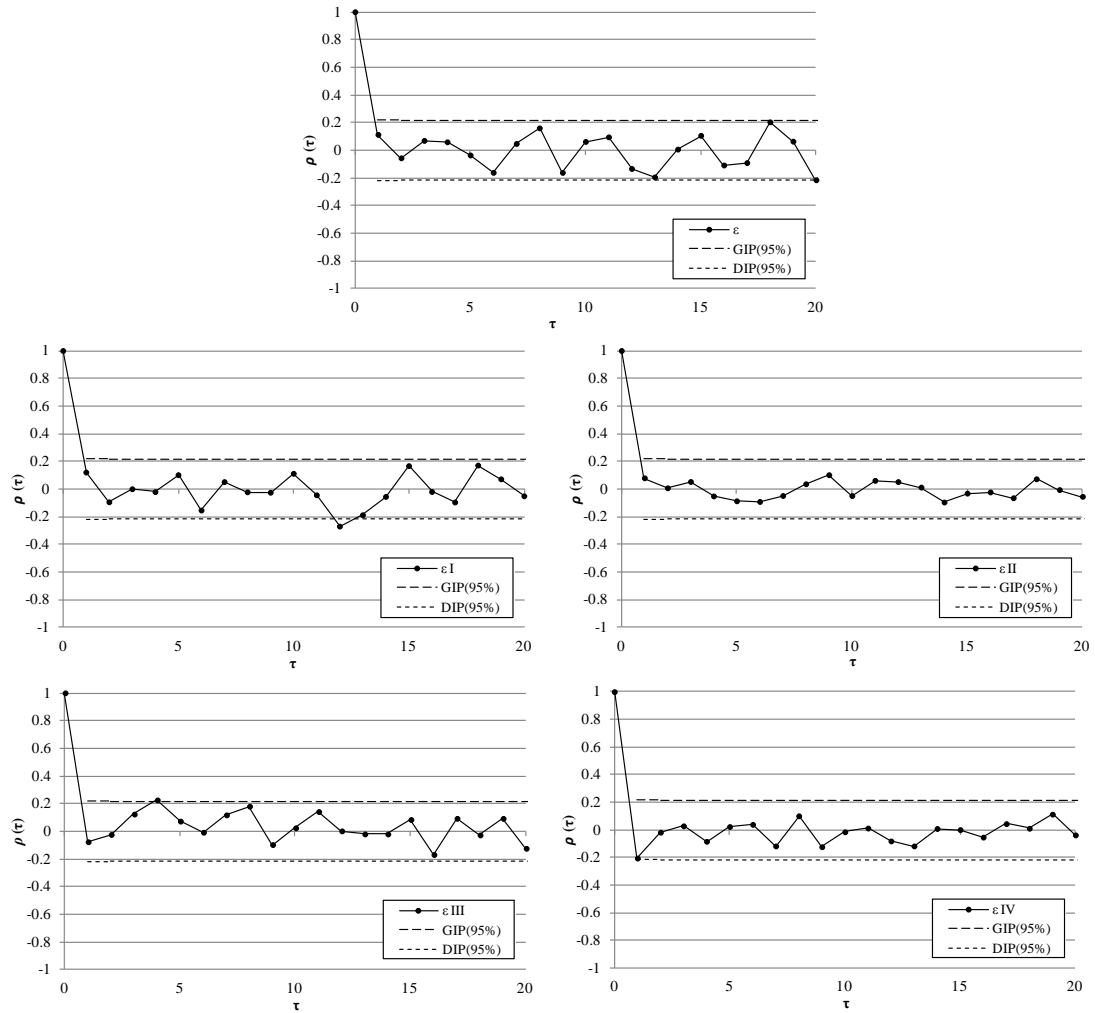
G11.4 r. Tisa, st. Senta



G11.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

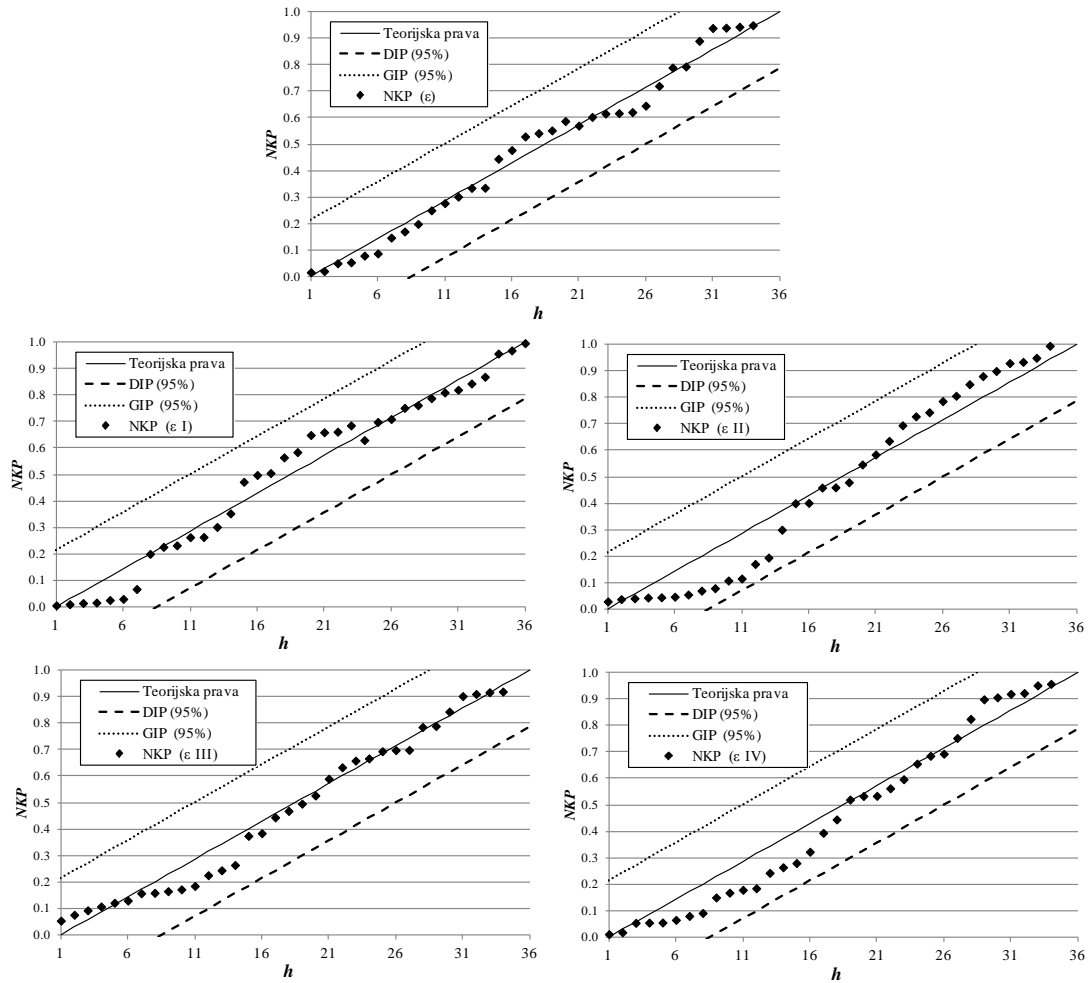


G11.6 r. Lim, st. Prijepolje

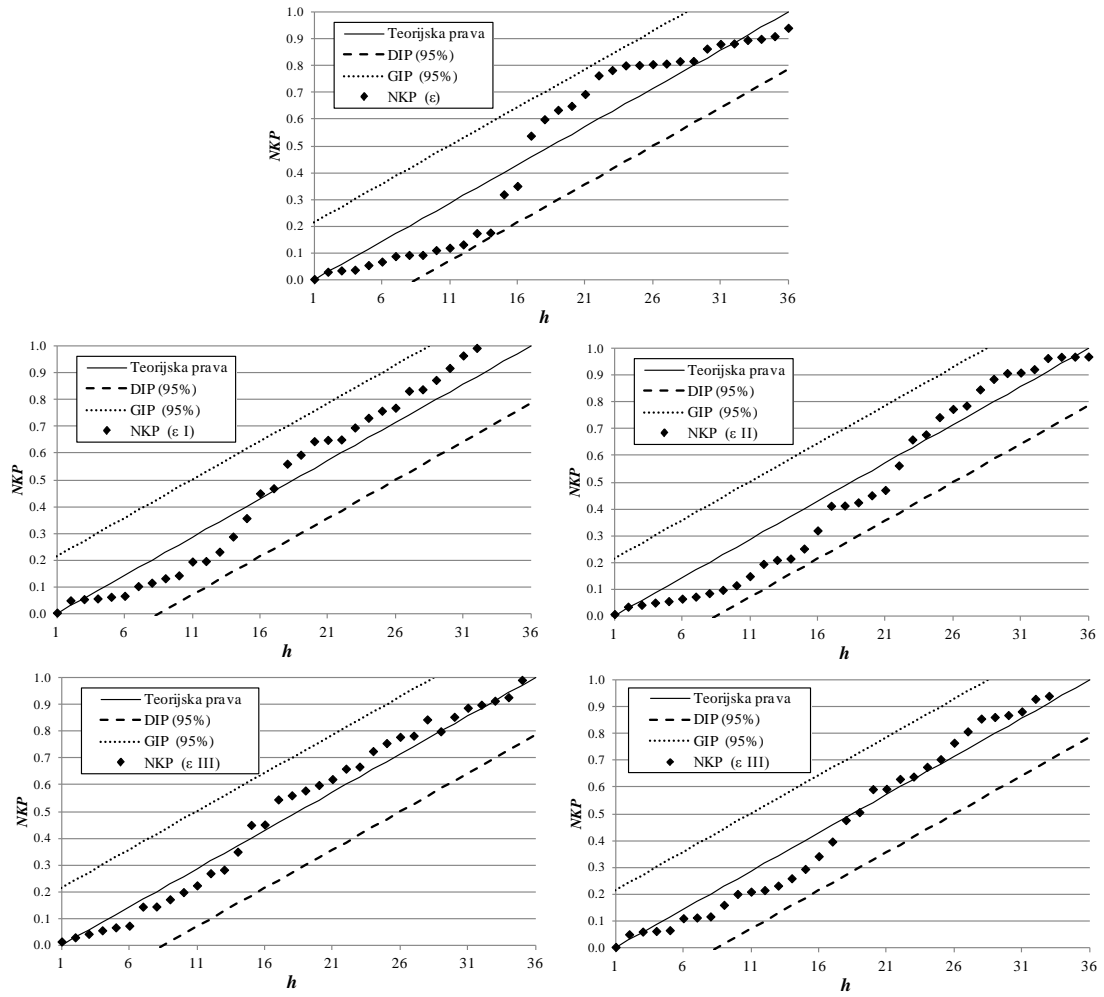


## G-12 Test zaostale periodičnosti greške modeliranja modifikovane TIPS metode

G12.1 r. Dunav, st. Oršava

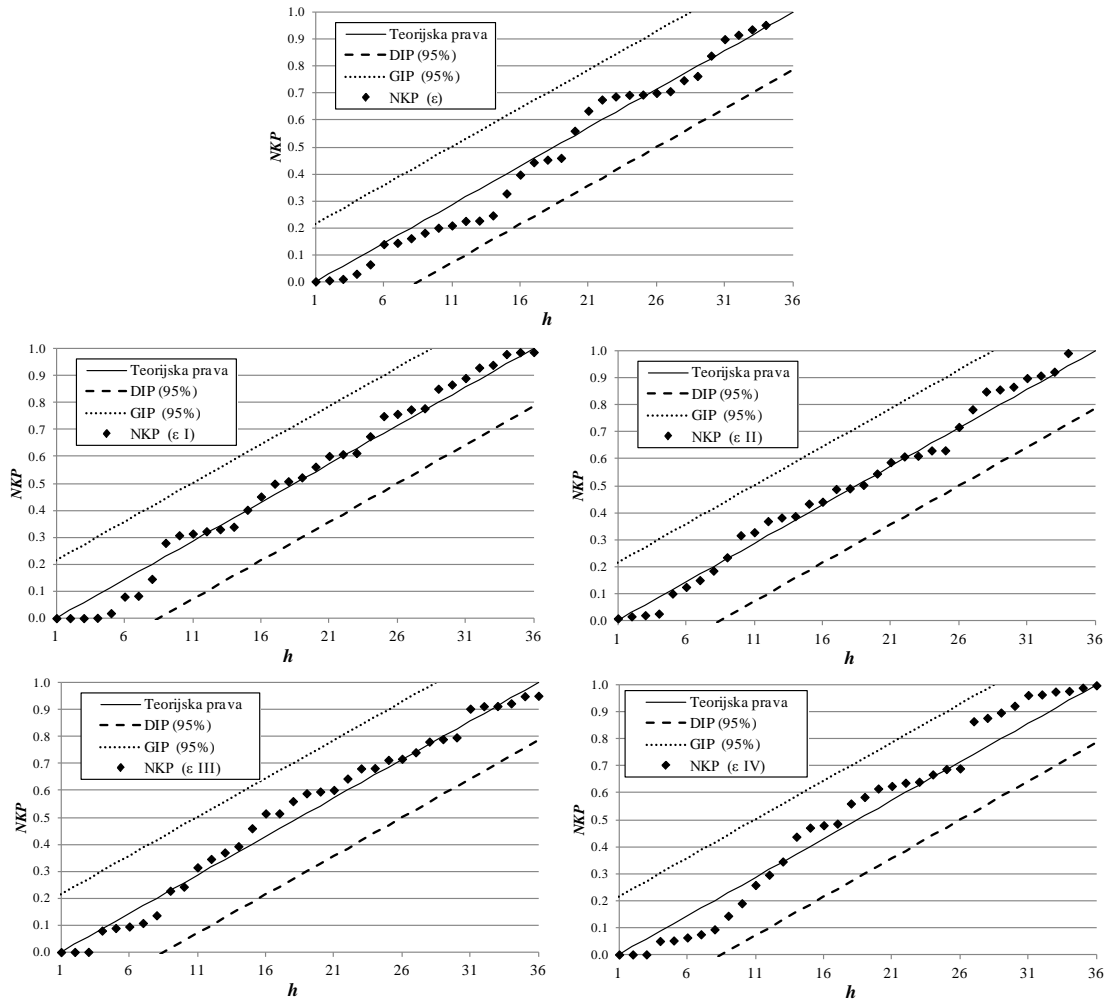


G12.2 r. Dunav, st. Bogojevo

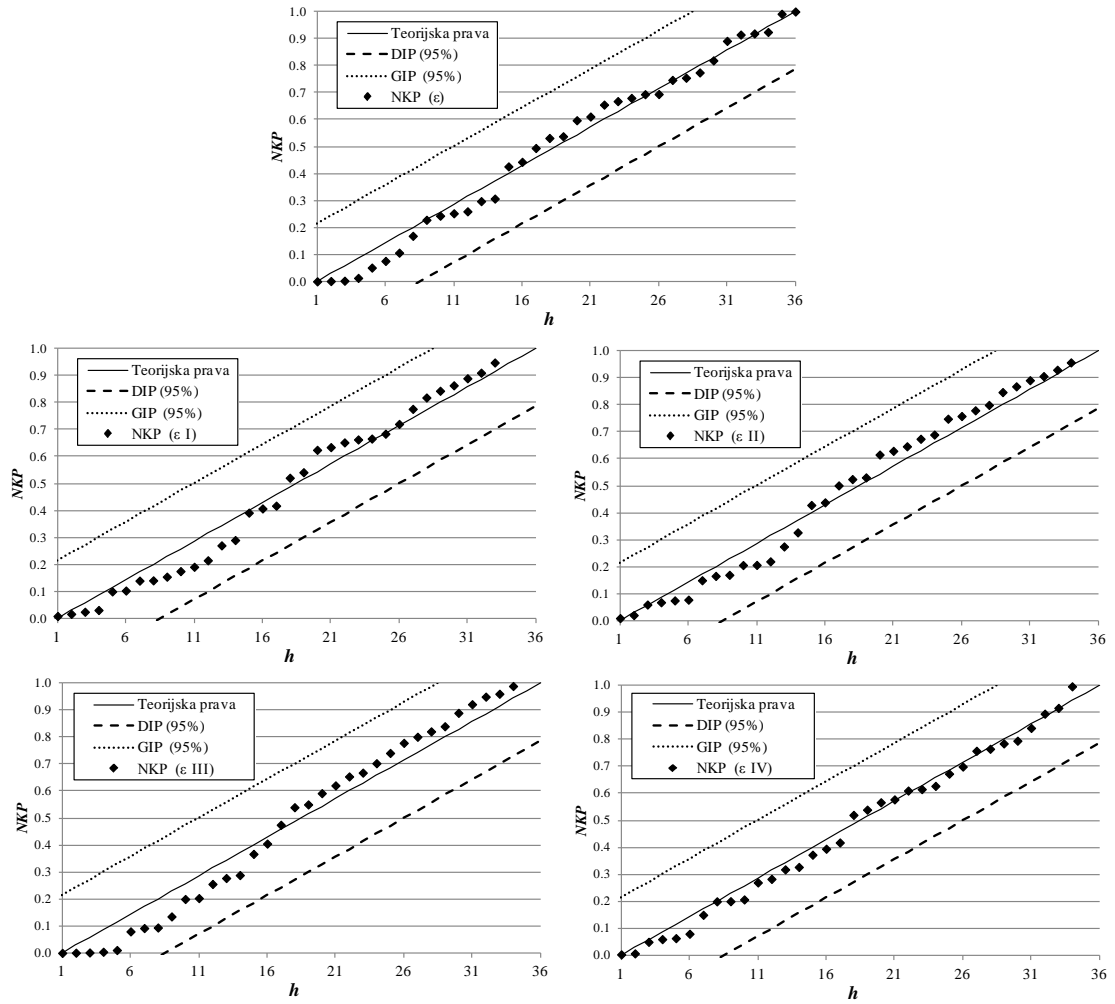




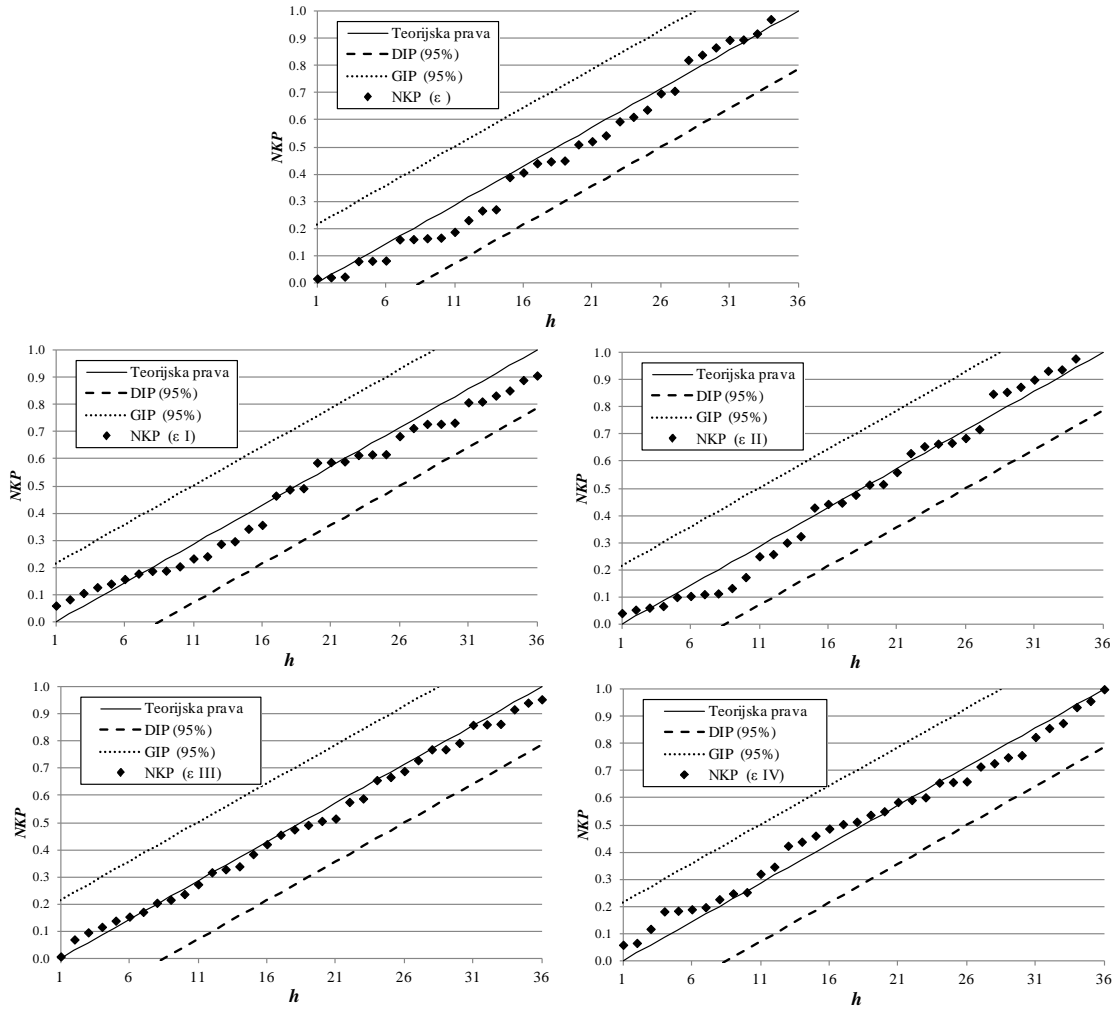
G12.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



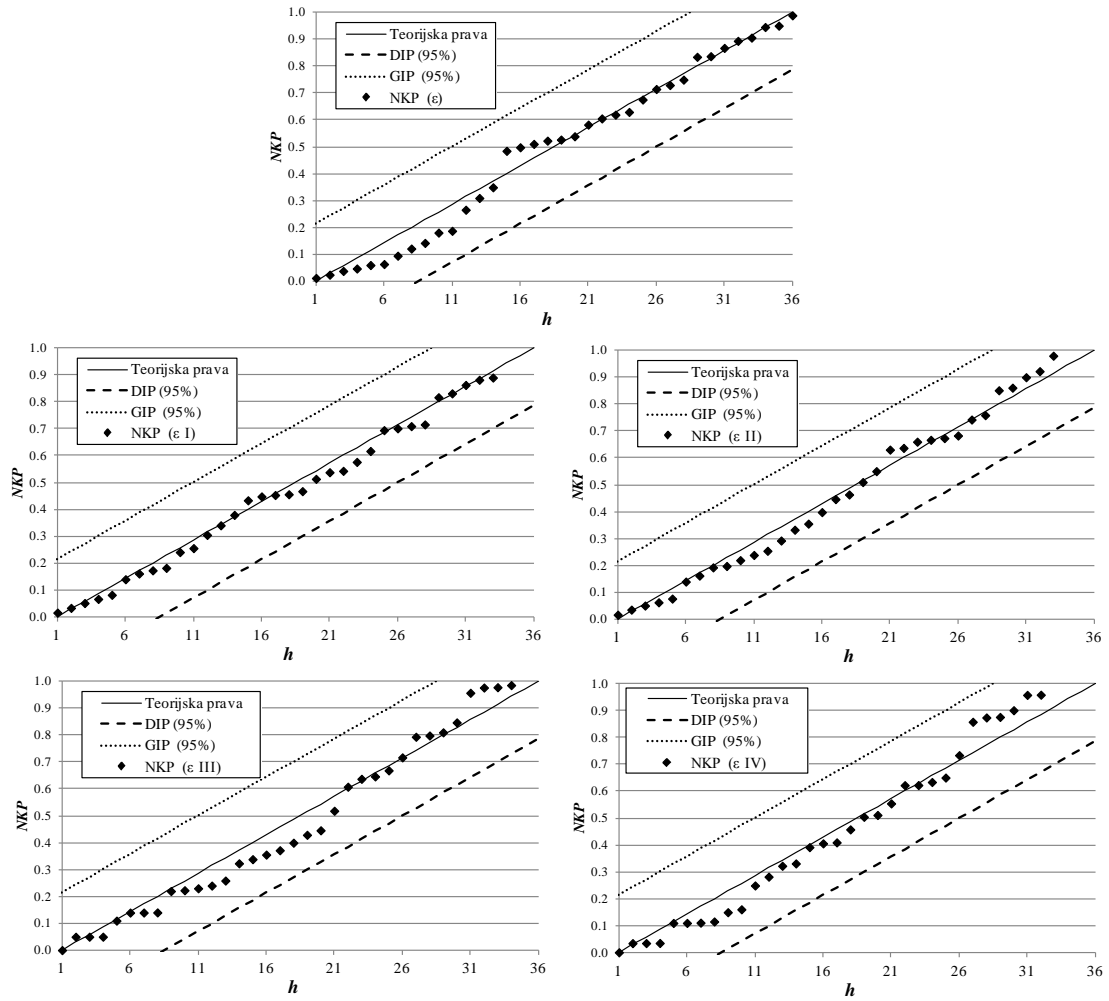
G12.4 r. Tisa, st. Senta



G12.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

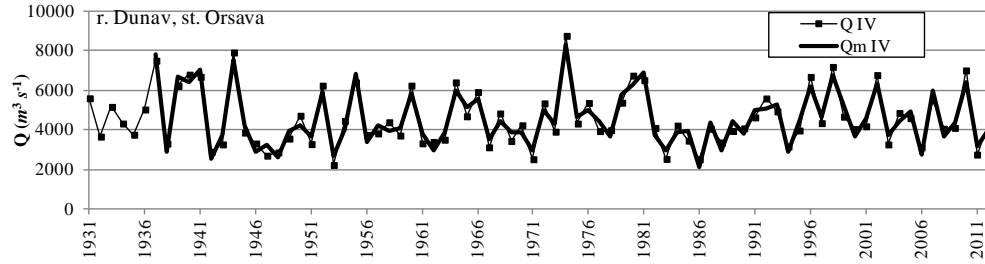
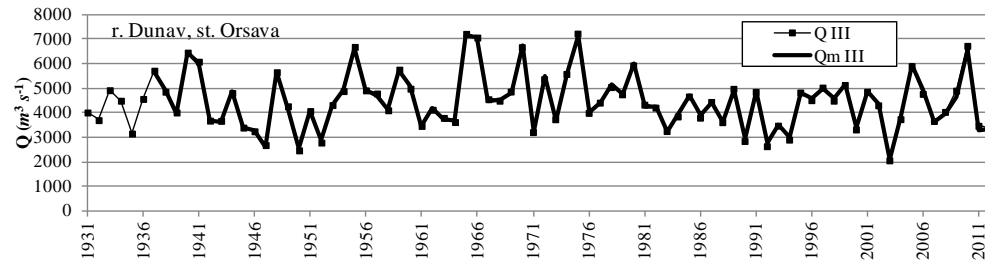
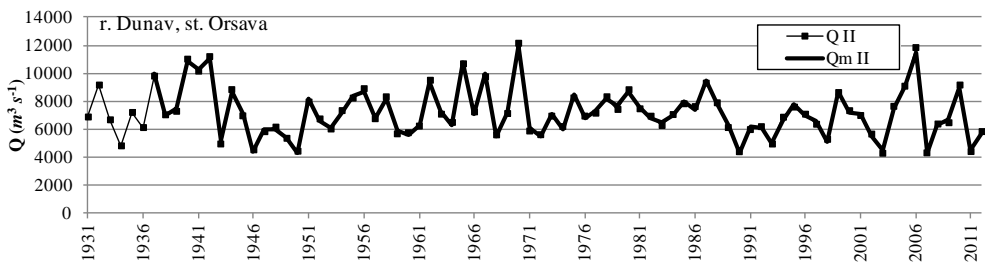
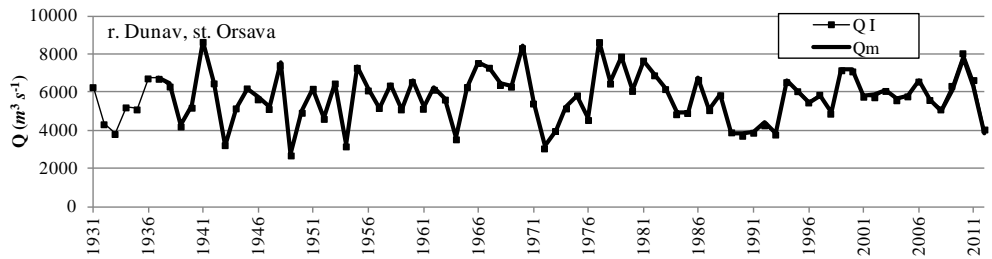
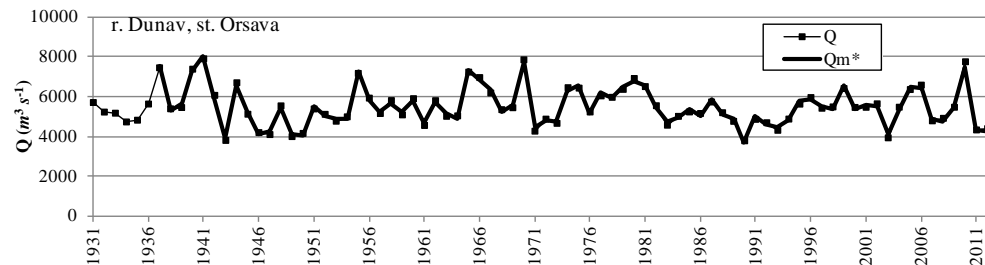
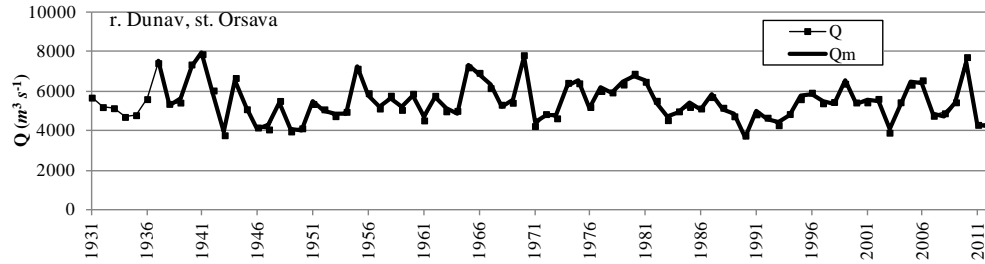


G12.6 r. Lim, st. Prijepolje

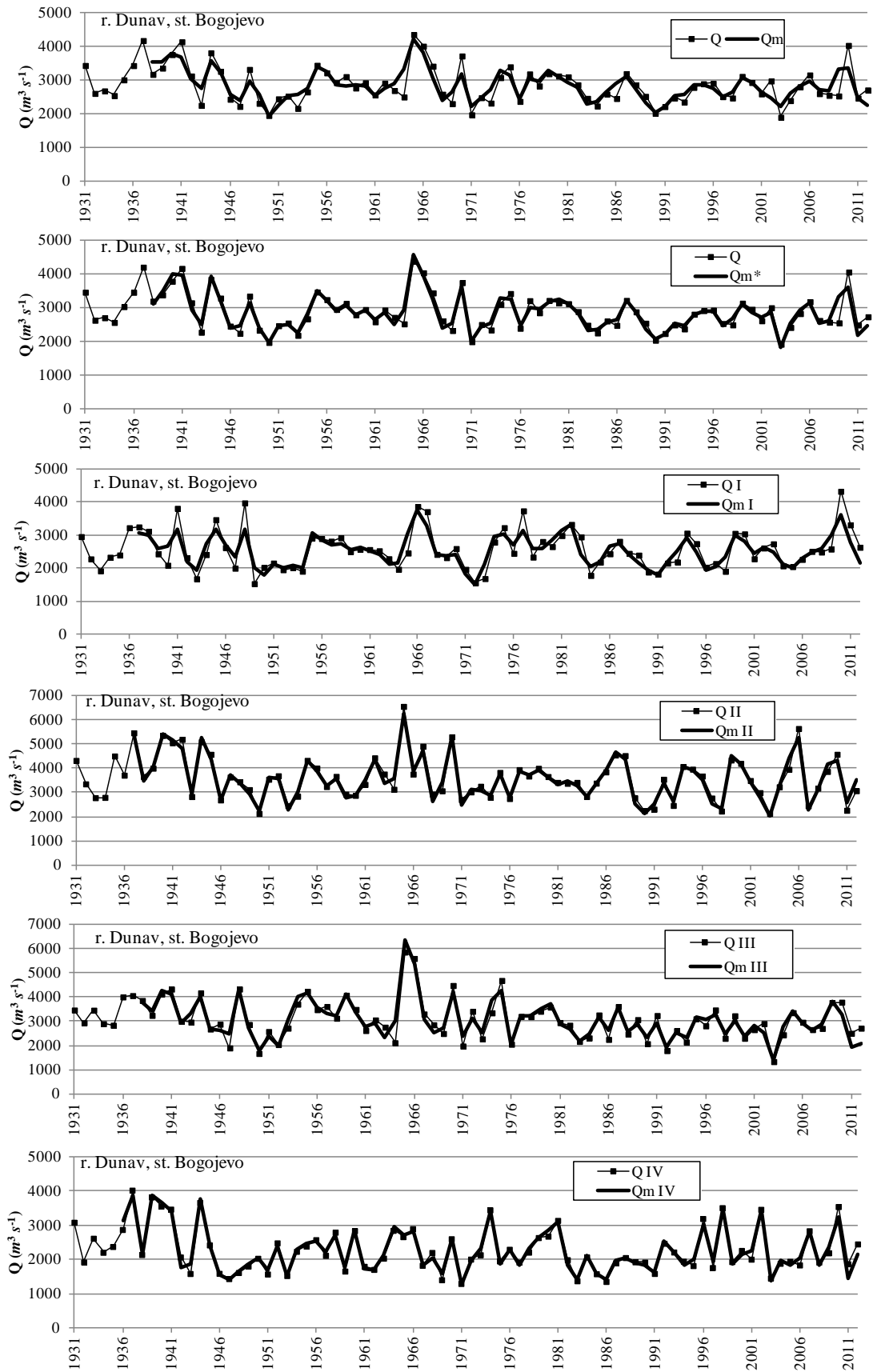


## G-13 Modeliranje srednjih godišnjih i sezonskih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi

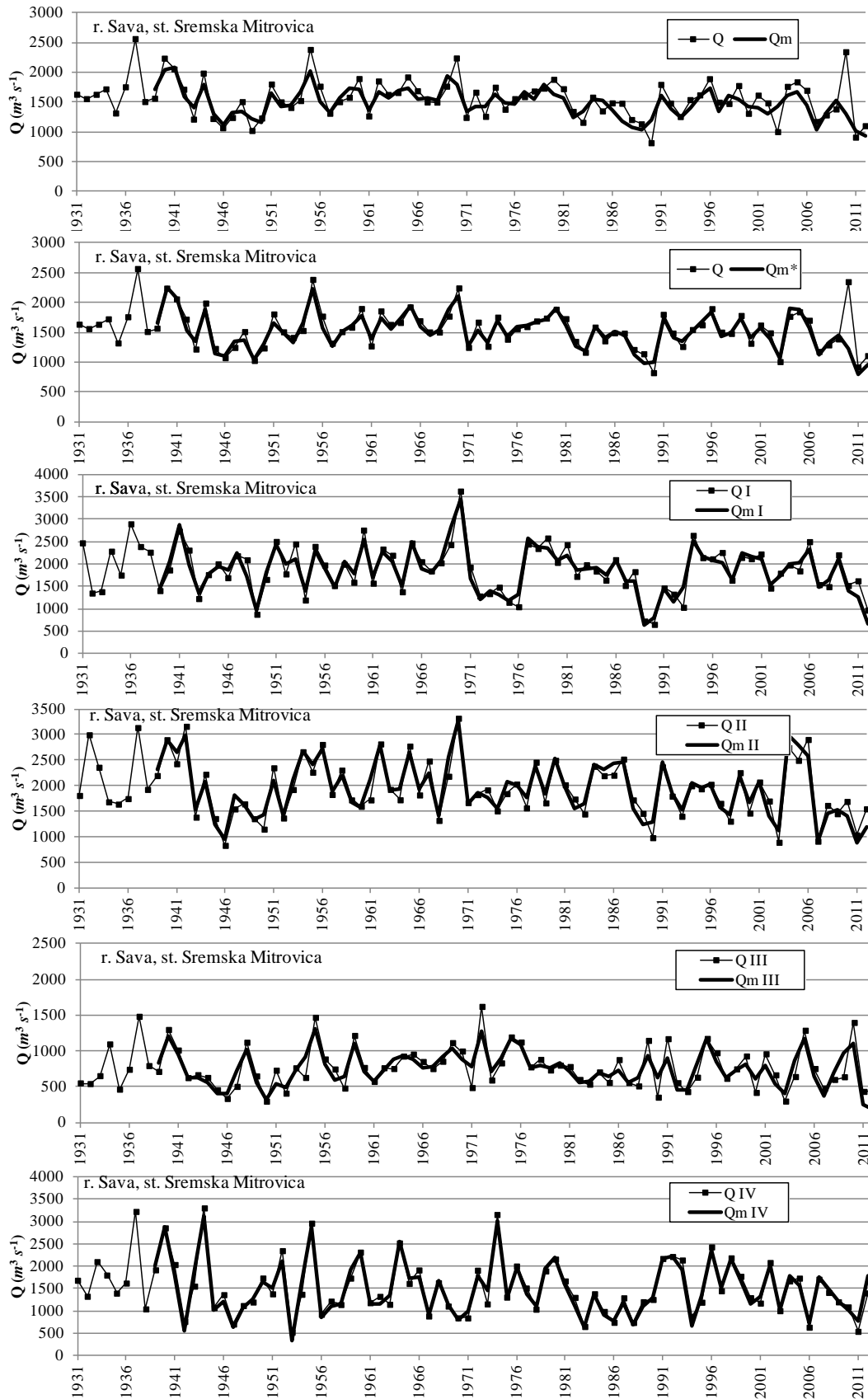
### G13.1 r. Dunav, st. Oršava



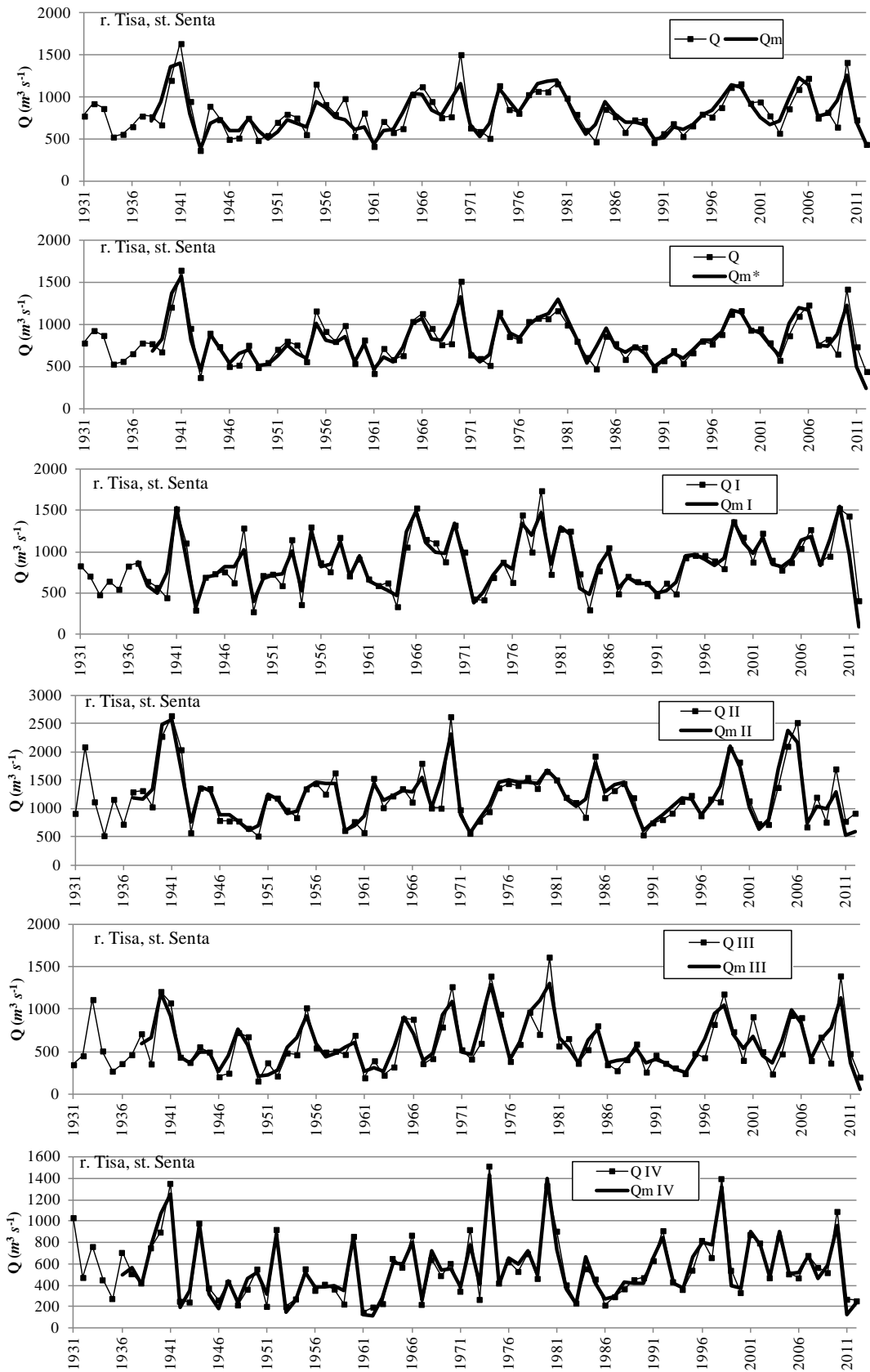
G13.2 r. Dunav, st. Bogojevo



G13.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica

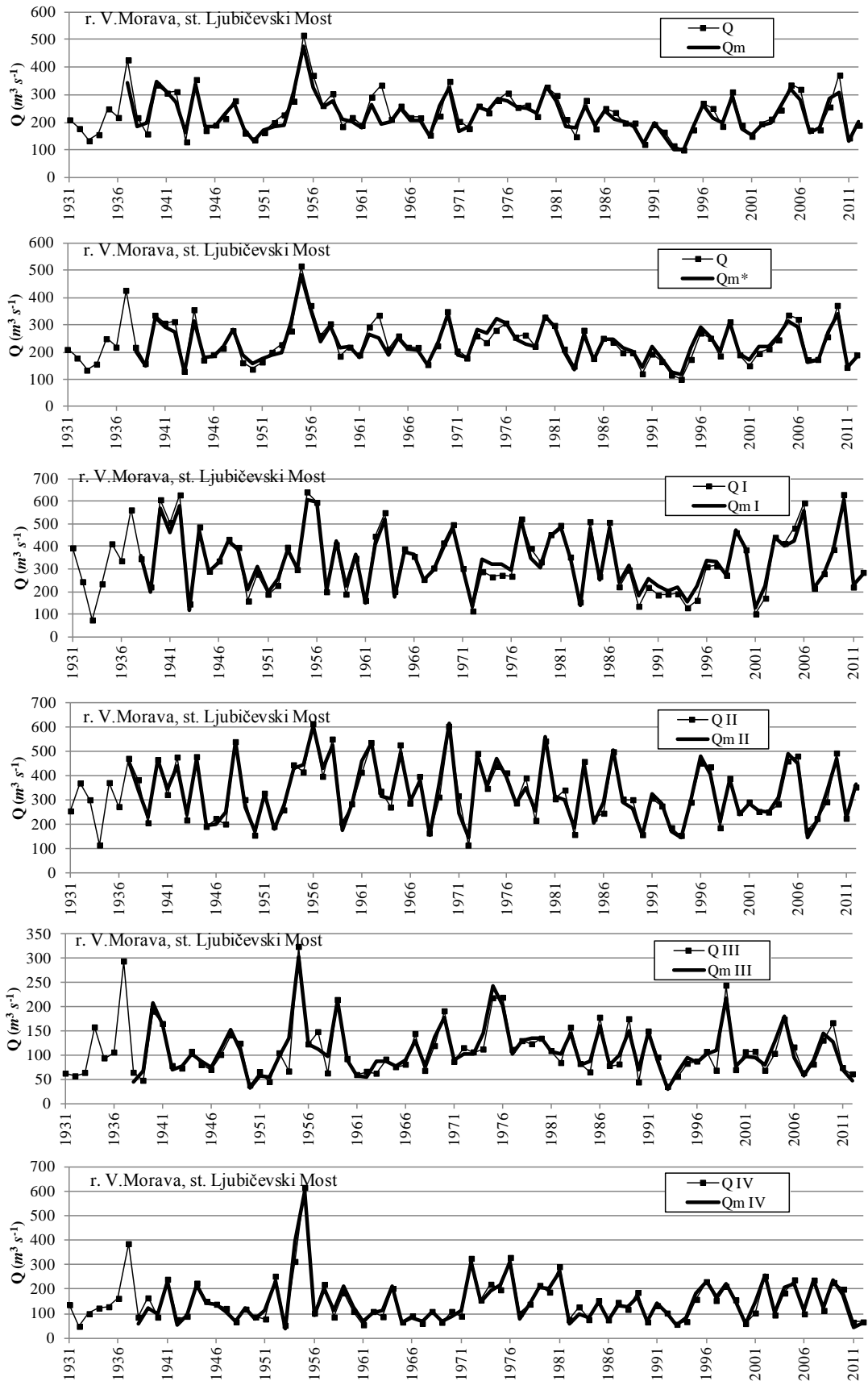


G13.4 r. Tisa, st. Senta

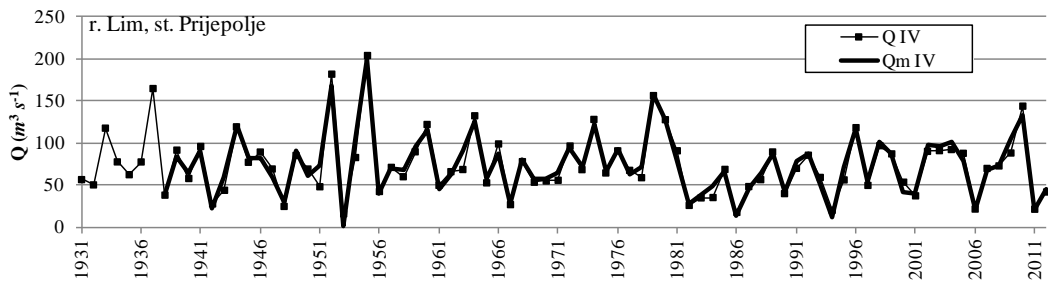
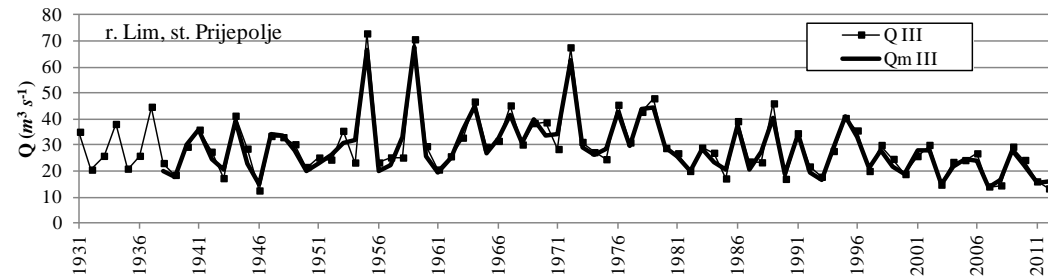
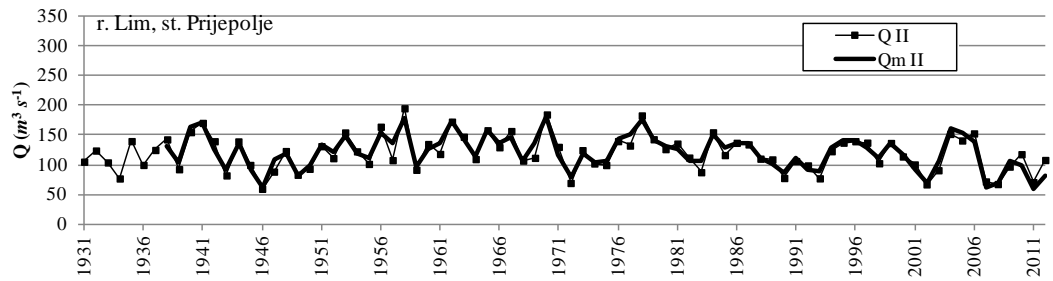
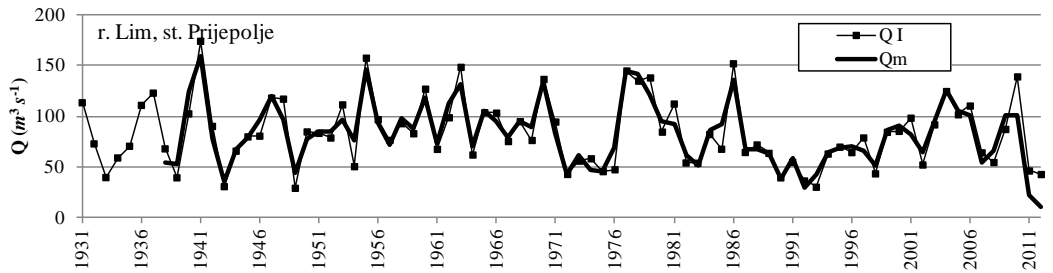
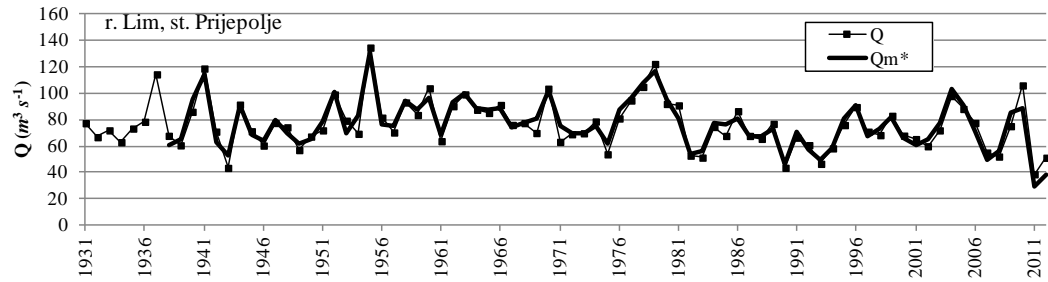
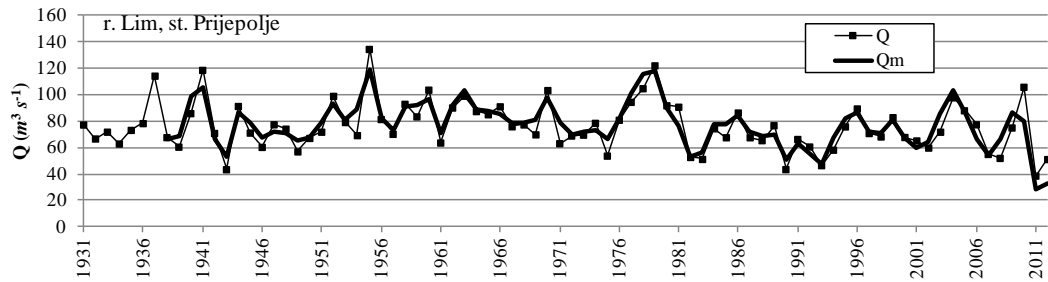




G13.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

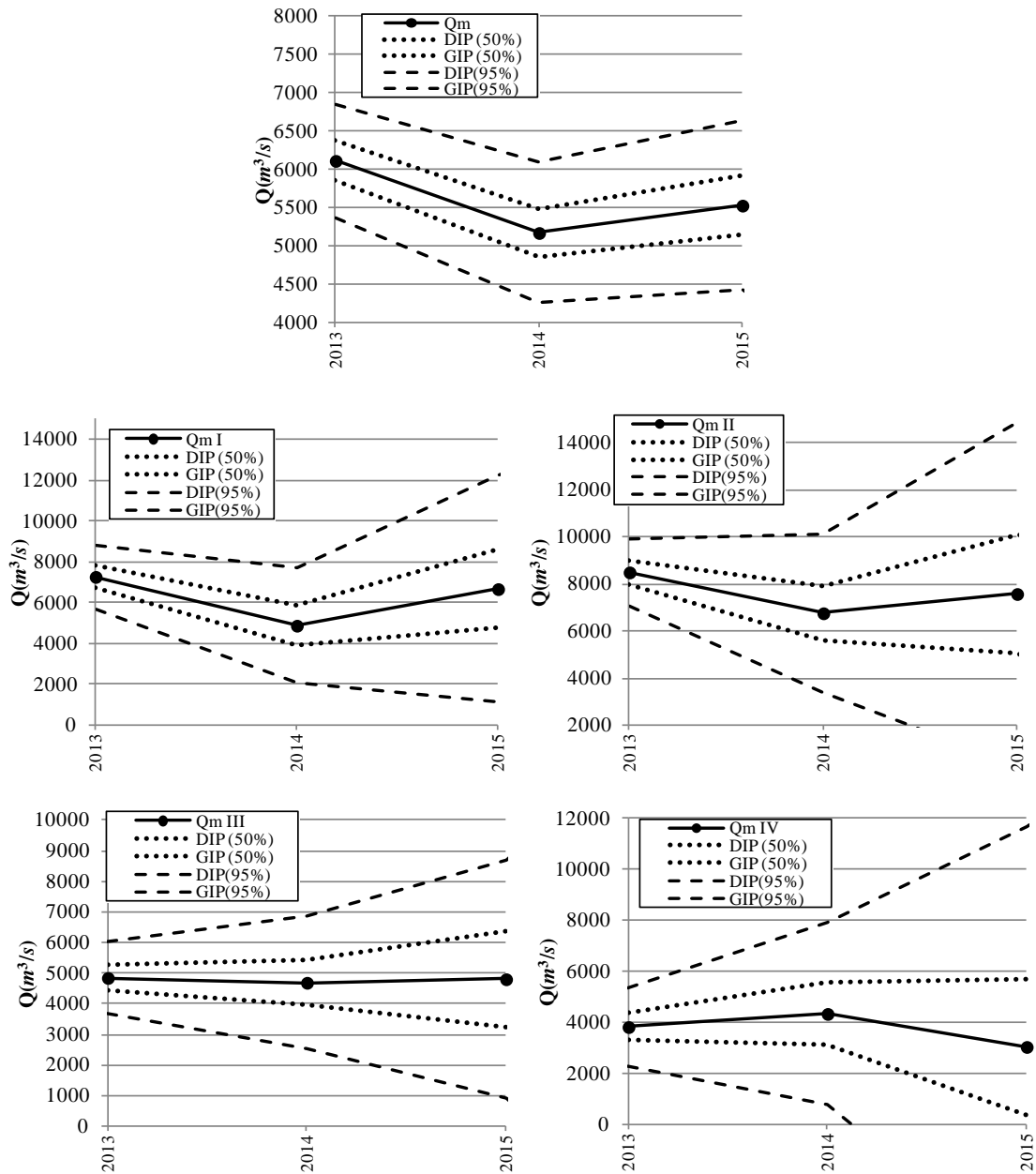


G13.6 r. Lim, st. Prijepolje

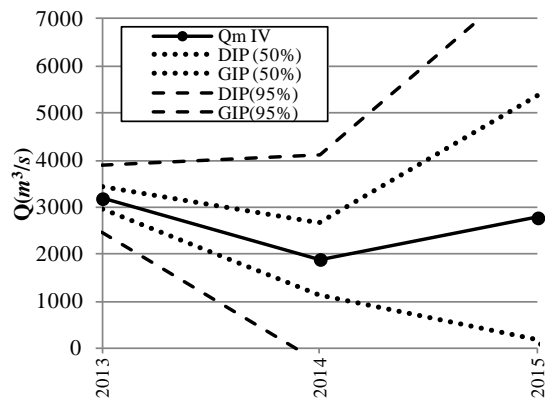
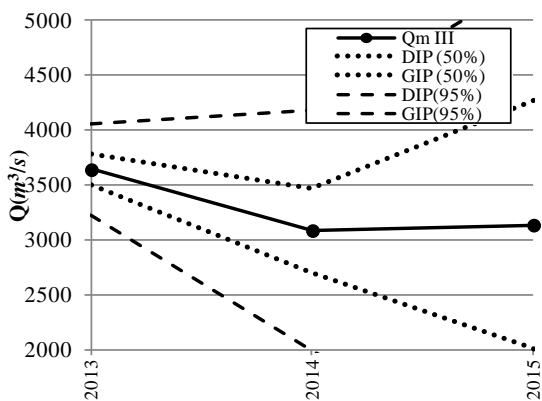
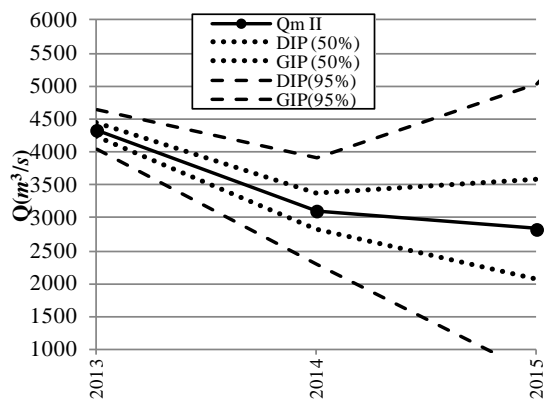
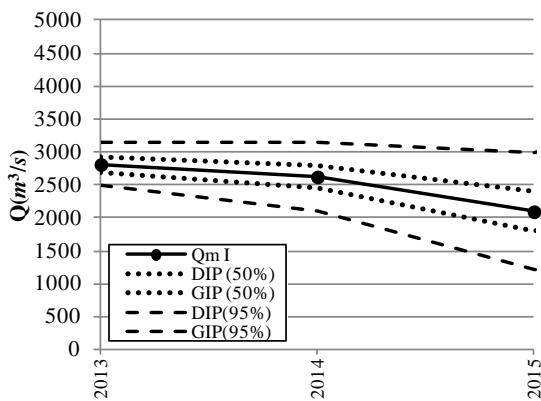
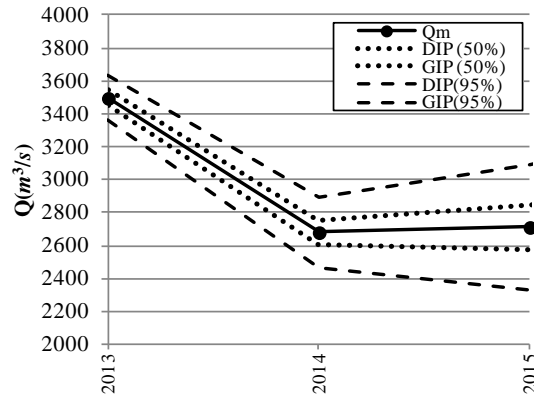


## G-14 Kratkoročne projekcije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi

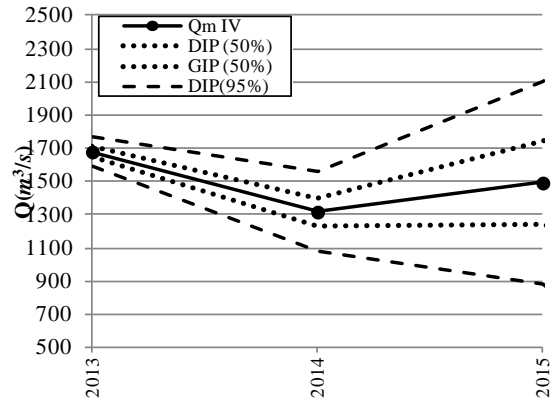
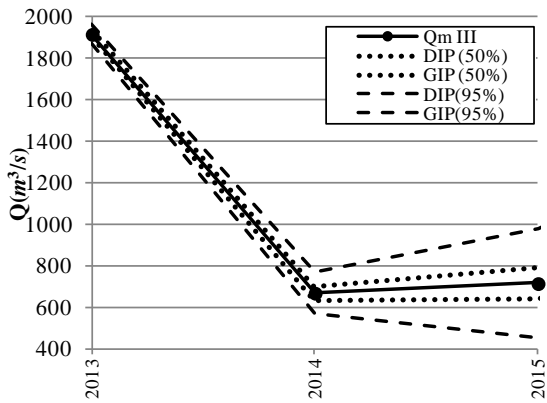
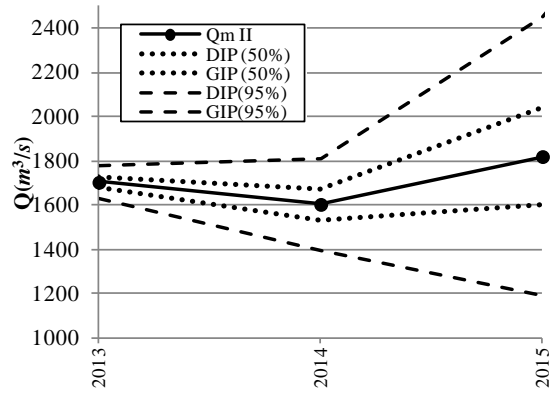
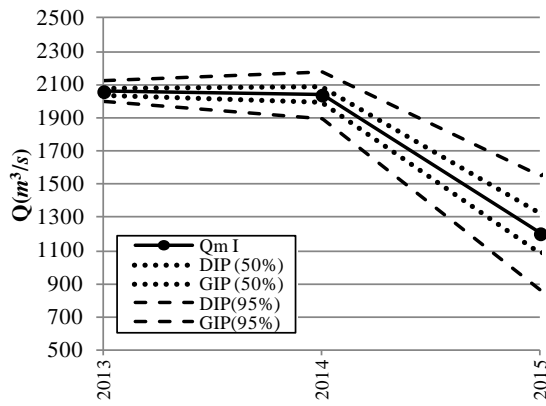
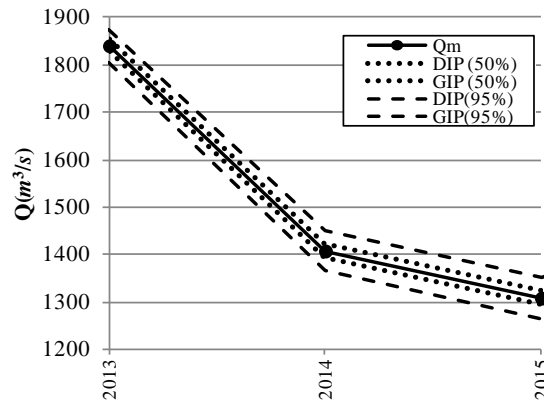
G14.1 r. Dunav, st. Oršava



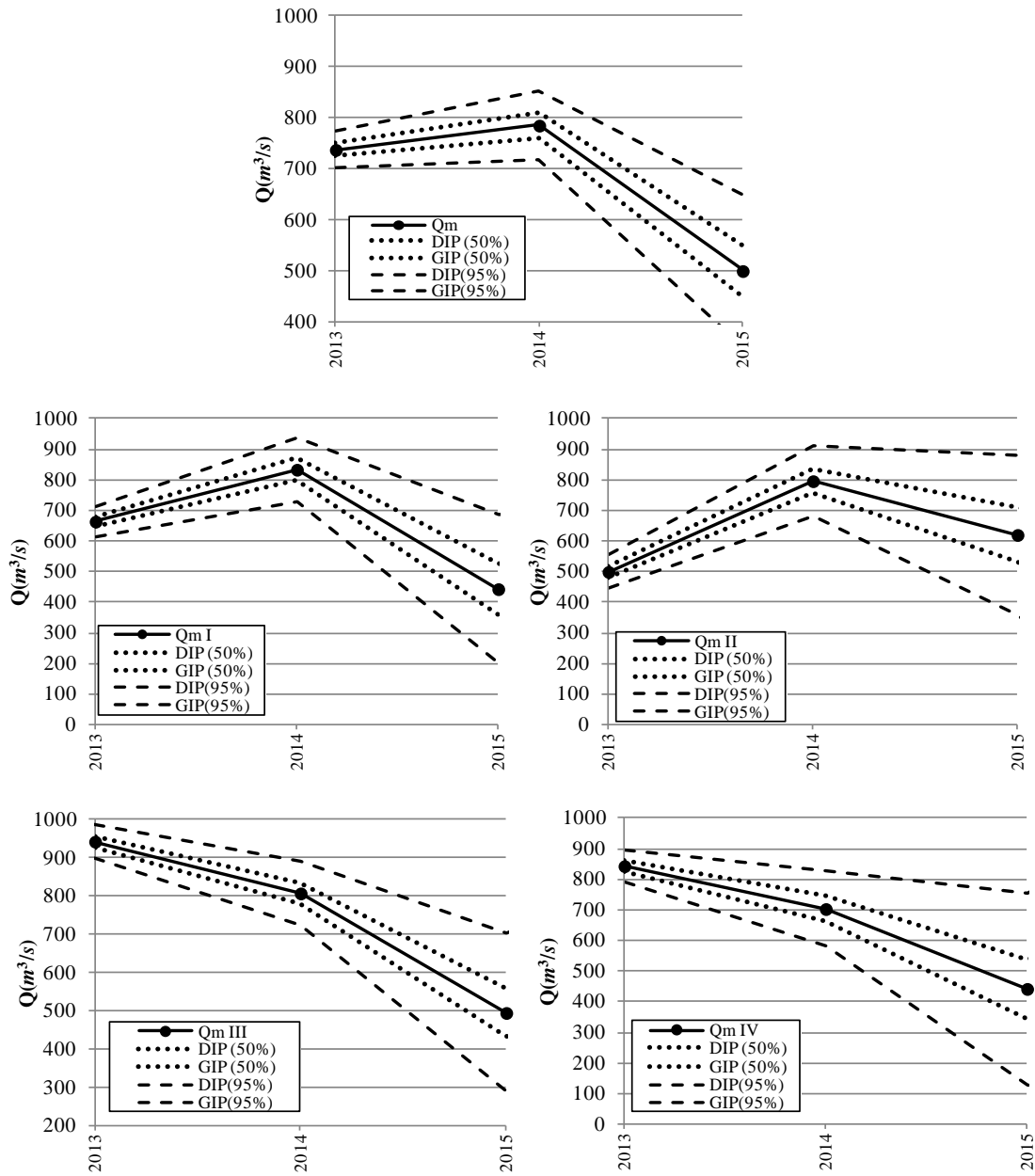
G14.2 r. Dunav, st. Bogojevo



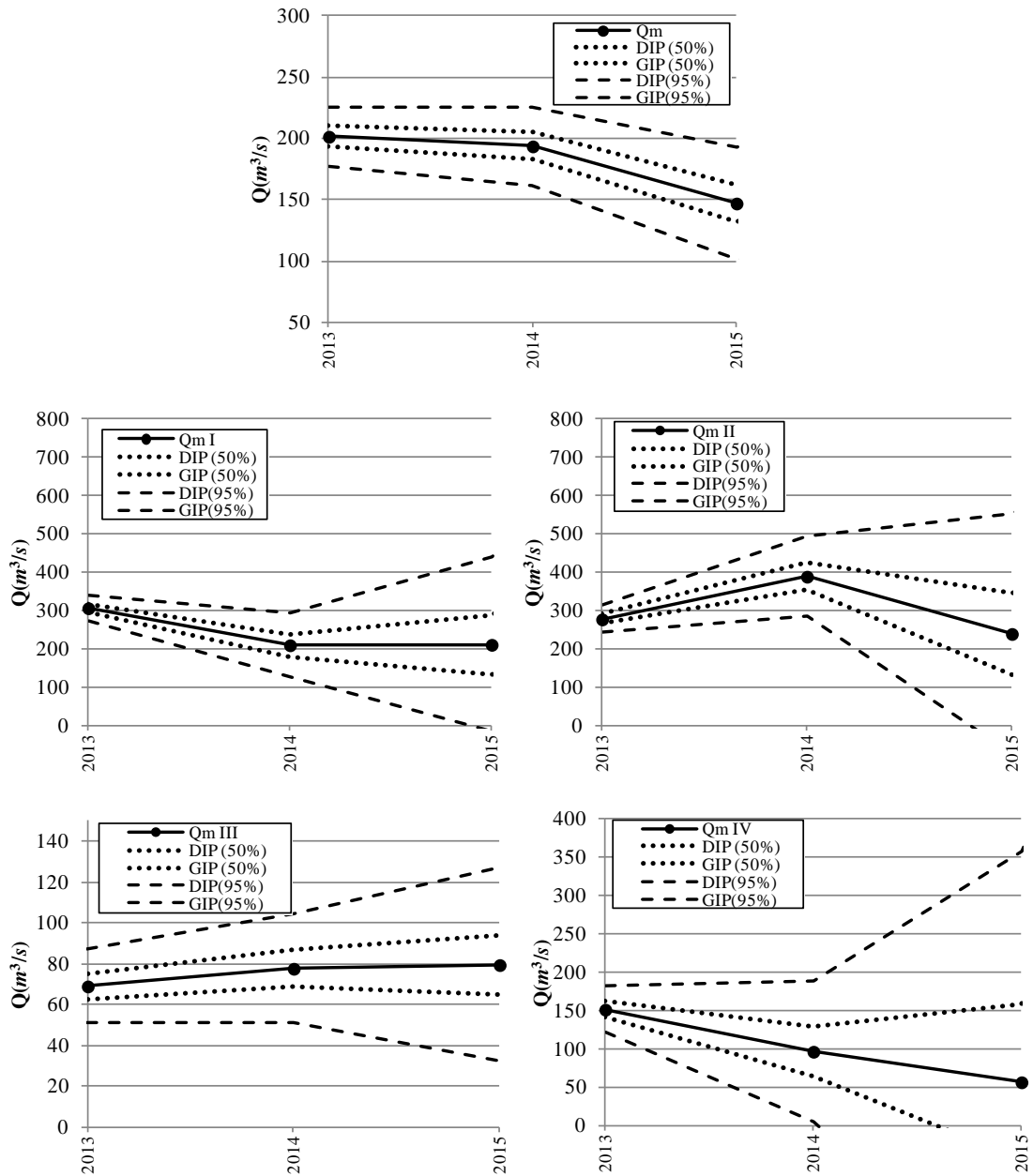
G14.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



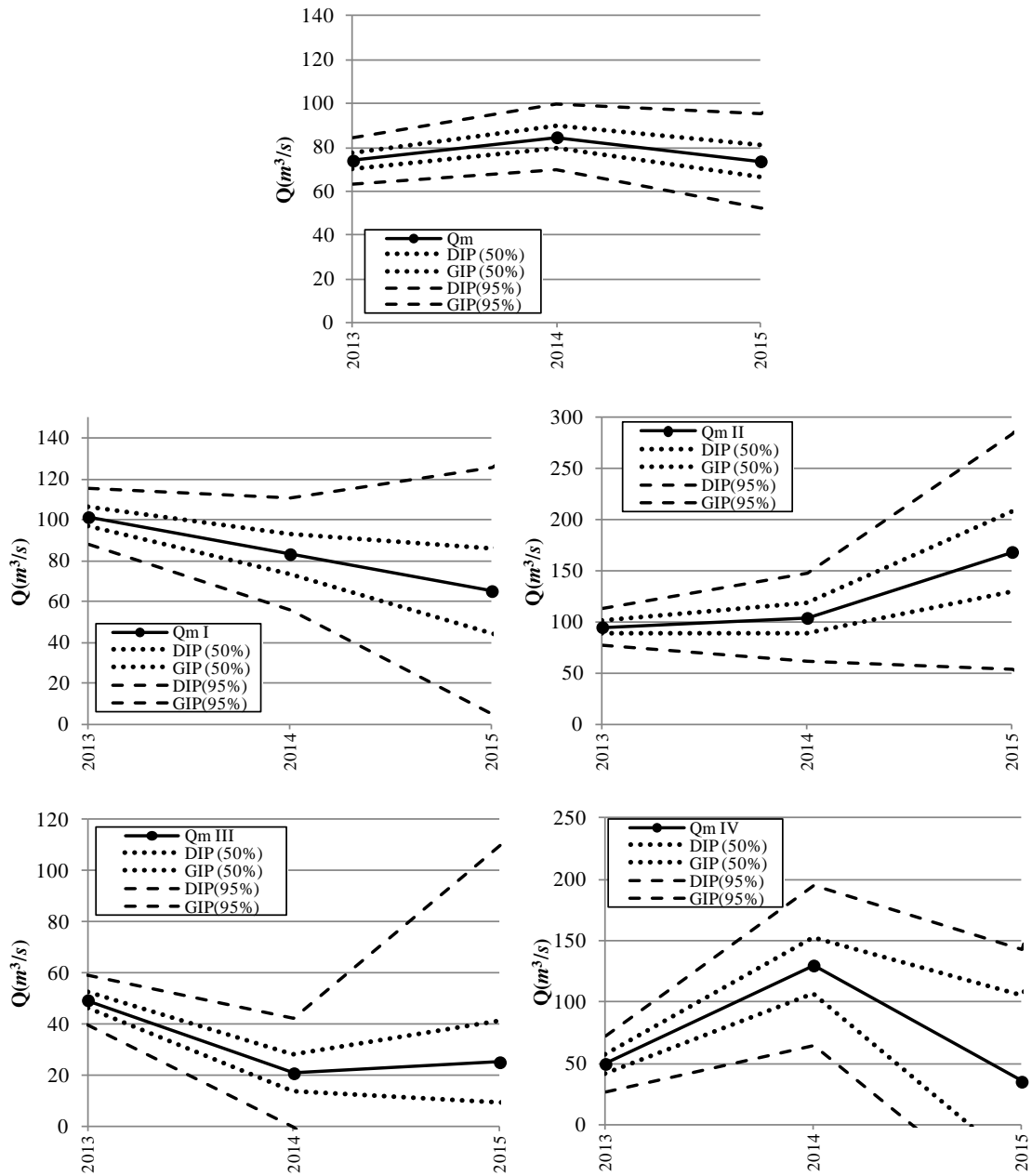
G14.4 r. Tisa, st. Senta



G14.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most



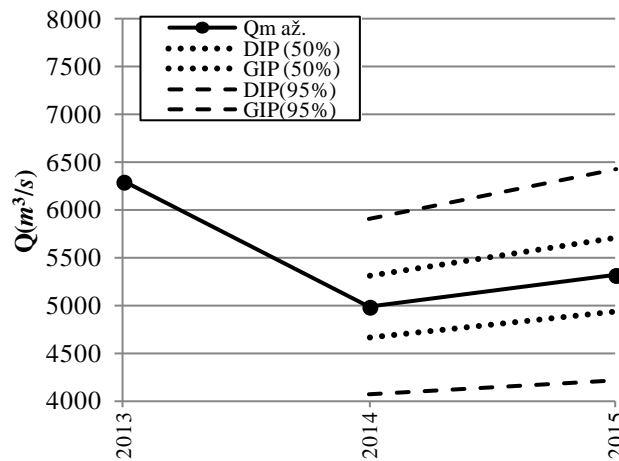
G14.6 r. Lim, st. Prijepolje



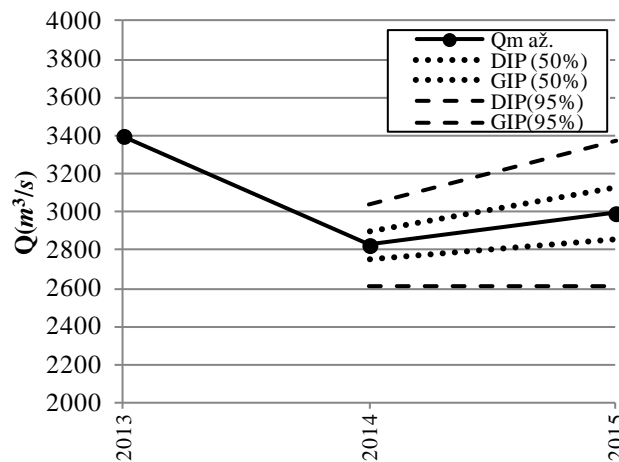


## G-15 Ažurirane kratkoročne projekcije srednjih godišnjih i sezonskih proticaja po modifikovanoj TIPS metodi

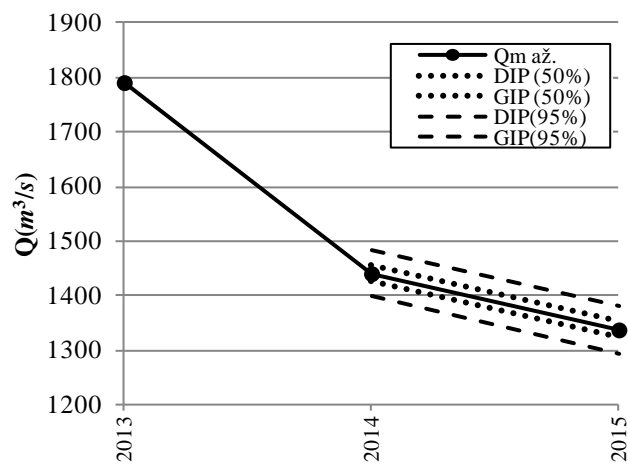
### G15.1 r. Dunav, st. Oršava



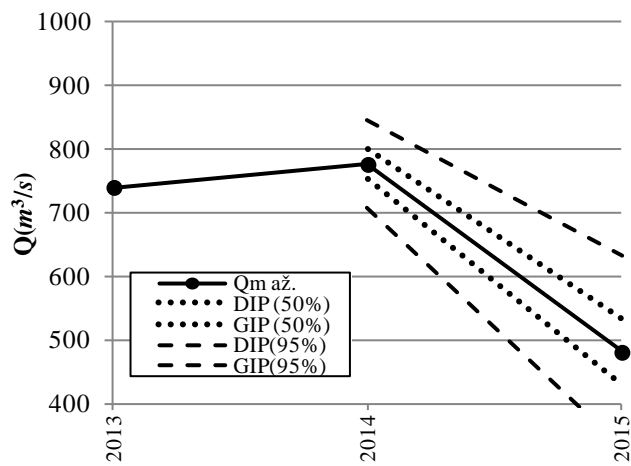
### G15.2 r. Dunav, st. Bogojevo



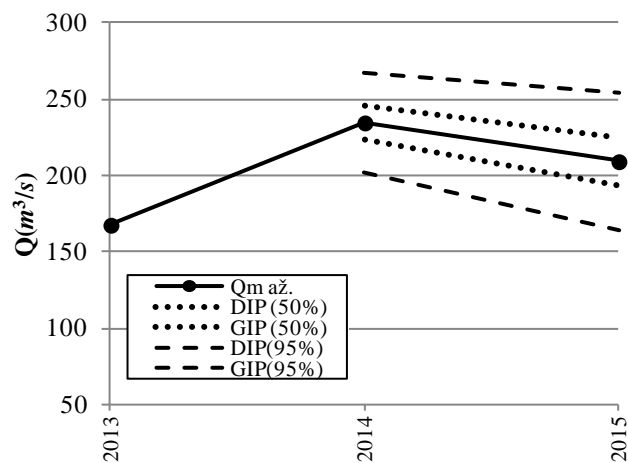
G15.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



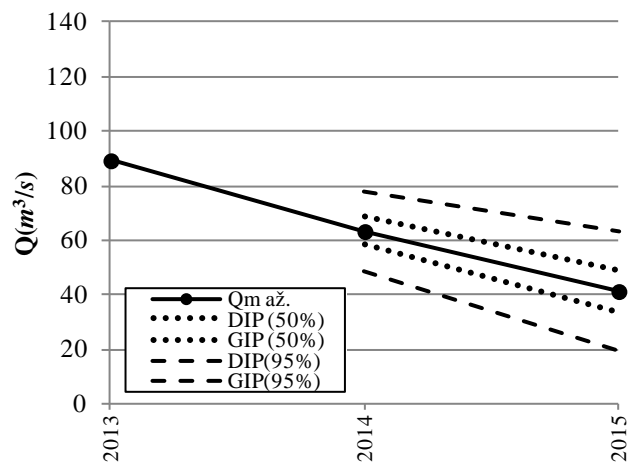
G15.4 r. Tisa, st. Senta



G15.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

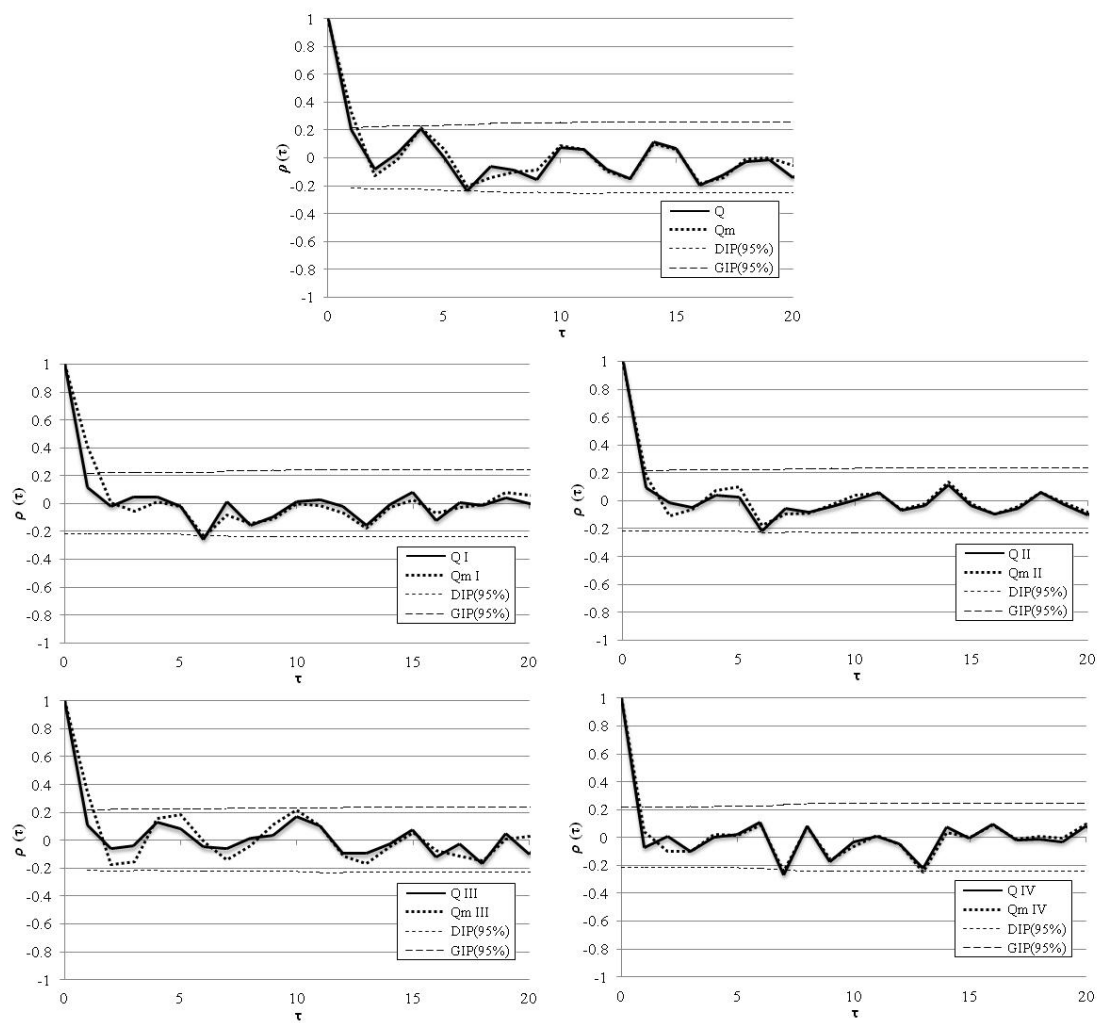


G15.6 r. Lim, st. Prijepolje

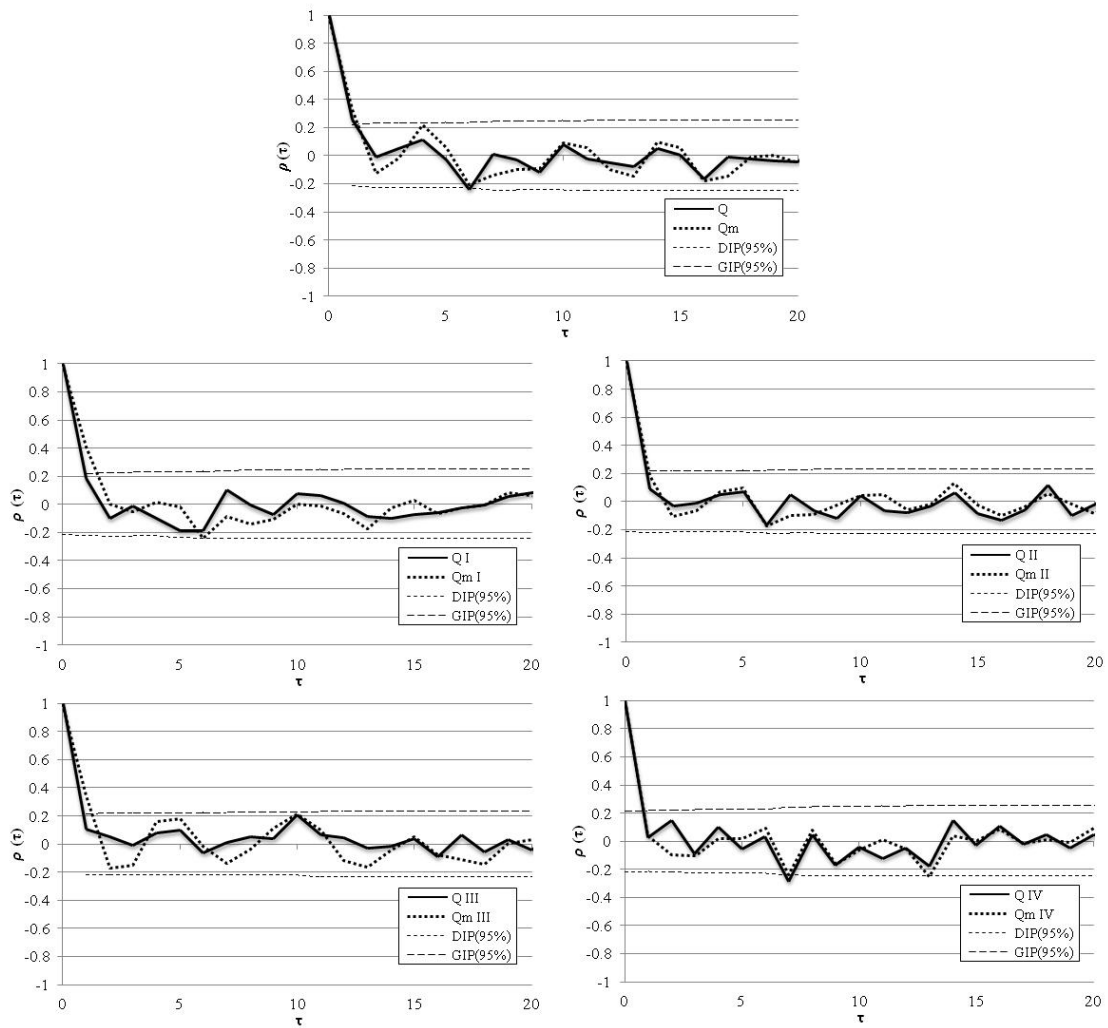


## G-16 Verifikacija rezultata modifikovane TIPS metode korišćenjem autokorelacione funkcije

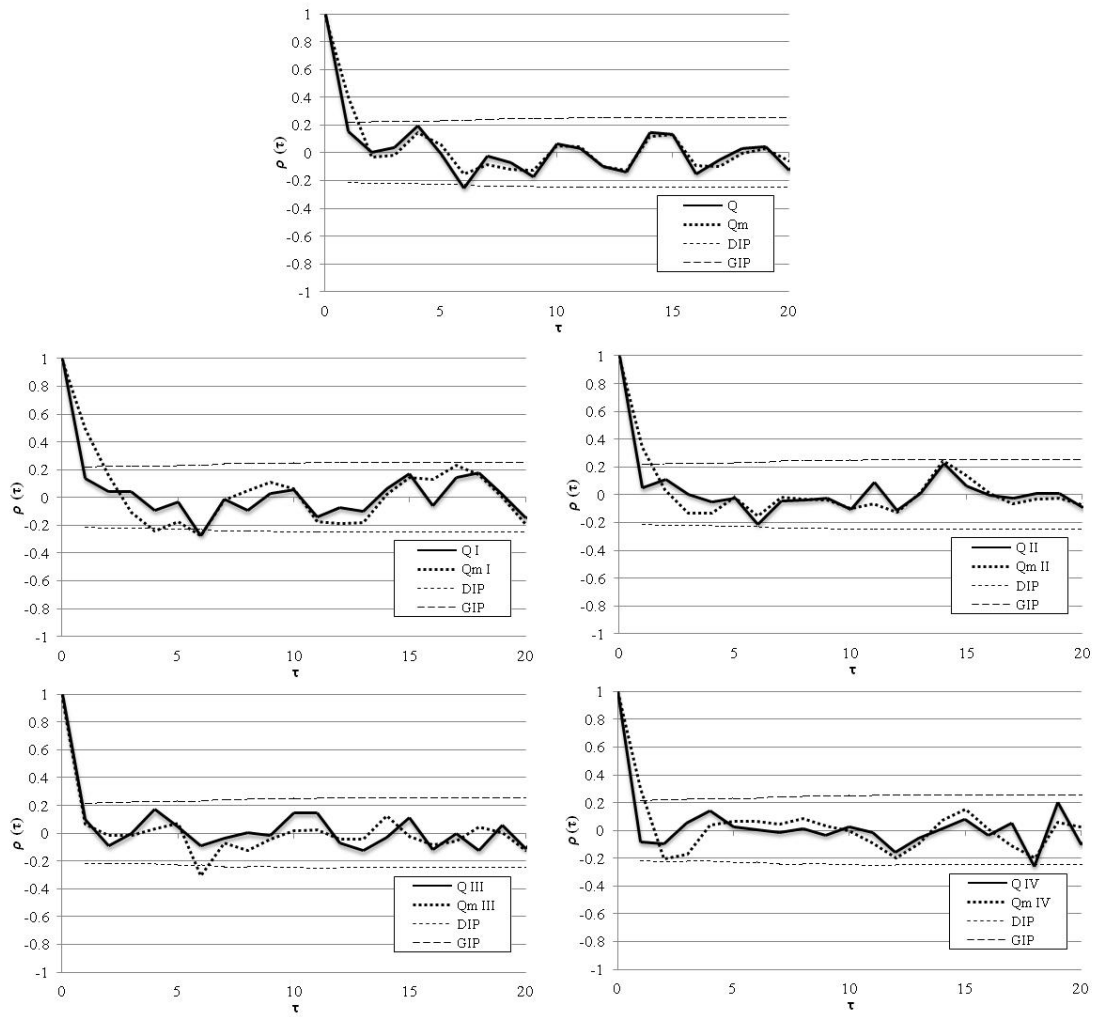
G16.1 r. Dunav, st. Oršava



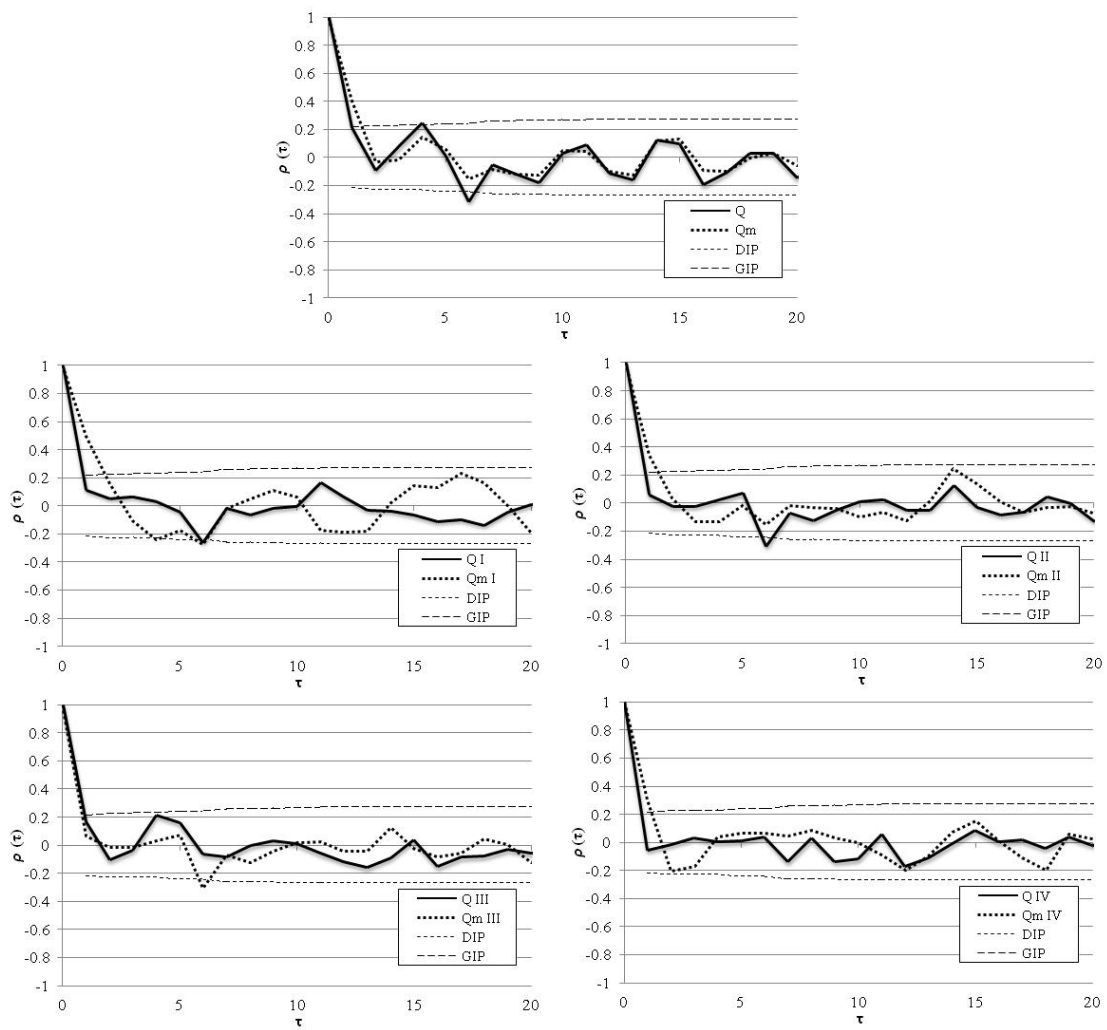
G16.2 r. Dunav, st. Bogojevo



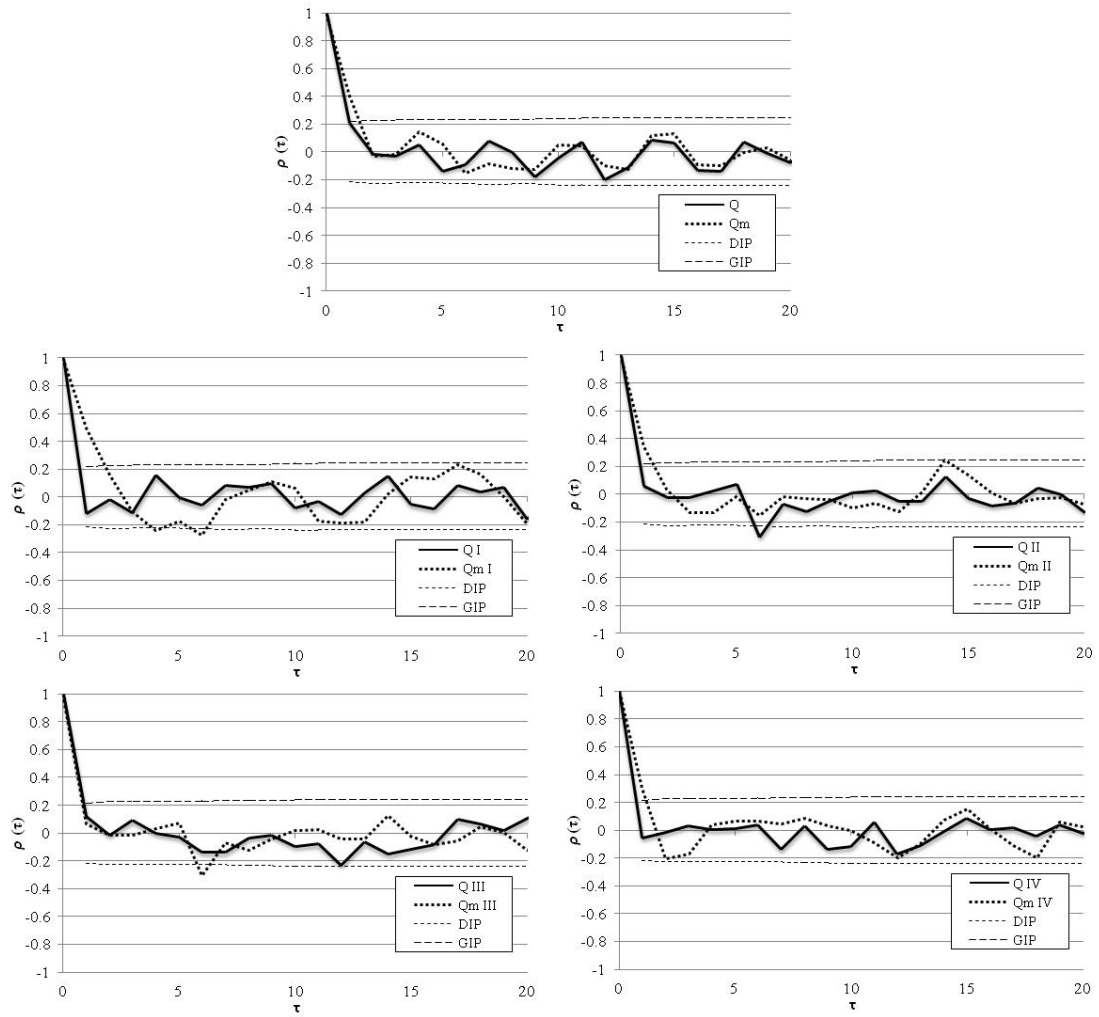
G16.3 r. Sava, st. Sremska Mitrovica



G16.4 r. Tisa, st. Senta

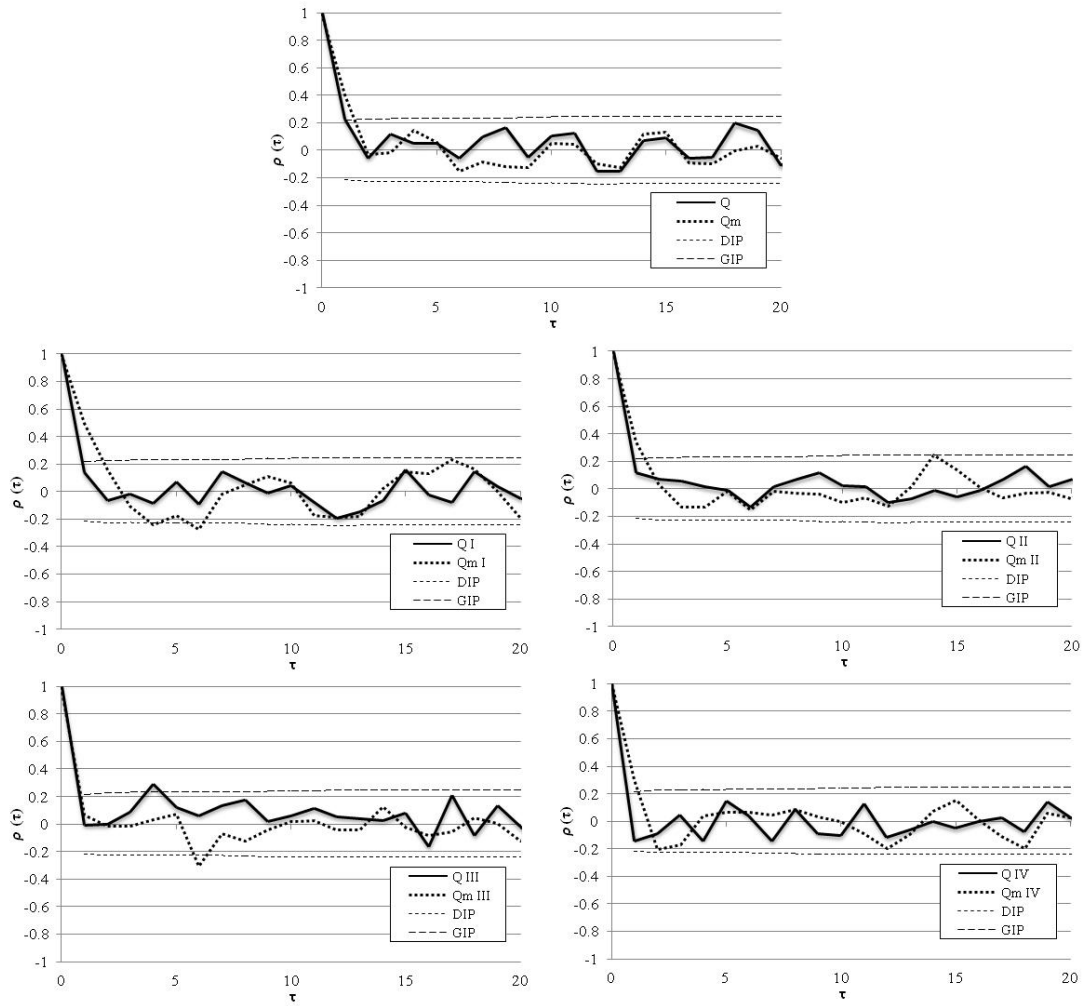


G16.5 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most





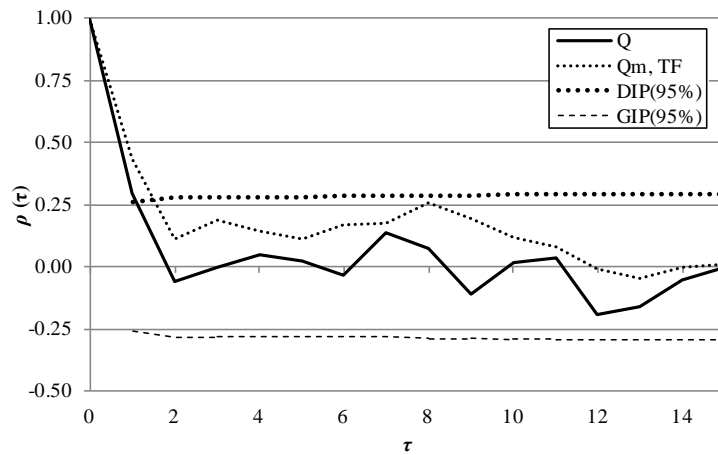
G16.6 r. Lim, st. Prijepolje



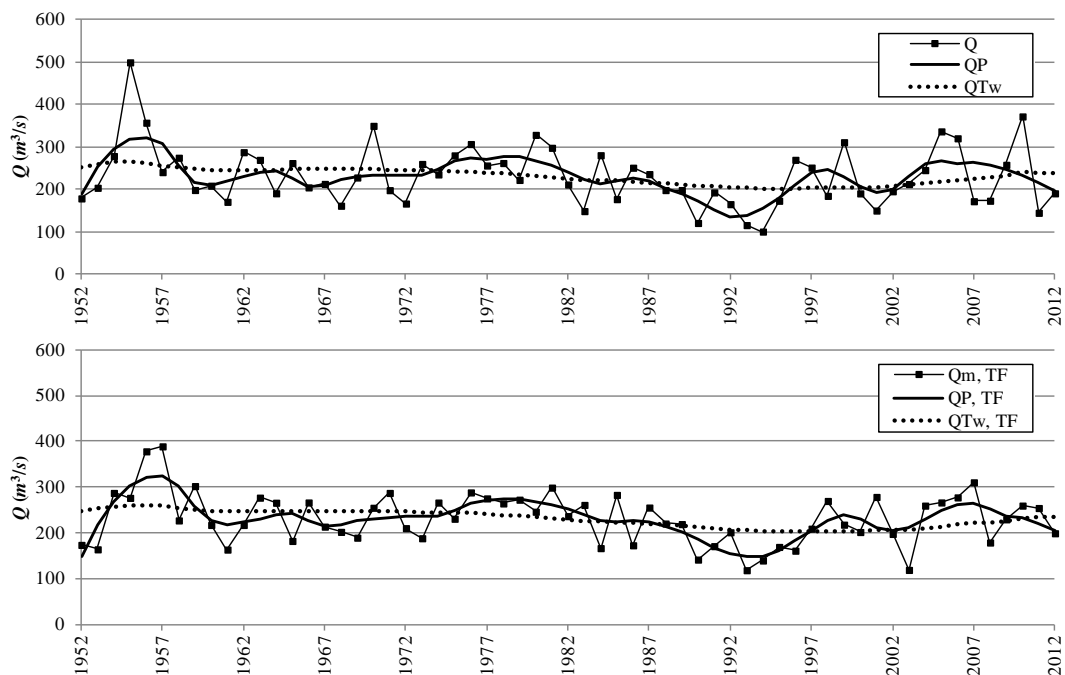
## G-17 Verifikacija *inicijalnog* hidrološkog modela za dugoročne projekcije godišnjeg proticaja

### G17.1 r. Velika Morava, st. Ljubičevski Most

#### (1) Autokorelaciona funkcija modeliranih i osmotrenih godišnjih proticaja

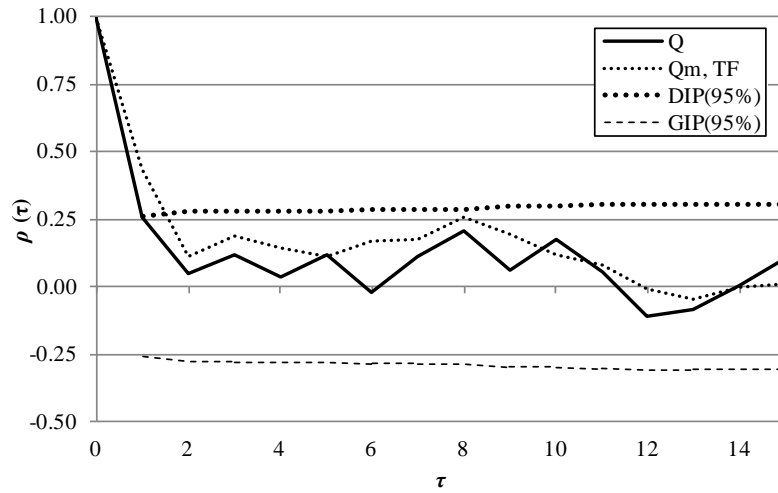


#### (2) Modelirani i osmotreni godišnji proticaji, makroperioda i nelinearni trend

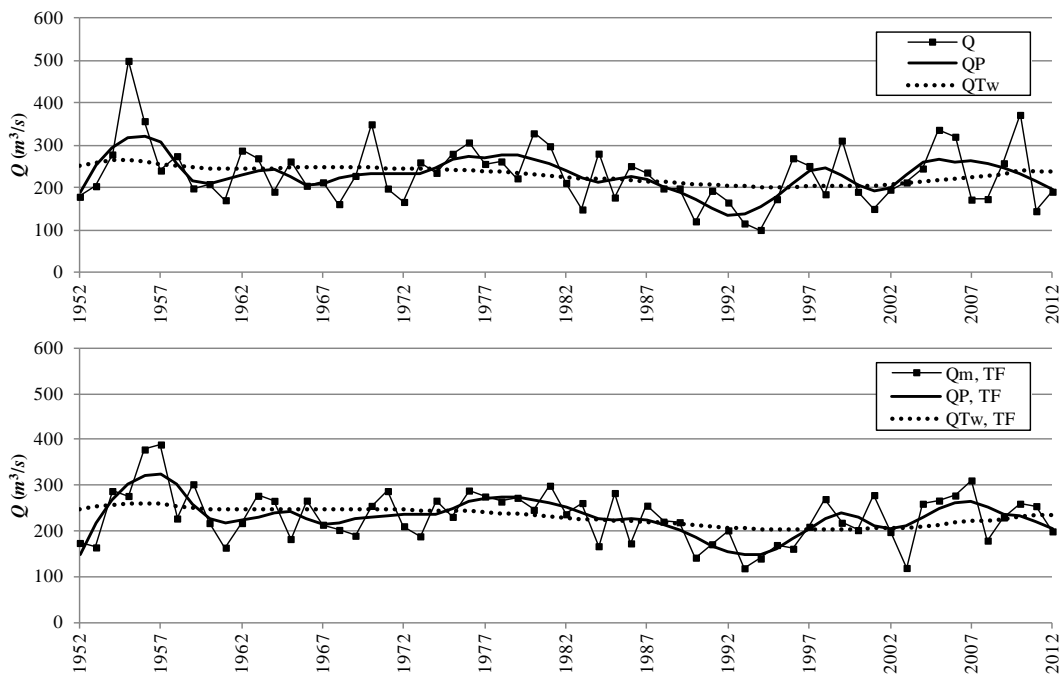


G17.2 r. Lim, st. Prijepolje

(1) Autokorelaciona funkcija modeliranih i osmotrenih godišnjih proticaja

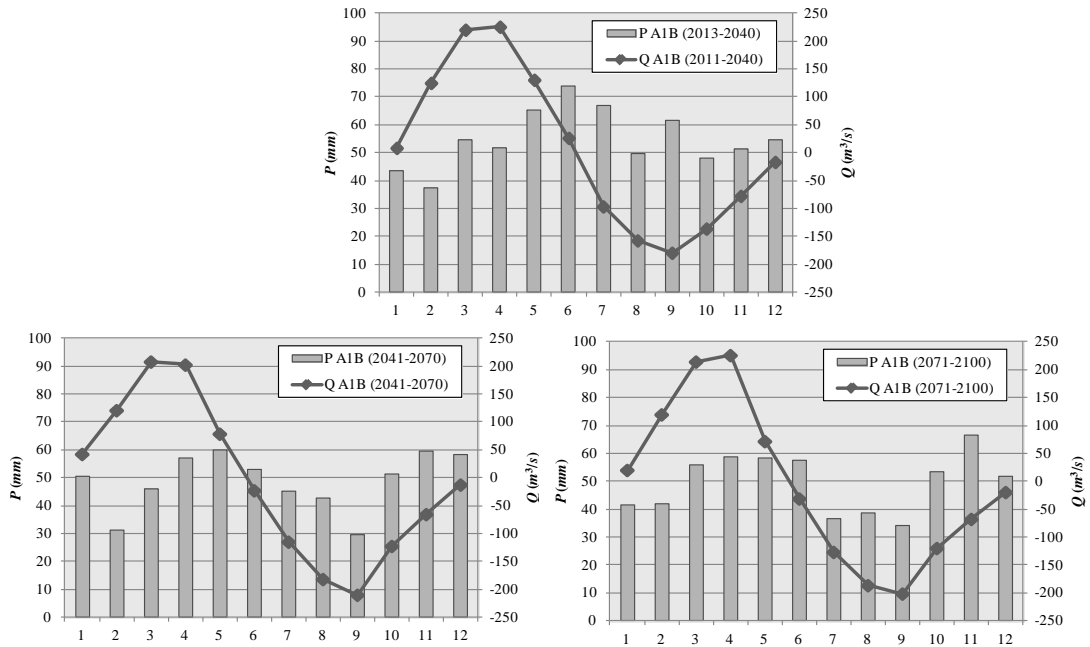


(2) Modelirani i osmotreni godišnji proticaji, makroperioda i nelinearni trend

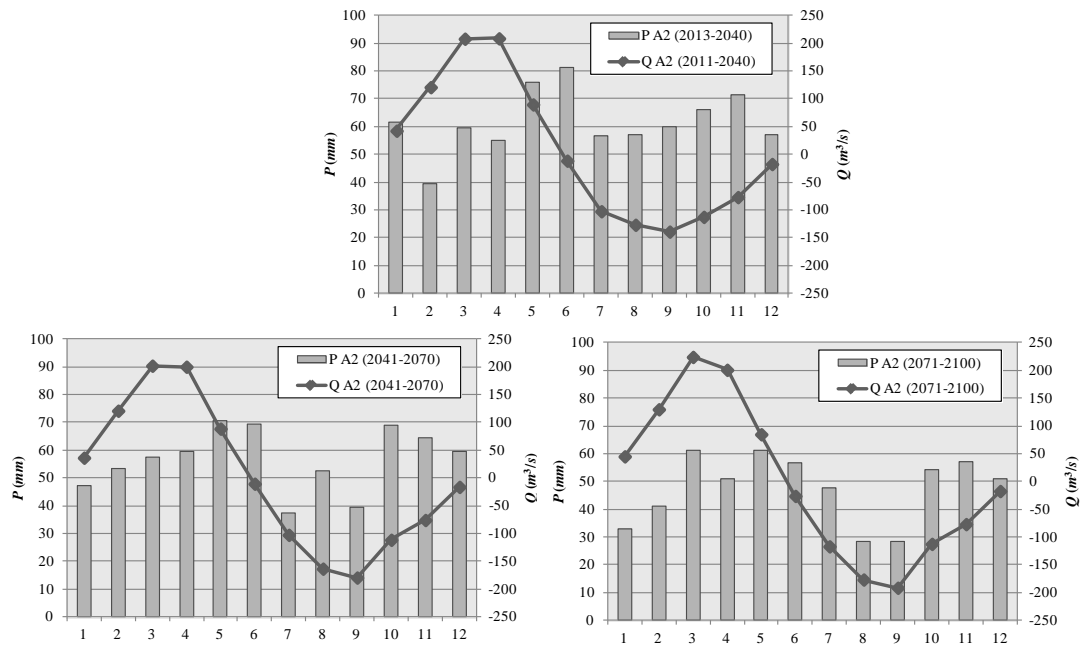


## G-18 Sezonska komponenta i mesečne padavine iz klimatskog EBU-POM modela za period 2013-2100.

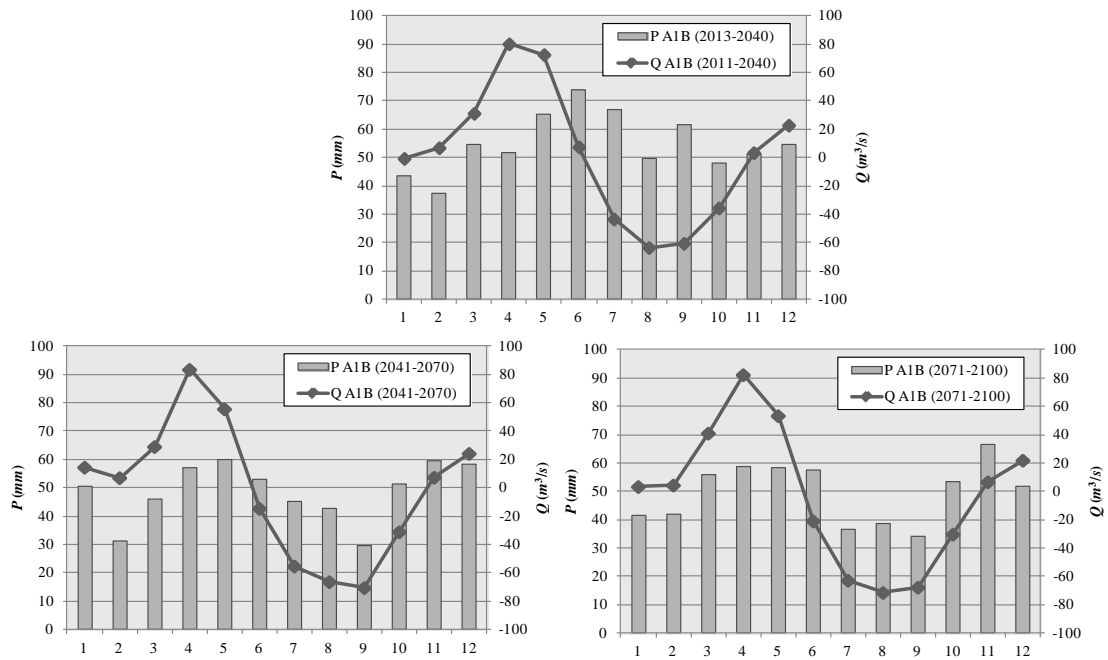
### G18.1 Velike Morava, st. Ljubičevski Most, scenarijo A1B



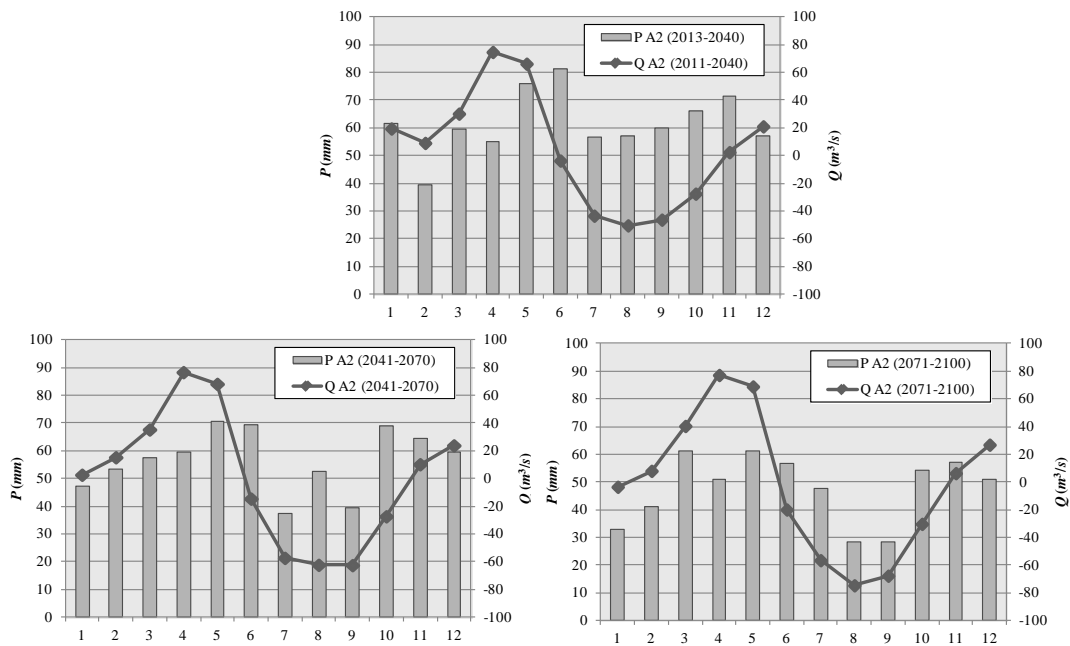
### G18.2 Velike Morava, st. Ljubičevski Most, scenarijo A2



**G18.3 Lim, st. Pijepolje, scenarijo A1B**

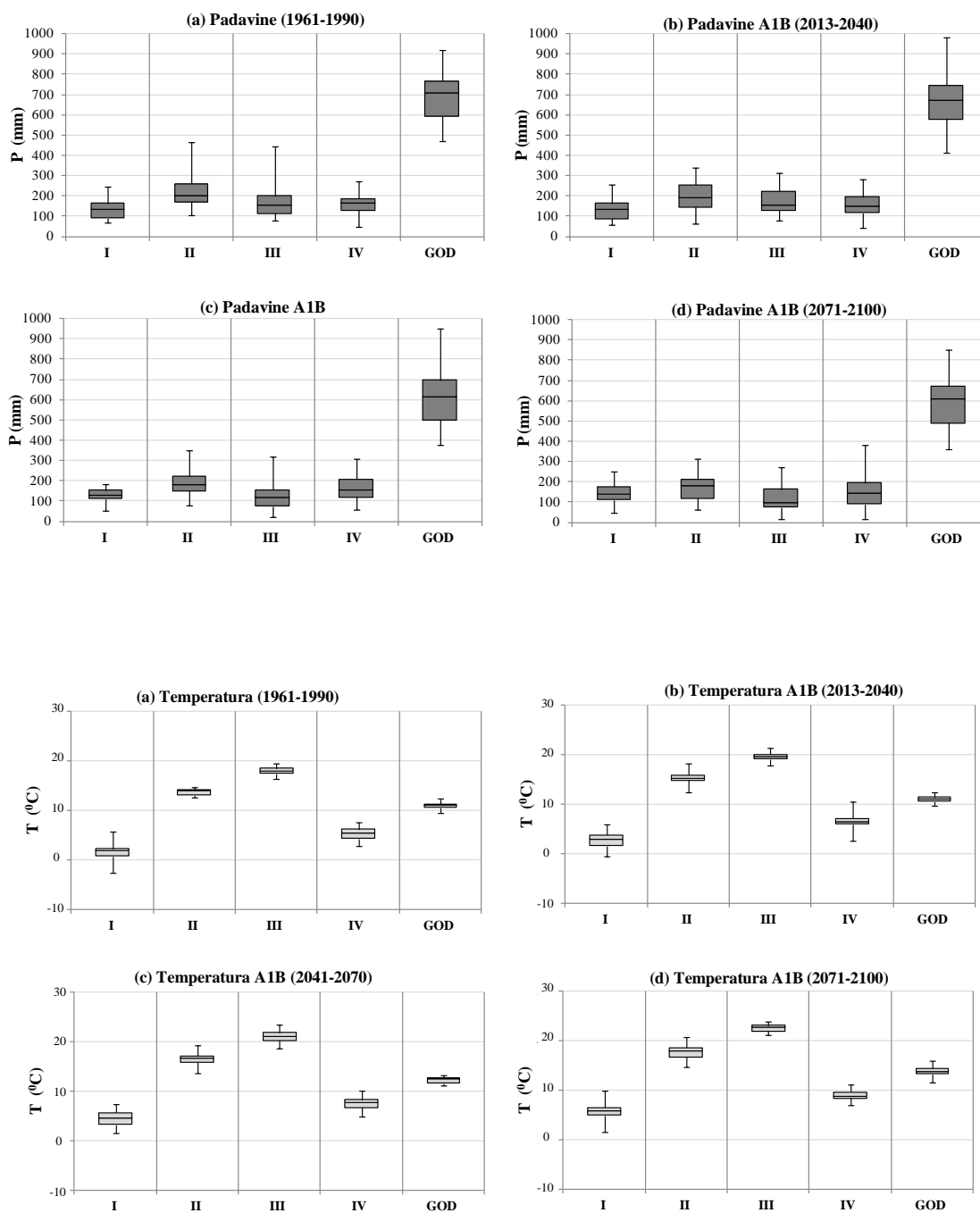


**G18.4 Lim, st. Pijepolje, scenarijo A2**

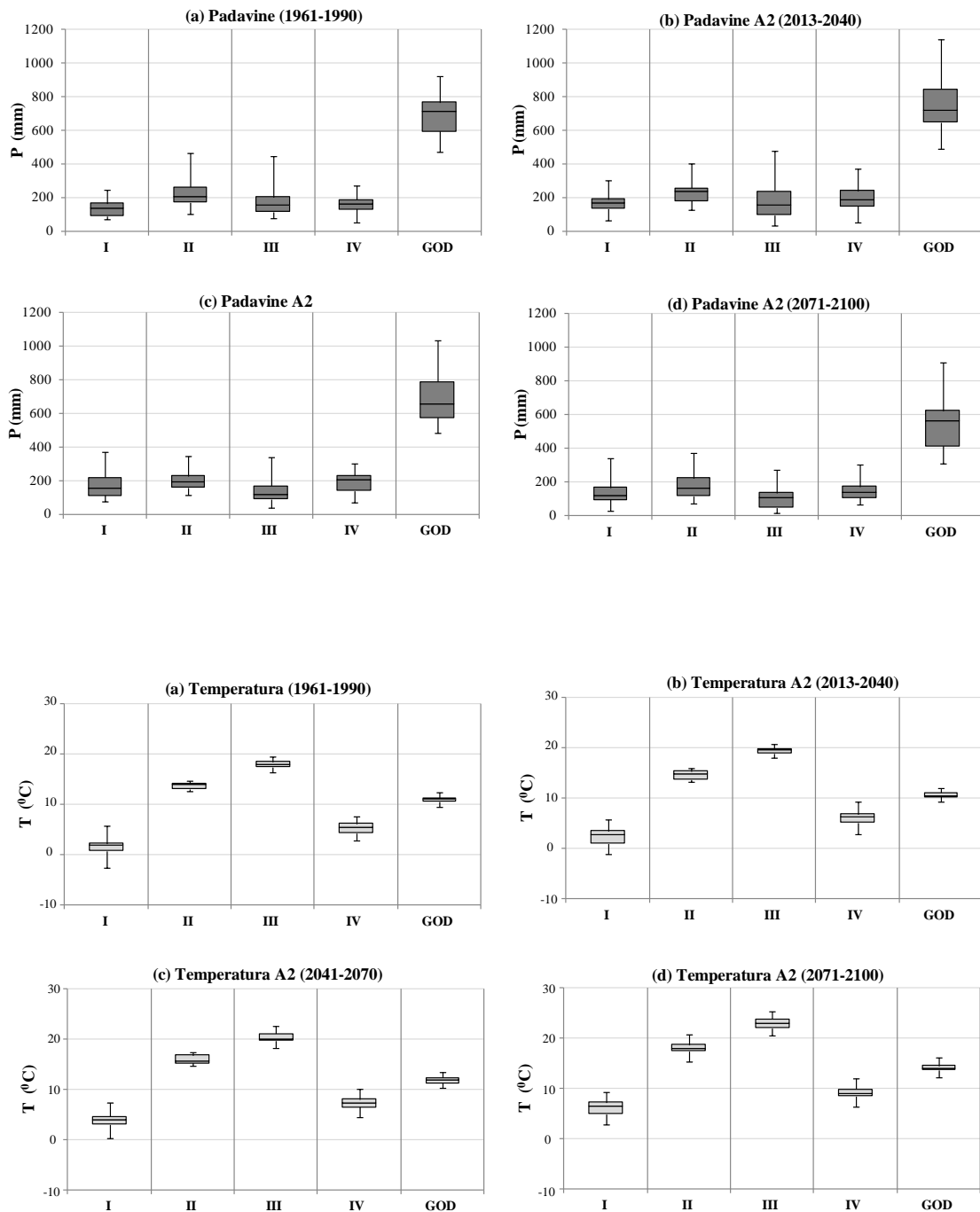


## G-19 Dugoročne projekcije sezonskih i godišnjih padavina i temperatura

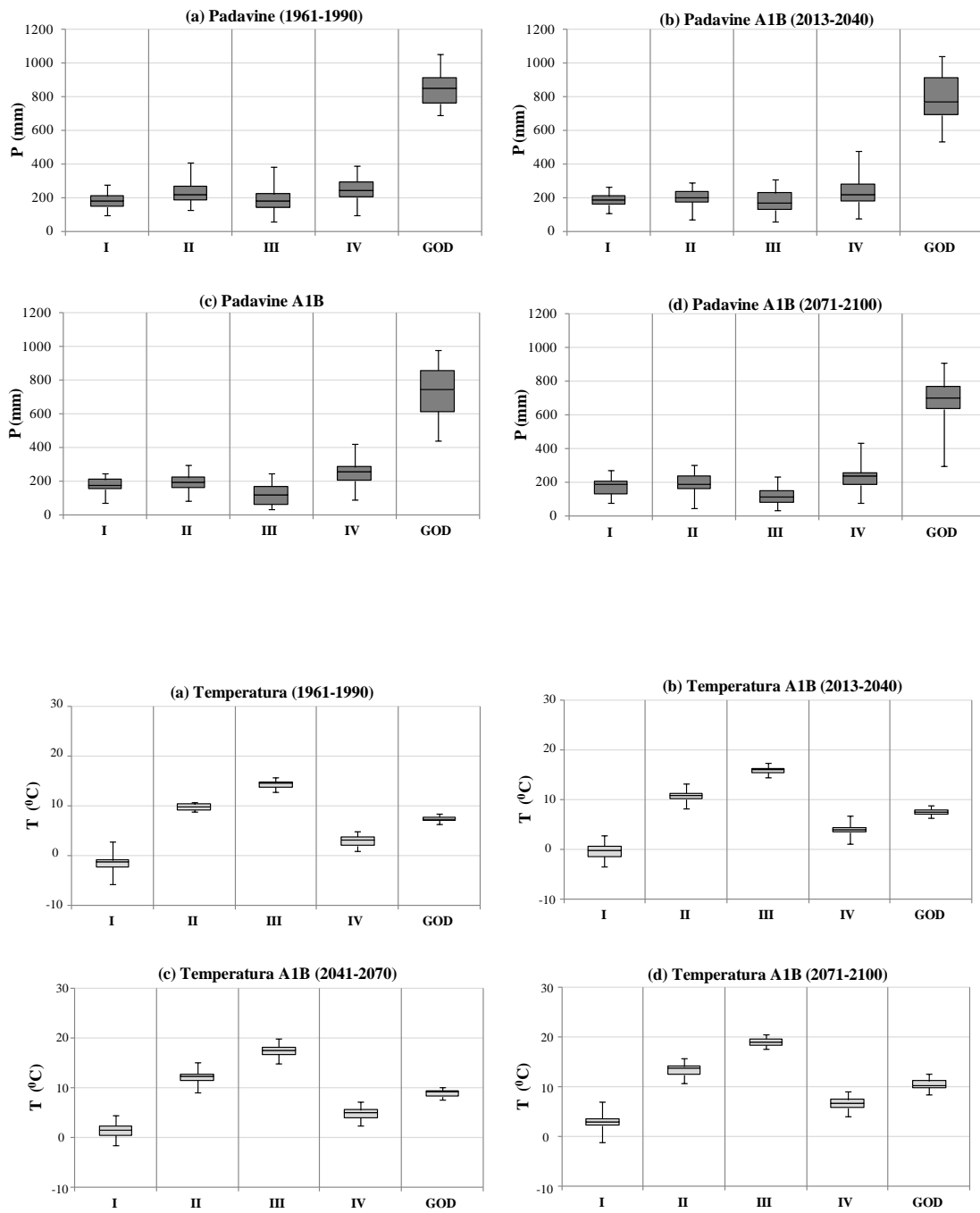
### G19.1 Velike Morava, st. Ljubičevski Most, A1B



G19.2 Velike Morava, st. Ljubičevski Most, A2

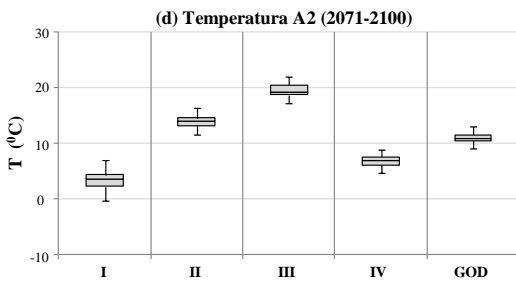
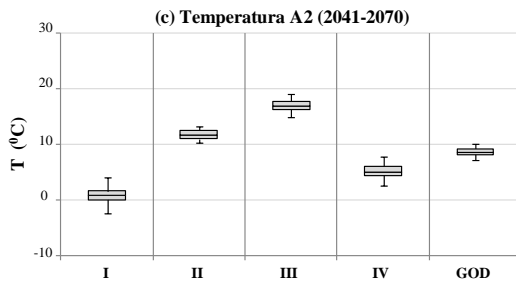
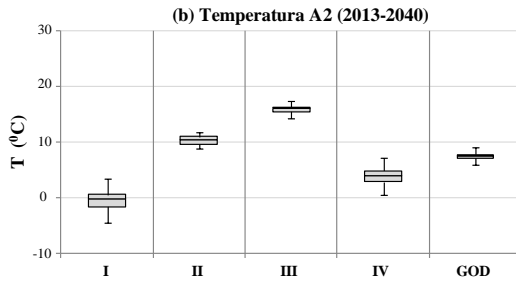
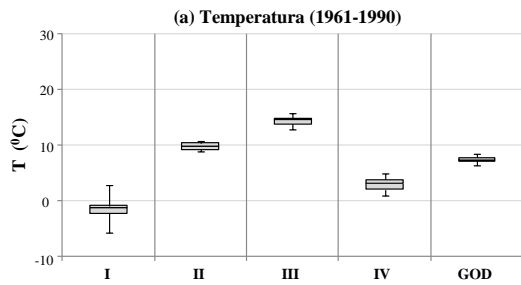
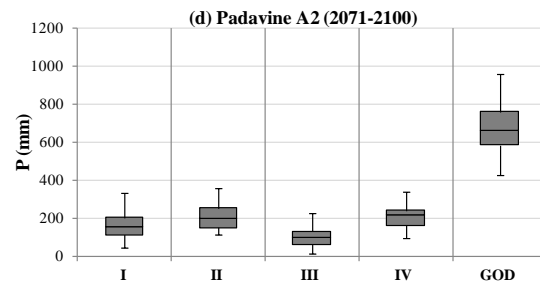
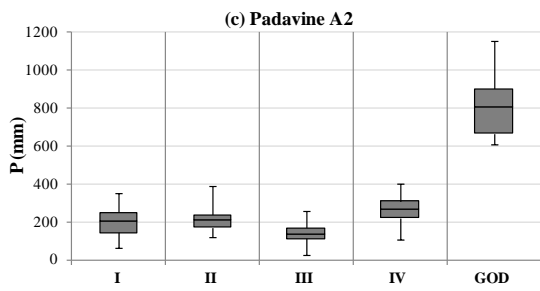
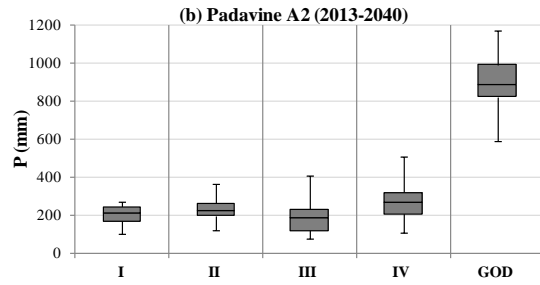
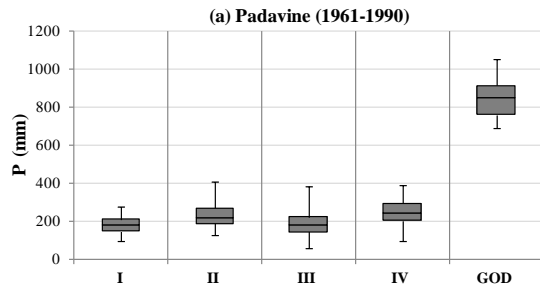


**G19.3 Lim, st. Prijepolje, scenarijo A1B**



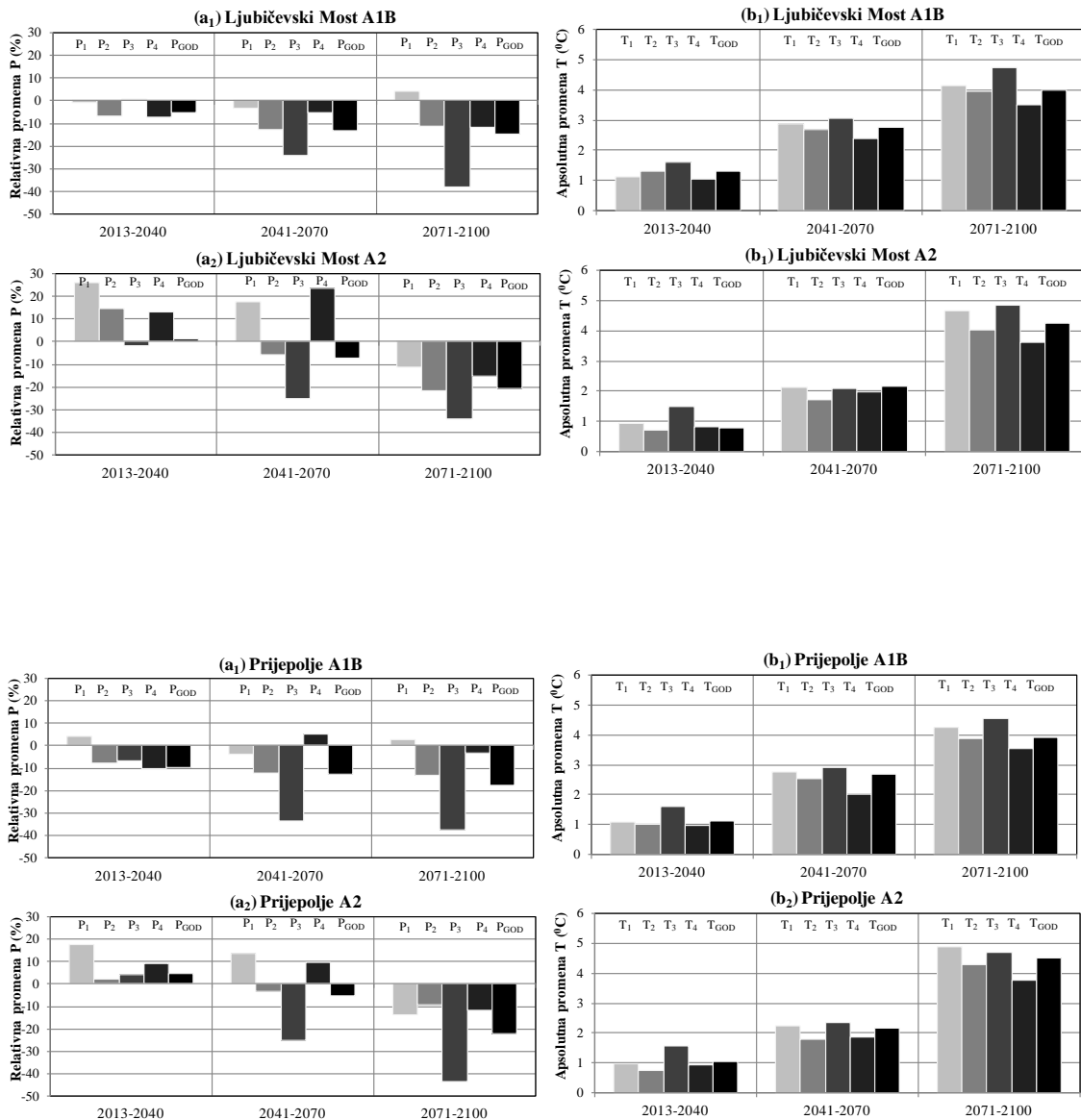


G19.4 Lim, st. Prijepolje, scenarijo A2



## G-20 Promene projekcija godišnjih i sezonskih padavina i temperatura (2013-2100) u odnosu na referentni period (1961-1990)

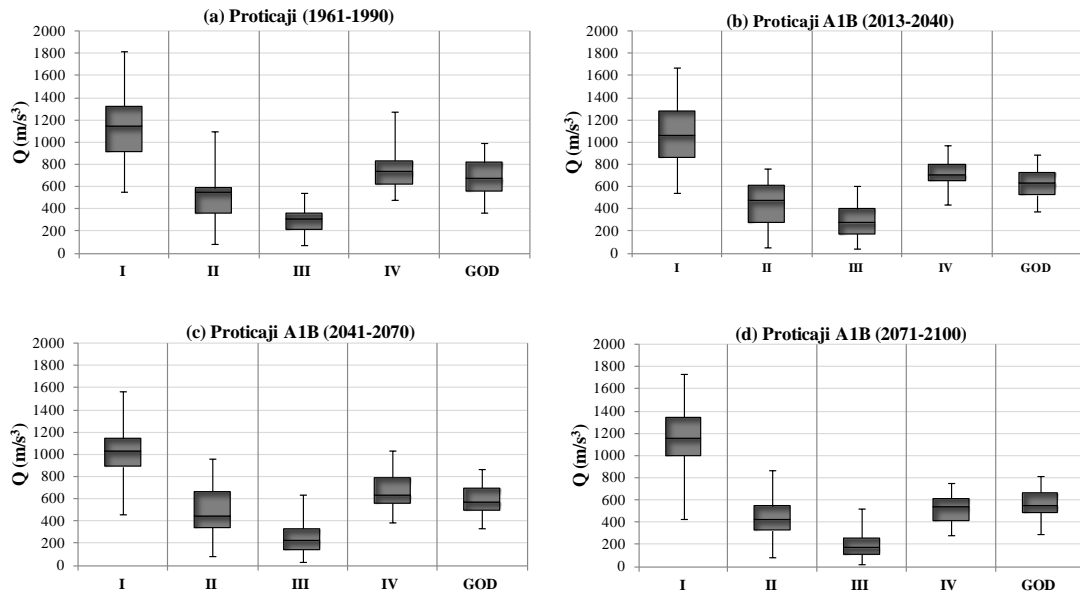
(Promene padavina i temperatura iskazane su u relativnim i apsolutnim vrednostima korišćenjem sezonskih i godišnjih medijana tokom perioda 2013-2040, 2041-2070, 2071-2100 u odnosu na korespondentne medijane tokom perioda 1961-1990)



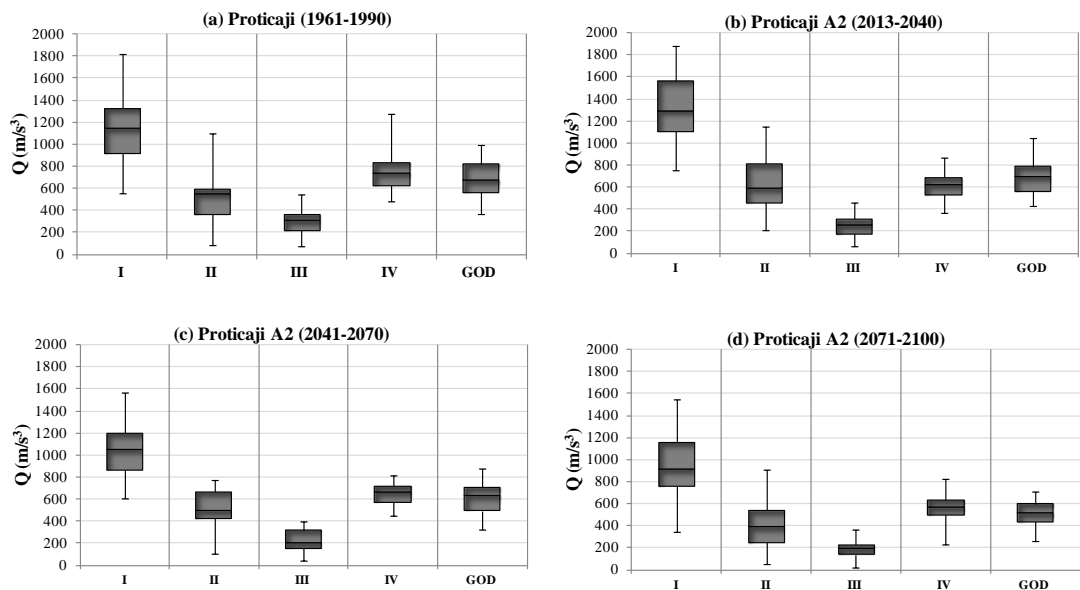
## G-21 Projekcije godišnjih i sezonskih proticaja (2013-2100)

(Promene proticaja iskazane su u relativnim vrednostima korišćenjem sezonskih i godišnjih medijana tokom perioda 2013-2040, 2041-2070, 2071-2100 u odnosu na korespondentne medijane tokom perioda 1961-1990)

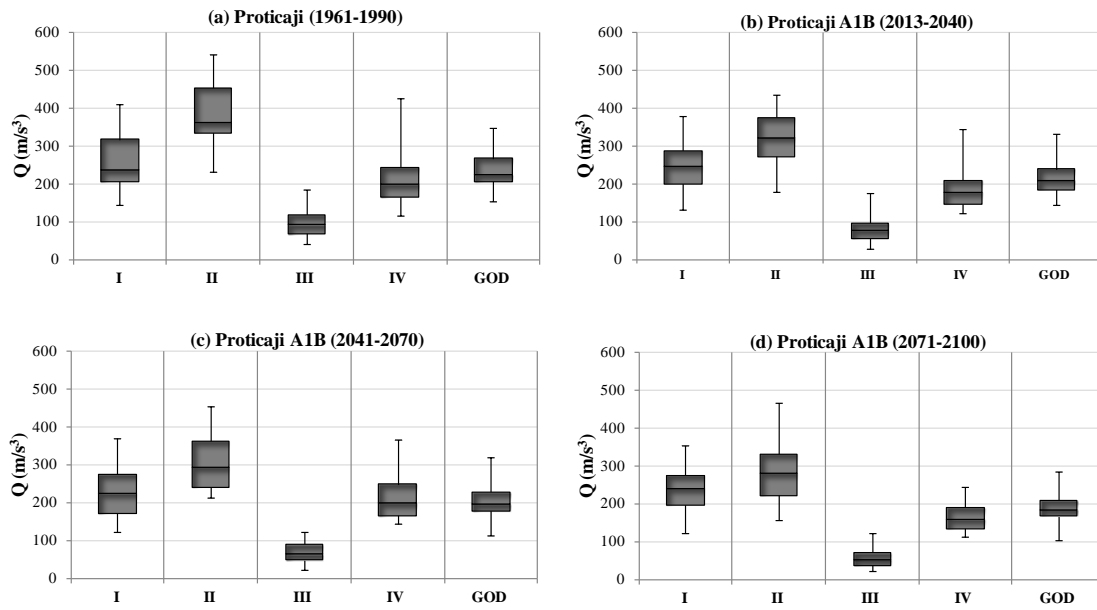
### G21.1 Velike Morava, st. Ljubičevski Most, A1B



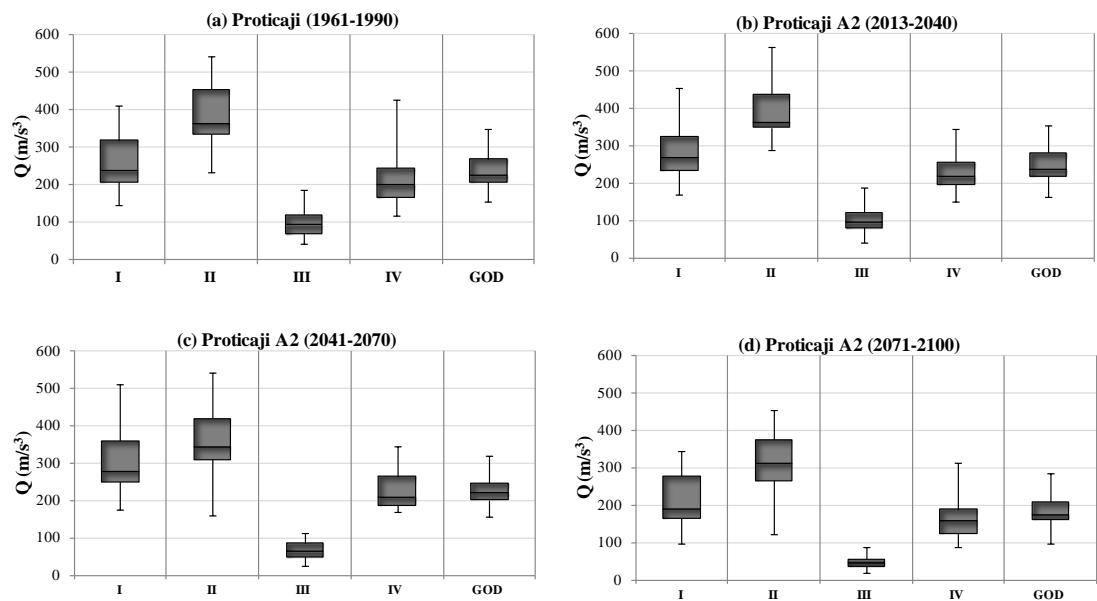
### G21.1 Velike Morava, st. Ljubičevski Most, A2



**G21.3 Lim, st. Prijepolje, scenarijo A1B**



**G21.4 Lim, st. Prijepolje, scenarijo A2**



---

## Biografija

Autor doktorske disertacije Milan Stojković rođen je 18.09.1984. godine u Leskovcu gde je završio osnovnu školu i gimnaziju, smer prirodno-matematički. Građevinsko - Arhitektonski fakultet u Nišu, hidrotehnički smer, upisao je 2003. godine. Diplomirao je 2009. godine sa opštom prosečnom ocenom 8.71. Po završetku redovnih studija, školske 2009/2010. upisao je doktorske studije na Građevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Tokom 2009. godine započeo je rad po ugovoru o delu u Institutu za vodoprivredu „Jaroslav Černi“, gde u oktobru 2009. godine zasniva radni odnos. U 2010. godini po odluci Naučnog veća Instituta izabran je u zvanje istraživača saradnika, a 2013. godine je reizabran u isto zvanje. U periodu od 2010. do 2015. godine, autor doktorske disertacije je bio angažovan na projektima tehnološkog razvoja podržanih od strane Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije: „Ocena uticaja klimatskih promena na vodne resurse Srbije (TR 37005)“, „Razvoj sistema za podršku optimalnom održavanju visokih brana u Srbiji (TR 37013)“. Pored učešća u naučnim projektima, autor doktorske disertacije bio je angažovan na izradi hidroloških modela i hidroloških studija u Srbiji i okruženju.

Tokom izrade doktorske disertacije Milan Stojković je objavio oko 20 radova u međunarodnim i domaćim časopisima, a svoj rad izlagao je na naučnim skupovima od međunarodnog i nacionalnog značaja. Autor doktorske disertacije je publikovao dva rada u časopisima sa SCI liste (M21 i M22), a u toku je proces publikovanja i ostalih radova iz doktorske disertacije. U svom radu se služi engleskim jezikom.

Značajni radovi:

Stojković M., Ilić A., Prohaska S., Plavšić J. 2014. *Multi-Temporal Analysis of Mean Annual and Seasonal Stream Flow Trends, Including Periodicity and Multiple Non-Linear Regression*, Water Resources Management, 28 (12): 4319–4335.

(M21 IF (2014)=2.600)

Stojković M., Prohaska S., Plavšić J. 2015. *Stochastic structure of annual discharges of large European rivers*, Journal of Hydrology and Hydromechanics. 63 (1): 63-70.

(M22 IF (2014)=1.555)

U Beogradu, jun 2015.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-ја MILAN STOJKOVIĆ  
број уписа 904/09

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Dugoročne promene u STOHAŠTIČKOJ STRUKTURI  
hidroloških vremenskih serija

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 19. 06. 2015. год

Milan Stojković

Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора MILAN STOJKOVIĆ

Број уписа 904109

Студијски програм GRAĐEVINARSTVO

Наслов рада DUGOROČNE PROMENE U STOHAŠTIČKOJ STRUKTURI  
METEOROLOŠKIH VREMENSKIH SERIJA

Ментор DR. JASNA PLAŠIĆ, VAND. PROF.

Потписани Milan Stojković

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 19.06.2015. год.

Milan Stojković

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Dugoročne promene u stohastičkoj strukturi hidrotlošnih vremenskih serija

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

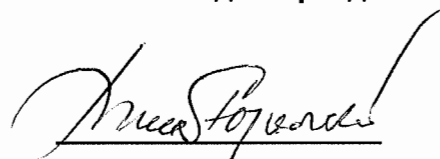
Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 19.06.2015. год.





1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.